



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA MATERIA DENSA EN  
ESTRELLAS DE NEUTRONES CON MODELOS DE  
LA TEORÍA RELATIVISTA DE CAMPO MEDIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:

IVÁN HERNÁNDEZ GARIBAY

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. DANY PAGE



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Datos del Jurado

---

1. Datos del alumno

Hernández

Garibay

Iván

5578096327

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de ciencias

Física

312006310

2. Datos del tutor

Doctor

Dany Pierre

Page

Rollinet

3. Datos del sinodal 1

Doctor

Peter Otto

Hess

Bechstedt

4. Datos del sinodal 2

Doctor

Genaro

Toledo

Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Doctor

Marcelo

Salgado

Rodríguez

6. Datos del sinodal 4

Doctor

Sergio

Mendoza

Ramos

7. Datos del trabajo escrito

Estudio de la Materia Densa en Estrellas de Neutrones con Modelos de la Teoría  
Relativista de Campo Medio

103 p

2021

*A mi familia.*



# Agradecimientos

---

Esta tesis representa el trabajo no sólo mío, sino de muchas personas que me han apoyado de una u otra forma a lo largo de los años.

Muchas gracias a la Doctora María del Rocío Garibay Flores, mi mamá, cuyo cariño, sustento y guía hicieron posible mis estudios; nunca podría agradecerle lo suficiente por todo lo que me ha dado, pero intentaré pagárselo siguiendo su ejemplo de vida, con orgullo y con amor. Quiero agradecerle a mi hermano, David, por ser un excelente ejemplo a seguir, con su vasto conocimiento y creatividad, que me han permitido conocer de ciencias fuera de la Física. También a mi papá, Fidel, por ser de apoyo para mí, pero sobretodo, para mi mamá. A mi tío Ernesto, por inspirarme a estudiar al Todo Infinito desde la Física (y luego, desde fuera de ella). A Miguel, por ayudarme a crecer con cultura y entretenimiento.

Mil gracias a Marisol Navarro Miranda, Sol, por ser mi mejor amiga y compañera, por compartir estos 6 años conmigo (y los que nos faltan), por inspirarme a ser una mejor persona en todos los sentidos, por su amor tan bonito. Jonathan, gracias por las pláticas, trucos matemáticos y físicos, y sobretodo, por ser mi amigo. Gracias a mis amigas y amigos y futuras colegas: Crhistian, Iliana, Andrés, Tania, Gabriel, Siddhartha, por compartir la carrera conmigo y dejarme aprender de tan excelente generación de Físicas. Daniel Santoy, Daniel Díaz, Edher, Edy, Malcu, gracias por los años y años de hermandad.

Gracias al Dr. Dany Page por el magnífico apoyo que me ha proporcionado, por depositar su confianza, paciencia y conocimientos en mí. Espero algún día ser un Investigador tan íntegro, generoso, responsable e inteligente como él. Agradezco también al Dr. Jorge Piekarewicz por la información y guía para la realización de esta tesis. Gracias al Dr. Mikhail Beznogov por los consejos computacionales.

Agradezco al Pueblo de México por proporcionarme tan excelente educación universitaria a través de la Facultad de Ciencias y del Instituto de Astronomía de nuestra máxima casa de estudios, la UNAM; además del apoyo económico otorgado a través del Conacyt mediante una beca de Ayudante de Investigador con la que realicé gran parte



del trabajo de investigación del que resultó esta tesis. Asimismo, este trabajo es parte de los proyectos "Física y Astrofísica de Estrellas de Neutrones", CB-2014-1, No. 240512, financiado por el Conacyt, resp. Dr. Dany Pierre Page Rollinet; y "Física y Astrofísica de Estrellas de Neutrones", financiado por la UNAM-DGAPA, No. PAPIIT-IN109520, resp. Dr. Dany Pierre Page Rollinet.

# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

IVÁN HERNÁNDEZ GARIBAY. Ciudad Universitaria, CD. MX., 2021



# Resumen

---

En el presente trabajo se utilizó un modelo de materia nuclear extendido a altas densidades para la descripción de estrellas de neutrones, en el marco de la Teoría Relativista de Campo Medio. Éste incluye protones y neutrones que interactúan mediante el intercambio de un mesón escalar (atracción),  $\sigma$ , un mesón vector (repulsión),  $\omega$ , y un mesón vector-isovector (restauración de simetría de isospín),  $\rho$ ; electrones y muones en equilibrio  $\beta$ ; y una auto-interacción a tercero (auto-repulsión) y otra a cuarto orden (auto-atracción) del mesón  $\sigma$ . Las amplitudes de dichas interacciones están sujetas a los valores de sus respectivas constantes de acoplamiento. En esta tesis se variaron las constantes de acoplamiento y se realizó un análisis de las modificaciones obtenidas de las propiedades nucleares de la materia en saturación, tales como la densidad bariónica, la energía de ligadura, el coeficiente de compresibilidad, la masa de Landau y la energía de simetría; y del perfil gravitacional de las estrellas de neutrones generadas, en particular de sus masas y radios estelares. A partir de dicho análisis se determinó que las constantes de acoplamiento que mayor efecto tienen en todas las propiedades de materia nuclear y astronómicas en estrellas de neutrones son  $g_\omega$  y  $g_\sigma$ . La constante  $g_\rho$  modifica únicamente la energía de simetría, es decir, sólo está “acoplada” a esta propiedad, aspecto importante a la hora de ajustar las propiedades nucleares teóricas con las experimentales, aunque sus modificaciones a la ecuación de estado y perfil gravitacional son menores. Las constantes de auto-interacción,  $b$  y  $c$  poseen menor influencia sobre todas las propiedades nucleares, la ecuación de estado y el perfil de la estrella, siendo  $c$  de menor peso que  $b$ ; sin embargo, la inclusión de ambas constantes genera dos grados de libertad extra, por lo que resultan eficaces para ajustes finos de las propiedades nucleares y astronómicas.



# Índice general

---

Índice de figuras	XVII
Índice de tablas	XXIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Contenido . . . . .	2
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Materia Nuclear . . . . .	5
2.1.1. Partículas nucleares . . . . .	5
2.1.2. Propiedades de la materia nuclear . . . . .	6
2.2. Materia de gas ideal de Fermi . . . . .	11
2.2.1. Gas ideal de neutrones y protones . . . . .	11
2.2.2. Gas ideal de neutrones, protones y electrones . . . . .	14
2.3. Materia de estrella de neutrones . . . . .	19
2.3.1. Tensor de energía momento . . . . .	20
2.3.2. Densidad lagrangiana del sistema . . . . .	20
2.3.3. Aproximación de campo medio . . . . .	22
2.3.4. Obtención de fuentes de corriente bariónica . . . . .	24
2.3.5. Ecuación de Estado del sistema . . . . .	30
2.3.6. Constricciones físicas del sistema . . . . .	32
2.4. Perfil gravitacional de la estrella de neutrones . . . . .	34
2.4.1. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff . . . . .	34
2.4.2. Valores experimentales de masa y radio de estrellas de neutrones	36
<b>3. Métodos</b>	<b>41</b>
3.1. Solución de la ecuación de estado . . . . .	41
3.1.1. Método numérico . . . . .	41
3.1.2. Constantes de acoplamiento: un recorrido histórico . . . . .	44
3.1.2.1. Walecka (1974) . . . . .	44
3.1.2.2. Boguta y Bodmer (1977) . . . . .	46

## ÍNDICE GENERAL

---

3.1.2.3. Boguta (1981) y Glendenning (1985) . . . . .	46
3.2. Solución a las ecuaciones TOV . . . . .	52
3.2.1. Método numérico . . . . .	52
<b>4. Resultados y Discusión: Variación de las constantes de acoplamiento</b>	<b>57</b>
4.1. Variación de $g_\sigma$ . . . . .	58
4.2. Variación de $g_\omega$ . . . . .	65
4.3. Variación de $g_\rho$ . . . . .	71
4.4. Variación de $b$ . . . . .	77
4.5. Variación de $c$ . . . . .	83
<b>5. Conclusiones y perspectiva</b>	<b>89</b>
<b>A. Parametrización de la Materia nuclear</b>	<b>93</b>
<b>B. Obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange</b>	<b>95</b>
<b>C. Teoría de Isoespín</b>	<b>97</b>
<b>D. Matrices de Pauli y matrices <math>\gamma</math></b>	<b>99</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>101</b>

# Índice de figuras

---

2.1. Valle de la estabilidad nuclear $\beta$ , donde se muestra la vida media de los núcleos con $N$ neutrones y $Z$ protones. Gráfica obtenida y traducida del <i>National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory</i> de Estados Unidos ( <a href="#">National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, 2020</a> ). . . . .	7
2.2. Curva de fracciones de partículas que minimizan la energía del sistema para cada $n_B$ en el sistema neutrón-protón. En negro, considerando $m_n \neq m_p$ , y en rojo considerando $m_n = m_p$ . . . . .	13
2.3. Curva de valores $x_i$ , con $i = n, p$ , ó $e$ , que minimizan la energía del sistema para cada $n_B$ en el sistema neutrón-protón-electrón (con $m_n \neq m_p$ ). La línea vertical marca el valor de la densidad nuclear en saturación.	15
2.4. Densidad de energía y presión como función de $n_B$ usando los valores $x_i(n_B)$ que minimizan $\epsilon$ . . . . .	16
2.5. Ecuación de estado $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ usando los valores $x_i(n_B)$ que minimizan $\epsilon$ a cada $n_B$ . . . . .	16
2.6. Potenciales químicos del neutrón, protón y electrón, usando los valores $x_i$ que minimizan sus valores para cada $n_B$ . . . . .	17
2.7. Gráfica de masas estelares con incertidumbre medidas experimentalmente para varias estrellas de neutrones. Generada a partir de la tabla de datos proporcionada por <a href="#">Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona (2020)</a> , también publicada en <a href="#">Özel and Freire (2016)</a> , modificada de los valores de incertidumbre para la masa de J1614-2230, a la que además se le agregó la estrella de neutrones J0740+6620 con sus respectivos valores experimentales, obtenidos de <a href="#">Cromartie et al. (2020)</a> .	38
2.8. Curvas MR de algunos modelos teóricos (en gris claro), e intervalos de masas y radios de estrellas de neutrones observados (en colores), obtenidas de <a href="#">Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona (2020)</a> , también publicadas en <a href="#">Özel and Freire (2016)</a> . . . . .	39
2.9. Curvas MR de algunos modelos teóricos (en gris claro), e intervalos de masas y radios de estrellas de neutrones observados (en colores), obtenidas de <a href="#">Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona (2020)</a> , también publicadas en <a href="#">Özel and Freire (2016)</a> . . . . .	40



## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.1. Diagrama de flujo del programa utilizado para la solución numérica de la ecuación de estado. . . . .	43
3.2. Reproducción de las curvas de energía por barión vs. momento de Fermi bariónico para materia simétrica y materia de neutrones, registradas en <a href="#">Walecka (1974)</a> . . . . .	45
3.3. Reproducción de la curva de energía por nucleón vs. momento de Fermi bariónico de materia simétrica del modelo <a href="#">Boguta and Bodmer (1977)</a> . . . . .	47
3.4. Reproducción de curvas de fracción de partículas $x_i = n_i/n_{\text{bar}}$ contra densidad bariónica, con $g_\rho = 9.716$ del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> . . . . .	48
3.5. Reproducción de curvas de fracción de partículas $x_i = n_i/n_{\text{bar}}$ contra densidad bariónica, con $g_\rho = 0.000$ del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> . . . . .	48
3.6. Curvas de densidad de mesones escalada con su respectivo constante de acoplamiento (con $g_\rho \neq 0$ ) como función de la densidad bariónica, del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> . . . . .	49
3.7. Comparación de las ecuaciones de estado (Presión y Densidad de energía) vs. densidad bariónica obtenidas con los modelos de gas ideal (GI) y <a href="#">Glendenning (1985)</a> (G), como función de la densidad bariónica. . . . .	50
3.8. Comparación de las ecuaciones de estado en su forma $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ obtenidas con los modelos de gas ideal (GI) y <a href="#">Glendenning (1985)</a> (G). . . . .	51
3.9. Diagrama de flujo del programa utilizado para la solución numérica de las ecuaciones TOV. . . . .	53
3.10. Curva de masa total contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> . La densidad correspondiente a la masa total máxima alcanzada con este modelo corresponde a $\rho_{e_{\text{max}}} = 2.20 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ . . . . .	54
3.11. Curva de radio estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> . . . . .	55
3.12. Curva de masa vs. radio estelares para distintas densidades centrales de la estrella, usando la ecuación de estado del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> (G) y del Gas Ideal (GI). La estrella con mayor masa que (G) puede generar es $M_{\text{max}} = 2.12 M_\odot$ cuyo radio es de $R_{\text{max}} = 11.59 \text{ km}$ ; mientras que la estrella con mayor masa que (GI) alcanza es de $M_{\text{max}} = 0.77 M_\odot$ con $R_{\text{max}} = 8.81 \text{ km}$ ( <a href="#">Oppenheimer and Volkoff, 1939</a> ). . . . .	55
4.1. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	60
4.2. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	61
4.3. Curvas de densidad de los mesones en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	61
4.4. Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas), $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	62

4.5. Curvas de densidad de energía en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	62
4.6. Curvas de presión en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	63
4.7. Ecuación de estado en equilibrio $\beta$ ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	63
4.8. Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	64
4.9. Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $g_\sigma$ . . . . .	64
4.10. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	66
4.11. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	66
4.12. Curvas de densidad de los mesones en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	67
4.13. Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas), $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	67
4.14. Curvas de densidad de energía en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	68
4.15. Curvas de presión en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	68
4.16. Ecuación de estado en equilibrio $\beta$ ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	69
4.17. Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	70
4.18. Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $g_\omega$ . . . . .	70
4.19. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	72
4.20. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	72
4.21. Curvas de densidad de los mesones en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	73
4.22. Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas), $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	73
4.23. Curvas de densidad de energía en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	74
4.24. Curvas de presión en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	74

ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.25. Ecuación de estado en equilibrio $\beta$ ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	75
4.26. Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	76
4.27. Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $g_\rho$ . . . . .	76
4.28. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de $b$ . . . . .	78
4.29. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de $b$ . . . . .	78
4.30. Curvas de densidad de los mesones en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $b$ . . . . .	79
4.31. Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas), $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $b$ . . . . .	79
4.32. Curvas de densidad de energía en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $b$ . . . . .	80
4.33. Curvas de presión en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $b$ . . . . .	80
4.34. Ecuación de estado en equilibrio $\beta$ ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de $b$ . . . . .	81
4.35. Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $b$ . . . . .	81
4.36. Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $b$ . . . . .	82
4.37. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de $c$ . . . . .	84
4.38. Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de $c$ . . . . .	85
4.39. Curvas de densidad de los mesones en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $c$ . . . . .	85
4.40. Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas), $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $c$ . . . . .	86
4.41. Curvas de densidad de energía en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $c$ . . . . .	86
4.42. Curvas de presión en equilibrio $\beta$ vs. densidad bariónica para las variaciones de $c$ . . . . .	87
4.43. Ecuación de estado en equilibrio $\beta$ ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de $c$ . . . . .	87
4.44. Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $c$ . . . . .	88

4.45. Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio $\beta$ para las variaciones de $c$ . . . . .	88
A.1. Comparación entre energías por nucleón usando ambas expresiones en (A.3). En negro se muestra la solución numérica de las ecuaciones de campo (primera línea de la ecuación (A.3)); en rojo y azul las aproximaciones parabólicas (segunda línea de (A.3)) con los dos valores del coeficiente $E_{\text{sim}}$ , ecuaciones (2.11) y (2.12). Notar que la diferencia entre las curvas de ambas expresiones aproximadas es de alrededor del 3% para $x = 0$ . . . . .	94



# Índice de tablas

---

2.1. Estados de bariones (neutrón y protón) y mesones. $J$ es espín, $I$ es isoespín, $b$ es número bariónico, $q$ es carga, y $s$ es extrañeza. (Glendenning, 2000, p. 146) . . . . .	6
2.2. Propiedades nucleares a densidad de saturación. (Han et al., 2019) . . . . .	10
3.1. Valores de las masas de bariones, leptones y mesones utilizadas en el presente trabajo. . . . .	44
3.2. Constantes de acoplamiento usados en el modelo <a href="#">Walecka (1974)</a> . . . . .	44
3.3. Valores experimentales en saturación generados con el modelo <a href="#">Walecka (1974)</a> . . . . .	46
3.4. Constantes de acoplamiento del modelo <a href="#">Boguta and Bodmer (1977)</a> . . . . .	46
3.5. Valores experimentales en saturación generados con el modelo <a href="#">Boguta and Bodmer (1977)</a> , usando las constantes de las Tablas 3.1 y 3.4. . . . .	46
3.6. Constantes de acoplamiento del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> . . . . .	47
3.7. Valores experimentales en saturación generados con las constantes del modelo <a href="#">Glendenning (1985)</a> , usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	49
4.1. Constantes de acoplamiento del modelo <a href="#">Boguta (1981)</a> que generan los valores experimentales de la Tabla 2.2. . . . .	58
4.2. Valores experimentales en saturación generados con las constantes de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	58
4.3. Valores experimentales en saturación generados con la variación de $g_\sigma$ con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	58
4.4. Valores experimentales en saturación generados con la variación de $g_\omega$ con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	65
4.5. Valores experimentales en saturación generados con la variación de $g_\rho$ con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	71

## ÍNDICE DE TABLAS

---

4.6. Valores experimentales en saturación generados con la variación de $b$ con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	77
4.7. Valores experimentales en saturación generados con la variación de $c$ con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6. . . . .	83

# Introducción

---

## 1.1. Antecedentes

En 1932, el físico J. Chadwick demostró la existencia del neutrón ([Chadwick, 1932](#)). Dos años más tarde, en 1934, Baade y Zwicky propusieron la existencia de estrellas de neutrones como resultado final de la evolución de una estrella tras su explosión como *super nova* ([Baade and Zwicky, 1934](#)). Posteriormente, en noviembre de 1967, la astrónoma Jocelyn Bell, bajo la supervisión del astrónomo Antony Hewish, observó la primera señal pulsante de radio con una frecuencia de un pulso cada 1.34 segundos. A tal frecuencia de rotación existen aceleraciones centrífugas que son contrarestadas por la fuerza gravitacional del objeto, de tal manera que éste no se deshace; esto impone una condición de densidad de alrededor de  $10^{13}$  g cm<sup>-3</sup> ([Hewish et al., 1968](#)). Esta fue la primera observación sugiriendo la existencia de las estrellas de neutrones. Algunas otras estrellas de neutrones observadas posteriormente se encuentran en una órbita binaria con algún compañero, por lo que aplicando mecánica orbital nos permite calcular sus masas. La masa de una estrella de neutrones, típicamente, es de 1.5 masas solares. De esta manera se puede inferir su radio: veinte kilómetros, aproximadamente. En un objeto tan pequeño se encuentra compactada toda la masa del Sol, y más; por esta razón las estrellas de neutrones reciben el nombre de objetos compactos, junto con otro tipo de objetos llamados enanas blancas. ([Glendenning, 2000](#), p. 1)

Por las propiedades inferidas anteriormente, los objetos compactos, en particular las estrellas de neutrones en sus diversas formas, llevan a la materia a tales extremos de densidad que la física de partículas es esencial para su entendimiento ([Glendenning, 2000](#), p. 2). Así, los modelos físicos generados deben reproducir, por un lado, las cantidades astronómicas como la masa y radio de las estrellas de neutrones que incluyen altas densidades; y por otro lado, las propiedades de la materia a densidades nucleares, tales como la densidad de saturación, la energía de ligadura, la compresibilidad, y la energía de simetría de los núcleos atómicos. ([Glendenning, 2000](#), p. 149)

Para lograr una descripción adecuada de la materia de estrellas de neutrones,



## 1. INTRODUCCIÓN

---

que además describiera materia nuclear a densidades bajas, autores como [Walecka \(1974\)](#), [Boguta and Bodmer \(1977\)](#) y [Boguta \(1981\)](#) desarrollaron un método teórico, comúnmente llamado *Teoría Relativista de Campo Medio* (RMFT por sus siglas en inglés), que es un caso particular del marco general de la *Teoría de Funcional de Densidad* (DFT por sus siglas en Inglés). En este procedimiento se hace uso de la *densidad Lagrangiana* para incluir (la densidad de energía de) las partículas del modelo y sus interacciones, cuyas intensidades están establecidas mediante constantes de acoplamiento. Con ello es posible obtener la ecuación de estado del sistema y el perfil gravitacional de la estrella de neutrones. De esta manera, las constantes de acoplamiento son de particular utilidad para anclar el modelo a mediciones experimentales, proporcionando una manera efectiva de reproducir propiedades de la materia tanto a densidad nuclear como a altas densidades.

### 1.2. Objetivos

El objetivo general del presente trabajo es construir y utilizar el modelo nuclear relativista extendido a altas densidades en el marco de la RMFT de [Boguta \(1981\)](#) para la descripción de materia de estrellas de neutrones.

Como objetivo particular se tiene analizar los cambios que sufren las propiedades de la materia, la ecuación de estado y el perfil gravitacional de una estrella de neutrones al variar las constantes de acoplamiento del modelo.

### 1.3. Contenido

Esta tesis está ordenada de la siguiente manera.

El Capítulo 2 presenta el marco teórico en el que se basa el modelo a desarrollar. En la Sección 2.1 se introducen los siguientes conceptos: los mesones y sus propiedades resultantes del modelo estándar para la reproducción de propiedades nucleares; el modelo nuclear de gota para la generación teórica de resultados obtenidos experimentalmente; así como las propiedades nucleares que se buscan reproducir con el modelo a desarrollar. En la Sección 2.2 se obtiene la ecuación de estado de un gas ideal formado por neutrones, protones y electrones ultra-relativistas sin interacción, con el propósito de familiarizarnos con los procedimientos requeridos para obtener tal ecuación. La Sección 2.3 aborda los conceptos necesarios de la Teoría de relatividad para la obtención de la expresión general de la ecuación de estado. A su vez, introduce la expresión matemática del modelo físico, la *densidad lagrangiana*, donde se representan los campos clásicos de las partículas en el modelo y sus interacciones. Posteriormente se obtienen las ecuaciones de movimiento de dicha densidad lagrangiana, con el objetivo de resolverlas, pues sus soluciones están directamente relacionadas con la ecuación de estado. Para obtener dichas soluciones se hace uso de la *aproximación del campo medio* de materia infinita e isotrópica. Asimismo, se obtiene la forma explícita de la densidad de energía y presión

como función de las densidades de las partículas incluidas. En la Sección 2.4 se describe la obtención de las ecuaciones relativistas de equilibrio hidrostático, para generar el perfil gravitacional de una estrella de neutrones estable.

El Capítulo 3 aborda la metodología para resolver tanto las ecuaciones para obtener la ecuación de estado, como las ecuaciones de equilibrio hidrostático. La Sección 3.1 describe el método numérico a utilizar para obtener la solución de la ecuación de estado. Además se hace un recorrido histórico por los modelos utilizados hasta antes del desarrollo del utilizado en el presente trabajo. Aquí se reproducen algunas gráficas generadas por los autores de tales modelos, con el fin de verificar la funcionalidad del procedimiento y la solución numérica. En la Sección 3.2 se describe el método numérico para la solución de las ecuaciones de equilibrio hidrostático.

En el Capítulo 4 se hace el análisis de los cambios en las propiedades nucleares de la materia, y en las propiedades astronómicas de la estrella de neutrones, generados por los cambios de los valores de las constantes de acoplamiento del modelo. El propósito de estos estudios es entender con más detalle e intuición la importancia y el efecto de cada componente de la densidad lagrangiana utilizada.

Por último, en el Capítulo 5 se concluyen los resultados del presente trabajo.



## 2.1. Materia Nuclear

Con el fin de obtener la ecuación de estado de una estrella de neutrones, se busca desarrollar un modelo que describa el comportamiento de la materia de la que está compuesta. Las propiedades de esta materia deben ser aquellas de la materia nuclear a densidades “normales”, y aquellas de las estrellas de neutrones a densidades altas (Glendenning, 2000, p. 163). En el presente capítulo se establecen las partículas, interacciones y propiedades de materia nuclear que queremos reproducir con nuestra RMFT.

La mayoría de la información expuesta en este Capítulo fue obtenida (y traducida) de (Glendenning, 2000, pp. 145-146, 163-166), a menos que se especifique lo contrario.

### 2.1.1. Partículas nucleares

El modelo nuclear estándar establece que los núcleos de los átomos están compuestos de bariones como protones y neutrones que interactúan a través de las fuerzas nuclear fuerte y electromagnética mediadas por el intercambio de mesones. Asimismo, dicho modelo explica el decaimiento de algunos núcleos y la transformación de un bosón en otro mediante el intercambio de los mesones correspondientes a la interacción (fuerza) electro-débil.

Los bariones más importantes en estrellas de neutrones son el octeto de bariones de spin  $\frac{1}{2}$  con menor masa, en particular el neutrón y protón, los cuales serán considerados dos estados de una sola partícula, el *nucleón*,  $N$ , en el presente trabajo. Los mesones más importantes son el escalar  $\sigma$ , de espín 0, que tiene largo alcance y menor intensidad; el vector de espín 1,  $\omega$ , de corto alcance y mayor intensidad (su masa es mayor a la de  $\sigma$ ); y el vector-isovector de isoespín 1,  $\rho$ , de corto alcance (su masa es parecida a la de  $\omega$ ) y mayor intensidad. Éstos serán los hadrones a utilizar en la teoría del presente trabajo. Sus números cuánticos se muestran en la Tabla 2.1.

La teoría nuclear de campos relativista es especialmente apropiada para la descripción de materia de estrellas de neutrones. Al estar construída bajo principios relati-

## 2. MARCO TEÓRICO

---

Hadrón	m [MeV]	J	I	b	q	s
N	938	1/2	1/2	1	0, 1	0
$\sigma$	$\approx 550$	0	0	0	0	0
$\omega$	783	1	0	0	0	0
$\rho$	770	1	1	0	-1, 0, 1	0

**Tabla 2.1:** Estados de bariones (neutrón y protón) y mesones. J es espín, I es isoespín, b es número bariónico, q es carga, y s es extrañeza. (Glendenning, 2000, p. 146)

vistas, dicha teoría es naturalmente causal. Además, sus constantes de acomplamiento pueden relacionarse algebraicamente a las propiedades de masa de la materia nuclear, lo que permite reproducir teóricamente mediciones físicas. De esta manera, la teoría puede ajustarse adecuadamente a la información que se tiene de materia de densidad alta: (1) causalidad; (2) estabilidad microscópica; y (3) propiedades de materia nuclear en saturación.

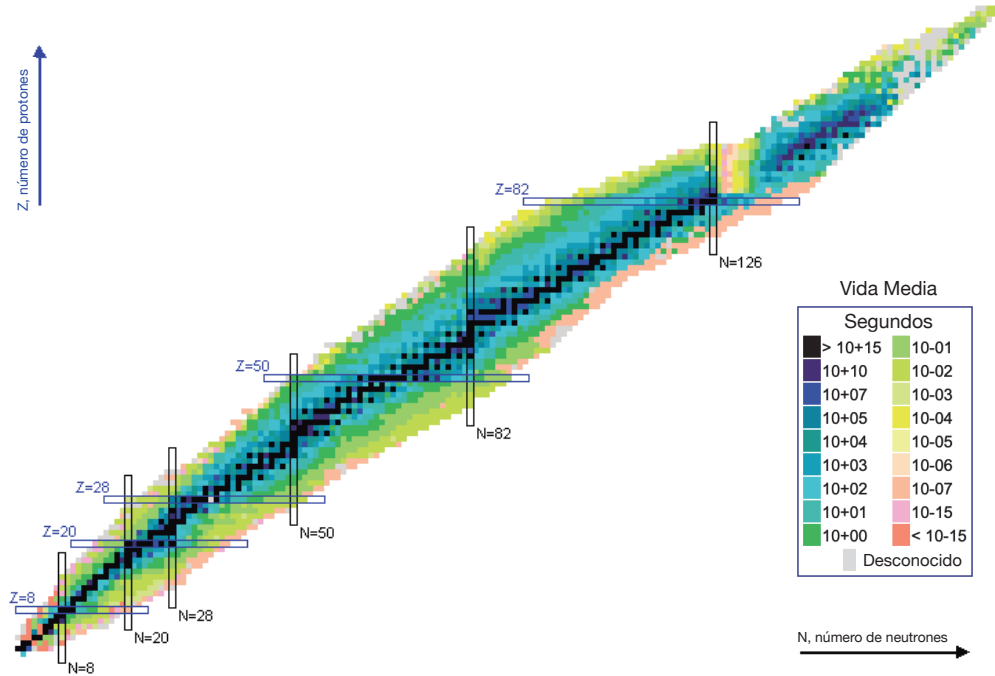
Para ello, primero se debe ajustar la teoría con cinco propiedades importantes cerca de la densidad de saturación de materia nuclear. Dos de ellas, la energía de ligadura y la densidad de saturación, normalizarán la ecuación de estado. Otras dos, el módulo de compresión y la masa de Landau, permiten controlar la extrapolación a altas densidades y las excitaciones térmicas, respectivamente. Finalmente, la energía de simetría (de isoespín) permitirán que extrapolaciones a sistemas de isoespín asimétrico sean correctas.

### 2.1.2. Propiedades de la materia nuclear

Nuestra descripción de la materia densa de estrellas de neutrones debe ajustarse a lo que se conoce empíricamente sobre la materia nuclear. Este conocimiento se refiere a las propiedades de materia nuclear en una densidad de saturación, es decir, a la densidad en la que la presión es cero y a la que la materia permanecería estática si no se perturbara.

La materia uniforme e infinita es una idealización que tiene propiedades bien definidas relacionadas con núcleos finitos. Tal noción surgió a partir del modelo de la gota líquida del núcleo, que busca caracterizar la energía de un núcleo por sus números atómico y de protones,  $A$  y  $Z$ , respectivamente.

Una propiedad básica de la materia nuclear es que son sistemas saturados. La saturación significa que mientras más nucleones se agregan al núcleo, la densidad de la región central permanece básicamente constante. Es por esto que el radio nuclear está dado por  $R = r_{\text{sat}} A^{1/3}$  donde  $r_{\text{sat}}$  es una constante y  $A$  es el número másico. Las razones para esto se centran en el rango corto de la fuerza nuclear, su fuerte repulsión a



**Figura 2.1:** Valle de la estabilidad nuclear  $\beta$ , donde se muestra la vida media de los núcleos con  $N$  neutrones y  $Z$  protones. Gráfica obtenida y traducida del *National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory* de Estados Unidos ([National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, 2020](#)).

distancias cortas, y al principio de Pauli, que establece que un sistema no puede tener dos (o más) fermiones con los mismos números cuánticos.

Como la densidad de energía es aproximadamente constante, se puede escribir la energía de un núcleo como la densidad de energía de materia simétrica a densidad normal,  $\epsilon_{\text{sat}}$ , por su volumen. Esto debe ser modificado por el hecho empírico de que los núcleos con número de neutrones,  $N$ , cerca del número de protones,  $Z$ , están enlazados más fuertemente que sus vecinos<sup>1</sup>, efecto al cual se suma la repulsión Coulombiana a  $Z$  mayores. La repulsión cambia el mínimo de la energía de núcleos con  $A$  crecientes a aquellos con una fracción  $(A-Z)/Z = N/Z$  mayor. El bien conocido valle de estabilidad  $\beta$  (Figura 2.1) enfatiza la preferencia de simetría en isospín de la fuerza nuclear.

Además de las contribuciones de volumen a la energía mencionadas, existirá una

<sup>1</sup>Por ejemplo, el deuterio, que tiene un neutrón y un protón, existe y es estable, mientras que el “dineutronio”, formado de dos neutrones, no existe, lo cual muestra que la atracción neutrón-protón es más fuerte que la interacción neutrón-neutrón.

## 2. MARCO TEÓRICO

---

energía de superficie repulsiva. Esta contribución se genera debido a que los nucleones en la superficie interactúan con menos vecinos, por lo que sienten menos atracción que aquellos del interior. La energía de superficie será proporcional al área (del núcleo). Adicionalmente habrá una energía Coulombiana repulsiva generada por los protones.

Por las consideraciones anteriores, se puede escribir la masa total del núcleo como

$$M(A, Z) = A \left[ \frac{4}{3} \pi r_{\text{sat}}^3 \epsilon_{\text{sat}} + E_{\text{sim}} \left( \frac{N - Z}{A} \right)^2 \right] + 4 \pi r_{\text{sat}}^2 A^{2/3} \sigma_{\text{surf}} + \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{r_{\text{sat}} A^{1/3}}. \quad (2.1)$$

La ecuación anterior se denomina la *ecuación de masa semiempírica*. En otras ocasiones se usa la notación  $E_{\text{vol}} \equiv \frac{4}{3} \pi r_{\text{sat}}^3 \epsilon_{\text{sat}}$  para el término de volumen y  $E_{\text{surf}} \equiv 4 \pi r_{\text{sat}}^2 \sigma_{\text{surf}}$  para el término de superficie.

