



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Objetos tilting relativos en categorías abelianas

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALEJANDRO ARGUDÍN MONROY

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ
Instituto de Matemáticas, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
Dra. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ
Departamento de Matemáticas, UNAM
Dr. VALENTE SANTIAGO VARGAS
Departamento de Matemáticas, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., FEBRERO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	11
1.1. Homología relativa	12
1.1.1. Caracterizando las clases $\mathcal{T}$ tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$	16
1.1.2. Teoremas estilo Auslander-Buchweitz	18
1.2. Propiedades restringidas de pares de cotorsión	22
1.3. Más resultados de Auslander-Buchweitz	28
1.4. La clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(M)$	48
2. Clases n-$\mathcal{X}$-tilting	53
2.1. Tilting restringido a una clase	54
2.1.1. Resultados elementales de los axiomas de n - $\mathcal{X}$ -tilting	57
2.1.2. Propiedades básicas de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting	66
2.1.3. Condiciones alternativas a (T3)	72
2.2. n - $\mathcal{X}$ -tilting y objetos compactos	79
2.3. Triples n - $\mathcal{X}$ -tilting	86
2.4. Clases tilting determinadas por clases gruesas	103
3. Ejemplos y aplicaciones	111
3.1. Objetos ∞ -tilting	111
3.2. Tilting de Miyashita	113
3.3. Tilting de Miyashita para módulos de tipo $\mathcal{FP}_n$	120
3.4. Tilting en categorías exactas	125
3.5. La teoría tilting relativa de S. K. Mohamed	141
3.6. Clases tilting en categorías de funtores	149
3.7. Módulos silting y objetos n - $\mathcal{X}$ -tilting	154
3.8. Módulos n -silting y complejos tilting	167
A. Categorías abelianas	189
A.1. Nociones básicas	189
A.2. Diagramas de pushout y pullback	195
A.3. Lema de la serpiente y diagramas relacionados	197
A.4. Extensiones	203
A.4.1. Extensiones de longitud 1	204

A.4.2. Extensiones de longitud n	212
A.4.3. Funtorialidad y la sucesión exacta larga del Ext	227
A.4.4. El Ext y coproductos finitos	234
A.5. Categorías abelianas con estructura adicional	241
A.5.1. Límites y colímites	242
A.5.2. Categorías Ab3 y Ab4	244
A.5.3. El Ext, productos y coproductos	246
A.6. Una caracterización de las categorías Ab4	253
Bibliografía	259
Nomenclatura	265
Índice alfabético	269

Introducción

La teoría tilting es una herramienta del álgebra moderna, que surgió originalmente en el estudio de categorías de módulos sobre álgebras de dimensión finita. A grandes rasgos, esta teoría consiste en el estudio de ciertos objetos, llamados módulos tilting, los cuales nacieron con el propósito de responder preguntas sobre el anillo a través de su anillo de endomorfismos. Con esta simple idea, la teoría tilting se ha convertido en una herramienta importante en diferentes áreas de las matemáticas, como la teoría de representaciones de álgebras, la teoría de grupos, la geometría algebraica y la topología algebraica [AHHK07, Gre01, Mat98, BH13].

En los últimos 40 años, la teoría tilting ha cambiado de diferentes maneras a otros contextos con diferentes propósitos. Sheila Brenner y Michael C.R. Butler introdujeron la noción original en [BB80], su objetivo era estudiar ciertas equivalencias y su relación con formas cuadráticas. Posteriormente, surge una definición más general, por Dieter Happel y Claus Michael Ringel [HR82], con el objetivo de obtener una visión más completa de los objetos tilting. Poco después, Yoichi Miyashita extendió la teoría aún más, cambiando de una definición con dimensión proyectiva menor o igual a 1, a una que admitiera dimensión proyectiva finita [Miy86]. Más adelante, se pasó del contexto de módulos finitamente generados al de infinitamente generados sobre anillos arbitrarios, como es el caso del trabajo de Lidia Angeleri Hügel y Flávio Ulhoa Coelho [AHUC01].

Unos autores han presentado definiciones tilting especiales para trabajar con subcategorías exactas de las categorías de módulos finitamente generados, éste es el caso de Maurice Auslander, Øyvind Solberg y Soud K. Mohamed [AS93b, Moh09]. Otros autores han desarrollado teorías tilting en contextos diferentes a categorías de módulos, como es el caso de Roberto Martínez Villa y Martín Ortiz Morales, que presentaron una serie de artículos en el contexto de categorías de funtores [MVOM11, MVOM13, MVOM14]. En ocasiones encontraremos teorías en las que se estudian categorías tilting en lugar de objetos tilting, esto con el objetivo de simplificar las construcciones involucradas en la teoría, como es el caso del trabajo de Octavio Mendoza Hernández y Corina Sáenz Valadez [MS06], así como el reciente trabajo de Bin Zhu y Xiao Zhuang [ZZ20]. Otras líneas de investigación recientes, incluyen una definición de objeto tilting en categorías abelianas arbitrarias [PŠ19b] y objeto tilting de dimensión proyectiva infinita [PŠ19a] por Leonid Positselski y Jan Št'ovíček.

Como se puede ver, los años han dado origen a una basta familia de teorías bajo

el nombre de *tilting*. Podemos dividir burdamente en dos esta familia de teorías: los objetos tilting *pequeños* y los objetos tilting *grandes*.

Los objetos tilting pequeños son aquellos cuya teoría se puede describir con coproductos finitos. Como ejemplos de éstos, podemos pensar en la definición clásica de Brenner-Butler, el trabajo de Happel-Ringel, el de Miyashita, las teorías relativas de Auslander-Solberg y todas las demás teorías que se desarrollan en la categoría de módulos finitamente generados sobre una álgebra de Artin. También podemos encontrar teorías fuera de las categorías de módulos, como son las clases tilting definidas en una categoría de funtores por R. Martínez Villa y M. Ortiz Morales.

Los objetos tilting grandes son aquellos cuya teoría no se puede describir sin coproductos arbitrarios. Este tipo de teorías surgieron cuando los trabajos de Brenner-Butler, Happel-Ringel, Ibrahim Assem [Ass84], y Sverre O. Smalø [Sma84] fueron extendidos al entorno de módulos infinitamente generados sobre anillos arbitrarios por los trabajos de Robert R. Colby, Kent R. Fuller, Riccardo Colpi, Gabriella D’Este, Alberto Tonolo, Jan Trlifaj, L. Angeleri Hügel y F. Ulhoa Coelho [AHUC01, CF90, CDT97, CTT97, CT95, AHTT01]. Recientemente, han surgido este tipo de objetos tilting en categorías abelianas con coproductos, como se puede ver en el trabajo de L. Positseslki, J. Št’oviček, Pedro Nicolás, Manuel Saorín y Alexandra Zvonareva [NSZ19, PŠ19b].

Esta tesis pretende introducir herramientas nuevas que nos permitan comprender mejor el fenómeno tilting. Dichas herramientas serán, por un lado, nuevas nociones de (co)resoluciones relativas y generalizaciones de teoremas del tipo Auslander-Buchweitz; y por otro lado, una noción de tilting relativo que englobe todas las nociones antes citadas. Para vislumbrar un poco mejor este objetivo, cabe remarcar en las siguientes líneas los puntos en común de las teorías tilting que estudiaremos para alcanzar nuestro cometido. Es conveniente recordar la siguiente notación antes de proceder a ello. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana (o bien una categoría exacta) y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Denotaremos por $\mathcal{X}^\vee$ a la clase de objetos $C \in \mathcal{C}$ que admiten una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow 0$$

con $X_i \in \mathcal{X} \forall i \in [0, n]$. Definimos dualmente la clase $\mathcal{X}^\wedge$. Para $T \in \mathcal{C}$, denotaremos por $\text{Add}(T)$ ($\text{add}(T)$) a la clase de objetos que son sumandos directos de un coproducto $T^{(X)}$ con X arbitrario (finito).

La correspondencia de Auslander-Reiten

En un principio, los objetos tilting fueron introducidos en el contexto de módulos finitamente generados sobre álgebras de dimensión finita. La teoría, en este contexto, avanzó rápidamente y se generalizó de manera natural al contexto de módulos finitamente generados sobre un álgebra de Artin (ver 3.6). Decimos que un anillo Λ es

una k -álgebra de Artin si es un módulo finitamente generado sobre un anillo conmutativo artinianiano k . Denotaremos por $\text{mod}(\Lambda)$ a la categoría de Λ -módulos finitamente generados.

Uno de los usos que se le da a los objetos tilting es el estudio de las equivalencias categóricas que inducen. En esta tesis nos enfocaremos principalmente en la relación que tienen los objetos tilting con las subcategorías covariantemente o contravariantemente finitas. Estas nociones fueron introducidas por M. Auslander y S. Smalø en [AS80, AS81].

A saber, una subcategoría $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ es **covariantemente (contravariantemente) finita** en $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ si todo $M \in \mathcal{C}$ admite un morfismo $\alpha : M \rightarrow X$ ($\alpha : X \rightarrow M$), con $X \in \mathcal{X}$, tal que $\text{Hom}_\Lambda(\alpha, X')$ ($\text{Hom}_\Lambda(X', \alpha)$) es suprayectiva para todo $X' \in \mathcal{X}$. Una clase es **funtorialmente finita** si es covariante y contravariantemente finita. Cabe decir que estas nociones se han extendido a otros contextos resultando ser un concepto fundamental en el estudio y desarrollo del álgebra homológica y la teoría de categorías.

M. Auslander e Idun Reiten fueron los primeros en estudiar la relación entre los objetos tilting finitamente generados y las subcategorías covariantemente (contravariantemente) finitas en [AR91, AR92]. Uno de los resultados principales de estos trabajos es que un módulo $T \in \text{mod}(\Lambda)$ es tilting si, y sólo si, $T^\perp := \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_\Lambda^i(T, X) = 0 \forall i > 0\}$ es covariantemente finita en $\text{mod}(\Lambda)$ y $\text{mod}(\Lambda) = (T^\perp)^\vee$ [AR92, Theorem 4.4]. Más aún, se mostró que existe una correspondencia biyectiva entre las iso-clases de los objetos tilting básicos y clases covariantemente finitas en $\text{mod}(\Lambda)$, como se enuncia a continuación.

Teorema 0.1 (La Correspondencia de Auslander-Reiten). *[AR92, Theorem 4.4] Sea Λ una k -álgebra de Artin. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.*

- (a) *Si $T \in \text{mod}(\Lambda)$ es tilting, entonces $T^\perp$ es funtorialmente finita y $(\text{add}(T))^\vee = {}^\perp(T^\perp) := \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_\Lambda^i(X, T') = 0 \forall T' \in T^\perp, \forall i > 0\}$ es contravariantemente finita.*
- (b) *La correspondencia $T \mapsto T^\perp$ induce una biyección entre las iso-clases de módulos tilting básicos en $\text{mod}(\Lambda)$ y las clases $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ que son covariantemente finitas, resolventes y tales que $\text{mod}(\Lambda) = \mathcal{X}^\vee$.*
- (c) *La correspondencia $T \mapsto (\text{add}(T))^\vee$ induce una biyección entre las iso-clases de los módulos tilting básicos en $\text{mod}(\Lambda)$ y las clases $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda)$ resolventes y contravariantemente finitas en $\text{mod}(\Lambda)$, donde*

$$\mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda) := \{C \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{pd}(C) < \infty\}.$$

Cabe decir que hay otras versiones de esta correspondencia en diferentes contextos, entre las más recientes podemos señalar una versión para categorías extrianguladas

introducida por B. Zhu y X. Zhuang en [ZZ20, Theorem 2]. Describiremos en las siguientes líneas las versiones que consideramos más representativas.

Poco tiempo después de la publicación de [AR92], M. Auslander y Ø. Solberg generalizaron estos resultados utilizando álgebra homológica relativa a un subfunctor del $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ en [AS93b]. Este trabajo es parte de una serie de artículos que tiene el cometido de utilizar el álgebra homológica relativa para estudiar la categoría $\text{mod}(\Lambda)$ y sus subcategorías covariantemente o contravariantemente finitas [AS93b, AS93c, AS93a]. A continuación describiremos brevemente el álgebra homológica desarrollada en dichos trabajos, a la cual nos referiremos como teoría de Auslander-Solberg. Dado un subfunctor aditivo F de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$, se considera a la clase $\mathcal{E}_F$ de **sucesiones F -exactas**, la cual consiste de las clases de sucesiones exactas $\eta : 0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$ tales que $\bar{\eta} \in F(K, N)$. Usando la clase $\mathcal{E}_F$, se pueden definir módulos F -proyectivos, F -inyectivos, F -resoluciones y F -coresoluciones. Más aún, en caso de que F tenga suficientes proyectivos e inyectivos, esto es que para todo $M \in \text{mod}(\Lambda)$ existan sucesiones F -exactas

$$0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow M' \rightarrow 0 \text{ y } 0 \rightarrow M'' \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con P F -proyectivo e I F -inyectivo, la pareja $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ es una categoría exacta con suficientes proyectivos e inyectivos. De aquí se sigue que se pueda definir el i -ésimo funtor derivado de $\text{Hom}_\Lambda(-, -)$ en $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$. Dicho funtor se denota por $\text{Ext}_F^i(-, -)$. Hecho esto, se definen de manera natural las clases ortogonales $\mathcal{X}^{\perp_F}$ y ${}^{\perp_F}\mathcal{X}$, así como las dimensiones homológicas relativas $\text{pd}_F(-)$ y $\text{id}_F(-)$ (para más detalles y definiciones ver secciones 3.5 y 3.6 de la tesis). Con estas herramientas M. Auslander y Ø. Solberg desarrollan una teoría F -tilting, en la cual obtienen la siguiente versión de la correspondencia de Auslander-Reiten. Cabe decir que los resultados originales están enunciados para módulos F -cotilting, la noción dual de F -tilting, debido a que tal noción se ajusta a los objetivos de M. Auslander y Ø. Solberg en [AS93c]. Sin embargo, nosotros enunciaremos la versión F -tilting para continuar con nuestra comparación.

Teorema 0.2. *Para una k -álgebra de Artin Λ y F un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$, con suficientes proyectivos e inyectivos, tal que $\mathcal{P}(F)$ es de tipo finito, se cumplen los siguientes enunciados:*

- (a) [AS93b, Theorem 3.24] *La correspondencia $T \mapsto T^{\perp_F}$ induce una biyección entre las iso-clases de módulos F -tilting básicos y las clases $\mathcal{X}$ covariantemente finitas y F -coresolventes en $\text{mod}(\Lambda)$ tales que $\text{mod}(\Lambda) = \mathcal{X}_F^\vee$.*
- (b) [AS93b, Theorem 3.2] *La subcategoría $(\text{add}(T))^{\vee}$ es F -resolvente y contravariantemente finita en $\text{mod}(\Lambda)$, con $\text{id}_F(\text{add}(T)^{\vee}) < \infty$.*

Generalizando lo anterior, S. K. Mohamed presentó una definición que relativizaba el tilting de Auslander-Solberg a una subcategoría $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ (ver sección 3.6 para definiciones y detalles). A grandes rasgos, su trabajo se desarrolla en una clase

funtorialmente finita y cerrada por extensiones $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$, con $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ un generador relativo en $\mathcal{C}$ que es contravariantemente finito en $\mathcal{C}$. Resulta que bajo este contexto, $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ es una categoría exacta, donde $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ consiste de las sucesiones $F_{\mathcal{X}}$ -exactas en $\mathcal{C}$ y $F_{\mathcal{X}}$ es el subfunctor de $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ inducido por las sucesiones exactas $0 \rightarrow N \rightarrow M \xrightarrow{f} K \rightarrow 0$ con $\text{Hom}_{\Lambda}(X, f)$ suprayectiva $\forall X \in \mathcal{X}$. Utilizando dicha categoría exacta, S. K. Mohamed presentó una teoría tilting. Entre sus resultados no podemos encontrar una correspondencia del tipo de Auslander-Reiten como tal. Sin embargo, está el siguiente resultado que conserva la esencia de dicha correspondencia.

Teorema 0.3. [Moh09, Proposition 4.2] Sean Λ una k -álgebra de Artin, $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ una clase funtorialmente finita y cerrada por extensiones, con $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ un generador relativo en $\mathcal{C}$ que es contravariantemente finito en $\mathcal{C}$, $F := F_{\mathcal{X}}$ y $T \in \mathcal{C}$ un tilting de Mohamed. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $T^{\perp_F} \cap \mathcal{C}$ es F -resolvente covariantemente finita en $\mathcal{C}$, con $\mathcal{C} \subseteq (T^{\perp_F} \cap \mathcal{C})_F^{\vee}$;
- (b) $\text{add}(T)_{\mathcal{C}}^{\vee} = {}^{\perp_F}(T^{\perp_F} \cap \mathcal{C}) \cap \mathcal{C}$ es F -resolvente y contravariantemente finita en $\mathcal{C}$, con $\text{pd}_F(\text{add}(T)_{\mathcal{C}}^{\vee}) < \infty$, donde la $\mathcal{C}$ en $(\text{add}(T))_{\mathcal{C}}^{\vee}$ indica que las sucesiones exactas que constituyen las coresoluciones consideradas se encuentran en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$.

Pares de cotorsión y la correspondencia de Auslander-Reiten en $\text{Mod}(R)$

Las nociones de subcategoría covariantemente o contravariantemente finita también fueron estudiadas, junto con los objetos tilting, en el ámbito de los módulos infinitamente generados. De hecho, fueron descubiertas de manera independiente bajo los nombres de clases precubrientes y preenvolventes, con los cuales cobraron un gran interés en la teoría de módulos [Eno81, GT73, Tep76]. A saber, dadas $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \text{Mod}(R)$ clases de módulos sobre un anillo R , diremos que $\mathcal{X}$ es **preenvolvente (precubriente)** en $\mathcal{C}$ si todo $M \in \mathcal{C}$ admite un morfismo $\alpha : M \rightarrow X$ ($\alpha : X \rightarrow M$), con $X \in \mathcal{X}$, tal que $\text{Hom}_{\Lambda}(\alpha, X')$ ($\text{Hom}_{\Lambda}(X', \alpha)$) es suprayectiva para todo $X' \in \mathcal{X}$. Más aún, diremos que $\mathcal{X}$ es **preenvolvente (precubriente) especial** en $\mathcal{C}$ si todo $M \in \text{Mod}(R)$ admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\beta} X \rightarrow M' \rightarrow 0 \quad (0 \rightarrow M' \rightarrow X \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0)$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $M' \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$ ($M' \in \mathcal{X}^{\perp_1}$), donde ${}^{\perp_1}\mathcal{X} := \{M \in \text{Mod}(R) \mid \text{Ext}_{\Lambda}^1(M, X) = 0 \forall X \in \mathcal{X}\}$ ($\mathcal{X}^{\perp_1} := \{M \in \text{Mod}(R) \mid \text{Ext}_{\Lambda}^1(X, M) = 0 \forall X \in \mathcal{X}\}$). Notemos que una clase preenvolvente (precubriente) especial es en particular preenvolvente (precubriente).

Ahora, existe un concepto que muestra que las nociones duales de preenvolvente especial y precubriente especial están unidas: *el par de cotorsión*. En efecto, se dice que un

par de clases $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un **par de cotorsión** si $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$. El llamado Lema de Salce nos dice que en un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, se tiene que $\mathcal{A}$ es precubriente especial si, y sólo si, $\mathcal{B}$ es preenvolvente especial. Entre otras razones, con este resultado, los pares de cotorsión se han vuelto una poderosa maquinaria utilizada para construir resoluciones y coresoluciones en el álgebra homológica relativa.

Bajo este contexto, L. Angeleri Hügel y O. Mendoza Hernández dieron un siguiente paso para comprender la conexión entre pares de cotorsión, R -módulos tilting, dimensiones proyectivas relativas y dimensiones de coresolución.

Teorema 0.4. *[AHMH09, Theorem 3.2] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión hereditario y completo en $\text{Mod}(R)$, con $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.*

(a) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a1) *existe un R -módulo tilting T tal que $\mathcal{A} = {}^{\perp}(T^{\perp})$ y $\mathcal{B} = T^{\perp}$.*

(a2) *$\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ y ω es cerrado por coproductos.*

(a3) *ω es cerrado por coproductos, $\text{pd}(\omega) < \infty$ y $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\vee}$.*

(b) *Si alguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces*

$$\text{pd}(T) = \text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \text{coresdim}_{\text{Add}(T)}(\mathcal{A}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(\text{Mod}(R)).$$

Como podemos ver, con la introducción de los pares de cotorsión se logra obtener una variedad de propiedades relacionadas con dimensiones homológicas relativas (ver sección 1.1 para definiciones). Cabe decir que esta característica fue utilizada en [AHMH09] para el estudio de las *dimensiones finitistas*, un concepto estudiado en uno de los principales problemas abiertos de la teoría de representaciones de álgebras.

La caracterización de Bazzoni

Un segundo punto en común de las teorías tilting, que nos gustaría resaltar, es la llamada caracterización de Bazzoni. Originalmente, dicha caracterización es un teorema que Silvana Bazzoni probó en [Baz04, Theorem 3.11], bajo el contexto de módulos tilting infinitamente generados de dimensión proyectiva finita. Dicha caracterización nos dice que un módulo $T \in \text{Mod}(R)$ es tilting si, y sólo si, $\text{Gen}_n(T) = T^{\perp}$, donde $\text{Gen}_n(T)$ es la clase de los R -módulos X que admiten una sucesión exacta

$$T_n \rightarrow T_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow T_1 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

con $T_i \in \text{Add}(T) \forall i \in [1, n]$. El resultado de Bazzoni es altamente apreciado por su simplicidad y por la variedad de aplicaciones que presenta.

Cabe mencionar que antes de [Baz04, Theorem 3.11] ya había resultados parecidos para otros tipos de tilting finitamente generados (ver [CT95, Proposition 1.3] y [MO89, Theorem 4.3]). Recientemente, Jiaqun Wei introdujo una de las versiones más generales para módulos finitamente generados [Wei10, Theorem 3.10], en el contexto de módulos tilting relativos a la Auslander-Solberg.

Es de suponer que cada teoría tilting tiene su versión de caracterización de Bazzoni. Por ahora no ahondaremos más en las diferentes versiones y en las sutiles diferencias que puedan tener. Basta mencionar, por último, que B. Zhu y X. Zhuang también han desarrollado una versión para categorías extrianguladas [ZZ20, Theorem 1].

Clases n - $\mathcal{X}$ -tilting

En esta tesis trabajaremos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y consideraremos una clase de objetos $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Nuestro objetivo será desarrollar una teoría tilting en $\mathcal{C}$ relativa a $\mathcal{X}$, de tal manera que nuestra definición englobe todas las nociones de tilting antes mencionadas. El trabajo estará dedicado especialmente a describir en detalle las propiedades técnicas y las relaciones entre diferentes dimensiones homológicas, de tal manera que los resultados sirvan para una gran variedad de aplicaciones en diferentes contextos. Nuestros resultados principales serán una versión de la correspondencia de Auslander-Reiten, una caracterización de Bazzoni y las propiedades de los *pares n - $\mathcal{X}$ -tilting*. Cabe mencionar, que la noción de par n - $\mathcal{X}$ -tilting introducida en esta tesis es nuestra versión relativizada de los pares de cotorsión inducidos por los módulos tilting que aparecen en el Teorema 0.4.

Hacemos notar que una de las diferencias de nuestro trabajo (con otras nociones de tilting en categorías abelianas) es que, mientras que otros autores trabajan en contextos donde $\mathcal{C}$ tiene suficientes proyectivos o inyectivos, nosotros sólo pediremos que exista un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. En ocasiones, especializaremos nuestros resultados a categorías Ab4 con el fin de incluir en nuestra teoría a los objetos tilting *grandes*. Ante la ausencia de objetos proyectivos e inyectivos, cabe decir que nuestra principal herramienta será el funtor $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(-, -)$ de Yoneda, el cual no requiere la existencia de suficientes proyectivos o inyectivos. En el apéndice exploraremos varias propiedades de este funtor. En particular, probaremos que: una categoría abeliana Ab3 $\mathcal{C}$ es Ab4 si, y sólo si, para todo conjunto de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{C}$ y todo $B \in \mathcal{C}$, se tiene un isomorfismo $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(A_i, B)$ (ver A.106).

Antes de enfocarnos en nuestro objetivo, será necesario desarrollar ciertos resultados de álgebra homológica que nos permitan abordar nuestro problema. Esta labor la realizaremos en el capítulo 1. A saber, en las secciones 1 y 3, nos basaremos en el álgebra homológica desarrollada por M. Auslander y Ragnar Olaf Buchweitz [AB89], así como en varios resultados de M. Auslander e I. Reiten [AR91], para introducir una variedad

de dimensiones relativas que utilizaremos en los siguientes capítulos. En particular, dadas $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$, introduciremos las clases $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\wedge$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\vee$, que consistirán de los objetos que admitan lo que llamaremos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resoluciones y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -coresoluciones. Alrededor de estas nociones definiremos dimensiones de resolución (coresolución) relativa a $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, respectivamente. Cabe decir que las clases $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\wedge$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\vee$ están inspiradas en las clases presentadas en [AR91] con la notación de $\mathcal{X}_\omega$, y que resultan ser una generalización de las clases de objetos Gorenstein relativos débiles presentados en [BMS20] por Victor R. Becerril Somera, Valente Santiago Vargas y O. Mendoza Hernández. En la sección 2, estudiaremos las parejas de clases $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}^2$ que se comportan como un par de cotorsión en una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. En este estudio incluiremos la definición de pares $\mathcal{X}$ -completos y $\mathcal{X}$ -hereditarios, y estudiaremos su comportamiento con dimensiones homológicas relativas. Finalmente, en la sección 4 introduciremos la clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, la cual es nuestra versión relativizada de la clase $\text{Gen}_n(T)$ utilizada en la caracterización de Bazzoni.

La definición de clase n - $\mathcal{X}$ -tilting se presenta en el capítulo 2, donde obtendremos nuestros resultados principales y la descripción de sus propiedades. En la sección 1, se desarrolla una teoría tilting que especializaremos a objetos tilting grandes o pequeños cuando sea necesario. Para ello, desarrollaremos una teoría de *clases* n - $\mathcal{X}$ -tilting en lugar de *objetos* n - $\mathcal{X}$ -tilting. Consideraremos el caso especial en que la clase estudiada es cerrada por coproductos, o bien por coproductos finitos, definiendo este fenómeno como *clases* n - $\mathcal{X}$ -tilting *grandes*, o bien *pequeñas*. Definiremos *objetos* n - $\mathcal{X}$ -tilting *grandes* (*pequeños*) como aquellos en los que $\text{Add}(T)$ ($\text{add}(T)$) sea una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entre los resultados principales de esta sección, presentaremos una caracterización de los objetos n - $\mathcal{X}$ -tilting, la cual incluirá nuestra versión de la caracterización de Bazzoni (ver 2.25), así como un teorema donde empezaremos a mostrar las interesantes propiedades de los pares n - $\mathcal{X}$ -tilting (ver 2.23). En la sección 2, probaremos que, en caso de que $\mathcal{X}$ sea una clase de objetos compactos, para una clase $\mathcal{T}$ será equivalente que $\text{Add}(\mathcal{T})$ sea n - $\mathcal{X}$ -tilting grande, a que $\text{add}(\mathcal{T})$ sea n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña (ver 2.58). En la sección 3, se introducen y se estudian las propiedades de los pares n - $\mathcal{X}$ -tilting. El teorema principal de esta sección será una generalización del Teorema 0.4 mostrado arriba (ver 2.75). En este resultado mostraremos una caracterización de los pares de clases inducidos por una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting por medio de dimensiones homológicas. Mas aún, como corolarios de este teorema obtendremos dos versiones de la correspondencia de Auslander-Reiten (ver 2.78 y 2.79). Finalmente, en la sección 4 estudiaremos el caso cuando $\mathcal{X}$ es una clase gruesa. Veremos que en este caso las hipótesis se relajan y flexibilizan. Probaremos nuevas versiones de la correspondencia de Auslander-Reiten (2.95 y 2.96), así como una caracterización de Bazzoni (2.90).

Por último, en el capítulo 3, exploraremos una variedad de ejemplos y aplicaciones de lo desarrollado en los primeros dos capítulos. Mostraremos cómo nuestra definición se ajusta a diferentes versiones de tilting. También veremos cómo nuestra versión de la caracterización de Bazzoni y de la correspondencia de Auslander-Reiten nos ayudan a

encontrar equivalencias entre las diferentes nociones de tilting. A saber, las primeras 4 secciones las dedicaremos a mostrar cómo las nociones de tilting clásico, los objetos ∞ -tilting y el tilting de Miyashita se pueden caracterizar como un objeto n - $\mathcal{X}$ -tilting, para un entero n y una clase $\mathcal{X}$ adecuadas. En particular, exploraremos la variedad de propiedades que podemos deducir a través de nuestra teoría para los R -módulos tilting de Miyashita, con R un anillo noetheriano. También desarrollaremos una teoría de R -módulos tilting de Miyashita de tipo $\mathcal{FP}_n$, con R un anillo n -coherente. En las secciones 5 y 6 exploraremos las teorías tilting en categorías exactas. En particular, mostraremos que si $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es una categoría exacta que se sumerge en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía un funtor $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, entonces una clase $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ es n -tilting en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ si, y sólo si, la clase $[i(\mathcal{T})]$ es n - $[i(\mathcal{A})]$ -tilting en $\mathcal{C}$. Utilizaremos esta idea para analizar el tilting a la Auslander-Solberg y el tilting de Mohamed. En la sección 7, estudiaremos las clases tilting de funtores desarrolladas por R. Martínez Villa y M. Ortiz Morales, y los caracterizaremos con nuestra definición de n - $\mathcal{X}$ -tilting. Finalmente, en las secciones 8 y 9 buscaremos caracterizar a los módulos silting a través de la noción de n - $\mathcal{X}$ -tilting.

1. Preliminares

En este capítulo desarrollaremos las bases técnicas para abordar el estudio de una teoría tilting relativa en categorías abelianas. Nuestra herramienta principal será el álgebra homológica relativa introducida por Maurice Auslander y Ragnar-Olaf Buchweitz en [AB89]. Dicha teoría la podemos describir como un estudio de las relaciones entre la dimensión de resolución (coresolución) respecto a una clase $\mathcal{X}$ y la dimensión proyectiva (inyectiva) respecto a una clase $\mathcal{X}$.

En este trabajo introduciremos un ligero cambio sobre las resoluciones (coresoluciones) estudiadas en [AB89]. Esto nos llevará a generalizar una variedad de definiciones y resultados.

Las resoluciones que estudiaremos dependerán de dos clases de objetos, digamos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, y consistirán de sucesiones exactas de la forma

$$\cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

donde $X_i \in \mathcal{X}$ y $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{Y}$ para todo $i \geq 1$. Introduciremos una dimensión respecto a este tipo de resoluciones y, de manera similar a M. Auslander y R.O. Buchweitz, estudiaremos la relación entre ésta y las dimensiones homológicas relativas respecto a la clase $\mathcal{X}$.

Entre los resultados principales podemos citar los siguientes. En 1.44, veremos las condiciones necesarias para que la clase de objetos que admiten dichas resoluciones sea cerrada por extensiones, sumandos directos, o sea gruesa a izquierda. En 1.9, se caracterizan las clases $\mathcal{T}$ tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$ con una nueva noción que llamaremos *cerradura por n -cocientes en $\mathcal{X}$* . En 1.16, estudiaremos la existencia de ciertas aproximaciones especiales a partir de la existencia de un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo.

Ante la aparición de dichas aproximaciones especiales y otros indicios en la teoría, nos veremos ante la necesidad de introducir nuevos conceptos, que se presentan como una relativización de las nociones de par de cotorsión completo y hereditario respecto a una clase $\mathcal{X}$. Acerca de estos conceptos obtendremos en 1.20 una versión del Lema de Salce que caracteriza los pares $\mathcal{X}$ -completos. También demostraremos en 1.26 una versión del Lema de García-Rozas que describe los pares $\mathcal{X}$ -hereditarios. Más adelante, en 1.50 daremos una descripción del comportamiento de un par $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, así como de su corazón $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

Por último, en la sección 1.4 abordaremos la clase de objetos C que admiten una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \dots \rightarrow T_2 \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} C \rightarrow 0,$$

con $T_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $\text{Ker}(f_i) \in \mathcal{X}$ para todo $i \in [1, n]$. En particular, en 1.53 estudiaremos bajo qué condiciones dicha clase es cerrada bajo n -cocientes en $\mathcal{X}$.

1.1. Homología relativa

Comenzaremos definiendo las clases elementales con las que estaremos trabajando. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Dados $X, Y \in \mathcal{C}$ y $n \geq 0$, denotaremos por

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, Y)$$

al grupo de extensiones de Y en X , también conocido como el Ext de Yoneda. Dicho grupo siempre está definido y no depende de la existencia de elementos proyectivos o inyectivos en $\mathcal{C}$. En el apéndice, se pueden encontrar más detalles sobre el mismo, así como de todas las herramientas que utilizaremos de las categorías abelianas.

Definición 1.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}$. Consideraremos las siguientes clases:

- (a) $\text{smd}(\mathcal{M})$ denota a la clase de sumandos directos de objetos de $\mathcal{M}$;
- (b) $\mathcal{M}^{\oplus}$ denota a la clase de objetos de $\mathcal{C}$ que son sumas directas arbitrarias de elementos de $\mathcal{M}$;
- (c) $\mathcal{M}^{\oplus < \infty}$ denota a la clase de objetos de $\mathcal{C}$ que son sumas directas finitas de elementos de $\mathcal{M}$;
- (d) $\text{Add}(\mathcal{M}) := \text{smd}(\mathcal{M}^{\oplus})$ y $\text{add}(\mathcal{M}) := \text{smd}(\mathcal{M}^{\oplus < \infty})$;
- (e) $\text{Prod}(\mathcal{M})$ denota a la clase de objetos de $\mathcal{C}$ que son sumandos directos de productos arbitrarios de elementos de $\mathcal{M}$;
- (f) $\mathcal{M}^{\perp} := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, X) = 0 \quad \forall i \geq 1, \forall M \in \mathcal{M}\}$;
- (g) $\mathcal{M}^{\perp_i} := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, X) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}\}$;
- (h) ${}^{\perp}\mathcal{M} := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, M) = 0 \quad \forall i \geq 1, \forall M \in \mathcal{M}\}$;
- (i) ${}^{\perp_i}\mathcal{M} := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, M) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}\}$;
- (j) en caso de que $\mathcal{M}$ consista de un sólo objeto M , las clases anteriores se denotarán, respectivamente, por $\text{smd}(M)$, $M^{\oplus}$, $M^{\oplus < \infty}$, $\text{Add}(M)$, $\text{add}(M)$, $\text{Prod}(M)$, $M^{\perp}$, $M^{\perp_i}$, ${}^{\perp}M$ y ${}^{\perp_i}M$, respectivamente.

Observación 1.2. Cabe resaltar que, por la sucesión exacta larga del Ext y A.4.4, las clases $\mathcal{M}^{\perp i}$, $\mathcal{M}^{\perp}$, ${}^{\perp}\mathcal{M}$ y ${}^{\perp i}\mathcal{M}$ son cerradas por extensiones, sumandos directos y coproductos finitos. Además, en caso de que $\mathcal{C}$ sea una categoría Ab_4 , tendremos que $\mathcal{M}^{\perp}$ y $\mathcal{M}^{\perp i}$ son cerradas por coproductos arbitrarios, por A.100.

A continuación presentamos los conceptos clásicos relacionados con resoluciones y co-resoluciones.

Definición 1.3. Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$.

- (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{X}_n^{\wedge}$ a la clase de objetos $M \in \mathcal{C}$ que admiten una **$\mathcal{X}$ -resolución finita** de longitud $\leq n$. Esto es, una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (1.A)$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Luego, denotamos

$$\mathcal{X}^{\wedge} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n^{\wedge}.$$

- (b) Dualmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{X}_n^{\vee}$ a la clase de objetos $M \in \mathcal{C}$ que admiten una **$\mathcal{X}$ -coresolución finita** de longitud $\leq n$. Esto es, una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow 0, \quad (1.B)$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Luego, denotamos

$$\mathcal{X}^{\vee} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n^{\vee}.$$

- (c) Denotamos por $\mathcal{X}_{\infty}^{\wedge}$ a la clase de objetos $M \in \mathcal{C}$ que admiten una **$\mathcal{X}$ -resolución infinita**. Esto es, una sucesión exacta infinita

$$\dots \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con $X_i \in \mathcal{X} \cup \{0\} \forall i \geq 0$. Note que $\mathcal{X}^{\wedge} \subseteq \mathcal{X}_{\infty}^{\wedge}$.

- (d) Denotamos por $\mathcal{X}_{\infty}^{\vee}$ a la clase de objetos $M \in \mathcal{C}$ que admiten una **$\mathcal{X}$ -coresolución infinita**. Esto es, una sucesión exacta infinita

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_i \rightarrow \dots,$$

con $X_i \in \mathcal{X} \cup \{0\} \forall i \geq 0$. Note que $\mathcal{X}^{\vee} \subseteq \mathcal{X}_{\infty}^{\vee}$.

- (e) En caso de que $M \in \mathcal{X}^{\wedge}$, decimos que la **dimensión de $\mathcal{X}$ -resolución** de M es n , si n es el mínimo entero positivo tal que existe una sucesión exacta de

la forma (1.A). A dicho número lo denotamos $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$. En caso de que $M \notin \mathcal{X}^\vee$, escribiremos $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \infty$.

- (f) Dado $M \in \mathcal{X}^\vee$, decimos que la **dimensión de $\mathcal{X}$ -coresolución** de M es n , si n es el mínimo entero positivo tal que existe una sucesión exacta de la forma (1.B). A dicho número lo denotamos $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$. En caso de que $M \notin \mathcal{X}^\vee$, escribiremos $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) = \infty$.

- (g) Dada una clase $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}$, consideraremos

$$\begin{aligned} \text{coresdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) &:= \sup \{ \text{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in \mathcal{M} \}, \\ \text{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) &:= \sup \{ \text{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in \mathcal{M} \}. \end{aligned}$$

Las dimensiones de resolución antes definidas están estrechamente relacionadas con las dimensiones homológicas, las cuales definimos a continuación.

Definición 1.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Para un objeto $C \in \mathcal{C}$, se definen las siguientes dimensiones:

- (a) $\text{pd}_{\mathcal{A}}(C) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(C, \mathcal{A}) = 0 \forall k > n \};$
- (b) $\text{id}_{\mathcal{A}}(C) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(\mathcal{A}, C) = 0 \forall k > n \};$
- (c) para una clase $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ se definen

$$\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) := \sup \{ \text{pd}_{\mathcal{A}}(B) \mid B \in \mathcal{B} \} \text{ y } \text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \sup \{ \text{id}_{\mathcal{A}}(B) \mid B \in \mathcal{B} \}.$$

Definición 1.5. Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ una pareja de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$.

- (a) Decimos que ω es un **cogenerador relativo en $\mathcal{X}$** si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow X' \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$.

- (b) Decimos que ω es un **generador relativo en $\mathcal{X}$** si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X' \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$.

- (c) Decimos que ω es **$\mathcal{X}$ -inyectivo** si $\text{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.
- (d) Decimos que ω es **$\mathcal{X}$ -proyectivo** si $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.

Definición 1.6. Sean $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ clases de objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $n \geq 0$.

- (a) Decimos que $M \in \mathcal{C}$ es **coresoluble por $\mathcal{Y}$, en $\mathcal{X}$** , o bien que M es **$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresoluble**, si M admite una sucesión exacta infinita

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-1} \xrightarrow{f_n} Y_n \rightarrow \dots,$$

donde $Y_k \in \mathcal{Y} \cup \{0\} \forall k \geq 0$ y $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{X} \cup \{0\} \forall i \geq 1$. En tal caso, diremos que la sucesión exacta anterior es una **$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución**.

- (b) Una **$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución de longitud finita** de un objeto $M \in \mathcal{C}$ es una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-1} \xrightarrow{f_n} Y_n \rightarrow 0,$$

donde $Y_n \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, $Y_k \in \mathcal{Y} \forall k \in [0, n-1]$ y $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{X} \forall i \in [1, n-1]$. En tal caso, diremos que la sucesión exacta anterior es una **$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución** de longitud n y que M es **finitamente $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresoluble**.

- (c) Diremos que la **dimensión de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución** de M es n , lo cual denotaremos $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M)$, si n es el mínimo entero tal que existe una sucesión exacta como en (b). En caso de que no exista una tal coresolución, escribiremos

$$\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M) = \infty.$$

- (d) Denotaremos a la clase de objetos $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolubles como $\mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\vee}$.
 (e) Denotaremos a la clase de objetos finitamente $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolubles como $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Note que $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\vee} \subseteq \mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\vee}$. Más aún, $\mathcal{Y} \cup \{0\}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\vee}$.
 (f) Denotaremos a la clase de objetos que admiten una $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución de longitud menor o igual a n como $\mathcal{Y}_{\mathcal{X},n}^{\vee}$.

De manera dual, se definen los objetos **resolubles por $\mathcal{Y}$, en $\mathcal{X}$** , o **$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -resolubles**, y la clase de estos objetos la denotamos como $\mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\wedge}$. También podemos definir, de manera dual, la **dimensión de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -resolución** que la denotamos como $\text{resdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M)$.

Note que, para un $M \in \mathcal{C}$, se tiene que M es isomorfo a un objeto de $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ si, y sólo si, $\text{resdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M) = 0$ (respectivamente, $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M) = 0$).

A continuación presentamos una segunda forma del concepto de resolución y coresolución relativos a una subclase en $\mathcal{C}$. Se puede observar que esta segunda forma es un caso particular de la anterior. La incluimos por sus futuras aplicaciones.

Definición 1.7. Sean $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ subclases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$.

- (a) Diremos que $M \in \mathcal{C}$ es **$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -coresoluble** si $M \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\vee}$.
 Denotaremos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\infty}^{\vee} := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\vee}$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^{\vee} := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\vee}$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_n^{\vee} := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X},n}^{\vee}$.
 (b) Dualmente, diremos que $M \in \mathcal{C}$ es un objeto **$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ -resoluble**, si $M \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\wedge}$.
 Denotaremos $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})_{\infty}^{\wedge} := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X},\infty}^{\wedge}$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})^{\wedge} := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\wedge}$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})_n^{\wedge} := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X},n}^{\wedge}$.

1.1.1. Caracterizando las clases $\mathcal{T}$ tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$

Definición 1.8. Sean $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $n \geq 1$.

(a) Diremos que $\mathcal{Y}$ es **cerrada por n -cocientes, en $\mathcal{X}$** , si para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow Y_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \rightarrow Y_1 \xrightarrow{\varphi_1} B \rightarrow 0,$$

con $Y_i \in \mathcal{Y}$ y $\text{Ker}(\varphi_i) \in \mathcal{X} \ \forall i \in [1, n]$ y $B \in \mathcal{X}$, se tiene que $B \in \mathcal{Y}$.

(b) Diremos que $\mathcal{Y}$ es **cerrada por n -subobjetos, en $\mathcal{X}$** , si para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow Y_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \rightarrow Y_n \xrightarrow{\varphi_n} B \rightarrow 0,$$

con $Y_i \in \mathcal{Y}$ y $\text{Im}(\varphi_i) \in \mathcal{X} \ \forall i \in [1, n]$ y $A \in \mathcal{X}$, se tiene que $A \in \mathcal{Y}$.

El siguiente resultado está inspirado en [CE56, Chapter VI, Proposition 2.1.].

Proposición 1.9. Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$, $n \geq 1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) Sea α un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{T}^\perp$. Entonces, $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}^\perp$ es cerrada por n -cocientes en $\mathcal{X}$ si, y sólo si, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$.
- (b) Sea β un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\beta \subseteq {}^\perp \mathcal{T}$. Entonces, $\mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{T}$ es cerrada por n -subobjetos en $\mathcal{X}$ si, y sólo si, $\text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$.

Demostración. Probaremos (a), ya que la prueba de (b) es dual.

($\Rightarrow$) Note primero que $\alpha \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}^\perp$. Sean $X \in \mathcal{X}$ y $M \in \mathcal{T}$. Veremos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, X) = 0$, para todo $k \geq n+1$. Dado que α es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \dots \rightarrow I_{n-1} \xrightarrow{f_n} V \rightarrow 0,$$

con $K_j := \text{Ker}(f_j) \in \mathcal{X} \ \forall j \in [1, n]$, $V \in \mathcal{X}$ y $I_i \in \alpha \ \forall i \in [0, n-1]$. A partir de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow I_{n-1} \rightarrow V \rightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta, para todo $i \geq 1$,

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, I_{n-1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, V) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, K_n) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, I_{n-1}),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, I_{n-1}) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, I_{n-1})$; por lo que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, K_n)$. Además, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, K_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1+i+1}(M, X) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+i}(M, X);$$

lo cual concluye nuestra prueba ya que, como $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{X}$, tenemos que $V \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Así que, para todo $i \geq 1$,

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, K) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+i}(M, X),$$

lo que implica que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(M) \leq n$.

($\Leftarrow$) Sea $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$. Dada una sucesión exacta en $\mathcal{X}$

$$0 \rightarrow A \rightarrow X_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{\varphi_1} B \rightarrow 0$$

con $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X} \cap \mathcal{T}^\perp$ y $\text{Ker}(\varphi_i) \in \mathcal{X} \forall i \in [1, n]$, por el lema de corrimiento, para cada $M \in \mathcal{T}$ tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+k}(M, A) = 0 \forall k \geq 1,$$

ya que $A \in \mathcal{X}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. $\square$

Proposición 1.10. *Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(a) *si α es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\text{coresdim}_{\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T});$$

(b) *si β es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\text{resdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}).$$

Demostración. Probaremos (a), ya que la prueba de (b) es dual.

Primero note que, como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $\alpha \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Podemos asumir que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = n < \infty$. Si $n = 0$, se tiene que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp$; y así $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}^\perp = \mathcal{X}$. Luego $\text{coresdim}_{\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = 0$. Por lo que, podemos asumir que $n \geq 1$.

Usando que α es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, para todo $A \in \mathcal{X}$ se puede construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow W_0 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \rightarrow W_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} Q \rightarrow 0,$$

con $Q \in \mathcal{X}$, $\text{Ker}(\varphi_i) \in \mathcal{X} \forall i \in [1, n]$ y $W_i \in \alpha \forall i \in [0, n-1]$. Dado que $\alpha \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, por 1.9 sabemos que $Q \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\text{coresdim}_{\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(A) \leq n$. $\square$

Proposición 1.11. *Para $\mathcal{X}, \mathcal{T}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados se satisfacen.*

(a) *Sea α un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{T}^\perp$. Entonces, se cumplen las siguientes desigualdades:*

- (a1) $\text{coresdim}_{\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$;
- (a2) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{T}^\perp)) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$.
- (b) Sea β un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\beta \subseteq \perp \mathcal{T}$. Entonces, se cumplen las siguientes desigualdades:
- (b1) $\text{resdim}_{\perp \mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$;
- (b2) $\text{id}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{T}^\perp)) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$.

Demostración. Probaremos (a), ya que la prueba de (b) es dual. Dado que $\alpha \subseteq \mathcal{X}$, se tiene que $\alpha \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Luego, la prueba de (a1) se sigue como en la de 1.10(a).

Dado que $\perp(\mathcal{T}^\perp) \subseteq \perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$, para demostrar (a2), es suficiente mostrar que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$. Para ello, podemos asumir que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = n < \infty$. Sean $Y \in \perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$ y $A \in \mathcal{X}$. Si $n = 0$, por (a1), se tiene que $A \cong T \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$; y así $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, A) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, T) = 0 \forall i \geq 1$. Podemos asumir que $n \geq 1$. Dado que α es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, como en la prueba de 1.10 se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow W_0 \rightarrow \dots \rightarrow W_{n-1} \rightarrow Q \rightarrow 0,$$

donde $Q \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ y $W_i \in \alpha \forall i \in [0, n-1]$. En particular $Q \in Y^\perp$. Más aún, como $\alpha \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, se tiene que $W_i \in Y^\perp \forall i \in [0, n-1]$. Así que, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, Q) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(Y, A) \quad \forall k > 0.$$

Por lo tanto, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(Y) \leq n$. □

1.1.2. Teoremas estilo Auslander-Buchweitz

En esta sección, haremos una generalización de algunos resultados de [AB89]. En dicho artículo, M. Auslander y R.O. Buchweitz introducen la teoría de aproximaciones en categorías abelianas, la cual es utilizada para desarrollar la homología relativa en diferentes contextos. Recordamos a continuación los objetos de estudio en dicha teoría.

Definición 1.12. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$.

- (a) Diremos que un morfismo $f : X \rightarrow M$ es una $\mathcal{X}$ -precubierta si $X \in \mathcal{X}$ y

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', M)$$

es un epimorfismo, para todo $X' \in \mathcal{X}$.

(b) Diremos que un morfismo $f : M \rightarrow X$ es una $\mathcal{X}$ -**preenvolvente** si $X \in \mathcal{X}$ y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X') \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X')$$

es un epimorfismo, para todo $X' \in \mathcal{X}$.

Comenzaremos recordando el siguiente lema, junto a un resultado clásico de Auslander-Buchweitz.

Lema 1.13. *[MS06, Lemma 2.13(a)] Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces*

$$(a) \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}),$$

$$(b) \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\wedge}) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}).$$

Demostración. Probaremos el primer inciso, la prueba del segundo es dual.

Dado que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^{\vee}$, se sigue que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) \geq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Por lo que podemos suponer $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = k < \infty$. Sea $M \in \mathcal{X}^{\vee}$. Veamos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Procederemos por inducción, sobre $n = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$.

Si $n = 0$ entonces $M \cong X \in \mathcal{X}$, y así $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Sea $n > 0$. Por hipótesis inductiva, $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(N) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ para todo $N \in \mathcal{X}_{n-1}^{\vee}$. Dado que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) = n$, se tiene una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow K \rightarrow 0$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(K) = n - 1$, por lo que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(K) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = k$. De manera que tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X_0, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(K, Y),$$

donde $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X_0, Y) = 0 = \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(K, Y) \forall Y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. $\square$

El siguiente teorema es una generalización de [AB89, Theorem 1.1], la cual se puede consultar en [BMPS19, Theorem 2.8]. En tal resultado, haremos la convención de que la expresión $\mathrm{resdim}_{\omega}(K_X) = -1$ significa que $K_X = 0$.

Teorema 1.14. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ una pareja de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tal que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones y $0 \in \mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para cada $X \in \mathcal{X}^\wedge$ existen sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow K_X \rightarrow M_X \xrightarrow{g_X} X \rightarrow 0 \quad \text{con } K_X \in \omega^\wedge, M_X \in \mathcal{X}, \text{ y}$$

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_X} B_X \rightarrow C_X \rightarrow 0 \quad \text{con } B_X \in \omega^\wedge, C_X \in \mathcal{X}.$$

Más aún, $\text{resdim}_\omega(K_X) = \text{resdim}_\mathcal{X}(X) - 1$ y $\text{resdim}_\omega(B_X) \leq \text{resdim}_\mathcal{X}(X)$.

(b) Si $\omega \subseteq \mathcal{X}^\perp$, entonces $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\perp$, f_X es una $\omega^\wedge$ -preenvolvente, g_X es una $\mathcal{X}$ -precubierta, $K_X \in \mathcal{X}^\perp$ y $C_X \in {}^\perp(\omega^\wedge)$.

El siguiente resultado es una generalización del dual del anterior. Cabe hacer la siguiente convención.

Observación 1.15. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ una pareja de clases en $\mathcal{C}$. En vista del enunciado del siguiente teorema, acordaremos que cualquiera de las dos expresiones

$$\text{coresdim}_\mathcal{Y}^\mathcal{X}(M) = -1 \text{ o } \text{resdim}_\mathcal{Y}^\mathcal{X}(M) = -1$$

significarán donde aparezcan que $M = 0$.

Teorema 1.16. Sean $(\mathcal{X}, \omega)$ una pareja de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Si ω es un generador relativo en $\mathcal{X}$, $0 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, entonces las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Para cada $Z \in \mathcal{X}_\mathcal{Y}^\vee$, con $n := \text{coresdim}_\mathcal{X}^\mathcal{Y}(Z)$, existen sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{g_Z} M_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad \text{con } C_Z \in (\mathcal{Y}, \omega)^\vee, M_Z \in \mathcal{X} \text{ y}$$

$$0 \rightarrow K_Z \rightarrow B_Z \xrightarrow{f_Z} Z \rightarrow 0 \quad \text{con } B_Z \in \omega_\mathcal{Y}^\vee, K_Z \in \mathcal{X},$$

donde $\text{coresdim}_\omega^\mathcal{Y}(C_Z) = n - 1$ y $\text{coresdim}_\omega^\mathcal{Y}(B_Z) \leq n$.

(b) En caso de que $Z \in (\mathcal{Y}, \mathcal{X})^\vee$, podemos afirmar además que $B_Z \in (\mathcal{Y}, \omega)^\vee$.

(c) Si $\omega \subseteq {}^\perp\mathcal{X}$, entonces $\omega^\vee \subseteq {}^\perp\mathcal{X}$, f_Z es una $\omega^\vee$ -precubriente y g_Z es una $\mathcal{X}$ -preenvolvente.

Demostración. Recordamos que $\omega_\mathcal{Y}^\vee \cap \mathcal{Y} = (\mathcal{Y}, \omega)^\vee$.

(a) Sea $\text{coresdim}_\mathcal{X}^\mathcal{Y}(Z) = n < \infty$. Construiremos las sucesiones requeridas, por inducción sobre n .

Sea $n = 0$. Entonces, $Z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Dado que ω es un generador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X' \rightarrow W \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega \subseteq (\mathcal{Y}, \omega)^\vee$ y $X' \in \mathcal{X}$. También, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{1} Z \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

donde $0 \in (\mathcal{Y}, \omega)^\vee$. Note que ambas sucesiones exactas satisfacen lo requerido. Sea $n > 0$. Por hipótesis de inducción, tenemos que para todo $N \in \mathcal{C}$, con $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}(N) \leq n - 1$, existen las sucesiones satisfaciendo lo requerido. Dado que $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}(Z) = n$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Z \rightarrow X_0 \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ y $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}(Y) = n - 1$. Lo que implica, por hipótesis de inducción, que existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_Y \rightarrow B_Y \xrightarrow{f_Y} Y \rightarrow 0 \quad \text{con } B_Y \in \omega_{\mathcal{Y}}^\vee, K_Y \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y},$$

donde $\text{coresdim}_{\omega}^{\mathcal{Y}}(B_Y) \leq n - 1$. Considerando el pullback de f_Y y f , obtenemos una sucesión exacta

$$\eta: \quad 0 \rightarrow Z \xrightarrow{h} E \rightarrow B_Y \rightarrow 0$$

con $E \in \mathcal{X}$ (debido a que $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones) y $B_Y \in \mathcal{Y}$ (debido a que $\mathcal{Y}$ es cerrado por extensiones). Ahora bien, dado que $E \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K_Y & = & K_Y & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Z & \rightarrow & E & \rightarrow & B_Y \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Z & \rightarrow & X_0 & \rightarrow & Y \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$0 \rightarrow L \rightarrow W \xrightarrow{h'} E \rightarrow 0$$

con $W \in \omega$ y $L \in \mathcal{X}$. Por lo que si consideramos el pullback de los morfismos h y h' , obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow L \rightarrow Z' \rightarrow Z \rightarrow 0$$

con $Z' \in \omega_{\mathcal{Y}}^\vee$ y $L \in \mathcal{X}$. Más aún, por construcción $\text{coresdim}_{\omega}^{\mathcal{Y}}(Z') \leq n$.

Queda por mostrar que $\text{coresdim}_{\omega}^{\mathcal{Y}}(B_Y) = n - 1$. Supongamos que no es el caso. Luego, como $\omega \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}(B_Y) \leq \text{coresdim}_{\omega}^{\mathcal{Y}}(B_Y) < n - 1$. Pero, por la sucesión exacta η se sigue que

$$n = \text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}(Z) \leq 1 + \text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}(B_Y) < n,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{coresdim}_{\omega}^{\mathcal{Y}}(B_Y) = n - 1$.

- (b) Del último pullback hecho, en la demostración de (a), se sigue que si $Z \in \mathcal{Y}$, entonces $Z' \in \mathcal{Y}$ debido a que $\mathcal{Y}$ es cerrado por extensiones.
- (c) Dado que $\omega \subseteq {}^\perp \mathcal{X}$ se sigue que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, y por lo tanto $\omega^\vee \subseteq {}^\perp \mathcal{X}$, ya que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega^\vee) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$ por 1.13. De manera que, al considerar las sucesiones de (a) para un $Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{Y}}^\vee$, tenemos que $C_Z \in {}^\perp \mathcal{X}$ y $K_Z \in \mathcal{X} \subseteq (\omega^\vee)^\perp$.

Para ver que g_Z es una $\mathcal{X}$ -preenvolvente basta observar que un morfismo $f : Z \rightarrow X$, con $X \in \mathcal{X}$, se factoriza a través de g_Z si y sólo si la sucesión construida con el pushout de f y g_Z se escinde, lo cual se cumple debido a que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C_Z, X) = 0$.

Análogamente se prueba que f_Z es $\mathcal{X}$ -precubierta.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{g_X} & M_Z & \longrightarrow & C_Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & \swarrow \text{dashed} & \downarrow & \swarrow \text{dashed} & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C_Z \longrightarrow 0
 \end{array}$$

□

1.2. Propiedades restringidas de pares de cotorsión

En esta sección se busca encontrar una definición que explique de alguna manera las propiedades analizadas en la sección anterior. Para ello, recordamos brevemente la definición de par de cotorsión.

Definición 1.17. [Sal79] Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$.

- (a) Decimos que la pareja $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un **par de cotorsión a izquierda en $\mathcal{X}$** si $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} = {}^{\perp_1} \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.
- (b) Decimos que la pareja $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un **par de cotorsión a derecha en $\mathcal{X}$** si $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A}^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$.
- (c) Decimos que la pareja $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un **par de cotorsión en $\mathcal{X}$** si $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} = {}^{\perp_1} \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A}^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$. En este caso, llamamos a la clase $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ el **corazón** o **núcleo** del par de cotorsión.

Cabe mencionar que, dada una clase arbitraria $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$, se tienen los pares de cotorsión

$$\left({}^{\perp_1}(\mathcal{Z}^{\perp_1}), \mathcal{Z}^{\perp_1} \right) \quad \text{y} \quad \left({}^{\perp_1} \mathcal{Z}, (\mathcal{Z}^{\perp_1})^{\perp_1} \right);$$

los cuales llamamos, respectivamente, el par de cotorsión generado y cogenerado por $\mathcal{Z}$.

Observación 1.18. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. En tal caso, $\mathcal{A} = \text{add}(\mathcal{A})$ y es una clase cerrada por extensiones que contiene a los objetos proyectivos de $\mathcal{C}$, mientras que $\mathcal{B} = \text{add}(\mathcal{B})$ y es una clase cerrada por extensiones que contiene a los objetos injectivos de $\mathcal{C}$.

Definición 1.19. Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$, se tienen las siguientes nociones.

- (a) Sean $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{C}$ tales que $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$. Decimos que una $\mathcal{Z}$ -preenvolvente $f : M \rightarrow Z$ es $\mathcal{Y}$ -cerrada si $\text{Coker}(f) \in \mathcal{Y}$.
- (b) Si todo $M \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{Z}$ -preenvolvente $\mathcal{Y}$ -cerrada, decimos que $\mathcal{Z}$ es **preenvolventemente cerrada en $\mathcal{Y}$** .
- (c) Sean $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{C}$ tales que $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$. Decimos que una $\mathcal{Z}$ -precubierta $f : Z \rightarrow M$ es $\mathcal{Y}$ -cerrada, si $\text{Ker}(f) \in \mathcal{Y}$.
- (d) Si todo $M \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{Z}$ -precubierta $\mathcal{Y}$ -cerrada, decimos que $\mathcal{Z}$ es **precubrientemente cerrada en $\mathcal{Y}$** .
- (e) Decimos que $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ es **precubriente especial en $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$** si para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{Z}^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$. Note que $A \rightarrow X$ es una $\mathcal{Z}$ -precubierta de X .

- (f) Decimos que $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ es **preenvolvente especial en $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$** si para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{X}$ y $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}$. Note que $X \rightarrow B$ es una $\mathcal{Z}$ -preenvolvente de X .

- (g) Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en $\mathcal{C}$. Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es **$\mathcal{X}$ -completo a izquierda** si todo $X \in \mathcal{X}$ admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Dualmente, decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es **$\mathcal{X}$ -completo a derecha** si todo $X \in \mathcal{X}$ admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

- (h) En caso de que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sea $\mathcal{X}$ -completo a derecha y a izquierda, decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par **$\mathcal{X}$ -completo**.

El siguiente lema generaliza el conocido lema de Salce [Sal79] que caracteriza los pares de cotorsión completos.

Lema 1.20. Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$, una clase $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones en $\mathcal{C}$ y un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de clases de objetos en $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados se satisfacen.

- (a) Sean $\mathcal{B}$ cerrada por extensiones, $\alpha \subseteq \mathcal{B}$ un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\mathcal{X}$ -completo a izquierda. Entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha.
- (b) Sean $\mathcal{A}$ cerrada por extensiones, $\omega \subseteq \mathcal{A}$ un generador relativo en $\mathcal{X}$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\mathcal{X}$ -completo a derecha. Entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a izquierda.

Demostración. Probaremos (a), la prueba de (b) es dual. Supongamos que existe un cogenerador $\alpha \subseteq \mathcal{B}$ relativo en $\mathcal{X}$ y que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a izquierda. Dado $M \in \mathcal{X}$, consideramos una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M & = & M & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & P & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

$$0 \rightarrow M \rightarrow I \xrightarrow{\pi} F \rightarrow 0,$$

con $I \in \alpha$ y $F \in \mathcal{X}$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a izquierda, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \xrightarrow{\rho} F \rightarrow 0$$

con $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Tomando el pullback de π con ρ , obtenemos las sucesiones exactas

$$\eta_1 : 0 \rightarrow Y \rightarrow P \rightarrow I \rightarrow 0 \text{ y}$$

$$\eta_2 : 0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0.$$

Dado que $Y, I \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, se sigue de η_1 que $P \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, de η_2 podemos concluir que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha. $\square$

Observación 1.21. En caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, tenemos que el concepto de par de cotorsión $\mathcal{X}$ -completo coincide con el de par de cotorsión completo.

Una vez definido lo que es un par $\mathcal{X}$ -completo, para una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$, cabe preguntarse cual es la noción que corresponde a la de par $\mathcal{X}$ -hereditario. Para ello, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 1.22. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{M}, \mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$.

- (a) Decimos que $\mathcal{M}$ es **cerrada por conúcleos de monomorfismos entre objetos de $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$** si para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

con $M, M' \in \mathcal{M} \cap \mathcal{X}$ tenemos que $M'' \in \mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es **cerrada por mono-conúcleos en $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$** para decir de forma corta que $\mathcal{M}$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos entre objetos de $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$.

- (b) Decimos que $\mathcal{M}$ es **cerrada por núcleos de epimorfismos entre objetos de** $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$ si para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow M'' \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $M, M' \in \mathcal{M} \cap \mathcal{X}$ tenemos que $M'' \in \mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es **cerrada por epi-núcleos en $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$** para decir de forma corta que $\mathcal{M}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos entre objetos de $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$.

Definición 1.23. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{M}, \mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$.

- (a) Decimos que la clase $\mathcal{M}$ es **$\mathcal{X}$ -resolvente** si $\mathcal{M}$ contiene un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$, es cerrada por extensiones y epi-núcleos en $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$.
- (b) Decimos que la clase $\mathcal{M}$ es **$\mathcal{X}$ -coresolvente** si $\mathcal{M}$ contiene un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, es cerrada por extensiones y mono-conúcleos en $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$.

Lema 1.24. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente, entonces

$${}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}.$$

Dualmente, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ es $\mathcal{X}$ -resolvente, entonces

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp_1} \cap \mathcal{X} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{X}.$$

Demostración. Dado que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente, $\mathcal{B}$ contiene una clase α que es cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Es claro que ${}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \supseteq {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$, por lo que resta probar la contención opuesta. Para ello, basta probar que, para todo $k > 0$, se tiene que

$${}^{\perp_k}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_{k+1}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}.$$

Sea $C \in {}^{\perp_k}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Como α es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, para todo $M \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$\eta: 0 \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow 0$$

con $A \in \alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $K \in \mathcal{X}$. Observamos que $K \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ debido a que $\mathcal{B}$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos entre objetos de $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Así que al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ a η , obtenemos la sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(C, K) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(C, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(C, A),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(C, A) = 0$, pues A es $\mathcal{X}$ -inyectivo y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(C, K) = 0$ debido a que $C \in {}^{\perp_k}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(C, M) = 0$ para todo $M \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. $\square$

Observación 1.25. *En la prueba del lema anterior, no es necesario que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean cerradas por extensiones.*

Los siguientes resultados son una generalización del lema de García-Rozas [GR99, Theorem 1.2.10].

Lema 1.26. *Para un par de clases de objetos $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}, \mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, se cumplen los enunciados (a) y (b).*

(a) *Si $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente y $\mathcal{A}$ es cerrada por epi-núcleos en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, entonces para toda sucesión exacta*

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0,$$

con $A, A' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $K \in \mathcal{X}$, tenemos que $K \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$.

(b) *Si $\mathcal{A}$ es $\mathcal{X}$ -resolvente y $\mathcal{B}$ es cerrada por mono-conúcleos en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, entonces para toda sucesión exacta*

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $B, B' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}$, tenemos que $C \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$.

Demostración. Probaremos (a), ya que el enunciado (b) se prueba de manera semejante. Dado que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ y $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente, utilizando 1.24, podemos concluir que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, el enunciado (a) se sigue de que $\mathcal{A}$ es cerrado por epi-núcleos en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. $\square$

Lema 1.27. *Para un par de clases de objetos $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}, \mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, $\omega \subseteq \mathcal{A}$ un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y $\alpha \subseteq \mathcal{B}$ un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *para toda sucesión exacta*

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0$$

con $A, A' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $K \in \mathcal{X}$, tenemos que $K \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$;

(b) *para toda sucesión exacta*

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $B, B' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}$, tenemos que $C \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$;

(c) $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sean $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Consideramos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

con $P \in \omega \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}$. Dado que $A, P \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}$, tenemos que $C \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Luego, de la sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1}(C, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(P, B),$$

usando que $C \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, se sigue que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, B) = 0 \forall n \geq 2$. Para el caso $n = 1$, se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B) = 0$, ya que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}, \mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Se sigue de un argumento dual al anterior.

(c) $\Rightarrow$ (b) Dada una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $B, B' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}$. Para $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $n > 0$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(A, B') = 0.$$

Por lo tanto, $C \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Se prueba de manera similar a (c) $\Rightarrow$ (b). □

Definición 1.28. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Decimos que un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de clases de objetos en $\mathcal{C}$ es $\mathcal{X}$ -**hereditario** si $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$. En caso de que un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sea $\mathcal{C}$ -hereditario, diremos que es **hereditario**.

Observación 1.29. En la prueba de 1.27 vimos que si tenemos un par $\mathcal{X}$ -hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, que admite un $\omega \subseteq \mathcal{A}$ generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y un $\alpha \subseteq \mathcal{B}$ cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:

(a) para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0$$

con $A, A' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $K \in \mathcal{X}$, tenemos que $K \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$;

(b) para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $B, B' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}$, tenemos que $C \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$.

Proposición 1.30. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por epi-núcleos y mono-conúcleos en $\mathcal{X}$, $\omega \subseteq \mathcal{A}$ un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y $\alpha \subseteq \mathcal{B}$ un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}$ es $\mathcal{X}$ -resolvente si y sólo si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario.
- (b) Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$, entonces $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente si y sólo si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario.

Demostración. Probaremos (a), ya que la prueba de (b) es dual.

Si $\mathcal{A}$ es $\mathcal{X}$ -resolvente, entonces por 1.24 sabemos que

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_1} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp_1} \cap \mathcal{X} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp}.$$

Por lo tanto, $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$.

Supongamos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario. Como $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, se tiene que $\mathcal{A}$ es cerrado por extensiones; y por hipótesis, sabemos que $\mathcal{A}$ contiene un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo a $\mathcal{X}$. Por lo que resta probar que $\mathcal{A}$ es cerrada por epi-núcleos en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Para ello, observamos que, por 1.29 y usando que $\mathcal{X}$ es cerrado por epi-núcleos en $\mathcal{X}$, para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0$$

con $A, A' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, tenemos que $K \in {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Así que, como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $K \in {}^{\perp}\mathcal{B} \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$. $\square$

1.3. Más resultados de Auslander-Buchweitz

En esta sección continuamos con la exposición de los resultados de [AB89] que utilizaremos más adelante. En ocasiones, modificaremos los resultados originales para dar una versión relativizada en nuestro contexto.

Lema 1.31. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{C}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) $\text{id}_{\mathcal{X}}(B) \leq \max\{\text{id}_{\mathcal{X}}(A), \text{id}_{\mathcal{X}}(C)\}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(B) \leq \max\{\text{pd}_{\mathcal{X}}(A), \text{pd}_{\mathcal{X}}(C)\}$,
- (b) $\text{id}_{\mathcal{X}}(A) \leq \max\{\text{id}_{\mathcal{X}}(B), \text{id}_{\mathcal{X}}(C) + 1\}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(A) \leq \max\{\text{pd}_{\mathcal{X}}(B), \text{pd}_{\mathcal{X}}(C) - 1\}$,
- (c) $\text{id}_{\mathcal{X}}(C) \leq \max\{\text{id}_{\mathcal{X}}(B), \text{id}_{\mathcal{X}}(A) - 1\}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(C) \leq \max\{\text{pd}_{\mathcal{X}}(A) + 1, \text{pd}_{\mathcal{X}}(B)\}$.

Demostración. Probaremos la primera desigualdad, la prueba de las demás son análogas. Podemos suponer que $\max \{ \text{id}_{\mathcal{X}}(A), \text{id}_{\mathcal{X}}(C) \} = n < \infty$. Para $X \in \mathcal{X}$ consideramos la sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, C),$$

de la cual podemos concluir que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, B) = 0$ para todo $k > n$, puesto que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, A) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, C) = 0$ para todo $k > n$. Por lo tanto, $\text{id}_{\mathcal{X}}(B) \leq n$. $\square$

Dado que parte de nuestro objetivo es explorar las dimensiones relativas a pares de cotorsión, comenzaremos relacionando las dimensiones entre dos clases.

Lema 1.32. *[AB89, p.16] Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces, se satisface que*

$$\text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}).$$

Demostración. Veamos que $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. Podemos suponer que $\text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = n$ es finita. En este caso, obtenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ y $k > n$. Lo que implica que $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. La otra desigualdad se prueba de manera análoga. $\square$

Recordamos el siguiente resultado.

Teorema 1.33. *[MS06, 2.1] Para $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados se cumplen.*

- (a) $\text{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L) \forall L \in \mathcal{C}$.
- (b) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \text{resdim}_{\mathcal{Y}}(L) \forall L \in \mathcal{C}$.

El siguiente teorema generaliza el resultado anterior. Para ello, basta tomar $\mathcal{Z} = \mathcal{C}$.

Teorema 1.34. *Para $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados se cumplen.*

- (a) $\text{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L) \forall L \in \mathcal{C}$.
- (b) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \text{resdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L) \forall L \in \mathcal{C}$.

En caso de que $\mathcal{Z}$ sea cerrada por extensiones, las siguientes desigualdades se satisfacen para todo $L \in \mathcal{Z}$:

- (a') $\text{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L),$
- (b') $\text{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{resdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L).$

Demostración. Probaremos el enunciado (a'). La prueba de (b') es dual a la de (a'), mientras que (a) y (b) son consecuencia inmediata de 1.33, pues

$$\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L) \text{ y } \text{resdim}_{\mathcal{Y}}(L) \leq \text{resdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L).$$

(a') Podemos asumir que $\text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) = n < \infty$ y $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L) = m < \infty$. Probaremos, por inducción sobre m , que $\text{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq n + m$.

Si $m = 0$, se tiene que $L \cong M \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ y no hay nada que probar.

Sea $m = 1$. Luego, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow 0$$

con $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$, ya que $L \in \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}$ es cerrado por extensiones. De modo que, para todo $X \in \mathcal{X}$ y $k > 0$, tenemos una sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k-1}(X, Y_1) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, L) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Y_0),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k-1}(X, Y_1) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Y_0) = 0$ para todo $k > n + 1$. Por lo tanto, $\text{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq n + 1 = \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L)$.

Sea $m \geq 2$. En tal caso, usando que $\mathcal{Z}$ es cerrado por extensiones, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} Y_0 \rightarrow \dots \rightarrow Y_m \rightarrow 0$$

donde $Y_i \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} \forall i \in [0, m]$, y $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(K) = m - 1$ para $K := \text{Coker}(f)$. Así que, por hipótesis de inducción

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(K) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(K) = \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L) - 1.$$

Finalmente, de 1.31 se sigue que

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{X}}(L) &\leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \text{id}_{\mathcal{X}}(K) + 1 \} \\ &\leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L) \} \\ &\leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) + \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}(L). \end{aligned}$$

□

Estamos listos para iniciar el estudio de las dimensiones asociadas a un par de cotorsión. Los siguientes resultados son generalizaciones de algunos que aparecen en [AHMH09] y [MS06].

Lema 1.35. *Para una clase $\mathcal{X}$ de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y un par de clases $\mathcal{X}$ -completo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para todo $M \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{X}}(M) &= \max \{ \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M), \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) \} \leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{A}}(M), \text{id}_{\mathcal{B}}(M) \}, \\ \text{pd}_{\mathcal{X}}(M) &= \max \{ \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M), \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) \} \leq \max \{ \text{pd}_{\mathcal{A}}(M), \text{pd}_{\mathcal{B}}(M) \}. \end{aligned}$$

(b) Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$, entonces

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(M) = \max \{ \text{id}_{\mathcal{A}}(M), \text{id}_{\mathcal{B}}(M) \} \text{ y } \text{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \max \{ \text{pd}_{\mathcal{A}}(M), \text{pd}_{\mathcal{B}}(M) \},$$

para todo $M \in \mathcal{C}$.

(c) Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario, entonces

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \quad \forall M \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \text{ y } \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(N) = \text{id}_{\mathcal{X}}(N) \quad \forall N \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}.$$

Demostración.

(a) Veamos la igualdad y la desigualdad dadas en la primera línea. Para ello observamos que, como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo, para todo $N \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Sea $M \in \mathcal{C}$. Por 1.31 y 1.32, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{id}_{\{N\}}(M) = \text{pd}_{\{M\}}(N) &\leq \max \{ \text{pd}_{\{M\}}(B), \text{pd}_{\{M\}}(A) - 1 \} \\ &\leq \max \{ \text{pd}_{\{M\}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}), \text{pd}_{\{M\}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \} \\ &\leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \} \\ &\leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{B}}(M), \text{id}_{\mathcal{A}}(M) \}. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \} \leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{B}}(M), \text{id}_{\mathcal{A}}(M) \}.$$

Por otro lado, es claro que

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(M) \geq \max \{ \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \}.$$

La prueba de la igualdad y la desigualdad dadas en la segunda línea del inciso (a) es análoga.

(b) Es inmediato de (a).

(c) Por (a) tenemos que

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \max \{ \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M), \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) \},$$

para todo $M \in \mathcal{C}$. Pero como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario, $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = 0$. Podemos concluir de lo anterior que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \forall M \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. La segunda igualdad del inciso (c) se prueba por dualidad.

□

Proposición 1.36. *Para una clase de objetos $\mathcal{X}$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y un par $\mathcal{X}$ -hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Sean $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\mathcal{X}$ -completo a derecha y $\mathcal{B} = \text{smd}(\mathcal{B})$.
Entonces:

- (a1) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B}) + \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) \forall X \in \mathcal{X}$;
- (a2) *todo* $X \in \mathcal{X}$ *satisface que* $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1$;
- (a3) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) \forall X \in \mathcal{X}$, *si* $\mathcal{X}$ *es cerrado por extensiones*;
- (a4) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1 \forall X \in \mathcal{X}$;
- (a5) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}$.

(b) Sean ${}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\mathcal{X}$ -completo a izquierda y $\mathcal{A} = \text{smd}(\mathcal{A})$.
Entonces:

- (b1) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}) + \text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) \forall X \in \mathcal{X}$;
- (b2) *todo* $X \in \mathcal{X}$ *satisface que* $\text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) + 1$;
- (b3) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) \forall X \in \mathcal{X}$, *si* $\mathcal{X}$ *es cerrada por extensiones*;
- (b4) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + \text{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + 1 \forall X \in \mathcal{X}$;
- (b5) ${}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$.

Demostración. Probaremos sólo (a), ya que (b) es dual de (a). Veamos que:

$$\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \forall X \in \mathcal{X}. \quad (1.C)$$

Sea $X \in \mathcal{X}$. Podemos asumir que $n := \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) < \infty$. Sea $n = 0$. Luego, para tener que $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) = 0$, basta ver que $X \in \mathcal{B}$. En efecto, por ser $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $\mathcal{X}$ -completo a derecha, existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Dado que η se escinde debido a que $n = 0$, se tiene que X es un sumando directo de B , y así, $X \in \mathcal{B}$. Notamos que con esto queda probado (a5).

Sea $n \geq 1$. Dado que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, existe una sucesión exacta

$$\epsilon : 0 \rightarrow X \xrightarrow{g_0} B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_{n-1}} B_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

con $B_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A_{i+1} := \text{Coker}(g_i) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ para todo $i \in [0, n-1]$. Ahora, como $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$ y $n = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X)$, podemos utilizar el lema del corrimiento para concluir que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, A_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+i}(A, X) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \quad \forall i \geq 1.$$

Luego, $A_n \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Entonces, de la sucesión exacta ϵ , concluimos que $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X) \leq n$; probándose 1.C.

Ahora bien, note que (a1) se sigue de 1.C y 1.33(a). Por otro lado, para cada $X \in \mathcal{X}$, usando que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, 1.C y 1.34(a), tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) &\leq \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X) \\ &\leq \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) \\ &\leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &\leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) + \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &= \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &\leq \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X). \end{aligned} \tag{1.D}$$

Note que (1.D) prueba la igualdad de (a2). Veamos ahora que

$$\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1, \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Sea $X \in \mathcal{X}$. Dado que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Luego, por 1.31 y 1.33(a), tenemos

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) &\leq \max\{\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(B), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(A) + 1\} \\ &= \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(A) + 1 \\ &\leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1 \\ &\leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) + \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1 \\ &= \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

Veamos ahora (a3). Sea $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones. Luego, por 1.34(a') tenemos que

para $X \in \mathcal{X}$,

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X),$$

y aplicando (1.D), se sigue (a3).

Finalmente, como $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(X) \forall X \in \mathcal{X}$, por (1.D), la prueba de (a4) se sigue de manera análoga a la prueba de la desigualdad en (a2). En efecto, dado que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Luego, por 1.31 y 1.33(a), tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(X) &\leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(B), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(A) + 1\} \\ &\leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + 1\} \\ &\leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1\} \\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.37. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario tal que $\mathcal{A} = \mathrm{smd}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{B} = \mathrm{smd}(\mathcal{B})$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) $\mathrm{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(M) \forall M \in (\mathcal{X}, \mathcal{B})^{\vee}$.
- (b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(M) \forall M \in (\mathcal{A}, \mathcal{X})^{\wedge}$.
- (c) Sea $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Entonces, $\forall X \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X) &= \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) \\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &= \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &\leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1. \end{aligned}$$

- (d) Sea ${}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Entonces, $\forall X \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(X) &= \mathrm{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) \\ &= \mathrm{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &= \mathrm{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \\ &\leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) + 1. \end{aligned}$$

Demostración.

- (a) Sea $M \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X}$. Procederemos por inducción sobre $n = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(M)$.
 En caso de que $n = 0$, tenemos que $M \cong N \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, así que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = 0$ debido a que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$.
 Observamos que si $n > 0$, entonces $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \geq 1$. En efecto, como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo y $M \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Dicha sucesión no se escinde ya que de lo contrario $M \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, lo cual contradice que $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(M) > 0$. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, M) \neq 0$ y así podemos concluir que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \geq 1$.
 Sea $n = 1$. Luego, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow 0,$$

con $Y_0, Y_1 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, ya que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones. Entonces, por 1.31

$$\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(Y_0), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(Y_1) + 1 \} = 1.$$

Por lo tanto, $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = 1$ ya que hemos observado que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \geq 1$.
 Sea $n > 1$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(N) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(N)$, para todo $N \in \mathcal{X}$ con $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(N) \leq n - 1$. Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} Y_n \rightarrow 0$$

con $Y_n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, $Y_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{X}$ para todo $i \in [0, n - 1]$. Además, para $K := \text{Im}(f_1)$, se tiene $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(K) = n - 1$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow Y_0 \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Note que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(K) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(K) = n - 1$, por hipótesis de inducción. Así que, por 1.31, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) &\leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(Y_0), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(K) + 1 \} = n, \quad \text{y} \\ n - 1 &= \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(K) \leq \max \{ \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(Y_0), \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) - 1 \} = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) - 1 \end{aligned}$$

debido a que hemos observado que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \geq 1$. Por lo tanto, $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = n$.

- (b) Se prueba de manera dual al inciso (a).
 (c) Se sigue de 1.36(a3,a2).
 (d) Se sigue de 1.36(b3,b2).

□

El siguiente lema es una generalización de [AB89, Proposition 3.6].

Lema 1.38. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, con ω $\mathcal{X}$ -inyectivo. Entonces*

- (a) $\omega^\wedge$ es $\mathcal{X}$ -inyectivo;
- (b) si $\omega = \text{add}(\omega)$ y es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, entonces

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = (\omega, \mathcal{X})^\wedge = \omega.$$

Demostración.

- (a) Es inmediato de 1.13(b).
- (b) Por (a) es claro que $(\omega, \mathcal{X})^\wedge \subseteq \mathcal{X} \cap \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$.
Por otro lado, dado que $X \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$ y que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow X' \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Además, dicha sucesión se escinde, pues $X \in \mathcal{X}^\perp$. Así que $X, X' \in \omega$. Por lo tanto,

$$(\omega, \mathcal{X})^\wedge \subseteq \mathcal{X} \cap \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp \subseteq \omega.$$

Para concluir, observamos que como $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y $0 \in \omega$, tenemos que $\omega \subseteq (\omega, \mathcal{X})^\wedge$.

□

Definición 1.39. [BMPS19, Definition 2.2] Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos.

- (a) Diremos que $\mathcal{X}$ es **gruesa a derecha** si es cerrada por extensiones, sumandos directos y mono-conúcleos en $\mathcal{X}$.
- (b) Diremos que $\mathcal{X}$ es **gruesa a izquierda** si es cerrada por extensiones, sumandos directos y epi-núcleos en $\mathcal{X}$.
- (c) Diremos que $\mathcal{X}$ es **gruesa** si es gruesa a derecha y a izquierda.

