



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LOS APAREAMIENTOS ISOESCALAR E
ISOVECTORIAL EN LAS TRANSICIONES GAMOW-TELLER PARA
NÚCLEOS CON MASA $A=42, 44, 46$ y 48

PROTOCOLO DE INVESTIGACIÓN QUE
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ARTURO CARRANZA MELGAREJO

TUTOR PRINCIPAL

DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH, INSTITUTO DE CIENCIAS
NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. LIBERTAD BARRÓN PALOS, INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. ROELOF BIJKER, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MÉXICO, CDMX ENERO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen.

El estudio de las reacciones de intercambio de carga, y en particular las transiciones Gamow-Teller, es de utilidad en la comprensión de la estructura nuclear, de diversos procesos astrofísicos y del decaimiento beta doble.

En este trabajo se realiza el estudio sistemático de la importancia de los apareamientos isoescalar e isovectorial en las transiciones Gamow-Teller para algunos núcleos de masa $A = 42, 44, 46$ y 48 . Se usa el modelo de capas restringido a las capas $2f1p$. Se usan dos modelos Hamiltonianos, el primer modelo incluye los operadores cuadrupolo-cuadrupolo más los apareamientos isoescalar e isovectorial así como las energías de un cuerpo dadas por la interacción espín-órbita; por otro lado el segundo modelo es una modificación del primero, cambiando las energías de partícula independiente por las de la interacción realista kb3, con el fin de ver la influencia de este cambio en los observables pertinentes.

En ambos modelos se tienen las interacciones cuadrupolo-cuadrupolo encargada de la deformación y ambos apareamientos, isoescalar con acoplamiento a $J = 1$ y $T = 0$, e isovectorial con acoplamiento a $J = 0$ y $T = 1$. Por otro lado los observables que se calcularon fueron el espectro a baja energía de los núcleos hijo y padre, la banda rotacional principal de núcleos cercanos a los involucrados en las transiciones, los cuales son relevantes por las características que poseen (^{42}Ca , ^{44}Ti , ^{46}Ti y ^{48}Cr), el último observable corresponde a las transiciones Gamow-Teller, en este caso se analizan, $^{42}\text{Ca} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$, $^{44}\text{Ca} \rightarrow ^{44}\text{Sc}$, $^{46}\text{Ti} \rightarrow ^{46}\text{V}$ y $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{V}$.

Primeramente se ajustan en los espectros de energía el estado base y el primer estado 1^+ , para los núcleos hijo, ya que las transiciones culminan en este último y se quiere tener una buena descripción de todos los observables. Se resalta el hecho de que los núcleos con $N = Z$, ^{42}Sc y ^{46}V , presentan un estado 0^+ como estado base, mientras que al salirse de esta igualdad se tienen estados base 2^+ y 4^+ para el ^{44}Sc y ^{48}V respectivamente, estos resultados son solo reproducibles al considerar que al tener $N \neq Z$ debe “apagarse” el apareamiento isoescalar, por

lo que esto se tiene en consideración en el ajuste de los parámetros.

Se observaron los espectros de energía y/o la banda rotacional principal de los núcleos seleccionados, para el ajuste se toma en consideración que $N \neq Z$, en todos los casos se reproduce el estado base experimental. En el caso particular de la banda rotacional principal, para el modelo 1 se tiene un comportamiento mezcla entre rotación y vibración, mientras que el modelo 2 presenta un comportamiento rotacional muy marcado en el “backbending” de los núcleos. En todos los casos se tienen resultados conforme a los datos experimentales.

Las transiciones Gamow-Teller se modifican con los dos tipos de apareamientos y su intensidad. Al tomar como referencia los espectros de energía de los núcleos hijo, los resultados presentan una fenomenología similar a los datos experimentales.

Realizado el ajuste de parámetros en los núcleos, se procedió a variar la intensidad en los dos de apareamientos, observando la contribución de cada uno de ellos, siendo uno de los principales puntos de interés de la investigación se ven afectadas las transiciones Gamow-Teller.

El estudio fue hecho con el fin de tener una mejor visión de los resultados obtenidos de las transiciones Gamow-Teller, influenciadas por diferentes intensidades en los apareamientos, isoescalar e isovectorial. Al observar el comportamiento de las transiciones cuando se modifican los parámetros de los apareamientos en ambos modelos, se obtiene una fuerte dependencia de estos, indicando la formación de pares correlacionados protón-protón, protón-neutrón y neutrón-neutrón a isospín total $T = 1$ en el estado base, y para los pares protón-neutrón correspondientes a $T = 0$, también se ve esta fuerte dependencia a crear pares en los núcleos que tienen $N \neq Z$, por lo que en ellos es necesario la remoción de dicho operador. Esto último da una mejor reproducción de los datos experimentales para los diversos observables. Los resultados principales están publicados en los artículos [1, 2].

Agradecimientos.

- El primer agradecimiento es para el Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, ya que fue quien dirigió esta tesis y fue un apoyo fundamental en mi desarrollo científico, en un mismo grado agradezco al Dr. Stuart Pittel del Bartol Research, de la Universidad de Delaware, por ser el encargado de dirigir este proyecto de investigación y nunca darse por vencido en instruirme. A ambos les agradezco su inmensa paciencia y compromiso en mi formación científica y personal. Gracias por esto y más.
- A mis dos miembros de comité tutor la Dra. Libertad (IF-UNAM) y al Dr. Roelof (ICN-UNAM), por darle seguimiento a mi proceso de crecimiento y apoyo dado.
- Al M. en C. Edgar Vázquez Luis (FC-UNAM) por su ayuda en el uso de fortran y en aportar un gran conocimiento en la parte computacional del desarrollo de esta tesis, ya que sin él muchos de los cálculos no hubieran podido hacerse, en verdad gracias por su colaboración.
- A la Dra. Silvia M. Lenzi (U. Degli Studi Di Padova) por su colaboración y hospitalidad durante mi estancia científica en la universidad de Padova, Italia, para continuar la profundización de conocimientos en física nuclear y en el uso del código ANTOINE. En este último punto también agradezco al Dr. Alfredo Poves (Universidad Autónoma de Madrid), ya que fue quien más se involucro en mi entendimiento de dicho código, así como ayudarme a usarlo de la forma más eficiente.
- En general quiero dar un gran agradecimiento al Instituto de Ciencias Nucleares, por ofrecerme instalaciones donde trabajar así como un ambiente agradable para mi desarrollo y apoyo para completar mis estudios, y a la Universidad Nacional Autónoma de México por su hospitalidad desde que

inicio este camino en la licenciatura, luego en la Maestría y concluyendo mis estudios de físico con un doctorado por lo que pude alcanzar el grado de Doctor en Ciencias Físicas del Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM.

- A mi abuela Edith León Moreno por estar siempre al pendiente desde que inicio mi camino en la ciudad de México, sus consejos, valores, por la motivación dada y que aun esta presente, haciendo que sea una persona de bien, pero sobre todo por el amor que me dio desde que nací.
- A mi hermana María del Carmen carranza Melgarejo, por ser un apoyo emocional y ser con quien comparto muchas cosas de mi vida, me da mucho apoyo y siempre confía en mí, sobre todo por su cariño.
- A mis primos y primas por darme momentos inolvidables y hacerme seguir en el camino con sus comentarios y consejos.
- A mis tíos y tías por ayudarme en todo momento, darme un apoyo incondicional en muchas etapas de mi vida y que nunca olvidare.
- A Maricruz por ser mi apoyo en la parte final de este trabajo y de mi carrera como estudiante de física, así por darme su amor y cariño, inspirarme a terminar y esforzarme para alcanzar mis metas.
- A mis amigos “Los Lovers” César (CH), Ricardo (GL), Daniel (werito), Gustavo (Gusito), Diego (El guaperas), Vladimir (Vlafis), Jorge (George), Pedro (Peter) y los Migueles (El Jefe y el Vato), ellos hicieron más agradable y llevadero mi paso en el posgrado así como los días de diversión que tuvimos. A mi mejor amigo Homer y toda su familia por ser una segundo hogar con la cual compartir muchos momentos. A Sasha, David, Álvaro, Lorena, Anahí, Marisol, amigos entrañables que me dio el posgrado y con los que platico de cosas diferentes y me divierto con ellos. A mis amigas y couches de entrenamiento en Puma Fit Angi y Dani, por que gracias a sus enseñanzas y tiempo pude hacer ejercicio y relajar la mente, y que con el esfuerzo y dedicación se obtienen resultados.

Índice general

1. Introducción.	9
2. Relevancia GT.	13
2.1. Intercambio de carga.	13
2.2. Intercambio de carga.	15
2.3. Decaimiento beta doble.	15
2.4. $Q \cdot Q+$ apareamiento.	17
2.5. Modelo de capas.	19
3. Modelo Hamiltoniano.	23
3.1. Hamiltoniano.	23
3.1.1. Acoplamiento espín-órbita.	25
3.1.2. Cuadrupolo-cuadrupolo.	28
3.1.3. Interacción de apareamiento.	31
4. Resultados.	37
4.1. Espectros de energía y bandas rotacionales.	39
4.1.1. $A=42$	39
4.1.2. $A=44$	43
4.1.3. $A=46$	48
4.1.4. $A=48$	52
4.1.5. Valores óptimos del Hamiltoniano.	58
4.2. Transiciones GT.	60
4.2.1. $A=42$	61
4.2.2. $A=44$	62
4.2.3. $A=46$	64
4.2.4. $A=48$	65
5. Conclusiones.	69

A. Elementos de matriz.	71
A.1. Segunda cuantización.	71
A.1.1. Cambio de base.	75
B. Código Antoine.	79
C. Regla de selección.	85
C.1. Regla de selección.	86
D. Resultados preliminares.	89
D.1. A=42.	89
D.2. A=44.	90
D.3. A=46.	92
D.4. A=48.	93

Capítulo 1

Introducción.

Las transiciones nucleares ocurren entre niveles de energía en un mismo núcleo para emisión de radiación γ o entre dos núcleos diferentes conectados por el decaimiento donde se tiene emisión de partículas (α , β o núcleos ligeros).

Las transiciones Gamow-Teller (GT) son una de las herramientas más importantes para explorar los núcleos atómicos [3, 4, 5, 6]. El estudio de estas transiciones es importante en diversas áreas, como en la evolución estelar para captura electrónica, así como la estimación de velocidades de reacción de núcleos semipesados, los cuales son un ingrediente importante para modelar la evolución tardía de las estrellas, estrellas en las que ocurre el colapso del núcleo o supernovas termonucleares [7, 8, 9, 10]. También su estudio es necesario en el decaimiento β doble, proceso usado en la búsqueda de las masas de los neutrinos y las cotas que éstas tienen, así como en nucleosíntesis mediada por neutrinos y en el proceso de doble captura de electrones de estrellas calientes [11, 12, 13]. Por otro lado, está en marcha un esfuerzo experimental y teórico para estudiar las propiedades y aplicaciones de los núcleos cerca de la línea de goteo de neutrones, este estudio puede esclarecer como los núcleos pesados decaen a los más ligeros. Por último se menciona su utilidad para la comprensión del vínculo exacto entre las reacciones de intercambio de iones pesados y los procesos del decaimiento β^\pm , la cual pondría a nuestra comprensión de la estructura nuclear y los mecanismos de reacción en núcleos inestables [4, 14, 15].

Existen dos tipos de transiciones GT; las GT_+ donde un protón se cambia por un neutrón, y las GT_- donde se cambia un neutrón por un protón. Las intensidades de transición $B(GT)$ pueden ser obtenidas mediante estudios de decaimientos β , pero las energías de excitación están limitadas por los valores Q de los decaimientos en esta aproximación. Por otro lado, con las reacciones de intercambio

de carga (CE por sus siglas en inglés), como (p, n) , (n, p) , $(d, {}^2He)$, o $({}^3He, t)$, es posible acceder a las transiciones GT para valores grandes de energía sin la limitación del valor Q . Las medidas experimentales se realizan en ángulos cercanos a 0° y con una energía de incidencia arriba de 100MeV por núcleo, estas proveen información valiosa de las transiciones GT.

En este trabajo se revisa la relevancia de las reacciones de intercambio de carga y, en particular las transiciones Gamow - Teller, para las diversas áreas señaladas anteriormente, donde se conoce que desempeña un papel importante. Se comienza con una descripción del papel que tienen en la nucleosíntesis astrofísica y en el decaimiento beta doble, un raro proceso en el cual si se observara la falta completa de neutrinos, arrojaría luz sobre la comprensión de sus propiedades. Mientras que algunos resultados experimentales mencionados aquí con énfasis, son sobre los avances teóricos en las últimas décadas.

Entonces se vuelve a la importante función de las transiciones Gamow Teller en la estructura nuclear. El predominio de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo en el canal partícula-agujero y el apareamiento isovectorial ($J = 0$) en el canal partícula-partícula, sirve como fundamento microscópico para el uso del Hamiltoniano que incluye el apareamiento más el cuadrupolo, cuyo desarrollo será brevemente revisado.

Sin embargo, para una descripción significativa de núcleos relativamente ligeros con $N \approx Z$, es importante considerar también la posible importancia del apareamiento protón-neutrón (pn). El apareamiento protón-neutrón puede surgir en dos canales, isoescalar ($T = 0$) e isovectorial ($T = 1$), en los cuales el neutrón y el protón pueden tener un momento angular orbital neto cero y por lo tanto, explotar la fuerza nuclear de corto alcance. Su papel en núcleos relativamente ligeros se ha estudiado en los últimos años con una variedad de formalismos. Algunos de los primeros trabajos consideraron la extensión de técnicas de campo medio como BCS o Hartree-Fock-Bogolyubov (HFB) [16, 17] para incluir el canal de apareamiento protón-neutrón. Su posible importancia en núcleos con $N \approx Z$ también se ha estudiado recientemente en el contexto del modelo de capas nuclear [18, 19]. De particular interés es el canal de apareamiento isoescalar, ya que se espera que sea especialmente importante para núcleos con $N = Z$ y $N \approx Z$ [20, 21].

Se centra la atención en las intensidades de transición GT en las capas $2p1f$, en particular los núcleos en la región $A = 40 - 48$. Para estos núcleos, las transiciones GT_- y las reacciones (p, n) son las principales herramientas experimentales utilizadas para obtener la distribución de intensidades, pero la reacción $({}^3He, t)$

también sirve como una herramienta experimental alternativa.

Aunque, como se señaló anteriormente, las técnicas de campo medio a menudo se han utilizado para tratar la interacción de los diversos modos de apareamiento en núcleos cercanos a $N = Z$, se sabe que pueden conducir a errores graves debido a la violación de las simetrías [22]. [Nota: Los esfuerzos recientes [23] para construir una simetría-restaurada en los enfoques de campo medio han demostrado ser prometedores.] Por esta razón es especialmente útil estudiar cómo los diferentes modos de competición de los apareamientos en sistemas nucleares cerca de $N = Z$ en el contexto del modelo de capas nuclear, con lo cual es posible el tratamiento de todas los modos de apareamientos en una “igualdad”, para preservar todas las simetrías y donde naturalmente se incorporan los efectos de la deformación, que son críticos en las regiones en que estos modos de apareamiento se cree pueden ser importantes.

Por las razones anteriores, se ha optado por utilizar el modelo de capas para evaluar cómo los distintos modos de apareamiento afectan las intensidades de las transiciones Gamow-Teller en núcleos ligeros de $N \approx Z$. El enfoque está inspirado en trabajos anteriores [18] donde se tiene un modelo Hamiltoniano simple parametrizado, utilizado como una herramienta sistemática para aislar los efectos de los dos canales de apareamiento. El modelo incluye una interacción cuadrupolo-cuadrupolo, así como las interacciones de apareamiento isoescalar e isovectorial. Dejando fuera otros componentes de Hamiltonianos realistas, nos podemos enfocar directamente sobre los efectos de los diferentes modos de apareamiento, si bien se tiene el costo de la falta de algunas características importantes de la estructura de los núcleos que consideramos.

Se considera que en este análisis solo a los núcleos de masa-par con $A = 42 - 48$. El enfoque principal es la fragmentación de las intensidades de transición GT, pero también se tiene en cuenta los espectros energéticos de ambos núcleos involucrados, padres e hijos.

Un resumen del trabajo es el siguiente. En cap. II, se menciona la importancia de las transiciones GT tanto experimentalmente como teóricamente, se describen brevemente las interacciones de apareamiento y cuadrupolo-cuadrupolo y luego se resumen las investigaciones anteriores en el modelo de capas de las transiciones de Gamow-Teller para la capa $2p1f$. En el cap. III se da de forma concreta el modelo que se usa. En el cap. IV se describen los resultados seleccionados del análisis, primero para espectros de energía y luego para las transiciones GT. Por último en el cap. V se dan las conclusiones generales del trabajo.

Capítulo 2

La relevancia de las transiciones de Gamow-Teller.

A través de la historia se ha realizado un arduo trabajo en el desarrollo del conocimiento y entendimiento de las transiciones Gamow-Teller, esto por medio de diferentes herramientas. Para fines de este trabajo se tratarán a continuación un contexto histórico y la relevancia de las transiciones GT, así como las interacciones que se usan en este estudio.

2.1. Reacciones de intercambio de carga y la función de intensidad de Gamow-Teller.

Las reacciones de intercambio de carga que emplean proyectiles y objetivos nucleares juegan un papel fundamental en el estudio de la respuesta de los núcleos dependientes de isospín- y espín-isospín. Revelan aspectos importantes de la dinámica nuclear, conectando interacciones fuertes y débiles [24]. Uno de ellos es la distribución de las intensidades de transición Gamow-Teller (GT), que generalmente es inaccesible a los decaimientos beta, pero se pueden obtener con alta resolución utilizando reacciones como (p, n) (i.e., disminución de isospin) y (n, p) (i.e., elevación de isospin), realizada a energías intermedias y con una transferencia de momento cercano a cero [25, 26]. Existe una proporcionalidad entre las secciones transversales de la reacción de intercambio de carga en la dirección de avance del proyectil, por ejemplo, (p, n) y $({}^3\text{He}, t)$, y las intensidades de transición GT en los mismos estados nucleares finales, lo que también se cumple o la reacción de intercambio de carga tipo (n, p) , como el $({}^7\text{Li}, {}^7\text{Be})$ [27]. En los núcleos con un exceso de neutrones, la principal contribución a las intensida-

des de transición GT proviene de la eliminación de un neutrón de un estado de partícula independiente ocupado y la creación de un protón en un estado desocupado que tiene los mismos números cuánticos o los de su asociado a espín-órbita. Sin embargo, el canal opuesto, explorado con las reacciones (n, p) y $(d, {}^2\text{He})$, está prohibido por Pauli en núcleos semi-pesados y solo puede ser efectivo si la superficie de Fermi se desplaza, lo que puede introducir una dependencia radial que normalmente no se incluye en el análisis [28].

El desplazamiento de la superficie de Fermi se obtiene en muchos casos introduciendo correlaciones de apareamiento isovectorial de partículas similares ($J = 0$) a nivel de campo medio a través de la teoría BCS, mientras que también se emplean cálculos Hartree-Fock autoconsistentes deformados más sofisticados con fuerzas de Skyrme dependientes de la densidad [29, 30]. Las interacciones residuales protón-neutrón en los canales partícula-agujero y partícula-partícula se introducen empleando la aproximación de fase aleatoria de cuasipartículas protón-neutrón (pnQRPA) [31, 32, 33, 34]. Esta interacción da lugar a modos de espín colectivos como la resonancia gigante Gamow-Teller [35].

Se ha observado que la intensidad de transición total medida en transiciones Gamow-Teller para la región de resonancia es mucho menor de lo que predice una regla de suma de Ikeda, los llamados fenómenos de “extinción” [35, 36, 37]. Se ha explicado parcialmente la introducción del acoplamiento con excitaciones Δ -agujero (con Δ la brecha de energía entre agujeros)[38, 39, 40], asociado con correlaciones nucleares, que hacen que muchos de los picos resultantes sean lo suficientemente débiles como para volverse inobservables en los cálculos completos del modelo de capas [3, 41, 42], a una parte de Schiff de la intensidad GT a energías más altas debido a excitaciones de 2-partículas-2-agujeros [43], correlaciones de tensor [44], transferencia de momento finito en descripciones relativistas QRPA [45], y con la presencia de corrientes débiles de dos y tres cuerpos [42, 46].

La estimación teórica de los elementos de matriz nuclear GT en procesos de decaimiento beta y captura de electrones en núcleos pesados, que suelen estar deformados, ha experimentado importantes avances en las últimas décadas. Uno de los últimos implica el empleo del modelo de capas proyectada con muchas configuraciones de múltiples cuasipartículas incluidas en la base, lo que muestra que las distribuciones $B(GT)$ pueden tener una fuerte dependencia de la estructura microscópica de los estados relevantes, tanto del núcleo padre como del hijo [47].

2.2. Reacciones de intercambio de carga en astrofísica.

En muchos procesos astrofísicos relevantes como la combustión estelar, la nucleosíntesis mediada por neutrinos, la combustión explosiva de hidrógeno y las supernovas donde el colapso del núcleo involucran interacciones nucleares débiles así como las transiciones GT [48]. Su descripción requiere modelos nucleares de vanguardia asociados con datos experimentales procedentes de instalaciones de haces de iones radiactivos [7, 49]. Las explosiones de supernovas están asociadas con el colapso del núcleo de una estrella masiva. La dinámica de este proceso implica la captura de electrones en miles de núcleos, cuyas velocidades deben estimarse empleando modelos microscópicos [50].

Los neutrones generados en explosiones de supernovas inducen reacciones nucleares que juegan un papel importante en la nucleosíntesis de elementos pesados [51, 52]. Los avances recientes en su descripción se han beneficiado de nuevos datos experimentales sobre las distribuciones permitidas de las intensidades de transición Gamow-Teller, que se reproducen con precisión empleando modelos nucleares mejorados y con las nuevas capacidades de hardware de computadora, incluida la diagonalización del modelo de capas y la aproximación de fase aleatoria de cuasipartículas de protones y neutrones (pnQRPA) [8]. Como la mayoría de los núcleos relevantes para los procesos astrofísicos tienen un gran exceso de neutrones, con protones y neutrones ocupando diferentes capas nucleares principales, se deben estimar los números de ocupación parcial. En los ambientes estelares de alta densidad, se estiman ocupaciones dependientes de la temperatura finita empleando el enfoque de Monte Carlo del modelo de capas, luego combinado con el modelo RPA para desbloquear las transiciones Gamow-Teller a todas las temperaturas relevantes para el colapso del núcleo de supernovas [53].

2.3. Decaimiento beta doble.

Uno de los procesos nucleares asociados con la interacción débil que continúa atrayendo mucha atención experimental y teórica es el decaimiento beta doble [10, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. Los decaimientos beta doble de dos neutrinos tienen las vidas medias radiactivas más largas jamás observadas, un logro experimental sobresaliente que continúa con nuevos desarrollos [64].

El decaimiento sin neutrinos es una transición nuclear prohibida, que viola

el número leptónico, cuya observación tendría implicaciones fundamentales para la física y la cosmología de los neutrinos. Se ha realizado una amplia gama de experimentos y están en ejecución o planificados para descubrir este decaimiento, hasta ahora invisible [65]. La estimación teórica de las tasas de decaimiento para los modos de dos neutrinos y sin neutrinos se define como expresiones perturbativas de segundo orden a partir de un lagrangiano efectivo electro-débil [10]. El modo sin neutrinos puede proceder a través de mecanismos que involucran neutrinos ligeros de Majorana, neutrinos pesados de Majorana, neutrinos estériles y majorones.

Los cálculos teóricos implican la evaluación de elementos de la matriz de transición nuclear, que se han estimado utilizando una variedad de modelos nucleares. Se han utilizado *cálculos del modelo de capas* para estimar los elementos de la matriz nuclear del decaimiento beta doble para ^{48}Ca [66, 67, 68, 69, 70] y en núcleos más pesados [71, 72]. Los cálculos del modelo de capas a gran escala para ^{48}Ca , incluyen dos capas de oscilador armónico ($2s1d$ y $2p1f$) encontrando que el elemento de matriz nuclear del decaimiento beta doble sin neutrinos se mejora en aproximadamente un 30% en comparación con solo la capa $2p1f$, los cálculos están en [73]. Con este formalismo se ha observado una muy buena correlación lineal entre la transición Gamow-Teller doble al estado base del núcleo final y el elemento de matriz del decaimiento beta doble sin neutrinos [74]. Los métodos de Monte Carlo del modelo de capas también proporcionan resultados valiosos [75]. La aproximación de Fase Aleatoria de Cuasipartículas (QRPA) proporciona un tratamiento consistente de las interacciones partícula-agujero y partícula-partícula en los cálculos de los elementos de la matriz nuclear que gobiernan la decaimiento beta doble de dos neutrinos y sin neutrinos [76]. Lo anterior abrió el camino para resolver la discrepancia entre las tasas de decaimiento de dos neutrinos experimentales y calculados, empleando ambos [77, 78, 79], así como interacciones realistas [80, 81, 82]. La supresión también se encontró empleando un esquema de truncamiento basado en seniority generalizado [83], y en cálculos de QRPA que incluyen la proyección del número de partículas [84]. Las extensiones de estas técnicas se han aplicado ampliamente para estimar los elementos de la matriz nuclear sin neutrinos [85, 86, 87, 88], el decaimiento a estados excitados [89, 90, 91, 92, 93] y la influencia de apareamiento protón-neutrón [94]. Para evitar divergencias encontradas en los cálculos, se introdujo una versión del modelo QRPA renormalizado [95, 96, 97] que tenía sus propias dificultades [98, 99, 100, 101, 102, 103].

La influencia de la deformación en las tasas de decaimiento beta doble se estu-

dió con el formalismo QRPA deformado [104, 105, 106, 107] y el esquema Pseudo $SU(3)$ [108, 109]. El modelo de Hartree-Fock-Bogoliubov-Proyectado (PHFB), que emplea un tipo de apareamiento multipolar de interacción efectiva de dos cuerpos, muestra que la deformación juega un papel crucial en los aspectos de la estructura nuclear de los decaimientos [110, 111, 112, 113, 114].

El proyecto NUMEN emplea una técnica innovadora para acceder a los elementos de la matriz nuclear que entran en la expresión de la vida-media del decaimiento beta doble mediante mediciones de sección transversal en reacciones de intercambio de carga-doble (DCE) inducidas por iones pesados. Han alcanzado la resolución y sensibilidad experimentales requeridas para una medición precisa de las secciones transversales del DCE en ángulos frontales. Sin embargo, los pequeños valores de tales secciones transversales y los requisitos de resolución exigen intensidades de haz mucho mayores que las que se pueden administrar con la instalación actual [115].

2.4. El cuadrupolo-cuadrupolo y los Hamiltonianos de apareamiento.

Como medida necesaria de fondo para la discusión de la función de las transiciones Gamow Teller en estructura nuclear, primero se da un breve recordatorio de algunos conceptos importantes y principios de los desarrollos de la teoría en estructura nuclear.

La interacción de apareamiento isovectorial, es aquella en la que se acoplan partículas a momento angular total cero [116], juegan un papel fundamental en la estructura nuclear de baja energía y son particularmente relevantes en la comprensión de las diferencias de masa entre núcleos de masa pares e impares. Ampliando la descripción de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS) de la superconductividad [117] como un estado de pares coherentes sin número de conservación, Bohr, Motelson y Pines [118] propusieron un mecanismo de física similar para explicar las grandes brechas observadas en los espectros de núcleos atómicos par-par, posteriormente corregidos para efectos de tamaño finito empleando la proyección del número de partículas [119, 120, 121]. Richardson y Sherman presentaron la solución exacta del Hamiltoniano de apareamiento isovectorial en 1963 [122]. En las últimas décadas se extendió a familias de modelos con solución exacta, denominados genéricamente modelos de Richardson-Gaudin (RG) [123, 124], encontraron aplicación en diferentes áreas de la física cuántica de muchos cuerpos, incluidos

los sistemas mesoscópicos, materia condensada, óptica cuántica, gases atómicos fríos, puntos cuánticos y estructura nuclear [125].

Durante mucho tiempo se esperaba que el apareamiento neutrón-protón (np) desempeñara un papel importante en los núcleos $N = Z$, tanto a través de su modo isovectorial como isoescalar. Si bien la relevancia del apareamiento np isovectorial ($J = 0$) está bien establecida, el papel del apareamiento np isoescalar continúa siendo un debate [126]. La primera solución exacta del Hamiltoniano de apareamiento protón-neutrón isoescalar-isovectorial ($T = 0,1$) con órbitas no degeneradas de una sola partícula e intensidades de apareamiento iguales se presentó en 2007, como un caso particular de una familia del modelo $SO(8)$ integrable de Richardson-Gaudin [20]. Existe una clara evidencia de un condensado isovectorial np como se esperaba de la invariancia de isospín. Sin embargo, y contrariamente a las expectativas iniciales, un condensado de pares similares al deuterón parece bastante esquivo [127].

Se han explorado formalismos que conservan el número de partículas para el tratamiento del apareamiento isovectorial-isoescalar en núcleos, pero la concordancia con la solución exacta es menos satisfactoria que en el caso del modelo $SU(2)$ de Richardson para el apareamiento entre partículas similares [21]. Esto lleva a la importante conclusión de que las correlaciones de apareamiento isoescalar e isovectorial protón-neutrón no pueden tratarse con precisión mediante modelos basados en un condensado de pares protón-neutrón [128].

Baranger dio un paso importante en la descripción microscópica del espectro de núcleos de baja energía a principios de la década de 1960 [129] en términos de fermiones en cuasipartículas con interacciones residuales de dos cuerpos, el más importante de los cuales es la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, asociada con la deformación cuadrupolar de la forma del núcleo y la existencia de bandas rotacionales [130]. Poco después, esto llevó al nacimiento del modelo de apareamiento más cuadrupolo [131]. Las correlaciones cuadrupolo-cuadrupolo de campo medio permiten correcciones de capa en la estructura de una sola partícula de núcleos esféricos y deformados [132]. Se han descrito propiedades colectivas de núcleos vibracionales y rotacionales empleando técnicas de expansión en bosones con este Hamiltoniano [133, 134, 135, 136, 137].

Un análisis tensorial detallado de los Hamiltonianos que usan el modelo de capas realista ha demostrado de manera concluyente que el apareamiento isovectorial es el componente más importante en el canal de partículas, mientras que la interacción cuadrupolo-cuadrupolo es la más importante en el canal de partículas-agujero [138]. Los cálculos extensivos del modelo de capas confirman

el predominio del componente cuadrupolo-cuadrupolo de la interacción [139, 140].

La interacción cuadrupolo-cuadrupolo se puede asociar con el operador de Casimir de segundo orden del álgebra $SU(3)$, lo que permite una descripción algebraica de la dinámica nuclear [141, 142] en el régimen rotacional, generalizado para núcleos pesados en el modelo pseudo $SU(3)$ [143, 144], con la simetría de pseudo-espín que entra en este modelo, que ahora se sabe tiene un origen relativista [145, 146, 147, 148]. Se ha encontrado que la simetría $SU(3)$ del término cuadrupolo se rompe principalmente por el término de un cuerpo espín-órbita, pero que las energías dependen en gran medida del apareamiento [149]. La inclusión de un canal de apareamiento de cuadrupolos permitió una descripción muy detallada de las bandas rotacionales en núcleos deformados pesados con muchas excitaciones de cuasipartículas en el modelo de capas proyectado [150, 151]. Si bien estos métodos fueron generalizados para incluir interacciones efectivas realistas en los cálculos Hartree-Fock-Bogolyubov [152], y en un extenso análisis de la convivencia en los núcleos de forma [153], en esta revisión nos vamos a centrar en el Hamiltoniano de apareamiento más cuadrupolo, pero con la inclusión del apareamiento isoescalar por las razones señaladas en la introducción.

2.5. Descripción del modelo de capas de las intensidades Gamow-Teller en la capas nucleares $2p1f$.

El crecimiento del poder computacional, el desarrollo de sofisticados códigos de modelos de capas y el uso de potenciales realistas, consistentes con datos de dos nucleones, ha abierto en las últimas décadas nuevas vías para una descripción microscópica detallada de la dinámica de núcleos de masa media, tanto en el carácter de partícula independiente, como en el colectivo. En particular, permitió una descripción cuantitativa del movimiento de rotación y las transiciones Gamow-Teller [140]. Los cálculos del modelo de capas completa en la capa $2p1f$, incluidos los orbitales $f7/2$, $p3/2$, $p1/2$ y $f5/2$ reproducen con éxito los espectros, las energías de enlace, los momentos cuadrupolares y las velocidades de transición [154, 155], lo que proporciona una descripción microscópica del inicio del movimiento de rotación [139, 156, 157] y la extinción de las transiciones Gamow-Teller [3, 41, 158]. Más recientemente, las interacciones realistas novedosas, como la versión ligeramente corregida por monopolos de la conocida interacción

KB3, denominada KB3G, pudieron reproducir las distribuciones de intensidades Gamow-Teller medidas y los espectros de núcleos en las capas $2p1f$ en el rango de masa $A = 45 - 65$ [159], mientras que se ha empleado una nueva interacción del modelo de capas, GXPF1J, para describir las velocidades de reacción de captura de electrones y las intensidad y las energías de las transiciones de Gamow-Teller en los isótopos pares del Ni desde $A = 56 - 64$ [4, 160]. Estas interacciones se han empleado con éxito [5, 6] para describir los resultados experimentales más recientes [161, 162, 163, 164], y han permitido un estudio de la evolución de la distribución de las intensidades GT desde núcleos estables a núcleos ricos en neutrones [165]. En las capas $2p1f$, el factor de reducción estimado es de $q = 0.744$, ligeramente más pequeño pero estadísticamente compatible con el valor de las capas $2s1d$ [166].

Se ha observado una anticorrelación entre la intensidad total para las transiciones Gamow-Teller y la tasa de transición de la excitación del cuadrupolo colectivo [167, 168], que puede simularse con cambios artificiales en la interacción espín-órbita [169].

Los cálculos en Monte Carlo del modelo de capas completa para $N = Z$ en las capas $2p1f$ [170] con un Hamiltoniano esquemático que contiene el apareamiento isovectorial y la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, encontraron una transición con el aumento de temperatura a una fase donde dominaba el apareamiento isovectorial a una donde las correlaciones de apareamiento isoescalar dominan [171]. La aparición de los estados fundamentales $T = 1$ en núcleos $N = Z$ impares se ha relacionado con el efecto combinado de los componentes de apareamiento isoescalar e isovectorial ($L = 0$) de la interacción nucleón-nucleón efectiva [172]. Por otro lado, en general, el apareamiento isovectorial domina en los estados fundamentales, las correlaciones de pares isoescalares dependen en gran medida de la separación espín-órbita [173]. La interacción de apareamiento isoescalar ($T = 0$, $S = 1$) neutrón-protón juega un papel decisivo para la concentración de las intensidades GT en el primer estado 1^+ excitado del ^{42}Sc , pero este efecto se suprime en los núcleos más pesados con $N = Z$ debido a la intensidad del espín-órbita complementada por la interacción cuadrupolo-cuadrupolo [174]. La interacción de apareamiento isoescalar mejora la intensidad GT de las excitaciones de menor energía en los núcleos con $N = Z$ [175]. La competencia entre las correlaciones de apareamiento $T = 1$ y $T = 0$ también se estudiaron utilizando cálculos autoconsistentes de Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) más una aproximación de fase aleatoria de cuasipartícula, lo que demuestra que puede causar la inversión de los estados $J^\pi = 0^+$ y $J^\pi = 1^+$ que están cerca del estado base [176]. Un análisis

de las transiciones de Gamow-Teller y las reacciones de transferencia de pares de protones y neutrones revela que el límite de simetría $SU(4)$ no se realiza en el ^{42}Sc [177] y está fuertemente rota por la interacción espín-órbita y aumenta con el exceso de neutrones [19].

Capítulo 3

Modelo Hamiltoniano y operadores de transición.

Este capítulo muestra los modelos Hamiltonianos, que incluyen los componentes clave introducidos en la sección anterior. Primeramente se muestra la construcción de los operadores así como los elementos de matriz que conforman a dichos modelos, se muestra su desarrollo en el esquema M y posteriormente como se hace el cambio al esquema J , esto viene dado en el apéndice A, debido a que el código ANTOINE emplea a los operadores en este último esquema [140, 178, 179], para ver mas detalles de la implementación del código ver el apéndice B.

3.1. Hamiltoniano.

El estudio esquemático, se enfoca en núcleos que tienen protones y neutrones de valencia fuera del núcleo doblemente mágico ^{40}Ca y se considera la restricción a las órbitas $2p1f$. Se requiere tener un estudio en el cual se consideren los apareamientos isosescalares e isovectoriales, para lo cual se consideró el modelo usado en la referencia [18], el cual se tienen ambas correlaciones de apareamiento en presencia del operador cuadrupolo-cuadrupolo; el primer Hamiltoniano que se considera (modelo 1) es

$$\hat{H}_1 = \chi \left(\hat{Q} \cdot \hat{Q} + a\hat{P}^\dagger \cdot \hat{P} + b\hat{S}^\dagger \cdot \hat{S} + \alpha \sum_i \hat{l}_i \cdot \hat{s}_i \right), \quad (3.1)$$

aquí $\hat{Q} = \hat{Q}_n + \hat{Q}_p$ es el operador cuadrupolar de masa y $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$ es el operador cuadrupolo-cuadrupolo, el cual se compone de un operador de un cuerpo y de otra

parte de dos cuerpos, esta última se denota como $:\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}:$. También se incluye \widehat{P}^\dagger el operador que crea un par correlacionado con $L = 0, S = 1, J = 1, T = 0$ mientras que \widehat{S}^\dagger que crea un par correlacionado con $L = 0, S = 0, J = 0, T = 1$. Finalmente, el último término es la contribución de las energías de partícula independiente, dadas por la interacción espín-órbita.

Por otro lado tenemos un segundo modelo (modelo 2) en el cual las energías de partícula independiente ϵ_i son tomadas de la interacción realista kb3 [180], por lo que se cambia el último término, lo que deriva en el Hamiltoniano

$$\widehat{H}_2 = \sum_i \epsilon_i + \chi \left(:\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}: + a\widehat{P}^\dagger \cdot \widehat{P} + b\widehat{S}^\dagger \cdot \widehat{S} \right), \quad (3.2)$$

aquí las energías de partícula independiente son tomadas de [180], $\epsilon_{7/2} = 0.0\text{MeV}$, $\epsilon_{3/2} = 2.0\text{MeV}$, $\epsilon_{1/2} = 4.0\text{MeV}$ y $\epsilon_{5/2} = 6.5\text{MeV}$.

Se analiza el comportamiento de los operadores de apareamiento y como afectan a los observables relacionados a espectros de energía y transiciones GT. Adicionalmente se estudió el impacto de los apareamientos en las propiedades rotacionales de algunos núcleos.

