Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Introducción al Número Domático Romano en Gráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

R O G E R L Ó P E Z T A P I A

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. GERARDO MIGUEL TECPA GALVÁN

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Introducción al Número Domático Romano en Gráficas

por

Roger López Tapia

Tesis presentada para obtener el título de

Matemático

en la

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Datos del jurado

1.-Datos del Alumno:
López
Tapia
Roger
5534435019
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
414039649

2.-Datos del Tutor
M. en C.
Gerardo Miguel
Tecpa
Galván

3.- Datos del Sinodal 1
Dra.
Hortensia
Galeana
Sánchez

4.- Datos del Sinodal 2
Dra.
María del Rocío
Sánchez
López

5.- Datos del Sinodal 3
Mat.
Laura
Pastrana
Ramírez

6.- Datos del Sinodal 4
M. en C.
Narda
Cordero
Michel

7.-Datos del Trabajo Escrito
Introducción al Número Domático
Romano en Gráficas
120p
2020

Agradecimientos

Este trabajo ha sido uno de mis más grandes esfuerzos en lo que llevo de vida por lo que mencionaré a muchas personas enseguida.
En primer lugar, agradezco a mis sinodales por su tiempo y sus observaciones al trabajo. En particular, a mi asesor que siempre me guió con paciencia, disposición, interés y paciencia (fue mucha paciencia).
A mis amigos, tanto los de Tuxtla que son Mafer, Ricardo y Karen, que han estado todos estos años de amistad; y a mis amigos que hice en el camino de la carrera: Fer Alvarez, Abi, Gerardo, Erika, David, Brian, Daniel y Fer Josafath. Aún más, a Mauricio, Ana, Mariana, Ruby, Luis Felipe y Dani, puedo decir que sin ustedes no hubiera llegando tan lejos y son entrañables para mí.
Debo mencionar a Miguel Corona, que fui muy afortunado de haberme encontrado en tu curso y después me diste mi primera oportunidad laboral, además de siempre aconsejarme con simpatía. A Alejandra porque después de estos años amigos, colegas, confidentes y ahora eres una hermana mayor para mí.
A todos mis tíos por su cariño, apoyo incondicional y ver lo mejor en mí incluso cuando yo no lo veía. A Tony y Rosi porque siempre me siento acogido en su casa y tienen lugar como segundos padres. A Nery por su sabiduría, su guía, su presencia en esta ciudad, y por decirme las cosas coso son, hechas y netas.
A mis primos que verdaderamente son mis hermanos: Cali, Toño, Mayo, Citlali. Los amo y estimo tanto.
A mis abuelos, Israel, Medelina, Tomás y Esperanza, porque son mis pilares de los valores de familia, esfuerzo y perseverancia.
A Noemí, que aunque con subidas y bajas, sé que eres una amiga y parte de mi hogar. A mi hermano Yael, que quiero ser parte de tu vida.
A mi madre, que fuiste mi primera maestra. Tu cariño ha estado presente cada día de mi vida.
Por supuesto a mi padre, que claramente sin él no pude haber llegado a donde estoy (muchas gracias, papá). A Alhelí, mi hermana, que eres fundamental en mi vida y no puedo imaginar como sería si no estuvieras en ella.
Y a quien lea este trabajo, también te agradezco. Espero te sea de ayuda.

Índice general

Introducción

La teoría de gráficas es una de las ramas de las matemáticas con una de las mayores cantidades de aplicaciones. En su historia, se tiene al problema de los puentes de Köningsberg como la motivación más famosa de su descubrimiento. La ciudad de Köningsberg, hoy en día Kaliningrado, es atravesada por el río Preguel; esto genera dos islotes dentro de la ciudad misma en el afluente del río. Estas islas estaban conectadas al resto de la ciudad y entre ellas mismas por un total de siente puentes. En el siglo XVII, los ciudadanos de Köningsberg se preguntaban si era posible realizar un recorrido por las cuatro áreas de tierra de la ciudad atravezando los siete puentes y regresar al punto de partida con la condición de solamente pasar por cada puente una sola vez. (*Ver figura 1*)