Lema 1.40. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por epi-núcleos en $\mathcal{X}$ y $\omega \subseteq \mathcal{X}$, entonces $\omega^\vee \subseteq \mathcal{X}$.*

Demostración. Sea $M \in \omega^\vee$. Luego, existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow W_0 \rightarrow W_1 \rightarrow \cdots \rightarrow W_n \rightarrow 0$$

con $W_i \in \omega$. Luego, como $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrado por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, se tiene de η que $M \in \mathcal{X}$. $\square$

Lema 1.41. [AB89, Lemma 4.2] Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, con $\omega = \text{smd}(\omega)$ un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $\mathcal{X} \cap \omega^\vee = \{X \in \mathcal{X} \mid \text{id}_{\mathcal{X}}(X) < \infty\}$;
- (b) $\text{id}_{\mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_{\omega}(M)$ para todo $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\vee$;
- (c) si $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda, entonces $\omega^\vee$ es gruesa a izquierda y

$$\omega^\vee = \{X \in \mathcal{X} \mid \text{id}_{\mathcal{X}}(X) < \infty\}.$$

Demostración. Sea $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\vee$. Por 1.34(a) tenemos que

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq \text{id}_{\mathcal{X}}(\omega) + \text{coresdim}_{\omega}(M) = \text{coresdim}_{\omega}(M) < \infty.$$

Por otro lado, sea $M \in \mathcal{X}$ con $\text{id}_{\mathcal{X}}(M) = n < \infty$. Veamos que $\text{coresdim}_{\omega}(M) \leq n$. En efecto, por ser ω un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow W_0 \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

con $W_0 \in \omega$ y $M' \in \mathcal{X}$. Si $n = 0$, se tiene que η se escinde, y así $M \in \omega$, por lo que $\text{coresdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M) = 0$. Supongamos ahora que $n \geq 1$. Luego, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow W_0 \rightarrow \dots \rightarrow W_{n-1} \rightarrow Z \rightarrow 0$$

con $W_i \in \omega$ y $Z \in \mathcal{X}$ debido a que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$. Así que por A.76 se sigue que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Z) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+k}(X, M) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X} \quad \forall k > 0.$$

Por lo tanto, $Z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp = \omega$ por 1.38(b). En conclusión, $\text{coresdim}_{\omega}(M) \leq n$, probándose (a) y (b).

Sea $\mathcal{X}$ gruesa a izquierda. Por 1.40 sabemos que $\omega^\vee \subseteq \mathcal{X}$. Luego, (c) se sigue de (a). $\square$

El siguiente resultado es una generalización de [AB89, Lemma 4.2].

Lema 1.42. Sean $(\mathcal{W}, \nu)$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ tales que $\nu = \text{smd}(\nu)$ es un cogenerador $\mathcal{W} \cap \mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{W} \cap \mathcal{X}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $\mathcal{W} \cap \mathcal{X} \cap \nu_{\mathcal{X}}^\vee = \{W \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \mid \text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{X}}(W) < \infty\}$;
- (b) $\text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M)$ para todo $M \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \cap \nu_{\mathcal{X}}^\vee$;

(c) si $\mathcal{W} \cap \mathcal{X}$ es gruesa a izquierda, entonces $\nu_{\mathcal{X}}^{\vee}$ es gruesa a izquierda y

$$\nu_{\mathcal{X}}^{\vee} = \{W \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \mid \text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{X}}(W) < \infty\}.$$

Demostración. Sea $M \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \cap \nu_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Por 1.34(a) tenemos que

$$\text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{X}}(M) \leq \text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{X}}(\nu) + \text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M) < \infty.$$

Sea $M \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$, con $\text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{X}}(M) = n < \infty$. Veamos que $\text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M) \leq n$. En efecto, por ser ν un cogenerador relativo en $\mathcal{W} \cap \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$\eta: 0 \rightarrow M \rightarrow N_0 \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

con $N_0 \in \nu$ y $Z \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$. Luego, si $n = 0$, se tiene que η se escinde, y así, $\text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M) = 0$. Supongamos ahora que $n \geq 1$. Luego, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow N_0 \xrightarrow{f_0} N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} N_{n-1} \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

con $N_i \in \nu \forall i \in [0, n-1]$, $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \forall i \in [0, n-2]$ y $Z \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$ debido a que ν es un cogenerador relativo en $\mathcal{W} \cap \mathcal{X}$. Así que, por A.76, se sigue que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(W, Z) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+k}(W, M) = 0 \forall W \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \forall k > 0.$$

Por lo tanto, $Z \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X} \cap (\mathcal{W} \cap \mathcal{X})^{\perp} = \nu$ por 1.38(b). En conclusión, tenemos que $\text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M) \leq n$, probándose (a) y (b).

Sea $\mathcal{W} \cap \mathcal{X}$ gruesa a izquierda. Por 1.40 sabemos que $\nu^{\vee} \subseteq \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$. Ahora, como $\nu_{\mathcal{X}}^{\vee} \subseteq \nu^{\vee} \subseteq \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$, (c) se sigue de (a). $\square$

Proposición 1.43. Para $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados se satisfacen.

- (a) Sean $\mathcal{Y}$ cerrada por coproductos finitos y $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones tales que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\infty}^{\vee} \subseteq {}^{\perp_1} \mathcal{Y}$. Entonces, para una sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, con $A, C \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\infty}^{\vee}$, se tiene que

$$\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(B) \leq \max \left\{ \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(A), \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(C) \right\}.$$

Más aún, las clases $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\infty}^{\vee}$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^{\vee}$ son cerradas por extensiones.

- (b) Si $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ es cerrada por extensiones y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\infty}^{\vee}$ es cerrada por extensiones, entonces $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\infty}^{\vee}$ es cerrada por sumandos directos.

Demostración.

- (a) Sea $\eta_0 : 0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta con $A, C \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Note que $B \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones. Por definición, existen sucesiones exactas

$$\eta_A^0 : 0 \rightarrow A \xrightarrow{a} Y_A \rightarrow A_1 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_C^0 : 0 \rightarrow C \xrightarrow{c} Y_C \rightarrow C_1 \rightarrow 0,$$

con $Y_A, Y_C \in \mathcal{Y}$ y $A_1, C_1 \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Dado que $C \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp_1}Y_A$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y_A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y_A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y_A) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, existe un morfismo $\alpha : B \rightarrow Y_A$ tal que $\alpha u = a$. Consideremos el morfismo $b := \begin{pmatrix} \alpha \\ cv \end{pmatrix} : B \rightarrow Y_A \oplus Y_C$. Dado que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ cv \end{pmatrix} u \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ cv \end{pmatrix} = cv,$$

del lema de la serpiente obtenemos las sucesiones exactas

$$\eta_B^0 : 0 \rightarrow B \xrightarrow{b} Y_0 \rightarrow B_1 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_1 : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0,$$

donde $A_1, C_1 \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$, $Y_0 := Y_A \oplus Y_C \in \mathcal{Y}$, debido a que $\mathcal{Y}$ es cerrado por coproductos finitos, y $B_1 \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones. Para repetir el argumento recursivamente, suponemos que tenemos sucesiones exactas

$$\eta_B^{k-1} : 0 \rightarrow B_{k-1} \xrightarrow{b_{k-1}} Y_{k-1} \rightarrow B_k \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_k : 0 \rightarrow A_k \xrightarrow{u_k} B_k \xrightarrow{v_k} C_k \rightarrow 0,$$

donde $A_k, C_k \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$, $X_k \in \mathcal{Y}$ y $B_k \in \mathcal{X} \forall k \leq n$. Observamos que existen sucesiones exactas cortas

$$\eta_A^n : 0 \rightarrow A_n \xrightarrow{a_n} Y_{A,n} \rightarrow A_{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_C^n : 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{c_n} Y_{C,n} \rightarrow C_{n+1} \rightarrow 0,$$

con $Y_{A,n}, Y_{C,n} \in \mathcal{Y}$ y $A_{n+1}, C_{n+1} \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Como $C_n \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_n, Y_{A,n}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B_n, Y_{A,n}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_n, Y_{A,n}) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, existe un morfismo $\alpha_n : B_n \rightarrow Y_{A,n}$ tal que $\alpha_n u_n = a_n$. Consideremos el morfismo $b_n := \begin{pmatrix} \alpha_n \\ c_n v_n \end{pmatrix} : B_n \rightarrow Y_{A,n} \oplus Y_{C,n}$. Dado que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_n = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n u_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ c_n v_n \end{pmatrix} u_n \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ c_n v_n \end{pmatrix} = c_n v_n,$$

por el lema de la serpiente obtenemos las sucesiones exactas

$$\eta_B^n : 0 \rightarrow B_n \xrightarrow{b_n} Y_n \rightarrow B_{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_{n+1} : 0 \rightarrow A_{n+1} \rightarrow B_{n+1} \rightarrow C_{n+1} \rightarrow 0,$$

donde $A_{n+1}, C_{n+1} \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$, $Y_n := Y_{A,n} \oplus Y_{C,n} \in \mathcal{Y}$ y $B_{n+1} \in \mathcal{X}$. Luego, las sucesiones $\{\eta_B^i\}_{i=0}^\infty$ inducen una sucesión exacta larga, con la que se puede ver que $B \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$.

Notemos además que, en caso de que $A, C \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\vee$, las sucesiones exactas $\{\eta_A^k\}_{k=0}^\infty$ y $\{\eta_B^k\}_{k=0}^\infty$ se pueden escoger de tal manera que representen una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -coresolución de longitud mínima. De modo que, para

$$m := \max \left\{ \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(A), \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(C) \right\},$$

tenemos que $A_k = 0 = C_k \forall k > m$. Entonces, considerando las sucesiones exactas $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$, esto implica que $B_k = 0 \forall k > m$. Por lo tanto, $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(B) \leq m$.

- (b) Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ cerrado por extensiones y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$ cerrado por extensiones. Consideramos una sucesión exacta que se escribe

$$0 \rightarrow W \rightarrow V \xrightarrow{f} U \rightarrow 0, \text{ con } V \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee.$$

Probaremos que $W \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Dado que $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$, tenemos que $U, W \in \mathcal{X}$. Por otro lado, como $V \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{g} Y_0 \rightarrow V_1 \rightarrow 0, \text{ con } Y_0 \in \mathcal{Y} \text{ y } V_1 \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee.$$

Luego, al considerar el pushout de f con g , obtenemos las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} \eta : 0 \rightarrow U \rightarrow W_1 \rightarrow V_1 \rightarrow 0, \\ \mu_0 : 0 \rightarrow W \rightarrow Y_0 \rightarrow W_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dado que $U, V_1 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, de η concluimos que $W_1 \in \mathcal{X}$. Además, al sumarle a η la sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{1} W \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow V \rightarrow W \oplus W_1 \rightarrow V_1 \rightarrow 0.$$

Observamos que en esta sucesión exacta tenemos $V, V_1 \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Entonces, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$ es cerrada por extensiones, $W \oplus W_1 \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Así, repitiendo el argumento anterior recursivamente, obtenemos una serie de sucesiones exactas

$$\{\mu_i : 0 \rightarrow W_i \rightarrow Y_i \rightarrow W_{i+1} \rightarrow 0\}_{i=0}^\infty$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & V & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & W_1 \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & V_1 & = & V_1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

donde $W_0 := W$, $Y_i \in \mathcal{Y}$ y $W_i \in \mathcal{X} \forall i \geq 0$. Por lo tanto, $W \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$.

□

El siguiente resultado está inspirado en un resultado de Victor R. Becerril Somera, Octavio Mendoza Hernández y Valente Santiago Vargas [BMS20, Theorem 3.29], que a su vez es una generalización de un resultado de Maurice Auslander e Idun Reiten [AR91, Proposition 5.1].

Teorema 1.44. *Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tales que $\mathcal{Y}$ es cerrada por coproductos finitos, $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee = (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$ y es cerrada por extensiones y sumandos directos. Más aún, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\vee = (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})^\vee$ y es cerrada por extensiones.
- (b) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$ es gruesa a izquierda si $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda.

Demostración.

- (a) La igualdad $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee = (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$ es consecuencia de que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y sumandos directos. Por otro lado, como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 0$, se tiene que

$$(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee \subseteq \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}).$$

Luego, aplicando 1.43 al par $(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ se sigue (a).

- (b) Sea $\mathcal{X}$ cerrada por epi-núcleos en $\mathcal{X}$. Por (a), basta ver que $(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$ también lo es. Consideremos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

en $\mathcal{C}$, con $B, C \in (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$. En particular existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \rightarrow W_0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

con $W_0 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, $C_0 \in (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Con dichas sucesiones exactas, se construye el diagrama conmutativo y exacto. Dado que $C, C_0 \in (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$, se sigue por (a) que $C' \in (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$. Dado que $W_0 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$; para ver que $A \in (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})_\infty^\vee$, por la sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow W_0 \rightarrow C' \rightarrow 0$, basta checar que $A \in \mathcal{X}$. Note que esto último se sigue de que $\mathcal{X}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos de objetos en $\mathcal{X}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & C_0 & = & C_0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

□

Observación 1.45. *Notemos que en 1.43(b) no podemos agregar ninguna afirmación sobre la dimensión de coresolución de un sumando directo de un objeto en $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\vee$. En efecto, supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos y extensiones y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_\infty^\vee$ es cerrada por extensiones. Sea $V = U \oplus W \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Siguiendo la prueba de 1.43(b), obtenemos una coresolución infinita para W dada por el intercalamiento de las sucesiones exactas*

$$0 \rightarrow W \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow 0 \text{ y } 0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, aún en el caso en que M sea un sumando directo de un objeto N con $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(N) = 0$, no podemos decir que $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(N)$. Sin embargo, con ayuda de 1.42, podemos afirmar lo siguiente.

Teorema 1.46. *Sea $(\mathcal{Z}, \nu)$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{Z} = \text{smd}(\mathcal{Z})$ es cerrada por extensiones, $\text{add}(\nu) = \nu$ y ν es $\mathcal{Z}$ -inyectivo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Tenemos que:*

$$(a1) \ (\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee = (\mathcal{Z}, \mathcal{Z} \cap \nu)_\infty^\vee;$$

$$(a2) \ (\mathcal{Z}, \nu)^\vee = (\mathcal{Z}, \mathcal{Z} \cap \nu)^\vee = \{M \in (\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee \mid \text{id}_{(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee}(M) < \infty\}; \text{ y}$$

(a3) *ambas clases son cerradas por extensiones y sumandos directos.*

$$(b) \ \text{id}_{(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee}(M) = \text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{Z}}(M) \ \forall M \in (\mathcal{Z}, \nu)^\vee.$$

(c) *$(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$ y $(\mathcal{Z}, \nu)^\vee$ son gruesas a izquierda si $\mathcal{Z}$ es gruesa a izquierda.*

Demostración.

(a)&(b) Por 1.44, tenemos que las dos primeras igualdades de (a) son ciertas, que $(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$ es cerrada por extensiones y sumandos directos, y que $(\mathcal{Z}, \nu)^\vee$ es cerrada por extensiones.

Sea $\mathcal{W} = (\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$. Luego, como ν es $\mathcal{Z}$ -inyectivo, se tiene que ν es un cogenerador $\mathcal{W}$ -inyectivo en $\mathcal{W}$. Entonces, por 1.42(a),

$$(\mathcal{Z}, \nu)^\vee = \mathcal{W} \cap (\mathcal{Z}, \nu)^\vee = \mathcal{W} \cap \mathcal{Z} \cap \nu_{\mathcal{Z}}^\vee = \{M \in \mathcal{W} \cap \mathcal{Z} \mid \text{id}_{\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}}(M) < \infty\}.$$

Note que $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{W}$. Por lo que

$$(\mathcal{Z}, \nu)^\vee = \{M \in (\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee \mid \text{id}_{(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee}(M) < \infty\} = \{M \in \mathcal{W} \mid \text{id}_{\mathcal{W}}(M) < \infty\}. \quad (1.E)$$

Más aún, por 1.42(b), se tiene (b). Ahora, sean $M \in (\mathcal{Z}, \nu)^\vee$ y $M = M_1 \oplus M_2$ en $\mathcal{C}$. Dado que $(\mathcal{Z}, \nu)^\vee \subseteq (\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$ y $(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$ es cerrada por sumandos directos, se tiene que $M_1, M_2 \in (\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$. Ahora bien, como

$$\max\{\text{id}_{\mathcal{W}}(M_1), \text{id}_{\mathcal{W}}(M_2)\} = \text{id}_{\mathcal{W}}(M) < \infty,$$

se sigue de 1.E que $M_1, M_2 \in (\mathcal{Z}, \nu)^\vee$.

- (c) Sea $\mathcal{Z}$ gruesa a izquierda. Por 1.44(b), se obtiene que $(\mathcal{Z}, \nu)_\infty^\vee$ es grueso a izquierda. Ahora bien, la prueba del inciso 1.44(b), se puede aplicar también para el caso $(\mathcal{Z}, \nu)^\vee$, pues ya probamos (a).

□

Corolario 1.47. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ gruesa a izquierda y $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Entonces,*

- (a) $\mathcal{Q} := (\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}, \mathcal{T})_\infty^\vee$ es gruesa a izquierda;
 (b) $\mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee = \mathcal{T}^\vee = \{M \in \mathcal{Q} \mid \text{id}_\mathcal{Q}(M) < \infty\}$ y es gruesa a izquierda.

Demostración. Note que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{Q} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Q}$. Ahora, como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\perp$, es claro que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{Q}$. Usando que $\text{Ext}_\mathcal{C}^i(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = 0 \ \forall i > 0$, se sigue que $\mathcal{T}$ es $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ -inyectivo, y dado que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, obtenemos que $\mathcal{T}$ es $\mathcal{Q}$ -inyectivo. Note ahora que $\mathcal{T}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{Q}$. Aplicando 1.46 al par $(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}, \mathcal{T})$, se tiene que $\mathcal{Q}$ es gruesa a izquierda. Ahora aplicando 1.41 y 1.42 al par $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ y a la clase $\mathcal{X}$, obtenemos (b), ya que $\mathcal{Q} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Q}$. □

Teorema 1.48. *[AB89, Proposition 2.1] Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, cerradas por sumandos directos en $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\text{pd}_{\omega^\wedge}(C) = \text{pd}_\omega(C) = \text{resdim}_\mathcal{X}(C) \quad \text{para todo } C \in \mathcal{X}^\wedge.$$

Demostración. Sean $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones, ω un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}^\wedge$.

- $\text{pd}_\omega(C) \leq \text{resdim}_\mathcal{X}(C)$.
 Se sigue de 1.33(b) que

$$\text{pd}_\omega(C) \leq \text{pd}_\omega(\mathcal{X}) + \text{resdim}_\mathcal{X}(C) = \text{id}_\mathcal{X}(\omega) + \text{resdim}_\mathcal{X}(C) = \text{resdim}_\mathcal{X}(C).$$

- $\text{resdim}_\mathcal{X}(C) = \text{pd}_\omega(C)$.
 Procederemos por inducción sobre $n = \text{resdim}_\mathcal{X}(C)$.
 Si $n = 0$, entonces $C \in \mathcal{X}$. Así que $\text{pd}_\omega(C) \leq \text{id}_\mathcal{X}(\omega) = 0$.
 Sea $n = 1$. Luego, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $X_0, X_1 \in \mathcal{X}$. Además, por 1.14 existe una sucesión exacta

$$\eta : \quad 0 \rightarrow Y_C \rightarrow X_C \xrightarrow{\varphi} C \rightarrow 0$$

donde $Y_C \in \omega^\wedge$, $X_C \in \mathcal{X}$ y φ es una $\mathcal{X}$ -precubierta.

Sea E el pullback de las sucesiones anteriores. Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow E \rightarrow X_C \rightarrow 0$$

se sigue que $E \in \mathcal{X}$. Además, como $\omega^\wedge$ es $\mathcal{X}$ -inyectivo, por 1.38, se sigue que la sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y_C \rightarrow E \rightarrow X_C \rightarrow 0$$

se escinde, por lo que $Y_C \in \mathcal{X}$.

Finalmente, observamos que η no se escinde, ya que $C \notin \mathcal{X}$, y $Y_C \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$ por 1.38. Por lo tanto, podemos concluir que $\text{Ext}_C^1(C, \omega) \neq 0$, y así que

$$1 = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \geq \text{pd}_{\omega}(C) \geq 1.$$

Sea $n > 1$. Por hipótesis de inducción, $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(N) = \text{pd}_{\omega}(N)$, para todo N con $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(N) < n$. Dado que $n = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$, existe una sucesión exacta

$$\eta: \quad 0 \rightarrow K \rightarrow X_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = n - 1$. Por lo que

$$\text{pd}_{\omega}(K) = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = n - 1.$$

De manera que existe $W \in \omega$ tal que $\text{Ext}_C^{n-1}(K, W) \neq 0$. Por otro lado, η induce la sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_C^{n-1}(X_0, W) \rightarrow \text{Ext}_C^{n-1}(K, W) \rightarrow \text{Ext}_C^n(C, W) \rightarrow \text{Ext}_C^n(X_0, W) = 0,$$

y así que $\text{Ext}_C^n(C, W) \neq 0$. Por lo tanto, $n \leq \text{pd}_{\omega}(C) \leq \text{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n$.

□

Lema 1.49. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario tal que $\mathcal{A}$, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{B}$ son cerradas por extensiones y sumandos directos. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen para $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

- (a) ω es un cogenerador $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$.
- (b) ω es un generador $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.
- (c) $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\omega}(M) = \text{pd}_{\omega^\wedge}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{X} \cap \mathcal{A}}(M)$ para todo

$$M \in (\mathcal{A}, \mathcal{X})^\wedge.$$

- (d) $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_\omega^\mathcal{X}(M)$ para todo $M \in (\omega, \mathcal{X})^\wedge$.
- (e) $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{id}_\omega(M) = \text{id}_{\omega^\vee}(M) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_\mathcal{B}^\mathcal{X}(M)$ para todo $M \in (\mathcal{X}, \mathcal{B})^\vee$.
- (f) $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_\omega^\mathcal{X}(M)$ para todo $M \in (\mathcal{X}, \omega)^\vee$.

Demostración.

- (a) Debido a que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario, tenemos que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$. En particular, $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\omega) \leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$. Por lo tanto, ω es $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -inyectivo. Ahora, para probar que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, observamos que como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo, para todo $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow X' \rightarrow 0$$

con $W \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $X' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Pero como $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, se sigue que $W \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \omega$.

- (b) Se prueba de manera dual a (a).
- (c) Sea $M \in (\mathcal{A}, \mathcal{X})^\wedge$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones se sigue que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{X})^\wedge \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\wedge.$$

Así que por 1.48 y (a) tenemos que

$$\text{pd}_{\omega^\wedge}(M) = \text{pd}_\omega(M) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M).$$

Más aún, por 1.37(b) se tiene que

$$\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_\mathcal{A}^\mathcal{X}(M).$$

Además, como $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones, se tiene que

$$\text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \leq \text{resdim}_\mathcal{A}^\mathcal{X}(M).$$

Así que, como

$$\text{pd}_\omega(M) = \text{pd}_{\omega^\wedge}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) \leq \text{resdim}_\mathcal{A}^\mathcal{X}(M) = \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M),$$

basta mostrar que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) \leq \text{pd}_\omega(M)$ para concluir lo deseado. Para ello, podemos asumir que $\text{pd}_\omega(M) = m < \infty$. Además, sabemos que

$$\text{pd}_\omega(M) \leq \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_\mathcal{A}^\mathcal{X}(M) < \infty,$$

por lo que existe un entero $t \geq 0$ tal que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = m + t$. Sea $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Utilizando (b) podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B_t \rightarrow A_{t-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

con $B_t \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $A_i \in \omega \forall i \in [0, \dots, t-1]$. Así que, como

$$A_i \in \omega \subseteq M^{\perp > m} \forall i \in [0, \dots, t-1],$$

por el lema del corrimiento A.76 tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+t}(M, B_t) \forall k > m.$$

Pero, como $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = m + t$, se sigue que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+t}(M, B_t) = 0 \forall k > m.$$

Por lo tanto, $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) \leq m = \text{pd}_{\omega}(M)$.

- (d) Sea $M \in (\omega, \mathcal{X})^\wedge$. Por 1.34(b') y dado que $\omega = \omega \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones, tenemos que

$$\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) \leq \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\omega) + \text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M).$$

Veamos, por inducción sobre $n = \text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M)$, que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M)$.

En caso de que $n = 0$, se sigue que $M \in \omega$. Por lo que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = 0$.

Sea $n > 0$. Por hipótesis de inducción $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(N) = \text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(N)$, para todo $N \in \mathcal{X}$ con $\text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(N) < n$. Dado que $n = \text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M)$, tenemos una sucesión exacta

$$\eta: 0 \rightarrow K \rightarrow W_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con $W_0 \in \omega$, $K \in (\omega, \mathcal{X})^\wedge$ y $\text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(K) = n - 1$. Por lo que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(K) = n - 1$. Además, por 1.31, tenemos que

$$n - 1 = \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(K) \leq \max\{\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) - 1, \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(W_0)\}. \quad (1.F)$$

Observamos que en este caso $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) > 0$. Efectivamente, supongamos que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = 0$. Ahora bien, como $\omega \subseteq \mathcal{A}$, se sigue que $(\omega, \mathcal{X})^\wedge \subseteq (\mathcal{A}, \mathcal{X})^\wedge$. Así que por (c), sabemos que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\omega^\wedge}(M)$. Luego, dado que $K \in \omega^\wedge$, se tiene que η se escinde, lo que implica que $M \in \omega$, contradiciendo que $\text{resdim}_{\omega}^{\mathcal{X}}(M) > 0$. Por lo tanto, $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) > 0$, y así por (1.F) podemos concluir que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = n$.

Por último, (e) y (f) se prueban de manera dual a (c) y (d).

□

Teorema 1.50. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario tal que $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerradas por extensiones y sumandos directos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen para $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.*

(a) $\omega = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = (\omega, \mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\wedge$. Más aún,

(a1) se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) &= \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) &&= \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \\ &= \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) &&= \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \\ &= \text{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) &&= \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \\ &= \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) &&= \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}); \end{aligned}$$

(a2) $\text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) < \infty$ si, y sólo si, $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \omega^\vee$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) < \infty$; y en tal caso

$$\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}, \mathcal{B})^\vee \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee \text{ y } \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega).$$

(b) $\omega = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \omega^\vee = (\mathcal{B} \cap \mathcal{X}, \omega)^\vee$. Más aún,

(b1) se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) &= \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) &&= \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \\ &= \text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) &&= \text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \\ &= \text{resdim}_{\omega}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) &&= \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \\ &= \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) &&= \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

(b2) $\text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$ si, y sólo si, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \omega^\wedge$ y $\text{id}_{\mathcal{X}}(\omega) < \infty$; y en tal caso

$$\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A}, \mathcal{X})^\wedge \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\wedge \text{ y } \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{X}}(\omega).$$

Demostración.

(a) Veamos que valen las igualdades del inciso (a). En efecto, por 1.49(a), se tiene que ω es un cogenerador $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Luego, basta aplicar 1.38.

(a1) Por 1.37(c), tenemos que

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) &= \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \text{ y} \\ \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}') &= \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}') = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}') = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}'), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Por otro lado, por 1.35, sabemos que

$$\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}).$$

Ahora bien, como $\omega \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ tenemos que

$$\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \leq \text{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}).$$

Aseguramos que $\text{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})$. Para lo cual podemos asumir que $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) < \infty$. Por otro lado, por 1.49(a), podemos aplicar 1.41 al par $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}, \omega)$; y como $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) < \infty$, se sigue que

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \{Z \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \mid \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(Z) < \infty\} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \cap \omega^{\vee} \subseteq \omega^{\vee};$$

y además $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})$. Por lo que

$$\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}') \leq \text{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A}') \leq \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}') = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}').$$

Luego $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})$, probándose (a1).

(a2) ($\Rightarrow$) Dado que $\text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) < \infty$, por (a), se tiene $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$; y así $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}, \mathcal{B})^{\vee} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^{\vee}$, debido a que $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones. Más aún, en la prueba de (a), vimos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \omega^{\vee}$. Luego, por 1.49(e) y (a), podemos concluir que

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = \text{id}_{\omega}(\mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}).$$

($\Leftarrow$) Sean $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \omega^{\vee}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = n < \infty$. Ahora bien, por 1.13 y (a), se tiene de $\omega \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \omega^{\vee}$, que

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega^{\vee}) \geq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}).$$

(b) La prueba es dual a la de (a).

□

1.4. La clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(M)$

Recientemente, en trabajos de Silvana Bazzoni y Jiaqun Wei, entre los cuales podemos citar especialmente [Baz04] y [Wei05], se ha presentado la clase de los módulos n - M -generados, denotada como $\text{Gen}_n(M)$. El propósito de esta sección es presentar una generalización de dicha clase, así como de sus propiedades básicas.

Definición 1.51. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X}, \mathcal{T}$ clases de objetos en $\mathcal{C}$. Denotamos por $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, para $n \geq 1$, a la clase de objetos $C \in \mathcal{C}$ que admiten una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow K \rightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} C \rightarrow 0,$$

donde $\text{Ker}(f_i) \in \mathcal{X}$ y $T_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, para todo $i \in [1, n]$. Tenemos también las clases $\text{Gen}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) := \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}^{\oplus})$ y $\text{gen}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) := \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}^{\oplus < \infty})$. Para el caso de un objeto $T \in \mathcal{C}$, escribiremos $\text{Gen}_n^{\mathcal{X}}(T) := \text{Gen}_n^{\mathcal{X}}(\text{Add}(T))$ y $\text{gen}_n^{\mathcal{X}}(T) := \text{gen}_n^{\mathcal{X}}(\text{add}(T))$. Note que $\text{gen}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \subseteq \text{Gen}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ ya que $\mathcal{T}^{\oplus < \infty} \subseteq \mathcal{T}^{\oplus}$. En caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, definimos $\text{Fac}_n(\mathcal{T}) := \text{Fac}_n^{\mathcal{C}}(\mathcal{T})$, $\text{Gen}_n(\mathcal{T}) := \text{Gen}_n^{\mathcal{C}}(\mathcal{T})$ y $\text{gen}_n(\mathcal{T}) := \text{gen}_n^{\mathcal{C}}(\mathcal{T})$.

De forma similar a como $\text{Fac}_1(\mathcal{T})$ es cerrado por cocientes, para toda clase $\mathcal{T}$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.52. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones tal que $0 \in \mathcal{X}$. Entonces, para toda sucesión exacta $0 \rightarrow K \rightarrow B \xrightarrow{f} B' \rightarrow 0$, con $K \in \mathcal{X}$ y $B \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, se tiene que $B' \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$. En particular, $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ es cerrada por 1-cocientes en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Observamos que, como $0 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, $\mathcal{X}$ es cerrada por isomorfismos. Dado $B \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow M \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Consideramos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K' \rightarrow M \xrightarrow{fg} B' \rightarrow 0.$$

Probaremos que $K' \in \mathcal{X}$ para concluir lo deseado. Por la propiedad universal del núcleo, podemos construir el diagrama conmutativo adjunto. Entonces, por el lema de la serpiente tenemos que $C' \cong K \in \mathcal{X}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & K' & \rightarrow & C' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M & = & M & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & B & \rightarrow & B' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

□

El siguiente lema generaliza [Wei05, Proposition 3.7].

Lema 1.53. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ una clase en $\mathcal{C}$ cerrada por extensiones. Si $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_{n+1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, entonces $\text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ para todo $k \geq 1$. En particular, $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ es cerrada por n -cocientes en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ es inmediato que

$$\text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \supseteq \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}.$$

Por lo que basta probar que $\text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Procedemos por inducción.

Sea $k = 1$. Note primero que $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Luego, si tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} M' \rightarrow X \rightarrow 0$$

con $X, K \in \mathcal{X}$ y $M' \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, también tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow M_1 \xrightarrow{g} M' \rightarrow 0$$

con $M_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $K_1 \in \mathcal{X}$. Considerando el pullback de f y g y usando que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, podemos concluir que $X \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$.

Sea $k > 1$. Consideramos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} C_k \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{f_1} M \rightarrow 0$$

con $M \in \mathcal{X}$, $C_i \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ y $\text{Ker}(f_i) \in \mathcal{X}$. Observamos que

$$M_1 := \text{Ker}(f_1) \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}.$$

Por lo que $M_1 \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, por hipótesis de inducción. En conclusión, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} C_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $M_1 \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ y $C_1 \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$.

Por otro lado, dado que $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_{n+1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ y $C_1 \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C' \rightarrow T_1 \xrightarrow{p} C_1 \rightarrow 0$$

con $T_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $C' \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Luego, al considerar el pull-back de i con p , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C' \rightarrow Y \xrightarrow{p'} M_1 \rightarrow 0.$$

Ahora, dado que $M_1 \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M'_1 \rightarrow T'_1 \xrightarrow{p''} M_1 \rightarrow 0$$

con $T'_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $M'_1 \in \text{Fac}_{k-1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$.

Así que al tomar el pull-back de p' y p'' , obtenemos una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & C' & = & C' & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M'_1 = M'_1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & T'_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

$$0 \rightarrow C' \rightarrow X \rightarrow T'_1 \rightarrow 0,$$

con $C' \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ y

$$T'_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X},$$

lo que implica que $X \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ ya que por hipótesis $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ es cerrado por extensiones. Por otro lado, del pullback también obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M'_1 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$$

donde $M'_1 \in \text{Fac}_{k-1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_{k-1}^{\mathcal{X}}(\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ y $X \in \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, lo que implica que $Y \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $Y \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, por hipótesis de inducción.

Finalmente, note que del primer pullback se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y \rightarrow T_1 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde $Y \in \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ y $T_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, lo que implica que $M \in \text{Fac}_{k+1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. $\square$

2. Clases n - $\mathcal{X}$ -tilting

En este capítulo desarrollaremos una teoría tilting relativa en una categoría abeliana. Nos basaremos principalmente en los trabajos [AHUC01], de Lidia Angeleri Hügel y Flávio Ulhoa Coelho, y [PŠ19b], de Leonid Positselski y Jan Št'ovíček. Recordemos la definición de R -módulo tilting como punto de referencia.

Definición 2.1. [AHUC01, Section 2] Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$. Se dice que T es un R -módulo **n -tilting** si se cumplen las siguientes condiciones:

T1 $\text{pd}(T) \leq n$,

T2 $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$, y

T3 $\text{coresdim}_{\text{Add}(T)}(R) < \infty$.

Si T cumple las primeras dos condiciones diremos que es **n -tilting parcial**.

A grandes rasgos, el objetivo de este capítulo es encontrar objetos tilting T respecto a una clase $\mathcal{X}$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Veremos que la definición adecuada para nuestro cometido utilizará condiciones similares a la definición anterior. A saber, cambiaremos T1 por $\text{pd}_{\mathcal{X}}(T) \leq n$, T2 por $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp \cap \mathcal{X}$, y T3 por $\text{coresdim}_{\text{Add}(T)}^{\mathcal{X}}(\omega) < \infty$, donde ω es un generador relativo en $\mathcal{X}$. Estas condiciones las llamaremos (T1), (T2) y (T3), y junto con dos condiciones más, que llamaremos (T4) y (T5), desarrollaremos nuestra teoría. Cabe decir que, por motivos técnicos, nuestra definición principal no será de *objeto* n - $\mathcal{X}$ -tilting, sino de *clase* n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Dada una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting $\mathcal{T}$, nos interesará estudiar principalmente el par $\mathcal{P} = ({}^\perp(\mathcal{T}^\perp), \mathcal{T}^\perp)$. Se puede ver que, para una clase arbitraria $\mathcal{T}$, por lo general dicho par no es de cotorsión y no induce preenvolventes ni precubiertas. Sin embargo, mostraremos en 2.23 que en nuestro contexto, $\mathcal{P}$ es un par $\mathcal{X}$ -hereditario y $\mathcal{X}$ -completo. Más aún, mostraremos que $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ y que ${}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})_{\mathcal{X}}^\vee = {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Estas propiedades serán de gran importancia y tendrán un gran número de aplicaciones en el capítulo.

Ante la riqueza de los pares descritos, introduciremos la noción de *par* n - $\mathcal{X}$ -tilting. Éstos se definen como ciertos pares de cotorsión a izquierda $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tales que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, con $\mathcal{T}$ una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting. En 2.72 y 2.75, veremos que los pares n - $\mathcal{X}$ -tilting se pueden caracterizar por medio de dimensiones homológicas relativas, junto con otras propiedades de cerradura y de existencia de aproximaciones.

2.1. Tilting restringido a una clase

En lo que sigue, introduciremos nuestra noción general de n - $\mathcal{X}$ -tilting y estudiaremos algunas propiedades básicas. Cabe decir que esta noción es el resultado del estudio de diferentes generalizaciones del concepto de tilting, entre los cuales podemos resaltar los recientes trabajos de Leonid Positsleski y Jan Št'ovíček [PŠ19a] y de Pedro Nicolás, Manuel Saorín y Alexandra Zvonareva [NSZ19].

Definición 2.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos. Decimos que una clase $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting, con $n \in \mathbb{N}$, si las siguientes condiciones se satisfacen.

- (T0) $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$.
- (T1) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$.
- (T2) $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$.
- (T3) Existe un ω generador relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$.
- (T4) Existe un $\alpha \subseteq \mathcal{X}^{\perp} \cap \mathcal{T}^{\perp}$ cogenerador relativo en $\mathcal{X}$.
- (T5) Todo $Z \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ tiene una $\mathcal{T}$ -precubierta $T' \rightarrow Z$, con $T' \in \mathcal{X}$.

Definición 2.3. Una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ se dice que es **grande** (**pequeña**, respectivamente) si $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus}$ ($\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus < \infty}$, respectivamente). Decimos que un objeto $T \in \mathcal{C}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting **grande** (n - $\mathcal{X}$ -tilting **pequeño**, respectivamente) si $\text{Add}(T)$ ($\text{add}(T)$, respectivamente) es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Observación 2.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $T \in \mathcal{C}$.

- (a) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\text{add}(T)) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(T)$ y $(\text{add}(T))^{\perp} = T^{\perp}$.
- (b) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\text{Add}(T)) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(T)$ y $(\text{Add}(T))^{\perp} = T^{\perp}$ si $\mathcal{C}$ es Ab_4 .
- (c) $\text{Add}(T)$ es precubriente en $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ es Ab_3 .

Observación 2.5. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$.

- (a) Los enunciados (T1), (T2), (T3), (T4) y (T5) dependen de la clase $\mathcal{X}$; por lo que en caso de que una clase cumpla alguna de ellos, agregaremos la frase “respecto a $\mathcal{X}$ ”. Sin embargo, en caso de que no sea ambiguo a qué clase $\mathcal{X}$ nos estamos refiriendo, omitiremos tal aclaración.
- (b) Los enunciados (T1), (T2) y (T3) surgen como una generalización de la definición de R -módulo n -tilting de [AHUC01].
- (c) La propiedad (T4) nos permite probar, usando 1.9(a), que: (T1) es equivalente a que la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{T}^{\perp}$ sea cerrada por n -cocientes en $\mathcal{X}$.

- (d) La propiedad (T5) se usa para probar (ver 2.19 y 2.21) que: si $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting, entonces $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.
- (e) Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$. En tal caso, (T4) se satisface siempre que exista un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$; y por otro lado, (T5) se satisface siempre que $\mathcal{T}$ sea precubriente.
En efecto, en caso de que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ y que α sea un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, se tiene que $\alpha \subseteq \mathcal{X}^\perp \subseteq \mathcal{T}^\perp$.
- (f) De la condición (T3), en caso de que ω sea $\mathcal{X}$ -proyectivo y cerrado por sumandos directos, sabemos por el dual de [BMPS19, Proposition 2.7] que $\omega = {}^\perp \mathcal{X} \cap \mathcal{X}$ y

$$\mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \{X \in \mathcal{X} \mid \text{pd}_{\mathcal{X}}(X) < \infty\}.$$

Más aún, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_{\omega}(M)$ para todo $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$.

- (g) En la Sección 2.4 veremos que si $\mathcal{C}$ es Ab3 y $\mathcal{X}$ es una clase gruesa, las condiciones (T4) y (T5) se simplifican.
- (h) Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting y $\omega = \text{smd}(\omega)$ un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^\vee$. Por 1.47, tenemos que si $n = 0$, entonces $\omega = \mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{X}$.
- (i) Por el resto del capítulo, el entero no negativo n estará fijo. En caso de decir que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T1), se debe entender que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$. En caso de que se diga que $\mathcal{T}$ satisface (T3), siempre se entenderá que ω es el generador relativo en $\mathcal{X}$ que satisface (T3).

Recientemente ha surgido una noción de objeto n -tilting, en categorías abelianas, en los trabajos de Leonid Positsleski y Jan Šťovíček [PŠ19a] y de Pedro Nicolás, Manuel Saorín y Alexandra Zvonareva [NSZ19]. A continuación veremos que esta noción coincide con el de n - $\mathcal{X}$ -tilting cuando $\mathcal{X} = \mathcal{C}$ y existe un cogenerador inyectivo en $\mathcal{C}$.

Definición 2.6. [PŠ19b, Section 2, Theorem 3.4(3)] Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3, Ab3* con un cogenerador inyectivo y $T \in \mathcal{C}$. Diremos que T es **n -tilting de PS** si satisface las siguientes condiciones:

(PST1) $\text{pd}(T) \leq n$;

(PST2) $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$;

(PST3) existe una clase generadora $\mathcal{G}$ en $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{G} \subseteq (\text{Add}(T))^\vee$.

Ejemplo 2.7. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3, Ab3* con un cogenerador inyectivo y $T \in \mathcal{C}$. Note que en este caso, $\mathcal{C}$ también es Ab4 [Pop73, Chapter 3, Corollary 2.9, p.73]. Entonces, T es n -tilting de PS si y sólo si T es n - $\mathcal{C}$ -tilting grande. En efecto, al tomar $\mathcal{X} = \mathcal{C}$ las condiciones (T1), (T2) y (T3) coinciden con las condiciones (PST1), (PST2) y (PST3). Las condiciones (T4) y (T5), se satisfacen trivialmente.

Ejemplo 2.8. $T \in \text{Mod}(R)$ es n -tilting en el sentido de [AHUC01] si, y sólo si, T es n - $\text{Mod}(R)$ -tilting grande. En efecto, en [PŠ19b, Corollary 3.6] se muestra que un R -módulo T es n -tilting si y sólo si es n -tilting de PS.

Por ahora omitiremos la prueba del hecho anterior. Sin embargo, en 2.44 veremos un resultado semejante a [PŠ19b, Corollary 3.6], mostrando una definición equivalente de n - $\mathcal{X}$ -tilting en el caso en que exista un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo a $\mathcal{X}$.

Ejemplo 2.9. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $0 \in \mathcal{X}$. Note que: $\mathcal{X} \subseteq \text{Inj}(\mathcal{C})$ si y sólo si $\mathcal{C}$ es 0 - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña. En el caso que $\mathcal{C}$ no sea de tipo finito (i.e. no existe $T \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} = \text{add}(T)$) tenemos un ejemplo de una clase tilting pequeña que no proviene de un objeto tilting pequeño.

Ejemplo 2.10. $T \in \text{Mod}(R)$ es un 0 - $\text{Add}(T)$ -tilting grande si, y sólo si, $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$. En particular, todo módulo n -tilting T es 0 - $\text{Add}(T)$ -tilting grande.

En efecto, si $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$, entonces $\text{Add}(T) \subseteq \text{Add}(T)^\perp \cap {}^\perp \text{Add}(T)$. Por lo tanto, $\text{Add}(T)$ es un generador $\text{Add}(T)$ -proyectivo relativo a $\text{Add}(T)$ tal que $\text{Add}(T) \subseteq (\text{Add}(T))_{\text{Add}(T)}^\vee$ y también es un cogenerador $\text{Add}(T)$ -inyectivo relativo a $\text{Add}(T)$ tal que $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$ y que satisface (T5) trivialmente.

Ejemplo 2.11. Sean R un anillo noetheriano a izquierda y $T \in \text{Inj}(R)$ con $\text{pd}(T) = \infty$. Se sigue del ejemplo anterior que T es un R -módulo 0 - $\text{Add}(T)$ -tilting grande que no es n -tilting.

Ejemplo 2.12. Sean R un anillo noetheriano a izquierda y $\mathcal{G}\text{Inj}(R)$ la clase de R -módulos Gorenstein-inyectivos, es decir la clase de R -módulos X que admiten una sucesión exacta de R -módulos inyectivos

$$\eta: \cdots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \xrightarrow{f} I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots$$

tal que $\text{Im}(f) = X$ y $\text{Hom}_R(I, \eta)$ es exacta para todo $I \in \text{Inj}(R)$. Es bien sabido que existe T tal que $\text{Add}(T) = \text{Inj}(R)$ (ver [EJ11, 5.4.1]). Veamos que T es 0 - $\mathcal{G}\text{Inj}(R)$ -tilting grande. Por [EJ11, Proposition 10.1.3.(5)] sabemos que $\mathcal{G}\text{Inj}(R) \subseteq \text{Inj}(R)^\perp$, lo que implica que

$$\text{Add}(T) = \text{Add}(T) \cap \mathcal{G}\text{Inj}(R) \subseteq {}^\perp \mathcal{G}\text{Inj}(R).$$

En particular $\text{pd}_{\mathcal{G}\text{Inj}(R)}(T) = 0$, por lo que se satisfacen (T1) y (T2). Luego, como $\text{Add}(T) = \text{Inj}(R) \subseteq \mathcal{G}\text{Inj}(R)$, sabemos que $\text{Add}(T)$ es un cogenerador $\mathcal{G}\text{Inj}(R)$ -relativo a $\mathcal{G}\text{Inj}(R)$; y por definición, sabemos que $\text{Add}(T)$ es un generador $\mathcal{G}\text{Inj}(R)$ -proyectivo relativo a $\mathcal{G}\text{Inj}(R)$. De lo anterior se siguen que se satisfacen trivialmente (T3) y (T4). Para (T5), basta recordar que la clase $\text{Add}(M)$, con $M \in \text{Mod}(R)$, es siempre precubriente.

2.1.1. Resultados elementales de los axiomas de n - $\mathcal{X}$ -tilting

En esta primer sección exploraremos los resultados elementales de este capítulo. Nuestro objetivo será dar una exposición de resultados con enunciados simples para dar una idea general de las propiedades de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting. En las secciones que siguen, daremos resultados más técnicos y detallados, utilizando dimensiones homológicas, de resolución y de coresolución para explorar las propiedades de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Lema 2.13. *Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T2), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces*

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}.$$

(b) *Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T1) y (T4), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},n}^\vee$.*

Demostración.

(a) Por (T2), $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Además, como $\mathcal{T} \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$, se tiene que

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp).$$

(b) Teniendo que $\mathcal{T}$ satisface (T1) y (T4), con respecto a $\mathcal{X}$, basta aplicar 1.11(a1). □

Lema 2.14. *Para $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(a) $\mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$;

(b) *si $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{T}$ satisface (T0) y (T2), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces*

$$(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{T}^\perp = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}.$$

Demostración.

(a) La primer contención es clara. Ahora bien, por 1.13, tenemos que

$$\text{pd}_{\mathcal{T}^\perp}(\mathcal{T}^\vee) = \text{pd}_{\mathcal{T}^\perp}(\mathcal{T}) = 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$, y es inmediato que ${}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$.

(b) Sea $A \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{T}^\perp$. Luego, existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow T_0 \rightarrow A' \rightarrow 0$$

con $T_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $A' \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \subseteq \mathcal{T}^{\vee} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$ por (a). Entonces, como $A \in \mathcal{T}^{\perp}$ se tiene que η se escinde. Por lo tanto, $A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ debido a que $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$.

Ahora, dado que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}$, se tiene que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{T}^{\perp}$ por (T2).

□

Lema 2.15. Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{T}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{T}$ satisface (T0), (T1), (T2) y (T4), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces se tiene

$$(a) \text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}((\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T});$$

$$(b) (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},k}^{\vee} \forall k > \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}).$$

Demostración. Sean $\omega := (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X}$ y $m := \max\{1, \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})\}$.

(a) Sea $X \in \omega$. Por definición, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y_0 \rightarrow X_0 \rightarrow 0,$$

con $Y_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $X_0 \in \omega$. Así, recursivamente, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{m-1} \xrightarrow{f_m} Y_m \rightarrow 0,$$

donde $Y_m \in \omega$, $Y_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{X} \forall i \in [1, m-1]$. Además, como $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^{\perp}$ por (T2), se sigue de 1.9 que $Y_m \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Entonces, por 2.14(b), $Y_m \in \omega \cap \mathcal{T}^{\perp} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\omega) \leq m$.

Supongamos ahora que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = 0$. Luego, $\mathcal{T} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$ y para cada $W \in \omega$ existe una sucesión exacta $\eta_W : 0 \rightarrow W \rightarrow T_W \rightarrow C_W \rightarrow 0$ con $T_W, C_W \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Ahora, como $\mathcal{T} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $\omega \subseteq \mathcal{X}$, tenemos $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{T} \cap \mathcal{X}, \omega) = 0$. Por lo que η_W se escinde para todo $W \in \omega$. En particular $\omega \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y así $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.

(b) Sea $M \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Luego, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow T_0 \rightarrow M' \rightarrow 0$$

con $T_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $M' \in \omega$. Se sigue de (a) que $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(M') \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) =: n$. De modo que $M' \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},n}^{\vee}$, y así que $M \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},n+1}^{\vee}$. Por lo tanto, para todo $k > n$ tenemos que

$$(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},n+1}^{\vee} \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},k}^{\vee} \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}.$$

□

Corolario 2.16. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting y $\omega = \text{smd}(\omega)$ un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en

$\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee$. Entonces, $\omega = \mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{X}$ y $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^\mathcal{X}(\omega) \leq \text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T})$. Más aún, $\omega = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ si $\text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T}) = 0$.

Demostración. Por 2.5(f), $\omega = \mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{X}$. Dado que $\omega \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y $\omega \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee$, se sigue que $\omega \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{X}$. Luego, por 2.15(a), $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^\mathcal{X}(\omega) \leq \text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T})$.

Supongamos que $\text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T}) = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{T} \subseteq {}^\perp \mathcal{X}$ y $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^\mathcal{X}(\omega) = 0$. Por lo que $\omega \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{X} = \omega$. $\square$

Observación 2.17. En caso de que $\mathcal{X}$ contenga al objeto cero en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \forall C \in \mathcal{C}$.

El siguiente lema generaliza a [AHUC01, Lemma 2.3].

Lema 2.18. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X}$ una clase de objetos cerrada por extensiones. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T3), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Por (T3) existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow W \xrightarrow{a} A \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $K \in \mathcal{X}$. Además, por (T3) y 2.14(a) existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{b} B \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{T}$ y $C \in \mathcal{T}^\vee \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$. Note que $B \in \mathcal{X}$, ya que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y $\omega \subseteq \mathcal{X}$. Ahora bien, considerando el pushout de b y a , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow B \xrightarrow{x} B' \rightarrow 0,$$

y una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{t} B' \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $B' \in \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$, que se escinde debido a que $A \in \mathcal{T}^\perp$ y $C \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$. Por lo tanto, existe un epimorfismo $y : B' \rightarrow A$ tal que $yt = 1_A$. Ahora, como x y y son epimorfismos, tenemos una sucesión exacta

$$\eta' : 0 \rightarrow K' \rightarrow B \xrightarrow{yx} A \rightarrow 0,$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & K & = & K & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{b} & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow x & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{t} & B' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & W & \xrightarrow{a} & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow b & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & B & \xrightarrow{yx} & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & C & = & C & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

donde $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por lo que basta probar que $K' \in \mathcal{X}$. Para ello, considerando el diagrama inducido por la igualdad

$$yxb = yta = a$$

y las sucesiones exactas η y η' , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow K' \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $K, C \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $K' \in \mathcal{X}$ debido a que $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones.

□

Una propiedad importante que cumple un módulo tilting usual $T \in \text{Mod}(R)$ es que $\text{Add}(T)$ es un generador relativo en $T^\perp$. En nuestro caso, dicha propiedad se traduce a que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ sea un generador relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. En este sentido, el siguiente lema generaliza a [AHUC01, 2.4].

Lema 2.19. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ una clase de objetos en $\mathcal{C}$ cerrada por extensiones. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T2) y (T5), con respecto a $\mathcal{X}$, y $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$, entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

- (a) $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.
- (b) Todo morfismo $A \rightarrow X$, con $A \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$ y $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Más aún, si $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$, entonces

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp).$$

- (c) Todo morfismo $A \rightarrow X$, con $A \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$ y $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Más aún, si $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$, entonces

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}).$$

Demostración.

- (a) Por (T2), $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp$. Sea $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Por (T5) existe una $\mathcal{T}$ -precubierta $g : T' \rightarrow X$ con $T' \in \mathcal{X}$. Además, como $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$, se tiene que g es un epimorfismo. Veamos que $K = \text{Ker}(g) \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.

Consideremos la sucesión exacta $0 \rightarrow K \rightarrow T' \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$. Dado que $X \in \mathcal{T}^\perp$,

$T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp$, por (T2), y g es una $\mathcal{T}$ -precubierta, se sigue que $K \in \mathcal{T}^\perp$. Veamos ahora que $K \in \mathcal{X}$. Para ello recordamos que, como $X \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K' \rightarrow B \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $K' \in \mathcal{X}$. Ahora, considerando a Z como el pullback de f con g , obtenemos las sucesiones exactas

$$\eta : 0 \rightarrow K' \rightarrow Z \rightarrow T' \rightarrow 0$$

$$\eta' : 0 \rightarrow K \rightarrow Z \rightarrow B \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K' & = & K' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & T' & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Observamos que $Z \in \mathcal{X}$ debido a que $K', T' \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones. Además, la sucesión exacta η' se escinde debido a que $K \in \mathcal{T}^\perp$ y $B \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $K \in \mathcal{X}$, debido a que K es sumando directo de Z y $\mathcal{X}$ es cerrado por sumandos directos.

- (b) Sean $f : A \rightarrow X$ con $A \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$ y $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Por (a), existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{k} T' \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$$

con $T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Dado que $A \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$ y $L \in \mathcal{T}^\perp$, se sigue que $\text{Ext}_C^1(A, L) = 0$. Esto implica que $\text{Hom}_C(A, g)$ es suprayectivo, de modo que f se factoriza a través de g . Así que, como $T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, f se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$. Sea $A' \in \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$. Entonces $1_{A'}$ se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Lo que implica que $A' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por otro lado, $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ por (T2), y $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.

- (c) Sean $f : A \rightarrow X$ con $A \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$ y $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Por (a), existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{k} T' \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$$

con $T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Dado que $A \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$ y $L \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, se sigue que $\text{Ext}_C^1(A, L) = 0$. Esto implica que $\text{Hom}_C(A, g)$ es suprayectivo, de modo que f se factoriza a través de g . Así que, como $T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, f se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$. Sea $A' \in \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Entonces $1_{A'}$ se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Lo que implica que $A' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por otro lado, $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ por (T2), y se

tiene que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$. Por lo tanto,

$$\mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}.$$

□

Lema 2.20. Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ una clase de objetos cerrada por extensiones en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$ que satisface (T1), (T2), (T4), (T5), con respecto a $\mathcal{X}$, y $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$. Entonces, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$ y $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$. Más aún, para cada $X \in \mathcal{X}$, las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) $m := \text{coresdim}_{\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}}^\mathcal{X}(X) \leq \text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T}) < \infty$;
- (b) existen sucesiones exactas

$$0 \rightarrow X \rightarrow M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow K_X \rightarrow B_X \rightarrow X \rightarrow 0$$

tales que $M_X, K_X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$; $C_X, B_X \in \mathcal{X}$; $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^\mathcal{X}(C_X) = m - 1$;
 $\text{coresdim}_{\mathcal{T} \cap \mathcal{X}}^\mathcal{X}(B_X) \leq m$;

- (c) $B_X \rightarrow X$ es $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee$ -precubierta;
- (d) $X \rightarrow M_X$ es $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente.

Demostración. Por 2.19(a,c), tenemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ es $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ -proyectivo y un generador relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, y $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X},n}^\vee$ por 2.13. Entonces, el lema se sigue de 1.16. □

A continuación veremos que la condición $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$, obtenida en 2.18, es equivalente a (T3), en caso de tener el resto de las condiciones n - $\mathcal{X}$ -tilting. Esto generaliza a [PŠ19b, Theorem 3.4(2,3)].

Proposición 2.21. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase que satisface (T1), (T2), (T4) y (T5), con respecto a $\mathcal{X}$. Entonces, $\mathcal{T}$ satisface (T3), con respecto a $\mathcal{X}$, si y sólo si $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$. Más aún, en tal caso, existe un generador relativo en $\mathcal{X}$ contenido en $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$.

Demostración. Ya hemos probado en 2.18 que si $\mathcal{T}$ satisface (T3) y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, entonces $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$. Veamos la implicación opuesta. Por 2.20 tenemos que todo $X \in \mathcal{X}$ admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0,$$

con $M_X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, $C_X \in (\mathcal{X}, \mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$. Luego, como $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$, se sigue que M_X admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M'_X \rightarrow T_0 \xrightarrow{g} M_X \rightarrow 0$$

donde $T_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $M'_X \in \mathcal{X}$. Ahora, al considerar el pullback de f y g , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M'_X \rightarrow P_X \rightarrow X \rightarrow 0,$$

donde $P_X \in (\mathcal{X}, \mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Por lo tanto, la clase $\{P_X\}_{X \in \mathcal{X}}$ es un generador relativo en $\mathcal{X}$, satisfaciendo (T3).

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & M'_X & = & M'_X & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & P_X & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & C_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & M_X & \longrightarrow & C_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

□

Observación 2.22. En general, se puede probar que la clase $T^{\perp}$ es preenvolvente en $\text{Mod}(R)$ para cualquier módulo $T \in \text{Mod}(R)$ [GT06, Theorem 3.2.1]. Dicha propiedad enriquece en gran medida la teoría de los módulos n -tilting. En nuestro contexto restringido, hemos probado en el teorema anterior que $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $\mathcal{X}$ cuando $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting, lo que es una generalización del enunciado dual de [AHUC01, Proposition 3.3].

Teorema 2.23. Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ una clase de objetos cerrada por extensiones en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ que satisface de (T1) a (T5), con respecto a $\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) Si $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$, entonces ${}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X} = {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$.
- (b) $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \ \forall k \geq \max\{1, \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})\}$.
- (c) Si $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$, entonces el par $({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ es $\mathcal{X}$ -completo y hereditario.

Demostración.

- (a) Por 2.14(a), sabemos que

$$(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}.$$

Sea $X \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Por 2.20 y 2.21 existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0$$

con $M_X \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ y $C_X \in (\mathcal{X}, \mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Más aún, $C_X \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$ por 2.14(a). Ahora, usando que $X \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$, se sigue que $M_X \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$. Por otro lado, por 2.19(c), se tiene que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^{\perp} \cap {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$, y así $M_X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $X \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{X}$.

- (b) Por 2.18 y 2.19(a), sabemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. De modo que $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_k^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ para todo $k \geq 1$. Sea $m := \max\{1, \text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T})\}$. Veamos que $\text{Fac}_k^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ para $k \geq m$. Sea $C \in \text{Fac}_k^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ con $k \geq m$. Por definición, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow T_k \xrightarrow{f_k} \dots \xrightarrow{f_3} T_1 \xrightarrow{f_1} C \rightarrow 0$$

donde $\text{Ker}(f_i) \in \mathcal{X}$ y $T_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ para todo $i \in [1, k]$. Luego, como $T_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ por (T2) y $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por k -cocientes en $\mathcal{X}$, ya que $\text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{T}) \leq k$, por (T1), (T4) y 1.9(a), tenemos que $C \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.

- (c) Por 2.14(a), tenemos que $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$. Sea $X \in \mathcal{X}$. Por 2.20 y 2.21, existen sucesiones exactas

$$0 \rightarrow X \rightarrow M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow K_X \rightarrow B_X \rightarrow X \rightarrow 0,$$

donde $M_X, K_X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ y $C_X, B_X \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{X}$. Finalmente, es claro que el par $({}^\perp(\mathcal{T}^\perp), \mathcal{T}^\perp)$ es hereditario.

□

Observación 2.24. En el teorema anterior hemos mostrado las propiedades fundamentales del par $({}^\perp(\mathcal{T}^\perp), \mathcal{T}^\perp)$, para una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting $\mathcal{T}$. En algunos contextos este par recibe el nombre de par de cotorsión tilting. Cabe decir que no conocemos una prueba de que estos pares sean pares de cotorsión si la categoría no tiene suficientes proyectivos e inyectivos. Más adelante continuaremos el estudio de estos pares (ver sección 2.3).

El siguiente resultado generaliza a [Wei05, 4.3], [Baz04, 3.11] y [AHUC01, 4.4].

Teorema 2.25. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n \geq 1$ y $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones. Si $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T4) y (T5), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting;
- (b) $\text{Fac}_n^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$;
- (c) $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_k^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ para todo $k \geq n$; y
- (d) $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^\mathcal{X}(\mathcal{T})$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Se sigue de 2.23(b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Es claro que $\text{Fac}_{k+1}^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \subseteq \text{Fac}_k^\mathcal{X}(\mathcal{T})$ para todo $k \geq 1$. Por lo que basta mostrar que $\text{Fac}_{n+1}^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \supseteq \text{Fac}_n^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Sea $N \in \text{Fac}_n^\mathcal{X}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Dado que $N \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$,

sabemos por (T5) que existe una $\mathcal{T}$ -precubierta $f : A \rightarrow N$, con $A \in \mathcal{X}$. Además, como $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, podemos deducir que f es un epimorfismo. Más aún, podemos mostrar que $K := \text{Ker}(f) \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. En efecto, utilizando el hecho de que f es una $\mathcal{T}$ -precubierta, se sigue que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f)$ es sobreyectivo $\forall T \in \mathcal{T}$. De modo que al considerar la sucesión exacta larga de homología, inducida al aplicar $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$, para cada $T \in \mathcal{T}$, a la sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow A \xrightarrow{f} N \rightarrow 0,$$

se puede concluir que $K \in \mathcal{T}^\perp$ debido a que $A, N \in \mathcal{T}^\perp$. El hecho de que $K \in \mathcal{X}$ se puede mostrar al considerar una sucesión exacta

$$\eta' : 0 \rightarrow K' \rightarrow M_0 \xrightarrow{f'} N \rightarrow 0,$$

con $M_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $K' \in \mathcal{X}$, la cual existe debido a que $N \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$. Ciertamente, al considerar el pullback entre f y f' obtenemos una sucesión exacta

$$\eta'' : 0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M_0 \rightarrow 0,$$

donde $P \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones. La sucesión η'' se escinde debido a que $M_0 \in \mathcal{T}$ y $K \in \mathcal{T}^\perp$. Por lo tanto $K \in \mathcal{X}$. Hemos mostrado que

$$K \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}.$$

Así que con la sucesión η podemos concluir lo deseado.

(c) $\Rightarrow$ (d) Por (c) es claro que tenemos

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}).$$

Para probar que $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por n -cocientes, basta observar que

$$\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_{n+1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X},$$

lo que implica que $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{X}$ por 1.53.

(d) $\Rightarrow$ (a) Dado que $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{X}$ y se tiene (T4), se sigue por 1.9 que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ satisface (T1). Además, de la segunda hipótesis tenemos que $\mathcal{T}$ satisface (T2) y que $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Así que, por 2.21, podemos concluir que $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting. $\square$

Con ayuda de 2.25, podemos dar un enunciado equivalente a (T5) en caso de que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$.

Corolario 2.26. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n \geq 1$, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por*

extensiones y $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{X}$ satisfaciendo (T1), (T2), (T3) y (T4), con respecto a $\mathcal{X}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ satisface (T5), con respecto a $\mathcal{X}$;
- (b) $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_{n+1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$.

Demostración. Por 2.25(c) basta mostrar que (b) implica (a). Supongamos que (b) se satisface. Sea $X \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Luego, como $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_{n+1}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X' \rightarrow T' \xrightarrow{f} X \rightarrow 0 \text{ con } T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \text{ y } X' \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}.$$

Mostraremos que f es una $\mathcal{T}$ -precubierta. En efecto, sea $T'' \in \mathcal{T}$. Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T'', -)$ a la sucesión exacta anterior, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T'', X') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T'', T') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T'', X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T'', X'),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T'', X') = 0$ debido a que $X' \in \mathcal{T}^\perp$. Por lo tanto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T'', f)$ es sobreyectiva, para todo $T'' \in \mathcal{T}$. $\square$

2.1.2. Propiedades básicas de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting

En esta subsección haremos una revisión más detallada de las propiedades que cumple una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Proposición 2.27. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\perp(\mathcal{T}^\perp), \mathcal{T}^\perp)$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ satisfacen que ν es un generador $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y un cogenerador $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Más aún,

- (a) $\nu = (\nu, \mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\wedge = (\mathcal{B} \cap \mathcal{X}, \nu)^\vee = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \cap \nu^\wedge = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \nu^\vee = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$;
- (b) $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee$;
- (c) $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$;
- (d) $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \nu = (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee \cap \mathcal{B}$;
- (e) $\mathcal{A} \cap (\mathcal{X}, \nu)^\vee = \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$;
- (f) $\mathcal{B} \cap (\nu, \mathcal{X})^\wedge = \{M \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \mid \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) < \infty\}$.

Demostración. Note que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados por sumandos directos y extensiones. Más aún, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario y $\mathcal{X}$ -completo por 2.23(c). Luego, por 1.50(a,b) obtenemos (a). Más aún, por 1.49(a,b), se tiene que ν tiene las propiedades mencionadas

de generador y cogenerador. Por 2.20, tenemos (b) y (c). Para probar (d), usaremos 2.14(b), (c) y 2.19(b,c) para probar las contenciones

$$\begin{aligned}\mathcal{T} \cap \mathcal{X} &= (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \\ &\subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^{\vee} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \\ &\subseteq {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \\ &= \nu \\ &= \mathcal{T} \cap \mathcal{X}.\end{aligned}$$

Para mostrar (e), observamos que, como ν es un cogenerador $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, por 1.42(a) se tiene que

$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{X}, \nu)^{\vee} = \{M \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \mid \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) < \infty\}.$$

Ahora bien, por (T4) y 1.11(a) sabemos que $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$; y por 1.50(a1) sabemos que $\text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Por lo tanto,

$$\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) < \infty.$$

Así que $\mathcal{A} \cap (\mathcal{X}, \nu)^{\vee} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$.

Finalmente, (f) se sigue del dual de 1.42(a). $\square$

Corolario 2.28. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting, entonces para todo $X \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ se tiene que*

$$\text{resdim}_{\mathcal{T}}(X) \leq \text{resdim}_{\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}}(X) + 1.$$

Demostración. Sea $X \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Podemos asumir que $\text{pd}_{\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}}(X) = m < \infty$. Por 2.27, sabemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ es un generador $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Así que podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_{m+1} \rightarrow M_m \xrightarrow{f} \dots \rightarrow M_0 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

con $M_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ para todo $i \in [0, m]$ y $K_{m+1} \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Por el lema del corrimiento, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\text{Im} f, K_{m+1}) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{m+1}(X, K_{m+1}) = 0$. Por lo tanto, K_{m+1} es un sumando directo de M_m , y así un elemento de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. $\square$

Proposición 2.29. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := ({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ satisfacen que ${}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Más aún,*

(a) $\forall X \in \mathcal{X}$, se tiene que

- (a1) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) = \text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) = \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) + 1;$
- (a2) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + 1;$
- (a3) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) + 1;$
- (a4) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1.$
- (b) $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}({}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) < \infty.$

Demostración. Note que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados por sumandos directos y extensiones. Más aún, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario y $\mathcal{X}$ -completo por 2.23(c), y $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ por 2.27(a). Cabe observar que $\mathcal{A} = {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) = {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, y de igual manera que $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{\perp} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp}$. Luego, por 1.36(a5) y 1.36(b5) tenemos $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp}$ y ${}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Por lo tanto, ${}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Queda por probar (a) y (b):

- (a) Se sigue de 1.36, ya que $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0 = \text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A}) = \text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B})$.
- (b) Aplicamos (T4) y 1.11(a), de donde obtenemos que $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}({}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A})$, donde la última desigualdad se sigue de que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$.

□

Proposición 2.30. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := ({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\nu}(M) = \text{pd}_{\nu^{\wedge}}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{X} \cap \mathcal{A}}(M)$ para todo $M \in (\mathcal{A}, \mathcal{X})^{\wedge};$
- (b) $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{resdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M)$ para todo $M \in (\nu, \mathcal{X})^{\wedge};$
- (c) $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{id}_{\nu}(M) = \text{id}_{\nu^{\vee}}(M) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(M)$ para todo $M \in (\mathcal{X}, \mathcal{B})^{\vee};$
- (d) $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(M) = \text{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(M)$ para todo $M \in (\mathcal{X}, \nu)^{\vee}.$

Demostración. Note que $\mathcal{A} = \text{smd}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{B} = \text{smd}(\mathcal{B})$ son cerrados por extensiones. Más aún, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario y $\mathcal{X}$ -completo por 2.23(c). Entonces, por 1.49 se sigue lo deseado. □

Proposición 2.31. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := ({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ satisfacen que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \nu^{\vee}$. Más aún,

- (a) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\nu) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\nu}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) < \infty$;
- (b) $\text{id}_{\mathcal{X}}(\nu) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{resdim}_{\nu}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{resdim}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$;
- (c) $\text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$ si, y sólo si, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \nu^{\wedge}$ y $\text{id}_{\mathcal{X}}(\nu) < \infty$; y en tal caso
- $$\mathcal{B} \cap (\nu, \mathcal{X})^{\wedge} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}, \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A}, \mathcal{X})^{\wedge} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\wedge} \text{ y } \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{X}}(\nu).$$

Demostración. Note que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados por sumandos directos y extensiones. Más aún, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario y $\mathcal{X}$ -completo por 2.23(c).

- (a) Por 2.29(b) y 1.50(a1), tenemos que

$$\text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) < \infty.$$

Luego, por 1.50(a2), se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \nu^{\vee}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\nu)$. El resto de las igualdades se sigue de 1.50(a1).

- (b)&(c) Se siguen de 1.50(b), salvo la igualdad $\mathcal{B} \cap (\nu, \mathcal{X})^{\wedge} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ en (c) bajo la hipótesis $\text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$. Ahora bien, para probar dicha igualdad, por (b) tenemos que $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \text{id}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$. Luego, por 2.27(f) obtenemos la igualdad requerida.

□

Proposición 2.32. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\perp(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ satisfacen las siguientes condiciones.

- (a) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}((\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}((\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^{\vee}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$.
- (b) Se tiene que $\nu = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Más aún, si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, entonces

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\nu) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\nu_{\mathcal{X}}^{\vee}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\nu^{\vee}).$$

Demostración. Note que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados por sumandos directos y extensiones. Más aún, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario y $\mathcal{X}$ -completo por 2.23(c).

- (a) Por 2.27(b) y 1.13(a), tenemos

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}((\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}((\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^{\vee}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}).$$

- (b) Por 2.27(d) tenemos que $\nu = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$. Luego, por 2.27(c) y 2.29(b), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) &\leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T} \cap \mathcal{X}) \\ &\leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}((\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}) \\ &\leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}((\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^{\vee}) \\ &\leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}({}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \\ &= \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(T). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.33. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \mathrm{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces, el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := ({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ satisfacen las siguientes condiciones.

- (a) $\nu^{\vee} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ y $\forall Z \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}$, con $m := \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(Z)$, existen sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z \xrightarrow{g_Z} M_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad &\text{con } C_Z \in (\mathcal{X}, \nu)^{\vee}, M_Z \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}; \\ 0 \rightarrow K_Z \rightarrow N_Z \xrightarrow{f_Z} Z \rightarrow 0 \quad &\text{con } N_Z \in \nu_{\mathcal{X}}^{\vee}, K_Z \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}; \end{aligned}$$

tales que g_Z es una $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente y f_Z es una $\nu^{\vee}$ -precubierta. Más aún, $\mathrm{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(C_Z) = m - 1$, $\mathrm{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(N_Z) \leq m$ y $\nu^{\vee} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{X}, \nu)^{\vee}$.

- (b) $\nu^{\wedge} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp}$ y $\forall Z \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\wedge}$, con $m := \mathrm{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(Z)$, existen sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z \xrightarrow{f_Z} N_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad &\text{con } N_Z \in \nu_{\mathcal{X}}^{\wedge}, C_Z \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}; \\ 0 \rightarrow K_Z \rightarrow M_Z \xrightarrow{g_Z} Z \rightarrow 0 \quad &\text{con } K_Z \in (\nu, \mathcal{X})^{\wedge}, M_Z \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}; \end{aligned}$$

tales que g_Z es una $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -precubierta y f_Z es una $\nu^{\wedge}$ -preenvolvente. Más aún, $\mathrm{resdim}_{\nu}(K_Z) = m - 1$ y $\mathrm{resdim}_{\nu}(N_Z) \leq m$. En caso de que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$, se tiene que $\nu^{\wedge} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap (\nu, \mathcal{X})^{\wedge}$.

- (c) $\forall Z \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^{\vee}$, con $m := \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(Z)$, existen sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z \xrightarrow{g_Z} M_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad &\text{con } C_Z \in \nu^{\vee}, M_Z \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}; \\ 0 \rightarrow K_Z \rightarrow B_Z \xrightarrow{f_Z} Z \rightarrow 0 \quad &\text{con } B_Z \in \nu^{\vee}, K_Z \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}; \end{aligned}$$

tales que g_Z es una $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente y f_Z es una $\nu^{\vee}$ -precubierta. Más aún, $\mathrm{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(C_Z) = m - 1$ y $\mathrm{coresdim}_{\nu}^{\mathcal{X}}(B_Z) \leq m$.

(d) $\forall Z \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\wedge$, con $m := \text{resdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(Z)$, existen sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow K_Z \rightarrow M_Z \xrightarrow{g_Z} Z \rightarrow 0 \quad \text{con } K_Z \in \nu^\wedge, M_Z \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X};$$

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{f_Z} B_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad \text{con } B_Z \in \nu^\wedge, C_Z \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X};$$

tales que g_Z es una $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ -precubierta y f_Z es una $\nu^\wedge$ -preenvolvente. Más aún, $\text{resdim}_\nu(K_Z) = m - 1$ y $\text{resdim}_\nu(B_Z) \leq m$.

- (e) El par $(\nu^\vee, \mathcal{B})$ es $(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$ -completo a derecha, $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario.
- (f) $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$ y en $\mathcal{X}$. Más aún, $(^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}), \mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha.
- (g) Todo elemento de $(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee$ tiene una $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial.

Demostración.

- (a) Consideremos la pareja $(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}, \nu)$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Por 2.27, ν es un generador relativo de $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ con $\text{pd}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}(\nu) = 0$. Luego, basta aplicar 1.16, para obtener (a) salvo las igualdades $\nu^\vee \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{X}, \nu)^\vee$. Para esto último, como $\nu^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, se sigue de 2.29 y 2.27(e) que $\nu^\vee \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{X}, \nu^\vee) \subseteq \nu^\vee \cap \mathcal{X}$.
- (b) Consideremos la pareja $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}, \nu)$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Por 2.27, ν es un cogenerador relativo en $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ con $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\nu) = 0$. Así que basta aplicar el dual de 1.16 para concluir lo deseado, salvo que $\nu^\wedge \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap (\nu, \mathcal{X})^\wedge$ si $\text{id}_\mathcal{X}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$. Veamos esto último. Sea $\text{id}_\mathcal{X}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) < \infty$. Luego, por 2.31(c) y 2.29, de la inclusión $\nu^\wedge \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$ se tiene $\nu^\wedge \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap (\nu, \mathcal{X})^\wedge \subseteq \nu^\wedge \cap \mathcal{X}$.
- (c) Se sigue como en la prueba de (a), aplicando el dual de 1.14.
- (d) Se sigue como en la prueba de (b), aplicando 1.14.
- (e) La completitud a derecha se sigue de (a) y de que, por 2.27(b), tenemos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{X} \cap \nu_\mathcal{X}^\vee \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap \nu^\vee$. Ahora, como tenemos que $\nu = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $\nu_\mathcal{X}^\vee \subseteq \nu^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, aplicando 2.20 se tiene que $(\nu^\vee, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario.
- (f) Sea $X \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$. Por (a), se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{g_X} M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0,$$

con $C_X \in (\mathcal{X}, \nu)^\vee$, $M_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ donde g_X es una $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente. Luego;

- $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$, ya que:
 - (i) $M_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$ pues $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$.
 - (ii) $C_X \in {}^\perp_1(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee$ pues por 2.27 tenemos

$$C_X \in \mathcal{X} \cap (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}).$$

- $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $\mathcal{X}$, ya que, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^{\vee}$ por 2.27(b), y además
 - (i') $M_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{X} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$,
 - (ii') $C_X \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, como ya se ha mostrado en (ii).
- (g) Sea $X \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})^{\vee}$. Consideremos la sucesión exacta dada por (c)

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{g_X} M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0$$

donde $M_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C_X \in \nu^{\vee}$. Luego, g_X es una $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial ya que $M_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$; y por 2.27(b), $K_X \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^{\vee} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. $\square$

La siguiente proposición enuncia un resultado semejante al anterior evitando el uso de (T4).

Proposición 2.34. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$ que satisface (T1), (T2) y (T5), con respecto a $\mathcal{X}$, y $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen.*

- (a) *Todo elemento de $(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})^{\vee}$ tiene una $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial.*
- (b) *Sean $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ y α un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})^{\vee}$. Más aún, todo elemento de $\mathcal{X}$ tiene una $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial.*

Demostración. Por 2.19(a), $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Así que, por el dual de 1.14(a), se tiene que para todo $X \in (\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})^{\vee}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{g_X} M_X \rightarrow K_X \rightarrow 0 \quad \text{con } K_X \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^{\vee} \text{ y } M_X \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}.$$

Por 2.19(b), $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \cap {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$. Luego, $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$, así que el dual de 1.14(b) implica que $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^{\vee} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$ y g_X es una $(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$ -preenvolvente, la cual es especial ya que $K_X \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^{\vee} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$ por 1.13(a).

Para probar (b), observamos que, por 1.10, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})^{\vee}$ debido a que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) < \infty$. Por lo tanto, todo elemento de $\mathcal{X}$ tiene una $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial. $\square$

2.1.3. Condiciones alternativas a (T3)

El objetivo de esta sección es mostrar que, bajo ciertas hipótesis, la condición (T3) de la definición de n - $\mathcal{X}$ -tilting es equivalente a los siguientes enunciados (T3'), (T3'') y (t3'').

Definición 2.35. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Consideramos los siguientes enunciados.

- (T3') Existe un ω generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$.
- (T3'') Existen un ω generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y una clase $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$ tales que $\text{Add}(\sigma) = \omega$.
- (t3'') Existen un ω generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y una clase $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$ tales que $\text{add}(\sigma) = \omega$.

A continuación veremos algunas implicaciones de (T2) y (T3''). Pero antes cabe recordar la siguiente definición.

Definición 2.36. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos y $M \in \mathcal{C}$.

- (a) Diremos que un morfismo $f : Z \rightarrow M$ es una $\mathcal{Z}$ -**precubierta especial** si es una $\mathcal{Z}$ -precubierta, un epimorfismo y $\text{Ker}(f) \in \mathcal{Z}^{\perp_1}$.
- (b) Diremos que un morfismo $f : M \rightarrow Z$ es una $\mathcal{Z}$ -**preenvolvente especial** si es una $\mathcal{Z}$ -preenvolvente, un monomorfismo y $\text{Coker}(f) \in {}^{\perp_1}\mathcal{Z}$.

Observación 2.37. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ clases de objetos en $\mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$.

- (a) Un morfismo $f : Z \rightarrow M$ es una $\mathcal{Z}$ -precubierta especial si, y sólo si, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow Z \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

con $K \in \mathcal{Z}^{\perp_1}$ y $Z \in \mathcal{Z}$. En efecto, para probarlo basta mostrar que en caso de tener dicha sucesión exacta, el morfismo f resulta ser una $\mathcal{Z}$ -precubierta. Para ello, observamos que para todo $Z' \in \mathcal{Z}$, con el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', -)$ obtenemos la sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Z', K).$$

Note que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Z', K) = 0$, ya que $K \in \mathcal{Z}^{\perp_1}$. Por lo tanto, f es una $\mathcal{Z}$ -precubierta.

Dualmente, un morfismo $f : M \rightarrow Z$ es una $\mathcal{Z}$ -precubierta especial si, y sólo si, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} Z \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $Z \in \mathcal{Z}$ y $C \in {}^{\perp_1}\mathcal{Z}$.

- (b) Como $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$, se sigue que $\mathcal{Z}^{\perp_1} \subseteq \mathcal{W}^{\perp_1}$ y ${}^{\perp_1}\mathcal{Z} \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{W}$. Así que, de (a) se siguen los siguientes enunciados.

- (b1) Si $f : Z \rightarrow M$ es una $\mathcal{Z}$ -precubierta especial, con $Z \in \mathcal{W}$, entonces f es una $\mathcal{W}$ -precubierta especial.
- (b2) Si $f : M \rightarrow Z$ es una $\mathcal{Z}$ -preenvolvente especial, con $Z \in \mathcal{W}$, entonces f es una $\mathcal{W}$ -preenvolvente especial.

El siguiente lema generaliza a [AHUC01, Lemma 2.3].

Lema 2.38. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ que satisface (T2), con respecto a $\mathcal{X}$, y $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Entonces, para $W \in \sigma$ y

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{f_0} M_0 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_n \rightarrow 0$$

una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -coresolución finita en $\mathcal{X}$ (la cual existe por ser $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones y $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$), se tiene que f_0 es una $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial, $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial y $\mathcal{T}^{\perp}$ -preenvolvente especial.

Demostración. Sean $W \in \sigma$ y $0 \rightarrow W \xrightarrow{f_0} M_0 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_n \rightarrow 0$ una sucesión exacta con $M_j \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \forall j \in [0, n]$ y $\text{Im}(f_i) \in \mathcal{X} \forall i \in [1, n-1]$. Por 2.13(a), sabemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \cap {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$. De modo que $M_j \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \forall j \in [0, n]$. Además, como ${}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$ es cerrada por epi-núcleos, $K_j := \text{Ker}(f_j) \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \forall j \in [1, n]$. En particular, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(K_2, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{T}^{\perp}$. Por lo tanto, $f_0 : W \rightarrow M_0$ es una $\mathcal{T}^{\perp}$ -preenvolvente especial, la cual es una $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente y una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente por 2.37(b), debido a que $M_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^{\perp}$. $\square$

Lema 2.39. Para una categoría Ab4 (abeliana) $\mathcal{C}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos cerrada por extensiones y tal que $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$), $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ que satisface (T2), con respecto a $\mathcal{X}$, $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$ y $\omega := \text{Add}(\sigma)$ ($\omega := \text{add}(\sigma)$), las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) $\omega \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X}$.
- (b) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus}$ ($\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus < \infty}$), entonces todo $W \in \omega$ admite una sucesión exacta $0 \rightarrow W \xrightarrow{f} M_W \rightarrow C_W \rightarrow 0$, donde $M_W \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, $C_W \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X}$ y f es una $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial, $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial y $\mathcal{T}^{\perp}$ -preenvolvente especial.

Demostración.

- (a) Sea $S \in \sigma$. Por 2.38, existe una sucesión exacta $0 \rightarrow S \rightarrow M_S \rightarrow C_S \rightarrow 0$ donde $M_S \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X} \cap \mathcal{T}^{\perp}$ y $C_S \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$. Dado que ${}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$ es cerrada por epi-núcleos en ${}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$, se tiene que $S \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp})$. Además, en caso de que $\mathcal{C}$ sea Ab4 , se tiene que $\text{Add}(\sigma) \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X}$ ya que $\sigma \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X}$.

- (b) Sean $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\oplus$ y $W \in \omega := \text{Add}(\sigma)$. Luego, existen $W' \in \omega$ y un conjunto $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq \sigma \subseteq \mathcal{X}$ tales que $W \oplus W' \cong \bigoplus_{i \in I} S_i^{(\alpha_i)}$. Ahora bien, por 2.38, para cada $i \in I$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow S_i \rightarrow M_{S_i} \rightarrow C_{S_i} \rightarrow 0$$

con $M_{S_i} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $C_{S_i} \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$. Sean $S := \bigoplus_{i \in I} S_i^{(\alpha_i)}$, $M' := \bigoplus_{i \in I} M_{S_i}^{(\alpha_i)}$ y $C := \bigoplus_{i \in I} C_{S_i}^{(\alpha_i)}$. Como $\mathcal{C}$ es Ab4 y $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\oplus$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

donde $S \in \omega$, $M' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $C \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$, y una sucesión exacta que se escinde

$$0 \rightarrow W \rightarrow S \xrightarrow{h} W' \rightarrow 0.$$

Por (a), tenemos que $W' \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & W & \rightarrow & S & \rightarrow & W' \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & W & \rightarrow & M' & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & C = C & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Considerando el pushout de h con f , obtenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow W \xrightarrow{\alpha} M' \rightarrow Z \rightarrow 0.$$

Aseguramos que $Z \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$. En efecto, ${}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$ es cerrado por extensiones. Así, de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow W' \rightarrow Z \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $W', C \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$, concluimos que $Z \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, aplicando 2.37(a) a η y usando que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp$ y ${}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp_1(\mathcal{T}^\perp)$, podemos concluir que α es una $\mathcal{T}^\perp$ -preenvolvente especial. Así, por 2.37(b), también tenemos que α es una $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial y una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente especial.