Para materia simétrica, es decir, con misma cantidad de neutrones que de protones, se tienen medidas experimentalmente varias cantidades físicas. Restando  $(A - Z)m_n + Zm_p \approx Am_N$  a la masa total (con  $m_n$  la masa del neutrón,  $m_p$  la del protón, y ambas siendo iguales a la masa del nucleón,  $m_N$ ) y dividiendo por  $A$ , se genera la energía por nucleón, denotada por  $E$

$$E \equiv M(A, Z)/A - m_N. \quad (2.2)$$

A la energía por nucleón a densidad de saturación  $n_{\text{sat}}$  se le llama la *energía de ligadura* (*Binding Energy* en inglés), denotada por  $BE$  o  $BE_{\text{sat}}$ , con valor experimental (Han et al., 2019)

$$E|_{n_{\text{sat}}} = BE = -16 \pm 1 \text{ MeV}, \quad (2.3)$$

a densidad numérica de saturación,  $n_{\text{sat}}$ , de (Han et al., 2019)

$$n_{\text{sat}} = 0.16 \pm 0.01 \text{ fm}^{-3}, \quad (2.4)$$

que es equivalente a una densidad de masa  $\rho_{\text{sat}}$ :

$$\rho_{\text{sat}} = m_N n_{\text{sat}} = (938 \text{ MeV}c^{-2}) (0.16 \text{ fm}^{-3}) = 2.68 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}. \quad (2.5)$$

El parámetro de radio  $r_{\text{sat}}$  está relacionado con  $n_{\text{sat}}$  mediante

$$r_{\text{sat}} = \left[ \frac{4\pi}{3} n_{\text{sat}} \right]^{-1/3} = 1.14 \text{ fm}. \quad (2.6)$$

Un parámetro equivalente a la densidad numérica de saturación es el momento de Fermi, que es igual en los neutrones y protones de materia simétrica. La densidad (numérica) y el momento de Fermi (usando  $\hbar = 1$  el momento de Fermi es igual al número de onda),  $k_F$ , en saturación se relacionan mediante

$$n_{\text{sat}} = 4 \int_0^{\vec{k}_{F,\text{sat}}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{2k_{F,\text{sat}}^3}{3\pi^2}, \quad (2.7)$$

donde el 4 surge por la degeneración de espín-isoespín de los estados de momento del nucleón. Por ello,

$$k_{F,\text{sat}} = 1.33 \text{ fm}^{-1}. \quad (2.8)$$

En términos de la densidad de energía como función de la densidad numérica bariónica,  $\epsilon = \epsilon(n)$ , la energía por nucleón se relaciona con ésta mediante

$$E = E(n) = \frac{\epsilon(n)}{n} - m_N, \quad (2.9)$$

siendo igual a la energía de ligadura en  $n = n_{\text{sat}}$ ; con  $m = 938 \text{ MeV}/c^2 = 4.753(\hbar c) \text{ fm}^{-1}$ ; la segunda expresión siendo útil cuando se utilizan unidades naturales  $\hbar = c = 1$ . De esta manera se tiene que la densidad de energía en saturación es

$$\epsilon_{\text{sat}} = 148 \text{ MeV}/\text{fm}^3. \quad (2.10)$$

La energía de ligadura por nucleón y la densidad numérica nuclear, en saturación, deberán ser reproducidas por la teoría, donde serán de utilidad dos constantes de acoplamiento.

A su vez se tienen constricciones adicionales. Por un lado, las estrellas deben ser eléctricamente neutras, por lo que el sistema tiende a igualar el número de protones con electrones. Por el otro, la fuerza nuclear de corto alcance junto con las energías de Fermi de los bariones con isospín, energéticamente prefieren configuraciones con isospín simétrico, por lo que el sistema tiende a igualar el número de neutrones con el de protones. Sin embargo, las estrellas de neutrones a primera aproximación están compuestas de neutrones, por lo que son asimétricas en isospín. De esta manera, la restricción de neutralidad de carga iguala la condición de energía de isospín, y debe estar correctamente reflejado por la teoría. Así, se define la energía de simetría como

$$E_{\text{sim}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 (\epsilon/n)}{\partial t^2} \right)_{t=0}, \quad t \equiv \frac{n_n - n_p}{n}. \quad (2.11)$$

En el Apéndice A se muestra la equivalencia de la definición anterior con la siguiente:

$$E_{\text{sim}} \equiv E_{\text{neutrones}} - E_{\text{simetrica}}, \quad (2.12)$$

donde  $E_{\text{neutrones}}$  y  $E_{\text{simetrica}}$  son la energía por nucleón de materia de neutrones y simétrica, respectivamente. Esta última definición será la utilizada a lo largo del presente trabajo. El valor esperado para la energía de simetría en saturación es (Han et al., 2019)

$$E_{\text{sim}}|_{n_{\text{sat}}} = 28 - 35 \text{ MeV}. \quad (2.13)$$

El módulo de compresión,  $K$ , definido como la curvatura de la ecuación de estado por nucleón,  $\epsilon(n)/n$ , a  $n_{\text{sat}}$ , es otro punto de contacto importante con conocimiento empírico, pues influencia directamente el máximo de la masa de la estrella de neutrones:

$$K|_{n_{\text{sat}}} \equiv \left[ k^2 \frac{d^2}{dk^2} \left( \frac{\epsilon}{n} \right) \right]_{k_{F,\text{sat}}} = 9 \left[ n^2 \frac{d^2}{dn^2} \left( \frac{\epsilon}{n} \right) \right]_{n_{\text{sat}}}, \quad (2.14)$$

cuyo valor esperado a densidad de saturación es (Han et al., 2019)

$$K|_{n_{\text{sat}}} = 240 \pm 20 \text{ MeV}; \quad (2.15)$$



## 2. MARCO TEÓRICO

---

$n_{\text{sat}}$	$BE_{\text{sat}}$	$K_{\text{sat}}$	$E_{\text{sim,sat}}$	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
$0.16 \pm 0.01 \text{ fm}^{-3}$	$-16.2 \pm 1 \text{ MeV}$	$240 \pm 20 \text{ MeV}$	$28 - 35 \text{ MeV}$	$0.75 \pm 0.1$

**Tabla 2.2:** Propiedades nucleares a densidad de saturación. (Han et al., 2019)

a  $K$  también se le llama simplemente la *incompresibilidad*. Finalmente, la masa efectiva de Landau del nucleón juega un papel importante a la hora de incorporar excitaciones térmicas en el sistema. Dicho concepto involucra la siguiente integral en el espacio de momentos de las partículas participantes

$$\iiint \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{F}(\vec{k}) = \iiint \frac{k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3} \mathcal{F}(\vec{k}), \quad (2.16)$$

que comúnmente se resuelve en coordenadas esféricas, donde  $\mathcal{F}(\vec{k})$  es alguna función que difiere de cero solamente en la vecindad de la superficie de Fermi,  $k \simeq k_F$ . Haciendo cambio de variable de  $k$  a  $\epsilon$ :

$$dk = \frac{dk}{d\epsilon} d\epsilon \equiv \frac{m_L}{k} d\epsilon, \quad (2.17)$$

de donde se obtiene la *masa efectiva de Landau*,  $m_L$ :

$$m_L = \left. \frac{k}{\frac{d\epsilon}{dk}} \right|_{k=k_F} = \sqrt{k_F^2 + m^{*2}}; \quad (2.18)$$

a  $m^*$  se le conoce como la *masa efectiva de Dirac*. Las expresiones para  $m_L$  y  $m^*$  serán obtenidas más adelante en el presente trabajo. El rango esperado para la masa de Landau a densidad de saturación es (Han et al., 2019)

$$m_{L_{\text{sat}}}/m_N = 0.75 \pm 0.1. \quad (2.19)$$

Las propiedades nucleares a reproducir con el modelo se resumen en la Tabla 2.2.

## 2.2. Materia de gas ideal de Fermi

Un hecho sobresaliente sobre los núcleos es que, aproximadamente, un núcleo se comporta como si estuviera compuesto de nucleones independientes moviéndose en un campo promedio, a pesar de la interacción entre ellos en vacío. Esto se sigue de la combinación del principio de exclusión de Pauli, la parte repulsiva de la fuerza fuerte de corto alcance, y la baja amplitud de la fuerza atractiva de largo alcance (Glendenning, 2000, p. 167). Como primera aproximación para la descripción de la composición de estrellas de neutrones se utilizará un modelo de gas ideal de Fermi. Esto nos dará una introducción a los procedimientos a seguir cuando se utilice un modelo más complejo, además de proporcionar un punto de comparación contra modelos más complejos.

El procedimiento descrito en esta sección fue tomado de Shapiro and Teukolsky (2004, pp. 39-40).

### 2.2.1. Gas ideal de neutrones y protones

Primero se considerará un modelo aproximado en el que el sistema es un gas ideal degenerado de neutrones con masa  $m_n$  y protones con masa  $m_p$ . Además, que el sistema tiene una densidad numérica de bariones  $n_B$ , de neutrones  $n_n$  y de protones  $n_p$ . Se define la variable adimensional  $x = n_p/n_B$ , por lo que  $n_p = xn_B$  y  $n_n = (1-x)n_B$ . O bien, frecuentemente se usa también  $x_p \equiv x$  y  $x_n \equiv 1-x$ . La relación entre la densidad numérica y el momento de Fermi de la partícula es

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.20)$$

Dada la densidad  $n_B$ , los momentos de Fermi para los neutrones y los protones son, respectivamente,

$$\begin{aligned} k_{F,n} &= (3\pi^2 n_n)^{\frac{1}{3}} = (3\pi^2 (1-x)n_B)^{\frac{1}{3}} \\ k_{F,p} &= (3\pi^2 n_p)^{\frac{1}{3}} = (3\pi^2 x n_B)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

En el gas ideal no hay interacciones ni potenciales, por lo que la energía de Fermi de una partícula  $j$  y su potencial químico,  $\mu_j$ , son los de una partícula libre:

$$\mu_j = \sqrt{(m_j c^2)^2 + (p_{F,j} c)^2}, \quad (2.22)$$

con

$$p_{F,j} = \hbar k_{F,j}. \quad (2.23)$$

Tomando en cuenta todas las partículas del sistema se obtiene la energía total  $\mu$ :

$$\mu = \sum_j \mu_j = \sum_j \sqrt{(m_j c^2)^2 + (p_j c)^2}. \quad (2.24)$$

## 2. MARCO TEÓRICO

---

O bien, se puede obtener la densidad de energía de las partículas  $j$ ,  $\epsilon_j$ , haciendo uso de la densidad de estados con momento  $\mathbf{k}$ ,  $f(\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned}\epsilon_j &= 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mu_j(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \\ &= 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{(m_j c^2)^2 + (p_j c)^2} f(\mathbf{k}),\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde el 2 multiplicando la integral surge del hecho de que es un gas degenerado en espín, por lo que dos mismas partículas pueden tener la misma energía con dos distintos espines, *up* y *down*. El principio de exclusión de Pauli establece que los fermiones de un sistema no pueden ocupar el mismo estado, mientras que el principio de mínima energía asegura que los estados energéticos se llenan de menor a mayor isotrópicamente en el espacio de momentos para este sistema. De esta manera se considera la distribución de densidad de estados de Fermi-Dirac a  $T = 0$ :  $f(\mathbf{k}) = 0$  si  $\|\mathbf{k}\| > k_f$  y  $f(\mathbf{k}) = 1$  si  $\|\mathbf{k}\| \leq k_f$ . Así, la densidad de energía total de las partículas  $j$ , es de la forma

$$\begin{aligned}\epsilon_j &= \frac{2(4\pi)}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F,j}} k^2 \sqrt{(m_j c^2)^2 + (c\hbar k)^2} dk \\ &= \frac{m_j c^2}{\lambda_j^3} \chi(y_j),\end{aligned}\tag{2.26}$$

con

$$y_j = \frac{\hbar k_{F,j}}{m_j c}, \quad \lambda_j = \frac{\hbar}{m_j c},\tag{2.27}$$

donde  $\lambda_j$  es la longitud de Compton de la partícula  $j$ , y

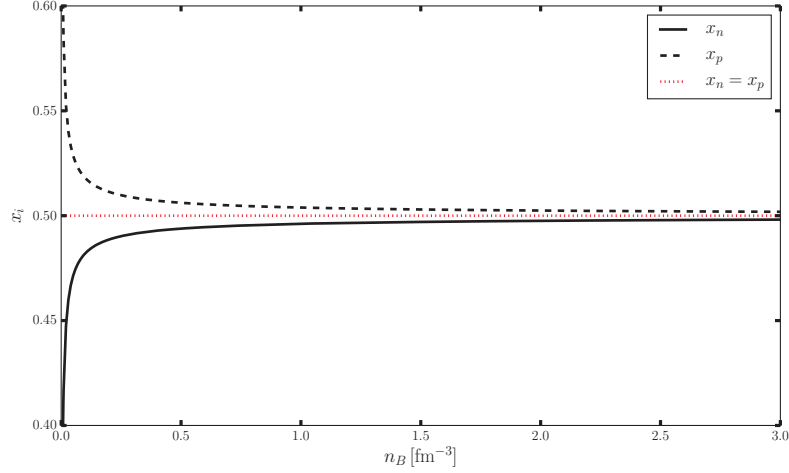
$$\chi(y) = \frac{1}{8\pi^2} \left( y \sqrt{1+y^2} (1+2y^2) - \text{Ln} \left[ y + \sqrt{1+y^2} \right] \right).\tag{2.28}$$

Así, la densidad de energía del sistema de neutrones y protones es

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_n + \epsilon_p \\ &= \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \chi(y_n) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3} \chi(y_p).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Debido a la ecuación (2.21),  $\epsilon$  es función tanto de  $n_B$  como de  $x$ . Imponiendo nuevamente el principio de mínima acción, dada una densidad bariónica  $n_B$ , el sistema tenderá a adoptar el estado con fracción de protones  $x$  que sea menos energético. Así, para determinar qué valor de  $x$  genera tal estado basta con derivar  $\epsilon$  con respecto a  $x$ , igualar tal derivada a cero, y resolver la ecuación resultante.

Notar que si se tomara  $m_n = m_p$ , resulta que  $x = 0.5$  para toda densidad bariónica; así, la densidad de neutrones y protones sería, respectivamente  $n_n = (1-x)n_B = 0.5n_B$  y  $n_p = xn_B = 0.5n_B$ . Sin embargo, al considerar masas distintas para neutrones y protones, para cada densidad bariónica  $n_B$  se tienen las soluciones mostradas en la Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Curva de fracciones de partículas que minimizan la energía del sistema para cada  $n_B$  en el sistema neutrón-protón. En negro, considerando  $m_n \neq m_p$ , y en rojo considerando  $m_n = m_p$ .

La presión para un sistema isotrópico en momento formado por fermiones con masa  $m_j$  a  $T = 0$  se define como

$$P = \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int p v f(\mu - E) d^3 p, \quad (2.30)$$

donde el  $1/3$  surge por isotropía (en las tres direcciones), y el  $2$  por degeneración de espín. Como  $v = pc^2/E$ , entonces

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{1}{3} \frac{2(4\pi)}{h^3} \int_0^{p_{F,j}} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_j^2 c^4}} p^2 dp \\ &= \frac{8\pi m_j^4 c^5}{3h^3} \int_0^{y_j} \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{m_j c^2}{\lambda_j^3} \phi(y_j), \end{aligned} \quad (2.31)$$

con

$$\phi(y_j) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ y_j \sqrt{1+y_j^2} \left( \frac{2y_j^2}{3} - 1 \right) + \text{Ln} \left[ y_j + \sqrt{1+y_j^2} \right] \right]. \quad (2.32)$$

Por lo que la presión total del sistema neutrón-protón es

$$\begin{aligned} P &= P_n + P_p \\ &= \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \phi(y_n) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3} \phi(y_p). \end{aligned} \quad (2.33)$$

El modelo anterior genera una primera aproximación para la descripción de materia nuclear simétrica. Sin embargo, es importante notar que debido a que sólo incluye neutrones y protones, el sistema posee carga eléctrica positiva.

### 2.2.2. Gas ideal de neutrones, protones y electrones

Para generar un sistema más complejo, y con carga neutral, se pueden agregar electrones con densidad numérica  $n_e$ . Para obtener el momento de los electrones se utiliza la definición de la ec. (2.20). Nuevamente el potencial químico del electrón estará dado por la ecuación (2.22), por lo que la energía generada por todos los electrones del sistema también está descrita por la ecuación (2.26). La expresión matemática para la neutralidad de carga impuesta tiene la forma

$$n_e = n_p = x n_B. \quad (2.34)$$

Así, la densidad de energía total del sistema neutrón-protón-electrón,  $\epsilon$ , es

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_n + \epsilon_p + \epsilon_e \\ &= \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \chi(y_n) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3} \chi(y_p) + \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \chi(y_e). \end{aligned} \quad (2.35)$$

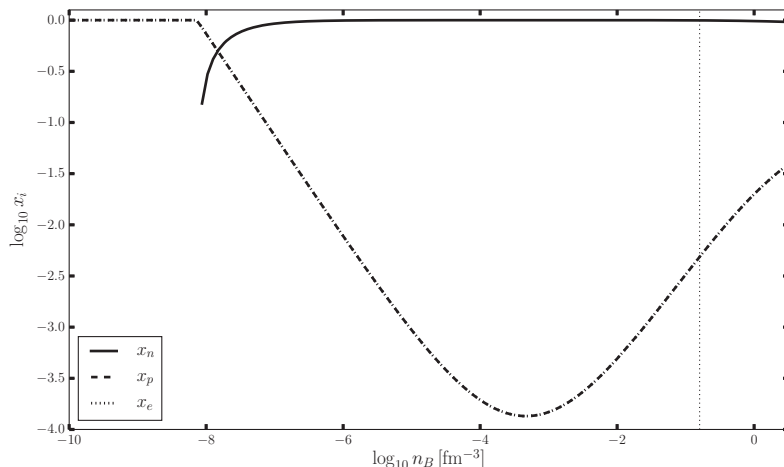
Nuevamente se busca el valor de  $x$  que minimiza la energía para cada densidad bariónica  $n_B$ . Éstos se muestran en la Figura 2.3. En ella se puede ver que a densidades bajas es energéticamente más eficiente tener solamente protones y electrones, sin neutrones, debido a que  $m_n > m_p$ , los cuales aparecen a densidades  $\approx 10^{-8} \text{ fm}^{-3}$ . Sin embargo, a densidades más altas, la fracción de neutrones rápidamente se eleva a valores cercanos a 1, debido a que por cada protón presente habría un electrón (por conservación de carga), y este gas de electrones es energéticamente desfavorable a tales densidades.

Para completar la ecuación de estado del sistema se obtiene la presión. Basta con agregar la presión generada por los electrones,

$$P_e = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \phi(y_e). \quad (2.36)$$

Entonces la presión total del sistema resulta ser

$$\begin{aligned} P(n_B, x) &= P_n + P_p + P_e \\ &= \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \phi(y_n) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3} \phi(y_p) + \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \phi(y_e), \end{aligned} \quad (2.37)$$



**Figura 2.3:** Curva de valores  $x_i$ , con  $i = n, p$ , ó  $e$ , que minimizan la energía del sistema para cada  $n_B$  en el sistema neutrón-protón-electrón (con  $m_n \neq m_p$ ). La línea vertical marca el valor de la densidad nuclear en saturación.

donde las  $x_j$  que minimizan la energía del sistema para cada  $n_B$  también se utilizan en la presión. En las Figura 2.4 se muestra la densidad de energía y la presión,  $\epsilon = \epsilon(n_B)$ ,  $P = P(n_B)$ , usando los valores adecuados de  $x_i(n_B)$ . La Figura 2.5 muestra la ecuación de estado  $P = P(\rho)$ , con  $\rho = \epsilon/c^2$ .

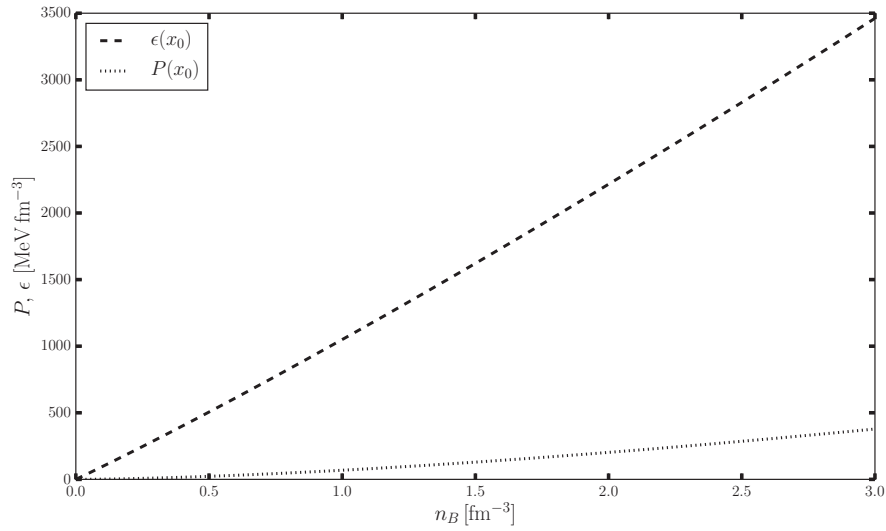
Por otro lado, las curvas de los potenciales químicos (con  $m_n \neq m_p$ ) evaluados en los valores  $x_i$  que minimizan la energía del sistema para cada  $n_B$  se muestran en la gráfica de la Fig. 2.6. En esta Figura es importante notar que para toda  $n_B$ , se cumple que  $\Delta\mu = \mu_p + \mu_e - \mu_n = 0$ . Esto no es coincidencia, y se puede demostrar invocando la Primera Ley de la Termodinámica:

$$dU = TdS - PdV + \mu_n dN_n + \mu_p dN_p + \mu_e dN_e, \quad (2.38)$$

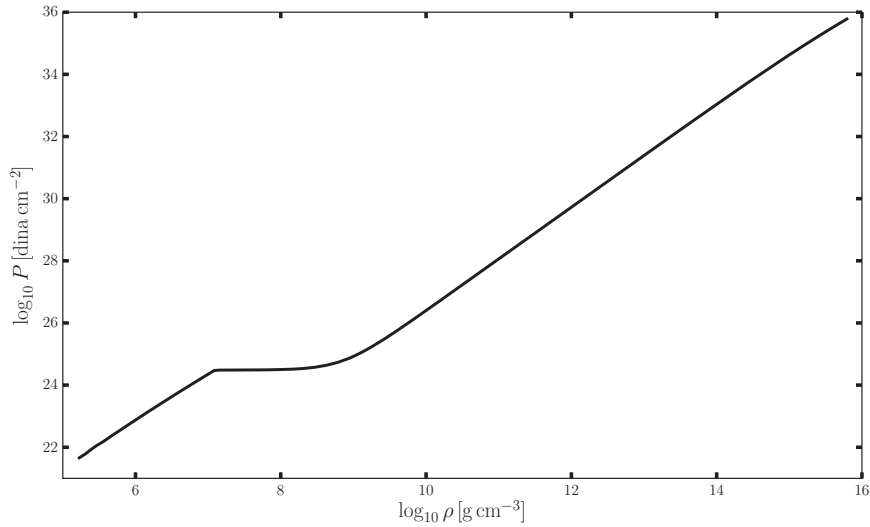
donde  $U$  es la energía del sistema,  $T$  la temperatura,  $S$  la entropía,  $P$  la presión y  $V$  el volumen. Se quiere obtener la energía  $U$  como función de  $x$  y  $n_B$ . Recordando las definiciones realizadas, se tiene que la relación entre la cantidad de bariones,  $N_B$ , y la cantidad de protones,  $N_p$ , es  $N_p = xN_B$ ; con la cantidad de neutrones,  $N_n$ , es  $N_n = (1 - x)N_B$ . Al imponer neutralidad de carga en el sistema, se toma la cantidad de electrones  $N_e$ , tal que  $N_e = N_p$ ; por ello,  $dN_p = dN_e$ . Para obtener las variables

## 2. MARCO TEÓRICO

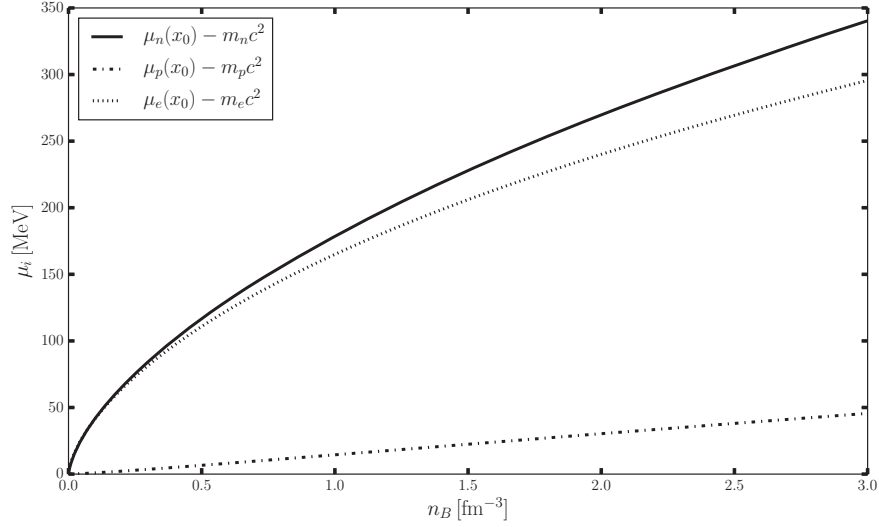
---



**Figura 2.4:** Densidad de energía y presión como función de  $n_B$  usando los valores  $x_i(n_B)$  que minimizan  $\epsilon$ .



**Figura 2.5:** Ecuación de estado  $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$  usando los valores  $x_i(n_B)$  que minimizan  $\epsilon$  a cada  $n_B$ .



**Figura 2.6:** Potenciales químicos del neutrón, protón y electrón, usando los valores  $x_i$  que minimizan sus valores para cada  $n_B$ .

deseadas, se tiene que

$$\begin{aligned} dN_n &= \frac{\partial N_n}{\partial n_B} dn_B + \frac{\partial N_n}{\partial x} dx = (1-x)dN_B - N_B dx \\ dN_p &= \frac{\partial N_p}{\partial n_B} dn_B + \frac{\partial N_p}{\partial x} dx = x dN_B + N_B dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Además, la temperatura  $T$  es nula en este sistema. De esta manera la Primera Ley de la Termodinámica queda

$$dU = -PdV + dN_B [\mu_n(1-x) + (\mu_p + \mu_e)x] + dx [-N_B \mu_n + N_B(\mu_p + \mu_e)]. \quad (2.40)$$

De ello se obtiene

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{N_B=cte; P=cte} = -N_B \mu_n + N_B(\mu_p + \mu_e) = N_B(\mu_p + \mu_e - \mu_n). \quad (2.41)$$

Se debe cumplir la condición de que  $x$  debe tomar valores que minimicen la energía, entonces se tiene  $\partial U / \partial x = 0$ ; como  $N_B \neq 0$ , debe suceder que

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n. \quad (2.42)$$

De esta manera se demuestra que la condición de minimización de la energía con respecto a la fracción relativa de partículas es equivalente a la condición de igualdad de



## 2. MARCO TEÓRICO

---

potenciales químicos. En el presente caso, esta ecuación establece la condición para la existencia de un proceso de transferencia en el que un neutrón decae en un protón y un electrón, al que se le llama *equilibrio- $\beta$* . Dicha relación entre potenciales de partículas será de utilidad en el modelo de materia de estrella de neutrones.

El anterior es un modelo sencillo y no reproduce las propiedades nucleares de los sistemas que queremos describir, como la energía de ligadura ni alguna otra, debido a la ausencia de interacción entre partículas. Sin embargo, resulta útil para dar un primer paso en los procedimientos necesarios para construir un modelo más complejo.

### 2.3. Materia de estrella de neutrones

Para construir una ecuación de estado que permita reproducir las propiedades de bulto de la materia resulta útil hacer uso de los resultados de la Teoría de campos relativista. El tensor de energía-momento empleado en Relatividad General proporciona una relación entre la densidad de energía y la presión asociadas al sistema, y los campos incluidos en una teoría por medio de su *densidad Lagrangiana* (o simplemente *Lagrangiano*). Asimismo, dicha relación permitirá determinar la dependencia entre la densidad y la presión, al ser ambas funciones de la densidad bariónica; a dicha dependencia se le conoce como la “Ecuación de estado”. Como paso intermedio se deben resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange del Lagrangiano, donde el uso de la *aproximación del campo medio* es de utilidad. De esta manera, para obtener la ecuación de estado del sistema basta con definir una densidad Lagrangiana adecuada que incluya las partículas deseadas y sus interacciones para reproducir el comportamiento de la materia nuclear. A este conjunto de técnicas se le conoce como Teoría de Campo Medio Relativista, RMFT, que entra en el esquema más general de Teoría del funcional de densidad, DFT.

En 1974, [Walecka](#) publicó un modelo en el que incluyó solamente un campo bariónico para describir al nucleón, así como un par de campos de mesones, uno escalar que media la atracción (campo  $\sigma$ ) y otro vectorial que media la repulsión (campo  $\omega$ ), para la descripción de las interacciones entre los bariones. En éste introdujo dos constantes de acoplamiento para reproducir la energía de ligadura por nucleón de materia nuclear a densidad de saturación, descritas en el Capítulo 2.1. En 1977, [Boguta and Bodmer](#) introdujeron auto-interacciones del mesón escalar, incluyendo dos constantes de acoplamiento más; con éstas además reprodujeron valores deseados de módulo de compresibilidad y masa efectiva a densidad de saturación. En 1981, además de las consideraciones teóricas anteriores, [Boguta](#) introdujo a su modelo la estabilidad  $\beta$ , lo que permite agregar electrones y muones al modelo y establecer neutralidad de carga en el sistema. Además incluyó un campo extra, el mesón vector-isovector, así como su correspondiente constante de acoplamiento, con lo que introdujo la tendencia del sistema a ser simétrico en isospín; además con dicho parámetro extra pudo ajustar la energía de simetría en saturación.

Este último modelo será utilizado en el presente trabajo para generar la densidad Lagrangiana. Se incluirán los hadrones protón, neutrón, sigma, omega y rho, así como los leptones electrón y muón. Se tomarán en cuenta las interacciones entre protón y neutrón a través de los tres mesones mencionados, además de una auto-interacción a tercer y otra a cuarto orden de  $\sigma$ . El sistema anterior permitirá la reproducción de las propiedades nucleares, así como la adecuada extrapolación a densidades altas presentes en las estrellas de neutrones.

### 2.3.1. Tensor de energía momento

Para obtener una relación entre la ecuación de estado y la densidad bariónica, se define el tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$  como sigue:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.43)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana del sistema,  $\phi_i$  representa al campo  $i$  y  $g^{\mu\nu}$  es la métrica. En el sistema de referencia propio del fluido la métrica a utilizar es  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Para un fluido sin estrés transversal y sin masa en movimiento, el tensor de energía momento toma la forma

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\epsilon, P, P, P). \quad (2.44)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \epsilon = T^{00} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial^0 \phi_i - \eta^{00} \mathcal{L} \\ P = T^{jj} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi_i)} \partial^j \phi_i - \eta^{jj} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Estas ecuaciones, (2.45), serán resueltas para obtener la Ecuación de estado. Para ello se debe definir una densidad lagrangiana adecuada al sistema que se busca describir.

### 2.3.2. Densidad lagrangiana del sistema

La densidad lagrangiana de materia hadrónica a construir se puede obtener utilizando las partículas a utilizar en el modelo, multiplicando escalares entre sí, obteniendo el producto de matrices que genere un escalar, o contrayendo índices entre cuadvectores y entre trivectores de espín, de tal manera que sólo aparezcan escalares (invariantes ante transformaciones de Lorentz y de isoespín) en dicha expresión. El Lagrangiano generalizado para describir materia nuclear a utilizar es el siguiente (Boguta, 1981)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{c^5}{\hbar^3} \bar{\Psi}_N \left( i \frac{\hbar}{c} \gamma_\mu \partial^\mu - m_N + g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu \right) \Psi_N \\ &+ \frac{1}{2} \frac{c^3}{\hbar} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \frac{c^5}{\hbar^3} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} \frac{c^3}{\hbar} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{c^5}{\hbar^3} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ &- \frac{1}{4} \frac{c^3}{\hbar} \vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{c^5}{\hbar^3} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu - U_{\text{ef}}(\sigma, \omega_\mu, \vec{\rho}_\mu) \\ &+ \frac{c^5}{\hbar^3} \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda \left( i \frac{\hbar}{c} \gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda \right) \psi_\lambda, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde los tensores que aparecen con doble subíndice o superíndice se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \\ \vec{\rho}_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu. \end{aligned}$$

Para el propósito del presente trabajo se escogieron los siguientes términos de interacción:

$$U_{\text{ef}}(\sigma, \omega_\mu, \vec{\rho}_\mu) = \frac{c^5}{\hbar^3} \frac{m_N b}{3} (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{c^5}{\hbar^3} \frac{\hat{c}}{4} (g_\sigma \sigma)^4. \quad (2.47)$$

El espinor bariónico se denota por  $\Psi_N$ ; es un doblete que incluye las funciones de onda del protón y neutrón, y  $\bar{\Psi}_N \equiv \Psi_N^\dagger \gamma_0$  denota su espinor adjunto. A su vez, los espinores correspondientes de los leptones  $\lambda$ , electrones y muones, son representados por  $\psi_\lambda$ , cuyo adjunto es  $\bar{\psi}_\lambda \equiv \psi_\lambda^\dagger \gamma_0$ . Éstos transforman como espinor bajo transformaciones de Lorentz, y como doblete bajo transformaciones de Isoespín. El campo  $\sigma$  es un escalar-isoescalar (transforma como escalar bajo transformaciones de Lorentz y de Isoespín); éste se encargará de simular la atracción entre nucleones. El campo  $\omega_\mu$  es un cuadvectores-isoescalar (transforma como cuadri-vector bajo transformaciones de Lorentz y como escalar bajo transformaciones de Isoespín); éste simulará la repulsión entre nucleones. El campo  $\vec{\rho}_\mu$  es un cuadvectores-isovector (transforma como cuadri-vector bajo transformaciones de Lorentz y como trivector bajo transformaciones de Isoespín); este campo será el encargado de incorporar la interacción restauradora de simetría en isoespín, discutido en el modelo nuclear de la gota.

La constante  $m_N$  representa la masa del nucleón, y  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$ ,  $g_\rho$ ,  $b$  y  $\hat{c}$ , son constantes de acoplamiento para la teoría, que servirán para anclar los resultados teóricos a los experimentales descritos anteriormente. En esta expresión,  $c$  representa la rapidez de la luz en el vacío (aunque dicha letra será usada con otro fin posteriormente), y  $\hbar$  es la constante de Planck dividida por  $2\pi$ . El triplete  $\vec{\tau}$  es un arreglo cuyas entradas son las matrices de Pauli (D.1), y el cuadri-vector  $\gamma_\mu$  está formado por matrices relacionadas con las de Pauli mediante (D.4).

La primera línea del lagrangiano representa la energía cinética y de masa de los bariones, además de las interacciones de los bariones con los mesones escalar, vector, y vector-isovector. La segunda línea contiene los términos de energía de masa y cinética para los mesones escalar y vector. La tercera línea incluye la energía de masa y cinética del campo vector-isovector. Además incluye un potencial efectivo,  $U_{\text{ef}}$ , que describe las interacciones entre mesones. En este caso se incluyen términos de autointeracción del campo escalar a orden 3 y 4. La última línea contiene los términos de masa y energía cinética para los leptones, con subíndice  $\lambda$  (electrones y muones en este caso). Estos son agentes importantes en la neutralidad de carga de materia de estrellas de neutrones, y carecen de interacciones en el presente modelo.