Todos los cálculos reportados fueron realizados usando el programa ANTOINE. Primeramente se procede al cálculo de los elementos de matriz correspondientes a cada operador, cabe mencionar que los correspondientes a un cuerpo se calculan por capa y con estados de una partícula, mientras que los de dos cuerpos se calcularán en el esquema M y después se realizará un cambio de base a estados $|ab; JM; TM_T\rangle$, esto se explica más adelante. También se creó un programa que suma los elementos de matriz con los respectivos parámetros asignados y de esta forma obtener los Hamiltonianos que pueden ser leídos por ANTOINE.

Los cálculos son tomados sistemáticamente como función de los parámetros que se usan en cada Hamiltoniano, siendo el enfoque del trabajo variar la intensidad de los parámetros correspondientes a los apareamientos isoescalar e isovectorial, dejando a la interacción cuadrupolo-cuadrupolo y las energías de partícula independiente fija. Como se señaló anteriormente, restringimos el análisis a núcleos de masa uniforme cerca del comienzo de las capas $2p1f$, es decir, con $A = 42 - 48$. Se tomaron los cálculos relevantes de ambos núcleos, padres e hijos, para ver el comportamiento de las transiciones GT.

Se considera que χ , α , a y b son parámetros libres, en el caso de la referencia [18] se tienen los valores $\chi = -0.05\text{MeV}$, $a = b = 12$, $\alpha = 20$, mientras que los de la referencia [181] tienen un valor de $\chi = -0.044\text{MeV}$, $a = b = 9.24$, $\alpha =$

41.02. Por lo que se observa la flexibilidad que tienen los parámetros de ajuste, de [182] se tiene rangos de los valores que pueden tomar los parámetros, $\chi = -0.05\text{MeV} \leftarrow -0.1\text{MeV}$, $a = b = 5 \leftrightarrow 15$, $\alpha = 10 \leftrightarrow 100$. Entonces se tiene una amplia gama de valores, lo que da flexibilidad a los Hamiltonianos. Como el objetivo es dejar sin cambios la intensidad del cuadrupolo-cuadrupolo y las energías de partícula independiente mientras buscamos el efecto de variar las dos intensidades de apareamiento, primero debemos elegir un conjunto óptimo de parámetros. Luego, podemos variar los parámetros de intensidad de apareamiento de sus valores óptimos, mientras mantenemos los demás fijos, para ver cómo estos cambios impactan en la descripción de las propiedades de interés. El enfoque para elegir los parámetros *óptimos* del Hamiltoniano se basa en dos criterios principales:

1. Buena reproducción de los espectros de baja energía de los núcleos de interés (especialmente los estados 1^+ de núcleos impares),
2. Buena descripción de las propiedades GT y especialmente su fragmentación.

Por último se observan los efectos de los diferentes modos de apareamiento sobre los espectros de energía y algunas propiedades de rotación. El análisis comienza con pocos nucleones en la capa $2f1p$ y se expande, esto en un rango de masas pares de $A = 42 - 48$. Los resultados seleccionados son puestos en el capítulo correspondiente a ellos.

Antes de continuar con los resultados se muestra un breve desarrollo de los operadores que se utilizaron en este trabajo.

3.1.1. Acoplamiento espín-órbita.

El acoplamiento espín-órbita tiene su origen en la interacción fuerte y se puede entender a partir de los detalles de la interacción nuclear de dos cuerpos.

Fenomenológicamente se argumenta, que para construir una cantidad invariante se puede considerar el espín del nucleón \hat{s} , el momento del nucleón \hat{p} y el gradiente de la densidad de la materia $\nabla\rho$ o el gradiente del potencial central nuclear ∇V . Es un hecho empírico que en las fuerzas nucleares (la interacción fuerte) se preserva la paridad, la cual requiere que el potencial nuclear sea escalar. El escalar concebible más simple que contiene \hat{s} es [183]

$$\hat{V}_{LS} \propto \hat{s} \cdot (\hat{p} \times \nabla V), \quad (3.3)$$

donde si se asume simetría esférica, se tiene

$$\nabla V = \frac{\hat{r}}{r} \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (3.4)$$

o

$$\hat{V}_{LS} \propto \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \hat{l} \cdot \hat{s}. \quad (3.5)$$

En el caso del oscilador armónico, el término espín-órbita se hace especialmente sencillo, dado que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = M\omega_0^2 = \text{cte.} \quad (3.6)$$

Para calcular el desdoblamiento debido al potencial causado por el acoplamiento espín-órbita, se necesita calcular funciones de onda que sean valores propios de $\hat{l} \cdot \hat{s}$. Por lo tanto si

$$\hat{l} + \hat{s} = \hat{j}, \quad (3.7)$$

y

$$(\hat{l} + \hat{s})^2 = \hat{j}^2, \quad (3.8)$$

entonces

$$\hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{1}{2} (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2), \quad (3.9)$$

éste es el operador de acoplamiento espín-órbita, lo que se hace ahora es pasarlo a segunda cuantización con el fin de tener un manejo mas sencillo.

Operador de acoplamiento espín-órbita en segunda cuantización

Del operador dado en 3.9 se tiene al reescribirlo en segunda cuantización

$$\hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i \tau_i} \left[j_i(j_i + 1) - l_i(l_i + 1) - \frac{3}{4} \right] \hat{a}_{\alpha_i \tau_i}^\dagger \hat{a}_{\alpha_i \tau_i}, \quad (3.10)$$

donde $\alpha \equiv (n_i, l_i, j_i, m_i)$, estos son los números cuanticos en el esquema M .

Se realiza la suma de las proyecciones de isospín y en el resultado se coloca la respectiva partícula en cada caso de proyección, $\tau = 1/2$ para el protón y

$\tau = -1/2$ para el neutrón, entonces se tiene

$$\widehat{l} \cdot \widehat{s} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \widehat{\pi}_{\alpha}^{\dagger} \widehat{\pi}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \widehat{\nu}_{\alpha}^{\dagger} \widehat{\nu}_{\alpha}, \quad (3.11)$$

donde

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]. \quad (3.12)$$

Cabe mencionar que la literatura coloca parámetros diferentes para la parte que actúa sobre protones y otro para la parte de neutrones, esto se ve reflejado como

$$\widehat{l} \cdot \widehat{s} = \chi_{\pi} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \widehat{\pi}_{\alpha}^{\dagger} \widehat{\pi}_{\alpha} + \chi_{\nu} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \widehat{\nu}_{\alpha}^{\dagger} \widehat{\nu}_{\alpha}. \quad (3.13)$$

Este operador da resultados similares tanto para protones como neutrones, salvo por los parámetros que pueden diferenciar entre los dos diferentes tipos de partículas, en este caso al considerar la simetría de isospín, los parámetros dan lo mismo, por lo que los resultados son los mismos en ambos casos. Entonces al calcular uno de los elementos de matriz se tiene

$$\langle \pi_{\alpha_i} | \widehat{l} \cdot \widehat{s} | \pi_{\alpha_j} \rangle = \chi_{\pi} \epsilon_{\alpha_i} \delta_{\alpha_i \alpha_j}, \quad (3.14)$$

donde π_{α_j} es representado por: π indica protones (ν neutrones). En este caso al trabajar en la capa $2f1p$ se tienen los valores de las energías de un cuerpo de la interacción espín-órbita dados en la tabla 3.1.

Estado			Elemento de matriz
l	j	m	$\langle l \cdot s \rangle$
1	1/2	1/2	-1
1	3/2	1/2	0.5
3	5/2	1/2	-2
3	7/2	1/2	1.5

Tabla 3.1: Elementos de matriz de una partícula en la capa $2f1p$, para el operador espín-órbita.

3.1.2. Cuadrupolo-cuadrupolo.

El operador cuadrupolo de masa tiene su origen en el modelo vibracional nuclear, ya que es parte de la expansión multipolar. Éste es el modo vibracional fundamental del modelo, puesto que da lugar a oscilaciones de formas no esféricas del núcleo. El núcleo oscila entre formas prolato ($Q > 0$) y oblato ($Q < 0$), pasando por esférico. Al cuantizar estos movimientos, se asocian con estados de un fonón (cuanto de energía vibracional) cuadrupolar ($J^P = 2^+$)[184]. Se tiene entonces el operador cuadrupolar esquemático :

$$\widehat{Q}_{2\mu} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e\widehat{r}^2 Y_{2\mu}. \quad (3.15)$$

Operador cuadrupolo en segunda cuantización

Se tiene que el operador 3.15 en segunda cuantización está dado por

$$\widehat{Q}_{2\mu,\tau} = \sum_{\alpha\alpha'} q_{2\mu}(\alpha'\alpha) \widehat{a}_{\alpha',\tau}^\dagger \widehat{a}_{\alpha,\tau}, \quad (3.16)$$

donde

$$q_{2\mu}(\alpha'\alpha) = \sqrt{\frac{(2j+1)(2j'+1)}{25}} e \langle \alpha' | \widehat{r}^2 | \alpha \rangle \times \quad (3.17)$$

$$\times (-1)^{j+j'-m+1/2} [1 + (-1)^{l'+l}] C_{jm' j-m'}^{2-\mu} C_{j'-1/2 j1/2}^{2\ 0}.$$

Con 3.16 y sabiendo que $\langle \alpha' | \widehat{r}^2 | \alpha \rangle$ es analítica, se calcula el operador $\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}$, dicho operador se descompone en el operador cuadrupolo-cuadrupolo de un cuerpo

$$\begin{aligned} (\widehat{Q}_\tau \cdot \widehat{Q}_{\tau'})^{(1)} &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \sum_{\beta\beta'\beta''} \frac{2j+1}{25} \sqrt{(2j'+1)(2j''+1)} \times \\ &\times \langle \beta' | \widehat{r}^2 | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{r}^2 | \beta'' \rangle [1 + (-1)^{l+l'}] [1 + (-1)^{l+l''}] C_{j'-1/2 j1/2}^{20} C_{j-1/2 j''1/2}^{20} \times \\ &\times \sum_{mm'm''} (-1)^{j'+j''-m+m''} C_{j'm' j-m}^{2\mu} C_{jm' j''-m''}^{2-\mu} \delta_{\tau\tau'} \widehat{a}_{\beta'm',\tau}^\dagger \widehat{a}_{\beta''-m'',\tau} \end{aligned} \quad (3.18)$$

y en el operador cuadrupolo-cuadrupolo de dos cuerpos

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{Q}_\tau \cdot \widehat{Q}_{\tau'}\right)^{(2)} &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \sum_{\beta\beta'\beta''\beta'''} \frac{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)(2j''+1)(2j''' + 1)}}{25} \times \\
&\times \langle \beta' | \widehat{r}^2 | \beta \rangle \langle \beta''' | \widehat{r}^2 | \beta'' \rangle \left[1 + (-1)^{l+l'}\right] \left[1 + (-1)^{l''+l'''}\right] C_{j'-\frac{1}{2}j\frac{1}{2}}^{20} C_{j'''-\frac{1}{2}j''\frac{1}{2}}^{20} \times \\
&\times \sum_{mm'm''m'''} (-1)^{j+j'+j''+j''' + m+m''} C_{j'm'j-m}^{2\mu} C_{j'''m''j''m'''}^{2-\mu} \widehat{a}_{\beta'm',\tau}^{\dagger} \widehat{a}_{\beta''m'',\tau'}^{\dagger} \widehat{a}_{\beta-m,\tau} \widehat{a}_{\beta''-m'',\tau'}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Con estos resultados se obtienen las componentes del operador cuadrupolo-cuadrupolo en la base de protones y neutrones para el esquema M .

Parte del operador de un cuerpo:

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}\right)^{(1)} &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \sum_{\beta\beta'\beta''} \frac{2j+1}{25} \sqrt{(2j'+1)(2j''+1)} \times \\
&\times \langle \beta' | \widehat{r}^2 | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{r}^2 | \beta'' \rangle \left[1 + (-1)^{l+l'}\right] \left[1 + (-1)^{l+l''}\right] C_{j'-\frac{1}{2}j\frac{1}{2}}^{20} C_{j-\frac{1}{2}j''\frac{1}{2}}^{20} \times \\
&\times \sum_{mm'm''} (-1)^{j'+j''-m+m''} C_{j'm'j-m}^{2\mu} C_{jmj''m''}^{2-\mu} \left(\widehat{\pi}_{\beta'm'}^{\dagger} \widehat{\pi}_{\beta''-m''} + \widehat{\nu}_{\beta'm'}^{\dagger} \widehat{\nu}_{\beta''-m''}\right).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

En este caso al igual que en la interacción espín-órbita se calculan los elementos de matriz para el operador de un cuerpo.

Estado			Elemento de matriz
l	j	m	$\left\langle \left(\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}\right)^{(1)} \right\rangle$
1	1/2	1/2	66
1	3/2	1/2	66
3	5/2	1/2	36
3	7/2	1/2	36

Tabla 3.2: Elementos de matriz de una partícula en la capa 2f1p, para el operador cuadrupolo-cuadrupolo.

Mientras que en el caso del operador dos cuerpos, se tiene el operador:

$$\begin{aligned}
(\widehat{Q} \cdot \widehat{Q})^{(2)} &= + \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \sum_{\beta\beta'\beta''\beta'''} \frac{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)(2j''+1)(2j''' + 1)}}{25} \times \\
&\times \langle \beta' | \widehat{r}^2 | \beta \rangle \langle \beta''' | \widehat{r}^2 | \beta'' \rangle [1 + (-1)^{l+l'}] [1 + (-1)^{l''+l'''}] C_{j'-\frac{1}{2}j\frac{1}{2}}^{20} C_{j'''-\frac{1}{2}j''\frac{1}{2}}^{20} \times \\
&\times \sum_{mm'm''m'''} (-1)^{j+j'+j''+j''' + m+m''} C_{j'm'jm}^{2\mu} C_{j'''m''j''m''}^{2-\mu} \\
&\left(\widehat{\pi}_{\beta'm'}^{\dagger} \widehat{\pi}_{\beta'''m''}^{\dagger} \widehat{\pi}_{\beta-m} \widehat{\pi}_{\beta''-m''} + \widehat{\nu}_{\beta'm'}^{\dagger} \widehat{\nu}_{\beta'''m''}^{\dagger} \widehat{\nu}_{\beta-m} \widehat{\nu}_{\beta''-m''} + 2\widehat{\pi}_{\beta'm'}^{\dagger} \widehat{\nu}_{\beta'''m''}^{\dagger} \widehat{\pi}_{\beta-m} \widehat{\nu}_{\beta''-m''} \right). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Etonces para este operador se tienen los siguientes elementos de matriz. En el caso de tener dos protones (o dos neutrones)

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | (\widehat{Q} \cdot \widehat{Q})^{(2)} | \pi_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle &= \\
\frac{2}{25} \sqrt{(2j_i+1)(2j_j+1)(2j_k+1)(2j_l+1)} &(-1)^{j_i+j_j+j_k+j_l-m_k-m_l} [\\
\langle \beta_i | \widehat{r}^2 | \beta_l \rangle \langle \beta_j | \widehat{r}^2 | \beta_k \rangle &[1 + (-1)^{l_i+l_l}] [1 + (-1)^{l_j+l_k}] C_{j_i-1/2 j_l 1/2}^{20} C_{j_j-1/2 j_k 1/2}^{20} \\
\sum_{\mu} (-1)^{\mu} C_{j_i m_i j_l - m_l}^{2\mu} C_{j_j m_j j_k - m_k}^{2-\mu} & \\
- \langle \beta_i | \widehat{r}^2 | \beta_k \rangle \langle \beta_j | \widehat{r}^2 | \beta_l \rangle &[1 + (-1)^{l_i+l_k}] [1 + (-1)^{l_j+l_l}] C_{j_i-1/2 j_k 1/2}^{20} C_{j_j-1/2 j_l 1/2}^{20} \\
\sum_{\mu} (-1)^{\mu} C_{j_i m_i j_k - m_k}^{2\mu} C_{j_j m_j j_l - m_l}^{2-\mu} &], \tag{3.22}
\end{aligned}$$

y para un protón y un neutrón se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | (\widehat{Q} \cdot \widehat{Q})^{(2)} | \pi_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle &= \\
- \frac{2}{25} \sqrt{(2j_i+1)(2j_j+1)(2j_k+1)(2j_l+1)} &(-1)^{j_i+j_j+j_k+j_l-m_k-m_l} \\
\langle \beta_i | \widehat{r}^2 | \beta_k \rangle \langle \beta_j | \widehat{r}^2 | \beta_l \rangle &[1 + (-1)^{l_i+l_k}] [1 + (-1)^{l_j+l_l}] C_{j_i-1/2 j_k 1/2}^{20} C_{j_j-1/2 j_l 1/2}^{20} \\
\sum_{\mu} (-1)^{\mu} C_{j_i m_i j_k - m_k}^{2\mu} C_{j_j m_j j_l - m_l}^{2-\mu} &. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

3.1.3. Interacción de apareamiento.

En estudios empíricos del espectro de energía en núcleos con A-impar, los niveles a bajas energías está bien descritos por la excitación de la partícula impar. Por otro lado en los espectros par-par, la regla general es que no hay estados de excitación que se encuentren por debajo de 1 MeV de energía, con excepción de los miembros del estado base de las bandas rotacionales. Está es la famosa "brecha de energía" par-par de una magnitud del orden 2Δ , donde Δ es la diferencia de energía impar-par. Este último se define como la diferencia media en la parábola de masas, conectando de manera separada núcleos pares e impares, respectivamente.

Estos hechos están bien descritos en la física nuclear por la teoría de apareamiento. El formalismo correspondiente se remonta a la física del estado sólido, la cual se ha desarrollado para describir el fenómeno de la superconductividad y la correspondiente brecha de energía en el nivel de densidad electrónica de los metales superconductores[183].

En los núcleos de capa abierta con $N = Z$ generalmente se consideran los pares isovectoriales de protones y neutrones que corresponde a isospín total $T = 1$ y a momento angular total $J = 0$. Por otro lado, dado que los pares de protones y neutrones con $J = 1$ deben tener $T = 0$, se les llama comúnmente pares isoescalares. En principio se pueden formar también pares isoescalares con $J > 1$, pero se espera que estas parejas tiendan a ser menos colectivas, salvo el caso en particular cuando los neutrones y los protones se colocan juntos en un estado parcialmente lleno con alta degeneración.

La pregunta abordada en muchos estudios es si el apareamiento isoescalar con $J = 1$ es significativo realmente en núcleos con $N = Z$ o no. En caso afirmativo, se verá la competencia con el apareamiento isovectorial.

Apareamiento isovectorial

El operador de creación de un par en el acoplamiento isovectorial con $J = 0$ ($S = 0$, $L = 0$) y $T = 1$, estará dado por

$$\widehat{A}_{00}^{1T_z \dagger}(j, j') = \frac{-\delta_{jj'}}{\sqrt{2(2j+1)}} \sum_{m \tau \tau'} (-1)^{j-m} C_{\frac{1}{2}\tau \frac{1}{2}\tau'}^{1T_z} \widehat{a}_{jm, \frac{1}{2}\tau}^{\dagger} \widehat{a}_{j-m, \frac{1}{2}\tau'}^{\dagger}, \quad (3.24)$$

mientras que el de aniquilación es

$$\widehat{A}_{00}^{1T_z}(j, j') = \frac{-\delta_{jj'}}{\sqrt{2(2j+1)}} \sum_{m \tau \tau'} (-1)^{j-m-\tau-\tau'} C_{\frac{1}{2}\tau \frac{1}{2}\tau'}^{1T_z} \widehat{a}_{jm, \frac{1}{2}-\tau} \widehat{a}_{j-m, \frac{1}{2}-\tau}, \quad (3.25)$$

T_z denota las tres proyecciones del isospín total $T = 1$, correspondiente a los pares neutrón-neutrón ($T_z = -1$), protón-protón ($T_z = 1$) y protón-neutrón ($T_z = 0$).

Entonces los operadores son

$$\widehat{S}_{1T_z}^\dagger = \sum_{jj'} \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \widehat{A}_{00}^{1T_z \dagger}(j, j') \quad (3.26)$$

y

$$\widehat{S}_{1T_z} = \sum_{jj'} \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \widehat{A}_{00}^{1T_z}(j, j'). \quad (3.27)$$

Estos son los operadores que se usan en la construcción del operador de interacción de apareamiento que está en el Hamiltoniano.

Operador de apareamiento isovectorial en segunda cuantización

Se realiza el producto escalar de los operadores de acoplamiento isovectorial dados en las ecuaciones 3.26 y 3.27, con el fin de obtener el operador de la interacción en segunda cuantización para la base de protones y neutrones, tal que

$$\begin{aligned} \widehat{S}_1^\dagger \cdot \widehat{S}_1 = \frac{1}{4} \sum_{jj' mm'} (-1)^{j+j'-m-m'} & \left(\widehat{\pi}_{jm}^\dagger \widehat{\pi}_{j-m}^\dagger \widehat{\pi}_{j'm'} \widehat{\pi}_{j'-m'} + \widehat{\nu}_{jm}^\dagger \widehat{\nu}_{j-m}^\dagger \widehat{\nu}_{j'm'} \widehat{\nu}_{j'-m'} \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\widehat{\pi}_{jm}^\dagger \widehat{\nu}_{j-m}^\dagger \widehat{\pi}_{j'm'} \widehat{\nu}_{j'-m'} + \widehat{\pi}_{jm}^\dagger \widehat{\nu}_{j-m}^\dagger \widehat{\nu}_{j'm'} \widehat{\pi}_{j'-m'} + \right. \\ & \left. \left. \widehat{\nu}_{jm}^\dagger \widehat{\pi}_{j-m}^\dagger \widehat{\pi}_{j'm'} \widehat{\nu}_{j'-m'} + \widehat{\nu}_{jm}^\dagger \widehat{\pi}_{j-m}^\dagger \widehat{\nu}_{j'm'} \widehat{\pi}_{j'-m'} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Entonces los elementos de matriz son, para dos protones con cero neutrones

$$\begin{aligned}
\langle \pi_i \pi_j | \widehat{S}_1^\dagger \cdot \widehat{S}_1 | \pi_k \pi_l \rangle &= -\frac{1}{4} (-1)^{j_i - m_i + j_k - m_k} \delta_{\beta_i \beta_j} \delta_{\beta_k \beta_l} \\
&\times \left[\delta_{-m_i m_j} \delta_{-m_k m_l} + \delta_{-m_i m_j} \delta_{-m_l m_k} + \delta_{-m_j m_i} \delta_{-m_k m_l} + \delta_{-m_j m_i} \delta_{-m_l m_k} \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

y para un protón con un neutrón

$$\begin{aligned}
\langle \pi_i \nu_j | \widehat{S}_1^\dagger \cdot \widehat{S}_1 | \pi_k \nu_l \rangle &= -\frac{1}{8} (-1)^{j_i - m_i + j_k - m_k} \delta_{\beta_i \beta_j} \delta_{\beta_k \beta_l} \\
&\times \left[\delta_{-m_i m_j} \delta_{-m_k m_l} + \delta_{-m_i m_j} \delta_{-m_l m_k} + \delta_{-m_j m_i} \delta_{-m_k m_l} + \delta_{-m_j m_i} \delta_{-m_l m_k} \right].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Apareamiento isoescalar

En el caso del apareamiento isoescalar, se requiere que $J = 1$ y $T = 0$, pero en este caso el momento angular total debe ser obtenido por medio de $L = 0$ y $S = 1$, por lo que conviene acoplar los operadores a estos números cuánticos, tal que se tienen los operadores $\widehat{B}_{LM_L, SM_S}^{TT_z}^\dagger$ y $\widehat{B}_{LM_L, SM_S}^{TT_z}$. Entonces se tiene que el operador de creación isoescalar estará dado por

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_{00, 1M_S}^{00}{}^\dagger &= \frac{\delta_{ll'}}{\sqrt{2(2l+1)}} \sum_{m_l m_s m'_s} (-1)^{l-m_l} C_{\frac{1}{2}m_s \frac{1}{2}m'_s}^{1M_S} \times \\
&\times \left(\widehat{a}_{lm_l, \frac{1}{2}m_s, \frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \widehat{a}_{l-m_l, \frac{1}{2}m'_s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger - \widehat{a}_{lm_l, \frac{1}{2}m_s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger \widehat{a}_{l-m_l, \frac{1}{2}m'_s, \frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

y por otro lado, el operador de aniquilación es

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_{00, 1M_S}^{00} &= \frac{\delta_{ll'}}{\sqrt{2(2l+1)}} \sum_{m_l m_s m'_s} (-1)^{l-m_l-m_s-m'_s} C_{\frac{1}{2}m_s \frac{1}{2}m'_s}^{1M_S} \times \\
&\times \left(\widehat{a}_{lm_l, \frac{1}{2}-m'_s, \frac{1}{2}\frac{1}{2}} \widehat{a}_{l-m_l, \frac{1}{2}-m_s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}} - \widehat{a}_{lm_l, \frac{1}{2}-m'_s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \widehat{a}_{l-m_l, \frac{1}{2}-m_s, \frac{1}{2}\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

En este caso se tiene que M_S es la proyección correspondiente al espín total $S = 1$.

Se definen los operadores

$$\widehat{D}_{1M_S}^\dagger = \sum_{l'} \sqrt{2l+1} \widehat{B}_{00,1M_S}^{00 \dagger}(l, l') \quad (3.33)$$

y

$$\widehat{\widetilde{D}}_{1M_S} = \sum_{l'} \sqrt{2l+1} \widehat{\widetilde{B}}_{00,1M_S}^{00}(l, l'). \quad (3.34)$$

Con esto se tienen los operadores que están en el Hamiltoniano.

Operador de apareamiento isoescalar en segunda cuantización

Se procede a realizar el producto interno de los operadores definidos en las ecuaciones 3.33 y 3.34, de manera que se obtenga el operador en segunda cuantización en la base de protones y neutrones, tal que

$$\begin{aligned} \widehat{D}_1^\dagger \cdot \widehat{\widetilde{D}}_1 = 4 \sum_{l' m_l m_l'} (-1)^{l+l'-m_l-m_l'} & \left(\widehat{\pi}_{lm_l, \downarrow}^\dagger \widehat{\nu}_{l-m_l, \downarrow}^\dagger \widehat{\pi}_{l' m_l', \downarrow} \widehat{\nu}_{l'-m_l', \downarrow} + \widehat{\pi}_{lm_l, \uparrow}^\dagger \widehat{\nu}_{l-m_l, \uparrow}^\dagger \widehat{\pi}_{l' m_l', \uparrow} \widehat{\nu}_{l'-m_l', \uparrow} \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\widehat{\pi}_{lm_l, \uparrow}^\dagger \widehat{\nu}_{l-m_l, \downarrow}^\dagger \widehat{\pi}_{l' m_l', \uparrow} \widehat{\nu}_{l'-m_l', \downarrow} + \widehat{\pi}_{lm_l, \uparrow}^\dagger \widehat{\nu}_{l-m_l, \downarrow}^\dagger \widehat{\pi}_{l' m_l', \downarrow} \widehat{\nu}_{l'-m_l', \uparrow} + \right. \\ & \left. \left. \widehat{\pi}_{lm_l, \downarrow}^\dagger \widehat{\nu}_{l-m_l, \uparrow}^\dagger \widehat{\pi}_{l' m_l', \uparrow} \widehat{\nu}_{l'-m_l', \downarrow} + \widehat{\pi}_{lm_l, \downarrow}^\dagger \widehat{\nu}_{l-m_l, \uparrow}^\dagger \widehat{\pi}_{l' m_l', \downarrow} \widehat{\nu}_{l'-m_l', \uparrow} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

En este caso se tiene un operador completamente desacoplado en momento angular. Para subsanar esto, al usar las bases se toma el reacoplamiento de los operadores de creación y aniquilación usando los Clebsch-Gordan, dicho procedimiento se incluye en el posterior calculo de los elementos de matriz.

Entonces se obtienen los elementos de matriz para el caso de dos protones con cero neutrones

$$\langle \pi_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | \widehat{P}_1^\dagger \cdot \widehat{\widetilde{P}}_1 | \pi_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle = 0 \quad (3.36)$$

y para un protón con un neutrón

$$\begin{aligned}
& \langle \pi_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | \widehat{P}_1^\dagger \cdot \widehat{P}_1 | \pi_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle = -2 \sum_{m_i, m_k} (-1)^{l_i - m_i + l_k - m_k} \times \\
& \times \left(C_{l_i m_i \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_i m_i} C_{l_i - m_i \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_j m_j} C_{l_k m_k \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_k m_k} C_{l_k - m_k \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_l m_l} + \right. \\
& \quad \left. C_{l_i m_i \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_i m_i} C_{l_i - m_i \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_j m_j} C_{l_k m_k \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_k m_k} C_{l_k - m_k \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_l m_l} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left[C_{l_i m_i \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_i m_i} C_{l_i - m_i \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_j m_j} + C_{l_i m_i \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_i m_i} C_{l_i - m_i \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_j m_j} \right] \times \\
& \quad \left[C_{l_k m_k \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_k m_k} C_{l_k - m_k \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_l m_l} + C_{l_k m_k \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{j_k m_k} C_{l_k - m_k \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{j_l m_l} \right].
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Capítulo 4

Resultados.

Se realizó un ajuste de los parámetros de ambos Hamiltonianos, para esto se toman los resultados dados en [18], y se ajusta el Hamiltoniano del modelo 1, mientras que en el caso del modelo 2 se tomará como único valor fijo el correspondiente a la interacción cuadrupolo-cuadrupolo ($\chi = -0.05$), mientras que los apareamientos se ajustan de forma sencilla, usando a los núcleos ligeros de masa $A = 42$, ligeros respecto a la cerradura de capa $A = 40$. Se tienen los parámetros de ajuste $\chi = -0.05$, $a = b = 12$, y $\alpha = 20$ para el primer Hamiltoniano y $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$ para el segundo Hamiltoniano. Se obtuvieron los resultados de las siguientes gráficas de 4.1.

Se observa claramente un problema con los núcleos hijo que tiene un estado base distinto a 0^+ , ^{44}Sc y ^{48}V , en estos se ve una gran influencia del apareamiento isoscalar, haciendo que el estado base se vuelva 1^+ , por lo que lo más sencillo fue anular este operador, dando resultados positivos, observados en las gráficas 4.2.

Se observa que el modelo 1 tiene una limitación para el ^{48}V , pero aún se reproducen los espectros de energía de los núcleos hijo. Lo anterior denota dos resultados importantes, el primero es que los modelos usados dan una reproducción aceptable de los resultados experimentales, por lo que su uso está justificado; el segundo punto importante es que el espectro de baja energía de los núcleos estudiados tienen dependencia importante de los apareamientos, principalmente el isoscalar en dos de ellos, esto da pie a la importancia de este estudio. Con lo anterior notamos una pequeña diferencia entre ambos apareamientos en el modelo 2, pero solo se quería observar la reproducción de los espectros energéticos, por lo que al tener esto claro se pueden tomar iguales para la descripción fenomenológica, una breve revisión de esto se encuentra en el apéndice D. Por otro

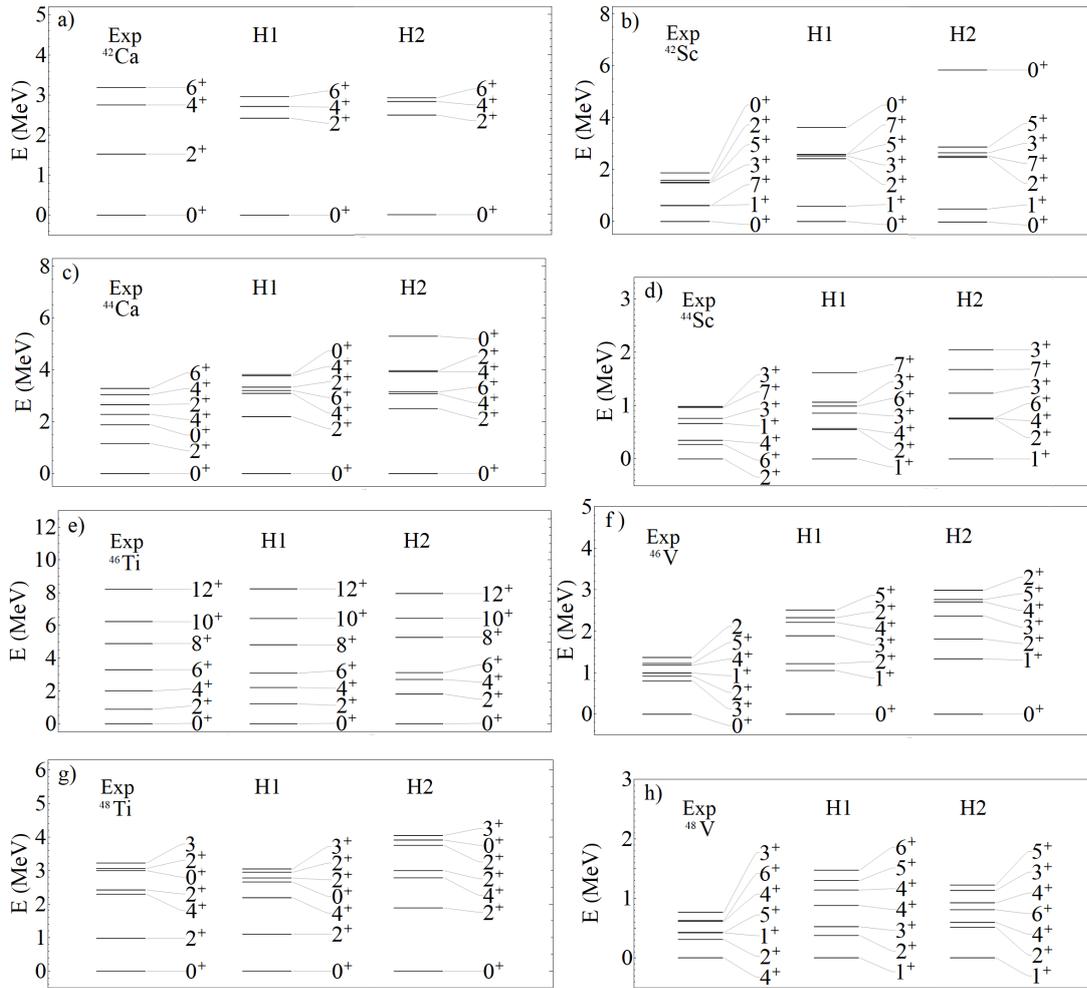


Figura 4.1: Espectros de energía de los núcleos hijos y padres experimentales [185] y con los parámetros del Hamiltoniano 1 (H1) $\chi = -0.05$, $a = b = 12$, y $\alpha = 20$ y $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$ para el Hamiltoniano 2 (H2).

lado se observa que en la mayoría de los casos el estado con mayor energía se aleja del reportado experimentalmente, esto se debe a que los apareamientos y el cuadrupolo-cuadrupolo aumentan la energía de estados excitados, esto se verá en las secciones subsiguientes, entonces se menciona con antelación el cambio de la intensidad del operador cuadrupolo-cuadrupolo a $\chi = -0.065$, por lo que se debe responder con una disminución de los apareamientos, esto se verá reflejado en las discusiones siguientes, por el momento sean $a = b = 12$ en ambos modelos, el cual será el máximo valor de la intensidad de los apareamientos para el estudio, de ahí se reducirán las intensidades de ambos, primero en la misma intensidad, después se fija el apareamiento isovectorial y se disminuye el isoescalar y por último se fija el apareamiento isoescalar y se modifica el isovectorial, para observar el compor-

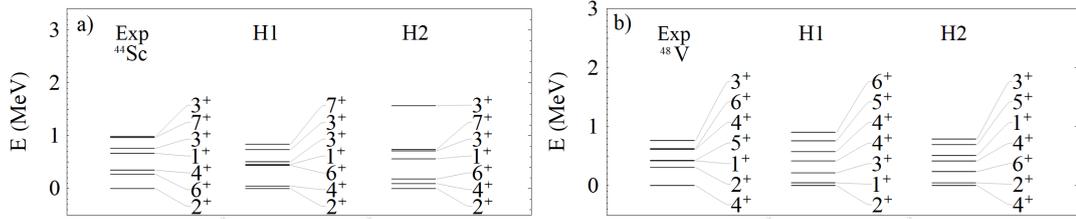


Figura 4.2: Espectros de energía del ^{44}Sc y ^{48}V experimentales [185] y con los parámetros del Hamiltoniano 1 (H1) $\chi = -0.05$, $a = 0$, $b = 12$ y $\alpha = 20$, mientras que $\chi = -0.05$, $a = 0$ y $b = 15$ para el Hamiltoniano 2 (H2).

tamiento de los observables correspondientes a los espectros de energía, banda de rotación y las transiciones GT. A continuación se muestran los resultados de las masas $A = 42$, 44 , 46 y 48 y en donde se da razón del cambio de la intensidad del operador cuadrupolo-cuadrupolo.

4.1. Espectros de energía y bandas rotacionales.

A continuación se muestran resultados para el barrido de los parámetros, primeramente se tienen los correspondientes a los espectros de energía y/o bandas rotacionales, con el fin de observar lo que pasa con cada uno de ellos y obtener las primeras conclusiones.

4.1.1. $A=42$.

Se tienen los resultados para los núcleos ligeros ($A = 42$), siendo el primer observable los espectros de energía de los núcleos hijo y padre usando cada uno de los modelos (figuras 4.3 y 4.4). En todos los cálculos realizados en esta sección, se toma una intensidad constante del operador cuadrupolo-cuadrupolo de $\chi = -0.065\text{MeV}$ y el termino espín-órbita de $\alpha = 20$.

De los espectros de energía del ^{42}Sc se espera que el operador de apareamiento isoescalar tenga un papel relevante, para tener un buen ajuste del primer estado 1^+ , en donde se incluyen ambos apareamientos con la intensidad máxima propuesta. La mayoría de los resultados, aunque óptimos para esta parametrización de los Hamiltonianos, todavía muestran claras limitaciones. En particular, no es posible reproducir la energía del primer estado 7^+ y el segundo 0^+ más bajos, tal como están presentes en los datos. Sería necesario incluir otros componentes de la interacción de dos cuerpos para reproducir estos efectos.