□

La siguiente proposición generaliza a [AHTT01, Proposition 1.2] y es el resultado de adaptar la noción de módulos finendo a nuestro contexto.

Proposición 2.40. *Sean $(\omega, \mathcal{X})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, $0 \in \mathcal{X}$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y ω es un generador relativo en $\mathcal{X}$, con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\omega, \mathcal{X}) = 0$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *para todo $W \in \omega$ existe una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente monomórfica, la cual es una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente;*

- (b) para todo $W \in \omega$ existe una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente monomórfica;
- (c) para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente monomórfica;
- (d) para todo $W \in \omega$ existe una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente monomórfica.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Es trivial.

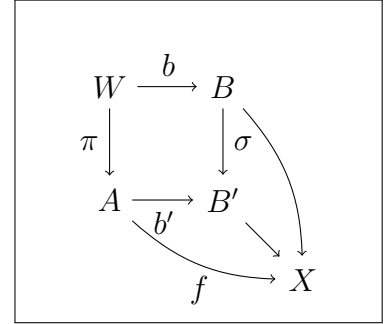
(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $A \in \mathcal{X}$. Dado que ω es un generador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow W \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $K \in \mathcal{X}$. Sea $b : W \rightarrow B$ una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente monomórfica, la cual existe por (b). Aseguramos que, si

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{b} & B \\ \pi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ A & \xrightarrow{b'} & B' \end{array}$$

es un push-out, entonces b' es una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente de A . En efecto, dado que b es un monomorfismo, b' también lo es; y como π es un epimorfismo con núcleo en $\mathcal{X}$, σ también lo es; así que $B' \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ por 1.52. Ahora bien, para todo morfismo $f : A \rightarrow X$ con $X \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, se tiene que $f\pi$ se factoriza a través de b por ser una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente, pero el push-out hace que f se factorice a través de b' . Por lo tanto, b' es $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente.



(c) $\Rightarrow$ (d) Sea $W \in \omega \subseteq \mathcal{X}$. Por (c), sabemos que existe una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente $f : W \rightarrow T'$ que es un monomorfismo. Como $T' \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow T'' \xrightarrow{p} T' \rightarrow 0,$$

con $K \in \mathcal{X}$ y $T'' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Ahora, como $W \in \omega$ y $\text{Ext}_C^1(\omega, \mathcal{X}) = 0$, existe un morfismo $g : W \rightarrow T''$ tal que $pg = f$. Además, como f es un monomorfismo se sigue que g también lo es. Veamos que g es una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente. Sea $h : W \rightarrow H$ un morfismo con $H \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ y que f es una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente, tenemos que h se factoriza a través de f , pero como f se factoriza a través de g podemos concluir que h se factoriza a través de g . Por lo tanto, g es una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente monomórfica.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sean $W \in \omega$ y $b : W \rightarrow B$ una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente monomórfica. Veamos que b también es una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente. Sea $c : W \rightarrow C$, con $C \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$. Por lo que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} W & & \\ c' \downarrow & \searrow c & \\ M & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

con $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $K \in \mathcal{X}$. Entonces, como $W \in \omega$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\omega, \mathcal{X}) = 0$, existe $c' : W \rightarrow M$ tal que $c = fc'$. Luego, dado que $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y b es una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente, se tiene que c' se factoriza a través de b ; y así c se factoriza a través de b . Por lo tanto, b es una $\text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ -preenvolvente. $\square$

Observación 2.41. Si quitamos en 2.40 la hipótesis de que $\mathcal{X}$ sea cerrado por extensiones, se puede probar que los enunciados (a), (c) y (d) son equivalentes.

Definición 2.42. Sean $\omega \subseteq \mathcal{X}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es $(\omega, \mathcal{X})$ -finiendo si todo $W \in \omega$ admite una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -preenvolvente monomórfica.

Lema 2.43. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 (abeliana), $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones y tal que $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$). Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (T2) y (T3'') ((t3'')), con respecto a $\mathcal{X}$, y $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus}$ ($\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus < \infty}$), entonces $\mathcal{T}$ es $(\omega, \mathcal{X})$ -finiendo y $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$.

Demostración. Por 2.39(b) se sigue que $\mathcal{T}$ es $(\omega, \mathcal{X})$ -finiendo. Usando 2.39(b), el resto del enunciado se prueba de manera semejante a 2.18, incluimos la prueba por completitud. Sea $A \in \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Sabemos, por (T3''), que existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow W \xrightarrow{a} A \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $K \in \mathcal{X}$. Además, por 2.39(b), existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{b} B \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ y $C \in {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X}$. Considerando el pushout de b y a , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow B \xrightarrow{x} B' \rightarrow 0$$

y una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{t} B' \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $B' \in \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, que se escinde debido a que $A \in \mathcal{T}^\perp$ y $C \in {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$. Por lo tanto, existe un epimorfismo $y : B' \rightarrow A$ tal que $yt = 1_A$. Ahora, como x y y son epimorfismos, tenemos una sucesión exacta

$$\eta' : 0 \rightarrow K' \rightarrow B \xrightarrow{yx} A \rightarrow 0,$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & W & \xrightarrow{a} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow b & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & B & \xrightarrow{yx} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & C & = & C & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & K & = & K & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{b} & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow x & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{t} & B' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

donde $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, por lo que basta probar que $K' \in \mathcal{X}$. Para ello, considerando el diagrama inducido por la igualdad

$$yxb = yta = a$$

y las sucesiones exactas η y η' , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow K' \rightarrow C \rightarrow 0$$

donde $K, C \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $K' \in \mathcal{X}$ debido a que $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones.

□

Concluiremos esta subsección con una generalización de [PŠ19b, Corollary 3.6], que muestra enunciados equivalentes a (T3), en caso de que exista un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$.

Proposición 2.44. *Sean $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ una clase de objetos cerrada por extensiones en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$ que satisface (T1), (T2), (T4) y (T5), con respecto a $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ admite un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo ρ en $\mathcal{X}$, entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(T3) *existe un ω generador relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$;*

(T3') *existe un ω generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$.*

Más aún, si $\mathcal{C}$ es Ab_4 (abeliana), $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$) y $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus}$ ($\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus < \infty}$), las condiciones (T3) y (T3') son equivalentes a la siguiente:

(T3'') existen un ω generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y una clase $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$ tales que $\text{Add}(\sigma) = \omega$

((t3'')) existe un ω generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y una clase $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$ tales que $\text{add}(\sigma) = \omega$.

Demostración.

(T3) $\Rightarrow$ (T3') Tenemos que $\rho \subseteq \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap^{\perp} (\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X})$. Ahora, como $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting, por 2.23(a), $\rho \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Por lo tanto, podemos tomar $\omega := \rho$.

(T3') $\Rightarrow$ (T3) Es claro.

Sean $\mathcal{C}$ Ab4, $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus}$ (el caso en que $\mathcal{C}$ es abeliana, $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus < \infty}$ es análogo).

(T3') $\Rightarrow$ (T3'') Sea ω tal que satisface (T3'). Dado que $\omega \subseteq \mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$, basta tomar $\sigma := \omega$. Por ser $\mathcal{C}$ Ab4 y $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$, es claro que $\text{Add}(\omega)$ es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$.

(T3'') $\Rightarrow$ (T3) Por 2.21 basta con probar que $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, lo cual se sigue de 2.43. $\square$

2.2. n - $\mathcal{X}$ -tilting y objetos compactos

En esta sección veremos que si la clase $\mathcal{X}$ consiste de objetos compactos, entonces una clase $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting grande si y sólo si es n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña. Las clases de objetos compactos están relacionadas con las clases de módulos finitamente generados y finitamente presentados. Antes de entrar en ellos, veremos los siguientes lemas que tendrán importantes consecuencias.

Lema 2.45. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \text{smd}(\mathcal{A})$ una clase de objetos en $\mathcal{C}$, $A \in \mathcal{A}$ tal que $A = B \oplus C$ y $\alpha : B \rightarrow X$ en $\mathcal{C}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\alpha : B \rightarrow X$ es una $\mathcal{A}$ -precubierta;
- (b) $(\alpha \ 0) : B \oplus C \rightarrow X$ es una $\mathcal{A}$ -precubierta.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $\beta : A' \rightarrow X$ es un morfismo con $A' \in \mathcal{A}$. Como α es una $\mathcal{A}$ -precubierta, existe un morfismo $\beta' : A' \rightarrow B$ tal que $\beta = \alpha\beta'$. Entonces, como

$$\beta = \alpha\beta' = (\alpha \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta',$$

podemos concluir que $(\alpha \ 0)$ es una $\mathcal{A}$ -precubierta.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $\beta : A' \rightarrow X$ es un morfismo con $A' \in \mathcal{A}$. Como $(\alpha \ 0)$ es una $\mathcal{A}$ -precubierta, existe un morfismo $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) : A' \rightarrow B \oplus C$ tal que

$$\beta = (\alpha \ 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x.$$

Entonces, como $\beta = \alpha x$, podemos concluir que α es una $\mathcal{A}$ -precubierta. $\square$

Lema 2.46. Sean $\mathcal{C}$ una categoría $Ab\mathfrak{B}$, $X \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}$. Si α es una $\text{add}(\mathcal{M})$ -precubierta de X , entonces α es una $\text{Add}(\mathcal{M})$ -precubierta de X .

Demostración. Supongamos que X admite una $\text{add}(\mathcal{M})$ -precubierta $\alpha : M \rightarrow X$. Veamos que α es una $\text{Add}(\mathcal{M})$ -precubierta. Como todo $M' \in \text{Add}(\mathcal{M})$ es un sumando directo de un objeto de $\mathcal{M}^\oplus$, todo morfismo $M' \rightarrow X$ con $M' \in \text{Add}(\mathcal{M})$ se factoriza a través de un objeto de $\mathcal{M}^\oplus$. Más aún, todo morfismo $M'' \rightarrow X$ con $M'' \in \mathcal{M}^\oplus$ se factoriza a través de $M^\oplus$. En efecto, consideremos un morfismo $\alpha' : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow X$ y las inclusiones canónicas $\{v_i : M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i\}_{i \in I}$. Como α es una $\text{add}(\mathcal{M})$ -precubierta, $\forall i \in I$ existe $\lambda_i : M_i \rightarrow M$ tal que $\alpha' v_i = \alpha \lambda_i$. Luego, por la propiedad universal del coproducto, existe $\lambda : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M^{(I)}$ tal que $\lambda v_i = v'_i \lambda_i$, donde $v'_i : M \rightarrow M^{(I)}$ es la inclusión canónica. Notemos que α' se factoriza a través de λ y el morfismo $\alpha'' : M^{(I)} \rightarrow X$ inducido por la propiedad universal del coproducto tal que $\alpha'' v'_i = \alpha$. Ciertamente, como

$$\alpha'' \lambda v_i = \alpha'' v'_i \lambda_i = \alpha \lambda_i = \alpha' v_i,$$

por la propiedad universal del coproducto podemos concluir que $\alpha'' \lambda = \alpha'$.

Finalmente, notemos que el morfismo α'' se factoriza a través de α . En efecto, para mostrarlo consideramos el morfismo $\sigma : M^{(I)} \rightarrow M$ inducido por la propiedad universal del coproducto tal que $\sigma u'_j = 1_M$. Luego, como

$$\alpha \sigma u'_j = \alpha 1_M = \alpha = \alpha'' u'_j,$$

podemos concluir que $\alpha \sigma = \alpha''$. $\square$

Definición 2.47. Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$.

- (a) M es **finitamente $\mathcal{T}$ -generado** si para cada familia $\{U_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{T}$, con I un conjunto para la cual el coproducto $\bigoplus_{i \in I} U_i$ existe, se tiene que todo epimorfismo $\varphi : \bigoplus_{i \in I} U_i \rightarrow M$ en $\mathcal{C}$ admite un subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que la composición

$$\bigoplus_{i \in F} U_i \xrightarrow{i_{F,I}} \bigoplus_{i \in I} U_i \xrightarrow{\varphi} M$$

es un epimorfismo, donde $i_{F,I}$ es la inclusión natural. Denotaremos por $\text{f.g.}(\mathcal{T})$ a la clase de todos los objetos en $\mathcal{C}$ que son finitamente $\mathcal{T}$ -generados.

- (b) Diremos que M es **$\mathcal{T}$ -compacto** si para cada familia $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, con I un conjunto para la cual existe $\bigoplus_{i \in I} U_i$, se tiene que todo morfismo $\psi : M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$

en $\mathcal{C}$ admite un subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que ψ se factoriza a través de la inclusión natural $i_{F,I} : \bigoplus_{i \in F} U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$. Denotaremos por $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ a la clase de los objetos de $\mathcal{C}$ que son $\mathcal{T}$ -compactos.

- (c) Diremos que M es **$\mathcal{T}$ -compacto para monomorfismos** si para cada familia $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, con I un conjunto para la cual existe $\bigoplus_{i \in I} U_i$, se tiene que todo monomorfismo $\psi : M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$ en $\mathcal{C}$ admite un subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que ψ se factoriza a través de la inclusión natural $i_{F,I} : \bigoplus_{i \in F} U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$. Denotaremos por $\mathcal{K}_{\mathcal{T},\mathcal{M}}$ a la clase de todos los objetos de $\mathcal{C}$ que son $\mathcal{T}$ -compactos para monomorfismos.

Observación 2.48. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva.*

- (a) *El concepto de objeto $\mathcal{T}$ -compacto en $\mathcal{C}$ es una generalización de la noción de objeto compacto en $\mathcal{C}$, la cual se puede consultar en [Mit65, Chapter II, Section 16] y en [Pop73, Chapter 3, Section 5] con el nombre de “small objects”. En la literatura se pueden encontrar diferentes generalizaciones de este concepto, entre los más comunes podemos citar el de “selfsmall object” introducido en el estudio de grupos abelianos en [AM75].*
- (b) *Para $\omega \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\omega^{\oplus}$ es un generador relativo en $\mathcal{C}$, se tiene que $\text{f.g.}(\omega) \subseteq \text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty})$. Sin embargo, no es claro que dicha contención sea una igualdad.*
- (c) *El concepto de objeto finitamente $\mathcal{T}$ -generado es una generalización del concepto de objeto finitamente generado utilizado comúnmente en el contexto de categorías Ab5, ver [Ste75, Chapter V, Section 3].*

A continuación veremos un par de resultados para el uso y caracterización de los objetos compactos.

Lema 2.49. [Mit65, Chapter II. Lemma 16.1] *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ tal que existe el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$, J un subconjunto finito de I , $i_{J,I} : \bigoplus_{i \in J} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ la inclusión natural y $A \in \mathcal{C}$. Entonces, un morfismo $\alpha : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ se factoriza a través de $i_{J,I}$ si, y sólo si, $\alpha = \sum_{i \in J} u_i p_i \alpha$, donde u_i y p_i son la inclusión y la proyección natural, respectivamente, del coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$.*

Lema 2.50. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces, la clase $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ es cerrada por cocientes.*

Demostración. Sea $\pi : M \rightarrow N$ un epimorfismo en $\mathcal{C}$, donde M es $\mathcal{T}$ -compacto. Probaremos que N es $\mathcal{T}$ -compacto. Sean $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, con I un conjunto tal que el coproducto $\bigoplus_{i \in I} U_i$ existe, y $\alpha : N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Como M es $\mathcal{T}$ -compacto, por 2.49, existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que

$$\alpha\pi = \sum_{i \in J} u_i p_i \alpha\pi = \left(\sum_{i \in J} u_i p_i \alpha \right) \pi,$$

donde $u_i : U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$ y $p_i : \bigoplus_{i \in I} U_i \rightarrow U_i$ son la inclusión y la proyección natural, respectivamente. Luego, como π es un epimorfismo, $\alpha = \sum_{i \in J} u_i p_i \alpha$. Por lo tanto, por 2.49 podemos concluir que N es $\mathcal{T}$ -compacto. $\square$

La siguiente caracterización para objetos $\mathcal{T}$ -compactos está inspirada en [Mit65, Chapter II, Proposition 16.2].

Lema 2.51. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *M es $\mathcal{T}$ -compacto.*

(b) *Para cada familia $\{U_i\}_{i \in X}$ en $\mathcal{T}$ tal que existe $\bigoplus_{i \in X} U_i$, la aplicación*

$$v : \bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i), (\alpha_i)_{i \in X} \mapsto \sum_{i \in X} u_i \alpha_i,$$

es un isomorfismo, donde $u_i : U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in X} U_i$ es la i -ésima inclusión natural del coproducto $\bigoplus_{i \in X} U_i$.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in X}$ una familia en $\mathcal{T}$ tal que existe $\bigoplus_{i \in X} U_i$. Para cada $i \in X$, sea $p_i : \bigoplus_{i \in X} U_i \rightarrow U_i$ la i -ésima proyección natural del coproducto $\bigoplus_{i \in X} U_i$. Note que, cada $(\alpha_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U_i)$ tiene soporte finito. Por lo tanto, la suma de morfismos $\sum_{i \in I} u_i \alpha_i$, donde $u_i : U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in X} U_i$ es la i -ésima inclusión natural, está bien definida en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i)$. Así la correspondencia,

$$v : \bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i), (\alpha_i)_{i \in X} \mapsto \sum_{i \in X} u_i \alpha_i,$$

está bien definida. Por otro lado, como $p_k(\sum_{i \in I} u_i \alpha_i) = \alpha_k$, tenemos que v es siempre un monomorfismo.

(a) $\Rightarrow$ (b) Veamos que v es un isomorfismo. Para ello, por lo anterior, basta ver que v es sobreyectivo. En efecto, consideremos un morfismo $\alpha : M \rightarrow \bigoplus_{i \in X} U_i$ en $\mathcal{C}$. Como M es $\mathcal{T}$ -compacto, existe un conjunto finito $J \subseteq X$ tal que $\alpha = \sum_{i \in J} u_i p_i \alpha$. Por lo tanto, $\alpha = v(p_i \alpha)_{i \in X}$ y así v es un isomorfismo.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea v un isomorfismo. Entonces, para todo $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i)$ existe $(\alpha_i)_{i \in X} \in \bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U_i)$ tal que $\alpha = v(\alpha_i)_{i \in X} = \sum_{i \in X} u_i \alpha_i$. Ahora, como $p_k v(\alpha_i)_{i \in X} = \alpha_k \forall k \in X$, tenemos que

$$\alpha = \sum_{j \in X} u_j \alpha_j = \sum_{j \in X} u_j (p_j v(\alpha_i)_{i \in X}) = \sum_{j \in X} u_j p_j \alpha.$$

Así, podemos concluir lo deseado por 2.49. $\square$

Corolario 2.52. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces, un coproducto finito es $\mathcal{T}$ -compacto si, y sólo si, cada uno de sus sumandos directos es $\mathcal{T}$ -compacto.*

Demostración. Se sigue de 2.51. □

Corolario 2.53. *Para una categoría aditiva $\mathcal{C}$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $\omega^\oplus$ un generador en $\mathcal{C}$, con $\omega \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) $\text{f.g.}(\omega) \subseteq \text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty}) \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$.
- (b) Si $\mathcal{C}$ es abeliana y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\omega, \text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty})) = 0$, entonces $\text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty})$ es cerrada por extensiones en $\mathcal{C}$.

Demostración.

- (a) Se sigue de 2.48(b), 2.50 y 2.52.
- (b) La prueba se hace de manera similar al Lema de la herradura (ver [Wei95, Horseshoe Lemma 2.2.8]). En efecto, sea $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ una sucesión exacta con $N, K \in \text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty})$. Luego, existen epimorfismos $\alpha : W \rightarrow N$ y $\alpha' : W' \rightarrow K$ con $W, W' \in \omega^{\oplus < \infty}$. Ahora, como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\omega, \text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty})) = 0$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(W', N) = 0$. De modo que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W', g)$ es un epimorfismo y así existe $h : W' \rightarrow M$ tal que $gh = \alpha'$. Finalmente, utilizando el lema de la serpiente se puede mostrar que el morfismo $(f_\alpha h) : W \oplus W' \rightarrow M$ es un epimorfismo. Por lo tanto, $M \in \text{Fac}_1(\omega^{\oplus < \infty})$. □

El siguiente lema contiene las propiedades de los objetos finitamente generados en categorías Ab5.

Lema 2.54. [Ste75, Chapter V. Lemma 3.1] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab5. Entonces, $\text{f.g.}(\mathcal{C})$ es cerrada por cocientes y extensiones en $\mathcal{C}$.*

El siguiente corolario es un resultado conocido.

Corolario 2.55. *Para un anillo R y $\text{mod}(R) := \text{f.g.}(\text{Mod}(R))$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) $\text{mod}(R) \subseteq \mathcal{K}_{\text{Mod}(R)}$ y $\text{mod}(R)$ es cerrada por cocientes y extensiones en $\text{Mod}(R)$. En particular, $\text{mod}(R)$ es gruesa a derecha en $\text{Mod}(R)$.
- (b) R es coherente a izquierda si, y sólo si, $\text{mod}(R)$ es una subcategoría abeliana gruesa de $\text{Mod}(R)$.

Demostración.

- (a) En efecto, es bien sabido que para toda familia de R -módulos $\{U_i\}_{i \in X}$, indexada por un conjunto X , la aplicación $\bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_R(R, U_i) \rightarrow \text{Hom}_R(R, \bigoplus_{i \in X} U_i)$, $(\alpha_i)_{i \in X} \mapsto \sum_{i \in X} u_i \alpha_i$, es un isomorfismo. Entonces, por 2.51 tenemos que $R \in$

$\mathcal{K}_{\text{Mod}(R)}$. Luego, como $\text{Fac}_1(R^{\oplus < \infty}) = \text{mod}(R)$, se sigue de 2.53(a) que $\text{mod}(R) \subseteq \mathcal{K}_{\text{Mod}(R)}$. Para probar el resto del enunciado, observamos que, por 2.54, la clase $\text{f.g.}(\text{Mod}(R))$ es cerrada por extensiones y cocientes. Así que, por 2.53(a) se sigue que

$$\text{f.g.}(\text{Mod}(R)) = \text{f.g.}(\{R\}) = \text{Fac}_1(R^{\oplus < \infty}) = \text{mod}(R).$$

- (b) Recordemos R es coherente a izquierda si todo módulo finitamente generado es finitamente presentado. Es claro que si $\text{mod}(R)$ es gruesa se tiene que R es coherente. Veamos que $\text{mod}(R)$ es cerrada por subobjetos en $\text{Mod}(R)$. Sea

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

una sucesión exacta con $B \in \text{mod}(R)$. Por (a), tenemos $C \in \text{mod}(R)$. Luego, como R es coherente, C admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

en $\text{mod}(R)$ con $P \in \text{proj}(R)$. Ahora, al considerar el pullback de g y p , obtenemos las sucesiones exactas

$$\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow Z \rightarrow P \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta' : 0 \rightarrow C' \rightarrow Z \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Observamos que η se escinde debido a que $P \in \text{proj}(R)$. Además, podemos ver que $Z \in \text{mod}(R)$ por η' . Entonces, $A \in \text{mod}(R)$ por ser el sumando directo de Z que es finitamente generado. En particular, $\text{mod}(R)$ es cerrada por epi-núcleos en $\text{mod}(R)$. Así que, $\text{mod}(R)$ es gruesa por (a). □

Lema 2.56. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$. Denotaremos por $\mathcal{M}(M, \mathcal{T})$ al conjunto de monomorfismos en $\mathcal{C}$ entre M y T . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

- (a) M es $\mathcal{T}$ -compacto para monomorfismos.
(b) Para cada familia $\{U_i\}_{i \in X}$ en $\mathcal{T}$ tal que existe $\bigoplus_{i \in X} U_i$, la aplicación

$$v' : \bigoplus_{i \in X} \mathcal{M}(M, U_i) \rightarrow \mathcal{M}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i), \quad (\alpha_i)_{i \in X} \mapsto \sum_{i \in X} u_i \alpha_i,$$

es biyectiva, donde $u_i : U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in X} U_i$ es la i -ésima inclusión natural del coproducto $\bigoplus_{i \in X} U_i$.

Demostración. Sean $\{U_i\}_{i \in X} \subseteq \mathcal{T}$ tal que existe $\bigoplus_{i \in X} U_i$, $u_i : U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in X} U_i$ la i -ésima inclusión natural y $p_i : \bigoplus_{i \in X} U_i \rightarrow U_i$ la i -ésima proyección natural. Consideramos el

morfismo $v : \bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i)$, $(\alpha_i) \mapsto \sum_{i \in I} u_i \alpha_i$, construido en la prueba de 2.51. Veamos que v se puede restringir a una función inyectiva entre los conjuntos de monomorfismos. En efecto, como $p_k(\sum_{i \in I} u_i \alpha_i) = \alpha_k \forall k \in X$, es inmediato verificar que $v(\bigoplus_{i \in X} \mathcal{M}(M, U_i)) \subseteq \mathcal{M}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i)$. Además, en 2.51 vimos que v es un monomorfismo. Por lo tanto, la función $v' : \bigoplus_{i \in X} \mathcal{M}(M, U_i) \rightarrow \mathcal{M}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i)$, que se obtiene de restringir v , siempre es inyectiva. Observamos además, que según lo mostrado en la prueba de 2.51, tenemos que $p_k v'(\alpha_i)_{i \in X} = p_k v(\alpha_i)_{i \in X} = \alpha_k$ para todo $k \in X$ y todo $(\alpha_i)_{i \in X} \in \bigoplus_{i \in X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U_i)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Veamos que v' es biyectiva. Para ello, por lo anterior, basta ver que v' es sobreyectiva. En efecto, consideremos un monomorfismo $\alpha : M \rightarrow \bigoplus_{i \in X} U_i$ en $\mathcal{C}$. Como M es $\mathcal{T}$ -compacto para monomorfismos, existe un conjunto finito $J \subseteq X$ tal que $\alpha = \sum_{i \in J} u_i p_i \alpha$. Cabe observar que

$$0 = \text{Ker}(\alpha) = \sum_{i \in J} \text{Ker}(p_i \alpha).$$

De modo que $p_i \alpha$ es monomorfismo $\forall i \in J$. Por lo tanto $\alpha = v'(p_i \alpha)_{i \in X}$ y así que v' es biyectiva.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea v' una función biyectiva. Entonces, para todo $\alpha \in \mathcal{M}(M, \bigoplus_{i \in X} U_i)$ existe $(\alpha_i)_{i \in X} \in \bigoplus_{i \in X} \mathcal{M}(M, U_i)$ tal que $\alpha = v'(\alpha_i)_{i \in X} = \sum_{i \in X} u_i \alpha_i$. Ahora, como $p_k v'(\alpha_i) = \alpha_k$ para todo $k \in X$, podemos concluir lo deseado por 2.49. $\square$

Proposición 2.57. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{Z}' \in \{\mathcal{K}_{\mathcal{T}}, \mathcal{K}_{\mathcal{T}, \mathcal{M}}\}$. Entonces $\text{Add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z} = \text{add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z}$ para toda $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$.*

Demostración. Sean $\mathcal{Z}' \in \{\mathcal{K}_{\mathcal{T}}, \mathcal{K}_{\mathcal{T}, \mathcal{M}}\}$ y $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$. Basta mostrar que $\text{Add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z} \subseteq \text{add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z}$. Sea $X \in \text{Add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z}$. Luego, existe una sucesión exacta que se escinde

$$0 \rightarrow X' \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i \xrightarrow{f} X \rightarrow 0 \text{ con } \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}.$$

Sea $\mu : X \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$ el monomorfismo tal que $f\mu = 1_X$. En cualquiera de las situaciones de $\mathcal{Z}'$, existe un conjunto finito $J \subseteq I$ y un morfismo $\mu' : X \rightarrow \bigoplus_{j \in J} U_j$ tal que $\mu = i_{J,I} \circ \mu'$, donde $i_{J,I} : \bigoplus_{j \in J} U_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$ es la inclusión natural del coproducto. Consideremos el morfismo $g := f \circ i_{J,I} : \bigoplus_{j \in J} U_j \rightarrow X$. Dado que $g\mu' = f \circ i_{J,I} \circ \mu' = f\mu = 1_X$, se tiene que g es un epimorfismo que se escinde; y como J es finito, se tiene que $X \in \text{add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z}$. $\square$

Teorema 2.58. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab4 , $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{Z}' \in \{\mathcal{K}_{\mathcal{T}}, \mathcal{K}_{\mathcal{T}, \mathcal{M}}\}$. Entonces, para toda $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ cerrada por extensiones, $\text{Add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting si y sólo si $\text{add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting.*

Demostración. Sea $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ cerrado por extensiones. Por ser $\mathcal{C}$ Ab4, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\text{Add}(\mathcal{T})) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\text{add}(\mathcal{T}))$. Ahora, por 2.57 sabemos que

$$(*) \quad \text{Add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z} = \text{add}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{Z}$$

en cualquiera de las situaciones de $\mathcal{Z}'$. Luego, por $(*)$ y como $\mathcal{Z}$ es cerrado por extensiones, $\forall \omega \subseteq \mathcal{Z}$ se tiene que $\omega \subseteq (\text{Add}(\mathcal{T}))_{\mathcal{Z}}^{\vee}$ si y sólo si $\omega \subseteq (\text{add}(\mathcal{T}))_{\mathcal{Z}}^{\vee}$. Finalmente, para checar (T5), basta aplicar 2.46 y $(*)$. $\square$

Corolario 2.59. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab4, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ y $\omega^{\oplus}$ un generador relativo en $\mathcal{C}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{W}}$. Entonces, para toda $\mathcal{Z} \subseteq \text{f.g.}(\omega)$ cerrada por extensiones, se tiene que $\text{Add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting si y sólo si $\text{add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting.

Demostración. Se sigue de 2.58 ya que por 2.53 tenemos que $\text{f.g.}(\omega) \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$. $\square$

Corolario 2.60. Sean R un anillo y $\mathcal{T} \subseteq \text{Mod}(R)$. Entonces, para cada $\mathcal{Z} \subseteq \text{mod}(R)$, cerrada por extensiones, se tiene que $\text{Add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting si y sólo si $\text{add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting.

Demostración. Primeramente notamos que, por 2.55(a), $R^{\oplus}$ es un generador relativo en $\text{Mod}(R)$ tal que $R \in \mathcal{K}_{\text{Mod}(R)}$ y $\text{f.g.}(\{R\}) = \text{mod}(R)$ es cerrada por extensiones. Luego, tomando $\omega := \{R\}$, se sigue de 2.59 que, para toda $\mathcal{Z} \subseteq \text{f.g.}(\omega)$ cerrada por extensiones, se tiene que $\text{Add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting si y sólo si $\text{add}(\mathcal{T})$ es n - $\mathcal{Z}$ -tilting. $\square$

2.3. Triples n - $\mathcal{X}$ -tilting

En 2.21 y 2.19, hemos empezado a estudiar las propiedades del par $({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$, cuando $\mathcal{T}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting. El objetivo de esta sección es estudiar más a fondo el papel que juegan estos pares en la teoría.

Para comenzar, en 2.24 hemos mencionado que sólo conocemos una prueba de que estos pares son de cotorsión en categorías con suficientes proyectivos e injectivos. En efecto, en caso de que la categoría $\mathcal{C}$ cumpla estas condiciones, se sigue de 1.24 que $\mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{A}^{\perp}$ para toda clase $\mathcal{C}$ -resolvente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, y que ${}^{\perp}\mathcal{B} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ para toda clase $\mathcal{C}$ -coresolvente $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces, como $\mathcal{X}^{\perp}$ siempre es $\mathcal{C}$ -coresolvente y ${}^{\perp}\mathcal{X}$ siempre es $\mathcal{C}$ -resolvente para toda clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$, utilizando que $({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}))^{\perp} \subseteq \mathcal{T}^{\perp}$, podemos concluir que una pareja $({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ es de cotorsión para toda clase $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$.

En caso de que la categoría $\mathcal{C}$ no admita suficientes proyectivos e injectivos, es difícil poder afirmar si lo anterior sigue ocurriendo. Sin embargo, en caso de que exista una clase $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ que admita un generador $\mathcal{Y}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{Y}$ y un cogenerador $\mathcal{Y}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{Y}$, veremos que una pareja $({}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ se comporta como un par de cotorsión adentro de $\mathcal{Y}$.

Lema 2.61. Sean $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tales que existe un α cogenerador $\mathcal{Y}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Entonces, existe una clase $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ tal que ${}^\perp\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = {}^{\perp_1}\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{X}$. Como α es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow A_0 \rightarrow M_1 \rightarrow 0,$$

con $A_0 \in \alpha$ y $M_1 \in \mathcal{X}$. Recursivamente, se construye una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow A_0 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow \cdots$$

donde $A_i \in \alpha$ y $M_{i+1} := \text{Im}(A_i \rightarrow A_{i+1}) \in \mathcal{X} \forall i \geq 0$. Consideremos al conjunto $\mathcal{N}_M := \{M_i\}_{i=0}^\infty$, donde $M_0 = M$. Como α es $\mathcal{Y}$ -inyectivo, por el lema del corrimiento A.76 tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, M_i) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{1+i}(Y, M) \forall Y \in \mathcal{Y}, \forall i \geq 0$.

Por lo tanto, ${}^\perp M \cap \mathcal{Y} = {}^{\perp_1}\mathcal{N}_M \cap \mathcal{Y}$. Haciendo lo mismo para todo cada $M \in \mathcal{X}$, tenemos que la clase $\mathcal{Z} := \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \mathcal{N}_M$, satisface ${}^\perp\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = {}^{\perp_1}\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}$. $\square$

Lema 2.62. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $T \in \mathcal{C}$ y $(\omega, \mathcal{X})$ un par de clases de objetos en $\mathcal{C}$ tal que ω es $\mathcal{X}$ -proyectivo. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) si $T \in \omega_\infty^\wedge$, entonces existe un conjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $T^\perp \cap \mathcal{X} = \mathcal{S}^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$;
- (b) si $T \in \omega^\wedge$, entonces existe un objeto $S \in \mathcal{C}$ tal que $T^\perp \cap \mathcal{X} = S^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$;
- (c) si $\mathcal{C}$ es una categoría Ab4 y $T \in \omega_\infty^\wedge$, entonces existe un objeto $S \in \mathcal{C}$ tal que $T^\perp \cap \mathcal{X} = S^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$.

Demostración. En efecto, si $T \in \omega_\infty^\wedge$, existe una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow W_{n+1} \rightarrow W_n \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 \rightarrow T \rightarrow 0$$

con $W_i \in \omega \cup \{0\}$ y $T_{i+1} := \text{Im}(W_{i+1} \rightarrow W_i) \forall i \geq 0$. Consideremos a $\mathcal{S} := \{T_i\}_{i=0}^\infty$, donde $T_0 := T$. Luego, como $\omega \subseteq {}^\perp\mathcal{X}$, por el lema del corrimiento A.76, tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(T, X) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T_i, X) \forall i \geq 0, \forall X \in \mathcal{X},$$

y por lo tanto $\mathcal{S}^{\perp_1} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$.

Observemos que, en caso de que $T \in \omega^\wedge$ y $\mathcal{S}$ sea un conjunto finito, $S := \bigoplus_{R \in \mathcal{S}} R$ satisface que $\mathcal{S}^{\perp_1} \cap \mathcal{X} = S^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$ debido a que

$$\prod_{R \in \mathcal{S}} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(R, X) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1\left(\bigoplus_{R \in \mathcal{S}} R, X\right)$$

por A.82. En caso de que $\mathcal{C}$ sea Ab4 , utilizando A.100 se prueba de manera semejante que $S := \bigoplus_{i=0}^\infty T_i$ satisface que $\mathcal{S}^{\perp_1} \cap \mathcal{X} = S^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$. $\square$

En particular, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.63. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos con un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Si $T \in \mathcal{X}$, entonces existe un objeto $S \in \mathcal{C}$ tal que $T^\perp \cap \mathcal{X} = S^{\perp_1} \cap \mathcal{X}$.*

Demostración. Sea ω un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Dado que $T \in \mathcal{X}$, se tiene que $T \in \omega_\infty^\wedge$. Luego, el resultado se sigue de 2.62(c). $\square$

De manera semejante a 2.19 y 2.33 podemos probar el siguiente lema que muestra el comportamiento de los pares de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tales que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, donde $\mathcal{T}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Lema 2.64. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

- (a) *Si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, entonces cualquier morfismo $A \rightarrow X$, con $A \in \mathcal{A}$ y $X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.*
- (b) *Si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \cap \mathcal{B} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.*
- (c) *Si ${}^\perp_1 \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ y $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
 - (c1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$;
 - (c2) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo;
 - (c3) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a izquierda.

Demostración.

- (a) Sea $f : A \rightarrow X$ un morfismo, con $A \in \mathcal{A}$ y $X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Por 2.21 y 2.19(a), sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{k} T' \xrightarrow{g} X \rightarrow 0,$$

donde $L \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Luego, como $A \in \mathcal{A}$ y $L \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L) = 0$. Lo que implica que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, g)$ es suprayectiva. Por lo tanto, f se factoriza a través de g . Así, podemos concluir que f se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, ya que $T' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.

- (b) Por 2.21 y 2.19(c) sabemos que

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}.$$

Además, por (a) sabemos que, para todo $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, $1_A : A \rightarrow A$ se factoriza a través de $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, con lo que podemos concluir que $A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.

- (c) (c1) $\Rightarrow$ (c2) Supongamos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Por (b), 2.21 y 2.19(a) sabemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Así que por 1.16(a) se tiene que $\forall X \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee$ existen sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{g_X} M_X \rightarrow C_X \rightarrow 0 \quad \text{con } C_X \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee \cap \mathcal{X}, M_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \quad \text{y}$$

$$0 \rightarrow K_X \rightarrow B_X \xrightarrow{f_X} X \rightarrow 0 \quad \text{con } B_X \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee, K_X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}.$$

Más aún, dado que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, 1.16(c) implica que

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}). \quad (2.A)$$

Además, por 1.11(a1),

$$\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee = (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee \quad (2.B)$$

debido a que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) < \infty$. Por último, notamos por 1.13 que

$$\text{pd}_{\mathcal{B}}((\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee) = \text{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0.$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X})^\vee \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1} \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}. \quad (2.C)$$

Aplicando (2.A), (2.B) y (2.C) a las sucesiones exactas antes obtenidas, podemos concluir que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo.

(c2) $\Rightarrow$ (c3) Es trivial.

(c3) $\Rightarrow$ (c1) Supongamos ahora que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a izquierda. Sea $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Ahora, por (b), $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, y así dicha sucesión se escinde. Por lo tanto $X \in \mathcal{A}$; y así por (b), podemos concluir que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

□

Utilizando los conceptos desarrollados en la Sección 1.2, podemos reformular de la siguiente manera algunos de los resultados que hemos obtenido para clases n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Proposición 2.65. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:*

- (a) $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ es un generador $(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})$ -proyectivo relativo en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$;

- (b) $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee$ y $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee$;
(c) $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{X}}^\vee \subseteq (\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$.

Demostración.

- (a) Se sigue de 2.21 y 2.19.
(b) Se sigue de 2.27(b) y 2.33(f).
(c) $\text{pd}_{\mathcal{T}^\perp}((\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee) = \text{pd}_{\mathcal{T}^\perp}(\mathcal{T} \cap \mathcal{X}) = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{T} \cap \mathcal{X})^\vee \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp)$.

□

Definición 2.66. Decimos que $((\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathcal{T})$ es un **triple n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeño)** en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión a izquierda en $\mathcal{X}$ con $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$;
(b) $\mathcal{B}$ es cerrado por sumandos directos y extensiones;
(c) $\mathcal{T}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

Definición 2.67. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son clases n - $\mathcal{X}$ -tilting, decimos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son **equivalentes** si $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}'^\perp \cap \mathcal{X}$.

Proposición 2.68. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones y $\mathcal{M}, \mathcal{T}$ clases n - $\mathcal{X}$ -tilting. Entonces $\mathcal{M}$ es equivalente a $\mathcal{T}$ si, y sólo si, $\mathcal{M} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Por 2.65(a) tenemos que

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{X} = \mathcal{M}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}.$$

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{M} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$. En particular $\text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) = \text{Fac}_k^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \ \forall k \geq 1$. Luego, por 2.25 $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) = \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. □

Lema 2.69. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones y $\mathcal{M}$ una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting. Si $\mathcal{T} := \mathcal{M} \cap \mathcal{X}$ es precubriente en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{T}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting equivalente a $\mathcal{M}$.

Demostración. Dado que $\mathcal{T} = \mathcal{M} \cap \mathcal{X}$, se tiene que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$ y así $\mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{T}^\perp$. Más aún, es claro que $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$. Veamos que $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting:

(T1) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) \leq n$;

(T2) $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$;

(T3) por hipótesis, existe un ω generador relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{M}_\mathcal{X}^\vee$. Ahora bien, como $\mathcal{X}$ es cerrado por extensiones y $\omega \subseteq \mathcal{X}$, se tiene que

$$\omega \subseteq (\mathcal{M} \cap \mathcal{X})_\mathcal{X}^\vee = \mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee;$$

(T4) por hipótesis, existe un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo α relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{T}^\perp$;

(T5) dado que $\mathcal{T} = \mathcal{M} \cap \mathcal{X}$ es precubriente en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$, se sigue que $\mathcal{T}$ satisface (T5).

Finalmente, como $\mathcal{T} = \mathcal{M} \cap \mathcal{X}$, se sigue de 2.25 que

$$\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n^\mathcal{X}(\mathcal{M}) = \text{Fac}_n^\mathcal{X}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{T}$ son equivalentes. $\square$

Lema 2.70. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par $\mathcal{X}$ -completo a derecha en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es cerrado por sumandos directos. Si existe $\alpha \subseteq \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1}\alpha$, entonces $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

Demostración. En efecto, dado que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, para todo $A \in \alpha$, existe una sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$ con $X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X} \cap \mathcal{A}$. Luego, como $C \in \mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1}\alpha$, dicha sucesión se escinde. Así que todo $A \in \alpha$ es sumando directo de un objeto $X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. $\square$

Lema 2.71. Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en $\mathcal{C}$ tales que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha y $\mathcal{X}$ -hereditario, $n := \max \{1, \text{pd}_\mathcal{X}(\mathcal{A})\} < \infty$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Para todo $X \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} B_{X,0} \xrightarrow{f_1} B_{X,1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} B_{X,n} \rightarrow 0$$

tal que $B_{X,n} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, $B_{X,i} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\text{Coker}(f_i) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \forall i \in [0, n-1]$. En particular $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq n$.

(b) Sean $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ cerradas por extensiones. Entonces, para todo $W \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{f_0} B_{W,0} \xrightarrow{f_1} B_{W,1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} B_{W,n} \rightarrow 0$$

tal que $B_{W,i} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \forall i \in [0, n]$ y $\text{Coker}(f_j) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \forall j \in [0, n-1]$. En particular $\text{coresdim}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}) \leq n$.

Demostración.

- (a) En efecto, sea $X \in \mathcal{X}$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow B_{X,0} \rightarrow C_1 \rightarrow 0,$$

donde $B_{X,0} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C_1 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Recursivamente, consideramos la k -ésima sucesión exacta

$$0 \rightarrow C_k \rightarrow B_{X,k} \rightarrow C_{k+1} \rightarrow 0,$$

donde $B_{X,k} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C_{k+1} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Continuando hasta el paso n , contruimos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow B_{X,0} \rightarrow B_{X,1} \rightarrow \dots \rightarrow B_{X,n} \rightarrow C_{n+1} \rightarrow 0.$$

Dado que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario, $C_{n+1} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ y $B_{X,i} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ tenemos que $B_{X,i} \in C_{n+1}^\perp \forall i \in [0, n]$. Así que, por el lema del corrimiento,

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C_{n+1}, C_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C_{n+1}, X) = 0$$

debido a que $C_{n+1} \in \mathcal{A}$ y $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$ por hipótesis. Se sigue que la sucesión

$$0 \rightarrow C_n \rightarrow B_{X,n} \rightarrow C_{n+1} \rightarrow 0$$

se escinde. En particular, $C_n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ ya que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos. Por lo tanto,

$$0 \rightarrow X \rightarrow B_{X,0} \rightarrow B_{X,1} \rightarrow \dots \rightarrow B_{X,n-1} \rightarrow C_n \rightarrow 0$$

es la sucesión buscada, considerando $B_{X,n} := C_n$.

- (b) En efecto, sea $W \in \omega$. Dado que $\omega \subseteq \mathcal{X}$, consideramos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{f_0} B_{W,0} \xrightarrow{f_1} B_{W,1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} B_{W,n} \rightarrow 0$$

obtenida en (a). Usando ahora que la clase $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, podemos concluir de las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow C_k \rightarrow B_{W,k} \rightarrow C_{k+1} \rightarrow 0$$

que $B_{W,k} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ para todo $k \in [1, n]$. Finalmente, para concluir lo deseado, consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \rightarrow B_{W,0} \rightarrow C_1 \rightarrow 0.$$

Como $W \in \mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap {}^\perp (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ y $C_1 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap {}^\perp (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$, tenemos

que $B_{W,0} \in \mathcal{X} \cap^\perp (\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} = \mathcal{X} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

□

El siguiente teorema busca generalizar [AHMH09, 3.2].

Teorema 2.72. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 , $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y una clase σ tal que $\text{Add}(\sigma)$ es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión a izquierda en $\mathcal{X}$ con $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, $\kappa := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} = \text{smd}(\mathcal{B})$ cerrada por extensiones. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) *existe $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $((\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathcal{T})$ es un triple n - $\mathcal{X}$ -tilting grande;*
- (b) *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$, $\kappa = \kappa^\oplus$ y κ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$;*
- (c) *κ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$.*

Además, si alguna de las condiciones anteriores se satisface, se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\vee$, $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq n$, $\kappa = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \max\{1, n\}$. Más aún, si σ es un conjunto, entonces podemos omitir la hipótesis κ precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ de (b) y encontrar $T \in \mathcal{C}$ tal que $\text{Add}(T) = \kappa$.

Demostración. Primeramente, notemos que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -hereditario ya que $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\mathcal{T}$ una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande tal que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$. Luego, por 2.64, sabemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo y que

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}.$$

En particular, $\kappa = \kappa^\oplus$. Más aún, por 1.11(a2) y 2.2(T1, T4), tenemos $\text{pd}_{\mathcal{X}}({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$. Así que, como $\mathcal{A} \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ ya que $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, tenemos $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$. Finalmente, por (T5), sabemos que todo $Z \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ admite una $\mathcal{T}$ -precubierta $\phi: T' \rightarrow Z$ con $T' \in \mathcal{X}$. Notemos que, en particular, ϕ es una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -precubierta. Por lo tanto, como $\kappa = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, κ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sean $\omega := \text{Add}(\sigma)$ y α un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Aseguramos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$. En efecto, como $\kappa \subseteq \mathcal{A}$ y $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, se tiene que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$. Para la contención opuesta observamos lo siguiente. Sea $X \in \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$. Por 2.71, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_k} B_k \rightarrow 0$$

tal que $B_k \in \kappa$, $B_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\text{Coker}(f_i) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \forall i \in [0, k]$. Luego, como $X \in \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$ y $B_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$, tenemos que $\text{Im}(f_j) \in \kappa^\perp \cap \mathcal{X} \forall j \in [1, k-1]$.

Veamos, por inducción sobre k , que $X \in \mathcal{B}$. En efecto, si $k = 0$, entonces $X \cong B_0 \in \mathcal{B}$. Para $k = 1$, tenemos una sucesión exacta

$$\eta_1 : 0 \rightarrow X \rightarrow B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow 0,$$

con $X \in \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$ y $B_1 \in \kappa$. Luego η_1 se escinde y así $X \in \mathcal{B}$.

Sea $k > 1$. Veamos primero que $B_{k-1} \in \kappa$. En efecto, dado que $B_{k-1} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, es suficiente ver que $B_{k-1} \in \mathcal{A}$. Para ello, consideramos la sucesión exacta

$$\eta_k : 0 \rightarrow K_{k-1} \rightarrow B_{k-1} \rightarrow B_k \rightarrow 0,$$

Tenemos que $B_{k-1} \in \mathcal{A}$ ya que $K_{k-1}, B_k \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada por extensiones. Ahora, como $B_k \in \kappa$ y $K_{k-1} \in \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$, η_k se escinde y así $K_{k-1} \in \kappa$. Considerando la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-2}} B_{k-2} \rightarrow K_{k-1} \rightarrow 0$$

con $K_{k-1} \in \kappa$, tenemos que $X \in \mathcal{B}$ por la hipótesis de inducción.

Veamos que κ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting. Procederemos verificando los axiomas (T0) a (T5) de 2.2.

(T0) Se sigue de que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ son cerrados por sumandos directos.

(T1) Dado que $\kappa \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\kappa) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$.

(T2) Como $\kappa \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$, se sigue que $\kappa \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$.

(T4) Por 2.70, tenemos que α es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Luego, como $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\perp$, $\alpha \subseteq \mathcal{X}^\perp \cap \kappa^\perp$.

(T5) Sabemos que κ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Entonces, como $\kappa^\perp \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, tenemos que todo $Z \in \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$ admite una κ -precubierta $T' \rightarrow Z$ con $T' \in \mathcal{X}$.

(T3) De las hipótesis que tenemos, por 2.44, basta checar la condición (T3''). Para ello, hay que verificar que $\sigma \subseteq \kappa_{\mathcal{X}}^\vee$. Lo cual se sigue de 2.71.

(c) $\Rightarrow$ (a) Es trivial.

Supongamos que alguna de las condiciones anteriores se satisface. Note primeramente que $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \max\{1, n\}$ por 2.71(a). Luego, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^\vee \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^\vee$; y $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ por 1.37(a).

Por otro lado, $\kappa = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ por 1.50(a). Finalmente, por (c), sabemos que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n < \infty$. Luego, por 1.50(a1,a2)

$$\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n < \infty$$

y $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\vee$.

Finalmente, supongamos que σ es un conjunto y que se cumplen las hipótesis de (b), con excepción la de κ precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Dado que $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap {}^\perp \mathcal{X}$, por 2.71, para

cada $W \in \sigma$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{f_0} B_{W,0} \xrightarrow{f_1} B_{W,1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} B_{W,n} \rightarrow 0$$

tal que $B_{W,i} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \forall i \in [0, n]$ y $\text{Coker}(f_j) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \forall j \in [0, n-1]$. Consideremos $T_W := \bigoplus_{i=0}^n B_{W,i}$ para cada $W \in \sigma$. Luego, como $\kappa = \kappa^\oplus$, se tiene que $T := \bigoplus_{W \in \sigma} T_W \in \kappa$ y que $\text{Add}(T) \subseteq \kappa$. Afirmamos que $\text{Add}(T) = \kappa$. Para probarlo necesitaremos mostrar que T es n - $\mathcal{X}$ -tilting grande. Esto se hace de manera similar a la prueba de $(b) \Rightarrow (c)$. Lo incluimos a continuación por completez.

Procederemos verificando que se cumplen los axiomas (T0) a (T5) de 2.2.

(T0) Es claro.

(T1) Dado que $\text{Add}(T) \subseteq \kappa \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(T) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$.

(T2) Dado que $\kappa \subseteq \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$ y $\text{Add}(T) \subseteq \kappa$, se sigue que

$$\text{Add}(T) \subseteq \kappa \subseteq \kappa^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap (\text{Add}(T))^\perp.$$

(T4) Por 2.70, tenemos que α es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap T^\perp \subseteq T^\perp$. Luego, $\alpha \subseteq \mathcal{X}^\perp \cap (\text{Add}(T))^\perp$.

(T5) Dado que $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} = \text{Add}(\mathcal{X})$, se sigue que $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{X}$. Luego, como $\text{Add}(T)$ es precubriente, se satisface (T5).

(T3) De las hipótesis que tenemos, por 2.44, basta checar la condición (T3"). Para lo cual, hay que verificar que $\sigma \subseteq (\text{Add}(T))_{\mathcal{X}}^\vee$. Por construcción de la familia $\{T_W\}_{W \in \sigma}$, tenemos que cada $W \in \sigma$, satisface que $W \in (\text{smd}(T_W))_{\mathcal{X}}^\vee$. Luego, $\sigma \subseteq \text{Add}(T)_{\mathcal{X}}^\vee$ de donde se sigue lo que deseamos probar.

Veamos que $\kappa \subseteq \text{Add}(T)$. Sea $X \in \kappa$. Luego

$$X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq T^\perp \cap \mathcal{X}.$$

Ahora, por 2.18 tenemos que $T^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1^{\mathcal{X}}(\text{Add}(T))$. Así que, por 2.19(a), $\text{Add}(T) = \text{Add}(T) \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $T^\perp \cap \mathcal{X}$. Luego, como $X \in T^\perp \cap \mathcal{X}$, se puede construir recursivamente la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow T_n \xrightarrow{f_n} T_{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} X \rightarrow 0,$$

con $T_i \in \text{Add}(T)$ y $K_i := \text{Ker}(f_i) \in T^\perp \cap \mathcal{X}$ para todo $i \in [0, n]$. Por otro lado, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\kappa) \leq n$. Así que, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(K_{n-1}, K_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(X, K_n) = 0.$$

De modo que $K_n \in \text{Add}(T) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$, pues la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow T_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow 0$$

se escinde. Luego, como $T_i \in \text{Add}(T) \subseteq \kappa \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \forall i \in [0, n]$, usando que $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$ es cerrada por conúcleos de epimorfismos entre sus objetos, concluimos que $K_i \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \forall i \in [0, n]$. Finalmente, como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, K_0) = 0$, debido a que $K_0 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$ y $X \in \kappa \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, se tiene que la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow T_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

se escinde y por lo tanto $X \in \text{Add}(T)$.

□

Tenemos un teorema semejante para el caso pequeño.

Teorema 2.73. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por extensiones que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y un clase σ tal que $\text{add}(\sigma)$ es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión a izquierda en $\mathcal{X}$ con $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, $\kappa := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} = \text{smd}(\mathcal{B})$ cerrada por extensiones. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) *existe $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $((\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathcal{T})$ es un triple n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeño;*
- (b) *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$, $\kappa = \kappa^{\oplus < \infty}$ y κ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$;*
- (c) *κ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \kappa^\perp \cap \mathcal{X}$.*

Además, si alguna de las condiciones anteriores se satisface, se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^\vee$, $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq n$, $\kappa = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \max\{1, n\}$. Más aún, si σ es un conjunto finito y todo $X \in \kappa$ satisface que $\text{add}(X)$ es precubriente en $X^\perp \cap \mathcal{X}$, entonces podemos omitir la hipótesis κ precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ de (b) y encontrar $T \in \mathcal{C}$ tal que $\text{add}(T) = \kappa$.

Demostración. La prueba es semejante a la de 2.72. La incluimos a continuación por completez.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\mathcal{T}$ una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Luego, por 2.64 sabemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo y que

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}.$$

En particular, $\kappa = \kappa^{\oplus < \infty}$. Ahora, tenemos $\text{pd}_{\mathcal{X}}({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$ por 1.11(a2) y 2.2(T1, T4). En particular, como $\mathcal{A} \subseteq {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ ya que $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, tenemos

$\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$. Finalmente, por (T5), sabemos que todo $Z \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ admite una $\mathcal{T}$ -precubierta $\phi : T' \rightarrow Z$ con $T' \in \mathcal{X}$. Notemos que, en particular, ϕ es una $\mathcal{T} \cap \mathcal{X}$ -precubierta. Por lo tanto, como $\kappa = \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, κ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sean $\omega := \text{add}(\sigma)$ y α un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Aseguramos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$. En efecto, como $\kappa \subseteq \mathcal{A}$ y $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, se tiene que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Para la contención opuesta observamos lo siguiente. Sea $X \in \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Por 2.71, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_k} B_k \rightarrow 0$$

tal que $B_k \in \kappa$, $B_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\text{Coker}(f_i) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \forall i \in [0, k]$. Luego, como $X \in \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$ y $B_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$, tenemos que $\text{Im}(f_j) \in \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X} \forall j \in [1, k-1]$.

Veamos, por inducción sobre k , que $X \in \mathcal{B}$. En efecto, si $k = 0$, entonces $X \cong B_0 \in \mathcal{B}$. Para $k = 1$, tenemos una sucesión exacta

$$\eta_1 : 0 \rightarrow X \rightarrow B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow 0,$$

con $X \in \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$ y $B_1 \in \kappa$. Luego η_1 se escinde y así $X \in \mathcal{B}$.

Sea $k > 1$. Veamos primero que $B_{k-1} \in \kappa$. En efecto, dado que $B_{k-1} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, es suficiente ver que $B_{k-1} \in \mathcal{A}$. Para ello, consideramos la sucesión exacta

$$\eta_k : 0 \rightarrow K_{k-1} \rightarrow B_{k-1} \rightarrow B_k \rightarrow 0,$$

Tenemos que $B_{k-1} \in \mathcal{A}$ ya que $K_{k-1}, B_k \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada por extensiones. Ahora, como $B_k \in \kappa$ y $K_{k-1} \in \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$, η_k se escinde y así $K_{k-1} \in \kappa$. Considerando la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-2}} B_{k-2} \rightarrow K_{k-1} \rightarrow 0$$

con $K_{k-1} \in \kappa$, tenemos que $X \in \mathcal{B}$ por la hipótesis de inducción.

Aseguramos que $\text{Add}(\mathcal{T})$ ($\text{add}(\mathcal{T})$) es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. En efecto, como $\mathcal{T} \subseteq \kappa \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = 0$, se tiene que $\mathcal{X} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}^{\perp}$.

Veamos que κ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting. Procederemos verificando los axiomas (T0) a (T5) de 2.2.

(T0) Se sigue de que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ son cerrados por sumandos directos.

(T1) Dado que $\kappa \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\kappa) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$.

(T2) Como $\kappa \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$, se sigue que $\kappa \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$.

(T4) Por 2.70, tenemos que α es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Luego, como $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^{\perp}$, $\alpha \subseteq \mathcal{X}^{\perp} \cap \kappa^{\perp}$.

(T5) Sabemos que κ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Entonces, como $\kappa^{\perp} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$, tenemos que todo $Z \in \kappa^{\perp} \cap \mathcal{X}$ admite una κ -precubierta $T' \rightarrow Z$ con $T' \in \mathcal{X}$.

(T3) De las hipótesis que tenemos, por 2.44, basta checar la condición (t3"). Para ello, hay que verificar que $\sigma \subseteq \kappa_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Lo cual se sigue de 2.71.

(c) $\Rightarrow$ (a) Es trivial.

Supongamos que alguna de las condiciones anteriores se satisface. Note primeramente que $\text{coresdim}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{X}}^{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \max\{1, n\}$ por 2.71(a). Luego, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{X})_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}^{\vee} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\vee}$; y por 1.37(a) $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$.

Por otro lado, por 1.50(a) $\kappa = (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^{\perp} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$. Finalmente, por (c), sabemos que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n < \infty$. Luego, por 1.50(a1,a2)

$$\text{coresdim}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{X}) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n < \infty$$

y $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \subseteq \kappa^{\vee}$.

Finalmente, supongamos que σ es un conjunto finito, que todo $X \in \kappa$ satisface que $\text{add}(X)$ es precubriente en $X^{\perp} \cap \mathcal{X}$, y que se cumplen las hipótesis de (b), con excepción la de κ precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Dado que $\sigma \subseteq \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$, por 2.71, para cada $W \in \sigma$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{f_0} B_{W,0} \xrightarrow{f_1} B_{W,1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} B_{W,n} \rightarrow 0$$

tal que $B_{W,i} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \ \forall i \in [0, n]$ y $\text{Coker}(f_j) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} \ \forall j \in [0, n-1]$. Consideremos $T_W := \bigoplus_{i=0}^n B_{W,i}$ para cada $W \in \sigma$. Luego, como $\kappa = \kappa^{\oplus < \infty}$, se tiene que $T := \bigoplus_{W \in \sigma} T_W \in \kappa$ y que $\text{add}(T) \subseteq \kappa$. Afirmamos que $\text{add}(T) = \kappa$. Para probarlo necesitaremos mostrar que T es n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeño. Esto se hace de manera similar a la prueba de (b) $\Rightarrow$ (c). Lo incluimos a continuación por completez.

Procederemos verificando que se cumplen los axiomas (T0) a (T5) de 2.2.

(T0) Es claro.

(T1) Dado que $\text{add}(T) \subseteq \kappa \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(T) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \leq n$.

(T2) Dado que $\kappa = \text{add}(\kappa)$ y $\text{add}(T) \subseteq \kappa$, se sigue que

$$\text{add}(T) \subseteq \mathcal{X} \cap (\text{add}(T))^{\perp}.$$

(T4) Por 2.70, tenemos que α es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cap T^{\perp} \subseteq T^{\perp}$. Luego, $\alpha \subseteq \mathcal{X}^{\perp} \cap (\text{add}(T))^{\perp}$.

(T5) Se sigue de la suposición de que todo $X \in \kappa$ satisface que $\text{add}(X)$ es precubriente en $X^{\perp} \cap \mathcal{X}$.

(T3) De las hipótesis que tenemos, por 2.44, basta checar la condición (t3"). Para lo cual, hay que verificar que $\sigma \subseteq (\text{add}(T))_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Por construcción de la familia $\{T_W\}_{W \in \sigma}$, tenemos que cada $W \in \sigma$, satisface que $W \in (\text{smd}(T_W))_{\mathcal{X}}^{\vee}$. Luego, $\sigma \subseteq \text{add}(T)_{\mathcal{X}}^{\vee}$ de donde se sigue lo que deseamos probar.

Veamos que $\kappa \subseteq \text{add}(T)$. Sea $X \in \kappa$. Luego

$$X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq T^\perp \cap \mathcal{X}.$$

Ahora, por 2.18 tenemos que $T^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\text{add}(T)) [1][\mathcal{X}]$. Así que, por 2.19(a), $\text{add}(T) = \text{add}(T) \cap \mathcal{X}$ es un generador relativo en $T^\perp \cap \mathcal{X}$. Luego, como $X \in T^\perp \cap \mathcal{X}$, se puede construir recursivamente la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow T_n \xrightarrow{f_n} T_{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} X \rightarrow 0,$$

con $T_i \in \text{add}(T)$ y $K_i := \text{Ker}(f_i) \in T^\perp \cap \mathcal{X}$ para todo $i \in [0, n]$. Por otro lado, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}(\kappa) \leq n$. Así que, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(K_{n-1}, K_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(X, K_n) = 0.$$

De modo que $K_n \in \text{add}(T) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$, pues la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow T_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow 0$$

se escinde. Luego, como $T_i \in \text{add}(T) \subseteq \kappa \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \forall i \in [0, n]$, usando que $(\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$ es cerrada por conúcleos de epimorfismos entre sus objetos, concluimos que $K_i \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp \forall i \in [0, n]$. Finalmente, como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, K_0) = 0$, debido a que $K_0 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{X})^\perp$ y $X \in \kappa \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{X}$, se tiene que la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow T_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

se escinde y por lo tanto $X \in \text{add}(T)$.

□

Observación 2.74. *En el teorema anterior apareció la condición de que todo $X \in \kappa$ satisface que $\text{add}(X)$ es precubriente en $X^\perp \cap \mathcal{X}$. Existen al menos un par de ejemplos donde esta condición se satisface inclusive para la clase $\mathcal{X}$ en lugar de κ . A saber:*

- (i) $\mathcal{X} := \mathcal{FP}_n$, $\mathcal{C} = \text{Mod}(R)$, $\sigma = \{R\}$ con R un anillo n -coherente, ver 3.24.
- (ii) R una álgebra de Artin, $\mathcal{C} := \text{mod}(R)$, $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(R)$ y $\sigma = \{R\}$, ver 3.7.

Teorema 2.75. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 (abeliana), $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus \subseteq \mathcal{C}$ ($\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$) gruesa a derecha, σ una clase tal que $\text{Add}(\sigma)$ ($\text{add}(\sigma)$) es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ gruesa a derecha. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *Existe $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.*
- (b) *La clase $\mathcal{B}$ satisface las siguientes propiedades:*
 - (b0) *$\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es cerrada por coproductos (se elimina esta condición);*

- (b1) existe un α cogenerador relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\text{id}_{\mathcal{X}}(\alpha) = 0$;
- (b2) $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial en $\mathcal{X}$;
- (b3) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$;
- (b4) $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

Más aún, en caso de que se satisfaga alguna de las condiciones anteriores, el n - $\mathcal{X}$ -tilting $\mathcal{T}$ queda determinado por la igualdad $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ y la clase $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}$. Checaremos las condiciones de (b).

- (b0) Dado que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, por 2.27(a,d), se tiene que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) = \mathcal{T}$. Por lo que se sigue (b0).
- (b1) Se sigue de (T4).
- (b2) Por 2.23(c), el par $(\perp(\mathcal{T}^{\perp}), \mathcal{T}^{\perp})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha. Luego, (b2) se sigue de que

$$\perp(\mathcal{T}^{\perp}) \cap \mathcal{X} = \perp(\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \subseteq \perp_1(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$$

por 2.23(a).

- (b3) Se sigue de 1.11(a2), (T4) y (T1).
 - (b4) Se sigue de (T5).
- (b) $\Rightarrow$ (a) Asumiendo las condiciones de (b), tenemos que:

- (i) $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.

En efecto, por (b2), el par $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha. Ahora, por (b1), $\alpha \subseteq \mathcal{X}$; y como $\text{id}_{\mathcal{X}}(\alpha) = 0$, por 2.70 se sigue (i).

Consideremos el par $(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}), \mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Veamos que dicho par es un par de cotorsión a izquierda en $\mathcal{X}$ $\mathcal{X}$ -completo a derecha. En efecto, por (b2) y 1.24, es suficiente checar que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente. Para ello, note que $\alpha \subseteq \mathcal{B}$ (por (i)); y como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ son gruesas a derecha, se tiene que $\mathcal{B}$ es cerrada por extensiones y mono-conúcleos en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Entonces, por (b0), (b3) y (b4), tenemos que $(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}, \mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface las condiciones de 2.72(b) (2.73(b)). Así que, por 2.72(a) (2.73(a)), se sigue que (a). $\square$

Observación 2.76. Supongamos que se tienen las hipótesis de 2.75 con $\mathcal{C} \text{ Ab}_4$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\oplus}$ una clase gruesa a derecha y σ un conjunto. En tal caso, podemos omitir la condición (b4). Más aún, si se satisface 2.75(a), podemos elegir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ en (a) de la forma $\mathcal{T} = \text{Add}(T)$, con $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$.

En efecto, se sigue del último enunciado de 2.72 que, en tal caso, existe $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ tal que $\text{Add}(T) = \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Luego, como $\text{Add}(T)$ es precubriente, podemos omitir la condición (b4).

Observación 2.77. Supongamos que se tienen las hipótesis de 2.75, con $\mathcal{C}$ abeliana, $\mathcal{X}$ una clase gruesa a derecha, y σ un conjunto finito. En tal caso, podemos cambiar la condición (b4) por:

(*) cada $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface que $\text{add}(T)$ es precubriente en $T^\perp \cap \mathcal{X}$.

Más aún, si se satisface 2.75(a), podemos elegir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ en (a) de la forma $\mathcal{T} = \text{add}(T)$ con $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$.

En efecto, se sigue del último enunciado de 2.73.

Corolario 2.78. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 , con suficientes inyectivos, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ una clase gruesa a derecha que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y σ un conjunto tal que $\text{Add}(\sigma)$ es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Consideremos las clases:

$\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ que consiste de los objetos $T \in \mathcal{X}$ que son n - $\mathcal{X}$ -tilting grandes; y

$\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$ que consiste de los pares de cotorsión a izquierda y $\mathcal{X}$ -completos a derecha $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$, ${}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es cerrado por coproductos y $\mathcal{B}$ es gruesa a derecha.

Además, en $\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$ dada por $T \sim S$ si, y sólo si, $T^\perp \cap \mathcal{X} = S^\perp \cap \mathcal{X}$; y en $\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$ la relación de equivalencia $\approx$ definida como $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ si, y sólo si, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{X}$. Entonces, existe una correspondencia biyectiva $\phi : \mathcal{T}_{n,\mathcal{X}} / \sim \rightarrow \mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}} / \approx$, $[T] \mapsto [({}^\perp(T^\perp), T^\perp)]$.

Demostración. A cada $T \in \mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ asignamos el par $\mathcal{P}_T := ({}^\perp(T^\perp), T^\perp)$. Veamos que $\mathcal{P}_T \in \mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$. En efecto, por 2.23(c), $\mathcal{P}_T$ es $\mathcal{X}$ -completo. Ahora, por 1.24, $\mathcal{P}_T$ es de cotorsión a izquierda debido a que $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Por otro lado, es sabido que $T^\perp$ es gruesa a derecha; y por 2.65(a),

$$T^\perp \cap {}^\perp(T^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \text{Add}(T) \cap \mathcal{X} = \text{Add}(T),$$

y así $T^\perp \cap {}^\perp(T^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ es cerrada por coproductos; y por 2.29(b) se sigue que $\text{pd}_{\mathcal{X}}({}^\perp(T^\perp \cap \mathcal{X})) \leq n$. Además, para $T, S \in \mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$, notemos que

$$[T] = [S] \Leftrightarrow T^\perp \cap \mathcal{X} = S^\perp \cap \mathcal{X} \Leftrightarrow [\mathcal{P}_T] = [\mathcal{P}_S].$$

Por lo tanto, hemos mostrado que la correspondencia $\phi([T]) = [({}^\perp(T^\perp), T^\perp)]$ está bien definida y es inyectiva. Basta probar que ϕ es sobreyectiva.

Para ver que ϕ es sobreyectiva, mostraremos explícitamente cómo construir un $T \in \mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ tal que $[(\mathcal{A}, \mathcal{B})] = \phi([T])$, para un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$. En

particular, se satisfacen las condiciones (b0), (b1), (b2) y (b3) de 2.75(b). Luego, 2.75(a) se satisface (ver 2.76), por lo que existe $T \in \mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$. Por lo que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx (\perp(T^\perp), T^\perp)$. $\square$

Corolario 2.79. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase gruesa a derecha que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y σ un conjunto finito tal que $\text{add}(\sigma)$ es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Consideremos las clases:*

$s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ que consiste de los objetos $T \in \mathcal{X}$ que son n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeños; y

$s\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$ que consiste de los pares de cotorsión a izquierda y $\mathcal{X}$ -completos a derecha $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$ y $\mathcal{B}$ es gruesa a derecha.

Además, en $s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$ dada por $T \sim S$ si, y sólo si, $T^\perp \cap \mathcal{X} = S^\perp \cap \mathcal{X}$; y en $s\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$ la relación de equivalencia $\approx$ definida como $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ si, y sólo si, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{X}$. Entonces, la correspondencia

$$\phi : s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}} / \sim \rightarrow s\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}} / \approx, [T] \mapsto [(\perp(T^\perp), T^\perp)],$$

está bien definida y es inyectiva. Más aún, si todo objeto T de $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface que $\text{add}(T)$ es precubriente en $T^\perp \cap \mathcal{X}$, entonces ϕ es biyectiva.

Demostración. Usando 2.75 y 2.77, la prueba es similar a la dada en 2.78 y será incluida a continuación por completez.

Para cada $T \in s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$, podemos asignar el par $\mathcal{P}_T := (\perp(T^\perp), T^\perp)$ que pertenece a $s\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$. En efecto, por 2.23(c), $\mathcal{P}_T$ es $\mathcal{X}$ -completo y $\mathcal{X}$ -hereditario. Ahora, por 1.24, $\mathcal{P}_T$ es de cotorsión a izquierda debido a que $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Por otro lado, es sabido que $T^\perp$ es gruesa a derecha; y por 2.29(b) se sigue que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(T^\perp \cap \mathcal{X})) \leq n$. Además, para $T, S \in s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ notemos que

$$[T] = [S] \Leftrightarrow T^\perp \cap \mathcal{X} = S^\perp \cap \mathcal{X} \Leftrightarrow [\mathcal{P}_T] = [\mathcal{P}_S].$$

Por lo tanto, hemos mostrado que la correspondencia $\phi([T]) = [(\perp(T^\perp), T^\perp)]$ está bien definida y es inyectiva.

Supongamos ahora que todo objeto T de $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface que $\text{add}(T)$ es precubriente en $T^\perp \cap \mathcal{X}$. Para probar que ϕ es sobreyectiva, mostraremos explícitamente cómo construir un $T \in s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ tal que $[(\mathcal{A}, \mathcal{B})] = \phi([T])$, para un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in s\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in s\mathcal{TP}_{n,\mathcal{X}}$. En particular, $\mathcal{B}$ satisface las condiciones (b1), (b2) y (b3) de 2.75(b). Luego, 2.75(a) se satisface (ver 2.77), por lo que existe $T \in s\mathcal{T}_{n,\mathcal{X}}$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$. Por lo tanto $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx (\perp(T^\perp), T^\perp)$. $\square$

Corolario 2.80. *Sean R un anillo, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ una clase gruesa a derecha en $\text{Mod}(R)$ que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y σ un conjunto tal que $\text{Add}(\sigma)$ es*

un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Entonces, para $\mathcal{B} \subseteq \text{Mod}(R)$, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) existe un n - $\mathcal{X}$ -tilting grande $T \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$.
- (b) $\mathcal{B}$ satisface las siguientes condiciones:
 - (b0) $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es cerrada por coproductos;
 - (b1) $\mathcal{B}$ es preenvolvente especial en $\mathcal{X}$;
 - (b2) $\text{pd}_{\mathcal{X}}({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$;
 - (b3) $\mathcal{B}$ es gruesa a derecha en $\text{Mod}(R)$.

Demostración. Se sigue de 2.78. □

Corolario 2.81. Sean Λ una k -álgebra de Artin y $\mathcal{X}$ una clase gruesa a derecha en $\text{mod}(\Lambda)$ que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y σ un conjunto tal que $\text{add}(\sigma)$ es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Entonces, para $\mathcal{B} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) existe un n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeño $T \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$.
- (b) $\mathcal{B}$ satisface las siguientes condiciones:
 - (b1) $\mathcal{B}$ es preenvolvente especial en $\mathcal{X}$;
 - (b2) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\text{mod}(\Lambda) \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$;
 - (b3) $\mathcal{B}$ es gruesa a derecha en $\text{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Se sigue de 2.79 ya que $\text{mod}(\Lambda)$ es abeliana con suficientes inyectivos y $\text{add}(T)$ es precubriente para todo $T \in \text{mod}(\Lambda)$ (ver [AS80, Proposition 4.2], o bien 3.67). □

2.4. Clases tilting determinadas por clases gruesas

Hasta ahora, en todo lo probado, se buscó que la clase $\mathcal{X}$ satisficiera hipótesis mínimas. Esta sección busca estudiar el comportamiento de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting en caso de que $\mathcal{X}$ sea gruesa.

En la siguiente proposición mostramos una serie de consecuencias que se obtienen a partir de suponer que una clase $\mathcal{X}$ es gruesa.

Lema 2.82. Para categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por epi-núcleos y mono-conúcleos, entonces $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) = \text{Fac}_n(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \forall n \geq 1$.

(b) Si $\mathcal{X}$ es cerrada por mono-conúcleos y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, entonces

$$\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(X) \forall X \in \mathcal{X}.$$

Demostración.

- (a) Sea $n \geq 1$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada por mono-conúcleos se sigue que $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \subseteq \text{Fac}_n(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$. Ahora bien, como $\mathcal{X}$ es cerrado por epi-núcleos y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $\text{Fac}_n(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$.
- (b) Sea $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por mono-conúcleos, tenemos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_n^{\vee} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_n^{\vee}$ y en particular $\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(X) \forall X \in \mathcal{X}$.

□

Lema 2.83. Para una categoría Ab4 (abeliana) $\mathcal{C}$, $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase gruesa tal que $\text{Add}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ ($\text{add}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$), los siguientes enunciados se satisfacen.

- (a) $\text{Add}(\mathcal{R})$ ($\text{add}(\mathcal{R})$) es un generador $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$.
- (b) La condición 2.35($T3''$)($(t3'')$), respecto a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, se satisface si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}^{\vee}$.

Demostración.

- (a) Se sigue de que $\mathcal{X}$ es cerrada por epi-núcleos y $\text{Add}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$.
- (b) Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por mono-conúcleos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}^{\vee}$, por (a), se tiene que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{\vee}$.

□

Lema 2.84. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por mono-conúcleos tal que $\text{Inj}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) $\text{Inj}(\mathcal{C})$ es un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$.
- (b) La condición 2.2($T4$), respecto a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T}$, se satisface.

Demostración.

- (a) Se sigue de que $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos y de que $\mathcal{X}$ es cerrada por mono-conúcleos.
- (b) Se sigue de (a) ya que $\text{Inj}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}^{\perp}$.

□

En base a las consecuencias anteriores, podemos proponer una nueva definición de clase n - $\mathcal{X}$ -tilting, en caso de que $\mathcal{X}$ sea una clase gruesa.

Definición 2.85. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 (abeliana), $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$. Decimos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (TS0) $\mathcal{T} = \text{Add}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ ($\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{X}^{\oplus < \infty}$) y $\mathcal{X}$ es una clase gruesa tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$;
- (TS1) $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{T}) \leq n$;
- (TS2) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\perp$;
- (TS3) $\mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ ($\mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$) y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}^\vee$;
- (TS4) existe $\alpha \subseteq \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{T}^\perp$ cogenerador relativo en $\mathcal{X}$;
- (TS5) $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.

A continuación comparamos los axiomas de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting grandes (pequeñas) con los axiomas de las clases n - $\mathcal{X}$ -tilting grandes (pequeñas) $\mathcal{R}$ -saturadas.

Observación 2.86.

- (a) (T0) sólo pide que $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$. En cambio, (TS0) pide que $\mathcal{T}$ sea cerrado por coproductos (finitos o arbitrarios según sea el caso), y que $\mathcal{X}$ sea una clase gruesa cerrada por coproductos (finitos o arbitrarios según sea el caso).
- (b) (T1) coincide con (TS1).
- (c) (T2) pide que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\perp$. Así que, tomando en cuenta que en (TS0) se pide que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que (TS2) coincide con (T2).
- (d) (T3) pide la existencia de un generador relativo en $\mathcal{X}$ contenido en $\mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee$. Utilizando que $\mathcal{X}$ es gruesa y que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, notamos que (TS3) pide adicionalmente que el generador consista de objetos proyectivos.
- (e) (T4) coincide con (TS4).
- (f) (T5) pide que todo $Z \in \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ admita una $\mathcal{T}$ -precubierta $T' \rightarrow Z$ con $T' \in \mathcal{X}$. Considerando que (TS0) pide que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que (TS5) coincide con (T5).

Definición 2.87. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 (abeliana). Decimos que $T \in \mathcal{C}$ es un objeto n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeño) $\mathcal{R}$ -saturado si $\text{Add}(T)$ ($\text{add}(T)$) es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada.

Observación 2.88.

- (1) Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 y $T \in \mathcal{C}$. Dado que $\text{Add}(T)$ es precubriente en $\mathcal{C}$, la condición (TS5) se satisface automáticamente para $\mathcal{T} := \text{Add}(T)$.
- (2) Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 (abeliana) con suficientes inyectivos. Note que, por 2.84, si $\mathcal{X}$ es cerrada por mono-conúcleos y $\text{Inj}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ satisface (TS4), con respecto a $\mathcal{X}$.

Proposición 2.89. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 (abeliana), $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$.

- (a) $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada.
- (b) $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña), $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ ($\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$) y $\mathcal{X}$ es una clase gruesa tal que $\text{Add}(\mathcal{R})$ ($\text{add}(\mathcal{R})$) es un generador relativo en $\mathcal{X}$.

Más aún, si se satisface (a) o bien (b), se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$.

Demostración. Observamos que, tanto en (a) como en (b), la condición (TS0) se satisface. Por otro lado, (TS1) y (TS4) coinciden con (T1) y (T4), respectivamente. Además, asumiendo (TS0), es claro que (TS2) y (TS5) coinciden con (T2) y (T5), respectivamente, ya que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto, basta justificar la equivalencia entre (T3) y (TS3) asumiendo el resto de las condiciones en (a) y en (b), respectivamente.

($\Rightarrow$) Por 2.83(b), tenemos que (TS3) implica (T3'')((t3'')). Luego, por 2.44 se sigue (T3).

($\Leftarrow$) Por 2.23(a), tenemos que $\mathcal{R} \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}_\mathcal{X}^\vee \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}^\vee$. Ahora bien, $\text{Add}(\mathcal{R})$ ($\text{add}(\mathcal{R})$) es un generador relativo en $\mathcal{X}$, implica que $\mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ ($\mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$); probándose (TS3).

Finalmente, si se cumple alguna de las condiciones anteriores, se sigue de 2.27(d,a) que $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap {}^\perp(\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. $\square$

Corolario 2.90. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 (abeliana), $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$, $n \geq 1$ y $\text{Add}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ ($\text{add}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$) con $\mathcal{X}$ una clase gruesa en $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ ($\mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$). Si $\mathcal{T}$ satisface (TS4) y (TS5), con respecto a $\mathcal{X}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada;
- (b) $\text{Fac}_n(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$;
- (c) $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_k(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$ para todo $k \geq n$;
- (d) $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_n(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} = \text{Fac}_{n+1}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$;
- (e) $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1(\mathcal{T})$.

Demostración. Por 2.82 sabemos que $\text{Fac}_k^\mathcal{X}(\mathcal{T}) = \text{Fac}_k(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X} \ \forall k \geq 1$. Basta aplicar 2.89 y 2.25. $\square$

Observación 2.91. Para el caso en que $\mathcal{C}$ es Ab_4 y $\mathcal{T} = \text{Add}(T)$, con $T \in \mathcal{C}$, se tiene que $\mathcal{T}$ satisface automáticamente (TS5), con respecto a $\mathcal{X}$, ya que $\text{Add}(T)$ es precubriente en $\mathcal{C}$. Por lo que (TS5) se puede quitar de 2.90 si $\mathcal{T} = \text{Add}(T)$ con $T \in \mathcal{T}$.

A continuación buscaremos generalizar, en el contexto establecido, los resultados principales de [AHUC01]. Como siempre, escribiremos simultáneamente las versiones grande y pequeña.

Teorema 2.92. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 (abeliana), $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus \subseteq \mathcal{C}$ ($\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$) una clase gruesa tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$) y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ gruesa a derecha. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *Existe $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{X}$.*
- (b) *La clase $\mathcal{B}$ satisface las siguientes propiedades:*
 - (b0) *$\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es cerrada por coproductos (se elimina esta condición);*
 - (b1) *existe un α cogenerador relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\text{id}_{\mathcal{X}}(\alpha) = 0$;*
 - (b2) *$\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial en $\mathcal{X}$;*
 - (b3) *$\text{pd}_{\mathcal{X}}({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$;*
 - (b4) *$\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es precubriente en $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$. Primeramente observamos que, por 2.89, $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ ($\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$) y $\mathcal{X}$ es una clase gruesa tal que $\text{Add}(\mathcal{R})$ ($\text{add}(\mathcal{R})$) es un generador relativo en $\mathcal{X}$. Entonces, por 2.75 podemos concluir lo deseado. $\square$

Observación 2.93. *Supongamos que se tienen las hipótesis de 2.92 con $\mathcal{C}$ Ab_4 y $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ una clase gruesa tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ y sea σ un conjunto tal que $\text{Add}(\mathcal{R}) = \text{Add}(\sigma)$. En tal caso, podemos quitar la condición (b4). Más aún, si se satisface 2.92(a), podemos elegir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ en (a) de la forma $\mathcal{T} = \text{Add}(T)$ con $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$.*

En efecto, se sigue de 2.76 y de 2.89.