Usando unidades naturales  $c = \hbar = 1$ , el Lagrangiano anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}_N \left( i\gamma_\mu \partial^\mu - m_N + g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu \right) \Psi_N \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4} \vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu - U_{\text{ef}}(\sigma, \omega_\mu, \vec{\rho}_\mu) \\ & + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda, \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2. MARCO TEÓRICO

---

con

$$U_{\text{ef}}(\sigma, \omega_\mu, \vec{\rho}_\mu) = \frac{m_N b}{3} (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{c}{4} (g_\sigma \sigma)^4, \quad (2.49)$$

donde la  $c$  que aparece en el potencial efectivo es nueva notación para la constante anteriormente denotada por  $\hat{c}$ , no la rapidez de la luz (la rapidez de la luz ya no aparece explícitamente); a partir de ahora se usará tal notación (Glendenning, 2000, p. 242).

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento del sistema se seguirá el procedimiento descrito en (Glendenning, 2000, pp. 168-173) generalizado para el lagrangiano concerniente en el presente Capítulo. Las ecuaciones de Euler-Lagrange, ecs. (B.8), explícitas para los campos  $\sigma$ ,  $\omega$  y  $\rho$  son, respectivamente,

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma(x) + b m_N g_\sigma^3 \sigma^2(x) + c g_\sigma^4 \sigma^3(x) = g_\sigma \bar{\Psi}_N(x) \Psi_N(x) \quad (2.50)$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega_\mu(x) + \partial_\mu \partial^\nu \vec{\omega}_\nu(x) = g_\omega \bar{\Psi}_N(x) \gamma_\mu \Psi_N(x) \quad (2.51)$$

$$(\square + m_\rho^2) \vec{\rho}_\mu(x) + \partial_\mu \partial^\nu \vec{\rho}_\nu(x) = \frac{g_\rho}{2} \bar{\Psi}_N(x) \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi_N(x), \quad (2.52)$$

donde  $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$ . Y las ecuaciones para el campo bariónico y los leptónicos son, respectivamente,

$$\left[ i \gamma_\mu \partial^\mu - m_N + g_\sigma \sigma(x) - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu(x) - \frac{g_\rho}{2} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu(x) \right] \Psi_N(x) = 0 \quad (2.53)$$

$$[i \gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda] \psi_\lambda(x) = 0. \quad (2.54)$$

### 2.3.3. Aproximación de campo medio

El sistema de ecuaciones diferenciales acoplado obtenido es claramente difícil. Para resolverlo se introduce la llamada *aproximación de campo medio*. El sistema en el que estamos interesados es de materia uniforme en su estado base. Así, en las ecuaciones (2.50) - (2.54) se reemplazan los campos mesónicos por su valor medio (espacio-temporal) en tal estado:  $\sigma(x) \rightarrow \langle \sigma \rangle$ ,  $\omega_\mu(x) \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle$ ,  $\vec{\rho}_\mu(x) \rightarrow \langle \vec{\rho}_\mu \rangle$ . Se utilizará a partir de ahora la nueva notación  $\sigma \equiv \langle \sigma \rangle$ ,  $\omega_\mu \equiv \langle \omega_\mu \rangle$  y  $\vec{\rho}_\mu \equiv \langle \vec{\rho}_\mu \rangle$ . Asimismo se utilizarán los valores medios de las fuentes de corrientes del lado derecho de las ecuaciones (2.50) - (2.52). Los términos que incluyen derivadas sobre los valores medios de los campos se anulan, pues tales valores son independientes de coordenadas espacio-temporales. De esta manera se obtiene el nuevo sistema de ecuaciones para los mesones

$$m_\sigma^2 \sigma + b m g_\sigma^3 \sigma^2 + c g_\sigma^4 \sigma^3 = g_\sigma \langle \bar{\Psi}_N \Psi_N \rangle \quad (2.55)$$

$$m_\omega^2 \omega_\mu = g_\omega \langle \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \Psi_N \rangle \quad (2.56)$$

$$m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu = \frac{g_\rho}{2} \langle \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi_N \rangle, \quad (2.57)$$

y las ecuaciones de Dirac son de la siguiente forma

$$\left[ i \gamma_\mu \partial^\mu - m_N + g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{g_\rho}{2} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu \right] \Psi_N(x) = 0 \quad (2.58)$$

$$[i \gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda] \psi_\lambda(x) = 0. \quad (2.59)$$

En las ecuaciones (2.58) y (2.59) los operadores derivadas espacio-temporales actúan sobre las funciones  $\Psi_N$  y  $\psi_\lambda$  dependientes de  $x$ , sin embargo, el resto de términos son constantes, por lo que no dependen de la posición; de esta manera, las soluciones a dichas ecuaciones son ondas planas de la forma

$$\Psi(x) = \Psi(k)e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.60)$$

$$\psi(x) = \psi(k)e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (2.61)$$

donde  $k_\mu x^\mu = k_0 t - k_j x^j$ . Al sustituir y aplicar el operador derivada se obtiene

$$\left[ \gamma_\mu \left( k^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu \right) - (m_N - g_\sigma \sigma) \right] \Psi_N(x) = 0 \quad (2.62)$$

$$[\gamma_\mu k^\mu - m_\lambda] \psi_\lambda(x) = 0. \quad (2.63)$$

Comparando la ecuación (2.62) con la ecuación de Dirac canónica se pueden definir las siguientes variables

$$K^\mu \equiv k^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu \quad (2.64)$$

$$m^*(\sigma) \equiv m_N - g_\sigma \sigma. \quad (2.65)$$

A  $m^*$  se le llama la *masa efectiva de Dirac*, y es reducida por el campo escalar. Las ecuaciones de Dirac quedan de la siguiente forma

$$[\gamma_\mu K^\mu - m^*] \Psi_N(k) = 0 \quad (2.66)$$

$$[\gamma_\mu k^\mu - m_\lambda] \psi_\lambda(k) = 0. \quad (2.67)$$

Las ecuaciones (2.66) y (2.70) son ecuaciones de *eigenvalores*. Para encontrar los eigenvalores de la ecuación para los nucleones, se multiplica la ecuación por  $[\gamma_\nu K^\nu + m^*]$ :

$$[\gamma_\mu K^\mu - m^*] [\gamma_\nu K^\nu + m^*] = \gamma_\mu K^\mu \gamma_\nu K^\nu - m^{*2} \quad (2.68)$$

$$= K^\mu K^\nu \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu}{2} - m^{*2} = K^\nu K_\nu - m^{*2}, \quad (2.69)$$

donde la última igualdad se da por la propiedad (D.5). Desarrollando lo mismo para la ecuación de leptones, el resultado es

$$[K^\nu K_\nu - m^*] \Psi_N(k) = 0 \quad (2.70)$$

$$[k^\nu k_\nu - m_\lambda] \psi_\lambda(k) = 0. \quad (2.71)$$

Los operadores sobre las funciones de onda se convirtieron en múltiplos que anulan a dichas funciones; por ello,

$$K_0 = \sqrt{\vec{K} \cdot \vec{K} + m^{*2}} \quad (2.72)$$

$$k_0 = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k} + m_\lambda^2}. \quad (2.73)$$

## 2. MARCO TEÓRICO

---

Denotando la componente temporal del quadri-vector  $k^\mu$  como  $e = e(\vec{k})$ , se obtiene la siguiente relación

$$e(\vec{k}) \equiv k_0(\vec{k}) = K_0 + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0. \quad (2.74)$$

Por lo que el eigenvalor del tres-momento  $k^j$  del nucleón es

$$e(\vec{k}) \equiv k_0(\vec{k}) = E(\vec{k}) + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0, \quad (2.75)$$

con

$$E(\vec{k}) \equiv K_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( k^i - g_\omega \omega^i - \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^i \right)^2 + (m_N - g_\sigma \sigma)^2}. \quad (2.76)$$

Y los eigenvalores para las ecuaciones de leptones son

$$e_\lambda(\vec{k}) \equiv k_0(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k} + m_\lambda^2}. \quad (2.77)$$

De esta manera se obtuvieron los eigenvalores de la ecuación de Dirac para los nucleones expresados en términos del valor medio de los campos mesónicos; así como para los leptones, que no dependen de los valores medios de los mesones al no interactuar los primeros con los segundos.

### 2.3.4. Obtención de fuentes de corriente bariónica

Para encontrar los valores explícitos de las corrientes bariónicas en las ecuaciones de movimiento (2.55) - (2.59) (lado derecho de las ecuaciones), se utilizará el siguiente método, descrito en (Glendenning, 2000, pp. 170-172), ajustado al Lagrangiano del presente trabajo.

El estado de un solo nucleón en esta teoría se caracteriza por su tri-momento  $\vec{k}$  y la proyección de espín e isoespín, que denotaremos por  $\kappa$ . Cada estado de momento de neutrón y protón pueden tener una de las dos proyecciones de espín  $\pm 1/2$ . Denotemos por un paréntesis el valor de expectación de un operador  $\Lambda$  en un estado de una sola partícula con momento  $\vec{k}$ ,  $(\bar{\Psi} \Lambda \Psi)_{\vec{k}\kappa}$ . El valor de expectación de dicho operador en el estado menos energético posible en un sistema de muchas partículas es

$$\langle \bar{\Psi} \Gamma \Psi \rangle = \sum_{\kappa} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} (\bar{\Psi} \Gamma \Psi)_{\vec{k}\kappa} \Theta \left[ \mu - e(\vec{k}) \right], \quad (2.78)$$

donde la suma en  $\kappa$  es sobre los estados de espín-isoespín de los estados de momento ocupados y  $\Theta(x)$  es la función de paso que es la unidad para  $x \geq 0$  y cero en otro caso. Se denota la energía de Fermi por  $\mu$ . La integral va de cero hasta el valor de  $\vec{k}$  para el cual los eigenvalores  $e(\vec{k})$  quedan debajo del potencial químico  $\mu$ , i. e., debajo de cierta energía designada. En nuestro caso, la superficie de Fermi generada por la igualdad  $e(\vec{k}) = \mu$  es una esfera.

Por otro lado, el tipo de operador  $\Gamma$  en el que se tiene interés también aparece en el *Hamiltoniano de Dirac*. Para hallarlo, se usará la *Densidad lagrangiana de Dirac*,  $\mathcal{L}_D$ , que aparece en la ecuación (2.62). Recordando que la *Densidad hamiltoniana de Dirac* se define como  $\mathcal{H}_D = \dot{q}^i p_i - \mathcal{L}_D$ , donde  $q^i$  son las coordenadas generalizadas del sistema (en nuestro caso, los campos utilizados) y  $p^i$  los momentos generalizados; y que  $\dot{q}^i = 0$  pues estamos considerando la aproximación de campo medio, se tiene que  $\mathcal{H}_D = -\mathcal{L}_D$ , por lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_D &= -\gamma_\mu k^\mu + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu + m^* \\ &= -\gamma_0 k^0 + \gamma_i k^i + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu + m^*.\end{aligned}\quad (2.79)$$

Como  $\mathcal{L}_D \Psi(k) = 0$ , entonces debe suceder que  $\mathcal{H}_D \Psi(k) = 0$ , es decir, que los eigenvalores de esta última ecuación deben ser cero:

$$-\gamma_0 k^0 + \gamma_i k^i + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu + m_N^* = 0. \quad (2.80)$$

Por ello, despejando  $\gamma_0 k^0$  de la ec. (2.80) y multiplicando ambos lados por  $\gamma_0$ , se obtiene el *Hamiltoniano de Dirac*:

$$H_D \equiv k_0 = \gamma_0 \left[ \gamma_i k^i + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu + m_N^* \right]. \quad (2.81)$$

Este operador es tal que si se toma el valor de expectación en un estado de momento de una sola partícula como se definió con anterioridad, se obtiene

$$\left( \Psi^\dagger H_D \Psi \right)_{\vec{k}_\kappa} = k_0(\vec{k}) = E(\vec{k}) + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0. \quad (2.82)$$

En este caso, el lado derecho de la ecuación es independiente de la etiqueta de la proyección de espín,  $\kappa$ , es decir, los estados de momento son degenerados con ocupación 2.

Tomando la derivada del lado izquierdo de la ecuación (2.82) con respecto a cualquier variable  $\xi$  en el Hamiltoniano,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Psi^\dagger H_D \Psi \right)_{\vec{k}_\kappa} = \left( \Psi^\dagger \frac{\partial H_D}{\partial \xi} \Psi \right)_{\vec{k}_\kappa} + E(\vec{k}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Psi^\dagger \Psi \right)_{\vec{k}_\kappa}. \quad (2.83)$$

Como  $\Psi(\vec{k})$  es una eigenfunción del momento, sólo el primer término de la derecha sobrevive, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Psi^\dagger H_D \Psi \right)_{\vec{k}_\kappa} = \left( \Psi^\dagger \frac{\partial H_D}{\partial \xi} \Psi \right)_{\vec{k}_\kappa}. \quad (2.84)$$

De ahora en adelante se utilizará este resultado (junto con las ecuaciones (2.81) y (2.82)) para obtener las fuentes de corriente.



## 2. MARCO TEÓRICO

---

Como primer caso se tomará la derivada con respecto a  $\omega_0$ . Esto establece de inmediato la normalización

$$\left(\Psi^\dagger\Psi\right)_{\mathbf{k}_\kappa} = 1. \quad (2.85)$$

Usando la ecuación (2.78) se tiene la densidad numérica bariónica,  $n$ , de la forma

$$n = \langle\Psi^\dagger\Psi\rangle = (2J_p + 1) \int_0^{k_p} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \Theta\left[\mu - \epsilon(\vec{k})\right] + (2J_n + 1) \int_0^{k_n} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \Theta\left[\mu - \epsilon(\vec{k})\right]. \quad (2.86)$$

Esto es el resultado obtenido con anterioridad para la densidad numérica.

De igual manera se puede derivar con respecto a  $k^i$ , generando la siguiente ecuación:

$$\left(\bar{\Psi}\gamma^i\Psi\right)_{\vec{k}_\kappa} = \frac{\partial}{\partial k^i} E(\vec{k}). \quad (2.87)$$

Por lo que la corriente de nucleones es

$$\begin{aligned} \langle\bar{\Psi}\gamma^i\Psi\rangle &= \sum_b (2J_b + 1) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\partial}{\partial k^i} E(\vec{k})\right) \Theta\left[\mu - \epsilon(\vec{k})\right] \\ &= \sum_b 2 \int \frac{dk^i dk^j dk^q}{(2\pi^3)} \left(\frac{\partial}{\partial k^i} E(\vec{k})\right) \Theta\left[\mu - \epsilon(\vec{k})\right] \\ &= \sum_b 2 \int \frac{dk^j dk^q}{(2\pi^3)} \int dE(k^j, k^q) \Theta\left[\mu - \epsilon(\vec{k})\right] = 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

La integral es sobre los estados de momento ocupados; se anula porque  $E(\vec{k})$  iguala a la constante  $\mu - g_\omega\omega_0 - \frac{1}{2}g_\rho\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0$  en toda la frontera de la superficie de la región de integración (al tratarse de un sistema isotrópico). Por ello,  $dE$  es la diferencia de dos números iguales. Como consecuencia de que dicha corriente sea nula, se sigue de la ecuación de movimiento para  $\omega_i$  que el valor medio de la componente  $i$  de dicho mesón se anula; asimismo, que la superficie del espacio de momento ocupado es una esfera (de Fermi). Entonces el eigenvalor a la ecuación de Dirac se escribe simplemente como

$$e(\mathbf{k}) \equiv k_0(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}) + g_\omega\omega_0 + \frac{1}{2}g_\rho\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0, \quad (2.89)$$

con  $E(\mathbf{k}) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (k^i - \frac{1}{2}g_\rho\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^i)^2 + (m - g_\sigma\sigma)^2}$ . De lo anterior, resolviendo la ecuación (2.86) en coordenadas esféricas se obtiene

$$\begin{aligned} n = \langle\Psi^\dagger\Psi\rangle &= (2J_p + 1) \int_0^{k_{fp}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} + (2J_n + 1) \int_0^{k_{fn}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{2(4\pi)}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{fp}} k^2 dk + \frac{2(4\pi)}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{fn}} k^2 dk \\ &= \frac{k_{fp}^3}{3\pi^2} + \frac{k_{fn}^3}{3\pi^2} = n_p + n_n, \end{aligned} \quad (2.90)$$

donde  $n_p \equiv \frac{k_{F_p}^3}{3\pi^2}$  y  $n_n \equiv \frac{k_{F_n}^3}{3\pi^2}$ . Esto es conocido comúnmente como la *densidad vectorial*, a diferencia de la *densidad escalar* que obtendremos a continuación. La densidad vectorial es la componente temporal de la corriente bariónica conservada.

La densidad escalar es de la forma  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ . Derivando con respecto a  $m_N$ ,

$$\frac{\partial H_D}{\partial m_N} = \gamma_0, \quad (2.91)$$

por lo que

$$\left( \Psi^\dagger \frac{\partial H_D}{\partial m_N} \Psi \right)_{\mathbf{k}_\kappa} = (\bar{\Psi} \gamma_0 \gamma_0 \Psi)_{\mathbf{k}_\kappa} = (\bar{\Psi} \Psi)_{\mathbf{k}_\kappa}. \quad (2.92)$$

Así,

$$(\bar{\Psi} \Psi)_{\mathbf{k}_\kappa} = \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial m_N} = \frac{m_N - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (m_N - g_\sigma \sigma)^2}}. \quad (2.93)$$

Entonces la densidad escalar,  $n_s$ , es

$$\begin{aligned} n_s \equiv \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle &= (2J_p + 1) \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_p}} k^2 dk \frac{m_N - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (m_N - g_\sigma \sigma)^2}} \\ &+ (2J_n + 1) \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_n}} k^2 dk \frac{m_N - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (m_N - g_\sigma \sigma)^2}} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_p}} k^2 dk \frac{m_N - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (m_N - g_\sigma \sigma)^2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_n}} k^2 dk \frac{m_N - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (m_N - g_\sigma \sigma)^2}} \\ &= \frac{m^* k_{F_p}}{2\pi^2} \sqrt{m^{*2} + k_{F_p}^2} - \frac{m^{*3}}{2\pi^2} \log \left( \frac{k_{F_p} + \sqrt{m^{*2} + k_{F_p}^2}}{m^*} \right) \\ &+ \frac{m^* k_{F_n}}{2\pi^2} \sqrt{m^{*2} + k_{F_n}^2} - \frac{m^{*3}}{2\pi^2} \log \left( \frac{k_{F_n} + \sqrt{m^{*2} + k_{F_n}^2}}{m^*} \right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Por último, falta obtener las corrientes para las ecuaciones del mesón  $\rho$ . Haciendo uso nuevamente del método, derivando con respecto a  $\vec{\rho}^i$ ,

$$\frac{g_\rho}{2} (\bar{\Psi} \gamma_i \vec{\tau} \Psi) = \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{\rho}^i} = \frac{-\frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} k^i + (\frac{g_\rho}{2} \vec{\tau})^2 \vec{\rho}^i}{E(\vec{k})}. \quad (2.95)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{g_\rho}{2} \langle \bar{\Psi} \gamma_i \vec{\tau} \Psi \rangle &= \sum_b (2J_b + 1) \int \frac{d\vec{k}_b}{(2\pi)^3} \frac{-\frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} k^i + (\frac{g_\rho}{2} \vec{\tau})^2 \vec{\rho}^i}{E(\vec{k})} \\ &= 2 \sum_b \int \frac{d\vec{k}_b}{(2\pi)^3} \frac{-\frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} k^i}{E(\vec{k})} \\ &+ 2 \sum_b \int \frac{d\vec{k}_b}{(2\pi)^3} \frac{(\frac{g_\rho}{2} \vec{\tau})^2 \vec{\rho}^i}{E(\vec{k})}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

## 2. MARCO TEÓRICO

---

donde la suma sobre  $b$  significa sumar sobre los espacios de momentos del protón y del neutrón,  $b = p, n$ . Para facilitar los cálculos de dichas integrales se utilizarán coordenadas esféricas, pues ya sabemos que la superficie de Fermi es una esfera. Sin embargo, en la expresión anterior se tiene el índice  $i$  que corre sobre  $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ , coordenadas cartesianas, no sobre coordenadas esféricas. También se sabe que  $E$  es isotrópica pues el sistema lo es, por lo que  $E = E(k^r)$  sólo depende de la coordenada radial del momento. Utilizando el cambio a coordenadas esféricas:  $k^x = k^r \sin(k^\theta) \cos(k^\phi)$ ,  $k^y = k^r \sin(k^\theta) \sin(k^\phi)$ ,  $k^z = k^r \cos(k^\theta)$ , con  $r, \theta$  y  $\phi$  las nuevas variables y  $k^r, k^\theta$  y  $k^\phi$  sus respectivos números de onda, se tiene que la siguiente integral expresada de manera general con una función arbitraria  $f = f(k^r)$  por un vector arbitrario  $v^i$

$$\int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v^i, \quad (2.97)$$

se puede descomponer en tres casos. Caso  $i = x$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v^x \\ &= \int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v(k^r) \sin(k^\theta) \cos(k^\phi) \\ &= \int_0^{k_f} dk^r k^{r^2} f(k^r) v(k^r) \int_0^\pi dk^\theta \sin^2(k^\theta) \int_0^{2\pi} dk^\phi \cos(k^\phi) = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

pues  $\int_0^{2\pi} dk^\phi \cos(k^\phi) = 0$ . Caso  $i = y$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v^y \\ &= \int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v(k^r) \sin(k^\theta) \sin(k^\phi) \\ &= \int_0^{k_f} dk^r k^{r^2} f(k^r) v(k^r) \int_0^\pi dk^\theta \sin^2(k^\theta) \int_0^{2\pi} dk^\phi \sin(k^\phi) = 0, \end{aligned} \quad (2.99)$$

ya que  $\int_0^{2\pi} dk^\phi \sin(k^\phi) = 0$ . Caso  $i = z$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v^z \\ &= \int_0^{k_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dk^r dk^\phi dk^\theta k^{r^2} \sin(k^\theta) f(k^r) v(k^r) \cos(k^\theta) \\ &= \int_0^{k_f} dk^r k^{r^2} f(k^r) v(k^r) \int_0^{2\pi} dk^\phi \int_0^\pi dk^\theta \sin(k^\theta) \cos(k^\theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.100)$$

debido a que  $\int_0^\pi dk^\theta \sin(k^\theta) \cos(k^\theta) = 0$ . En particular, si se toma  $f(k^r) = \frac{-\frac{1}{2}g_\rho\tau_3}{E(k^r)}$  y  $v^i = k^i$  como en la primera integral en (2.96); o  $f(k^r) = \frac{(\frac{1}{2}g_\rho\vec{\tau})^2}{E(k^r)}$  y  $v^i = \vec{\rho}^i$  como en la

segunda integral, se tiene que

$$\frac{g_\rho}{2} \langle \bar{\Psi} \gamma_i \vec{\tau} \Psi \rangle = 0. \quad (2.101)$$

Así, la solución de las tres ecuaciones espaciales que aparecen en (2.57) es  $\vec{\rho}^i = 0$ . Esto implica que

$$E(k) \equiv E(\vec{k}) = \sqrt{k^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}. \quad (2.102)$$

De esta manera, los eigenvalores de energía de los nucleones quedan descritos por la siguiente relación.

$$e(k) = \sqrt{k^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0. \quad (2.103)$$

Por otro lado, en este sistema se prohíbe la transformación por medio de una partícula  $\rho$  de un neutrón en un protón, y viceversa. Dichas transformaciones se pueden llevar a cabo por medio del intercambio de las componentes  $\rho_{01}$  y  $\rho_{02}$ . Por ello, sus valores de expectación sobre el estado base deben anularse, de lo contrario el número de carga no se conservaría en este sistema. De esta manera la única componente distinta de cero del mesón vector-isovector será  $\rho_{03}$ . Esto reduce el número de ecuaciones relacionadas con el campo  $\rho$ , y simplifica en las que éste aparece. Además, en la fuente de corriente (valor de expectación) de la componente 3 de la parte vectorial del mesón  $\rho$ , el operador  $\tau_3$  produce un factor  $\pm 1$ , relacionado con el isospín, que depende de si se trata del valor de expectación para protón o neutrón. Así, para la ecuación temporal de (2.57) relacionada con  $\rho_{03}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_\rho \langle \bar{\Psi}_N \gamma_0 \tau_3 \Psi \rangle &= \frac{1}{2} g_\rho \langle \Psi_N^\dagger \tau_3 \Psi_N \rangle \\ &= \frac{g_\rho}{2} (n_p - n_n) = \frac{g_\rho}{2} \left( \frac{k_{F_p}^3}{3\pi^2} - \frac{k_{F_n}^3}{3\pi^2} \right), \end{aligned} \quad (2.104)$$

pues el valor de expectación del isospín es la densidad de isospín del protón y electrón, que tienen isospines  $1/2$  y  $-1/2$  y densidades numéricas  $n_p$ ,  $n_n$ , respectivamente.

En resumen, las eigenenergías de protón y neutrón son, respectivamente,

$$\begin{aligned} e_p(k) &= \sqrt{k^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_{03} \\ e_n(k) &= \sqrt{k^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} + g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \rho_{03}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

La eigenenergía del leptón  $\lambda$  (electrón o muón) es

$$e_\lambda(k) = \sqrt{k^2 + m_\lambda}. \quad (2.106)$$

## 2. MARCO TEÓRICO

---

Y el nuevo sistema de ecuaciones es el siguiente.

$$m_\sigma^2 \sigma + b m g_\sigma^3 \sigma^2 + c g_\sigma^4 \sigma^3 =$$

$$g_\sigma \frac{m^* k_{F_p}}{2\pi^2} \sqrt{m^{*2} + k_{F_p}^2} - g_\sigma \frac{m^{*3}}{2\pi^2} \log \left( \frac{k_{F_p} + \sqrt{m^{*2} + k_{F_p}^2}}{m^*} \right) \quad (2.107)$$

$$+ g_\sigma \frac{m^* k_{F_n}}{2\pi^2} \sqrt{m^{*2} + k_{F_n}^2} - g_\sigma \frac{m^{*3}}{2\pi^2} \log \left( \frac{k_{F_n} + \sqrt{m^{*2} + k_{F_n}^2}}{m^*} \right)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \left( \frac{k_{F_p}^3}{3\pi^2} + \frac{k_{F_n}^3}{3\pi^2} \right) \quad (2.108)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = \frac{g_\rho}{2} \left( \frac{k_{F_p}^3}{3\pi^2} - \frac{k_{F_n}^3}{3\pi^2} \right). \quad (2.109)$$

Las soluciones de los campos medios en las ecuaciones anteriores se deben obtener para un conjunto de densidades numéricas bariónicas,  $n$  ( $k_F$  está en función de  $n$ ). Además, la ecuación para  $\sigma$  es implícita, por lo que se utilizarán métodos numéricos para resolverla.

### 2.3.5. Ecuación de Estado del sistema

Una vez resueltas las ecuaciones de Euler Lagrange con aproximación de campo medio, se pueden sustituir las soluciones en las ecuaciones (2.45). Debido a que los valores obtenidos son únicamente el valor esperado de los campos, estas ecuaciones también proporcionarán el valor medio de la densidad de energía y presión,  $\epsilon$  y  $P$ . Entonces los términos con derivadas espacio temporales de los campos del lado derecho de ambas ecuaciones se anulan. Aplicando el valor esperado, se tiene

$$\epsilon = -\langle \mathcal{L} \rangle + \langle \bar{\Psi} \gamma_0 k_0 \Psi \rangle$$

$$P = \langle \mathcal{L} \rangle + \frac{1}{3} \langle \bar{\Psi} \gamma_i k_i \Psi \rangle, \quad (2.110)$$

ya que  $i\partial_\mu \Psi(k) = k_\mu \Psi(k)$  y  $\partial_\mu \omega^\mu = 0$ . El valor 1/3 en la presión aparece debido a que cada una de las tres componentes espaciales del tensor de energía-momento involucra la suma  $\gamma_i k^i$ , con  $i$  sumada.

El valor esperado del Lagrangiano sólo contendrá los términos que no se anulan, es decir, los términos que no contengan derivadas o que no se anulen debido a las ecuaciones de movimiento del valor esperado de los campos (incluyendo la ecuación de Dirac). Entonces

$$\langle \mathcal{L} \rangle = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 - \langle U_{\text{ef}} \rangle, \quad (2.111)$$

con

$$\langle U_{\text{ef}} \rangle = \frac{b}{3} m_N g_\sigma^3 \sigma^3 + \frac{c}{4} g_\sigma^4 \sigma^4. \quad (2.112)$$

El segundo término de  $\epsilon$  en la ecuación (2.110) es el valor de expectación de los eigenvalores de la ecuación de Dirac;

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\Psi}_N \gamma_0 k_0 \Psi_N \rangle &= \langle \bar{\Psi}_N \gamma_0 e(\vec{k}) \Psi_N \rangle \\
 &= g_\omega \omega_0 \langle \bar{\Psi}_N \gamma_0 \Psi_N \rangle + \frac{1}{2} g_\rho \rho_{03} \langle \bar{\Psi}_N \gamma_0 \tau_3 \Psi_N \rangle + \langle \Psi_N^\dagger E(\vec{k}) \Psi_N \rangle \\
 &= [m_\omega^2 \omega_0^2] + [m_\rho^2 \rho_{03}^2] + \sum_b (2J_b + 1) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} E(\vec{k}),
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

donde se usaron las ecuaciones de campo (2.56) - (2.57) en la última igualdad para sustituir las fuentes de corriente. Definiendo  $x_b \equiv \frac{k_{F_b}}{m_b^*}$  y  $J_b$  como el espín del barión  $b$ , se obtiene la integral:

$$\begin{aligned}
 \sum_b (2J_b + 1) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} E(\vec{k}) &= \sum_b \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_b}} dk k^2 E(k) \\
 &= \sum_b \frac{1}{\pi^2} \frac{m_b^{*4}}{8} \left[ x_b \sqrt{1 + x_b^2} (1 + 2x_b^2) - \ln \left( x_b + \sqrt{1 + x_b^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

Para obtener el valor esperado de la presión se tiene que

$$(\bar{\Psi}_N \gamma_j \Psi_N)_{\mathbf{k}_\kappa} = \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial k^j}, \tag{2.115}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\Psi}_N \gamma_i k_i \Psi_N \rangle &= \sum_b (2J_b + 1) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{E(k)} = \sum_b \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_b}} \frac{k^4 dk}{E(k)} \\
 &= \sum_b \frac{1}{\pi^2} \frac{3m_b^{*4}}{8} \left[ x_b \sqrt{1 + x_b^2} \left( \frac{2}{3} x_b^2 - 1 \right) + \ln \left( x_b + \sqrt{1 + x_b^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

El término obtenido tiene suma sobre el índice  $b$  para los bariones, pero también se debe considerar la componente energética proporcionada por los leptones posibles del sistema, que serán denotados con el índice  $l$ ; así se define  $x_l \equiv \frac{k_{F_l}}{m_l}$ . De esta manera, la densidad de energía resulta ser la siguiente.

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + \frac{b}{3} m_N g_\sigma^3 \sigma^3 + \frac{c}{4} g_\sigma^4 \sigma^4 \\
 &+ \sum_{b=n,p} \frac{m_b^{*4}}{8\pi^2} \left[ x_b \sqrt{1 + x_b^2} (1 + 2x_b^2) - \ln \left( x_b + \sqrt{1 + x_b^2} \right) \right] \\
 &+ \sum_{l=e,\mu} \frac{m_l^4}{8\pi^2} \left[ x_l \sqrt{1 + x_l^2} (1 + 2x_l^2) - \ln \left( x_l + \sqrt{1 + x_l^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

## 2. MARCO TEÓRICO

---

La presión está dada por

$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 - \frac{b}{3}m_N g_\sigma^3\sigma^3 - \frac{c}{4}g_\sigma^4\sigma^4 \\
 & + \sum_{b=n,p} \frac{m_b^{*4}}{8\pi^2} \left[ x_b \sqrt{1+x_b^2} \left( \frac{2}{3}x_b^2 - 1 \right) + \ln \left( x_b + \sqrt{1+x_b^2} \right) \right] \\
 & + \sum_{l=e,\mu} \frac{m_l^4}{8\pi^2} \left[ x_l \sqrt{1+x_l^2} \left( \frac{2}{3}x_l^2 - 1 \right) + \ln \left( x_l + \sqrt{1+x_l^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Ambas relaciones generan funciones  $\epsilon = \epsilon(n_B)$  y  $P = P(n_B)$ , por lo que dada una densidad numérica bariónica  $n_B$  se puede obtener la relación  $P = P(\epsilon)$ , que es la ecuación de estado buscada.

### 2.3.6. Constricciones físicas del sistema

Debido a que el sistema permite el intercambio de unas partículas por otras, se necesitan asegurar constricciones apropiadas para el estado de la materia en el que uno está interesado. Dicho estado estará caracterizado por valores específicos de cantidades conservadas como el número bariónico y la carga (eléctrica), los cuales están especificados en (Glendenning, 2000, pp. 173-174, 190-191) y se describen en esta sección:

$$n_b = (2J_b + 1)k_{b,F}^3/(6\pi^2) \tag{2.119}$$

$$Q_i = (2J_i + 1)q_i k_{i,F}^3/(6\pi^2), \tag{2.120}$$

donde  $n_b$  representa la densidad numérica de los distintos tipos de bariones (protones y neutrones),  $b$ ; y  $Q_i$  las cargas de las partículas con carga (protones, electrones y muones),  $i$ . Las densidades totales cumplen

$$n = \sum_b n_b = n_p + n_n = n_B \tag{2.121}$$

$$q = \sum_i Q_i = n_p - n_e - n_\mu = 0. \tag{2.122}$$

Por otro lado, para que una partícula pueda decaer en otras, debe suceder una condición de igualdad de potenciales químicos de las partículas  $i$ , definidos como  $\mu_i$ . Como se desea incluir conversión de electrones en muones, y neutrones en protones y electrones (y viceversa) en el sistema, se deben imponer condiciones matemáticas que representan dichos procesos (Glendenning, 2000, p. 190):

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \tag{2.123}$$

$$\mu_e = \mu_\mu. \tag{2.124}$$

Tales condiciones de equilibrio- $\beta$  son de hecho equivalentes a pedir que la energía sea mínima bajo variaciones de las concentraciones  $x_i$  de las distintas familias de fermiones,

como se mostró en la sección 2.2.2. Los potenciales químicos, iguales a las energías de Fermi en sistemas tales que  $T = 0^1$ , se relacionan con los momentos de Fermi que aparecen en la expresión (2.119) y (2.120) mediante

$$\mu_i = e_i(k_{F_i}), \quad (2.125)$$

donde el eigenvalor de  $e_i(k_{F_i})$  es el dado por (2.105) para los bariones, y por (2.106) para los leptones.

