UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS TOPOLÓGICOS COMO IMAGEN CONTINUA DEL [0,1], CANTOR Y ESPACIOS LINEALMENTE ORDENADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

ALEJANDRA HENÁNDEZ OLIVARES

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA

CIUDAD DE MÉXICO, 2021

CIENCIAS

Agradecimientos

A mis papás, Antonia e Ismael, por el gran amor y apoyo incondicional a través de los años. Los amo.

A mi hermana, mi mejor amiga y gemela malvada. Por las risas y momentos compartidos. Mi vida no sería la misma sin ti.

A mi esposo, Miguel, sabes que mucho de este trabajo no hubiera sido posible sin tu gran apoyo. Por siempre mostrarme una paciencia y amor infinitos, y mira que sabes de infinitos.

A mis tías, Eva y Virginia, por ser un ejemplo de tenacidad y trabajo duro.

A mis primos, César, Luis y Mariana, los primos siempre serán los primeros amigos.

A mis amigos, en especial a Gaby, José María y Roger, por ser la familia que yo elegí. Esta experiencia llamada universidad no hubiera sido la misma sin ustedes.

A mis profesores por compartir sus conocimientos conmigo.

A mis sinodales, Rocio, Raúl, Ángel y Leobardo por tomarse el tiempo de leer y corregir este trabajo.

A mi pequeño Maximiliano, porque al igual que este trabajo eres uno de mis sueños hechos realidad.

Agradezco profudamente a mi asesora, Isabel, por darme la confianza de que este trabajo vería la luz algún día. Por los jalones de orejas y enseñanzas en este tiempo hemos trabajado juntas. Muchas gracias.

Índice general

Introducción

Encontrar funciones continuas y suprayectivas $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X y Y es uno de los retos de las matemáticas. Se ha construido mucha teoría al respecto, a las propiedades que tiene uno de los espacios y es heredada por el otro mediante tales funciones. Por mencionar algunos ejemplos: Si X es conexo, entonces Y es conexo; si X es compacto, entonces Y es compacto. La importancia de este tipo de funciones radica en caracterizar a estos espacios, conocerlos topológicamente. El conjunto de Cantor al cual yo llamo *"polvo de los sueños"* ha sido pieza clave en el desarrollo de muchos resultados en matemáticas. Uno de los grandes avances en el problema de encontrar funciones continuas y suprayectivas entre dos espacios es el siguiente: *"Todo espacio métrico y compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor"*. Presentamos una demostración de este resultado en el Capítulo 4 mediante el Teorema de la función general, que hasta cierto punto, nos da una receta para hallar funciones continuas entre dos espacios. Como toda buena receta necesita de los ingredientes correctos, damos un breve recorrido por ellos en el Capítulo 2: Las funciones semicontinuas superiormente y el Teorema de la función general.

Trabajar con el conjunto de Cantor puede ser complicado debido a su estructura. Otro espacio más sencillo pero no menos importante es el intervalo $[0, 1]$. Con este espacio se caracteriza a los espacios localmente conexos. En 1980, Giuseppe Peano le da al mundo de las matemáticas las llamadas *"curvas llenadoras"*. Construye una función continua y suprayectiva definida en $[0, 1]$ y con valores en $[0, 1]^2$. El teorema que da por concluido a aquellos espacios que son llenados por el intervalo $[0, 1]$ es el teorema de Hahn-Mazurkiewicz que dice: *"Todo espacio métrico, compacto y localmente conexo es la imagen continua del intervalo $[0, 1]$"*.

En el Capítulo 3 presentamos la propiedad S y cadenas débiles. Con esta propiedad, las funciones semicontinuas superiormente y el teorema de la función general, probamos el mencionado Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Este par de teoremas son conocidos por la mayoría de los topólogos; sin embargo, como dijera Raúl Velasco, ¡Aún hay más!

En 1986, J. Nikiel postula una serie de preguntas respecto a la imagen continua de espacios compactos y linealmente ordenados, una de éstas fue llamada la Conjetura de Nikiel. Muchos artículos se escribieron tratando de dar una respuesta a tal pregunta, ya sea positiva o negativa. Afortunadamente no tuvieron que pasar casi tres siglos para su respuesta, ¡oíste Golbach! En el año 2001, Mary Ellen Rudin publica el artículo en donde queda demostrada tal conjetura, la cual concluye lo siguiente: *"Un espacio topológico X es la imagen continua de un espacio compacto y linealmente ordenado si y sólo si es compacto y monótonamente normal"*. La demostración es complicada; sin embargo, en esta tesis estudiamos los elementos que esta conjetura involucra, los conceptos de orden, espacios linealmente ordenados y espacios monótonamente normales.

En el Capítulo 5, además del enunciado de Nikiel, presentamos el *Cuadrado Lexicográfico* y demostramos algunas de sus propiedades, entre las que destacamos: espacio compacto, linealmente ordenado, monótonamente normal y no métrico.

Agradezco mucho el tiempo invertido por el lector para este trabajo. Esperando que le sea de utilidad en algún momento o que al menos le alegre una mañana, tarde o noche. Sin más ¡comencemos!

Capítulo 1

Conocimientos preliminares

En este capítulo definiremos conceptos básicos para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1. *Entenderemos por un espacio topológico a la pareja* (X, τ)*, donde* X *es un conjunto y* τ *es una familia de subconjuntos de* X *que satisfacen:*

- $\{\emptyset, X\} \subset \tau$.
- *Si* $U, V \in \tau$ *entonces* $U \cap V \in \tau$.
- *Si* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ *entonces* $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Llamaremos conjuntos *abiertos* a los elementos de τ y entenderemos que un subconjunto de X es *cerrado* si su complemento es abierto.

Definición 1.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$*, la cerradura de* A *en* X *es el conjunto:*

$$cl(A) = \bigcap \{K \subset X | \ \ K \, es\ cerrado\ y \ \ A \subset K\}$$

Además, por ser la intersección arbitraria de conjuntos cerrados, $cl(A)$ *es un cerrado. La cerradura de un conjunto* A *es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a* A*, y, por tanto,* $A \subset cl(A)$*.*

Definición 1.3. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$*, definimos* la topología inducida *en* A *como* $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$.

Proposición 1.4. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$*. Entonces* τ_A *es una topología para* A*.*

Demostración. Veamos que τ_A satisface las condiciones de la definición 1.3.

1. Por definición $\emptyset \in \tau$ por lo que $A \cap \emptyset \in \tau_A$, de manera que $\emptyset \in \tau_A$.
2. Como $X \in \tau$ entonces $A \cap X \in \tau_A$, lo que implica que $A \in \tau_A$.
3. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in J\} \subset \tau_A$. Dada $\alpha \in J$, existe $U_\alpha \in \tau$ tal que $U_\alpha \cap A = V_\alpha$. Notamos que:
$$\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (A \cap U_\alpha) = A \cap (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \in \tau_\alpha$$
Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha \in \tau_A$.
4. Sean $V, W \in \tau_A$.
Por lo que existen $U, Z \in \tau$ tal que $V = U \cap A$, $W = Z \cap A$. De manera que $W \cap V = (U \cap A) \cap (Z \cap A) = (U \cap Z) \cap A \in \tau_A$. Por lo tanto, $W \cap V \in \tau_A$.

$\square$

A partir de este momento, utilizaremos la letra X para expresar los espacios y especificaremos que son espacios topológicos, con la finalidad de no abusar de la notación.

Proposición 1.5. *Sea* X *espacio topológico y* $B \subset X$*. Sea* U *abierto en* B *y* V *abierto en* U*. Entonces* V *es abierto en* B*.*

Demostración. Como U es abierto de B, $U = B \cap U^*$ con U^* abierto en X. De forma análoga como V es abierto en U, $V = U \cap V^*$ con V^* abierto en X.

Por lo tanto, $V = V^* \cap (B \cap U^*)$, donde $V^* \cap U^*$ es abierto en X. Se sigue que V es abierto en B. $\square$

Definición 1.6. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que* $\mathcal{B}$ es base de X *si:*

1) $\mathcal{B}$ es una colección de abiertos de X.

2) Para todo $U \subset X$ abierto y para todo $p \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B \subset U$.

Definición 1.7. *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Un conjunto $\mathcal{B}_{x_0}$ es una* base local de X en x_0 *si:*

1) $\mathcal{B}_{x_0}$ es una colección de abiertos de X.

2) Para todo $V \in \mathcal{B}_{x_0}$, se cumple que $x_0 \in V$.

3) Para todo $U \subset X$ abierto, tal que $x_0 \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $x_0 \in V \subset U$.

Recordemos que la *topología discreta* está dada por el conjunto potencia de X ($\mathcal{P}(X)$). Es decir, todo subconjunto de X es un conjunto abierto en la topología discreta.

Ejemplo 1.8. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología discreta.*

Como estamos tomando a $\mathbb{R}$ con la topología discreta, todo $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es abierto en $\mathbb{R}$. Propongamos $\mathcal{B}_{x_0} = \{\{x_0\}\}$.

Observemos que $\mathcal{B}_{x_0}$ será una colección de abiertos de $\mathbb{R}$, ya que estamos trabajando con la topología discreta. Por otro lado, para todo $V \in \mathcal{B}_{x_0}$, es evidente que $x_0 \in V$. Por último, tomemos $U \subset \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in U$, entonces se cumplirá que $x_0 \in \{x_0\} \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{x_0}$ es una base local de $\mathbb{R}$ en x_0.

Definición 1.9. *Un espacio topológico es* primero numerable *si todo punto $x \in X$ tiene una base local numerable.*

Recordemos que la *topología usual* en $\mathbb{R}$ está dada por los intervalos y sus uniones.

Ejemplo 1.10. *El espacio* $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ *es primero numerable.*

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}_{x_0} = \{(p,q) : \quad p, q \in \mathbb{Q} \text{ con } \ x_0 \in (p,q)\}$. Al ser $p, q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ garantizamos que $\mathcal{B}_{x_0}$ es una colección numerable de abiertos de $\mathbb{R}$. Por construcción se cumple que para todo $V \in \mathcal{B}_{x_0}$, $x_0 \in V$. Para el tercer punto, sea U abierto en $\mathbb{R}$, por lo tanto U contiene un intervalo (a,b), para algún $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in (a,b)$. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < p < x_0 < q < b$, entonces $x_0 \in (p,q) \subset (a,b) \subset U$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ con la topología usual es primero numerable.

Definición 1.11. *Un espacio topológico* X *es* segundo numerable *si tiene alguna base numerable.*

Ejemplo 1.12. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología de los* rayos abiertos *(*τ_{RA}*), donde* $\tau_{RA} = \{(a,\infty) : \quad a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. *Propongamos a* $\mathcal{B} = \{(q,\infty) : \quad q \in \mathbb{Q}\}$ *como una base para* τ_{RA}.

1) $\mathcal{B}$ es una colección de abiertos de $\mathbb{R}$.

2) Sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto y $r \in U$, de tal manera que $U = (b,\infty)$ para algún $b \in \mathbb{R}$. Sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $b < q < r$, lo que implica que $r \in (q,\infty) \subset (b,\infty) = U$.

Por lo tanto $\mathcal{B} = \{(p,\infty) : \quad p \in \mathbb{Q}\}$ es base para $\mathbb{R}$.

Teorema 1.13. *Si un espacio topológico* X *es segundo numerable, entonces* X *es primero numerable.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una base numerable de X y $x_0 \in X$. Definamos $\mathcal{B}_{x_0} = \{V \in \mathcal{B} : \quad x_0 \in V\}$. Es necesario ver que $\mathcal{B}_{x_0}$ es base local de x_0.

1) Podemos notar que $\mathcal{B}_{x_0} \subset \mathcal{B}$ y como $\mathcal{B}$ es una colección numerable de abiertos de X, entonces $\mathcal{B}_{x_0}$ también lo es.

2) Por construcción, para todo $V \in \mathcal{B}_{x_0}$, tenemos que $x_0 \in V$.

3) Sea $U \subset X$ abierto tal que $x_0 \in U$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in V \subset U$, entonces $V \in \mathcal{B}_{x_0}$.

Mostrando así que $\mathcal{B}_{x_0}$ es base local en x_0.
Por lo tanto, X es primero numerable. $\square$

Ahora, veamos un ejemplo que muestra que el regreso del teorema 1.13 es falso, es decir, si X es primero numerable no necesariamente será segundo numerable.

Ejemplo 1.14. *Sea* $(\mathbb{R}, \tau_{discreta})$ *entonces es primero numerable pero no es segundo numerable.*

En el ejemplo 1.8 ya vimos que B_{x_0} es una base local para x_0. Ahora supongamos que existe $\mathcal{B} = \{\{x\}| \ \ x \in \mathbb{R}\}$ una base numerable de $\mathbb{R}$. Como estamos trabajando con la topología discreta, cada uno de estos elementos son abiertos en $\mathbb{R}$. Ahora como $\mathbb{R}$ no es numerable, podemos tomar una cantidad no numerable de abiertos de la forma $U = \{x'\}$ tal que ninguno de los básicos se quedará contenido en U, ya que sólo tendremos una cantidad numerable de básicos. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ con la topología discreta no es segundo numerable.

1.1. Axiomas de separación

La siguiente compilación de definiciones es conocida como Axiomas de separación, nosotros le prestaremos especial atención a los espacios normales.

Definición 1.15. *Decimos que un espacio topológico* X*:*

1. *Es* $\boldsymbol{T_0}$ *si para cualesquiera dos puntos distintos* x, y *en* X*, existe* U *abierto tal que contiene* x *pero no a* y *o contiene a* y *pero no a* x*.*

2. *Es* $\boldsymbol{T_1}$ *si para cualesquiera dos puntos distintos* $x, y \in X$*, existe* U, V *abiertos tales que* $x \in U$*,* $y \in V$ *y además* $x \notin V$ *y* $y \notin U$*.*

3. *Es* $\boldsymbol{T_2}$ *si dados dos puntos distintos* $x, y \in X$*, existen* U, V *abiertos tal que* $x \in U$*,* $y \in V$ *y* $U \cap V = \emptyset$*. A los espacios que cumplen esta propiedad también se les conoce como* espacios de Hausdorff.

4. *Es* **regular** *si para cualquier $A \subset X$ cerrado y $x \notin A$, existen U, V abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $A \subset V$. Es* $\boldsymbol{T_3}$ *si es un espacio regular y T_1.*

5. *Es* **normal** *si para cualesquiera $A, B \subset X$ cerrados y ajenos, existen U, V abiertos ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

6. *Si X es un espacio topológico normal y T_1, decimos que X es un espacio* $\boldsymbol{T_4}$.

1.2. Funciones continuas y compacidad

En esta sección se darán defnciones de *funciones continuas* y se presentarán algunas de sus propiedades y debido a que los espacios que trabajaremos cumplen la propiedad de ser compactos y conexos, es elemental que definamos algunos conceptos clave como cubierta abierta, compacidad, conexidad, entre otros.

Definición 1.16. *Sean dos espacios topológicos X y Y y una función $f : X \to Y$. Decimos que:*

- *f es una función* abierta *si y sólo si para todo A conjunto abierto en X, $f(A)$ es un conjunto abierto en Y.*

- *f es una función* cerrada *si y sólo si para todo A conjunto cerrado en X, $f(A)$ es un conjunto cerrado en Y.*

- *f es continua si y sólo si para todo U abierto de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Definición 1.17. *Sea X un espacio topológico. Una* cubierta *del espacio X es una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X cuya unión es todo X. Una* subcubierta *de la cubierta $\mathcal{A}$ es una subcolección $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ que también es cubierta. Una* cubierta abierta *de X es una cubierta formada por conjuntos abiertos.*

Definición 1.18. *Un espacio X es* compacto *si y sólo si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Teorema 1.19. *Los subconjuntos cerrados de un espacio compacto X son compactos.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y A un subconjunto cerrado de X. Como A es cerrado, $X \setminus A$ es abierto.

Sea $\{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\}$ una cubierta abierta de A, entonces $\{\mathcal{C}_A\} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto entonces $\{\mathcal{C}_A\} \cup \{X \setminus A\}$ tiene subcubierta finita, por lo que también cubrirá a A. Observamos que podemos quitar $X \setminus A$ y sigue cubriendo a A.

De esta manera obtenemos una subcubierta finita de cualquier cubierta abierta de A. Por lo tanto, es posible concluir que A es compacto. $\square$

Teorema 1.20. *Todo subconjunto compacto de un espacio topológico $\boldsymbol{T_2}$ es cerrado.*

Demostración. Sea A subconjunto compacto de X. Probaremos que $X \setminus A$ es abierto.

Sea $b \notin A$. Construiremos un abierto V tal que $b \in V \subset X \setminus A$. Como X es $\boldsymbol{T_2}$, si $a \in A$ existen U_a y V_a abiertos ajenos tales que $a \in U_a$ y $b \in V_a$.

Por otro lado, $\{U_a\}_{a \in A}$ es cubierta de A por abiertos de X. Como A es compacto, podemos tomar una subcubierta finita $U_{a_1}, ..., U_{a_n}$ para cierto puntos $a_1, ..., a_n$ de A.

Para cada U_{a_i} existe V_{a_i} tal que $b \in V_{a_i}$.

Sea $V = V_{a_1} \cap ... \cap V_{a_n}$. V es abierto, ya que es la intersección finita de abiertos y, además $b \in V$. Sólo falta ver que $V \subset X \setminus A$. Debemos tener presente que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$. Recordemos que $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ para $i = 1, ..., n$. Por otro lado, $V \subset V_{a_i}$, lo que implica que $U_{a_i} \cap V = \emptyset$ para cada $i = 1, ..., n$, lo que nos lleva $V \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} = \emptyset$, concluyendo así que $V \cap A = \emptyset$, por lo tanto $V \subset X \setminus A$. Por lo que $X \setminus A$ es abierto y por definición A será cerrado. $\square$

Teorema 1.21. *La imagen continua de un espacio compacto X es compacta.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Demostraremos que $f(X)$ es compacto.

Sea $\mathcal{C}$ cubierta abierta de $f(X)$, como f es continua cada uno de los $f^{-1}(C)$ es abierto para cada $C \in \mathcal{C}$ y $\{f^{-1}(C)| \ \ C \in \mathcal{C}\}$ será una cubierta abierta X. Como X es compacto hay una colección finita de elementos $C_1, C_2, ..., C_n$ de $\mathcal{C}$ tales que:

$$X \subset f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2) \cup ... \cup f^{-1}(C_n)$$

Ahora, $f(X) \subset f(f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2) \cup ... \cup f^{-1}(C_n)) \subset f(f^{-1}(C_1)) \cup f(f^{-1}(C_2)) \cup ... \cup f(f^{-1}(C_n))$. Sin embargo recordemos que para cada i $f(f^{-1}(C_i)) \subset C_i$, por lo tanto:

$$f(x) \subset C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$$

Por lo tanto, $f(X)$ es compacto. □

Teorema 1.22. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un cerrado. Por demostrar que $f(A) \subset Y$ es cerrado.

Como A es cerrado en X y X es compacto, A es compacto. Por otro lado, ya que la imagen continua de un espacio compacto es compacto, $f(A)$ es compacto en Y. Por último como Y es un espacio de Hausdorff, se sigue que $f(A)$ es cerrado en Y. □

Corolario 1.23. *Sea $f : X \to Y$ función continua y biyectiva tal que X es compacto y Y es $\boldsymbol{T_2}$. Entonces f es un homeomorfismo.*

Lema 1.24. *Sea X un espacio topológico compacto y $\boldsymbol{T_2}$. Entonces X es regular.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $A \subset X$ cerrado con $x \notin A$. Como X es Hausdorff, para cada $y \in A$ existen abierto V_y y W_y tales que $x \in W_y$, $y \in V_y$ y $W_y \cap V_y = \emptyset$. La colección $\mathcal{C} = \{V_y : y \in A\}$ es una cubierta abierta de

A. Al ser A cerrado, también es compacto. Entonce existen $y_1, y_2, ..., y_n \in A$ de manera que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Definamos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ y $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Es claro que V y W son conjuntos abiertos de X y, además, $V \cap W = \emptyset$ por construcción. Por lo tanto, X es regular. $\square$

Proposición 1.25. *Si X es un espacio $\boldsymbol{T_2}$ y $A, B \subset X$ son subconjuntos compactos, entonces $A \cap B$ es compacto.*

Demostración. Como X es $\boldsymbol{T_2}$ y A y B son compactos, también son cerrados y por lo tanto $A \cap B$ es cerrado por ser la intersección de cerrados. De esta manera, por 1.19, $A \cap B$ es compacto puesto que es un cerrado que se encuentra contenido en A y B compactos. $\square$

Podemos notar que la proposición anterior se puede generalizar de la siguiente manera y la demostración es similar haciendo los cambios correspondientes.