Observación 2.94. *Supongamos que se tienen las hipótesis de 2.92, con $\mathcal{C}$ abeliana y $\mathcal{X}$ una clase gruesa tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$, y sea σ un conjunto finito tal que $\text{add}(\mathcal{R}) = \text{add}(\sigma)$. En tal caso, podemos cambiar la condición (b4) por:*

(*) *cada $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface que $\text{add}(T)$ es precubriente en $T^\perp \cap \mathcal{X}$.*

Más aún, si se satisface 2.92(a) podemos elegir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ en (a) de la forma $\mathcal{T} = \text{add}(T)$ con $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$.

En efecto, se sigue de 2.77 y de 2.89.

Corolario 2.95. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab_4 con suficientes inyectivos, $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$, σ un conjunto tal que $\text{Add}(\mathcal{R}) = \text{Add}(\sigma)$ y $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\oplus$ una clase gruesa en $\mathcal{C}$ que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$. Considere las clases:*

$\mathcal{ST}$ que consiste de los objetos $T \in \mathcal{C}$ que son n - $\mathcal{X}$ -tilting grandes $\mathcal{R}$ -saturados; y
 $\mathcal{TP}$ que consiste de los pares de cotorsión a izquierda, $\mathcal{X}$ -completos a derecha $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$, $\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es cerrada por coproductos y
 $\mathcal{B}$ es gruesa a derecha.

Además, en $\mathcal{ST}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$ dada por $T \sim S$ si, y sólo si, $T^{\perp} \cap \mathcal{X} = S^{\perp} \cap \mathcal{X}$; y en $\mathcal{TP}$ la relación de equivalencia $\approx$ definida como $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ si, y sólo si, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{X}$. Entonces, existe una correspondencia biyectiva $\phi : \mathcal{ST} / \sim \rightarrow \mathcal{TP} / \approx$, $[T] \mapsto [(\perp(T^{\perp}), T^{\perp})]$.

Demostración. Se sigue de 2.78 y 2.89. $\square$

Corolario 2.96. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$, σ un conjunto finito tal que $\text{add}(\mathcal{R}) = \text{add}(\sigma)$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase gruesa que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$. Considere las clases:

$\mathcal{SST}$ que consiste de los objetos $T \in \mathcal{C}$ que son n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeños $\mathcal{R}$ -saturados; y
 $\mathcal{STP}$ que consiste de los pares de cotorsión a izquierda, $\mathcal{X}$ -completos a derecha $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
tales que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq n$ y $\mathcal{B}$ es gruesa a derecha.

Además, en $\mathcal{SST}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$ dada por $T \sim S$ si, y sólo si, $T^{\perp} \cap \mathcal{X} = S^{\perp} \cap \mathcal{X}$; y en $\mathcal{STP}$ la relación de equivalencia $\approx$ definida como $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ si, y sólo si, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{X}$. Entonces, la correspondencia $\phi : \mathcal{SST} / \sim \rightarrow \mathcal{STP} / \approx$, $[T] \mapsto [(\perp(T^{\perp}), T^{\perp})]$, está bien definida y es inyectiva. Más aún, si todo objeto T de $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface que $\text{add}(T)$ es precubriente en $T^{\perp} \cap \mathcal{X}$, entonces ϕ es biyectiva.

Demostración. Se sigue de 2.79 y 2.89. $\square$

A continuación veremos algunas consecuencias de los teoremas anteriores. Para ello, se introduce la siguiente definición.

Definición 2.97. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab3. Decimos que una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ es una clase de **pretorsión** si es cerrada bajo coproductos arbitrarios y cocientes. Si además $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, diremos que $\mathcal{X}$ es una clase de **torsión**.

El siguiente resultado generaliza a [AHTT01, Theorem 2.1], y su prueba está inspirada en [AHUC01, Corollary 4.3].

Corolario 2.98. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab4, $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$, σ un conjunto tal que $\text{Add}(\mathcal{R}) = \text{Add}(\sigma)$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\oplus} \subseteq \mathcal{C}$ una clase gruesa que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de torsión. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) existe un objeto 1- $\mathcal{X}$ -tilting grande $\mathcal{R}$ -saturado T tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$;
- (b) $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial en $\mathcal{X}$.

Más aún, si (a) o (b) se satisface, se tiene que $\text{pd}_{\mathcal{X}} \left({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \right) \leq 1$ y $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente.

Demostración. Dado que $\mathcal{B}$ es cerrada por cocientes, tenemos que $\mathcal{B} = \text{smd}(\mathcal{B})$ y es cerrada por mono-conúcleos. Más aún, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es cerrado por coproductos ya que $\mathcal{B}$, ${}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ y $\mathcal{X}$ son cerrados por coproductos.

(a) $\Rightarrow$ (b) Por 2.93 tenemos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial en $\mathcal{X}$ tal que $\text{pd}_{\mathcal{X}} \left({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \right) \leq 1$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Hemos mostrado que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ es cerrado por coproductos. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ satisfacen las condiciones (b0), (b1) y (b2) de 2.92. De modo que, por 2.93 basta probar que $\text{pd}_{\mathcal{X}} \left({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \right) \leq 1$. Para ello, veamos primero que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente. En efecto, por (b), se sigue que $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha; y por hipótesis, existe un α cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Luego, $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ por 2.70. Las otras condiciones de 1.22(b), para concluir que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente, se satisfacen trivialmente. Sea $Y \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Como $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $\mathcal{X}$, sabemos que para todo $A \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, donde $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in {}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ por 1.24 ya que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente. Además, como $\mathcal{B}$ es cerrado bajo cocientes, $C \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Así que de la sucesión anterior obtenemos, para todo $i > 0$, la sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, B),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, C) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, B)$ debido a que $Y \in {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Por lo tanto, para todo $A \in \mathcal{X}$ y toda $i > 0$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, A) = 0$. Por lo que, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(Y) \leq 1$. $\square$

Corolario 2.99. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$, σ un conjunto finito tal que $\text{add}(\mathcal{R}) = \text{add}(\sigma)$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase gruesa que admite un cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ una clase cerrada por cocientes y extensiones. Si todo objeto T de $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} \cap {}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$ satisface que $\text{add}(T)$ es precubriente en $T^\perp \cap \mathcal{X}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) existe un 1- $\mathcal{X}$ -tilting pequeño $\mathcal{R}$ -saturado T tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X} = T^\perp \cap \mathcal{X}$;
- (b) $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial en $\mathcal{X}$.

Más aún, si (a) o (b) se satisface, se tiene $\text{pd}_{\mathcal{X}} \left({}^\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \right) \leq 1$ y $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente.

Demostración. Usando 2.94, la prueba es semejante a 2.98 y será incluida por completitud.

Dado que $\mathcal{B}$ es cerrada por cocientes, tenemos que $\mathcal{B} = \text{smd}(\mathcal{B})$ y es cerrada por mono-conúcleos.

(a) $\Rightarrow$ (b) Por 2.94 tenemos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial en $\mathcal{X}$ tal que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq 1$.

(b) $\Rightarrow$ (a) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{X}$ satisfacen las condiciones (b1) y (b2) de 2.94. De modo que, por 2.94, basta probar que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})) \leq 1$. Para ello, veamos primero que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente. Por (b), se sigue que $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es $\mathcal{X}$ -completo a derecha; y por hipótesis existe un α cogenerador $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$. Luego, por 2.70, $\alpha \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Las otras condiciones de 1.22(b), para concluir que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente, se satisfacen trivialmente. Sea $Y \in \perp(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Como $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ es preenvolvente especial en $\mathcal{X}$, sabemos que para todo $A \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ y $C \in {}^{\perp_1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ por 1.24 ya que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{X}$ -coresolvente. Además, como $\mathcal{B}$ es cerrado bajo cocientes, $C \in \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$. Así que de la sucesión anterior obtenemos, para todo $i > 0$, la sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, B),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, C) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, B)$ debido a que $Y \in {}^{\perp}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X})$. Por lo tanto, para todo $A \in \mathcal{X}$ y toda $i > 0$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(Y, A) = 0$. Por lo que, $\text{pd}_{\mathcal{X}}(Y) \leq 1$. $\square$

Por último, definimos objeto n - $\mathcal{X}$ -tilting saturado parcial de la siguiente manera y concluimos esta sección con el resultado siguiente que generaliza [AHUC01, 4.4].

Definición 2.100. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 (abeliana), $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$. Decimos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es **n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturado parcial** si satisface (TS0), (TS1), (TS2), (TS4) y (TS5) de 2.85.

Teorema 2.101. Para una categoría Ab4 (abeliana) $\mathcal{C}$, $\mathcal{R} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(\mathcal{R})$ ($\mathcal{X} \subseteq \text{gen}_1(\mathcal{R})$), los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada;
- (b) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ es una clase n - $\mathcal{X}$ -tilting grande (pequeña) $\mathcal{R}$ -saturada parcial y $\mathcal{T}^{\perp} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1(\mathcal{T}) \cap \mathcal{X}$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Se sigue de 2.90.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{C}$ que satisface las hipótesis de (b). Dado que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, se satisfacen (T0), (T1), (T2), (T4) y (T5) de 2.2, con respecto a $\mathcal{X}$. Más aún, por 2.21 y 2.82(a) se tiene que se satisface (T3), con respecto a $\mathcal{X}$. Finalmente, por 2.89 se sigue (a). $\square$

3. Ejemplos y aplicaciones

En este capítulo exploraremos una variedad de ejemplos donde utilizaremos la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. Estos ejemplos ilustrarán dos características de nuestra teoría.

La primera consiste en que la teoría n - $\mathcal{X}$ -tilting es un marco teórico que unifica una gran variedad de nociones tilting. Con ello se logra un nuevo enfoque para comprender el fenómeno tilting. La basta variedad de propiedades y relaciones que hemos descrito en los capítulos anteriores podrán aplicarse con facilidad en un gran número de contextos, sin la necesidad de probarse de nuevo, ni preocuparse por las sutiles diferencias que pudieran aparecer en los diferentes contextos.

Como evidencia de esta característica, exploraremos con nuestras herramientas las nociones de tilting clásico, el tilting de Miyashita, los objetos ∞ -tilting, y las clases tilting en categorías de funtores.

La segunda característica consiste en que la teoría n - $\mathcal{X}$ -tilting se puede utilizar para definir nuevas teorías tilting en contextos particulares, o bien, como una herramienta para estudiar objetos antes definidos relacionados con alguna noción tilting.

Como muestra de ello, desarrollaremos una teoría de R -módulos tilting de tipo $\mathcal{FP}_n$ para anillos n -coherentes R . Por otro lado, estudiaremos las teorías tilting definidas en categorías exactas. Finalmente, buscaremos describir el fenómeno silting a través de la teoría n - $\mathcal{X}$ -tilting.

3.1. Objetos ∞ -tilting

En [PŠ19a], Leonid Positselski y Jan Šťovíček definieron la noción de objeto ∞ -tilting. A continuación veremos que dicho concepto se puede visualizar como un objeto n - $\mathcal{X}$ -tilting. Para ello, recordemos que una categoría $\text{Ab}3^*$ con cogenerador inyectivo es $\text{Ab}3$ [Mit65, Exercise III.2].

Definición 3.1. [PŠ19a, Section 2] Sea $\mathcal{A}$ una categoría $\text{Ab}3^*$ con un cogenerador inyectivo $J \in \mathcal{A}$. Diremos que un objeto $T \in \mathcal{A}$ es ∞ -**tilting** si satisface las siguientes condiciones:

(∞ -**T1**) $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$;

(∞ -T2) $\text{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq (\text{Add}(T), T^\perp)_\infty^\wedge$.

Definición 3.2. [PŠ19a, Section 3] Sean $\mathcal{A}$ una categoría Ab3^* , con un cogenerador inyectivo J , $T \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{E}$ una clase de objetos en $\mathcal{A}$. Diremos que $(T, \mathcal{E})$ es un **par ∞ -tilting** si las siguientes condiciones se satisfacen:

(∞ -PT1) $\text{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$;

(∞ -PT2) $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{E}$;

(∞ -PT3) $\mathcal{E} \subseteq T^{\perp_1}$;

(∞ -PT4) $\mathcal{E}$ es cerrado por extensiones y conúcleos de monomorfismos entre sus objetos;

(∞ -PT5) toda $\text{Add}(T)$ -precubierta $\alpha : T' \rightarrow E$, de un objeto $E \in \mathcal{E}$, es un epimorfismo en $\mathcal{A}$ tal que $\text{Ker}(\alpha) \in \mathcal{E}$.

Después de dicha definición, las siguientes observaciones son hechas por Positselski y Št'ovíček en [PŠ19a, Section 3].

Observación 3.3. Para un par ∞ -tilting $(T, \mathcal{E})$ en una categoría Ab3^* $\mathcal{A}$, con un cogenerador inyectivo J , las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) $\text{Prod}(J) = \text{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E} \subseteq T^\perp$;

(b) $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp$;

(c) $\text{Add}(T)$ es un generador relativo en $\mathcal{E}$. Más aún, si $\mathcal{A}$ es Ab4 , se tiene que $\text{Add}(T)$ es $\mathcal{E}$ -proyectivo;

(d) $\text{Prod}(J)$ es un cogenerador $\mathcal{E}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{E}$.

La conexión entre objetos y pares ∞ -tilting es como sigue.

Lema 3.4. [PŠ19a, Lemma 3.1] Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta con un cogenerador inyectivo J y $T \in \mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen.

(a) Existe una clase de objetos $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $(T, \mathcal{E})$ es un par ∞ -tilting si, y sólo si, T es ∞ -tilting.

(b) Si T es ∞ -tilting, entonces $(T, (\text{Add}(T), T^\perp)_\infty^\wedge)$ es un par ∞ -tilting.

(c) Si $(T, \mathcal{E})$ es un par ∞ -tilting, entonces $\mathcal{E} \subseteq (\text{Add}(T), T^\perp)_\infty^\wedge$.

Veamos que los pares ∞ -tilting son un caso particular de los objetos n - $\mathcal{X}$ -tilting.

Proposición 3.5. Sean $\mathcal{A}$ una categoría Ab3 y Ab3^* con un cogenerador inyectivo J . Si $(T, \mathcal{E})$ es un par ∞ -tilting, entonces T es un objeto 0- $\mathcal{E}$ -tilting grande, $\text{Add}(T) = \mathcal{E} \cap^\perp \mathcal{E}$ y $T^\perp \cap \mathcal{E} = \text{Gen}_1^\mathcal{E}(T)$.

Demostración. Cabe observar que en este caso $\mathcal{C}$ es Ab4 (ver [Pop73, Chapter 3, Corollary 2.9, p.73]). Recordando las observaciones de 3.3, se pueden comprobar lo siguiente:

- (T1) Dado que $\mathcal{E} \subseteq T^\perp$, tenemos que $\text{pd}_{\mathcal{E}}(\text{Add}(T)) = \text{pd}_{\mathcal{E}}(T) = 0$.
- (T2) Sabemos que $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{E}$, de modo que $\text{Add}(T) \cap \mathcal{E} \subseteq T^\perp = \text{Add}(T)^\perp$.
- (T3) Sabemos que $\text{Add}(T)$ es un generador $\mathcal{E}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{E}$ y es fácil ver que $\text{Add}(T) \subseteq (\text{Add}(T))_{\mathcal{E}}^\vee$.
- (T4) $\text{Prod}(J) = \text{Inj}(\mathcal{A})$ es un cogenerador $\mathcal{E}$ -inyectivo relativo a $\mathcal{E}$ contenido en $T^\perp = (\text{Add}(T))^\perp$.
- (T5) Note que, por ser $\mathcal{A}$ Ab3, se tiene que $\text{Add}(T)$ es precubriente en $\mathcal{A}$. Ahora, como $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{E}$, se sigue que todo $X \in T^\perp \cap \mathcal{E}$ tiene una $\text{Add}(T)$ -precubierta $A \rightarrow X$, con $A \in \mathcal{E}$.

Finalmente, basta aplicar 2.16 y 2.23 para obtener que $\text{Add}(T) = \mathcal{E} \cap {}^\perp \mathcal{E}$ y $T^\perp \cap \mathcal{E} = \text{Gen}_1^{\mathcal{E}}(T) \cap \mathcal{E} = \text{Gen}_1^{\mathcal{E}}(T)$ ya que $\mathcal{E}$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos entre sus objetos.

□

3.2. Tilting de Miyashita

A continuación recordamos la noción de tilting desarrollada por Yoichi Miyashita en [Miy86]. Recordamos que, para un anillo R , $\text{proj}(R)$ denota a los R -módulos proyectivos finitamente generados, así como $\text{inj}(R)$ es la clase de los R -módulos inyectivos finitamente generados.

Definición 3.6. Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$. Diremos que T es **n -tilting Miyashita** si satisface las siguientes condiciones:

- (MT1) T admite una resolución proyectiva $0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow T \rightarrow 0$, donde $P_i \in \text{proj}(R) \forall i \in [0, n]$;
- (MT2) $T \in T^\perp$;
- (MT3) existe una sucesión exacta $0 \rightarrow {}_R R \rightarrow T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_{n-1} \rightarrow T_n \rightarrow 0$, donde $T_i \in \text{add}(T) \forall i \in [0, n]$.

Si T satisface (MT1) y (MT2) diremos que T es **n -tilting parcial Miyashita**.

Los siguientes lemas serán de utilidad.

Lema 3.7. Sean R una S -álgebra que es un S -módulo finitamente generado, donde S es un anillo conmutativo noetheriano, y $T \in \text{mod}(R)$. Entonces, $\text{add}(T)$ es una clase precubriente en $\text{mod}(R)$. Más aún, toda $\text{add}(T)$ -precubierta es una $\text{Add}(T)$ -precubierta.

Demostración. Sea $X \in \text{mod}(R)$. Siguiendo la prueba de [ARS97, Chapter II, Proposition 1.1] concluimos que $\text{Hom}_R(T, X)$ es un S -módulo finitamente generado por un conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$. En efecto, hacemos notar que $\text{mod}(R) \subseteq \text{mod}(S)$. En particular, existe un S -epimorfismo $\pi : S^n \rightarrow T$. Ahora, como T y S^n son S -bimódulos, se sigue que $\text{Hom}_S(T, X)$ y $\text{Hom}_S(S^n, X)$ son S -módulos a izquierda. Observamos que $\text{Hom}_S(\pi, X) : \text{Hom}_S(T, X) \rightarrow \text{Hom}_S(S^n, X)$ es un monomorfismo y que $\text{Hom}_S(S^n, X)$ es un S -módulo finitamente generado debido a que $\text{Hom}_S(S^n, X) \cong X^n$. Luego, como S es noetheriano, podemos concluir que $\text{Hom}_S(T, X)$ es un S -módulo finitamente generado. Por lo tanto, $\text{Hom}_R(T, X)$ es un S -módulo finitamente generado por ser un S -submódulo de $\text{Hom}_S(T, X)$.

Veamos que $\alpha := (f_1, \dots, f_n) : T^n \rightarrow X$ es una $\text{add}(T)$ -precubierta en $\text{mod}(R)$. En efecto, como todo $T' \in \text{add}(T)$ es un sumando directo de T^m para algún $m \geq 1$, todo morfismo $T' \rightarrow X$ con $T' \in \text{add}(T)$ se factoriza a través de un morfismo $T^m \rightarrow X$ con $m \geq 1$. De modo que basta probar que todo morfismo $\alpha' : T^m \rightarrow X$ se factoriza a través de α . Para ello, observamos que $\alpha' = (g_1, \dots, g_m)$ con $g_i \in \text{Hom}_R(T, X) \forall i \in [1, m]$. De modo que $g_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i f_j \forall i \in [1, m]$, donde $\lambda_j^i \in S \forall (i, j) \in [1, m] \times [1, n]$. Entonces, considerando el morfismo

$$\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^m \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} : T^m \rightarrow T^n,$$

tenemos que $\alpha' = \alpha\beta$. Probado lo anterior, la segunda afirmación se sigue de 2.46. $\square$

Lema 3.8. *Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$, las siguientes condiciones se satisfacen:*

- (a) *si $\mathcal{X}$ tiene un generador $\mathcal{C}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$, entonces $\text{pd}_{\mathcal{X}}(X) = \text{pd}(X) \forall X \in \mathcal{X}$;*
- (b) *si $\mathcal{X}$ tiene un cogenerador $\mathcal{C}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{X}$, entonces $\text{id}_{\mathcal{X}}(X) = \text{id}(X) \forall X \in \mathcal{X}$.*

Demostración.

- (a) Sea ω un generador $\mathcal{C}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{X}$. Se sigue de la definición que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(X) \leq \text{pd}(X)$. Para probar que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(X) \geq \text{pd}(X)$ podemos asumir que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(X) = k < \infty$. Dado que ω es un generador $\mathcal{C}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{X}$,

existen sucesiones exactas de objetos en $\mathcal{X}$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow X_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow X_2 \rightarrow P_1 \rightarrow X_1 \rightarrow 0, \\ \vdots \\ 0 \rightarrow X_{k+1} \rightarrow P_k \rightarrow X_k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

con $P_i \in \omega \subseteq {}^\perp \mathcal{C} \forall i \in [1, k]$. Por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\mathrm{Ext}_R^1(X_k, X_{k+1}) \cong \mathrm{Ext}_R^{k+1}(X, X_{k+1}) = 0,$$

ya que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(X) = k$. Por lo tanto, $X_k \in {}^\perp \mathcal{C}$. Entonces, por el lema del corrimiento podemos concluir que $\mathrm{pd}(X) \leq k$.

(b) Se sigue por argumentos duales a los utilizados en (a). □

Lema 3.9. *Sea R un anillo tal que $\mathrm{inj}(R)$ es un cogenerador relativo en $\mathrm{mod}(R)$. Entonces $\mathrm{proj}(R)$ (respectivamente, $\mathrm{inj}(R)$) es un generador $\mathrm{Mod}(R)$ -proyectivo (respectivamente, cogenerador $\mathrm{Mod}(R)$ -inyectivo) relativo en $\mathrm{mod}(R)$. Más aún, se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathrm{mod}(R)}(X) = \mathrm{pd}(X)$ y $\mathrm{id}_{\mathrm{mod}(R)}(X) = \mathrm{id}(X)$ para todo $X \in \mathrm{mod}(R)$.*

Demostración. Note que $\mathrm{proj}(R) = \mathrm{add}(R)$ y por lo tanto $\mathrm{proj}(R)$ es un generador $\mathrm{Mod}(R)$ -proyectivo relativo en $\mathrm{mod}(R)$. Además, se tiene que $\mathrm{inj}(R)$ es un cogenerador $\mathrm{Mod}(R)$ -inyectivo relativo en $\mathrm{mod}(R)$. Por lo tanto, de 3.8 podemos concluir lo deseado. □

Proposición 3.10. *Sean R una S -álgebra que es un S -módulo finitamente generado, donde S es un anillo conmutativo noetheriano, y $T \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) T es n -tilting Miyashita y $\mathrm{inj}(R)$ es un cogenerador relativo en $\mathrm{mod}(R)$;
- (b) T es n - $\mathrm{mod}(R)$ -tilting grande;
- (c) T es n - $\mathrm{mod}(R)$ -tilting pequeño;
- (d) T es n - $\mathrm{mod}(R)$ -tilting pequeño $\mathrm{proj}(R)$ -saturado.

Más aún, si T satisface las condiciones (MT1) y (MT2) de 3.6, y $\mathrm{inj}(R)$ es un cogenerador relativo en $\mathrm{mod}(R)$, tenemos que T satisface (MT3) si y sólo si

$$\mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}(T)}({}_R R) < \infty.$$

Demostración. Note que, por 2.55(b), $\mathrm{mod}(R)$ es una subcategoría abeliana gruesa de $\mathrm{Mod}(R)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que T es n -tilting Miyashita y que $\text{inj}(R)$ es un cogenerador relativo en $\text{mod}(R)$. Por 3.9

$$\text{pd}_{\text{mod}(R)}(T) = \text{pd}(T) \leq n.$$

Luego, como T es finitamente generado y R es noetheriano, los funtores $\text{Ext}_R^i(T, -)$ conmutan con coproductos [GT06, Lemma 3.1.6]. Así que

$$\text{Ext}_R^i(T, T^{(X)}) \cong \text{Ext}_R^i(T, T)^{(X)} = 0 \forall i \geq 0,$$

y entonces $\text{Add}(T) \cap \text{mod}(R) \subseteq T^\perp \cap \text{mod}(R)$. El inciso (MT3) de 3.6 implica (t3'') debido a que los R -módulos libres finitamente generados son un generador $\text{mod}(R)$ -proyectivo relativo a $\text{mod}(R)$. Por otro lado, (T4) se satisface por 3.9 ya que $\text{inj}(R)$ es un cogenerador $\text{Mod}(R)$ -inyectivo relativo en $\text{mod}(R)$, y (T5) se cumple por 3.7. Finalmente, (T3) se sigue de 2.44 ya que, $\text{mod}(R)$ es cerrado por extensiones y sumandos directos en $\text{Mod}(R)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que T es n - $\text{mod}(R)$ -tilting grande. Por (T1) y 3.9 se sigue que $\text{pd}(T) \leq n$. Para mostrar que se satisface (MT2) de 3.6, observamos que, por (T2),

$$T \in \text{add}(T) \subseteq \text{Add}(T) \cap \text{mod}(R) \subseteq T^\perp \cap \text{mod}(R).$$

Luego, por 2.23(c) sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \rightarrow M_0 \rightarrow X_0 \rightarrow 0,$$

donde $M_0 \in T^\perp \cap \text{mod}(R)$ y $X_0 \in {}^\perp(T^\perp) \cap \text{mod}(R)$. Entonces, como $R \in {}^\perp(T^\perp)$ por ser proyectivo, se sigue que

$$M_0 \in {}^\perp(T^\perp) \cap T^\perp \cap \text{mod}(R) = \text{Add}(T) \cap \text{mod}(R) = \text{add}(T).$$

Análogamente, podemos probar que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_0 \rightarrow M_1 \rightarrow X_1 \rightarrow 0,$$

con $M_1 \in \text{add}(T)$ y $X_1 \in {}^\perp(T^\perp) \cap \text{mod}(R)$. Siguiendo recursivamente con estos argumentos, para todo $k \geq 1$, vamos construyendo una sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \rightarrow M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k \rightarrow X_k \rightarrow 0,$$

con $M_i \in \text{add}(T)$ y $X_i \in {}^\perp(T^\perp) \cap \text{mod}(R) \forall i \in [1, n]$. Luego, como $\text{pd}_{\text{mod}(R)}(T) \leq n$, tenemos que $T^\perp \cap \text{mod}(R)$ es cerrado por n -cocientes en $\text{mod}(R)$ por 1.9. De modo que

$$X_n \in T^\perp \cap {}^\perp(T^\perp) \cap \text{mod}(R) = \text{add}(T).$$

Por lo tanto, T satisface (MT3).

Veamos finalmente que $\text{inj}(R)$ es un cogenerador relativo en $\text{mod}(R)$. En efecto, por (T4) existe un α cogenerador relativo en $\text{mod}(R)$ tal que $\text{id}_{\text{mod}(R)}(\alpha) = 0$. Luego, por el Lema de Baer, se tiene que $\alpha \subseteq \text{inj}(R)$. Ahora, por ser α un cogenerador relativo en $\text{mod}(R)$, $\text{inj}(R) = \alpha$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Como $\text{mod}(R)$ es cerrada por extensiones en $\text{Mod}(R)$ por 2.55, la equivalencia se sigue de 2.60.

(d) $\Leftrightarrow$ (c) Se sigue de 2.89. □

Sean k un anillo conmutativo artiniano y R una k -álgebra. Recordamos que R es una **k -álgebra de Artin** si R es un k -módulo finitamente generado.

Observación 3.11. *En el caso de una k -álgebra de Artin R , tenemos por [ARS97, Chapter II, Corollary 3.4] que $\text{inj}(R)$ es un cogenerador relativo en $\text{mod}(R)$.*

Recordamos la noción clásica de módulo tilting. La siguiente definición está inspirada en [HR82], se le puede encontrar en [MO89, 4.2] bajo el nombre de ω -tilting.

Definición 3.12. Sean R un anillo y $T \in \text{mod}(R)$. Diremos que T es **tilting clásico** si satisface las siguientes condiciones:

(TC1) $\text{pd}(T) \leq 1$;

(TC2) $\text{Ext}_R^1(T, T) = 0$;

(TC3) existe una sucesión exacta $0 \rightarrow R \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0$, donde $T_0, T_1 \in \text{add}(T)$.

Se sigue de 3.10 el siguiente corolario.

Corolario 3.13. *Sean R una k -álgebra de Artin y $T \in \text{mod}(R)$. Entonces, T es tilting clásico si, y sólo si, T es 1- $\text{mod}(R)$ -tilting grande.*

Lema 3.14. *Sean R un anillo noetheriano a izquierda, $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(R)$ y $\mathcal{Y} \subseteq \text{Mod}(R)$. Entonces,*

$$(a) \mathcal{X}_{\text{mod}(R)}^\vee = \mathcal{X}^\vee = (\text{mod}(R), \mathcal{X})^\vee;$$

$$(b) (\mathcal{Y} \cap \text{mod}(R))^\vee = (\text{mod}(R), \mathcal{Y} \cap \text{mod}(R))^\vee = (\text{mod}(R), \mathcal{Y})^\vee;$$

$$(c) \text{coresdim}_{\mathcal{X}}^{\text{mod}(R)}(M) = \text{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) \quad \forall M \in \text{Mod}(R);$$

$$(d) \text{resdim}_{\mathcal{X}}^{\text{mod}(R)}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \quad \forall M \in \text{Mod}(R).$$

Demostración. Note que, por ser R noetheriano a izquierda, se tiene que $\text{mod}(R)$ es cerrado por extensiones, cocientes y subobjetos en $\text{Mod}(R)$ (ver 2.55(b)).

- (a)&(b) Como $\text{mod}(R)$ es cerrada por cocientes y subobjetos, tenemos que $\mathcal{X}_{\text{mod}(R)}^\vee = \mathcal{X}^\vee = (\text{mod}(R), \mathcal{X})^\vee$ y $\mathcal{X}_{\text{mod}(R)}^\wedge = \mathcal{X}^\wedge = (\mathcal{X}, \text{mod}(R))^\wedge$. Además, como $\text{mod}(R)$ es cerrado por extensiones, se sigue que

$$\begin{aligned} (\text{mod}(R), \mathcal{Y} \cap \text{mod}(R))^\vee &= (\text{mod}(R), \mathcal{Y})^\vee \text{ y} \\ (\mathcal{Y}, \text{mod}(R))^\wedge &= (\mathcal{Y} \cap \text{mod}(R), \text{mod}(R))^\wedge. \end{aligned}$$

- (c)&(d) Como $\text{mod}(R)$ es cerrado por cocientes y subobjetos, se tiene que cualquier $\mathcal{X}$ -resolución es una $\mathcal{X}_{\text{mod}(R)}$ -resolución y cualquier $\mathcal{X}$ -coresolución es una $\mathcal{X}_{\text{mod}(R)}$ -coresolución.

□

Utilizando 3.10 junto con los resultados del capítulo 2, podemos inferir propiedades conocidas de los módulos tilting de Miyashita. El siguiente corolario es el producto de hacer este ejercicio. En particular, obtendremos [AR92, Theorem 4.4(a)] y otros resultados parecidos a los de Maurice Auslander e Idun Reiten en [AR92].

Corolario 3.15. *Sean R una k -álgebra de Artin, $T \in \text{Mod}(R)$ un R -módulo n -tilting Miyashita, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\perp(T^\perp), T^\perp)$ en $\text{Mod}(R)$, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cap \text{mod}(R)$, $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cap \text{mod}(R)$ y $\nu := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \text{mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) *El par $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ en $\text{mod}(R)$ es completo y hereditario, ${}^\perp(\mathcal{B}') \cap \text{mod}(R) = \mathcal{A}'$ y $(\mathcal{A}')^\perp \cap \text{mod}(R) = \mathcal{B}'$. Más aún,*
- (a1) $\mathcal{A}' = (\text{add}(T))^\vee$;
- (a2) $\mathcal{B}' = \text{gen}_k(T) \ \forall k \geq \max\{1, \text{pd}(T)\}$.
- (b) *ν es un generador $\mathcal{B}'$ -proyectivo relativo en $\mathcal{B}'$ y un cogenerador $\mathcal{A}'$ -inyectivo relativo en $\mathcal{A}'$. Más aún,*
- (b1) $\nu = (\nu, \mathcal{A}')^\wedge = (\mathcal{B}', \nu)^\vee = \mathcal{A}' \cap \nu^\wedge = \mathcal{B}' \cap \nu^\vee = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' = \text{add}(T)$;
- (b2) $\text{mod}(R) = (\mathcal{B}')^\vee$.
- (c) $\forall X \in \text{mod}(R)$
- (c1) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) = \text{resdim}_{\mathcal{A}'}(X) = \text{pd}_{\mathcal{B}'}(X) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{B}') + 1$;
- (c2) $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{pd}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + 1$;
- (c3) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(X) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) = \text{id}_{\mathcal{A}'}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{A}') + 1$;
- (c4) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1$;
- (c5) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(\text{mod}(R)) \leq \text{pd}(T) = \text{pd}(\mathcal{A}) = \text{pd}({}^\perp(\mathcal{B}')) < \infty$.
- (d) *Se tienen las siguientes igualdades:*

$$(d1) \text{ pd}_{\mathcal{B}'}(M) = \text{pd}_{\text{add}(T)}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{A}'}(M) \quad \forall M \in (\mathcal{A}')^\wedge;$$

$$(d2) \text{ pd}_{\mathcal{B}'}(M) = \text{resdim}_{\text{add}(T)}(M) \quad \forall M \in (\text{add}(T))^\wedge;$$

$$(d3) \text{ id}_{\mathcal{A}'}(M) = \text{id}_{\text{add}(T)}(M) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(M) \quad \forall M \in (\mathcal{B}')^\vee;$$

$$(d4) \text{ id}_{\mathcal{A}'}(M) = \text{coresdim}_{\text{add}(T)}(M) \quad \forall M \in (\text{add}(T))^\vee.$$

(e) Se tienen las siguientes relaciones:

$$(e1) \text{ pd}(T) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{A}') = \text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(\text{mod}(R)) = \text{coresdim}_{\text{add}(T)}(\mathcal{A}') = \text{pd}(\mathcal{A}') = \text{pd}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}') < \infty;$$

$$(e2) \text{ id}(T) \leq \text{resdim}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{B}') = \text{resdim}_{\mathcal{A}'}(\text{mod}(R)) = \text{resdim}_{\text{add}(T)}(\mathcal{B}') = \text{id}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \text{id}(\mathcal{B}');$$

(e3) $\text{id}(\mathcal{B}') < \infty$ si y sólo si $\mathcal{B}' \subseteq (\text{add}(T))^\wedge$ y $\text{id}(T) < \infty$. En el caso anterior, se tiene que $\text{mod}(R) = (\mathcal{A}')^\wedge$, $\mathcal{B}' = (\text{add}(T))^\wedge$ y $\text{id}(\mathcal{B}') = \text{id}(T)$.

$$(e4) \text{ gldim}(R) = \text{pd}(\mathcal{B}').$$

(f) Para $Z \in \text{mod}(R)$, se tiene que $m := \text{coresdim}_{\mathcal{B}'}(Z) < \infty$, y existen sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{g_Z} M_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad \text{con } C_Z \in (\text{add}(T))^\vee, M_Z \in \mathcal{B}';$$

$$0 \rightarrow K_Z \rightarrow N_Z \xrightarrow{f_Z} Z \rightarrow 0 \quad \text{con } N_Z \in (\text{add}(T))^\vee, K_Z \in \mathcal{B}';$$

tales que $\text{coresdim}_{\text{add}(T)}(C_Z) = m - 1$, $\text{coresdim}_{\text{add}(T)}(N_Z) \leq m$, g_Z es una $\mathcal{B}'$ -preenvolvente y f_Z es una $(\text{add}(T))^\vee$ -precubierta.

(g) Para $Z \in \text{mod}(R)$ tal que $m := \text{resdim}_{\mathcal{A}'}(Z) < \infty$, existen sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{f_Z} N_Z \rightarrow C_Z \rightarrow 0 \quad \text{con } N_Z \in (\text{add}(T))^\wedge, C_Z \in \mathcal{A}';$$

$$0 \rightarrow K_Z \rightarrow M_Z \xrightarrow{g_Z} Z \rightarrow 0 \quad \text{con } K_Z \in (\text{add}(T))^\wedge, M_Z \in \mathcal{A}';$$

tales que $\text{resdim}_{\text{add}(T)}(K_Z) = m - 1$, $\text{resdim}_{\text{add}(T)}(N_Z) \leq m$, g_Z es una $\mathcal{A}'$ -precubierta y f_Z es una $(\text{add}(T))^\wedge$ -preenvolvente.

Demostración. Note primero que, por 3.10 y 3.11, T es $n\text{-mod}(R)$ -tilting.

(a) Se sigue de 2.23, 3.9 y 2.29.

(b) Se sigue de 2.27.

(c) Se sigue de 2.29 y 3.9.

(d) Por (b1), tenemos que $\nu = \text{add}(T)$. Basta aplicar 2.30, 3.14 y su dual.

- (e) Note que $\nu = \text{add}(T)$ por (b1). Luego, basta aplicar 2.31, 2.32(a), 3.14 y su dual, 3.9 y su dual. Faltaría ver, en el inciso (e3) que $(\text{add}(T))^\wedge \subseteq \mathcal{B}'$. Para esto último, por 2.33(b) y (a) tenemos

$$(\text{add}(T))^\wedge = \nu^\wedge \subseteq (\mathcal{A}')^\perp \cap \text{mod}(R) = \mathcal{B}'.$$

- (f) Sea $Z \in \text{mod}(R)$. Por (c5), se tiene que $m \leq \text{pd}(T) < \infty$. Para el resto basta aplicar 2.33(c).
 (g) Se sigue de (b1) y 2.33(d).

□

Observación 3.16. En [Wei10], Jiaqun Wei trabaja con una noción de tilting relativa a un subfunctor aditivo del Ext desarrollada por Maurice Auslander y Øyvind Solberg en [AS93a]. El tilting de Miyashita es un caso particular de la noción presentada en tal artículo. Cabe resaltar que el inciso (a2) de 3.15 es [Wei10, Corollary 3.11].

Más adelante, en la sección 3.4, veremos cómo la noción de tilting relativo, a un subfunctor aditivo del Ext, es un caso particular de la noción de n - $\mathcal{X}$ -tilting. También veremos cómo el teorema principal de J. Wei en dicho trabajo [Wei10, Theorem 3.10], se puede obtener como un caso particular de un teorema para objetos n - $\mathcal{X}$ -tilting.

3.3. Tilting de Miyashita para módulos de tipo $\mathcal{FP}_n$

Buscaremos generalizar la familia de ejemplos que hemos desarrollado en la sección anterior. Con tal propósito recordamos el concepto de anillo n -coherente y algunas propiedades relacionadas.

Definición 3.17. [BP17, Section 1] Sea R un anillo.

- (a) Diremos que $M \in \text{Mod}(R)$ es **finitamente n -presentado**, o bien que es un R -módulo de tipo FP_n , si admite una sucesión exacta

$$F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con $F_i \in \text{proj}(R) \forall i \in [0, n]$. Denotaremos como $\mathcal{FP}_n$ a la clase de R -módulos finitamente n -presentados.

- (b) Diremos que $M \in \text{Mod}(R)$ es **finitamente ∞ -presentado**, o bien que es un R -módulo de tipo FP_∞ , si admite una sucesión exacta infinita

$$\cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con $F_i \in \text{proj}(R) \forall i \geq 0$. Denotaremos como $\mathcal{FP}_\infty$ a la clase de R -módulos finitamente ∞ -presentados. Note que $\mathcal{FP}_\infty = \text{proj}(R)^\wedge_\infty$.

Observación 3.18. Sean R un anillo y $M \in \text{Mod}(R)$. Entonces $M \in \mathcal{FP}_n$ si, y sólo si, existe una sucesión exacta

$$R^{m_n} \rightarrow R^{m_{n-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow R^{m_0} \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $m_i \in \mathbb{N} \forall i \in [0, n]$. Note que $\mathcal{FP}_0 = \text{mod}(R)$.

Lema 3.19. [BP17, Proposition 1.7, Theorem 1.8] Sea R un anillo. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) la clase $\mathcal{FP}_n$ es gruesa a derecha;
- (b) la clase $\mathcal{FP}_\infty$ es gruesa.

Lema 3.20. [BGP19, Lemma 2.11] Sean R un anillo y $C \in \text{Mod}(R)$. Si C admite una sucesión exacta

$$F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $F_i \in \mathcal{FP}_n \forall i \in [0, n]$, entonces $C \in \mathcal{FP}_n$.

Definición 3.21. [BP17, Definition 2.2] Diremos que un anillo R es n -coherente si $\mathcal{FP}_n = \mathcal{FP}_{n+1}$.

Lema 3.22. [BP17, Corollary 2.6] Sea R un anillo n -coherente. Entonces, $\mathcal{FP}_n$ es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos.

Lema 3.23. Sean R un anillo conmutativo n -coherente y $T \in \mathcal{FP}_n$. Entonces, todo $X \in T^\perp \cap \mathcal{FP}_n$ satisface que $\text{Hom}_R(T, X) \in \mathcal{FP}_n$.

Demostración. Como $T \in \mathcal{FP}_n$, existe una familia de sucesiones exactas en $\text{Mod}(R)$

$$\{0 \rightarrow K_{i+1} \rightarrow R^{m_i} \rightarrow K_i \rightarrow 0\}_{i=0}^n,$$

donde $K_0 = T$ y $m_i \in \mathbb{N} \forall i \in [0, n]$. Ahora, como $X \in T^\perp$, se sigue que $\text{Ext}_R^1(K_i, X) \cong \text{Ext}_R^{1+i}(T, X) = 0 \forall i \in [0, n]$. Por lo que tenemos una familia de sucesiones exactas en $\text{Mod}(R)$

$$\{0 \rightarrow \text{Hom}_R(K_i, X) \rightarrow \text{Hom}_R(R^{m_i}, X) \rightarrow \text{Hom}_R(K_{i+1}, X) \rightarrow 0\}_{i=0}^n.$$

En particular, tenemos una sucesión exacta en $\text{Mod}(R)$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(T, X) \rightarrow X^{m_0} \rightarrow X^{m_1} \rightarrow \cdots \rightarrow X^{m_n} \rightarrow \text{Hom}_R(K_{n+1}, X) \rightarrow 0.$$

Observemos que, como $X \in \mathcal{FP}_n$, tenemos $X^{m_i} \in \mathcal{FP}_n \forall i \in [0, n]$ por 3.19(a). Entonces, por 3.20, tenemos que $\text{Hom}_R(K_{n+1}, X) \in \mathcal{FP}_n$. Luego, utilizando recursivamente 3.22, tenemos que $\text{Hom}_R(T, X) \in \mathcal{FP}_n$. $\square$

Lema 3.24. *Sean R un anillo conmutativo n -coherente y $T \in \mathcal{FP}_n$. Entonces, para todo $X \in T^\perp \cap \mathcal{FP}_n$ existe una $\text{add}(T)$ -precubierta. Más aún, dicha $\text{add}(T)$ -precubierta es también una $\text{Add}(T)$ -precubierta.*

Demostración. Por el lema anterior, sabemos que $\text{Hom}_R(T, X) \in \mathcal{FP}_n$. En particular, $\text{Hom}_R(T, X)$ es un R -módulo finitamente generado por un conjunto $\{f_1, \dots, f_k\}$. Veamos que $\alpha := (f_1, \dots, f_k) : T^k \rightarrow X$ es una $\text{add}(T)$ -precubierta. En efecto, como todo $T' \in \text{add}(T)$ es un sumando directo de T^m para algún $m \geq 1$, todo morfismo $T' \rightarrow X$ con $T' \in \text{add}(T)$ se factoriza a través de un morfismo $T^m \rightarrow X$ con $m \geq 1$. De modo que basta probar que todo morfismo $\alpha' : T^m \rightarrow X$ se factoriza a través de α . En efecto, sea $\alpha' : T^m \rightarrow X$ en $\text{Mod}(R)$. Note que $\alpha' = (g_1, \dots, g_m)$ con $g_i \in \text{Hom}_R(T, X) \forall i \in [1, m]$. De modo que $g_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j^i f_j \forall i \in [1, m]$, donde $\lambda_j^i \in R \forall (i, j) \in [1, m] \times [1, k]$. Dado que R es conmutativo, cada $\lambda_j^i \in R$ induce un morfismo de R -módulos $\lambda_j^i : T \rightarrow T, x \mapsto \lambda_j^i x$. Entonces, considerando el morfismo

$$\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^m \\ \lambda_2^1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \lambda_n^1 & \dots & & \lambda_n^m \end{pmatrix} : T^m \rightarrow T^n,$$

tenemos que $\alpha' = \alpha\beta$. Probado lo anterior, el segundo enunciado se sigue de 2.46. $\square$

Lema 3.25. *Sean R un anillo y T un R -módulo n -tilting parcial Miyashita. Entonces,*

- (a) $\mathcal{Q} := (\perp T \cap \mathcal{FP}_\infty, \text{add}(T))_\infty^\vee$ es gruesa a izquierda;
- (b) $(\text{add}(T))_{\mathcal{FP}_\infty}^\vee = \text{add}(T)^\vee = \{M \in \mathcal{Q} \mid \text{id}_{\mathcal{Q}}(M) < \infty\}$ y es gruesa a izquierda.

Demostración. Por 3.19(b) sabemos que $\mathcal{FP}_\infty$ es gruesa en $\text{Mod}(R)$. Por 3.6(MT1), tenemos que $T \in \mathcal{FP}_\infty$. Por lo tanto, $\text{add}(T) \subseteq \mathcal{FP}_\infty$. Ahora, por 3.6(MT2), se tiene que $T \in T^\perp$, y así, $\text{add}(T) \subseteq T^\perp \cap \mathcal{FP}_\infty$. Luego, el resultado se sigue de aplicar 1.47 a la clase $\mathcal{T} = \text{add}(T)$. $\square$

Teorema 3.26. *Sean R un anillo n -coherente y $T \in \mathcal{FP}_{n+1}$. Consideremos los siguientes enunciados:*

- (a) T es n -tilting Miyashita y existe un cogenerador $\mathcal{FP}_{n+1}$ -inyectivo relativo en $\mathcal{FP}_{n+1}$;
- (b) T es n - $\mathcal{FP}_{n+1}$ -tilting grande;
- (c) T es n - $\mathcal{FP}_{n+1}$ -tilting pequeño;
- (d) T es n - $\mathcal{FP}_{n+1}$ -tilting pequeño $\text{proj}(R)$ -saturado.

Entonces, se tiene que (b) $\Rightarrow$ (a) y (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d). En caso de que R sea conmutativo, se tiene (a) $\Rightarrow$ (b). Más aún, si (b) se satisface, entonces:

- (1) $({}^\perp(T^\perp), T^\perp)$ es $\mathcal{FP}_{n+1}$ -completo;
- (2) ${}^\perp(T^\perp) \cap T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1} = {}^\perp(T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1}) \cap T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{Add}(T) \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{add}(T)$.
- (3) $T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{Gen}_k^{\mathcal{FP}_{n+1}}(T) \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{gen}_k(T) \cap \mathcal{FP}_{n+1} \forall k \geq \max\{1, n\}$.

Demostración. Note primeramente que, por [BP17, Theorem 2.4(3)], R es k -coherente $\forall k \geq n$. En particular, por 3.19 y 3.22, se tiene que $\mathcal{FP}_{n+1}$ es gruesa en $\text{Mod}(R)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea R conmutativo. Verificaremos las condiciones (T1)-(T5) para $\text{Add}(T)$, con respecto a la clase $\mathcal{FP}_{n+1}$. En efecto, por 3.6(MT1), se tiene que

$$\text{pd}_{\mathcal{FP}_{n+1}}(\text{Add}(T)) = \text{pd}_{\mathcal{FP}_{n+1}}(T) \leq \text{pd}(T) \leq n.$$

Luego, como $T \in \mathcal{FP}_{n+1}$ y $\text{pd}(T) \leq n$, los funtores $\text{Ext}_R^i(T, -)$ conmutan con coproductos [GT06, Lemma 3.1.6]. Así que, como

$$\text{Ext}_R^i(T, T^{(X)}) \cong \text{Ext}_R^i(T, T)^{(X)} = 0 \forall i \geq 0,$$

podemos concluir que $\text{Add}(T) \subseteq T^\perp = (\text{Add}(T))^\perp$. En particular, se tiene 2.2(T2).

Veamos ahora que 2.2(T3) vale para $\mathcal{X} := \mathcal{FP}_{n+1}$. En efecto, por 3.6(MT3) existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow {}_R R \xrightarrow{f_0} T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} T_n \rightarrow 0,$$

donde $T_i \in \text{add}(T) \subseteq \text{Add}(T) \forall i \in [0, n]$. Sean $C_i := \text{Im}(f_i) \forall i \in [1, n]$. Dado que $T \in \mathcal{FP}_{n+1}$, se tiene que $\text{add}(T) \subseteq \mathcal{FP}_{n+1}$; y como $C_n = T_n \in \mathcal{FP}_{n+1}$ y $\mathcal{FP}_{n+1}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, se tiene de η que ${}_R R \in (\text{Add}(T))_{\mathcal{FP}_{n+1}}^\vee$ y ${}_R R \in \mathcal{FP}_{n+1}$. En particular, $\omega := \text{proj}(R) \subseteq \mathcal{FP}_{n+1}$ y es un generador relativo en $\mathcal{FP}_{n+1}$, ya que $\mathcal{FP}_n = \mathcal{FP}_{n+1}$. Veamos ahora que $\omega \subseteq (\text{Add}(T))_{\mathcal{FP}_{n+1}}^\vee$. En efecto, como T es n -tilting de Miyashita, por 3.25(b) se tiene que

$$\text{proj}(R) = \text{add}(R) \subseteq (\text{add}(T))^\vee.$$

Ahora bien, por ser $\text{add}(T) \subseteq \mathcal{FP}_{n+1}$ y usando que $\mathcal{FP}_{n+1}$ es gruesa, se tiene que

$$(\text{add}(T))^\vee = (\text{add}(T))_{\mathcal{FP}_{n+1}}^\vee \subseteq (\text{Add}(T))_{\mathcal{FP}_{n+1}}^\vee;$$

y por lo tanto, $\omega \subseteq (\text{Add}(T))_{\mathcal{FP}_{n+1}}^\vee$, probándose 2.2(T3) para $\mathcal{X} = \mathcal{FP}_{n+1}$.

Por otro lado, dado que $T \in \mathcal{FP}_{n+1}$, se sigue de 2.5(e) que se satisface 2.2(T4) para $\mathcal{FP}_{n+1}$. Finalmente, tenemos 2.2(T5), respecto a $\mathcal{FP}_{n+1}$, por 3.24, ya que R es $n+1$ -coherente conmutativo y $\text{add}(T) \subseteq \mathcal{FP}_{n+1}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea T n - $\mathcal{FP}_{n+1}$ -tilting grande. Como $T \in \mathcal{FP}_{n+1}$ y R es n -coherente,

podemos construir sucesiones exactas en $\mathcal{FP}_{n+1}$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow T_1 \rightarrow P_0 \rightarrow T \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow T_2 \rightarrow P_1 \rightarrow T_1 \rightarrow 0, \\ \vdots \\ 0 \rightarrow T_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow T_n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

con $P_i \in \text{proj}(R) \forall i \in [1, n]$ y $T_{n+1} \in \mathcal{FP}_{n+1}$ ya que $\mathcal{FP}_{n+1}$ es gruesa. Por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\text{Ext}_R^1(T_n, T_{n+1}) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(T, T_{n+1}) = 0,$$

ya que por 2.2(T1) sabemos que $\text{pd}_{\mathcal{FP}_{n+1}}(T) \leq n$. Por lo tanto, $T_n \in \text{proj}(R)$ y así podemos concluir que se satisface 3.6(MT1).

Para mostrar que se satisface 3.6(MT2), observamos que, por 2.2(T2),

$$T \in \text{add}(T) \subseteq \text{Add}(T) \cap \mathcal{FP}_{n+1} \subseteq T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1}.$$

Finalmente, como $\mathcal{FP}_{n+1}$ es gruesa en $\text{Mod}(R)$, por 2.23(c) existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow {}_R R \rightarrow M_0 \rightarrow X_0 \rightarrow 0$$

donde $M_0 \in T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1}$ y $X_0 \in {}^\perp(T^\perp) \cap \mathcal{FP}_{n+1}$. Entonces, como ${}_R R \in {}^\perp(T^\perp)$ por ser proyectivo, se sigue por 2.32(b) que

$$M_0 \in {}^\perp(T^\perp) \cap T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{Add}(T) \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{add}(T).$$

Análogamente, podemos probar que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_0 \rightarrow M_1 \rightarrow X_1 \rightarrow 0,$$

con $M_1 \in \text{add}(T)$ y $X_1 \in {}^\perp(T^\perp) \cap \mathcal{FP}_{n+1}$. Siguiendo recursivamente, con estos argumentos, para todo $k \geq 1$, vamos construyendo una sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \rightarrow M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

con $M_i \in \text{add}(T)$ y $X_i \in {}^\perp(T^\perp) \cap \mathcal{FP}_{n+1} \forall i \in [1, n]$. Luego, como $\text{pd}_{\mathcal{FP}_{n+1}}(T) \leq n$, tenemos que $T^\perp \cap \mathcal{FP}_{n+1}$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{FP}_{n+1}$ por 1.9. De modo que

$$X_n \in T^\perp \cap {}^\perp(T^\perp) \cap \mathcal{FP}_{n+1} = \text{add}(T).$$

Por lo tanto, T satisface 3.6(MT3). Finalmente, por 2.2(T4), hemos probado (a).

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Dado que $\mathcal{FP}_{n+1} \subseteq \text{mod}(R)$, se sigue de 2.60 la equivalencia entre (b) y (c).

(d) $\Leftrightarrow$ (c) Se sigue de 2.89.

Ahora, si (b) se satisface, tenemos que (c) también. Luego:

- (1) se sigue de 2.23(c) y (b);
- (2) se sigue de 2.27(a), 2.32(b) y (b), junto con 2.32(b) y (c) y el hecho de que $\text{add}(T) \subseteq \mathcal{FP}_{n+1}$;
- (3) se sigue de 2.23(c) y (b), junto con 2.23(c), (c) y 2.90(d).

□

3.4. Tilting en categorías exactas

Es un hecho conocido que, de la misma manera que toda categoría abeliana pequeña se puede meter en una categoría de módulos, una categoría exacta pequeña se puede meter en una categoría abeliana. Inspirados por este hecho, definiremos una teoría tilting en categorías exactas contenidas en categorías abelianas a través del concepto de n - $\mathcal{X}$ -tilting en categorías abelianas. Comenzaremos introduciendo las definiciones necesarias.

Definición 3.27. [Büh10, Definition 2.1] Un **par kernel-cokernel** (i, p) es una pareja de morfismos $A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A''$, en una categoría aditiva $\mathcal{A}$, tal que i es el núcleo de p y p es el conúcleo de i .

Sea $\mathcal{E}$ una clase de pares kernel-cokernel. Diremos que un morfismo i (respectivamente, p) es un **mono admisible** (respectivamente, **epi admisible**) si existe una pareja $(i, p) \in \mathcal{E}$. Diremos que $\mathcal{E}$ es **cerrada por isomorfismos** si para todo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & X' & \xrightarrow{\beta'} & B', \end{array}$$

con f, g, h isomorfismos, tenemos que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$ si y sólo si $(\alpha', \beta') \in \mathcal{E}$.

Una **categoría exacta** es una pareja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva y $\mathcal{E}$ es una clase de pares kernel-cokernel cerrada por isomorfismos que satisfacen los siguientes axiomas:

- (E0) 1_A es un mono admisible y un epi admisible, para todo $A \in \mathcal{A}$;
- (E1) la clase de monos admisibles y la de epis admisibles son cerradas por composición;

(E2) para todo morfismo $Y \rightarrow W$ y todo epi admisible $Z \rightarrow W$, existe el pullback $(W, X \rightarrow Y, X \rightarrow Z)$, donde además $X \rightarrow Y$ es un epi admisible;

(E2)^{op} para todo morfismo $X \rightarrow Y$ y todo mono admisible $X \rightarrow Z$, existe el pushout $(W, Y \rightarrow W, Z \rightarrow W)$ donde además $Y \rightarrow W$ es un mono admisible.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

Dada una categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, los elementos de $\mathcal{E}$ se llaman **sucesiones exactas cortas**. Además, para cada $X, Y \in \mathcal{A}$, denotaremos por $\mathcal{E}(X, Y)$ a la clase de sucesiones exactas cortas de la forma $Y \rightarrow Z \rightarrow X$.

Observación 3.28. [Büh10, Remark 2.3] Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. Entonces, los isomorfismos en $\mathcal{A}$ son monos admisibles y epis admisibles.

Observación 3.29. [Büh10, Lemma 2.7] Si $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es una categoría exacta, entonces para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, la sucesión $A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} B$ es una sucesión exacta corta en $\mathcal{E}$.

Definición 3.30. [Büh10, Definition 5.1] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ y $(\mathcal{A}', \mathcal{E}')$ categorías exactas y $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un funtor aditivo. Diremos que F es **exacto** si $F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$. Diremos que F **refleja la exactitud** si para cada pareja (α, β) de morfismos que se pueden componer en $\mathcal{A}$, tenemos que $(F\alpha, F\beta) \in \mathcal{E}'$ implica que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$.

Definición 3.31. [Büh10, Definition 6.1] Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Diremos que $\mathcal{A}$ es **completa por idempotentes** si para todo morfismo idempotente $p : A \rightarrow A$ en $\mathcal{A}$ existe un isomorfismo $f : A \rightarrow K \oplus I$ tal que $fp = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{bmatrix} f$.

Observación 3.32. [Büh10, Remark 6.2] Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Entonces, $\mathcal{A}$ es completa por idempotentes si, y sólo si, todo morfismo idempotente $p : A \rightarrow A$ tiene núcleo. Más aún, en tal caso, para todo idempotente $p : A \rightarrow A$ existen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & A \xrightarrow{j} I \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \parallel \\ K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & K \oplus I \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & K \oplus I \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} K \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix} \parallel \\ I & \xrightarrow{i} & A \xrightarrow{l} K, \end{array}$$

donde los renglones son pares kernel-cokernel, k es el núcleo de p , $p = ij$, y $\begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ son isomorfismos. Cabe observar además que, en caso de que $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ sea una categoría exacta, por los diagramas anteriores tenemos que $(k, j), (i, l) \in \mathcal{E}$.

Definición 3.33. [Büh10, Definition 7.2] Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Diremos que un morfismo f en $\mathcal{A}$ es un **split-epi** si existe un morfismo g tal que $fg = 1$. Se define

dualmente **split-mono**. Si todo split-epi tiene núcleo, (o equivalentemente, todo split-mono tiene conúcleo), diremos que $\mathcal{A}$ es **débilmente completa por idempotentes**.

Definición 3.34. [Büh10, Definition 11.1] Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta.

Un objeto $P \in \mathcal{A}$ es **$\mathcal{E}$ -proyectivo** si $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ es exacto. Denotaremos por $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ a la clase de objetos $\mathcal{E}$ -proyectivos.

Un objeto $I \in \mathcal{A}$ es **$\mathcal{E}$ -inyectivo** si $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ es exacto. Denotaremos por $\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ a la clase de objetos $\mathcal{E}$ -inyectivos.

Definición 3.35. [Büh10, Definition 11.9] Diremos que una categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ tiene **suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos** si para todo $A \in \mathcal{A}$ existe un epi admisible $P \rightarrow A$ con $P \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$. Dualmente, $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ tiene **suficientes $\mathcal{E}$ -inyectivos** si para todo $A \in \mathcal{A}$ existe un mono admisible $A \rightarrow I$ con $I \in \text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$.

Ejemplo 3.36. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones tal que $0 \in \mathcal{A}$. Se puede mostrar que $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es una categoría exacta, donde $\mathcal{E}$ es la clase de sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$ en $\mathcal{C}$, con $N, K \in \mathcal{A}$.

Definición 3.37. Dada una categoría exacta esqueléticamente pequeña $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, denotaremos por $\text{Lex}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ a la categoría de funtores contravariantes, aditivos y exactos a izquierda $\mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$.

Teorema 3.38. [Büh10, Theorem A.1][TT90, Theorem A.7.1][Gab62, Chapter II, Section 2][Qui73, Section 2] Para una categoría exacta pequeña $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) Existe una categoría abeliana $\mathcal{B}$ y un funtor aditivo exacto, pleno y fiel $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ que refleja la exactitud. Más aún, $i(\mathcal{A})$ es cerrada por extensiones en $\mathcal{B}$.
- (b) La categoría $\mathcal{B}$ puede escogerse canónicamente como la categoría $\text{Lex}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ e i como el funtor de Yoneda $i(A) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)$.
- (c) Sea $\mathcal{A}$ débilmente completa por idempotentes. Si f es un morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $i(f)$ es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo admisible.

Definición 3.39. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta y $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. En caso de que exista un funtor aditivo, exacto, pleno y fiel $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ que refleje la exactitud, diremos que $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ **está sumergida** en $\mathcal{C}$. En tal caso, diremos que i es la **inclusión natural de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$** .

Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$. Recordamos que $[\mathcal{X}]$ denota a la clase de objetos $Z \in \mathcal{C}$ tales que existe $X \in \mathcal{X}$ y un isomorfismo $Z \cong X$ en $\mathcal{C}$.

Observación 3.40. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría $\mathcal{C}$. Notemos que $[\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}] \subseteq [\mathcal{X}] \cap [\mathcal{Y}]$. Más aún, si $\mathcal{X} = [\mathcal{X}]$, entonces $[\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}] = \mathcal{X} \cap [\mathcal{Y}]$.

Podemos además afirmar lo siguiente.

Proposición 3.41. *Para una categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, tenemos que $[i(\mathcal{A})]$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{C}$ si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es completa por idempotentes.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $e : A \rightarrow A$ un morfismo idempotente en $\mathcal{A}$. Se sigue que $i(e)$ es un morfismo idempotente en $\mathcal{C}$. Así que existe una sucesión exacta que se escinde en $\mathcal{C}$

$$\eta : 0 \rightarrow X \xrightarrow{k} i(A) \xrightarrow{c} Y \rightarrow 0,$$

donde $k : X \rightarrow i(A)$ es el núcleo de $i(e)$, y un monomorfismo $c' : Y \rightarrow i(A)$ tal que $i(e) = c'c$. Luego, como $[i(\mathcal{A})]$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{C}$, tenemos que existen $B, C \in \mathcal{A}$ tales que $i(B) \cong X$ y $i(C) \cong Y$. Más aún, como i es un funtor pleno, tenemos que existen α, β y γ morfismos en $\mathcal{A}$ tales que $i(\alpha) = k$, $i(\beta) = c$ y $i(\gamma) = c'$. Así que, como i es un funtor que refleja exactitud, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$ y γ es un mono admisible. Más aún, como i es un funtor fiel, $e = \gamma\beta$. Veamos que α es el núcleo de e . En efecto, como $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$, sabemos que α es el núcleo de β . Entonces, como ω es un morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $e\omega = 0$, se sigue que $\gamma\beta\omega = 0$. Pero, como γ es un monomorfismo, se sigue que $\beta\omega = 0$. De modo que ω se factoriza a través de α por ser el núcleo de β .

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $M \in \mathcal{A}$ tal que $i(M) = X \oplus Y$ en $\mathcal{C}$. Consideramos el morfismo idempotente $e = \mu\pi$, donde $\mu : X \rightarrow i(M)$ y $\pi : i(M) \rightarrow X$ son la inclusión y la proyección natural, respectivamente. Ahora, dado que i es un funtor fiel y pleno, existe un morfismo idempotente $e' : M \rightarrow M$ tal que $i(e') = e$. Como i es un funtor exacto, por 3.32, existe una sucesión exacta que se escinde

$$0 \rightarrow i(K) \xrightarrow{i(k)} i(M) \xrightarrow{i(j)} i(I) \rightarrow 0,$$

donde $i(k)$ es el núcleo de $i(e') = e$. Por lo tanto, $X \cong i(K)$ y así que $[i(\mathcal{A})]$ es cerrado por sumandos directos en $\mathcal{C}$. $\square$

Observación 3.42. *Cabe remarcar que hay categorías exactas $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ tales que $\mathcal{A}$ es una subcategoría plena de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, sin que $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ esté sumergida en $\mathcal{C}$ vía la inclusión $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Por ejemplo, si R es un anillo y $\mathcal{E}$ es la clase de sucesiones exactas cortas que se escinden en $\text{Mod}(R)$, entonces $(\text{Mod}(R), \mathcal{E})$ es una categoría exacta. Notemos que $(\text{Mod}(R), \mathcal{E})$ no está sumergida en $\text{Mod}(R)$ a menos que R sea un anillo semisimple. Veremos un segundo ejemplo de este fenómeno en la siguiente sección (ver 3.68).*

Debido a 3.38 hay razones suficientes para considerar el caso en que una categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ esté sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ vía $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. Más adelante

utilizaremos esta suposición para comparar la teoría de clases n - $[i(\mathcal{A})]$ -tilting en $\mathcal{C}$ con la teoría tilting para categorías exactas que introduciremos en este capítulo.

Existen diferentes teorías tilting desarrolladas para categorías exactas en contextos particulares. Entre ellas podemos citar la teoría tilting relativa a un subfunctor del Ext desarrollada por Maurice Auslander y Øyvind Solberg en [AS93b], o la generalización desarrollada por Soud Khalifa Mohamed en [Moh09]. Más adelante revisaremos dichas teorías y nos centraremos en el reciente trabajo de Bin Zhu y Xiao Zhuang [ZZ20], donde se introdujo una teoría tilting para categorías extrianguladas. Las categorías extrianguladas son un concepto, desarrollado por Hiroyuki Nakaoka y Yann Palu en [NP19], que engloba las categorías trianguladas y las categorías exactas. Por comodidad del lector, a continuación presentamos algunas definiciones y resultados de Zhu y Zhuang traducidos a categorías exactas.

Definición 3.43. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. Una $\mathcal{X}$ -**resolución (de longitud $\leq n$) en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ de $A \in \mathcal{A}$** es una secuencia de morfismos en $\mathcal{A}$

$$X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} A$$

tal que existe una familia $\left\{ K_{i+1} \xrightarrow{g_i} X_i \xrightarrow{f_i} K_i \right\}_{i=0}^n$ en $\mathcal{E}$ con $K_{n+1} := 0$, $K_0 := A$, $f_0 := d_0$ y $d_i = g_{i-1}f_i \forall i \in [1, n]$. Denotaremos por $\mathcal{X}_{n,\mathcal{E}}^\wedge$ a la clase de todos los objetos $A \in \mathcal{A}$ que admiten una $\mathcal{X}$ -resolución en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ de longitud $\leq n$. Además definimos $\mathcal{X}_{\mathcal{E}}^\wedge := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{X}_{n,\mathcal{E}}^\wedge$. Para $A \in \mathcal{X}_{\mathcal{E}}^\wedge$, $\text{resdim}_{\mathcal{X},\mathcal{E}}(A) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{X}_{n,\mathcal{E}}^\wedge\}$.

Dualmente, una $\mathcal{X}$ -**coresolución (de longitud $\leq n$) en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ de $A \in \mathcal{A}$** es una secuencia de morfismos en $\mathcal{A}$

$$A \xrightarrow{d_0} X_0 \xrightarrow{d_1} X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \xrightarrow{d_n} X_n$$

tal que existe una familia $\left\{ K_i \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} K_{i+1} \right\}_{i=0}^n$ en $\mathcal{E}$ con $K_{n+1} := 0$, $K_0 := A$, $f_0 := d_0$ y $d_i = f_i g_{i-1} \forall i \in [1, n]$. Denotaremos por $\mathcal{X}_{n,\mathcal{E}}^\vee$ a la clase de todos los objetos $A \in \mathcal{A}$ que admiten una $\mathcal{X}$ -coresolución en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ de longitud $\leq n$. Además definimos $\mathcal{X}_{\mathcal{E}}^\vee := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{X}_{n,\mathcal{E}}^\vee$. Para $A \in \mathcal{X}_{\mathcal{E}}^\vee$, $\text{coresdim}_{\mathcal{X},\mathcal{E}}(A) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{X}_{n,\mathcal{E}}^\vee\}$.

Antes de continuar recordaremos cómo están definidos los funtores Ext en categorías exactas.

Observación 3.44. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos.

- (a) [ZZ20, Definition 6] De manera similar a como se define el Ext de Yoneda en categorías abelianas, para cualesquiera objetos $A, B \in \mathcal{A}$, definimos una relación de equivalencia en $\mathcal{E}(B, A)$ dada por diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & X & \rightarrow & B \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ A & \rightarrow & X' & \rightarrow & B. \end{array}$$

Cada clase de equivalencia recibe el nombre de **extensión**, y a la clase de todas las extensiones de A en B , la denotamos como $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(B, A)$ o bien $\text{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^1(B, A)$. Note que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(B, A)$ es un grupo abeliano con la suma de Baer, donde el elemento neutro es la clase de equivalencia de la sucesión exacta corta

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} B.$$

- (b) [ZZ20, Definition 6] Dado que $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, para cada elemento $A \in \mathcal{A}$, tenemos sucesiones exactas cortas en $\mathcal{E}$

$$A \rightarrow I \rightarrow A^1 \text{ y } A_1 \rightarrow P \rightarrow A$$

con $I \in \text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ y $P \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$. En tal caso, A^1 recibe el nombre de **cosizigia** de A y A_1 recibe el nombre de **sizigia** de A . Denotaremos por $\Sigma(A)$ a la clase de cosizigias de A . Dualmente, $\Omega(A)$ denotará a la clase de sizigias de A .

Supongamos que A^2 es una cosizigia de A^1 y que A_2 es una sizigia de A_1 . En este caso, A^2 recibe el nombre de **segunda cosizigia** de A y A_2 recibe el nombre de **segunda sizigia** de A . Denotaremos por $\Sigma^2(A)$ a la clase de segundas cosizigias de A . Dualmente, $\Omega^2(A)$ denotará a la clase de segundas cosizigias de A .

Recurivamente, si A^k es una cosizigia de una $(k-1)$ -ésima cosizigia de A y A_k es una sizigia de una $(k-1)$ -ésima sizigia de A , diremos que A^k es una **k -ésima cosizigia** de A y que A_k es una **k -ésima sizigia** de A . Denotaremos por $\Sigma^k(A)$ a la clase de k -ésimas cosizigias de A y como $\Omega^k(A)$ a la clase de k -ésimas sizigias de A .

- (c) [LN19, Lemma 5.1] Para $k \geq 1$, se tiene que

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y^k) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X_k, Y) \quad \forall X_k \in \Omega^k(X), \quad \forall Y^k \in \Sigma^k(Y).$$

Dicho grupo recibirá el nombre de $(k+1)$ -ésimo funtor Ext , y lo denotaremos por $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(X, Y)$ o bien por $\text{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^{k+1}(X, Y)$.

- (d) Sea $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$ una clase de objetos. Definimos las clases

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\perp \mathcal{E}} &:= \left\{ A \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(Z, A) = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{Z}, \quad \forall i > 0 \right\}, \\ {}^{\perp \mathcal{E}} \mathcal{Z} &:= \left\{ A \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{Z}, \quad \forall i > 0 \right\}. \end{aligned}$$

También utilizaremos las notaciones ${}^{\perp(\mathcal{A}, \mathcal{E})} \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}^{\perp(\mathcal{A}, \mathcal{E})}$ para evitar ambigüedad en caso de ser necesario.

(e) Para $A \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, definimos

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(A) := \min \{n \geq 0 \mid \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, \mathcal{X}) = 0 \forall i > n\}.$$

Dada una clase de objetos $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$, definimos

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(\mathcal{T}) := \sup \{\mathrm{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(T) \mid T \in \mathcal{T}\}.$$

Análogamente, se definen $\mathrm{id}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(A)$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(\mathcal{T})$. En caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, borraremos el subíndice $\mathcal{X}$ en “id” y “pd”.

(f) [ZZ20, Lemma 3] Para $X \in \mathcal{A}$, se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathcal{E}}(X) \leq n$ es equivalente a que exista una resolución $\mathcal{E}$ -proyectiva en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ de X de longitud $\leq n$.

Lema 3.45. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos y $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces,

$$(a) \quad \mathrm{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{Y}}(\mathcal{X}_{\mathcal{E}}^{\vee}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{Y}}(\mathcal{X});$$

$$(b) \quad \mathcal{X}_{\mathcal{E}}^{\vee} \subseteq {}^{\perp_{\mathcal{E}}}(\mathcal{X}^{\perp_{\mathcal{E}}}).$$

Demostración. La prueba de (a) es análoga a la dada en 1.13. Finalmente, (b) se sigue de (a) como en la prueba de 2.14(a). $\square$

Proposición 3.46. [NP19, Proposition 3.24] Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes, para un objeto $P \in \mathcal{A}$:

$$(a) \quad P \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A});$$

$$(b) \quad \mathrm{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^1(P, A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A};$$

$$(c) \quad P \in {}^{\perp_{\mathcal{E}}} \mathcal{A}.$$

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) se sigue de [NP19, Proposition 3.24]. Veamos la equivalencia entre (b) y (c).

(b) $\Rightarrow$ (c) En efecto, por definición, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^k(P, A) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(P, A^k) \quad \forall k \geq 1$, donde $A^k \in \Sigma^k(Y)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^k(P, A) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(P, A^k) = 0 \quad \forall k \geq 1$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Es trivial. $\square$

Proposición 3.47. [LN19, Fact 1.18, Proposition 5.2] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos y $A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\lambda} C$ una sucesión exacta en $\mathcal{E}$. Entonces, para todo $X \in \mathcal{A}$, tenemos la sucesión exacta larga inducida por

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) & \xrightarrow{(X, \mu)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) & \xrightarrow{(X, \lambda)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) \\
 & & & & \partial_0 & & \\
 & \searrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, A) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(X, C) \\
 & & & & \partial_{n-1} & & \\
 & \searrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, A) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, B) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, C) \\
 & & & & \partial_n & & \\
 & \searrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots & &
 \end{array}$$

y la sucesión exacta larga inducida por $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) & \xrightarrow{(\mu, X)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X) & \xrightarrow{(\lambda, X)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \\
 & & & & \partial'_0 & & \\
 & \searrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(C, X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(A, X) \\
 & & & & \partial'_{n-1} & & \\
 & \searrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(C, X) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(B, X) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, X) \\
 & & & & \partial'_n & & \\
 & \searrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(A, X) & \longrightarrow & \cdots & &
 \end{array}$$

Definición 3.48. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta, con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, y $\omega, \mathcal{X}$ clases de objetos en $\mathcal{A}$. Decimos que ω es un **$\mathcal{E}$ -cogenerador relativo en $\mathcal{X}$** si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para cada $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta corta $X \rightarrow W \rightarrow X'$ en $\mathcal{E}$, con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Dualmente, ω es un **$\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{X}$** si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para cada $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta corta $X' \rightarrow W \rightarrow X$ en $\mathcal{E}$, con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Decimos que ω es **$\mathcal{X}$ -inyectivo** si $\text{id}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(\omega) = 0$. En caso de que $\text{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(\omega) = 0$, diremos que ω es **$\mathcal{X}$ -proyectivo**.

Definición 3.49. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos. Decimos que una clase $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ es **n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$** , con $n \in \mathbb{N}$, si las siguientes condiciones se satisfacen:

(TEC0) $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$;

(TEC1) $\text{pd}_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}) \leq n$;

(TEC2) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$;

(TEC3) existe un ω $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{A}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\vee}$;

(TEC4) $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$.

Decimos que un objeto $T \in \mathcal{A}$ es **n -tilting pequeño en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$** si $\text{add}(T)$ es una clase n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$.

En lo que sigue, daremos la noción de clase tilting en el sentido de Bin Zhu y Xiao Zhuang [ZZ20, Definition 7]. La consideraremos sólo para el caso de categorías exactas.

Definición 3.50. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ y $n \geq 0$. Decimos que $\mathcal{T}$ es una clase **n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$** si satisface las siguientes condiciones:

(ZZT0) $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$;

(ZZT1) $\text{pd}_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}) \leq n$;

(ZZT2) $\mathcal{T}$ es un $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$.

Diremos que un objeto $T \in \mathcal{A}$ es **n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$** si $\text{add}(T)$ es una clase n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$.

Definición 3.51. [ZZ20, Section 4] Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ y $n \geq 1$. Denotaremos como $\text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\mathcal{T})$ a la clase de todos los objetos $X \in \mathcal{A}$ que admiten una familia de sucesiones exactas cortas en $\mathcal{E}$

$$\{X_{i+1} \rightarrow T_i \rightarrow X_i\}_{i=1}^n,$$

donde $T_i \in \mathcal{T} \forall i \in [1, n]$ y $X_1 := X$. En caso de que haya ambigüedad y deseemos remarcar que estamos trabajando en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, en lugar de utilizar la notación $\text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\mathcal{T})$ utilizaremos la notación $\text{Pres}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^n(\mathcal{T})$.

Teorema 3.52. [ZZ20, Theorem 1] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos y $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{A}$ tal que todo objeto en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$ admite una $\mathcal{T}$ -precubierta. Entonces, $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Zhu-Zhuang si y sólo si $\text{Pres}_{\mathcal{E}}^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$, con $m := \max\{1, n\}$.

Proposición 3.53. [ZZ20, Remark 4(1)] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ una clase n -tilting Zhu-Zhuang. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

(a) $\mathcal{T}$ es un $\mathcal{E}$ -generador $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$ -proyectivo relativo en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$;

(b) $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}_{n, \mathcal{E}}^{\vee}$;

(c) $(\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}})_{\mathcal{E}}^{\vee} = \mathcal{A}$.

Lema 3.54. Para una categoría exacta completa por idempotentes $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ y $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\vee}$ un $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{A}$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{E}}^1(\mathcal{T})$.

- (b) Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$ y $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$, entonces $\mathcal{T}$ es un $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$.

Demostración.

- (a) Sea $A \in \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$. Por ser ω un $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{A}$, existe una sucesión exacta corta $\eta : K \rightarrow W \xrightarrow{a} A$ en $\mathcal{E}$, con $W \in \omega$. Además, como $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\vee}$, existe una sucesión exacta corta $W \xrightarrow{b} B \rightarrow C$ en $\mathcal{E}$, con $B \in \mathcal{T}$ y $C \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\vee} \subseteq {}^{\perp \varepsilon}(\mathcal{T}^{\perp \varepsilon})$ (ver 3.45). Considerando el pushout de a y b , se tiene el siguiente diagrama conmutativo cuyas filas y columnas son sucesiones exactas cortas en $\mathcal{E}$. Note que

$$\begin{array}{ccccc} K & = & K & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ W & \xrightarrow{b} & B & \rightarrow & C \\ \downarrow a & & \downarrow x & & \parallel \\ A & \xrightarrow{t} & B' & \rightarrow & C \end{array}$$

la sucesión exacta corta $A \rightarrow B' \rightarrow C$ se escinde ya que $A \in \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$ y $C \in {}^{\perp \varepsilon}(\mathcal{T}^{\perp \varepsilon})$. Por lo que existe $y : B' \rightarrow A$ tal que $yt = 1_A$. Ahora, como x, y son epis admisibles, se sigue de [Büh10, Proposition B.1(ii)] que $yx : B \rightarrow A$ es un epi admisible con $B \in \mathcal{T}$.

- (b) Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$ precubriente en $\mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$. Consideremos $X \in \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$. Luego, existe una $\mathcal{T}$ -precubierta $g : T' \rightarrow X$. Por (a), existe una sucesión exacta corta $R \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} X$ en $\mathcal{E}$, con $T \in \mathcal{T}$. Ahora, por ser g una $\mathcal{T}$ -precubierta, existe $g' : T \rightarrow T'$ tal que $\alpha = gg'$. Luego, por [Büh10, Proposition B.1(iii)], tenemos que g es un epi admisible ya que α lo es. En particular, existe una sucesión exacta corta $\eta : K \rightarrow T' \xrightarrow{g} X$. Finalmente, dado que $T' \in \mathcal{T}$ y g es $\mathcal{T}$ -precubierta, aplicando 3.47 a η , se sigue que $K \in \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$ ya que $T' \in \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$, probándose que $\mathcal{T}$ es un $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$. □

Por último presentamos una noción inspirada en la definición tilting introducida en [AS93b, Section 3].

Definición 3.55. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ y $n \geq 0$. Decimos que $\mathcal{T}$ es una **clase n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$** si se satisfacen las siguientes condiciones:

(AST0) $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$;

(AST1) $\text{pd}_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}) \leq n$;

(AST2) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp \varepsilon}$;

(AST3) $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\vee}$.

Decimos que un objeto $T \in \mathcal{A}$ es n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ si $\text{add}(T)$ es una clase n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$.

Teorema 3.56. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta completa por idempotentes, con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, con $\mathcal{T}$ precubriente en $\mathcal{T}^{\perp \mathcal{E}}$;
- (b) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$;
- (c) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, con $\mathcal{T}$ precubriente en $\mathcal{T}^{\perp \mathcal{E}}$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se satisface, entonces $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}_{n, \mathcal{E}}^{\vee}$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b)&(c) Se sigue de 3.53. Más aún, $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}_{n, \mathcal{E}}^{\vee}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) y (c) $\Rightarrow$ (a) Se siguen de 3.54(b). □

Corolario 3.57. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta completa por idempotentes, con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$;
- (b) $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp \mathcal{E}}$ y $\text{Pres}_{\mathcal{E}}^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp \mathcal{E}}$, con $m := \max\{1, n\}$.

Demostración. Se sigue de 3.56 y 3.52. □

Lema 3.58. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta completa por idempotentes, con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos, sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía el funtor $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. Entonces, para toda $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$

$$\text{add}(i(\mathcal{T})) = [i(\text{add}(\mathcal{T}))] \quad \text{y} \quad \text{gen}_n^{[i(\mathcal{A})]}(i(\mathcal{T})) \cap [i(\mathcal{A})] = [i(\text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\text{add}(\mathcal{T})))].$$

Demostración. En efecto, primeramente observamos que, como i es un funtor aditivo se sigue que $\text{add}(i(\mathcal{T})) \supseteq i(\text{add}(\mathcal{T}))$. Además, como $\mathcal{A}$ es completa por idempotentes, tenemos que $[i(\mathcal{A})]$ es cerrado por sumandos directos en $\mathcal{C}$ por 3.41, así que $\text{add}(i(\mathcal{T})) \subseteq [i(\text{add}(\mathcal{T}))]$. De modo que, $\text{add}(i(\mathcal{T})) = [i(\text{add}(\mathcal{T}))]$. En particular, de la anterior igualdad, se sigue que $\text{add}(i(\mathcal{T})) \cap [i(\mathcal{A})] = [i(\text{add}(\mathcal{T}))]$.