Dichas constricciones se suman a las ecuaciones matemáticas que describen al sistema unívocamente. De esta manera, para obtener los valores de (2.117) y (2.118) se debe resolver el sistema de ecuaciones que consiste de: tres ecuaciones de Euler-Lagrange para los mesones  $\sigma$ ,  $\omega$  y  $\rho$ , ecs. (2.107), (2.108) y (2.109); dos ecuaciones que imponen la conservación de números bariónicos y de carga en el sistema, ecs. (2.121) y (2.122); y dos ecuaciones que imponen las condiciones energéticas para los decaimientos  $\beta$  y de leptones, ecs. (2.123) y (2.124). Este sistema de siete ecuaciones es función de siete variables: los valores esperados de los campos  $\sigma$ ,  $\omega_0$ ,  $\rho_{03}$ ; y las densidades numéricas de las partículas electrón, muón, neutrón y protón,  $n_e$ ,  $n_\mu$ ,  $n_n$  y  $n_p$ . Dichas variables son dependientes entre sí, pero al final todo el sistema se puede considerar únicamente función de la densidad bariónica,  $n_B$ . Para la solución de dicho sistema de ecuaciones se optará por la utilización de métodos numéricos.

---

<sup>1</sup>Ésta es una suposición válida dado que temperaturas mayores a cero en estrellas de neutrones modifican mínimamente el potencial químico, pues para casos relativistas,  $\mu(T) = E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + O\left( \frac{T}{T_F} \right)^6 \right]$ , siendo  $T \approx 10^6$  K y  $T_F \approx 10^{12}$  K en estrellas de neutrones. (Landau and Lifshitz, 1980, pp. 168-170)



## 2.4. Perfil gravitacional de la estrella de neutrones

Las estrellas de neutrones están en equilibrio hidrostático. En estos sistemas la presión generada por la materia equilibra la compresión generada por la interacción gravitacional, que a altas densidades se vuelve relativista. Dicho equilibrio hidrostático relativista está descrito por las Ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), donde se incluye la Ecuación de estado. Resolver dichas ecuaciones significa determinar una relación entre la masa, el potencial gravitacional, la densidad y la presión con el radio. A dichas relaciones se les conoce como el perfil de la estrella de neutrones. Este perfil servirá para verificar la validez (o invalidez) de un modelo teórico sobre la composición de las estrellas de neutrones al compararlo con datos experimentales, siendo de particular utilidad la masa y radio estelares máximos que la estrella puede alcanzar considerando dicho modelo.

En este capítulo se obtendrán las ecuaciones TOV, con el método descrito en [Shutz \(2009, pp. 151-262\)](#).

### 2.4.1. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

En el presente modelo se tomará a la estrella de neutrones con forma esférica, por lo que una métrica adecuada para la descripción de dicho sistema es la siguiente:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.126)$$

donde  $\Phi$  y  $\Lambda$  son funciones de  $t$  y  $r$ , la coordenada de tiempo y radial, respectivamente; además se usó la rapidez de la luz,  $c = 1$ . Esta métrica sirve para describir el campo gravitacional dentro y fuera de la estrella. Considerando que la estrella se encuentra en equilibrio hidrostático, se puede tomar a  $\Phi$  y  $\lambda$  independientes de  $t$  ([Shapiro and Teukolsky, 2004](#), p. 124). Dicho equilibrio implica a su vez que en este sistema la única componente de la cuatro-velocidad  $\vec{u} = (u^0, u^i)$  que no se anula es  $u^0$ . La condición de normalización  $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$  implica que

$$u^0 = e^{-\Phi}; u_0 = -e^{\Phi}. \quad (2.127)$$

Usando la definición del tensor de esfuerzos, ec. (2.43), se obtienen sus componentes

$$T_{00} = \epsilon e^{2\Phi} \quad (2.128)$$

$$T_{rr} = P e^{2\Lambda} \quad (2.129)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 P \quad (2.130)$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta}. \quad (2.131)$$

Las leyes de conservación en relatividad general aseguran que

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (2.132)$$

donde la “ $_{;\beta}$ ” representa la derivada covariante del término a su izquierda, con respecto a la coordenada  $\beta$ ; éstas son cuatro ecuaciones, una para cada índice  $\alpha$ . Debido a la simetría esférica y la independencia temporal impuesta, sólo la ecuación para  $\alpha = r$  es no trivial, y resulta ser

$$(\epsilon + P) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dP}{dr}. \quad (2.133)$$

Esta es la ecuación que determina el gradiente de presión necesario para mantener al fluido estático en el campo gravitacional.

Por otro lado, las ecuaciones de campo de Einstein (para un universo estático localmente) son

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (2.134)$$

donde la constante de gravitación universal  $G = 1$ ;  $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$  es el tensor de Einstein;  $g_{\alpha\beta}$  es la métrica del sistema;  $R = R^\sigma_\sigma$  es el escalar de Ricci;  $R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}$  es el tensor de Ricci;  $R^\delta_{\gamma\mu\nu} = \Gamma^\delta_{\gamma\nu,\mu} - \Gamma^\delta_{\gamma\mu,\nu} + \Gamma^\delta_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\gamma\nu} - \Gamma^\delta_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\gamma\mu}$  con “ $_{,\mu}$ ” denotando la derivada parcial con respecto a la coordenada  $\mu$ , es el tensor de curvatura de Riemann; y  $\Gamma^\delta_{\mu\mu} = \frac{1}{2}g^{\delta\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$  son los símbolos de Christoffel de la métrica.

De esta manera, usando la definición del tensor de Einstein, con la métrica definida en la ec. (2.126), se obtiene lo siguiente.

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\Phi} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})] \quad (2.135)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r}\Phi' \quad (2.136)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\Lambda} \left[ \Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi'\Lambda' - \frac{\Lambda'}{r} \right] \quad (2.137)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}, \quad (2.138)$$

con  $\Phi' = d\Phi/dr$ . Todas las demás componentes del tensor de Einstein se anulan.

Usando las ecuaciones (2.128) y (2.135), se puede determinar explícitamente la componente (0,0) de las ecuaciones de Einstein (2.134). Primero, si se define la siguiente función,

$$m(r) \equiv \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda}), \quad (2.139)$$

entonces se tiene que

$$g_{rr} \equiv e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (2.140)$$

Por ello, la forma explícita de la ecuación (0,0) es de la forma

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.141)$$

donde  $\rho = \epsilon/c^2$ , y  $c$  es la rapidez de la luz en el vacío (en nuestro caso se toma  $c = 1$  pero para utilizar otro tipo de unidades es importante tomarlo en cuenta). Esta ecuación es de la misma forma que la ecuación para el caso Newtoniano, en cuyo caso la función

## 2. MARCO TEÓRICO

---

$m(r)$  es conocida como “la masa” dentro de una esfera de radio  $r$ . Por ello a  $m(r)$  se le llama la “función de masa” o “masa gravitacional”. Con esto podemos obtener la distancia radial propia:

$$dl = g_{rr}^{1/2} dr = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \quad (2.142)$$

de tal manera que el volumen propio de una capa de espesor  $dr$  es  $dV = 4\pi r^2 dl$ . Si en lugar de usar la diferencial de la coordenada  $r$  se usa la diferencial de intervalo  $dl$ , se obtiene la “masa propia”:

$$dm_{\text{prop}} = 4\pi r^2 \rho dl, \quad (2.143)$$

o equivalentemente, usando la densidad bariónica,  $n_{\text{bar}}$ , en lugar de la densidad de masa, se obtiene el “numero bariónico” (el cual es a fuerza un “número bariónico propio”):

$$dN_{\text{bar}} = 4\pi r^2 n_{\text{bar}} dl, \quad (2.144)$$

que al multiplicar por la unidad de masa atómica,  $m_u$ , genera la “masa bariónica” (que también es una “masa bariónica propia”):

$$dm_{\text{bar}} = 4\pi r^2 m_u n_{\text{bar}} dl. \quad (2.145)$$

Esta masa bariónica es relevante cuando se considera la evolución de las estrellas, ya que se conserva, pues es proporcional al número bariónico, mientras que las masas gravitacionales y propias no se conservan. La masa gravitacional es de relevancia ya que es la que se mide en sistemas binarios. La masa propia se menciona solo por curiosidad y nunca se considera.

La ecuación explícita para la componente (r,r) de Einstein tiene la forma

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]}. \quad (2.146)$$

Las ecuaciones (2.133), (2.141) y (2.146), además de la ecuación de estado  $P = P(\rho)$ , son cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas  $\Phi$ ,  $m$ ,  $\rho$  y  $P$  en función del radio de la estrella, que es la única variable libre. A estas ecuaciones se les llama las Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

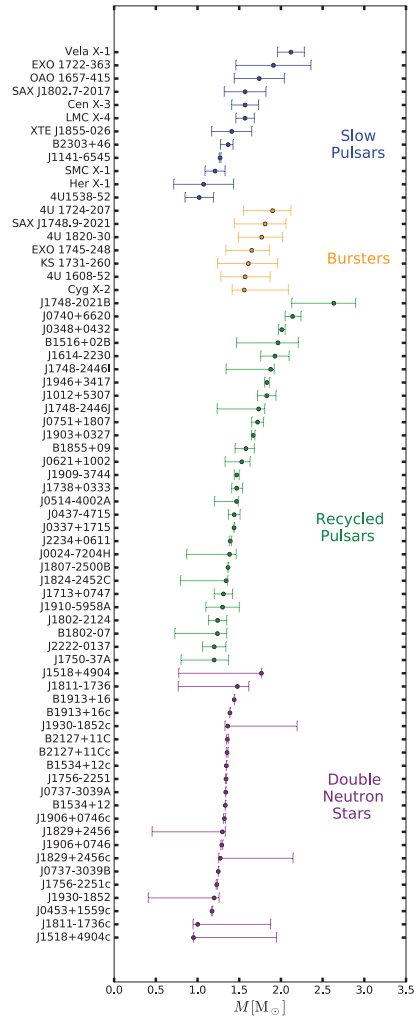
Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene el perfil gravitacional de la estrella, es decir, la información gravitacional de la estrella como función de su radio.

### 2.4.2. Valores experimentales de masa y radio de estrellas de neutrones

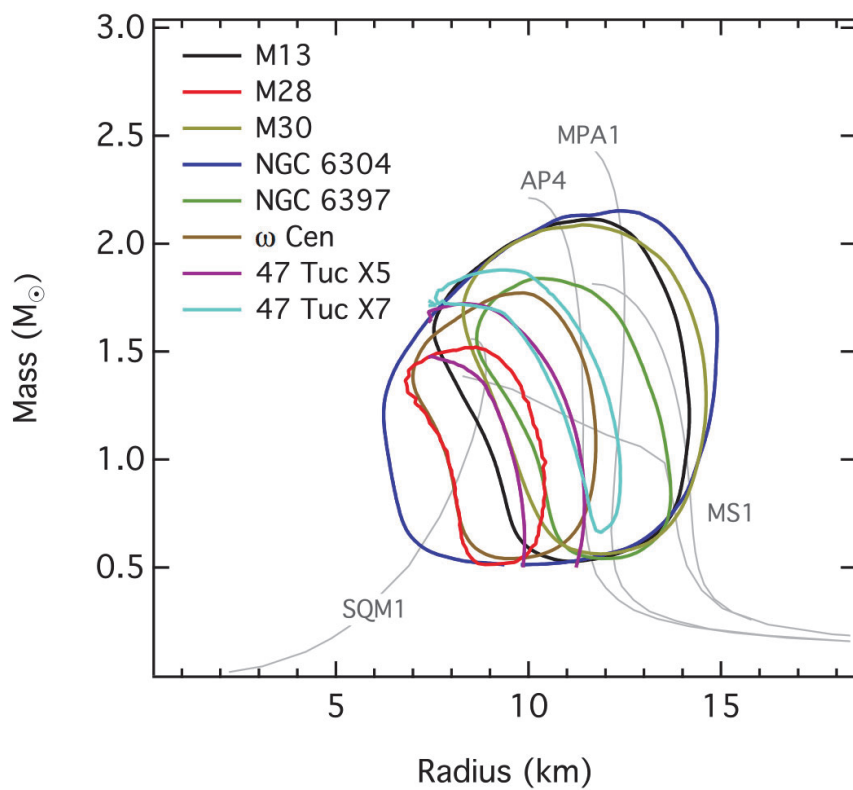
Los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones TOV pueden ser comparados con datos reales sobre la masa total y radio total de estrellas de neutrones. La Figura 2.7 muestra las masas de varias estrellas de neutrones, medidas experimentalmente. Las *Double Neutron Stars*, como su nombre lo indica, hacen referencia a las

estrellas de neutrones dobles; los *Slow Pulsars* se refieren a los pulsares con periodo corto y estrellas de neutrones con compañeras de masa grande; los *Recycled Pulsars* incluyen todos los Pulsares de periodo en milisegundos (MSP por sus siglas en inglés) así como las estrellas de neutrones acretaando compañeras de baja masa; y los *Bursters*, que generan erupciones de rayos X (Özel and Freire, 2016). Asimismo, en las Figuras 2.8 y 2.9 se grafican las curvas de radio estelar contra masa estelar, también conocidas como *curvas MR*, para distintos modelos teóricos (en gris claro), y varios intervalos de masas y radios estelares observados (en colores). De esta manera, un requerimiento mínimo para los modelos a altas densidades es poder reproducir estrellas de neutrones con masas tan altas como la de J1748-2021B en la Figura 2.7, y perfiles tales que coincidan con las mediciones en las Figuras 2.8 y 2.9.

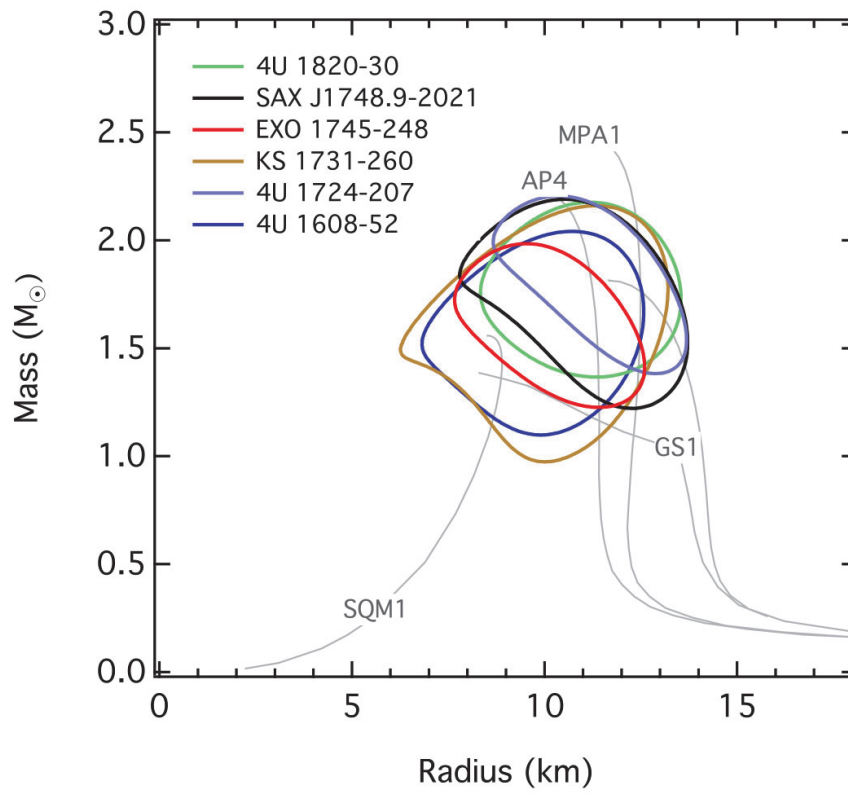
## 2. MARCO TEÓRICO



**Figura 2.7:** Gráfica de masas estelares con incertidumbre medidas experimentalmente para varias estrellas de neutrones. Generada a partir de la tabla de datos proporcionada por Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona (2020), también publicada en Özel and Freire (2016), modificada de los valores de incertidumbre para la masa de J1614-2230, a la que además se le agregó la estrella de neutrones J0740+6620 con sus respectivos valores experimentales, obtenidos de Cromartie et al. (2020).



**Figura 2.8:** Curvas MR de algunos modelos teóricos (en gris claro), e intervalos de masas y radios de estrellas de neutrones observados (en colores), obtenidas de [Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona \(2020\)](#), también publicadas en [Özel and Freire \(2016\)](#).



**Figura 2.9:** Curvas MR de algunos modelos teóricos (en gris claro), e intervalos de masas y radios de estrellas de neutrones observadas (en colores), obtenidas de [Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona \(2020\)](#), también publicadas en [Özel and Freire \(2016\)](#).

### 3.1. Solución de la ecuación de estado

Para determinar los valores explícitos que la Ecuación de Estado toma en función de la densidad bariónica se debe resolver el sistema de ecuaciones obtenido en el Capítulo 2.3. Con ese fin, se debe proporcionar un conjunto de densidades bariónicas donde la Ecuación de estado estará evaluada, y otro de condiciones iniciales del problema, que incluya el valor esperado de los mesones y las densidades de los bosones y leptones. Los métodos numéricos a utilizar serán el método de Newton y de Newton-Raphson para obtener la solución de ecuaciones implícitas. Asimismo, se deben asignar a las constantes incluídas en el modelo valores adecuados para la reproducción de las propiedades nucleares en saturación.

#### 3.1.1. Método numérico

El sistema de ecuaciones acoplado por resolver está compuesto de las ecuaciones (2.107) - (2.109), y (2.121) - (2.124). Este sistema tiene como variables al conjunto  $X$ , compuesto por las densidades  $\sigma$ ,  $\omega_0$ ,  $\rho_{03}$ ,  $n_e$ ,  $n_\mu$ ,  $n_n$  y  $n_p$ . Dadas las características y constricciones del sistema, los valores que tomen éstas dependerán únicamente de la densidad bariónica,  $n_B$ ; por ello, el sistema de ecuaciones se resolverá para un conjunto de valores de  $n_B$  escogido.

La ecuación (2.107) es implícita, por lo que se puede resolver con el método de Newton al definir una función  $f_\sigma$  y su raíz  $X_r$ , tal que  $f(X_r) = 0$ . En este caso el



### 3. MÉTODOS

---

método actuará únicamente sobre la variable  $\sigma$ , dejando las demás fijas, por lo que

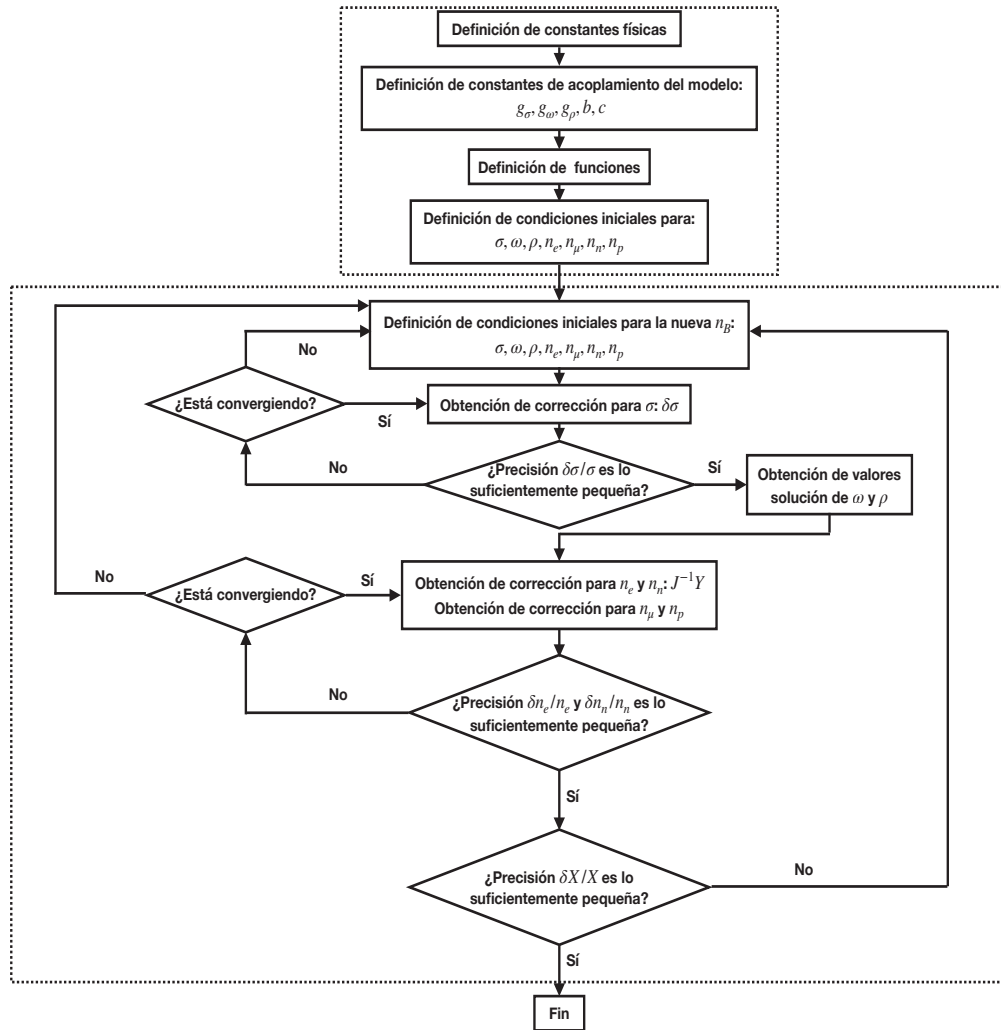
$$\begin{aligned}
 f_\sigma(X) = f_\sigma(\sigma) \equiv & m_\sigma^2 \sigma + b m_N g_\sigma^3 \sigma^2 + c g_\sigma^4 \sigma^3 \\
 & - g_\sigma \frac{m^* k_{F_p}}{2\pi^2} \sqrt{m^{*2} + k_{F_p}^2} + g_\sigma \frac{m^{*3}}{2\pi^2} \log \left( \frac{k_{F_p} + \sqrt{m^{*2} + k_{F_p}^2}}{m^*} \right) \\
 & - g_\sigma \frac{m^* k_{F_n}}{2\pi^2} \sqrt{m^{*2} + k_{F_n}^2} + g_\sigma \frac{m^{*3}}{2\pi^2} \log \left( \frac{k_{F_n} + \sqrt{m^{*2} + k_{F_n}^2}}{m^*} \right),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

de donde se busca la raíz  $\sigma_r$  tal que  $f_\sigma(\sigma_r) = 0$ . El método de Newton requiere la derivada de dicha función,  $df_\sigma$ , que se obtendrá numéricamente. Entonces en cada iteración del método de Newton se definirá la corrección de la raíz,  $\delta\sigma \equiv df_\sigma/f_\sigma$ . Una vez que este método converja se pueden resolver las ecuaciones (2.108) y (2.109), y obtener los valores para  $\omega_0$  y  $\rho_{03}$  directamente, al ser ecuaciones que dependen únicamente de las densidades  $n_n$  y  $n_p$ , cuyos valores están dados de antemano.

Posteriormente, usando los mismos valores de  $n_B$ ,  $n_e$ ,  $n_\mu$ ,  $n_n$ ,  $n_p$  y los nuevos de  $\sigma$ ,  $\omega_0$ ,  $\rho_{03}$ , se procede a resolver las ecuaciones (2.121) - (2.124). De (2.123) se despeja directamente  $n_p$ , quedando  $n_p = n_p(n_e, n_n; \sigma, \omega_0, \rho_{03})$  y de (2.124) se despeja  $n_\mu$  quedando  $n_\mu = n_\mu(n_e; \sigma, \omega_0, \rho_{03})$ . Entonces las cuatro ecuaciones se reducen a dos ecuaciones acopladas con dos incógnitas,  $n_e$  y  $n_n$  (aunque alternativamente se pueden tratar las cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas). Para resolver éstas se utiliza el método de Newton-Raphson (NR) de dos dimensiones sobre una función vector cuyas entradas son equivalentes a las dos ecuaciones restantes, (2.121) y (2.122):

$$\vec{F}(\vec{Y}) = \vec{F}(n_e, n_n) \equiv \begin{pmatrix} n_p(n_e, n_n) - n_e - n_\mu(n_e, n_n) \\ n_n + n_p(n_e, n_n) - n_B \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

tal que  $\vec{F}(\vec{Y}_r) = \vec{F}(n_{e,r}, n_{n,r}) = (0, 0)$ . El método de NR requiere la inversa de la Jacobiana de  $F$ ,  $J^{-1}$ , para determinar las correcciones de la raíz para cada iteración,  $J^{-1}Y$ . Notar que es necesario corregir  $n_\mu$  y  $n_p$  cada que se corrijan  $n_e$  y  $n_n$  (resolviendo (2.123) y (2.124) a cada paso de NR). Una vez que se obtengan los valores de convergencia  $n_{e,r}$ ,  $n_{n,r}$ , estos entrarán como condiciones iniciales del nuevo conjunto  $X$  para el método de Newton (una dimensión), nuevamente, y así sucesivamente. Este proceso se repetirá hasta que el conjunto  $X$  deje de cambiar entre iteración e iteración, es decir, cuando  $\delta X/X$  sea lo suficientemente pequeño (tanto como se quiera y como el sistema computacional lo permita). Este conjunto final  $X_f$  será el conjunto de soluciones para el sistema de ecuaciones en cuestión, para la densidad bariónica  $n_B$  dada en un inicio. El diagrama de flujo de la Figura 3.1 resume el proceso descrito. Éste se repetirá para todas las  $n_B$  deseadas. De esta manera, las soluciones se pueden sustituir en las ecuaciones (2.117) y (2.118) y de esta manera obtener la ecuación de estado en función de la densidad bariónica  $n_B$ ,  $\epsilon = \epsilon(n_B)$  y  $P = P(n_B)$ ; o bien,  $P = P(\epsilon)$ .



**Figura 3.1:** Diagrama de flujo del programa utilizado para la solución numérica de la ecuación de estado.

### 3. MÉTODOS

---

#### 3.1.2. Constantes de acoplamiento: un recorrido histórico

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior se deben proporcionar las constantes físicas necesarias para generar resultados relacionados con la realidad. Éstas son las que aparecen en el Lagrangiano (en unidades naturales) del Capítulo 2.3, es decir,  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$ ,  $g_\rho$ ,  $b$  y  $c$ , además de  $m_n$ ,  $m_p$ ,  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$  y  $m_\rho$ . Las masas de las partículas se muestran en la Tabla 3.1; además se usarán los valores de la Tabla 2.1. Estos valores serán utilizados en todos los casos.

	$m_n$	$m_p$	$m_e$	$m_\mu$	$m_\sigma$	$m_\omega$	$m_\rho$
fm <sup>-1</sup>	4.753	4.753	0.003	0.535	2.787	3.968	3.902
MeV	938	938	0.511	105.66	550	783	770

**Tabla 3.1:** Valores de las masas de bariones, leptones y mesones utilizadas en el presente trabajo.

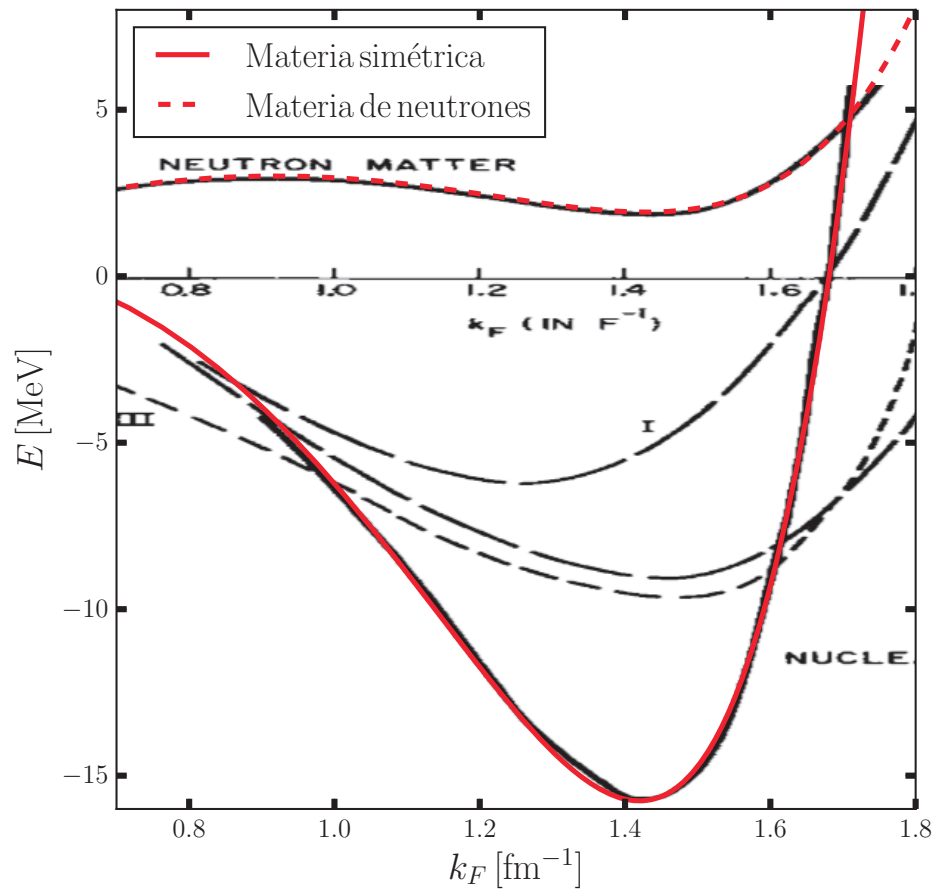
##### 3.1.2.1. Walecka (1974)

Históricamente, el primer modelo fue el propuesto por Walecka (1974). En éste únicamente se utilizaron los campos  $\sigma$  y  $\omega$  y no tenía auto-interacción del campo  $\sigma$ . Sus constantes de acoplamiento se muestran en la Tabla 3.2.

$g_\sigma$	$g_\omega$	$g_\rho$	$b$	$c$
9.579	11.678	0.000	0.000	0.000

**Tabla 3.2:** Constantes de acoplamiento usados en el modelo Walecka (1974).

La Figura 3.2 reproduce la curva de energía por barión registrada en Walecka (1974), para materia simétrica y de neutrones. En este modelo ni los electrones ni los muones juegan papel alguno. Al tener únicamente dos constantes de acoplamiento no nulas, Walecka ajustó la densidad de saturación y la energía de ligadura, mientras que el resto de valores experimentales quedan determinados por el sistema, sin posibilidad de ajustarlos. Los valores obtenidos con este modelo se muestran en la tabla 3.3. Se puede notar que a densidad de saturación, el coeficiente de compresibilidad,  $K_{\text{sat}}$ , y la masa efectiva de Landau,  $m_{L_{\text{sat}}}$ , están lejos de los valores descritos en el Capítulo 2.1.



**Figura 3.2:** Reproducción de las curvas de energía por barión vs. momento de Fermi bariónico para materia simétrica y materia de neutrones, registradas en [Walecka \(1974\)](#).

### 3. MÉTODOS

---

$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$\text{BE}_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}$ [ $m_N$ ]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]
0.195	-15.76	537.67	0.67	23.24

**Tabla 3.3:** Valores experimentales en saturación generados con el modelo [Walecka \(1974\)](#).

#### 3.1.2.2. Boguta y Bodmer (1977)

Para corregir los valores experimentales obtenidos con el modelo de [Walecka, Boguta and Bodmer \(1977\)](#) agregaron los términos de auto-interacción para el campo sigma, con un nuevo conjunto de constantes de acoplamiento mostradas en la [Tabla 3.4](#). Con

$g_{\sigma}$	$g_{\omega}$	$g_{\rho}$	$b$	$c$
4.691	0.835	0.000	-0.445	9.465

**Tabla 3.4:** Constantes de acoplamiento del modelo [Boguta and Bodmer \(1977\)](#).

estas nuevas constantes obtuvieron los valores mostrados en la [Tabla 3.5](#). También

$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$\text{BE}_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}$ [ $m_N$ ]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]
0.194	-15.76	94.83	1.01	15.13

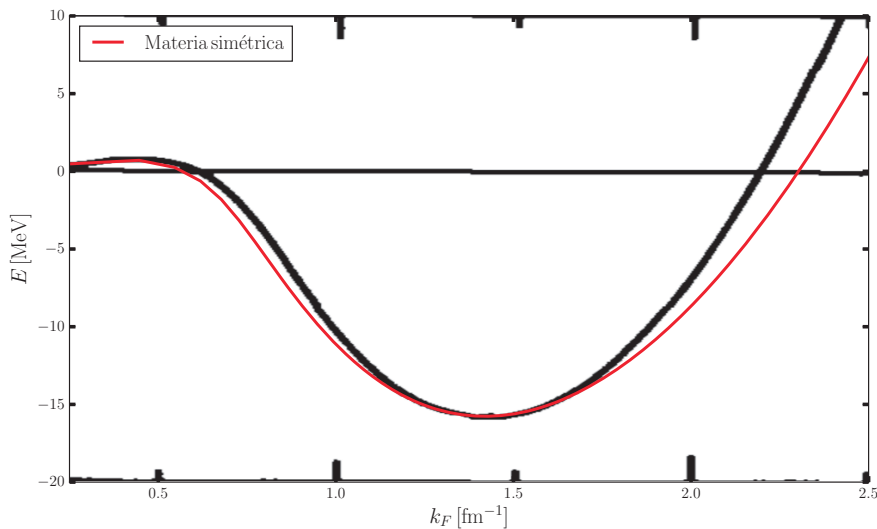
**Tabla 3.5:** Valores experimentales en saturación generados con el modelo [Boguta and Bodmer \(1977\)](#), usando las constantes de las [Tablas 3.1](#) y [3.4](#).

para este caso la energía de simetría  $E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$  queda completamente determinada por la diferencia de energía cinética efectiva (de Fermi) entre los neutrones y protones, al no poder ajustar con otro constante la restauración de isospín del sistema. La curva de la [Figura 3.3](#) reproduce la energía por nucleón para materia simétrica, descrita por [Boguta and Bodmer \(1977\)](#).

#### 3.1.2.3. Boguta (1981) y Glendenning (1985)

Posteriormente, [Boguta \(1981\)](#) propuso un modelo en donde se separan los nucleones en neutrón y protón mediante el uso del mesón vector-isovector  $\rho$ , agregando un constante de acoplamiento,  $g_{\rho}$ . Con este nuevo constante es posible ajustar la energía de simetría a un valor deseado. Asimismo se permitió el equilibrio  $\beta$ , permitiendo la aparición de electrones y muones.