Teorema 1.26. *Sea X un espacio topológico $\boldsymbol{T_2}$. Si $\mathcal{K}$ es una colección de subespacios compactos de X, entonces $\bigcap \mathcal{K}$ también es compacto.*

Definición 1.27. *Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X, se dice que $\mathcal{C}$ tiene* la propiedad de la intersección finita*, que abreviaremos por* ***pif****, si toda subfamilia $\{C_1, C_2, ..., C_n\} \subset \mathcal{C}$ tiene intersección no vacía. Es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$.*

Proposición 1.28. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si toda familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados de X que satisface la* ***pif****, tiene intersección no vacía, es decir $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sean X un espacio topológico compacto y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ una familia de cerrados de X tal que para cualquier colección finita $\{C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{C}$, se cumple que $\bigcap_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} \neq \emptyset$.

Por demostrar que $\bigcap_{C_\alpha \in \mathcal{C}} C_\alpha \neq \emptyset$.

Procedamos por contradicción, supongamos que: $\bigcap_{C_\alpha \in \mathcal{C}} C_\alpha = \emptyset$.

Aplicando a esta igualdad leyes de DeMorgan, $X = \bigcup_{\alpha\in J}(X \setminus C_\alpha)$ donde cada $X\setminus C_\alpha$ es un conjunto abierto de X. Entonces $\mathcal{C}^* = \{X\setminus C_\alpha : \alpha \in J\}$ es una cubierta abierta de X. Por hipótesis, X es compacto, por lo tanto existen $X \setminus C_{\alpha_1}, X \setminus C_{\alpha_2}, ..., X \setminus C_{\alpha_n}$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n}(X \setminus C_{\alpha_j})$. Aplicando de nuevo leyes de DeMorgan $\bigcap_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} = \emptyset$, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $\bigcap_{C_\alpha\in\mathcal{L}} C_\alpha \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{L} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ una familia de conjuntos abiertos de X tales que $\bigcup_{C_\alpha\in\mathcal{L}} A_\alpha = X$. Bastará demostrar que, $\bigcup_{j=1}^{n} A_{\alpha_j} = X$.

Apliquemos leyes de DeMorgan a $\bigcup_{C_\alpha\in\mathcal{L}} A_\alpha = X$, obtenemos que $\bigcap_{\alpha\in J}(X\setminus A_\alpha) = \emptyset$ donde cada $X \setminus A_\alpha$ es un cerrado de X. Entonces $\mathcal{L}* = \{X \setminus A_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de cerrados tales que $\bigcap_{\alpha\in J}(X \setminus A_\alpha) = \emptyset$.

Por otra parte, ya que X tiene la propiedad de la intersección finita, existen $X \setminus A_{\alpha_1}, X \setminus A_{\alpha_2}, ..., X \setminus A_{\alpha_n}$ tales que $\bigcap_{j=1}^{n}(X \setminus A_{\alpha_j}) = \emptyset$, utilizando nuevamente leyes de DeMorgan obtenemos que, $\bigcup_{j=1}^{n} A_{\alpha_j} = X$. Por lo tanto X es compacto. □

1.3. Topología producto

En la siguiente sección definiremos que manera breve la *topología producto*. Y de la misma manera, mencionaremos sin demostrar el *Teorema de Tychonoff*, ya que más adelante será necesario para demostrar diferentes propiedades.

Definición 1.29. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de espacios topológicos y $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}(X_\alpha) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} : x_\alpha \in X_\alpha\}$. La topología producto en $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ se obtiene tomando como una base a los conjuntos de la forma $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, donde:*

- *U_α es abierto en X_α para cada $\alpha \in A$.*
- *Para toda $\alpha \in \mathcal{A}$ excepto para una cantidad finita, $U_\alpha = X_\alpha$.*

Utilizaremos sin demostrar el siguiente teorema, muy importante en la teoría de productos topológicos. Una demostración se encuentra en [2], Teorema 1.4 (4), p. 224.

Teorema 1.30. ***(Teorema de Tychonoff)*** *Un producto de espacios no vacíos es compacto si y sólo si cada uno de los factores es compacto.*

1.4. Conexidad

En la siguiente sección estudiaremos la *conexidad* de los espacios topológicos. Empezaremos definiendo cuando un espacio es *disconexo*, para después ver ejemplos de espacios conexos y concluir con diferentes propiedades y proposiciones que nos ayudan a tener una mayor comprehensión del tema.

Definición 1.31. *Un espacio topológico X es* disconexo *si existen U y V abiertos de X no vacíos tales que:*

- $U \cap V = \emptyset$.
- $X = U \cup V$.

Se dice que un espacio topológico X es conexo, si no es disconexo.

Algunos ejemplos de espacios topológicos conexos son el intervalo $[0, 1]$, un triodito y la circunferencia unitaria (S^1).

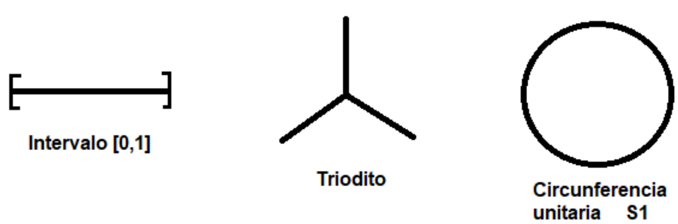


Figura 1.1: Ejemplos de espacios conexos.

Proposición 1.32. *Sea $A \subset X$ conexo y U, V abiertos en X ajenos no vacíos tales que $A \subset U \cup V$, entonces $A \subset U$ ó $A \subset V$.*

Demostración. Procedamos por contradicción, por lo que supongamos que $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces tenemos dos abiertos de A, ajenos no vacíos y $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$ lo que nos lleva a una contradicción ya que por hipótesis A es conexo. □

Proposición 1.33. *Sea Y un subespacio conexo y no vacío de un espacio topológico X y sea $Z \subset X$ tal que $Y \subset Z \subset cl(Y)$. Entonces si Y es conexo, también Z es conexo.*

Demostración. Sean U y V abiertos en Z no vacíos tales que $Z = U \cup V$. Como $Y \subset Z$ entonces $Y \subset U \cup V$.

Ahora como V es abierto en Z, podemos verlo como $V = W \cap Z$ con W abierto de X. Sea $w \in W \cap Z$, entonces $w \in W$ y $w \in cl(Y)$, por lo que $W \cap Y \neq \emptyset$ y como $W \cap Y = W \cap Z \cap Y = V \cap Y$ entonces $w \in V \cap Y$ concluyendo que $V \cap Y \neq \emptyset$. Análogamente $U \cap Y \neq \emptyset$, esto implica que $U \cap V \neq \emptyset$ ya que Y es conexo.

Por lo tanto, Z es conexo. □

Corolario 1.34. *Si Y es conexo, entonces $cl(Y)$ es conexo.*

Teorema 1.35. ***(Teorema de la Margarita)*** *Sea X un espacio topológico y $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ colección de conexos en X tal que $C_\alpha \cap C_0 \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in I$, donde C_0 es conexo. Entonces $\mathcal{M} = C_0 \cup \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Realizaremos la prueba por contradicción. Supongamos que $\mathcal{M}$ es disconexo, entonces existen U, V abierto no vacíos de X tales que:

1) $U \cap V = \emptyset$.

2) $\mathcal{M} \subset U \cup V$.

3) $\mathcal{M} \cap U \neq \emptyset$ y $\mathcal{M} \cap V \neq \emptyset$.

Por hipótesis y definición de $\mathcal{M}$, $C_0 \subset \mathcal{M}$. Por tanto, $C_0 \subset U \cup V$. Por la Proposición 1.32, debe cumplirse que: $C_0 \subset U$ o bien $C_0 \subset V$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $C_0 \subset U$.

Por otro lado, por hipótesis $C_\alpha \subset \mathcal{M}$ y, dado que $C_\alpha \cap C_0 \neq \emptyset$ y C_α es conexo, obtenemos que $C_\alpha \subset U$ para cada $\alpha \in I$. De aquí se sigue que $C_0 \cup \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \subset U$, es decir, que $\mathcal{M} \subset U$, lo cual contradice la tercera propiedad de los abiertos U y V.

Por lo tanto, $\mathcal{M}$ es conexo. □

Teorema 1.36. *La imagen continua de un espacio conexo X es conexa.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ función continua. Por demostrar que $f(X)$ es conexo. Supongamos que no, es decir que $f(X)$ es disconexo, por lo que existen U y V abiertos de $f(X)$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = f(X)$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X.

$$U \cup V = f(X)$$

implica que

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(f(X))$$

por lo tanto

$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X.$$

Ahora veamos que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Si $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ entonces $f(x) \in U \cap V$, lo que implica que $U \cap V \neq \emptyset$, lo que es una contradicción.

Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son dos abiertos ajenos no vacíos tales que su unión es X, lo cual nos lleva a una contradicción ya que por hipótesis X es conexo. □

Definición 1.37. *Sea X un espacio topológico.* Una componente *C de X es un subconjunto conexo maximal de X, es decir, C es componente de X, si C es conexo y si H es conexo contenido en X tal que $C \subset H$, entonces $C = H$.*

Una alternativa que tenemos a la definición de componentes es mediante una relación de equivalencia, la cual definimos a continuación.

Definición 1.38. *Dado un espacio topológico X y $p, q \in X$ decimos que:*

$p \sim q$ si y sólo si existe un subconjunto conexo K de X tal que $\{p, q\} \subset K$.

Proposición 1.39. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia. Más aún, las clases de equivalencia resultan ser las componentes del espacio.*

Demostración.

a) Mostremos que $\sim$ es reflexiva, es decir $p \sim p$ para todo $p \in X$. Sea $p \in X$, claramente el conjunto $K = \{p\}$ es conexo y contiene a p.

b) Mostremos que $\sim$ es simétrica, es decir si $p \sim q$ entonces $q \sim p$ para todo $p, q \in X$. Sean $p, q \in X$ tal que $p \sim q$, entonces existe K subconjunto conexo de X tal que $\{p, q\} \subset K$. Claramente el mismo conexo K funciona para mostrar que $\{q, p\} \subset K$.

c) Por último mostremos que $\sim$ es transitiva, es decir si $p \sim q$ y $q \sim r$ entonces $p \sim r$. Dado que $p \sim q$ existe un conexo K de X tal que $\{p, q\} \subset K$, por otro lado como $q \sim r$ existe conexo K^* de X tal que $\{q, r\} \subset K^*$. Entonces $K \cap K^* \neq \emptyset$, por el teorema 1.35 $K \cup K^*$ es un conexo que contiene a $\{p, r\}$ es decir $p \sim r$.

Por lo tanto, $\sim$ es de equivalencia.

Sea $p \in X$, denotemos por $[p]_\sim$ la clase de equivalencia de p. Primero mostraremos, que $[p]_\sim$ es conexo. Por definición

$$\begin{aligned} [p]_\sim &= \{q \in X : q \sim p\} \\ &= \{q \in X : \text{Existe } K \text{conexo tal que } \{p, q\} \subset K\} \\ &= \bigcup \{K : p \in K \text{y } K \text{conexo}\} \end{aligned}$$

Por el teorema 1.35 se sigue que $[p]_\sim$ es conexo. Para mostrar que se trata de una componente es suficiente probar que el único conexo que contiene a $[p]_\sim$ es él mismo. Sea H tal que $[p]_\sim \subset H$. Como $p \in [p]_\sim$ se sigue que $p \in H$, por lo tanto H es uno de los conexos que contiene a p, de modo que $H \subset [p]_\sim$ y esto concluye nuestra prueba. □

Corolario 1.40. *Las componentes generan una partición del espacio.*

Demostración. Toda relación de equivalencia en un conjunto induce una partición en el conjunto. □

1.5. Conexidad local y conexo en pequeño

En esta sección estudiaremos los conceptos de *conexidad local* y *conexo en pequeño*, veremos algunos ejemplos que nos ayudarán a entender de mejor manera qué espacios cumplen con estas propiedades. También, expondremos algunos resultados que nos permitirán utilizarlos de manera más familiar en capítulos posteriores.

Definición 1.41. *Un espacio topológico X es* localmente conexo en un punto *p si para todo abierto U que contiene a p existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subset U$. Un espacio topológico X es* localmente conexo *si es localmente conexo en p para todo elemento $p \in X$.*

Teorema 1.42. *X es localmente conexo si y sólo si las componentes de cada abierto de X son abiertas.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea U abierto en X y C componente de U. Demostraremos que C es abierto. Sea $p \in C$. Como X es localmente conexo, existe V abierto conexo tal que $p \in V \subset U$. Por otra parte, C es una componente de U, por lo que $V \subset C$. De esta manera, hemos encontrado, para $p \in C$ arbitrario, un abierto V tal que $p \in V \subset C$. Por lo tanto C es abierto.

($\Leftarrow$) Sea U abierto de X. Demostraremos que para todo $p \in U$ existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subset U$.

Sea $p \in U$ y C la componente de U tal que $p \in C$. Por hipótesis las componentes de cada abierto son abiertas, por lo que en particular C es un abierto y además es conexo. De esta manera, hemos encontrado un abierto conexo C tal que $p \in C \subset U$. $\square$

Definición 1.43. *Un espacio topológico X es* conexo en pequeño en un punto *p si para todo abierto U de X que contiene a p existe un conexo M de X tal que $p \in int(M) \subset M \subset U$. Un espacio topológico X es* conexo en pequeño *si es conexo en pequeño en p para todo $p \in X$.*

Ahora, daremos un ejemplo de un espacio que es conexo en pequeño en un punto, pero no es localmente conexo en ese mismo punto.

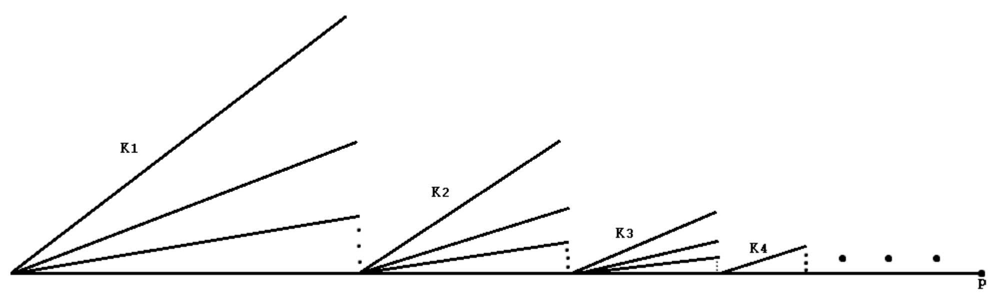


Figura 1.2: Ejemplo de un conexo en pequeño pero que no es localmente conexo en un punto

Notamos que el espacio que se describe en la figura es conexo en pequeño en el punto p ya que para todo abierto U tal que $p \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subset U$ para todo $n \geq N$. Así $K = \bigcup_{n \geq N} K_n \cup \{p\}$ es un conexo tal que $p \in int(K)$.

Por otro lado, no es localmente conexo porque existe un abierto U tal que $p \in U$ y nigún subconjunto de U conexo y abierto que contenga al punto p.

Teorema 1.44. *Un espacio X es conexo en pequeño para todo $p \in X$ si y sólo si X es localmente conexo para todo $p \in X$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea U abierto en X y $p \in U$. Sea K la componente de U con $p \in K$. Mostremos que K es abierto. Sea $q \in K$. Entonces existe V conexo tal que $q \in int(V) \subset V \subset U$, por lo tanto $V \subset K$, lo que implica que $int(V) \subset K$. Por lo tanto K es abierto. Así por el teorema 1.42, X es localmente conexo.

($\Leftarrow$) Se sigue de inmediato de ambas definiciones que si X es un continuo localmente conexo en un punto p, entonces X es conexo en pequeño en p. $\square$

Teorema 1.45. *Todo espacio topológico X es imagen continua de un espacio localmente conexo.*

Demostración. Sea X un espacio topológico, asignémosle la topología discreta, τ_d. De esta manera (X, τ_d) es localmente conexo, ya que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un abierto conexo.

Sea $f : (X, \tau_d) \to (X, \tau)$ la función definida por $f(x) = x$. Claramente la función f es continua y suprayectiva. □

1.6. Espacio métricos

Ahora definiremos los espacios métricos y veremos algunos resultados que están relacionados a este tipo de espacios.

Definición 1.46. *Un* espacio métrico *es una pareja (X, d) donde X es un conjunto distinto del vacío y $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una función tal que para toda $x, y, z \in X$ se cumple lo siguiente:*

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A la función d se le llama métrica.

Definición 1.47. *Dados (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$, denotaremos por $B_r(x) = \{z \in X : d(x, z) < r\}$. Decimos que $G \subset X$ es* abierto *si para cada $x \in G$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset G$.*

Proposición 1.48. *Sean (X, d) espacio métrico y $\tau_d = \{G \subset X : G$ es abierto$\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces τ_d es una topología.*

Demostración. Veamos que el conjunto τ_d satisface las condiciones de la definición 1.3.

1. Dada la definición de τ_d se sigue que $\emptyset, X \in \tau$.

2. Sean $G_1, G_2 \in \tau_d$, mostremos que $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$. Sea $p \in G_1 \cap G_2$. Como G_i es abierto, para $i = 1, 2$, existe $r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(p) \subset G_i$ con $i = 1, 2$. Para $r = min\{r_1, r_2\}$ se sigue que, $B_r(p) \subset B_{r_i}(p)$ para $i = 1, 2$. Por tanto, $B_r(p) \subset G_1 \cap G_2$. De este modo, $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$.

3. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \tau_d$ y $p \in \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$. Entonces, $p \in G_\beta$ para algún $\beta \in J$. Como $G_\beta \in \tau_d$ existe $r_\beta > 0$ tal que $B_{r_\beta}(p) \subset G_\beta$. Obteniendo así que $B_{r_\beta}(p) \subset \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \in \tau_d$.

Mostrando así que τ_d es una topología para el espacio métrico X. $\square$

A partir de este momento, cuando hablamos de un espacio métrico, nos referimos a un espacio que tiene la topología definida en 1.47.

Definición 1.49. *Dados X espacio métrico y A, B subconjuntos de X, definimos y denotamos la distancia de A a B como*

$$d(A, B) = inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Si $A = \{a\}$ simplemente escribiremos $d(a, B)$.

Proposición 1.50. *Dados X un espacio métrico, $p \in X$ y $A \subset X$. Entonces $p \notin Cl(A)$ si y sólo si $d(p, A) > 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sean $p \in X$ y $A \subset X$ tal que $p \notin Cl(A)$. Como $Cl(A)$ es cerrado, $X \setminus Cl(A)$ es abierto. Por lo tanto existe $r_p > 0$ tal que $B_{r_p}(p) \subset X \setminus A$. Esta contención implica, dado que $A \subset Cl(A)$, que $d(p, a) \geq r_p$ para cada $a \in A$, es decir r_p es una cota inferior para el conjunto $\{d(p, a) : a \in A\}$. Por lo tanto, $d(p, A) \geq r_p > 0$.

$\Leftarrow$ Sea $r_0 = \frac{d(p,A)}{2}$. Mostremos que $B_{r_0}(p) \cap A = \emptyset$. Supongamos que no y sea $a \in B_{r_0}(p) \cap A$, entonces $d(p, a) < r_0$. Por otro lado, como $a \in A$, por la definición se tiene que $d(p, A) \leq d(p, a)$. De modo que $d(p, A) < r_0$; pero, dado que $r_0 = \frac{d(p,A)}{2}$ se tiene una contradicción. Por lo tanto, existe un abierto que tiene a p y no intersecta al conjunto A, es decir, $p \notin Cl(A)$.

□

Teorema 1.51. *Todo espacio métrico y compacto X es segundo numerable.*

Demostración. La idea de la prueba es construir una base numerable para el espacio X.