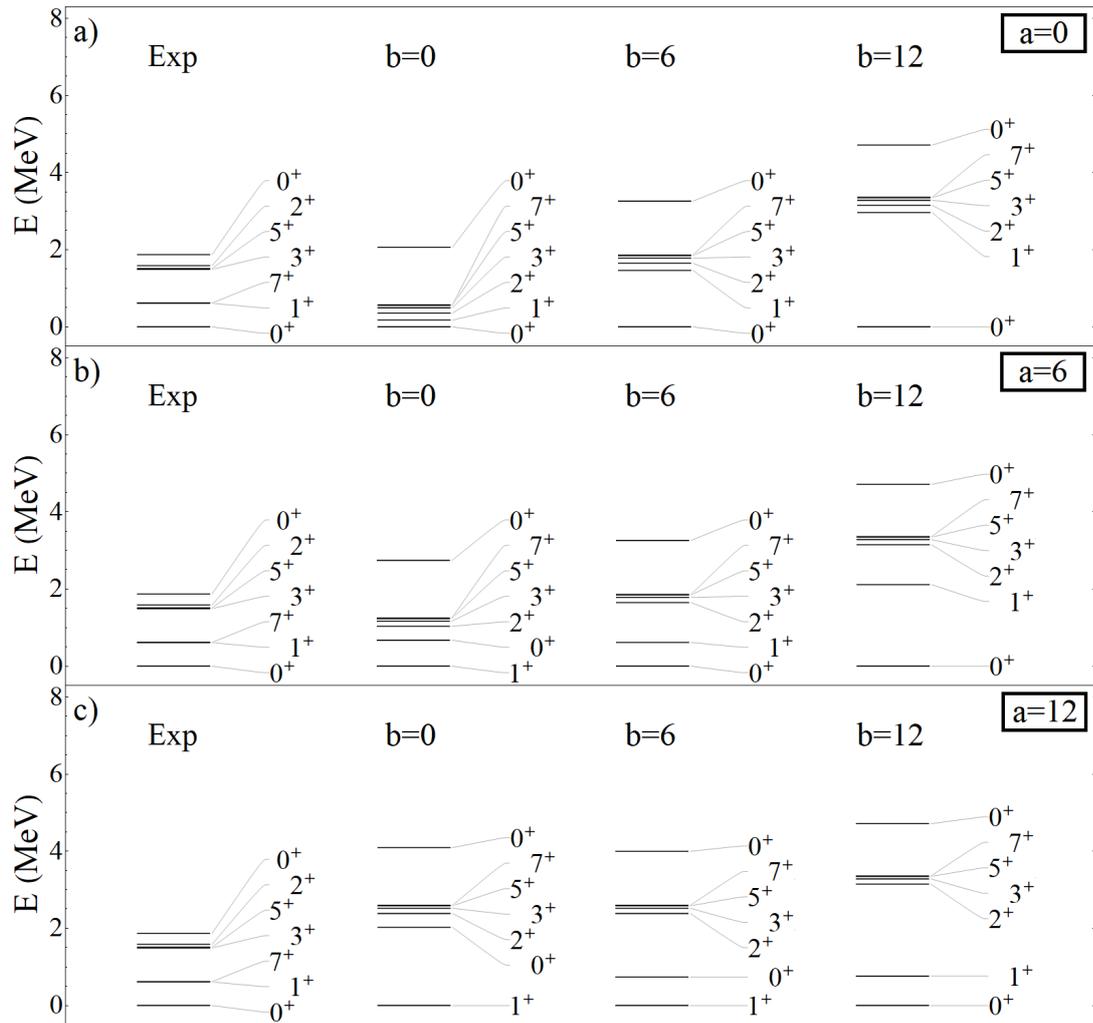


Figura 4.3: Espectros de energía del ^{42}Sc experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

Posteriormente al realizar un análisis con diferentes intensidades de los apareamientos, se comienza tomando el valor máximo de la intensidad de estos y se va reduciendo a cero en diferentes situaciones. Primeramente se observa en la diagonal como aumentan las intensidades de ambos apareamientos al mismo tiempo ($a = b$), resultando en una compactación de los espectros energéticos cuando las intensidades se acercan a cero. Se tiene que en el modelo 2 la brecha de energía con el segundo 0^+ cambia más lento que en el modelo 1, esto se debe a la elección de energías de partícula independiente.

Por otro lado el cambio de cada estado de forma independiente se muestra en las columnas y las filas, aquí se observan dos comportamientos, el primero ocurre

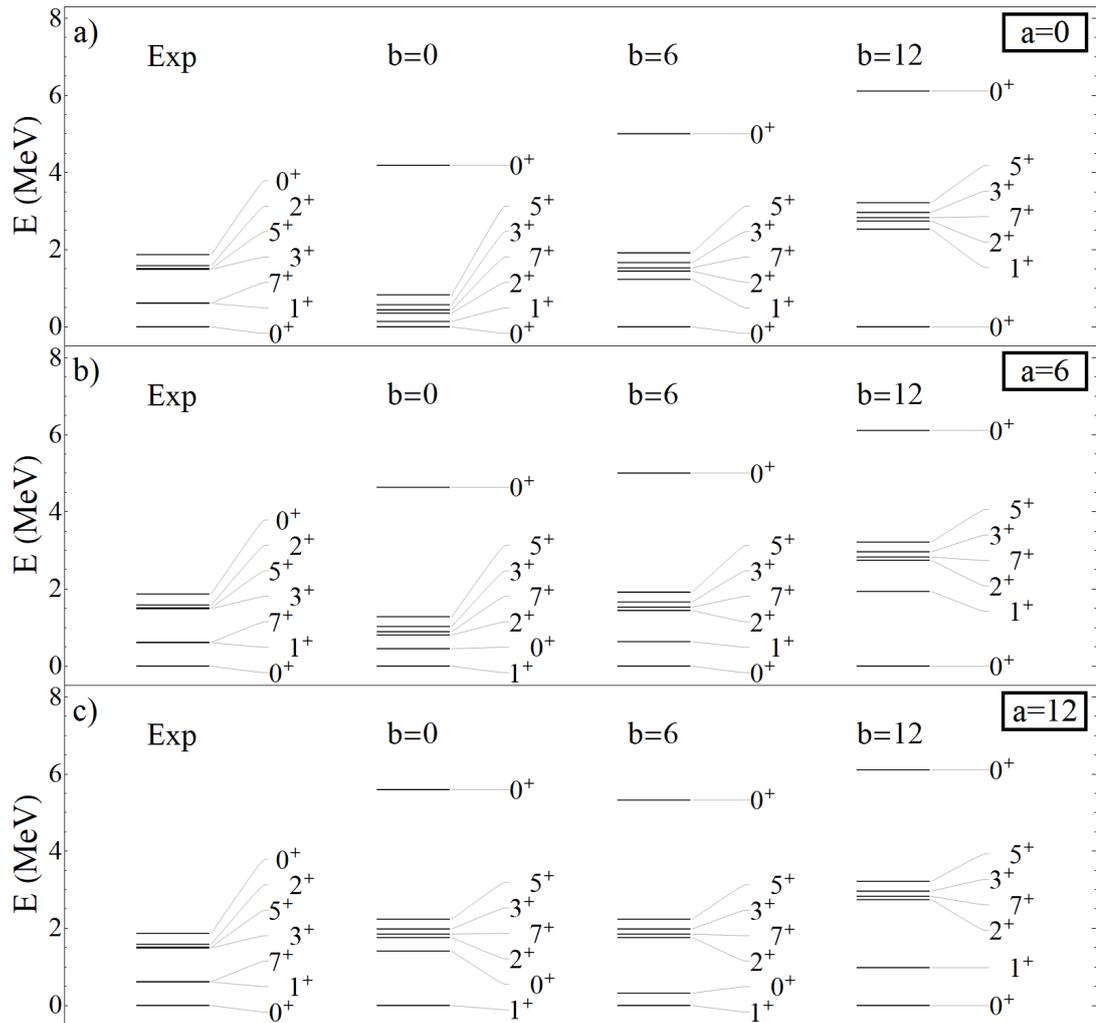


Figura 4.4: Espectros de energía del ^{42}Sc experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoscalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

cuando $a \leq b$, donde el estado base siempre será 0^+ y la diferencia energética entre los estados excitados no cambiará cuando se fija el valor de a , solo incrementará la diferencia entre el estado base y el 1^+ (el primer estado excitado) cuando crece b ; por otro lado se tienen los casos en los que $a > b$, aquí los resultados cambian radicalmente, haciendo que el estado 1^+ pase a ser el estado base, pero lo interesante, es que al quitar el primer estado 0^+ y el 1^+ , la diferencia de energía entre los estados siguientes es la misma en todos los casos de cambio. Al observar detenidamente los diferentes espectros, se tiene que al fijar el valor de la intensidad isovectorial (b) y cambiar el de la isoscalar (a), la brecha energética entre el primer estado 0^+ y el primer 2^+ no cambia, se mantiene constante, por

lo que la influencia de este último apareamiento es solo al estado 1^+ ; del lado contrario al fijar a y cambiar b , la diferencia energética entre el estado 1^+ y el 2^+ se mantienen constante, entonces el apareamiento isovectorial tiene una enorme influencia sobre el primer estado 0^+ . Lo anterior explica el cambio de estado base en algunos gráficos, ya que se tiene una competencia activa entre ambos apareamientos en los niveles de baja energía. Por último se puede ver que hay un mejor ajuste para este espectro al considerar las intensidades $a = b = 6$ en ambos modelos, esto se tiene que observar en los siguientes resultados.

Para concluir esta primera parte se tiene que cuando la intensidad de apareamiento isovectorial b es débil, el estado fundamental es 1^+ . A medida que aumenta la intensidad de apareamiento isovectorial, el estado 0^+ emerge como el estado fundamental. Por lo tanto, en presencia de niveles de partícula independiente no degeneradas, es la interacción del apareamiento isovectorial e isoescalar lo que produce el espín del estado base en los núcleos con $N = Z$, hecho que se traslada a núcleos con $N = Z$ más pesados, tal como se vera en los siguientes resultados.

Ahora se muestran los espectros de energía (y banda rotacional) del núcleo padre ^{42}Ca en la figuras 4.5 y 4.6.

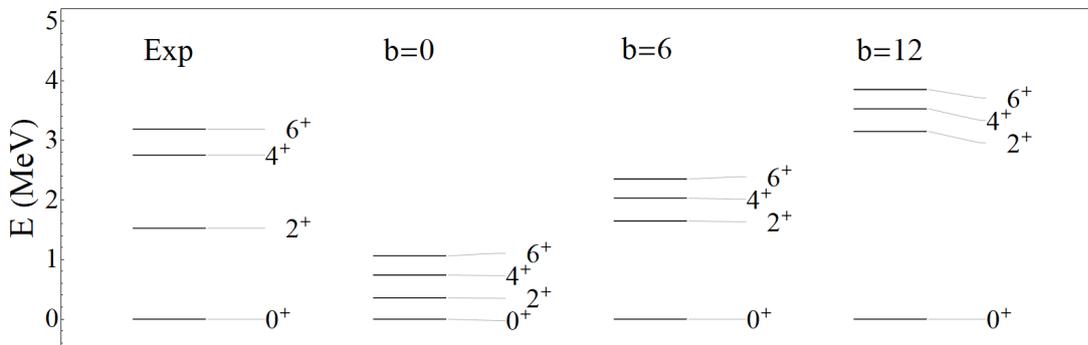


Figura 4.5: Banda rotacional del ^{42}Ca experimentales [185] y con el modelo 1 en función de la intensidad del apareamiento isovectorial b en comparación con los datos experimentales, se muestran para las intensidades $b = 0, 6$ y 12 .

Para el núcleo de ^{42}Ca , los espectros de energía, que en este caso corresponde a la banda rotacional, no cambian con la disminución del apareamiento isoescalar, esto se debe a que en este núcleo solo existen dos neutrones fuera de la cerradura de capa, por lo que es imposible obtener isospín total $T = 0$, entonces el espectro solo dependerá del apareamiento isovectorial. Observamos una compresión de los niveles de energía, como en el caso del ^{42}Sc , principalmente al aumentar el apareamiento isovectorial, surge la separación de los primeros estados 0^+ y 2^+ , tal como en el caso anterior del ^{42}Sc , esto también se puede ver como la agrupación de

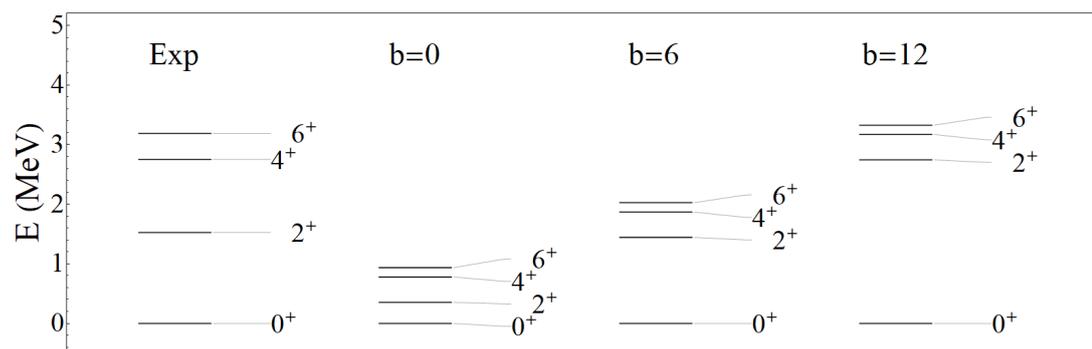


Figura 4.6: Banda rotacional del ^{42}Ca experimentales [185] y con el modelo 2 en función de la intensidad del apareamiento isovectorial b en comparación con los datos experimentales, se muestran para las intensidades $b = 0, 6$ y 12 .

los estados con un momento angular par, en este caso en particular, se tiene que el valor máximo seleccionado para los apareamientos describe con mayor fidelidad el último valor del espectro seleccionado, pero se pierde el ajuste del primer estado excitado, cabe recalcar que este análisis de la calidad del ajuste se perdería al tener más estados excitados, entonces aquí se deben priorizar los estados de más baja energía y esto se consigue también al tener $a = b = 6$, considerando que a puede tomar cualquier valor y no afectará al espectro.

Por otro lado al cancelar el apareamiento isovectorial, se obtienen los resultados de la interacción de un cuerpo con el cuadrupolo-cuadrupolo. En el caso del modelo 1, observamos que las bandas de rotación pasan a tener un comportamiento vibratorio, mientras que en el modelo 2, se observa un inicio de banda de rotación, con los niveles 4^+ y 6^+ muy cercanos, debido al cambio de energías de partícula independiente. Claramente, la presencia de las energías de una sola partícula borra el comportamiento rotacional $SU(3)$ de la interacción puramente cuadrupolar, y en presencia de apareamiento isovectorial, el patrón rotacional no se recupera.

4.1.2. $A=44$.

Ahora, analizamos los resultados obtenidos para los núcleos con masa $A = 44$. Como se mencionó anteriormente, los Hamiltonianos tienen los mismos parámetros que en $A = 42$, pero esta vez la diferencia es que se tiene $N \neq Z$ en ambos núcleos. Se analizan los espectros de baja energía de los núcleos hijos y padres.

El espectro energético del ^{44}Sc en ambos modelos, figuras 4.7 y 4.8, dan resultados interesantes, ya que al considerar los Hamiltonianos con la intensidad máxima para ambos apareamientos, el estado base 2^+ experimental no se obtiene,

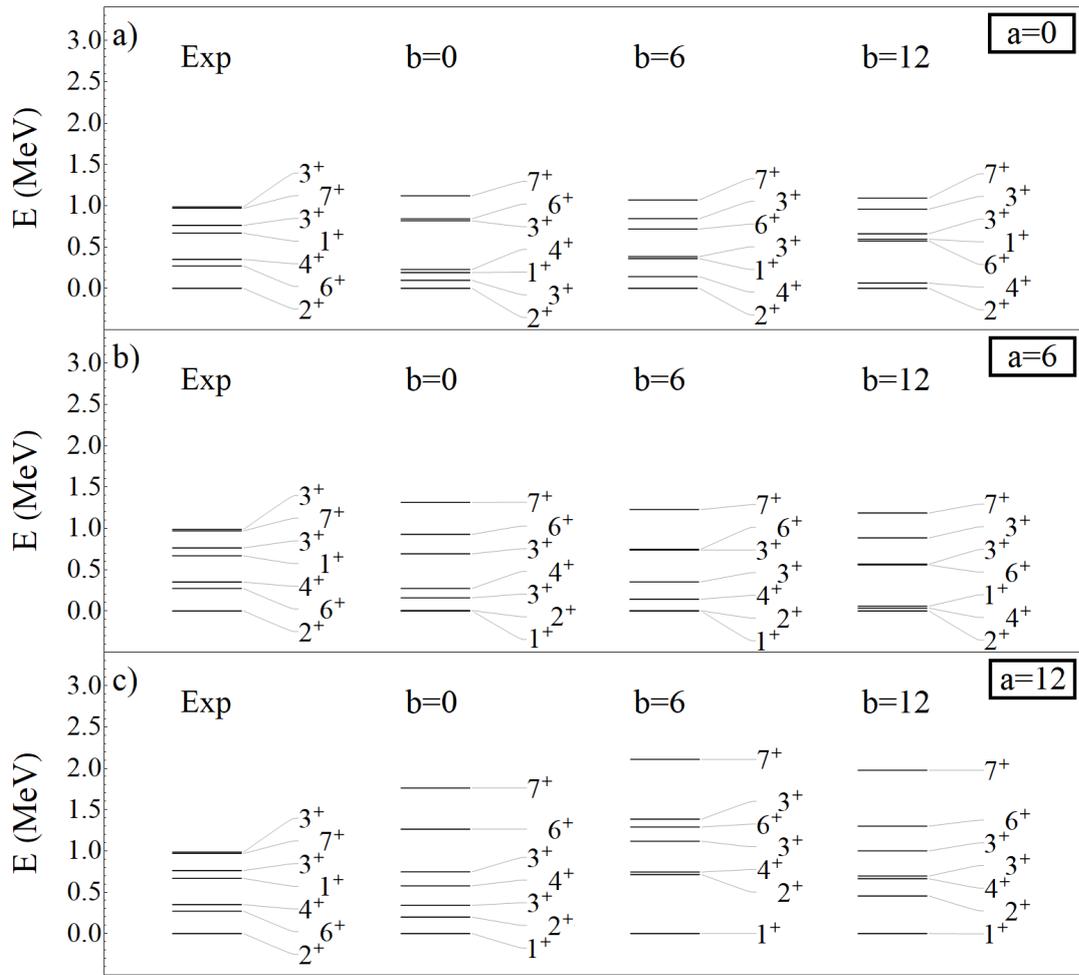


Figura 4.7: Espectros de energía del ^{44}Sc experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

y se tiene un estado base de momento angular y paridad 1^+ .

Luego se procede a ver lo que pasa al cambiar las intensidades de los apareamientos, donde los resultados son similares a los descritos para masa $A = 42$, ya que en caso de cambiar al mismo tiempo los dos apareamientos, se observa una disminución en las energías del espectro, pero en este caso para $a = b = 0$ se tiene un estado base de 2^+ , que es lo deseado, pero el estado 1^+ es muy bajo en energía respecto al experimental. Luego, en el caso de solo disminuir el apareamiento isoescalar, los espectros comienzan a compactarse y luego se produce una inversión del estado base de 1^+ a 2^+ , en donde el primer estado comenzará aumentar en energía, esto es lo mismo que ocurre en el caso de ^{42}Sc , y se observa cuando $a < b$.

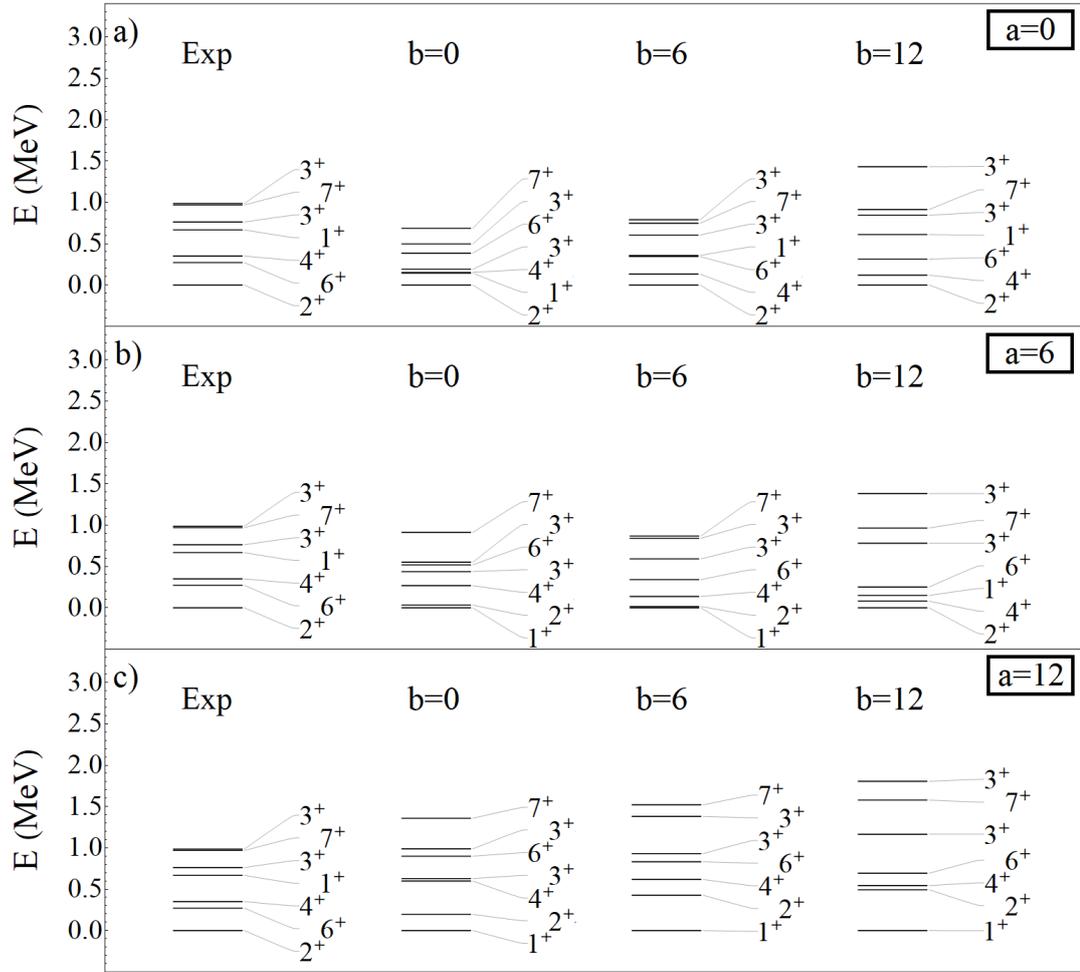


Figura 4.8: Espectros de energía del ^{44}Sc experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

Observamos que la diferencia de energía entre los estados de momento angular par es pequeña en las diferentes gráficas, mientras que los cambios apreciables en el espectro ocurren con los de momento angular impar, esto debido a que el espectro de energía cambia con el apareamiento isoescalar, porque el acoplamiento isoescalar cumple $T = 0$ y $J = 1$, por lo que las proyecciones del momento angular son $J_z = -1, 0, +1$, con esto podemos tener mezclas de las proyecciones $J_z = -1, +1$ de los estados con mayor momento angular, es decir, de los momentos $J = 7, 5, 3$, este produce el mismo efecto cuando observamos la agrupación de estados con un momento angular par, pero en menor medida, ya que también se tiene proyección $J_z = 0$. Por otro lado los resultados dados por la disminución en la intensidad del apareamiento isovectorial, se observa el mismo fenómeno que en

^{42}Sc , ya que hay una compactación en el espectro energético, también el cambio del espectro en los estados de momento angular par, aunque así como en el caso isoescalar se ve un poco la afectación en los estados impares.

La conclusión principal es que la parcial supresión del operador de apareamiento isoescalar da el estado base apropiado, lo que indica que al alejarse de los núcleos con $N = Z$, este apareamiento debe tener poca relevancia, entonces se tiene que la solución óptima es la supresión total del apareamiento isoescalar en los núcleos con $N \neq Z$, aquí observamos que cualquier valor que pueda tomar la intensidad isovectorial $a < b$, da una aproximación aceptable del espectro experimental, en este caso se tendra como elección $a = 0$ y $b = 6$, debido a la secuencia de elección mostrada en los núcleos con $a = 42$, donde se tiene una mejor caracterización en $a = b = 6$, y en esta caso ocurre algo similar.

Proseguimos con el núcleo padre, el cual es el ^{44}Ca , nuevamente solo se tienen neutrones fuera de capa cerrada, por lo que el apareamiento isoescalar es irrelevante y puede tomar cualquier valor.

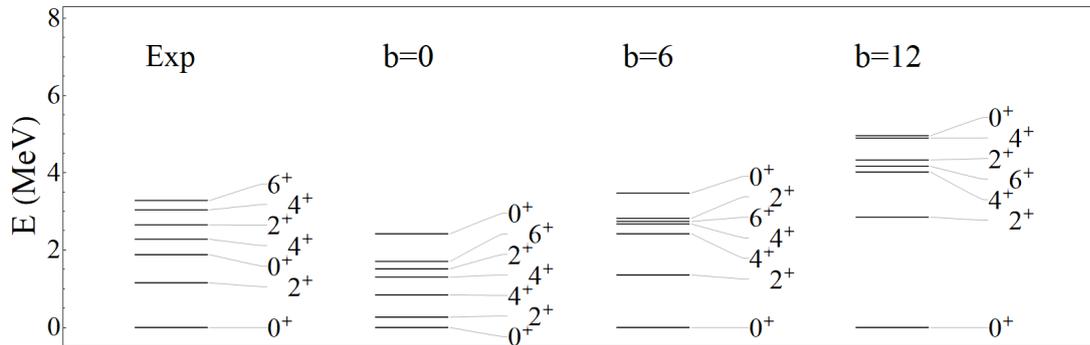


Figura 4.9: Espectros de energía del ^{44}Ca experimentales [185] y con el modelo 1 en función de la intensidad del apareamiento isovectorial b en comparación con los datos experimentales, se muestran para las intensidades $b = 0, 6$ y 12 .

En el ^{44}Ca , los resultados muestran el mismo comportamiento descrito para el ^{42}Ca , figuras 4.9 y 4.10, por lo que nuevamente para este caso una de las conclusiones importantes es que el mejor ajuste ocurre al tener $b = 6$ para ambos modelos, aquí valdría la pena considerar el resultado del ^{44}Sc y afirmar que el valor de la intensidad isoescalar es irrelevante y debe ser suprimida entonces ahora y en el caso del ^{42}Ca el valor tomado es de $a = 0$.

Luego se toma la banda de rotacional principal del ^{44}Ti , esta banda es considerada para ser comparada con el trabajo [18] del cual se tomo el modelo 1, vale

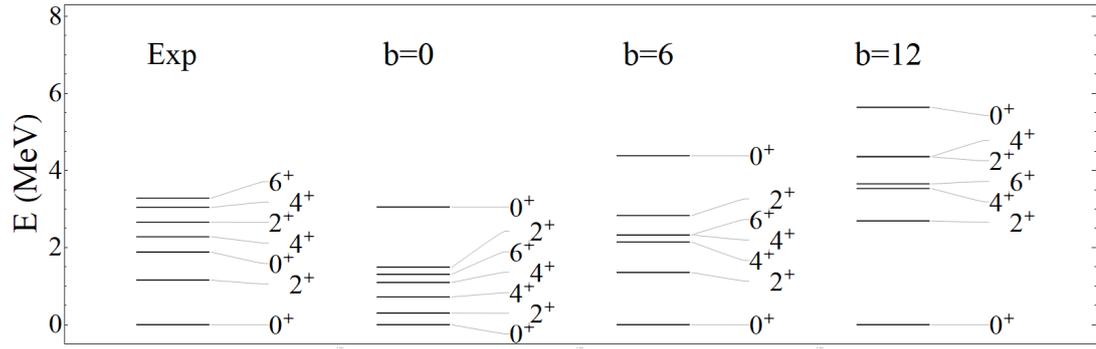


Figura 4.10: Espectros de energía del ^{44}Ca experimentales [185] y con el modelo 2 en función de la intensidad del apareamiento isovectorial b en comparación con los datos experimentales, se muestran para las intensidades $b = 0, 6$ y 12 .

la pena mencionar que este núcleo no presenta la banda de rotación a momento angular bajo, resultado experimental.

El modelo 1 ofrece una reproducción cercana de los datos experimentales seleccionados, fig. 4.11, mientras que el modelo 2 presenta nuevamente un prominente *backbending* entre los estados 4^+ y 6^+ , fig. 4.12. En este caso, los rotadores se ven afectados por el apareamiento isoescalar, porque el núcleo tratado tiene dos protones y dos neutrones, por lo que hay una contribución del acoplamiento protón-neutrón con $T = 0$ y $J = 1$, pero es mínimo. Aquí se tiene el planteamiento del rotor anterior, ya que al decir que se logra reproducir el resultado experimental, es el valor máximo de momento angular la que da esta impresión, de ahí el porqué se pone la palabra “seleccionados”, por lo que el planteamiento original del ^{42}Ca reaparece y la mejor selección recaería en la reproducción del primer estado excitado, este resultado se obtiene cuando $b = 6$ y el valor de a no cambia de sobremanera ningún espectro, cabe mencionar que el papel del apareamiento isoescalar sólo es relevante cuando no se tiene apareamiento isovectorial por lo que los estados de momento angular par solo se ven afectados en demasía por este último. De esto último y para tener una secuencia con lo mostrado hasta el momento, se toma un valor de la intensidad isoescalar de $a = 6$, ya que el ^{44}Ti es un núcleo que tiene $N = Z$.

De aquí en adelante se tiene entonces que los resultados óptimos en la descripción de espectros y/o bandas rotacionales, serán observados cuando $a = b = 6$ en los núcleos con $N = Z$ y $a = 0$ con $b = 6$ para $N \neq Z$.

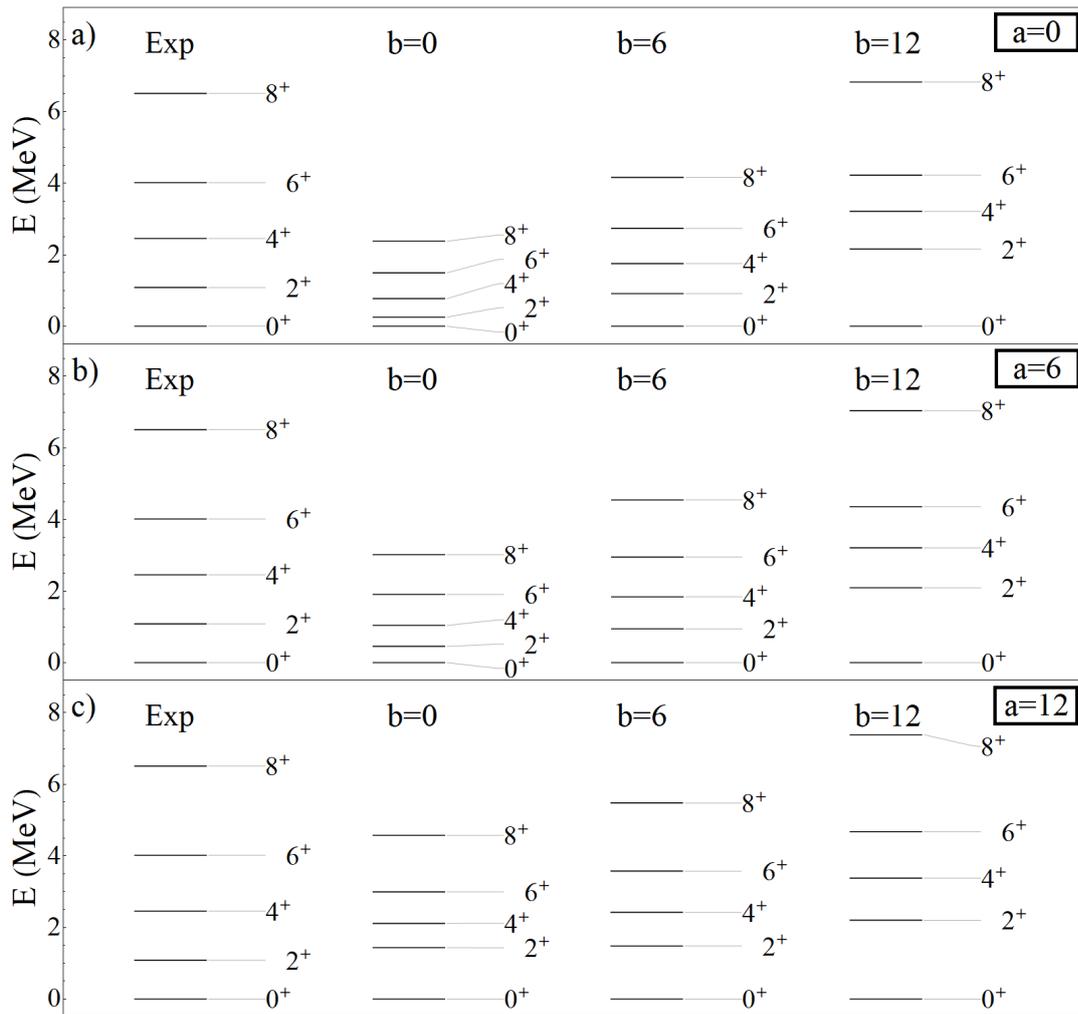


Figura 4.11: Banda rotacional del ^{44}Ti experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

4.1.3. $A=46$.

A continuación se muestran los resultados correspondientes a la masa $A = 46$, al realizar un análisis similar a los núcleos anteriores, se muestran los resultados de los espectros de energía de los núcleos involucrados en las transiciones GT $^{46}\text{Ti} \rightarrow ^{46}\text{V}$, aquí el núcleo padre es también del que se analizará su banda rotacional principal.

En el caso del espectro de energía del ^{46}V , figuras 4.13 y 4.14, los resultados obtenidos muestran la misma fenomenología descrita anteriormente para ambos modelos, en primer lugar, cuando la intensidad de los apareamientos disminuye simultáneamente, las energías del espectro se compactan.

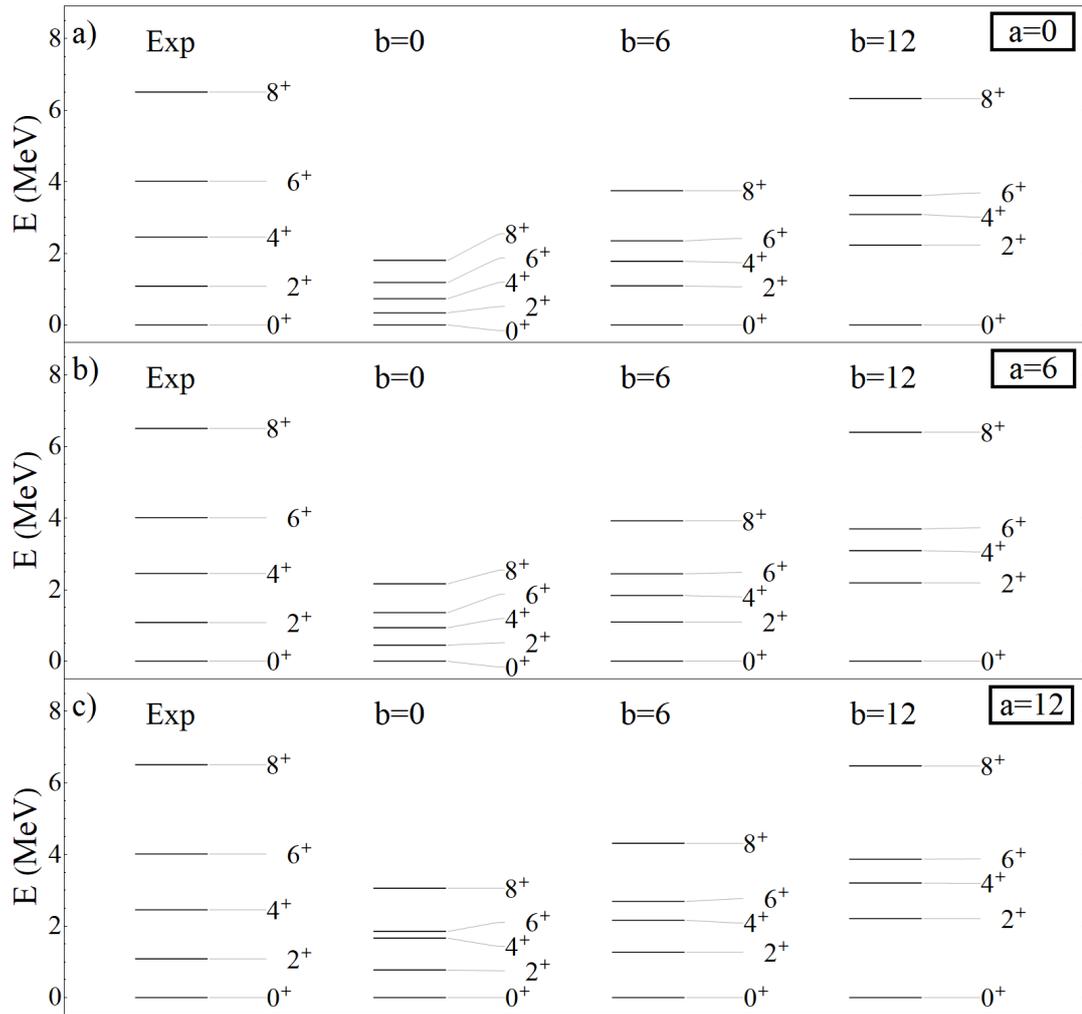


Figura 4.12: Banda rotacional del ^{44}Ti experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

Luego, al reducir el apareamiento isoescalar, los estados con un momento angular par no presentan cambios significativos, mientras que los estados con un momento angular impar comienzan a comprimirse, tal como se observó anteriormente, a tal punto de que el estado 1^+ también se acerca al estado base 0^+ . Finalmente, al cambiar los valores de la intensidad del apareamiento isovectorial, el espectro compacta tanto los estados pares como impares, esto demuestra que el efecto de que este apareamiento es muy importante y no puede ser despreciado en ningún caso.