Sea $X \in \text{gen}_n^{[i(\mathcal{A})]}(i(\mathcal{T})) \cap [i(\mathcal{A})]$. Entonces, existen $A \in \mathcal{A}$ tal que $X \cong i(A)$ y una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} i(A) \rightarrow 0,$$

donde $K_k := \text{Ker}(f_k) \in [i(\mathcal{A})]$ y $T_k \in \text{add}(i(\mathcal{T})) = [i(\text{add}(\mathcal{T}))] \quad \forall k \in [1, n]$. Ahora, como i refleja la exactitud, tenemos que la familia de sucesiones exactas

$$\{0 \rightarrow K_{i+1} \rightarrow T_i \rightarrow K_i \rightarrow 0\}_{i=1}^n,$$

inducida por η , donde $K_1 := A$, nos da una familia de sucesiones exactas en $\mathcal{E}$

$$\left\{ i^{-1}(K_{i+1}) \rightarrow i^{-1}(T_i) \rightarrow i^{-1}(K_i) \right\}_{i=1}^n,$$

donde $i^{-1}(T_k) \in \text{add}(\mathcal{T}) \forall k \in [1, n]$ y $i^{-1}(K_1) := A$. Por lo tanto, $A \in \text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\text{add}(\mathcal{T}))$. Recíprocamente, si $X \in [i(\text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\text{add}(\mathcal{T})))]$, entonces existe $A \in \text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\text{add}(\mathcal{T}))$ tal que $i(A) \cong X$. Luego, por definición, existe una familia de sucesiones exactas cortas en $\mathcal{E}$

$$\{X_{k+1} \rightarrow T_k \rightarrow X_k\}_{k=1}^n,$$

donde $T_k \in \text{add}(\mathcal{T}) \forall k \in [1, n]$ y $X_1 := A$. Así que, al aplicar el funtor i , obtenemos la familia de sucesiones exactas en $\mathcal{C}$

$$\{0 \rightarrow i(X_{k+1}) \rightarrow i(T_k) \rightarrow i(X_k) \rightarrow 0\}_{k=1}^n,$$

que inducen una sucesión exacta

$$0 \rightarrow i(X_{n+1}) \rightarrow i(T_n) \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} i(T_1) \xrightarrow{f_1} i(A) \rightarrow 0,$$

donde $\text{Ker}(f_k) \in [i(\mathcal{A})]$ y $i(T_k) \in i(\text{add}(\mathcal{T})) \subseteq \text{add}(i(\mathcal{T})) \forall k \in [1, n]$. Luego, como $X \cong i(A)$, se tiene que $X \in \text{gen}_n^{[i(\mathcal{A})]}(i(\mathcal{T}))$. $\square$

Estamos listos para empezar nuestra comparación de las clases tilting pequeñas en una categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, con el n - $[i(\mathcal{A})]$ -tilting en $\mathcal{C}$. Para comenzar, veremos un par de lemas para explicar la relación de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(-, -)$ con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(-, -)$, así como la relación entre clases ortogonales en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{C}$.

Lema 3.59. *Para una categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $A, B \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{C}$ y $n \geq 1$, se cumplen los siguientes enunciados.*

- (a) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(X), i(Y))$, $\bar{\eta} \mapsto \overline{i(\eta)}$, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.
- (b) Sea $i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$. Entonces, para todo $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, i(A))$ existe un morfismo $\alpha : X \rightarrow i(A')$, con $A' \in \mathcal{A}$ y un $\bar{\eta}' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A'), i(A))$ tal que $\bar{\eta} = \bar{\eta}'\alpha$. Más aún, para toda $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(i(B), i(A))$ existe una descomposición en 1-extensiones $\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 \cdots \bar{\eta}_n$ tal que $\eta_k \in i(\mathcal{E}) \forall k \in [1, n]$.
- (c) Sea $i(\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{C}$. Entonces, para todo $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A), X)$ existe un morfismo $\beta : i(A') \rightarrow X$ con $A' \in \mathcal{A}$ y un $\bar{\eta}' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A), i(A'))$ tal que $\bar{\eta} = \beta\bar{\eta}'$. Más aún, para toda $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(i(B), i(A))$ existe una descomposición en 1-extensiones $\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 \cdots \bar{\eta}_n$ tal que $\eta_k \in i(\mathcal{E}) \forall k \in [1, n]$.

Demostración.

- (a) Sean $X, Y \in \mathcal{A}$. Como i es un funtor exacto, tenemos una correspondencia

$$\psi : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(X), i(Y)), \quad \bar{\eta} \mapsto \overline{i(\eta)}.$$

Además, como $i(\mathcal{A})$ es cerrada por extensiones, para toda sucesión exacta en $\mathcal{C}$

$$\mu : 0 \rightarrow i(Y) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} i(X) \rightarrow 0,$$

existe $Z \in \mathcal{A}$ tal que $i(Z) = E$. Luego, como el funtor i es pleno, se sigue que existen α y β morfismos en $\mathcal{A}$ tales que $i(\alpha) = f$ y $i(\beta) = g$. Entonces, como i refleja la exactitud, existe $\eta \in \mathcal{E}$ tal que $i(\eta) = \mu$. Por lo tanto, hemos probado que la correspondencia ψ es sobreyectiva. Más aún, en caso de que exista $\eta = (\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$ tal que $\psi(\bar{\eta}) = 0$, por definición esto quiere decir que $i(\alpha)$ es un monomorfismo que se escinde. De modo que, debido a que i es pleno, esto lleva a que α es un split-mono. Por lo tanto, si $\psi(\bar{\eta}) = 0$, entonces $\bar{\eta} = 0$. En conclusión ψ es un isomorfismo.

- (b) Sea $\eta : 0 \rightarrow i(A) \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{C}$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -inyectivos y la inclusión $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es exacta, existe una sucesión exacta

$$\eta' : 0 \rightarrow i(A) \xrightarrow{f'} i(I) \xrightarrow{g'} i(A') \rightarrow 0$$

con $I \in \text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ y $A' \in \mathcal{A}$. Luego, como $i(I) \in i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$, tenemos la sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, i(I)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i(A), i(I)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, i(I)) = 0.$$

De modo que existe $\alpha' : Y \rightarrow i(I)$ tal que $\alpha' f = f'$. Luego, por la propiedad universal de conúcleo, tenemos que existe $\alpha : X \rightarrow i(A')$ tal que $\bar{\eta} = \bar{\eta}' \alpha$.

Sean $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(i(B), i(A))$ y $\eta = \eta_1 \cdots \eta_n$ una descomposición en sucesiones exactas cortas. Por lo anterior, existe un morfismo $\alpha_1 : X_1 \rightarrow i(A'_1)$ con $A'_1 \in \mathcal{A}$ y $\bar{\eta}'_1 \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A'_1), i(A))$ tal que $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}'_1 \alpha_1$. Luego, con el mismo razonamiento, existe un morfismo $\alpha_2 : X_2 \rightarrow i(A'_2)$ con $A'_2 \in \mathcal{A}$ y un $\bar{\eta}'_2 \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A'_2), i(A'_1))$ tal que $\alpha_1 \bar{\eta}_2 = \bar{\eta}'_2 \alpha_2$. Continuando con el mismo razonamiento, por recursión tenemos que para todo $k \in [2, n-1]$, existe un morfismo $\alpha_k : X_k \rightarrow i(A'_k)$ con $A'_k \in \mathcal{A}$ y un $\bar{\eta}'_k \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A'_k), i(A'_{k-1}))$ tal que $\alpha_{k-1} \bar{\eta}_k = \bar{\eta}'_k \alpha_k$. Observando que $A, B \in \mathcal{A}$, que $A'_i \in \mathcal{A} \forall i \in [1, k]$, que $\mathcal{A}$ es cerrado por extensiones y que

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 \cdots \bar{\eta}_n = \bar{\eta}'_1 \alpha_1 \bar{\eta}_2 \cdots \bar{\eta}_n = \bar{\eta}'_1 \bar{\eta}'_2 \alpha_2 \bar{\eta}_3 \cdots \bar{\eta}_n = \cdots = \bar{\eta}'_1 \cdots \bar{\eta}'_{n-1} (\alpha_{n-1} \bar{\eta}_n),$$

podemos concluir que $\bar{\eta} = \bar{\eta}'_1 \cdots \bar{\eta}'_{n-1} (\alpha_{n-1} \bar{\eta}_n)$ es la descomposición deseada.

- (c) Se prueba de manera dual a (b).

□

En el lema anterior aparecen las condiciones $i(\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{C}$ y $i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$. Cabe decir que conocemos categorías en las que se cumplen estas condiciones. En efecto, en [Gab62, Chapter 2. Section 4. Lemma 4, p.357], Pierre Gabriel muestra lo siguiente. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ la categoría exacta dada por una categoría abeliana noetheriana $\mathcal{A}$ y la clase $\mathcal{E}$ de todas las sucesiones exactas cortas de $\mathcal{A}$. Dicha categoría exacta está sumergida en la categoría $\mathcal{C} := \text{Lex}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, vía el funtor de Yoneda. En este caso, un funtor $F \in \mathcal{C}$ es inyectivo si, y sólo si, es un funtor exacto. Por lo tanto, éste es un ejemplo en el que $i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$.

Lema 3.60. *Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, y $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$ una clase de objetos. Si $i(\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{C}$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

- (a) $i(\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}))$ es un generador proyectivo relativo en $i(\mathcal{A})$;
- (b) $i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}))$ es un cogenerador $i(\mathcal{A})$ -inyectivo relativo en $i(\mathcal{A})$;
- (c) $i : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(A, A') \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(i(A), i(A')) \forall A, A' \in \mathcal{A}, \forall k > 0$;
- (d) $i(\mathcal{Z}^{\perp \mathcal{E}}) = i(\mathcal{Z})^{\perp} \cap i(\mathcal{A})$ y $i({}^{\perp \mathcal{E}}\mathcal{Z}) = {}^{\perp}i(\mathcal{Z}) \cap i(\mathcal{A})$.

Demostración.

- (a) En efecto, como la inclusión natural $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor exacto y $\mathcal{A}$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos, sabemos que para todo $A \in \mathcal{A}$ existe una sucesión exacta en $\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow i(A') \rightarrow i(P) \rightarrow i(A) \rightarrow 0$$

con $A', P \in \mathcal{A}$ y $P \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$. Finalmente, note que ${}^{\perp}\mathcal{C} = \text{Proj}(\mathcal{C})$.

- (b) Usando (c), la prueba es análoga a la primera parte de la prueba de (a).
- (c) Para $k = 1$, se sigue de 3.59(a). Para ver que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(i(A), i(A')) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(A, A') \forall A, A' \in \mathcal{A}, \forall k > 1$ recurrimos al lema del corrimiento. En efecto, dado $A \in \mathcal{A}$, utilizando (a) podemos construir una sucesión exacta en $\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow i(A_k) \rightarrow i(P_k) \xrightarrow{f_{k-1}} \dots \xrightarrow{f_1} i(P_1) \rightarrow i(A) \rightarrow 0$$

donde $i(P_j) \in i(\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C}) \forall j \in [1, n]$, $A_k \in \mathcal{A}$ y $i(A_j) := \text{Im}(f_j) \in i(\mathcal{A}) \forall j \in [1, k-1]$. Así que, por el lema del corrimiento A.76 y 3.59(a), tenemos

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(i(A), i(A')) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(i(A_k), i(A')) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A_k, A') \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(A, A') \forall k \geq 0.$$

(d) En efecto, por (c) tenemos que

$$\begin{aligned} i(\mathcal{Z})^\perp \cap i(\mathcal{A}) &= \{i(A) \in i(\mathcal{A}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(i(\mathcal{Z}), i(A)) = 0 \forall k \geq 1\} \\ &= \{i(A) \in i(\mathcal{A}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{Z}, A) = 0 \forall k \geq 1\} \\ &= i(\mathcal{Z}^{\perp_{\mathcal{E}}}). \end{aligned}$$

Análogamente, se sigue por (c) que $i({}^{\perp_{\mathcal{E}}}\mathcal{Z}) = {}^{\perp}i(\mathcal{Z}) \cap i(\mathcal{A})$.

□

Lema 3.61. Sean $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor fiel y pleno y $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$ tales que $[\mathcal{X}] = \mathcal{X}$ y $[\mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$. Si $[F(\mathcal{X})] = [F(\mathcal{Y})]$, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{X}$. Luego, como $F(X) \in [F(\mathcal{X})] = [F(\mathcal{Y})]$, existe $Y \in \mathcal{Y}$ tal que $F(X) \cong F(Y)$. Ahora, como $F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y))$ es un isomorfismo, se sigue que $X \cong Y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Análogamente, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. □

Teorema 3.62. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta completa por idempotentes, con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos sumergida en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vía $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, tal que $i(\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq \text{Proj}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes para $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$.

(b) $[i(\mathcal{T})]$ es una clase n - $[i(\mathcal{A})]$ -tilting pequeña en $\mathcal{C}$.

Demostración. Sea $\mathcal{T}' := [i(\mathcal{T})]$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Veamos que se verifican las condiciones para que $\mathcal{T}'$ sea una clase n - $[i(\mathcal{A})]$ -tilting pequeña en $\mathcal{C}$.

(T0) Dado que $\text{add}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, por 3.58, se sigue que $\text{add}(\mathcal{T}') = \mathcal{T}'$.

(T1) Por 3.60(c) y (TEC1), tenemos que para $T \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \text{pd}_{i(\mathcal{A})}(i(T)) &= \min \{n \geq 0 \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(i(T), i(\mathcal{A})) = 0 \forall k > n\} \\ &= \min \{n \geq 0 \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(T, \mathcal{A}) = 0 \forall k > n\} \\ &= \text{pd}_{\mathcal{E}}(T) \leq n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{pd}_{[i(\mathcal{A})]}(\mathcal{T}') = \text{pd}_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}) \leq n$.

(T2) Por (TEC2) tenemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}$. Luego, como $i(\mathcal{T})^\perp = \mathcal{T}'^\perp$, utilizando 3.60(d) se sigue que $i(\mathcal{T}) \subseteq i(\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}}}) = i(\mathcal{T})^\perp \cap i(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}'^\perp \cap [i(\mathcal{A})]$. Por lo tanto, $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}'^\perp \cap [i(\mathcal{A})]$.

(T3) Por (TEC3) existe un ω $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{A}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\vee}$. Note que $i(\omega)$ es un generador relativo en $i(\mathcal{A})$. Luego, como i es un funtor exacto, tenemos que

$$i(\omega) \subseteq i(\mathcal{T}_{n,\mathcal{E}}^{\vee}) \subseteq (i(\mathcal{T}))_{i(\mathcal{A})}^{\vee} \subseteq \mathcal{T}'_{[i(\mathcal{A})]}^{\vee}.$$

(T4) Por 3.60(b) sabemos que $i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}))$ es un cogenerador $i(\mathcal{A})$ -inyectivo relativo en $i(\mathcal{A})$, y como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$, se sigue de 3.60(d) que

$$i(\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})) \subseteq i(\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}) = i(\mathcal{T})^{\perp} \cap i(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}^{\perp} \cap [i(\mathcal{A})].$$

(T5) Por (TEC4), sabemos que todo objeto de $\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}$ admite una $\mathcal{T}$ -precubierta. Entonces, como i es un funtor pleno se sigue que todo objeto de $i(\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}})$ admite una $i(\mathcal{T})$ -precubierta. Note que $\mathcal{T}' \subseteq [i(\mathcal{A})]$. Sea $X \in \mathcal{T}'^{\perp} \cap [i(\mathcal{A})]$. Luego, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $X \cong i(A)$. Ahora, como $\mathcal{T}'^{\perp} = i(\mathcal{T})^{\perp}$, se tiene por 3.60(d) que

$$i(A) \in i(\mathcal{T})^{\perp} \cap i(\mathcal{A}) = i(\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}) \cap i(\mathcal{A}).$$

Por lo tanto, $i(\mathcal{A})$ admite una $i(\mathcal{T})$ -precubierta. Así que, como $X \cong i(A)$, concluimos que X admite una $\mathcal{T}'$ -precubierta.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por 3.56, es suficiente mostrar que $\mathcal{T}$ es n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ y que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}$. Primeramente notemos que por 3.41 y por definición, $[i(\mathcal{A})]$ es cerrado por extensiones y sumandos directos. Sea $m := \max\{1, n\}$. Por 2.25, tenemos que $\text{gen}_m^{[i(\mathcal{A})]}(\mathcal{T}') \cap [i(\mathcal{A})] = \mathcal{T}'^{\perp} \cap [i(\mathcal{A})]$. Luego, por 3.58 y 3.60(d), se sigue que

$$[i(\text{Pres}_{\mathcal{E}}^m(\mathcal{T}))] = \text{gen}_m^{[i(\mathcal{A})]}(i(\mathcal{T})) \cap [i(\mathcal{A})] = i(\mathcal{T}^{\perp}) \cap [i(\mathcal{A})] = [i(\mathcal{T})^{\perp} \cap i(\mathcal{A})] = [i(\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}})].$$

Así que, por 3.61, podemos concluir que $\text{Pres}_{\mathcal{E}}^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}$. Luego, por 3.52, tenemos que $\mathcal{T}$ es n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. Veamos finalmente que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}$. En efecto, por 2.2(T5), sabemos que todo objeto de $X \in [i(\mathcal{T})]^{\perp} \cap [i(\mathcal{A})]$ admite una $[i(\mathcal{T})]$ -precubierta. Entonces, como $[i(\mathcal{T})]^{\perp} \cap [i(\mathcal{A})] = [i(\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}})]$ por 3.60(d), e i es un funtor pleno, esto quiere decir que todo objeto de $\mathcal{T}^{\perp\mathcal{E}}$ admite una $\mathcal{T}$ -precubierta. Por lo tanto, de 3.52 podemos concluir lo deseado. $\square$

Lema 3.63. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta esqueléticamente pequeña con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{P} := \text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$. Entonces, el funtor

$$i : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{P}^{op}), X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)|_{\mathcal{P}},$$

es aditivo, fiel, pleno, exacto, refleja exactitud y $i(\mathcal{P}) \subseteq \text{Proj}(\text{Mod}(\mathcal{P}^{op}))$.

Demostración. Se sigue de [Eno17, Proposition 2.1]. $\square$

Corolario 3.64. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta esqueléticamente pequeña que es completa por idempotentes y tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos y $\mathcal{E}$ -inyectivos. Entonces, usando la inclusión $i : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$, dada por 3.63, las siguientes condiciones son equivalentes para una clase $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$:

- (a) $\mathcal{T}$ es n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$;
- (b) $[i(\mathcal{T})]$ es n - $[i(\mathcal{A})]$ -tilting pequeña en $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$.

Demostración. Se sigue de 3.63 y 3.62. □

3.5. La teoría tilting relativa de S. K. Mohamed

A continuación presentamos un tipo de categoría exacta considerada por Soud Khalifa Mohamed. Los objetos n -tilting Auslander-Solberg, asociados a dicha categoría fueron estudiados por primera vez en [Moh09]. Comenzaremos reformulando algunos resultados de este trabajo.

Proposición 3.65. [AS93a, Proposition 1.7]/[Moh09, Proposition 2.2]/[Moh09, Proposition 2.4]/[AS93a, p.2998] Sean Λ una álgebra de Artin, $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ una clase de objetos funtorialmente finita y cerrada por extensiones, $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ un generador relativo en $\mathcal{C}$ y precubriente en $\mathcal{C}$. Consideremos la clase $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ de sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$ en $\text{mod}(\Lambda)$ tales que $\text{Hom}_{\Lambda}(X, f)$ es sobreyectivo $\forall X \in \mathcal{X}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $\overline{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}} := \{\bar{\eta} \mid \eta \in \mathcal{E}_{\mathcal{X}}\}$ es un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$;
- (b) para toda sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$ en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ con $B, C \in \mathcal{C}$, se tiene que $A \in \mathcal{C}$;
- (c) $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ es una categoría exacta esqueléticamente pequeña, donde

$$\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}} := \{\eta \in \mathcal{E}_{\mathcal{X}}(X, Y) \mid X, Y \in \mathcal{C}\};$$

- (d) Si $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}) := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Hom}_{\Lambda}(\eta, X) \text{ es exacta } \forall \eta \in \mathcal{E}_{\mathcal{X}}\}$ es preenvolvente en $\mathcal{C}$, entonces existen suficientes $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ -inyectivos en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$;
- (e) $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ tiene suficientes $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ -proyectivos y $\mathcal{X} = \text{Proj}_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{C})$.

Demostración.

- (a) Ver [AS93a, Proposition 1.7].
- (b) Se sigue de [Moh09, Proposition 2.2].

(c) En efecto, como $0 \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrada por extensiones en $\text{mod}(\Lambda)$, se sigue que $\mathcal{C}$ es una subcategoría aditiva plena de $\text{mod}(\Lambda)$.

(E0) Por definición, es claro que $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ contiene a las sucesiones exactas cortas que se escinden. En particular, podemos afirmar que 1_C es un mono admisible y un epi admisible en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}} \forall C \in \mathcal{C}$.

(E1) Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ epis admisibles en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$. En este caso, por definición tenemos que $\text{Hom}_{\Lambda}(X, f)$ y $\text{Hom}_{\Lambda}(X, g)$ son sobreyectivas $\forall X \in \mathcal{X}$. Entonces, gf es un epi admisible en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ debido a que

$$\text{Hom}_{\Lambda}(X, gf) = \text{Hom}_{\Lambda}(X, g)\text{Hom}_{\Lambda}(X, f)$$

es sobreyectiva.

Veamos ahora que la composición de monos admisibles en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ es un mono admisible. Consideremos sucesiones exactas cortas en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow B \xrightarrow{a} D \xrightarrow{b} E \rightarrow 0 \text{ y} \\ 0 \rightarrow A \xrightarrow{c} B \xrightarrow{d} C \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{ac} D \xrightarrow{e} P \rightarrow 0$$

también pertenece a $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$.

Para ello basta observar que al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\Lambda}(X, -)$, con $X \in \mathcal{X}$, a las columnas del diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{c} & B & \xrightarrow{d} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow a & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{ac} & D & \xrightarrow{e} & P \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow b & & \downarrow \\ & & & & E & = & E \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(X, B) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(X, D) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(X, E) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow (X, d) & & \downarrow (X, e) & & \downarrow (X, 1) \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(X, C) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(X, P) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(X, E) \rightarrow 0 \end{array}$$

Observamos que $\text{Hom}_{\Lambda}(X, d)$ y $\text{Hom}_{\Lambda}(X, 1)$ son epimorfismos. Así que, por el Lema del 5 corto [ML98, Chapter VIII. Section 4. Lemma 1], podemos concluir que $\text{Hom}_{\Lambda}(X, e)$ es un epimorfismo, para todo $X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, la composición ac es un mono admisible en $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$.

(E2) Se sigue de (a), ver [AS93a, p.2998] para los detalles.

(d) Se sigue de [Moh09, Proposition 2.4].

- (e) Se sigue de (b) y de que $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ es un generador relativo en $\mathcal{C}$ y precubriente en $\mathcal{C}$.

□

Con las consideraciones enunciadas en la proposición anterior, el contexto de categoría exacta considerado por S.K. Mohamed es el siguiente.

Definición 3.66. [Moh09, Section 4] Sea Λ una álgebra de Artin. Un **contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$** es un par $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ de clases de objetos en $\text{mod}(\Lambda)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- (MC1) $\mathcal{C}$ es funtorialmente finita y cerrada por extensiones;
- (MC2) $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ es un generador relativo en $\mathcal{C}$ y precubriente en $\mathcal{C}$;
- (MC3) $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})$ es preenvolvente en $\mathcal{C}$.

El siguiente resultado de Maurice Auslander y Sverre Olaf Smalø nos será de utilidad. Para ello recordamos que $\mathcal{A} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$, con Λ una k -álgebra de Artin, es **de tipo finito** si $\text{add}(\mathcal{A}) = \text{add}(A)$ para algún $A \in \text{mod}(\Lambda)$.

Proposición 3.67. [AS80, Proposition 4.2] Sea $\mathcal{A} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ de tipo finito, con Λ una k -álgebra de Artin. Entonces, $\mathcal{A}$ es funtorialmente finita en $\text{mod}(\Lambda)$. En particular, $\text{add}(\mathcal{X})$ es funtorialmente finita en $\text{mod}(\Lambda)$, para todo $X \in \text{mod}(\Lambda)$.

Observación 3.68. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$. Notamos lo siguiente.

- (1) Por 3.65, $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ es una categoría exacta esqueléticamente pequeña, con suficientes $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ -proyectivos y $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ -inyectivos, y $\text{Proj}_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$.
- (2) En general, la inclusión $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$ no refleja la exactitud. De modo que $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ no siempre está sumergida en $\text{mod}(\Lambda)$ vía la inclusión $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$. Por ejemplo, consideremos $\Lambda := \mathbb{R}[x]/\langle x^4 \rangle$, $M = {}_{\Lambda}\Lambda$, $N := x^2M$ y $K := N/x^2N$. Sean $\mathcal{C} := \text{mod}(\Lambda)$ y $\mathcal{X} := \text{add}(M \oplus K)$. Por 3.67, se sigue que $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ es un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$. Notemos que la sucesión exacta corta natural

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$$

no pertenece a $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}$ debido a que no se escinde.

Lema 3.69. [Eno17, Proposition 2.1, Proposition 2.8] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta esqueléticamente pequeña con suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos, $\mathcal{P} := \text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ y $\text{proj}(\mathcal{P}^{op})$ la clase de objetos proyectivos finitamente generados en $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) el funtor aditivo $i : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$, $A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)|_{\mathcal{P}}$, es fiel, pleno, exacto y refleja exactitud;
- (b) $[i(\mathcal{P})] \subseteq \text{Proj}(\text{Mod}(\mathcal{P}^{op}))$;
- (c) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(X, Y) \cong \text{Ext}_{\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})}^k(i(X), i(Y)) \quad \forall k \geq 1$;
- (d) $\text{proj}(\mathcal{P}^{op}) = \text{add}(i(\mathcal{A}))$.

El siguiente lema nos ayuda a caracterizar cuándo una clase $\mathcal{A} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$, con Λ una k -álgebra de Artin, es cerrada por sumandos directos.

Lema 3.70. Sean Λ una álgebra de Artin y $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$. Consideramos la categoría $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$, donde $\mathcal{P} := \text{Proj}_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$, y el funtor de Yoneda $i : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$, $C \mapsto \text{Hom}_{\Lambda}(-, C)|_{\mathcal{P}}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\mathcal{C} = \text{smd}(\mathcal{C})$ en $\text{mod}(\Lambda)$;
- (b) $\mathcal{C}$ es completa por idempotentes;
- (c) $[i(\mathcal{C})] = \text{smd}(i(\mathcal{C}))$ en $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$.

Demostración. Note primero que $\mathcal{C}$ es una subcategoría aditiva de $\text{mod}(\Lambda)$ cerrada por isomorfismos y $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ es una categoría exacta. Luego, por 3.41 tenemos la equivalencia entre (b) y (c).

(a) $\Rightarrow$ (b) Se sigue inmediatamente de que $\mathcal{C}$ es una subcategoría aditiva plena de $\text{mod}(\Lambda)$, cerrada por isomorfismos, y de que los idempotentes en $\text{mod}(\Lambda)$ se escinden.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se prueba de manera similar a 3.41. En efecto, sean $C \in \mathcal{C}$ y $C = X \oplus Y$ en $\text{mod}(\Lambda)$. Consideramos el morfismo idempotente $e = \mu\pi$, donde $\mu : X \rightarrow C$ y $\pi : C \rightarrow X$ son la inclusión y la proyección natural, respectivamente. Ahora, por 3.32 existe una sucesión exacta que se escinde en $\text{mod}(\Lambda)$

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{k} C \xrightarrow{j} I \rightarrow 0,$$

donde k es el núcleo de e y $K \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $X \cong K$ y así $\mathcal{C}$ es cerrado por sumandos directos. $\square$

Corolario 3.71. Sean Λ una k -álgebra de Artin y $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$. Consideremos la categoría exacta $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ (ver 3.65), $\mathcal{P} := \text{Proj}_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$ y el funtor $i : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$, $C \mapsto \text{Hom}_{\Lambda}(-, C)|_{\mathcal{P}}$. Entonces, para $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $m := \max\{1, n\}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ tal que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}}$.

- (b) $[i(\mathcal{T})]$ es una clase n - $[i(\mathcal{C})]$ -tilting pequeña en $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$.
- (c) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$ tal que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}}$.
- (d) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting pequeña en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$.
- (e) $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}}$ y $\text{Pres}_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}}$.

Demostración. Se sigue de 3.56, 3.57, 3.69, 3.70 y 3.62. □

Corolario 3.72. Sean Λ una k -álgebra de Artin, $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$, $T \in \text{mod}(\Lambda)$, $n \in \mathbb{N}$ y $m := \max\{1, n\}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) T es un objeto n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$.
- (b) $i(T)$ es un objeto n - $[i(\mathcal{C})]$ -tilting pequeño en $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$.
- (c) T es un objeto n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$.
- (d) T es un objeto n -tilting pequeño en $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}})$.
- (e) $\text{Pres}_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}^m(\text{add}(T)) = T^{\perp_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}}$.

Demostración. Se sigue de 3.71 ya que si consideramos en 3.71 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ de la forma $\mathcal{T} = \text{add}(T)$, con $T \in \mathcal{C}$, automáticamente $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{C}}}}$ (ver 3.67). □

En lo que sigue, hablaremos un poco sobre un concepto precursor del trabajo de S. K. Mohamed que abordamos antes. Dicho concepto es la teoría tilting relativa a un subfunctor del $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ desarrollada por Maurice Auslander y Øyvind Solberg en [AS93b]. Dicho concepto es un caso particular de la teoría desarrollada por S. K. Mohamed. Veremos a continuación cómo se pueden construir contextos de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$ asociados a subfuntores aditivos de $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$.

Comenzaremos recordando algunas definiciones y hechos del trabajo de Auslander y Solberg.

Definición 3.73. [AS93a, Section 1] Sean Λ un álgebra de Artin y F un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$.

- (a) Diremos que una sucesión exacta $\eta : 0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$ en $\text{mod}(\Lambda)$ es **F -exacta** si $\bar{\eta} \in F(K, N)$.

- (b) Diremos que un objeto $P \in \text{mod}(\Lambda)$ es **F -proyectivo** si para toda sucesión F -exacta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$, se tiene que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, N) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, M) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, K) \rightarrow 0$$

es exacta.

- (c) Diremos que un objeto $I \in \text{mod}(\Lambda)$ es **F -inyectivo** si para toda sucesión F -exacta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$, se tiene que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(K, I) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, I) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(N, I) \rightarrow 0$$

es exacta.

- (d) Denotaremos como $\mathcal{P}(F)$ a la clase de Λ -módulos F -proyectivos.
 (e) Denotaremos como $\mathcal{I}(F)$ a la clase de Λ -módulos F -inyectivos.
 (f) Diremos que F tiene **suficientes proyectivos** si para todo $M \in \text{mod}(\Lambda)$ existe una sucesión F -exacta $0 \rightarrow M' \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ con $P \in \mathcal{P}(F)$.
 (g) Diremos que F tiene **suficientes inyectivos** si para todo $M \in \text{mod}(\Lambda)$ existe una sucesión F -exacta $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow M' \rightarrow 0$ con $I \in \mathcal{I}(F)$.
 (h) Sea $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$. Para cada $A, C \in \text{mod}(\Lambda)$ se define $F_{\mathcal{X}}(C, A)$ como el grupo de extensiones $\bar{\eta} \in \text{Ext}_\Lambda^1(C, A)$, con $\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, tales que $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}, B) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}, C) \rightarrow 0$ es exacta. Dualmente, $F^{\mathcal{X}}(C, A)$ es el grupo de extensiones $\bar{\eta} \in \text{Ext}_\Lambda^1(C, A)$, con $\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, tales que $\text{Hom}_\Lambda(B, \mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, \mathcal{X}) \rightarrow 0$ es exacta.

En lo que sigue, reuniremos una serie de hechos básicos de la teoría desarrollada en [AS93a].

Proposición 3.74. *Sean Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$.*

- (a) [AS93a, Proposition 1.7] $F_{\mathcal{X}}$ y $F^{\mathcal{X}}$ son subfuntores aditivos de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$.
 (b) [AS93a, Section 1, p.2998] Sea F un subfuntor aditivo de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$. Si η es F -exacta y $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, K)$ y $g \in \text{Hom}_\Lambda(N, Y)$, entonces ηf y $g\eta$ son F -exactas.
 (c) [AS93a, Section 1, p.3001] La correspondencia $F \mapsto \mathcal{P}(F)$ es una biyección entre subfuntores aditivos de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ con suficientes proyectivos y clases pre-cubrientes $\mathcal{X}$ en $\text{mod}(\Lambda)$ tales que $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$.
 (d) [AS93a, Section 1, p.3001] La correspondencia $F \mapsto \mathcal{I}(F)$ es una biyección entre subfuntores aditivos de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ con suficientes inyectivos y subcategorías preenvolventes $\mathcal{X}$ en $\text{mod}(\Lambda)$ tales que $\text{inj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$.
 (e) [AS93a, Proposition 1.10, Corollary 1.13] Sea $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ tal que $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$. Entonces, $F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos si, y sólo si, $\mathcal{X}$ es funtorialmente finita.

- (f) Sean F un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ con suficientes proyectivos y $\mathcal{E}_F$ la clase de sucesiones F -exactas. Entonces, $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ es una categoría exacta. Más aún, $\text{Proj}_{\mathcal{E}_F}(\text{mod}(\Lambda)) = \mathcal{P}(F)$ y $\text{Inj}_{\mathcal{E}_F}(\text{mod}(\Lambda)) = \mathcal{I}(F)$.

Observación 3.75. El inciso (d) de 3.74 se puede justificar como un caso particular de 3.65(c). Sin embargo, cabe preguntarse cuáles son las condiciones mínimas sobre F para que $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ sea una categoría exacta, con Λ una k -álgebra de Artin. La respuesta a esta cuestión es respondida, en [DRS⁺99], por: Peter Dräxler, Idun Reiten, Sverre Smalø, Øyvind Solberg y Bernhard Keller. La incluimos a continuación.

Proposición 3.76. [DRS⁺99, Proposition 1.4] Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta, F un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^1(-, -)$ y $\mathcal{E}_F$ la clase de sucesiones exactas cortas $\eta \in \mathcal{E}$ tales que $\bar{\eta} \in F(X, Y)$ para determinados $X, Y \in \mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $(\mathcal{A}, \mathcal{E}_F)$ es una categoría exacta;
- (b) F es cerrado a izquierda, es decir, la sucesión

$$F(C, X) \rightarrow F(B, X) \rightarrow F(A, X)$$

es exacta para toda $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ F -exacta y $\forall X \in \mathcal{A}$;

- (c) F es cerrado a derecha, es decir, la sucesión

$$F(X, A) \rightarrow F(X, B) \rightarrow F(X, C)$$

es exacta para toda $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ F -exacta y $\forall X \in \mathcal{A}$;

- (d) F es cerrado a derecha y a izquierda.

Proposición 3.77. Para una k -álgebra de Artin Λ y un subfunctor aditivo F de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) F tiene suficientes proyectivos e injectivos si, y sólo si, $\mathcal{P}(F)$ es funtorialmente finita y $F = F_{\mathcal{P}(F)}$.
- (b) Sea F con suficientes proyectivos e injectivos. Entonces, el par $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{P}(F))$ es un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$ y $\mathcal{E}_{\mathcal{P}(F)}^{\text{mod}(\Lambda)} = \mathcal{E}_F$.

Demostración.

- (a) Se sigue de [AS93a, Corollary 1.13].
- (b) Por (a), tenemos que F tiene suficientes proyectivos e injectivos y $F = F_{\mathcal{P}(F)}$. En particular, $\mathcal{E}_{\mathcal{P}(F)}^{\text{mod}(\Lambda)} = \mathcal{E}_F$.

□

Tenemos las siguientes equivalencias.

Corolario 3.78. Sean Λ una álgebra de Artin, F un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ con suficientes proyectivos e inyectivos, $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$, $n \in \mathbb{N}$ y $m := \max\{1, n\}$. Consideramos el funtor de Yoneda $i : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$, $M \mapsto \text{Hom}_\Lambda(-, M)|_{\mathcal{P}}$, donde $\mathcal{P} := \mathcal{P}(F)$. Entonces, $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ es una categoría exacta con suficientes $\mathcal{E}_F$ -proyectivos y $\mathcal{E}_F$ -inyectivos y los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Auslander-Solberg en $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ y precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_F}}$;
- (b) $[i(\mathcal{T})]$ es una clase n - $[i(\text{mod}(\Lambda))]$ -tilting pequeña en $\text{Mod}(\mathcal{P}^{op})$;
- (c) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting Zhu-Zhuang en $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ y es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_F}}$;
- (d) $\mathcal{T}$ es una clase n -tilting pequeña en $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$;
- (e) $\text{Pres}_{\mathcal{E}_F}^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_F}}$ y $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_{\mathcal{E}_F}}$.

Demostración. Se sigue de 3.71 ya que, por 3.77, el par $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{P}(F))$ es un contexto de Mohamed en $\text{mod}(\Lambda)$ y $\mathcal{E}_{\mathcal{P}(F)}^{\text{mod}(\Lambda)} = \mathcal{E}_F$. $\square$

Corolario 3.79. Sean Λ una álgebra de Artin, F un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ con suficientes proyectivos e inyectivos, $T \in \text{mod}(\Lambda)$, $n \in \mathbb{N}$ y $m = \max\{1, n\}$. Entonces, $T \in \text{mod}(\Lambda)$ es n -tilting de Auslander-Solberg en $(\text{mod}(\Lambda), \mathcal{E}_F)$ si, y sólo si, $T^{\perp_{\mathcal{E}_F}} = \text{Pres}_{\mathcal{E}_F}^m(\text{add}(T))$.

Demostración. Se sigue de 3.78 y de que $\text{add}(T)$ es precubriente para todo $T \in \text{mod}(\Lambda)$. $\square$

Observación 3.80.

- (a) Note que [Wei10, Theorem 3.10] es un caso particular de 3.79. En efecto, J. Wei pide que F sea un subfunctor aditivo de $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ con suficientes proyectivos tal que $\mathcal{P}(F)$ sea de tipo finito. Esto implica que F tenga suficientes proyectivos e inyectivos por [AS93a, Theorem 1.12], [AS93a, Corollary 1.13] y [AS80, Proposition 4.2].
- (b) Para un ejemplo donde se puede utilizar 3.79 pero no [Wei10, Theorem 3.10] recomendamos ver [Rin91] y [EMM10]. En efecto, en [Rin91, Theorem 3] se prueba que si Λ es un álgebra quasi-hereditaria, entonces $\mathcal{F}(\Delta)$, la clase de Λ -módulos finitamente generados filtrados por los módulos estándar, es una clase resolvente. Así que, en este caso, podemos afirmar que $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{F}(\Delta) = \text{add}(\mathcal{F}(\Delta))$. Más aún, en [Rin91, Theorem 1] se prueba que $\mathcal{F}(\Delta)$ es funtorialmente finita. Por lo tanto, $F_{\mathcal{F}(\Delta)}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos por 3.74(e). Ahora, para el ejemplo buscado necesitamos una k -álgebra Λ tal que $\mathcal{P}(F_{\mathcal{F}(\Delta)}) = \mathcal{F}(\Delta)$ no sea de tipo finito, la cual se puede encontrar en [EMM10, Section 3.5].

3.6. Clases tilting en categorías de funtores

Desde principios de la década del 2010, Roberto Martínez Villa y Martín Ortiz Morales iniciaron una serie de trabajos con el objetivo de extender la teoría tilting a categorías de funtores [MVOM11, MVOM13, MVOM14]. En las siguientes líneas veremos cómo dichos objetos tilting se pueden ajustar a la definición de n - $\mathcal{X}$ -tilting. Comenzaremos siguiendo los pasos de Maurice Auslander en [Aus74].

En esta sección, $\mathcal{C}$ denotará una **categoría aditiva esqueléticamente pequeña** y $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ denotará a la categoría de funtores aditivos contravariantes de $\mathcal{C}$ en la categoría Ab de grupos abelianos.

Lema 3.81. [Aus74, Proposition 2.1.(b), p.186] *Un objeto $F \in \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es finitamente generado si, y sólo si, existe un epimorfismo $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_i) \rightarrow F$, con I finito, donde $C_i \in \mathcal{C} \forall i \in I$.*

Definición 3.82. [Aus74, Section 2, pp.187] Diremos que un objeto $F \in \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \rightarrow F \rightarrow 0$$

donde $C, C' \in \mathcal{C}$. Más aún, denotaremos por f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ a la **subcategoría de objetos finitamente presentados** de $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$. Cabe observar que una notación comúnmente utilizada para esta clase es $\text{mod}(\mathcal{C}^{op})$.

Proposición 3.83. [Aus74, Section 2, pp.184-185] *Se tienen las siguientes propiedades en $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$.*

- (a) *Una sucesión $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$ es exacta en $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ si, y sólo si, la sucesión $M_1(C) \rightarrow M_2(C) \rightarrow M_3(C)$ es exacta en Ab , para todo $C \in \mathcal{C}$.*
- (b) *$\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una categoría abeliana con coproductos y productos arbitrarios. De hecho, $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una categoría Ab5 . Esto es, una categoría Ab3 tal que los límites filtrados son exactos. Cabe señalar que esta condición implica que $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es Ab4 [Pop73, Chapter 2. Corollary 8.9].*
- (c) *Un objeto $P \in \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es proyectivo si, y sólo si, P es sumando directo de un coproducto $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_i)$, donde $C_i \in \mathcal{C} \forall i \in I$.*
- (d) *Para todo $M \in \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ existe un conjunto $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$ y un epimorfismo $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_i) \rightarrow M$. Por lo tanto, $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ tiene suficientes proyectivos.*

Podemos además afirmar que $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ tiene suficientes inyectivos.

Lema 3.84. [MVOM14, Lemma 2] *La categoría $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ tiene suficientes objetos inyectivos.*

Definición 3.85. [Aus74, Section 2, p.187] Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña. Denotaremos como $\text{proj}(\mathcal{C}^{op})$ a la **subcategoría de objetos proyectivos finitamente generados** en $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$. Cabe señalar que en algunas fuentes bibliográficas, incluyendo los trabajos de R. Martínez Villa y M. Ortiz Morales, se utiliza la notación $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

Definición 3.86. [Aus74, Section 2, pp.188] Una **variedad de annuli** es una categoría aditiva esqueléticamente pequeña $\mathcal{C}$ en la cual los idempotentes se escinden.

Proposición 3.87. [Aus74, Proposition 2.2, Proposition 2.5] Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $\text{proj}(\mathcal{C}^{op})$ es una variedad de annuli;
- (b) $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es equivalente a $\text{Mod}(\text{proj}(\mathcal{C}^{op}))$.

Observemos que la proposición anterior nos da la libertad de suponer que $\mathcal{C}$ es una variedad de annuli al estudiar la categoría $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$.

Definición 3.88. [MVOM14, Definition 8] Sea $\mathcal{C}$ una variedad de annuli. Diremos que $\mathcal{T} \subseteq \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una **categoría tilting** si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (FT0) $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T}) \subseteq \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$;
- (FT1) $\text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$;
- (FT2) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_1}$;
- (FT3) $\text{coresdim}_{\mathcal{T}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)) \leq 1 \ \forall C \in \mathcal{C}$.

Diremos que un objeto $T \in \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es un **functor tilting grande (pequeño)** si $\text{Add}(T)$ ($\text{add}(T)$) es una categoría tilting.

Cabe mencionar el siguiente resultado.

Proposición 3.89. Sean $\mathcal{C}$ una variedad de annuli y $\mathcal{T}$ una categoría tilting en $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$. Entonces, $\text{Gen}_1(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp}$ y $\text{gen}_1(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp} \cap \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$.

Demostración. La primer igualdad se sigue de [MVOM14, Proposition 10] usando que $\text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$. La segunda se sigue de la primera usando 2.47 y 3.81. $\square$

Teorema 3.90. Sean $\mathcal{C}$ una variedad de annuli y $\mathcal{T} \subseteq \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase 1- $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ -tilting grande;
- (b) $\mathcal{T}$ es una subcategoría tilting tal que $\mathcal{T} = \text{Add}(\mathcal{T})$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_1}$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $\mathcal{T}$ es una clase 1-Mod($\mathcal{C}^{op}$)-tilting grande. En particular, $\mathcal{T} = \text{Add}(\mathcal{T})$; y por (T5), se sigue que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_1} = \mathcal{T}^{\perp}$. Ahora, por 2.2(T1) se sigue 3.88(FT1); por 2.2(T2) se sigue 3.88(FT2), pues $\mathcal{T}^{\perp_1} = \mathcal{T}^{\perp}$ debido a que $\text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$. Sean $\rho := \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ y $\omega := \text{Add}(\rho)$. Por 2.23(a) $\omega \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) = \mathcal{T}^{\vee}$. Luego, por 2.16, tenemos que $\text{coresdim}_{\mathcal{T}}(\omega) \leq \text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$. Por lo que, 3.88(FT3) también se satisface.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría tilting tal que $\mathcal{T} = \text{Add}(\mathcal{T})$ y es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp}$. Por 3.84 tenemos que $\mathcal{T}$ satisface (T4), con respecto a Mod($\mathcal{C}^{op}$). Además, $\mathcal{T}$ satisface (TS5), con respecto a Mod($\mathcal{C}^{op}$), ya que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp} = \mathcal{T}^{\perp_1}$ por hipótesis. Finalmente, como $\mathcal{T} = \text{Add}(\mathcal{T})$, tenemos por 3.89 que $\text{Fac}_1(\mathcal{T}) = \text{Gen}_1(\mathcal{T})$. Luego, concluimos que $\mathcal{T}$ es 1-Mod($\mathcal{C}^{op}$)-tilting por 2.25. $\square$

Definición 3.91. [Aus71, Section 6] Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva esqueléticamente pequeña.

- (a) Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo. Diremos que un morfismo $g : C \rightarrow A$ es un **pseudo-kernel**, o bien **núcleo débil**, de f si

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, g)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$$

es una sucesión exacta.

- (b) Sea $g : C \rightarrow A$ un morfismo. Diremos que un morfismo $f : A \rightarrow B$ es un **pseudo-cokernel**, o bien **conúcleo débil**, de f si

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, -)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(g, -)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$$

es una sucesión exacta.

- (c) Decimos que $\mathcal{C}$ **tiene pseudo-kerneles**, o bien **núcleos débiles**, si para todo morfismo en $\mathcal{C}$ existe un núcleo débil.
- (d) Decimos que $\mathcal{C}$ **tiene pseudo-cokerneles**, o bien **conúcleos débiles**, si para todo morfismo en $\mathcal{C}$ existe un conúcleo débil.

Teorema 3.92. Sean $\mathcal{C}$ una variedad de annuli que admite núcleos débiles y tal que f.p.($\mathcal{C}^{op}$) tiene suficientes inyectivos. Entonces, para $\mathcal{T} \subseteq \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase 1-f.p.($\mathcal{C}^{op}$)-tilting pequeña proj($\mathcal{C}^{op}$)-saturada;
- (b) $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$ es una subcategoría tilting precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_1} \cap \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$.

Demostración. Note que $\mathcal{T}^{\perp_1} = \mathcal{T}^{\perp}$ si $\text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$. Ahora, por [Eno17, Proposition 2.6] y [Eno17, Proposition 2.7], se sigue que f.p.($\mathcal{C}^{op}$) es una clase gruesa en Mod($\mathcal{C}^{op}$) y proj($\mathcal{C}^{op}$) es un generador relativo en f.p.($\mathcal{C}^{op}$).

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que se satisfacen las condiciones de (a). En particular, $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$; y por (T5), se sigue que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_1} \cap \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$. Ahora, por 2.2(T1) se sigue 3.88(FT1); por 2.2(T2) se sigue 3.88(FT2), pues $\mathcal{T}^{\perp_1} = \mathcal{T}^{\perp}$ debido a que $\text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$. Sean $\rho := \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ y $\omega := \text{add}(\rho)$. Por 2.23(a) $\omega \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\perp}) = \mathcal{T}^{\vee}$. Luego, por 2.16, tenemos que $\text{coresdim}_{\mathcal{T}}(\omega) \leq \text{pd}(\mathcal{T}) \leq 1$. Por lo que, 3.88(FT3) también se satisface.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que se satisfacen las hipótesis de (b). Dado que $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$ tiene suficientes inyectivos, tenemos que $\mathcal{T}$ satisface (T4), con respecto a $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$. Además, $\mathcal{T}$ satisface (TS5), con respecto a $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$, ya que $\mathcal{T}$ es precubriente en $\mathcal{T}^{\perp_1} \cap \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$ y $\mathcal{T}^{\perp} = \mathcal{T}^{\perp_1}$. Finalmente, como $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$, tenemos por 3.89 que $\text{Fac}_1(\mathcal{T}) \cap \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op}) = \text{gen}_1(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp} \cap \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$. Luego, concluimos (a) por 2.25. $\square$

Recordamos que (ver [AR74, p.307]) una R -variedad dualizante es una R -categoría $\mathcal{C}$, con R un anillo artiniiano, tal que $\mathcal{C}$ es una variedad de annuli en la que el funtor $D : \text{f.p.}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$, dado por $D(M)(X) = \text{Hom}_R(M(X), I_0(\text{top}(R)))$, es una dualidad de categorías.

Proposición 3.93. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña con pseudo-kerneles. Entonces, $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op}) = (\text{proj}(\mathcal{C}^{op}))_{\infty}^{\wedge}$ y es una subcategoría gruesa de $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$.*

Demostración. Se sigue de [Eno17, Proposition 2.6, Proposition 2.7]. $\square$

Lema 3.94. *Sea $\mathcal{C}$ una R -variedad dualizante tal que $\mathcal{C}$ tiene núcleos y conúcleos débiles. Entonces, $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op}) = (\text{proj}(\mathcal{C}^{op}))_{\infty}^{\wedge}$ y es una subcategoría abeliana gruesa de $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ que tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Aplicando 3.93 a $\mathcal{C}$, se tiene que $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op}) = (\text{proj}(\mathcal{C}^{op}))_{\infty}^{\wedge}$ y es una subcategoría abeliana gruesa de $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$. Aplicando 3.93 a $\mathcal{C}^{op}$, se tiene que $\text{f.p.}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C})_{\infty}^{\wedge}$ tiene suficientes proyectivos. Luego, por la dualidad $D : \text{f.p.}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$, se tiene que $\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})$ tiene suficientes inyectivos. $\square$

En [MVOM13], R. Martínez Villa y M. Ortiz Morales continuaron desarrollando una teoría tilting en categorías de funtores y presentaron la siguiente definición.

Definición 3.95. [MVOM13, Definition 6] Sean $\mathcal{C}$ una variedad de annuli y $\mathcal{T} \subseteq \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ una subcategoría plena. Diremos que $\mathcal{T}$ es una **subcategoría n -tilting generalizada** si satisface las siguientes condiciones:

- (FGT0) $\mathcal{T} = \text{smd}(\mathcal{T})$;
- (FGT1) $\mathcal{T} \subseteq (\text{proj}(\mathcal{C}^{op}))_n^{\wedge}$;
- (FGT2) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp}$;
- (FGT3) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \in \mathcal{T}^{\vee} \forall C \in \mathcal{C}$.

Diremos que un objeto $T \in \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es un **functor tilting pequeño (grande) generalizado** si $\text{add}(T)$ ($\text{Add}(T)$) es una subcategoría tilting generalizada.

Nuestro objetivo, para finalizar esta sección, será encontrar una generalización del teorema anterior para esta definición. Para ello, nos serán de utilidad los siguientes resultados.

Proposición 3.96. [MVOM13, Proposition 6, Proposition 7] Sea $\mathcal{C}$ una variedad de annuli con pseudo-kerneles y $\mathcal{T} \subseteq \text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ una subcategoría tilting generalizada. Entonces, $\mathcal{T}$ tiene pseudo-kerneles si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es precubriente en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$.

Proposición 3.97. [BGP19, Proposition C.1.(2)] Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña con pseudo-kerneles. Entonces, todo objeto $X \in \text{f. p.}(\mathcal{C}^{op})$ admite una sucesión exacta infinita de la forma

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C'_n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C'_{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C'_0) \rightarrow X \rightarrow 0,$$

donde $C'_i \in \mathcal{C} \forall i \geq 0$. En particular, podemos afirmar que $\{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ es un generador f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -proyectivo relativo en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$.

Proposición 3.98. [Aus74, Proposition 2.1(c)] Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña. Entonces, los funtores finitamente generados son compactos.

Proposición 3.99. [MVOM13, Corollary 2] Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña. Entonces, para todo $n > 0$, $\text{Ext}_{\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})}^n(M, -)$ conmuta con coproductos $\forall M \in (\text{proj}(\mathcal{C}^{op}))_{\infty}^{\wedge}$.

Corolario 3.100. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña con pseudo-kerneles. Entonces, $\text{Ext}_{\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})}^n(M, -)$ conmuta con coproductos $\forall M \in \text{f. p.}(\mathcal{C}^{op})$ y $\forall n > 0$.

Demostración. Se sigue de 3.99 y 3.93. □

Teorema 3.101. Sean $\mathcal{C}$ una variedad de annuli con pseudo-kerneles y $\mathcal{T} \subseteq \text{f. p.}(\mathcal{C}^{op})$. Consideramos los siguientes enunciados:

- (a) $\mathcal{T}$ es una clase n -f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -tilting pequeña;
- (b) $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\oplus < \infty}$ es una subcategoría n -tilting generalizada y f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ tiene un cogenerador f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -inyectivo relativo en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$.

Entonces, (a) implica (b). Más aún, en caso de que $\mathcal{T}$ tenga pseudo-kerneles, entonces (a) es equivalente a (b).

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $\mathcal{T}$ es n -f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -tilting pequeña.

Por 2.2(T1) se sigue 3.95(FGT1). En efecto, sea $T \in \mathcal{T}$. Por 3.97, $\rho := \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ es un generador f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -proyectivo relativo en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$. Así, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F_{n+1} \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_n) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_0) \rightarrow T \rightarrow 0$$

donde $F_{n+1} \in \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op})$. Consideremos la sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow F_{n+1} \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_n) \rightarrow F_n \rightarrow 0.$$

Luego, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\text{Ext}_{\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})}^1(F_n, F_{n+1}) \cong \text{Ext}_{\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})}^{n+1}(T, F_{n+1}),$$

donde $\text{Ext}_{\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})}^{n+1}(T, F_{n+1}) = 0$ por 2.2(T1). Por lo tanto, η se escinde y $F_n \in \text{proj}(\mathcal{C}^{op})$. Por lo anterior hemos probado que $\mathcal{T} \subseteq \text{proj}(\mathcal{C}^{op})_n^\wedge$.

Por 2.2(T2) se sigue 3.95(FGT2), ya que $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cap \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op}) \subseteq \mathcal{T}^\perp$.

Finalmente, por 2.27(e) y 2.32(b), tenemos que

$$\rho \subseteq {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op}) = {}^\perp(\mathcal{T}^\perp) \cap (\text{f. p. } (\mathcal{C}^{op}), \mathcal{T})^\vee \subseteq \mathcal{T}^\vee.$$

Lo cual prueba 3.95(FGT3). Finalmente, por 2.2(T4), f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ tiene un cogenerador f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -inyectivo relativo en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supondremos que f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ tiene un cogenerador f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ -inyectivo relativo en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ y que $\mathcal{T}$ tiene pseudo-kerneles. Se sigue de 3.95(FGT1) que $\text{pdf}_{\text{f.p.}(\mathcal{C}^{op})}(\mathcal{T}) \leq \text{pd}(\mathcal{T}) \leq n$, lo cual prueba 2.2(T1). Luego, como $\mathcal{T} \subseteq \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op})$, de 3.95(FGT2) tenemos que

$$\mathcal{T} \cap \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op}) = \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\perp,$$

lo cual prueba 2.2(T2). La condición 3.95(FGT3) implica 2.35(t3''). La condición 2.2(T4) se satisface debido a que existe un cogenerador f.p. $(\mathcal{C}^{op})$ -inyectivo relativo en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ y $\mathcal{T} \subseteq \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op})$. Ahora, como $\mathcal{T}$ tiene pseudo-kerneles, sabemos por 3.96 que $\mathcal{T}$ es precubriente en f. p. $(\mathcal{C}^{op})$. En particular, tenemos que todo $Z \in \mathcal{T}^\perp \cap \text{f. p. } (\mathcal{C}^{op})$ tiene una $\mathcal{T}$ -precubierta, satisfaciéndose 2.2(T5). Finalmente, por 2.46 podemos concluir que 2.2(T3) se satisface ya que 2.35(t3'') se satisface y f. p. $(\mathcal{C}^{op})$ es gruesa por 3.93. $\square$

3.7. Módulos silting y objetos n - $\mathcal{X}$ -tilting

En esta sección buscaremos encontrar una caracterización de los objetos silting como objetos n - $\mathcal{X}$ -tilting para una clase $\mathcal{X}$ adecuada. Comenzaremos introduciendo la teo-

ría silting desarrollada por Lidia Angeleri Hügel, Frederik Marks y Jorge Vitoria en [AHMV15].

Lema 3.102. [AHMV15, Lemma 2.3] Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$ tal que $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^{\perp_1}$. Entonces, $(\text{Gen}_1(T), T^{\perp_0})$ es par de torsión en $\text{Mod}(R)$.

Lema 3.103. Los siguientes enunciados son equivalentes para $T \in \text{Mod}(R)$, con R un anillo.

- (a) $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$ es una clase de torsión y $\text{Hom}_R(T, -)$ es exacto en $\text{Gen}_1(T)$.
- (b) $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$ y $T \in {}^{\perp_1} \text{Gen}_1(T)$.
- (c) $\text{Gen}_1(T) = \overline{\text{Gen}_1(T)} \cap T^{\perp_1}$, donde $\overline{\text{Gen}_1(T)}$ consiste de los submódulos de los objetos de $\text{Gen}_1(T)$.

Demostración. La equivalencia entre (b) y (c) se sigue de [AHMV15, Lemdef 3.1]. La implicación (b) $\Rightarrow$ (a) se sigue de 3.102. Para la implicación (a) $\Rightarrow$ (b), basta mostrar que $T \in {}^{\perp_1} \text{Gen}_1(T)$. Para ello, consideraremos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow N \xrightarrow{g} T \rightarrow 0,$$

con $M \in \text{Gen}_1(T)$, y probaremos que η se escinde. Dado que $\text{Gen}_1(T)$ es cerrada por extensiones, tenemos $N \in \text{Gen}_1(T)$. Por lo tanto, la sucesión η se encuentra en $\text{Gen}_1(T)$. Así que, por hipótesis, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(T, M) \rightarrow \text{Hom}_R(T, N) \rightarrow \text{Hom}_R(T, T) \rightarrow 0,$$

lo que implica que existe $f : T \rightarrow N$ tal que $1_T = gf$. □

Definición 3.104. [AHMV15, Lemdef 3.1] Sea R un anillo. Diremos que $T \in \text{Mod}(R)$ es **quasitilting** si T satisface alguno de los enunciados equivalentes de 3.103.

Definición 3.105. [Fai72] Sea R un anillo. Diremos que $T \in \text{Mod}(R)$ es **finendo** si ${}_E M$ es finitamente generado, donde $E = \text{End}_R(M)$.

Recordamos la siguiente caracterización de los módulos finendo que engloba [AHTT01, Proposition 3.2] y [CM93, Lemma].

Proposición 3.106. Para un anillo R y $M \in \text{Mod}(R)$, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) M es finendo;
- (b) existe una $\text{add}(M)$ -preenvolvente de R ;
- (c) existe una $\text{Gen}_1(M)$ -preenvolvente de R ;

- (d) $\text{Gen}_1(M)$ es una clase preenvolvente;
- (e) existe una $\text{Add}(M)$ -preenvolvente de R ;
- (f) $M^X \in \text{Gen}_1(M)$, para todo X ;
- (g) $\text{Gen}_1(M)$ es cerrado por productos arbitrarios;
- (h) $M^M \in \text{Gen}_1(M)$.

Definición 3.107. Denotaremos por $\text{qtilt}(R)$ a la clase de todos los R -módulos quasitilting finendo. Note que la relación $\sim$ en $\text{qtilt}(R)$, dada por

$$T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \text{Add}(T_1) = \text{Add}(T_2),$$

es una relación de equivalencia en $\text{qtilt}(R)$.

Teorema 3.108. [AHMV15, Theorem 3.4] Sea R un anillo. Entonces, la correspondencia $T \mapsto \text{Gen}_1(T)$ induce una biyección entre $\text{qtilt}(R)/\sim$ y las clases de torsión $\mathcal{T} \subseteq \text{Mod}(R)$ con la siguiente propiedad:

(QT) todo $M \in \text{Mod}(R)$ admite una sucesión exacta $M \xrightarrow{\phi} B \rightarrow C \rightarrow 0$, donde ϕ es una $\mathcal{T}$ -preenvolvente y $C \in {}^{\perp_1}\mathcal{T}$.

Lema 3.109. [AHMV15, Lemma 3.3] Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$ quasitilting. Entonces,

$$\text{Add}(T) = {}^{\perp_1}\text{Gen}_1(T) \cap \text{Gen}_1(T).$$

Definición 3.110. [AHMV15, Section 3.2] Dado un morfismo σ en $\text{Proj}(R)$, consideramos la clase $\mathcal{D}_\sigma := \{X \in \text{Mod}(R) \mid \text{Hom}_R(\sigma, X) \text{ es un epimorfismo}\}$.

El siguiente lema contiene una serie de propiedades de la clase $\mathcal{D}_\sigma$. Los primeros cuatro incisos se encuentran en [AHMV15, Lemma 3.6], los últimos dos incisos aparecen en la prueba de [AHMV15, Theorem 3.12]. Recordemos que $\mathcal{D}(R)$ denota la categoría derivada de $\text{Mod}(R)$ y que una **presentación proyectiva** de un R -módulo T es un morfismo $\sigma : P_{-1} \rightarrow P_0$ con $P_{-1}, P_0 \in \text{Proj}(R)$ y $\text{Coker}(\sigma) = T$.

Lema 3.111. Para un morfismo $\sigma : P_{-1} \rightarrow P_0$ en $\text{Proj}(R)$, con $\text{Coker}(\sigma) = T$, se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) $\mathcal{D}_\sigma$ es cerrado por cocientes, extensiones y productos.
- (b) $\mathcal{D}_\sigma \subseteq T^{\perp_1}$.
- (c) $X \in \mathcal{D}_\sigma$ si, y sólo si, $\text{Hom}_{\mathcal{D}(R)}(\sigma, \omega[1]) = 0$ para toda presentación proyectiva ω de X .
- (d) $X \in \mathcal{D}_\sigma$ si, y sólo si, $\text{Hom}_{\mathcal{D}(R)}(\sigma, \omega[1]) = 0$ para alguna presentación proyectiva ω de X .

- (e) Sea $\{\tau_i : P_i \rightarrow Q_i\}_{i \in I}$ una familia de morfismos en $\text{Proj}(R)$. Entonces, $\mathcal{D}_\tau = \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_{\tau_i}$ donde $\tau := \bigoplus_{i \in I} \tau_i : \bigoplus_{i \in I} P_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Q_i$.
- (f) Sean $\alpha : P \rightarrow Q$ y $\beta : P \rightarrow Q'$ morfismos en $\text{Proj}(R)$. Entonces $\mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\gamma$, donde $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : P \rightarrow Q \oplus Q'$.

Definición 3.112. [AHMV15, Definition 3.7] Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$.

- (a) Decimos que T es **silting parcial** si existe una presentación proyectiva σ de T tal que:
- (S1)** $\mathcal{D}_\sigma$ es una clase de torsión;
 - (S2)** $T \in \mathcal{D}_\sigma$.
- (b) Decimos que T es **silting** si existe una presentación proyectiva σ de T tal que $\text{Gen}_1(T) = \mathcal{D}_\sigma$. En tal caso, diremos que T es **silting respecto a σ** .

Proposición 3.113. Para un anillo R , los siguientes enunciados se satisfacen:

- (a) [AHMV15, Proposition 3.10] Todo R -módulo silting es finendo y quasitilting.
- (b) [AHMV15, Proposition 3.13(2)] Un R -módulo es tilting si y sólo si es fiel y silting (lo cual se cumple si y sólo si es fiel, finendo y quasitilting).

Proposición 3.114. [AHMV15, Proposition 3.11] Sean $T \in \text{Mod}(R)$ y σ una presentación proyectiva de T . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

- (a) T es un R -módulo silting respecto a σ .
- (b) T es un R -módulo silting parcial respecto a σ y satisface el siguiente axioma:

$$(S3) \quad \text{existe una sucesión exacta } R \xrightarrow{\phi} T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0, \text{ con } T_0, T_1 \in \text{Add}(T) \text{ y } \phi \text{ una } \mathcal{D}_\sigma\text{-preenvolvente.}$$

Ya estamos listos para empezar a desarrollar nuestro objetivo.

Lema 3.115. Para un anillo R y $T \in \text{Mod}(R)$ tal que $\text{pdy}(T) \leq 1$, donde $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \text{Mod}(R)$, los siguientes enunciados se satisfacen.

- (a) $(\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} \subseteq (\text{Add}(T))^{\perp} \cap \mathcal{Y}$.
- (b) Si $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$, entonces $(\text{Gen}_1(T))^{\perp} \cap \mathcal{Y} = (\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}$.

Demostración.

- (a) Como $\text{pdy}(T) \leq 1$, tenemos que $(\text{Add}(T))^{\perp} \cap \mathcal{Y} = (\text{Add}(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}$. Por lo tanto,

$$(\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} \subseteq (\text{Add}(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} = (\text{Add}(T))^{\perp} \cap \mathcal{Y}.$$

- (b) Sea $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$. Para probar (b) basta verificar que $(\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} \subseteq (\text{Gen}_1(T))^{\perp} \cap \mathcal{Y}$. Consideremos $M \in (\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}$ y $N \in \text{Gen}_1(T)$. Como $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$, podemos construir, para cada $m \geq 1$, una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_m \rightarrow T_m \rightarrow \dots \rightarrow T_1 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

donde $T_i \in \text{Add}(T) \forall i \in [1, m]$ y $K_m \in \text{Gen}_1(T)$. Luego, como $M \in (\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} \subseteq (\text{Add}(T))^{\perp}$, por el lema del corrimiento tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(N, M) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(K_{m-1}, M) = 0 \forall m \geq 1.$$

Por lo tanto, $M \in \text{Gen}_1(T)^{\perp}$.

□

Definición 3.116. Sean R un anillo y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de clases de objetos en $\text{Mod}(R)$. Denotaremos por $\mathcal{X}_{(\mathcal{I}, \mathcal{Y})}$ a la clase de objetos $M \in \mathcal{X}$ que admiten una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0(X) \rightarrow Y \rightarrow 0,$$

donde $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ y $I_0(X)$ es la envolvente inyectiva de X en $\text{Mod}(R)$.

Lema 3.117. Sean R un anillo, $T \in \text{Mod}(R)$ quasitilting tal que $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(T) \leq 1$, donde $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \text{Mod}(R)$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados, donde $\omega(T) := \text{Gen}_1(T)_{(\mathcal{I}, T^{\perp_0})}$.

- (a) $T^{\perp} \cap \mathcal{Y} = T^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}$.
- (b) $\text{Gen}_1(T) = T^{\perp} \cap \mathcal{Y}$.
- (c) $\text{Add}(T)$ es un generador $\text{Gen}_1(T)$ -proyectivo relativo en $\text{Gen}_1(T)$.
- (d) $(\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} = (\text{Gen}_1(T))^{\perp} \cap \mathcal{Y}$.
- (e) $\omega(T)$ es un cogenerador $\text{Gen}_1(T)$ -inyectivo relativo en $\text{Gen}_1(T)$.
- (f) $\omega(T) \subseteq \text{Gen}_1(T)^{\perp} \subseteq T^{\perp}$.
- (g) $\text{Gen}_1^{\text{Gen}_1(T)}(T) = \text{Gen}_1(T)$.

Demostración.

- (a) Dado que $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(T) \leq 1$, tenemos que $T^{\perp} \cap \mathcal{Y} = T^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}$.
- (b) Por 3.103(b), se sigue que $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^{\perp_1}$. Así que, por (a), tenemos que $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^{\perp} \cap \mathcal{Y}$.
- (c) Por 3.103(b), sabemos que para todo $M \in \text{Gen}_1(T)$ existe una sucesión exacta $0 \rightarrow M_0 \rightarrow T_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, donde $M_0 \in \text{Gen}_1(T)$ y $T_0 \in \text{Add}(T)$. Además, como $\text{Add}(T)^{\perp} \cap \mathcal{Y} = T^{\perp} \cap \mathcal{Y}$ y $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^{\perp} \cap \mathcal{Y}$ por (b), podemos concluir que $\text{Add}(T)$ es $\text{Gen}_1(T)$ -proyectivo.

- (d) Por 3.103(b), sabemos que $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$. Luego, (d) se sigue de 3.115(b).
- (e) Por 3.102 y (b), $\mathfrak{C} = (\text{Gen}_1(T), T^{\perp_0})$ es un par de torsión. Veamos que $\omega(T)$ es un cogenerador relativo en $\text{Gen}_1(T)$. Sean $X \in \text{Gen}_1(T)$ y $i : X \rightarrow I_0(X)$ su envolvente inyectiva. Consideramos las sucesiones exactas

$$\eta : 0 \rightarrow X \xrightarrow{i} I_0(X) \rightarrow Y \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \mu : 0 \rightarrow T' \xrightarrow{a} I_0(X) \xrightarrow{b} F \rightarrow 0,$$

donde μ es la sucesión exacta canónica inducida por $\mathfrak{C}$, con $T' \in \text{Gen}_1(T)$ y $F \in T^{\perp_0}$. Notemos que, por definición, $T' \in \omega(T)$. Ahora, como $X \in \text{Gen}_1(T)$ y $F \in T^{\perp_0}$, sabemos que $bi = 0$. Luego, i se factoriza a través de a . Así que existe una sucesión exacta $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} T' \rightarrow D \rightarrow 0$, donde $af = i$. Finalmente, notemos que $D \in \text{Gen}_1(T)$ debido a que $T' \in \text{Gen}_1(T)$. Por lo tanto, $\omega(T)$ es un cogenerador relativo en $\text{Gen}_1(T)$.

Queda por mostrar que $\omega(T) \subseteq (\text{Gen}_1(T))^{\perp}$. Sea $W \in \omega(T)$. Por definición existe una sucesión exacta

$$\nu : 0 \rightarrow W \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow 0$$

con $I \in \text{Inj}(R)$ y $F \in T^{\perp_0}$. Observamos que al aplicarle el funtor $\text{Hom}_R(G, -)$ a ν , con $G \in \text{Gen}_1(T)$, obtenemos la sucesión exacta

$$\text{Hom}_R(G, F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(G, W) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(G, I),$$

donde $\text{Hom}_R(G, F) = 0$ debido a que $\mathfrak{C}$ es par de torsión y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(G, I) = 0$ debido a que $I \in \text{Inj}(R)$. Por lo tanto,

$$W \in \text{Gen}_1(T)^{\perp_1} \cap \text{Gen}_1(T) \subseteq \text{Gen}_1(T)^{\perp_1} \cap \mathcal{X} \subseteq \text{Gen}_1(T)^{\perp}$$

por (d).

- (f) En efecto, por (e), tenemos la primer inclusión y la segunda inclusión se sigue de que $T \in \text{Gen}_1(T)$.
- (g) Basta mostrar que todo $X \in \text{Gen}_1(T)$ admite una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow X' \rightarrow T' \rightarrow X \rightarrow 0$$

con $T' \in \text{Add}(T)$ y $X' \in \text{Gen}_1(T)$, lo cual es inmediato de que $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$ por 3.103(b).

□

Teorema 3.118. Sean R un anillo, $T \in \text{Mod}(R)$ quasitilting tal que $\text{pdy}(T) \leq 1$, donde $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \text{Mod}(R)$. Entonces, T es 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting grande.

Demostración. Veamos que T es $1\text{-Gen}_1(T)$ -tilting grande. En efecto, por 3.103(a), tenemos que $\text{Gen}_1(T) = \text{smd}(\text{Gen}_1(T))$ es cerrado por extensiones; T satisface (T4), respecto a $\text{Gen}_1(T)$ por 3.117(e,f); y T satisface (T5), respecto a $\text{Gen}_1(T)$, debido a que $\text{Add}(T)$ es precubriente. Entonces, por 3.117(g) y 2.25, nos basta con mostrar que $\text{Gen}_1(T) = T^\perp \cap \text{Gen}_1(T)$. Lo cual se sigue por 3.117(b). $\square$

Observación 3.119.

(a) *Decimos que $T \in \text{Mod}(R)$ es τ -rígido si existe una presentación proyectiva φ de T tal que $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{D}_\varphi$. Se sigue de la definición y de 3.113(a) que todo R -módulo silting es quasitilting finendo y τ -rígido. Recientemente ha surgido el interés por determinar si todo R -módulo quasitilting finendo y τ -rígido es silting (ver [BHP⁺17, Section 5]). Ante este problema han surgido ejemplos de R -módulos quasitilting que no son silting en diferentes contextos.*

En efecto, en [BHP⁺17, Example 5.12] se muestra un ejemplo de un R -módulo quasitilting finendo que no es τ -rígido para un anillo Dubrovin-Puninski R . En [AHH16, Example 5.4] se muestra que, para un anillo local conmutativo R con ideal máximo $\mathfrak{m} \neq 0$, se tiene que $R/\mathfrak{m}$ es un R -módulo quasitilting finendo que no es τ -rígido. Por último, en [BHP⁺17, Example 5.11] se muestra un ejemplo de un R -módulo quasitilting fiel sobre un anillo conmutativo von Neumann regular que no es finendo y no es τ -rígido.

(b) *En [AHMV15, Example 3.14] se construye un ejemplo de un R -módulo T , con $\text{pd}(T) \leq 1$, tal que T es silting y no es tilting. Por lo que 3.118 muestra la existencia de R -módulos $1\text{-Gen}_1(T)$ -tilting con dimensión proyectiva ≤ 1 que no son tilting. Mostramos a continuación dicho ejemplo por completez.*

Ejemplo 3.120. [AHMV15, Example 3.14] Consideremos un campo k , el anillo

$$R = \begin{pmatrix} k & k^{(\mathbb{N})} \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

y los R -módulos proyectivos inescindibles

$$P_1 := Re_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_2 := Re_2 = \begin{pmatrix} 0 & k^{(\mathbb{N})} \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es el sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos natural de R . Se puede probar que

$$\text{soc } P_2 = \text{rad } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & k^{(\mathbb{N})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong P_1^{(\mathbb{N})}.$$

De modo que tenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow P_1^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\sigma} P_2 \rightarrow T \rightarrow 0$$

donde $T = P_2 / \text{rad } P_2$.

Veamos que T es un módulo silting no tilting. Note primero que, como σ es una presentación proyectiva monomórfica, es inmediato que $\mathcal{D}_\sigma = T^{\perp_1}$.

Por otro lado, se puede mostrar que $\text{Gen}_1(T) = P_1^{\perp_0}$. En efecto, sea $M \in \text{Gen}_1(T)$. Luego, existe un epimorfismo $\alpha : T^{(A)} \rightarrow M$, por lo que todo morfismo $f : P_1 \rightarrow M$ se factoriza a través de α , es decir existe $g : P_1 \rightarrow T^{(A)}$ tal que $\alpha g = f$. Pero

$$g(e_1) = e_1 g(e_1) \in e_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = 0,$$

lo que implica que $g = 0$ y así $f = 0$. Por lo tanto, $\text{Gen}_1(T) \subseteq P_1^{\perp_0}$. Sea $N \in P_1^{\perp_0}$. Luego, existe un epimorfismo $\beta : P_2^{(N)} \rightarrow N$. Notemos que

$$\beta(\text{rad}(P_2^{(N)})) = \beta \begin{pmatrix} 0 & k^{(N)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{(N)} = \beta \left(e_1 \begin{pmatrix} 0 & k^{(N)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{(N)} = e_1 \beta \begin{pmatrix} 0 & k^{(N)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{(N)} = 0$$

debido a que $0 = \text{Hom}_R(P_1, N) = \text{Hom}_R(Re_1, N) \cong e_1 N$. Luego, considerando la sucesión exacta $\eta^{(N)}$, se sigue que $\beta \sigma^{(N)} = 0$. Así que, por la propiedad universal del conúcleo, tenemos que β se factoriza a través de $T^{(N)}$. Por lo tanto, podemos concluir que $M \in \text{Gen}_1(T)$ debido a que β es un epimorfismo.

Ahora, T no es tilting ya que la envolvente inyectiva $I_0(P_1) \in \mathcal{D}_\sigma - P_1^{\perp_0}$, lo que implica que $\text{Gen}_1(T) = P_1^{\perp_0} \neq \mathcal{D}_\sigma = T^{\perp_1}$.

Finalmente, para $\gamma := \sigma \oplus (P_1 \rightarrow 0)$, tenemos por 3.111 que

$$\mathcal{D}_\gamma = \mathcal{D}_\sigma \cap \mathcal{D}_{(P_1 \rightarrow 0)} = T^{\perp_1} \cap P_1^{\perp_0} = P_1^{\perp_0} = \text{Gen}_1(T)$$

puesto que $P_1^{\perp_0} \subseteq \mathcal{D}_\sigma = T^{\perp_1}$. Por lo tanto, T es silting respecto a γ .

Observación 3.121. *Se ha buscado generalizar el resultado anterior a módulos con dimensión proyectiva finita sin éxito por el momento.*

En lo que sigue, estudiaremos las propiedades de los R -módulos T que son 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting con el objetivo de buscar condiciones que impliquen que T sea silting para alguna presentación proyectiva. En esta búsqueda probaremos, para un R -módulo T con $\text{pd}(T) \leq 1$, que T es quasitilting si, y sólo si, T es 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting grande.

Lema 3.122. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\oplus < \infty} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por cocientes. Si existe $\omega \subseteq {}^{\perp_1} \mathcal{X}$ tal que $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1(\omega)$, entonces $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones.*

Demostración. Sea $0 \rightarrow N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} K \rightarrow 0$ una sucesión exacta con $N, K \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} \subseteq \text{Fac}_1(\omega)$, existen epimorfismos $\nu : W_1 \rightarrow N$ y $\mu : W_2 \rightarrow K$ con $W_1, W_2 \in \omega$.

Además, como $\omega \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{X}$, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_R(W_2, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(W_2, f)} \mathrm{Hom}_R(W_2, K) \rightarrow \mathrm{Ext}_C^1(W_2, N) = 0.$$

Lo que implica que existe un morfismo $\alpha : W_2 \rightarrow M$ tal que $f\alpha = \mu$. Luego, por el lema de la serpiente, tenemos que $(g \nu \alpha) : W_1 \oplus W_2 \rightarrow M$ es un epimorfismo. Por lo tanto, como $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\oplus < \infty}$ es cerrada por cocientes, podemos concluir que $M \in \mathcal{X}$. $\square$

Proposición 3.123. *Sean R un anillo y $T \in \mathrm{Mod}(R)$ tal que $\mathrm{Gen}_1(T)$ es cerrado por extensiones y T es $n\text{-Gen}_1(T)$ -tilting grande. Entonces, para $m := \max\{1, n\}$, se cumplen los siguientes enunciados:*

- (a) $\mathrm{Gen}_k^{\mathrm{Gen}_1(T)}(T) = \mathrm{Gen}_{k+1}(T)$ para todo $k \geq m$;
- (b) $\mathrm{Gen}_{m+1}(T) = T^{\perp} \cap \mathrm{Gen}_1(T)$;
- (c) $\mathrm{Gen}_{k+1}(T) = T^{\perp} \cap \mathrm{Gen}_1(T)$ para todo $k \geq m$;
- (d) $\mathrm{Add}(T) \subseteq T^{\perp} \cap \mathrm{Gen}_1(T) \subseteq \mathrm{Gen}_2(T)$ y $T^{\perp} \cap \mathrm{Gen}_1(T)$ es cerrado por m -cocientes en $\mathrm{Gen}_1(T)$;
- (e) $T^{\perp} \cap \mathrm{Gen}_1(T)$ es cerrado por $(m+1)$ -cocientes en $\mathrm{Gen}_1(T)$.

Demostración.

- (a) Sea $k \geq m$. Por 2.25(c), sabemos que

$$\mathrm{Gen}_k^{\mathrm{Gen}_1(T)}(T) = \mathrm{Gen}_{k+1}^{\mathrm{Gen}_1(T)}(T) \subseteq \mathrm{Gen}_{k+1}(T).$$

Para la contención opuesta, observamos que todo $X \in \mathrm{Gen}_{k+1}(T)$ admite una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow T_k \xrightarrow{f_k} \dots \rightarrow T_1 \xrightarrow{f_1} X \rightarrow 0$$

con $K \in \mathrm{Gen}_1(T)$ y $T_i \in \mathrm{Add}(T) \forall i \in [1, k]$, lo que implica que $X \in \mathrm{Gen}_k^{\mathrm{Gen}_1(T)}(T)$ debido a que $\mathrm{Ker}(f_i) \in \mathrm{Gen}_1(T) \forall i \in [1, k]$.

- (b) Por (a) y 2.25(b), obtenemos

$$\mathrm{Gen}_{m+1}(T) = \mathrm{Gen}_m^{\mathrm{Gen}_1(T)}(T) \cap \mathrm{Gen}_1(T) = T^{\perp} \cap \mathrm{Gen}_1(T).$$

Entonces, sustituyendo con lo obtenido en (a), podemos concluir lo deseado.

- (c) Se sigue de 2.25(c) y (a).
- (d) Se sigue de 2.25(d) y (a).
- (e) Es inmediato de (d).

$\square$

Lema 3.124. Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$, con $\text{pdy}(T) \leq 1$, donde $\mathcal{Y} \subseteq \overline{\text{Gen}_1(T)}$ y $\overline{\text{Gen}_1(T)}$ consiste de los submódulos de los objetos de $\text{Gen}_1(T)$. Si T es 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting grande. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^\perp$.
- (b) $(\text{Gen}_1(T), T^{\perp_0})$ es un par de torsión.
- (c) $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_1(T) \cap T^\perp = \text{Gen}_{k+1}(T) \forall k \geq 1$.
- (d) T es quasitilting.
- (e) Si $\mathcal{Y} = \overline{\text{Gen}_1(T)}$, entonces $(\text{Gen}_1(T))^\perp \cap \mathcal{Y} = (\text{Gen}_1(T))^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} \subseteq (\text{Add}(T))^\perp \cap \mathcal{Y}$.
- (f) $\text{Gen}_1(T) \cap^{\perp_1} (\text{Gen}_1(T)) = {}^\perp(T^\perp \cap \text{Gen}_1(T)) \cap \text{Gen}_1(T) = (\text{Add}(T))^\vee \cap \text{Gen}_1(T) = {}^\perp(T^\perp) \cap \text{Gen}_1(T) = \text{Add}(T)$.

Demostración.

- (a) Sean $X \in \text{Gen}_1(T)$ y $H := \text{Hom}_R(T, X)$. Consideramos el morfismo universal

$$u : T^{(H)} \rightarrow X, (m_f)_{f \in H} \mapsto \sum_{f \in H} f(m_f).$$

Como $X \in \text{Gen}_1(T)$, se sigue que u es un epimorfismo, por lo que tenemos la sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow T^{(H)} \xrightarrow{u} X \rightarrow 0.$$

Aplicando $\text{Hom}_R(T, -)$ a η , obtenemos la sucesión exacta

$$\text{Hom}_R(T, T^{(H)}) \xrightarrow{\text{Hom}_R(T, u)} \text{Hom}_R(T, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(T, K) \rightarrow \text{Ext}_R^1(T, T^{(H)}).$$

Veamos que $\text{Ext}_R^1(T, K) = 0$. En efecto, sabemos que $T^{(H)} \in T^\perp$ por (T2). Así que $\text{Ext}_R^1(T, T^{(H)}) = 0$. Además, $\text{Hom}_R(T, u)$ es suprayectiva por construcción, de donde $\text{Ext}_R^1(T, K) = 0$. Por lo tanto, $K \in T^{\perp_1} \cap \mathcal{Y} \subseteq T^\perp$ debido a que $\text{pdy}(T) \leq 1$. Así que, como $T^{(H)} \in T^\perp$ y $T^\perp$ es cerrado por mono-conúcleos, podemos concluir que $X \in T^\perp$.