Sea $\epsilon = 1$, el conjunto $\mathcal{B}_1(x) = \{B_1(x)| \quad x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe $n(1) \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $\{B_1(x_1^1), ..., B_1(x_{n(1)}^1)\}$ es cubierta de X.

Repitiendo este argumento para $\epsilon = \frac{1}{k}$, el conjunto $\{B_{\frac{1}{k}}(x_1^k), ..., B_{\frac{1}{k}}(x_{n(k)}^k)\}$ es cubierta de X.

El conjunto $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{k}}(x_j^k)| \quad j = 1, ..., n(k), \quad k \in \mathbb{N}\}$ es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos finitos.

Por construcción, los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos de X.

Ahora, sea $U \subset X$ abierto y $p \in U$. Por la definición de abierto en los espacios métricos y la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $B_{\frac{1}{k}}(p) \subset U$. Por construcción, $\bigcup_{k=1}^{n(k)} B_{\frac{1}{2k}}(x_j^k) = X$, por lo tanto existe x_j^{2k} tal que $p \in B_{\frac{1}{2k}}(x_j^{2k})$.

Afirmación: $B_{\frac{1}{2k}}(x_j^k) \subset U$.

Prueba de la Afirmación: Sea $z \in B_{\frac{1}{2k}}(x_j^{2k})$. Bastará probar que $d(z, p) < \frac{1}{k}$.

Por la desigualdad del triángulo, observamos que $d(z, p) \leq d(z, x_j^{2k}) + d(x_j^{2k}, p) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$.

Esto implicará que $z \in U$, pues $B_{\frac{1}{k}}(p) \subset U$, entonces $B_{\frac{1}{2k}}(x_j^{2k}) \subset U$, pero por construcción $B_{\frac{1}{2k}}(x_j^{2k}) \in \mathcal{B}$.

Por lo tanto, podemos concluir que $\mathcal{B}$ es una base numerable para X, por lo que X es $2do$ numerable. □

Veamos algunos ejemplos de espacios que son métricos y compactos:

- El intervalo $[0, 1]$.

- La cerradura de la gráfica de $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, $x \in (0,1]$, mejor conocida como la curva topológica. La topología de este espacio es la que hereda de $\mathbb{R}^2$.

- En un espacio métrico X, el conjunto formado por $\{x\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a x es un espacio métrico compacto con la topología heredada. Por ejemplo $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$.

Proposición 1.52. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos y compactos no vacíos, tales que $X_{i+1} \subset X_i$, para cada $i = 1, 2, ...$ y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Si U es un abierto de X_1 y $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$, para todo $i \geq N$.*

Demostración. Será suficiente con mostrar que existe $X_N \subset U$. Procedamos por contradicción, es decir supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n \setminus U \neq \emptyset$.

Como cada X_i es un espacio métrico y compacto entonces cada uno de ellos es cerrado para $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como U es abierto de X_1, entonces $X_1 \setminus U$ es cerrado.

Propongamos $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, ...\} \cup \{X_1 \setminus U\}$ una familia de cerrados. Veamos que $\mathcal{C}$ tiene la **pif**.

Caso 1) Tomemos a $X_{n_1}, X_{n_2}, ..., X_{n_m}$ y sea $M = max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$. Entonces por hipótesis $X_M \subset X_{n_m}$, lo que implica $\bigcap_{i=1}^{m} X_{n_i} = X_M$, por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{m} X_{n_i} \neq \emptyset$.

Caso 2) Tomemos a $X_{n_1}, X_{n_2}, ..., X_{n_s}, X_1 \setminus U$ y sea $M' = max\{n_1, ..., n_s\}$. Entonces $(\bigcap_{i=1}^{s} X_{n_s}) \cap X_1 \setminus U = X_{M'} \cap (X_1 \setminus U) = X_{M'} \setminus U \neq \emptyset$, lo que implica que $(\bigcap_{i=1}^{s} X_{n_s}) \cap (X_1 \setminus U) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{C}$ tiene la **pif**.

Ahora, como X_1 es compacto, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \cap (X_1 \setminus U) \neq \emptyset$. Pero por hipótesis $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = X$, esto implica que $X \cap (X_1 \setminus U) \neq \emptyset$ lo que nos lleva a una contradicción ya que $X \subset U$. Concluyendo de esta manera nuestra demostración.

□

Teorema 1.53. ***Teorema de metrización de Urysohn***

Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si X es regular y tiene una base numerable. ([8], Teorema 23.1, p.166)

Proposición 1.54. *La imagen continua de un espacio métrico compacto en un espacio Hausdorff es metrizable.*

Demostración. Sean X un espacio métrico y compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ función continua y suprayectiva. Por el Teorema 1.21, se tiene que Y es compacto, y por el Lema 1.24, Y es regular. Para poder aplicar el Teorema 1.53, es suficiente exhibir una base numerable de Y. Por el Teorema 1.51, X tiene una base numerable $\mathcal{C}$. Para cada subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$, definamos $E(\mathcal{L}) = Y \setminus f(X \setminus \cup\mathcal{L})$.

Sea $\mathcal{P} = \{E(\mathcal{L}) : \mathcal{L}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{C}\}$. Por la numerabilidad de $\mathcal{C}$, se obtiene que $\mathcal{P}$ también es numerable. Por el Teorema 1.22, obtenemos que $\mathcal{P}$ está formado de conjuntos abiertos de Y. Por otro lado, sean $p \in U$ con U abierto de Y. Por continuidad, $f^{-1}(p)$ es un compacto de X contenido en el abierto $f^{-1}(U)$. Por lo tanto, existe una familia finita $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$, tal que $f^{-1}(p) \subset \cup\mathcal{L} \subset f^{-1}(U)$. De donde obtenemos que $p \in E(\mathcal{L}) \subset U$. Así, Y tiene una base numerable, y por el Teorema 1.53, concluimos que Y es metrizable. $\square$

1.7. Espacios monótonamente normales

En esta sección definimos los espacios *monótonamente normales*, damos una condición para que un espacio cumpla con esta característica y mostramos un ejemplo interesante.

Definición 1.55. *Un espacio topológico (X, τ) es* monótonamente normal *si existe una función G que asigna a cada punto $x \in X$ y cada abierto $U \subset X$ con $x \in U$, un conjunto abierto $G(x, U)$ tal que:*

1) $x \in G(x, U) \subset U$.

2) Si U' es abierto y $x \in U \subset U'$, entonces $G(x, U) \subset G(x, U')$.

3) Si x,y son puntos distintos en X, entonces $G(x, X \setminus \{y\}) \cap G(y, X \setminus \{x\}) = \emptyset$.

A la función G se le llama *operador monótonamente normal* de X.

Teorema 1.56. *Sea (X,d) espacio métrico. Entonces X es monótonamente normal.*

Demostración. Utilizaremos la distancia de un punto a un conjunto definida en 1.49).

Para cada $x \in X$ y U abierto tal que $x \in U$, definimos

$$G(x,U) = B_r(x),$$

con $r = \frac{d(x,X\setminus U)}{2}$ se sigue de la Proposición 1.50 que $r > 0$ ya que $X \setminus U$ es cerrado. Veamos que así definida, G satisface las condiciones para que un espacio sea monótonamente normal.

Veamos que $G(x,U) \subset U$. Por construcción observamos que: $B_r(x) \cap (X \setminus U) = \emptyset$, esto quiere decir que $B_r(x) \subset U$. Por lo tanto, $G(x,U) \subset U$ lo que prueba la primera propiedad.

Ahora veamos que si $U \subset U'$, entonces $G(x,U) \subset G(x,U')$. Sea $G(x,U) = B_r(x)$ con $r = \frac{d(x,X\setminus U)}{2}$ y $G(x,U') = B_{r'}(x)$ con $r' = \frac{d(x,X\setminus U')}{2}$. Sabemos que $U \subset U'$, por lo tanto: $X \setminus U' \subset X \setminus U$, entonces $d(x, X\setminus U') \geqslant d(x, X \setminus U)$ por lo que $\frac{d(x,X\setminus U')}{2} \geqslant \frac{d(x,X\setminus U)}{2}$ lo que implica que $B_r(x) \subset B_{r'}(x)$. Por lo tanto, $G(x,U) \subset G(x,U')$, cumpliéndose la segunda propiedad.

Por último mostremos que si $x \neq y$, entonces $G(x, X \setminus \{y\}) \cap G(y, X \setminus \{x\}) = \emptyset$. Por definición $G(x, X\setminus\{y\}) = B_{r_1}(x)$ donde $r_1 = \frac{d(x,X\setminus(X\setminus\{y\}))}{2} = \frac{d(x,y)}{2}$. De manera similar $G(y, X\setminus\{x\}) = B_{r_2}(y)$ donde $r_2 = \frac{d(x,y)}{2}$. Supongamos que $G(x, X\setminus\{y\}) \cap G(y, X\setminus\{x\}) \neq \emptyset$, entonces existe z tal que $z \in G(x, X\setminus\{y\}) = B_{r_1}(x)$ lo que implica que $d(x,z) < \frac{d(x,y)}{2}$. De la misma manera $z \in G(y, X\setminus\{x\}) = B_{r_2}(y)$ lo que implica que $d(y,z) < \frac{d(x,y)}{2}$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y).$$

Lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $G(x, X\setminus\{y\}) \cap G(x, X\setminus\{x\}) = \emptyset$. Hemos probado que se cumplen las tres propiedades, obteniendo así que X es monótonamente normal. $\square$

Más adelante veremos un ejemplo en donde mostraremos que el regreso del Teorema 1.56 anterior es falso.

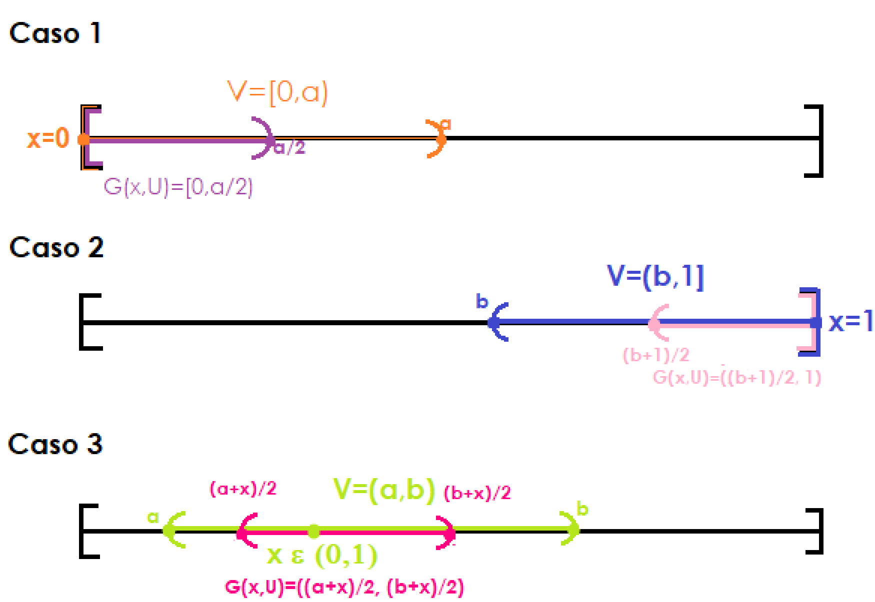
Sin embargo, en el siguiente ejemplo podremos ver que a pesar de que la función nos lleva a demostrar que los espacios métricos son monótonamente normales, dicha función no es única.

Ejemplo 1.57. *Sea* $[0,1]$ *con la topología usual y* U *abierto de* $[0,1]$ *tal que* $x \in U$*, definimos* $G(x,U)$ *tal que*

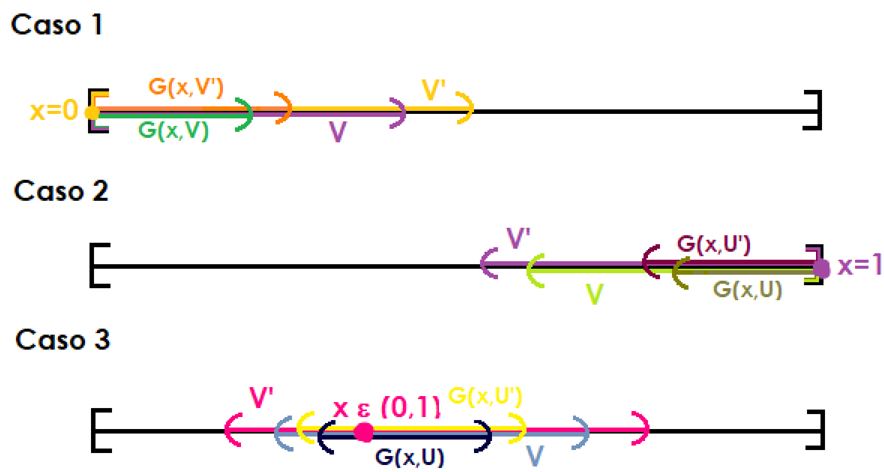
$$G(x,U) = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{x+b}{2} \right),$$

donde $V = (a,b)$ *es la componente de* U *tal que* $x \in V$*. Entonces* G *es un operador monónotamente normal de* $[0,1]$.

Demostración. Primero veremos que para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $x \in G(x,U) \subset U$.

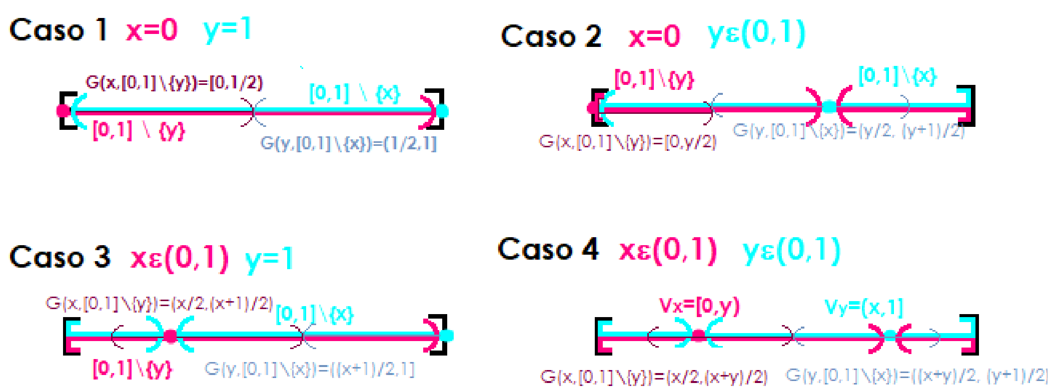


En segundo lugar veremos que si $U \subset U'$, entonces $G(x,U) \subset G(x,U')$. Notemos que si V es componente de U y V' es componente de U' entonces $V \subseteq V'$.



Por lo tanto, en todos los casos se cumple que $G(x,U) \subset G(x,U')$.

Nos falta ver que si x y y son puntos distintos en $[0,1]$ entonces $G(x,[0,1]\setminus\{y\}) \cap G(y,[0,1]\setminus\{x\}) = \emptyset$.



Por lo tanto, es posible observar que $G(x,[0,1]\setminus\{y\}) \cap G(y,[0,1]\setminus\{y\}) = \emptyset$. Concluyendo así, que el $[0,1]$ es monótonamente normal. $\square$

1.8. Continuos

En esta sección definimos los espacios a los que comúnmente conocemos como *continuos*. Mostramos ejemplos y desarrollamos algunos conceptos y propiedades que cumplen.

Definición 1.58. *Un espacio topológico X es un* continuo *si es métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Ejemplos: $[0,1]$ con la topología usual, el cuadrado unitario $[0,1]^2$, el triodo simple, la circunferencia unitaria (S^1) y el Círculo de Varsovia, la cerradura de $sen(\frac{1}{x})$, mejor conocida como la curva topológica.

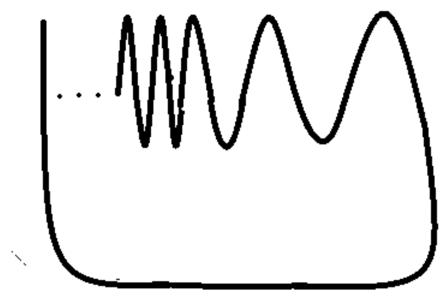


Figura 1.3: Círculo de Varsovia.

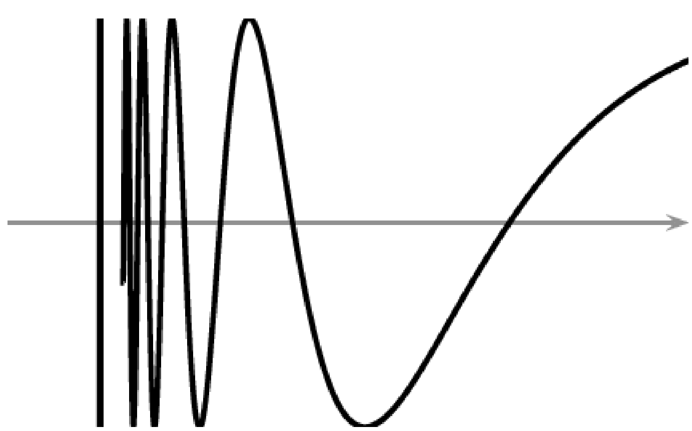


Figura 1.4: Curva topológica.

Lema 1.59. *Sean X un continuo localmente conexo y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, donde Y es un espacio de Hausdorff. Entonces Y es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Dado que f es una función continua y suprayectiva, por los teoremas 1.21, 1.36 y por la Proposición 1.54 se sigue que Y es un continuo. Resta demostrar que Y es localmente conexo.

Sean $p \in Y$ y U abierto en Y tal que $p \in U$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X y $f^{-1}(p) \subset f^{-1}(U)$. Para cada $x \in f^{-1}(p)$, sea W_x abierto conexo en X tal que $x \in W_x \subset f^{-1}(U)$, ya que por hipótesis X es localmente conexo. Sea $W = \bigcup_{x \in f^{-1}(p)} W_x$, entonces $f^{-1}(p) \subset W$. Como W es abierto, $X \setminus W$ es cerrado, en particular como X es un espacio compacto, $X \setminus W$ es compacto. Entonces, como X es compacto, f es continua y Y es de Hausdorff, $f(X \setminus W)$ es cerrado y $J = Y \setminus f(X \setminus W)$ es abierto en Y.

Afirmación: $p \in J$

Demostración de la afirmación: Supongamos que $p \notin J$, entonces $p \in f(X \setminus W)$, lo que implica que existe $x_0 \in X \setminus W$ tal que $p = f(x_0)$ entonces $x_0 \in f^{-1}(p) \subset W$, lo que nos lleva a una contradicción ya que $x_0 \in X \setminus W$. Por lo tanto, $p \in J$.

Ahora demostraremos que $J \subset f(W)$ y $f(W)$ es conexo.

Sea $y \in J$. Como f es suprayectiva, existe $a \in X$ tal que $f(a) = y$, entonces $a \notin X \setminus W$, por lo tanto $a \in W$, de esta manera $y \in f(W)$. Por lo tanto, $J \subset f(W)$. Por construcción para cada $x \in f^{-1}(p)$, W_x es conexo, entonces como f es continua $f(W_x)$ es conexo y $p \in f(W_x)$. Por otro lado, $f(W) = f(\bigcup_{x \in f^{-1}(p)} W_x) = \bigcup_{x \in f^{-1}(p)} f(W_x)$. Dado que cada $f(W_x)$ contiene al punto p, $f(W)$ es conexo.

Por último mostraremos que $f(W) \subset U$.

$W = \bigcup_{x \in f^{-1}(p)} W_x \subset f^{-1}(U)$ por lo que $f(W) \subset f(f^{-1}(U)) \subset U$. Por lo tanto, $p \in int(f(W)) \subset f(W) \subset U$ donde $f(W)$ es conexo. Por lo tanto, Y es conexo en pequeño en p, y como p fue un punto arbitrario, Y es conexo en pequeño para todo $p \in Y$, así que por lo mostrado en el teorema 1.44 concluimos que Y es localmente conexo para todo punto p. □

Definición 1.60. *Definimos y denotamos los hiperespacios para un espacio topológico X de la siguiente manera:*

1) $2^X = \{A : \;\; A$ *es un subconjunto cerrado no vacío de* $X\}$ *es el hiperespacio de cerrados no vacíos de X.*

2) $C(X) = \{A \in 2^X : \quad A$ *es conexo*$\}$ *es el hiperespacio de subcontinuos de* X*.*

1.9. Orden

En esta última sección definimos el concepto de *orden* y damos las diferentes propiedades que debe de cumplir un conjunto para estar *parcialmente ordenado* o *totalmente ordenado*. Por último también describimos la *topología de orden*.