Un diferencia significativa en ambos modelos es el hecho de que en el primero, aparecen casos donde el estado base es 1^+ cuando $a \gtrsim b$, esto indica que el

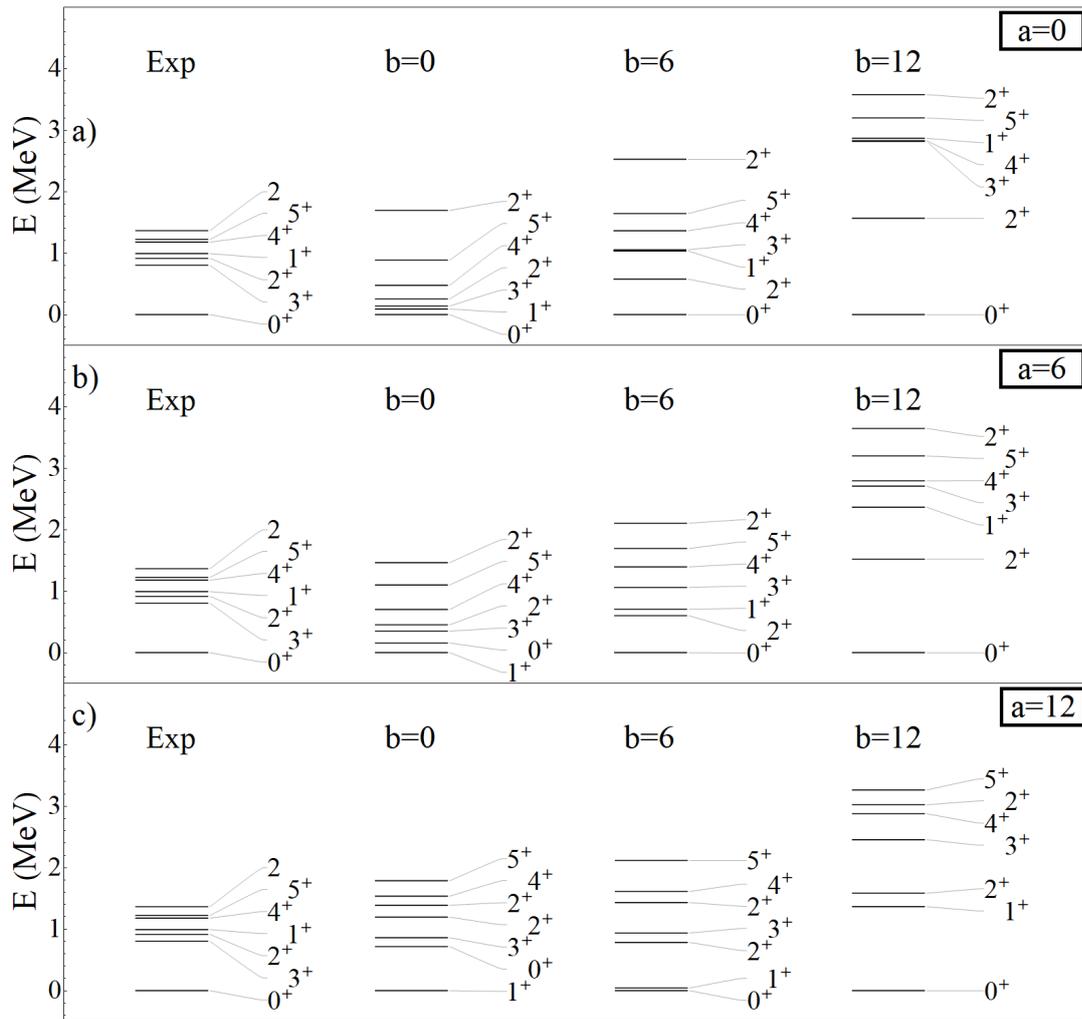


Figura 4.13: Espectros de energía del ^{46}V experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

modelo es muy susceptible a este operador, mientras que el modelo 2 es más robusto a cambios en el apareamiento isoescalar, presentando en todos los casos el estado base correcto, como se puede observar en las gráficas. Como se mencionó anteriormente los resultados adecuados en ambos modelos se presentan al tener $a = b = 6$, ya que $N = Z$.

Por otro lado tenemos los resultados del núcleo padre ^{46}Ti , donde se tiene que los resultados óptimos cuando $a = 0$ y $b = 6$, ya que es un núcleo en donde $N \neq Z$.

Tenemos resultados distintos en las figuras 4.15 y 4.16, a los descritos con

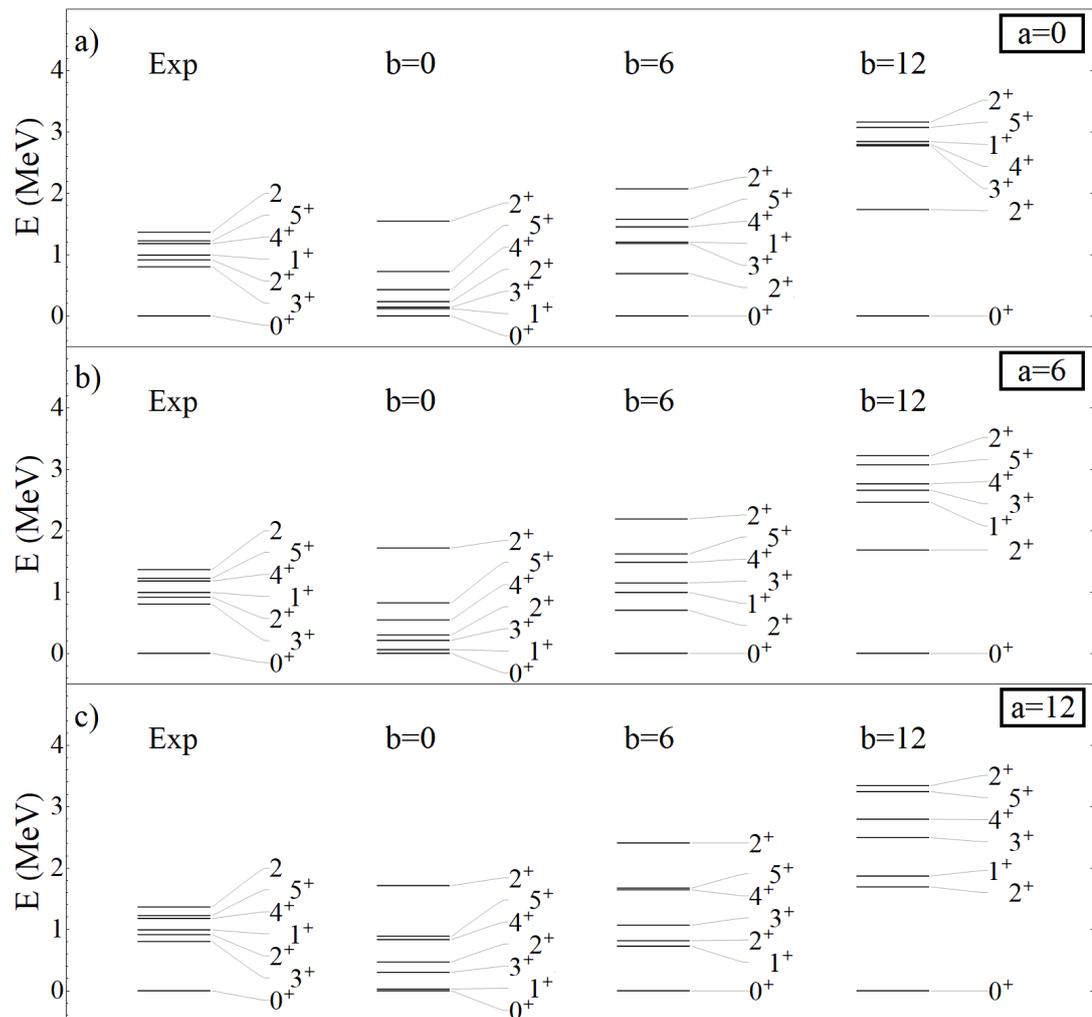


Figura 4.14: Espectros de energía del ^{46}V experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

anterioridad, aunque en este caso al tener 2 protones y 4 neutrones se pueden tener acoplamientos protón-neutrón, los cuales no están presentes en los calcios, por lo que en ambos modelos es posible apreciar de manera débil el efecto del apareamiento isoescalar, donde al fijar el apareamiento isovectorial, el espectro se compacta al disminuir a , esto es más notorio en el modelo 1, ya que como se dijo anteriormente, este es más susceptible a este operador. Los datos experimentales no tienen un comportamiento rotacional, por lo que tenemos que el modelo 1 ofrece una mejor descripción de este espectro al tener el Hamiltoniano “óptimo” para este caso, al disminuir la intensidad de ambos apareamientos, estos espectros comienzan a compactarse en todos los casos tratados. En el modelo 2, nuevamente

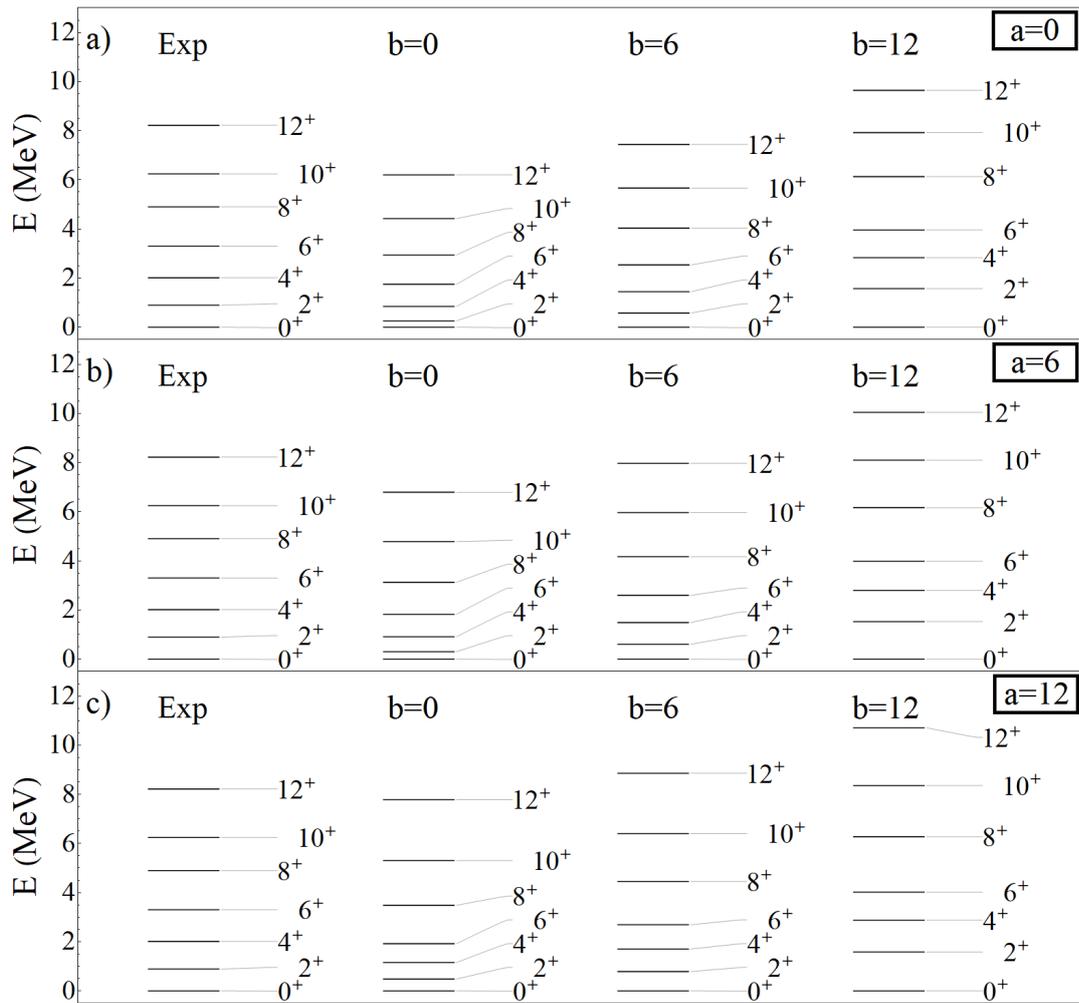


Figura 4.15: Banda rotacional del ^{46}Ti experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

se presenta un pronunciado *backbending*, también se observa una mejor descripción, de la compresión de las energías cuando no hay apareamientos, esto se debe a que solo la interacción cuadrupolo-cuadrupolo y las energías de un solo cuerpo de la interacción $kb3$ son consideradas, donde estas últimas están ajustadas para núcleos pesados.

4.1.4. $A=48$.

Por último, tratamos los núcleos con $A = 48$. Primero discutimos aquellos que participan en el decaimiento GT $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{V}$ y luego se comenta brevemente la banda rotacional del ^{48}Cr .

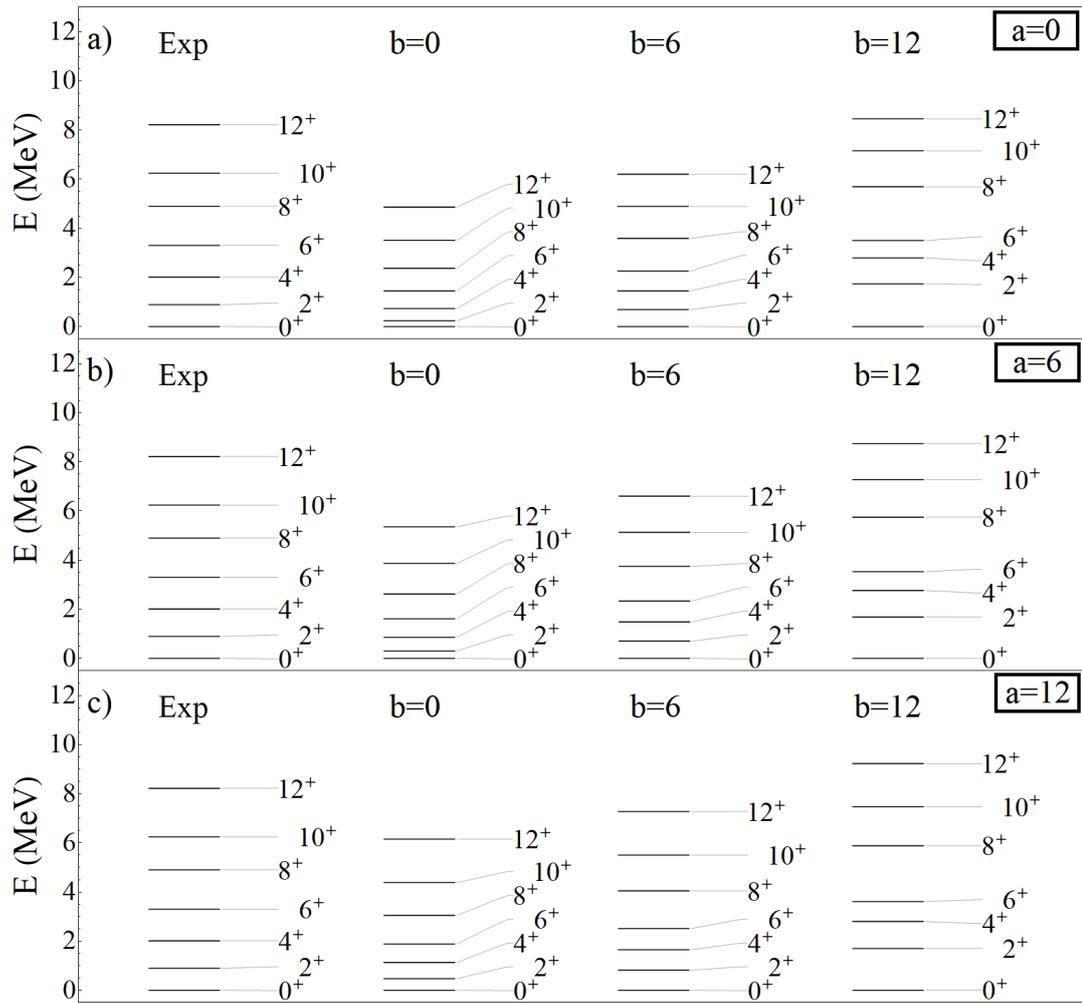


Figura 4.16: Banda rotacional del ^{46}Ti experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

Para el caso del ^{48}V el primer punto a tener en cuenta es que el estado base experimental tiene espín y paridad 4^+ , entonces para ambos modelos, dados en las figuras 4.17 y 4.18, se tienen resultados inesperados, el primero y más visible respecto a los anteriores, es que en ambos modelos al disminuir ambos operadores de apareamiento, los espectros se compactan poco y más aún al fijar el parámetro correspondiente al operador isoescalar y cambiar el isovectorial, el espectro se compacta conforme este último aumenta, lo que es contrario a lo que se tenía en los núcleos más livianos, mientras que al fijar b y disminuir a , se tiene todavía la reducción energética del espectro, esta diferencia con los núcleos anteriores se debe principalmente al estado base, en la mayoría de los casos se tiene al 0^+ , exceptuando al ^{44}Sc y a este el ^{48}V , esto se debe a que la construcción del

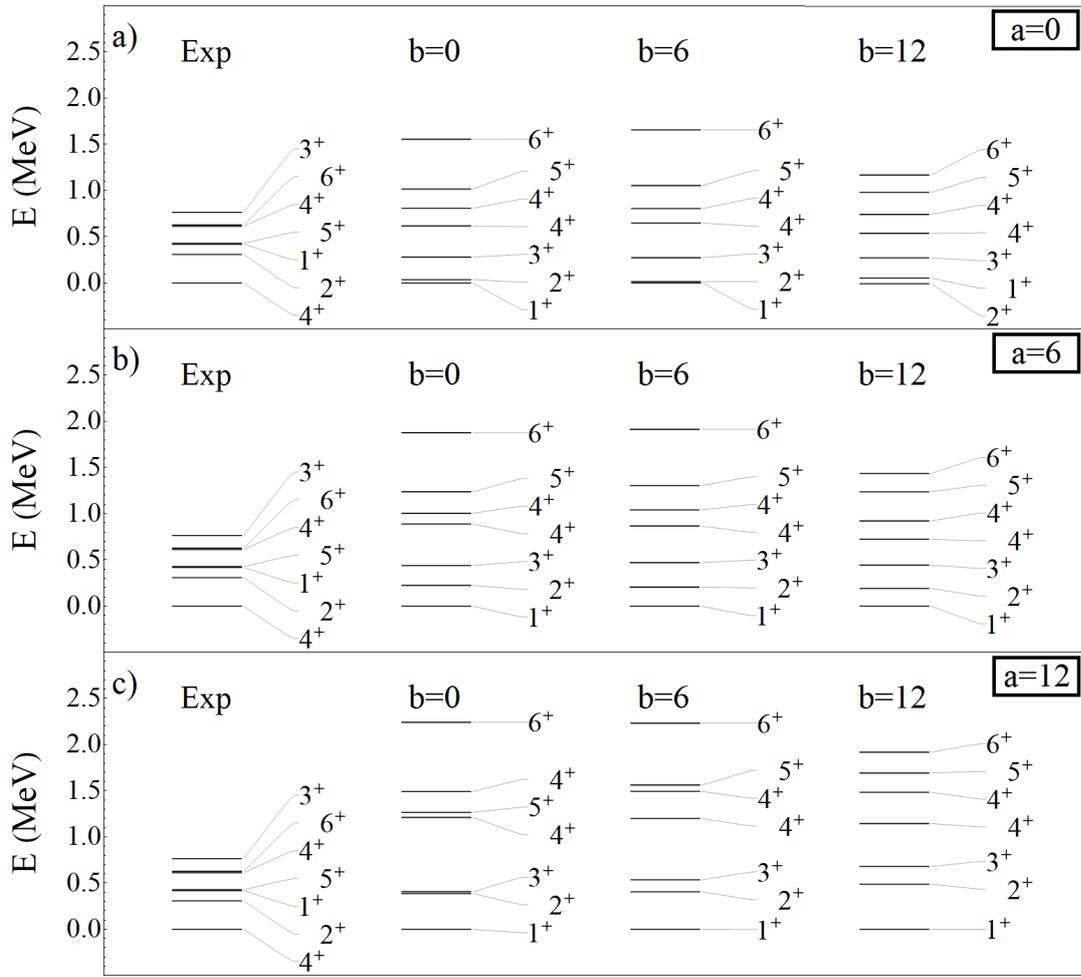


Figura 4.17: Espectros de energía del ^{48}V experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

estado base para estos núcleos con $N \neq Z$ y número de protones y neutrones impar, el protón que no se puede aparear para tener momento angular total cero tiene momento angular total $j_1 \neq 0$, lo mismo ocurre con los neutrones, por lo que el neutrón libre tiene momento angular $j_2 \neq 0$, entonces el espín del núcleo es un vector que tiene valores $j_T = |j_1 - j_2| \leq (j_1 + j_2)$, entonces se tiene que un probable estado base distinto a 0^+ presenta más estabilidad cuando el apareamiento isoescalar es nulo $a = 0$, tal como se observa en las gráficas. Cabe mencionar que aquí se toman como valores óptimos a $a = 0$ y $b = 6$, aunque se difiera un poco en los resultados experimentales, el porqué de esto se debe a la continuidad en la selección de los parámetros.

Para concluir se tiene que el modelo 1 no logra obtener el momento angular

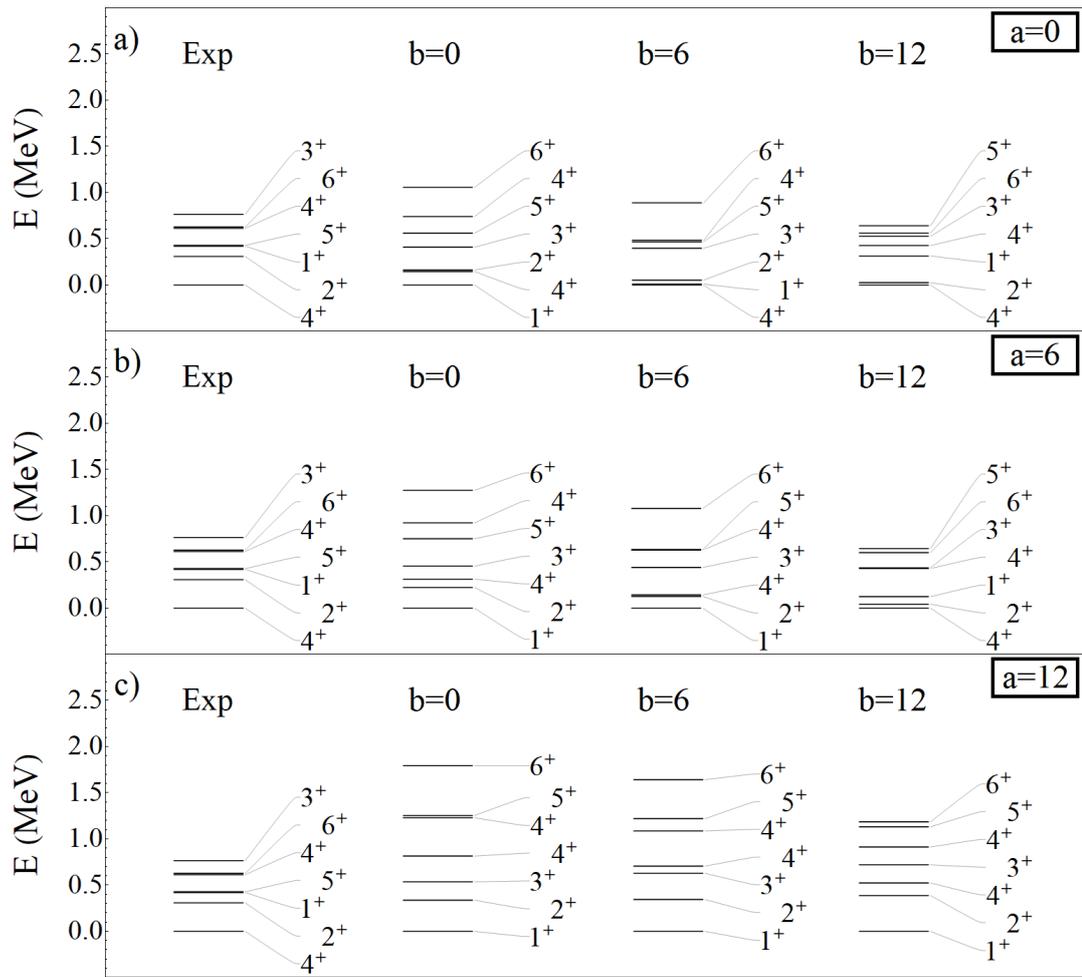


Figura 4.18: Espectros de energía del ^{48}V experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

apropiado para el estado base, mientras que en el caso el modelo 2 logra esto rápidamente al disminuir el valor del apareamiento isoescalar.

Entonces presentamos los espectros para el núcleo padre ^{48}Ti .

En el caso del ^{48}Ti , figs. 4.19 y 4.20, ocurre lo mismo que se ha descrito anteriormente en los núcleos de masa menor, se observa nuevamente que se recupera el comportamiento descrito anteriormente de la compactación de los espectros, cabe mencionar que el operador que tiene más influencia en los espectros hasta este punto es el isovectorial, como se dijo anteriormente, al tener $J = 0$, los estados más afectados por el cambio en este apareamiento son los correspondientes a estados pares.

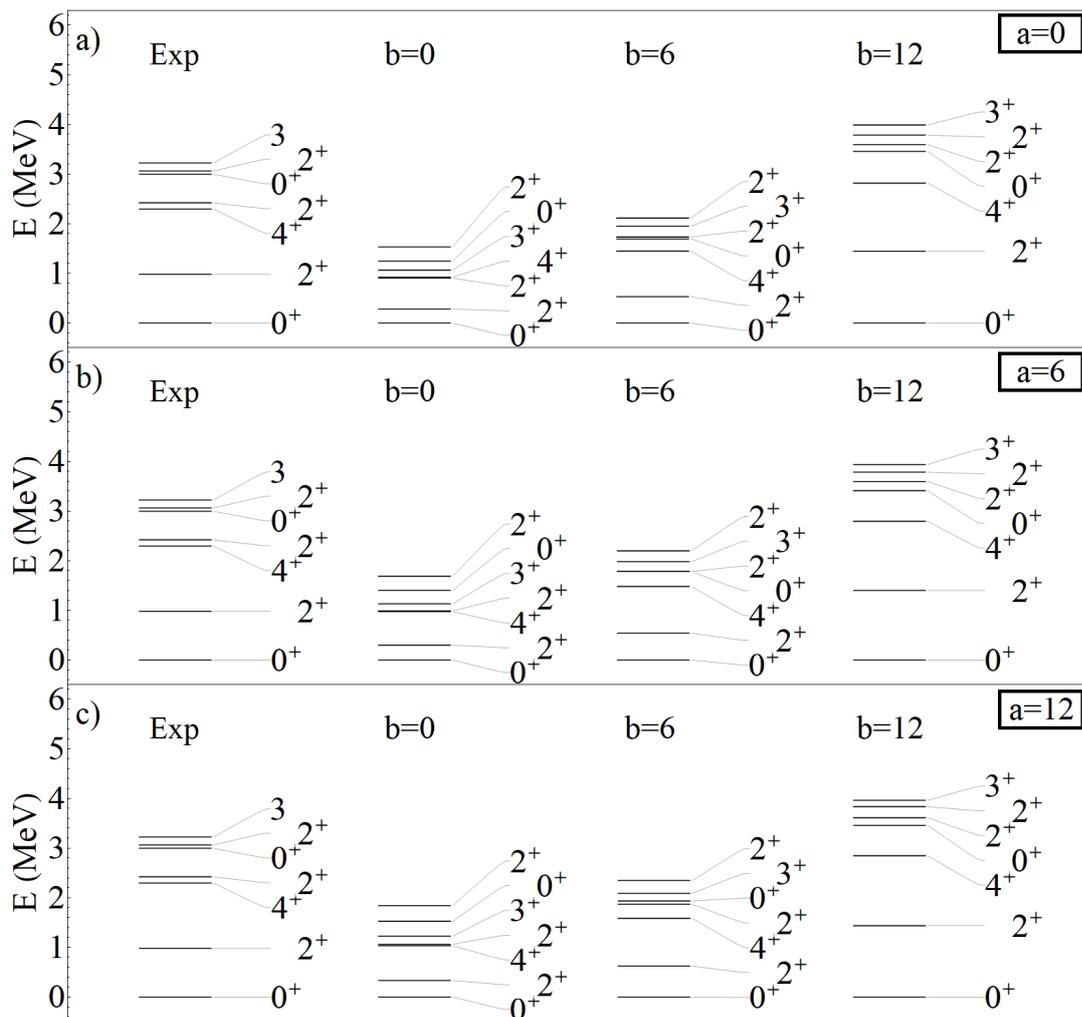


Figura 4.19: Espectros de energía del ^{48}Ti experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

Por último se tiene la banda rotacional del ^{48}Cr , se remarca nuevamente que el poner las bandas rotacionales de ciertos núcleos, es el resultado de la comparación del artículo [18].

En el espectro rotacional del ^{48}Cr , es posible apreciar que los modelos 1 y 2 describen de manera satisfactoria los datos experimentales, figuras 4.21 y 4.22, incluso al nivel de tener un resultado muy admisible en el caso de $J = 16^+$ aunque el modelo 2 vuelve a presentar un *backbending*, siempre que estén los apareamientos, en este caso nos damos cuenta de nuevo de que el apareamiento isovectorial es el que elimina la característica rotacional de los núcleos, observando que si se incluye esta interacción, aparece el *backbending*, mientras que cuando

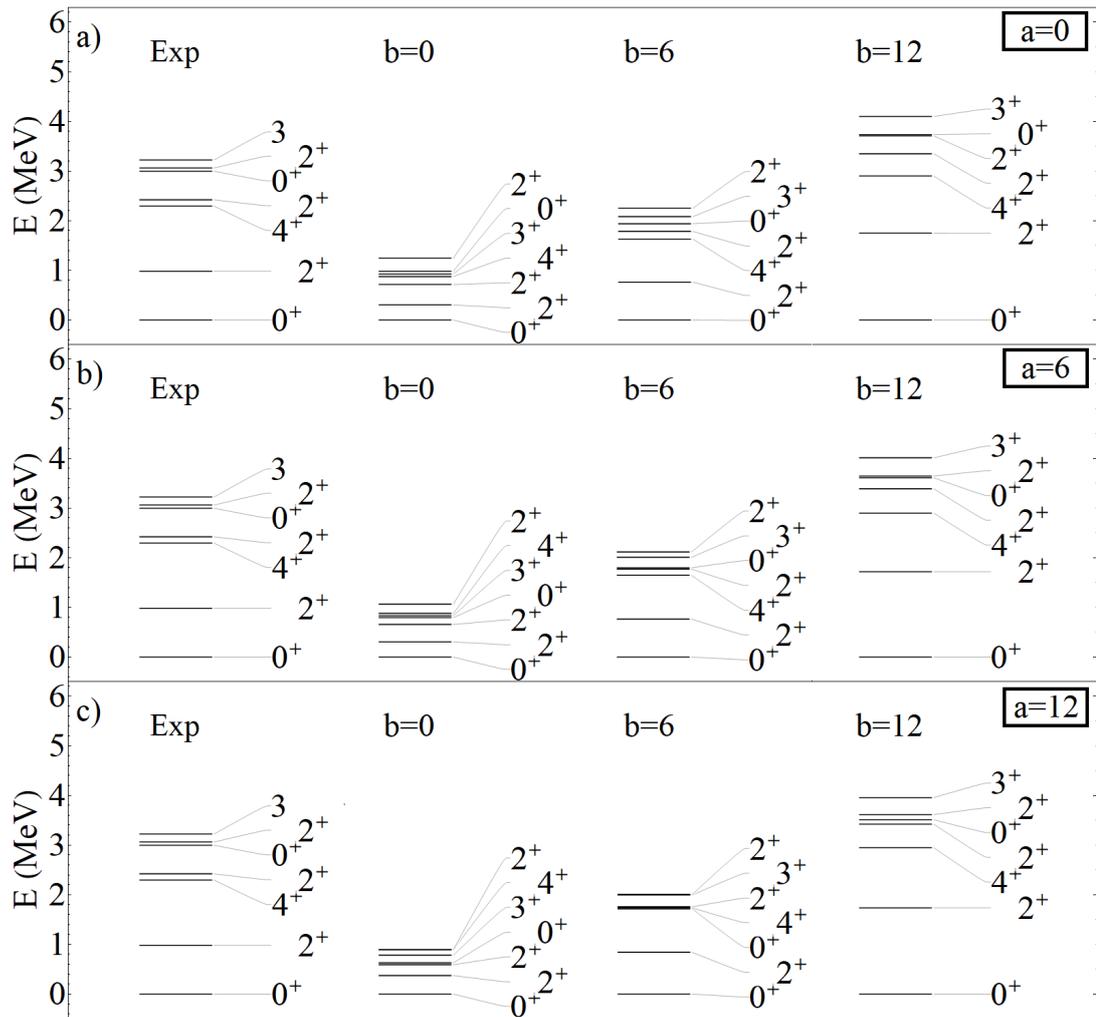


Figura 4.20: Espectros de energía del ^{48}Ti experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades $a, b = 0, 6$ y 12 .

lo eliminamos nos queda solo la parte de rotación y las energías de un cuerpo de la interacción kb_3 , aunque como se ha descrito anteriormente, el espectro de rotación se compacta al disminuir cada uno de los apareamientos.

El hecho de que el patrón de rotación de este núcleo esté bastante bien descrito sin tener que modificar drásticamente las intensidades de apareamiento refleja el hecho de que en un sistema con un gran producto de número de neutrones y protones de valencia $N_p \times N_n$, los efectos de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo son cada vez más dominantes y los cambios en las intensidades de apareamiento tienen un efecto menos importante [22].

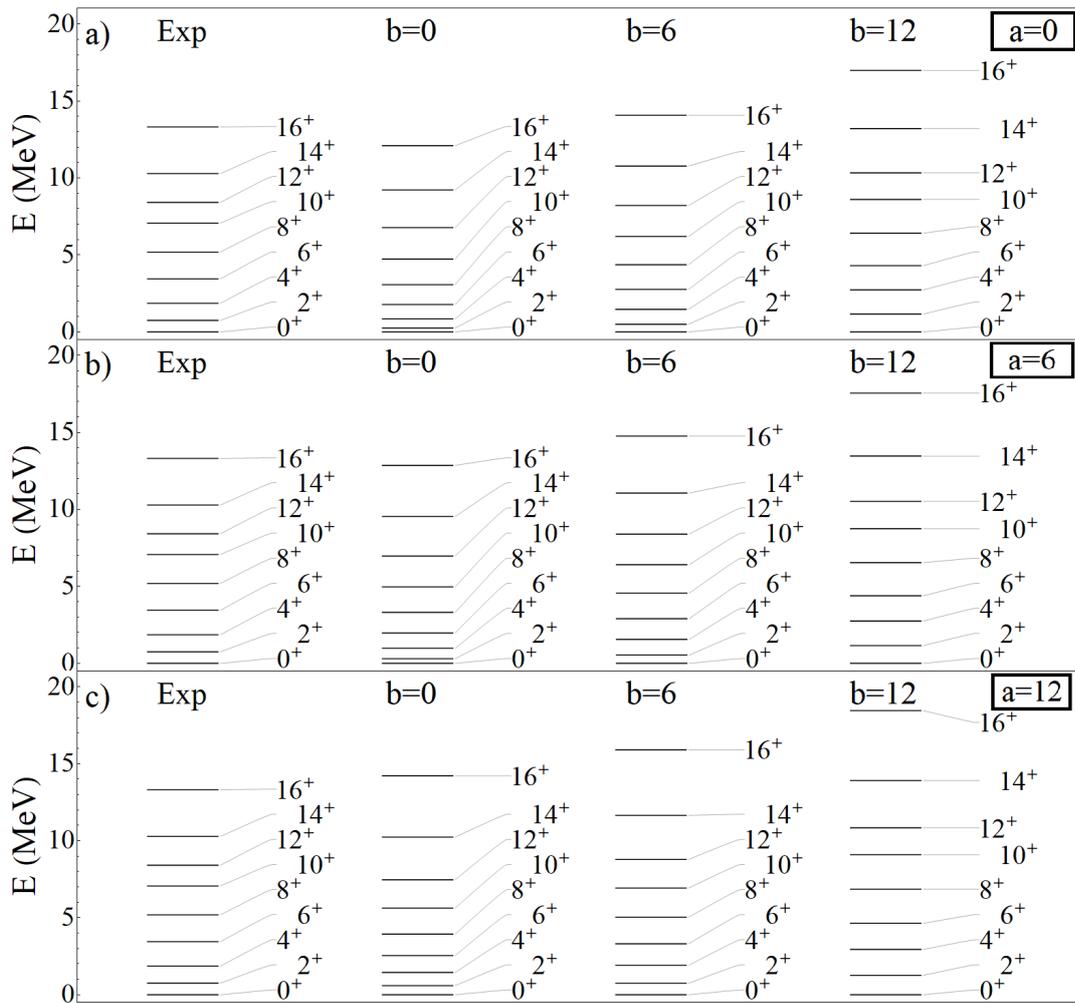


Figura 4.21: Banda rotacional del ^{48}Cr experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 1 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

4.1.5. Valores óptimos del Hamiltoniano.

En la parte anterior nos centraremos en el efecto de variar los parámetros de la intensidad para los términos de apareamiento isoescalar e isovectorial, dejando la intensidad de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo y las energías de partícula independiente sin cambios. Como se señaló anteriormente, restringimos el análisis a núcleos cerca del comienzo de la capa $2p1f$, es decir, con $A = 42 - 48$.

En esta primera parte del estudio, dejamos sin cambios la intensidad cuadrupolo-cuadrupolo y las energías de partícula independiente mientras variamos las dos intensidades de apareamiento. Se observó el comportamiento de los espectros de energía, con esto se obtuvieron los valores óptimos de los Hamiltoniano, por lo

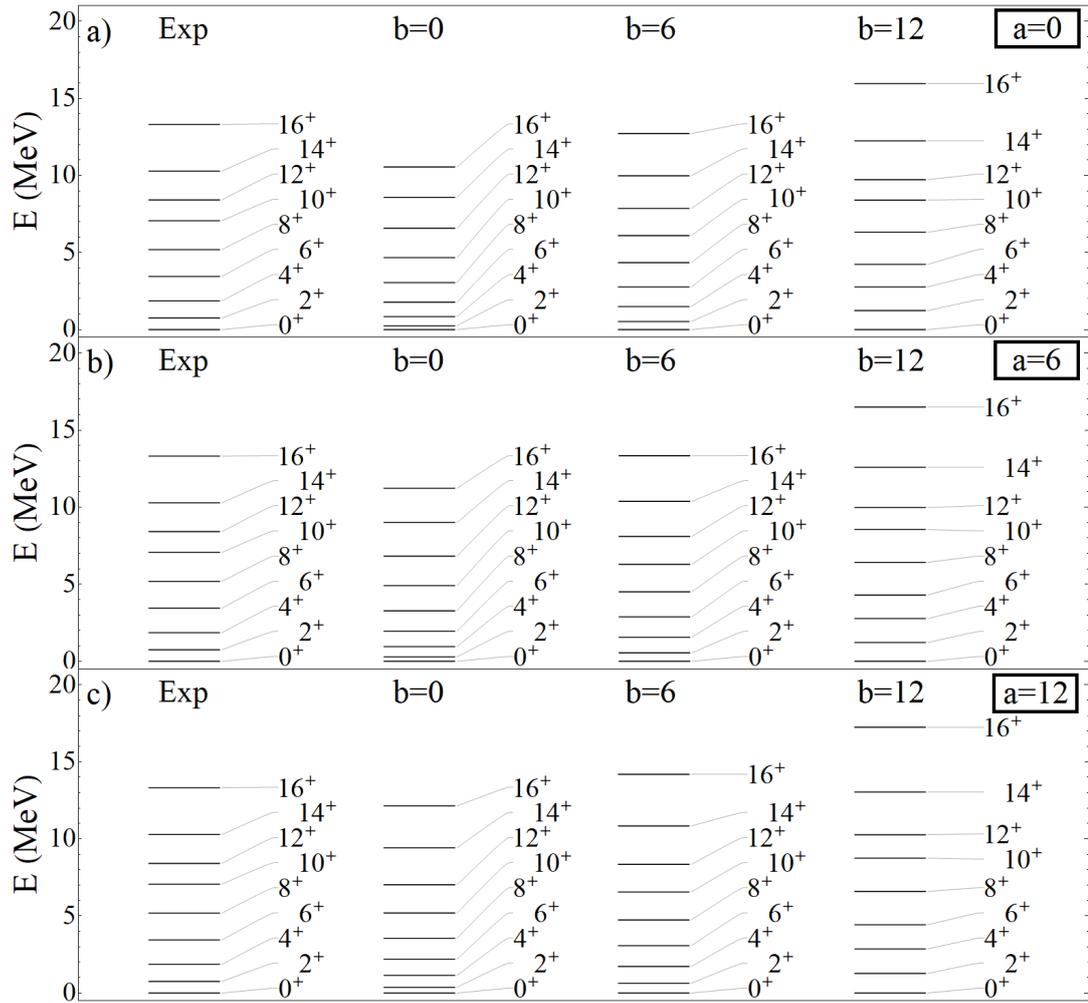


Figura 4.22: Banda rotacional del ^{48}Cr experimentales [185] y en función de las intensidades de apareamiento isoescalar a e isovectorial b en comparación con los datos experimentales. Los resultados se obtienen usando el modelo 2 y se muestran para las intensidades a , $b = 0, 6$ y 12 .

que lo siguiente es ver cómo estos cambios de los intensidades de los apareamientos afectan la descripción de las propiedades de las transiciones. Del análisis, se obtiene que:

- Para núcleos con $N = Z$, el conjunto óptimo de parámetros para núcleos de masa par con $A = 42 - 48$ son: $\chi = -0.065\text{MeV}$, $\alpha = 20$ y $a = b = 6$.
- Cuando $N \neq Z$, los estados base de los núcleos impar-impar obtenidos con ambos Hamiltonianos no coinciden con los datos experimentales debido a la inclusión del apareamiento isoescalar. Por lo tanto, para núcleos con $N \neq Z$, simplemente *desactivamos* el apareamiento isoescalar, *es decir*, establecemos $a = 0$. Esto conduce a una buena descripción general de la parte baja de

los espectros de energía de núcleos que se consideran, proporcionando así la parte inicial para nuestro análisis sobre el impacto de los cambios en las intensidades de apareamiento.