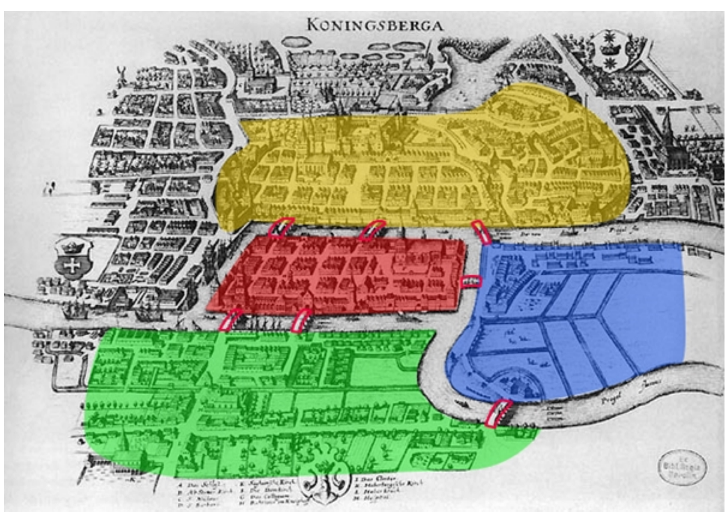


Figura 1: La ciudad de Könisgsberg y las cuatro regiones de tierra generadas por el río Preguel

Este problema llegó a las manos del matemático suizo Leonhard Euler, quien en 1735 mostró que no era posible realizar dicho recorrido con tales condiciones [1] y también sentó las bases para lo que después sería la teoría de gráficas. El modelo que Euler propuso consistía en asociar a cada región de tierra un punto en el plano, y unía dos puntos con un segmento continuo por cada puente entre las regiones correspondientes. (*Ver figura 2*)

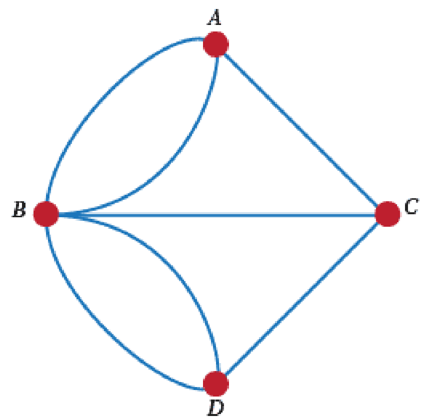


Figura 2: Representación del problema de los puentes de Königsberg con una gráfica con aristas múltiples.

Desde su concepción, la teoría de gráficas se ha trabajado de distintas maneras, tanto en su forma teórica y pura sobre las propiedades de las gráficas, como en sus aplicaciones en otras ramas de las matemáticas como la topología y el álgebra, y en otras disciplinas como la química, la física y la economía. Su relevancia en áreas como la computación, las ingenierías y la investigación de operaciones se debe a la modelación de problemas por medio de gráficas y su fácil representación visual y computacional. Una de las ramas de la teoría de gráficas que ha tenido mucho interés en los últimos años es la que concierne a los conjuntos dominantes. Un conjunto dominante en una gráfica es un subconjunto de vértices tal que todos los vértices de la gráfica cumplen con estar en dicho conjunto, o bien existe un vértice de dicho conjunto al cual es adyacente. Desde su aparición, han surgido muchas variantes del concepto de conjunto dominante, como lo son los conjuntos dominantes conexos, conjuntos dominantes independientes, los conjuntos dominantes totales, las funciones de Grundy, funciones de dominación romana, etcétera.