Definición 1.61. *Decimos que el conjunto* A *está* parcialmente ordenado *si* A *es un conjunto y* $\leq$ *es una relación entre elementos de* A *tal que:*

1) *Para todo* $a \in A$*,* $a \leq a$*, es decir* $\leq$ *es antirreflexiva en* A*.*

2) *Para cualquiera* $a, b, c \in A$*, si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *esto implica que* $a \leq c$*, es decir,* $\leq$ *es transitiva en* A*.*

Para cualesquiera $a, b \in A$*, diremos que* $a < b$ *si* $a \leq b$ *y* $a \neq b$*. Decimos que* $(A, \leq)$ *es un conjunto* totalmente ordenado *o* linealmente ordenado *si* $(A, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado y, además, se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:* $a = b$ *o* $a < b$ *o* $a > b$*, es decir, la relación es tricotómica en* A*.*

Definición 1.62. *Sea* $(X, <_X)$ *conjunto ordenado. Se dice que* $J \subset X$ *es un* intervalo *si dados* $a < b < c$ *elementos de* X*, si* a *y* c *son elementos de* J *entonces* b *también lo es.*

Definición 1.63. ***(Topología de orden)*** *Dado* $(X, <_X)$ *un conjunto linealmente ordenado, definimos* $\mathcal{S}$ subbase *para una topología en* X *como sigue:*

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (b, \infty) : a, b \in X\}$$

El ejemplo más recurrente que encontramos en diferentes fuentes bibliográficas para representar estos espacios es el siguiente.

Ejemplo 1.64. *$(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ es un espacio linealmente ordenado.*

Es importante notar que si $Z \subset X$ entonces Z es también un conjunto ordenado y por lo tanto es posible definir una topología en Z. Sin embargo, es posible que ocurra que esta topología no concuerde con la topología de subespacio.

Veamos ahora un ejemplo de un subespacio donde las topologías coinciden.

Ejemplo 1.65. *Sea $\mathbb{R}$ con el orden usual y $(0,1) \subset \mathbb{R}$.*

Entonces notamos que $(0,1)$ también será un espacio linealmente ordenado bajo la topología usual y por definición de la topología de orden se sigue que ambas topologías coinciden.

Ahora, consideremos a $Z = (0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Notamos que bajo la topología heredada de $\mathbb{R}$ tenemos que $\{2\} = Z \cap (1,3)$, donde $(1,3)$ es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología usual, es decir, $\{2\}$ es un conjunto abierto con la topología heredada. Por otra parte, si (a,b) es un abierto con la topología de orden para Z con $2 \in (a,b)$, entonces $a \in (0,1)$ y $b \in (3,4)$, podemos observar que $(a,b) \neq \{2\}$. Por lo tanto, $\{2\}$ no es un abierto en Z con la topología de orden para Z. Por lo tanto, la topología de orden que se define para Z no será la misma que la topología de subespacio.

Capítulo 2

Funciones semicontinuas superiormente

En la primera sección de este capítulo presentaremos el concepto de *función semicontinua superiormente* y algunas de sus propiedades. La segunda sección está dedicada a demostrar el *Teorema de la función general*, que en el siguiente capítulo será la herramienta para demostrar el *Teorema de Hahn Mazurkiewcz*.

Para las definiciones que no se presentan en este capítulo remitimos al lector al capítulo 1.

2.1. Funciones semicontinuas superiormente

En esta primera sección presentamos las *funciones semicontinuas superiormente* y mostramos algunas de sus propiedades.

Definición 2.1. *Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que la función $F : X \to 2^Y$ es* semicontinua superiormente (scs) *en un punto $p \in X$, si dado un abierto $U \subset Y$ tal que $F(p) \subset U$, existe V abierto en X tal que $p \in V$ y $F(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Se dice que una función es* semicontinua superiormente (scs)*, si es scs para todo punto de X.*

Veamos algunos ejemplos de funciones que cumplen con ser semicontinuas superiormente (scs).

Ejemplo 2.2. *La función $F : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ definida de la siguiente manera*

$$F(t) = \begin{cases} [0,1] & si\ t = 0 \\ \{t\} & si\ t \neq 0 \end{cases},$$

es scs.

Sea $t \in [0,1]$. Procederemos por casos.

Caso 1: Si $t \neq 0$, $F(t) = \{t\}$. Sea $U = (t-\epsilon, t+\epsilon)$ abierto en $[0,1]$ con $\epsilon > 0$, $\epsilon < t$ y $\epsilon < 1-t$, tal que $F(t) = \{t\} \subset (t-\epsilon, t+\epsilon)$.

Por otro lado, definimos $V = (t-\delta, t+\delta)$ abierto en $[0,1]$ con $\delta = \epsilon$, $\delta < t$ y $\delta < 1-t$, tal que $t \in V$. Sea $s \in (t-\delta, t+\delta)$. Mostraremos que $F(s) \subset (t-\epsilon, t+\epsilon)$.

Como $s \in (t-\delta, t+\delta)$, $t-\delta < s < t+\delta$, pero como $\delta = \epsilon$ obtenemos que $t-\epsilon < s < t+\epsilon$ si y sólo si $s \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$ si y sólo si $\{s\} \subset (t-\epsilon, t+\epsilon)$ si y sólo si $F(s) \subset U$.

Caso 2: Si $t = 0$, $F(t) = [0,1]$. Entonces $U = [0,1]$. De esta manera garantizamos que $F(0) = [0,1] \subset U$. Sea $V = [0,\epsilon)$ abierto en $[0,1]$ con $0 < \epsilon < 1$. Por construcción $0 \in V = [0,\epsilon)$. Sea $t \in [0,\epsilon)$, entonces $0 \leq t < \epsilon < 1$. Por lo que $0 \leq t \leq 1$ si y sólo si $t \in [0,1]$ si y sólo si $\{t\} \subset [0,1]$ si y sólo si $F(t) \subset U$.

De esta manera, la función F es *scs*.

Proposición 2.3. *Sea $F : X \to 2^Y$ función. Si $E \subset Y$, entonces $X \setminus \{x \in X : \ F(x) \subset E\} = \{x \in X : \ F(x) \cap Y \setminus E \neq \emptyset\}$.*

Demostración. Sea $z \in X$. Entonces $z \in X \setminus \{x \in X : \ F(x) \subset E\}$ si y sólo si $F(z) \not\subseteq E$ si y sólo si $F(z) \cap Y \setminus E \neq \emptyset$ si y sólo si $z \in \{x \in X : F(x) \cap Y \setminus E \neq \emptyset\}$. $\square$

Teorema 2.4. *Sea $F : X \to 2^Y$ una función. Entonces F es scs si y sólo si el conjunto $\{x \in X : F(x) \subset U\}$ es abierto en X para todo U abierto en Y, o equivalentemente, $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ es cerrado en X para todo C cerrado en Y.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por hipótesis F es *scs*. Sea U un abierto en Y. Denotemos por $A = \{x \in X : F(x) \subset U\}$. Como F es *scs*, existe $V \subset X$ abierto y no vacío. Sea $z \in V$ tal que $F(w) \subset U$ para todo $w \in V$. Por lo tanto, $z \in A$. De este modo, A es abierto.

($\Leftarrow$) Por hipótesis $A = \{x \in X : F(x) \subset U\}$ es abierto en X, para todo $U \subset Y$ abierto. Sea $x \in X$ un punto arbitrario, tal que $F(x) \subset U$ con U abierto en Y, entonces $x \in A$. Por la Proposición 2.3, como $z \in A$ se cumple que $F(z) \subset U$.

Ya habiendo probado esto continuemos con la prueba de la equivalencia.

($\Rightarrow$) Si el conjunto $\{x \in X : F(x) \subset U\}$ es abierto, necesitamos mostrar que $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ es cerrado. Tomemos C un conjunto cerrado en Y, lo que implica que $Y \setminus C$ es abierto en Y. Por hipótesis $\{x \in X : F(x) \subset Y \setminus C\}$ es abierto en X, por lo tanto, $X \setminus \{x \in X : F(x) \subset Y \setminus C\}$ es cerrado en X. Así que por la Proposición 2.3, $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ es cerrado en X.

($\Leftarrow$) Si el conjunto $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ es cerrado en X para todo C cerrado en Y, entonces es necesario mostrar que $\{x \in X : F(x) \subset U\}$ es abierto. Sea U subconjunto abierto de Y, lo que implica que $Y \setminus U$ es cerrado en Y, que por conveniencia renombraremos como $Y \setminus U = C$. Por hipótesis $\{x \in X : F(x) \cap \neq \emptyset\}$ es cerrado, lo que implica que, $X \setminus \{x \in X : F(x) \subset Y \setminus C\} = X \setminus \{x \in X : F(x) \subset U\}$ es cerrado.

Por lo tanto, $\{x \in X : F(x) \subset U\}$ es abierto.

$\square$

Proposición 2.5. *Si $F : X \to 2^Y$ es una función tal que $F(x)$ es un conjunto unitario $\{f(x)\}$ para cada $x \in X$, entonces F es una función scs si y sólo si $f : X \to Y$ es continua.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por hipótesis $F : X \to 2^Y$ es *scs*, lo que implica que $\{x \in X : F(x) \subset U\}$ es un conjunto abierto en X, si $U \subset Y$ es abierto. Por lo que sólo necesitaremos mostrar que $\{x \in X : F(x) \subset U\} = f^{-1}(U)$.

Notamos que $\{x \in X : F(x) \subset U\} = \{x \in X : \{f(x)\} \subset U\} = \{x \in X : f(x) \in U\} = f^{-1}(U)$. Por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es abierto en X, así concluimos que la función f es continua.

($\Leftarrow$) Como f es una función continua, $f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado en X para todo $C \subset Y$ subconjunto cerrado. Bastará mostrar que $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ es un conjunto cerrado en X.

Observamos que $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\} = \{x \in X : \{f(x)\} \cap C \neq \emptyset\} = \{x \in X : f(x) \in C\} = f^{-:}(C)$ que por hipótesis es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ es un conjunto cerrado en X, por lo tanto F es *scs*. $\square$

Ejemplo 2.6. *La función $F : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ definida de la siguiente manera*

$$F(t) = \begin{cases} \{2t\} & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \{2-2t\} & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es scs.

Esto se sigue por la Proposición 2.5.

Una vez visto este ejemplo de una función *scs*, mostraremos algunos teoremas y proposiciones para poder así manejarlas con mayor familiaridad.

Proposición 2.7. *Sea $f : X \to Y$ una función tal que $f^{-1}(y)$ es cerrado en X para cada $y \in Y$. Definimos $F : Y \to 2^X$ como $F(y) = f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. Entonces:*

a) $f(C) = \{y \in Y : \quad F(y) \cap C \neq \emptyset\}$.

b) *f manda conjuntos cerrados de X a conjuntos cerrados en Y si y sólo si F es scs.*

Demostración. a) Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces $y \in f(C)$ si y sólo si $f^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset$ si y sólo si $F(y) \cap C \neq \emptyset$ si y sólo si $z \in \{y \in Y : \quad F(y) \cap C \neq \emptyset\}$.

b) ($\Rightarrow$) Sea C cerrado en X. Por hipótesis $f(C)$ es cerrado en Y, pero por el inciso anterior, $f(C) = \{y \in Y : F(y) \cap C \neq \emptyset\}$. Se sigue del Teorema 2.4 que F es semicontinua superiormente.

($\Leftarrow$) Sea C un conjunto cerrado en X. Mostraremos que $f(C)$ es cerrado en Y. Por el Teorema 2.4, como F es *scs*, para todo C cerrado en X, $\{y \in Y : F(y) \cap C \neq \emptyset\}$ es cerrado en Y. Por lo que basta probar que, $f(C) = \{y \in Y : F(y) \cap C \neq \emptyset\}$, lo cual se sigue del inciso a).

Por lo tanto, $f(C)$ es cerrado en Y. Por lo tanto, la función f manda conjuntos cerrados de X a conjuntos cerrados en Y.

$\square$

Proposición 2.8. *Sean X y Y espacios topológicos, X compacto y $F : X \to 2^Y$ función scs tal que $F(x)$ es compacto para cada $x \in X$, entonces $\bigcup_{x\in X} F(x)$ es un subconjunto compacto de Y.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de $\bigcup_{x\in X} F(x)$, en particular $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de $F(x)$, para cada $x \in X$. Por hipótesis cada $F(x)$ es compacto, por lo que existe $\mathcal{C}_x$ subcubierta abierta finita de $F(x)$.

Sea $U_x = \bigcup \mathcal{C}_x$ la unión de los elementos de $\mathcal{C}_x$. Notemos que U_x es un abierto en Y y $F(x) \subset U_x$ para cada $x \in X$. Como F es *scs* existe un abierto $V_x \subset X$ tal que $x \in V_x$ y $F(z) \subset U_x$ para todo $z \in V_x$.

Notemos que $\mathcal{C}^* = \{V_x : \quad x \in X\}$ es cubierta abierta de X, como X es compacto existe $\mathcal{C}^{**} = \{V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_n}\}$ subcubierta abierta finita de X. Observamos que para todo $z \in V_{x_i}$, $F(z) \subset U_{x_i}$ con $i \in \{1, ..., n\}$.

Afirmación: El conjunto $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\}$ es una cubierta abierta de $\bigcup_{x\in X} F(x)$.

Prueba de la afirmación: Sea $y \in \bigcup_{x\in X} F(x)$, entonces $y \in F(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Como $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_n}$ es una cubierta de X, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_0 \in V_{x_j}$, lo que implica que $F(x_0) \subset U_{x_j}$, por lo tanto $y \in U_{x_j}$.

Por lo que concluimos que $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$ cubre a $\bigcup_{x\in X} F(x)$. Por último, como cada U_{x_i} es unión finita de elementos de $\mathcal{C}$, se sigue que existe una subcubierta abierta finita de $\mathcal{C}$ para $\bigcup_{x\in X} F(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{x\in X} F(x)$ es compacto. $\square$

Definición 2.9. *Sean X, Y espacios métricos compactos y $F : X \to 2^Y$ una función. Definimos la gráfica de F como el conjunto $\mathcal{L} = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$.*

Lema 2.10. *Sean X, Y espacios métricos compactos, $F : X \to 2^Y$ una función y $\mathcal{L} = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$. Entonces F es scs si y sólo si $\mathcal{L}$ es cerrado en $X \times Y$, donde $X \times Y$ tiene la topología producto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea F una función semicontinua superiomente. Demostremos que $(X \times Y) \setminus \mathcal{L}$ es abierto.

Sea $(x, y) \in (X \times Y) \setminus \mathcal{L}$, por la definición de F, $y \notin F(x)$. Al ser Y un espacio métrico, es un espacio *regular*, entonces existen dos abiertos ajenos V_1, V_2 subconjuntos de Y tales que $y \in V_1$ y $F(x) \subset V_2$. Como F es *scs*, existe W abierto de X tal que $x \in W$ y $F(W) \subset V_2$. Entonces para cada $z \in W$, $F(z) \cap V_1 = \emptyset$. Por lo tanto, $(x, y) \in W \times V_1 \subset (X \times Y) \setminus \mathcal{L}$ con $W \times V_1$ abierto.

Lo que implica que $(X \times Y) \setminus \mathcal{L}$ es abierto, por lo que $\mathcal{L}$ es cerrado.

($\Leftarrow$) Supongamos que F no es *scs*. Esto significa que existen $x \in X$ y un abierto U de Y, con $F(x) \subset U$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen puntos $x_n \in X$ con $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ y $F(x_n) \cap (Y \setminus U) \neq \emptyset$. Construyamos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \in F(x_n) \cap (Y \setminus U)$. Como Y es compacto podemos suponer que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y.

Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (Y \setminus U)$, $y \in Y \setminus U$. Dado que $\mathcal{L}$ es cerrado en $X \times Y$ y $x = lim x_n$ entonces $y \in F(x)$. De donde, $y \in F(x) \cap (Y \setminus U)$, pero $F(x) \subset U$, lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, F es *scs*. □

Lema 2.11. *Sean X y Y espacios métricos, compactos no vacíos. Sea $\{F_n : X \to 2^Y : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de funciones scs tal que $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ para toda $x \in X$ y para cada $n = 1, 2, ...$ Definamos $G : X \to Y$ de la siguiente manera:*

$$G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x).$$

Entonces:

1) $G : X \to 2^Y$, está bien definida y es scs.

2) Si $Y = \bigcup_{x\in X} F_n(x)$ *para cada* $n = 1, 2, ...$ *entonces* $Y = \bigcup_{x\in X} G(x)$.

Demostración. Veamos que G está bien definida. Por hipótesis, $F_n(x)$ es un conjunto cerrado no vacío y $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$, por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n} F_n(x) \neq \emptyset$. Como Y es compacto, por la Proposición 1.28, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x) \neq \emptyset$, por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ es cerrado y no vacío para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto G está bien definida.

Ahora veamos que G es *scs*. Sean $p \in X$ y $U \subset Y$ abierto tal que $G(p) \subset U$. Como Y es compacto y dado que $G(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(p)$ y $F_{n+1}(p) \subset F_n(p)$, por la Proposición 1.52 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $G(p) \subset F_N(p) \subset U$. Por hipótesis F_N es *scs*, entonces existe V_p abierto de X que contiene a p tal que $F_N(x) \subset U$ para cualquier $x \in V_p$. Como $F_{k+1}(p) \subset F_k(p)$, $F_k(x) \subset U$ para cualquier $x \in V_p$ y para $k \geq N$. Por otro lado, $\bigcap_{k\geq N} F_k(x) \subset F_N(x) \subset U$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_k(x) \subset \bigcap_{k\geq N} F_k(x)$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_k(x) = G(x)$ para cualquier $x \in V_p$. Por lo tanto, V_p es un abierto de X tal que $G(x) \subset U$ para cualquier $x \in V_p$, por lo tanto G es *scs*.

Para probar el segundo inciso, tomemos $q \in Y$ fija. Como $Y = \bigcup_{x\in X} F_n(x)$, $n = 1, 2, ...$, existe $x_n \in X$ tal que $q \in F_n(x_n)$. Por la compacidad de X, existe una subsucesión $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X$. Bastará mostrar que $q \in G(p)$.

Procedamos por contradicción, supongamos que $q \notin G(p)$. Sea $U = Y \setminus \{q\}$, entonces $G(p) \subset U$ y, además, U es abierto en Y. De esta manera, por la Proposición 1.52, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N(p) \subset U$. Ahora, por hipótesis F_N es *scs* en p, así que por definición, existe un conjunto V abierto de X tal que $p \in V$ y $F_N(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

Como $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p \in V$, existe $k = n(i)$ para alguna i tal que $k \geq N$ y $x_k \in V$. Entonces $F_N(x_k) \subset U$. Por otra parte, como $k \geq N$, $F_k(x_k) \subset F_N(x_k)$. De esta manera, como $q \in F_k(x_k)$, $q \in F_N(x_k)$, pero como $F_N(x_k) \subset U$, $q \in U$. Lo que nos lleva a una contradicción, ya que $U = Y \setminus \{q\}$. Por lo tanto, $q \in G(p)$. □

2.2. Teorema de la función general

El siguiente es el Teorema de la función general, el cual establece la existencia de una función continua y supreyactiva entre dos espacios topológicos compactos.

Teorema 2.12. ***(Teorema de la Función General)*** *Sean X y Y espacios métricos, compactos no vacíos. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

1) $F_n : X \to 2^Y$ es scs para cada $n = 1, 2, \ldots.$

2) $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ para cada $x \in X$ y cada $n = 1, 2, \ldots.$

3) $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$ para cada $n = 1, 2, \ldots.$

4) $lim_{n\to\infty} diam[F_n(x)] = 0$ para cada $x \in X$.

Entonces la función $f : X \to Y$ definida por: $f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ es continua y suprayectiva.