- (b) Se sigue de (a) y 3.102.
- (c) Por (b), $\text{Gen}_1(T)$ es cerrado por extensiones. Luego, (c) es inmediato de (a) y 3.123(c).
- (d) Por (c), tenemos que $\text{Gen}_1(T) = \text{Gen}_2(T)$; y por (a), $\text{Hom}_R(T, -)$ es exacto en $\text{Gen}_1(T)$. Ahora, por (b) sabemos que $\text{Gen}_1(T)$ es una clase de torsión. Por lo tanto, T es un módulo quasitilting por satisfacer 3.103(a).
- (e) Primeramente notamos que $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{Y}$ por (T4). Luego, (e) se sigue de 3.115 junto con (c).

(f) Por (d) y 3.109, tenemos que $\text{Add}(T) = \text{Gen}_1(T) \cap {}^{\perp_1}(\text{Gen}_1(T))$.

Notemos además que $\text{Add}(T) \subseteq \text{Gen}_1(T) \cap (\text{Add}(T))^{\vee}$. Para mostrar la contención opuesta, observamos que $\text{pd}_{\text{Gen}_1(T)}((\text{Add}(T))^{\vee}) = \text{pd}_{\text{Gen}_1(T)}(\text{Add}(T)) = 0$ por 1.13 y (a). Luego, dado $X \in \text{Gen}_1(T) \cap (\text{Add}(T))^{\vee}$, tenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow X \rightarrow T_0 \rightarrow X' \rightarrow 0$$

con $T_0 \in \text{Add}(T)$ y $X' \in (\text{Add}(T))^{\vee}$. Así que, por lo anterior, η se escinde y $X \in \text{Add}(T)$. Por lo tanto, $\text{Add}(T) = \text{Gen}_1(T) \cap (\text{Add}(T))^{\vee}$.

Ahora, por (b), tenemos que $\text{Gen}_1(T)$ es cerrado por extensiones y sumandos directos. Así que por 2.23(a) se tienen las igualdades

$${}^{\perp}(T^{\perp}) \cap \text{Gen}_1(T) = (\text{Add}(T))^{\vee}_{\text{Gen}_1(T)} \cap \text{Gen}_1(T) = {}^{\perp}(T^{\perp} \cap \text{Gen}_1(T)) \cap \text{Gen}_1(T).$$

Notando que $(\text{Add}(T))^{\vee}_{\text{Gen}_1(T)} = (\text{Add}(T))^{\vee}$ concluimos la prueba. $\square$

Teorema 3.125. *Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$, con $\text{pd}_R(T) \leq 1$, donde $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \overline{\text{Gen}_1(T)}$ y $\overline{\text{Gen}_1(T)}$ consiste de los módulos isomorfos a los submódulos de los objetos de $\text{Gen}_1(T)$. Entonces, T es quasitilting si, y sólo si, T es 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting grande.*

Demostración. Primeramente, notamos que $\text{Gen}_1(T) \subseteq \overline{\text{Gen}_1(T)}$. Luego, el resultado es inmediato de 3.124(d) y 3.118. $\square$

El siguiente lema está contenido en la prueba de [BHP⁺17, Proposition 5.6].

Lema 3.126. *Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$ tal que $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^{\perp_1}$. Si $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0$ es una presentación proyectiva de T tal que $\text{Ker}(\sigma)$ es un submódulo superfluo de P_1 , entonces $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{D}_{\sigma}$.*

Demostración. Sea $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \rightarrow T \rightarrow 0$ una resolución proyectiva de T tal que $\text{Ker}(\sigma)$ es un submódulo superfluo de P_1 . Recordamos que esto quiere decir que $\text{Ker}(\sigma) + N \neq P_1$ para todo submódulo $N \neq P_1$. Sea $X \in \text{Gen}_1(T)$. Probaremos que $X \in \mathcal{D}_{\sigma}$. Para ello, consideramos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{k} P_1 \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow S \xrightarrow{\mu} P_0 \rightarrow T \rightarrow 0,$$

donde $S := \text{Im}(\sigma)$, $K := \text{Ker}(\sigma)$ y $\sigma = \mu\varphi$. Sea $g \in \text{Hom}_R(P_1, X)$. Al considerar el pushout de φ con g obtenemos un morfismo $k' : S \rightarrow X'$ junto con una sucesión exacta

$$0 \rightarrow g(K) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X' \rightarrow 0,$$

donde $\pi g = k' \varphi$. Notamos que $X' \in \text{Gen}_1(T)$ debido a que $X \in \text{Gen}_1(T)$. Entonces, como $\text{Gen}_1(T) \subseteq T^{\perp_1}$ por (a), se sigue que k' se extiende a P_0 . Es decir, existe $k'' : P_0 \rightarrow X'$ tal que $k'' \mu = k'$. Además, como P_0 es proyectivo, existe $h : P_0 \rightarrow X$ tal que $\pi h = k''$.

Sea $\delta := g - h\sigma$. Observamos que $\pi\delta = \pi g - \pi h\sigma = \pi g - k'' \mu \varphi = 0$. Esto quiere decir que δ se factoriza a través de $\text{Ker}(\pi) = g(K)$. Por lo tanto, para todo $x \in P_1$ existe $y_x \in \text{Ker}(\sigma)$ tal que $\delta(x) = g(y_x)$. Notemos además que $\delta(y_x) = g(y_x) - h\sigma(y_x) = g(y_x) = \delta(x)$. De modo que, $x - y_x \in \text{Ker}(\delta)$, y así que $P_1 = \text{Ker}(\delta) + K$. Entonces, como K es superfluo, tenemos que $\delta = 0$, y así que $g = h\sigma$. Por lo tanto, $X \in \mathcal{D}_\sigma$. $\square$

Teorema 3.127. *Sean R un anillo y $T \in \text{Mod}(R)$, con $\text{pd}_R(T) \leq 1$, donde $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \text{Mod}(R)$. Si existe una presentación proyectiva $\sigma : P_1 \rightarrow P_0$ de T con $\text{Ker}(\sigma)$ un submódulo superfluo de P_1 , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) T es silting respecto a σ ;
- (b) T es 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting grande y existe una $\mathcal{D}_\sigma$ -preenvolvente $\phi : R \rightarrow T_0$ tal que $T_0 \in \text{Add}(T)$.

Más aún, en tal caso tenemos que $\mathcal{D}_\sigma = \text{Gen}_1(T) = T^\perp \cap \mathcal{Y} = T^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que T es silting respecto a una presentación proyectiva $\sigma : P_1 \rightarrow P_0$ de T con $\text{Ker}(\sigma)$ un submódulo superfluo de P_1 . Por 3.114, sabemos que existe una sucesión exacta

$$R \xrightarrow{\phi} T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0,$$

donde T_0 y T_1 pertenecen a $\text{Add}(T)$ y ϕ es una $\mathcal{D}_\sigma$ -preenvolvente. Finalmente, notamos que T es 1- $\text{Gen}_1(T)$ -tilting grande por por 3.113(a) y 3.118.

(b) $\Rightarrow$ (a) Primeramente, notamos que $\text{Gen}_1(T) \subseteq \mathcal{D}_\sigma$ por 3.124(a) y 3.126. Veamos que $\mathcal{D}_\sigma \subseteq \text{Gen}_1(T)$. Sabemos que existe una $\mathcal{D}_\sigma$ -preenvolvente $\phi : R \rightarrow T_0$. Sea σ una presentación proyectiva monomórfica de T . Entonces, dado $X \in \mathcal{D}_\sigma$, todo epimorfismo $R^{(\alpha)} \rightarrow X$ se factoriza a través de la preenvolvente $\phi^{(\alpha)}$ vía un epimorfismo $T_0^{(\alpha)} \rightarrow X$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_\sigma \subseteq \text{Gen}_1(T)$. $\square$

Observación 3.128. *Sean R un anillo, $T \in \text{Mod}(R)$ y $\sigma : P_1 \rightarrow P_0$ una presentación proyectiva de T . La condición de que $\text{Ker}(\sigma)$ sea un submódulo superfluo de P_1 quiere decir que el morfismo natural $P_1 \rightarrow \text{Im}(\sigma)$ es una cubierta proyectiva. Tomando esto en cuenta, podemos encontrar diferentes situaciones en las que se puede encontrar una resolución proyectiva satisfaciendo dicha propiedad. En [BHP⁺17, Corollary 5.7] se enlistan las siguientes:*

- (a) R es perfecto a izquierda;
- (b) R es semiperfecto y T es finitamente presentado;

$$(c) \text{pd}(T) \leq 1.$$

Dicho lo anterior, cabe notar lo siguiente.

Observación 3.129. En [BŽ18], Simion Breaz y Jan Žemlička estudian las clases de torsión generadas por un módulo silting. En particular, se caracterizan este tipo de clases de torsión para anillos perfectos o hereditarios. En efecto, sean R un anillo perfecto a izquierda, o hereditario a izquierda, y S un R -módulo tal que $\text{Gen}_1(S)$ es una clase de torsión. En [BŽ18, Theorem 2.4 & Theorem 2.6] se prueba que S es silting si, y sólo si, existe una $\text{Gen}_1(S)$ -preenvolvente $\epsilon : R \rightarrow M$ tal que $M \in {}^{\perp_1} \text{Gen}_1(S)$. Notemos que la preenvolvente $\epsilon : R \rightarrow M$ es la misma preenvolvente que aparece en 3.127(b) por 3.109, 3.113 y 3.125. Comparando estos resultados con 3.127 notamos lo siguiente.

- (a) Sean R un anillo perfecto a izquierda y T un R -módulo $1\text{-Gen}_1(T)$ -tilting grande. Notamos que, como R es perfecto a izquierda, para todo módulo podemos encontrar fácilmente presentaciones proyectivas $\tau : Q_1 \rightarrow Q_0$, con $\text{Ker}(\tau)$ superfluo en Q_0 . Juntando 3.127 con [BŽ18, Theorem 2.4] podemos concluir que T es silting respecto a una presentación proyectiva ρ si, y sólo si, T es silting respecto a toda presentación proyectiva $\sigma : P_1 \rightarrow P_0$ de T , con $\text{Ker}(\sigma)$ un submódulo superfluo de P_1 .
- (b) Sean R un anillo hereditario a izquierda y T un R -módulo $1\text{-Gen}_1(T)$ -tilting grande. Notamos que, como R es hereditario a izquierda, para todo módulo podemos encontrar presentaciones proyectivas $\tau : Q_1 \rightarrow Q_0$ monomórficas, y en consecuencia, con $\text{Ker}(\tau)$ superfluo en Q_0 . Juntando 3.127 con [BŽ18, Theorem 2.6] podemos concluir que T es silting respecto a una presentación proyectiva ρ si, y sólo si, T es silting respecto a toda presentación proyectiva $\sigma : P_1 \rightarrow P_0$ de T con $\text{Ker}(\sigma)$ un submódulo superfluo de P_1 .
- (c) Sea R un anillo. Se ha probado en 3.114 que para todo R -módulo silting S se tiene una $\text{Gen}_1(S)$ -preenvolvente $\epsilon : R \rightarrow M$, con $M \in \text{Add}(S)$. Sin embargo, existen ejemplos donde la existencia de esta preenvolvente no asegura que S sea un R -módulo silting (ver [BŽ18, Example 2.5] y [AHH16, Example 5.4]). Por lo tanto, cabe notar que 3.127 nos da condiciones suficientes para que la existencia de dicha preenvolvente implique que S sea silting.
- (d) En [BŽ18, Corollary 2.9] se prueba que, si R es hereditario a izquierda o perfecto a izquierda, entonces para todo R -módulo quasitilting finendo Q existe un R -módulo silting T tal que $\text{Add}(T) = \text{Add}(Q)$. Es importante notar que esto no ocurre para cualquier anillo (ver [BŽ18, Example 2.10] y [AHH16, Example 5.4]). Por lo tanto, cabe observar que 3.127 nos da condiciones suficientes para que un R -módulo quasitilting finendo sea silting.
En efecto, sea $T \in \text{Mod}(R)$ quasitilting finendo tal que $\text{pd}_{\text{Gen}_1(T)}(T) \leq 1$. Se sigue de 3.125 y 3.108 que T satisface 3.127(b). Por lo tanto, si T admite una

presentación proyectiva $\sigma : P_1 \rightarrow P_0$ de T con $\text{Ker}(\sigma)$ un submódulo superfluo de P_1 , entonces T es silting respecto a σ por 3.127.

3.8. Módulos n -silting y complejos tilting

En la sección anterior introdujimos la noción de módulo silting. El objetivo de esta sección es buscar generalizar dicha noción a una que admita presentaciones proyectivas de longitud arbitraria finita. A saber, buscaremos introducir una definición de módulo n -silting de tal manera que un módulo T , con una n -presentación proyectiva η , sea un módulo n -silting respecto a η si y sólo si η sea n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting en $\mathcal{C}_n(R)$, donde $\mathcal{C}_n(R)$ es la categoría de complejos de longitud n y $\mathcal{E}_n$ la clase de complejos exactos en $\mathcal{E}_n(R)$. Comenzaremos estudiando la categoría $\mathcal{C}_n(R)$ de complejos de longitud n .

Definición 3.130. Sea R un anillo. Denotamos por $\mathcal{C}_n(R)$ a la categoría de complejos en $\text{Mod}(R)$ de longitud n . Los objetos de esta categoría son las sucesiones de n morfismos en $\text{Mod}(R)$

$$\eta : M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$$

tales que $f_i f_{i-1} = 0 \ \forall i \in [1, n]$. El conjunto de morfismos entre dos objetos

$$\epsilon : \eta : X_0 \xrightarrow{a_1} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{n-1} \xrightarrow{a_n} X_n \quad \text{y} \quad \gamma : Y_0 \xrightarrow{b_1} Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-1} \xrightarrow{b_n} Y_n,$$

está definido como

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(\epsilon, \gamma) = \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \prod_{i=0}^n \text{Hom}_R(X_i, Y_i) \mid \alpha_i a_i = b_i \alpha_{i-1} \ \forall i \in [1, n] \right\}.$$

Por último, la composición está definida entrada a entrada.

Proposición 3.131. [MV18, Section 2.2] Sean R un anillo, $\mathbb{T}_n(R)$ el anillo de matrices triangulares inferiores, F el ideal

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{T}_n(R) \right\}$$

y $\overline{\mathbb{T}_n(R)} := \mathbb{T}_n(R)/F^2$. Entonces, existe una equivalencia de categorías $\text{Mod}(\overline{\mathbb{T}_n(R)}) \cong \mathcal{C}_n(R)$.

Observación 3.132. En [Mit72, Theorem 7.1 y Theorem 7.1*] se muestran funtores fieles y plenos entre $\text{Com}(R)$, la categoría de complejos de R -módulos, y $\text{Mod}(\overline{\mathbb{T}(R)})$,

donde

$$\overline{\mathbb{T}(R)} := \left\{ ((\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\beta_{n,n-1})_{n \in \mathbb{Z}}) \in R^{\mathbb{Z}} \times R^{\mathbb{Z}} \right\}$$

es el anillo con el producto

$$((\alpha_n), (\beta_{n,n-1})) ((\alpha'_n), (\beta'_{n,n-1})) := ((\alpha_n \alpha'_n), (\beta_{n,n-1} \alpha'_{n-1} + \alpha_n \beta'_{n,n-1})).$$

Observamos que existe una inclusión natural en las primeras entradas

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{C}_{n-1}(R) &\rightarrow \mathcal{C}_n(R) \\ \left(M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \right) &\mapsto \left(M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \rightarrow 0 \right), \end{aligned}$$

así como una proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{C}_n(R) &\rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(R) \\ \left(M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_n \right) &\mapsto \left(M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \right) \end{aligned}$$

tales que $\pi\mu = 1_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}$.

De manera similar, existe una inclusión natural en la últimas entradas

$$\begin{aligned} \mu' : \mathcal{C}_{n-1}(R) &\rightarrow \mathcal{C}_n(R) \\ \left(M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \right) &\mapsto \left(0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \right), \end{aligned}$$

así como una proyección

$$\begin{aligned} \pi' : \mathcal{C}_n(R) &\rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(R) \\ \left(M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_n \right) &\mapsto \left(M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_n \right) \end{aligned}$$

tal que $\pi'\mu' = 1_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}$.

Proposición 3.133. *La pareja (π, μ) es un par de funtores adjuntos.*

Demostración. Ciertamente, para todo $N \in \mathcal{C}_{n-1}(R)$ y $M \in \mathcal{C}_n(R)$ tenemos el isomorfismo $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}(\pi M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(M, \mu N)$, $(g_0, \dots, g_{n-1}) \mapsto (g_0, \dots, g_{n-1}, 0)$. $\square$

Corolario 3.134. *Si $P \in \mathcal{C}_n(R)$ es proyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$, entonces πP es proyectivo en $\mathcal{C}_{n-1}(R)$.*

Demostración. Claramente μ es un funtor exacto, por lo que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}(\pi P, -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(P, \mu -)$$

es exacto. Por lo tanto, πP es proyectivo. $\square$

Proposición 3.135. *La pareja (μ', π') es un par adjunto.*

Demostración. Ciertamente, para todo $N \in \mathcal{C}_{n-1}(R)$ y $M \in \mathcal{C}_n(R)$ tenemos el isomorfismo $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}(N, \pi' M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(\mu' N, M)$, $(g_1, \dots, g_n) \mapsto (0, g_1, \dots, g_n)$. $\square$

Corolario 3.136. *Si $E \in \mathcal{C}_n(R)$ es inyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$, entonces $\pi' E$ es inyectivo en $\mathcal{C}_{n-1}(R)$.*

Demostración. Claramente μ' es un funtor exacto, por lo que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}(-, \pi' E) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(\mu' -, E)$$

es exacto. Por lo tanto, $\pi' E$ es inyectivo. $\square$

Resumimos lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 3.137. *Se cumplen los siguientes enunciados:*

- (a) μ es exacto.
- (b) μ' es exacto.
- (c) La pareja (π, μ) es un par de funtores adjuntos, es decir existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}(\pi X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(X, \mu Y).$$

- (d) La pareja (μ', π') es un par adjunto, es decir existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}(N, \pi' M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(\mu' N, M).$$

- (e) Para todo $i \geq 1$ existe un isomorfismo natural

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}^i(\pi X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}_n(R)}^i(X, \mu Y).$$

- (f) Para todo $i \geq 1$ existe un isomorfismo natural

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_{n-1}(R)}^i(X, \pi' Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}_n(R)}^i(\mu' X, Y).$$

- (g) Para toda $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}_n(R)$ se tiene que $(\pi \mathcal{X})^\perp = \mu^{-1}(\mathcal{X}^\perp)$.

- (h) Para toda clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}_{n-1}(R)$ se tiene que ${}^\perp(\mu \mathcal{X}) = \pi^{-1}({}^\perp \mathcal{X})$.

- (i) Para toda $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}_n(R)$ se tiene que ${}^\perp(\pi' \mathcal{X}) = \mu'^{-1}({}^\perp \mathcal{X})$.

(j) Para toda clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}_{n-1}(R)$ se tiene que $(\mu'\mathcal{X})^\perp = \pi'^{-1}(\mathcal{X}^\perp)$.

Demostración. Los enunciados (a), (b), (c) y (d) se han probado en 3.133, 3.134, 3.135 y 3.136. Los incisos (e) y (f) se siguen de (c) y (d). Los incisos (g), (h), (i) y (j) son consecuencia inmediata de (e) y (f). $\square$

Definición 3.138. Sea R un anillo. Consideraremos las siguientes subcategorías plenas de $\mathcal{C}_n(R)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{PF} &:= \{M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \mid M_i \in \text{proj}(R) \ \forall i \in \{0, \dots, n\}\} \\ \mathcal{P} &:= \{M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \mid M_i \in \text{Proj}(R) \ \forall i \in \{0, \dots, n\}\} \\ \mathcal{I} &:= \{M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \mid M_i \in \text{Inj}(R) \ \forall i \in \{0, \dots, n\}\} \\ \mathcal{IF} &:= \{M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \mid M_i \in \text{inj}(R) \ \forall i \in \{0, \dots, n\}\}\end{aligned}$$

Comenzaremos con el estudio de los proyectivos y los injectivos de $\mathcal{C}_n(R)$.

Lema 3.139. Si

$$\eta: \quad 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow P \xrightarrow{f} Q$$

es proyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$, entonces f es un monomorfismo que se escinde con $P, Q \in \text{Proj}(R)$.

Demostración.

Sean $\alpha: R^{(X)} \rightarrow P$ y $\beta: R^{(Y)} \rightarrow Q$ epimorfismos. La pareja de morfismos $(\alpha, (f\alpha, \beta))$ induce un epimorfismo $p: \rho \rightarrow \eta$ en $\mathcal{C}_n(R)$, donde

$$\rho: 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow R^{(X)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R^{(X)} \oplus R^{(Y)}$$

$$\begin{array}{ccccc} R^{(X)} & \xrightarrow{\alpha} & P & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow f & & \\ R^{(X)} \oplus R^{(Y)} & \xrightarrow{(f\alpha, \beta)} & Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\mu} & R^{(X)} \\ & & \downarrow f & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}} & R^{(X)} \oplus R^{(Y)} \end{array}$$

Como η es proyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$, dicho epimorfismo se escinde, por lo que existe un monomorfismo $i: \eta \rightarrow \rho$ tal que $ip = 1$. Dicho monomorfismo induce el diagrama conmutativo anexo de donde deducimos que

$$1_P = \alpha\mu \quad \text{y} \quad \mu = \mu_1 f.$$

Así que $1_P = \alpha\mu_1 f$. Por lo tanto, f es un monomorfismo que se escinde. $\square$

Lema 3.140. Si

$$\eta: \quad I \xrightarrow{f} J \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

es inyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$, entonces f es un epimorfismo que se escinde con $I, J \in \text{Inj}(R)$.

Demostración. Sustituyendo R por un cogenerador inyectivo Q , se puede hacer la prueba con argumentos duales a la demostración anterior. $\square$

Proposición 3.141. *[MV18, Lemma 2.5.(2)] Todo proyectivo de $\mathcal{C}_n(R)$ es un coproducto de objetos de la forma*

$$\begin{array}{c} P \xrightarrow{1} P \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P \xrightarrow{1} P \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\ \vdots \\ 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \xrightarrow{1} P \\ 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \end{array}$$

con $P \in \text{Proj}(R)$, es decir, todo proyectivo es isomorfo a un complejo de la forma

$$P_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} P_1 \oplus P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-2} \oplus P_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} P_{n-1} \oplus P_n$$

con $P_i \in \text{Proj}(R) \forall i \in [0, n]$.

Demostración. Sea

$$\eta: P_0 \xrightarrow{f_1} P_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} P_n$$

un objeto proyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$. Probaremos por inducción sobre n la afirmación.

Para $n = 1$ ya se ha probado en el lema anterior. Para $n > 1$, observamos que por 3.134 y la hipótesis de inducción, se sigue que πP es isomorfo a un complejo de la forma

$$Q_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Q_0 \oplus Q_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Q_1 \oplus Q_2 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{n-3} \oplus Q_{n-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Q_{n-2} \oplus Q_{n-1}.$$

con $Q_i \in \text{Proj}(R) \forall i \in [0, n-1]$. Por lo que basta probar que $f_n: Q_{n-2} \oplus Q_{n-1} \rightarrow P_n$ es isomorfo a un morfismo de la forma

$$Q_{n-2} \oplus Q_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Q_{n-1} \oplus Q_n$$

con $Q_n \in \text{Proj}(R)$. Para ello, observamos que si $f_n = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix}$, tenemos que $g_1 = 0$ ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\eta = (Q_0 \rightarrow Q_0 \oplus Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{n-2} \rightarrow 0) \oplus (0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{n-1} \xrightarrow{g_2} P_n).$$

Ahora, por el lema anterior g_2 es un monomorfismo que se escinde. Por lo tanto η es de la forma deseada. $\square$

Proposición 3.142. *[MV18, Lemma 2.5.(3)] Todo inyectivo de $\mathcal{C}_n(R)$ es un copro-*

ducto de objetos de la forma

$$\begin{array}{c}
 E \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\
 E \xrightarrow{1} E \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow E \xrightarrow{1} E \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\
 \vdots \\
 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{1} E
 \end{array}$$

con $E \in \text{Inj}(R)$, es decir, todo inyectivo es isomorfo a un complejo de la forma

$$E_0 \oplus E_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} E_1 \oplus E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-2} \oplus E_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} E_{n-1} \oplus E_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} E_n$$

con $E_i \in \text{Inj}(R) \forall i \in [0, n]$.

Demostración. Se prueba con argumentos duales a los anteriores. $\square$

El siguiente lema es una generalización de [MŠ19, Lemma 5.1]. Los resultados que contiene han sido probados por Frederik Marks y Jorge Vitória en [MV18, Lemma 2.5] y [MV18, Lemma 2.4].

Lema 3.143. *Sea R un anillo. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

- (a) $\mathcal{PF}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ y $\mathcal{FI}$ son cerradas por extensiones;
- (b) $\mathcal{P}$ es cerrada por filtraciones;
- (c) las categorías $\mathcal{P}$ y $\mathcal{PF}$ tienen suficientes proyectivos;
- (d) todo objeto de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{PF}$ tiene dimensión proyectiva $\leq n$;
- (e) las categorías $\mathcal{I}$ y $\mathcal{IF}$ tienen suficientes inyectivos;
- (f) todo objeto de $\mathcal{I}$ y $\mathcal{IF}$ tiene dimensión inyectiva $\leq n$;
- (g) para todo

$$\theta : X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n \in \mathcal{C}_n(R)$$

y $X \in \text{Mod}(R)$ existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_n(R)}(\rho_i(X), \theta) \cong \text{Hom}_R(X, X_i),$$

donde $\rho_i(X)$ es el complejo

$$\rho_i(X) : M_0 \xrightarrow{g_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{g_n} M_n$$

con $g_{i+1} = 1_X$ y $g_k = 0$ para todo $k \neq i+1$ cuando $i \in [0, n-1]$, y $g_n = 0 : 0 \rightarrow X$ y $g_k = 0$ para todo $k \neq n$ en caso de que $i = n$;

(h) para todo $\eta, \theta \in \mathcal{C}_n(R)$ se tiene que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_n(R)}^k(\eta, \theta) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(R)}(\eta, \theta[k]) \quad \forall k \in [1, n];$$

en particular, $\forall k \in [1, n]$, se tiene que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_n(R)}^k(\eta, \theta) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\eta, \theta[k]) \quad \forall \eta \in \mathcal{P}, \forall \theta \in \mathcal{C}_n(R)$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_n(R)}^k(\theta, \eta) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\theta, \eta[k]) \quad \forall \eta \in \mathcal{I}, \forall \theta \in \mathcal{C}_n(R).$$

Demostración.

- (a) Basta con recordar que $\text{inj}(R)$, $\text{Inj}(R)$, $\text{Proj}(R)$ y $\text{proj}(R)$ son cerrados por extensiones.
- (b) Notemos que $\text{Proj}(R)$ es cerrado por filtraciones por el lema de Eklof (ver [GT06, Lemma 3.1.2]). Luego, (b) se satisface.
- (c) & (d) En el diagrama adjunto tenemos la sucesión exacta buscada en $\mathcal{C}_n(R)$.

[illegible]

- (e) & (f) Se construye una sucesión exacta de manera dual a la construida en (c) y (d).

(g) Trivial.

(h) Ver [MV18, Lemma 2.4].

□

Buscamos transmitir información de $\mathcal{C}_n(R)$ a $\text{Mod}(R)$. Con tal fin, recordamos el siguiente hecho y presentamos la siguiente definición.

Definición 3.144. Diremos que un complejo

$$\theta : M_0 \xrightarrow{g_1} M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{g_n} M_n \in \mathcal{C}_n(R)$$

es **exacto** si $\text{Im}(g_i) = \text{Ker}(g_{i+1})$ para todo $i \in [1, n-1]$. Denotaremos como $\mathcal{E}_n(R)$ a la clase de complejos exactos en $\mathcal{C}_n(R)$.

Hecho 3.145. *A todo*

$$\theta : M_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_n} M_n \in \mathcal{C}_n(R)$$

exacto podemos asociarle los módulos $\text{Coker}(g_n) \in \text{Mod}(R)$ y $\text{Ker}(g_1)$, así como a todo morfismo $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ en $\mathcal{C}_n(R)$ podemos asociarle los morfismos $\text{Coker}((\alpha_0, \dots, \alpha_n))$ y $\text{Ker}((\alpha_0, \dots, \alpha_n))$ en $\text{Mod}(R)$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{n-1} & \xrightarrow{f_n} & X_n & \rightarrow & \text{Coker}(f_n) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \text{Coker}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{n-1} & \xrightarrow{g_n} & Y_n & \rightarrow & \text{Coker}(g_n) \rightarrow 0 \\ & & & & & & \\ & & 0 \rightarrow \text{Ker}(f_1) \rightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots & & & & \\ & & \text{Ker}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \downarrow & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 \\ & & 0 \rightarrow \text{Ker}(g_1) \rightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \cdots & & & & \end{array}$$

Estas asignaciones definen funtores covariantes

$$\text{Coker}(-) : \mathcal{E}_n(R) \rightarrow \text{Mod}(R) \quad \text{y} \quad \text{Ker}(-) : \mathcal{E}_n(R) \rightarrow \text{Mod}(R).$$

Observación 3.146. *Los funtores $\text{Coker}(-)$ y $\text{Ker}(-)$ son exactos por el lema de la serpiente.*

Nos detendremos un momento para estudiar las propiedades de $\mathcal{E}_n(R)$.

Proposición 3.147. *Sea R un anillo y $n \geq 1$. La clase $\mathcal{E}_n(R)$ cumple las siguientes propiedades:*

- (a) $\mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por productos, coproductos y sumandos directos.
- (b) Dada una sucesión exacta en $\mathcal{C}_n(R)$

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0,$$

si dos entre N , M y K pertenecen a $\mathcal{E}_n(R)$, entonces el tercero también pertenece a $\mathcal{E}_n(R)$.

- (c) $\mathcal{E}_n(R)$ contiene todo elemento de $\mathcal{C}_n(R)$ de dimensión proyectiva finita.
- (d) $\mathcal{E}_n(R)$ contiene todo elemento de $\mathcal{C}_n(R)$ de dimensión inyectiva finita.
- (e) $\text{Proj}((\mathcal{C}_n(R)))$ es un generador $\mathcal{E}_n(R)$ -proyectivo relativo a $\mathcal{E}_n(R)$.
- (f) $\text{Inj}((\mathcal{C}_n(R)))$ es un cogenerador $\mathcal{E}_n(R)$ -inyectivo relativo a $\mathcal{E}_n(R)$.
- (g) Existe $\sigma \in \mathcal{E}_n(R)$ tal que $\text{Add}(\sigma) = \text{Proj}((\mathcal{C}_n(R)))$.
- (h) Existe $\tau \in \mathcal{E}_n(R)$ tal que $\text{Prod}(\tau) = \text{Inj}((\mathcal{C}_n(R)))$.

Demostración. (a) Es claro que $\mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por productos y coproductos. El hecho de que $\mathcal{E}_n(R)$ es cerrado por sumandos directos se sigue de que la homología conmuta con coproductos finitos.

- (b) Basta con considerar la sucesión exacta larga de homología inducida por

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0.$$

- (c) Dado que $\text{Proj}((\mathcal{C}_n(R))) \cup \text{Inj}((\mathcal{C}_n(R))) \subseteq \mathcal{E}_n(R)$ por 3.142, se sigue de (b) lo deseado.
- (d) Se prueba de manera análoga a (c).
- (e)-(h) Son consecuencia de que $\mathcal{C}_n(R)$ es equivalente a $\text{Mod}(\overline{\mathbb{T}_n(R)})$, de modo que tiene un generador proyectivo y un cogenerador inyectivo.

□

Definición 3.148. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{C}_n(R)$.

- (a) Definimos la clase de módulos Σ -**divisibles** como la clase $\mathcal{D}_\Sigma$, que consiste de los módulos $X \in \text{Mod}(R)$ tales que

$$\text{Hom}_R(\sigma, X) : (P_n, X) \xrightarrow{(f_n, X)} (P_{n-1}, X) \rightarrow \dots \rightarrow (P_1, X) \xrightarrow{(f_1, X)} (P_0, X) \rightarrow 0$$

es exacta para todo $\sigma : (P_0 \xrightarrow{f_1} P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{f_n} P_n) \in \Sigma$.

- (b) Definimos la clase la clase $\mathcal{B}_\Sigma$, cuyos elementos $X \in \text{Mod}(R)$ son aquellos que

$$\text{Hom}_R(X, \sigma) : (X, P_0) \xrightarrow{(X, f_0)} (X, P_1) \rightarrow \dots \rightarrow (X, P_{n-1}) \xrightarrow{(X, f_n)} (X, P_n) \rightarrow 0$$

es exacta para todo $\sigma : (P_0 \xrightarrow{f_1} P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{f_n} P_n) \in \Sigma$.

Recordamos el siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en [Ass97, Chapitre IX, Théorème 2.1].

Teorema 3.149 (de comparación). *Sean*

$$\eta : \left(P_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} P_n \right) \in \mathcal{P}, \quad \theta : \left(M_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} M_n \right) \in \mathcal{E}_n(R)$$

y $\pi : M_n \rightarrow X$ el conúcleo de g_n . Entonces, para todo morfismo $\alpha : P_n \rightarrow M_n$ en $\text{Mod}(R)$ tal que $\pi\alpha f_n = 0$, existe un morfismo $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) : \eta \rightarrow \theta$ en $\mathcal{C}_n(R)$ tal que $\alpha_n = \alpha$.

Teorema 3.150. *Sean $\eta : \left(P_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} P_n \right) \in \mathcal{P}$, $\theta : \left(M_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} M_n \right) \in \mathcal{E}_n(R)$, $\pi : M_n \rightarrow X$ el conúcleo de g_n , $k \in [1, n]$ y $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-k}) : \eta \rightarrow \theta[k]$ un morfismo en $\mathcal{C}(R)$. Si existe un morfismo $\gamma : P_{n-k+1} \rightarrow M_n$ en $\text{Mod}(R)$ tal que $\pi(\alpha_{n-k} - \gamma f_{n-k+1}) = 0$, entonces $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-k}) \sim 0$.*

Demostración. En efecto, como $\pi(\alpha_{n-k} - \gamma f_{n-k+1}) = 0$, por la propiedad universal del núcleo existe $\gamma'_1 : P_{n-k} \rightarrow \text{Im}(g_n)$ tal que

$$\alpha_{n-k} - \gamma f_{n-k+1} = i\gamma'_1,$$

donde $i : \text{Im}(g_n) \rightarrow M_n$ es la inclusión natural. Pero, como P_{n-k} es proyectivo, γ'_{n-k} se factoriza a través de $\gamma_1 : P_{n-k} \rightarrow M_{n-1}$ de tal manera que

$$\alpha_{n-k} - \gamma f_{n-k+1} = g_n \gamma_1.$$

Así, recursivamente, probado que para todo $0 < j \leq i$ existe $\gamma_j : P_{j-k+1} \rightarrow M_{n-j}$ tal que

$$\alpha_{j-k+1} - \gamma_{j-1} f_{j-k+2} = g_{n-j} \gamma_j,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} g_{n-j}(\alpha_{j-k} - \gamma_j f_{j-k+1}) &= g_{n-j} \alpha_{j-k} - (\alpha_{j-k+1} - \gamma_{j-1} f_{j-k+2}) f_{j-k+1} \\ &= g_{n-j} \alpha_{j-k} - \alpha_{j-k+1} f_{j-k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, utilizando la propiedad universal del núcleo junto con la propiedad de proyectividad de P_{j-k+1} , podemos concluir que existe un morfismo $\gamma_{j+1} : P_{j-k} \rightarrow M_{n-j-1}$ tal que

$$\alpha_{j-k} - \gamma_j f_{j-k+1} = g_{n-j-1} \gamma_{j+1}.$$

Por lo tanto, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-k}) \sim 0$. □

El siguiente lema es una generalización de [MŠ19, Lemma 5.4], que a su vez está inspirado en [AIR14, Lemma 3.4].

Lema 3.151. *Sea Σ un conjunto en $\mathcal{P}$. Entonces,*

$$\Sigma^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\Sigma) := \{\theta \in \mathcal{E}_n(R) \mid \text{Coker}(\theta) \in \mathcal{D}_\Sigma\}.$$

Demostración. Basta probarlo para Σ unitario. Sean $\eta : (P_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} P_n) \in \mathcal{P}$, $\theta : (M_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} M_n) \in \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ y $X = \text{Coker}(\theta)$. Por 3.143(h), sabemos que $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\eta, \theta[i]) = \text{Ext}_{\mathcal{C}_n(R)}^i(\eta, \theta) = 0 \ \forall i \in [1, n]$. Veremos que, para cada $k \in [1, n]$, $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\eta, \theta[k]) = 0$ implica que $\text{Ker}((f_{n-k}, X)) = \text{Im}((f_{n-k+1}, X))$, donde f_0 es el morfismo $0 : 0 \rightarrow P_0$. En efecto, sabemos que $f_{n-k+1}f_{n-k} = 0$, por lo que $\text{Im}((f_{n-k+1}, X)) \subseteq \text{Ker}((f_{n-k}, X))$. Además, dado $h' \in \text{Ker}((f_{n-k}, X))$, por la proyectividad de P_{n-k} existe $\alpha : P_{n-k} \rightarrow M_n$ tal que $\pi\alpha = h'$, donde $\pi : M_n \rightarrow X$ es el conúcleo de g_n . Entonces, por 3.149, existe un morfismo

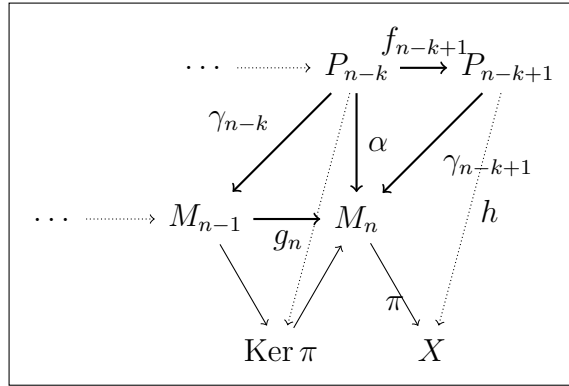
$$(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-k}) : \eta \rightarrow \theta[k]$$

con $\alpha_{n-k} = \alpha$. Pero, por hipótesis $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\eta, \theta[k]) = 0$. De modo que, existe una familia de morfismos $\{\gamma_i : P_i \rightarrow M_{i+k-1}\}_{i=0}^{n-k+1}$ tal que

$$\alpha_j = \gamma_{j+1}f_{j+1} + g_{k+j}\gamma_j \ \forall j \in [0, n-k].$$

En particular, podemos concluir que $h' \in \text{Im}((f_{n-k+1}, X))$, pues

$$h' = \pi\alpha = \pi\alpha_{n-k} = \pi(\gamma_{n-k+1}f_{n-k+1} + g_n\gamma_{n-k}) = \pi\gamma_{n-k+1}f_{n-k+1} + \pi g_n\gamma_{n-k} = \pi\gamma_{n-k+1}f_{n-k+1}.$$



Por lo tanto, con lo anterior podemos concluir que $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) \subseteq \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\eta)$.

Veamos la contención opuesta. Consideramos $\eta \in \mathcal{P}$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$ tal que $X = \text{Coker}(\theta) \in \mathcal{D}_\eta$. Para probar que $\theta \in \eta^\perp$, basta mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\eta, \theta[k]) = 0 \ \forall k \in [1, n]$ por 3.143(h). Sea $k \in [1, n]$. Para ello, observamos que, si $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-k}) \in$

$\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(R)}(\eta, \theta[k])$, tenemos que

$$\pi\alpha_{n-k}f_{n-k} = \pi g_n\alpha_{n-k-1} = 0.$$

Así que $\pi\alpha_{n-k} \in \text{Ker}((f_{n-k}, X)) = \text{Im}((f_{n-k+1}, X))$. Luego, existe $h : P_{n-k+1} \rightarrow X$ tal que $\pi\alpha_{n-k} = hf_{n-k+1}$. Pero, como P_{n-k+1} es proyectivo, existe $\gamma : P_{n-k+1} \rightarrow M_n$ tal que $\pi\gamma = h$. Lo que quiere decir que existe un morfismo $\gamma : P_{n-k+1} \rightarrow M_n$ tal que

$$\pi(\alpha_{n-k} - \gamma f_{n-k+1}) = \pi\alpha_{n-k} - \pi\gamma f_{n-k+1} = 0.$$

Así que, por 3.150, podemos concluir lo deseado. $\square$

Corolario 3.152. Si $\theta : (M_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} M_n) \in \mathcal{E}_n(R)$ satisface que g_n es epimorfismo, entonces $\theta \in \mathcal{P}^\perp$. En particular, todo complejo de la forma

$$P_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} P_1 \oplus P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-2} \oplus P_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} P_{n-1}$$

con $P_i \in \text{Proj}(R)$, es un objeto inyectivo de la subcategoría plena $\mathcal{P}$.

Podemos probar una versión dual del lema y corolarios anteriores. Los incluimos en el siguiente lema por completez.

Lema 3.153. Se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) ${}^\perp\Sigma \cap \mathcal{E}_n(R) = \text{Ker}^{-1}(\mathcal{B}_\Sigma) := \{\theta \in \mathcal{E}_n(R) \mid \text{Ker}(\theta) \in \mathcal{B}_\Sigma\}$ para todo conjunto $\Sigma \subseteq \mathcal{I}$,
- (b) si $\theta : (M_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} M_n) \in \mathcal{E}_n(R)$ satisface que g_1 es un monomorfismo, entonces $\theta \in {}^\perp\mathcal{I}$,
- (c) todo complejo de la forma

$$E_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} E_2 \oplus E_3 \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-2} \oplus E_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} E_{n-1} \oplus E_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} E_n$$

con $E_i \in \text{Inj}(R)$ es proyectivo en $\mathcal{I}$.

Utilizaremos el resultado anterior para hacer una conexión entre $\mathcal{C}_n(R)$ y $\text{Mod}(R)$. Con tal fin será de utilidad la siguiente notación.

Definición 3.154. Para cada $X \in \text{Mod}(R)$, denotamos

$$K_X := (X \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0) \in \mathcal{C}_n(R) \quad \text{y} \quad C_X := (0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow X) \in \mathcal{C}_n(R).$$

Cabe observar que $\text{Coker}(C_X) = X = \text{Ker}(K_X)$ para todo $X \in \text{Mod}(R)$ y que $\bigoplus_{i \in I} C_{X_i} \cong C_{\bigoplus_{i \in I} X_i}$ para cualquier conjunto $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq \text{Mod}(R)$.

Tenemos las siguientes propiedades.

Lema 3.155. Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{P}$ y $Z \subseteq \mathcal{I}$ conjuntos. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $\Sigma^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrado por coproductos en $\mathcal{C}_n(R)$ si, y sólo si, $\mathcal{D}_\Sigma$ también lo es en $\text{Mod}(R)$.
- (a') ${}^\perp Z \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrado por productos en $\mathcal{C}_n(R)$ si, y sólo si, $\mathcal{B}_Z$ también lo es en $\text{Mod}(R)$.
- (b) $\Sigma^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrado por n -cocientes en $\mathcal{E}_n(R)$ si, y sólo si, $\mathcal{D}_\Sigma$ es cerrado por n -cocientes en $\text{Mod}(R)$.
- (b') ${}^\perp Z \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrado por n -submódulos en $\mathcal{E}_n(R)$ si, y sólo si, $\mathcal{B}_Z$ es cerrado por n -submódulos en $\text{Mod}(R)$.
- (c) $\text{Coker}(\text{Gen}_1(\Sigma) \cap \mathcal{E}_n(R)) = \text{Gen}_1(\text{Coker}(\Sigma))$.
- (c') $\text{Ker}(\text{Cogen}_1(Z) \cap \mathcal{E}_n(R)) = \text{Cogen}_1(\text{Ker}(Z))$.
- (d) Si $\Sigma \subseteq \mathcal{E}_n(R) \cap \mathcal{P}$, entonces $\text{Coker}(\text{Gen}_n(\Sigma) \cap \mathcal{E}_n(R)) \subseteq \text{Gen}_n(\text{Coker}(\Sigma))$.
- (d') Si $Z \subseteq \mathcal{E}_n(R) \cap \mathcal{I}$, entonces $\text{Ker}(\text{Cogen}_n(Z) \cap \mathcal{E}_n(R)) \subseteq \text{Cogen}_n(\text{Ker}(Z))$.
- (e) Si $\eta \in \mathcal{P}$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$ satisfacen que $\text{Coker}(\theta) \in \text{Gen}_1(\text{Coker}(\eta))$, entonces existe $\eta' \in \mathcal{P}$ de la forma

$$\eta' : R^{(\beta_0)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R^{(\beta_0)} \oplus R^{(\beta_1)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} R^{(\beta_1)} \oplus R^{(\beta_2)} \rightarrow \dots \rightarrow R^{(\beta_{n-2})} \oplus R^{(\beta_{n-1})} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} R^{(\beta_{n-1})}$$

tal que $\theta \in \text{Gen}_1(\eta \oplus \eta')$.

- (e') Si $\eta \in \mathcal{I}$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$ satisfacen que $\text{Ker}(\theta) \in \text{Cogen}_1(\text{Ker}(\eta))$, entonces existe $\eta' \in \mathcal{I}$ de la forma

$$\eta' : Q^{(\beta_0)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} Q^{(\beta_0)} \oplus Q^{(\beta_1)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Q^{(\beta_1)} \oplus Q^{(\beta_2)} \rightarrow \dots \rightarrow Q^{(\beta_{n-2})} \oplus Q^{(\beta_{n-1})} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Q^{(\beta_{n-1})}$$

tal que $\theta \in \text{Cogen}_1(\eta \oplus \eta')$, donde Q es un cogenerador inyectivo.

- (f) Si $k \geq 1$, $\eta \in \mathcal{P}$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$ satisfacen que $\text{Coker}(\theta) \in \text{Gen}_k(\text{Coker}(\eta))$, entonces existe $\rho \in \mathcal{P}$ de la forma

$$\rho : R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} R \oplus R \rightarrow \dots \rightarrow R \oplus R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} R$$

tal que $\theta \in \text{Gen}_k(\eta \oplus \rho')$.

- (f') Si $k \geq 1$, $\eta \in \mathcal{I}$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$ satisfacen que $\text{Ker}(\theta) \in \text{Cogen}_n(\text{Ker}(\eta))$, entonces existe $\eta' \in \mathcal{I}$ de la forma

$$\vartheta' : Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} Q \oplus Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Q \oplus Q \rightarrow \dots \rightarrow Q \oplus Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Q$$

tal que $\theta \in \text{Cogen}_n(\eta \oplus \vartheta')$, donde Q es un cogenerador inyectivo.

(g) Si $\Sigma \subseteq \mathcal{PF}$, entonces $\Sigma^\perp$, $\mathcal{D}_\Sigma$ y $\Sigma^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ son cerrados por coproductos.

Demostración. Por 3.151 sabemos que $\Sigma^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\Sigma)$, de modo que $C_X \in \Sigma^\perp$ para todo $X \in \mathcal{D}_\Sigma$.

(a) Supongamos que $\Sigma^\perp$ es cerrado por coproductos. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ un conjunto de elementos de $\mathcal{D}_\Sigma$. Por hipótesis,

$$C_{\bigoplus_{i \in I} X_i} \cong \bigoplus_{i \in I} C_{X_i} \in \Sigma^\perp.$$

Así que $\bigoplus_{i \in I} X_i = \text{Coker}(C_{\bigoplus_{i \in I} X_i}) \in \mathcal{D}_\Sigma$.

Supongamos que $\mathcal{D}_\Sigma$ es cerrado por coproductos. Sea $\{\theta_i\}_{i \in I}$ una familia en $\Sigma^\perp$. Por hipótesis,

$$\text{Coker}\left(\bigoplus_{i \in I} \theta_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Coker}(\theta_i) \in \mathcal{D}_\Sigma.$$

Por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} \theta_i \in \Sigma^{\perp 1}$.

(b) ($\Leftarrow$) Sea

$$0 \rightarrow \alpha \rightarrow \psi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \psi_n \rightarrow \beta \rightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathcal{C}_n(R)$ con $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Sigma^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_n(R)$. Como $\psi_1, \dots, \psi_n \in \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\Sigma)$, la sucesión exacta anterior induce una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n \rightarrow B \rightarrow 0,$$

donde $A = \text{Coker}(\alpha)$, $B = \text{Coker}(\beta)$ y $Y_i \in \text{Coker}(\psi_i) \forall i \in [1, n]$. Lo que implica que $B \in \mathcal{D}_\Sigma$ y así $\beta \in \text{Coker}^{-1}\mathcal{D}_\Sigma$.

($\Rightarrow$) Sea $0 \rightarrow A \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n \rightarrow B \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\text{Mod}(R)$ con $Y_i \in \mathcal{D}_\Sigma \forall i \in [1, n]$. Dicha sucesión induce una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C_A \rightarrow C_{Y_1} \rightarrow \dots \rightarrow C_{Y_n} \rightarrow C_B \rightarrow 0,$$

donde $C_{Y_i} \in \text{Coker}^{-1}\mathcal{D}_\Sigma$ y $C_A, C_B \in \mathcal{E}_n(R)$. Por lo tanto, $C_B \in \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\Sigma)$, y así $B \in \mathcal{D}_\Sigma$.

(c) Si $X \in \text{Gen}_1(\text{Coker}(\Sigma))$, existe un epimorfismo $\bigoplus_{i \in I} \text{Coker}(\sigma_i) \rightarrow X$ con $\sigma_i \in \Sigma \forall i \in I$, el cual induce un epimorfismo en $\mathcal{C}_n(R)$ $\bigoplus_{i \in I} \sigma_i \rightarrow C_X$. Por lo tanto, $C_X \in \text{Gen}_1(\Sigma) \cap \mathcal{E}_n(R)$ y así que $X = \text{Coker}(C_X) \in \text{Coker}(\text{Gen}(\Sigma) \cap \mathcal{E}_n(R))$. Si $X \in \text{Coker}(\text{Gen}(\Sigma) \cap \mathcal{E}_n(R))$, entonces existe un complejo exacto θ , con $\text{Coker}(\theta) = X$, y un epimorfismo en $\mathcal{C}_n(R)$ $\bigoplus_{i \in I} \sigma_i \rightarrow \theta$, con $\sigma_i \in \Sigma \forall i \in I$. Luego, por el lema de la serpiente tenemos que existe un epimorfismo $\bigoplus_{i \in I} \text{Coker}(\sigma_i) \rightarrow X$. Por lo tanto, $X \in \text{Gen}(\text{Coker}(\Sigma))$.

- (d) Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{E}_n(R) \cap \mathcal{P}$. Si $X \in \text{Coker}(\text{Gen}_n(\Sigma) \cap \mathcal{E}_n(R))$, entonces existe un complejo exacto θ tal que $X = \text{Coker}(\theta)$ y existe una sucesión exacta

$$\sigma_n \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \theta \rightarrow 0,$$

donde $\sigma_i \in \text{Add}(\Sigma) \forall i \in [1, n]$. Luego, por 3.146, la sucesión anterior induce una sucesión exacta

$$S_n \rightarrow \dots \rightarrow S_1 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

donde $S_i = \text{Coker}(\sigma_i) \forall i$. Por lo tanto,

$$X \in \text{Gen}_n(\text{Coker}(\text{Add}(\Sigma))) \subseteq \text{Gen}_n(\text{Coker}(\Sigma)).$$

- (e) Sean $\eta : (P_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} P_n) \in \mathcal{P}, \theta : (M_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} M_n) \in \mathcal{E}_n(R)$, $X = \text{Coker}(\theta)$ y $T = \text{Coker}(\eta)$. Si $X \in \text{Gen}_1(T)$, entonces existe un epimorfismo $\gamma : T^{(\alpha)} \rightarrow X$. Luego, como $P_i \in \text{Proj}(R)$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$, γ induce un morfismo $(\gamma_0, \dots, \gamma_n) : \eta^{(\alpha)} \rightarrow \theta$ por el teorema de comparación. Además, para cada $k \in [0, n-1]$ consideramos un epimorfismo $\alpha_k : R^{(\beta_k)} \rightarrow M_k$ y el morfismo $(0, \dots, \alpha_k, g_{k+1}\alpha_k, 0, \dots, 0) : \rho_k \rightarrow \theta$, donde

$$\rho_k : (0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow R^{(\beta_k)} \xrightarrow{1} R^{(\beta_k)} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0)$$

es el complejo cuyo $k+1$ morfismo es $R^{(\beta_k)} \xrightarrow{1} R^{(\beta_k)}$ y los demás son cero. Por la propiedad universal de coproducto, sabemos que existe un morfismo

$$\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_{n-1} \oplus \eta^{(\alpha)} \rightarrow \theta,$$

el cual está ilustrado en el diagrama adjunto. Observamos que basta probar que el morfismo

$$\varphi = (g_n \alpha_{n-1}, \gamma_n) : R^{(\beta_{n-1})} \oplus P_n^{(\alpha)} \rightarrow M_n$$

es un epimorfismo para concluir lo deseado. Para probarlo basta observar que φ induce un epimorfismo

$$\begin{array}{ccccc} R^{(\beta_0)} \oplus P_0^{(\alpha)} & \xrightarrow{(\alpha_0 \ \gamma_0)} & M_0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R^{(\beta_1)} \oplus R^{(\beta_0)} \oplus P_1^{(\alpha)} & \xrightarrow{(\alpha_1 \ g_1 \alpha_0 \ \gamma_1)} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R^{(\beta_2)} \oplus R^{(\beta_1)} \oplus P_2^{(\alpha)} & \xrightarrow{(\alpha_2 \ g_2 \alpha_1 \ \gamma_2)} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R^{(\beta_{n-1})} \oplus R^{(\beta_{n-2})} \oplus P_{n-1}^{(\alpha)} & \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R^{(\beta_{n-1})} \oplus P_n^{(\alpha)} & \xrightarrow{(g_n \alpha_{n-1} \ \gamma_n)} & M_n & & \end{array}$$

$$\text{Ker}(g_n \alpha_{n-1}) \oplus R^{(\beta_{n-2})} \oplus \text{Ker}(g_n \gamma_{n-1}) \rightarrow \text{Ker}(g_n).$$

Entonces, como γ es un epimorfismo, por el lema de la serpiente podemos concluir que φ es un epimorfismo.

- (f) Sean $\eta \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}_n(R)$, $X \in \text{Gen}_n(\text{Coker}(\eta))$ y $\theta \in \mathcal{E}_n(R)$ tal que $\text{Coker}(\theta) = X$. Entonces, por definición existe una sucesión exacta

$$S_n \rightarrow \dots \rightarrow S_1 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

donde $S_i \in \text{Add}(\text{Coker}(\eta)) \forall i \in [1, n]$. Consideremos S_i para un $i \in [1, n]$ arbitrario. Dado que $S_i \in \text{Add}(\text{Coker}(\eta))$ y $\eta \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}_n(R)$, por 3.147(a) se sigue que $S_i = \text{Coker}(\sigma_i)$ para un $\sigma_i \in \text{Add}(\eta) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{E}_n(R)$. Ahora, utilizando 3.147(b), el teorema de comparación 3.149 y (e), podemos utilizar la sucesión exacta anterior para construir una sucesión exacta

$$\sigma'_n \rightarrow \dots \rightarrow \sigma'_1 \rightarrow \theta \rightarrow 0,$$

donde $\sigma'_i \in \text{Add}(\sigma_i \oplus \rho)$. Por lo que hemos probado que $\theta \in \text{Gen}_n(\eta \oplus \rho)$.

- (g) Recordamos que en caso de que M sea un módulo con una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con todo P_i finitamente generado, entonces para toda familia de módulos $\{N_i\}_{i \in I}$ se tiene que

$$\text{Ext}_R^i \left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Ext}_R^i(M, N_i) \quad \forall i > 0.$$

En particular, si $\Sigma \subseteq \mathcal{PF}$, tenemos que $\Sigma^\perp$ es cerrado por coproductos por 3.143(c). Por lo tanto, $\mathcal{D}_\Sigma$ es cerrado por coproductos por (a).

Por último, los enunciados (a'), (b'), (c'), (d'), (e') y (f') se prueban de manera dual.

□

Ya estamos listos para comenzar con nuestro cometido.

Proposición 3.156. *Sea*

$$\sigma : P_0 \xrightarrow{\sigma_1} P_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\sigma_n} P_n$$

una n -presentación proyectiva de M . Si $n > 0$, entonces

$$\mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_{\sigma_1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n M^{\perp_i} \right).$$

Más aún, en caso de que $X \in \mathcal{D}_\sigma$ tenemos que

$$\text{Hom}_R(\text{Ker}(\sigma_1), X) \cong \text{Ext}_R^1(\text{Im}(\sigma_1), X) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(M, X).$$

Demostración. Tenemos la familia de sucesiones exactas

$$\left\{ 0 \rightarrow K_i \xrightarrow{b_i} P_i \xrightarrow{a_i} K_{i+1} \rightarrow 0 \right\}_{i=0}^n,$$

donde $\sigma_i = b_i a_{i-1}$, $K_i = \text{Im}(\sigma_i) \forall i \in [1, n]$, $K_0 := \text{Ker}(\sigma_1)$ y $K_{n+1} = M$. Por lo que, al aplicar el funtor $\text{Hom}_R(-, X)$, tenemos la familia de sucesiones exactas

$$\mathcal{F} = \left\{ 0 \rightarrow \text{Hom}_R(K_{i+1}, X) \xrightarrow{\alpha_i} \text{Hom}_R(P_i, X) \xrightarrow{\beta_i} \text{Hom}_R(K_i, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(K_{i+1}, X) \rightarrow 0 \right\}_{i=0}^n,$$

donde $\alpha_i := \text{Hom}_R(a_i, X)$ y $\beta_i := \text{Hom}_R(b_i, X) \forall i \in [1, n]$. Veamos que

$$\mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_{\sigma_1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n M^{\perp_i} \right).$$

($\subseteq$) Sea $X \in \mathcal{D}_\sigma$. Entonces, la sucesión

$$\eta : \text{Hom}_R(P_n, X) \rightarrow \text{Hom}_R(P_{n-1}, X) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_R(P_0, X) \rightarrow 0$$

es exacta. Notemos que $\text{Hom}_R(\sigma_i, X) = \alpha_{i-1} \beta_i \forall i \in [1, n]$ y que, dado que α_i es monomorfismo $\forall i \in [1, n]$, tenemos

$$\text{Im}(\alpha_{i-1} \beta_i) = \alpha_{i-1} \text{Im}(\beta_i) \quad \text{y} \quad \text{Ker}(\alpha_{i-1} \beta_i) = \text{Ker}(\beta_i) = \text{Im}(\alpha_i).$$

Entonces, como $\text{Im}(\text{Hom}_R(\sigma_{i+1}, X)) = \text{Ker}(\text{Hom}_R(\sigma_i, X)) \forall i \in [1, n-1]$, tenemos que

$$\alpha_i \text{Im}(\beta_{i+1}) = \text{Im}(\alpha_i) \forall i \in [1, n-1].$$

Por lo tanto, de la inyectividad de α_i podemos concluir que β_{i+1} es epimorfismo $\forall i \in [1, n-1]$. Por lo tanto, $\text{Ext}_R^1(K_{i+2}, X) = 0 \forall i \in [1, n-1]$. Además, como $\text{Hom}_R(\sigma_1, X) = \alpha_0 \beta_1$ es sobreyectiva, podemos concluir que α_0 es biyectiva, β_1 es sobreyectiva y $\beta_0 = 0$, por lo que también podemos concluir que

$$\text{Ext}_R^1(K_2, X) = 0, \quad \text{y} \quad \text{Hom}_R(K_0, X) \cong \text{Ext}_R^1(K_1, X). \quad (3.A)$$

Así que, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\text{Ext}_R^i(M, X) \cong \text{Ext}_R^1(K_{2-i+n}, X) = 0 \forall i \in [1, n+1].$$

Por lo tanto, podemos concluir que $X \in \bigcap_{i=1}^n M^{\perp_i}$. Además, utilizando 3.A, obtenemos el isomorfismo del segundo enunciado de la proposición.

Por otro lado, dado que $X \in \mathcal{D}_\sigma$, sabemos que $\text{Hom}_R(\sigma_1, X)$ es un epimorfismo. Así que por definición $X \in \mathcal{D}_{\sigma_1}$.

Por lo tanto, hemos probado que $\mathcal{D}_\sigma \subseteq \mathcal{D}_{\sigma_1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n M^{\perp_i}\right)$.

($\supseteq$) Supongamos ahora que $X \in \mathcal{D}_{\sigma_1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n M^{\perp_i}\right)$. Se sigue que la familia $\mathcal{F}$ ahora consiste de las sucesiones exactas

$$\mathcal{F} = \left\{ 0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(K_{i+1}, X) \xrightarrow{\alpha_i} \operatorname{Hom}_R(P_i, X) \xrightarrow{\beta_i} \operatorname{Hom}_R(K_i, X) \rightarrow 0 \right\}_{i=1}^n,$$

y además $\operatorname{Hom}_R(\sigma_1, X)$ es un epimorfismo. Por lo tanto,

$$\operatorname{Hom}_R(P_n, X) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(P_{n-1}, X) \rightarrow \dots \rightarrow \operatorname{Hom}_R(P_0, X) \rightarrow 0$$

es exacta, y así $X \in \mathcal{D}_\sigma$. □

Corolario 3.157. Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{E}_n(R)$ y $Z \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{E}_n(R)$ conjuntos. Entonces,

- (a) $\mathcal{D}_\Sigma$ es cerrado por extensiones y productos arbitrarios, y
- (b) $\mathcal{B}_Z$ es cerrado por extensiones y coproductos arbitrarios.

Demostración. Se sigue de 3.111(a) junto con 3.156. □

Proposición 3.158. Sean $M \in \operatorname{Mod}(R)$ y

$$\sigma : P_n \xrightarrow{\sigma_n} P_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\sigma_1} P_0$$

una n -presentación proyectiva de M . Si M es un R -módulo tal que $\operatorname{pd}(M) \leq n$, entonces $\mathcal{D}_\sigma$ es cerrado por n -cocientes. Más aún, si $\Sigma \subseteq \operatorname{Coker}^{-1}(\mathcal{P}_n)$ es un conjunto, entonces $\mathcal{D}_\Sigma$ es cerrado por n -cocientes.

Demostración. En efecto, recordamos que una clase $\mathcal{X}$ es cerrada bajo k -cocientes si dada una sucesión exacta

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow Y \rightarrow 0$$

con $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}$ tenemos que $Y \in \mathcal{X}$. Recordamos también que $\operatorname{pd}(M) \leq n$ si, y sólo si, $M^\perp$ es cerrado por n -cocientes por 1.9. Por lo tanto, la clase

$$\mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_{\sigma_n} \cap M^\perp$$

es cerrado por n -cocientes, ya que $\mathcal{D}_{\sigma_n}$ también es cerrado por n -cocientes por ser cerrado por cocientes, ver 3.111(a). □

Definición 3.159. Sea $T \in \operatorname{Mod}(R)$.

- Decimos que T es un módulo **n -silting parcial** si existe una n -presentación proyectiva η de T tal que

(S1) $\mathcal{D}_\eta$ es una clase cerrada por n -cocientes y coproductos.

(S2) $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{D}_\eta$.

- Decimos que T es un módulo n -**silting** si existe una n -presentación proyectiva η de T tal que $\text{Gen}_n(T) = \mathcal{D}_\eta$.

Observación 3.160. *Si T es un módulo n -silting respecto a una n -presentación proyectiva η tal que $\text{Gen}_n(T) = \text{Gen}_{n+1}(T)$, entonces T es n -silting parcial respecto a η . En efecto, es claro que si $\text{Gen}_n(T) = \mathcal{D}_\eta$, entonces $\mathcal{D}_\eta$ es cerrado por coproductos y que $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{D}_\eta$. Además, por 3.157 sabemos que $\mathcal{D}_\eta = \text{Gen}_n(T)$ es cerrado por extensiones. Entonces, por 1.53, $\mathcal{D}_\eta$ es cerrado por n -cocientes. Por lo tanto, T es n -silting parcial respecto a η .*

En [MŠ19], Frederik Marks y Jan Šťovíček mostraron que los módulos silting están relacionados con las localizaciones universales del anillo. Para ello, en [MŠ19, Lemma 6.2] mostraron que los objetos silting se pueden caracterizar por medio de los objetos tilting en $\mathcal{C}_2(R)$. A continuación buscaremos extender este resultado relacionando los módulos n -silting con los complejos n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grandes en $\mathcal{C}_n(R)$. Para ello, cabe hacer la siguiente observación que nos ayudará a manejar con más facilidad estos objetos en este contexto.

Observación 3.161. *Sea $\eta \in \mathcal{E}_n(R)$.*

- (a) *Por 3.147(a,b), sabemos que $\mathcal{E}_n(R)$ es una clase gruesa en $\mathcal{C}_n(R)$. Más aún, por 3.147(e), sabemos que $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ es un generador de $\mathcal{E}_n(R)$. Por lo tanto, se sigue de 2.89, que η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande si, y sólo si, η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado.*
- (b) *Notamos que η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial si, y sólo si, $\text{Add}(\eta) \subseteq \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ y $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por n -cocientes en $\mathcal{E}_n(R)$. En efecto, si η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial, entonces se sigue que $\text{Add}(\eta) \subseteq \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ por (TS0) y (TS2). Además, por (TS1) y 1.9, $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por n -cocientes en $\mathcal{E}_n(R)$. Veamos ahora que $\text{Add}(\eta) \subseteq \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ y $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por n -cocientes en $\mathcal{E}_n(R)$ implica que η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial. Primeramente, notamos que (TS0) se cumple por 3.147(a,b); (TS1) se cumple por 1.9; (TS2) se satisface por la hipótesis de que $\text{Add}(\eta) \subseteq \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$; (TS4) se cumple por 3.147(f); y (TS5) se cumple trivialmente, ya que $\text{Add}(\eta)$ es una clase precubriente.*
- (c) *Sean $\eta \in \mathcal{P}$ un objeto n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial y $\eta' \in \mathcal{P}^\perp \cap \text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$. Entonces, $\eta \oplus \eta'$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial. En efecto, basta con utilizar (b). Como $\eta' \in \text{Proj}(\mathcal{C}_n(R)) \subseteq \mathcal{E}_n(R)$ por 3.147(e), tenemos $\text{Add}(\eta \oplus \eta') \subseteq \mathcal{E}_n(R)$ por 3.147(a). Además, como*

$\eta \in \mathcal{P}$ y $\eta' \in \mathcal{P}^\perp$, se sigue que $\text{Add}(\eta \oplus \eta') \subseteq \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ por (b). Finalmente, como $\eta' \in \text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ tenemos que $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = (\eta \oplus \eta')^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$. Por lo tanto, se sigue de (b) que $\eta \oplus \eta'$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial.

Teorema 3.162. Sean $\eta \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}_n(R)$ y $T = \text{Coker}(\eta)$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) T es n -silting parcial respecto a η si, y sólo si, η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial en $\mathcal{C}_n(R)$ y $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por coproductos.
- (b) T es n -silting respecto a η en $\text{Mod}(R)$ si, y sólo si, $\eta \oplus \rho$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande en $\mathcal{C}_n(R)$ y $\mathcal{D}_\eta \subseteq \text{Gen}_n(T)$, donde

$$\begin{aligned} \rho : \quad R &\xrightarrow{1_R} R \text{ para } n = 1 \\ \rho : \quad R &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} R \text{ para } n = 2 \\ \rho : \quad R &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} R \oplus R \rightarrow \dots \rightarrow R \oplus R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} R \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

Demostración. (a) T es n -silting parcial respecto a η si, y sólo si, $\text{Add}(T) \subseteq \mathcal{D}_\eta$ y $\mathcal{D}_\eta$ es una clase cerrada por n -cocientes y coproductos. Lo anterior es equivalente a que $\text{Add}(\eta) \subseteq \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ por 3.151, y a que $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ sea cerrada por n -cocientes en $\mathcal{E}_n(R)$ y coproductos por 3.155(a) y 3.155(b). Por lo tanto, T es silting parcial si, y sólo si, η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial y $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es cerrada por coproductos por 3.161(b).

- (b) ($\Leftarrow$) Supongamos que $\eta \oplus \rho$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting. Primeramente, observamos que $\eta \oplus \rho$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado por 3.161(a). Así que, como ρ es proyectivo en $\mathcal{C}_n(R)$, tenemos que

$$\text{Gen}_n(\eta \oplus \rho) \cap \mathcal{E}_n(R) = (\eta \oplus \rho)^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\eta)$$

por 2.90 y 3.151. De la igualdad anterior podemos concluir que $\eta \in \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\eta)$. Además, debido a que $\eta \oplus \rho$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting, sabemos que $\eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$ es una clase cerrada por n -cocientes en $\mathcal{E}_n(R)$ y coproductos, lo que implica que $\mathcal{D}_\eta$ es cerrada por n -cocientes y coproductos por 3.155. Entonces, utilizando el hecho de que $T = \text{Coker}(\eta) \in \mathcal{D}_\eta$, tenemos que $\text{Gen}_n(T) \subseteq \mathcal{D}_\eta$. Por lo tanto, $\text{Gen}_n(T) = \mathcal{D}_\eta$.

($\Rightarrow$) Supongamos que T es n -silting respecto a η . Entonces, por 3.160 y (a), sabemos que η es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial en $\mathcal{C}_n(R)$. Luego, como ρ es proyectivo e inyectivo en $\mathcal{P}$ por 3.152, se sigue de tenemos que $\eta \oplus \rho$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande $\text{Proj}(\mathcal{C}_n(R))$ -saturado parcial y que

$$\eta \oplus \rho \in (\eta \oplus \rho)^\perp = \eta^\perp.$$

Veamos que $\text{Gen}_n(\eta \oplus \rho) \cap \mathcal{E}_n(R) = (\eta \oplus \rho)^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$. Por 3.161(b), se sigue que $\text{Gen}_n(\eta \oplus \rho) \cap \mathcal{E}_n(R) \subseteq (\eta \oplus \rho)^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)$. Por otro lado, para todo

$$\theta \in (\eta \oplus \rho)^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = \eta^\perp \cap \mathcal{E}_n(R) = \text{Coker}^{-1}(\mathcal{D}_\eta) \quad (3.B)$$

tenemos que $\text{Coker}(\theta) \in \mathcal{D}_\eta = \text{Gen}_n(T) = \text{Gen}_n(\text{Coker}(\eta))$, lo que implica que $\theta \in \text{Gen}_n(\eta \oplus \rho)$ por 3.155(f). Por lo tanto,

$$\text{Gen}_n(\eta \oplus \rho) \cap \mathcal{E}_n(R) = (\eta \oplus \rho)^\perp \cap \mathcal{E}_n(R).$$

Con esto hemos probado que $\eta \oplus \rho$ es n - $\mathcal{E}_n(R)$ -tilting grande en $\mathcal{C}_n(R)$ por 3.161(a) y 2.90. Más aún, de 3.B tenemos que

$$\mathcal{D}_\eta \subseteq \text{Coker}\left((\eta \oplus \rho)^\perp \cap \mathcal{E}_n(R)\right) = \text{Coker}\left(\text{Gen}_n(\eta \oplus \rho) \cap \mathcal{E}_n(R)\right) \subseteq \text{Gen}_n(T).$$

□

A. Categorías abelianas

El objetivo de este apéndice es dar una breve exposición sobre los resultados en categorías abelianas que utilizaremos a lo largo de la tesis. A grandes rasgos, el contenido de este apéndice se divide en tres partes.

En la primera parte, que consiste en las secciones A.1, A.2 y A.3, veremos una exposición de las definiciones y propiedades básicas en la teoría de categorías abelianas. Daremos particular énfasis en la prueba de ciertos diagramas conmutativos de sucesiones exactas relacionados con pullbacks y pushouts. Finalmente, daremos una prueba del lema de la serpiente.

En la segunda parte, que consiste en la sección A.3, definiremos el funtor $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(-, -)$ de Yoneda, y estudiaremos los grupos de extensiones. Para ello, dados $A, B \in \mathcal{C}$, consideramos una relación de equivalencia en la clase de sucesiones exactas de B en A de longitud n . Las clases de equivalencia inducidas por dicha relación recibirán el nombre de extensiones, denotando a la colección de todas las extensiones como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, B)$. En particular, caracterizaremos las sucesiones exactas η tales que $\bar{\eta} = 0$ en $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, B)$, y veremos que el funtor $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(-, -)$ conmuta con coproductos finitos en ambas variables.

Finalmente, en la tercera parte, que consiste en las secciones A.4 y A.5, introduciremos las nociones de categoría Ab3, Ab4 y Ab5. Estas nociones fueron presentadas por Alexander Grothendieck en [Gro57] para estudiar categorías abelianas con estructura adicional. Al respecto, nuestro principal cometido será caracterizar las categorías abelianas en las que el funtor $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(-, X)$ manda coproductos en productos.

A.1. Nociones básicas

En esta sección daremos las nociones básicas sobre categorías abelianas. Nos basaremos en [Pop73, Mit65] y en las notas del curso de avanzado de álgebra impartido por el Dr. Octavio Mendoza Hernández en el semestre 2015-2 en el Instituto de Matemáticas.

Definición A.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- (a) Decimos que $\mathcal{C}$ es **normal** si tiene objeto cero y todo monomorfismo es el núcleo de un morfismo.

- (b) Decimos que $\mathcal{C}$ es **conormal** si tiene objeto cero y todo epimorfismo es el conúcleo de un morfismo.
- (c) Decimos que $\mathcal{C}$ es **exacta en el sentido de B. Mitchell** si es normal, conormal, tiene núcleos y conúcleos, y todo morfismo

$$\alpha : A \rightarrow B$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \searrow \nearrow & \\ q & X & v \end{array}$$

tiene una factorización canónica $\alpha = vq$ donde v es un monomorfismo y q es un epimorfismo.

- (d) Decimos que $\mathcal{C}$ es **aditiva** si tiene objeto cero y para cualesquiera $M, N \in \mathcal{C}$ se tiene que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ es un grupo abeliano.
- (e) Decimos que $\mathcal{C}$ es **abeliana** si es exacta en el sentido de B. Mitchell y aditiva.

Observación A.2. Cabe hacer las siguientes observaciones que utilizaremos libremente:

- (a) Dado un morfismo α en una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell $\mathcal{C}$ y su factorización canónica $\alpha = \alpha'\alpha''$, se puede mostrar que $\alpha'' = \text{Coker}(\text{Ker}(\alpha))$ y $\alpha' = \text{Ker}(\text{Coker}(\alpha))$.
- (b) Sean f y g morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:
- (b1) si $fg = 0$ y g es un epimorfismo, entonces $f = 0$, y
- (b2) si $fg = 0$ y f es un monomorfismo, entonces $g = 0$.
- (c) Sean f y g morfismos en una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell $\mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:
- (c1) si todo morfismo w tal que $gw = 0$ se factoriza a través de f y f es un monomorfismo tal que $gf = 0$, entonces f es el núcleo de g .
- (c2) si todo morfismo w tal que $wg = 0$ se factoriza a través de f y f es un epimorfismo tal que $fg = 0$, entonces f es el conúcleo de g .

Un concepto fundamental en una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell es precisamente el de la exactitud de una sucesión de morfismos. Para definirlo es conveniente definir previamente el concepto de imagen de un morfismo y exponer algunas de sus propiedades en una categoría exacta.

Proposición A.3. Sean $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell, $\alpha : X \rightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y $\alpha = \alpha'\alpha''$ una descomposición canónica de α con $\alpha' : I \rightarrow Y$ y $\alpha'' : X \rightarrow I$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:

- (a) k es núcleo de α si y sólo si k es núcleo de α'' ;

- (b) c es núcleo de α si y sólo si c es conúcleo de α' ;
- (c) α'' es núcleo de un conúcleo de α ; y
- (d) α' es conúcleo de un núcleo de α .

Demostración.

- (a) Supongamos que $k : K \rightarrow X$ es el núcleo de α . Si $\omega : W \rightarrow X$ es un morfismo tal que $\alpha''\omega = 0$, entonces como

$$\alpha\omega = \alpha'\alpha''\omega = 0$$

y k es núcleo de α , existe un único morfismo $\omega' : W \rightarrow K$ tal que $k\omega' = \omega$. Por lo tanto, k es núcleo de α'' .

Supongamos ahora que $k : K \rightarrow X$ es núcleo de α'' . Si $\omega : W \rightarrow X$ es un morfismo tal que $\alpha\omega = 0$, entonces como

$$0 = \alpha\omega = \alpha'\alpha''\omega$$

y α' es un monomorfismo, se sigue que $\alpha''\omega = 0$. Entonces como k es núcleo de α'' , existe un único morfismo $\omega' : W \rightarrow K$ tal que $k\omega' = \omega$. Por lo tanto, k es núcleo de α .

- (b) Se prueba de manera dual a (a).
- (c) Sea c conúcleo de α . Dado que α'' es un epimorfismo y

$$c\alpha'\alpha'' = c\alpha = 0$$

tenemos que $c\alpha' = 0$. Para probar que α' satisface la propiedad universal de núcleo, observamos que como $\mathcal{C}$ es normal y α' es un monomorfismo, entonces α' es núcleo de un morfismo c' . Ahora, como $c'\alpha' = 0$, se sigue que $c'\alpha = 0$. Luego, como c es conúcleo de α , existe un morfismo c'' tal que $c''c = c'$. Entonces, si w es un morfismo tal que $cw = 0$, como

$$c'w = c''cw = 0$$

y α' es núcleo de c' , se sigue que w se factoriza de manera única a través de α' . Por lo tanto, α' es núcleo de c .

- (d) Se prueba de manera dual a (c).

□

Supongamos que $\alpha = \alpha'\alpha''$ es una factorización canónica con $\alpha' : I \rightarrow Y$ y $\alpha'' : X \rightarrow I$. Entonces, como hemos visto que α' es conúcleo de un núcleo de α y α'' un núcleo

de un conúcleo de α , podemos decir que I es único salvo isomorfismo. Por ello, nos referiremos a dicho objeto como la imagen de α .

Por último, antes de abordar el concepto de exactitud, introduciremos brevemente las nociones de subobjeto y objeto cociente.

Definición A.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y A un objeto en $\mathcal{C}$.

- (a) Diremos que un objeto X en $\mathcal{C}$ es un **subobjeto** de A si existe un monomorfismo $\alpha : X \rightarrow A$. En tal caso, utilizaremos la notación $X \subseteq A$. Si queremos especificar el morfismo diremos que X es un subobjeto de A vía α , y lo denotaremos como $X \subseteq_\alpha A$.
- (b) Diremos que un objeto Y en $\mathcal{C}$ es un **cociente** de A si existe un epimorfismo $A \rightarrow Y$. En tal caso, utilizaremos la notación $Y = A/B$, donde $B \subseteq A$ es el núcleo de $A \rightarrow Y$.
- (c) Sean $f : A \rightarrow B$ un morfismo y $X \subseteq_\alpha A$. La composición $f\alpha$ la llamaremos la **restricción** de f a X y la denotaremos como $f|_X$.

Es importante considerar la clase de subobjetos y la clase de cocientes de un objeto dado. En las siguientes observaciones introduciremos todo lo que necesitaremos al respecto.

Observación A.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y A un objeto de $\mathcal{C}$.

- (a) Sean $X \subseteq_\alpha A$ y $Z \subseteq_\beta A$. Diremos que un morfismo $h : X \rightarrow Z$ es un morfismo de subobjetos de A si $\beta h = \alpha$.
- (b) La clase de subobjetos de A junto con los morfismos de subobjetos de A determinan una categoría la cual denotaremos como $\mathcal{S}_A$.
- (c) Utilizando la definición de monomorfismo se puede probar que $\mathcal{S}_A(X, Y)$ tiene a lo más un elemento para cualesquiera X y Y subobjetos de A . De lo cual se sigue que $\mathcal{S}_A(X, Y) \neq \emptyset \neq \mathcal{S}_A(Y, X)$ si y sólo si $X \cong Y$.

Definición A.6. Sean $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell y $\alpha : X \rightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Dada una factorización canónica $\alpha = \alpha' \alpha''$ con $\alpha' : I \rightarrow Y$ y $\alpha'' : X \rightarrow I$, diremos que I es la **imagen** de α y lo denotaremos como $\text{Im}(\alpha)$.

Observación A.7. Sean $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell, y α y β morfismos en $\mathcal{C}$.

- (a) Cabe observar que $\text{Im}(\alpha) \subseteq Y$ es un subobjeto tal que $\text{Coker}(\alpha) = Y / \text{Im}(\alpha)$ y $\text{Im}(\alpha) = X / \text{Ker}(\alpha)$.
- (b) Si β es un morfismo tal que $\beta\alpha = 0$, entonces $\text{Im}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\beta)$ y $\text{Im}(\beta)$ es un cociente de $\text{Coker}(\alpha)$.

Definición A.8. Sean $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell y

$$\cdots \rightarrow C_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} C_i \xrightarrow{\alpha_i} C_{i+1} \rightarrow \cdots$$

una sucesión de morfismos en $\mathcal{C}$. Diremos que dicha sucesión es **exacta** si para todo $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\text{Ker}(\alpha_i) = \text{Im}(\alpha_{i-1}).$$

Proposición A.9. Sean $\mathcal{C}$ una categoría exacta y $\alpha : X \rightarrow Y$, $\beta : Y \rightarrow Z$ morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:

(a) α es un monomorfismo si, y sólo si, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y.$$

(b) α es un epimorfismo si, y sólo si, la siguiente sucesión es exacta

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \rightarrow 0.$$

(c) α es un isomorfismo si, y sólo si, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \rightarrow 0.$$

(d) $\alpha = \text{Ker}(\beta)$ y $\beta = \text{Coker}(\alpha)$ si, y sólo si, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \rightarrow 0.$$

Demostración.

(a) $(\Rightarrow)$ Sea α un monomorfismo y β un morfismo tal que $\alpha\beta = 0$. Como α es un monomorfismo se sigue que $\beta = 0$. De modo que, como β se factoriza de manera única a través de $0 \rightarrow X$, podemos concluir que la sucesión $0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y$ es exacta.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que dicha sucesión es exacta. Entonces, $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(0) = 0$. De modo que si $\alpha = \alpha'\alpha''$ es una factorización canónica tenemos que

$$\alpha'' = \text{Coker}(\text{Ker}(\alpha)) = \text{Coker}(0) = 1_X.$$

Por lo tanto, $\alpha = 1_X\alpha'$ es un monomorfismo.

(b) Se prueba por dualidad utilizando (a).

(c) Se sigue de (a) y (b).

(d) Por los puntos anteriores basta observar que $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ si, y sólo si, $\text{Ker}(\beta) = X/\text{Ker}(\alpha)$ si, y sólo si, $\text{Ker}(\beta) = X/0 = X$, lo cual es equivalente a que $\alpha = \text{Ker}(\beta)$ y $\beta = \text{Coker}(\alpha)$.

□

Definición A.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell. Una sucesión exacta de la siguiente forma

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$$

recibe el nombre de **sucesión exacta corta**.

Proposición A.11. [Ste75, Chapter IV, p.86] Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $A \in \mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) Si $\mu_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\pi_1 : A \rightarrow A_1$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $\pi_1 \mu_1 = 1_{A_1}$, entonces
 - (a1) $\mu_1 \pi_1$ es un elemento idempotente de $\text{End}_R(A)$;
 - (a2) μ_1 es el núcleo de $1_A - \mu_1 \pi_1$; y
 - (a3) π_1 es el conúcleo de $1_A - \mu_1 \pi_1$.
- (b) Si θ es un elemento idempotente de $\text{End}_R(A)$, $\mu_1 : A_1 \rightarrow A$ es el núcleo de $1_A - \theta$ y $\mu_2 : A_2 \rightarrow A$ es el núcleo de θ , entonces $A = A_1 \oplus A_2$ con μ_1 y μ_2 como inclusiones naturales.

Definición A.12. Diremos que una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$$

se escinde si α es un **split-mono** y β es un **split-epi**.

Teorema A.13. [Pop73, Chapter 2, Corollary 7.4] Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y

$$\epsilon : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathcal{C}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) α es un **split-mono**;
- (b) β es un **split-epi**; y
- (c) ϵ se escinde.