Entonces se presentan los nuevos espectros de energía con el Hamiltoniano que en este trabajo se considera óptimo y en la siguiente sección se observará el papel de los diversos modos de apareamiento en las transiciones GT.

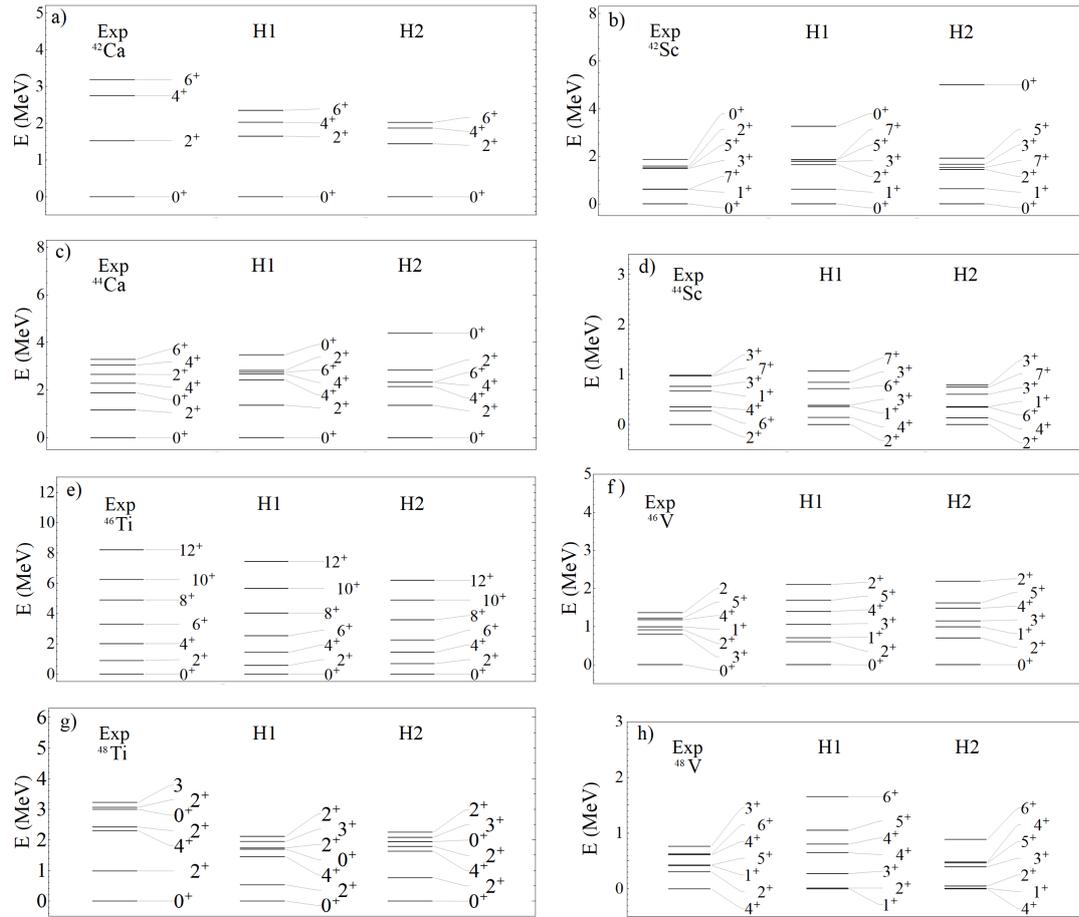


Figura 4.23: Espectros de energía experimentales [185] de los núcleos hijos (a, c, e y g) y padres (b, d, f y h), comparando los resultados obtenidos de los Hamiltonianos óptimos, considerando que $a = b = 6$ para núcleos con $N = Z$ y $a = 0, b = 6$ para núcleos con $N \neq Z$, manteniendo fijo el valor de la intensidad cuadrupolo-cuadrupolo $a \chi = -0.065$.

4.2. Transiciones GT.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para las intensidades de transición Gamow-Teller $B(GT)$ y su dependencia de las intensidades de apareamiento.

miento. Los valores de $B(GT)$ se multiplican por el factor de extinción habitual $(0.74)^2$ [166, 42], esto viene explicado a detalle en el apéndice C. Cabe recordar que para los siguientes cálculos se tomaron los parámetros óptimos dados en la parte anterior, $A = 42 - 48$ son: $\chi = -0.065\text{MeV}$, $\alpha = 20$ y $a = b = 6$.

4.2.1. $A=42$.

Las intensidades de transición $B(GT)$ para $^{42}\text{Ca} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$ se muestran en las figuras 4.24 y 4.25, como funciones de la intensidad de apareamiento isovectorial b , que se aplica tanto al núcleo padre como al hijo, y la intensidad de apareamiento isoescalar a , que solo contribuye a las propiedades del núcleo hijo ^{42}Sc .

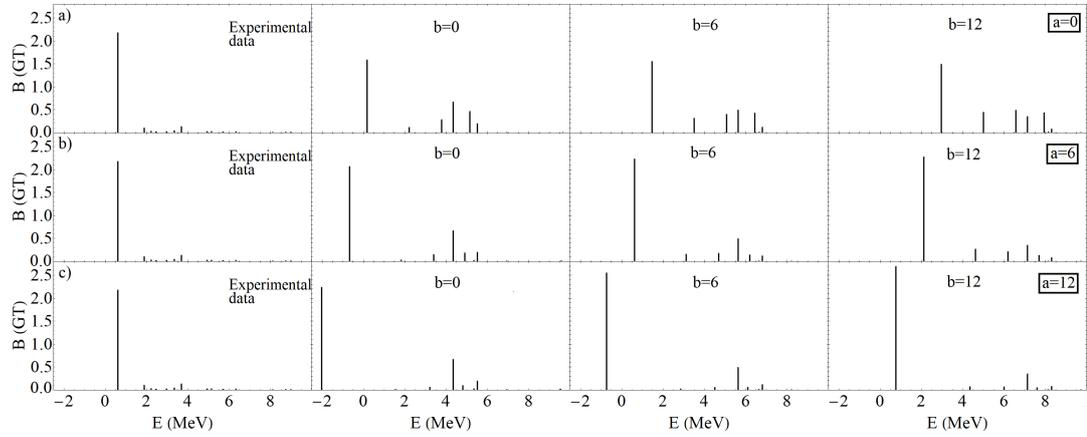


Figura 4.24: Comparación de los resultados experimentales [186] y teóricos usando el modelo 1 para las intensidades de transición $B(GT)$ del $^{42}\text{Ca} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$ en función de la intensidad del apareamiento isovectorial b y la intensidad de apareamiento isoescalar a , que solo actúa en el núcleo hijo.

Cuando $a = b = 6$ (las intensidades óptimas de apareamiento) hay un solo pico fuerte en casi la energía e intensidades experimentales exactas en ambos casos, la única diferencia es que el modelo 1 presenta un pico aún más elevado que el 2. Hay pequeños picos satélites a mayor energía con algo más de intensidad que en los datos experimentales.

Cabe mencionar que en el modelo 1 los valores de ambos tipos de apareamientos, crean menos fragmentación que en modelo 2, haciendo que los picos menos pronunciados tengan su intensidad reducida por parte del primer pico, ubicado en el primer estado 1^+ , mientras que en el caso del modelo 2, el Hamiltoniano óptimo ajusta muy bien a los datos experimentales. A medida que se incrementa a , la intensidad del estado más bajo 1^+ aumenta, aunque lentamente, mientras que la energía de ese estado disminuye en el espectro y eventualmente $a = 12$ se

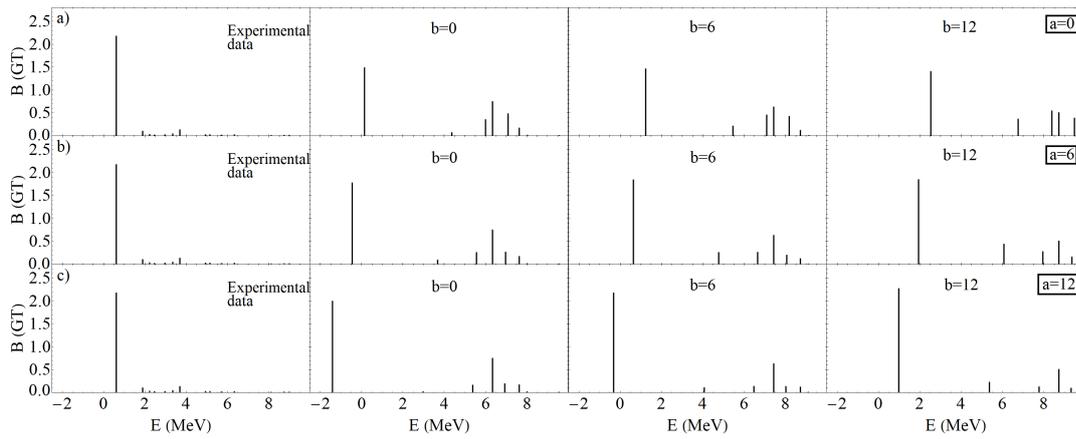


Figura 4.25: Comparación de los resultados experimentales [186] y teóricos usando el modelo 2 para las intensidades de transición $B(GT)$ del $^{42}\text{Ca} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$ en función de la intensidad del apareamiento isovectorial b y la intensidad de apareamiento isoescalar a , que solo actúa en el núcleo hijo.

convierte en el estado base. A medida que aumenta b , para un a dado, el pico principal sube en espectro de energía, pero sin cambios notables en su intensidad. En el eje horizontal, la energía de los estados 1^+ se calcula en relación a la del estado base del núcleo hijo par-par reportado en el experimento, en este caso el primer 0^+ , por esta razón hay valores negativos del primer estado 1^+ . La presencia de un solo pico dominante es una indicación de que estos núcleos tienen una buena simetría $SU(4)$.

Por último se remarca la elección de las energías de partículas independientes es relevante, ya que al tener las realistas de la interacción $kb3$, los resultados mejoran considerablemente y permite una mayor contribución positiva de las interacciones de apareamiento. En este modelo también se observa el desplazamiento del estado 1^+ , en las mismas direcciones que describe el modelo 1.

4.2.2. $A=44$.

Las figuras 4.26 y 4.27 muestran las intensidades $B(GT)$ para $^{44}\text{Ca} \rightarrow ^{44}\text{Sc}$. Como ambos núcleos tienen un exceso de neutrones, establecemos $a = 0$ para ambos y variamos la intensidad de apareamiento isovectorial b solamente.

En este caso, y en contraste con $A = 42$, los datos experimentales muestran varios picos de satélites a energías bastante bajas. Para la intensidad óptima isovectorial $b = 6$, la excitación más baja está aproximadamente cinco veces más poblada que las siguientes, en contraste con los datos experimentales donde la relación es aproximadamente dos. El pico más bajo aumenta en energía a medida

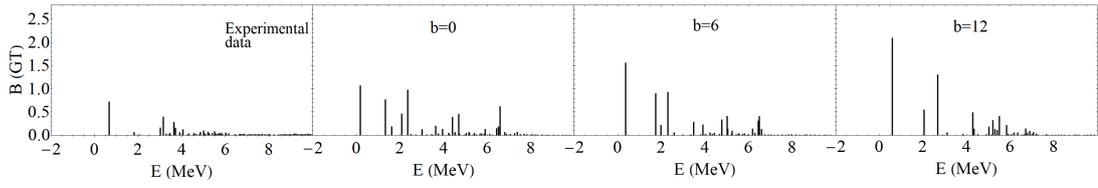


Figura 4.26: Comparación de los resultados experimentales [187] y teóricos usando el modelo 1 para las intensidades de transición $B(GT)$ para $^{44}\text{Ca} \rightarrow ^{44}\text{Sc}$ en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b . Dado que ambos núcleos involucrados tienen excesos de neutrones, la intensidad de apareamiento isoescalar se establece en $a = 0$.

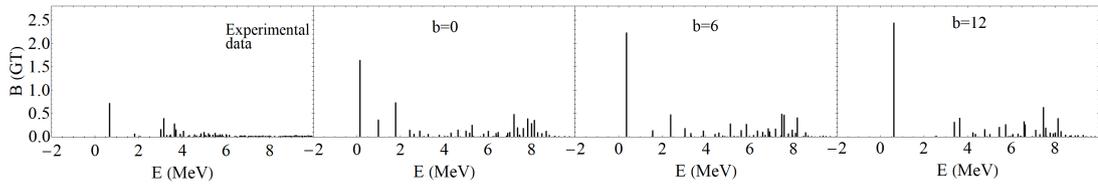


Figura 4.27: Comparación de los resultados experimentales [187] y teóricos usando el modelo 2 para las intensidades de transición $B(GT)$ para $^{44}\text{Ca} \rightarrow ^{44}\text{Sc}$ en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b . Dado que ambos núcleos involucrados tienen excesos de neutrones, la intensidad de apareamiento isoescalar se establece en $a = 0$.

que aumenta b y se vuelve progresivamente más dominante.

Aunque no es parte del decaimiento GT en $A = 44$, vale la pena comentar brevemente aquí sobre el núcleo $N = Z$ ^{44}Ti . El espectro de ^{44}Ti se muestra en las figuras 4.11 y 4.12, para varias opciones de intensidades de apareamiento isovectorial e isoescalar (dado que tiene $N = Z$, ambos modos de apareamiento son relevantes). El primer punto a tener en cuenta es que, tanto ^{44}Sc y ^{44}Ca , los estados más bajos en energía están bien descritos por el Hamiltoniano óptimo. Sin embargo, a diferencia de ellos, los estados de momento angular más alto están demasiado comprimidos, por lo que en el espectro resultante se elimina aún más el rotor $SU(3)$. Se puede restaurar parcialmente el patrón $SU(3)$ y obtener una mejor descripción general del espectro de energía aumentando la intensidad de apareamiento isovectorial a $b = 12$. Por otro lado, como vemos en las figs. 4.26 y 4.27, un aumento en la intensidad del apareamiento isovectorial conduciría a una pérdida de fragmentación en el patrón correspondiente a las transiciones GT, lo que resultaría en un desacuerdo con los datos experimentales. Por tanto, existe una competencia entre la fragmentación producida por el operador espín-órbita [19] y el apareamiento isovectorial.

4.2.3. $A=46$.

A continuación, se analizan los resultados de las transiciones GT obtenidos para los núcleos con masa $A = 46$. Mientras que el núcleo padre involucrado en la decaimiento GT $^{46}\text{Ti} \rightarrow ^{46}\text{V}$ tiene un exceso de neutrones, el núcleo hijo no. Por lo tanto, se asume $a = 0$ para el núcleo padre y se presentan los resultados como una función del valor a utilizado para describir al núcleo hijo. Además, los resultados se muestran en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b utilizada para ambos núcleos. Estos resultados se muestran en las figuras 4.28 y 4.29.

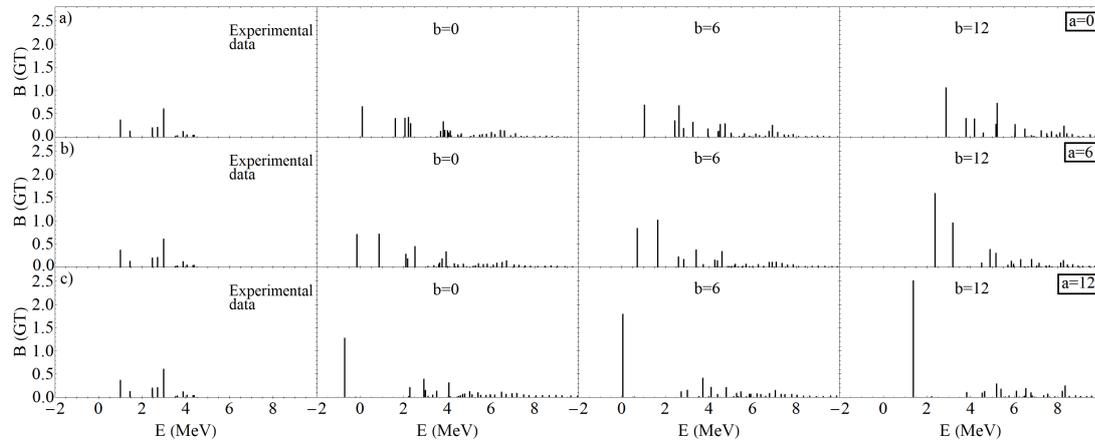


Figura 4.28: Comparación de los resultados experimentales [162] y teóricos usando el modelo 1 para las intensidades de transición de $B(GT)$ para $^{46}\text{Ti} \rightarrow ^{46}\text{V}$ en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b y la intensidad de apareamiento isoescalar a , que solo actúa en el núcleo hijo.

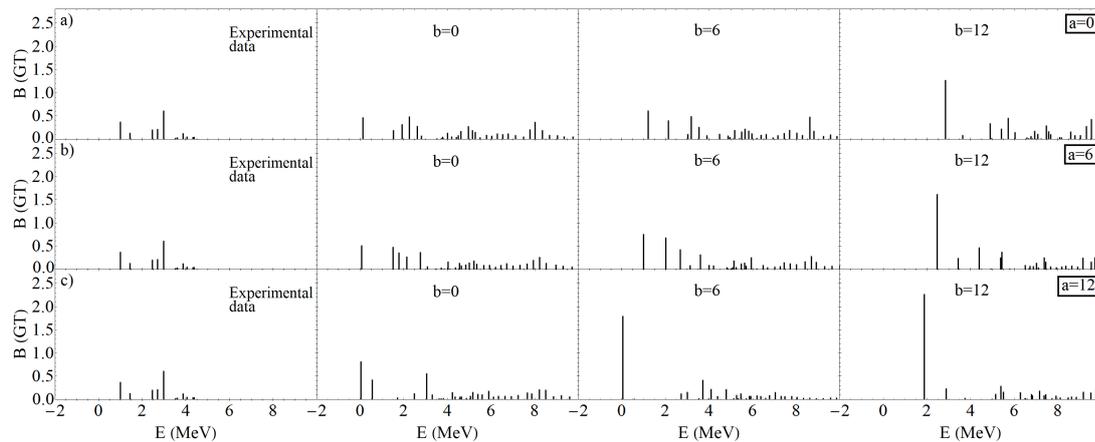


Figura 4.29: Comparación de los resultados experimentales [162] y teóricos usando el modelo 2 para las intensidades de transición de $B(GT)$ para $^{46}\text{Ti} \rightarrow ^{46}\text{V}$ en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b y la intensidad de apareamiento isoescalar a , que solo actúa en el núcleo hijo.

Los resultados son interesantes. Aquí hay una fuerte fragmentación de la intensidad para los parámetros óptimos $a = b = 6$, aunque el estado más bajo tiene un poco más de intensidad que los siguientes. Sin embargo, la intensidad general de estos estados está razonablemente de acuerdo con lo que se ve en el experimento.

Otras características de los resultados que vale la pena señalar son que:

1. Aunque producimos un patrón de fragmentación apropiado, las intensidades individuales para $a = b = 6$ son sustancialmente mayores que en los datos,
2. El efecto de aumentar a es, al igual que para las otras masas estudiadas, enfocar el aumento de la intensidad en el estado más bajo con momento angular 1^+ mientras se reduce su energía y
3. El efecto de aumentar b es, como para otras masas, aumentar la población de los estados más bajos con momento angular 1^+ pero ahora mientras elevan su energía y disminuyen su intensidad, cediéndola al primer estado 1^+ .

Tal como en la discusión de núcleos con masa $A = 44$, también comentamos aquí el patrón de energía rotacional para el núcleo par-par ^{46}Ti . Como puede verse en las 4.15 y 4.16, los estados de momento angular más alto se comprimen con respecto al experimento para el Hamiltoniano óptimo y requerirían un aumento en el apareamiento isovectorial para mejorar la descripción general de esos estados y al hacerlo restaurar parcialmente la simetría rotacional $SU(3)$. Pero como se acaba de señalar, tal aumento de la intensidad de apareamiento isovectorial tiene el efecto de enfocar la intensidad $B(GT)$ en el pico más bajo en energía, lo que también sirve para restaurar parcialmente la simetría $SU(4)$.

Aunque el apareamiento isoescalar solo es de importancia para el núcleo hijo ^{46}V , su aumento también tiene el efecto de restaurar la simetría $SU(4)$, como es evidente en las figuras 4.28 y 4.29, y empeoran la reproducción de los resultados experimentales.

4.2.4. $A=48$.

Finalmente, tratamos las transiciones GT en $A = 48$. En este caso, el decaimiento relevante es $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{V}$, por lo que tanto el núcleo padre como el hijo tienen un exceso de neutrones. Así, en las figuras 4.30 y 4.31, donde se comparan las

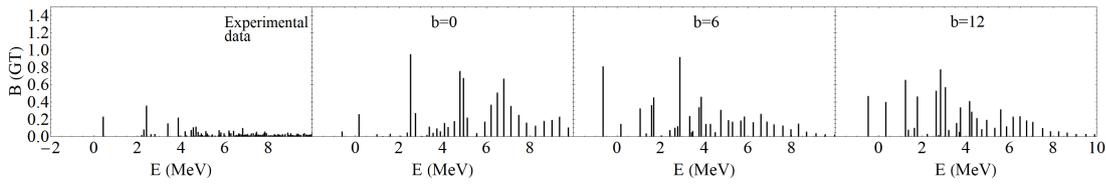


Figura 4.30: Comparación de los resultados experimentales [188] y teóricos usando el modelo 1 para las intensidades de transición $B(GT)$ para $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{V}$ en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b . Dado que ambos núcleos involucrados tienen excesos de neutrones, la intensidad de apareamiento isoescalar se establece en $a = 0$ para ambos.

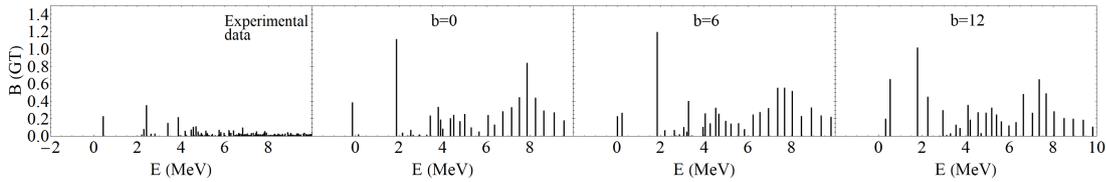


Figura 4.31: Comparación de los resultados experimentales [188] y teóricos usando el modelo 2 para las intensidades de transición $B(GT)$ para $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{V}$ en función de la intensidad de apareamiento isovectorial b . Dado que ambos núcleos involucrados tienen excesos de neutrones, la intensidad de apareamiento isoescalar se establece en $a = 0$ para ambos.

tasas de transición experimentales y calculadas, el análisis teórico solo se muestra como una función de la intensidad de apareamiento isovectorial b .

Se observa claramente que el modelo 1 no logra reproducir en ningún caso el estado base esperado figs. 4.17, por lo que como se ve en 4.30 los valores en las intensidades sufren cambios drásticos y no tienen una secuencia claramente establecida, por lo que en este caso es más difícil obtener conclusiones.

El modelo 2 con la intensidad isovectorial óptima $b = 6$ produce la excitación de energía más baja 1^+ de acuerdo con el experimento. Sin embargo, el nivel de fragmentación de los datos no se reproduce bien. La intensidad se concentra en un solo pico a 2 MeV, que es donde se encuentra el estado más fuerte en los datos, pero está varias veces más poblado que cualquier otro. A medida que aumenta b , el efecto general es aumentar el nivel de fragmentación en una gama cada vez más amplia de estados, en peor acuerdo con el experimento. En este caso, los parámetros óptimos dan resultados aceptables para los espectros de energía de los núcleos padre e hijo, ninguno de los cuales se extiende a un momento angular particularmente alto.

En el caso de la banda rotacional del ^{48}Cr , donde los datos se extienden a un momento angular alto y cuyos resultados se muestran en la figura 4.21 y 4.22, el Hamiltoniano óptimo da una buena descripción del espectro hasta $J^\pi = 16^+$.

El hecho de que el patrón de rotación de este núcleo esté bastante bien descrito sin tener que modificar drásticamente las intensidades de apareamiento refleja el hecho de que en un sistema con un gran producto del número de neutrones y protones de valencia $N_p \times N_n$, los efectos de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo son cada vez más dominantes y los cambios en las intensidades de apareamiento tienen un efecto menos importante.

Capítulo 5

Conclusiones.

En este trabajo, primero se revisó el papel jugado por las transiciones de Gamow-Teller en la nucleosíntesis estelar y en la decaimiento beta doble, y se resumieron los resultados teóricos obtenidos empleando el modelo de capas nuclear y las técnicas de campo medio durante el último medio siglo. Se introdujo el Hamiltoniano de apareamiento más cuadrupolo y se discutió el papel de la interacción de apareamiento isoescalar.

En la segunda parte de este trabajo, se exploraron los efectos del apareamiento protón-neutrón en núcleos de masa uniforme al comienzo de la capa $2p1f$. El análisis se realizó en el marco del modelo de capas nuclear utilizando un Hamiltoniano parametrizado que contiene no solo apareamiento isoescalar e isovectorial, sino también una interacción cuadrupolo-cuadrupolo que introduce deformación.

El primer paso en este análisis fue la de hacer la elección de los parámetros óptimos para los Hamiltonianos de ambos modelos usados. Esto se hizo centrándose en los parámetros que proporcionaron una descripción óptima de los estados 1^+ a más baja energía en los núcleos de interés, una buena descripción de los otros estados a baja energía de estos núcleos y un patrón de fragmentación óptimo en las transiciones GT. Un resultado significativo de esta parte del análisis fue la constatación de que para los modelos Hamiltonianos restringidos, tal cual como se usaron, se debe *apagar* el apareamiento isoescalar cuando se trata de núcleos que tienen un exceso de neutrones para evitar producir el espín y paridad incorrectos de los estados base en muchos de esos núcleos. Los Hamiltonianos óptimos son capaces de lograr buenos ajustes generales a los datos experimentales tanto para los espectros de energía como para las propiedades de decaimiento GT, aunque sujetos a las limitaciones inherentes a la parametrización relativamente simple que se usó. Los aspectos más destacados son una reproducción precisa de las pro-

propiedades de los estados 1^+ más bajos y una descripción razonable del patrón de fragmentación GT.

Luego variamos las intensidades de apareamiento isoescalar e isovectorial de sus valores óptimos para estudiar sistemáticamente cómo los dos modos de apareamiento afectan primero la sistemática energética y, posteriormente, las propiedades de las transiciones GT de estos núcleos. El análisis se extiende desde $A = 42$ a $A = 48$.

El análisis del efecto sobre las propiedades de transición GT mostró que un aumento en la intensidad del apareamiento isoescalar en aquellos sistemas en los que está activo (núcleos con $N = Z$) enfoca la intensidad GT en el estado 1^+ más bajo mientras reduce su energía. El aumento de la intensidad de apareamiento isovectorial, que siempre está activo, también enfoca la intensidad GT en el estado 1^+ más bajo pero en este caso aumenta su energía.

De este análisis del impacto de los dos modos de apareamiento en los espectros de energía se mostró que los modos de apareamiento isoescalar e isovectorial se centran principalmente en los estados con J impar y los estados con J par, respectivamente. Aumentar la intensidad isoescalar reduce sistemáticamente el primer estado 1^+ y expande el conjunto de estados con J impar. Por el contrario, el aumento de la intensidad de apareamiento isovectorial expande la parte con J par del espectro.

Apéndice A

Elementos de matriz.

A continuación se presenta una breve descripción sobre los elementos de matriz que se usan en el Hamiltoniano.

Se toma la base desacoplada en isospín, por lo que se tienen el siguiente tipo de estados para una y dos partículas $|\pi_i\rangle$, $|\nu_i\rangle$, $|\pi_i\pi_j\rangle$, $|\nu_i\nu_j\rangle$ y $|\pi_i\nu_j\rangle$, los cuales cumplen el formalismo de segunda cuantización por lo que para los Bra se tiene

$$\langle a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} | = \langle | a_{\alpha_{i_1}} a_{\alpha_{i_2}} \dots a_{\alpha_{i_n}}, \quad (\text{A.1})$$

mientras que para los Ket se tiene

$$| a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \rangle = a_{\alpha_{i_n}}^\dagger \dots a_{\alpha_{i_2}}^\dagger a_{\alpha_{i_1}}^\dagger | \rangle \quad (\text{A.2})$$

Donde $| \rangle$ es el estado vacío, y en donde las α simbolizan a los números cuánticos involucrados en el problema a resolver.

A.1. Segunda cuantización.

Del formalismo de segunda cuantización [189, 190, 191, 192] se tiene que los operadores se pueden escribir como operadores de un cuerpo

$$\hat{O} = \sum_{\mu\tau_\mu\nu\tau_\nu} \langle a_{\mu\tau_\mu} | \hat{O} | a_{\nu\tau_\nu} \rangle \hat{a}_{\mu\tau_\mu}^\dagger \hat{a}_{\nu\tau_\nu} \quad (\text{A.3})$$

y operadores de dos cuerpos

$$\widehat{P} = \sum_{\substack{\beta\gamma\mu\nu \\ \tau\beta\tau\gamma\tau\mu\tau\nu}} \langle a_{\beta\tau\beta} a_{\gamma\tau\gamma} | \widehat{P} | a_{\mu\tau\mu} a_{\nu\tau\nu} \rangle \widehat{a}_{\beta\tau\beta}^\dagger \widehat{a}_{\gamma\tau\gamma}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} \widehat{a}_{\mu\tau\mu} \quad (\text{A.4})$$

Los elementos de matriz generales se construyen a partir de estos operadores, primero al aplicar estados de una partícula se tiene para el operador de un cuerpo

$$\begin{aligned} \langle a_{\alpha_i\tau\alpha_i} | \widehat{O} | a_{\alpha_k\tau\alpha_k} \rangle &= \sum_{\mu\tau\mu\nu\tau\nu} \langle a_{\mu\tau\mu} | \widehat{O} | a_{\nu\tau\nu} \rangle \langle a_{\alpha_i\tau\alpha_i} | \widehat{a}_{\mu\tau\mu}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} | a_{\alpha_k\tau\alpha_k} \rangle \\ &= \sum_{\mu\tau\mu\nu\tau\nu} \langle a_{\mu\tau\mu} | \widehat{O} | a_{\nu\tau\nu} \rangle \langle | \widehat{a}_{\alpha_i\tau\alpha_i} \widehat{a}_{\mu\tau\mu}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} \widehat{a}_{\alpha_k\tau\alpha_k}^\dagger | \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y para el de dos cuerpos

$$\begin{aligned} \langle a_{\alpha_i\tau\alpha_i} | \widehat{P} | a_{\alpha_k\tau\alpha_k} \rangle &= \\ \sum_{\substack{\beta\gamma\mu\nu \\ \tau\beta\tau\gamma\tau\mu\tau\nu}} \langle a_{\beta\tau\beta} a_{\gamma\tau\gamma} | \widehat{P} | a_{\mu\tau\mu} a_{\nu\tau\nu} \rangle \langle a_{\alpha_i\tau\alpha_i} | a_{\beta\tau\beta}^\dagger a_{\gamma\tau\gamma}^\dagger a_{\nu\tau\nu} a_{\mu\tau\mu} | a_{\alpha_k\tau\alpha_k} \rangle &= \\ \sum_{\substack{\beta\gamma\mu\nu \\ \tau\beta\tau\gamma\tau\mu\tau\nu}} \langle a_{\beta\tau\beta} a_{\gamma\tau\gamma} | \widehat{P} | a_{\mu\tau\mu} a_{\nu\tau\nu} \rangle \langle | \widehat{a}_{\alpha_i\tau\alpha_i} \widehat{a}_{\beta\tau\beta}^\dagger \widehat{a}_{\gamma\tau\gamma}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} \widehat{a}_{\mu\tau\mu} \widehat{a}_{\alpha_k\tau\alpha_k}^\dagger | \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Se procede a calcular los valores esperados en las últimas igualdades, con el fin de obtener el elemento de matriz, entonces para el de un cuerpo se tiene

$$\begin{aligned} &\langle | a_{\alpha_i\tau\alpha_i} a_{\mu\tau\mu}^\dagger a_{\nu\tau\nu} a_{\alpha_k\tau\alpha_k}^\dagger | \rangle \\ &= \langle | \left(\delta_{\alpha_i\mu} \delta_{\tau\alpha_i\tau\mu} - \widehat{a}_{\mu\tau\mu}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i\tau\alpha_i} \right) \left(\delta_{\alpha_k\nu} \delta_{\tau\alpha_k\tau\nu} - \widehat{a}_{\alpha_k\tau\alpha_k}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} \right) | \rangle \\ &= \langle | \left(\delta_{\alpha_i\mu} \delta_{\tau\alpha_i\tau\mu} \delta_{\alpha_k\nu} \delta_{\tau\alpha_k\tau\nu} - \delta_{\alpha_i\mu} \delta_{\tau\alpha_i\tau\mu} \widehat{a}_{\alpha_k\tau\alpha_k}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} - \right. \\ &\quad \left. \delta_{\alpha_k\nu} \delta_{\tau\alpha_k\tau\nu} \widehat{a}_{\mu\tau\mu}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i\tau\alpha_i} + \widehat{a}_{\mu\tau\mu}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i\tau\alpha_i} \widehat{a}_{\alpha_k\tau\alpha_k}^\dagger \widehat{a}_{\nu\tau\nu} \right) | \rangle \\ &= \delta_{\alpha_i\mu} \delta_{\tau\alpha_i\tau\mu} \delta_{\alpha_k\nu} \delta_{\tau\alpha_k\tau\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

mientras que para el de dos cuerpos

$$\begin{aligned}
& \langle | a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger a_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger a_{\nu \tau_{\nu}} a_{\mu \tau_{\mu}} a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle \\
&= \langle | \left(\delta_{\alpha_i \beta} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\beta}} - \widehat{a}_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \right) \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \left(\delta_{\alpha_k \mu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\mu}} - \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}} \right) | \rangle \\
&= \langle | \left(\delta_{\alpha_i \beta} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\beta}} \delta_{\alpha_k \mu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\mu}} \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} - \delta_{\alpha_i \beta} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\beta}} \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}} - \right. \\
&\quad \left. \delta_{\alpha_k \mu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\mu}} \widehat{a}_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} + \widehat{a}_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}} \right) | \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Con estos resultados se tienen los elementos de matriz en segunda cuantización para una partícula, en el caso del operador de un cuerpo se obtiene el resultado esperado de la teoría, el cual es

$$\langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} | \widehat{O} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} \rangle = \sum_{\mu \tau_{\mu} \nu \tau_{\nu}} \langle a_{\mu \tau_{\mu}} | \widehat{O} | a_{\nu \tau_{\nu}} \rangle \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle \tag{A.9}$$

mientras que para el operador de dos cuerpos al sólo tener estados de una partícula, el elemento predicho es nulo tal que

$$\langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} | \widehat{P} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} \rangle = 0 \tag{A.10}$$

Ahora se consideran estados de dos partículas, se aplican estos estados en los operadores A.3 y A.4 para obtener el elemento de matriz, primero para el operador de un cuerpo se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{O} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle \\
&= \sum_{\mu \tau_{\mu} \nu \tau_{\nu}} \langle a_{\mu \tau_{\mu}} | \widehat{O} | a_{\nu \tau_{\nu}} \rangle \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle \\
&= \sum_{\mu \tau_{\mu} \nu \tau_{\nu}} \langle a_{\mu \tau_{\mu}} | \widehat{O} | a_{\nu \tau_{\nu}} \rangle \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle
\end{aligned} \tag{A.11}$$

y para el operador de dos cuerpos

$$\begin{aligned}
& \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{P} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle = \\
& \sum_{\substack{\beta \gamma \mu \nu \\ \tau_\beta \tau_\gamma \tau_\mu \tau_\nu}} \langle a_{\beta \tau_\beta} a_{\gamma \tau_\gamma} | \widehat{P} | a_{\mu \tau_\mu} a_{\nu \tau_\nu} \rangle \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{a}_{\beta \tau_\beta}^\dagger \widehat{a}_{\gamma \tau_\gamma}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_\nu} \widehat{a}_{\mu \tau_\mu} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle = \\
& \sum_{\substack{\beta \gamma \mu \nu \\ \tau_\beta \tau_\gamma \tau_\mu \tau_\nu}} \langle a_{\beta \tau_\beta} a_{\gamma \tau_\gamma} | \widehat{P} | a_{\mu \tau_\mu} a_{\nu \tau_\nu} \rangle \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \widehat{a}_{\beta \tau_\beta}^\dagger \widehat{a}_{\gamma \tau_\gamma}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_\nu} \widehat{a}_{\mu \tau_\mu} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Se calculan los valores esperados de las ecuaciones anteriores por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
& \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \widehat{a}_{\mu \tau_\mu}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_\nu} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle = \\
& \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \left(\delta_{\alpha_j \mu} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_\mu} - \widehat{a}_{\mu \tau_\mu}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \right) \left(\delta_{\nu \alpha_l} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_l}} - \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_\nu} \right) \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle = \\
& \langle | \left[\delta_{\alpha_j \mu} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_\mu} \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} - \delta_{\alpha_i \mu} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_\mu} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} + \widehat{a}_{\mu \tau_\mu}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \right] \times \\
& \times \left[\delta_{\nu \alpha_l} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_l}} \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger - \delta_{\nu \alpha_k} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_k}} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger + \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_\nu} \right] | \rangle = \\
& \langle | \delta_{\alpha_j \mu} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_l} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_l}} \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger - \delta_{\alpha_j \mu} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_k} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_k}} \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \\
& - \delta_{\alpha_i \mu} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_l} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_l}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger + \delta_{\alpha_i \mu} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_k} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_k}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger | \rangle = \\
& \delta_{\alpha_j \mu} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_l} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_l}} \delta_{\alpha_i \alpha_k} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\alpha_k}} - \delta_{\alpha_j \mu} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_k} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_k}} \delta_{\alpha_i \alpha_l} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\alpha_l}} \\
& - \delta_{\alpha_i \mu} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_l} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_l}} \delta_{\alpha_j \alpha_k} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_{\alpha_k}} + \delta_{\alpha_i \mu} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_\mu} \delta_{\nu \alpha_k} \delta_{\tau_\nu \tau_{\alpha_k}} \delta_{\alpha_j \alpha_l} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_{\alpha_l}}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

y

$$\begin{aligned}
& \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \widehat{a}_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}} \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle = \\
& \langle | \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \left(\delta_{\alpha_j \beta} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_j}} - \widehat{a}_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \right) \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \left(\delta_{\mu \alpha_l} \delta_{\tau_{\mu} \tau_{\alpha_l}} - \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}} \right) \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger | \rangle = \\
& \langle | \left[\delta_{\alpha_j \beta} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_j}} \left(\delta_{\gamma \alpha_i} \delta_{\tau_{\gamma} \tau_{\alpha_i}} - \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \right) - \right. \\
& \quad \left. \left(\delta_{\beta \alpha_i} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_i}} - \widehat{a}_{\beta \tau_{\beta}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} \right) \left(\delta_{\gamma \alpha_j} \delta_{\tau_{\gamma} \tau_{\alpha_j}} - \widehat{a}_{\gamma \tau_{\gamma}}^\dagger \widehat{a}_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} \right) \right] \\
& \quad \left[\delta_{\mu \alpha_l} \delta_{\tau_{\mu} \tau_{\alpha_l}} \left(\delta_{\alpha_k \nu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\nu}} - \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \right) - \right. \\
& \quad \left. \left(\delta_{\alpha_l \nu} \delta_{\tau_{\alpha_l} \tau_{\nu}} - \widehat{a}_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}}^\dagger \widehat{a}_{\nu \tau_{\nu}} \right) \left(\delta_{\alpha_k \mu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\mu}} - \widehat{a}_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}}^\dagger \widehat{a}_{\mu \tau_{\mu}} \right) \right] | \rangle = \\
& \delta_{\alpha_j \beta} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_j}} \delta_{\gamma \alpha_i} \delta_{\tau_{\gamma} \tau_{\alpha_i}} \delta_{\mu \alpha_l} \delta_{\tau_{\mu} \tau_{\alpha_l}} \delta_{\alpha_k \nu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\nu}} - \delta_{\alpha_j \beta} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_j}} \delta_{\gamma \alpha_i} \delta_{\tau_{\gamma} \tau_{\alpha_i}} \delta_{\alpha_l \nu} \delta_{\tau_{\alpha_l} \tau_{\nu}} \delta_{\alpha_k \mu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\mu}} \\
& - \delta_{\beta \alpha_i} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_i}} \delta_{\gamma \alpha_j} \delta_{\tau_{\gamma} \tau_{\alpha_j}} \delta_{\mu \alpha_l} \delta_{\tau_{\mu} \tau_{\alpha_l}} \delta_{\alpha_k \nu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\nu}} + \delta_{\beta \alpha_i} \delta_{\tau_{\beta} \tau_{\alpha_i}} \delta_{\gamma \alpha_j} \delta_{\tau_{\gamma} \tau_{\alpha_j}} \delta_{\alpha_l \nu} \delta_{\tau_{\alpha_l} \tau_{\nu}} \delta_{\alpha_k \mu} \delta_{\tau_{\alpha_k} \tau_{\mu}}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Con los resultados anteriores se obtienen los elementos de matriz para dos partículas en segunda cuantización, en el caso del operador de un cuerpo se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{O} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle = \\
& \langle a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{O} | a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle \delta_{\alpha_i \alpha_k} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\alpha_k}} - \langle a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{O} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} \rangle \delta_{\alpha_i \alpha_l} \delta_{\tau_{\alpha_i} \tau_{\alpha_l}} - \\
& \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} | \widehat{O} | a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle \delta_{\alpha_j \alpha_k} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_{\alpha_k}} + \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} | \widehat{O} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} \rangle \delta_{\alpha_j \alpha_l} \delta_{\tau_{\alpha_j} \tau_{\alpha_l}}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

mientras que en el caso del operador de dos cuerpos se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{P} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle = \\
& \langle a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} | \widehat{P} | a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} \rangle - \langle a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} | \widehat{P} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle \\
& - \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{P} | a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} \rangle + \langle a_{\alpha_i \tau_{\alpha_i}} a_{\alpha_j \tau_{\alpha_j}} | \widehat{P} | a_{\alpha_k \tau_{\alpha_k}} a_{\alpha_l \tau_{\alpha_l}} \rangle
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Los elementos de matriz encontrados para una y dos partículas se usan para obtener los elementos de matriz para los operadores de uno y dos cuerpos de los operadores que componen el Hamiltoniano.