Demostración. Sea $f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ para todo $x \in X$.

Primero veamos que $f : X \to Y$ está bien definida, es decir que $f(x) \neq \emptyset$ y $f(x) \in Y$.

Por hipótesis $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ para todo $x \in X$ y cada $n = 1, 2, \ldots$, entonces por el Lema 2.11, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(x) \neq \emptyset$.

Como $f(x) \neq \emptyset$ y el diámetro de $F_n(x)$ converge a 0, se sigue que $f(x)$ es un sólo elemento. Por último como $F_n(x) \subset Y$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, se sigue que $f(x) \in Y$.

Por el Lema 2.11, $f : X \to 2^Y$ es *scs*, lo que implica que $f : X \to Y$ es continua. Se sigue de la definición de $f(x)$ y del inciso 2) del Lema 2.11 que f es suprayectiva. □

Capítulo 3

Teorema de Hahn Mazurkiewicz

Iniciaremos este capítulo dando las bases de lo que es la *Propiedad* S, así como todas las características que consideramos pertinentes de las *cadenas débiles*. De esta manera concluiremos el capítulo demostrando el *Teorema de Hahn Mazurkiewicz*.

3.1. Propiedad S

En esta sección definiremos la *propiedad* S que, en espacios métricos, implica conexidad local.

Definición 3.1. *Sea* X *espacio métrico. Un subespacio no vacío* Y *de* X *tiene la propiedad* S*, si para cualquier* $\epsilon > 0$*, existen* $n \in \mathbb{N}$ *y subconjuntos conexos* $A_1, ..., A_n$ *de* Y *tales que* $Y = A_1 \cup ... \cup A_n$ *y* $diam(A_i) < \epsilon$ *para toda* $i \in \{1, ..., n\}$.

Proposición 3.2. *Sea* X *un espacio métrico y* $A, B \subset X$ *no vacíos tales que ambos tienen la propiedad* S*. Entonces* $A \cup B$ *tiene la propiedad* S*.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis A tiene la propiedad S, entonces existen $n_1 \in \mathbb{N}$ y subconjuntos conexos $A_1, ..., A_{n_1}$ de A tales que $A = A_1 \cup ... \cup A_{n_1}$ y $diam(A_i) < \epsilon$, para toda $i \in \{1, ..., n_1\}$.

Por otra parte, B también tiene la propiedad S, por lo que existen $n_2 \in \mathbb{N}$ y subconjuntos conexos $B_1, ..., Bn_2$ de B tales que $B = B_1 \cup ... \cup B_{n_2}$ y $diam(B_i) < \epsilon$ para toda $i \in \{1, ..., n_2\}$.

Entonces

$$A \cup B = (A_1 \cup ... \cup A_{n_1}) \cup (B_1 \cup ... \cup B_{n_2}) = A_1 \cup ... \cup A_{n_1} \cup B_1 \cup ... \cup B_{n_2}$$

que es la unión de una cantidad finita de subconjuntos conexos de X y el diámetro de cada uno de estos es menor que ϵ. De esta manera, $A \cup B$ tiene la propiedad S.

$\square$

Teorema 3.3. *Sea X es un espacio métrico que tiene la propiedad S. Entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Por el Teorema 1.44, bastará mostrar que X es conexo en pequeño en p, para todo $p \in X$.

Sea $U \subset X$ abierto, tal que $p \in U$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $p \in B_\epsilon(p) \subset U$. Como X tiene la propiedad S, existen $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos conexos de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ y $diam(A_i) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Además, como $p \in X$, $p \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, por lo tanto existe k tal que $p \in A_k$.

Consideremos $K = \bigcup\{A_i : \quad p \in cl(A_i)\}$. Sea A_k tal que $p \in cl(A_k)$. Veremos que $A_j \cup A_k$ es conexo, para todo A_j tal que $p \in cl(A_j)$. Tendremos dos casos.

Caso 1) Si $A_j \cap A_k \neq \emptyset$, se sigue que $A_j \cup A_k$ es conexo.

Caso 2) Si $A_j \cap A_k = \emptyset$. Supongamos que $A_j \cup A_k$ es disconexo, es decir $A_j \cup A_k = U \cup V$ donde U y V son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A_j \subset U$, lo que implica que $A_k \subset V$. Como $p \in A_k \subset V$, $p \in V$. Dado que $p \in cl(A_j)$, se sigue que $A_j \cap V \neq \emptyset$. Por lo que $U \cap V \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A_j \cup A_k$ es conexo.

Ahora, como A_j fue tomada de manera arbitraria, tenemos que $A_k \cup A_j$ es conexo con $p \in cl(A_j)$. De esta manera, por el teorema 1.35 se sigue que K es conexo.

Tomemos $q, q' \in K$. Como $q \in K$, $q \in A_i$ y $p \in cl(A_i)$, se tiene que $d(q, p) \leq \frac{\epsilon}{2}$. De forma similar para q', como $q' \in K$, entonces $q' \in A_j$, y en consecuencia $d(p,q') \leq \frac{\epsilon}{2}$. Así, $d(q,p) + d(p,q') \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto, $diam(k) \leq \epsilon$, concluyendo que $K \subset B_\epsilon(p)$.

Sólo nos falta ver que $p \in int(K)$. Si $p \in Cl(A_i)$ para toda $i \in \{1,2,...,n\}$ entonces $K = X$. Supongamos que $p \notin Cl(A_{k_1}) \cup ... \cup Cl(A_{k_j})$ y sea $r = \text{mín}\{d(p, Cl(A_{k_s}) : s = 1,2,...,j\}$. Claramente $r > 0$ y $B_r(p) \subset K$, lo que demuestra que $p \in int(K)$ con K conexo.

Entonces como p es un punto arbitrario, concluimos que X es conexo en pequeño en p. Por lo tanto, X es localmente conexo. □

Teorema 3.4. *Sea X un espacio métrico y compacto, entonces X es un espacio localmente conexo si y sólo si X tiene la propiedad S.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como X es un espacio localmente conexo, X es localmente conexo puntualmente, así, dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$ podemos encontrar V_x abierto conexo tal que $x \in V_x \subset B_\epsilon(x)$. Por lo tanto, $diam(V_x) < \epsilon$.

Observamos que $\bigcup V_x$ es una cubierta abierta de X, así que por la compacidad de X, puedo encontrar una subcubierta abierta finita $V_{x_1}, ..., V_{x_k}$ tal que $X = V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_k}$, donde V_{x_i} es conexo para $i \in \{1, ..., k\}$.

De esta manera, encontramos una familia finita de subconjuntos conexos tales que su unión es igual a X y además $diam(V_{x_i}) < \epsilon$ para toda $i \in \{1, ..., k\}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad S.

($\Leftarrow$) El regreso de este teorema es consecuencia del Teorema 3.3. □

Veamos un ejemplo donde el regreso del Teorema 3.3 no es válido cuando X no es compacto.

Ejemplo 3.5. $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ *no tiene la propiedad S.*

$\mathbb{R}$ es localmente conexo, ya que para todo punto $p \in \mathbb{R}$ y para cualquier $\epsilon > 0$ el conjunto $I = (p+\epsilon, p-\epsilon)$ es un abierto y conexo tal que $p \in I$. Por otro lado, no existe una familia finita de subconjuntos conexos $I_1, ..., I_n \subset \mathbb{R}$ y con diámetro pequeño tal que $\mathbb{R} = I_1 \cup ... \cup I_n$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad S.

Proposición 3.6. *Sean Y un subespacio no vacío de un espacio métrico X y $Z \subset X$ tal que $Y \subset Z \subset cl(Y)$. Entonces si Y tiene la propiedad S, también Z tiene la propiedad S.*

Demostración. Por hipótesis Y tiene la propiedad S, por lo que para cualquier $\epsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y subconjuntos conexos $A_1, ..., A_n$ de Y tales que:

$$Y = A_1 \cup ... \cup A_n.$$

Aplicando cerradura de ambos lados obtenemos:

$$cl(Y) = cl(A_1 \cup ... \cup A_n) = cl(A_1) \cup ... \cup cl(A_n).$$

Como cada A_i es conexo, observamos que $A_i \subset cl(A_i) \cap Z \subset cl(A_i)$, así por la Proposición 1.33, $cl(A_i) \cap Z$ es conexo.

Por otro lado,

$$\text{diám}(cl(A_i) \cap Z) \leq \text{diám}(cl(A_i)) = \text{diám}(A_i) < \epsilon.$$

Por lo que sólo falta probar que la unión de todos los $cl(A_i) \cap Z$ es igual a Z. Observamos que

$$(cl(A_1) \cap Z) \cup ...(cl(A_n) \cap Z) = (cl(A_1) \cup ... \cup cl(A_n)) \cap Z = cl(Y) \cap Z = Z.$$

Por lo tanto, Z tiene la propiedad S. □

Definición 3.7. *Sean X un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Una $S(\epsilon)$-*cadena *es una colección finita $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ que satisface las siguientes condiciones:*

a) $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ *para cada* $i \in \{1, ..., n-1\}$.

b) A_i *es conexo para cada* $i \in \{1, ..., n\}$.

c) *diám*$(A_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$ *para cada* $i \in \{1, ..., n\}$.

Sea $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ una $S(\epsilon)$-cadena. Llamaremos *eslabones* a los elementos de $\mathcal{A}$. Si $p \in A_1$ y $q \in A_n$, decimos que $\mathcal{A}$ es una $S(\epsilon)$-cadena de p a q. Si $A \subset X$, definimos $S(A, \epsilon)$, como:

$S(A,\epsilon) = \{q \in X$: existe una $S(\epsilon)$-cadena de algún punto de A a $q\}$.

Observación: $A \subset S(A,\epsilon)$. Sea $a \in A$. Tomemos $A_1 = \{a\}$ la cual es una $S(\epsilon)$-cadena de a a a, es decir $a \in S(A,\epsilon)$. Por lo tanto, $A \subset S(A,\epsilon)$.

Proposición 3.8. *Dado un espacio métrico X con la propiedad S, entonces para cada subconjunto no vacío A de X y cualquier $\epsilon > 0$, el conjunto $S(A,\epsilon)$ tiene la propiedad S.*

Demostración. Fijemos $\delta > 0$. Probaremos que hay una cantidad finita de subconjuntos conexos $B_1, ..., B_n$ de $S(A,\epsilon)$, con $diam(B_i) < \delta$ para cada $i = \{1, ..., n\}$, tales que $S(A,\epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Primero elijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que:

1) $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}$.

Por otro lado, definimos:

$$K = \{y \in S(A,\delta) : \text{hay una } S(\epsilon)\text{-cadena con a lo más } k \text{ eslabones de algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

Como X tiene la propiedad S, hay una cantidad finita de subconjuntos conexos de X con diámetro menor que $\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ cuya unión es X. Denotemos como $E_1, ..., E_m$ a los miembros de esta cubierta.

Veamos que $K \neq \emptyset$. De la observación previa a esta proposición, se sigue que $A \subset K$, entonces $K \neq \emptyset$ ya que por hipótesis $A \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe al menos un subconjunto conexo E_j que intersecta a K.

Sean $E_1, ..., E_m$ los eslabones que intersectan a K, las siguientes condiciones se cumplen por construcción.

2) $K \cap E_i \neq \emptyset$ para cada $i = \{1, ..., m\}$.

3) $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} E_i$.

4) Para cada i, E_i es conexo.

5) Para cada i, diám$(E_i) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$.

Probaremos que $E_i \subset S(A,\epsilon)$ para cada $i \in \{1,...,m\}$. Como $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_m$ existe una $S(\epsilon)$-cadena con a lo más k eslabones que une a un punto de A con algún punto de K. Sea $b \in E_i \cap K$. Tomemos a $z \in E_i$ tal que $z \notin K$. Como E_i es conexo y además tiene diámetro menor a $\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$, entonces diám$(E_i) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} < \frac{\epsilon}{2^k}$. Lo que implica que E_i es eslabón de una $S(\epsilon)$-cadena y que $z \in S(A,\epsilon)$. En la *Figura 3.1* podemos observar una representación gráfica en la que $E_i \subset S(A,\epsilon)$.

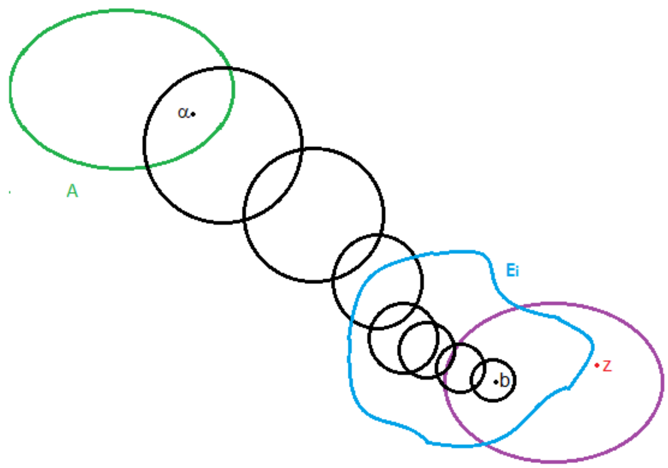


Figura 3.1: $E_i \subset S(A,\epsilon)$.

Para cada i, con $1 \leq i \leq n$, denotemos como $\mathcal{B}_i$ a la colección de conjuntos M que satisfacen lo siguiente:

a) $M \subset S(A,\epsilon)$.

b) $M \cap E_i \neq \emptyset$.

c) M es conexo.

d) diám$(M) < \frac{\delta}{4}$.

Denotemos $B_i = \bigcup \mathcal{B}_i$ para cada $i \in \{1,...,n\}$.
Probaremos que $E_i \subset B_i$.

a) Por lo probado anteriormente, sabemos que $E_i \subset S(A,\epsilon)$.

b) Se satisface trivialmente ya que $E_i \cap E_i \neq \emptyset$, salvo que $E_i = \emptyset$ lo cual ya probamos que no sucede.

c) Por ser parte de la cubierta con subconjuntos conexos de X.

d) Notemos que $\frac{\epsilon}{2^{k+1}} < \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}$, por lo tanto diám$(E_i) < \frac{\epsilon}{4}$.

Para terminar, probemos que $B_1, ..., B_n$ son conexos, con diam$(B_i) < \delta$ y además que $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S(A, \epsilon)$. Concluyendo así que $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S.

Ya que $B_i = \bigcup \mathcal{B}_i$, donde cada $\mathcal{B}_i$ es la colección de subconjuntos M que son conexos y cada M intersecta a E_i, por el Teorema 1.35 $\bigcup \mathcal{B}_i$ es conexo. Por lo tanto, B_i es conexo para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

Ahora veamos que diám$(B_i) < \delta$ para toda i. Tomemos $x, y \in B_i$ y sean M y M' elementos de B_i tales que $x \in M$ y $y \in M'$. Por hipótesis $M \cap E_i \neq \emptyset$ y $M' \cap E_i \neq \emptyset$. De esta manera, si $a \in M \cap E_i$, esto implica que $d(a, x) < \frac{\delta}{4}$. De igual forma para $b \in M' \cap E_i$, $d(b, y) < \frac{\delta}{4}$. De lo anterior $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \frac{3\delta}{4} < \delta$. Por lo tanto, diám$(B_i) < \delta$. Como en la *Figura 3.2*.

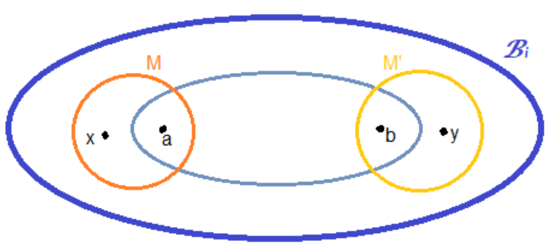


Figura 3.2: diám$(B_i) < \delta$.

Por último probaremos que $S(A,\epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Es claro que $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset S(A,\epsilon)$, ya que $B_i = \bigcup \mathcal{B}_{\ i}$ y $\mathcal{B}_{\ i}$ es la colección de conjuntos M que satisfacen que $M \subset S(A,\epsilon)$, lo que implica $\bigcup \mathcal{B}_{\ i} \subset S(A,\epsilon)$. Por lo que $B_i \subset S(A,\epsilon)$ para cada $i \in \{1,...,n\}$. Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset S(A,\epsilon)$.

Para mostrar la otra contención, sea $S(A,\epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Consideraremos dos casos.

Caso 1. Si $y \in K$. Por lo probado con anterioridad, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Por otro lado, para toda i, $E_i \subset B_i$, por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, lo que implica que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, y $y \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Caso 2. Si $y \notin K$. Como $y \in S(A,\epsilon)$, existe una $S(\epsilon)$-cadena $\mathcal{L} = \{L_1,...,L_n\}$ de algún punto de A a y. Como $y \notin K$, entonces $m > k$. Sea $H = \bigcup_{i=k}^{m} L_i$. Por la definición del conjunto K, notamos que $L_k \subset K$, por lo tanto por el inciso 2) mencionado al principio de la demostración $L_k \cap E_i \neq \emptyset$ para toda i.

Observamos que $H \subset B_i$ satisface lo siguiente:

- $H \subset S(A,\epsilon)$, lo cual se cumple por construcción.
- $H \cap E_i \neq \emptyset$, que se cumple por lo que se menciona en el párrafo anterior.
- H es conexo, ya que cada uno de los eslabones $L_k,...,L_m$ es conexo y además de intersectarse uno a uno.
- $\text{diám}(H) < \frac{\delta}{4}$. Esto último es fácil de verificar ya que $\sum_{i=k}^{m} \frac{\epsilon}{2^i} < \sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}$.

Después de esto, podemos garantizar que $H \subset B_i$. Por lo tanto, $S(A,\epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Entonces ya teniendo ambas contenciones, hemos encontrado una cantidad finita de subconjuntos de $S(A,\epsilon)$ conexos y con diámetro menor a δ tales que $S(A,\epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, lo cuál cumple con la definición de un conjunto que tiene la propiedad S. Por lo tanto, $S(A,\epsilon)$ tiene la propiedad S. $\square$

Lema 3.9. *Sean X un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X y $\epsilon > 0$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1) *diám*$(S(A,\epsilon)) \leq diam(A) + 2\epsilon$.

2) *Si* A *es conexo, entonces* $S(A,\epsilon)$ *es conexo.*

3) *Si* X *tiene la propiedad S, entonces* $S(A,\epsilon)$ *es un subconjunto abierto* X.

Demostración. Comencemos probando 1). Primero será necesario probar que toda $S(\epsilon)$-cadena tiene un diámetro menor que ϵ.

Por definición de $S(\epsilon)$-cadena tenemos una colección finita de subconjuntos conexos de X, $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ tales que satisfacen:

i) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, ..., n$.

ii) L_i es conexo para todo $i = 1, ..., n$.

iii) diám$(L_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$ para todo $i = 1, ..., n$.

Por *iii*), diám$(L_1) < \frac{\epsilon}{2}$, diám$(L_2) < \frac{\epsilon}{4}, ...,$ diám$(L_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$ y como además cada eslabón se intersecta con el siguiente, podemos asegurar que diám($S(\epsilon)$-cadena) $< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + ... + \frac{\epsilon}{2^n} < \epsilon$, lo que implica que diám($S(\epsilon)$-cadena) $< \epsilon$. Ahora, sean $y, y' \in S(A,\epsilon)$ tales que $d(y,y') \leq$ diám$(S(A,\epsilon))$. Por otra parte tomemos $x, x' \in A$ tales que $d(x,x') \leq$ diám(A). Como $y \in S(A,\epsilon)$ existe $S(\epsilon)$-cadena a la que llamaremos $\mathcal{L}_1$ de y a x tal que diám$(\mathcal{L}_1) < \epsilon$. Bajo el mismo argumento existe $S(\epsilon)$-cadena de y' a x', a la que llamaremos $\mathcal{L}_2$, de tal manera que diám$(\mathcal{L}_2) < \epsilon$.