Desafortunadamente con el conjunto de constantes reportado en dicho artículo no



**Figura 3.3:** Reproducción de la curva de energía por nucleón vs. momento de Fermi bariónico de materia simétrica del modelo [Boguta and Bodmer \(1977\)](#).

he podido reproducir los valores experimentales consistentes<sup>1</sup>. Sin embargo, debido a que dicho modelo propone un nuevo paso en complejidad en la dirección correcta, este modelo fue usado por [Glendenning \(1985\)](#), cuyo conjunto de constantes se reportan en la Tabla 3.6.

$g_\sigma$	$g_\omega$	$g_\rho$	$b$	$c$
8.795	9.181	9.716	$4.14 \times 10^{-3}$	$7.16 \times 10^{-3}$

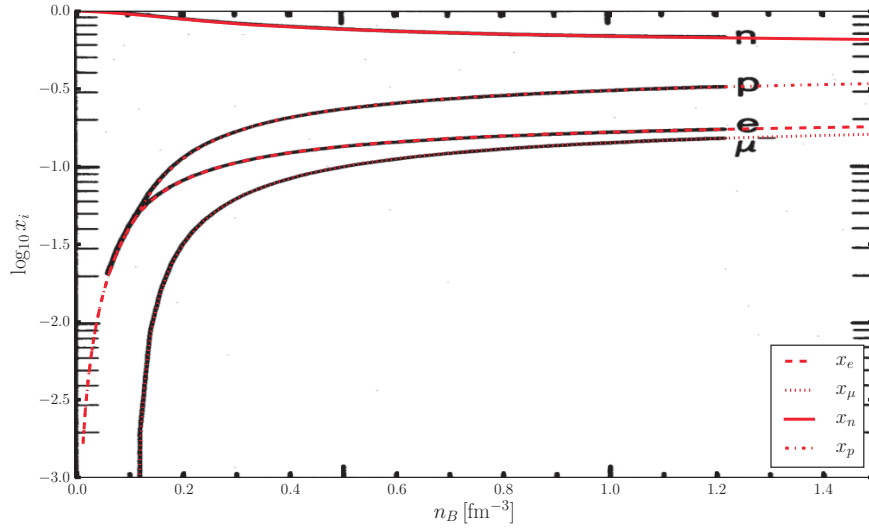
**Tabla 3.6:** Constantes de acoplamiento del modelo [Glendenning \(1985\)](#).

Los valores experimentales obtenidos son los especificados en la Tabla 3.7. En ésta se muestra la diferencia que genera la inclusión del mesón  $\rho$  en la energía de simetría. Asimismo, en la Figura 3.4 se reproducen las curvas de fracción de las partículas  $i$ ,  $x_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , para  $g_\rho = 9.716$ , mientras que las curvas para  $g_\rho = 0.000$  se muestran en la Figura 3.5.

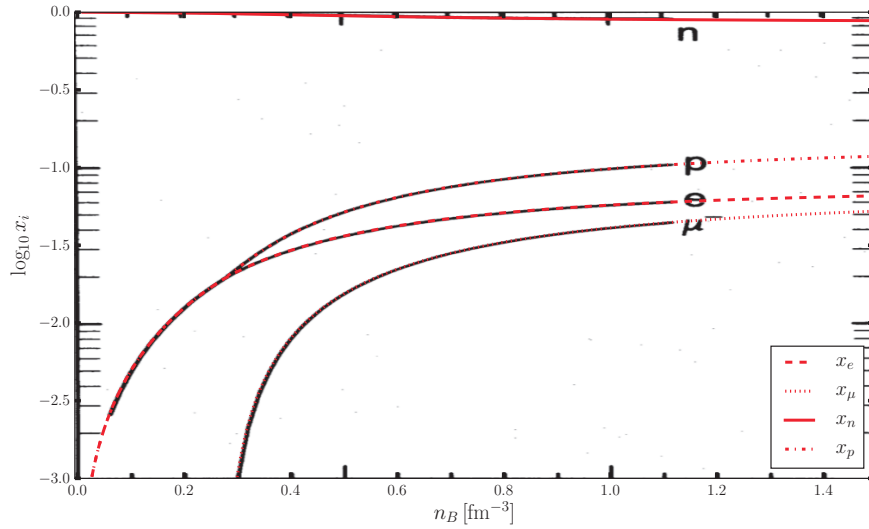
<sup>1</sup>Los valores de las constantes de acoplamiento usados por [Boguta \(1981\)](#) no están todos reportados en este artículo y se tienen que “adivinar” de sus otros artículos, pero ¡no he tenido éxito en hacerlo! Sin embargo, los resultados de la Tabla 3.7 y las figuras 3.4 y 3.5, que coinciden con los resultados de [Glendenning \(1985\)](#), demuestran que mi código resuelve las ecuaciones correctamente.

### 3. MÉTODOS

---



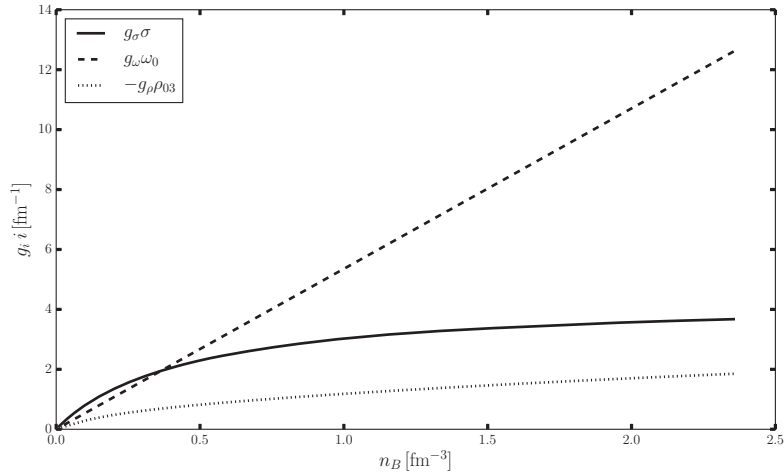
**Figura 3.4:** Reproducción de curvas de fracción de partículas  $x_i = n_i/n_{\text{bar}}$  contra densidad bariónica, con  $g_\rho = 9.716$  del modelo Glendenning (1985).



**Figura 3.5:** Reproducción de curvas de fracción de partículas  $x_i = n_i/n_{\text{bar}}$  contra densidad bariónica, con  $g_\rho = 0.000$  del modelo Glendenning (1985).

$n_{\text{sat}} [\text{fm}^{-3}]$	$\text{BE}_{\text{sat}} [\text{MeV}]$	$K_{\text{sat}} [\text{MeV}]$	$m_{L_{\text{sat}}} [m_N]$	$g_\rho$	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}} [\text{MeV}]$
0.145	-16.00	285.3	0.846	9.716	37.04
				0.000	14.88

**Tabla 3.7:** Valores experimentales en saturación generados con las constantes del modelo Glendenning (1985), usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.



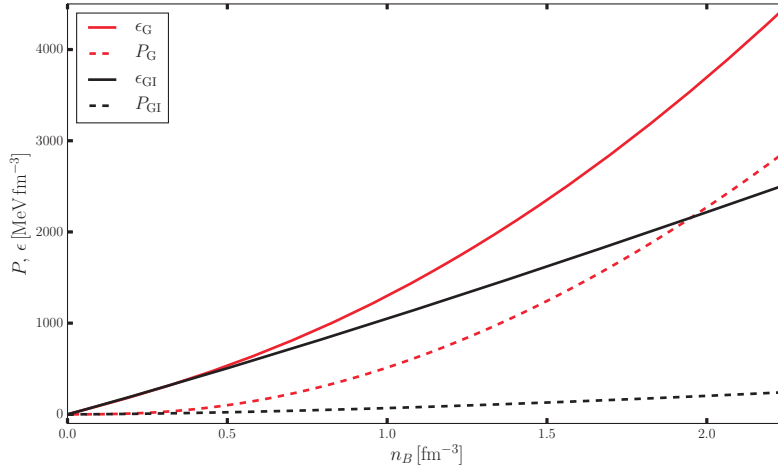
**Figura 3.6:** Curvas de densidad de mesones escalada con su respectivo constante de acoplamiento (con  $g_\rho \neq 0$ ) como función de la densidad bariónica, del modelo Glendenning (1985).

En la Figura 3.4 se observa que a altas densidades, la diferencia entre la fracción de neutrones y protones es aproximadamente constante  $\approx 1/3$ , lo que implica que la diferencia de densidades de neutrones y protones es proporcional a la densidad bariónica,  $n_n - n_p \approx n_B/3$ . De esta manera, haciendo uso de la ecuación (2.109), se obtiene que  $-\rho_{03} \approx \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \frac{1}{6} n_B$  a altas densidades. Además, de la ecuación (2.108) se obtiene que  $\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} n_B$ . Por ello, dado que para este conjunto de constantes  $g_\omega \approx g_\rho$  y  $m_\omega \approx m_\rho$ , se tiene que la diferencia de magnitudes entre la densidad de los mesones  $\omega_0$  y  $\rho_{03}$  es  $\omega_0/\rho_{03} \approx 6$ . Esta diferencia en magnitudes se puede corroborar en la Figura 3.6. Por esta razón, el campo  $\omega_0$  tendrá más peso que  $\rho_{03}$  en las expresiones de densidad de energía y presión, (2.117) y (2.118), y por lo tanto, el hecho de modificar  $g_\omega$  tendrá más peso sobre la ecuación de estado que modificar  $g_\rho$ . Asimismo, modificar  $g_\sigma$  tendrá un peso intermedio sobre la ecuación de estado, lo que se puede deducir de la Figura 3.6.



### 3. MÉTODOS

---

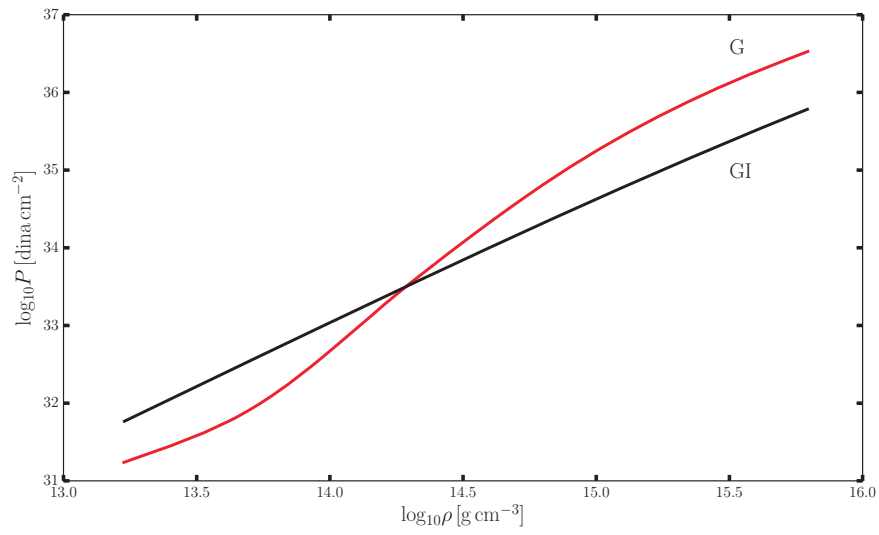


**Figura 3.7:** Comparación de las ecuaciones de estado (Presión y Densidad de energía) vs. densidad bariónica obtenidas con los modelos de gas ideal (GI) y [Glendenning \(1985\) \(G\)](#), como función de la densidad bariónica.

Lo anterior se corroborará en el [Capítulo 4](#) de resultados.

Usando las constantes de la [Tabla 3.6](#) y permitiendo equilibrio  $\beta$  se puede comparar la ecuación de estado de este modelo con aquella del gas ideal, con el fin de observar los efectos que la inclusión de interacciones y sus respectivos mesones generan en el sistema; esto se muestra en las [Figuras 3.7 y 3.8](#). En la [Figura 3.8](#) se observa la relevancia de la inclusión de interacciones entre partículas, donde a altas densidades, la presión de (G) llega a ser un orden de magnitud mayor que la de (GI). Asimismo se observa una discrepancia con las ecuaciones de estado del tipo *politrópico*, que suponen  $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ , descritas por una línea recta con cierta pendiente en este tipo de gráficas.

Con todo lo anterior se observa que el conjunto de partículas y sus interacciones (junto con sus constantes de acoplamiento) utilizadas determina las propiedades nucleares de la materia generada por el modelo, a la vez que determina la relación entre presión y densidad, que modificará el perfil de la estrella de neutrones, como se verá en el siguiente capítulo.



**Figura 3.8:** Comparación de las ecuaciones de estado en su forma  $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$  obtenidas con los modelos de gas ideal (GI) y [Glendenning \(1985\)](#) (G).

## 3.2. Solución a las ecuaciones TOV

Las ecuaciones TOV son ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales, acopladas, y en general resultan imposibles de resolver analíticamente, por lo que se recurre a métodos numéricos para su solución.

### 3.2.1. Método numérico

En el presente trabajo se utilizó el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4), con intervalo de paso adaptativo, que se describe a continuación. Primero se obtiene una tabla de datos de la Ecuación de estado, en la que se relacionan valores de densidad con presión. Con dichos datos se define una función que interpola dicha relación para cualquier valor de densidad que no esté en dicha tabla.

Como las ecuaciones TOV (ecs. (2.133), (2.141) y (2.146)) son de primer orden, basta con definir un sistema de tres ecuaciones diferenciales más la ecuación de estado, para la utilización del método RK4. Además se proporciona la densidad central (a  $r = 0$ ) deseada en la estrella de neutrones (ésta no es única, pues distintas estrellas con misma composición pueden tener densidades centrales distintas). Dada ésta, quedan definidas en  $r = 0$  su presión (mediante la ecuación de estado), la masa integrada (igual a cero) y el potencial gravitacional (que se le puede asignar valor nulo).

Para obtener las soluciones para otros radios usando el método RK4 se define un arreglo con las variables por resolver,  $\vec{Y} = (m, \phi, P)$ , y la función vectorial cuyas entradas son las ecuaciones diferenciales por resolver:

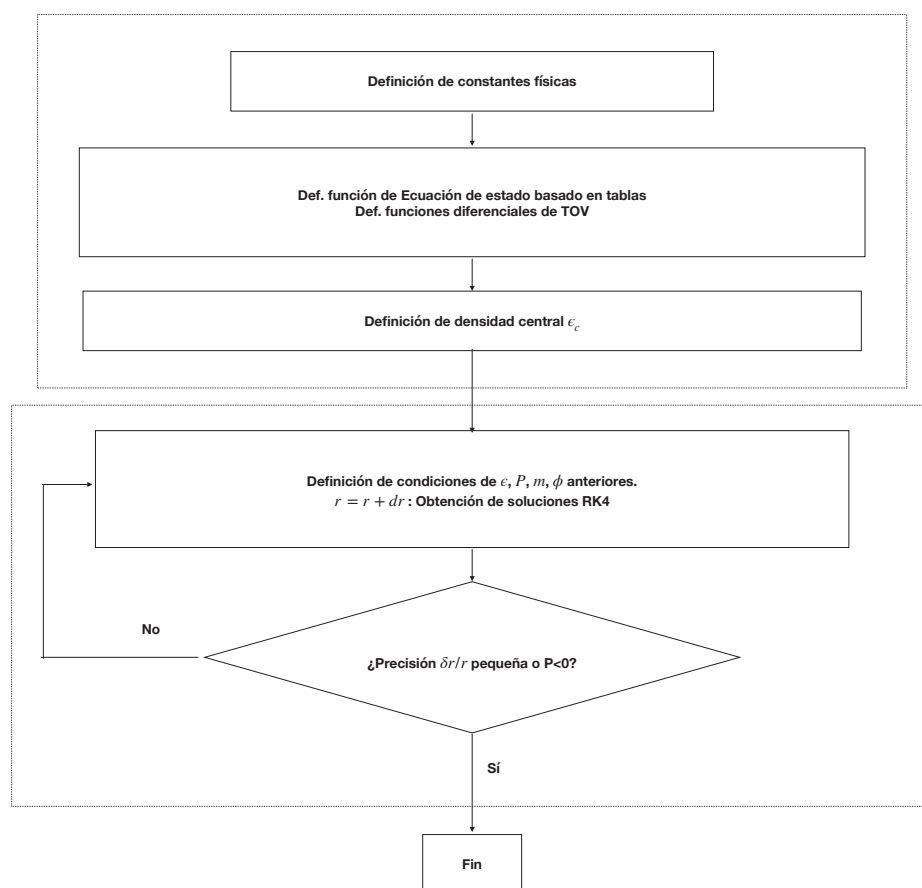
$$\vec{F}(m, \phi, P) = \vec{F}(\vec{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{dm}{dr}(m, \phi, P) \\ \frac{d\phi}{dr}(m, \phi, P) \\ \frac{dP}{dr}(m, \phi, P) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

De esta manera, dado un radio  $r + dr$ , el método tomará como entrada el arreglo  $\vec{Y}(r)$  y devolverá la solución  $\vec{Y}(r + dr)$ . En este caso  $dr$  es adaptativo, lo que significa que varía dependiendo de los valores que toma  $\vec{Y}(r)$ , de tal manera que si el sistema de ecuaciones cambian abruptamente conforme cambia el radio, el paso se reduce, y viceversa. Se realizarán iteraciones del RK4 hasta que la presión se vuelva negativa o hasta que la razón  $dr/r$  sea menor a la precisión deseada. Este procedimiento se representa en el diagrama de flujo de la Figura 3.9. Dicha iteración genera un conjunto de valores solución  $m$ ,  $\epsilon$ ,  $P$  y  $\phi$  para cada radio  $r$ , dada una densidad central  $\rho_c$ , con los cuales se tiene el perfil de la estrella de neutrones, y de los cuales se puede obtener su radio y masa total.

Usando la ecuación de estado del modelo [Glendenning \(1985\)](#) se pueden resolver las ecuaciones TOV<sup>1</sup>. La Figura 3.10 muestra la relación directa entre esta densidad

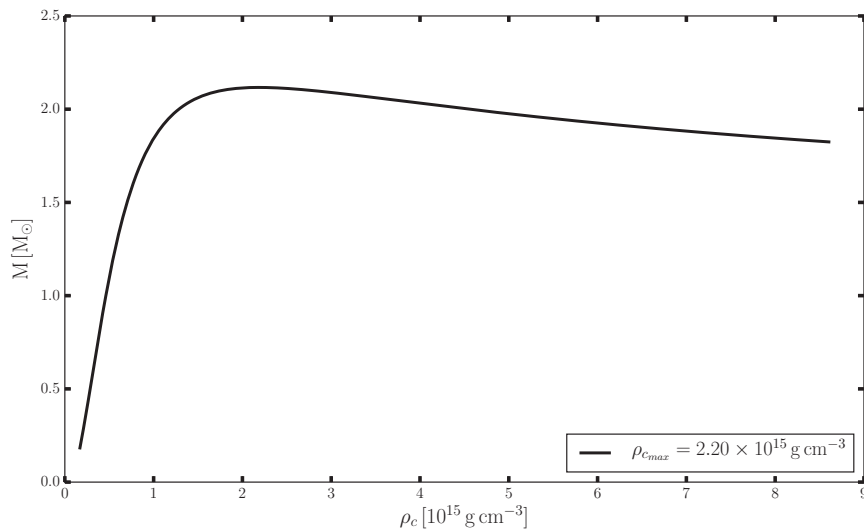
---

<sup>1</sup>Se utilizó una ecuación de estado “híbrida” formada por la ecuación de estado [Glendenning \(1985\)](#) para densidades mayores a  $10^{-2} \text{ fm}^{-3}$ , por aquella de [Negele and Vautherin \(1973\)](#) para densidades



**Figura 3.9:** Diagrama de flujo del programa utilizado para la solución numérica de las ecuaciones TOV.

### 3. MÉTODOS



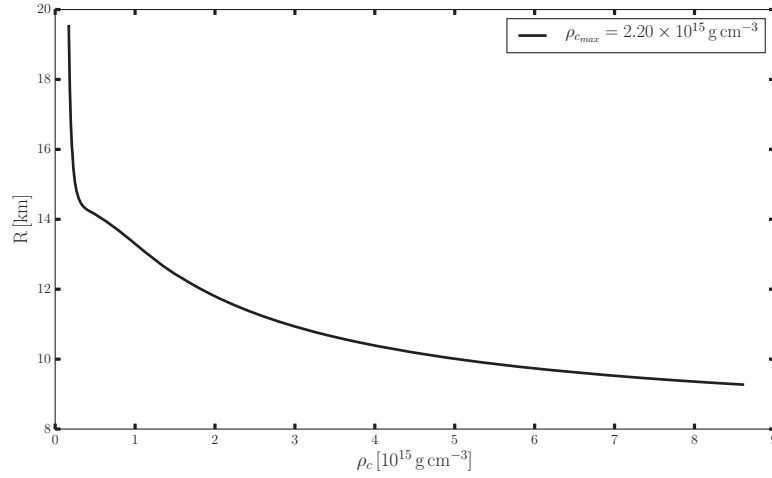
**Figura 3.10:** Curva de masa total contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado del modelo [Glendenning \(1985\)](#). La densidad correspondiente a la masa total máxima alcanzada con este modelo corresponde a  $\rho_{c_{\max}} = 2.20 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ .

central y la masa alcanzada por la estrella (masa estelar) (en unidades de masas solares,  $M_{\odot}$ ); notar que la densidad central correspondiente a la masa estelar máxima alcanzada es  $\rho_{c_{\max}} = 2.20 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ . Por otro lado, la [Figura 3.11](#) muestra la relación entre densidad central y el radio total de la estrella (radio estelar).

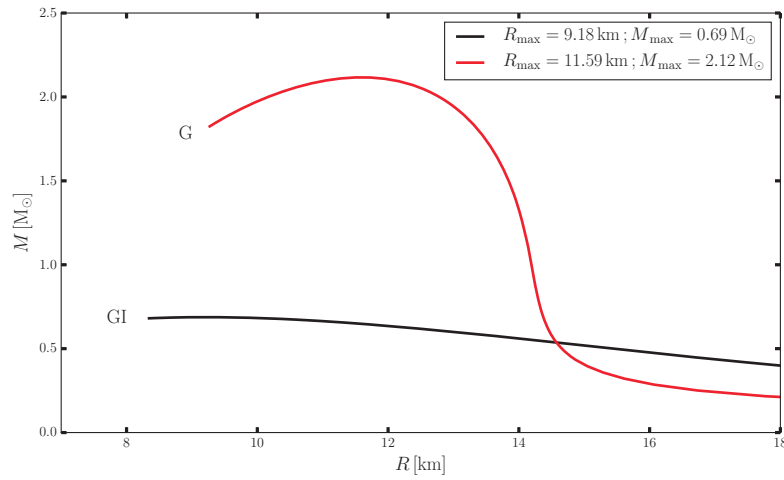
En la [Figura 3.12](#) se muestra una comparación de la curva de la masa estelar vs. radio estelar obtenida con la ecuación de estado del modelo [Glendenning \(1985\)](#) (G) vs. la del modelo de gas ideal (GI) del [Capítulo 2.2](#). Cada punto en esta curva representa una densidad central, y de ella es posible obtener la masa máxima que las estrellas de neutrones de estos modelos pueden alcanzar y su correspondiente radio (total), que para la ecuación de estado de [Glendenning \(1985\)](#) es  $2.12 M_{\odot}$  y cuyo radio estelar corresponde a  $11.59 \text{ km}$ , mientras que para el GI es de  $0.77 M_{\odot}$  con radio total igual a  $8.81 \text{ km}$  ([Oppenheimer and Volkoff, 1939](#)).

---

entre esa y  $3 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ , por la de estado de [Haensel et al. \(1989\)](#) a densidades entre la anterior y  $1 \times 10^{-8} \text{ fm}^{-3}$ , y la ecuación de estado de [Feynman et al. \(1949\)](#) a densidades menores, debido a que la primera no es válida para densidades tan bajas.



**Figura 3.11:** Curva de radio estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado del modelo [Glendenning \(1985\)](#).



**Figura 3.12:** Curva de masa vs. radio estelares para distintas densidades centrales de la estrella, usando la ecuación de estado del modelo [Glendenning \(1985\)](#) (G) y del Gas Ideal (GI). La estrella con mayor masa que (G) puede generar es  $M_{\max} = 2.12 M_{\odot}$  cuyo radio es de  $R_{\max} = 11.59$  km; mientras que la estrella con mayor masa que (GI) alcanza es de  $M_{\max} = 0.77 M_{\odot}$  con  $R_{\max} = 8.81$  km ([Oppenheimer and Volkoff, 1939](#)).



# Resultados y Discusión: Variación de las constantes de acoplamiento

---

Como se vio en los Capítulos anteriores, todos los resultados experimentales nucleares predichos por un modelo dependerán de sus constantes de acoplamiento. La misma situación presenta la ecuación de estado, y por ello, el perfil gravitacional de la estrella de neutrones a través de las ecuaciones TOV.

En este capítulo se utilizará el modelo propuesto por [Boguta \(1981\)](#) desarrollado en el Capítulo 2.3, el cual está representado por la densidad Lagrangiana de la Ecuación (2.48). Se utilizará un conjunto de constantes base que se variará con el fin de generar y analizar los cambios que ello genera en los valores experimentales predichos, la ecuación de estado y el perfil de la estrella.

Para resolver las ecuaciones TOV se utilizó una ecuación de estado “híbrida” formada por la ecuación de estado del modelo [Boguta \(1981\)](#) (con sus respectivas constantes modificadas) para densidades mayores a  $10^{-2} \text{ fm}^{-3}$  (la ecuación de estado del núcleo), por la ecuación de estado de [Negele and Vautherin \(1973\)](#) para densidades entre esa y  $6 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ , por la ecuación de estado de [Haensel et al. \(1989\)](#) a densidades entre la anterior y  $10^{-8} \text{ fm}^{-3}$ , y la ecuación de estado de [Feynman et al. \(1949\)](#) a densidades menores (éstas tres últimas son la ecuación de estado de la corteza, que llamaremos “HZD-NV”), debido a que la primera no es válida para densidades tan bajas. Para juntar las diferentes ecuaciones de estado con la de la corteza, dado que ésta está fija, se compararon los valores en la corteza de presión y densidad de masa del valor de densidad bariónica mayor, con sus equivalentes de la ecuación del núcleo a densidad bariónica menor, de tal manera que la ecuación resultante del pegado tuviera tanto presiones como densidades de masa crecientes a densidades bariónicas crecientes.

Las constantes base de acoplamiento a utilizar se muestran en la Tabla 4.1, y la Tabla 4.2 muestra explícitamente los valores experimentales obtenidos con este conjunto de constantes.



#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

$g_\sigma$	$g_\omega$	$g_\rho$	$b$	$c$
9.662	10.448	7.203	$4.883 \times 10^{-3}$	$-5.475 \times 10^{-3}$

**Tabla 4.1:** Constantes de acoplamiento del modelo Boguta (1981) que generan los valores experimentales de la Tabla 2.2.

$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$\text{BE}_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
0.16	-16.2	230	30.8	0.78

**Tabla 4.2:** Valores experimentales en saturación generados con las constantes de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.

#### 4.1. Variación de $g_\sigma$

Al variar únicamente el parámetro  $g_\sigma$  a partir de la Tabla 4.1 se obtienen los siguientes resultados.

La Tabla 4.3 muestra los valores experimentales nucleares, donde  $g_{\sigma_0}$  es el valor base. Para el caso  $g_\sigma/g_{\sigma_0} = 0.8$  las definiciones de los valores experimentales “en saturación” para materia simétrica no tienen sentido, pues la energía por nucleón no alcanza un mínimo (esto se observa en las Figuras siguientes). Además se observa que conforme  $g_\sigma$  aumenta,  $n_{\text{sat}}$ ,  $K_{\text{sat}}$  y  $E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$  aumentan, mientras que  $\text{BE}_{\text{sat}}$  y  $m_{L_{\text{sat}}}/m_N$  disminuyen.

$g_\sigma/g_{\sigma_0}$	$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$\text{BE}_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
0.8	NA	NA	NA	NA	NA
0.9	0.06	0.2	35	12.5	0.91
1.0	0.16	-16.2	230	30.8	0.78
1.1	0.25	-41.5	597	50.6	0.68
1.2	0.30	-71.3	1508	65.5	0.63

**Tabla 4.3:** Valores experimentales en saturación generados con la variación de  $g_\sigma$  con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.

En la Figuras 4.1 y 4.2 se aprecian los cambios en el comportamiento de las curvas de energía por nucleón para energía simétrica y de neutrones, respectivamente. En las Figuras 4.3 y 4.4 se observa la manera en que las fracciones de partículas y la densidad

de mesones en equilibrio  $\beta$ , respectivamente, son alteradas por el valor  $g_\sigma$ . Las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 muestran las alteraciones a la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$ . Asimismo, las Figuras 4.8 y 4.9 muestran el perfil gravitacional usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$ .

La Figura 4.1 hace evidente el papel de atracción entre nucleones que juega el campo  $\sigma$ , pues mientras mayor es esta atracción (es decir, el valor de  $g_\sigma$ ), más negativa es la energía por nucleón. Un comportamiento similar se observa en la Figura 4.2, pues incluso para el modelo de materia de neutrones los valores más altos de  $g_\sigma$  generan una “energía de ligadura” al existir un mínimo en la curva.

En la Figura 4.3 se observan las esperadas modificaciones de  $\sigma$  debido a las variaciones de  $g_\sigma$ , generadas por las soluciones a su ecuación de E-L. Por otro lado, como se alcanza a notar,  $g_\rho\rho_{03}$  es alterada muy ligeramente, lo cual se debe a que los potenciales químicos de los bariones dependen de  $g_\sigma\sigma$  a través de la masa efectiva  $m^*$  (ecuaciones (2.105) y (2.125)), y dichos potenciales determinarán la cantidad de unos u otros bariones en el sistema, modificando el valor de  $\rho_{03}$ .

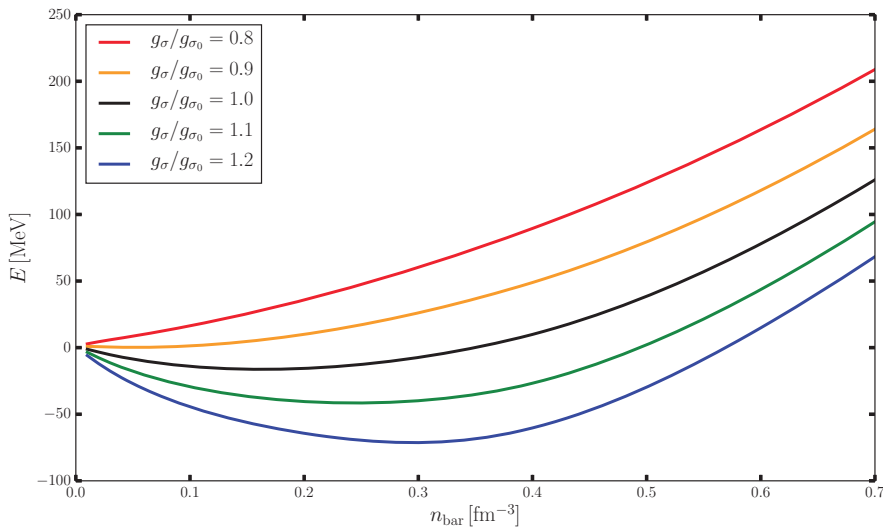
La influencia sobre la densidad de energía generada por las variaciones de  $g_\sigma$  parece menos importante. En la Figura 4.5 se observa que los cambios se vuelven relevantes a altas densidades, teniendo el mismo efecto de antes: a mayor atracción  $g_\sigma$ , “más negativa” tiende a ser la densidad de energía (en este caso simplemente menor). Esto se debe a que en la ecuación (2.117) existe un término negativo correspondiente al valor esperado de la energía de los nucleones relacionada con su momento de Fermi; es decir, conforme  $g_\sigma$  aumenta, la energía de Fermi de los nucleones disminuye, traduciéndose en disminución de la densidad de energía general, a pesar de que ésta es proporcional a potencias de  $g_\sigma\sigma$  como establece esta misma ecuación.

Las alteraciones a la presión se muestran en la Figura 4.6. Aquí se observa que la presión no presenta un comportamiento homogéneo con respecto a  $g_\sigma$ : para densidades bariónicas menores a  $\approx 0.6 \text{ fm}^{-3}$  la presión disminuye conforme  $g_\sigma$  aumenta, y viceversa para densidades mayores. Esto se puede entender a partir de la ecuación (2.118), que establece la dependencia de la presión sobre las densidades de mesones como la diferencia entre el término con  $\omega_0$  y los términos con  $\sigma$ . Y como lo muestra la Figura 4.3, a partir de esta misma densidad  $\approx 0.6 \text{ fm}^{-3}$  (depende del valor de  $g_\sigma$ ) el valor  $g_\omega\omega_0$  adquiere mayor magnitud que el valor  $g_\sigma\sigma$ , provocando que su diferencia cambie el comportamiento de la presión. La Figura 4.7 muestra la ecuación de estado en su versión  $P = P(\rho)$  (junto con la ecuación de estado de la corteza), donde  $\rho = \epsilon/\hat{c}^2$  es la densidad de masa, con  $\hat{c}$  la velocidad de la luz. Aquí también se observa el comportamiento disforme de la ecuación de estado con respecto a los cambios en  $g_\sigma$ . Es importante notar que la curva de  $g_\sigma/g_{\sigma_0} = 1$  sí intercepta con la curva de la corteza, mientras que el resto de casos no. Esto significa que las ecuaciones de estado del núcleo modificadas en general no son compatibles con la de la corteza, lo que es de esperarse, pues las ecuaciones modificadas no reproducen los valores experimentales en saturación, mientras que la de la corteza sí está hecha de tal manera. De cualquier manera es posible realizar el pegado de ambas con el criterio descrito anteriormente, aunque ello genere discontinuidades en la presión para algunos casos (eso no debería suceder

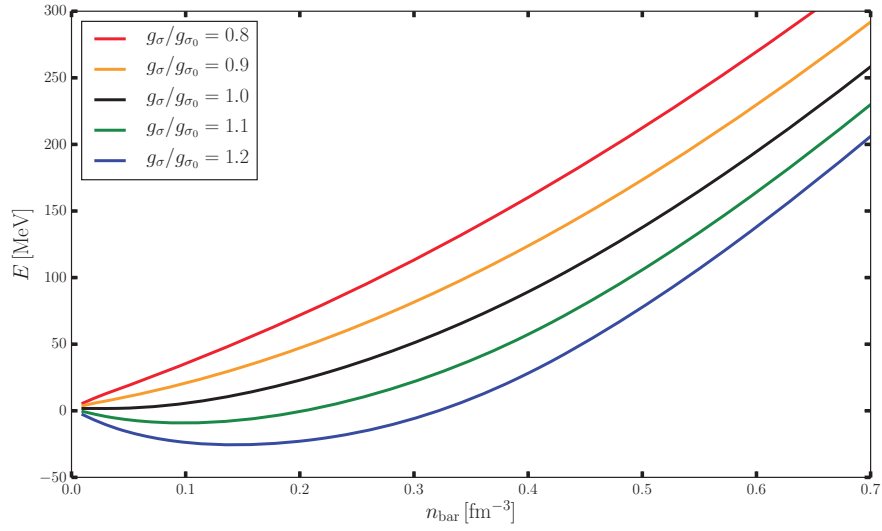
#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

en transiciones de fase físicas reales).