Lema A.14. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, y

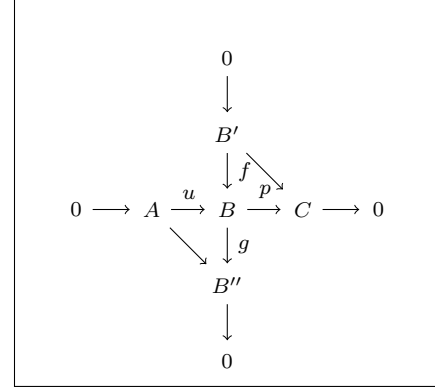
$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A &\xrightarrow{u} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0 \text{ y} \\ 0 \rightarrow B' &\xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sucesiones exactas en $\mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) pf es epimorfismo si y sólo si gu es un epimorfismo; y
(b) pf es monomorfismo si y sólo si gu es un monomorfismo.

Demostración. Probaremos el primer enunciado, la prueba del segundo enunciado es dual.

Supongamos que pf es un epimorfismo. Sea $w : B'' \rightarrow X$ un morfismo tal que $wgu = 0$. Entonces, como p es el conúcleo de u , sabemos que existe $p' : C \rightarrow X$ tal que $p'p = wg$. Entonces, como $p'pf = wgf = 0$ y pf es un epimorfismo, tenemos que $p' = 0$. Así que como $wg = p'p = 0$ y g es un epimorfismo, podemos concluir que $w = 0$. Por lo tanto, gu es un epimorfismo. $\square$



Observación A.15. Existe una prueba del resultado anterior para categorías exactas en el sentido de B. Mitchell en [Mit65, 16.8].

A.2. Diagramas de pushout y pullback

Proposición A.16. [Ste75, Chapter IV, p.90] Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Dados $\alpha : A \rightarrow B$ y $\beta : C \rightarrow B$ morfismos en $\mathcal{C}$ consideramos el morfismo

$$(\alpha - \beta) : A \oplus C \rightarrow B$$

y la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{k} A \oplus C \xrightarrow{(\alpha - \beta)} B.$$

Entonces, la terna $(K, p_A k, p_C k)$ es un pullback de α y β , donde $p_A : A \oplus C \rightarrow A$ y $p_C : A \oplus C \rightarrow C$ son las proyecciones naturales.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Dados $\alpha : B \rightarrow A$ y $\beta : B \rightarrow C$ morfismos en $\mathcal{C}$ consideramos el morfismo $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} : B \rightarrow A \oplus C$ y la sucesión exacta

$$B \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}} A \oplus C \xrightarrow{k} K \rightarrow 0.$$

Entonces, la terna (K, ku_A, ku_C) es un pushout de α y β , donde $u_A : A \rightarrow A \oplus C$ y $u_C : C \rightarrow A \oplus C$ son las inclusiones naturales.

Definición A.17. Nos referiremos a las sucesiones exactas que aparecen en A.16 y A.16 como la **sucesión exacta corta asociada al pullback**, o **pushout** respectivamente.

Proposición A.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell. Consideramos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ adjunto con filas y columnas exactas. Entonces, el cuadrado de la izquierda es un pullback.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{f} & X' & \xrightarrow{g} & Y \\ & & \downarrow x & & \downarrow y & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{h} & X' & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Demostración. Supongamos que existe una pareja de morfismos $\alpha : W \rightarrow X'$ y $\beta : W \rightarrow K$ tal que $y\alpha = h\beta$. Se sigue que $g\alpha = iy\alpha = ih\beta = 0$. Entonces, como f es el núcleo de g , existe un único $f' : W \rightarrow H$ tal que $ff' = \alpha$. Además, como h es un monomorfismo y $h\beta = y\alpha = yff' = hxf'$, tenemos que $\beta = xf'$. Por lo tanto, de la unicidad de f' , podemos concluir lo deseado. $\square$

Proposición A.19. Sea $\mathcal{C}$ exacta en el sentido de B. Mitchell, $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta y $\alpha : X \rightarrow K$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Si (E, α', g') es el pullback de g y α , entonces obtenemos un diagrama conmutativo con renglones exactos como el adjunto.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \xrightarrow{g'} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demostración. Como g es un epimorfismo, se sigue que g' es un epimorfismo. En efecto, consideremos la sucesión exacta asociada al pullback

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{k} M \oplus X \xrightarrow{(g - \alpha)} K \rightarrow 0,$$

donde $(g - \alpha)$ es un epimorfismo debido a que g lo es, y la sucesión exacta que se escinde

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{u} M \oplus X \xrightarrow{p} X \rightarrow 0.$$

Entonces, por A.14, sabemos que $g' = pk$ es un epimorfismo si y sólo si $(g - \alpha)u$ es un epimorfismo. Esto concluye la prueba ya que $(g - \alpha)u = g$ es un epimorfismo. Por último, observamos que, por la propiedad universal de pullback, existe un único morfismo $\gamma : N \rightarrow X$ tal que $\alpha'\gamma = f$ y $0 = g'\gamma$. De la igualdad $\alpha'\gamma = f$ podemos concluir que γ es un monomorfismo. Así que, como $0 = g'\gamma$, podemos concluir que γ es el núcleo de g' . $\square$

Corolario A.20. Sea $\mathcal{C}$ una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell, y

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{\alpha} C \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow A' \rightarrow B' \xrightarrow{\alpha'} C \rightarrow 0$$

sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$. Entonces, al considerar el pullback de α con α' obtenemos un diagrama conmutativo con columnas y renglones exactos como el adjunto.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A' & = & A' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Demostración. En efecto, basta con aplicar dos veces A.19. □

A.3. Lema de la serpiente y diagramas relacionados

En esta sección damos una prueba de lema de la serpiente sin utilizar el teorema de Mitchell. Como resultado se exponen una variedad de lemas técnicos sobre la exactitud de una sucesión exacta y la naturaleza de un pullback entre epimorfismos y monomorfismos.

Lema A.21. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ adjunto con filas y columnas exactas. Entonces, la siguiente sucesión es exacta $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2 \theta_1} B''$.

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A' & \xrightarrow{f} & A \\ & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 \\ & & B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B \xrightarrow{\alpha_2} B'' \\ & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\beta_1} & C \end{array}$$

Demostración. Veamos primero el caso en que α_1 es un monomorfismo. En cuyo caso, se sigue que f es un monomorfismo. Veamos que la sucesión $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2 \theta_1} B''$ es exacta. Como ya sabemos que f es un monomorfismo, basta probar que $\text{Ker}(\alpha_2 \theta_1) = \text{Im } f$. Para mostrarlo observamos que $\alpha_2 \theta_1 f = 0$ debido a que $\alpha_2 \theta_1 f = \alpha_2 \alpha_1 \gamma_1 = 0$. Consideramos un morfismo $\mu : X \rightarrow A$ tal que $\alpha_2 \theta_1 \mu = 0$. Entonces, como α_1 resulta ser el núcleo de α_2 , tenemos que existe un morfismo $v : X \rightarrow B'$ tal que $\alpha_1 v = \theta_1 \mu$. Además, $\gamma_2 v = 0$ debido a que $\beta_1 \gamma_2 v = \theta_2 \alpha_1 v = \theta_2 \theta_1 \mu = 0$ y β_1 es un monomorfismo. Entonces, como γ_1 es el núcleo de γ_2 , existe un morfismo $w : X \rightarrow A'$ tal que $v = \gamma_1 w$. Lo que implica que $fw = \mu$. En efecto, $\theta_1 fw = \alpha_1 \gamma_1 w = \alpha_1 v = \theta_1 \mu$ y θ_1 es un monomorfismo. Por lo tanto, f es el núcleo de $\alpha_2 \theta_1$.

Veamos ahora el caso en que α_1 no es necesariamente un monomorfismo. Consideramos las descomposiciones canónicas $f = f' f''$ y $\alpha_1 = \alpha' \alpha''$, y $\beta_2 : C \rightarrow C''$ el conúcleo de β_1 . Por la exactitud del diagrama tenemos que α' , f' y β_1 son los núcleos de α_1, f y β_2

respectivamente. Ahora, como f'' es un epimorfismo y $\alpha_2\theta_1f'f'' = \alpha_2\theta_1f = \alpha_2\alpha_1\gamma_1 = 0$ tenemos que $\alpha_2\theta_1f' = 0$, lo que implica que θ_1f' se factoriza a través de α' . De manera similar se prueba que $\theta_2\alpha'$ se factoriza a través de β_1 . Entonces, por lo antes probado, tenemos que la sucesión $0 \rightarrow A_0 \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B''$ es exacta, lo que concluye la prueba. $\square$

Corolario A.22. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ adjunto. Si todas columnas son exactas junto con las sucesiones*

$$B' \xrightarrow{\alpha_1} B \xrightarrow{\alpha_2} B'' \text{ y } \\ 0 \rightarrow C' \xrightarrow{\beta_1} C,$$

entonces la sucesión $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{h} A''$ es exacta.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{h} & A'' \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow h \\ B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & B'' \\ \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \\ 0 & \rightarrow & C' & \xrightarrow{\beta_1} & C \end{array}$$

Demostración. Por el lema anterior sabemos que la sucesión

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{dh} B''$$

es exacta. Luego, como d es un monomorfismo se sigue que

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(dh) = \text{Ker}(h),$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Cabe enunciar el resultado dual del lema anterior.

Lema A.23. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ adjunto con filas y columnas exactas. Entonces la sucesión*

$$A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B'' \xrightarrow{\varphi_2} C''$$

es exacta

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & & & \\ & & \downarrow \theta_1 & \searrow \alpha_2 & & & \\ B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \rightarrow & B'' & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \varphi_2 & & \\ C' & \xrightarrow{\beta_1} & C & \rightarrow & C'' & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Reuniendo los dos lemas anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Lema A.24. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ adjunto con filas y columnas exactas. Entonces la sucesión

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2 \theta_1} B'' \xrightarrow{\varphi_2} C''$$

es exacta.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & A' & \xrightarrow{f} & A & & & \\
 & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 & \searrow \alpha_2 & & \\
 & B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & B'' & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \varphi_2 & \\
 0 & \rightarrow & C' & \xrightarrow{\beta_1} & C & \xrightarrow{\beta_2} & C'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Corolario A.25. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ adjunto con filas y columnas exactas. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$$

que completa el diagrama conmutativo. Más aún, la sucesión

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2 \theta_1} B'' \xrightarrow{\varphi_2} C'' \rightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. La existencia de f y g se sigue de la propiedad universal de núcleo. El resto se sigue del lema anterior. $\square$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \dashrightarrow & A' & \dashrightarrow & A & \dashrightarrow & A'' \dashrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \varphi_1 \\
 0 & \rightarrow & B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & B'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \varphi_2 \\
 0 & \rightarrow & C' & \xrightarrow{\beta_1} & C & \xrightarrow{\beta_2} & C'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Corolario A.26. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\gamma} C'' \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\theta} B \xrightarrow{\alpha_2} C \rightarrow 0$$

y el pullback (B', β_1, β_2) entre ellas. Entonces, el siguiente diagrama, donde $\delta := \text{Ker}(\beta_1)$ y $\gamma := \text{Coker}(\alpha_1)$, es conmutativo con renglones y columnas exactas.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\delta} & B' & \xrightarrow{\beta_1} & C' \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \alpha_1 \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\theta} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & C \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow \gamma \\
 & & & & C'' = C'' & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Demostración. Claramente tenemos que $\varphi := \gamma \alpha_2$ es un epimorfismo y $\theta := \beta_2 \delta$ es un monomorfismo. Probaremos la exactitud de la sucesión

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{\beta_2} B \xrightarrow{\varphi} C'' \rightarrow 0.$$

Primero observamos que como α_1 es un monomorfismo, de la propiedad universal de pullback se sigue que β_2 también lo es. Ahora, como

$$\varphi\beta_2 = \gamma\alpha_2\beta_2 = \gamma\alpha_1\beta_1 = 0$$

y β_2 es un monomorfismo, basta mostrar que todo morfismo $\mu : X \rightarrow B$ tal que $\varphi\mu = 0$ se factoriza a través de β_2 , lo cual se sigue de la propiedad universal de pullback junto a la exactitud de

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\gamma} C'' \rightarrow 0.$$

Finalmente, por A.25 sabemos que existe un morfismo $\lambda : B' \rightarrow C'$ tal que

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\delta} B' \xrightarrow{\lambda} C' \rightarrow 0$$

es exacta y $\alpha_1\lambda = \alpha_2\beta_2$. Entonces, como

$$\alpha_1\lambda = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_1$$

y α_1 es un monomorfismo, podemos concluir lo deseado. $\square$

Finalmente introduciremos la siguiente notación para facilitar la prueba del lema de la serpiente.

Definición A.27. Sean $\alpha : X \rightarrow Y$, $\alpha' : X' \rightarrow Y'$, $\beta : X \rightarrow X'$ y $\gamma : Y \rightarrow Y'$ morfismos en una categoría exacta en el sentido de B. Mitchell $\mathcal{C}$.

- (a) Denotaremos como $k(\alpha) : K(\alpha) \rightarrow X$ al núcleo de α .
- (b) Denotaremos como $c(\alpha) : Y \rightarrow C(\alpha)$ al conúcleo de α .
- (c) En caso de que $\gamma\alpha = \alpha'\beta$, diremos que la pareja (β, γ) es un morfismo de morfismos de α en α' , y lo denotamos como

$$(\beta, \gamma) : \alpha \rightarrow \alpha'.$$

- (d) Sea $(\beta, \gamma) : \alpha \rightarrow \alpha'$ un morfismo de morfismos. Por la propiedad universal del conúcleo sabemos que existe un único morfismo $\lambda : K(\beta) \rightarrow K(\gamma)$ tal que $k(\gamma)\lambda = \alpha k(\beta)$. A dicho morfismo lo denotaremos como $k(\beta, \gamma)$.

Lema A.28 (Lema de la serpiente). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideramos el diagrama conmutativo adjunto en $\mathcal{C}$ con filas exactas. Entonces existe una sucesión exacta*

$$K(u) \xrightarrow{k(u,v)} K(v) \xrightarrow{k(v,w)} K(w) \xrightarrow{d} C(u) \xrightarrow{c(u,v)} C(v) \xrightarrow{c(v,w)} C(w).$$

Más aún, en caso de que k' sea un monomorfismo, entonces $k(u, v)$ también lo es; y en caso de que f sea un epimorfismo, entonces $c(v, w)$ también lo es.

Demostración.

Utilizando la propiedad universal de núcleo y conúcleo podemos completar el diagrama a un diagrama conmutativo como el que está adjunto. Además, por A.22 y su dual tenemos la exactitud de las sucesiones

$$K(u) \xrightarrow{k(u,v)} K(v) \xrightarrow{k(v,w)} K(w) \text{ y}$$

$$C(u) \xrightarrow{c(u,v)} C(v) \xrightarrow{c(v,w)} C(w).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K(u) & \xrightarrow{k(u,v)} & K(v) & \xrightarrow{k(v,w)} & K(w) \\
 & & \downarrow k(u) & & \downarrow k(v) & & \downarrow k(w) \\
 & & K' & \xrightarrow{k'} & X' & \xrightarrow{f'} & Y' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow u & \dashrightarrow & \downarrow v & \dashrightarrow & \downarrow w \\
 0 & \dashrightarrow & K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & & \downarrow c(u) & & \downarrow c(v) & & \downarrow c(w) \\
 & & C(u) & \xrightarrow{c(u,v)} & C(v) & \xrightarrow{c(v,w)} & C(w)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 K' & \xrightarrow{\kappa} & H & \xrightarrow{\psi} & K(w) & \rightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow h & & \downarrow k(w) & & \\
 K' & \xrightarrow{k'} & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow w' & & \\
 & & \text{Im } w & \xrightarrow{\quad} & \text{Im } w & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Por lo que queda por mostrar la existencia del morfismo d y la exactitud de la sucesión

$$K(v) \xrightarrow{k(v,w)} K(w) \xrightarrow{d} C(u) \xrightarrow{c(u,v)} C(v).$$

Para empezar consideramos el pullback entre $k(w)$ y f' . Por A.26 obtenemos sucesiones exactas

$$K' \xrightarrow{\kappa} H \xrightarrow{\psi} K(w) \rightarrow 0 \text{ y}$$

$$0 \rightarrow H \xrightarrow{h} X' \xrightarrow{w'f'} \text{Im}(w) \rightarrow 0,$$

Ahora, utilizando el hecho de que $wf' = fv$, consideramos el morfismo $n : H \rightarrow K$ que resulta de tomar el núcleo del morfismo de morfismos

$$(wf', f) : v \rightarrow 1_Y.$$

Entonces, por A.18 sabemos que (H, h, n) es un pullback de (k, v) .

Ya estamos listos para mostrar la existencia de d . Como k es un monomorfismo y

$$ku = vk' = vh\kappa = kn\kappa,$$

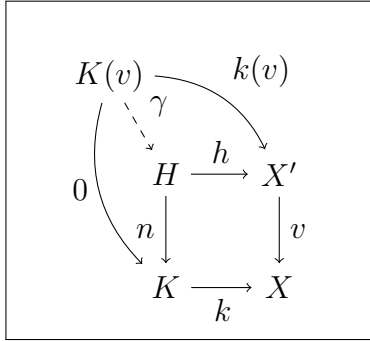
tenemos que $u = n\kappa$. Luego, como

$$c(u)n\kappa = c(u)u = 0$$

y ψ es el conúcleo de κ , por la propiedad universal de conúcleo tenemos que existe un

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \rightarrow & H & \xrightarrow{h} & X' \xrightarrow{wf'} Y \\
 & & \downarrow n & & \downarrow v \parallel \\
 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{k} & X \xrightarrow{f} Y
 \end{array}$$

único morfismo $d : K(w) \rightarrow C(u)$ tal que $d\psi = c(u)n$. Veremos a continuación que d es el morfismo buscado.



Se puede ver que, por la propiedad universal de pullback, existe un único morfismo $\gamma : K(v) \rightarrow H$ tal que $h\gamma = k(v)$ y $n\gamma = 0$. Así que como

$$k(w)k(v, w) = f'k(v) = f'h\gamma = k(w)\psi\gamma$$

y $k(w)$ es un monomorfismo, tenemos que $k(v, w) = \psi\gamma$. Por lo tanto, $\text{Im}(k(v, w)) \subseteq \text{Ker}(d)$ ya que

$$dk(v, w) = d\psi\gamma = c(u)n\gamma = 0.$$

Para ver la contención opuesta consideramos la factorización canónica $u = u''u'$ y observamos que γ es el núcleo de n . En efecto, supongamos que $x : W \rightarrow H$ es un morfismo tal que $nx = 0$. Entonces, como $v h x = k n x = 0$, por la propiedad universal de núcleo existe un único morfismo $x' : W \rightarrow K(V)$ tal que $h x = k(v)x'$. Luego, como h es un monomorfismo y

$$h x = k(v)x' = h\gamma x',$$

tenemos que x se factoriza a través de γ , con lo cual podemos concluir que γ es el núcleo de n por ser un monomorfismo.

Ahora, por construcción sabemos que

$$d\psi = c(u)n \quad \text{y} \quad n\kappa = u = u''u'.$$

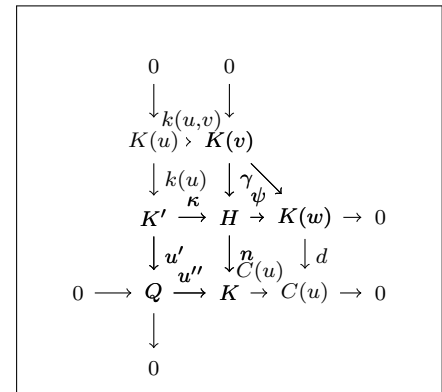
Además, como h es un monomorfismo y

$$h\kappa k(u) = k'k(u) = k(v)k(u, v) = h\gamma k(u, v),$$

podemos concluir que $\kappa k(u) = \gamma k(u, v)$. Así que por A.24 sabemos que la sucesión

$$K(u') \xrightarrow{k(u, v)} K(v) \xrightarrow{k(v, w)} K(w) \xrightarrow{d} C(u)$$

es exacta.



$$\begin{array}{ccccccc}
 & K' & \xrightarrow{\kappa} & H & \xrightarrow{\psi} & K(w) & \longrightarrow 0 \\
 & \parallel & & \downarrow h & & \downarrow k(w) & \\
 & K' & \xrightarrow{k'} & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \downarrow c(u) & & \downarrow h & & \downarrow & \\
 0 & \xrightarrow{f} & C(u) & \xrightarrow{\psi'} & H' & \xrightarrow{\kappa'} & Y
 \end{array}$$

Para terminar la prueba observamos que con argumentos duales a los anteriores podemos asegurar que existe un morfismo $n' : Y' \rightarrow H'$ tal que $n'f' = h'v$, y existe un único morfismo $d' : K(w) \rightarrow C(u)$ tal que $\psi'd' = n'k(w)$, donde (H', ψ', h') es el pushout de k y $c(u)$. Más aún, podemos afirmar que la sucesión

$$K(w) \xrightarrow{d'} C(u) \xrightarrow{c(u,v)} C(v) \xrightarrow{c(v,w)} C(w)$$

es exacta. Por lo que basta probar que $d = d'$ para concluir lo deseado. Para ello, observamos que como

$$n'k(w)\psi = n'f'h = h'vh = h'kn = \psi'c(u)n,$$

tenemos que

$$\psi'd\psi = \psi'c(u)n = n'k(w)\psi.$$

Entonces, como ψ es un epimorfismo podemos concluir que d satisface que $\psi'd = n'k(w)$. Por lo tanto, $d = d'$.

□

Observación A.29. La prueba anterior esta inspirada en el artículo [Bou01], el cual presenta una prueba en un contexto más general.

A.4. Extensiones

En esta sección expondremos las propiedades básicas de los grupos de extensiones. Nos estaremos basando en [Mit65] y [Buc59].

A lo largo de esta sección utilizaremos la siguiente notación.

Definición A.30. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $C \in \mathcal{C}$, y $\alpha : A \rightarrow B$ y $\alpha' : A' \rightarrow B'$ morfismos en $\mathcal{C}$.

(a) Denotaremos como ∇_C al morfismo

$$(1_C \ 1_C) : C \oplus C \rightarrow C.$$

(b) Denotaremos como Δ_C al morfismo

$$\begin{pmatrix} 1_C \\ 1_C \end{pmatrix} : C \rightarrow C \oplus C.$$

(c) Denotaremos como τ_C al morfismo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_C \\ 1_C & 0 \end{pmatrix} : C \oplus C \rightarrow C \oplus C.$$

(d) Denotaremos como $\alpha \oplus \alpha'$ al morfismo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} : A \oplus A' \rightarrow B \oplus B'.$$

(e) En caso de que no haya confusión omitiremos los subíndices en las expresiones anteriores.

A.4.1. Extensiones de longitud 1

Definición A.31. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana,

$$\eta : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta' : 0 \rightarrow N' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} K' \rightarrow 0$$

sucesiones exactas en $\mathcal{C}$, y $\alpha : N \rightarrow N'$, $\beta : M \rightarrow M'$ y $\gamma : K \rightarrow K'$ morfismos en $\mathcal{C}$.

(a) Diremos que (α, β, γ) es un morfismo de sucesiones exactas si

$$\beta f = f' \alpha \text{ y } \gamma g = g' \beta.$$

(b) Denotaremos como $\eta \oplus \eta'$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \oplus N' \xrightarrow{f \oplus f'} M \oplus M' \xrightarrow{g \oplus g'} K \oplus K' \rightarrow 0.$$

Lema A.32. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana,

$$\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta' : 0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$$

sucesiones exactas y $(\alpha, \beta, \gamma) : \eta \rightarrow \eta'$ un morfismo de sucesiones exactas. Entonces, existe $\kappa : B \rightarrow A'$ tal que $\kappa f = \alpha$ si, y sólo si, existe $\kappa' : C \rightarrow B'$ tal que $g' \kappa' = \gamma$.

Demostración. Supongamos que $\kappa' : C \rightarrow B'$ tal que $g' \kappa' = \gamma$. Se tiene que

$$g'\kappa'g = \gamma g = g'\beta,$$

de modo que $g'(\kappa'g - \beta) = 0$. Así, por la propiedad universal de núcleo, existe $\kappa : B \rightarrow A'$ tal que $\kappa'g - \beta = f'\kappa$. Luego, tenemos que

$$f'\kappa f = \kappa'gf - \beta f = -\beta f = -f'\alpha.$$

Así que, como f' es un monomorfismo, podemos concluir que

$$\alpha = (-\kappa)f.$$

La implicación opuesta se prueba de manera dual. □

Definición A.33. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $A, C \in \mathcal{C}$. Denotaremos como

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(K, N)$$

a la clase de sucesiones exactas de la forma

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Observación A.34. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $A, C \in \mathcal{C}$ y $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(C, A)$. Consideraremos la relación $\eta \equiv \eta'$ dada en caso de que exista un morfismo de la forma $(1_A, \beta, 1_C) : \eta \rightarrow \eta'$. Por A.28, es inmediato que en tal caso β sea un isomorfismo, por lo que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Definición A.35. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $A, C \in \mathcal{C}$.

- (a) Denotamos $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A) := \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(C, A) / \equiv$;
- (b) Nos referiremos a los objetos de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ como **extensiones** de A en C , y al considerar una extensión de A en C trabajaremos con un representante de dicha clase.
- (c) Dados $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ y $\bar{\eta}' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A')$ diremos que una terna de morfismos en $\mathcal{C}$ es un morfismo de $\bar{\eta}$ en $\bar{\eta}'$ si es un morfismo de η en η' .
- (d) Si $(\alpha, \beta, \gamma) : E \rightarrow E'$ y $(\alpha', \beta', \gamma') : E' \rightarrow E''$ son morfismos de extensiones, el morfismo de extensiones

$$(\alpha', \beta', \gamma')(\alpha, \beta, \gamma) := (\alpha'\alpha, \beta'\beta, \gamma'\gamma)$$

lo llamaremos la composición de $(\alpha', \beta', \gamma')$ con (α, β, γ) .

Observación A.36. Cabe resaltar que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ no es necesariamente un conjunto. Considerando esto, estrictamente no podemos hablar de que una correspondencia

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & \swarrow f' & \downarrow \beta & \swarrow g' & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ sea una función. Sin embargo, en este contexto haremos la excepción y diremos que una correspondencia $\Phi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ es una función si a todo $\bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A')$ le asocia un único $\Phi(\bar{\eta}) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$.

Consideremos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$$

y un morfismo $\alpha : X \rightarrow K$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Hemos visto en A.19 que al considerar el pullback de α y β obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0.$$

A continuación veremos que dicho procedimiento define una correspondencia entre las clases de extensiones.

Lema A.37. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana,

$$\begin{aligned} \eta : \quad 0 &\rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \text{ y} \\ \eta' : \quad 0 &\rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$ y $(\alpha, \beta, \gamma) : \eta' \rightarrow \eta$ un morfismo de sucesiones exactas cortas. Entonces, existe un diagrama conmutativo con renglones exactos como el adjunto, donde $\beta' \beta'' = \beta$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta'' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demostración. Por A.19, sabemos que existe una sucesión exacta

$$\eta'' : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f''} E \xrightarrow{g''} C' \rightarrow 0$$

junto con un morfismo de sucesiones exactas cortas

$$(1_A, \beta', \gamma) : \eta'' \rightarrow \eta.$$

Luego, como $\gamma g' = g \beta$, por la propiedad universal de pullback sabemos que existe un único morfismo $\beta'' : B' \rightarrow E$ tal que $\beta' \beta'' = \beta$ y $g'' \beta'' = g'$. Finalmente, por la propiedad universal de núcleo, sabemos que α es el único morfismo tal que $f \alpha = \beta f'$ y que existe un único morfismo $\alpha' : A' \rightarrow A$ tal que $\beta'' f' = f'' \alpha'$. Entonces, como

$$f \alpha' = \beta' f'' \alpha' = \beta' \beta'' f' = \beta f',$$

podemos concluir que $\alpha = \alpha'$, lo cual concluye la prueba. $\square$

Corolario A.38. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\eta \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(C, A)$ y $\gamma : C' \rightarrow C$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

(a) existe $\eta_{\gamma} \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(C', A)$ y un morfismo de sucesiones exactas

$$(1_A, \beta, \gamma) : \eta_{\gamma} \rightarrow \eta;$$

(b) más aún, si existen $\eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(C', A)$ y un morfismo de sucesiones exactas

$$(1_A, \beta', \gamma) : \eta' \rightarrow \eta,$$

entonces $\eta' \equiv \eta_{\gamma}$; y

(c) la correspondencia $\Phi_{\gamma} : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A)$, $\bar{\eta} \mapsto \overline{\eta_{\gamma}}$, es una función.

Demostración. El enunciado (a) lo tenemos por A.19. El enunciado (b) queda probado de manera automática con el lema anterior sustituyendo α por 1_A . Finalmente, el enunciado (c) se sigue de (b). $\square$

De manera dual se puede probar el siguiente resultado:

Corolario A.39. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\eta \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(A, C)$ y $\gamma : C \rightarrow C'$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

(a) existe $\eta^{\gamma} \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(A, C')$ y un morfismo de sucesiones exactas

$$(\gamma, \beta, 1_C) : \eta \rightarrow \eta^{\gamma};$$

(b) más aún, si existen $\eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(A, C')$ y un morfismo de sucesiones exactas

$$(\gamma, \beta', 1_C) : \eta \rightarrow \eta',$$

entonces $\eta' \equiv \eta^{\gamma}$; y

(c) la correspondencia

$$\begin{aligned} \Phi^{\gamma} : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A) \\ \bar{\eta} &\mapsto \overline{\eta^{\gamma}} \end{aligned}$$

es una función.

Definición A.40. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, $\alpha : A \rightarrow A'$ y $\gamma : C' \rightarrow C$. Utilizaremos la siguiente notación:

(a) $E\gamma := \Phi_{\gamma}(E)$; y

(b) $\alpha E := \Phi^{\alpha}(E)$.

Corolario A.41. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, y $\alpha : A' \rightarrow A$ y $\beta : B' \rightarrow B$ morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) existe un morfismo β tal que $(\alpha, \beta, \gamma) : E' \rightarrow E$ es un morfismo de extensiones si y sólo si $\alpha E' = E\gamma$;
- (b) si $(\alpha, \beta, \gamma) : E' \rightarrow E$ es un morfismo de extensiones, entonces (α, β, γ) se factoriza a través de $\alpha E' = E\gamma$;
- (c) más aún, existen morfismos de extensiones

$$(\alpha, \beta'', 1) : E' \rightarrow S \quad \text{y} \quad (1, \beta', \gamma) : S \rightarrow E$$

tales que $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, \beta', \gamma)(\alpha, \beta'', 1)$.

Demostración. Basta con recordar A.37, A.18 y su dual. □

Lema A.42. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\alpha : A \rightarrow A'$, $\alpha' : A' \rightarrow A''$, $\gamma : C' \rightarrow C$, $\gamma' : C'' \rightarrow C'$ morfismos en $\mathcal{C}$ y $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$. Entonces, se cumplen las siguientes igualdades:

- (a) $1_A E = E$ y $E 1_C = E$;
- (b) $(\alpha' \alpha) E = \alpha' (\alpha E)$ y $E(\gamma \gamma') = (E\gamma) \gamma'$; y
- (c) $(\alpha E) \gamma = \alpha (E\gamma)$.

Demostración.

(a)&(c) Es trivial utilizando A.38 y A.39.

(b) Sabemos que existen morfismos de extensiones $(1_A, \gamma', \gamma) : E\gamma \rightarrow E$ y $(\alpha, \alpha', 1_C) : E \rightarrow \alpha E$. Consideremos la composición de estos morfismos

$$(\alpha, \gamma' \alpha', \gamma) : E\gamma \rightarrow \alpha E.$$

Entonces por el resultado anterior tenemos que $\alpha(E\gamma) = (\alpha E)\gamma$.

□

A continuación definiremos una operación en $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ para todo $A, C \in \mathcal{C}$. Como hemos mencionado, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ no es necesariamente un conjunto. Sin embargo, haremos una excepción para utilizar términos como operación y función en estas clases. Más aún, diremos que una clase, junto con una operación en ella, es un grupo abeliano si satisface los axiomas de los grupos abelianos: asociatividad, existencia de un elemento neutro, existencia de inversos y conmutatividad.

Definición A.43. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $E, E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$. Definimos la **suma de extensiones** como

$$E + E' := \nabla (E \oplus E') \Delta$$

Veremos a continuación que con dicha operación $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ es un grupo abeliano para cualesquiera $A, C \in \mathcal{C}$. Para ello, recordamos las siguientes igualdades que satisfacen cualquier pareja de morfismos $\alpha, \alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$:

$$\begin{aligned} \alpha \nabla &= \alpha \begin{pmatrix} 1_A & 1_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_B & 1_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \nabla (\alpha \oplus \alpha) \text{ y} \\ \alpha + \alpha' &= \begin{pmatrix} 1_B & 1_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} = \nabla (\alpha \oplus \alpha') \Delta. \end{aligned}$$

Lema A.44. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A')$, $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$, $\alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', X')$, $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C)$ y $\gamma' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', C')$. Entonces, se cumplen las siguientes igualdades:

- (a) $(\alpha \oplus \alpha') (E \oplus E') = \alpha E \oplus \alpha' E'$;
- (b) $(\alpha + \alpha') E = \alpha E + \alpha' E$;
- (c) $\alpha (E + E') = \alpha E + \alpha E'$;
- (d) $(E \oplus E') (\gamma \oplus \gamma') = E\gamma \oplus E'\gamma'$;
- (e) $E (\gamma + \gamma') = E\gamma + E'\gamma'$; y
- (f) $(E + E') \gamma = E\gamma + E'\gamma$.

Demostración.

- (a) Sabemos que existen morfismos de extensiones

$$(\alpha, \beta, 1_C) : E \rightarrow \alpha E \quad \text{y} \quad (\alpha', \beta', 1_{C'}) : E' \rightarrow \alpha' E'.$$

De modo que al considerar el coproducto obtenemos el morfismo de extensiones

$$(\alpha \oplus \alpha', \beta \oplus \beta', 1_{C \oplus C'}) : E \oplus E' \rightarrow \alpha E \oplus \alpha' E'.$$

Entonces, por A.38 podemos concluir que $\alpha E \oplus \alpha' E' = (\alpha \oplus \alpha') (E \oplus E')$.

- (b) Primero, considerando el morfismo de extensiones $(\Delta, \Delta, \Delta) : E \rightarrow E \oplus E$, por A.37 sabemos que $\Delta E = (E \oplus E) \Delta$. Entonces, por (a) tenemos que

$$(\alpha + \alpha') E = \nabla (\alpha \oplus \alpha') \Delta E = \nabla (\alpha \oplus \alpha') (E \oplus E) \Delta = \nabla (\alpha E \oplus \alpha' E) \Delta = \alpha E + \alpha' E.$$

- (c) Basta con observar que por (a) tenemos que

$$\alpha (E + E') = \alpha \nabla (E \oplus E') \Delta = \nabla (\alpha \oplus \alpha) (E \oplus E') \Delta = \nabla (\alpha E \oplus \alpha E') \Delta = \alpha E + \alpha E'.$$

□

Lema A.45. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Denotaremos como $E_{(C,A)}$ a la extensión dada por la sucesión exacta que se escinde $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C \rightarrow 0$. Si $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A')$ y $F \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C', A)$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $\nabla(E_{(A,C)} \oplus F) = E_{(0,C)} \oplus F$ y
- $(E_{(A,C)} \oplus E) \Delta = E_{(A,0)} \oplus E$.

Demostración. Probaremos la primer igualdad, la prueba de la segunda igualdad es dual.

Suponemos que F es la extensión de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C' \rightarrow 0.$$

Se puede ver que el siguiente diagrama es conmutativo. Además, tiene como primer renglón a $E_{(C,A)} \oplus F$ y como segundo renglón a $E_{(0,C)} \oplus F$. Entonces, por A.41 podemos concluir lo deseado.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A \oplus A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}} & A \oplus C \oplus B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}} & C \oplus C' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \nabla & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix} & \parallel & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}} & C \oplus B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & C \oplus C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

□

Teorema A.46. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $A, C \in \mathcal{C}$. Entonces,

$$(\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A), +)$$

es un grupo abeliano, donde el elemento neutro es la extensión E_0 dada por la sucesión exacta que se escinde. Además, $0E = E0 = E_0 \forall E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, y dada una extensión con representante

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

tendremos que su inverso es la extensión dada por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{-g} C \rightarrow 0.$$

Demostración. Sean $E, E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$.

Para probar la asociatividad, observamos que por el resultado anterior sabemos que:

$$(1 \oplus \alpha)(E \oplus E') = E \oplus \alpha E' \quad \text{y} \quad (E \oplus E')(1 \oplus \gamma) = E \oplus E' \gamma$$

para cualesquiera α y γ morfismos con los que se pueden operar. Entonces, utilizando lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} E + (E' + E'') &= E + \nabla (E' \oplus E'') \Delta \\ &= \nabla (E \oplus \nabla (E' \oplus E'') \Delta) \Delta \\ &= \nabla ((1 \oplus \nabla) (E \oplus ((E' \oplus E'') \Delta))) \Delta \\ &= \nabla (1 \oplus \nabla) (E \oplus E' \oplus E'') (1 \oplus \Delta) \Delta, \end{aligned}$$

y de forma similar tenemos que

$$(E + E') + E'' = \nabla (\nabla \oplus 1) (E \oplus E' \oplus E'') (\Delta \oplus 1) \Delta.$$

Entonces, como

$$\begin{aligned} \nabla (1 \oplus \nabla) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \nabla (\nabla \oplus 1) \text{ y} \\ (1 \oplus \Delta) \Delta &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\Delta \oplus 1) \Delta, \end{aligned}$$

podemos concluir lo deseado.

Para probar la conmutatividad observamos que se cumplen las siguientes igualdades:

- $\tau(E \oplus E') = (E' \oplus E)\tau$. En efecto, como $(\tau, \tau, \tau) : E \oplus E' \rightarrow E' \oplus E$ es un morfismo de extensiones, la igualdad se sigue de A.41.
- $\nabla\tau = \nabla$ y $\tau\Delta = \Delta$. Ciertamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos ver que

$$\begin{aligned} E + E' &= \nabla (E \oplus E') \Delta \\ &= \nabla\tau (E \oplus E') \Delta \\ &= \nabla (E' \oplus E) \tau \Delta \\ &= \nabla (E' \oplus E) \Delta \\ &= E' + E. \end{aligned}$$

Para probar la existencia del elemento neutro consideramos la extensión E_0 de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C \rightarrow 0$$

y suponemos que E es la extensión de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Por A.45 tenemos que

$$\begin{aligned}
 E_0 + E &= \nabla (E_0 \oplus E) \Delta \\
 &= (E_{(0,C)} \oplus E) \Delta \\
 &= E_{(0,0)} \oplus E \\
 &= E.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, E_0 es el elemento neutro.

Finalmente, observamos que, como la terna $(0, \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, 1)$ es un morfismo de la extensión E a la extensión E_0 , tenemos por A.41 que $0E = E_0$. Así que,

$$E_0 = 0E = (1 - 1)E = E + (-E),$$

lo cual muestra la existencia de inversos. Para mostrar explícitamente un representante de $-E$, basta con observar que la terna $(-1, -1, 1)$ es un morfismo de la extensión dada por la sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{-g} C \rightarrow 0$$

a la extensión E . Entonces, por A.41 podemos concluir que $-E$ es la extensión dada por η . $\square$

Definición A.47. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Hemos probado que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ es un grupo abeliano para todo $A, C \in \mathcal{C}$. De ahora en adelante denotaremos el elemento neutro de dicho grupo como 0.

Corolario A.48. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $X, Y \in \mathcal{C}$. Entonces, para todo $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ y morfismos cero $0_X : A \rightarrow X$ y $0_Y : Y \rightarrow C$ se tiene que

$$E0_Y = 0 \quad y \quad 0_X E = 0.$$

Demostración. Se prueba fácilmente utilizando la propiedad universal del producto y coproducto lo deseado. $\square$

A.4.2. Extensiones de longitud n

Hasta ahora hemos considerado las clases de extensiones de longitud 1. A continuación veremos que podemos generalizar las construcciones anteriores para considerar extensiones de longitud mayor.

Definición A.49. Sean $n > 0$, $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y

$$\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_0 \rightarrow C \rightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathcal{C}$.

- (a) Diremos que η es una **sucesión exacta de longitud n** .
- (b) Diremos que A es el **extremo izquierdo** de η y que B es el **extremo derecho** de η .
- (c) Denotaremos como $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(L, N)$ a la clase de sucesiones exactas de longitud n con extremo derecho L y extremo izquierdo N .
- (d) Sean

$$\begin{aligned} \eta : 0 \rightarrow N \xrightarrow{\mu} B_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0 \quad y \\ \eta' : 0 \rightarrow N' \xrightarrow{\mu'} B'_{n-1} \xrightarrow{f'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f'_0} B'_0 \xrightarrow{\pi'} K' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sucesiones exactas largas de longitud n . Un morfismo de η a η' es una colección de $n+2$ morfismos $(\alpha, \beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \dots, \beta_0, \gamma)$, con $\alpha : N \rightarrow N'$, $\beta : K \rightarrow K'$ y $\beta_i : B_i \rightarrow B'_i \forall i \in [0, n-1]$, tales que

$$\beta_{n-1}\mu = \mu'\alpha, \gamma\pi = \pi'\beta_0 \text{ y } \beta_{i-1}f_i = f'_i\beta_i \forall i \in [1, n-1].$$

Es decir, un morfismo entre sucesiones exactas de longitud n está dado por un diagrama conmutativo como el anexo.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & B'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B'_0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ejemplo A.50. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{6} & \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi' \\ 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Podemos ver que dicho diagrama muestra un morfismo entre sucesiones exactas que no está compuesto por isomorfismos entre grupos abelianos.

A continuación definiremos una relación de equivalencia para estudiar las clases de sucesiones exactas de longitud n . Como lo hicimos para el caso en que $n = 1$, comenzaremos por decir que dos sucesiones $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ están relacionadas, lo cual

denotaremos como $\eta \preceq \eta'$, en caso de que exista un morfismo de sucesiones exactas

$$(1_A, \beta_{n-1} \cdots, \beta_0, 1_C) : \eta \rightarrow \eta'.$$

Sin embargo, a diferencia del caso en que $n = 1$, en general esto no implica que los morfismos β_i sean isomorfismos, por lo que la relación no es simétrica en general, como muestra el ejemplo anterior. De modo que, para satisfacer nuestro objetivo, necesitaremos considerar la relación de equivalencia inducida por $\preceq$. A saber, definimos $\eta \equiv \eta'$ si y sólo si existe una sucesión $\eta_1, \dots, \eta_k$ tal que

$$\eta = \eta_1, \quad \eta_i \preceq \eta_{i+1} \text{ o } \eta_{i+1} \preceq \eta_i \text{ y } \quad \eta' = \eta_k.$$

Definición A.51. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n > 0$ y $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$.

(a) Diremos que un morfismo de sucesiones exactas de la forma

$$(1, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, 1) : \eta \rightarrow \eta'$$

es un **morfismo de sucesiones exactas con extremos fijos**. En caso de existir tal morfismo utilizaremos el símbolo

$$\eta \preceq \eta'.$$

(b) Diremos que $\eta \equiv \eta'$ si existen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sucesiones exactas de longitud n tales que

$$\eta = \eta_1, \quad \eta_i \preceq \eta_{i+1} \text{ o } \eta_{i+1} \preceq \eta_i \text{ y } \quad \eta' = \eta_k.$$

(c) Consideraremos la clase

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A) := \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A) / \equiv$$

cuyos elementos los llamaremos **extensiones de longitud n** .

(d) Denotaremos como $\bar{\eta}$ a la clase de equivalencia de η .

(e) Diremos que una terna de morfismos es un morfismo de extensiones de $\bar{\eta}$ en $\bar{\eta}'$, si es un morfismo de sucesiones exactas de η en η' .

Definición A.52 (Composición de sucesiones exactas). Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana,

$$\begin{aligned} \eta : 0 \rightarrow N \xrightarrow{\mu} B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_0 \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0 \quad \text{y} \\ \eta' : 0 \rightarrow K \xrightarrow{\mu'} B'_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B'_0 \xrightarrow{\pi'} L \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sucesiones exactas en $\mathcal{C}$ de longitudes n y m respectivamente.

(a) Diremos que la sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\mu} B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_0 \xrightarrow{\mu' \pi} B'_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B'_0 \xrightarrow{\pi'} L \rightarrow 0$$

es la **composición** de η con η' y la denotaremos como $\eta\eta'$.

(b) Toda sucesión exacta

$$\kappa : 0 \rightarrow A \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_0 \rightarrow C \rightarrow 0$$

tiene una **descomposición**, la cual nombramos **natural**, como la composición de n sucesiones exactas cortas $\kappa = \eta_{n-1} \cdots \eta_0$, donde

$$\eta_i : 0 \rightarrow K_{i+1} \rightarrow B_i \rightarrow K_i \rightarrow 0$$

con $K_n := A$, $K_0 := C$ y $K_i = \text{Ker}(B_{i+1} \rightarrow B_i) \forall i \in [1, n-1]$.

A continuación veremos que de hecho la composición de sucesiones exactas induce una composición de extensiones.

Lema A.53. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $m, n > 0$ y $A, C, D \in \mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

(a) si $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ y $\kappa, \kappa' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^m(D, C)$ son sucesiones exactas y existen morfismos con extremos fijos $\eta \rightarrow \eta'$ y $\kappa \rightarrow \kappa'$, entonces existe un morfismo de extremos fijos $\eta\kappa \rightarrow \eta'\kappa'$;

(b) si $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ y $\kappa, \kappa' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^m(D, C)$ son sucesiones exactas tales que $\eta \equiv \eta'$ y $\kappa \equiv \kappa'$, entonces

$$\eta\kappa \equiv \eta'\kappa';$$

(c) la correspondencia

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(D, C) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+m}(D, A) \\ (\bar{\eta}, \bar{\eta}') &\mapsto \overline{\eta\eta'} \end{aligned}$$

es una función; y

(d) para toda extensión $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ existen $\eta_1, \dots, \eta_n$ sucesiones exactas de longitud 1 tales que

$$E = \overline{\eta_n \cdots \eta_1}.$$

Demostración.

(a) Se puede comprobar fácilmente que si

$$(1, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, 1) : \eta \rightarrow \eta' \text{ y}$$

$$(1, \beta'_{m-1}, \dots, \beta'_0, 1) : \kappa \rightarrow \kappa'$$

son morfismos, entonces

$$(1, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, \beta'_{m-1}, \dots, \beta'_0, 1) : \eta\kappa \rightarrow \eta'\kappa'$$

es un morfismo de sucesiones exactas.

(b) Se sigue por definición de (a).

(c) Se sigue de (b).

(d) Se sigue de los puntos anteriores utilizando la factorización natural de una sucesión exacta.

□

Utilizando el lema anterior podemos introducir sin ambigüedad la composición de extensiones.

Definición A.54 (Composición de extensiones). Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ y $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(D, C)$.

- (a) Si $E := \overline{\eta}$ y $E' := \overline{\eta'}$, entonces diremos que la extensión $EE' := \overline{\eta\eta'}$ es la **composición de E con E'** .
- (b) Si $E := \overline{\eta}$ y $\eta = \eta_n \cdots \eta_1$ es la descomposición natural en sucesiones exactas de longitud 1, entonces diremos que la expresión

$$E = \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_1}$$

es la **descomposición natural** de E .

Observación A.55. Cabe remarcar que, por construcción, la composición de extensiones es asociativa.

Corolario A.56. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $n > 0$. Entonces, toda extensión $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ se expresa como la composición de n extensiones de longitud 1.

Observación A.57. Cabe notar que, como se puede observar en A.50, dadas $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, C')$ y $\beta : C \rightarrow C'$ en general es falso que $(E\beta)E' = E(\beta E')$. Lo que se puede afirmar es que existe un morfismo $(E\beta)E' \rightarrow E(\beta E')$. En efecto, sabemos que existen morfismos de extensiones

$$E\beta \rightarrow E \quad \text{y} \quad E' \rightarrow \beta E',$$

lo que induce los morfismos

$$(E\beta)E' \rightarrow EE' \quad y \quad EE' \rightarrow E(\beta E')$$

que al componerse obtenemos el morfismo buscado.

Lo que veremos en el siguiente resultado es que todo morfismo se factoriza a través de morfismos como el anterior.

Corolario A.58. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ con descomposiciones naturales

$$\eta = \eta_n \cdots \eta_1 \quad y \quad \eta' = \eta'_n \cdots \eta'_1.$$

Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.

(a) Existe un morfismo de sucesiones exactas de longitud n

$$(\alpha, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, \gamma) : \eta \rightarrow \eta',$$

si y sólo si existen $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ morfismos en $\mathcal{C}$ con los cuales podemos formar los siguientes morfismos de extensiones de longitud 1:

$$(a1) \quad (\alpha, \beta_{n-1}, \alpha_{n-1}) : \overline{\eta_n} \rightarrow \overline{\eta'_n},$$

$$(a2) \quad (\alpha_i, \beta_{i-1}, \alpha_{i-1}) : \overline{\eta_i} \rightarrow \overline{\eta'_i} \quad \forall i \in [2, n-1],$$

$$(a3) \quad (\alpha_1, \beta_0, \gamma) : \overline{\eta_1} \rightarrow \overline{\eta'_1}.$$

(b) Existe un morfismo de sucesiones exactas de longitud n

$$(\alpha, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, \gamma) : \eta \rightarrow \eta'$$

si, y sólo si, existen $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ morfismos en $\mathcal{C}$ tales que:

$$(b1) \quad \overline{\eta'_n} \alpha_{n-1} = \alpha \overline{\eta_n},$$

$$(b2) \quad \overline{\eta'_i} \alpha_{i-1} = \alpha_i \overline{\eta_i} \quad \forall i \in [1, n-1], \text{ y}$$

$$(b3) \quad \overline{\eta'_1} \gamma = \alpha_1 \overline{\eta_1}.$$

(c) Si existe un morfismo de sucesiones exactas de longitud n

$$(\alpha, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, \gamma) : \eta \rightarrow \eta',$$

entonces existen $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ morfismos en $\mathcal{C}$ tales que:

$$(c1) \quad \overline{\eta'_n} \cdots \overline{\eta'_1} \gamma = \alpha \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_1}, \text{ y}$$

$$(c2) \quad \overline{\eta'_i} \cdots \overline{\eta'_1} \gamma = \alpha_i \overline{\eta_i} \cdots \overline{\eta_1} \text{ y } \overline{\eta'_n} \cdots \overline{\eta'_{i+1}} \alpha_i = \alpha \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_{i+1}} \quad \forall i \in [1, n-1].$$

(d) Existe un morfismo de sucesiones exactas de longitud n con extremos fijos

$$(1, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0, 1) : \eta \rightarrow \eta'$$

si, y sólo si, existen $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ morfismos en $\mathcal{C}$ tales que

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta}_n \cdots \bar{\eta}_1 \\ &= (\bar{\eta}'_n \alpha_{n-1}) \bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1 \\ &= \bar{\eta}'_n (\alpha_{n-1} \bar{\eta}_{n-1}) \bar{\eta}_{n-2} \cdots \bar{\eta}_1 \\ &= \bar{\eta}'_n (\bar{\eta}'_{n-1} \alpha_{n-2}) \bar{\eta}_{n-2} \cdots \bar{\eta}_1 \\ &\vdots \\ &= \bar{\eta}'_n \cdots \bar{\eta}'_{i+1} (\alpha_i \bar{\eta}_i) \bar{\eta}_{i-1} \cdots \bar{\eta}_1 \\ &= \bar{\eta}'_n \cdots \bar{\eta}'_{i+1} (\bar{\eta}'_i \alpha_{i-1}) \bar{\eta}_{i-1} \cdots \bar{\eta}_1 \\ &= \bar{\eta}'_n \cdots \bar{\eta}'_i (\alpha_{i-1} \bar{\eta}_{i-1}) \bar{\eta}_{i-2} \cdots \bar{\eta}_1 \\ &\vdots \\ &= \bar{\eta}'_n \cdots (\alpha_1 \bar{\eta}_1) \\ &= \bar{\eta}'_n \cdots \bar{\eta}'_1 \\ &= \bar{\eta}'. \end{aligned}$$

Demostración.

- (a) La prueba se sigue de pegar diagramas utilizando A.37 y A.41.
- (b) Esto es una consecuencia de (a) con A.41(a).
- (c) Se sigue de (b).
- (d) Es inmediato de (b) y la observación anterior.

□

Por A.53 las siguientes operaciones están bien definidas.

Definición A.59. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$, $E := \bar{\eta} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$, $E' := \bar{\eta}' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$, y $\eta = \eta_n \cdots \eta_1$ y $\eta' = \eta'_n \cdots \eta'_1$ las descomposiciones naturales en sucesiones exactas de longitud 1.

- (a) Dado $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ definimos

$$\alpha E := \alpha \bar{\eta}_n \cdots \bar{\eta}_1.$$

(b) Dado $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$ definimos

$$E\gamma := \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_1} \gamma.$$

(c) Se define la **suma de extensiones de longitud n** como

$$E + E' := \nabla (E \oplus E') \Delta.$$

Con lo anterior podemos extender de manera natural muchas de las propiedades antes probadas para las extensiones de longitud 1.

Corolario A.60. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $n > 0$.

(a) Si $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$, $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(D, C')$, $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$, $\beta' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C'', C')$, $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ y $\alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', A'')$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$(a1) \quad (E\beta) E' = E(\beta E'),$$

$$(a2) \quad 1_A E = E = E 1_C,$$

$$(a3) \quad E(\beta\beta') = (E\beta)\beta', \text{ y}$$

$$(a4) \quad (\alpha'\alpha) E = \alpha'(\alpha E).$$

(b) Si $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$, $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C', A')$, $F \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(D, C)$, $F' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(D', C')$, $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$, $\alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', X')$, $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C)$ y $\gamma' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', C')$, entonces se cumplen las siguientes igualdades cuando las composiciones están bien definidas:

$$(b1) \quad (\alpha \oplus \alpha')(E \oplus E') = \alpha E \oplus \alpha' E' \text{ y } (E \oplus E')(\gamma \oplus \gamma') = E\gamma \oplus E'\gamma',$$

$$(b2) \quad (E \oplus E')(F \oplus F') = EF \oplus E'F',$$

$$(b3) \quad (E + E')F = EF + E'F \text{ y } E(F + F') = EF + EF',$$

$$(b4) \quad (\alpha + \alpha')E = \alpha E + \alpha' E \text{ y } E(\gamma + \gamma') = E\gamma + E'\gamma', \text{ y}$$

$$(b5) \quad \alpha(E + E') = \alpha E + \alpha E' \text{ y } (E + E')\gamma = E\gamma + E'\gamma.$$

Demostración. Se sigue de A.58, A.42 y A.44. □

Teorema A.61. Sean $n > 0$, $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $A, C \in \mathcal{C}$. Entonces,

$$(\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A), +)$$

es un grupo abeliano, donde el elemento neutro es la extensión E_0 dada por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow C \xrightarrow{1} C \rightarrow 0.$$

Además, $0E = E0 = E_0$, y dada una extensión E tendremos que $E(-1) = (-1)E$ es el inverso aditivo de E .

Demostración. Sean $E, E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$.

Para la asociatividad, la prueba es la misma que para el caso $n = 1$ en A.46.

Para probar la conmutatividad observamos que se cumplen las siguientes igualdades:

- $\tau(E \oplus E') = (E' \oplus E)\tau$. En efecto, en la prueba de A.46 se mostró que

$$\tau(F \oplus F') = (F' \oplus F)\tau$$

para cualesquiera $F, F' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$. Entonces, utilizando la descomposición natural de E y E' en extensiones de longitud 1, podemos probar inductivamente lo deseado.

- Recordamos que en A.46 se mostró que $\nabla\tau = \nabla$ y $\tau\Delta = \Delta$.

Ahora, podemos ver que

$$\begin{aligned} E + E' &= \nabla(E \oplus E')\Delta \\ &= \nabla\tau(E \oplus E')\Delta \\ &= \nabla(E' \oplus E)\tau\Delta \\ &= \nabla(E' \oplus E)\Delta \\ &= E' + E. \end{aligned}$$

Para probar la existencia del elemento neutro consideramos la extensión E_0 dada por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow C \xrightarrow{1} C \rightarrow 0$$

y suponemos que E tiene una descomposición natural en extensiones de longitud 1

$$E = E_n \cdots E_1.$$

Por A.45 y las propiedades antes probadas, tenemos que

$$\begin{aligned} E + E_0 &= \nabla(E \oplus E_0)\Delta \\ &= \nabla(E_{(A,0)} \oplus E_n)E_{n-1} \cdots E_2(E_{(0,C)} \oplus E_1)\Delta \\ &= (E_{(0,0)} \oplus E_n)E_{n-1} \cdots E_2(E_{(0,0)} \oplus E_1) \\ &= E_n \cdots E_1 \\ &= E. \end{aligned}$$

Por lo tanto, E_0 es el elemento neutro.

Finalmente, observamos que

$$E_0 = 0E = (1 - 1)E = E + (-1)E,$$

lo cual muestra la existencia de inversos. De manera similar se prueba que $E(-1)$ también es el inverso aditivo de E . $\square$

Observación A.62. *A partir de ahora denotaremos como 0 a la extensión nula sin importar la longitud.*

Corolario A.63. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $X, Y \in \mathcal{C}$. Entonces, para todo $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ y morfismos cero $0_X : A \rightarrow X$ y $0_Y : Y \rightarrow C$ se tiene que*

$$E0_Y = 0 \quad \text{y} \quad 0_X E = 0.$$

Más aún, si $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(C', C)$ y $E'' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(A, A')$ son extensiones tales que $E' = 0$ y $E'' = 0$, entonces

$$EE' = 0 \quad \text{y} \quad E''E = 0.$$

Demostración. Es inmediato de A.48. $\square$

A continuación analizaremos con más detalle la relación $\equiv$ para caracterizar las sucesiones exactas que pertenecen a la clase de equivalencia de la extensión trivial. Para comenzar necesitaremos el siguiente lema.

Lema A.64. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ la extensión asociada a la sucesión exacta*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B_{n-1} \rightarrow \cdots B_0 \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $fE = 0$ y $Eg = 0$;
- (b) si E es de longitud 1 y f' es un morfismo tal que $f'E = 0$, entonces existe un morfismo p tal que $f' = pf$; y
- (c) si E es de longitud 1 y g' es un morfismo tal que $Eg' = 0$, entonces existe un morfismo p tal que $g' = gp$.

Demostración.

- (a) Utilizando la descomposición natural basta probarlo para $n = 1$. Para ello, consideramos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Al considerar el pushout de f con f obtenemos un diagrama conmutativo con renglones exactos como el adjunto. Además, claramente tenemos que $f = 1f$. Así que por A.32, sabemos que existe $\mu : C \rightarrow B'$ tal que $g'\mu = 1_C$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & \swarrow f' & \downarrow \beta & \swarrow g' & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & B' & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por lo tanto, el renglón inferior del diagrama es una sucesión exacta que se escinde. Con lo que podemos concluir que $fE = 0$. De manera dual se prueba que $Eg = 0$.

- (b) Si E es de longitud 1 y $f' : A \rightarrow X$ es un morfismo tal que $f'E = 0$, entonces $f'E$ es la clase de una sucesión que se escinde

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\mu} X \oplus C \xrightarrow{\rho} C \rightarrow 0.$$

De modo que existe un monomorfismo $\rho' : C \rightarrow X \oplus C$ tal que $\rho\rho' = 1_C$. Así que por A.32, sabemos que existe $p : B \rightarrow X$ tal que $pf = f'$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & \swarrow f' & \downarrow \beta & \swarrow g' & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & X \oplus C & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

- (c) Se prueba de manera dual a (b).

□

El siguiente lema está inspirado en un lema de Schanuel que se puede consultar en [Mit65, VII.4.1.].

Lema A.65. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n > 1$ y $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ con una descomposición natural $E = \overline{\eta}_n \cdots \overline{\eta}_1$, donde

$$\eta_i : 0 \rightarrow A_{i+1} \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} A_i \rightarrow 0$$

para todo $i \in [1, n-1]$. Entonces, para todo $k \in [2, n]$ los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $E = 0$,
- (b) existen $G \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-k+1}(X, A)$ y $\varphi : A_k \rightarrow X$ tales que $G\varphi = \overline{\eta}_n \cdots \overline{\eta}_k$ y $\varphi\overline{\eta}_{k-1} \cdots \overline{\eta}_1 = 0$, y
- (c) existen $H \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k-1}(C, Y)$ y $\psi : Y \rightarrow A_k$ tales que $\psi H = \overline{\eta}_{k-1} \cdots \overline{\eta}_1$ y $\overline{\eta}_n \cdots \overline{\eta}_k \psi = 0$.

Más aún, en tal caso se cumplen los siguientes enunciados:

- si $k > 2$, existen $G \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-k+1}(X, A)$, un monomorfismo $\varphi'' : X' \rightarrow X$ y un morfismo $\varphi' : A_k \rightarrow X'$ tales que $G\varphi'' = \overline{\eta}_n \cdots \overline{\eta}_k$, $\varphi'\varphi'' = f_{k-1}$ y $\varphi'\varphi''\overline{\eta}_{k-1} \cdots \overline{\eta}_1 = 0$;

- si $k > n - 1$, existen $H \in \text{Ext}_C^{k-1}(C, Y)$, un epimorfismo $\psi'' : Y \rightarrow Y'$ y un morfismo $\psi' : Y' \rightarrow A_k$ tales que $\psi''H = \overline{\eta_{k-1}} \cdots \overline{\eta_1}$, $\psi''\psi' = g_k$ y $\overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_k}\psi''\psi' = 0$;
- si $k = 2$, entonces se puede escoger $\varphi = f_1$;
- si $k = n - 1$, entonces se puede escoger $\psi = g_n$;
- en particular, si $n = 2$ y $k = 2$, se pueden escoger $\psi = g_2$ y $\varphi = f_1$.

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre n . Cabe observar que las implicaciones $(b) \Rightarrow (a)$ y $(c) \Rightarrow (a)$ se cumplen trivialmente, por lo que basta con probar las implicaciones $(b) \Leftrightarrow (c)$ y $(a) \Rightarrow (b)$.

Antes de comenzar la inducción cabe hacer las siguientes observaciones:

- Si tenemos un morfismo de extensiones con extremos fijos $E \rightarrow E'$ y E' satisface (b) , entonces E también satisface (b) .
- Si tenemos un morfismo de extensiones con extremos fijos $E' \rightarrow E$ y E' satisface (c) , entonces E también satisface (c) .

En efecto, por A.58(c) sabemos que en caso de existir un morfismo con extremos fijos $E \rightarrow E'$ con descomposiciones naturales $E = \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_1}$ y $E' = \overline{\eta'_n} \cdots \overline{\eta'_1}$, para todo $k \in [1, n - 1]$ existe un morfismo α_k tal que

$$\overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_{k+1}} = \overline{\eta'_n} \cdots \overline{\eta'_{k+1}} \alpha_k \quad \text{y} \quad \alpha_k \overline{\eta_k} \cdots \overline{\eta_1} = \overline{\eta'_k} \cdots \overline{\eta'_1}.$$

Entonces, si E' satisface (b) para $k + 1$, es decir existe una extensión G y un morfismo φ tales que $G\varphi = \overline{\eta'_n} \cdots \overline{\eta'_{k+1}}$ y $\varphi \overline{\eta'_k} \cdots \overline{\eta'_1} = 0$, tenemos que

$$\overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_{k+1}} = \overline{\eta'_n} \cdots \overline{\eta'_{k+1}} \alpha = G\varphi \alpha \quad \text{y} \quad \varphi \alpha \overline{\eta_k} \cdots \overline{\eta_1} = \varphi \overline{\eta'_k} \cdots \overline{\eta'_1} = 0.$$

Por lo tanto, E también satisface (b) para $k - 1$. De manera dual podemos mostrar la segunda observación.

Probaremos a continuación el caso base $n = 2$. Comenzaremos suponiendo (b), de modo que existen $G' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A)$ y $\varphi : A_2 \rightarrow X$ tales que $G'\varphi = \overline{\eta}_2$ y $\varphi\overline{\eta}_1 = 0$. Como $\varphi\overline{\eta}_1 = 0$, sabemos por A.64(b) que existe un morfismo p tal que $\varphi = pf_1$. Entonces, tomando $G := G'p$, tenemos por construcción que $Gf_1 = \overline{\eta}_2$, y por A.64(a) sabemos que $f_1\overline{\eta}_1 = 0$. Ahora, utilizando que $Gf_1 = \overline{\eta}_2$, se sigue de A.26 que existe una extensión $H \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_1, B_2)$ tal que $g_2H = \overline{\eta}_1$, y además tenemos que $\overline{\eta}_2g_2 = 0$ por A.64(c). Con esto hemos probado para $n = 2$ que (b) $\Rightarrow$ (c), y de manera dual podemos probar que (c) $\Rightarrow$ (b).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow{g_2} & A_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 0 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & A_1 & = & A_1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Queda probar que (a) $\Rightarrow$ (b). Para ello recordamos que en el caso actual hemos probado que (b) $\Leftrightarrow$ (c). Así que al utilizar las observaciones mencionadas al inicio de la prueba podemos concluir que si existe un morfismo de extensiones de longitud 2, $E' \rightarrow E''$ y alguna de ellas satisface (b) o (c), entonces E' y E'' satisfacen (b) y (c). Podemos ver entonces que si $E = 0$, entonces E satisface (b) y (c). En efecto, si E es la extensión asociada a una sucesión exacta η y $E = 0$, entonces por definición existe una sucesión de sucesiones exactas $\kappa_1, \dots, \kappa_s$ con $\kappa_1 = \eta$,

$$\kappa_s : 0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow C \xrightarrow{1} C \rightarrow 0$$

y tales que para todo $i \in [1, s-1]$ exista un morfismo de sucesiones exactas con extremos fijos

$$\kappa_i \rightarrow \kappa_{i+1} \quad 0 \quad \kappa_{i+1} \rightarrow \kappa_i.$$

Entonces, como 0 satisface (b) y (c) trivialmente podemos probar inductivamente que κ_i también los satisface para todo $i \in [1, s]$. En particular, E satisface (b) y (c).

Supongamos ahora como hipótesis de inducción que (a), (b) y (c) son equivalentes $1 < n' < n$ y para todo $k \in [2, n']$. Comenzaremos suponiendo (b), de modo que existen $G \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-k+1}(X, A)$ y $\varphi : A_k \rightarrow X$ tales que $G\varphi = \overline{\eta}_n \cdots \overline{\eta}_k$ y $\varphi\overline{\eta}_{k-1} \cdots \overline{\eta}_1 = 0$. Si $k = 2$ la prueba es similar a la base de inducción. Si $k > 2$, entonces utilizando que

$$(\varphi\overline{\eta}_{k-1})(\overline{\eta}_{k-2} \cdots \overline{\eta}_1) = 0,$$

por hipótesis de inducción sabemos que existe una extensión H de longitud $k-2$ y un morfismo ψ' tales que

$$\psi'H = \overline{\eta}_{k-2} \cdots \overline{\eta}_1 \quad \text{y} \quad \varphi\overline{\eta}_{k-1}\psi' = 0.$$

Entonces,

$$\overline{\eta}_n \cdots \overline{\eta}_k (\overline{\eta}_{k-1}\psi') = G\varphi\overline{\eta}_{k-1}\psi' = 0.$$

Utilizando una vez más la hipótesis inductiva, por lo anterior, existen una extensión I y un morfismo ψ tales que

$$\psi I = \overline{\eta_{k-1}}\psi' \quad \text{y} \quad \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_k}\psi = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que la extensión IH y el morfismo ψ satisfacen que

$$\psi IH = \overline{\eta_{k-1}}\psi' H = \overline{\eta_{k-1}\eta_{k-2}} \cdots \overline{\eta_1} \quad \text{y} \quad \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_k}\psi = 0.$$

Lo cual prueba que se satisface (c).

La prueba de $(c) \Rightarrow (b)$ es dual a la de $(b) \Rightarrow (c)$.

Finalmente la prueba de $(a) \Rightarrow (b)$ es análoga a la de la base de inducción.

Queda por probar los enunciados finales del lema, para lo cual basta con probar los enunciados relacionados con los morfismos φ , φ' y φ'' .

Supongamos que existen G' y φ tales que $G'\varphi = \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_{k+1}}$ y $\varphi \overline{\eta_k} \cdots \overline{\eta_1} = 0$. Por (c) sabemos que existe una extensión H y un morfismo ψ tales que

$$\psi H = \overline{\eta_{k-1}} \cdots \overline{\eta_1} \quad \text{y} \quad \varphi \overline{\eta_k}\psi = 0.$$

Entonces, si

$$\eta_k : 0 \rightarrow A_{k+1} \xrightarrow{f_k} B_k \xrightarrow{g_k} A_k \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_k \psi : 0 \rightarrow A_{k+1} \xrightarrow{f'_k} B \xrightarrow{g'_k} X \rightarrow 0,$$

sabemos que existe un morfismo de sucesiones exactas $(1, \psi', \psi) : \eta_k \psi \rightarrow \eta_k$ de donde podemos concluir que $f_k = \psi' f'_k$. Además, como $\varphi \overline{\eta_k}\psi$ sabemos por A.64 que existe un morfismo p tal que $\varphi = p f'_k$. Por lo tanto, tomando $G := G'p$ podemos concluir que

$$G f'_k = G' \varphi = \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_{k+1}} \quad \text{y} \quad \psi' f'_k \overline{\eta_k} \cdots \overline{\eta_1} = 0$$

por A.64.

Supongamos que $k = 2$, en tal caso existen G' y φ tales que $G'\varphi = \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_2}$ y $\varphi \overline{\eta_1} = 0$. Como $\varphi \overline{\eta_1} = 0$, sabemos por A.64(b) que existe un morfismo p tal que $\varphi = p f_1$. Entonces, tomando $G := G'p$, tenemos por construcción que $G f_1 = \overline{\eta_n} \cdots \overline{\eta_2}$, y por A.64(a) sabemos que $f_1 \overline{\eta_1} = 0$. $\square$

Teorema A.66. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n > 1$ y $\eta \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ con descomposición natural $\eta = \eta_n \cdots \eta_1$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $\overline{\eta} = 0$,
- (b) existen $\kappa \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ tal que existen los siguientes morfismos de sucesiones exactas con extremos fijos

$$0 \leftarrow \kappa \rightarrow \eta.$$

(c) existe $\kappa' \in \mathcal{E}_C^n(C, A)$ tal que existen los siguientes morfismos de sucesiones exactas con extremos fijos

$$0 \rightarrow \kappa' \leftarrow \eta.$$

Demostración. Es claro que (b) $\Rightarrow$ (a) y (c) $\Rightarrow$ (a), por lo que basta probar que (a) $\Rightarrow$ (b), (c).

Supongamos que $\bar{\eta} = 0$, de modo que

$$\eta_n(\eta_{n-1} \cdots \eta_1) = 0.$$

Así que, por A.65(b), tenemos que existe una sucesión exacta corta ρ_n y un morfismo φ_n tales que

$$\overline{\rho_n} \varphi_n = \overline{\eta_n} \quad \text{y} \quad \varphi_n \overline{\eta_{n-1}} \cdots \overline{\eta_1} = 0.$$

Además, como ρ_n es de longitud 1, podemos suponer que

$$\rho_n \varphi_n = \eta_n.$$

A su vez, considerando la igualdad

$$\varphi_n \overline{\eta_{n-1}} \cdots \overline{\eta_1} = 0,$$

por A.65(b) sabemos que existe una sucesión exacta corta ρ_{n-1} y un morfismo φ_{n-1} tales que

$$\overline{\rho_{n-1}} \varphi_{n-1} = \varphi_n \overline{\eta_{n-1}} \quad \text{y} \quad \varphi_{n-1} \overline{\eta_{n-2}} \cdots \overline{\eta_1} = 0.$$

Donde, como ρ_{n-1} es de longitud 1, podemos suponer que $\rho_{n-1} \varphi_{n-1} = \varphi_n \eta_{n-1}$. Continuando este proceso concluimos que para todo $k \in [n-1, 2]$ existe una sucesión exacta corta ρ_k y un morfismo φ_k tales que

$$\rho_k \varphi_k = \varphi_{k+1} \eta_k \quad \text{y} \quad \varphi_k \overline{\eta_{k-1}} \cdots \overline{\eta_1} = 0.$$

Entonces, si consideramos

$$\kappa' := \rho_n \cdots \rho_1,$$

donde $\rho_1 := \varphi_2 \eta_1$, por A.58(b) sabemos que existe un morfismo de extensiones con extremos fijos

$$\eta \rightarrow \kappa'.$$

Finalmente, observamos que por construcción $\varphi_2 \overline{\eta_1} = 0$, de modo que ρ_1 es una sucesión exacta que se escinde, por lo que se puede ver que existe un morfismo

$$0 \rightarrow \kappa'.$$

De manera dual podemos construir una sucesión de morfismos de sucesiones exactas

con extremos fijos

$$0 \leftarrow \kappa \rightarrow \eta.$$

□

Corolario A.67. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n \geq 0$ y $A \in \mathcal{C}$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$ si, y sólo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(A, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$ y $k \geq n$; y
- (b) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, A) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$ si, y sólo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, A) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$ y $k \geq n$.

Demostración. Probaremos el primer enunciado, la prueba del segundo es dual. Para ello, basta probar que si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$, entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(A, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Supongamos que A satisface que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Sean $C \in \mathcal{C}$ y $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, A)$. Consideramos

$$E = \overline{\eta_{n+1}} \cdots \overline{\eta_1}$$

una descomposición natural de E . Entonces, por hipótesis sabemos que

$$E' := \overline{\eta_{n+1}} \cdots \overline{\eta_2} = 0.$$

Por lo tanto, $E = E' \overline{\eta_1} = 0 \overline{\eta_1} = 0$.

□

A.4.3. Funtorialidad y la sucesión exacta larga del Ext

En esta sección construiremos a partir de una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$$

una sucesión exacta larga

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, K) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(X, K).$$

Ahora, como hemos mencionado antes, en general las clases $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Y)$ no son conjuntos, por lo que la idea de una sucesión exacta de dichas clases puede resultar confusa. Sin embargo, de la misma manera en que hemos hablado de funciones y operaciones entre dichas clases, podremos definir el concepto de morfismo entre dichas clases, así como de imagen, núcleo y conúcleo de dichos morfismos. Cabe repetir una vez más dichas convenciones:

Definición A.68. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases.

- (a) Diremos que una asociación $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es una función si para todo $A \in \mathcal{A}$ existe una única $B \in \mathcal{B}$ tal que $F(A) = B$.
- (b) Diremos que una función $*$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es una operación en $\mathcal{A}$. En tal caso, denotaremos

$$A * A' := *(A, A') \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}.$$

- (c) Diremos que una clase junto con una operación $(\mathcal{A}, +)$ es un grupo abeliano si se satisfacen las siguientes propiedades:

- $A + A' = A' + A \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}$.
- $(A + A') + A'' = A + (A' + A'') \quad \forall A, A', A'' \in \mathcal{A}$,
- $\exists E \in \mathcal{A}$ tal que $A + E = A \quad \forall A \in \mathcal{A}$, y
- $\forall A \in \mathcal{A} \exists -A \in \mathcal{A}$ tal que $A + (-A) = E$.

Además en caso de que no haya confusión denotaremos $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +)$.

- (d) Si $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $(\mathcal{A}, +)$ un grupo abeliano. Diremos que $\mathcal{B}$ es un subgrupo de $\mathcal{A}$ en caso de que

$$B + (-B') \in \mathcal{B} \quad \forall B, B' \in \mathcal{B}.$$

- (e) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son grupos abelianos, diremos que una función

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

es un morfismo de grupos abelianos si

$$f(A + A') = f(A) + f(A') \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}.$$

- (f) Sea $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morfismo de grupos abelianos,

- definimos el núcleo de f como el subgrupo de $\mathcal{A}$

$$\text{Ker}(f) := \{A \in \mathcal{A} \mid f(A) = 0\},$$

- definimos la imagen de f como el subgrupo de $\mathcal{B}$

$$\text{Im}(f) := \{B \in \mathcal{B} \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } f(A) = B\}.$$

- (g) Diremos que una sucesión de morfismos de grupos abelianos

$$\cdots \rightarrow \mathcal{A}_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \mathcal{A}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{A}_{i+1} \rightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta si $\text{Ker}(\alpha_i) = \text{Im}(\alpha_{i-1}) \quad \forall i$.

Proposición A.69. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n > 0$, $Z \in \mathcal{C}$ y $f : A \rightarrow B$, $f' : B \rightarrow C$, $g : X \rightarrow Y$ y $g' : Y \rightarrow C$ morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) la correspondencia $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(f, Z) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, Z)$, $E \mapsto Ef$, es un morfismo;
- (b) la correspondencia $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, f) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, B)$, $E \mapsto fE$, es un morfismo; y
- (c) se satisfacen las siguientes igualdades:
 - (c1) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, g) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(f, X) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(f, Y) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, g)$,
 - (c2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(f'f, Z) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(f, Z) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(f', Z)$,
 - (c3) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, g'g) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, g') \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, g)$,
 - (c4) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, 1_A)$ es la identidad de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Z, A)$, y
 - (c5) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(1_A, Z)$ es la identidad de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, Z)$.

Demostración. Todos los enunciados son consecuencias inmediatas de A.60. $\square$

Definición A.70. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $C, A \in \mathcal{C}$. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^0(C, A) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A).$$

Proposición A.71. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n > 0$, $k \geq 0$, $X \in \mathcal{C}$, $h : X \rightarrow X'$ y $h' : X' \rightarrow X$ morfismos en $\mathcal{C}$,

$$\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta' : 0 \rightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \rightarrow 0$$

sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$, y $(\alpha, \beta, \gamma) : \eta \rightarrow \eta'$ un morfismo de sucesiones exactas cortas. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) la correspondencia

$$\begin{aligned} \partial(\eta)_0^X : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A) \\ x &\mapsto \bar{\eta}x \end{aligned}$$

es un morfismo;

- (b) la correspondencia

$$\begin{aligned} \partial'(\eta)_0^X : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, X) \\ x &\mapsto x\bar{\eta} \end{aligned}$$

es un morfismo;

antes definidos podemos construir una sucesión exacta larga que recibe el nombre de sucesión larga covariante del $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ asociada a η .

Dualmente, con los morfismos

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{C}}(\mu, X) : k_{\mathcal{C}}(B, X) &\rightarrow k_{\mathcal{C}}(A, X), \\ k_{\mathcal{C}}(\lambda, X) : k_{\mathcal{C}}(C, X) &\rightarrow k_{\mathcal{C}}(B, X) \text{ y} \\ \partial_n^X : k_{\mathcal{C}}(A, X) &\rightarrow k_{\mathcal{C}}^{k+1}(C, X) \end{aligned}$$

podemos construir una sucesión exacta larga que recibe el nombre de sucesión larga contravariante del $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ asociada a η .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (C, X) & \xrightarrow{(\mu, X)} & (B, X) & \xrightarrow{(\lambda, X)} & (A, X) \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \partial'_0 & & \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & {}^1(C, X) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & {}^{n-1}(A, X) \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \partial'_{n-1} & & \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & {}^n(C, X) & \rightarrow {}^n(B, X) \rightarrow & {}^n(A, X) \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \partial'_n & & \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & {}^{n+1}(A, X) & \longrightarrow \cdots & \end{array}$$

Lema A.73. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

- (a) si λ es un epimorfismo tal que $\lambda E = 0$, entonces existe una extensión H tal que $E = \mu H$ donde μ es el núcleo de λ , y
- (b) si λ es un monomorfismo tal que $E\lambda = 0$, entonces existe una extensión H tal que $E = H\mu$ donde μ es el conúcleo de λ .

Demostración. Probaremos el primer enunciado. La prueba del segundo es dual. Supongamos que E es la extensión asociada a la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda' & & \\ & & Y & = & Y & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Como $\lambda : A \rightarrow Y$ es un epimorfismo y $\lambda E = 0$, se sigue que existe un epimorfismo $\lambda' : B \rightarrow Y$ tal que $\lambda' f = \lambda$. Luego, por el lema de la serpiente, podemos completar el diagrama adjunto con una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow X \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, $E = \mu\bar{\eta}$.

Teorema A.74. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n > 0$ y $X \in \mathcal{C}$. Entonces, para toda sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\lambda} C \rightarrow 0$$

las siguientes sucesiones son exactas:

$$(a) \quad 0 \rightarrow (X, A) \xrightarrow{(X, \mu)} (X, B) \xrightarrow{(X, \lambda)} (X, C) \xrightarrow{\partial_0} {}^1(X, A);$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & {}^n(X, A) \xrightarrow{{}^n(X, \mu)} {}^n(X, B) \xrightarrow{{}^n(X, \lambda)} {}^n(X, C) \xrightarrow{\delta_n} {}^{n+1}(X, A); \\
(a') \quad & 0 \rightarrow (C, X) \xrightarrow{(\lambda, X)} (B, X) \xrightarrow{(X, \mu)} (A, X) \xrightarrow{\partial'_0} {}^1(C, X); \\
(b') \quad & {}^n(C, X) \xrightarrow{{}^n(\lambda, X)} {}^n(B, X) \xrightarrow{{}^n(\mu, X)} {}^n(A, X) \xrightarrow{\delta'_0} {}^{n+1}(C, X).
\end{aligned}$$

Demostración. Probaremos los enunciados (a) y (b). La prueba de los enunciados (a') y (b') es dual.

(a) Es bien conocida la exactitud de la sucesión

$$0 \rightarrow (X, A) \xrightarrow{(X, \mu)} (X, B) \xrightarrow{(X, \lambda)} (X, C).$$

Además, por A.64 es inmediato ver que $\text{Im}((X, \lambda)) = \text{Ker}(\partial_0)$.

(b) Para empezar veamos que $\text{Im}({}^n(X, \lambda)) = \text{Ker}(\partial_n)$. Observamos que $E \in \text{Ker}(\partial_n)$ si y sólo si $\bar{\eta}E = 0$, lo cual es equivalente a que existan $H \in \text{Ext}_C^n(C, X')$ y $\psi : X' \rightarrow C$ tales que $\psi H = E$ y $\bar{\eta}\psi = 0$ por A.65. Pero entonces, como $\bar{\eta}\psi = 0$, sabemos por A.64 que $\psi = \lambda p$. Por lo tanto, $E = \lambda(pH) \in \text{Im}({}^n(X, \lambda))$. Inversamente, si $E \in \text{Im}({}^n(X, \lambda))$, tenemos que $E = \lambda H$ para algún $H \in \text{Ext}_C^n(X, C)$. De modo que $E \in \text{Ker}(\partial_n)$, ya que

$$\partial_n(E) = \partial_n(\lambda H) = \bar{\eta}\lambda H = 0H = 0$$

por A.64 y A.63.

Veamos ahora que $\text{Ker}({}^n(X, \lambda)) = \text{Im}({}^n(X, \mu))$. Claramente tenemos que

$${}^n(X, \lambda) {}^n(X, \mu) = 0.$$

Por lo tanto, queda por probar que

$$\text{Ker}({}^n(X, \lambda)) \subseteq \text{Im}({}^n(X, \mu)).$$

Para ello, supongamos que $E \in \text{Ext}_C^n(X, B)$ es una extensión con una descomposición natural $E = \bar{\eta}_n \cdots \bar{\eta}_1$ tal que $\lambda E = 0$. Por A.65, sabemos que existen $H \in \text{Ext}_C^{n-1}(C, Y)$ y $\psi : Y \rightarrow A_{n-1}$ tales que $\psi H = \bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1$ y $\lambda \bar{\eta}_n \psi = 0$. Ahora, como $\lambda(\bar{\eta}_n \psi) = 0$, por A.73 sabemos que existe una extensión H' tal que $\bar{\eta}_n \psi = \mu H'$. Por lo tanto,

$$E = \bar{\eta}_n \cdots \bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_n \psi H = \mu H' H.$$

□

Por último terminamos esta sección con el siguiente lema que es ampliamente utilizado. Para enunciarlo de manera más simple recordamos las siguientes definiciones.