Por otro lado, podemos observar que:

$$\begin{aligned} \text{diám}(S(A,\epsilon)) &\leq \text{diám}(\mathcal{L}_1) + \text{diám}(\mathcal{L}_2) + \text{diám}(A) \\ &< \epsilon + \epsilon + \text{diám}(A) = \text{diám}(A) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

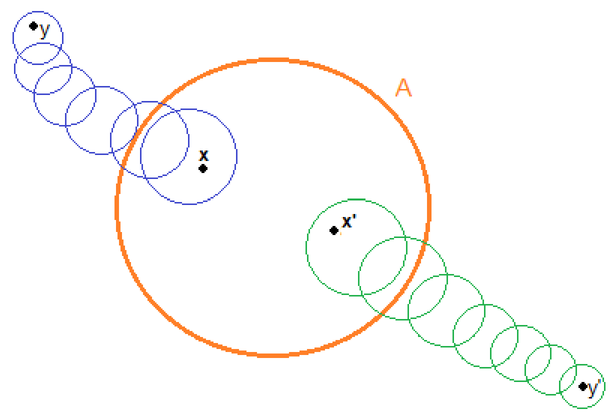


Figura 3.3: $\text{diám}(S(A,\epsilon) < \text{diám}(A) + 2\epsilon$.

Probando así 1).

Para probar 2). Supongamos que A es conexo y sea $\mathcal{L} = \{L : \quad S(\epsilon)-$ cadena $\;L \cap A \neq \emptyset\}$. Para $L \in \mathcal{L}$, tenemos $L = \{L_1, ..., L_n\}$. Por otro lado $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ y como L_i es conexo, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es conexo. Dado que, $L_1 \cap A \neq \emptyset$, $A \cap \bigcup_{i=1}^{n} L_i \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.35, $A \cup \bigcup \mathcal{L}$ es conexo.

Por último, como $S(A,\epsilon) = A \cup \bigcup \mathcal{L}$ concluimos que $S(A,\epsilon)$ es conexo.

Continuemos con 3). Sea $y \in S(A,\epsilon)$, entonces existe $S(\epsilon)$-cadena, $\{L_1, ..., L_n\}$ de algún punto de A a y. Ya hemos probado anteriormente que si un espacio métrico X tiene la propiedad S, entonces X es localmente conexo, por lo tanto existe un subconjunto conexo abierto U de X, tal que $y \in U$ y, además, construyamos $\text{diám}(U) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Podemos notar que $U \cap L_n \neq \emptyset$, por lo tanto $\{L_1, ..., L_n, L_{n+1}\}$ es una $S(\epsilon)$-cadena que va de algún punto de A a cualquier punto de U. Así, para todo $x \in U$, $x \in S(A,\epsilon)$, lo que implica que $U \subset S(A,\epsilon)$. Por lo tanto, $S(A,\epsilon)$ es un abierto en X.

Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Teorema 3.10. *Si X es un espacio métrico que tiene la propiedad S, entonces para toda $\epsilon > 0$, X es la unión finita de conjuntos conexos, cada uno de los cuales tiene la propiedad S y su diámetro es menor a ϵ. Estos conjuntos pueden ser tomados abiertos o cerrados de X.*

Demostración. Por hipótesis X tiene la propiedad S, así que por definición podemos ver a $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, para alguna n finita, en donde cada A_i es conexo y, por conveniencia, tomemos diám$(A_i) < \frac{\epsilon}{3}$.

Por otra parte, si tomamos a los conjuntos $S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$ para todo $i = 1, ..., n$, por los incisos 2 y 3 del Lema 3.9, cada uno de estos conjuntos es abierto y conexo en X.

Ahora, como X tiene la propiedad S, por la Proposición 3.8, $S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$ tiene la propiedad S para cada $i = 1, ..., n$. Además, por el inciso 1 del Lema 3.9, diám$(S(A_i, \frac{\epsilon}{3})) <$ diám$(A_i) + 2(\frac{\epsilon}{3}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$.

Veamos que $X = \bigcup S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$. Previamente mostramos que $A_i \subset S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$, lo que implica que $\bigcup A_i \subset \bigcup S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$, por lo que $X \subset \bigcup S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$. Como cada $S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$ está contenido en X entonces $\bigcup S(A_i, \frac{\epsilon}{3}) \subset X$. Por lo tanto, $X = \bigcup S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$.

Procedamos a ver que sucede con los conjuntos cerrados. Por la Proposición 3.1, concluimos que si $S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$ tiene la propiedad S, entonces $cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$ tiene la propiedad S para todo $i = 1, ..., n$, donde $cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$ es un cerrado de X. Por otra parte, como también $S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$ es conexo, entonces $cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$ es conexo. Ahora, como el diámetro de un conjunto es igual al diámetro de su cerradura, entonces:

$$\text{diám}(S(A_i, \frac{\epsilon}{3})) = \text{diám}(cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))).$$

Por lo tanto, diám$(cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))) < \epsilon$.

Con todo lo anterior, sólo nos falta ver que $X = \bigcup cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$, pero esto se concluye ya que, $S(A_i, \frac{\epsilon}{3}) \subset cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$, lo que implica que $\bigcup S(A_i, \frac{\epsilon}{3}) \subset \bigcup cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$, en consecuencia $X \subset \bigcup cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$. Por otro lado, tenemos que $\bigcup cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3})) \subset X$, por lo tanto, $X = \bigcup cl(S(A_i, \frac{\epsilon}{3}))$.

De esta manera hemos visto que X se puede ver como la unión finita de conjuntos conexos con la propiedad S y con diámetro menor a ϵ, donde estos conjuntos pueden ser elegidos abiertos o cerrados. □

Teorema 3.11. *Sea X un continuo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de subcontinuos, de los cuales cada uno tiene diámetro menor que ϵ.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el Teorema 3.4 se sigue que X tiene la propiedad S y, por el Teorema 3.10, para todo $\epsilon > 0$, $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ con A_i conexo, cerrado y diám$(A_i) < \epsilon$ para toda $i = 1, ..., n$. Es decir A_i es un subcontinuo de X.

($\Leftarrow$) Por hipótesis X es la unión finita de subcontinuos con diámetro menor a ϵ, es decir, $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ con diám$(C_i) < \epsilon$ para cada $i = 1, ..., n$. Ahora, como cada C_i es un subcontinuo de X, tenemos dos cosas:

1) $C_i \subset X$,

2) C_i es conexo.

Por lo tanto, X tiene la propiedad S. Volviendo a aplicar el Teorema 3.4, podemos concluir que X es localmente conexo. □

Teorema 3.12. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces para toda $\epsilon > 0$, X es la unión finita de continuos localmente conexos cuyo diámetro es menor que ϵ.*

Demostración. Como X es un continuo localmente conexo, utilizando de nuevo el Teorema 3.4, X tiene la propiedad S. Por lo que es posible ver a X, como $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ donde,

- A_i es conexo para cada $i = 1, ..., n$.
- A_i tiene la propiedad S para cada $i = 1, ..., n$.
- diám$(A_i) < \epsilon$ para cada $i = 1, ..., n$.
- A_i es cerrado en X para cada $i = 1, ..., n$.

Entonces como cada A_i es cerrado en X, A_i es compacto para toda $i = 1, ..., n$. Por otro lado, ya que $A_i \subset X$ y X es métrico entonces cada A_i es métrico. Por lo tanto, A_i es continuo para cada $i = 1, ..., n$. Además, por la Proposición , cada A_i tiene la propiedad S, entonces cada A_i es localmente conexo. Concluyendo así que X es la unión finita de continuos localmente conexos cuyo diámetro es menor que ϵ. □

Definición 3.13. *Una* cadena débil *es una colección finita* $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ *de conjuntos no vacíos tales que* $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ *para cada* $i = 1, ..., n-1$. *Si* $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ *una cadena, entonces decimos que* $\mathcal{L}$ *es una* cadena débil de L_1 a L_n*; y si* $x \in L_1$ *y* $y \in L_n$*, decimos que* $\mathcal{L}$ *es una* cadena débil de x a y. *A cada* $L_i \in \mathcal{L}$ *le llamaremos eslabón de* $\mathcal{L}$.

Lema 3.14. *Si* $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_m\}$ *y* $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ *son cadenas débiles con* $C_1 = L_1$*, entonces hay una cadena débil* $\mathcal{P}$ *de* C_1 *a* L_n *tal que* $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$.

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_{2m+n}\}$ donde $P_i = C_i$ para $1 \leq i \leq n$, $P_{m+i} = C_{m-i+1}$ para $1 \leq i \leq m$ y $P_{2m+i} = L_i$ de $1 \leq i \leq n$. Entonces observamos que $\mathcal{P} = \{C_1, ..., C_m, P_{2m+1} = L_1, P_{2m+2} = L_2, ..., P_{2m+n} = L_n\}$, además como cada una es cadena débil, $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$. De forma análoga $P_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es la cadena débil que buscábamos tal que $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$. □

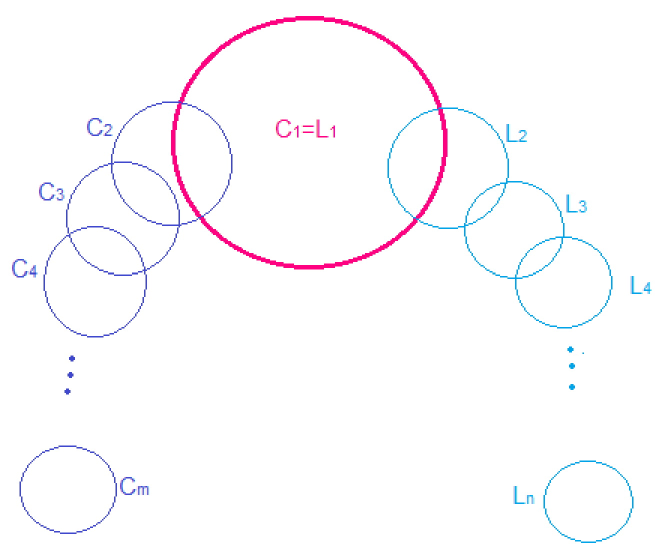


Figura 3.4: Construcción de la cadena débil $\mathcal{P}$.

Lema 3.15. *Sea* S *un espacio topológico conexo, y sean* $p, q \in S$. *Si* $\mathcal{C}$ *es una colección finita de subconjuntos cerrados de* S *que cubren a* S*, entonces la colección* $\mathcal{C}$ *puede ser indexada de tal forma que sea una cadena débil de* p *a* q.

Demostración. Como S está cubierto por la colección $\mathcal{C}$, se puede ver como $S = \bigcup \mathcal{C}$. Por lo tanto, existe $C_1 \in \mathcal{C}$ tal que $p \in C_1$. Por otro lado, definimos

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} : \text{existe una cadena débil de } C_1 \text{ a } C \text{ cuyos eslabones son elementos de } \mathcal{C}\}.$$

Primero mostraremos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$. Consideremos los conjuntos $A = \bigcup \mathcal{C}_0$ y $B = \bigcup (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0)$. Veamos que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que no es así, es decir, existe $x \in A \cap B$. Como $x \in A$, entonces x pertenece a una cadena débil cuyos eslabones pertenecen a $\mathcal{C}$ y sea G el eslabón al que pertenece x.

Por otro lado, $x \in B$, entonces $x \in H$ con H un elemento de la cubierta $\mathcal{C}$ para el cuál no existe una cadena débil a C_1 que contenga a H.

Sea $\{C_1, ..., G\}$ parte de la cadena débil que tiene a x. Ahora, definimos $\{C_1, ..., H\}$, como $x \in G \cap H$ entonces $\{C_1, ..., H\}$ es una cadena débil de H a C_1, esto nos lleva a una contradicción, ya que H no podía pertenecer a ningún cadena. Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$.

Ahora, como tanto A y B son la unión finita de subconjuntos cerrados de S, entonces ambos son cerrados en S. De esta manera, como $S = \bigcup \mathcal{C}$, entonces podemos ver a $S = A \cup B$, pero como $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y, además por hipótesis, $C_1 \neq \emptyset$, obtenemos que $A \neq \emptyset$. Como S es conexo, entonces $B = \emptyset$, por lo tanto $A = S$, es decir $\bigcup \mathcal{C}_0 = \bigcup \mathcal{C}$, lo que implica que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$, existe una cadena débil $\mathcal{L}$ de p a q. Si $\bigcup \mathcal{L} = S$ entonces ya acabamos. De lo contrario existe C^* tal que $C^* \notin \mathcal{L}$. Como $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ existe una cadena débil $\mathcal{L}_1$ de C_1 a C^*, por el Lema 3.14 existe una cadena débil $\mathcal{L}'$ formada e indexada por los elementos de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$. Observemos que $\mathcal{L}'$ tiene al menos un elemento más de $\mathcal{C}$. Si $\bigcup \mathcal{L}' = S$ ya acabamos, de lo contrario repetimos el Lema 3.14. Dado que sólo sobran una cantidad finita de elementos de la cubierta $\mathcal{C}$ este proceso termina, es decir, existe una cadena débil indexada de p a q con los elementos de $\mathcal{C}$. □

3.2. Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

En la última sección de este capítulo mostraremos dos importantes teoremas. El primero de ellos es el *Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*, que nos ayudará a mostrar el teorema que nos establece que si la función que va del *intervalo* $[0, 1]$ a un espacio de *Hausdorff* es continua y suprayectiva, entonces el espacio será localmente conexo. Continuemos.

Teorema 3.16. ***Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*** *Todo continuo localmente conexo es la imagen continua del intervalo cerrado* $[0, 1]$.

Demostración. Sea X un continuo localmente conexo. Por el Teorema 3.12, X es la unión finita de continuos localmente conexos con diámetro menor a 1. Sean $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ esta cubierta. Claramente A_i es cerrado para $i = 1, 2, ..., n$. Por el Lema 3.15 podemos ver a $\mathcal{A}$ como una cadena débil de subcontinuos localmente conexos que cubren a X. Dado que $\text{diám}(A_i) < 1$, $i = 1, 2, ..., n$, escribimos $[0, 1] = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$, donde $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ con $i = 1, 2, ..., n$ y $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$.

Definamos $F_1 : [0, 1] \to C(X)$ de la siguiente forma:

$$F_1(t) = \begin{cases} A_i & \text{si } t \in I_i \setminus \{t_1, ..., t_{n-1}\} \\ A_i \cup A_{i+1} & \text{si } t = t_i \text{ y } 1 \leq i \leq n-1 \\ A_1 & \text{si } t = 0 \\ A_n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Probaremos $F_1 : [0, 1] \to C(X)$ es semicontinua superiormente y que $X = \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$. Sea $t \in [0, 1]$, continuemos por casos:

Caso 1 Si $t \in I_i \setminus \{t_1, ..., t_{n-1}\}$, esto implica que $F_1(t) = A_i$. Sea U abierto en $C(X)$ tal que $A_i \subset U$. Tomemos a $V = (t_{i-1}, t_i)$ abierto en $[0, 1]$ tal que $t \in V$. Notamos que para todo $t' \in V$, como $t' \in I_i \setminus \{t_1, ..., t_{n-1}\}$, esto implica que $F_1(t') = A_i$. Por lo tanto, $F_1(t') \subset U$.

Caso 2 Si $t = t_i$ para $1 \leq i \leq n - 1$, entonces $F_1(t) = A_i \cup A_{i+1}$. Sea U abierto en $C(X)$ tal que $A_i \cup A_{i+1} \subset U$. Tomemos $V = (t_{i-1}, t_{i+1})$ abierto en $[0, 1]$ tal que $t \in V$. Tomemos $t' \in V$.

Caso 2.1 Si $t' < t$, entonces $t' \in [t_i - 1, t_i] = I_i$, por lo tanto $F_1(t') = A_i$, pero como $A_i \cup A_{i+1} \subset U$, $A_i \subset U$.

Caso 2.2 Si $t < t'$, entonces $t' \in [t_i, t_{i+1}] = I_{i+1}$, por lo tanto $F_1(t') = A_{i+1}$, pero como $A_i \cup A_{i+1} \subset U$, $A_{i+1} \subset U$.

Caso 3 Si $t = 0$, entonces $F_1(t) = A_1$. Sea U abierto en $C(X)$ tal que $A_1 \subset U$. Tomemos $V = [0, t_1)$ abierto en $[0, 1]$, por construcción $t = 0 \in V$. Sea $t' \in V$, como $t' < t_1$ entonces $t' \in I_1$, por lo tanto $F_1(t') = A_1$, lo que implica que $F_1(t') \subset U$.

Caso 4 Si $t = 1$, entonces $F_1(t) = A_n$. Sea U abierto en $C(X)$ tal que $A_n \subset U$. Tomemos $V = (t_{n-1}, 1]$ abierto en $[0,1]$, así que por construcción $t = 1 \in V$. Sea $t' \in V$, como $t_{n-1} < t' < 1$ entonces $t' \in I_n$, por lo tanto $F_1(t') = A_n$, lo que implica que $F_1(t') \subset U$.

De todos estos casos, ya hemos considerado cada punto en el intervalo $[0,1]$, por lo tanto podemos concluir que $F_1 : [0,1] \to C(X)$ es *scs* para todo punto en $[0,1]$.

Veamos ahora que $X = \bigcup_{t\in[0,1]} F_1(t)$. Por la primera parte de la demostración $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y debido a la manera en la que está definida la función F_1 tenemos que $\bigcup_{t\in[0,1]} F_1(t) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Por lo tanto, $X = \bigcup_{t\in[0,1]} F_1(t)$.

Sea $p_1 \in A_1$, $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ y $p_{n+1} \in A_n$. Si le aplicamos a cada A_i el mismo argumento que usamos al principio de la prueba, para cada i, $1 \leq i \leq n$, existe una cadena débil $\{A_1^i, ..., A_{m(i)}^i\}$ de subcontinuos localmente conexo de A_i de p_i a p_{i+1} que cubren a A_i tal que cada A_j^i es diámetro menor a $\epsilon = \frac{1}{2}$.

De forma similar a como lo hicimos anteriormente para cada i, $1 \leq i \leq n$, escribamos a I_i como la unión de $m(i)$ intevalos cerrados no degenerados $I_1^i, ..., I_{m(i)}^i$ de la forma $I_j^i = [t_{j-1}^i, t_j^i]$, $1 \leq j \leq m(i)$ donde $t_0^i = t_{i-1} < t_1^i < ... < t_{m(i)}^i = t_i$. Definamos la función $F_2 : [0,1] \to C(X)$ de la siguiente forma:

$$F_2(t) = \begin{cases} A_j^i & \text{si } t \in I_j^i \setminus \{t_0^i, ..., t_{m(i)}^i\} \\ A_j^i \cup A_{j+1}^i & \text{si } t = t_j^i \text{ y } 1 \leq j \leq m(i) \\ A_{m(i-1)}^{i-1} \cup A_1^i & \text{si } t = t_0^i \text{ y } 2 \leq i \leq n \\ A_1^1 & \text{si } t = 0 \\ A_{m(n)}^n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

De forma semejante a la que se hizo para F_1, obtenemos que $F_2 : [0,1] \to C(X)$ es *scs* y, además, $X = \bigcup_{t\in[0,1]} F_2(t)$.

Por otro lado, observemos que $F_2(t) \subset F_1(t)$ para cada $t \in [0,1]$. Por construcción $F_2(t) = A_i^j$ que es un subcontinuo de A_i, donde $A_i = F_1(t)$.

Continuado por este camino, podemos construir las funciones F_n para cada $n = 1, 2, ...$ de tal manera que satisfagan las cuatro condiciones necesarias para utilizar el Teorema 2.12, el Teorema de la Función General. Entonces de manera recursiva podemos construir una sucesión de funciones F_n, tales que:

1) $F_n : [0,1] \to C(X)$ es *scs* para cada $n = 1, 2, ...$

2) $F_{n+1}(t) \subset F_n(t)$ para cada $t \in [0,1]$ y $n = 1, 2, ...$

3) $X = \bigcup_{t\in[0,1]} F_n(t)$ para cada $n = 1, 2, ...$

Lo único que faltaría sería garantizar la cuarta condición.

4) $\lim_{n\to\infty} diam[F_n(t)] = 0$ para toda $t \in [0,1]$.