A.1.1. Cambio de base.

Por último se trata el cambio de base, ya que el cálculo de los elementos de matriz se llevo a cabo a través de un código anterior, el cual sirve como un chequeo

cruzado con los resultados de ANTOINE, el siguiente procedimiento es cambiar los elementos de matriz dados en el esquema M, al esquema J, por lo cual se tiene que hacer la conexión entre ambas bases, tal que

$$|ab; JM; TM_T\rangle = N_{ab}(JT) \left[C_a^\dagger C_b^\dagger \right]_{JM}^{TM_T} |\rangle = N_{ab}(JT) \sum_{m_\alpha m_\beta \tau_\alpha \tau_\beta} C_{j_a m_\alpha j_b m_\beta}^{JM} C_{t_a \tau_\alpha t_b \tau_\beta}^{TM_T} C_a^\dagger C_b^\dagger |\rangle \quad (\text{A.17})$$

Donde

$$N_{ab}(JT) = \frac{\sqrt{1 - \delta_{ab}(-1)^{J+T}}}{1 + \delta_{ab}} \quad (\text{A.18})$$

donde recordamos que $\alpha \equiv (a, m_\alpha, \tau_\alpha)$, $a \equiv (n_a, l_a, j_a, t_a)$ y $\beta \equiv (b, m_\beta, \tau_\beta)$, $b \equiv (n_b, l_b, j_b, t_b)$. En nuestro caso se tiene que $t_a = t_b = 1/2$, por lo que $T = 0, 1$. Entonces podemos tener los siguientes casos

Cuando $T = 1$ se tiene

$$|ab; JM; 11\rangle = N_{ab}(J1) \sum_{m_\alpha m_\beta} C_{j_a m_\alpha j_b m_\beta}^{JM} |\pi_\alpha \pi_\beta\rangle \quad (\text{A.19})$$

$$|ab; JM; 1-1\rangle = N_{ab}(J1) \sum_{m_\alpha m_\beta} C_{j_a m_\alpha j_b m_\beta}^{JM} |\nu_\alpha \nu_\beta\rangle \quad (\text{A.20})$$

$$|ab; JM; 10\rangle = \frac{N_{ab}(J1)}{\sqrt{2}} \sum_{m_\alpha m_\beta} C_{j_a m_\alpha j_b m_\beta}^{JM} (|\pi_\alpha \nu_\beta\rangle + |\nu_\alpha \pi_\beta\rangle) \quad (\text{A.21})$$

Cuando $T = 0$ se tiene

$$|ab; JM; 00\rangle = \frac{N_{ab}(J0)}{\sqrt{2}} \sum_{m_\alpha m_\beta} C_{j_a m_\alpha j_b m_\beta}^{JM} (|\pi_\alpha \nu_\beta\rangle - |\nu_\alpha \pi_\beta\rangle) \quad (\text{A.22})$$

Ahora considerando algún operador \widehat{V} , se tienen los siguientes resultados, para $T = 1$.

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j; JM; 11 | \widehat{V} | a_k a_l; J'M'; 11 \rangle &= N_{a_i a_j}(J1) N_{a_k a_l}(J'1) \times \\ &\sum_{m_{\alpha_i} m_{\alpha_j} m_{\alpha_k} m_{\alpha_l}} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{JM} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{J'M'} \langle \pi_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | \widehat{V} | \pi_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j; JM; 1-1 | \widehat{V} | a_k a_l; J'M'; 1-1 \rangle &= N_{a_i a_j}(J1) N_{a_k a_l}(J'1) \times \\ &\sum_{m_{\alpha_i} m_{\alpha_j} m_{\alpha_k} m_{\alpha_l}} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{JM} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{J'M'} \langle \nu_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | \widehat{V} | \nu_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j; JM; 10 | \widehat{V} | a_k a_l; J'M'; 10 \rangle &= \frac{N_{a_i a_j}(J1) N_{a_k a_l}(J'1)}{2} \times \\ &\sum_{m_{\alpha_i} m_{\alpha_j} m_{\alpha_k} m_{\alpha_l}} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{JM} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{J'M'} \left(\langle \pi_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | \widehat{V} | \pi_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle + \langle \pi_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | \widehat{V} | \nu_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle + \right. \\ &\left. \langle \nu_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | \widehat{V} | \pi_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle + \langle \nu_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | \widehat{V} | \nu_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Y con $T = 0$

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j; JM; 00 | \widehat{V} | a_k a_l; J'M'; 00 \rangle &= \frac{N_{a_i a_j}(J0) N_{a_k a_l}(J'0)}{2} \times \\ &\sum_{m_{\alpha_i} m_{\alpha_j} m_{\alpha_k} m_{\alpha_l}} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{JM} C_{j_{a_i} m_{\alpha_i} j_{a_j} m_{\alpha_j}}^{J'M'} \left(\langle \pi_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | \widehat{V} | \pi_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle - \langle \pi_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} | \widehat{V} | \nu_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle - \right. \\ &\left. \langle \nu_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | \widehat{V} | \pi_{\alpha_k} \nu_{\alpha_l} \rangle + \langle \nu_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j} | \widehat{V} | \nu_{\alpha_k} \pi_{\alpha_l} \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

El cálculo de los elementos de matriz se hace con ayuda de un programa ya que se cuentan con los valores correspondientes en el esquema M , en este caso se hizo un chequeo cruzado en los elementos de matriz correspondientes a $T = 1$, ya que en estos casos no se tiene una dependencia directa con las proyecciones M y M_T , por lo se espera que estos tres elementos de matriz den el mismo valor cuando se consideran los mismos momentos angulares en cada caso. Con esto se tienen los resultados necesarios para usar ANTOINE, ya que el programa creado, crea el archivo para ser usado directamente con el código.

Apéndice B

Código Antoine.

Para el desarrollo del trabajo se hizo auxilio del código ANTOINE, se usó la versión libre de octubre de 2010. Se enfatiza en cómo se utilizó dicho código, ya que este cuenta con una serie de opciones que puede usar para realizar el cálculo.

ANTOINE trabaja con una serie de Hamiltonianos ya establecidos, por lo que es necesario tener los conocimientos de la creación del propio. Se tiene que las interacciones tienen la siguiente estructura

INTERACCIÓN	A)
1 3 203 205 1001	B)
1.64658 - 3.94780 - 3.16354	C)
.....	
1 8 8 0.300000 0.000000	D)
.....	
0 1 203 203 203 203 0 3	E)
0.00000 - 1.41510 0.00000 - 2.88420	F)
-2.18450 0.00000 - 0.06650 0.00000	
.....	
0 1 205 203 203 203 1 3	
0.56470 0.00000 2.03370	
0.00000 - 0.61490 0.00000	
.....	
0 1 1001 205 1001 203 2 2	
2.06640	
-1.94100	
.....	
0 1 1001 1001 1001 1001 0 1	

0.00000 - 3.26280
 -2.12460 0.00000

Cada letra representa una anotación importante para el entendimiento de la construcción de la interacción

A) En esta parte se coloca el nombre de la interacción, en un texto de no más de 20 caracteres.

B) el primer número corresponde a distinguir si las energías de protón y neutrón son la misma o diferentes, en el primer caso se pondrá 1, mientras que para el otro se usará el 2. El siguiente número corresponde a cuantas capas hay en el espacio de valencia. Los últimos números corresponden a las capas que se usarán, en este caso se tiene que saber que n es el número cuántico radial y comenzando en 0, l el momento angular orbital y j el momento angular total, por lo que la designación numérica de las capas queda como $NLJ = 1000n + 100l + 2j$, como ejemplos se tienen $NLJ = 307$ para la capa $0f_{7/2}$, $NLJ = 1103$ para $1p_{3/2}$ y $NLJ = 511$ para $0h_{11/2}$. Esta notación es la misma para todas las capas en los datos.

C) Estás son las energías de partícula independiente de las capas del espacio de valencia.

D) En esta sección el primer número es la dependencia en la densidad, si el valor es 0 no hay dependencia con la masa, si es 1 se da una dependencia solo para los elementos de matriz de dos cuerpos (TBME, por sus siglas en inglés) y si el valor es 2 se tiene dependencia para TBME y las energías de partícula independiente. Los dos siguientes números, corresponden al número de partículas en el núcleo inerte, para cada tipo de partículas, neutrones y protones respectivamente. Los dos últimos son la dependencia con la masa, factor de escala o atenuamiento.

E) Los dos primeros números representan, el isospín mínimo y máximo. Los siguientes cuatro números corresponden a las capas de partícula independiente que se tienen en los elementos de dos cuerpos. Por último, estos dos números son los momentos angular totales mínimo y máximo, que se obtienen de los elementos de matriz de dos cuerpos.

F) En esta parte van las energías correspondientes a los elementos de matriz de dos cuerpos de la sección E), en esta primer línea van las correspondientes al isospín mínimo, en el ejemplo son las correspondientes a $T = 0$, y comienzan con la que tiene el momento angular mínimo hasta llegar a la de valor máximo, mientras que en la segunda línea van los que corresponden a siguiente isospín.

nota IMPORTANTE: El orden de las capas no tiene importancia. El código verifica que todas las energías individuales estén definidas (si no, se detiene con un mensaje), pero no comprueba si faltan algunos elementos de matriz, y en caso de necesitarlos se pondrán a un valor de 0.0 sin un mensaje.

Con esto se pueden crear las interacciones que se usan en el trabajo, para esto se toman las interacciones por separado en el formato que ANTOINE puede leer, ya que en caso de ser necesario se pueden usar, se crea un programa que las pueda sumar e incluir los parámetros de los Hamiltonianos, con lo que obtenemos los Hamiltonianos que se usan para el calculo de los resultados.

Lo anterior sirve para comprender la creación de interacciones, por lo que falta exponer el uso que se le dio a ANTOINE en nuestro caso, para esto se tienen las siguientes platillas en el uso del código, limitadas a lo que se necesitamos.

En el caso del calculo de los espectros de energía y la banda rotacional principal, se tiene

4 0 0	A)
50 0 6	B)
3 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	C)
3 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	
0 0 0	D)
60 0	E)
0 2 4 6 8 10	F)
1 1 2 1 1 1	
60 0.0005 0 0	G)

Para el cálculo de las intensidades de transición, se usa la opción anterior para calcular el estado inicial, para el núcleo padre, por lo que solo se seleccionaría un estado J y su valor, ya que en el caso de las transiciones se tiene que tomar al estado base del núcleo padre y este es diferente en los núcleos que se seleccionaron en este trabajo. Entonces en el caso del calculo de las intensidades de transición se tiene

24 0 0	H)
51 50 0 0 1	I)
3 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	J)
3 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	
0 0 0	
2 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	K)

4 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10
0 0 0

7 0 0	L)
52 51 0 0 1	M)
3 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	N)
3 4 307 1103 305 1101 0 0 0 0 10	
0 0 0	
99 0	
2	O)
1	P)
120 -0.0005 0 0	Q)
20 6 0	R)

A) esta parte se selecciona una de las opciones que puede hacer ANTOINE, en este caso el 4 representa la diagonalización de la interacción, los otros números son marcadores que le sirven a ANTOINE para continuar su ejecución.

B) el primer número representan la unidad donde se guardarán los datos de salida, el siguiente número representa un iniciador del programa, mientras que el último corresponde a los diferentes momentos angulares que se desean calcular.

C) Aquí se tienen las dos siguientes líneas con información similar, la primera corresponde a los neutrones y la segunda a protones, en ambos casos el primer número representa la cantidad de partículas involucradas fuera de capa cerrada; el siguiente número corresponde a la cantidad de capas activas, estas deben de coincidir con las que se encuentran en la interacción que se usa; luego se exponen las capas activas en la notación puesta anteriormente; los siguientes números corresponden a la misma cantidad de capas dadas y en donde en caso de ser 0 indica que la capa está disponible para que las partículas entren y salgan de ella y en caso de ser 1 indica que la capa se debe de llenar siempre; el último número representa el isospín máximo de cada fluido, este puede tener un valor de hasta 10.

D) Estos tres números representan, el valor total de J_z , la paridad total y el isospín total máximo, respectivamente, en este caso J_z sería el valor mínimo de la proyección del momento angular total que se quiere calcular y en las paridades tendrá un valor 0 para las positivas y un 1 para las negativas.

E) El primer número representa el valor de la unidad donde se encuentra la interacción; mientras que el segundo número representa si hay interacción coulumb-

biana entre protones y neutrones, debe de ser 0 si no hay y 1 o 2 para las partículas involucradas.

F) en esta parte van todos los valores de los momentos angulares que se desean calcular, la cantidad de momentos angulares ya fue definida con anterioridad, los momentos angulares deben de ser definidos por el doble de su valor, ya que es la entrada que lee ANTOINE. En la siguiente linea se define la cantidad de estados con un mismo momento angular que se desean calcular.

G) Aquí el primer número representa el número de iteraciones máxima, ya que al ser un método numérico se necesita esta definición en un rango aceptable; el segundo número es una energía de convergencia, este valor al igual que el anterior es una condición de parada ya que si el valor de la energía de una iteración anterior coincide con la nueva energía calculada por un valor entre cero y el definido acá, se detiene el cálculo y no se prosigue, esto con el fin de optimizar el cálculo; Estos dos últimos números indican si se desea guardar una iteración de las anteriores para su uso.

H) Una vez calculado el vector propio del estado 0^+ del núcleo padre se procede a calcular con la opción 24, misma definición que en A), la regla de suma para las transiciones GT (regla de suma de Ikeda).

I) En esta parte se lee la unidad de entrada del vector propio del núcleo padre (50), se guarda el resultado en la unidad en otra unidad (51), lo demás es lo mismo dado en B).

J) En esta parte se define la base del núcleo hijo.

K) En esta parte se define la base del núcleo padre.

L) En esta parte seleccionamos la opción 7, que es la encargada de realizar el calculo de las intensidades de transición, a traves de las funciones de Lanczos de diagonalización, es similar a lo dado en A).

M) en este caso se leen los resultados de la unidad 51, del cálculo de la suma de Ikeda, y con ello se calcula la fragmentación.

N) En esta parte se coloca la base del núcleo hijo para realizar el cálculo de su fragmentación.

O) Como se quiere la transición a los estados 1^+ , se coloca un 2 siguiendo con la notación dada para los estados J .

P) con esto se mantiene un estado con energía mínima para su cálculo con la J dada anteriormente.

Q) Aquí se tiene algo similar a la opción G), pero en este caso se requieren más iteraciones de convergencia y un criterio de no convergencia, por eso el -0.0005, ya que al colocar una convergencia se tendría solo una iteración, esto por que

desde la primera se cumple la regla de suma de Ikeda.

R) Por último se pone una condición de imprimir los resultados cada 20 iteraciones y donde se mantenga 6 estados con la máxima superposición.

Con estas especificaciones se pueden realizar los cálculos usando el código ANTOINE. Entonces lo siguiente es construir las interacciones que se usarán, para lo cual es necesario presentar los modelos que se usarán.

Apéndice C

Regla de selección para intensidades de transición.

Para calcular la intensidad de transición se usa [193]

$$B(J_{ini} \rightarrow J_{fin}; L) = \frac{2J_{fin} + 1}{2J_{ini} + 1} \frac{1}{\left(C_{J_{ini}M_{ini}L0}^{J_{fin}M_{fin}}\right)^2} \left| \langle \alpha_{fin}; J_{fin}M_{fin} | \hat{\mathcal{O}}_0 | \alpha_{ini}; J_{ini}M_{ini} \rangle \right|^2, \quad (\text{C.1})$$

donde se tiene la condición de que si el Clebsch-Gordan es cero, la intensidad de transición es cero, entonces por tener un número par de partículas acopladas a cero y el operador correspondiente también con proyección cero, se tiene el valor del Clebsch-Gordan

$$C_{a0b0}^{c0} = \begin{cases} 0 & , \text{ sí } a + b + c = 2g + 1, \\ \frac{(-1)^{g-c} \sqrt{2c+1} g!}{(g-a)!(g-b)!(g-c)!} \left[\frac{(2g-2a)!(2g-2b)!(2g-2c)!}{(2g+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} & , \text{ sí } a + b + c = 2g \end{cases}, \quad (\text{C.2})$$

donde g es un entero positivo. Se observa que dicho valor es una regla de selección para el cálculo de la intensidad de transición, y en donde se ve que con la base seleccionada inicialmente en las transiciones Gamow-Teller no se obtendrán todos los valores, ya que si se consideran las transiciones que van de un estado con J_{ini} a uno con J_{fin} , y estos cumplen $J_{ini} = J_{fin} = J$, entonces se tiene que la suma es $2J + 1$, por ser dos partículas acopladas, J es entero, esto hace que el Clebsch-Gordan en estos casos sea nulo. Esto ocurre sólo en algunas transiciones Gamow-

Teller y Cuadrupolares eléctricas, siendo solamente visible en las transiciones en las que el estado final es un excitado, un ejemplo se tiene en la siguiente sección.

C.1. Resultados de una y dos partículas en la capa s para intensidades de transición del caso Gamow-Teller.

Se realiza un análisis de las intensidades de transición para una y dos partículas en la capa s , este ejemplo reduce el problema de la regla de selección a la capa s , para esto se analizan los caso de una y luego dos partículas de manera general en transiciones Gamow-Teller, algo similar ocurre en las cuadrupolares eléctricas.

Se tiene que usando estados de la base en su forma explicita ($|n l j m\rangle$) para el análisis de una partícula para transiciones Gamow-Teller en la capa s ,

$$\left\langle 0 0 \frac{1}{2} m_1 \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| 0 0 \frac{1}{2} m_2 \right\rangle = \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}m_2}^{\frac{1}{2}m_1}{}_{10}, \quad (\text{C.3})$$

donde acoplado las partículas a $m_1 = m_2 = 1/2$, se tiene

$$\left\langle 0 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| 0 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \quad (\text{C.4})$$

Por lo tanto al calcular la intensidad de transición se obtiene

$$B\left(\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}; 0\right) = \frac{2(1/2) + 1}{2(1/2) + 1} \frac{1}{\left(C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)^2} \left| \left\langle 0 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| 0 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 = 3, \quad (\text{C.5})$$

este resultado concuerda con la regla de suma de Ikeda.

Ahora en el caso de tener dos partículas y considerando su acoplamiento a proyección de momento angular total cero, el operador se puede separar en cada uno de los espacios para las partículas involucradas, tal que

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ m_1, 0\ 0\ \frac{1}{2}\ m'_1\right) 10 \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ m_2, 0\ 0\ \frac{1}{2}\ m'_2\right) 10 \right\rangle = \\ & \frac{1}{2} \left(\left\langle 0\ 0\ \frac{1}{2}\ m_1 \left| \otimes \left\langle 0\ 0\ \frac{1}{2}\ m'_1 \right| \right) \left(\widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0^{(1)} + \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0^{(2)} \right) \left(\left| 0\ 0\ \frac{1}{2}\ m_2 \right\rangle \otimes \left| 0\ 0\ \frac{1}{2}\ m'_2 \right\rangle \right) \right). \end{aligned} \quad (C.6)$$

Haciendo uso de que se está en la capa s y que se tiene acoplamiento de proyección de momento angular total a cero, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, 0\ 0\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right) 10 \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, 0\ 0\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right) 10 \right\rangle = \\ & \left\langle 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle 0\ 0\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| 0\ 0\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle = (C.7) \\ & \left(C_{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}_{10} + C_{\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}}_{10} \right) \sqrt{3} = 0, \end{aligned}$$

donde se observa que los Clebsch-Gordan que se obtienen del acoplamiento a cero se anulan entre ellos, esto ocasiona que este elemento sea cero, por ende la intensidad de transición también se anula.

Esto debido a que sólo se considera el caso en el que se tiene proyección de momento angular total cero, por otro lado se tiene que esta transición Gamow-Teller sí está permitida, por lo cual la intensidad de transición no puede ser nula, entonces se toma el caso en el que se tiene proyección de momento angular total igual a una, obteniendo

$$\left\langle \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) 11 \left| \widehat{\mathcal{O}}(GT_{\pm})_0 \right| \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) 11 \right\rangle = 2C_{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}_{10} \sqrt{3} = 2 \quad (C.8)$$

Por lo cual

$$B\left(\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}; 1\right) = 6 \quad (C.9)$$

Observamos que para una base construida con proyección de momento angular total igual a uno, la intensidad de la transición es distinta de cero y concuerda con la regla de suma de Ikeda, tal como se espera en este caso, por lo cual se tiene

que para dos partículas se cumple la regla de selección que no permite algunas transiciones Gamow-Teller, esto ocurre de forma similar con algunas intensidades de transición en el cuadrupolo eléctrico.

Este procedimiento es relevante en el caso de querer observar transiciones Gamow-Teller a estados excitados, pero en la experimentación dichas transiciones quedan muy suprimidas, por lo cual sólo se hace mención de la regla de selección.

Apéndice D

Resultados preliminares.

En este apéndice se colocan los resultados usando los parámetros inicialmente seleccionados, mostrando los resultados preliminares para los núcleos padres e hijos.

D.1. $A=42$.

A continuación se muestran los resultados para los núcleos con masa $A = 42$, primero los resultados del núcleo hijo el ^{42}Sc .

En este caso observamos la influencia en ambos modelos del apareamiento isoescalar y como influye enormemente con respecto al apareamiento isovectorial, ya que cuando este último es mucho menor que el primero, el estado base pasa a ser inmediatamente un 1^+ , este mismo resultado se detalla en los resultados generales dados en la parte principal de la tesis pero desde aquí se ve la influencia que tiene este operador en los cálculos iniciales.

Por otro lado se observa, que al tener igual competencia en ambos operadores de apareamiento es decir $a = b = 6$ se tiene también una buena y mejor descripción de los espectros energéticos que los dados por los parámetros dados en el trabajo original [18]. por lo que desde el primer núcleo de manera preliminar podemos observar la posibilidad de hacer este cambio tal como se hizo en los resultados finales.

A continuación sigue el núcleo padre para masas con $A = 42$.

De la misma forma como se presentan los resultados finales en la estructura principal del trabajo, se había observado el comportamiento del ^{42}Ca , donde se fija el objetivo sobre que es lo que se desea de los espectros de energía, esta elección debe de ser basada en que si se quiere tener el espectro a muy baja energía bien

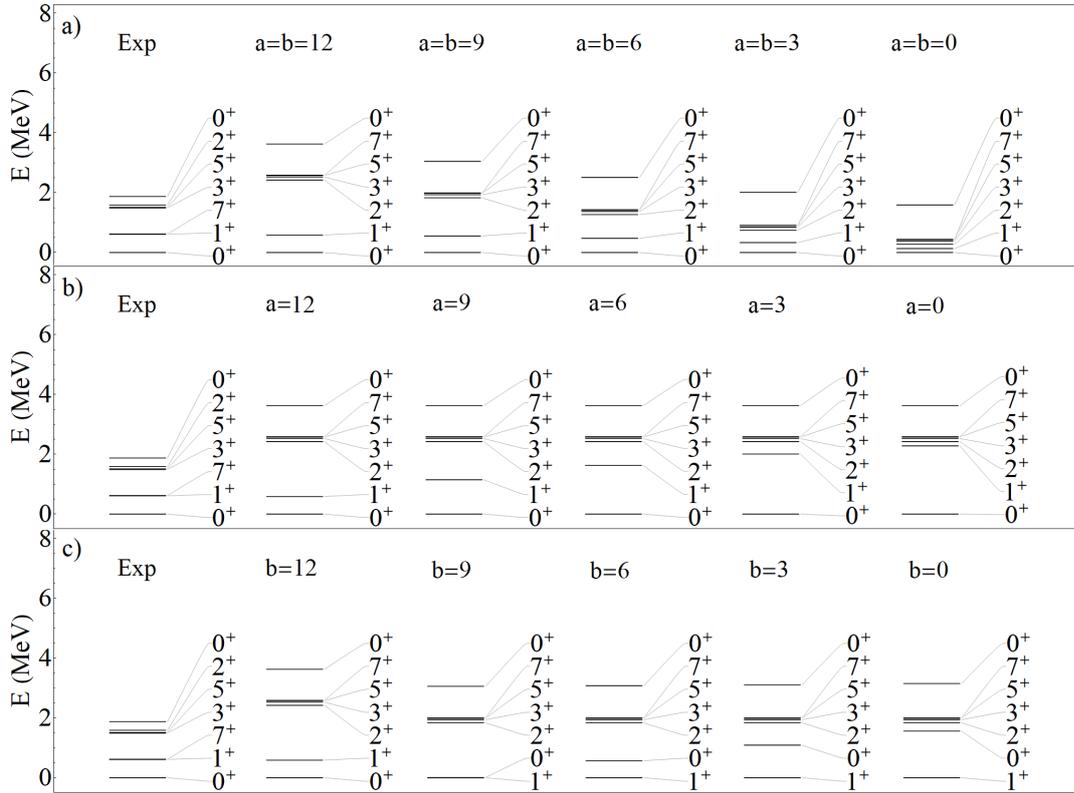


Figura D.1: Espectros de energía del ^{42}Sc para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

descrito o de una manera global, para esto último se escoge el parámetro más grande para los apareamientos, dados en las figuras D.3 y D.3 donde pareciera que podemos repetir con mayor exactitud el espectro completo, pero si escogemos una menor intensidad para los apareamientos tal como es el caso de $a = b = 6$ describimos de mejor manera el espectro baja energía. De lo anterior preferimos describir el espectro a baja energía, por lo que la elección se decantó por elegir una menor intensidad en ambos apareamientos.

Para este caso no tenemos una banda rotacional muy completa, por lo que aún no podemos tomar la elección de un cambio en el parámetro correspondiente al cuadrupolo-cuadrupolo.

D.2. $A=44$.

A continuación se muestran los resultados para masas $A = 44$, el primer núcleo para analizar es el ^{44}Sc .

Para este núcleo se tienen resultados muy interesantes, ya descritos también en

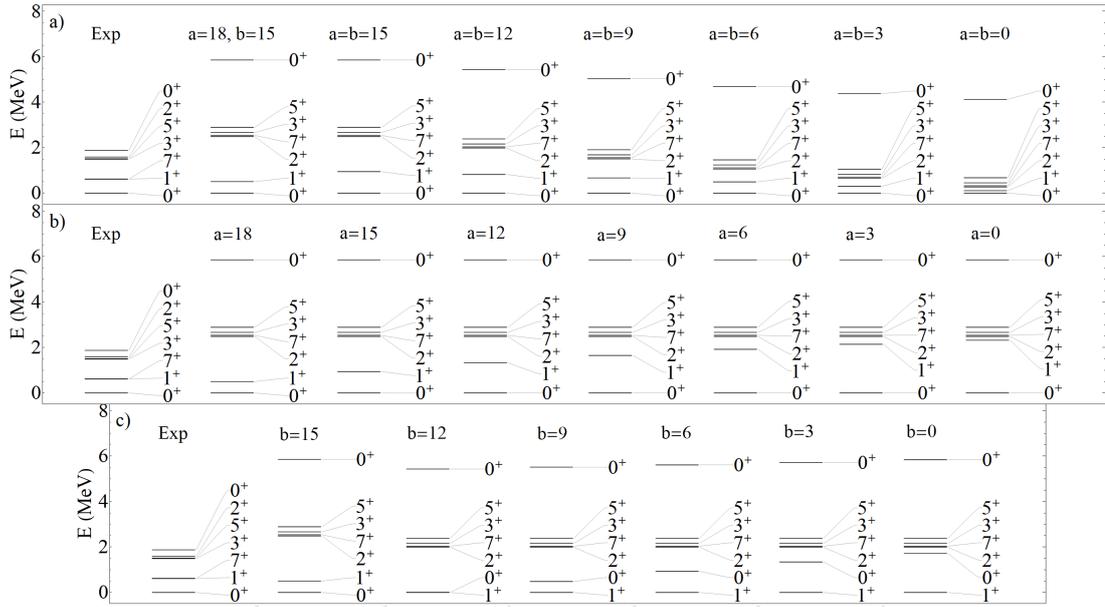


Figura D.2: Espectros de energía del ^{42}Sc para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

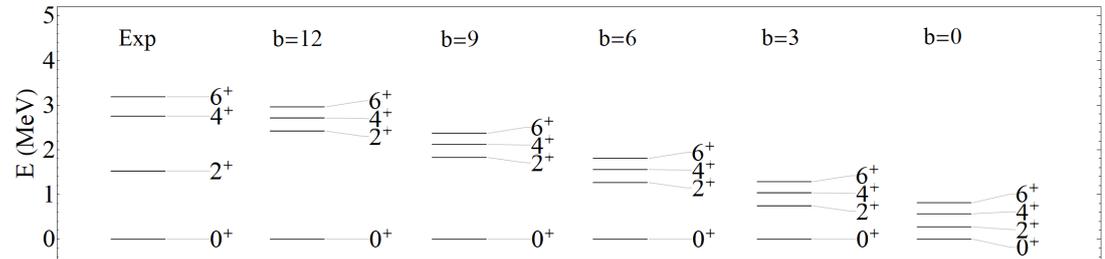


Figura D.3: Espectros de energía del ^{42}Ca para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

el trabajo principal, en donde se observa claramente que el apareamiento isoescalar debe ser disminuido con respecto a isovectorial, o completamente eliminado, en este caso la elección más fácil es eliminarlo, por lo que se escoge $a = 0$ y $b = 12$, ya que se quiere establecer un parámetro para el apareamiento isovectorial que de una descripción al espectro bajo de energía. Con esto se consigue la descripción del estado base del ^{44}Sc , y da pie a plantear que en núcleos con $N \neq Z$, este apareamiento deja de tener importancia.

Para el núcleo padre ^{44}Ca se tienen los resultados siguientes.

Para este caso tenemos resultados muy similares a los dados con núcleos con masa $A = 42$ por lo que no se discutirá en esta parte.

A continuación tenemos el núcleo que se usa para presentar la banda rotacional

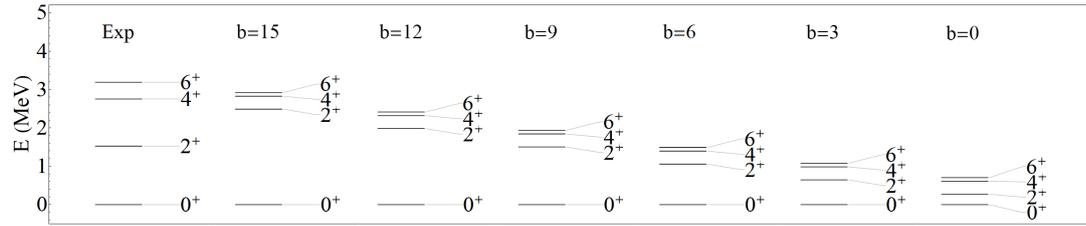


Figura D.4: Espectros de energía del ^{42}Ca para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

^{44}Ti .

Al presentar este último núcleo para masa $A = 44$ es conveniente hacer una conclusión global de los tres núcleos tratados en esta sección. Primero es que núcleos con $N \neq Z$, el parámetro correspondiente al apareamiento isoescalar se tiene que *apagar*, tal como ocurre en el ^{44}Sc y ^{44}Ca , en este último los espectros solo presentan una variación en el parámetro correspondiente al apareamiento isovectorial, debido a que la cerradura de capa se tiene en $N = Z = 40$, por lo que sólo se consideran los neutrones fuera de capa cerrada. Segundo en el caso del ^{44}Ti , la banda rotacional presentada tiene el mismo efecto presentado en el ^{42}Ca , donde al tener los parámetros *óptimos* en ambos modelos podemos describir de manera global todo el espectro rotacional pero a baja energía falla demasiado, entonces aquí se vuelve a escoger los parámetros correspondientes a una buena descripción a un espectro de baja energía, entonces $a = b = 6$, debido a que el núcleo que estamos tratando tiene $N = Z$, en este caso se observa que se tiene una buena descripción para los estados a baja energía, pero falta un pequeño impulso para ajustarse mejor, por lo que convendría aumentar un poco la intensidad del operador cuadrupolo-cuadrupolo. Esto se revisa en los siguientes núcleos para tener una conclusión sobre aumentar o dejar igual al operador encargado de la deformación .

D.3. $A=46$.

A continuación se muestran los resultados para núcleos con masa $A = 46$, primeramente se tiene el ^{46}V .

En este caso al tener $N = Z$ se toman como valores óptimos $a = b = 6$, el cual da una descripción aceptable al espectro de energía experimental, por lo que se toma como válido.

Luego tenemos el núcleo ^{46}Ti .