Definición A.75. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$.

- (a) $M^\perp := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, X) = 0 \quad \forall i \geq 1\}$,
- (b) ${}^\perp M := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, M) = 0 \quad \forall i \geq 1\}$,
- (c) $\text{pd}_{\mathcal{A}}(M) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall k > n\}$, y
- (d) $\text{id}_{\mathcal{A}}(M) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(\mathcal{A}, M) = 0 \quad \forall k > n\}$.

Lema A.76 (Lema del corrimiento). Sean $m \geq 0$, $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $A, Y \in \mathcal{C}$ y

$$0 \rightarrow A \rightarrow B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

sucesiones exactas. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:

- (a) Si $B_i \in Y^{\perp > m}$ para todo $0 \leq i < n$, entonces

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, B_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(Y, A) \quad \forall k > m.$$

En particular, si $\text{pd}(Y) \leq n$ entonces $B_n \in Y^{\perp > m}$.

- (b) Si $C_i \in {}^{\perp > m} Y$ para todo $0 \leq i < n$, entonces

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(C_n, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(A, Y) \quad \forall k > m.$$

En particular, si $\text{id} Y \leq n$ entonces $C_n \in {}^{\perp > m} Y$.

Demostración. Probaremos solamente (a), la prueba de (b) es dual.

Procederemos por inducción sobre n . Sea $n = 1$. Entonces, se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow 0.$$

De modo que de dicha sucesión se obtiene la sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, B_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, B_1) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(Y, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, B_0) = 0 \quad \forall k > m,$$

por lo que se concluye que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, B_1) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(Y, A) \quad \forall k > m$.

Sea

$$0 \rightarrow A \rightarrow B_0 \xrightarrow{d_0} B_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_n} B_{n+1} \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de R -módulos tal que $B_i \in Y^{\perp > m}$ para todo $0 \leq i \leq n$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker}(d_1) \xrightarrow{i} B_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_n} B_{n+1} \rightarrow 0.$$

Dado que es de longitud n y satisface las hipótesis de (a), por hipótesis inductiva se sigue que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, B_{n+1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(Y, \text{Ker} d_1) \quad \forall k > m.$$

Ahora, como de la sucesión

$$0 \rightarrow A \rightarrow B_0 \xrightarrow{d_0} \text{Ker}(d_1) \rightarrow 0$$

se obtiene la sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(Y, B_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(Y, \text{Ker} d_1) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n+1}(Y, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n+1}(Y, B_0) = 0$$

$\forall k > m$, podemos concluir que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(Y, C_{n+1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n}(Y, \text{Ker} d_1) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+n+1}(Y, A) \quad \forall k > m.$$

□

A.4.4. El Ext y coproductos finitos

En esta sección buscaremos probar que, en caso de tener un conjunto de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, tendremos isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n \left(A, \prod_{i \in I} A_i \right) &\rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, A_i) \quad \text{y} \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n \left(\bigoplus_{i \in I} A_i, A \right) &\rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_i, A) \quad \forall A \in \mathcal{C}, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Cabe recordar que en general dichos coproductos y productos no necesariamente existen en una categoría abeliana, por lo que nos limitaremos a coproductos finitos en esta sección. Sin embargo, más adelante retomaremos las categorías que tienen coproductos y productos arbitrarios para extender los resultados que veremos a continuación.

Dicho lo anterior podemos retomar el objetivo de esta sección. Pero antes, recordando que en general las clases $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(M, X)$ no son conjuntos, cabe aclarar a qué nos estaremos refiriendo con la expresión

$$\prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_i, B) \quad \text{y} \quad \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_i).$$

Definición A.77. Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases indexada por un conjunto I . Nos referiremos a la clase

$$\{(A_i)_{i \in I} \mid A_i \in \mathcal{A}_i\}$$

como el producto de $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ y la denotaremos como $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Observación A.78. *El producto de grupos es un grupo.*

Proposición A.79. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Entonces:*

(a) *Considerando el coproducto $A_1 \oplus A_2$ con las inclusiones canónicas*

$$(\mu_i : A_i \rightarrow A_1 \oplus A_2)_{i=1}^2,$$

se cumplen los siguientes enunciados:

(a1) *la correspondencia*

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_1 \oplus A_2, B) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_1, B) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_2, B) \\ E &\mapsto (E\mu_1, E\mu_2) \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos abelianos;

(a2) *Ψ es inyectiva;*

(a3) *dado $(\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_1, B) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_2, B)$ con*

$$\eta_1 : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{g_1} A_1 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_2 : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_2} C_2 \xrightarrow{g_2} A_2 \rightarrow 0,$$

al considerar el pushout (C, f'_1, f'_2) de f_1 y f_2 , obtenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f'_1 f_1} C \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow 0$$

tal que $\Psi(\overline{\eta}) = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)$; en particular,

(a4) *Ψ es un isomorfismo.*

(b) *Considerando el producto $A_1 \oplus A_2$ con las proyecciones canónicas*

$$(\pi_i : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_i)_{i=1}^2,$$

se cumplen los siguientes enunciados:

(b1) *la correspondencia*

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, A_1 \oplus A_2) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, A_1) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, A_2) \\ E &\mapsto (\pi_1 E, \pi_2 E) \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos abelianos;

(b2) *Ψ es inyectiva;*

Por el dual de A.19, se puede ver que al considerar el pushout (C, f'_1, f'_2) de f_1 y f_2 obtenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} A \rightarrow 0,$$

donde $f := f'_1 f_1$. Ahora, por la propiedad universal de conúcleo y el lema de la serpiente A.28, para $i \in [1, 2]$ tenemos que existe un monomorfismo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & A_1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C & \rightarrow & A_1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A_2 & = & A_2 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$(1_B, f'_i, g'_i) : \eta_i \rightarrow \eta.$$

Es decir, existe g'_i tal que $\eta g'_i = \eta_i$ para todo $i \in [1, 2]$. Por lo tanto, basta probar que A , junto con los monomorfismos g'_1 y g'_2 , es un coproducto de A_1 y A_2 . Para ello, observamos que en caso de existir una familia de morfismos

$$\{\alpha_i : A_i \rightarrow X\}_{i=1}^2,$$

como $\alpha_i g_i f_i = 0 \forall i \in [1, 2]$, se sigue por la propiedad universal del pushout que existe $\varphi : C \rightarrow X$ tal que $\alpha_i g_i = \varphi f'_i \forall i \in [1, 2]$. Pero, como

$$\varphi f = \varphi f'_i f_i = \alpha_i g_i f_i = 0,$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f_i} & C_i & \xrightarrow{g_i} & A_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f'_i & & \downarrow g'_i \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

α_i
 φ

se sigue de la propiedad universal de conúcleo que existe $\psi : A \rightarrow X$ tal que $\varphi = \psi g$. Por lo tanto, para todo $i \in [1, 2]$ tenemos que $\psi g'_i = \alpha_i$, ya que g_i es un epimorfismo y

$$\psi g'_i g_i = \psi g f'_i = \varphi f'_i = \alpha_i g_i.$$

□

Observación A.80. Notemos que en la prueba de (a3) se construye explícitamente la inversa de Ψ . Esta correspondencia la denotaremos como Ψ^{-1} .

Probado lo anterior, podemos extender el resultado a todo $n \geq 1$. Para ello, necesitaremos de los siguientes lemas.

Lema A.81. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $G_1 \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C_1, B)$, $G_2 \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C_2, B)$, $\varphi_1 : C \rightarrow C_1$ y $\varphi_2 : C \rightarrow C_2$ morfismos tales que $G_1 \varphi_1 = G_2 \varphi_2$. Si φ_1 o φ_2 es

un monomorfismo, entonces existen $G \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, B)$ y $\varphi : C \rightarrow X$ tales que $G\varphi = G_1\varphi_1 = G_2\varphi_2$. Más aún, si (X, α_1, α_2) es el pushout de φ_1 con φ_2 , entonces $\varphi = \alpha_1\varphi_1 = \alpha_2\varphi_2$.

Demostración. Ciertamente, consideremos que G_1 y G_2 están dados por las sucesiones exactas

$$\eta_1 : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{g_1} C_1 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_2 : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{g_2} C_2 \rightarrow 0$$

respectivamente, y que la extensión $E := G_1\varphi_1 = G_2\varphi_2$ está dada por la sucesión exacta

$$\epsilon : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Además, como $E := G_1\varphi_1 = G_2\varphi_2$ sabemos que existen morfismos de extensiones

$$(1, \varphi'_1, \varphi_1) : E \rightarrow G_1 \quad \text{y} \quad (1, \varphi'_2, \varphi_2) : E \rightarrow G_2.$$

Recordando a A.16 podemos construir el diagrama adjunto, donde el renglón inferior consiste de los pushout de φ'_1 con φ'_2 y φ_1 con φ_2 . Además, como φ_1 o φ_2 es un monomorfismo, se sigue que $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_2 \end{pmatrix}$ es un monomorfismo. Así que por el lema de la serpiente obtenemos una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B \oplus B & \longrightarrow & A_1 \oplus A_2 & \longrightarrow & C_1 \oplus C_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\eta : 0 \rightarrow B \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow 0$$

y un morfismo de sucesiones exactas

$$(1, \varphi', \varphi) : \epsilon \rightarrow \eta,$$

con lo cual podemos concluir lo deseado. $\square$

Proposición A.82. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n \geq 1$, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Entonces:

(a) Considerando el coproducto $A_1 \oplus A_2$ con las inclusiones canónicas

$$(\mu_i : A_i \rightarrow A_1 \oplus A_2)_{i=1}^2,$$

se cumplen los siguientes enunciados:

(a1) la correspondencia

$$\begin{aligned}\Psi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_1 \oplus A_2, B) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_1, B) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_2, B) \\ E &\mapsto (E\mu_1, E\mu_2)\end{aligned}$$

es un morfismo de grupos abelianos;

(a2) Ψ_n es inyectiva;

(a3) dado $(\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_1, B) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_2, B)$ con

$$\begin{aligned}\eta_1 : 0 \rightarrow B &\xrightarrow{f_1} C_1 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{g_1} A_1 \rightarrow 0 \quad y \\ \eta_2 : 0 \rightarrow B &\xrightarrow{f_2} C'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow C'_n \xrightarrow{g_2} A_2 \rightarrow 0,\end{aligned}$$

al considerar el pushout (C, f'_1, f'_2) de f_1 y f_2 , obtenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f'_1 f_1} C \rightarrow C_2 \oplus C'_2 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \oplus C'_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix}} A_1 \oplus A_2 \rightarrow 0$$

tal que $\Psi_n(\overline{\eta}) = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)$; en particular,

(a4) Ψ_n es un isomorfismo.

(b) Considerando el producto $A_1 \oplus A_2$ con las proyecciones canónicas

$$(\pi_i : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_i)_{i=1}^2,$$

se cumplen los siguientes enunciados:

(b1) la correspondencia

$$\begin{aligned}\Phi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_1 \oplus A_2) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_1) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_2) \\ E &\mapsto (\pi_1 E, \pi_2 E)\end{aligned}$$

es un morfismo de grupos abelianos;

(b2) Φ_n es inyectiva;

(b3) dado $(\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_1) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_2)$ con

$$\begin{aligned}\eta_1 : 0 \rightarrow A_1 &\xrightarrow{f_1} C_1 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{g_1} B \rightarrow 0 \quad y \\ \eta_2 : 0 \rightarrow A_2 &\xrightarrow{f_2} C'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow C'_n \xrightarrow{g_2} B \rightarrow 0,\end{aligned}$$

se tiene que al considerar el pullback (C, g'_1, g'_2) de g_1 y g_2 , obtenemos una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow C_1 \oplus C'_1 \cdots \rightarrow C_{n-1} \oplus C'_{n-1} \rightarrow C \xrightarrow{g'_1 g'_2} B \rightarrow 0$$

tal que $\Phi_n(\bar{\eta}) = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$; en particular,
 (b4) Φ_n es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Probaremos (a), la prueba de (b) es dual.

(a1) Es inmediato de A.58.

(a2) Supongamos que E es una extensión con una descomposición natural $E = \bar{\eta}_n \cdots \bar{\eta}_1$. Probaremos por inducción sobre $n \geq 1$ que en caso de tener $E\mu_i = 0$ para todo $i \in [1, 2]$ se sigue que $E = 0$.

El caso $n = 1$ ya lo conocemos por A.79. Para $n = 2$, observamos que por A.65 sabemos que para todo $i \in [1, 2]$ existen una extensión G_i y un monomorfismo φ_i tales que

$$G_i\varphi_i = \bar{\eta}_2 \text{ y } \varphi_i\bar{\eta}_1\mu_i = 0.$$

Entonces, por A.81 sabemos que existe una extensión G y un morfismo $\varphi = \alpha_1\varphi_1 = \alpha_2\varphi_2$ tales que

$$G\varphi = G_i\varphi_i = \bar{\eta}_2 \text{ y } \varphi\bar{\eta}_1\mu_i = \alpha_i\varphi_i\bar{\eta}_1\mu_i = 0 \quad \forall i \in [1, 2].$$

Así que por el caso $n = 1$ tenemos que $\varphi\bar{\eta}_1 = 0$, de donde se sigue que $E = \bar{\eta}_2\bar{\eta}_1 = G\varphi\bar{\eta}_1 = 0$.

En caso de que $n > 2$ procedemos de manera similar. Por A.65 sabemos que existen una extensión G_1 , un monomorfismo φ_1 y un morfismo ψ_1 tales que

$$G_1\varphi_1 = \bar{\eta}_n \text{ y } \psi_1\varphi_1\bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1\mu_1 = 0.$$

De igual manera, por A.65 sabemos que existen una extensión G_2 y un morfismo φ_2 tales que

$$G_2\varphi_2 = \bar{\eta}_n \text{ y } \varphi_2\bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1\mu_2 = 0.$$

Ahora, como $G_2\varphi_2 = \bar{\eta}_n = G_1\varphi_1$, sabemos por A.81 que existe una extensión G y morfismos φ , α_1 y α_2 tales que $G\varphi = \bar{\eta}_n$ y que $\varphi = \alpha_i\varphi_i \quad \forall i \in [1, 2]$. Por lo tanto, tenemos que

$$\varphi\bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1\mu_i = \alpha_i\varphi_i\bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1\mu_i = 0 \quad \forall i \in [1, 2].$$

Así que podemos concluir que $E = 0$, ya que por hipótesis inductiva tenemos que

$$G\varphi = \bar{\eta}_n \text{ y } \varphi\bar{\eta}_{n-1} \cdots \bar{\eta}_1 = 0.$$

(a3) Recordamos que ya hemos probado la existencia y propiedades de la función Ψ_1 en A.79. Sea $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_1, B) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_2, B)$ con descomposiciones naturales $\bar{\eta}_1 = \bar{\kappa}_n \cdots \bar{\kappa}_1$ y $\bar{\eta}_2 = \bar{\kappa}'_n \cdots \bar{\kappa}'_1$, donde

$$\kappa_i : 0 \rightarrow B_{i+1} \rightarrow C_i \rightarrow B_i \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \kappa'_i : 0 \rightarrow B'_{i+1} \rightarrow C'_i \rightarrow B'_i \rightarrow 0.$$

Consideramos los coproductos

$$(u_i : B_i \rightarrow B_i \oplus B'_i, u'_i : B'_i \rightarrow B_i \oplus B'_i)$$

para todo $i \in [1, n+1]$. Cabe observar que $u_1 = \mu_1$ y $u'_1 = \mu_2$. Se puede ver por A.41 que

$$\overline{(\kappa_i \oplus \kappa'_i)} u_i = u_{i+1} \overline{\kappa_i} \quad \text{y} \quad \overline{(\kappa_i \oplus \kappa'_i)} u'_i = u'_{i+1} \overline{\kappa'_i}.$$

Entonces, utilizando estas igualdades junto con A.79(a3), tenemos que la extensión

$$\bar{\eta} := \Psi_1^{-1}(\kappa_n, \kappa'_n) \overline{(\kappa_{n-1} \oplus \kappa'_{n-1})} \cdots \overline{(\kappa_1 \oplus \kappa'_1)},$$

satisface por recursión que

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \mu_1 &= \bar{\eta} u_1 \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n, \kappa'_n) \overline{(\kappa_{n-1} \oplus \kappa'_{n-1})} \cdots \overline{(\kappa_1 \oplus \kappa'_1)} u_1 \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n, \kappa'_n) \overline{(\kappa_{n-1} \oplus \kappa'_{n-1})} \cdots \overline{(\kappa_2 \oplus \kappa'_2)} u_2 \overline{\kappa_1} \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n, \kappa'_n) \overline{(\kappa_{n-1} \oplus \kappa'_{n-1})} \cdots \overline{(\kappa_3 \oplus \kappa'_3)} u_3 \overline{\kappa_2 \kappa_1} \\ &\vdots \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n, \kappa'_n) \overline{(\kappa_{n-1} \oplus \kappa'_{n-1})} u_{n-1} \overline{\kappa_{n-2}} \cdots \overline{\kappa_1} \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n, \kappa'_n) u_n \overline{\kappa_{n-1}} \cdots \overline{\kappa_1} \\ &= \overline{\kappa_n \kappa_{n-1}} \cdots \overline{\kappa_1} \\ &= \eta_1. \end{aligned}$$

Análogamente podemos probar que $\bar{\eta} \mu_2 = \eta_2$, lo que concluye nuestra prueba.

(a4) Se sigue de (a2) y (a3). □

A.5. Categorías abelianas con estructura adicional

En esta sección estudiaremos categorías abelianas que satisfacen condiciones adicionales, como tener coproductos o productos arbitrarios. Estas condiciones fueron introducidas por Grothendieck en [Gro57]. Para la siguiente exposición nos guiaremos con [Pop73, 2.8]. Entre las ventajas de trabajar con estas condiciones podremos hacer construcciones interesantes como la suma de subobjetos, intersección de subobjetos y otros límites y colímites.

Antes de comenzar con la exposición de dichas condiciones haremos un breve recordatorio de límites y colímites.

A.5.1. Límites y colímites

Definición A.83. Sean $\mathcal{C}$ e I categorías.

- (a) Decimos que I es una **categoría pequeña** en caso de que esté compuesta por una clase de objetos y una clase de morfismos que sean conjuntos.
- (b) Sean $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor y $X \in \mathcal{C}$. Diremos que una familia de morfismos, indexada por los objetos de la categoría I ,

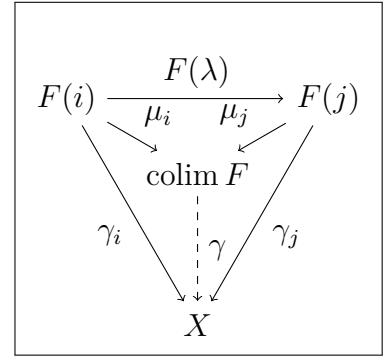
$$\{\alpha_i : F(i) \rightarrow X\}_{i \in I}$$

es **co-compatible** con F , si para todo $\lambda : i \rightarrow j \in \text{Hom}_I$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j F(\lambda)$.

- (c) Sea $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. El **colímite** (o **límite inductivo**) de F es un objeto $\text{colim}(F) \in \mathcal{C}$ junto con una familia co-compatible de morfismos

$$\{\mu_i : F(i) \rightarrow \text{colim}(F)\}_{i \in I}$$

tal que para cualquier otra familia co-compatible de morfismos $\{\gamma_i : F(i) \rightarrow X\}_{i \in I}$ existe un único morfismo $\gamma : \text{colim}(F) \rightarrow X$ tal que $\gamma_i = \gamma \mu_i$ para todo $i \in I$.



De manera similar a los pushouts, se puede probar la existencia de colímites a partir de una construcción con conúcleos de coproductos como se muestra en la siguiente proposición. La siguiente notación será de utilidad.

Definición A.84. Sean I una categoría y $\lambda : i \rightarrow j$ un morfismo en I . Utilizaremos la siguiente notación

$$s(\lambda) := i \quad \text{y} \quad t(\lambda) := j.$$

Proposición A.85. [Ste75, IV.8.4] Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva con coproductos y conúcleos, I una categoría pequeña, $F : \mathcal{C} \rightarrow I$ un funtor y

$$u_k : F(k) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} F(i) \quad \forall k \in I \quad \text{y} \quad v_\lambda : F(s(\lambda)) \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in H} F(s(\gamma)) \quad \forall \lambda \in H := \text{Hom}_I$$

las inclusiones canónicas de los coproductos. Entonces,

$$\operatorname{colim}(F) = \operatorname{Coker} \left(\bigoplus_{\gamma \in H} F(s(\gamma)) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i \in I} F(i) \right)$$

donde φ es el morfismo inducido por la propiedad universal del coproducto con la familia de morfismos

$$\left\{ \varphi_\lambda := u_{s(\lambda)} - u_{t(\lambda)} F(\lambda) \right\}_{\lambda \in H}.$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\gamma \in H} F(s(\gamma)) & \xrightarrow{\varphi} & \bigoplus_{i \in I} F(i) \\ v_\lambda \uparrow & & \uparrow (u_{s(\lambda)} \ u_{t(\lambda)}) \\ F(s(\lambda)) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -F(\lambda) \end{pmatrix}} & F(s(\lambda)) \oplus F(t(\lambda)) \end{array}$$

A continuación presentamos la noción dual de colímite.

Definición A.86. Sean $\mathcal{C}$ e I categorías.

- (a) Sean $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor y $X \in \mathcal{C}$. Diremos que una familia de morfismos, indexada por los objetos de la categoría I ,

$$\{\alpha_i : X \rightarrow F(i)\}_{i \in I}$$

es **compatible** con F , si para todo $\lambda : i \rightarrow j \in \operatorname{Hom}_I$ se tiene que $\alpha_j = F(\lambda)\alpha_i$.

- (b) Sea $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. El **límite** (o **límite proyectivo**) de F es un objeto $\lim F \in \mathcal{C}$ junto con una familia compatible de morfismos

$$\{\mu_i : \lim F \rightarrow F(i)\}_{i \in I}$$

tal que para cualquier otra familia compatible de morfismos $\{\gamma_i : X \rightarrow F(i)\}_{i \in I}$ existe un único morfismo $\gamma : X \rightarrow \lim F$ tal que $\gamma_i = \mu_i \gamma$ para todo $i \in I$.

Proposición A.87. [Ste75, IV.8.2] Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva con productos y núcleos, I una categoría pequeña, $F : \mathcal{C} \rightarrow I$ un funtor y

$$u_k : \prod_{i \in I} F(i) \rightarrow F(k) \quad \forall k \in I \quad \text{y} \quad v_\lambda : \prod_{\gamma \in H} F(t(\gamma)) \rightarrow F(t(\lambda)) \quad \forall \lambda \in H := \operatorname{Hom}_I$$

las proyecciones canónicas de los productos. Entonces,

$$\lim F = \text{Ker} \left(\prod_{i \in I} F(i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{\gamma \in H} F(t(\gamma)) \right)$$

donde φ es el morfismo inducido por la propiedad universal del producto con la familia de morfismos

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\gamma \in H} F(s(\gamma)) & \xrightarrow{\varphi} & \bigoplus_{i \in I} F(i) \\ v_\lambda \uparrow & & \uparrow (u_{s(\lambda)} \ u_{t(\lambda)}) \\ F(s(\lambda)) & \rightarrow & F(s(\lambda)) \oplus F(t(\lambda)) \\ \left(-\frac{1}{F(\lambda)} \right) & & \end{array}$$

$$\left\{ \varphi_\lambda := F(\lambda)u_{s(\lambda)} - u_{t(\lambda)} \right\}_{\lambda \in H}.$$

Definición A.88. Sean I una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Diremos que una familia

$$(M_i, f_\alpha)_{i \in I, \alpha \in \text{Hom}_I}$$

es un **sistema directo**, si existe un funtor $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $F(i) = M_i \forall i \in I$ y $F(\alpha) = f_\alpha \forall \alpha \in \text{Hom}_I$.

A.5.2. Categorías Ab3 y Ab4

Definición A.89. Diremos que una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es una categoría **Ab3** si satisface la siguiente condición:

(Ab3) Para toda familia de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{C}$ existe un el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$.

Nos referiremos a la condición dual como Ab3*.

Definición A.90. Diremos que una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es una categoría **Ab3*** si satisface la siguiente condición:

(Ab3*) Para toda familia de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{C}$ existe un el producto $\prod_{i \in I} A_i$.

En lo que sigue nos limitaremos a hablar sobre Ab3, se sigue por dualidad que todos los resultados duales se cumplen para Ab3*.

Al recordar A.85, se puede ver que una categoría abeliana $\mathcal{C}$ satisface Ab3 si y sólo si existen colímites.

Definición A.91. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\{X_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$.

- (a) Si todo X_i es subobjeto de un objeto X , es decir existe un monomorfismo $u_i : X_i \rightarrow X$ que llamaremos canónico, entonces por la propiedad universal de coproducto existe un único morfismo

$$s : \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow X$$

tal que $s\mu_i = u_i$, donde $\mu_i : X_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i$ es la inclusión canónica del coproducto. Diremos que $\text{Im}(s)$ es la suma del conjunto $\{X_i\}_{i \in I}$ y lo denotaremos como $\sum_{i \in I} X_i$.

- (b) Si todo X_i es subobjeto de un objeto X , entonces existe una familia de epimorfismos naturales $\{\pi_i : X \rightarrow X/X_i\}_{i \in I}$ la cual induce un único morfismo

$$t : X \rightarrow \prod_{i \in I} X/X_i$$

tal que $p_i t = \pi_i$, donde $p_i : \prod_{i \in I} X/X_i \rightarrow X/X_i$ es la proyección canónica. Diremos que $\text{Ker}(t)$ es la intersección de la familia de subobjetos $\{X_i\}_{i \in I}$ y lo denotaremos como $\bigcap_{i \in I} X_i$.

Cabe hacer la siguiente observación.

Observación A.92. *Se puede mostrar que si $\{X_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de subobjetos de X , $\{Y_j\}_{j \in J}$ es un conjunto de subobjetos de Y y $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo. Entonces,*

$$f\left(\sum_{i \in I} X_i\right) = \sum_{i \in I} f(X_i) \quad y \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j).$$

Además, $\bigcap_{i \in I} X_i$ es el menor subobjeto Z de X tal que $Z \subseteq X_i \forall i \in I$, así como $\sum_{i \in I} X_i$ es el mayor subobjeto Y de X tal que $X_i \subseteq Y \forall i \in I$.

El siguiente lema será de utilidad.

Lema A.93. *[Pop73, 8.1] Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3, I una categoría pequeña, $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor y $\{f_i : F(i) \rightarrow \text{colim}(F)\}_{i \in I}$ su colímite. Si se tiene una familia cocompatible $\{g_i : F(i) \rightarrow Y\}_{i \in I}$ y $u : \text{colim}(F) \rightarrow Y$ es el morfismo inducido por la propiedad universal de colímite, entonces*

$$u(\text{colim}(F)) = \sum_{i \in I} g_i(F(i)).$$

Definición A.94. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 y $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ un conjunto de morfismos en $\mathcal{C}$. Denotamos por

$$\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Y_i$$

al morfismo inducido por tal familia y la propiedad universal del coproducto.

Se puede mostrar que el coproducto es exacto a derecha como enuncia la siguiente proposición.

Proposición A.95. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Ab3 y

$$\left\{ X'_i \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} X''_i \rightarrow 0 \right\}_{i \in I}$$

un conjunto de sucesiones exactas en $\mathcal{C}$. Entonces,

$$\bigoplus_{i \in I} X'_i \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} f_i} \bigoplus_{i \in I} X_i \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} g_i} \bigoplus_{i \in I} X''_i \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

En general no es posible demostrar que el producto es exacto a izquierda, lo que nos lleva a la siguiente condición de Grothendieck.

Definición A.96. Diremos que una categoría Ab3 es una categoría **Ab4** si satisface la siguiente condición:

(Ab4) dado un conjunto de monomorfismos $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$, se tiene que la suma $\bigoplus_{i \in I} f_i$ es un monomorfismo.

Como veremos a continuación con esta propiedad podremos extender los resultados de A.4.4.

A.5.3. El Ext, productos y coproductos

En esta sección completaremos el trabajo que iniciamos en A.4.4. Consideremos $n \geq 1$, un conjunto de objetos $\{C_i\}_{i \in I}$ en una categoría Ab3 $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Existe un morfismo canónico $\Psi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\bigoplus A_i, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_i, B)$, definido como $E \mapsto (E\mu_i)_{i \in I}$, donde $\mu_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ es la i -ésima inclusión del coproducto $\forall i \in I$. En general, Ψ_n no es necesariamente un isomorfismo (ver [ČŠ19, Example A.4]). Pero, en esta sección probaremos que en caso de que $\mathcal{C}$ sea Ab4 , Ψ_n siempre es un isomorfismo. Para ello, necesitaremos de los siguientes lemas.

Lema A.97. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana Ab4 y

$$\left\{ \eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{g_i} C_i \rightarrow 0 \right\}_{i \in I}$$

un conjunto de sucesiones exactas en $\mathcal{C}$. Entonces, existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f} \text{colim}(f_i) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0$$

tal que $\eta\mu_i = \eta_i \forall i \in I$, donde $\{\mu_i : C_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i\}_{i \in I}$ es la familia de inclusiones canónicas del coproducto.

Demostración. Consideramos a la familia de morfismos $\{f_i : B \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ como un sistema directo. Más aún, la familia de morfismos de extensiones

$$\{(1_B, f_i, 0) : \beta \rightarrow \eta_i\}_{i \in I} \quad \text{donde} \quad \beta := 0 \rightarrow B \xrightarrow{1} B \xrightarrow{0} 0 \rightarrow 0,$$

forma un sistema directo de sucesiones exactas. Ahora, si bien en general el colímite de un sistema directo de sucesiones exactas corta no es una sucesión exacta corta, veremos que en este caso particular al calcular el colímite de dicho sistema directo obtendremos lo deseado. Para ello, observamos que $(B, 1_i : B \rightarrow B)_{i \in I}$ es el colímite del sistema $\{1_i : B \rightarrow B\}_{i \in I}$ y que $(\bigoplus_{i \in I} C_i, \mu_i : C_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i)$ es el colímite del sistema $\{0 : 0 \rightarrow C_i\}_{i \in I}$.

Ahora, recordando a A.85 podemos construir el diagrama adjunto, donde las columnas representan los morfismos de A.85, los renglones superiores representan el coproducto de morfismos de las sucesiones β y η_i y el renglón está constituido por los colímites de los sistemas directos. Así que por el lema de la serpiente obtenemos una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} B_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} B_i & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B \oplus (\bigoplus_{i \in I} B_i) & \longrightarrow & B \oplus (\bigoplus_{i \in I} A_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} C_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \longrightarrow & \text{colim}(f_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} C_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\eta : 0 \rightarrow B \rightarrow \text{colim}(f_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0.$$

Más aún, las familias de morfismos asociadas a dichos colímites inducen los morfismos de sucesiones exactas

$$(1, \mu'_i, \mu_i) : \eta_i \rightarrow \eta \quad \forall i \in I,$$

con lo cual podemos concluir lo deseado. $\square$

Proposición A.98. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana Ab_4 , $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Si el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ consiste de las inclusiones canónicas $(\mu_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i)_{i \in I}$, entonces la correspondencia

$$\Psi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1\left(\bigoplus A_i, B\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B), \quad E \mapsto (E\mu_i)_{i \in I},$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Procederemos observando los siguientes hechos:

- (a) la correspondencia Ψ es un morfismo de grupos abelianos;
- (b) Ψ es inyectiva;
- (c) dada una familia $(\overline{\eta}_i) \in \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B)$ con

$$\eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{g_i} A_i \rightarrow 0,$$

se tiene que existe $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus A_i, B)$ tal que $\Psi(E) = (\overline{\eta}_i)$.

Claramente probando dichos enunciados habremos concluido la prueba.

- (a) Es inmediato de A.58.
- (b) Supongamos que E es la extensión asociada a una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow 0$$

tal que $E\mu_i = 0 \forall i \in I$. Entonces, para todo $i \in I$, si $E\mu_i$ tiene como representante a la sucesión exacta

$$\eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{g_i} A_i \rightarrow 0,$$

existe $h_i : A_i \rightarrow C_i$ tal que $g_i h_i = 1_{A_i}$. Así que, por la propiedad universal de coproducto, existe un único $h : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow C$ tal que $h\mu_i = p_i h_i$ para todo $i \in [1, 2]$, donde $p_i : C_i \rightarrow C$ es el morfismo que completa el morfismo de extensiones $(1, p_i, \mu_i) : E\mu_i \rightarrow E$. Por lo tanto, $E = 0$ ya que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f_i} & C_i & \xrightarrow{g_i} & A_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow p_i & & \downarrow \mu_i \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & \bigoplus_{i \in I} A_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\xleftarrow{h_i}$ (entre C_i y A_i)
 $\xleftarrow{h}$ (entre C y $\bigoplus_{i \in I} A_i$)

$$gh\mu_i = gp_i h_i = \mu_i g_i h_i = \mu_i \forall i \in I,$$

de modo que $gh = 1_{\bigoplus_{i \in I} A_i}$ por la propiedad universal de coproducto.

- (c) Sea $(\overline{\eta}_i) \in \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B)$ con $\eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{g_i} A_i \rightarrow 0$. Por A.97 sabemos que existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f} \text{colim}(f_i) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0$$

tal que $\overline{\eta}\mu_i = \overline{\eta}_i \forall i \in I$, lo cual prueba lo deseado.

- (d) Es inmediato de (b) y (c).

□

Observación A.99. *En caso de tener una categoría $Ab5$, es decir una categoría $Ab3$ tal que los colímites son exactos a izquierda, podríamos extender la prueba de A.82 a coproductos arbitrarios. Con la finalidad de probarlo para categorías $Ab4$ presentamos la siguiente prueba que muestra en particular una demostración diferente de A.82.*

Teorema A.100. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $Ab4$, $n \geq 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Si el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ consiste de las inclusiones canónicas $(\mu_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i)_{i \in I}$, entonces la correspondencia*

$$\Psi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n \left(\bigoplus A_i, B \right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n (A_i, B), \quad E \mapsto (E\mu_i)_{i \in I},$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Procederemos probando los siguientes enunciados:

- (a) la correspondencia Ψ_n es un morfismo de grupos abelianos;
- (b) Ψ_n es inyectiva;
- (c) dada una familia $(\bar{\eta}_i) \in \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n (A_i, B)$, se tiene que existe $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1 (\bigoplus A_i, B)$ tal que $\Psi_n(E) = (\bar{\eta}_i)$.

Cabe observar que el resultado ya lo hemos probado en A.98 para $n = 1$. Más aún, en la prueba de A.98(c) mostramos explícitamente la función inversa de Ψ_1 . Denotaremos dicha correspondencia como Ψ_1^{-1} .

- (a) Es inmediato de A.58.
- (b) Supongamos que $\bar{\eta}$ es una extensión con una descomposición natural $\bar{\eta} = \bar{\eta}_n \cdots \bar{\eta}_1$ tal que $\bar{\eta}\mu_i = 0 \forall i \in I$. Recordemos que por A.66 esto significa que para todo $i \in I$ existe una sucesión de morfismos de sucesiones exactas de longitud n con extremos fijos

$$\eta\mu_i \leftarrow \kappa_i \rightarrow 0.$$

Supongamos que las sucesiones exactas κ_i tienen una descomposición canónica

$$\kappa_i = \kappa(i)_n \cdots \kappa(i)_1$$

con

$$\kappa(i)_n = \kappa'_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} X_i \rightarrow 0.$$

Por A.98(c) sabemos que $\Psi_1^{-1}(\bar{\kappa}'_i) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1 (\bigoplus_{i \in I} X_i, B)$ es una extensión tal que $\Psi_1^{-1}(\bar{\kappa}'_i)\mu'_i = \kappa'_i$, donde $\mu'_i : X_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i$ es la inclusión canónica del coproducto. Sea

$$\kappa := \Psi_1^{-1}(\bar{\kappa}'_i) \left(\bigoplus_{i \in I} \kappa(i)_{n-1} \right) \cdots \left(\bigoplus_{i \in I} \kappa(i)_1 \right)$$

(cabe observar que por Ab4 el coproducto de extensiones es extensión). Mostraremos que existe una sucesión de morfismos

$$\eta \leftarrow \kappa \rightarrow 0,$$

con lo cual concluiremos nuestra prueba por A.66. En efecto, dado que existe un morfismo $\eta\mu_i \leftarrow \kappa_i$, es claro que existe un morfismo de sucesiones exactas con el extremo derecho fijo

$$\eta_{n-1} \cdots \eta_1 \mu_i \leftarrow \kappa(i)_{n-1} \cdots \kappa(i)_n,$$

lo que induce con la propiedad del coproducto un morfismo de sucesiones exactas

$$\eta_2 \cdots \eta_n \leftarrow \left(\bigoplus_{i \in I} \kappa(i)_2 \right) \cdots \left(\bigoplus_{i \in I} \kappa(i)_n \right).$$

Además, recordando la demostración de A.98, sabemos que $\Psi_1^{-1}(\overline{\kappa'_i})$ es la clase de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{f} \operatorname{colim}(f_i) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow 0.$$

Así que, por la propiedad universal del colímite, podemos ver que existe un morfismo de sucesiones exactas con el extremo izquierdo fijo

$$\eta_n \leftarrow \Psi_1^{-1}(\overline{\kappa'_i}).$$

Por lo tanto, juntando los morfismos anteriores podemos concluir que existe un morfismo $\eta \leftarrow \kappa$. Ahora, la existencia de un morfismo $\kappa \rightarrow 0$ se reduce a mostrar que f es un monomorfismo que se escinde, lo cual se prueba utilizando la propiedad universal de colímite junto con el hecho de que todo f_i es un monomorfismo que se escinde debido a la existencia del morfismo $\kappa_i \rightarrow 0$, con lo cual terminamos nuestra prueba. La explicación anterior queda ilustrada en el diagrama posterior a la prueba.

- (c) Recordamos que ya hemos probado la existencia y propiedades de la función Ψ_1 en A.79. Sea $(\overline{\eta_i}) \in \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_C^n(A_i, B)$. Para cada $i \in I$ observamos lo siguiente. Si $\overline{\eta_i} = \overline{\kappa_n^i} \cdots \overline{\kappa_1^i}$ es una descomposición natural, donde

$$\kappa_k^i : 0 \rightarrow B_{k+1}^i \rightarrow C_k^i \rightarrow B_k^i \rightarrow 0 \quad \forall k \in [1, n].$$

Consideramos la inclusión canónica al coproducto $u_k^i : B_k^i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_k^i$ para todo

$k \in [1, n+1]$. Cabe observar que $u_1^i = \mu_i \forall i \in I$. Por A.41, se sigue que

$$\overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_k^i\right)} u_k^i = u_k^{i+1} \overline{\kappa_k^i} \forall k \in [1, n+1].$$

Entonces, utilizando estas igualdades junto con A.98(a3), tenemos que la extensión

$$\bar{\eta} := \Psi_1^{-1}(\kappa_n^i)_{i \in I} \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_{n-1}^i\right)} \cdots \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_1^i\right)},$$

satisface por recursión que

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \mu_i &= \bar{\eta} u_1^i \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n^i)_{i \in I} \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_{n-1}^i\right)} \cdots \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_1^i\right)} u_1^i \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n^i)_{i \in I} \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_{n-1}^i\right)} \cdots \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_2^i\right)} u_2 \overline{\kappa_1^i} \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n^i)_{i \in I} \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_{n-1}^i\right)} \cdots \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_3^i\right)} u_3 \overline{\kappa_2^i \kappa_1^i} \\ &\vdots \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n^i)_{i \in I} \overline{\left(\bigoplus_{i \in I} \kappa_{n-1}^i\right)} u_{n-1} \overline{\kappa_{n-2}^i \cdots \kappa_1^i} \\ &= \Psi_1^{-1}(\kappa_n^i)_{i \in I} u_n \overline{\kappa_{n-1}^i \cdots \kappa_1^i} \\ &= \overline{\kappa_n^i \kappa_{n-1}^i \cdots \kappa_1^i} \\ &= \eta_i. \end{aligned}$$

(d) Se sigue de (a2) y (a3).

□

$$\begin{array}{ccccccc}
\eta_n: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\kappa(i)_n: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y_n^i & \longrightarrow & X_{n-1}^i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0: & B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\eta_n: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Psi_1^{-1}(\overline{\kappa_i}): & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \text{colim}(f_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} X_i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\eta_k: & 0 & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\kappa(i)_k: & 0 & \longrightarrow & X_k^i & \longrightarrow & Y_k^i & \longrightarrow & X_{k-1}^i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\eta_k: & 0 & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\bigoplus_{i \in I} \kappa(i)_k: & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} X_k^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} Y_k^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} X_{k-1}^i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\eta_1: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} A_i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\eta_1 \mu_i: & 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1(i) & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\
\kappa(i)_1: & 0 & \longrightarrow & X_1^i & \longrightarrow & Y_1^i & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
0: & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\eta_1: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} A_i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\
\bigoplus_{i \in I} \kappa(i)_1: & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} X_1^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} Y_1^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} A_i & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0: & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} A_1^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} A_i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Diagrama que ilustra la prueba de A.100(b).

Se prueba por dualidad el siguiente resultado.

Teorema A.101. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana Ab4^* , $n \geq 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Si el producto $\prod_{i \in I} A_i$ consiste de las proyecciones canónicas $(\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i)_{i \in I}$, entonces la correspondencia*

$$\Phi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n \left(B, \prod_{i \in I} A_i \right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n (B, A_i), \quad E \mapsto (\pi_i E)_{i \in I},$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

Concluiremos esta sección con una aplicación relacionada con la teoría tilting. En el 2007, R. Colpi y K. R. Fuller desarrollaron una teoría de objetos tilting de dimensión proyectiva ≤ 1 en categorías abelianas [CF07] y, de manera similar, P. Čoupek y J. Štovíček presentaron una teoría de objetos cotilting de dimensión inyectiva ≤ 1 en categorías de Grothendieck [ČŠ19]. Un resultado fundamental de esta teoría es que

$$(*) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1 \left(\bigoplus_{i \in I} A_i, X \right) = 0 \text{ si, y sólo si, } \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A_i, X) = 0 \forall i \in I.$$

Tal resultado es probado usando que, en cualquier categoría Ab3 $\mathcal{A}$, existe una correspondencia inyectiva

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1 \left(\bigoplus_{i \in I} A_i, X \right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A_i, X)$$

(ver [CF07, Proposition 8.1, Proposition 8.2] y [ČŠ19, Proposition A.1]). Ahora, para extender dichas teorías a objetos tilting (cotilting) de dimensión proyectiva (inyectiva) $\leq n$, es necesario un resultado similar para Ext^n . Pero, en general no se sabe si existe una correspondencia inyectiva $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(\bigoplus_{i \in I} A_i, X) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A_i, X)$. Sin embargo, con A.101 y A.100 podemos probar el siguiente resultado, análogo a (*), el cual extiende a [CF07, Corollary 8.3] y al dual de [ČŠ19, Corollary A.2] cuando la categoría es Ab4.

Corolario A.102. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $n \geq 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

- (a) *Si $\mathcal{C}$ es Ab4 , entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) = 0$ si y sólo si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A_i, B) = 0 \forall i \in I$.*
- (b) *Si $\mathcal{C}$ es Ab4^* , entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, \prod_{i \in I} A_i) = 0$ si y sólo si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, A_i) = 0 \forall i \in I$.*

A.6. Una caracterización de las categorías Ab4

Esta sección fue inspirada por los comentarios que Sergio Estrada me hizo durante el Coloquio Latinoamericano de Álgebra XXIII. El objetivo es probar si se tiene una

categoría $\mathcal{C}$ tal que todas las correspondencias $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus A_i, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B)$, definidas como $E \mapsto (E\mu_i)_{i \in I}$, son biyectivas, implica que $\mathcal{C}$ sea Ab4. A lo largo de esta sección, para todo conjunto de objetos $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$, todo objeto $Y \in \mathcal{C}$ y $n > 0$, estaremos considerando la correspondencia $\Psi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\bigoplus X_i, Y) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X_i, Y)$, definida como $\bar{\eta} \mapsto (\bar{\eta}\nu_i)_{i \in I}$, donde $\nu_i : X_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i$ es la inclusión canónica $\forall i \in I$.

En A.97, fue probado que, si $\mathcal{C}$ es Ab4, entonces dado un conjunto de sucesiones exactas

$$\left\{ \eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} A_i \rightarrow C_i \rightarrow 0 \right\}_{i \in I},$$

se puede construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{f} \text{colim}(f_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0,$$

donde f es parte de la familia de morfismos co-compatible asociada a $\text{colim}(f_i)$. En caso de que $\mathcal{C}$ sea solamente Ab3, haciendo una construcción similar obtenemos una sucesión exacta

$$B \rightarrow \text{colim}(f_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0.$$

Ciertamente, para ello consideremos el sistema directo de sucesiones exactas.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B & \xrightarrow{1} & B & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{f_i} & & \downarrow f_i & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & B & \xrightarrow{f_i} & A_i & \rightarrow & C_i \rightarrow 0 \end{array}$$

Luego, de la propiedad universal del colímite obtenemos la sucesión exacta

$$B \xrightarrow{f} \text{colim}(f_i) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0$$

(ver [Pop73, page 55]). Tal sucesión exacta la denotaremos $\Theta(\eta_i)$.

Como primer paso mostraremos que, incluso cuando la categoría no es Ab4, si la correspondencia Ψ es biyectiva, entonces la correspondencia inversa está dada por Θ . Es decir, si $\Psi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus A_i, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B)$ es biyectiva, entonces para todo conjunto de sucesiones exactas $\left\{ \eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} A_i \rightarrow C_i \rightarrow 0 \right\}_{i \in I}$ el morfismo f en $\Phi(\eta_i)$ es monomorfismo y $\Psi\overline{\Theta(\eta_i)} = (\bar{\eta}_i)$.

Lema A.103. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab3, $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Consideramos el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ junto con las inclusiones $\{\mu_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i\}_{i \in I}$ y un conjunto de sucesiones exactas $\left\{ \eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} A_i \rightarrow 0 \right\}_{i \in I}$. Si existe una sucesión exacta $\eta : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{g'} \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow 0$ tal que $\bar{\eta}\mu_i = \bar{\eta}_i \forall i \in I$, entonces el*

morfismo f en la sucesión exacta

$$\Theta(\eta_i) : B \xrightarrow{f} \operatorname{colim}(f_i) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow 0$$

es un monomorfismo y $\bar{\eta} = \overline{\Theta(\eta_i)}$.

Demostración. Consideramos el sistema directo $\{f_i : B \rightarrow E_i\}_{i \in I}$. Sabemos que $\bar{\eta}\mu_i = \bar{\eta}_i \forall i \in I$. Así que, para todo $i \in I$ existe un morfismo

$$(1, \nu_i, \mu_i) : \eta_i \rightarrow \eta.$$

Notamos que el conjunto $\{\nu_i : E_i \rightarrow E\}_{i \in I}$, junto con el morfismo $f' : B \rightarrow E$, es una familia co-compatible. Entonces, existe un único morfismo $\omega : \operatorname{colim}(f_i) \rightarrow E$ tal que $\omega\sigma_i = \nu_i \forall i \in I$ y $\omega f = f'$, donde

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f_i} & E_i & \xrightarrow{g_i} & A_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \sigma_i & & \downarrow \mu_i \\ & & B & \xrightarrow{f} & \operatorname{colim}(f_i) & \xrightarrow{g} & \bigoplus A_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f_i} & E_i & \xrightarrow{g_i} & A_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \nu_i & & \downarrow \mu_i \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g'} & \bigoplus A_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\{\sigma_i : E_i \rightarrow \operatorname{colim}(f_i)\}_{i \in I} \cup \{f : B \rightarrow \operatorname{colim}(f_i)\}$$

es la familia co-compatible asociada al colímite. Notemos que $\omega f = f'$ es un monomorfismo, por lo que f también es un monomorfismo.

Queda por mostrar que $\bar{\eta} = \overline{\Theta(\eta_i)}$. Observamos que, por la propiedad universal del cokernel, podemos construir un morfismo de sucesiones exactas

$$(1, \omega, \omega') : \Theta(\eta_i) \rightarrow \eta.$$

Por lo que basta mostrar que $\omega' = 1$. Para ello, notamos que $\forall i \in I$ se tiene

$$\omega' \mu_i g_i = \omega' g \sigma_i = g' \omega \sigma_i = g' \nu_i = \mu_i g_i.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & \operatorname{colim}(f_i) & \xrightarrow{g} & \bigoplus A_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \omega & & \downarrow \omega' \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g'} & \bigoplus A_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por lo tanto, como g_i es un epimorfismo, $\omega' \mu_i = \mu_i \forall i \in I$. Entonces, por la propiedad universal del coproducto, tenemos que $\omega' = 1$. $\square$

Corolario A.104. Sea $\mathcal{C}$ una categoría AB3, $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$. Consideramos el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ junto con las inclusiones canónicas $\{\mu_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i\}_{i \in I}$ y la correspondencia $\Psi_1 : \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus A_i, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B)$. Si Ψ_1 es biyectiva, entonces Ψ_1^{-1} manda a cada $(\bar{\eta}_i) \in \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, B)$, con representantes

$$\eta_i : 0 \rightarrow B \xrightarrow{f_i} E_i \rightarrow A_i \rightarrow 0 \forall i \in I,$$

a la extensión dada por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \rightarrow \operatorname{colim}(f_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow 0.$$

Teorema A.105. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab3. Entonces, $\mathcal{C}$ es una categoría Ab4 si, y sólo si, la correspondencia $\Psi_1 : \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus X_i, Y) \rightarrow \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_i, Y)$ es biyectiva para todo $Y \in \mathcal{C}$ y todo conjunto de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$.*

Demostración. Por A.98, basta probar que si $\Psi : \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus_{i \in I} X_i, Y) \rightarrow \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_i, Y)$ es biyectiva para todo $Y \in \mathcal{C}$ y todo conjunto $\{X_i\}_{i \in I}$, entonces $\mathcal{C}$ es Ab4. Con este propósito, consideramos un conjunto de sucesiones exactas $\left\{ \eta_i : 0 \rightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i \xrightarrow{\beta_i} C_i \rightarrow 0 \right\}_{i \in I}$ y probaremos que $\bigoplus_{i \in I} \alpha_i$ es un monomorfismo.

Consideremos el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ y las inclusiones canónicas $\mu_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$. Por el resultado dual de A.19, para todo $i \in I$ tenemos un morfismo de sucesiones exactas $(\mu_i, \mu'_i, 1) : \eta_i \rightarrow \mu_i \eta_i$, donde

$$\mu_i \eta_i : 0 \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{f_i} E_i \rightarrow C_i \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\alpha_i} & B_i & \xrightarrow{\beta_i} & C_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu_i & & \downarrow \mu'_i & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} A_i & \xrightarrow{f_i} & E_i & \longrightarrow & C_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

Consideremos la correspondencia $\Psi : \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus_{i \in I} C_i, \bigoplus_{i \in I} A_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C_i, \bigoplus_{i \in I} A_i)$. Por A.104, sabemos que Ψ^{-1} manda $(\mu_i \eta_i) \in \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C_i, \bigoplus_{i \in I} A_i)$ a la extensión dada por la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{\alpha_i} & B_i & & \\ \downarrow \mu_i & & \downarrow \mu'_i & \searrow g_i & \\ \bigoplus A_i & \xrightarrow{f_i} & E_i & & \\ & \searrow \alpha & \downarrow \gamma_i & \searrow & \\ & & & & X \end{array}$$

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{f} \operatorname{colim}(f_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow 0.$$

Probaremos que $\operatorname{colim}(f_i) = \bigoplus_{i \in I} B_i$ para concluir que $\bigoplus_{i \in I} \alpha_i$ es un monomorfismo. En efecto, consideremos una familia de morfismos $\{g_i : B_i \rightarrow X\}_{i \in I}$. Por la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$, existe un único morfismo $\alpha : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow X$ tal que $g_i \alpha_i = \alpha \mu_i \forall i \in I$.

Ahora, por la propiedad universal de pushout, para todo $i \in I$ existe un único morfismo $\gamma_i : E_i \rightarrow X$ tal que $g_i = \gamma_i \mu'_i$ y $\alpha = \gamma_i f_i$.

Antes de proseguir, consideremos la familia co-compatible $\{u_k : E_k \rightarrow \operatorname{colim}(f_i)\}_{k \in I}$ asociada al colímite. Notemos que, por la propiedad universal del colímite, existe un único morfismo $\Lambda : \operatorname{colim}(f_i) \rightarrow X$ tal que $\Lambda u_i = \gamma_i \forall i \in I$ y $\Lambda f = \alpha$.

En particular, si $X = \bigoplus_{i \in I} B_i$ y $\{g_i : B_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i\}_{i \in I}$ es el conjunto de inclusiones canónicas, existe un único morfismo $\Lambda : \text{colim}(f_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$ tal que $\Lambda u_i = \gamma_i \forall i \in I$ y $\Lambda f = \alpha$. Más aún, por la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i \in I} B_i$, existe un único morfismo $\Lambda' : \bigoplus_{i \in I} B_i \rightarrow \text{colim}(f_i)$ tal que $\Lambda' g_i = u_i \mu'_i \forall i \in I$.

Veamos que Λ es un isomorfismo y que $\Lambda' = \Lambda^{-1}$. Para ello, notemos que

$$\Lambda \Lambda' g_i = \Lambda u_i \mu'_i = \gamma_i \mu'_i = g_i \forall i \in I.$$

Así que, por la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i \in I} B_i$, podemos concluir que $\Lambda \Lambda' = 1$. Veamos que $\Lambda' \Lambda = 1$. Para ello, notamos que

$$u_i \mu'_i \alpha_i = u_i f_i \mu_i = f \mu_i \forall i \in I,$$

y que

$$u_i \mu'_i \alpha_i = \Lambda' g_i \alpha_i = \Lambda' \alpha \mu_i = (\Lambda' \Lambda f) \mu_i \forall i \in I.$$

Así que, por la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$, podemos concluir que $f = \Lambda' \Lambda f$. Más aún, notemos que

$$(u_i) \mu'_i = u_i \mu'_i \text{ and } (u_i) f_i = f \forall i \in I,$$

y que

$$(\Lambda' \Lambda u_i) \mu'_i = \Lambda' \gamma_i \mu'_i = \Lambda' g_i = u_i \mu'_i \text{ and } (\Lambda' \Lambda u_i) f_i = \Lambda' \Lambda f = f \forall i \in I.$$

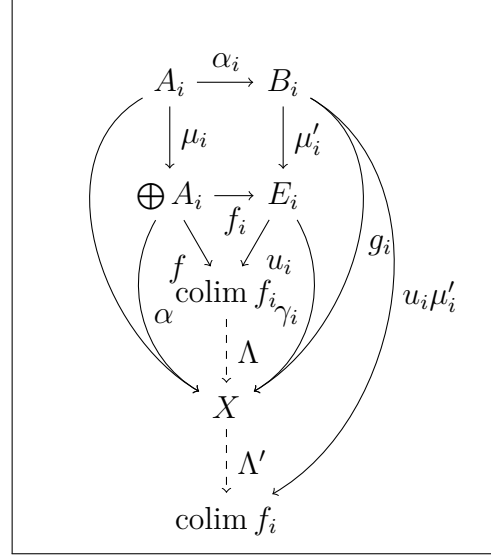
De modo que, por la propiedad universal del pushout (E_i, f_i, μ'_i) , podemos concluir que $\Lambda' \Lambda u_i = u_i$. Luego, se sigue de la propiedad universal del colímite que $\Lambda' \Lambda = 1$. Por lo tanto, Λ es un isomorfismo y $\Lambda' = \Lambda^{-1}$.

Por lo anterior podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\text{colim}(f_i) = \bigoplus_{i \in I} B_i$, $\Lambda = 1 = \Lambda'$, y $g_i = u_i \mu'_i \forall i \in I$. Ahora, observemos que

$$f \mu_i = g_i \alpha_i \forall i \in I.$$

Así que, por la propiedad universal de coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$, podemos concluir que $f = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i$. Por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} \alpha_i$ es un monomorfismo. $\square$

Tenemos las siguientes equivalencias.



Teorema A.106. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab_3 . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) $\mathcal{C}$ es Ab_4 .
- (b) La correspondencia $\Psi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus_{i \in I} X_i, Y) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_i, Y)$ es biyectiva para todo $Y \in \mathcal{C}$ y todo conjunto de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$.
- (c) La correspondencia $\Psi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\bigoplus_{i \in I} X_i, Y) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X_i, Y)$ es biyectiva $\forall Y \in \mathcal{C}$, todo conjunto de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$ y $\forall n > 0$.

Demostración. Se sigue de A.100 y A.105. □

Por dualidad tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.107. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Ab_3^* . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) $\mathcal{C}$ es una categoría Ab_4^* .
- (b) La correspondencia $\Psi : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, \prod_{i \in I} X_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X_i)$ es biyectiva para todo $Y \in \mathcal{C}$ y todo conjunto de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$.
- (c) La correspondencia $\Psi_n : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Y, \prod_{i \in I} X_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Y, X_i)$ es biyectiva $\forall Y \in \mathcal{C}$, todo conjunto de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$ y $\forall n > 0$.

Bibliografía

- [AB89] Maurice Auslander and Ragnar-Olaf Buchweitz. The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations. *Memoirs of Soc. Math. de France Suppl., Nouvelle Serie*, 38:5–37, 1989. 7, 11, 18, 19, 28, 29, 36, 37, 43
- [AHH16] Lidia Angeleri Hügel and Michal Hrbek. Silting Modules over Commutative Rings. *International Mathematics Research Notices*, 2017(13):4131–4151, 06 2016. 160, 166
- [AHHK07] Lidia Angeleri Hügel, Dieter Happel, and Henning Krause, editors. *Handbook of Tilting Theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2007. 1
- [AHMH09] Lidia Angeleri Hügel and Octavio Mendoza Hernández. Homological dimensions in cotorsion pairs. *Illinois Journal of Mathematics*, 53(1):251–263, 2009. 6, 30, 93
- [AHMV15] Lidia Angeleri Hügel, Frederik Marks, and Jorge Vitória. Silting Modules. *International Mathematics Research Notices*, 2016(4):1251–1284, 06 2015. 155, 156, 157, 160
- [AHTT01] Lidia Angeleri Hügel, Alberto Tonolo, and Jan Trlifaj. Tilting preenvelopes and cotilting precovers. *Algebras and Representation Theory*, 4:155–170, 2001. 2, 75, 108, 155
- [AHUC01] Lidia Angeleri Hügel and Flávio Ulhoa Coelho. Infinitely generated tilting modules of finite projective dimension. *Forum Mathematicum*, 13:239–250, 2001. 1, 2, 53, 54, 56, 59, 60, 63, 64, 74, 107, 108, 110
- [AIR14] Takahide Adachi, Osamu Iyama, and Idun Reiten. τ -tilting theory. *Compositio Mathematica*, 150(3):415–452, 2014. 177
- [AM75] David Arnold and Charles Murley. Abelian groups, A , such that $\text{Hom}(A, -)$ preserves direct sums of copies of A . *Pacific Journal of Mathematics*, 56(1):7–20, 1975. 81
- [AR74] Maurice Auslander and Idun Reiten. Stable equivalence of dualizing R -varieties. *Advances in Mathematics*, 12(3):306–366, 1974. 152
- [AR91] Maurice Auslander and Idun Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. *Advances in Mathematics*, 86(1):111–152, 1991. 3, 7, 8, 41

-
- [AR92] Maurice Auslander and Idun Reiten. Homologically finite subcategories. *London Math. Soc. Lecture Note Series*, 168:1–42, 1992. 3, 4, 118
 - [ARS97] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre Olaf Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36. Cambridge university press, 1997. 114, 117
 - [AS80] Maurice Auslander and Sverre Olaf Smalø. Preprojective modules over Artin algebras. *Journal of algebra*, 66(1):61–122, 1980. 3, 103, 143, 148
 - [AS81] Maurice Auslander and Sverre Olaf Smalø. Almost split sequences in subcategories. *Journal of Algebra* 69, 2:426–454, 1981. 3
 - [AS93a] Maurice Auslander and Øyvind Solberg. Relative homology and representation theory I: Relative homology and homologically finite subcategories. *Communications in Algebra*, 21(9):2995–3031, 1993. 4, 120, 141, 142, 145, 146, 147, 148
 - [AS93b] Maurice Auslander and Øyvind Solberg. Relative homology and representation theory II: Relative cotilting theory. *Communications in Algebra*, 21(9):3033–3079, 1993. 1, 4, 129, 134, 145
 - [AS93c] Maurice Auslander and Øyvind Solberg. Relative homology and representation theory III: Cotilting modules and Wedderburn correspondence. *Communications in Algebra*, 21(9):3081–3097, 1993. 4
 - [Ass84] Ibrahim Assem. Torsion theories induced by tilting modules. *Canadian Journal of Mathematics*, 36(5):899–913, 1984. 2
 - [Ass97] Ibrahim Assem. *Algebres et modules: cours et exercices*. Presses de l’Universite d’Ottawa, Ottawa, Canada, 1997. 176
 - [Aus71] Maurice Auslander. Representation dimension of Artin algebras, lecture notes. *Queen Mary College, London*, 1971. 151
 - [Aus74] Maurice Auslander. Representation theory of Artin algebras I. *Communications in Algebra*, 1(3):177–268, 1974. 149, 150, 153
 - [Baz04] Silvana Bazzoni. A characterization of n -cotilting and n -tilting modules. *Journal of Algebra*, 273(1):359–372, 2004. 6, 7, 48, 64
 - [BB80] Sheila Brenner and Michael C.R. Butler. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. In *Representation theory II*, pages 103–169. Springer, 1980. 1
 - [BGP19] Daniel Bravo, James Gillespie, and Marco A Pérez. Locally type FP_n and n -coherent categories. *arXiv preprint arXiv:1908.10987*, 2019. 121, 153
 - [BH13] Ragnar-Olaf Buchweitz and Lutz Hille. Hochschild (co-) homology of schemes with tilting object. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365(6):2823–2844, 2013. 1

- [BHP⁺17] Silvana Bazzoni, Ivo Herzog, Pavel Příhoda, Jan Šaroch, and Jan Trlifaj. Pure projective tilting modules. *arXiv preprint arXiv:1703.04745*, 2017. 160, 164, 165
- [BMPS19] Víctor Becerril, Octavio Mendoza, Marco A. Pérez, and Valente Santiago. Frobenius pairs in abelian categories. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 14(1):1–50, 2019. 19, 36, 55
- [BMS20] Victor Becerril, Octavio Mendoza, and Valente Santiago. Relative Gorenstein objects in abelian categories. *Communications in Algebra*, pages 1–51, 2020. 8, 41
- [Bou01] Dominique Bourn. 3x3 lemma and protomodularity. *Journal of Algebra*, 236:778–795, 2001. 203
- [BP17] Daniel Bravo and Marco A. Pérez. Finiteness conditions and cotorsion pairs. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221(6):1249–1267, 2017. 120, 121, 123
- [Buc59] David A. Buchsbaum. A note on homology in categories. *Annals of Mathematics, second series*, 69(1):66–74, 1959. 203
- [Büh10] Theo Bühler. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):1–69, 2010. 125, 126, 127, 134
- [BŽ18] Simion Breaz and Jan Žemlička. Torsion classes generated by silting modules. *Arkiv för matematik*, 56(1):15–32, 2018. 166
- [CDT97] Riccardo Colpi, Gabriella D’Este, and Alberto Tonolo. Quasi-tilting modules and counter equivalences. *Journal of Algebra*, 191(2):461–494, 1997. 2
- [CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, New Jersey, U.S.A., 1956. 16
- [CF90] Robert R. Colby and Kent R. Fuller. Tilting, cotilting, and serially tilted rings. *Communications in Algebra*, 18(5):1585–1615, 1990. 2
- [CF07] Riccardo Colpi and Kent Fuller. Tilting objects in abelian categories and quasitilted rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(2):741–765, 2007. 253
- [CM93] Riccardo Colpi and Claudia Menini. On the structures of $*$ -modules. *Journal of Algebra*, 158(2):400–419, 1993. 155
- [ČŠ19] Pavel Čoupek and Jan Št’ovíček. Cotilting sheaves on noetherian schemes. *Mathematische Zeitschrift*, pages 1–38, 2019. 246, 253
- [CT95] Riccardo Colpi and Jan Trlifaj. Tilting modules and tilting torsion theories. *Journal of Algebra*, 178:614–634, 1995. 2, 7

- [CTT97] Riccardo Colpi, Roberto Tonolo, and Jan Trlifaj. Partial cosilting modules and the lattices induced by them. *Communications in algebra*, 25(10):3225–3237, 1997. 2
- [DRS⁺99] Peter Dräxler, Idun Reiten, Sverre Smalø, Øyvind Solberg, Bernhard Keller, et al. Exact categories and vector space categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(2):647–682, 1999. 147
- [EJ11] Edgar E. Enochs and Overtoun M.G. Jenda. *Relative homological algebra*, volume 54. De Gruyter Expositions in Mathematics, 2011. 56
- [EMM10] Karin Erdmann, Dag Madsen, and Vanessa Miemietz. On Auslander-Reiten translates in functorially finite subcategories and applications. In *Colloq. Math*, volume 119, pages 51–77, 2010. 148
- [Eno81] Edgar E. Enochs. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. *Israel journal of mathematics*, 39(3):189–209, 1981. 5
- [Eno17] Haruhisa Enomoto. Classifying exact categories via Wakamatsu tilting. *Journal of Algebra*, 485:1–44, 2017. 140, 143, 151, 152
- [Fai72] Carl Faith. Modules finite over endomorphism ring. In *Lectures on rings and modules*, pages 145–189. Springer, 1972. 155
- [Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 90:323–448, 1962. 127, 138
- [GR99] Juan Ramon Garcia Rozas. *Covers and envelopes in the category of complexes of modules*, volume 407. CRC Press, 1999. 26
- [Gre01] Enrico Gregorio. Topological tilting modules. *Communications in Algebra*, 29(7):3011–3037, 2001. 1
- [Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d’algebre homologique. *Tohoku Mathematical Journal*, 9:119–221, 1957. 189, 241
- [GT73] Jonathan S. Golan and Mark L. Teply. Torsion-free covers. *Israel Journal of Mathematics*, 15(3):237–256, 1973. 5
- [GT06] Rüdiger Göbel and Jan Trlifaj. *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*. de Gruyter, Berlin, 2006. 63, 116, 123, 173
- [HR82] Dieter Happel and Claus Michael Ringel. Tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 274(2):399–443, 1982. 1, 117
- [LN19] Yu Liu and Hiroyuki Nakaoka. Hearts of twin cotorsion pairs on extriangulated categories. *Journal of Algebra*, 528:96–149, 2019. 130, 131
- [Mat98] Olivier Mathieu. Tilting modules and their applications. Technical report, Institut de recherche mathématique avancée, 1998. 1

- [Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965. 81, 82, 111, 189, 195, 203, 222
- [Mit72] Barry Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Mathematics*, 8(1):1–161, 1972. 167
- [Miy86] Yoichi Miyashita. Tilting modules of finite projective dimension. *Mathematische Zeitschrift*, 193(1):113–146, 1986. 1, 113
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Verlag Graduate texts in Mathematics, 1998. 142
- [MO89] Claudia Menini and Adalberto Orsatti. Representable equivalences between categories of modules and applications. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 82:203–231, 1989. 7, 117
- [Moh09] Soud Khalifa Mohamed. Relative theory in subcategories. In *Colloquium Mathematicum*, volume 117, pages 29–63. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2009. 1, 5, 129, 141, 142, 143
- [MS06] Octavio Mendoza and Corina Sáenz. Tilting categories with applications to stratifying systems. *Journal of Algebra*, 302(1):419–449, 2006. 1, 19, 29, 30
- [MŠ19] Frederik Marks and Jan Št’ovíček. Universal localizations via silting. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 149(2):511–532, 2019. 172, 177, 185
- [MV18] Frederik Marks and Jorge Vitória. Silting and cosilting classes in derived categories. *Journal of Algebra*, 501:526–544, 2018. 167, 171, 172, 174
- [MVOM11] Roberto Martínez-Villa and Martin Ortiz-Morales. Tilting theory and functor categories III. the Maps Category. *arXiv preprint arXiv:1101.4241*, 2011. 1, 149
- [MVOM13] Roberto Martínez-Villa and Martin Ortiz-Morales. Tilting theory and functor categories II. Generalized Tilting. *Applied categorical structures*, 21(4):311–348, 2013. 1, 149, 152, 153
- [MVOM14] Roberto Martínez-Villa and Martin Ortiz-Morales. Tilting theory and functor categories I. Classical tilting. *Applied categorical structures*, 22(4):595–646, 2014. 1, 149, 150
- [NP19] Hiroyuki Nakaoka and Yann Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég*, 60(2):117–193, 2019. 129, 131
- [NSZ19] Pedro Nicolás, Manuel Saorín, and Alexandra Zvonareva. Silting theory in triangulated categories with coproducts. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 223(6):2273–2319, 2019. 2, 54, 55

- [Pop73] Nicolae Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*, volume 3. Academic Press, London, 1973. 55, 81, 113, 149, 189, 194, 241, 245, 254
- [PŠ19a] Leonid Positselski and Jan Št’ovíček. ∞ -tilting theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 301(1):297–334, 2019. 1, 54, 55, 111, 112
- [PŠ19b] Leonid Positselski and Jan Št’ovíček. The tilting-cotilting correspondence. *International Mathematics Research Notices*, 07 2019. 1, 2, 53, 55, 56, 62, 78
- [Qui73] Daniel Quillen. Higher algebraic k-theory: I. In *Higher K-theories*, pages 85–147. Springer, 1973. 127
- [Rin91] Claus Michael Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Mathematische Zeitschrift*, 208(1):209–223, 1991. 148
- [Sal79] Luigi Salce. Cotorsion theories for abelian groups. *Symposia Math.*, 23(3):11–32, 1979. 22, 23
- [Sma84] Sverre Olaf Smalø. Torsion theories and tilting modules. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 16(5):518–522, 1984. 2
- [Ste75] Bo Stenström. *Rings of Quotients. An introduction to Methods of Ring Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1975. 81, 83, 194, 195, 242, 243
- [Tep76] Mark L. Teply. Torsion-free covers II. *Israel Journal of Mathematics*, 23(2):132–136, 1976. 5
- [TT90] Robert W. Thomason and Thomas Trobaugh. Higher algebraic k-theory of schemes and of derived categories. In *The grothendieck festschrift*, pages 247–435. Springer, 1990. 127
- [Wei95] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1995. 83
- [Wei05] Jiaqun Wei. n -star modules and n -tilting modules. *Journal of Algebra*, 283(2):711–722, 2005. 48, 49, 64
- [Wei10] Jiaqun Wei. A note on relative tilting modules. *Journal of pure and applied algebra*, 214(4):493–500, 2010. 7, 120, 148
- [ZZ20] Bin Zhu and Xiao Zhuang. Tilting subcategories in extriangulated categories. *Frontiers of Mathematics in China*, 15(1):225–253, 2020. 1, 4, 7, 129, 130, 131, 133

Nomenclatura

$\text{Add}(\mathcal{M})$	la clase de sumandos directos de coproductos de objetos en $\mathcal{M}$, página 12
$\text{add}(\mathcal{M})$	la clase de sumandos directos de coproductos finitos de objetos en $\mathcal{M}$, página 12
$\text{coresdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M)$	la dimensión de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución, página 15
$\text{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^1(B, A)$	clase de extensiones de A en B , página 130
$\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$	la clase de objetos $C \in \mathcal{C}$ que admiten una sucesión exacta de la forma $0 \rightarrow K \rightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} C \rightarrow 0$ donde $\text{Ker}(f_i) \in \mathcal{X}$ y $T_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{X}$, para todo $i \in [1, n]$, página 48
$\text{id}_{\mathcal{X}}(C)$	la dimensión inyectiva relativa a $\mathcal{X}$ de C , página 14
$\mathbb{T}_n(R)$	anillo de matrices triangulares inferiores en R , página 167
$\mathcal{C}_n(R)$	categoría de complejos en $\text{Mod}(R)$ de longitud n , página 166
$\mathcal{D}_{\Sigma}$	clase de módulos Σ -divisibles, página 175
$\mathcal{E}(B, A)$	sucesiones exactas cortas entre A y B , página 129
$\mathcal{FP}_{\infty}$	la clase de objetos finitamente ∞ -presentados, página 120
$\mathcal{FP}_n$	la clase de objetos finitamente n -presentados, página 120
$\mathcal{IF}$	complejos de longitud n con entradas en $\text{inj}(R)$, página 169
$\mathcal{I}$	complejos de longitud n con entradas en $\text{Inj}(R)$, página 169
$\mathcal{I}(F)$	la clase de objetos F -Inyectivos, página 145
$\mathcal{K}_{\mathcal{T}, \mathcal{M}}$	es la clase de objetos $\mathcal{T}$ -compactos para monomorfismos, página 81
$\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$	es la clase de objetos $\mathcal{T}$ -compactos, página 81

$\mathcal{M}^{\perp_i}$	la clase de objetos X tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, X) = 0 \forall M \in \mathcal{M}$, página 12
$\mathcal{M}^{\perp}$	la clase de los objetos X tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, X) = 0 \forall i \geq 1, \forall M \in \mathcal{M}$, página 12
$\mathcal{M}^{\oplus < \infty}$	la clase de coproductos finitos de objetos de $\mathcal{M}$, página 12
$\mathcal{M}^{\oplus}$	la clase de coproductos de objetos en $\mathcal{M}$, página 12
$\mathcal{PF}$	complejos de longitud n con entradas en $\text{proj}(R)$, página 169
$\mathcal{P}$	complejos de longitud n con entradas en $\text{Proj}(R)$, página 169
$\mathcal{P}(F)$	la clase de objetos F -proyectivos, página 145
$\mathcal{X}_n^{\vee}$	la clase de objetos que admiten una $\mathcal{X}$ -coresolución de longitud n , página 13
$\mathcal{X}^{\vee}$	la clase de objetos que admiten una $\mathcal{X}$ -coresolución finita, página 13
$\mathcal{X}_n^{\wedge}$	la clase de objetos que admiten una $\mathcal{X}$ -resolución de longitud $\leq n$, página 13
$\mathcal{X}^{\wedge}$	la clase de objetos que admiten una $\mathcal{X}$ -resolución finita, página 13
$\mathcal{X}_{\infty}^{\vee}$	la clase de los objetos C que admiten una $\mathcal{X}$ -coresolución infinita, página 13
$\mathcal{X}_{\infty}^{\wedge}$	la clase de los objetos C que admiten una $\mathcal{X}$ -resolución infinita, página 13
$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}, \infty}^{\vee}$	la clase de objetos $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolubles, página 15
$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}, \infty}^{\wedge}$	la clase de objetos $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -resolubles, página 15
$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}, n}^{\vee}$	la clase de objetos que admiten una $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución de longitud $\leq n$, página 15
$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\vee}$	la clase de objetos finitamente $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolubles, página 15
$\mathcal{Z}^{\perp(\mathcal{A}, \mathcal{E})}$	clase ortogonal a derecha de $\mathcal{Z}$ en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, página 130
$\mathcal{Z}^{\perp \mathcal{E}}$	clase ortogonal a derecha de $\mathcal{Z}$ en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, página 130
$\text{Inj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$	clase de objetos $\mathcal{E}$ -inyectivos, página 127
$\text{Pres}_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^n(\mathcal{T})$	la clase de objetos n - $\mathcal{T}$ -presentados en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, página 133

$\text{Pres}_{\mathcal{E}}^n(\mathcal{T})$	la clase de objetos n - $\mathcal{T}$ -presentados en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, página 133
$\text{Proj}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$	clase de objetos $\mathcal{E}$ -proyectivos, página 127
$\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$	categoría de funtores aditivos contravariantes $\mathcal{C} \text{ Ab}$, página 148
$\Omega^n(A)$	clase de las n -ésimas sizigias, página 130
$\text{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$	la dimensión de $\mathcal{X}$ -coresolución, página 14
$\text{f. g.}(\mathcal{T})$	es la clase de objetos finitamente $\mathcal{T}$ -generados, página 80
$\text{f. p.}(\mathcal{C}^{op})$	categoría de funtores en $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ finitamente presentados, página 149
$\text{Gen}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$	es la clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}^{\oplus})$, página 49
$\text{gen}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$	es la clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{T}^{\oplus < \infty})$, página 49
$\text{Gen}_n^{\mathcal{X}}(T)$	es la clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\text{Add}(T))$, página 49
$\text{gen}_n^{\mathcal{X}}(T)$	es la clase $\text{Fac}_n^{\mathcal{X}}(\text{add}(T))$, página 49
$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})^{\vee}$	la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\vee}$, página 15
$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})^{\wedge}$	la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{\wedge}$, página 15
$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})_{\infty}^{\vee}$	la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}, \infty}^{\vee}$, página 15
$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})_{\infty}^{\wedge}$	la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}, \infty}^{\wedge}$, página 15
$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})_n^{\vee}$	la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}, n}^{\vee}$, página 15
$(\mathcal{Y}, \mathcal{X})_n^{\wedge}$	la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{X}, n}^{\wedge}$, página 15
$\text{pd}_{\mathcal{E}, \mathcal{X}}(A)$	dimensión proyectiva relativa a $\mathcal{X}$ en categoría exacta, página 130
$\text{pd}_{\mathcal{X}}(C)$	la dimensión proyectiva relativa a $\mathcal{X}$ de C , página 14
$\text{Prod}(\mathcal{M})$	la clase de sumandos directos de productos de objetos en $\mathcal{M}$, página 12
$\text{proj}(\mathcal{C}^{op})$	categoría de funtores proyectivos finitamente generados en $\text{Mod}(\mathcal{C}^{op})$, página 149
$\text{resdim}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(M)$	dimensión de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -resolución, página 15
$\text{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$	la dimensión de $\mathcal{X}$ -resolución, página 14

$\Sigma^n(A)$	clase de las n -ésimas cosizigias, página 130
$\text{smd}(\mathcal{M})$	la clase de sumandos directos de objetos en $\mathcal{M}$, página 12
${}^{\perp_i}\mathcal{M}$	la clase de objetos X tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, M) = 0 \ \forall M \in \mathcal{M}$, página 12
${}^{\perp_{(\mathcal{A}, \mathcal{E})}}\mathcal{Z}$	clase ortogonal a izquierda de $\mathcal{Z}$ en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, página 130
${}^{\perp_{\mathcal{E}}}\mathcal{Z}$	clase ortogonal a izquierda de $\mathcal{Z}$ en la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, página 130
${}^{\perp}\mathcal{M}$	la clase de objetos X tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, M) = 0 \ \forall M \in \mathcal{M} \ \forall i \geq 1$, página 12
$F^{\mathcal{X}}$	subfunctor del $\text{Ext}_{\Lambda}(-, -)$ inducido por una clase $\mathcal{X}$ de tal manera $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}(F^{\mathcal{X}})$, página 146
$F_{\mathcal{X}}$	subfunctor del $\text{Ext}_{\Lambda}(-, -)$ inducido por una clase $\mathcal{X}$ de tal manera $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$, página 146

Índice alfabético

A

álgebra de Artin, 117
anillo n -coherente, 121

C

categoría
 completa por idempotentes, 126
 débilmente completa por idempotentes, 127
 exacta, 125
 exacta en el sentido de B. Mitchell, 188
cerrada
 por conúcleos de monomorfismos entre objetos de $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$, 24
 por epi-núcleos en $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$, 25
 por mono-conúcleos en $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$, 24
 por n -cocientes, 16
 por n -subobjetos, 16
 por núcleos de epimorfismos entre objetos de $\mathcal{M} \cap \mathcal{X}$, 25
cogenerador
 $\mathcal{E}$ -cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, 132
cogenerador relativo, 14
compacto
 $\mathcal{T}$ -compacto, 80
 $\mathcal{T}$ -compacto para monomorfismos, 81
contexto de Mohamed, 142
conúcleo débil, 151
coresoluble
 coresoluble por $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}$, 15
 finitamente $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresoluble, 15
 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -coresoluble, 15

coresolución

$\mathcal{X}$ -coresolución en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, 129
 $\mathcal{X}$ -coresolución finita, 13
 $\mathcal{X}$ -coresolución infinita, 13
 $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución, 15
 $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución finita, 15
coresolvente, 25
cosizigia, 130

D

dimensión
 de $\mathcal{X}$ -coresolución, 14
 de $\mathcal{X}$ -resolución, 13
 de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -coresolución, 15
 de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ -resolución, 15
 inyectiva relativa, 14
 proyectiva relativa, 14
 proyectiva relativa en categoría exacta, 130

E

epi admisible, 125
extensión, 130

F

finendo, 77, 155
finitamente ∞ -presentado, 120
finitamente $\mathcal{T}$ -generado, 80
finitamente n -presentado, 120
functor
 exacto, 126
 finitamente presentado, 149
 refleja exactitud, 126

G

generador
 $\mathcal{E}$ -generador relativo en $\mathcal{X}$, 132
 generador relativo, 14
 gruesa, 36
 a derecha, 36
 a izquierda, 36

I

inclusión natural, 127
 inyectivo
 F -inyectivo, 145
 $\mathcal{E}$ -inyectivo, 127
 suficientes inyectivos, 146
 inyectivos
 suficientes $\mathcal{E}$ -inyectivos, 127

M

mono admisible, 125

N

núcleo débil, 151

P

par
 $\mathcal{X}$ -completo, 23
 $\mathcal{X}$ -completo a derecha, 23
 $\mathcal{X}$ -completo a izquierda, 23
 $\mathcal{X}$ -hereditario, 27
 n - $\mathcal{X}$ -tilting grande, 90
 n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeño, 90
 par de cotorsión, 22
 a derecha, 22
 a izquierda, 22
 par kernel-cokernel, 125
 precubierta, 18
 especial, 73
 $\mathcal{Y}$ -cerrada, 23
 precubriente
 especial en $\mathcal{X}$, 23
 preenvolvente, 19
 especial en $\mathcal{X}$, 23
 $\mathcal{Y}$ -cerrada, 23

preenvolvente especial, 73
 presentación proyectiva, 156
 pretorsión, 108
 proyectivo
 F -proyectivo, 145
 $\mathcal{E}$ -proyectivo, 127
 suficientes proyectivos, 145
 proyectivos
 suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos, 127
 pseudo-cokernel, 151
 pseudo-kernel, 151

Q

quasitilting, 155

R

resoluble
 $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ -resoluble, 15
 resoluble por $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}$, 15
 resolución
 $\mathcal{X}$ -resolución en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, 129
 $\mathcal{X}$ -resolución finita, 13
 $\mathcal{X}$ -resolución infinita, 13
 resolvente, 25

S

silting, 156
 n -silting, 184
 n -silting parcial, 184
 parcial, 156
 sizigia, 130
 split-epi, 126
 split-mono, 127
 sucesión
 F -exacta, 145
 sucesiones exactas cortas, 126

T

tilting
 ∞ -tilting, 111
 n - $\mathcal{X}$ -tilting, 54
 n - $\mathcal{X}$ -tilting grande, 54
 n - $\mathcal{X}$ -tilting grande $\mathcal{R}$ -saturada, 105

- n - $\mathcal{X}$ -tilting grande $\mathcal{R}$ -saturada parcial, 110
- n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña, 54
- n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña $\mathcal{R}$ -saturada, 105
- n - $\mathcal{X}$ -tilting pequeña $\mathcal{R}$ -saturada parcial, 110
- n -tilting Auslander-Solberg en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, 134
- n -tilting pequeña en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, 132
- n -tilting Zhu-Zhuang en $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, 133
- n -tilting, 53
- n -tilting de Miyashita, 113
- n -tilting de PS, 55
- n -tilting generalizado
 - funtor, 152
 - subcategoría, 152
- n -tilting parcial, 53
- n -tilting parcial Miyashita, 113
- par ∞ -tilting, 112
- quasitilting, 155
- tilting clásico, 117
- torsión, 108