Pero esto lo podemos ver notando que para cada $n = 1, 2, ...$, el diámetro de $F_n(t)$ es menor o igual que $\frac{1}{2^{n-2}}$, pues cada $F_n(t)$ es a lo más la unión de dos subcontinuos de diámetro menor que $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Al satisfacerse estas cuatro condiciones es posible aplicar el Teorema 2.12, por lo que existe una función continua y suprayectiva del intervalo $[0,1]$ a X. En otras palabras, X es la imagen continua del intevalo $[0,1]$. □

Teorema 3.17. *Si $f : [0,1] \to X$ continua y suprayectiva, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Como X es un continuo, en particular X es un espacio de Hausdorff. Por otra parte, $[0,1]$ es un continuo localmente conexo, así que por el Lema 1.59 X es localmente conexo. □

Capítulo 4

Imágenes continuas del Conjunto de Cantor

En este pequeño capítulo definimos y construimos el *Conjunto de Cantor*, así como damos una breve introducción a las imágenes continuas de éste.

4.1. El conjunto de Cantor

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Diremos que $(c,d) \subset [a,b]$ es el intervalo $\frac{1}{3} - medio$ de $[a,b]$ si $a < c < d < b$ y $|c-a| = |d-c| = |b-d|$.

Definición 4.1. *El* Conjunto de Cantor *es el subespacio* $\mathcal{C}$ *del intervalo* $[0,1]$*, denotado como:*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Donde $C_1 = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *y si suponemos definido* C_i, C_{i+1} *estará definido como* $C_i \setminus \bigcup W_j$ *donde* W_j *es el intervalo* $\frac{1}{3} - medio$ *de cada componente de* C_i*.*

En la siguiente figura se puede observar como se va construyendo el Conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

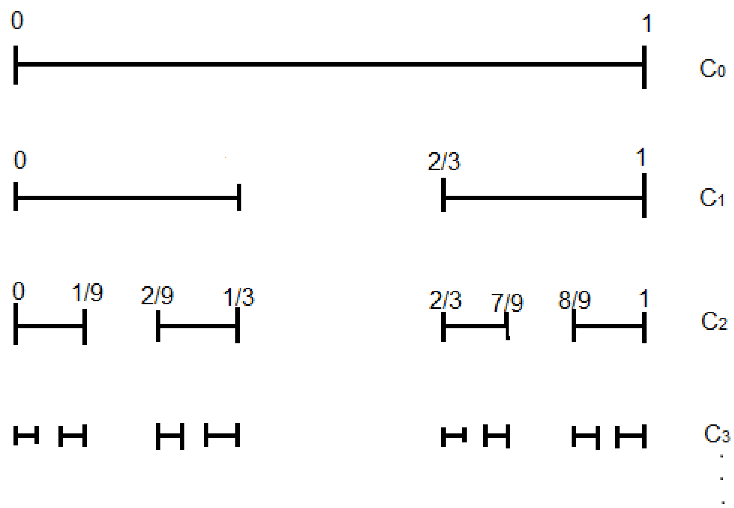


Figura 4.1: Construcción del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

4.2. Imágenes continuas del conjunto de Cantor

El Teorema que demostraremos en esta sección se aplica a todo espacio métrico y compacto. No es necesario que sea conexo o localmente conexo.

Lema 4.2. *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Entonces:*

1) Dado cualquier entero $n \geq 1$, $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, donde cada D_i es un conjunto abierto y compacto no vacío, y $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

2) Dado cualquier entero $m \geq 1$ y cualquier D_i de $\mathcal{C}$ en 1), $D_i = \bigcup_{j=1}^{m} D_{i,j}$ donde cada $D_{i,j}$ es un conjunto abierto y compacto no vacío, y $D_{i,j} \cap D_{i,k} = \emptyset$ para $j \neq k$.

Demostración. Supongamos que $n > 1$. De la intersección anidada usada para definir el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, encontraremos un número l lo suficientemente grande para que en la construcción dada previamente hayan al menos $n-1$ puntos $t_1, ..., t_{n-1}$ en el conjunto $[0,1] \setminus C_l$ tal que cualesquiera dos puntos, estos se encuentran en una componente distinta de $[0,1] \setminus C_l$ y además $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$.

Sea $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathcal{C}$ para cada $i = 1, ..., n$. Debemos verificar que los conjuntos $D_1, ..., D_n$ satisfacen lo siguiente:

i) Cada D_i es compacto para $i \in \{1, ..., n\}$.

ii) $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

iii) $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

iv) Los conjuntos D_i son abiertos en $\mathcal{C}$.

Para *i*) y *iv*). Cada D_i será compacto, ya que es la intersección de dos conjuntos compactos. Por otra parte, dada la elección de los puntos t_i se sigue que $[0,t_1] \cap \mathcal{C} = [0,t_1) \cap \mathcal{C}$, $[t_{n-1}, 1] \cap \mathcal{C} = [t_{n-1}, 1) \cap \mathcal{C}$ y $[t_{i-1}, t_i] \cap \mathcal{C} = (t_{i-1}, t_i) \cap \mathcal{C}$, para cada $i = 2, ..., n-1$, esto implica que cada D_i es un conjunto abierto en $\mathcal{C}$.

Para *ii*). Por otra parte, si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ entonces, sin pérdida de generalidad, si $t_i < t_j$, supongamos que $t_i = t_{j-1}$, pero esto no puede ocurrir porque $t_i \notin \mathcal{C}$. Por lo tanto, $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Para *iii*). Sólo falta ver que $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Dado que $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$, entonces $C = \bigcup_{i=1}^{n} ([t_{i-1}, t_i] \cap \mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. De esta manera queda demostrada la primera parte del lema.

Ahora, para la segunda parte se utiliza un argumento muy similar. Primero será necesario que veamos al intervalo $[t_{i-1}, t_i] = [t_{i-1}, t_{i,1}] \cup [t_{i,1}, t_{i,2}] \cup ... \cup [t_{i,m-1}, t_i]$. Sea $D_{i,j} = [t_{(i,j)-1}, t_{(i,j)}] \cap \mathcal{C}$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$. De nuevo, observamos que cada $D_{i,j}$ será compacto y abierto ya que es la intersección de dos conjuntos compactos y abiertos del intervalo $[0,1]$ con $\mathcal{C}$.

Bajo el mismo argumento que usamos en la primera parte, $D_{i,j} \cap D_{i,k} = \emptyset$ para $j \neq k$, ya que si $t_{i,j} < t_{i,k}$ y si $t_{i,j} = t_{i,k-1}$ tenemos que $t_{i,j} \notin \mathcal{C}$, garantizando así que la intersección es igual al vacío.

Por último, es necesario ver que $D_i = \bigcup_{j=1}^{m} D_{i,j}$. Sabemos que $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathcal{C}$. Intersectamos $([t_{i-1}, t_{i,1}] \cup [t_{i,1}, t_{i,2}] \cup ... \cup [t_{i,m-1}, t_i]) \cap \mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^{m} ([t_{(i,j)-1}, t_{i,j}] \cap \mathcal{C}) = D_i$. Terminando así la prueba. $\square$

Teorema 4.3. *Todo espacio métrico, compacto y no vacío Y, es la imagen continua del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.*

Demostración. Para la prueba de este teorema definiremos una sucesión de funciones $\{F_n : \mathcal{C} \to 2^Y\}$ como en el Teorema 2.12.

Empecemos con F_1, las demás las definiremos recursivamente.

Como Y es compacto, lo podemos ver como la unión finita de abiertos $U_1, ..., U_n$ con diámetro menor a 1. Ahora, los cerrados en espacios compactos son compactos, así que tomemos a $A_i = cl(U_i)$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces Y se puede ver como la unión finita de subconjuntos compactos no vacíos, $A_1, ..., A_n$, cuyo diámetro es menor que 1 para cada $i = 1, ..., n$.

Sean $D_1, D_2, ..., D_n$ conjuntos como los definimos en el Lema 4.2. Definamos la función $F_1 : \mathcal{C} \to 2^Y$ tal que

$$F_1(t) = A_i \text{ para cada } t \in D_i.$$

Observamos que F_1 está bien definida en $\mathcal{C}$ debido a que los conjuntos D_i son ajenos dos a dos y cubren a $\mathcal{C}$. Es necesario verificar que $F_1 : \mathcal{C} \to 2^Y$ satisface lo siguiente:

- $F_1 : \mathcal{C} \to 2^Y$ es semicontinua superiormente.
- $Y = \bigcup_{t\in\mathcal{C}} F_1(t)$.

Sean $t \in \mathcal{C}$ y U abierto en Y tal que $A_i = F_1(t) \subset U$. Tomemos V abierto en $\mathcal{C}$ tal que $V = D_i$ y $t \in D_i$. Sea $t' \in D_i$, por la forma en la que está definida la función, $F_1(t') = A_i$, lo que implica que $F_1(t') \subset U$ para todo $t \in D_i$. Con esto hemos mostrado que $F_1 : \mathcal{C} \to 2^Y$ es *scs*.

Por otra parte, como $F_1(t) = A_i$ para todo $t \in D_i$ entonces $\bigcup_{t\in\mathcal{C}} F_1(t) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y$, probando así el segundo punto. Para continuar con la demostración, es necesario ver que cada A_i con $1 \leq i \leq n$ es compacto, es decir, se puede cubrir con una cantidad finita de subconjuntos compactos no vacíos $A_{i,1}, ..., A_{i,m(i)}$ cuyo diámetro es menor a $\frac{1}{2}$ ($diam(A_{i,j}) < \frac{1}{2}$), pero como cada A_i es cerrado en Y, entonces A_i es compacto, para $i = 1, ..., n$ y, además, se puede ver como $A_i = \bigcup_{j=1}^{m(i)} A_{i,j}$. Ahora, para cada $i = 1, ..., n$ sea $D_{i,1}, ..., D_{i,m(i)}$ de la forma en las que fueron dados los conjuntos en el punto número 2 del Lema 4.2. Definamos la función $F_2 : \mathcal{C} \to 2^Y$ tal que:

$$F_2(t) = A_{i,j} \text{ si } t \in D_{i,j}.$$

Bajo el mismo argumento que utilizamos para F_1, tenemos que F_2 está bien definida, además de que podemos garantizar que F_2 es *scs* y $\bigcup_{t \in \mathcal{C}} F_2(t) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m(i)} A_{i,j} = Y$. Sólo nos faltaría ver que $F_2(t) \subset F_1(t)$ para todo $t \in \mathcal{C}$. Esto se cumple ya, que por construcción, cada $A_{i,j} \subset A_i$ para $j = 1, ..., m(i)$, donde $F_1(t) = A_i$ y $F_2(t) = A_{i,j}$.

Continuando este proceso podemos definir una sucesión de funciones $F_n : \mathcal{C} \to 2^Y$ para $n = 1, 2, ...$ de tal manera que satisfagan las condiciones para aplicar el Teorema 2.12. Sólo nos faltaría garantizar que $\lim_{n\to\infty} diam[F_n(t)] = 0$ para todo $t \in \mathcal{C}$. Esto se garantiza observando que para cada $n = 1, 2, ...$ el diámetro de $F_n(t)$ es menor o igual que $\frac{1}{2^{n-2}}$ ya que cada $F_n(t)$ es a lo más la unión de subconjuntos de diámetro menor que $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Aplicando el Teorema 2.12, existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \to Y$, es decir todo espacio métrico, compacto no vacío es la imagen continua del Conjunto de Cantor. $\square$

Capítulo 5

La Conjetura de Nikiel y el cuadrado lexicográfico

En la primera sección de este capítulo hablamos del resultado que inspiró este trabajo, *La conjetura de Nikiel*. La segunda sección está dedicada a estudiar el *cuadrado lexicográfico*, describimos algunos aspectos básicos de su topología y mostramos varias propiedades que son importantes para nuestro trabajo.

5.1. La conjetura de Nikiel

En el año 1986, J. Nikiel postula una serie de preguntas respecto a la imagen continua de espacios compactos y linealmente ordenados, una de éstas fue llamada la *Conjetura de Nikiel*. Muchos artículos se han escrito al respecto tratando de dar una respuesta a tal pregunta, ya sea positiva o negativa. En el año 2001, Mary Ellen Rudin publica el artículo en donde queda demostrada tal conjetura y la cuál concluye lo siguiente:

> *"Un espacio topológico X es la imagen continua de un espacio compacto y linealmente ordenado si y sólo si es compacto y monótonamente normal."*

Adaptando esta proposición a los continuos, el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz nos permite un primer acercamiento pues postula lo siguiente:

> *"Un espacio métrico es la imagen continua del intervalo* $[0, 1]$ *si y sólo si es localmente conexo."*

La pregunta natural sería, ¿qué sucede con los continuos que no son localmente conexos? Este caso está resuelto si se nos permite utilizar el siguiente teorema:

> *"Todo espacio no vacío métrico y compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor."*

5.2. El cuadrado lexicográfico $\mathbb{L}$

Denotaremos como $\mathbb{L}$, el *cuadrado lexicográfico*, al espacio topológico que se obtiene de dotar al producto cartesiano $[0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden generada por el orden total $\leq_l$ definido mediante:

$$(x_1, y_1) \leq_l (x_2, y_2) \text{ si y sólo si } x_1 < x_2 \text{ ó } x_1 = x_2 \text{ y } y_1 \leq y_2,$$

donde $\leq$ es el orden usual de lo números reales.

Describamos de forma detallada los básicos que podemos encontrar en $\mathbb{L}$.

Básicos de $\mathbb{L}$

1) Si $\overline{x} = (0,0)$, entonces los básicos que contienen a este punto tiene la forma $[(0,0),(a,b))$ con $0 < a \leq 1$ y $0 < b \leq 1$.

2) Si $\overline{x} = (1,1)$, entonces los básicos que contienen a este punto tiene la forma $((a,b),(1,1)]$ con $0 < a \leq 1$ y $0 < b < 1$.

3) Si $\overline{x} = (a,b)$, entonces tendremos dos opciones de básicos

    a) $((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ con $a_1 < a < a_2$.

    b) $((a,b_1),(a,b_2))$ con $b_1 < b < b_2$.

Ahora para nuestro propósito, ejemplificaremos visualmente a los básicos de $\mathbb{L}$.

- **Básicos** Los distintos tipos de abiertos básicos de $\mathbb{L}$ tienen la estructura que se muestra en la figura 5.1:

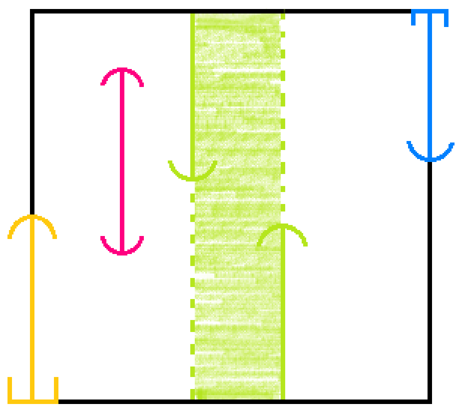


Figura 5.1: Distintos abiertos básicos del cuadrado lexicográfico.

Ahora, nos dedicaremos a demostrar diferentes propiedades que tiene este espacio.

Lema 5.1. *Para cada $x \in [0,1]$, denotamos al conjunto*

$$I_x = \{(x,y) \in \mathbb{L} : \quad y \in [0,1]\}.$$

Sea τ_x la topología que I_x hereda de $\mathbb{L}$. Entonces (I_x, τ_x) e $(I_x, usual)$ son homeomorfos.

Demostración. Sea $h : (I_x, usual) \to (I_x, \tau_x)$ dada por $h(x,y) = (x,y)$ con $x \in [0,1]$ fijo. Claramente, como h es la función identidad, notamos que es biyectiva.

Sea U abierto básico de τ_x, es decir $U = W \cap I_x$ donde W es un abierto de $\mathbb{L}$, entonces hay tres posibles casos:

Caso 1) Si $U = [(x,0),(x,a))$ con $a \in [0,1]$, entonces si $R = a$ se tiene que $V = B_R((x,0)) \cap I_x = U$, es decir $h^{-1}(U) = V$.

Caso 2) Si $U = ((x,a),(x,b))$ con $a,b \in [0,1]$, entonces si $R = \frac{b-a}{2}$ se tiene que $V = B_R((x,\frac{a+b}{2})) \cap I_x = U$. Por lo tanto, $h^{-1}(U) = V$.

Caso 3) Si $U = ((x,a),(x,1)]$ con $a \in [0,1]$, entonces $R = 1-a$ se tiene que $V = B_R((x,1)) \cap I_x = U$. Por lo tanto, $h^{-1}(U) = V$.

Por lo tanto h es continua.

Cabe notar que si $R > 0$, entonces $B_R((a,b)) \cap I_x$ sólo puede tener la forma de los tres conjuntos anteriores y, por tanto, serían abiertos en (I_x, τ_x). Observando así que h^{-1} es continua.

Por lo tanto, (I_x, τ_x) y $(I_x, usual)$ son homeomorfos. □

Proposición 5.2. *Dados dos puntos distintos de $\mathbb{L}$ siempre hay un tercero intermedio con el orden definido para $\mathbb{L}$.*

Demostración. Para probar esto, es necesario considerar dos casos.

Caso 1) Sean $\overline{x} = (a,b)$ y $\overline{y} = (a,c)$ con $b < c$.

Podemos observar que la primera coordenada es la misma en ambos puntos, entonces ambos puntos se encuentran en I_a. Por el Lema 5.1 tenemos que I_a es homeomorfo al intervalo $[0,1]$, entonces sabemos que existe $\beta \in [0,1]$ tal que $b < \beta < c$.

Por lo tanto, $\overline{z} = (a,\beta) \in \mathbb{L}$ es tal que $\overline{x} <_l \overline{z} <_l \overline{y}$.

Caso 2) Sean $\overline{x} = (a,b)$ y $\overline{y} = (c,d)$ con $a < c$.

Como $a,c \in [0,1]$ sabemos que se conserva el orden usual, entonces existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $a < \alpha < c$.

Por lo tanto, $\overline{z} = (\alpha,e) \in \mathbb{L}$ es tal que $\overline{x} <_l \overline{z} <_l \overline{y}$. Cabe mencionar que para este segundo caso no importa que valor tenga $\overline{z}$ en la segunda coordenada.

□

A continuación veremos que $\mathbb{L}$ es un espacio Hausdorff, compacto, conexo, localmente conexo, monótonamente normal y no es métrico.

Proposición 5.3. *El cuadrado lexicográfico $\mathbb{L}$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean $\overline{x}$ y $\overline{y}$ puntos distintos en $\mathbb{L}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\overline{x} <_l \overline{y}$. Por la Proposición 5.2 sabemos que existe $\overline{z} = (z_1, z_2)$ tal que $\overline{x} <_l \overline{z} <_l \overline{y}$.

Entonces tomaremos los siguientes abiertos:

$$U = [(0,0),(z_1,z_2)), V = ((z_1,z_2),(1,1)].$$

Notamos que U y V son ajenos en $\mathcal{L}$ tales que $\overline{x} \in U$ y $\overline{y} \in V$. Por lo tanto, dado que los puntos fueron tomados de forma arbitraria, podemos concluir que $\mathbb{L}$ es un espacio de Hausdorff. □

Proposición 5.4. *El cuadrado lexicográfico ($\mathbb{L}$) es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de $\mathbb{L}$. Es necesario demostrar que existe una subcubierta fina de $\mathcal{C}$ que cubre a $\mathbb{L}$. Sea

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{L} : [(0,0),(a,b)] \text{ está cubierto por una cantidad finita de elementos de } \mathcal{C}\}.$$

Observemos que $S \neq \emptyset$ dado que $(0,0) \in S$, dado que el intervalo $[(0,0),(0,0)]$ corresponde a un sólo punto y pertenece a algún elemento de la cubierta $\mathcal{C}$.

Denotemos por

$$\alpha = sup\{a \in [0,1] : (a,b) \in S \text{ para algún } \ b \in [0,1]\}.$$

En otras palabras es el supremo sobre la primera coordenada en el orden usual de los reales $\mathbb{R}$, de forma que $\alpha \geq 0$, más aún, mostraremos que $\alpha = 1$ posteriormente.

Afirmación 1: $(\alpha, 0) \in S$

Prueba Afirmación 1: Como $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta, existe $U \in \mathcal{C}$ con $(\alpha, 0) \in U$ y, por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(\alpha - \epsilon, 0) \times [0,1] \subset U$. Como

α es el supremo, existe $a \in [0,1]$ con $\alpha - \epsilon < a < \alpha$ y tal que $(a,b) \in S$, para algún $b \in [0,1]$.