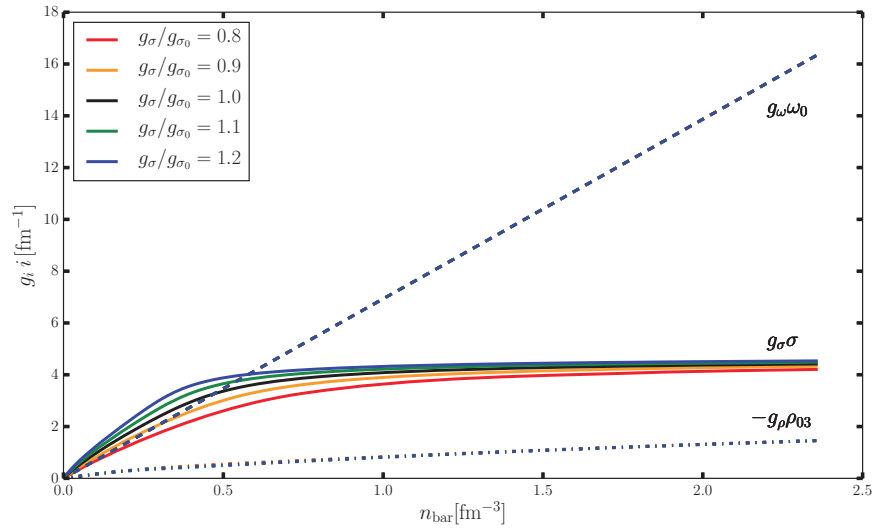
En la Figura 4.8 se muestra la masa estelar alcanzada por una estrella de neutrones a cada densidad central de la misma. En la Figura 4.9 se muestran las curvas de masa estelar contra radio estelar para todos los casos, a pesar de la incompatibilidad entre ecuaciones de estado. Notar que los casos  $g_\sigma/g_{\sigma_0} = 1.1, 1.2$  sí generan “colas” de masa baja y radios altos, al igual que el caso original, mientras que  $g_\sigma/g_{\sigma_0} = 0.8, 0.9$  no, lo que se debe a que es posible generar un “pegado” de las ecuaciones de estado sin generar discontinuidad en la presión para los primeros, situación que no es posible para los segundos. Una vez tomada en cuenta la falta de compatibilidad para las curvas  $g_\sigma/g_{\sigma_0} = 0.8, 0.9$ , se puede obtener la siguiente información de dicha Figura. Por un lado, el radio de estrellas con densidad central baja aumenta conforme  $g_\sigma$  disminuye; por el otro, se observa el comportamiento de las curvas de la Figura 4.7, donde a bajas densidades la presión aumenta conforme  $g_\sigma$  disminuye. De esta manera se tiene que a densidades centrales bajas, el radio de las estrellas aumentan conforme la presión aumenta. Asimismo, a densidades centrales altas, la masa de la estrella de neutrones aumenta conforme  $g_\sigma$  aumenta; y se tiene que a altas densidades, la presión aumenta conforme  $g_\sigma$  aumenta. Así, se cumple que a densidades centrales altas, la masa de la estrella aumenta conforme la presión aumenta. Estos dos resultados coinciden con los expuestos en [Lattimer and Prakash \(2001\)](#), en donde se afirma que el radio de estrellas de masas  $\sim (1.2 - 1.4) M_\odot$  es determinado por la presión a densidades  $\sim (1 - 3) n_{\text{sat}}$  mientras la masa máxima es determinada por la presión a las mas altas densidades.



**Figura 4.1:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de  $g_\sigma$ .

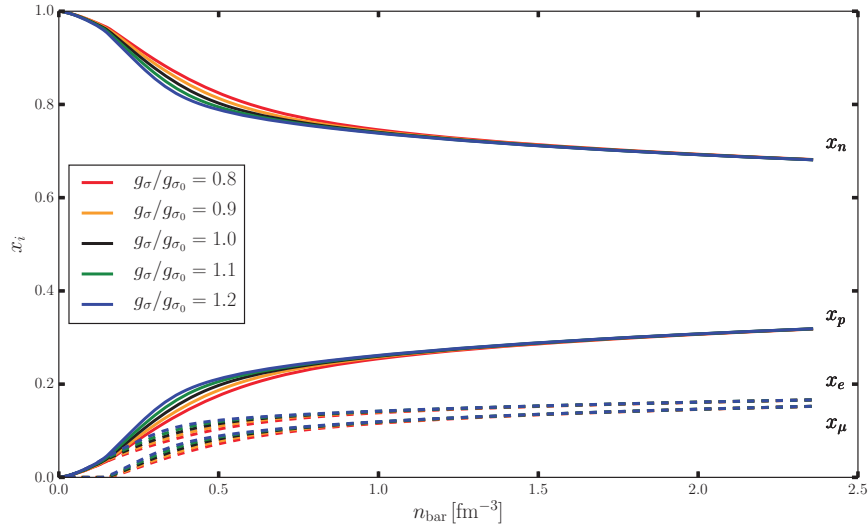


**Figura 4.2:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de  $g_\sigma$ .

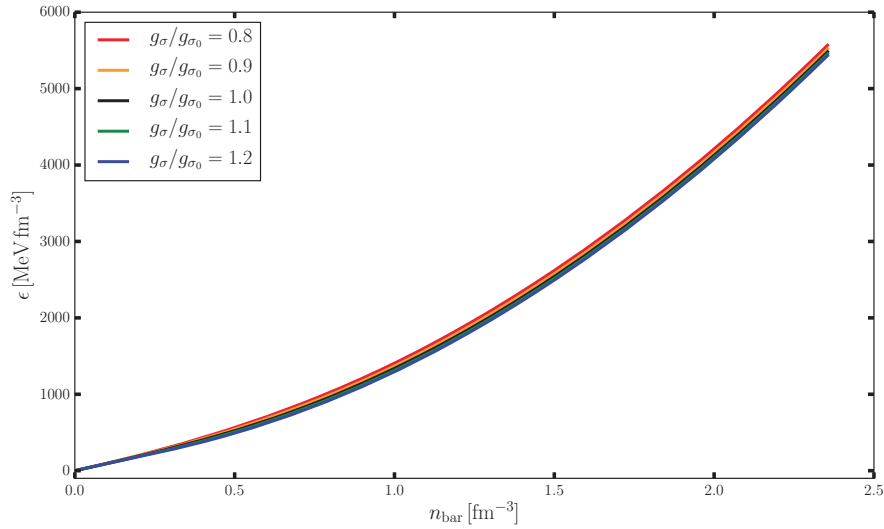


**Figura 4.3:** Curvas de densidad de los mesones en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\sigma$ .

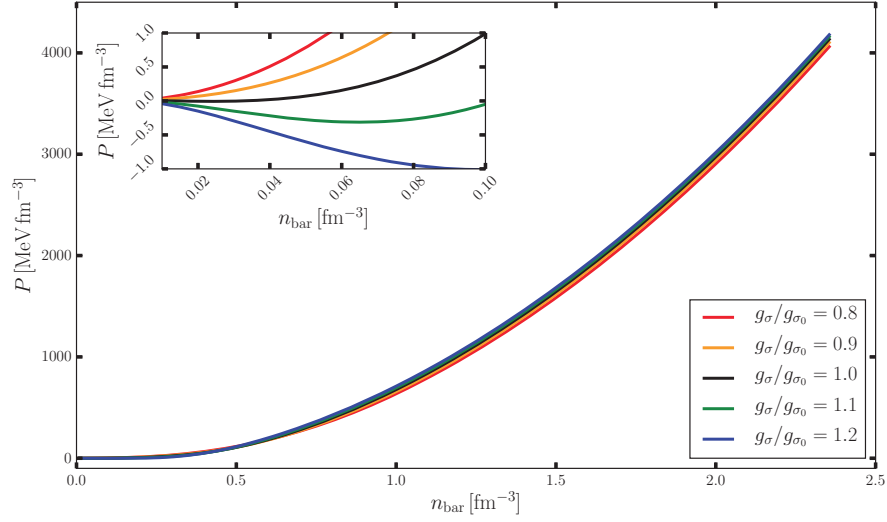
#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO



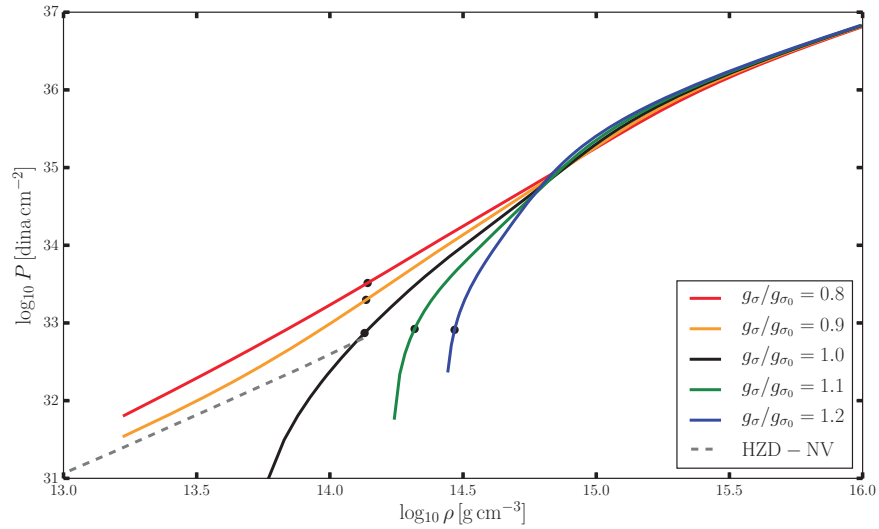
**Figura 4.4:** Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas),  $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\sigma$ .



**Figura 4.5:** Curvas de densidad de energía en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\sigma$ .



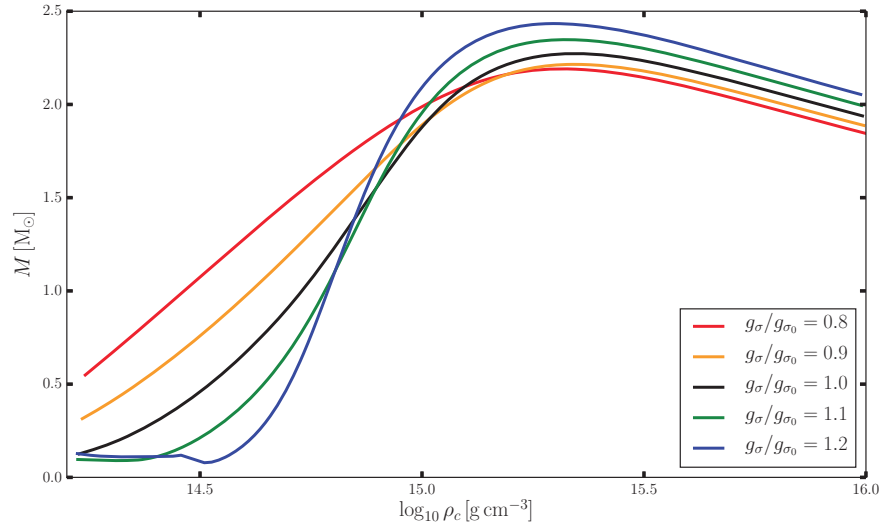
**Figura 4.6:** Curvas de presión en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\sigma$ .



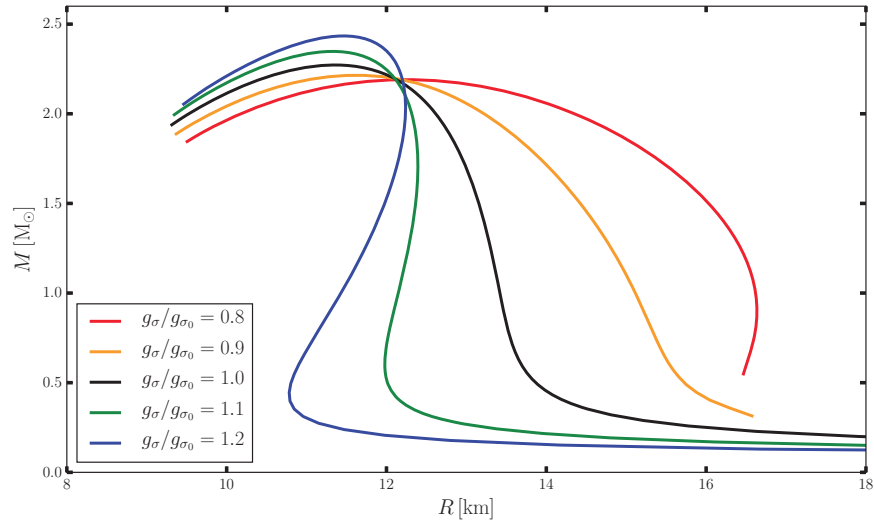
**Figura 4.7:** Ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de  $g_\sigma$ .

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

---



**Figura 4.8:** Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $g_\sigma$ .



**Figura 4.9:** Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $g_\sigma$ .

## 4.2. Variación de $g_\omega$

Variar  $g_\omega$  a partir de la Tabla 4.1 genera los siguientes resultados.

La Tabla 4.4 muestra los valores experimentales, donde  $g_{\omega_0}$  es el valor base. Para el caso  $g_\omega/g_{\omega_0} = 1.2$  las definiciones de los valores experimentales en “saturación” para materia simétrica no tienen sentido, pues la energía por nucleón no alcanza un mínimo (esto se observa en las Figuras de energía por nucleón). Además se observa un comportamiento contrario al caso anterior, pues al aumentar  $g_\omega$ , disminuyen  $n_{\text{sat}}$ ,  $K_{\text{sat}}$  y  $E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ , mientras que  $BE_{\text{sat}}$  y  $m_{L_{\text{sat}}}/m_N$  aumentan.

$g_\omega/g_{\omega_0}$	$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$BE_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
0.8	0.42	-88.7	1861	83.5	0.60
0.9	0.31	-46.5	815	60.6	0.64
1.0	0.16	-16.2	230	30.8	0.78
1.1	0.05	-1.6	43	10.8	0.92
1.2	NA	NA	NA	NA	NA

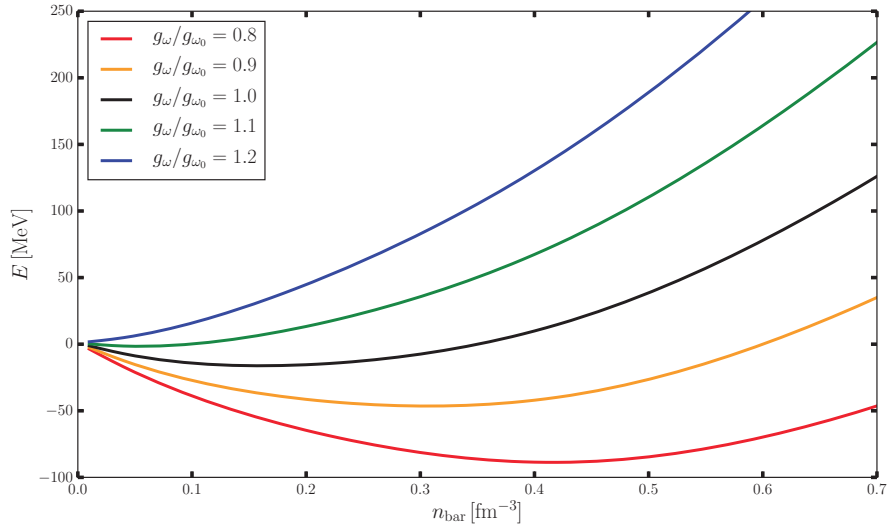
**Tabla 4.4:** Valores experimentales en saturación generados con la variación de  $g_\omega$  con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.

En la Figuras 4.10 y 4.11 se aprecian los cambios en el comportamiento de las curvas de energía por nucleón para energía simétrica y de neutrones, respectivamente. Para ambos casos el aumento de la constante  $g_\omega$  genera un aumento en la energía. Para el caso de energía de materia simétrica, aumentar esta constante puede generar la desaparición de un mínimo (i. e., de la energía de ligadura); mientras que para energía de materia de neutrones su disminución puede generar la aparición de uno. Esto evidencia el papel de repulsión entre nucleones que juega  $\omega_0$ , cuya amplitud está representada por  $g_\omega$ .

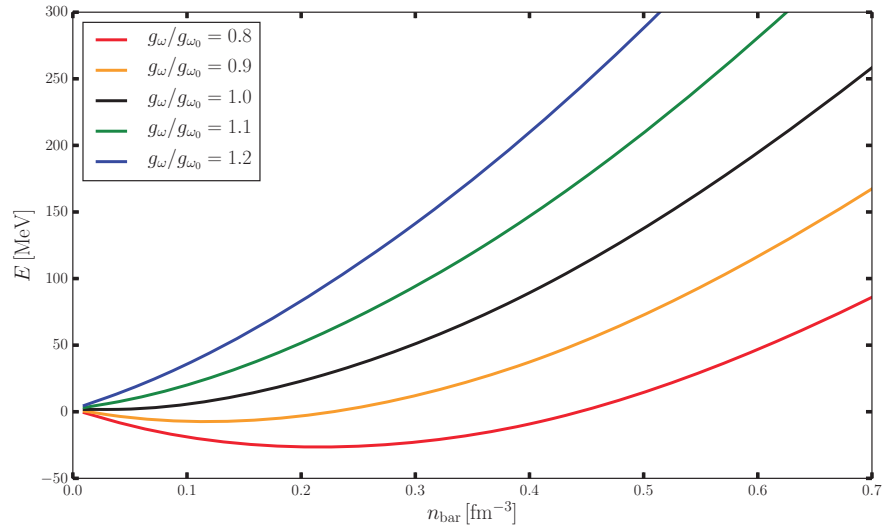
Las curvas de la Figura 4.13 exponen el cambio nulo de las fracciones de bariones y leptones en equilibrio  $\beta$  al variar el parámetro. La Figura 4.12 muestra el comportamiento de las densidades de mesones en equilibrio  $\beta$ . En este caso el cambio en el parámetro  $g_\omega$  provoca una significativa diferencia en  $g_\omega\omega_0$ . Esto se ve reflejado en la densidad de energía y en la presión (en equilibrio  $\beta$ ) de las Figuras 4.14 y 4.15, donde es evidente la fuerte dependencia sobre  $g_\omega\omega_0$ . Asimismo se observa el comportamiento esperado, pues aumentar la repulsión entre nucleones ( $g_\omega$ ) generará una mayor densidad de energía y presión en el sistema. La Figura 4.16 despliega la ecuación de estado, mostrando el aumento en la presión dada una densidad de energía, al hacer crecer  $g_\omega$ , para toda densidad. Por dicha razón, las curvas de las Figuras 4.17 y 4.18 muestran que la masa máxima y el radio aumentan conforme aumenta  $g_\omega$ , reproduciendo nuevamente



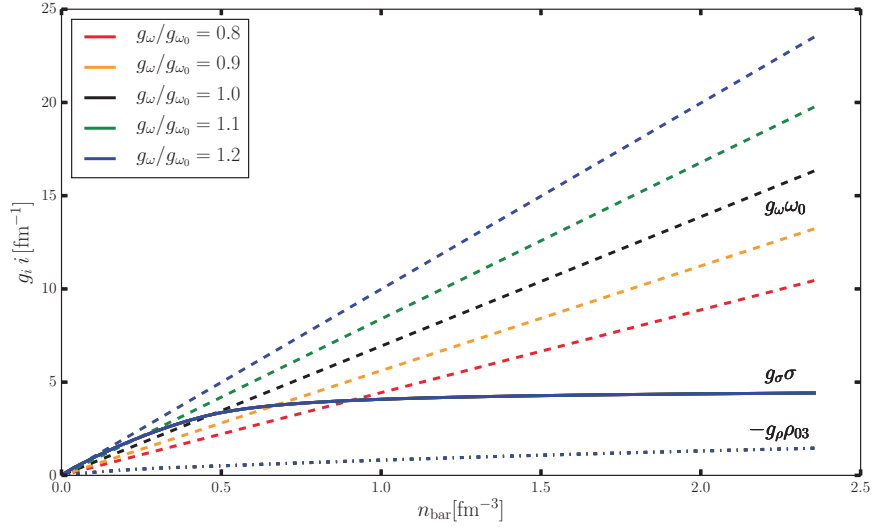
#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO



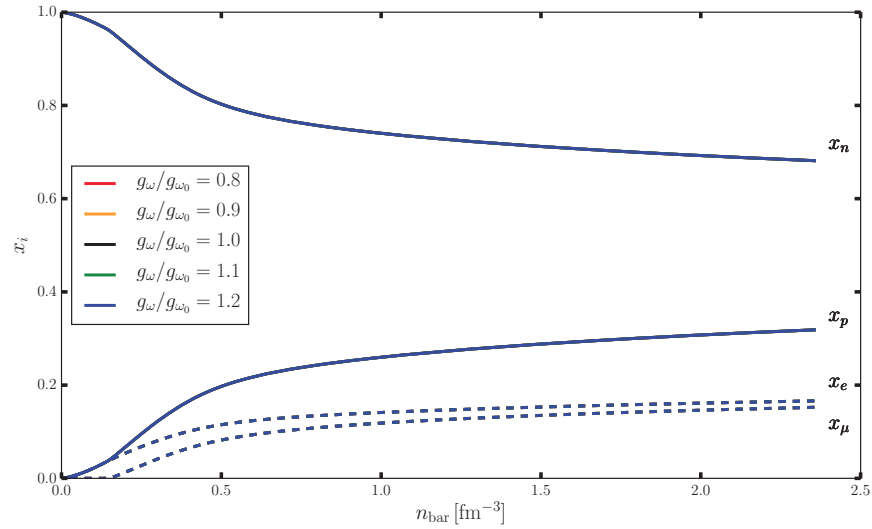
**Figura 4.10:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de  $g_\omega$ .



**Figura 4.11:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de  $g_\omega$ .

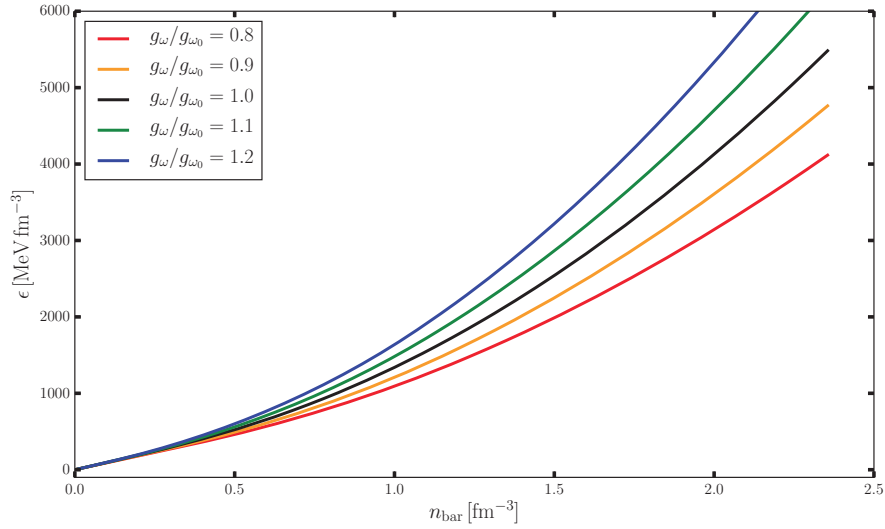


**Figura 4.12:** Curvas de densidad de los mesones en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\omega$ .

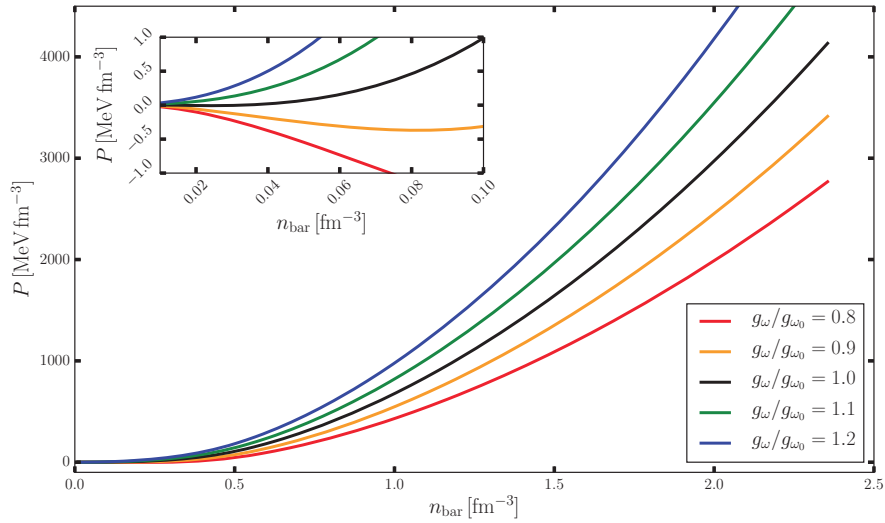


**Figura 4.13:** Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas),  $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\omega$ .

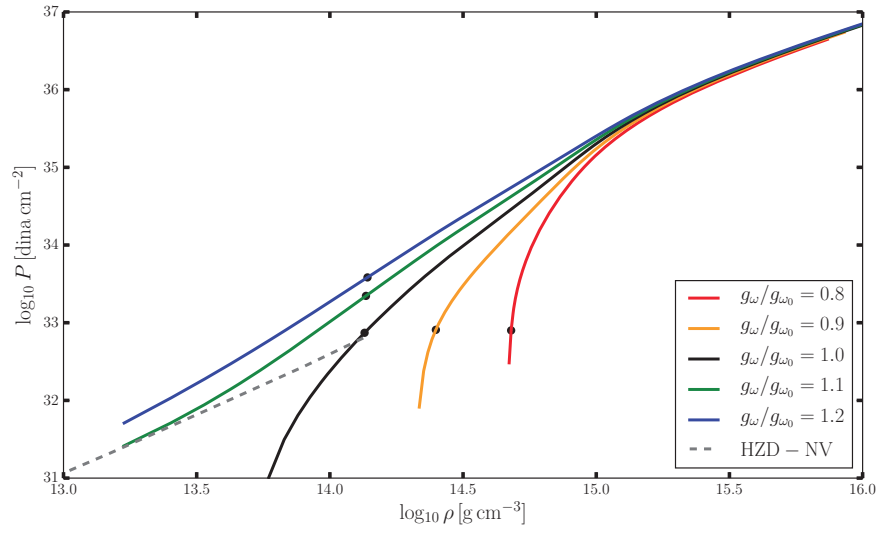
#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO



**Figura 4.14:** Curvas de densidad de energía en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\omega$ .



**Figura 4.15:** Curvas de presión en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\omega$ .

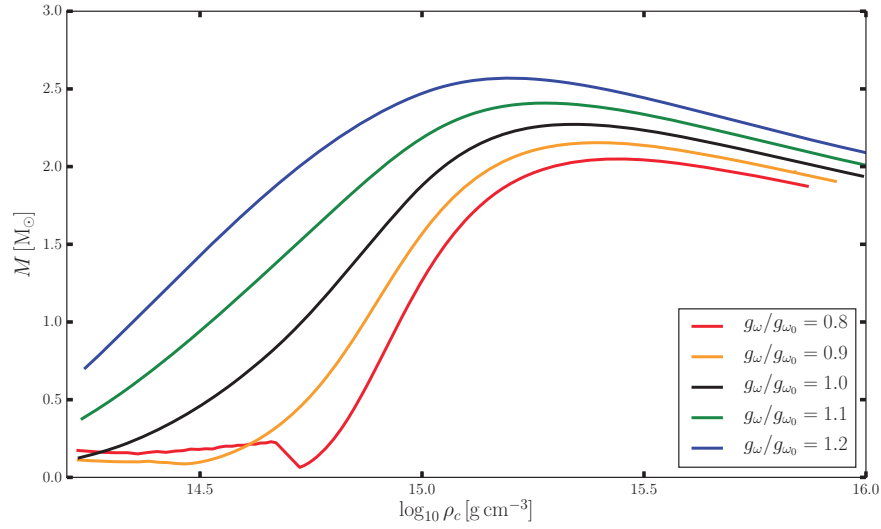


**Figura 4.16:** Ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de  $g_\omega$ .

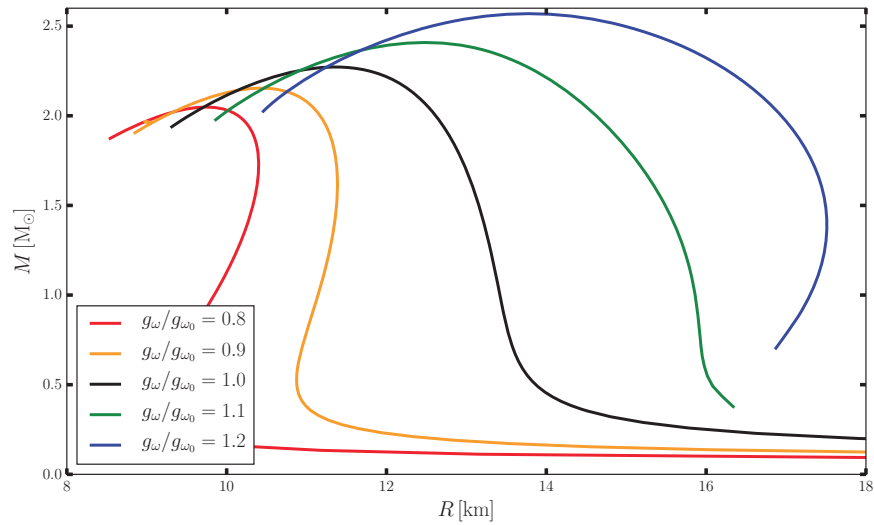
los resultados de [Lattimer and Prakash \(2001\)](#).

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

---



**Figura 4.17:** Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $g_\omega$ .



**Figura 4.18:** Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $g_\omega$ .

### 4.3. Variación de $g_\rho$

Las variaciones de  $g_\rho$  a partir de la Tabla 4.1 se presentan a continuación.

La Tabla 4.5 muestra los valores experimentales, donde  $g_{\rho_0}$  es el valor base. Como es de esperarse, modificar el parámetro  $g_\rho$  no modifica la densidad bariónica, energía de ligadura, coeficiente de compresibilidad, o masa de Landau en saturación, pues dichas definiciones están definidas para materia simétrica, donde se considera la misma cantidad de neutrones que de protones. De esta manera, por la ecuación (2.109), la densidad del campo  $\rho_{03}$  siempre es nula en este caso, invalidando su parámetro de acoplamiento. Por el contrario, tomando en cuenta que la energía de simetría aumenta con la diferencia de energía por barión entre materia de neutrones y materia simétrica, el valor de  $g_\rho$  afecta directamente dicho valor (debido a esa misma ecuación).

$g_\rho/g_{\rho_0}$	$n_{\text{sat}}$ [fm <sup>-3</sup> ]	BE <sub>sat</sub> [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$E_{\text{sim sat}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
0.8	0.16	-16.2	230	26.0	0.78
0.9	0.16	-16.2	230	28.3	0.78
1.0	0.16	-16.2	230	30.8	0.78
1.1	0.16	-16.2	230	33.7	0.78
1.2	0.16	-16.2	230	36.8	0.78

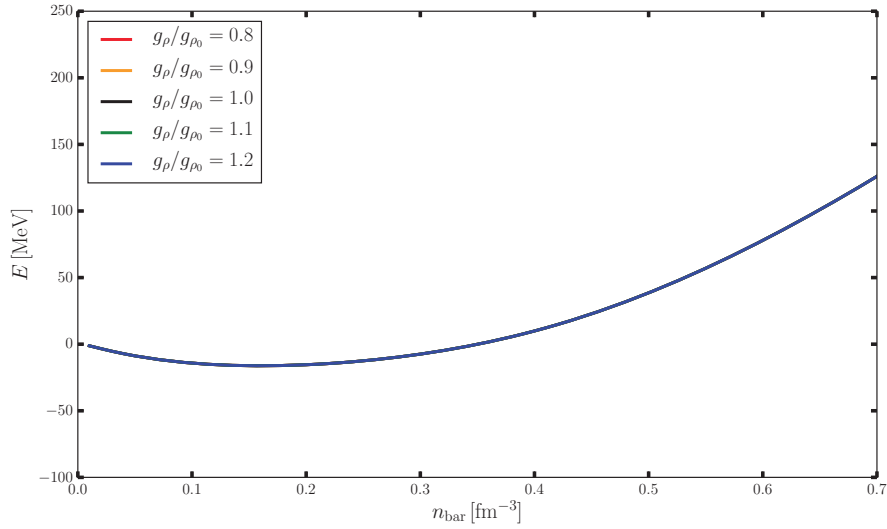
**Tabla 4.5:** Valores experimentales en saturación generados con la variación de  $g_\rho$  con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.

Las Figura 4.19 muestra la nula influencia de las alteraciones en  $g_\rho$  sobre la energía por nucleón en materia simétrica. La Figura 4.20 muestra la proporcionalidad de la energía por nucleón de materia de neutrones con  $g_\rho$ . Debido a que el potencial químico de los bariones depende de  $g_\rho\rho_{03}$  (ecs. (2.105) y (2.125)), y que éste está directamente relacionado con la proporción de bariones y leptones (ecs. (2.123) y (2.124)), el hecho de alterar dicho parámetro cambiará la proporción de partículas. Esto se muestra en la Figura 4.22. De esta manera, como la proporción de partículas cambia con  $g_\rho$ , las ecuaciones (2.107) y (2.109) generarán que tanto  $g_\sigma\sigma$  (en muy baja proporción) como  $g_\rho\rho_{03}$  (en baja proporción, amplificada o reducida principalmente por  $g_\rho$ ) sean alteradas, como lo muestra la Figura 4.21.