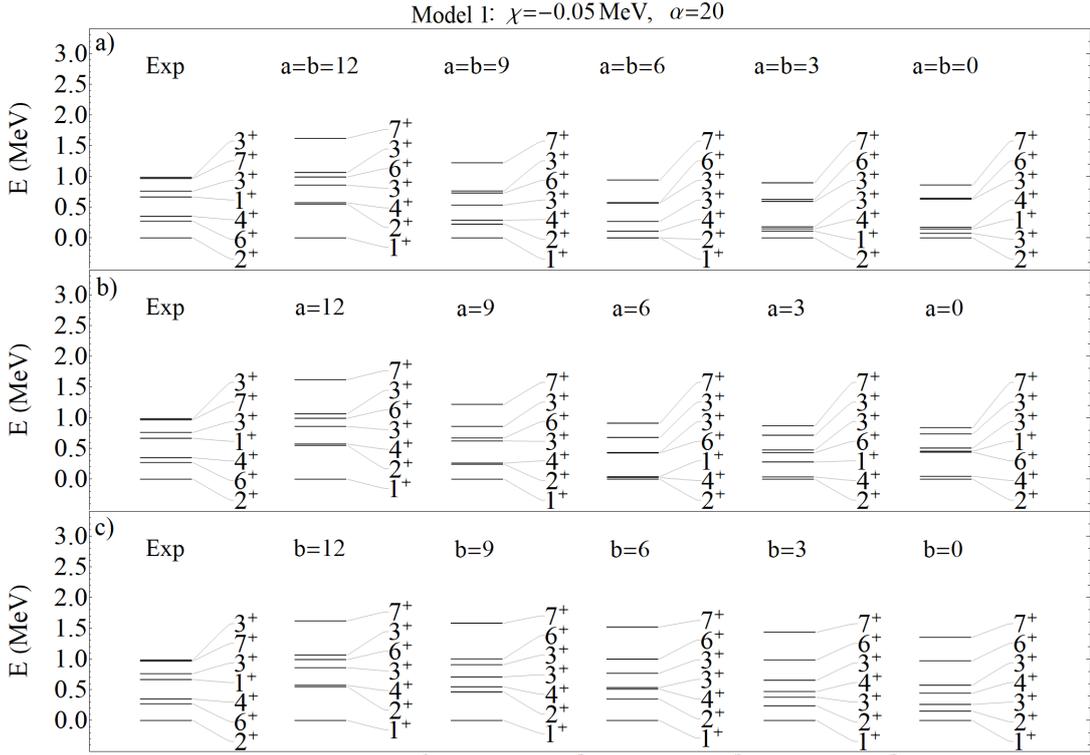


Figura D.5: Espectros de energía del ^{44}Sc para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

Este espectro incluye la banda rotacional y al tener en cuenta que se tiene $N \neq Z$, el resultado óptimo es cuando $a = 0$.

Cabe resaltar que hay una discrepancia en los valores de las intensidades cuando $N = Z$ y $N \neq Z$, lo ideal sería que la intensidad del apareamiento isovectorial tuviera el mismo valor y solo se *encendiera* o *apagara* el apareamiento isovectorial, para este punto se planteo reformular los valores de las intensidades, por lo que falta observar que pasa en el último grupo de núcleos.

D.4. $A=48$.

Por último tenemos los resultados para núcleos con masa $A = 48$, el primer núcleo a analizar es el ^{48}V .

Para estos casos fue imposible en el primer modelo reproducir el estado base del ^{48}V , incluso al hacer $a = 0$. Mientras que en el modelo 2 esto sí se logra, aquí se tiene que el cambio de las energías de partícula independiente fue importante en este modelo, y permitió una reproducción del estado base con la condición impuesta a los núcleos con $N \neq Z$. Para este caso se tiene que al tener un valor

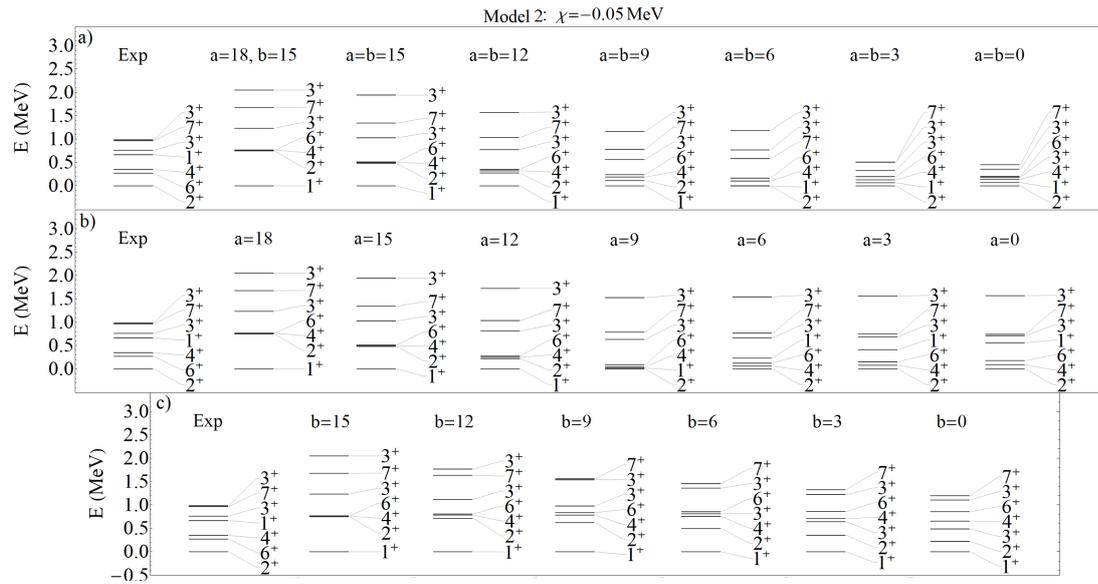


Figura D.6: Espectros de energía del ^{44}Sc para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

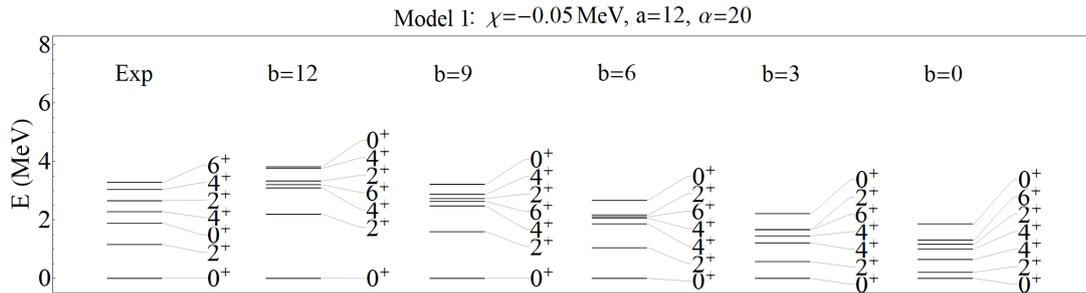


Figura D.7: Espectros de energía del ^{44}Ca para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

de $a = 6$, se consigue aun el estado base, por lo que se decidió cambiar en el trabajo final el valor de los valores óptimos $a = b = 6$ cuando $N = Z$ y $a = 0$, $b = 6$ cuando $N \neq Z$. La justificación de esta disminución se ve también en las gráficas del núcleo padre D.17 y D.18.

Par el caso del ^{48}Ti , se tiene que es un núcleo con $N \neq Z$, por lo que lo óptimo sería tener $a = 0$, pero en ambos modelos, se tiene que el espectro a baja energía no logra reproducirse completamente, por lo que en este caso se tendría que disminuir también el valor de apareamiento isovectorial, tal como se propuso anteriormente. Entonces se replanteó el problema con los valores propuestos. Más un cambio en la intensidad del operador cuadrupolo-cuadrupolo.

De las gráficas de la banda rotacional del ^{48}Cr se tiene los siguientes resultados.

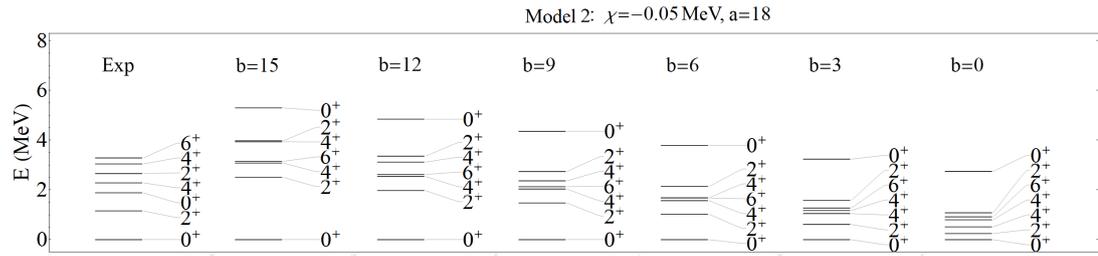


Figura D.8: Espectros de energía del ^{44}Ca para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

Se observa que al poner los valores $a = b = 6$, el espectro está comprimido, mientras que el valor dado originalmente se acercan aún más a los datos experimentales. En este punto si se quiere cambiar el valor de los parámetros de los apareamientos, también se debe cambiar el valor de la intensidad del cuadrupolo-cuadrupolo. Se tuvieron que hacer pruebas y recalibrar ambos modelos, por lo que se tienen los parámetros nuevos dados en el texto principal, así como detalles de lo que pasa al cambiar cada intensidad de los apareamientos.

El punto de este apéndice fue el de mostrar el error que conlleva tomar los valores dados en el [18], y la necesidad de un cambio de parámetros.

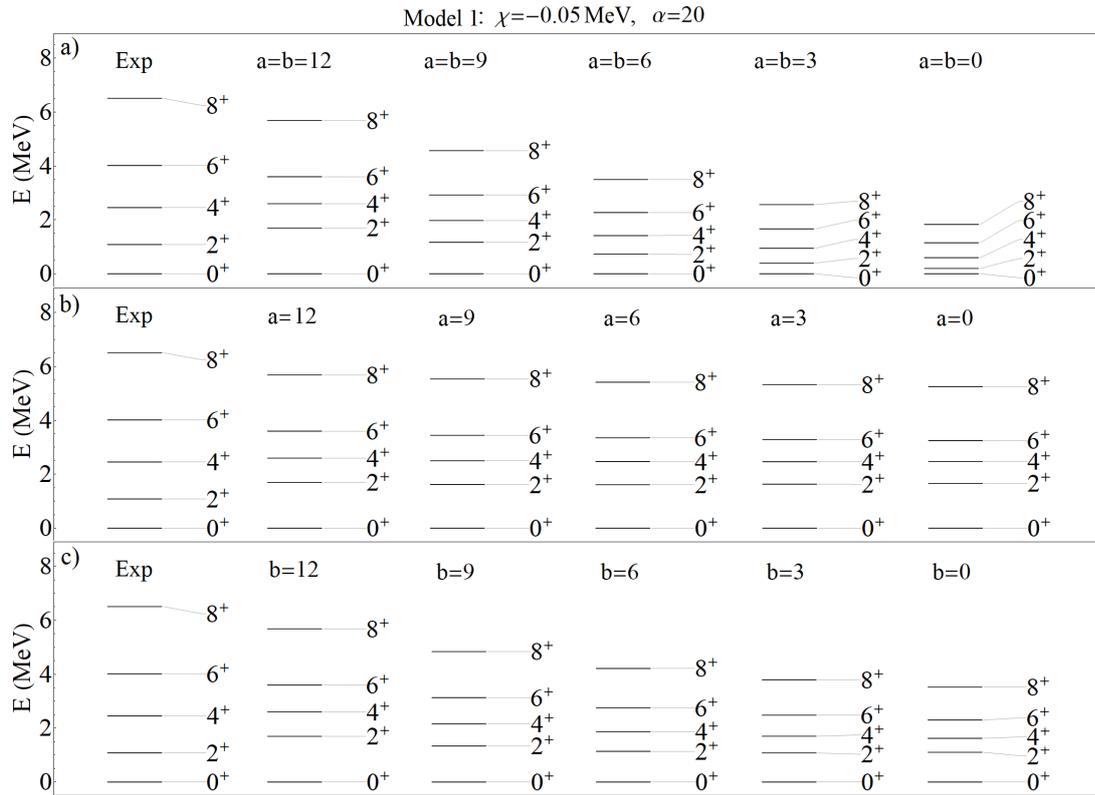


Figura D.9: Espectros de rotacionales del ^{44}Ti para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

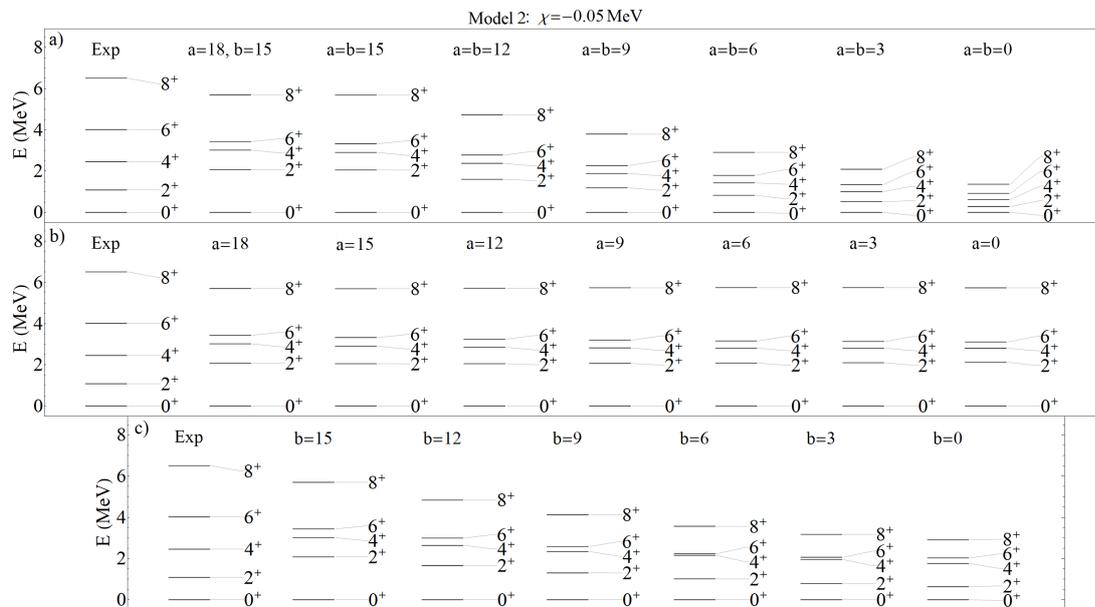


Figura D.10: Espectros de rotacionales de ^{44}Ti para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

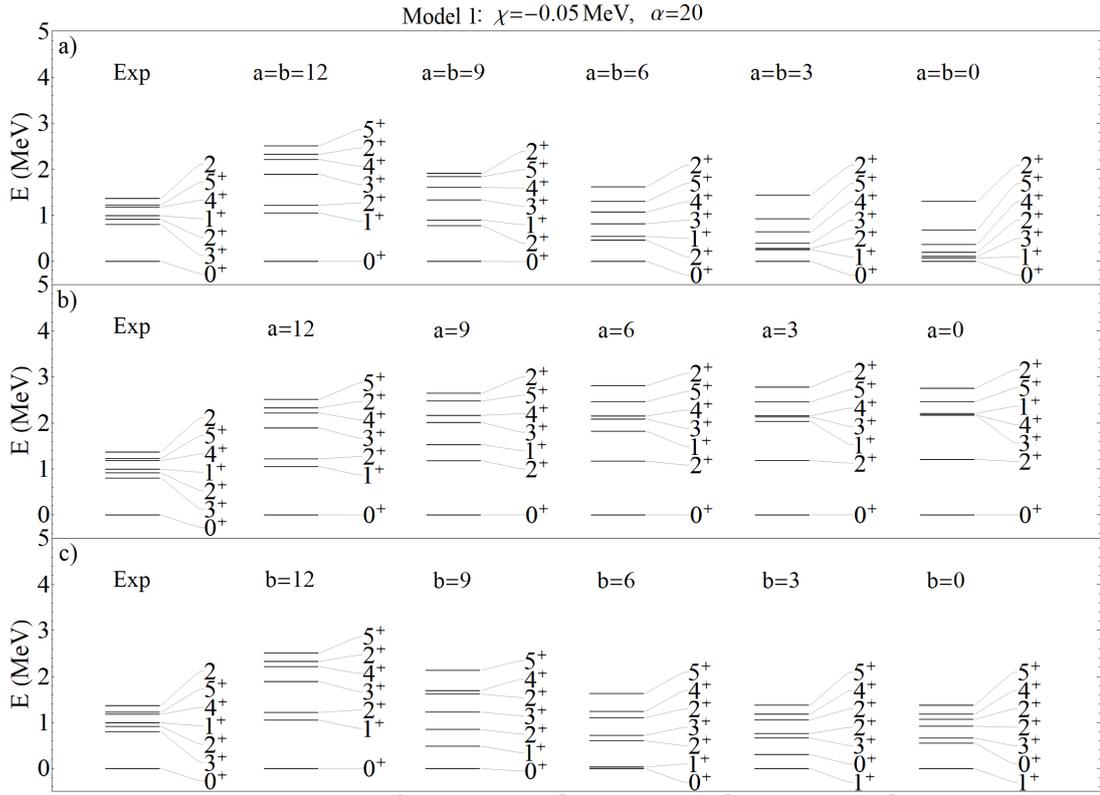


Figura D.11: Espectros de energía del ^{46}V para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

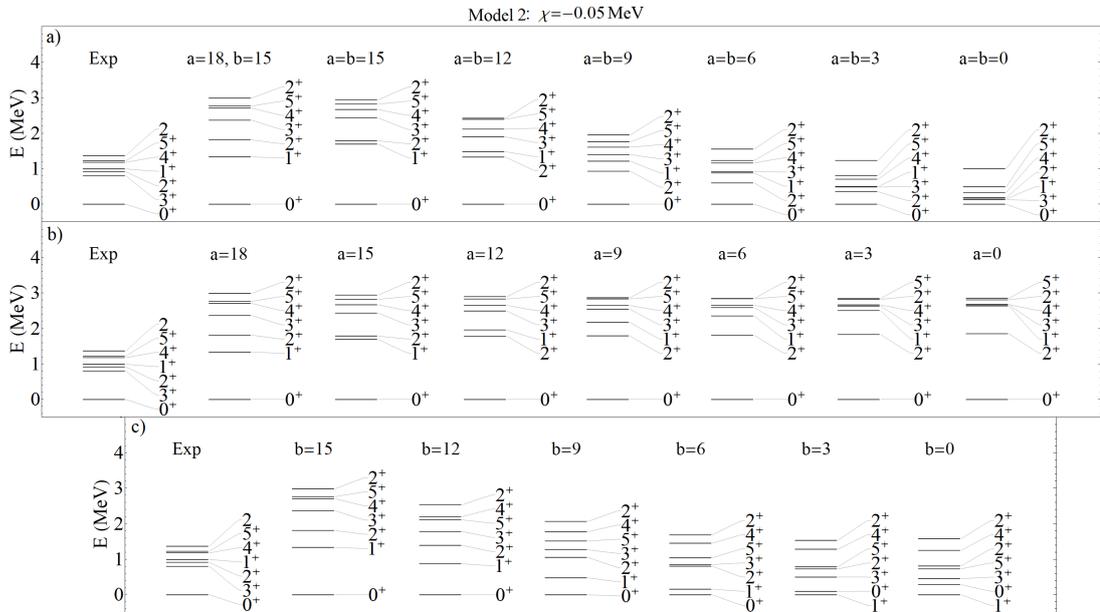


Figura D.12: Espectros de energía del ^{46}V para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

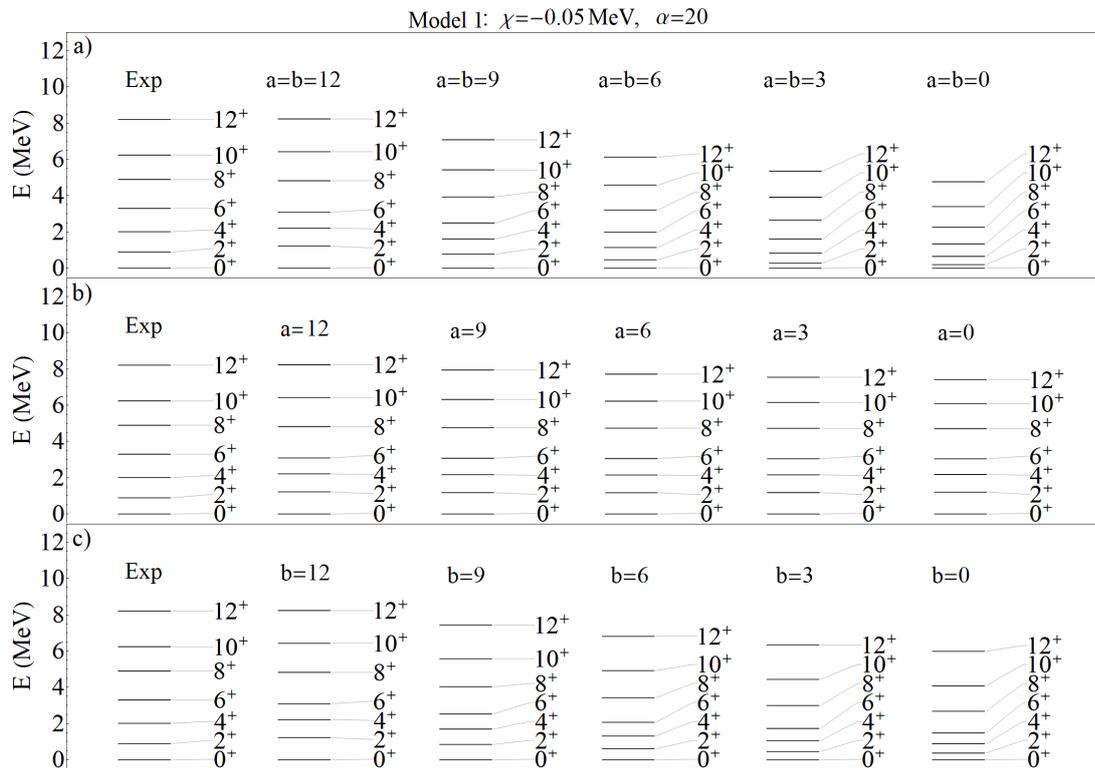


Figura D.13: Espectros de energía del ^{46}Ti para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

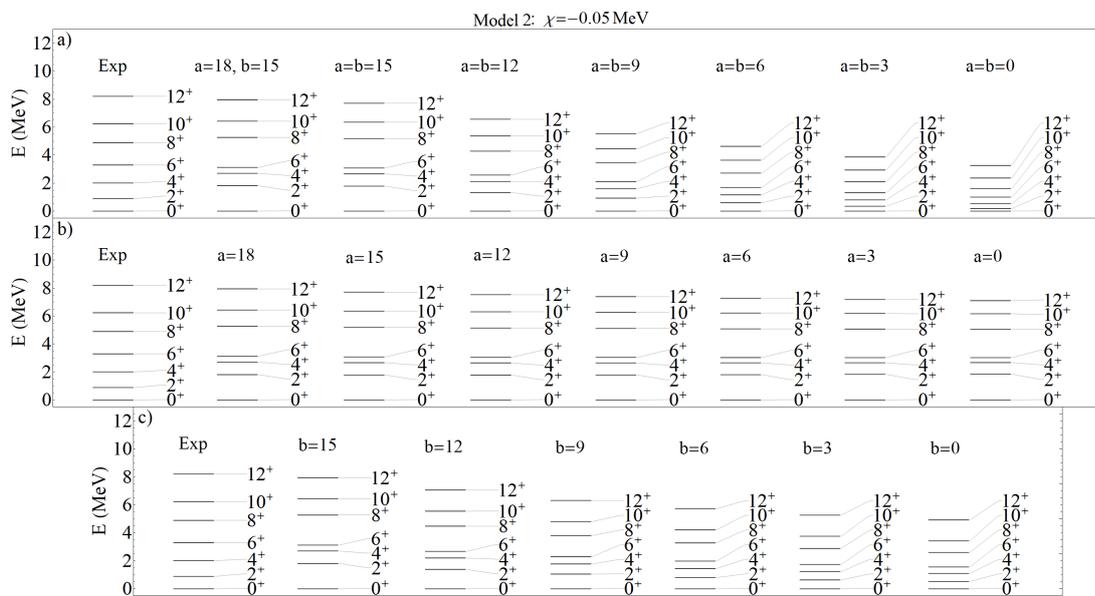


Figura D.14: Espectros de energía del ^{46}Ti para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

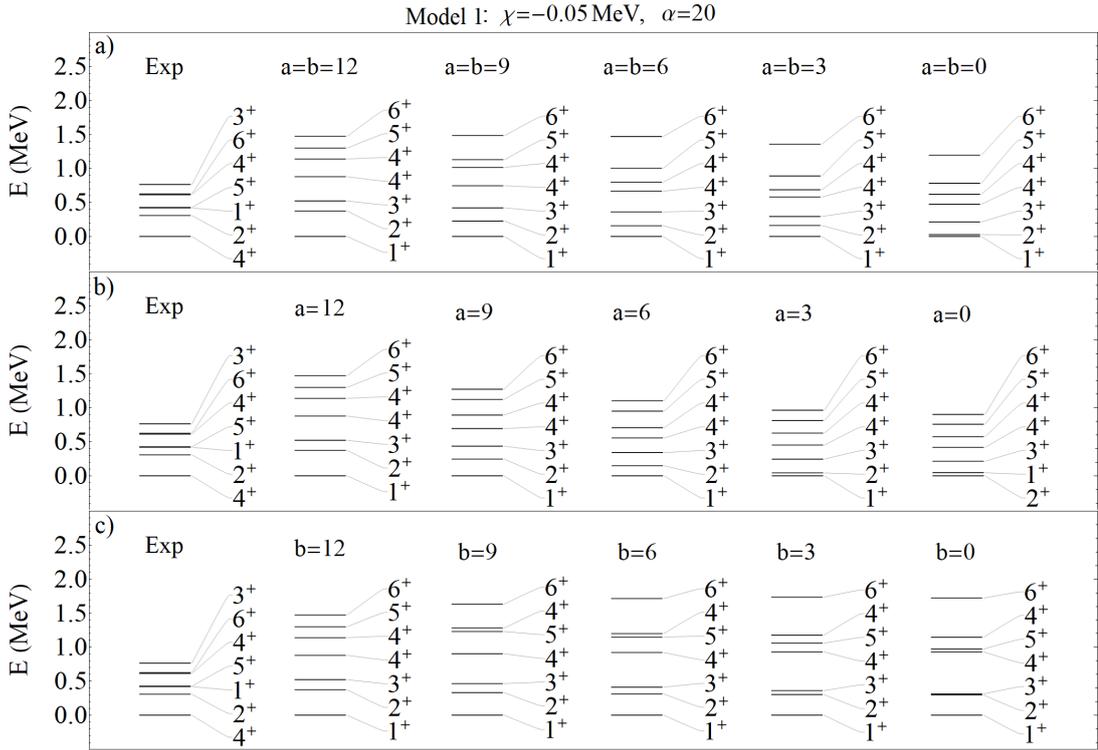


Figura D.15: Espectros de energía del ^{48}V para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

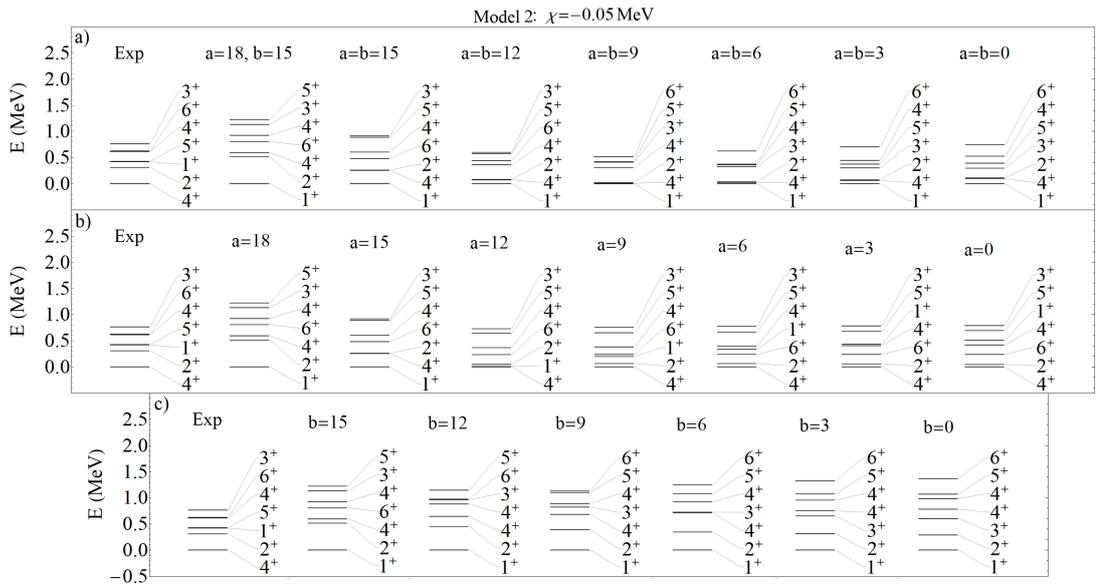


Figura D.16: Espectros de energía del ^{48}V para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

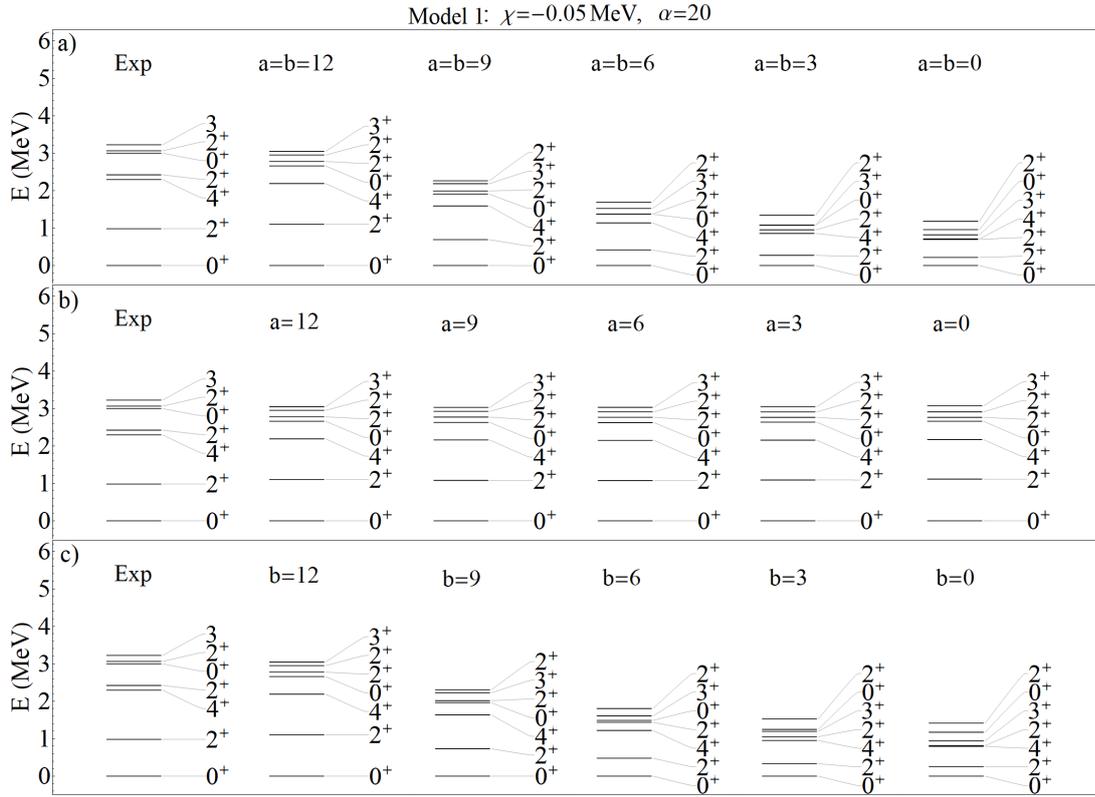


Figura D.17: Espectros de energía del ^{48}Ti para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

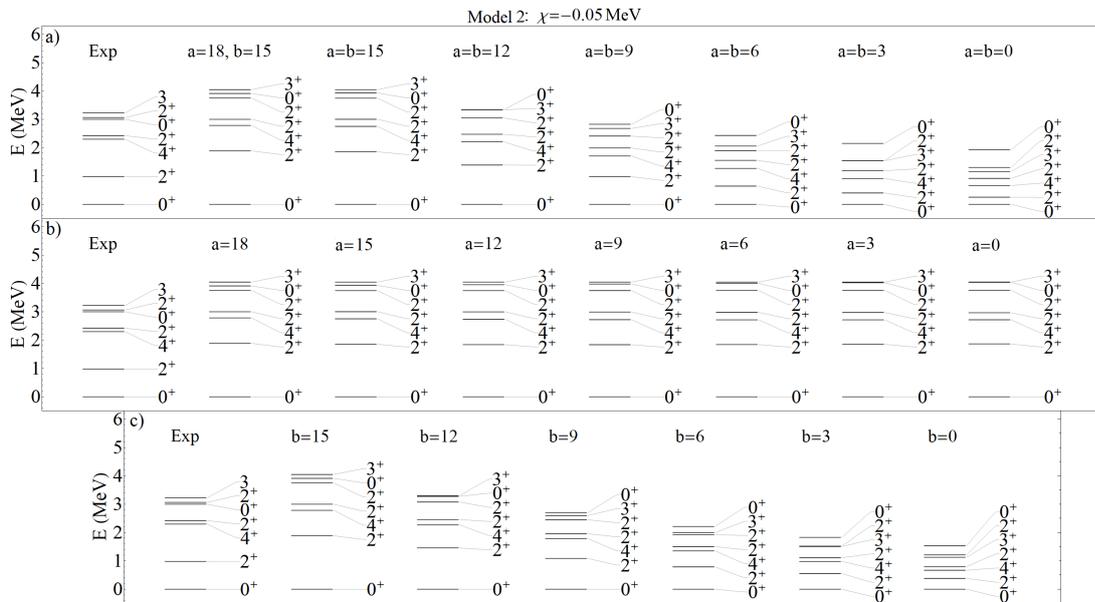


Figura D.18: Espectros de energía del ^{48}Ti para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

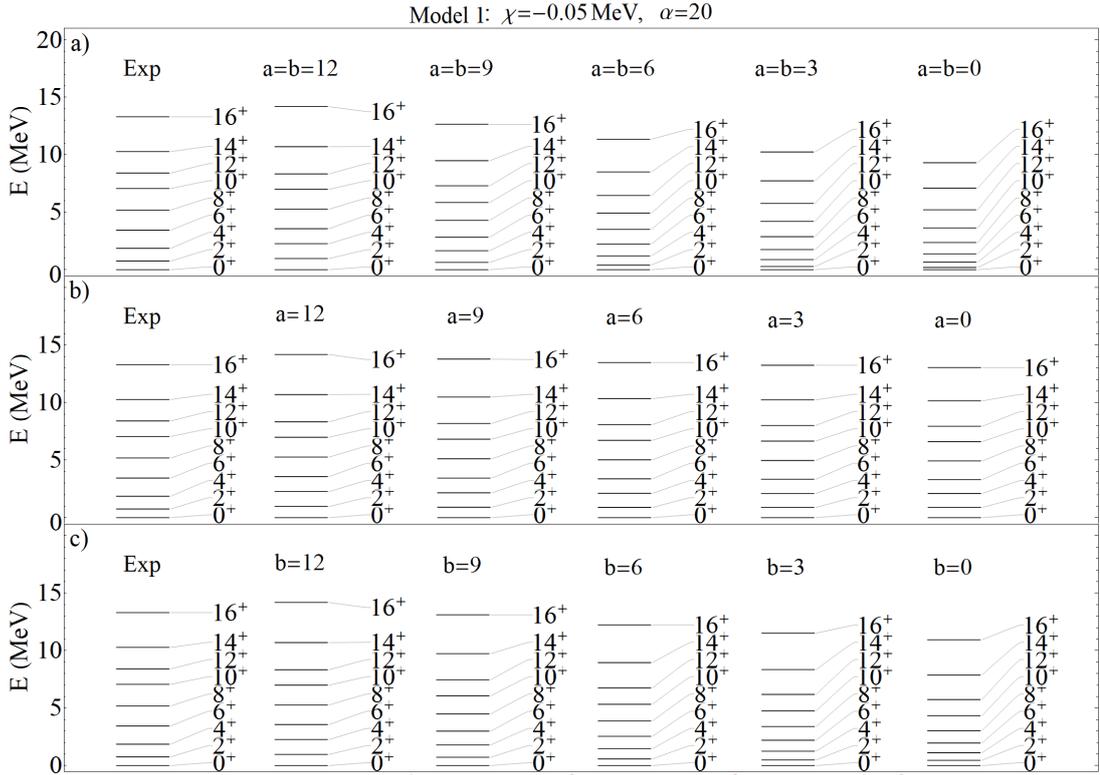


Figura D.19: Espectros del rotacional del ^{48}Cr para el modelo 1 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = b = 12$ y $\alpha = 20$.

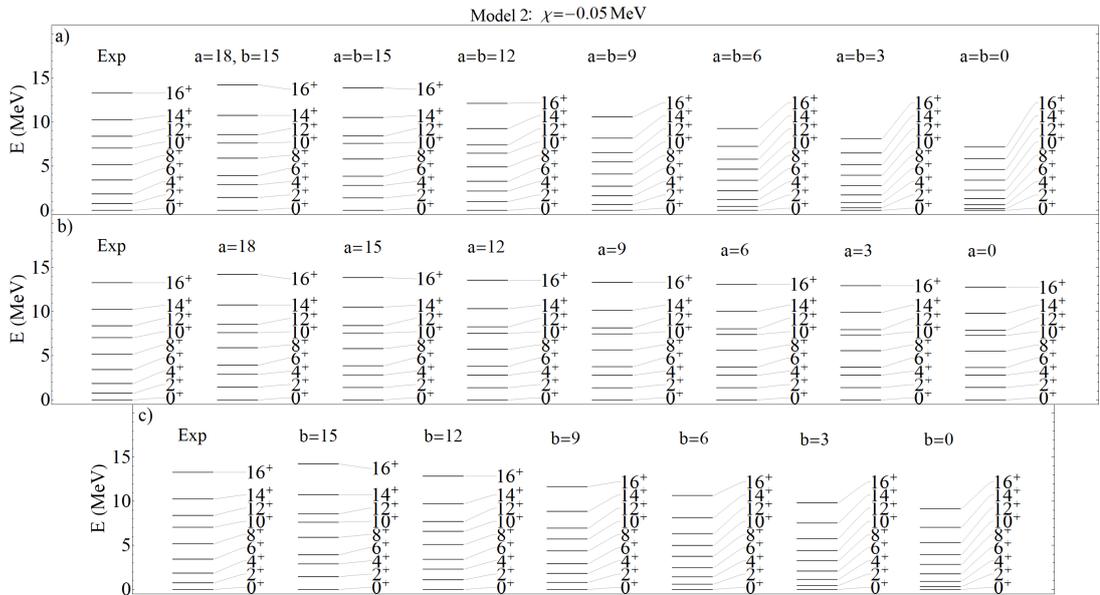


Figura D.20: Espectros del rotacional del ^{48}Cr para el modelo 2 comenzando por los parámetros óptimos $\chi = -0.05$, $a = 18$, y $b = 15$.