Por otro lado, notamos que $[(0,0),(\alpha,0)] \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto $[(0,0),(\alpha,0)]$ está cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, es decir $(\alpha,0) \in S$.

Por Lema 5.1, I_α es homeomorfo al $[0,1]$ y por lo tanto es compacto. De esto, se sigue que $(\alpha,1)$ está cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$. Es decir, $(\alpha,1) \in S$.

Como $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de $\mathbb{L}$, existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $(\alpha,1) \in V$.

Afirmación 2: $\alpha = 1$

Prueba Afirmación 2: Supongamos que $\alpha < 1$. Existe $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ y $(\alpha, \alpha+\delta) \times [0,1] \subset V$.

Ahora, $[(0,0),(\alpha+\delta,1)] = [(0,0),(\alpha,1)] \cup [(\alpha,1),(\alpha+\delta,1)]$ y cada uno de estos conjuntos están contenidos en una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$. En otras palabras, previamente habíamos hecho la observación que $(\alpha,1) \in V$, lo que implica que:

$$[(0,0),(\alpha+\delta,1)] \subset [(0,0),(\alpha,1)] \cup [(\alpha,1),(\alpha+\delta,1)]$$

está contenido en una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$.

Por lo tanto, $(\alpha+\delta,1) \in S$, lo que es una contradicción por la definición de α. Por lo tanto, $\alpha = 1$, lo que implicaría que $(1,1) \in S$, es decir $[(0,0),(1,1)]$ está cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$. Concluyendo así que $\mathbb{L}$ es compacto. $\square$

Proposición 5.5. *El cuadrado lexicográfico* $\mathbb{L}$ *es conexo.*

Demostración. Por el Lema 5.1, para cada $x \in [0,1]$, el conjunto $I_x = \{(x,y) \in \mathbb{L} : y \in [0,1]\}$ es homeomorfo a $[0,1]$ y por lo tanto, es conexo.

Supongamos que A y B son dos abiertos no vacíos de $\mathbb{L}$ que satisfacen lo siguiente:

1) $\mathbb{L} = A \cup B$.

2) $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que el punto $(0,0) \in A$. Como I_0 es conexo, se sigue que $I_0 \subset A$.

Sea $W = \{z \in [0,1] : [(0,0),(z,1)] \subset A\}$. Como $I_0 \subset A$, $0 \in W$ por lo que $W \neq \emptyset$. Sea z_0 el supremo del conjunto W en $[0,1]$. Observemos que el punto $(z_0,0) \in cl(\bigcup_{y\in W} I_y)$, ya que para cualquier abierto U tal que $(z_0,0) \in U$, existe $z \in W \cap U$.

Por otro lado, como B es abierto, entonces $\mathbb{L} \setminus B$ es cerrado y $A = \mathbb{L} \setminus B$, por lo tanto A es cerrado. Entonces $(z_0,0) \in A$, esto significa que $I_{z_0} \subset A$, ya que I_{z_0} es conexo e $I_{z_0} \cap A \neq \emptyset$.

Ahora, como A es abierto, si $z_0 < 1$, debería existir un intervalo abierto $((z_0, 1-\epsilon),(z_0+\delta,\epsilon))$ tal que contiene al punto $(z_0,1)$ y está contenido en A. Esto nos lleva a una contradicción ya que esto significa que $z_0 + \frac{\delta}{2} \in W$, lo cual contradice que z_0 sea el supremo de W.

Por lo tanto, $z_0 = 1$. Nuevamente esto implica que $I_1 \subset A$. Es decir $B = \emptyset$, concluyendo así que $\mathbb{L}$ es conexo. $\square$

Como el lector puede notar, esta prueba puede generalizarse para cualquier intervalo, es decir, un intervalo de la forma $[(a,b),(c,d)]$ es conexo. Si $a = c$ el resultado se sigue del Lema 5.1; en caso de que $a < b$, definimos $W = \{z \in [a,c] : [(a,b),(z,1) \subset A\}$ y consideramos a z_0 como el supremo del conjunto W en $[a,c]$.

Proposición 5.6. *El cuadrado lexicográfico $\mathbb{L}$ es localmente conexo.*

Demostración. Sean $(x,y) \in \mathbb{L}$ un punto cualquiera y $U \subset \mathbb{L}$ abierto tal que $(x,y) \in U$.

Por como están definidos los abiertos en $\mathbb{L}$, existen $(a,b),(c,d) \in \mathbb{L}$ tales que $(x,y) \in ((a,b),(c,d)) \subset U$ y como mencionamos anteriormente $((a,b),(c,d))$ es conexo. $\square$

Proposición 5.7. *El Cuadrado Lexicográfico $\mathbb{L}$ no es métrico.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}$ es métrico, entonces por el Teorema 1.51 es *segundo* numerable, ya que $\mathbb{L}$ es compacto. Veamos que pasaría si esto se cumple.

Supongamos que $\mathbb{L}$ es *segundo* numerable. Sea $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}$ base numerable de $\mathbb{L}$. Tomemos $(a, \frac{1}{2}) \in \mathbb{L}$ y definimos $U_a = ((a, \frac{1}{3}),(a, \frac{2}{3}))$.

Observemos que:

1) U_a es abierto en $\mathbb{L}$ para cada $a \in [0,1]$.

2) Sea $a \neq a'$ entones $U_{a'} = ((a', \frac{1}{3}), (a', \frac{2}{3}))$. Notamos que $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$.

Como $\mathcal{B}$ es base, sabemos que existen B_a y $B_{a'}$ tales que $B_a \subset U_a$ y $B_{a'} \subset U_{a'}$.

Sin embargo como $[0,1]$ tiene una cantidad no numerable de puntos, existirán tantos U_a como puntos en el intervalo y en cada uno de éstos podremos encontrar un elemento de $\mathcal{B}$, lo que no lleva a una contradicción, ya que $\mathcal{B}$ tendría una cantidad no numerable de elementos. Por lo tanto, $\mathbb{L}$ no es *segundo* numerable, lo que implica que no puede ser métrico. $\square$

A continuación mostraremos que el cuadrado lexicográfico $\mathbb{L}$ es monótonamente normal.

Proposición 5.8. *El cuadrado lexicográfico* $\mathbb{L}$ *es monótonamente normal.*

Demostración. Sea $\overline{x} \in \mathbb{L}$, U abierto de $\mathbb{L}$ y C la componente de U tal que $\overline{x} \in C$. Definamos nuestra función $G(\overline{x}, U)$ de la siguiente manera:

- Si $\overline{x} = (0,0)$, entonces $C = [(0,0),(a,b))$. Definimos $G(\overline{x}, U) = [(0,0), (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}))$.
- Si $\overline{x} = (x,0)$ ó $\overline{x} = (x,1)$ y $C = ((a,b),(c,d))$. Definimos $G(\overline{x}, U) = ((\frac{a+x}{2}, \frac{b+1}{2}), (\frac{x+c}{2}, \frac{d}{2}))$.
- Si $\overline{x} = (x,y)$ y $C = ((a,b),(c,d))$, definimos $G(\overline{x}, U) = ((\frac{a+x}{2}, \frac{b+y}{2}), (\frac{x+c}{2}, \frac{y+d}{2}))$.
- Si $\overline{x} = (1,1)$ entonces $C = ((a,b),(1,1))]$. Definimos $G(\overline{x}, U) = ((\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}), (1,1)]$.

Para que sea monótonamente normal sabemos que es necesario que $G(\overline{x}, U)$ cumpla tres condiciones.

Primera condición: Para cada punto $\overline{x} \in \mathbb{L}$ y cada abierto $U \subset \mathbb{L}$ con $\overline{x} \in U$, se tiene que $\overline{x} \in G(\overline{x}, U) \subset U$.

Esto lo obtenemos por construcción de la función $G(\overline{x}, U)$, así $\overline{x} \in G(\overline{x}, U) \subset U$.

Segunda condición: Para U, U' abiertos de $\mathbb{L}$ tales que $\overline{x} \in U \subset U'$, se tiene que $G(\overline{x}, U) \subset G(\overline{x}, U')$.

Comencemos la prueba, sean U, U' abiertos de $\mathbb{L}$ tales que $\overline{x} \in U \subset U'$.

Si $\overline{x} = (0,0)$. Sean C, C' las componentes de U, U' respectivamente, tales que $\overline{x} \in C$ y $\overline{x} \in C'$. Como $U \subset U'$ entonces $C \subset C'$. Supongamos que $C = [(0,0),(a,b))$ y $C' = [(0,0),(c,d))$. Entonces $G(\overline{x},U) = [(0,0),(\frac{a}{2},\frac{b}{2}))$ y $G(\overline{x},U') = [(0,0),(\frac{c}{2},\frac{d}{2}))$ notamos que $(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) \leq (\frac{c}{2},\frac{d}{2})$.

Por lo tanto, $G(\overline{x},U) \subset G(\overline{x},U')$.

Si $\overline{x} = (x,0)$ ó $\overline{x} = (x,1)$. Sean C, C' las componentes de U, U' respectivamente, tales que $\overline{x} \in C$ y $\overline{x} \in C'$. Como $U \subset U'$ entonces $C \subset C'$. Supongamos que $C = ((a,b),(c,d))$ y $C' = ((a',b'),(c',d'))$. Entonces $G(\overline{x},U) = ((\frac{a+x}{2},\frac{b+1}{2}),(\frac{x+c}{2},\frac{d}{2}))$ y $G(\overline{x},U') = ((\frac{a'+x}{2},\frac{b'+1}{2}),(\frac{x+c'}{2},\frac{d'}{2}))$.

Como $(\frac{a'+x}{2},\frac{b'+1}{2}) \leq (\frac{a+x}{2},\frac{b+1}{2})$ y $(\frac{x+c}{2},\frac{d}{2}) \leq (\frac{x+c'}{2},\frac{d'}{2})$. Es posible concluir $G(\overline{x},U) \subset G(\overline{x},U')$.

Si $\overline{x} = (x,y)$. Sean C, C' las componentes de U, U' respectivamente, tales que $\overline{x} \in C$ y $\overline{x} \in C'$. Como $U \subset U'$ entonces $C \subset C'$. Supongamos que $C = ((a,b),(c,d))$ y $C' = ((a',b'),(c',d'))$. Entonces $G(\overline{x},U) = ((\frac{a+x}{2},\frac{b+y}{2}),(\frac{x+c}{2},\frac{y+d}{2}))$ y $G(\overline{x},U') = ((\frac{a'+x}{2},\frac{b'+y}{2}),(\frac{x+c'}{2},\frac{y+d'}{2}))$.

Observamos que se cumple $(\frac{a'+x}{2},\frac{b'+y}{2}) \leq \frac{a+x}{2},\frac{b+y}{2})$ y $(\frac{x+c}{2},\frac{y+d}{2}) \leq (\frac{x+c'}{2},\frac{y+d'}{2})$. Por lo tanto, $G(\overline{x},U) \subset G(\overline{x},U')$.

Si $\overline{x} = (1,1)$. Sean C, C' las componentes de U, U' respectivamente, tales que $\overline{x} \in C$ y $\overline{x} \in C'$. Como $U \subset U'$ entonces $C \subset C'$. Supongamos que $C = ((a,b),(1,1)]$ y $C' = ((c,d),(1,1)]$. Entonces $G(\overline{x},U) = ((\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}),(1,1)]$ y $G(\overline{x},U') = ((\frac{c+1}{2},\frac{d+1}{2}),(1,1)]$.

Notemos que $(\frac{c+1}{2},\frac{d+1}{2}) \leq (\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2})$. Por lo tanto, $G(\overline{x},U) \subset G(\overline{x},U')$.

De esta manera hemos demostrado que se cumple la segunda condición.

Tercera condición: Si $\overline{x}, \overline{u}$ son puntos distintos en $\mathbb{L}$, entonces $G(\overline{x}, \mathbb{L} \setminus \{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u}, \mathbb{L} \setminus \{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Empecemos la prueba, sean $\overline{x}, \overline{u}$ puntos distintos en $\mathbb{L}$, demostraremos que $G(\overline{x}, \mathbb{L} \setminus \{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u}, \mathbb{L} \setminus \{\overline{x}\}) = \emptyset$. Como tenemos diferentes tipos de puntos será necesario analizar diferentes casos.

Si $\overline{x} = (0,0)$, $\overline{u} = (u,v)$ con $0 \leq u \leq 1$, $0 < v < 1$.

Por lo que, $\mathbb{L} \setminus \{\overline{x}\} = ((0,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L} \setminus \{\overline{u}\} = [(0,0),(u,v)) \cup ((u,v),(1,1)]$. Así $C_1 = [(0,0),(u,v))$ es la componente de $\mathbb{L} \setminus \{\overline{u}\}$ que contiene a $\overline{x}$ y $C_2 = ((0,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L} \setminus \{\overline{x}\}$ que contiene a $\overline{u}$.

Por consiguiente, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = [(0,0),(\frac{u}{2},\frac{v}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{u}{2},\frac{v}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{v+1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (0,0)$ y $\overline{u} = (u,0)$ con $0 < u \leq 1$.

En este caso, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = ((0,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,0))\cup((u,0),(1,1)]$. Así, $C_1 = [(0,0),(u,0))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ que contiene a $\overline{x}$ y $C_2 = ((0,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ que contiene a $\overline{u}$.

Siendo así, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = [(0,0),(\frac{u}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (0,0)$, $\overline{u} = (u,1)$ con $0 \leq u < 1$.

Por lo que, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = ((0,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,1))\cup((u,1),(1,1)]$. Así, $C_1 = [(0,0),(u,1))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x} \in C_1$ y $C_2 = ((0,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u} \in C_2$.

Por consiguiente, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = [(0,0),(\frac{u}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (0,0)$, $\overline{u} = (1,1)$.

De esta manera, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = ((0,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(1,1))$. En este caso, no tiene sentido tomar las componentes ya que los abiertos son el total menos un punto extremo.

En este caso, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = [(0,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,1)]$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (1,1)$, $\overline{u} = (u,v)$ con $0 \leq u \leq 1$ y $0 < v < 1$.

Siendo así, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(1,1))$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,v))\cup((u,v),(1,1)]$. Por lo que, $C_1 = ((u,v),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x} \in C_1$ y $C_2 = [(0,0),(1,1))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u} \in C_2$.

Así que, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{u+1}{2},\frac{v+1}{2}),(1,1)]$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{u}{2},\frac{v}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{v+1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (1,1)$, $\overline{u} = (u,0)$ con $0 \leq u \leq 1$.

Siendo así, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(1,1))$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,0))\cup((u,0),(1,1)]$. Entonces $C_1 = ((u,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x} \in C_1$ y $C_2 = [(0,0),(1,1))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u} \in C_2$.

En este caso, $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}),(1,1)]$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) \cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (1,1)$, $\overline{u} = (u,1)$ con $0 \leq u \leq 1$.

Por lo que, $\mathbb{L}\backslash\{\overline{x}\} = [(0,0),(1,1))$ y $\mathbb{L}\backslash\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,1))\cup((u,1),(1,1)]$. Así, $C_1 = ((u,1),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = [(0,0),(1,1))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

Entonces $G(\overline{u},\mathbb{L}\backslash\{\overline{x}\}) = ((\frac{u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{x},\mathbb{L}\backslash\{\overline{u}\}) = ((\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}),(1,1)]$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,0)$, $\overline{u} = (u,0)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < u$. Entonces $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,0))\cup((x,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,0))\cup((u,0),(1,1)]$. Entonces $C_1 = [(0,0),(u,0))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

Por lo que, $G(\overline{x},\mathbb{L}\backslash\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{1}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\backslash\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,0)$, $\overline{u} = (u,1)$ con $x < u$.

De esta manera, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,0))\cup((x,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,1))\cup((u,1),(1,1)]$. Siendo así, $C_1 = [(0,0),(u,1))$ la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

Por consiguiente, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{1}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,0)$, $\overline{u} = (u,v)$ con $0\leq u\leq 1$, $0 < v < 1$ y $x < u$.

Entonces $\mathbb{L}\backslash\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,0))\cup((x,0),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\backslash\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,v))\cup((u,v),(1,1)]$. De esta manera, $C_1 = [(0,0),(u,v))$ es la componente de $\mathbb{L}\backslash\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,0),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

En este caso, $G(\overline{x},\mathbb{L}\backslash\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+x}{2},\frac{b}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\backslash\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{v}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{v+1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,1)$, $\overline{u} = (u,1)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < u$. Por lo que, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,1))\cup((x,1),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,1))\cup((u,1),(1,1)]$. Entonces $C_1 = [(0,0),(u,1))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,1),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

En consiguiente, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{1}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,1)$, $\overline{u} = (u,0)$ con $x < u$.

Siendo así, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,1))\cup((x,1),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,0))\cup((u,0),(1,1)]$. Por lo que, $C_1 = [(0,0),(u,0))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,1),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

Entonces, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{1}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,1)$, $\overline{a} = (u,v)$ con $x < u$.

Por lo que, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,1))\cup((x,1),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,v))\cup((u,v),(1,1)]$. Siendo así, $C_1 = [(0,0),(u,v))$ la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,1),(1,1)]$ la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

De esta manera, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{1}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{b}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{v+1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{v+1}{2}))$. Como $v < v+1$, entonces $\frac{v}{2} < \frac{v+1}{2}$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,y)$, $\overline{u} = (u,0)$ con $x < u$.

Así, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,y))\cup((x,y),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,0))\cup((u,0),(1,1)]$. De esta manera, $C_1 = [(0,0),(u,0))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,y),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

Por lo que, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{y}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{y}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{y+1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Como $y < y+1$ entonces $\frac{y}{2} < \frac{y+1}{2}$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,y)$, $\overline{u} = (u,1)$ con $x < u$.

Entonces, $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,y))\cup((x,y),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,1))\cup((u,1),(1,1)]$. Así, $C_1 = [(0,0),(u,1))$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,y),(1,1)]$ es la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

De manera que, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{y}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{y+1}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{y+1}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Si $\overline{x} = (x,y)$, $\overline{u} = (u,v)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x < u$. Entonces $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\} = [(0,0),(x,y))\cup((x,y),(1,1)]$ y $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\} = [(0,0),(u,v))\cup((u,v),(1,1)]$. Siendo así, $C_1 = [(0,0),(u,v))$ la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}$ con $\overline{x}\in C_1$ y $C_2 = ((x,y),(1,1)]$ la componente de $\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}$ con $\overline{u}\in C_2$.

En consiguiente, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\}) = ((\frac{x}{2},\frac{y}{2}),(\frac{x+u}{2},\frac{y+v}{2}))$ y $G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = ((\frac{x+u}{2},\frac{y+v}{2}),(\frac{u+1}{2},\frac{v+1}{2}))$. Por lo tanto, $G(\overline{x},\mathbb{L}\setminus\{\overline{u}\})\cap G(\overline{u},\mathbb{L}\setminus\{\overline{x}\}) = \emptyset$.

Así, podemos observar que se cumple la tercera condición. Concluyendo así que el cuadrado lexicográfico $\mathbb{L}$ es monótonamente normal. $\square$

En consecuencia, $\mathbb{L}$ es monótonamente normal y no es métrico. Por lo que, $\mathbb{L}$ es el contraejemplo que nos ayuda a mostrar que el regreso del Teorema 1.56 es falso.

Bibliografía

[1] D. Daniel y M. Tuncali. *Hereditary separability in Hausdorff continua*. Applied General Topology. **13** (2012), 51–60.

[2] J. Dugundji. *Topology*. Series in Advanced Mathematics, 12^a Edición. Allyn and Bacon, Inc., Boston (1978).

[3] A. Illanes. *Hiperespacios de Continuos*. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana (2004). Textos 28 Nivel Medio.

[4] S. Macías. *Topics on Continua*. Chapman and Hall/CRC. Pure and Applied Mathematics. Taylor and Francis (2005).

[5] S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158. Marcel Dekker, Inc., New York (1992).

[6] J. Nikiel, S. Purisch y B. Treybig. *Separable Zero-dimensional spaces which are continuous images of ordered compacta*. Houston Journal of Mathematics. **24** (1998), 45–56.

[7] M. E. Rudin. *Nikiel's conjecture*. Topology and its applications. **116** (2001) 305–331.

[8] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, Inc., New York (2004).