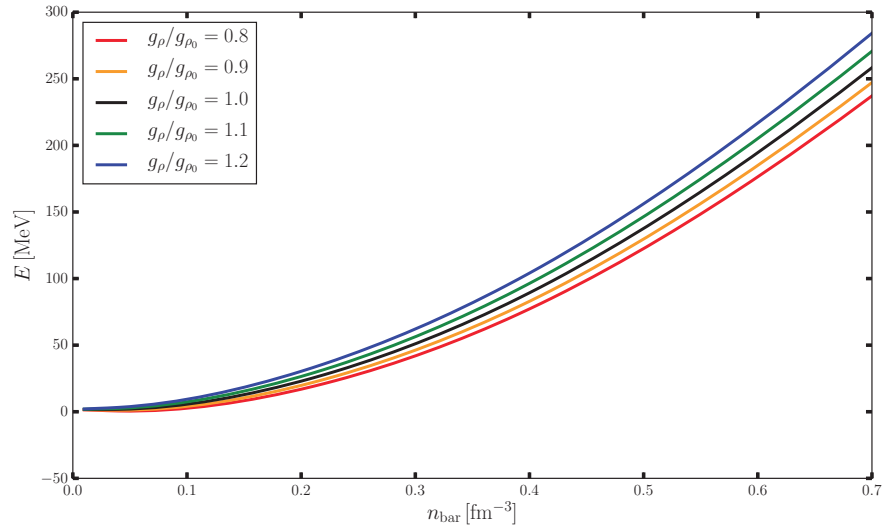
La presión y densidad de energía se muestran en las Figuras 4.23 y 4.24. Éstas sufren una mínima alteración, sobre todo a altas densidades. Sin embargo, como la Figura 4.25 muestra, estas pequeñas alteraciones generan algunos cambios más visibles en las curvas de  $P = P(\rho)$  (por estar en escala Log-Log). Esto se ve reflejado en las curvas  $M$  vs.  $\rho_c$  y MR de las Figuras 4.26 4.27, donde no se observan cambios en la

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

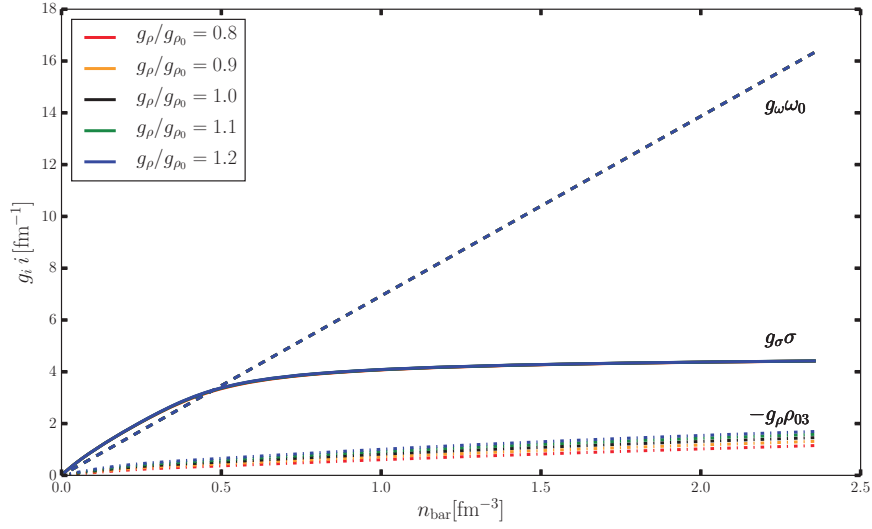
---



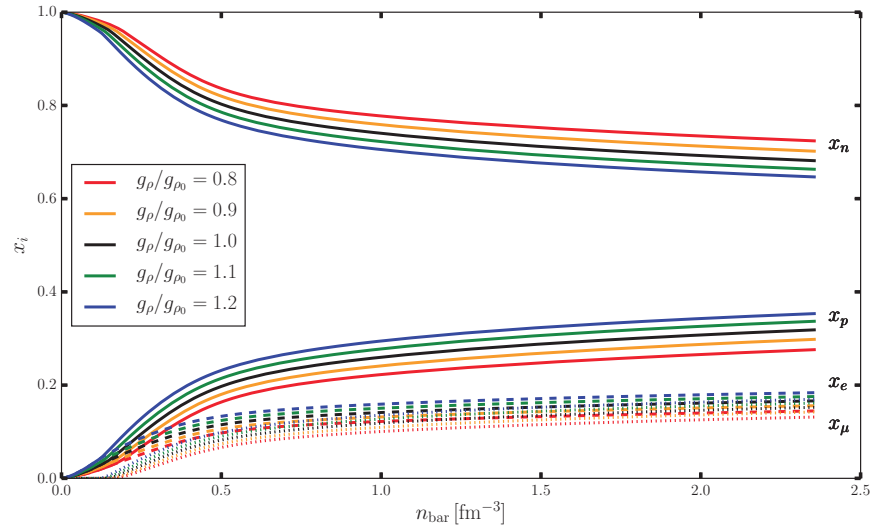
**Figura 4.19:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de  $g_\rho$ .



**Figura 4.20:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de  $g_\rho$ .



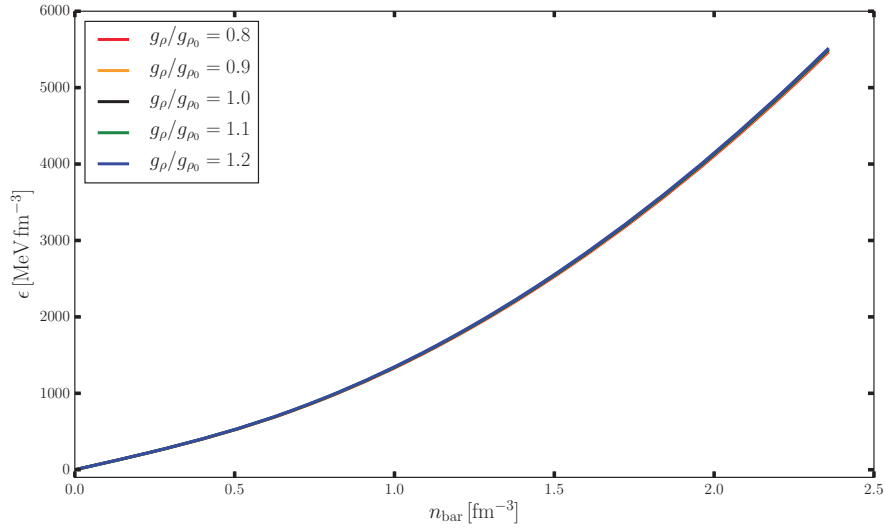
**Figura 4.21:** Curvas de densidad de los mesones en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\rho$ .



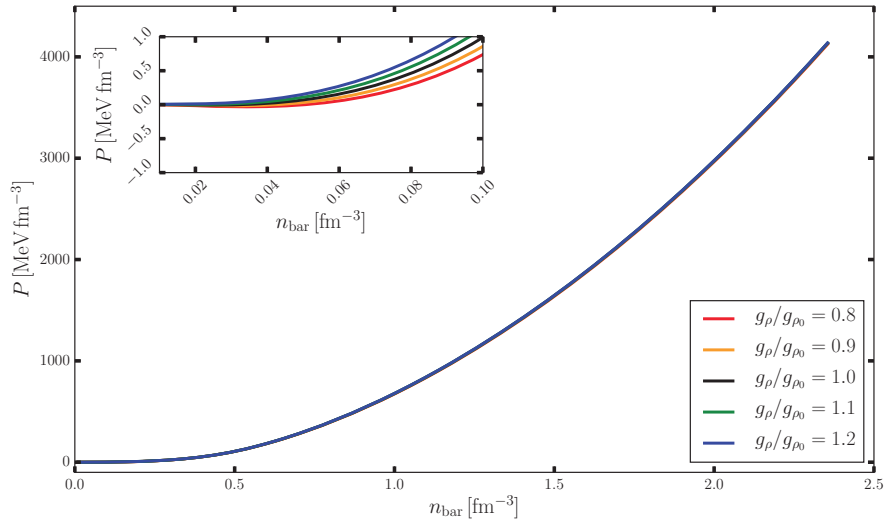
**Figura 4.22:** Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas),  $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\rho$ .



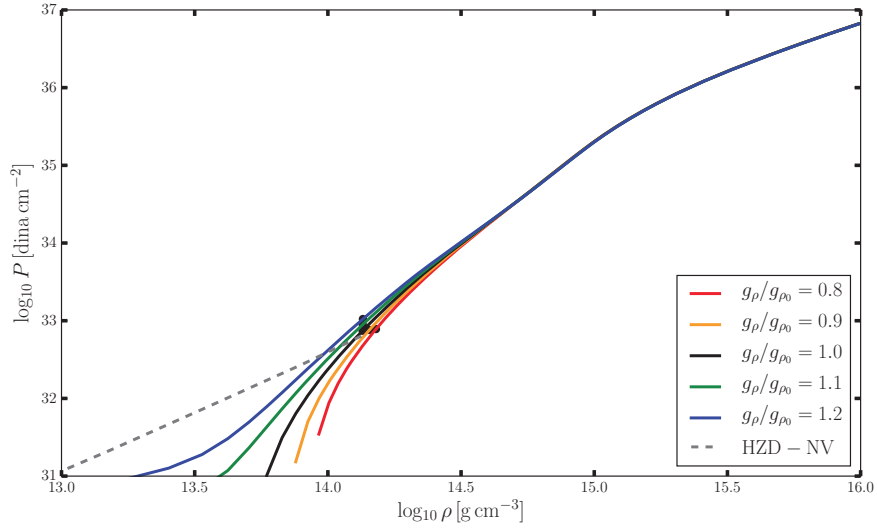
#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO



**Figura 4.23:** Curvas de densidad de energía en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\rho$ .



**Figura 4.24:** Curvas de presión en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $g_\rho$ .

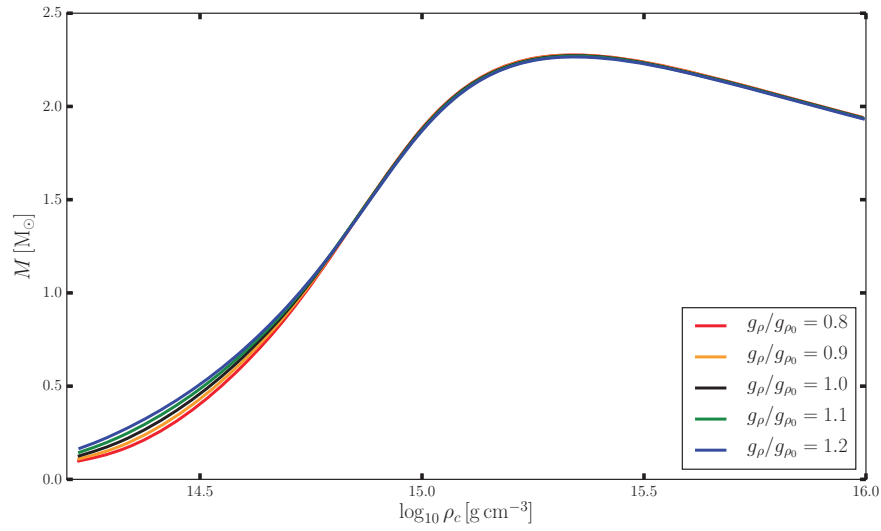


**Figura 4.25:** Ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de  $g_\rho$ .

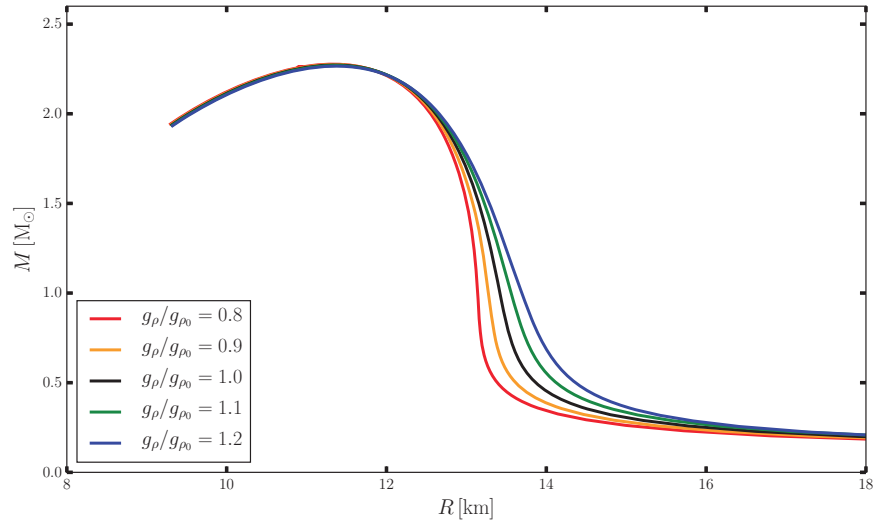
masa estelar a densidades altas, al no haber diferencias en las ecuaciones de estado, y donde sí se observan aumentos en los radios estelares a bajas densidades, heredados de las diferencias en la ecuación de estado. Esto reproduce nuevamente los resultados de [Lattimer and Prakash \(2001\)](#).

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

---



**Figura 4.26:** Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $g_{\rho}$ .



**Figura 4.27:** Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $g_{\rho}$ .

#### 4.4. Variación de $b$

Los cambios que representa cambiar el parámetro  $b$  a partir de la Tabla 4.1 se presentan a continuación.

La Tabla 4.6 muestra los valores experimentales, donde  $b_0$  es el valor base. Aquí resulta que cuando se deja crecer  $b$ ,  $BE_{\text{sat}}$  y  $m_{L_{\text{sat}}}/m_N$  aumentan, contrario a la disminución de  $n_{\text{sat}}$ ,  $K_{\text{sat}}$  y  $E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ , presentando un comportamiento contrario al generado por la variación de  $g_\sigma$ .

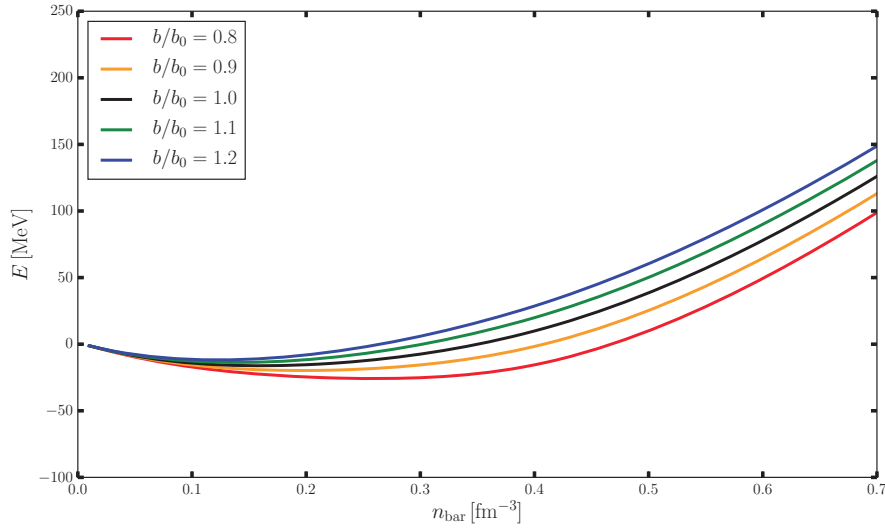
$b/b_0$	$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$BE_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
0.8	0.26	-25.8	433	52.0	0.65
0.9	0.20	-19.8	282	38.8	0.73
1.0	0.16	-16.2	230	30.8	0.78
1.1	0.14	-13.7	208	27.0	0.81
1.2	0.12	-11.9	180	23.3	0.84

**Tabla 4.6:** Valores experimentales en saturación generados con la variación de  $b$  con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.

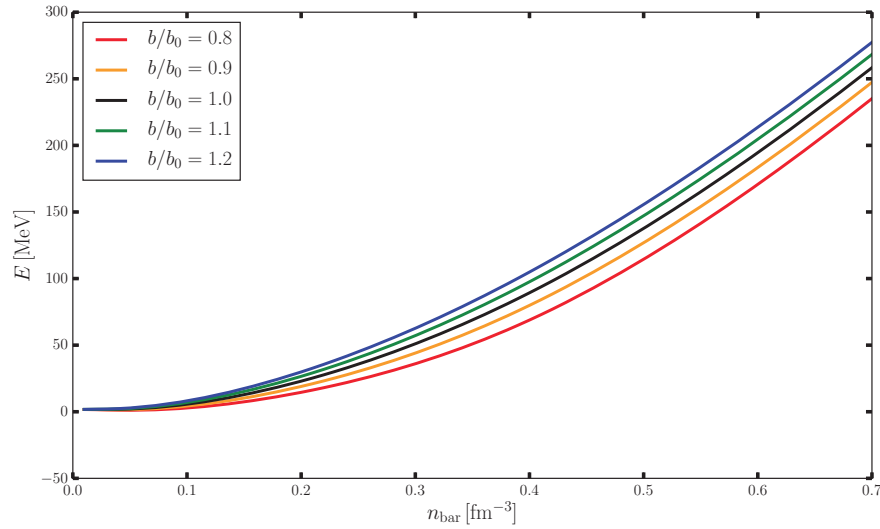
En las curvas de la Figura 4.28 se aprecia la energía por nucleón para materia simétrica. El comportamiento observado por estas curvas obedece a la ecuación (2.117), que establece que el mesón  $\sigma$  y su auto-interacción a orden cúbico (en este caso, auto-repulsión) aumentan la densidad de energía del sistema. Por ello, también la energía de materia de neutrones aumenta con  $b$  en la Figura 4.29 (aunque no en tal proporción como con materia simétrica, pues de todos modos se observa una disminución en la energía de simetría). La Figura 4.30 muestra que la densidad del mesón más afectada es la de  $\sigma$ , lo que vuelve a indicar el sentido en que modificará la densidad de energía. Por otro lado, en la Figura 4.31 se muestra que tanto bariones como leptones son afectados por el aumento o disminución de  $b$ . La presión y densidad de energía en las Figuras 4.32 y 4.33 es alterada ligeramente, sobre todo a altas densidades, obediendo las ecuaciones (2.117) y (2.118): conforme  $b$  aumenta la densidad de energía aumenta y la presión disminuye (aunque aquí nuevamente se observa un cambio en el comportamiento a  $\approx 0.6 \text{ fm}^{-3}$ ). La Figura 4.34 muestra la ecuación de estado y sus respectivas variaciones; notar que la dependencia de la ecuación con  $b$  es contraria a su dependencia con  $g_\sigma$ , lo que muestra el papel de auto-repulsión que juega  $b$  entre mesones  $\sigma$ . Las variaciones provocan cambios en las curvas de  $M$  vs.  $\rho_c$  y MR, desplegados en las Figuras 4.35 y 4.36. Nuevamente, los resultados generados por las variaciones en  $b$  son consistentes con los resultados de Lattimer and Prakash (2001).

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

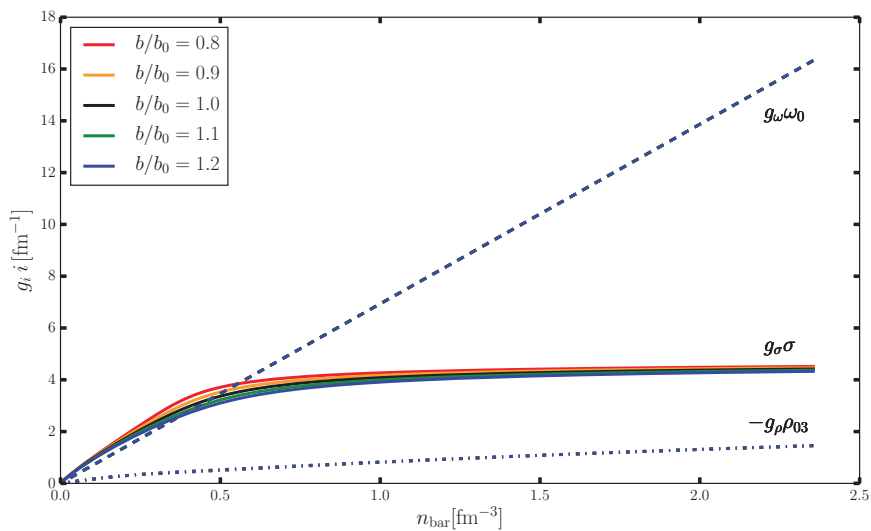
---



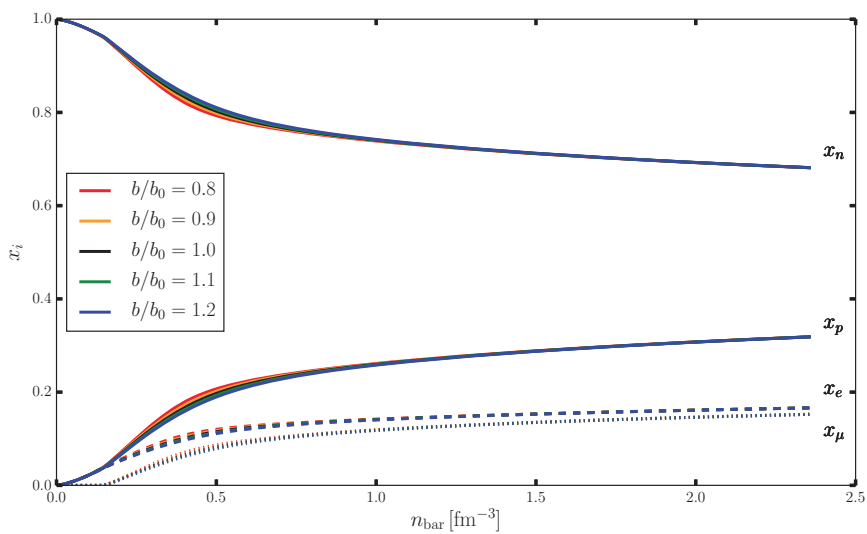
**Figura 4.28:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de  $b$ .



**Figura 4.29:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de  $b$ .



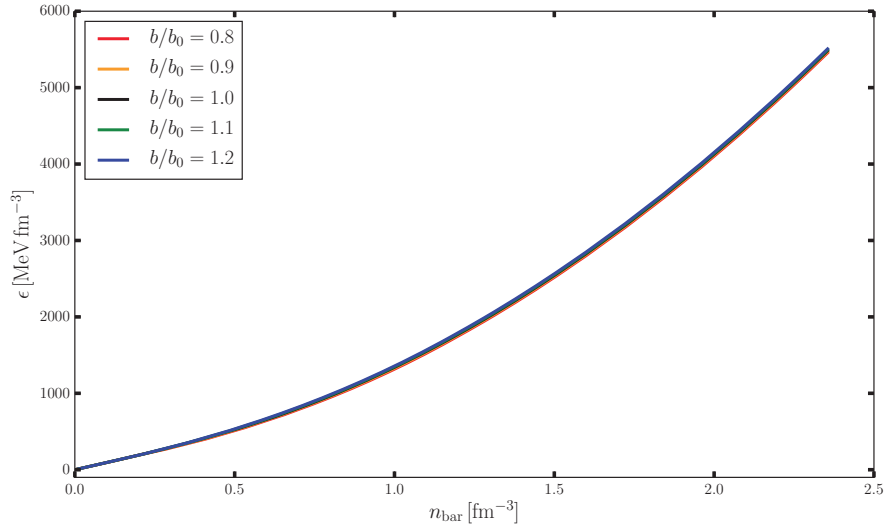
**Figura 4.30:** Curvas de densidad de los mesones en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $b$ .



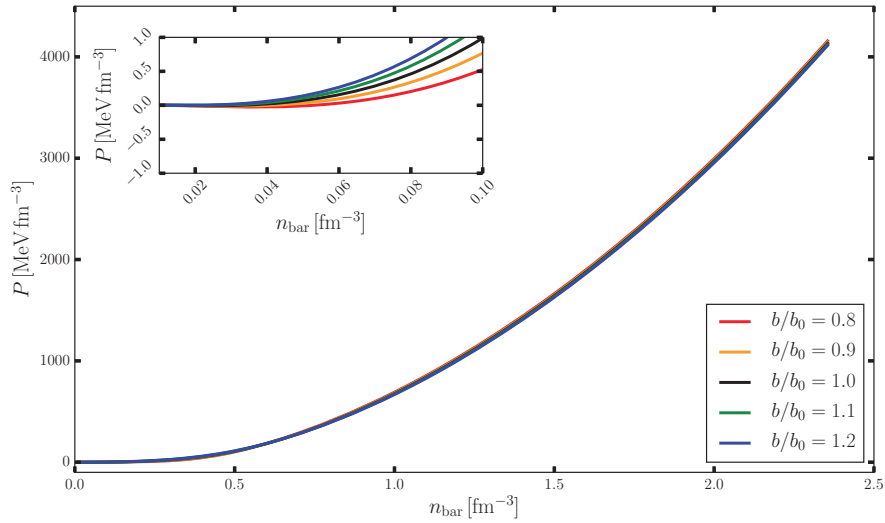
**Figura 4.31:** Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas),  $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $b$ .

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

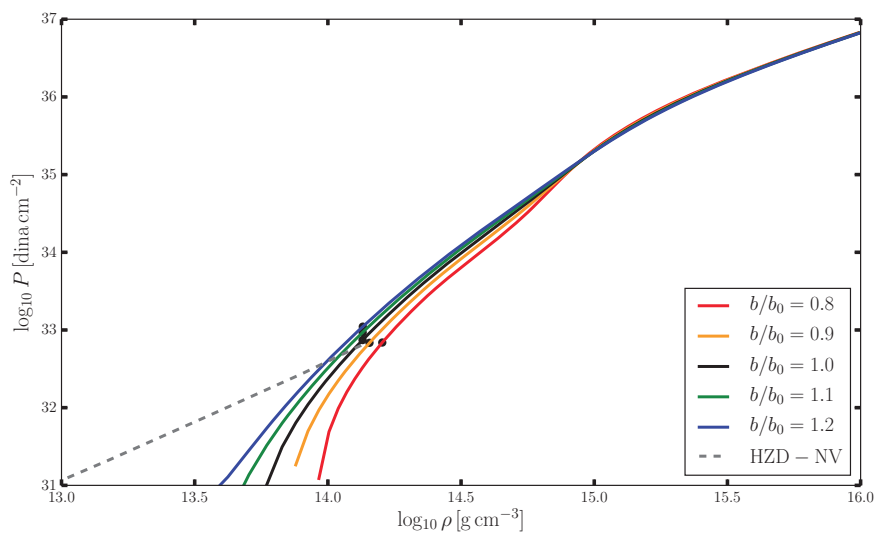
---



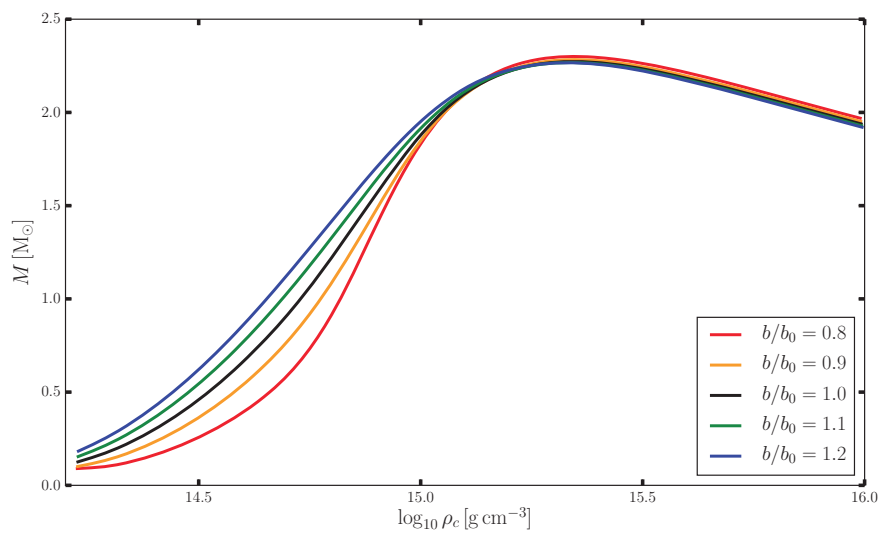
**Figura 4.32:** Curvas de densidad de energía en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $b$ .



**Figura 4.33:** Curvas de presión en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $b$ .



**Figura 4.34:** Ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de  $b$ .

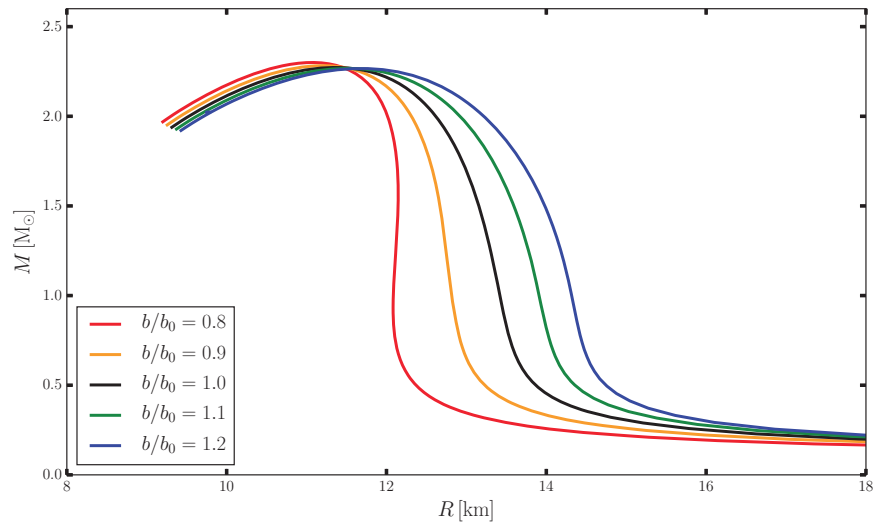


**Figura 4.35:** Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $b$ .



#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

---



**Figura 4.36:** Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $b$ .

## 4.5. Variación de $c$

Por último, los cambios que representan cambiar el parámetro  $c$  a partir de la Tabla 4.1 se presentan a continuación.

La Tabla 4.6 muestra los valores experimentales, donde  $c_0$  es el valor base. En el presente conjunto de constantes  $c_0$  es negativa. De esta manera si  $c/c_0$  disminuye, entonces  $c$  es más positiva. Entonces cuando se aumenta  $c$  (cuando  $c/c_0$  disminuye), también aumentan  $BE_{\text{sat}}$ ,  $m_{L_{\text{sat}}}/m_N$ , e incluso  $K_{\text{sat}}$ , y lo contrario para  $n_{\text{sat}}$  y  $E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ . Así, las variaciones de  $c$  presentan un comportamiento similar a las propias de  $g_\sigma$ , con la excepción del resultado de  $K_{\text{sat}}$ .

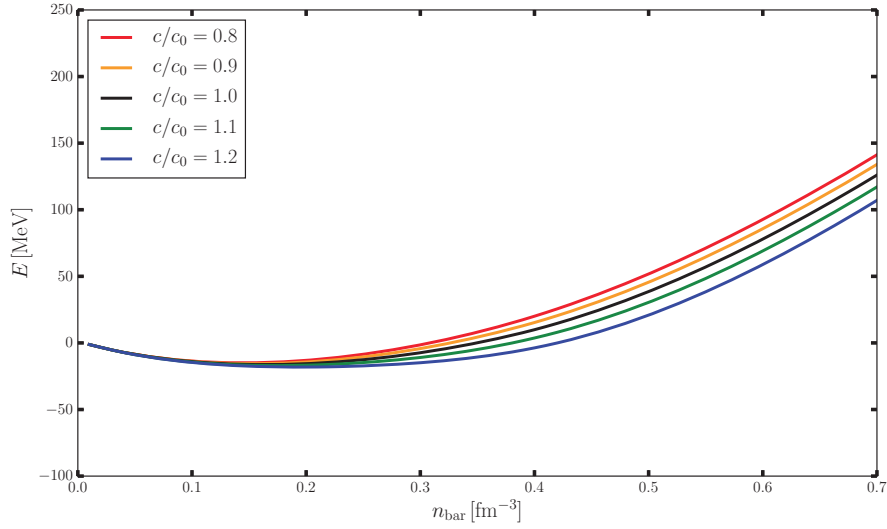
$c/c_0$	$n_{\text{sat}}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$BE_{\text{sat}}$ [MeV]	$K_{\text{sat}}$ [MeV]	$E_{\text{sim}_{\text{sat}}}$ [MeV]	$m_{L_{\text{sat}}}/m_N$
0.8	0.14	-14.9	222	27.1	0.81
0.9	0.15	-15.5	229	28.9	0.79
1.0	0.16	-16.2	230	30.8	0.78
1.1	0.17	-17.0	222	32.8	0.77
1.2	0.19	-18.1	211	36.7	0.74

**Tabla 4.7:** Valores experimentales en saturación generados con la variación de  $c$  con respecto a los valores de la Tabla 4.1, usando también las constantes de las Tablas 3.1 y 3.6.