Bibliografía

- [1] Influence of pairing and deformation on charge exchange transitions, A. Carranza M., S. Pittel and J. G. Hirsch, *Rev. Mexicana de física* 66, No. 6 (2020).
- [2] Neutron-Proton Pairing and its Impact on Gamow-Teller Transitions, S. Pittel, A. Carranza M. and J. G. Hirsch, 2020 *J. Phys.:Conf. Ser.* 1610 012012..
- [3] Missing and quenched Gamow-Teller strength, E. Caurier, A. Poves, A.P. Zuker, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 1517-1520.
- [4] Gamow-Teller strengths and electron-capture rates for pf-shell nuclei of relevance for late stellar evolution, A. L. Cole, T. S. Anderson, R. G. T. Zegers, Sam M. Austin, B. A. Brown, L. Valdez, S. Gupta, G. W. Hitt, and O. Fawwaz, *Phys. Rev. C* 86 (2012) 015809.
- [5] Shell model description of Gamow-Teller strengths in pf-shell nuclei, Vikas Kumar and P.C. Srivastava, *Eur. Phys. J. A* 52 (2016) 181.
- [6] Nuclear beta-decay half-lives for fp and fpg shell nuclei, Vikas Kumar, P C Srivastava and Hantao Li, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 43 (2016) 105104.
- [7] Nuclear weak-interaction processes in stars, K. Langanke and G. Martínez-Pinedo, *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003) 819.
- [8] Neutrino-nucleus reactions and their role for supernova dynamics and nucleosynthesis, K.G. Balasi, K. Langanke, G. Martínez-Pinedo, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 85 (2015) 33-81.

- [9] Centroids of Gamow Teller transitions at finite temperature in fp-shell neutron rich nuclei, O. Civitarese y A. Ray Phys. Scr. 59, pp.352 (1999).
- [10] Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay, J Suhonen, O Civitarese, Phys. Rep. 300 (1998) 123-214.
- [11] Neutrino Nucleosynthesis, A. Heger, E. Kolbe, W. C. Haxton, K. Langanke, G. Martínez-Pinedo, and S. E. Woosley, Phys. Lett. B 606 (2005) 258.
- [12] Element synthesis in the supernova environment and neutrino oscillations, T. Suzuki and T. Kajino, J. Phys. G 40 (2013) 083101.
- [13] Gamow-Teller Strength in the Exotic Odd-Odd Nuclei ^{138}La and ^{180}Ta and Its Relevance for Neutrino Nucleosynthesis, A. Byelikov, T. Adachi, H. Fujita, K. Fujita, Y. Fujita, K. Hatanaka, A. Heger, Y. Kalmykov, K. Kawase, K. Langanke et al., Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 082501.
- [14] Influence of 2p-2h configurations on β -decay rates, A. P. Severiyukhin, V. V. Voronov, I. N. Borzov, N. N. Arsenyev, y Nguyen Van Giai Phys. Rev. C 90, (2014).
- [15] Fermi and Gamow-Teller strength in charge exchange with radioactive beams, C.A. Bertulan y P. Lotti Phys. Lett. B 402, pp.237-242 (1997).
- [16] Hartree-Fock-Bogoliubov Theory with Applications to Nuclei, A.L. Goodman, in : Advances in Nuclear Physics, Vol. 11, eds. J.W. Negele and E. Vogt (Plenum, New York, 1979) 263.
- [17] For a concise historical revision with references see J. Dobaczewski (2004), <https://www.fuw.edu.pl/~dobaczew/nppair60w/node2.html>.
- [18] Systematic study of proton-neutron pairing correlations in the nuclear shell model, Y. Lei, S. Pittel, N. Sandulescu, A. Poves, B. Thakur and Y. M. Zhao, Phys. Rev. C 84 (2011) 044318.

- [19] Breaking of the SU(4) limit for the Gamow-Teller strength in $N \sim Z$ nuclei, I. Petermann, G. Martinez-Pinedo, K. Langanke, and E. Caurier, *Eur. Phys. J. A* 34 (2007) 319-324.
- [20] Exact Solution of the Spin-Isospin Proton-Neutron Pairing Hamiltonian, S. Lerma H., B. Errea, J. Dukelsky, and W. Satula, *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007) 032501.
- [21] Isovector neutron-proton pairing with particle number projected BCS, N. Sandulescu, B. Errea, and J. Dukelsky, *Phys. Rev. C* 80 (2009) 044335.
- [22] Boson mappings and four-particle correlations in algebraic neutron-proton pairing models, J. Dobes, S. Pittel, *Phys. Rev. C* 57 (1998) 688.
- [23] Symmetry restoration in the mean-field description of proton-neutron pairing, A.M. Romero, J. Dobaczewski and A. Pastore, *Phys. Lett. B* 795 (2019)177.
- [24] Heavy ion charge exchange reactions as probes for nuclear beta-decay, Horst Lenske, Francesco Cappuzzello, Manuela Cavallaro, Maria Colonna, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 109 (2019) 103716
- [25] Spin-isospin responses via (p,n) and (n,p) reactions, M. Ichimura, H. Sakai, T. Wakasa, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 56 (2006) 446-531.
- [26] Charge-exchange reactions and the quest for resolution, D. Frederkers and M. Alanssari, *Eur. Phys. J. A* 54 (2018)177.
- [27] Gamow-Teller transitions in the (${}^7\text{Li}, {}^7\text{Be}$) reaction at 65 A MeV, S. Nakayama, H. Akimune, I. Daito, H. Fujimura, Y. Fujita, M. Fujiwara, K. Fushimi, T. Inomata, K. Ishibashi, H. Kohri, N. Koori, K. Takahisa, A. Tamii, M. Tanaka, H. Toyokawa, and T. Yamagata, *Phys. Rev. C* 60 (1999) 047303.
- [28] Charge-exchange reaction cross sections and the Gamow-Teller strength for double beta decay, K. Amos, Amand Faessler and V. Rodin, *Phys. Rev. C* 76 (2007) 014604.

- [29] Beta decay in odd A and even even proton rich Kr isotopes, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, A. Escuderos, Phys. Rev. C 64 (2001) 064306.
- [30] Gamow-Teller strength distributions in Xe isotopes, O. Moreno, R. Alvarez-Rodriguez, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, J.M. Udias et al. Phys. Rev. C 74 (2006) 054308.
- [31] $\sigma\tau^+$ strength in nuclei, D. Cha, Phys. Rev. C 27(1983) 2269.
- [32] Comparison of Gamow-Teller strengths in the random phase approximation, Jameel-Un Nabi, Calvin W. Johnson, J. Phys. G 40 (2013) 065202.
- [33] Quasiparticle random-phase approximation with quasiparticle-vibration coupling: Application to the Gamow-Teller response of the superfluid nucleus ^{120}Sn , Y.F. Niu, G. Colo, E. Vigezzi, C.L. Bai, H. Sagawa, Phys.Rev.C 94 (2016) 064328.
- [34] Beta-decay properties of neutron-rich Ca, Ti, and Cr isotopes, P. Sarriguren, A. Algora, and G. Kiss, Phys. Rev. C 98 (2018) 024311.
- [35] Nuclear spin and isospin excitations, Franz Osterfeld, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 491-558.
- [36] Probing the quenching of g_A by single and double beta decays, Jouni Suhonen, Osvaldo Civitarese, Phys. Lett. B 725 (2013) 153-157.
- [37] Value of the Axial-Vector Coupling Strength in β and $\beta\beta$ Decays: A Review, Jouni T. Suhonen, Front.in Phys. 5 (2017) 55.
- [38] Gamow-Teller strength functions and two-neutrino double-beta decay, J Hirsch, E Bauer, F Krmpotic, Nucl. Phys. A 516 (1990), 304-324.
- [39] Delta excitations in nuclei and their decay properties, T. Udagawa, P. Oltmanns, F. Osterfeld, S.W. Hong, Phys. Rev. C 49 (1994) 3162-3181.

- [40] The role of the Delta in nuclear physics, G. Cattapan, L.S. Ferreira, Phys. Rep. 362 (2002) 303-407.
- [41] Gamow-Teller strength in Fe-54 and Fe-56, E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, A. Poves, A.P. Zuker, Phys. Rev. C 52 (1995) R1736-R1740.
- [42] Discrepancy between experimental and theoretical β -decay rates resolved from first principles, Gysbers, P., Hagen, G., Holt, J.D. et al., Nat. Phys. 15, 428-431 (2019).
- [43] On the 2p-2h excitations and the quenching of the Gamow-Teller strength, J. Hirsch, A. Mariano, M. Faig, F. Krmpotik, Phys. Lett. B 210 (1988) 55-60.
- [44] Quenching of Gamow-Teller strength due to tensor correlations in ^{90}Zr and ^{208}Pb , C.L. Bai, H.Q. Zhang, X.Z. Zhang, F.R. Xu, H. Sagawa et al., Phys. Rev. C 79 (2009) 041301.
- [45] Role of momentum transfer in the quenching of Gamow-Teller strength, T. Marketin, G. Martinez-Pinedo, N. Paar, D. Vretenar, Phys. Rev. C 85 (2012) 054313.
- [46] Quenching of nuclear matrix elements for $0\nu\beta\beta$ decay by chiral two-body currents, Long-Jun Wang, Jonathan Engel, and Jiang Ming Yao, Phys. Rev. C 98 (2018) 031301(R).
- [47] Shell-model method for Gamow-Teller transitions in heavy deformed odd-mass nuclei, Long-Jun Wang, Yang Sun, and Surja K. Ghorui, Phys. Rev. C 97 (2018) 044302.
- [48] Cauldrons in the Cosmos, C.E. Rolfs, W. Rodney (University of Chicago Press, 1988).
- [49] Frontiers in Nuclear Astrophysics, C.A. Bertulani, T. Kajino, Prog. Part. Nucl. Phys. 89 (2016) 56-100.
- [50] Improved estimate of electron capture rates on nuclei during stellar core collapse, A. Juodagalvis, K. Langanke, W.R. Hix, G. Martínez-Pinedo, J.M. Sampaio, Nucl. Phys. A 848 (2010) 454-478.

- [51] Nuclear spin isospin responses for low-energy neutrinos, H. Ejiri, *Phys. Rep.* 338 (2000) 265-351.
- [52] Neutrino-nuclear responses for astro-neutrinos, single beta decays and double beta decays, H. Ejiri, J. Suhonen, K. Zuber, *Phys. Rep.* 797 (2019) 1-102.
- [53] Unblocking of the Gamow-Teller strength in stellar electron capture on neutron-rich germanium isotopes, K. Langanke, E. Kolbe, and D. J. Dean, *Phys. Rev. C* 63 (2001) 032801R.
- [54] Double beta decay, T. Tomoda. *Rept. Prog. Phys.* 54 (1991) 53-126.
- [55] Double beta decay, Amand Faessler, Fedor Simkovic, *J. Phys. G* 24 (1998) 2139-2178.
- [56] The Neutrinoless double beta decay from a modern perspective, J.D. Vergados, *Phys. Rep.* 361 (2002) 1-56.
- [57] The future of double beta decay research, Yu. Zdesenko, *Rev. Mod. Phys.* 74 (2003) 663-684.
- [58] Double beta decay, Steven R. Elliott, Jonathan Engel, *J. Phys. G* 30 (2004) R183-R215.
- [59] Double Beta Decay, Majorana Neutrinos, and Neutrino Mass, Frank T. III Avignone, Steven R. Elliott, Jonathan Engel, *Rev. Mod. Phys.* 80 (2008) 481-516.
- [60] Double Beta Decay: Historical Review of 75 Years of Research, A.S. Barabash, *Phys. Atom. Nucl.* 74 (2011) 603-613.
- [61] Theory of Neutrinoless Double Beta Decay, J.D. Vergados, H. Ejiri, F. Simkovic, *Rep. Prog. Phys.* 75 (2012) 106301.
- [62] Neutrinoless Double-Beta Decay: a Probe of Physics Beyond the Standard Model, S.M. Bilenky, C. Giunti, *Int. J. Mod. Phys. A* 30 (2015) 04n05, 1530001.
- [63] Status and Future of Nuclear Matrix Elements for Neutrinoless Double-Beta Decay: A Review, Jonathan Engel, Javier Menéndez, *Rep. Prog. Phys.* 80 (2017) 046301.

- [64] Two-Neutrino Double-Beta Decay, Ruben Saakyan, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 63 (2013) 503-529.
- [65] Neutrinoless Double-Beta Decay: Status and Prospects, Michelle J. Dolinski, Alan W.P. Poon, and Werner Rodejohann, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 69 (2019) 219-251.
- [66] Shell model calculation for two neutrino double beta decay of Ca-48, L. Zhao, B.Alex Brown, W.A. Richter, *Phys. Rev. C* 42 (1990) 1120-1125.
- [67] A Full $0^+ \rightarrow 0^+$ description of the 2 neutrino beta beta decay of Ca-48, E. Caurier, A.P. Zuker, A. Poves, *Phys. Lett. B* 252 (1990) 13-17.
- [68] Neutrinoless double beta decay of Ca-48, J. Retamosa, E. Caurier, F. Nowacki, *Phys. Rev. C* 51 (1995) 371-378.
- [69] Shell-model calculations of two-neutrino double-beta decay rates of Ca-48 with GXPF1A interaction, M. Horoi, S. Stoica, B.Alex Brown, *Phys. Rev. C* 75 (2007) 034303.
- [70] Shell Model Analysis of the Neutrinoless Double Beta Decay of Ca-48, Mihai Horoi, Sabin Stoica, *Phys. Rev. C* 81 (2010) 024321.
- [71] Shell Model Studies of the Double Beta Decays of Ge-76, Se-82, and Xe-136, E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, J. Retamosa, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 1954-1957.
- [72] Shell-Model Analysis of the ^{136}Xe Double Beta Decay Nuclear Matrix Elements, M. Horoi, B.A. Brown, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 222502.
- [73] Large-Scale Shell-Model Analysis of the Neutrinoless double beta Decay of ^{48}Ca , Y. Iwata, N. Shimizu, T. Otsuka, Y. Utsuno, J. Menéndez, M. Honma and T. Abe, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 112502.
- [74] Double Gamow-Teller Transitions and its Relation to Neutrinoless Double Beta Decay, Noritaka Shimizu, Javier Menendez, and Kentaro Yako, *Phys. Rev. Lett.* 120 (2018) 142502.

- [75] Shell model Monte Carlo methods, S.E. Koonin, D.J. Dean, K. Langanke, Phys. Rep. 278 (1997) 1-77.
- [76] Suppression of the two-neutrino double-beta decay by nuclear-structure effects, P. Vogel and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 3148.
- [77] Nuclear structure effects in double-beta decay, J. Engel, P. Vogel, and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. C 37 (1988) 731.
- [78] Calculation of 2ν double beta decay of ^{76}Ge , ^{82}Se , $^{128,130}\text{Te}$, K. Muto, H.V. Klapdor, Phys.Lett.B 201 (1988) 420-424.
- [79] Reconstruction of isospin and spin - isospin symmetries and double beta decay, J. Hirsch, F. Krmpotic, Phys.Rev.C 41 (1990) 792-795.
- [80] Suppression of the Two Neutrino Double Beta Decay, O. Civitarese, A. Faessler, T. Tomoda, Phys. Lett. B194 (1987) 11-14.
- [81] $\beta\beta$ decay of Ge-76 with renormalized effective interaction derived from Paris, Bonn and Reid potentials, A. Staudt, T.T.S. Kuo, H.V. Klapdor- Kleingrothaus, Phys. Lett. B 242 (1990) 17-23.
- [82] Systematic approach to β and 2β decays of mass A=100-136 nuclei, Pekka Pirinen, Jouni Suhonen, Phys. Rev. C 91 (2015) 054309.
- [83] Double Beta Decay in the Generalized Seniority Scheme, J. Engel, P. Vogel, Xiang-Dong Ji, S. Pittel, Phys. Lett. B 225 (1989) 5-9.
- [84] Suppression of the two neutrino $\beta\beta$ decay: Particle number projected results, O. Civitarese, Amand Faessler, J. Suhonen, X.R. Wu, Phys.Lett.B 251 (1990) 333-337; Suppression of the two neutrino beta beta decay in a particle number projected quasiparticle random phase approximation, O. Civitarese, Amand Faessler, J. Suhonen, X.R. Wu, Nucl. Phys. A 524 (1991) 404-424.

- [85] The Neutrinoless double beta decay of Ge-76, Se-82, Kr-86, Cd-114, Te-128, Te-130 and Xe-134, Xe-136 in the framework of a relativistic quark confinement model, J. Suhonen, S.B. Khadkikar, Amand Faessler, Nucl. Phys. A 535 (1991) 509-547.
- [86] On the double-beta decays of Zn-70, Kr-86, Zr-94, Ru-104, Pd-110 and Sn-124, Jouni Suhonen, Nucl. Phys. A 864 (2011) 63-90.
- [87] Review of the properties of the $0\nu\beta^-\beta^-$ nuclear matrix elements, Jouni Suhonen, Osvaldo Civitarese, J. Phys. G 39 (2012) 124005.
- [88] $0\nu\beta\beta$ and $2\nu\beta\beta$ nuclear matrix elements, quasiparticle random-phase approximation, and isospin symmetry restoration, Fedor Simkovic, Vadim Rodin, Amand Faessler, Petr Vogel, Phys.Rev.C 87 (2013) 045501.
- [89] Double beta decay to excited 0^+ states: Decay of Mo-100, A. Griffiths, P. Vogel, Phys.Rev.C 46 (1992) 181-187.
- [90] Two neutrino beta beta decay to excited states: The $0^+ \rightarrow 2^+$ decay of Xe-136, J. Suhonen, O. Civitarese, Phys. Lett. B 308 (1993) 212-215.
- [91] Quasiparticle random phase approximation analysis of the double beta decay of Mo-100 to the ground state and excited states of Ru-100, J. Suhonen, O. Civitarese, Phys. Rev. C 49 (1994) 3055-3060.
- [92] Two neutrino double beta decay to excited one and two phonon states, O. Civitarese, J. Suhonen, Nucl. Phys. A 575 (1994) 251-268.
- [93] Systematic study of beta and double beta decay to excited final states, M. Aunola, J. Suhonen, Nucl. Phys. A 602 (1996) 133-166.
- [94] Two neutrino double beta decay in coupled QRPA with neutron proton pairing, M.K. Cheoun, A. Bobyk, A. Faessler, F. Simkovic, G. Teneva, Nucl. Phys. A 564 (1993) 329-344.

- [95] Renormalized proton neutron quasiparticle random phase approximation and its application to double beta decay, J. Toivanen, J. Suhonen, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 410-413.
- [96] The Pauli principle, QRPA and the two neutrino double beta decay, J. Schwieger, F. Simkovic, Amand Faessler, Nucl.Phys.A 600 (1996) 179-192
- [97] Study of several double-beta-decaying nuclei using the renormalized proton neutron quasiparticle random-phase approximation J. Toivanen, J. Suhonen, Phys. Rev. C 55 (1997) 2314-2323.
- [98] Renormalized QRPA and double beta decay: A Critical analysis, Jorge G. Hirsch, Peter O. Hess, Osvaldo Civitarese, Phys. Rev. C 54 (1996) 1976-1981.
- [99] Neutron-proton correlations in an exactly solvable model, J. Engel, S. Pittel, M. Stoitsov, P. Vogel, J. Dukelsky, Phys. Rev. C 55 (1997) 1781-1788.
- [100] Single and double beta decay Fermi transitions in an exactly solvable model, Jorge G. Hirsch, Peter O. Hess, Osvaldo Civitarese, Phys. Rev. C 56 (1997) 199.
- [101] Critical view on double-beta decay matrix elements within quasi random phase approximation-based methods, S. Stoica, H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Nucl. Phys. A 694 (2001) 269-294.
- [102] On the uncertainty in the $0\nu\beta\beta$ decay nuclear matrix elements, V.A. Rodin, Amand Faessler, F. Simkovic, Petr Vogel, Phys. Rev. C 68 (2003) 044302.
- [103] Assessment of uncertainties in QRPA $0\nu\beta\beta$ -decay nuclear matrix elements, V.A. Rodin, A. Faessler, F. Simkovic, P. Vogel, Nucl. Phys. A 766 (2006) 107-131, Nucl. Phys. A 793 (2007) 213-215 (erratum).
- [104] Unified description of the $2\nu\beta\beta$ decay in spherical and deformed nuclei, A.A. Raduta, A. Faessler, D.S. Delion, Nucl. Phys. A 564 (1993) 185-203.

- [105] Two neutrino double beta decay of Ge-76 within deformed GRPA: A new suppression mechanism, Fedor Simkovic, Larisa Pacearescu, Amand Faessler, Nucl. Phys. A 733 (2004) 321-350.
- [106] A Deformed QRPA formalism for single and two-neutrino double beta decay, R. Alvarez-Rodriguez, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, L. Pacearescu, Amand Faessler, Phys. Rev. C 70 (2004) 064309.
- [107] Two-neutrino double beta decay of deformed nuclei within QRPA with realistic interaction, Mohamed Saleh Yousef, Vadim Rodin, Amand Faessler, Fedor Simkovic, Phys. Rev. C 79 (2009) 014314
- [108] Double-beta decay in the pseudo SU(3) scheme, Octavio Castaños, Jorge G. Hirsch, Osvaldo Civitarese, Peter O. Hess, Nucl. Phys. A 571 (1994) 276-300,
- [109] Neutrinoless double beta decay in heavy deformed nuclei, Jorge G. Hirsch, O. Castaños, P.O. Hess, Nucl. Phys. A 582 (1995) 124-140.
- [110] Nuclear deformation and the two neutrino double-beta decay in Xe-124,126, Te-128,130, Ba-130-132 and Nd-150 isotopes, S. Singh, R. Chandra, P.K. Rath, P.K. Raina, J.G. Hirsch, Eur. Phys. J. A 33 (2007) 375-388.
- [111] Nuclear deformation and neutrinoless double-beta decay of Zr-94, Zr-96, Mo-98, Mo-100, Ru-104, Pd-110, Te-128, Te-130, and Nd-150 nuclei within a mechanism involving neutrino mass, K. Chaturvedi, R. Chandra, P.K. Rath, P.K. Raina, J.G. Hirsch, Phys. Rev. C 78 (2008) 054302.
- [112] Uncertainties in nuclear transition matrix elements for neutrinoless $\beta\beta$ decay within the PHFB model, P.K. Rath, R. Chandra, K. Chaturvedi, P.K. Raina, J.G. Hirsch, Phys. Rev. C 82 (2010) 064310.
- [113] Neutrinoless $beta\beta$ decay transition matrix elements within mechanisms involving light Majorana neutrinos, classical Majorana

- rons, and sterile neutrinos, P.K. Rath, R. Chandra, K. Chaturvedi, P. Lohani, P.K. Raina, *Phys. Rev. C* 88 (2013) 6, 064322.
- [114] Nuclear Transition Matrix Elements for Double-beta Decay Within PHFB Model, P.K. Rath, R. Chandra, K. Chaturvedi and P.K. Raina, *Front. Phys.* 7 (2019) 64.
- [115] The NUMEN project: NUclear Matrix Elements for Neutrinoless double beta decay, F. Cappuzzello, C. Agodi, M. Cavallaro, D. Carbone, S. Tudisco et al., *Eur. Phys. J. A* 54 (2018) 5, 72.
- [116] Pairing in nuclear systems: from neutron stars to finite nuclei, D. J. Dean, M. Hjorth-Jensen, *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003) 607.
- [117] Theory of Superconductivity, J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* 108 (1957) 1175.
- [118] Possible Analogy between the Excitation Spectra of Nuclei and Those of the Superconducting Metallic State, A. Bohr, B.R. Mottelson, and D. Pines, *Phys. Rev.* 110 (1958) 936.
- [119] Accuracy of the Superconductivity Approximation for Pairing Forces in Nuclei, A.K. Kerman, R.D. Lawson, M.H. Macfarlane, *Phys. Rev.* 124 (1961) 162-167.
- [120] Improved Superconductivity Approximation for the Pairing Interaction in Nuclei, Yukihisa Nogami, *Phys. Rev.* 134 (1964) B313-B321.
- [121] Conservation of Particle Number in the Nuclear Pairing Model, K. Dietrich, H.J. Mang, and J.H. Pradal, *Phys. Rev.* 135 (1964) B22.
- [122] A Restricted Class of Exact Eigenstates of the Pairing- Force Hamiltonian, R. W. Richardson, *Phys. Lett.* 3 (1963) 277-279; Exact eigenstates of the pairing-force Hamiltonian, R.W.Richardson, N.Sherman, *Nucl. Phys.* 52 (1964) 221-238.
- [123] Exactly solvable Richardson-Gaudin models for many-body quantum systems, J. Dukelsky, S. Pittel, and G. Sierra, *Rev. Mod. Phys.* 76, 643-662 (2004).

- [124] Exact Solutions for Pairing Interactions, J. Dukelsky and S. Pittel, in Fifty Years of Nuclear BCS, Pairing in Finite Systems, Edited By: Ricardo A Broglia and Vladimir Zelevinsky, World Scientific, Singapore (2013), pp. 200-211.
- [125] Exactly-solvable models derived from a generalized Gaudin algebra, G. Ortiz, R. Somma, J. Dukelsky, and S. Rombouts, Nucl. Phys. B 707 (2005) 421-457.
- [126] Isoscalar and Isovector Neutron-Proton Pairing, A. V. Afanasjev, in Fifty Years of Nuclear BCS, Pairing in Finite Systems, Edited By: Ricardo A Broglia and Vladimir Zelevinsky, World Scientific, Singapore (2013), pp. 138-153.
- [127] Overview of neutron-proton pairing, S. Frauendorf, A.O. Macchiavelli, Prog. Part. Nucl. Phys. 78 (2014) 24-90.
- [128] Isovector and isoscalar proton-neutron pairing in $N > Z$ nuclei, D. Negrea, P. Baganu, D. Gambacurta, N. Sandulescu, Phys. Rev. C 98 (2018) 064319.
- [129] Extension of the Shell Model for Heavy Spherical Nuclei, Michel Baranger, Phys. Rev. 120 (1960) 3, 957.
- [130] Nuclear deformations in the pairing-plus-quadrupole model, Krishna Kumar, Michel Baranger, Nucl.Phys.A 110 (1968) 529-554; Michel Baranger, Krishna Kumar, Nucl.Phys.A 122 (1968) 241-272, Nucl.Phys.A 141 (1970) 674-674 (erratum); Nuclear deformations in the pairing-plus-quadrupole model (II). Discussion of the validity of the model, Michel Baranger, Krishna Kumar, Nucl.Phys.A 110 (1968) 490-528.
- [131] The pairing-plus-quadrupole model, Daniel R. Bes and Raymond A. Sorensen, M. Baranger et al. (eds.), Advances in Nuclear Physics, Plenum Press 1969, 129.
- [132] Funny Hills: The Shell-Correction Approach to Nuclear Shell Effects and Its Applications to the Fission Process, M. Brack, Jens Damgaard, A.S. Jensen, H.C. Pauli, V.M. Strutinsky et al., Rev. Mod. Phys. 44 (1972) 320-405.

- [133] Description of nuclear collective motions in terms of the boson expansion technique, T. Kishimoto, T. Tamura, Nucl. Phys. A 270 (1976) 317-380.
- [134] Interacting boson model of collective states. 1. The Vibrational limit, A. Arima, F. Iachello, Annals Phys. 99 (1976) 253-317; Interacting boson model of collective nuclear states. II. The rotational limit, A. Arima, F. Iachello, Annals Phys. 111 (1978) 201-238; New Symmetry in the sd Boson Model of Nuclei: The Group $O(6)$; A. Arima, F. Iachello, Phys.Rev.Lett. 40 (1978) 385; Interacting boson model of collective nuclear states. 4. The $O(6)$ limit, A. Arima, F. Iachello, Annals Phys. 123 (1979) 468.
- [135] Description of the Pt and Os isotopes in the interacting boson model, R. Bijker, A.E.L. Dieperink, O. Scholten, R. Spanhoff, Nucl. Phys. A 344 (1980) 207-232.
- [136] Classical limit of the interacting boson Hamiltonian, P. Van Isacker, Jin-Quan Chen, Phys. Rev. C 24 (1981) 684-689.
- [137] Boson realizations of Lie algebras with applications to nuclear physics, Abraham Klein, E.R. Marshalek, Rev. Mod. Phys. 63 (1991) 375-558.
- [138] The realistic collective nuclear Hamiltonian, (Marianne Dufour), Andres Zuker, Phys. Rev. C 54 (1996) 1641-1660.
- [139] Spherical shell model description of rotational motion, A.P. Zuker, J. Retamosa, A. Poves, E. Caurier, Phys. Rev. C 52 (1995) R1741-R1745.
- [140] The shell model as a unified view of nuclear structure, E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, and A. P. Zuker, Rev. Mod. Phys. 77 (2005) 427.
- [141] Collective motion in the nuclear shell model. 1. Classification schemes for states of mixed configuration, J.P. Elliott, Proc. Roy. Soc. Lond. A A245 (1958) 128; Collective motion in the nuclear shell model. 2. The Introduction of intrinsic wave functions, J.P. Elliott, Proc. Roy. Soc. Lond. A A245 (1958) 562-581.

- [142] Symmetries in nuclei, K.T. Hecht, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 23 (1973) 123-161.
- [143] Search for a coupling scheme in heavy deformed nuclei: The pseudo SU(3) model, R.D.Ratna Raju, J.P. Draayer, K.T. Hecht, *Nucl. Phys. A* 202 (1973) 433-466.
- [144] Generalized pseudo-SU(3) model and pairing, D. Troltenier, C. Bahri, J.P. Draayer, *Nucl. Phys. A* 586 (1995) 53-72.
- [145] Origin of Pseudospin Symmetry, A.L. Blokhin, C. Bahri, J.P. Draayer, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 4149-4152.
- [146] Pseudospin symmetry in relativistic mean field theory, J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji, P. Ring, A. Arima, *Phys. Rev. C* 58 (1998) R628-R631.
- [147] Relativistic symmetries in nuclei and hadrons, J.N. Ginocchio, *Phys. Rep.* 414 (2005) 165-261.
- [148] Hidden pseudospin and spin symmetries and their origins in atomic nuclei, Haozhao Liang, Jie Meng, Shan-Gui Zhou, *Phys. Rep.* 570 (2015) 1-84.
- [149] Isovectorial pairing in solvable and algebraic models, Sergio Lerma, Carlos E Vargas and Jorge G Hirsch, *Journal of Physics: Conference Series* 322 (2011) 012011,
- [150] Projected Shell Model and High-Spin Spectroscopy, Kenji Hara, Yang Sun, *Int. J. Mod. Phys. E* 4 (1995) 637-785.
- [151] Multiphonon gamma vibrational bands and the triaxial projected shell model, Yang Sun, Kenji Hara, Javid A. Sheikh, Jorge G. Hirsch, Victor Velazquez et al., *Phys.Rev.C* 61 (2000) 064323.
- [152] Hartree-Fock-Bogolyubov calculations with the D1 effective interactions on spherical nuclei, J. Decharge, D. Gogny, *Phys. Rev. C* 21 (1980) 1568-1593.

- [153] Coexistence in even-mass nuclei, J.L. Wood, K. Heyde, W. Nazarewicz, M. Huysse, P. van Duppen, *Phys. Rep.* 215 (1992) 101-201.
- [154] Theoretical Spectroscopy and the fp shell, A. Poves, A. Zuker, *Phys. Rep.* 70 (1981) 235-314.
- [155] Effective interaction for nuclei of $A = 50-100$ and Gamow-Teller properties, M Honma, T Otsuka, T Mizusaki, M Hjorth-Jensen and B A Brown, *Journal of Physics: Conference Series* 20 (2005) 2.
- [156] Full pf shell model study of $A=48$ nuclei, E. Caurier, A.P. Zuker, A. Poves, G. Martinez-Pinedo, *Phys. Rev. C* 50 (1994) 225-236.
- [157] Intrinsic vs Laboratory Frame Description of the Deformed Nucleus Cr-48, E. Caurier, J.L. Egido, G. Martinez-Pinedo, A. Poves, J. Retamosa, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 2466-2469.
- [158] Microscopic description of Gamow-Teller transitions in middle pf shell nuclei by a realistic shell model calculation, H. Nakada, T. Sebe, *J. Phys. G* 22 (1996) 1349-1362.
- [159] Shell model calculations of stellar weak interaction rates: I. Gamow-Teller distributions and spectra of nuclei in the mass range $A=45-65$, E. Caurier, K. Langanke, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, *Nucl. Phys. A* 653 (1999) 439-452.
- [160] Evaluation of electron capture reaction rates in Ni isotopes in stellar environments, Toshio Suzuki, Michio Honma, Hélène Mao, Takaharu Otsuka, and Toshitaka Kajino, *Phys. Rev. C* 83 (2011) 044619.
- [161] Gamow-Teller Strengths in Proton-Rich Exotic Nuclei Deduced in the Combined Analysis of Mirror Transitions, Y. Fujita, T. Adachi, P. von Brentano, G. P. A. Berg, C. Fransen, D. De Frenne, H. Fujita, K. Fujita, K. Hatanaka, E. Jacobs, K. Nakanishi, A. Negret, N. Pietralla, L. Popescu, B. Rubio, Y. Sakemi, Y. Shimbara, Y. Shimizu, Y. Tameshige, A. Tamii, M. Yosoi, and K. O. Zell, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 212501.

- [162] High-resolution study of Gamow-Teller transitions from the ^{46}Ti to the $T_z = 0$ nucleus ^{46}V . T. Adachi et al., Phys. Rev. C 73 (2006) 024311.
- [163] Observation of Low- and High-Energy Gamow-Teller Phonon Excitations in Nuclei, Y. Fujita et al., Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 112502.
- [164] $T_z = -1 \rightarrow 0$ β decays of ^{54}Ni , ^{50}Fe , ^{46}Cr , and ^{42}Ti and comparison with mirror ($^3\text{He}, t$) measurements, F. Molina et al., Phys. Rev. C 91 (2015) 014301.
- [165] Systematic shell-model study of β -decay properties and Gamow-Teller strength distributions in $A \approx 40$ neutron-rich nuclei, Sota Yoshida, Yutaka Utsuno, Noritaka Shimizu, and Takaharu Otsuka, Phys. Rev. C 97 (2018) 054321.
- [166] Effective g_A in the pf shell, G. Martínez-Pinedo, A. Poves, E. Caurier, and A. P. Zuker, Phys. Rev. C 53 (1996) R2602(R).
- [167] Correlation between the quenching of total GT+ strength and the increase of E2 strength, N. Auerbach, D.C. Zheng, L. II Zamick, B.Alex Brown, Phys. Lett. B 304 (1993) 17-23.
- [168] Correlations between the quadrupole deformation, $B(E2; 0_1 \rightarrow 2_1)$ value, and total GT + strength, D. Troltenier, J.P. Draayer, J.G. Hirsch, Nucl. Phys. A 601 (1996) 89-102.
- [169] Nuclear Structure Features of Gamow-Teller Excitations, Vladimir Zelevinsky, Naftali Auerbach, Bui Minh Loc, Phys. Rev. C 96 (2017) 044319.
- [170] Gamow-Teller strength distributions in fp-shell nuclei, P. B. Radha, D. J. Dean, S. E. Koonin, K. Langanke, and P. Vogel, Phys. Rev. C 56 (1997) 3079.
- [171] Shell model Monte Carlo studies of $N = Z$ pf-shell nuclei with pairing-plus-quadrupole Hamiltonian, K. Langanke, R. Vogel, Dao-Chen Zheng, Nucl. Phys. A 626 (1997) 735-750.

- [172] Pairing and the structure of the pf-shell $N \sim Z$ nuclei, Alfredo Poves, Gabriel Martínez-Pinedo, Phys. Lett. B 430 (1998) 203-208.
- [173] Competition of isoscalar and isovector proton-neutron pairing in nuclei, G. Martínez-Pinedo K. Langanke, P. Vogel, Nucl. Phys. A 651 (1999) 379-393.
- [174] Isoscalar neutron-proton pairing and SU(4)-symmetry breaking in Gamow-Teller transitions, K. Kaneko, Y. Sun, and T. Mizusaki, Phys. Rev. C 97 (2018) 054326.
- [175] Role of $T = 0$ pairing in Gamow-Teller states in $N = Z$ nuclei, C.L. Bai, H. Sagawa, M. Sasano, T. Uesaka, K. Hagino, H.Q. Zhang, X.Z. Zhang, F.R. Xu, Phys. Lett. B 719 (2013) 116-120.
- [176] Isovector spin-singlet ($T = 1, S = 0$) and isoscalar spin-triplet ($T = 0, S = 1$) pairing interactions and spin-isospin response, H Sagawa, C L Bai and G Colò, Phys. Scr. 91 (2016) 083011 Invited Comment.
- [177] Gamow-Teller transitions and neutron-proton-pair transfer reactions, P. Van Isacker, A.O. Macchiavelli, Phys. Lett. B 780 (2018) 414-417.
- [178] E. Caurier, shell model code ANTOINE, IRES, Strasbourg 1989-2004.
- [179] Present Status of Shell Model Techniques, E. Caurier, F. Nowacki, Acta Physica Polonica 30 (1999) 705.
- [180] Theoretical spectroscopy and the fp shell, A. Poves and A. Zuker, physics Reports Vol. 70, Issue 4, April 1981, pages 235-314.
- [181] The Elliott $SU(3)$ model in the pf-shell, J.G. Hirsch, P.O. Hess, L. Hernández, C. Vargas, T. Beuschel y J.P. Draayer Rev. Mexicana de física 45, pp.86-91 (1999).
- [182] Odd-even staggering of binding energies as a consequence of pairing and mean-field effects, J. Dobaczewski, P. Magierski,

- W. Nazarewicz, W. Satula y Z. Szymanski Phys. Rev. C 63, (2001).
- [183] Shapes and shells in nuclear structure, Nilsson, S.G y Ragnarsson, I., Primera edición, Cambridge university press, Gran Bretaña, Cambridge, (1995).
- [184] Física nuclear y de partículas, Ferrer Soria, Antonio, Segunda edición, Universidad de Valencia, Valencia, España, (2006).
- [185] National Nuclear Data Center, <https://www.nndc.bnl.gov>.
- [186] High-resolution study of Gamow-Teller excitations in the $^{42}\text{Ca}(^3\text{He,t})^{42}\text{Sc}$ reaction and the observation of a "low-energy super-Gamow-Teller state", Y. Fujita et. al. Phys. Rev. C 91 (2015) 064316.
- [187] High-resolution study of $T_z = +2 \rightarrow +1$ Gamow-Teller transitions in the $^{44}\text{Ca}(^3\text{He,t})^{44}\text{Sc}$ reaction, Y. Fujita et. al. Phys. Rev. C 88 (2013) 014308.
- [188] High-resolution study of Gamow-Teller transitions in the $^{48}\text{Ti}(^3\text{He,t})^{48}\text{V}$ reaction, E. Ganioglu et. al. Phys. Rev. C 93 (2016) 064326.
- [189] The nuclear many-body problem, Peter Ring y Peter Schuck, Primera edición, Springer-Verlag, Nueva York-Berlín-Heidelberg, (1980).
- [190] Nuclear collective motion models and theory, David J. Rowe, Primera edición, World Scientific, Singapore, (1970).
- [191] From Nucleons to Nucleus, Suhonen, J., Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg, (2007).
- [192] The nuclear shell model, Kris L.G. Heyde, Segunda corrección y edición alargada, Springer-Verlag, Nueva York-Berlín-Heidelberg, (1994).
- [193] Quantum theory of angular momentum, D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev y V. K. Khersonskii, Reimpresión de primera edición, World Scientific, Singapore, (1989).