Las curvas de la energía de materia simétrica en la Figura 4.37 obedecen lo esperado: conforme  $c/c_0$  aumenta, la energía se volverá más negativa, pues el término de auto-interacción a orden cuarto representa una auto-atracción (notar que como  $c < 0$ , el término a orden cuarto de  $\sigma$  en (2.48) resulta ser positivo). Lo mismo sucede para materia de neutrones en la Figura 4.38. Por supuesto, las curvas de densidad de energía en equilibrio  $\beta$  mostradas en la Figura 4.41 presentará el mismo comportamiento, descrito por la ecuación (2.117), sobre todo a densidades altas. Las curvas de presión en la Figura 4.42 nuevamente presentan un comportamiento tal que las curvas para cada  $c/c_0$  se cruzan a una densidad bariónica  $\approx 0.8 \text{ fm}^{-3}$ . Esto, a su vez, puede ser explicado con el mismo argumento presentado anteriormente, donde las densidades relativas de los mesones,  $g_\sigma\sigma$  y  $g_\rho\rho$  ( $g_\sigma\sigma$  en mayor medida), juegan un papel importante en el comportamiento de la presión y la ecuación de estado. Estas densidades se muestran en la Figura 4.39. Además, la Figura 4.40 muestra los cambios en las fracciones de partículas del sistema generados por el cambio en  $c$ . La Figura 4.43 muestra la ecuación de estado, en donde se observan ligeras variaciones en general, sobre todo a bajas densidades, aspecto que se ve reflejado en las Figuras 4.44 y 4.45, que confirma nuevamente los

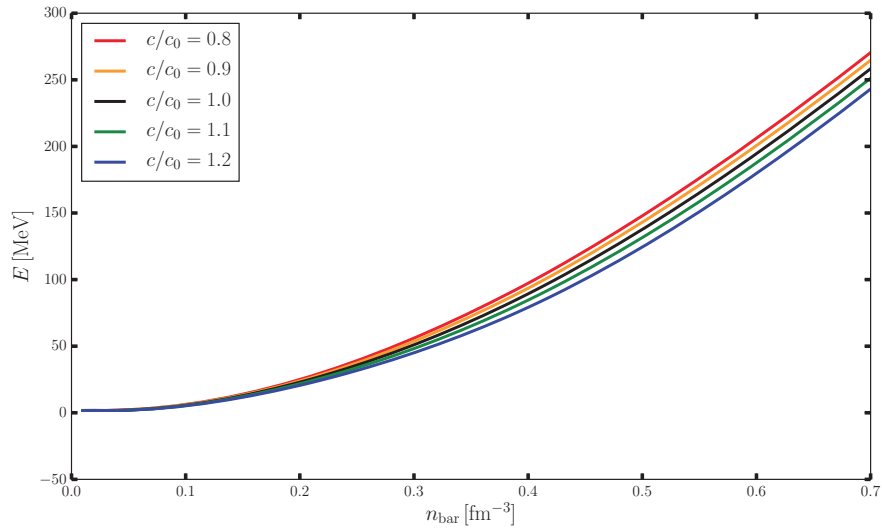
#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

---

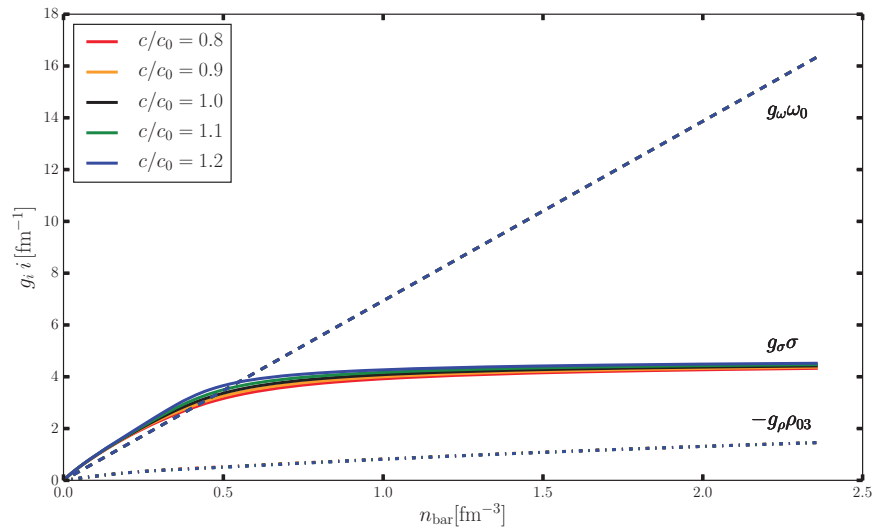


**Figura 4.37:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia simétrica para las variaciones de  $c$ .

cambios descritos por [Lattimer and Prakash \(2001\)](#).



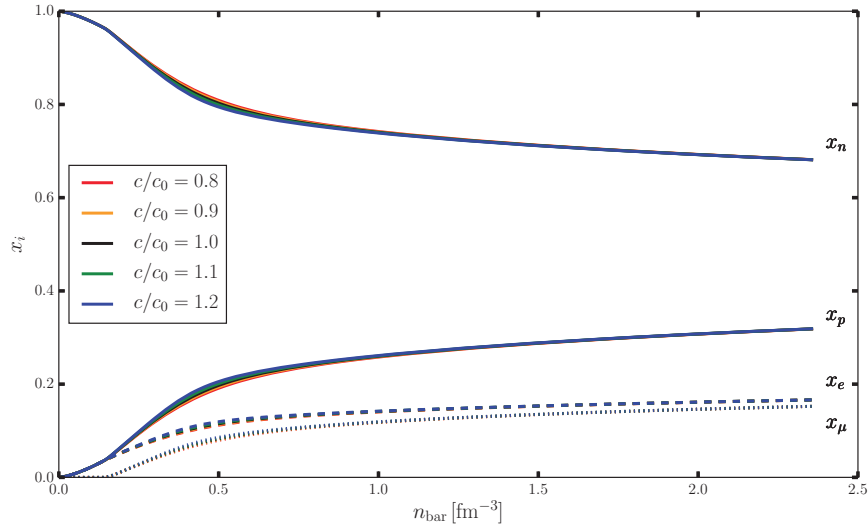
**Figura 4.38:** Curvas de energía por nucleón vs. densidad bariónica de materia de neutrones para las variaciones de  $c$ .



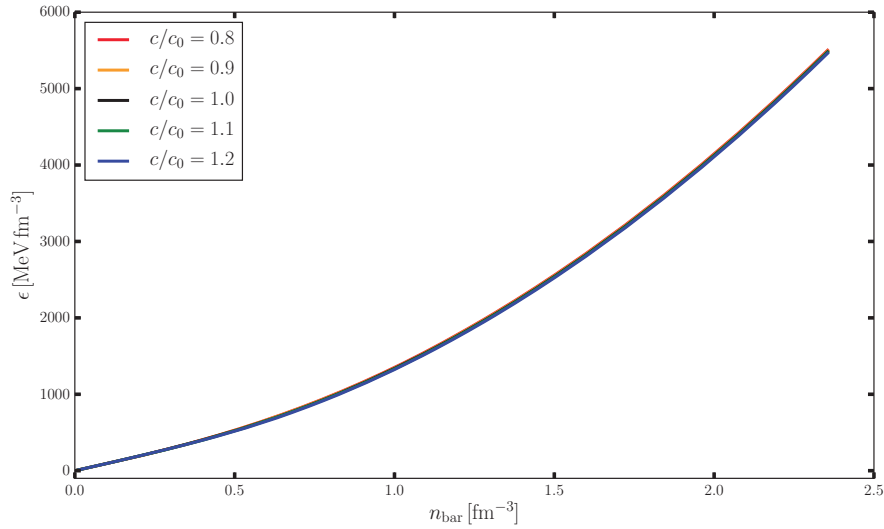
**Figura 4.39:** Curvas de densidad de los mesones en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $c$ .

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

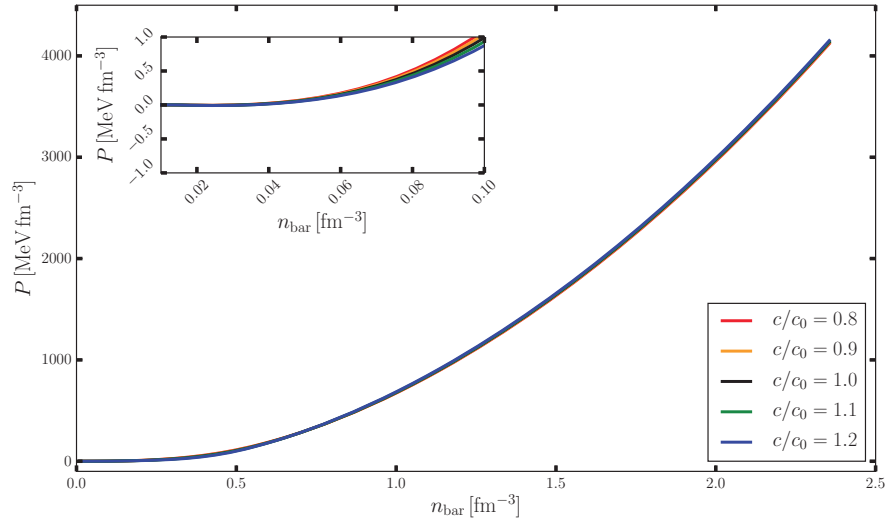
---



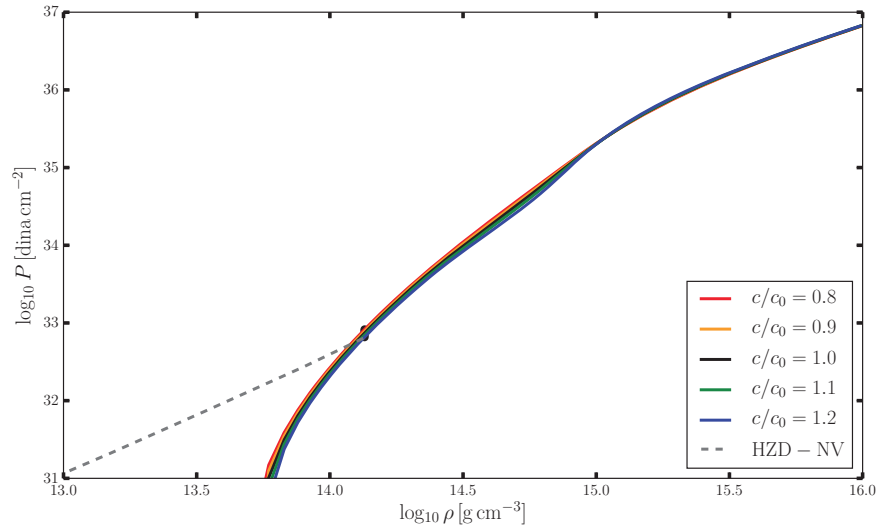
**Figura 4.40:** Curvas de fracción de bariones (líneas continua) y leptones (líneas discontinuas),  $Y_i = n_i/n_{\text{bar}}$ , en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $c$ .



**Figura 4.41:** Curvas de densidad de energía en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $c$ .



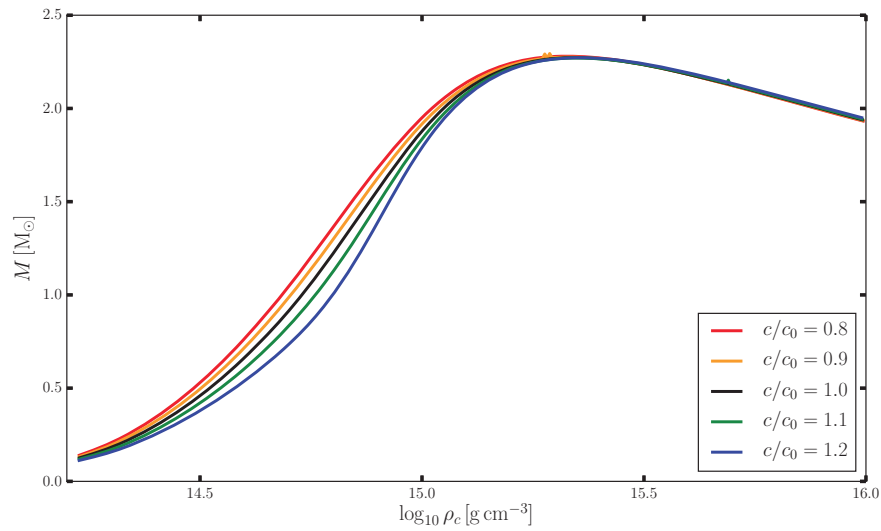
**Figura 4.42:** Curvas de presión en equilibrio  $\beta$  vs. densidad bariónica para las variaciones de  $c$ .



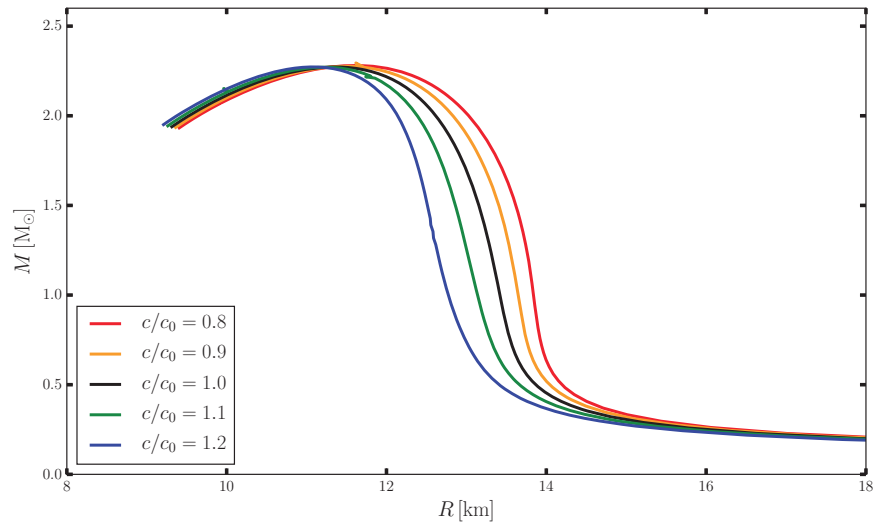
**Figura 4.43:** Ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  ( $P = P(\rho) = P(\epsilon/c^2)$ ) para las variaciones de  $c$ .

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN: VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO

---



**Figura 4.44:** Curvas de masa estelar contra densidad central de la estrella, usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $c$ .



**Figura 4.45:** Curvas MR usando la ecuación de estado en equilibrio  $\beta$  para las variaciones de  $c$ .

## Conclusiones y perspectiva

---

El método de la DFT presenta una forma sencilla para ajustar los valores experimentales deseados. De esta manera, el modelo propuesto por [Boguta \(1981\)](#) permite ajustar cinco propiedades nucleares deseadas gracias a sus constantes de acoplamiento, y con él producir estrellas de neutrones. Dichas constantes controlan la magnitud de la acción de sus respectivos campos: el  $\sigma$ , que actúa como atractor entre partículas; el  $\omega$ , que funciona como repulsor; y el  $\rho$ , que distingue entre neutrones y protones (mientras que  $\sigma$  y  $\omega$  no lo hacen).

Como resultado del análisis llevado a cabo en la presente tesis se puede concluir lo siguiente.

1. Se confirma que el campo  $\sigma$  genera atracción, el  $\omega$  repulsión, y el  $\rho$  distingue (energéticamente) entre nucleones.
2. Se confirman los resultados de [Lattimer and Prakash \(2001\)](#) sobre la relación entre la ecuación de estado y las masas y radios de estrellas de neutrones.
  - La masa estelar máxima generada por una ecuación de estado depende del comportamiento de la presión a altas densidades: ecuaciones de estado con más alta presión resultan en masas máximas mayores.
  - El radio a masas del orden de  $1.2-1.4 M_{\odot}$  depende de la presión a densidades entre  $1-3 n_{\text{sat}}$ : ecuaciones de estado con presiones más grandes generan radios estelares mayores.
3. Efecto de  $g_{\sigma}$  sobre la materia nuclear: Aumentar su valor (es decir, la atracción) aumenta la densidad de  $\sigma$ , cuyos efectos nucleares son aumentar la densidad de saturación  $n_{\text{sat}}$ , el valor absoluto de la energía de ligadura  $|BE_{\text{sat}}|$  y la incompresibilidad  $K_{\text{sat}}$  (además de modificar  $E_{\text{sim,sat}}$  y  $m_{L_{\text{sat}}}$ ).
4. Efecto de  $g_{\sigma}$  sobre la ecuación de estado de estrellas de neutrones: Aumentar su valor (es decir, la atracción) aumenta la densidad de  $\sigma$ , lo que reduce la presión a bajas densidades, y aumenta la presión a altas densidades. Ver Punto 2 para efectos astronómicos sobre estrellas de neutrones.



## 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVA

---

5. Efecto de  $g_\omega$  sobre la materia nuclear simétrica: Aumentar su valor (es decir, la repulsión) disminuye  $n_{\text{sat}}$ ,  $|BE_{\text{sat}}|$  y  $K_{\text{sat}}$  (además de modificar  $E_{\text{sim,sat}}$  y  $m_{L_{\text{sat}}}$ ).
6. Efecto de  $g_\omega$  sobre la ecuación de estado de estrellas de neutrones: Aumentar su valor (es decir, la repulsión) aumenta la presión para toda densidad. Ver Punto 2 para efectos astronómicos sobre estrellas de neutrones.
7. Efecto de  $g_\rho$  sobre la materia nuclear: Aumentar su valor (es decir, la fuerza de restauración de simetría de isoespín) únicamente aumenta la energía de simetría a densidad de saturación,  $E_{\text{sim,sat}}$ .
8. Efecto de  $g_\rho$  sobre la ecuación de estado de estrellas de neutrones: Aumentar su valor (es decir, la fuerza de restauración de simetría de isoespín) aumenta la presión a bajas densidades. Ver Punto 2 para efectos astronómicos sobre estrellas de neutrones.
9. Efecto de  $b$ : Aumentar su valor (es decir, la auto-repulsión de  $\sigma$ ) disminuye la densidad de  $\sigma$ , por lo que tiene el efecto contrario a aumentar el valor de  $g_\sigma$  de los Puntos 3 y 4 sobre las propiedades nucleares y astronómicas. Sin embargo, los efectos sobre dichas propiedades son menores que los de  $g_\sigma$  al depender cúbicamente sobre la densidad de  $\sigma$ .
10. Efecto de  $c$ : Aumentar su valor absoluto (es decir, la auto-atracción de  $\sigma$ ) aumenta la densidad de  $\sigma$ , por lo que tiene un efecto equivalente a aumentar el valor de  $g_\sigma$  de los Puntos 3 y 4 sobre las propiedades nucleares (con excepción de  $K_{\text{sat}}$ ) y astronómicas. Sin embargo, los efectos sobre dichas propiedades son menores que los de  $g_\sigma$  al depender cuárticamente sobre la densidad de  $\sigma$ .

De esta manera, las constantes de acoplamiento que mayor efecto tienen sobre todas las propiedades de materia nuclear y astronómicas en estrellas de neutrones son  $g_\omega$  y  $g_\sigma$ , propuestos en el modelo original de [Walecka \(1974\)](#). La constante  $g_\rho$ , propuesta por [Boguta \(1981\)](#) modifica únicamente la energía de simetría, es decir, sólo está acoplada a esta propiedad, aspecto importante a la hora de ajustar las propiedades nucleares teóricas de cierto modelo con las experimentales, aunque sus modificaciones a la ecuación de estado y perfil gravitacional son menores. Las constantes de auto-interacción,  $b$  y  $c$ , propuestos por [Boguta and Bodmer \(1977\)](#), poseen menor influencia sobre todas las propiedades nucleares, la ecuación de estado y el perfil de la estrella, siendo  $c$  de menor peso que  $b$ ; sin embargo, la inclusión de ambas constantes genera dos grados de libertad extra, por lo que resultan eficaces para ajustes finos de las propiedades nucleares.

Los resultados obtenidos en esta tesis aportan información útil sobre el tipo de interacciones que se pueden agregar al modelo para obtener propiedades deseadas de la materia generada. Con ello, se puede dar un uso mejor dirigido y más eficaz a los modelos basados en la RMFT, y así ajustar más propiedades nucleares tales como la pendiente de la energía de simetría a densidad de saturación, o propiedades astronómicas de estrellas de neutrones como la masa estelar máxima posible y su respectivo radio, como ya hacen varios grupos en el mundo (véase, por ejemplo, el trabajo de [Fattoyev](#)

---

et al. (2010)). Esta última posibilidad es de interés astrofísico para generar modelos que empaten con mediciones experimentales, en un marco en el que tan sólo recientemente existen mediciones más precisas de masas y radios de estrellas de neutrones obtenidas con los detectores de ondas gravitacionales (Abbott B. P. et al., 2017); o indirectamente a partir de mediciones de temperatura de polvo alrededor del centro de SN 1987A (Page et al., 2020).

Además de las variantes de partículas e interacciones incluídas en el modelo del presente trabajo, es posible agregar otro tipo de partículas y sus interacciones, como hiperones o quarks, que modificarían la ecuación de estado a altas densidades (entre 2 y 3 veces la densidad de saturación) ((Blaschke and Chamel, 2018) y (Han et al., 2019)); con dichas partículas habría que agregar asimismo sus constantes de acoplamiento a la densidad lagrangiana, lo cual permitiría analizar el papel de la inclusión de estas partículas y sus constantes en el modelo. Asimismo, otra manera de variar el modelo aquí presentado es establecer temperatura distinta de cero al inicio de la vida de la estrella de neutrones (la proto-estrella de neutrones), lo cual modificaría la ecuación de estado a través de la inclusión de neutrinos atrapados en la materia, que a su vez modificaría las fracciones relativas de los bariones y leptones. A su vez, al disminuir la temperatura de la proto-estrella de neutrones, su momento de inercia cambiaría, lo cual modifica la métrica del sistema, aspecto que se ve reflejado en el Radio y Masa máxima del modelo (Dexheimer and Schramm, 2008).

Es un excelente momento, tecnológicamente hablando, para obtener mediciones astronómicas de estrellas de neutrones, por lo que se le presenta a la Astrofísica teórica una gran oportunidad para poner a prueba sus modelos sobre el cosmos.



## Parametrización de la Materia nuclear

---

Un método alternativo a la ecuación de masa semiempírica descrita en la Sección 2.1.2 para describir la densidad de energía de un núcleo, es por medio de la Parametrización de la Materia nuclear. Éste consiste en expresar dicha energía como una serie de potencias de la variable

$$\delta \equiv 1 - 2x = 1 - 2\frac{n_p}{n} \quad (\text{A.1})$$

donde  $n_p$  es la densidad numérica de los protones, y  $n$  la densidad numérica bariónica (incluyendo protones y neutrones). Así, la densidad de energía de la materia nuclear sería de la forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_N(n, x) &= n [m_N + E(n, x)] \\ &= n [m_N + E_0(n) + E_{\text{sim}}(n)\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3)] \\ &= n [m_N + E_0(n) + E_{\text{sim}}(n)(1 - 2x)^2 + \mathcal{O}((1 - 2x)^3)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde  $m_N$  es la masa del nucleón (938 MeV/c<sup>2</sup>),  $E_0$  es la energía por barión en la materia simétrica y  $E_{\text{sim}}$  la energía de simetría. Es decir,

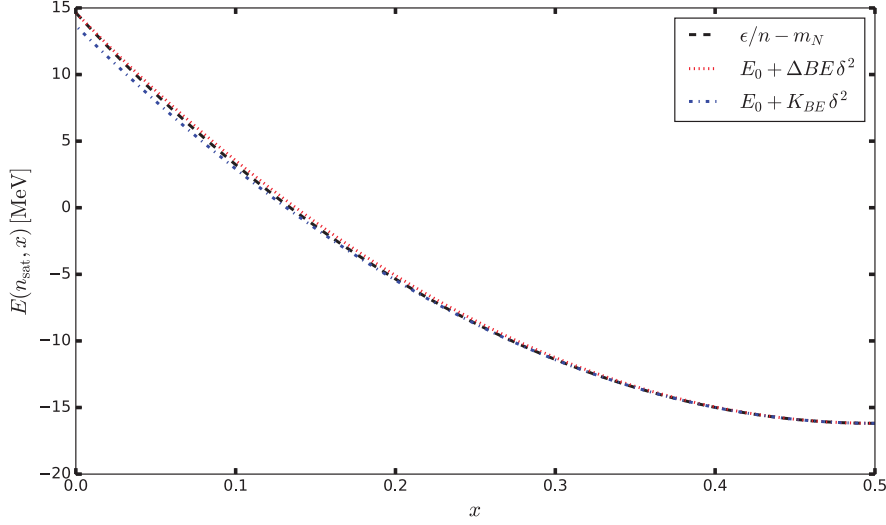
$$\begin{aligned} E(n, x) &\equiv \epsilon_N(n, x)/n - m_N \\ &= E_0(n) + E_{\text{sim}}(n)\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde, claramente,  $E_{\text{sim}}$  es la mitad de la segunda derivada de  $E(n, x)$ , conforme a la ecuación (2.11). En términos de la cantidades introducidas en la Sección 2.1.2 podemos escribir a  $E_0(n)$  como función de la variable

$$\chi \equiv \frac{n - n_{\text{sat}}}{3n_{\text{sat}}} \quad (\text{A.4})$$

mediante una expansión de Taylor:

$$E_0(n) = BE_{\text{sat}} + \frac{1}{2}K_{\text{sat}} \left( \frac{n - n_{\text{sat}}}{3n_{\text{sat}}} \right)^2 + \dots \quad (\text{A.5})$$



**Figura A.1:** Comparación entre energías por nucleón usando ambas expresiones en (A.3). En negro se muestra la solución numérica de las ecuaciones de campo (primera línea de la ecuación (A.3)); en rojo y azul las aproximaciones parabólicas (segunda línea de (A.3)) con los dos valores del coeficiente  $E_{\text{sim}}$ , ecuaciones (2.11) y (2.12). Notar que la diferencia entre las curvas de ambas expresiones aproximadas es de alrededor del 3% para  $x = 0$ .

y de manera similar para  $E_{\text{sim}}(n)$ :

$$E_{\text{sim}}(n) = J + L \left( \frac{n - n_{\text{sat}}}{3n_{\text{sat}}} \right) + \frac{1}{18} K_{\text{sim}} \left( \frac{n - n_{\text{sat}}}{n_{\text{sat}}} \right)^2 + \dots \quad (\text{A.6})$$

donde  $J$  es el valor de la energía de simetría,  $L$  su pendiente y  $K_{\text{sat}}$  su curvatura, a densidad  $n = n_{\text{sat}}$ . Si limitamos la expansión (A.3) a orden  $(1 - 2x)^2$  se puede definir (aproximadamente)  $E_{\text{sim}}(n)$  simplemente como

$$E_{\text{sim}}(n) \equiv E(n, x = 0) - E(n, x = 1/2) \quad (\text{A.7})$$

que es la ecuación (2.12) empleada a lo largo de este trabajo. La Figura A.1 muestra la equivalencia de estas dos definiciones de  $E_{\text{sim}}$ , ecuación (2.11) y (2.12). En este trabajo evaluamos  $E_{\text{sim}}$  con la segunda definición, ecuación (A.7) o (2.12).

# Obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange

---

El principio de Hamilton asegura que las ecuaciones de movimiento son aquellas para las cuales la acción clásica,  $S$ , es un extremo,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[q, \dot{q}] dt \quad (\text{B.1})$$

donde el Lagrangiano depende de las coordenadas generalizadas del sistema,  $q \equiv q_1, \dots, q_n$ , y las velocidades,  $\dot{q} = dq/dt$ . Por analogía consideramos la *densidad Lagrangiana*,  $\mathcal{L}$ , dependiente de los campos,  $\phi(x)$ , y sus cuatro derivadas espacio-temporales,  $\partial_\mu \phi(x)$ ,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \quad (\text{B.2})$$

donde  $x \equiv x^\mu = (t, x, y, z)$ ,  $x_\mu = (t, -x, -y, -z)$ .

El Lagrangiano es la integral sobre el espacio

$$L \equiv \int d\mathbf{x} \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \quad (\text{B.3})$$

La acción correspondiente es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \quad (\text{B.4})$$

La variación de la acción está dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi(x) \quad (\text{B.5})$$

La condición para que la acción sea un extremo se satisface si  $\delta S = 0$ , para cualquier  $\delta \phi(x)$ , por lo que se cumple lo siguiente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (\text{B.6})$$

## B. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

---

La anterior es la ecuación de *Euler-Lagrange* (de movimiento) para el campo  $\phi(x)$ . En el presente trabajo se utilizarán campos escalares, espinores, vectores (cuadri-vectores) y vectores-isovectores (cuadri-vectores, con cuatro componentes del vector por cada una de las tres componentes del isovector, discutidos más adelante); por lo que se utilizará una densidad Lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x), \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), A_\nu, \partial_\mu A_\nu, B_{j\nu}, \partial_\mu B_{j\nu}] \quad (\text{B.7})$$

Las ecuaciones de movimiento para dichos campos se obtienen de manera análoga al campo escalar; para el espinor, el vector y el vector-isovector, respectivamente, resultan ser de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{j\nu}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu B_{j\nu})} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Si el Lagrangiano (densidad lagrangiana) es un escalar de Lorentz, entonces las ecuaciones de movimiento de la teoría son covariantes de Lorentz. Por ello, utilizar tales escalares representa una manera efectiva para construir teorías invariantes ante tales transformaciones. De esta manera se requiere que  $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$  bajo transformaciones de Lorentz.

(Glendenning, 2000, pp. 150, 151)

---

## Teoría de Isoespín

---

En 1932 Heisenberg observó el gran parecido entre el protón y el neutrón, en particular, en sus masas, las cuales son muy similares ( $m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$ ). Heisenberg propuso que se trataran a tales partículas como dos estados de una sola partícula, el *nucleón*. Escribiendo al nucleón como una matriz columna de dos componentes,

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

con  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , y  $\alpha$  y  $\beta$  complejos. Ahora se introduce el isoespín  $\mathbf{I}$ , un vector en el espacio de isoespín, con componentes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Usando por analogía la teoría de momento angular del espín, el nucleón posee isoespín  $\frac{1}{2}$ , y la tercera componente,  $I_3$ , tiene eigenvalores  $+\frac{1}{2}$  para el protón, y  $-\frac{1}{2}$  para el neutrón. Por convención, el isoespín no tiene unidades. En notación de *kets* se tiene

$$p = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad n = \left| \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \right\rangle \quad (\text{C.2})$$

El protón es "isoespín *up*"; el neutrón "isoespín *down*". La conexión con la física viene con la afirmación de Heisenberg de que las interacciones fuertes son invariantes bajo rotaciones en el espacio de isoespín. La anterior es una simetría interna, por lo que el Teorema de Noether afirma que el isoespín se conserva en todas las interacciones fuertes. (Heisenberg, 1932)





## Matrices de Pauli y matrices $\gamma$

---

Las tres matrices de Pauli de  $2 \times 2$  entradas,  $\tau_i$ , se definen como sigue

$$\tau_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

De esta manera se puede definir el triplete  $\vec{\tau} \equiv (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ . Además se definen las siguientes matrices

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{\tau} \\ \vec{\tau} & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \tau_i \\ \tau_i & \mathbb{O} \end{pmatrix}; \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

con

$$\mathbb{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{O} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Así, se puede definir el cuatro-vector covariante  $\gamma^\mu$  cuyas entradas son matrices,

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3); \quad \gamma^0 = \beta; \quad \gamma^i = \beta \alpha_i \quad (\text{D.4})$$

Dichas matrices gama satisfacen algunas reglas tales como

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

cuyos casos particulares indican que  $(\gamma_0)^2 = 1$ ,  $(\gamma_i)^2 = -1$ . (Glendenning, 2000, pp. 159-160)



## Referencias Bibliográficas

---

- Abbott B. P., LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration (2017). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16):161101. [91](#)
- Baade, W. and Zwicky, F. (1934). Cosmic Rays from Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20(5):259–263. [1](#)
- Blaschke, D. and Chamel, N. (2018). *Phases of Dense Matter in Compact Stars*, volume 457, page 337. [91](#)
- Boguta, J. (1981). Remarks on the beta stability in neutron stars. *Physics Letters B*, 106:255–258. [xxiii](#), [2](#), [19](#), [20](#), [46](#), [47](#), [57](#), [58](#), [89](#), [90](#)
- Boguta, J. and Bodmer, A. R. (1977). Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics*, 292:413–428. [xviii](#), [xxiii](#), [xxiii](#), [2](#), [19](#), [46](#), [47](#), [90](#)
- Chadwick, J. (1932). Possible existence of a neutron. *Nature*, 129(3252):312–312. [1](#)
- Cromartie, H. T., Fonseca, E., Ransom, S. M., Demorest, P. B., Arzoumanian, Z., Blumer, H., Brook, P. R., DeCesar, M. E., Dolch, T., Ellis, J. A., Ferdman, R. D., Ferrara, E. C., Garver-Daniels, N., Gentile, P. A., Jones, M. L., Lam, M. T., Lorimer, D. R., Lynch, R. S., McLaughlin, M. A., Ng, C., Nice, D. J., Pennucci, T. T., Spiewak, R., Stairs, I. H., Stovall, K., Swiggum, J. K., and Zhu, W. W. (2020). Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astronomy*, 4:72–76. [xvii](#), [38](#)
- Dexheimer, V. and Schramm, S. (2008). Proto-Neutron and Neutron Stars in a Chiral SU(3) Model. *Astrophysical Journal*, 683(2):943–948. [91](#)
- Fattoyev, F. J., Horowitz, C. J., Piekarewicz, J., and Shen, G. (2010). Relativistic effective interaction for nuclei, giant resonances, and neutron stars. *Physical Review C*, 82(5):055803. [90](#)

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- Feynman, R. P., Metropolis, N., and Teller, E. (1949). Equations of State of Elements Based on the Generalized Fermi-Thomas Theory. *Physical Review*, 75(10):1561–1573. 54, 57
- Glendenning, N. K. (1985). Neutron stars are giant hypernuclei ? *Astrophysical Journal*, 293:470–493. XVIII, XVIII, XVIII, XVIII, XVIII, XVIII, XVIII, XXIII, XXIII, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55
- Glendenning, N. K. (2000). *Compact Stars. Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*. Springer, second edition. XXIII, 1, 5, 6, 11, 22, 24, 32, 96, 99
- Haensel, P., Zdunik, J. L., and Dobaczewski, J. (1989). Composition and equation of state of cold catalyzed matter below neutron drip. *Astronomy and Astrophysics*, 222(1-2):353–357. 54, 57
- Han, S., Mamun, M. A. A., Lalit, S., Constantinou, C., and Prakash, M. (2019). Treating quarks within neutron stars. *Physical Review D*, 100(10):103022. XXIII, 8, 9, 10, 91
- Heisenberg, W. (1932). Über den Bau der Atomkerne. I. *Zeitschrift für Physik*, 77(1-2):1–11. 97
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., and Collins, R. A. (1968). Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*, 217(5130):709–713. 1
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1980). *Course of Theoretical Physics. Volume 5. Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann, third edition. 33
- Lattimer, J. M. and Prakash, M. (2001). Neutron Star Structure and the Equation of State. *Astrophysical Journal*, 550(1):426–442. 60, 69, 75, 77, 84, 89
- National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory (acceso el 5 de Agosto de 2020). *Interactive Chart of Nuclides*. <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/reColor.jsp?newColor=t12>. XVII, 7
- Negele, J. W. and Vautherin, D. (1973). Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nuclear Physics A*, 207(2):298–320. 52, 57
- Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939). On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55(4):374–381. XVIII, 54, 55
- Özel, F. and Freire, P. (2016). Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54:401–440. XVII, XVII, XVII, 37, 38, 39, 40
- Page, D., Beznogov, M. V., Garibay, I., Lattimer, J. M., Prakash, M., and Janka, H.-T. (2020). Ns 1987A in SN 1987A. *Astrophysical Journal*, 898(2):125. 91

- Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (2004). *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. The physics of Compact Objects*. Wiley-VCH. 11, 34
- Shutz, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, second edition. 34
- Walecka, J. D. (1974). A theory of highly condensed matter. *Annals of Physics*, 83:491–529. XVIII, XXIII, XXIII, 2, 19, 44, 45, 46, 90
- Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona (acceso el 10 de Noviembre de 2020). *Neutron Star Masses*. <http://xtreme.as.arizona.edu/neutronstars/>. XVII, XVII, XVII, 38, 39, 40