El objetivo de este trabajo de tesis consiste en la intersección de dos conceptos de dominación de gráficas: el número dómatico y la dominación romana. El concepto de número domático fue introducido por E. J. Cockayne y S. T. Hedetniemi en [6], al colorear los vértices de una gráfica de tal forma que dado cualquier color, el conjunto de vértices con dicho color es un conjunto dominante. A la mayor cantidad de colores en una coloración con esta propiedad se le conoce como el número domático de una gráfica. La palabra *domático* es una traducción del inglés *domatic*, el cual surge como una combinación de las palabras *dominating* y *chromatic*. Desde la introducción del concepto de número domático, han aparecido variantes de éste en los últimos años, como son el número domático conexo, donde los vértices con un mismo color inducen una gráfica conexa; o bien el número domático independiente, donde los vértices con un mismo color no son adyacentes dos a dos.

El segundo concepto de trabajo es el de la dominación romana. Éste fue propuesto por I. Stewart [13] en su artículo *Defend the Roman Empire!* publicado en 1999. Stewart menciona el siguiente problema que se le presentó al emperador Constatino en el siglo IV A.C. Durante la época de su imperio, Constantino protegía a los pueblos conquistados de alguna de las siguientes dos maneras (*Ver figura 3*):

(a) A un pueblo conquistado se le resguardaba con una legión específica, en cuyo caso, se dice que el pueblo estaba asegurado.

(b) Un pueblo sin legiones asignadas tenía un camino accesible a otro poblado en el cual habían dos legiones asegurándolo. De esta forma, Constantino podía enviar a una legión del pueblo asegurado al otro sin que el primero dejara de ser seguro.

El problema que se le presentó a Constantino era encontrar la manera de proteger su territorio con la menor cantidad de legiones posibles considerando las condiciones anteriores.

En este trabajo, repasamos algunos de los primeros resultados que se han dado sobre el número de dominación romana de una gráfica, como su relación respecto al orden y al grado máximo de la gráfica.

Este problema fue planteado como un problema en gráficas por E. J. Cockayne, en [7], de la siguiente manera: a los pueblos los representamos como vértices de una gráfica, y dos vértices son adyacentes si existe un camino accesible entre los pueblos correspondientes. La asignación de las legiones romanas se puede ver como una función sobre los vértices de la gráfica que asigna los valores 0, 1 y 2, donde a un vértice se le asigna el valor 0 si

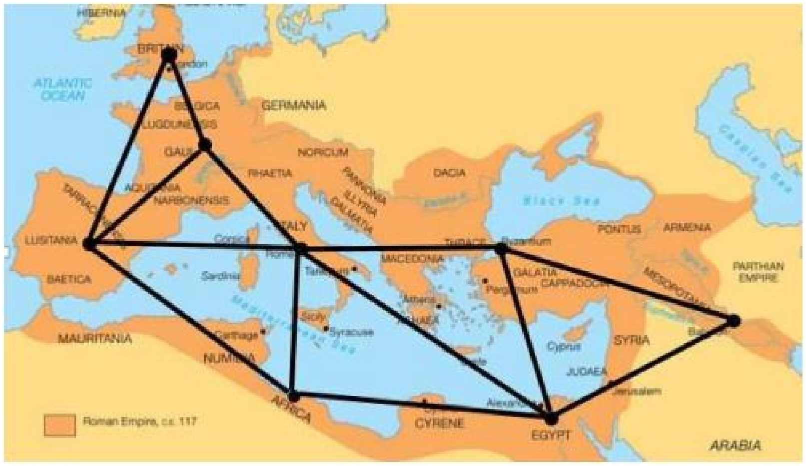


Figura 3: El Imperio Romano al siglo IV A. C.

no está asegurado y se le asigna el valor 1 o 2 si el pueblo tiene asignada 1 o 2 legiones, respectivamente. Además, del punto (b), es necesario que en la gráfica un vértice con imagen 0 sea adyacente a al menos un vértice con imagen 2. A una función de este estilo se le conoce como una *función de dominación romana*. A la suma de las imágenes de los vértices bajo una función de dominación romana se le conoce como el *peso* de dicha función. Usando lo anterior, el problema de Constantino se reduce a encontrar una función de dominación romana con peso mínimo.

El objetivo de esta tesis es estudiar un concepto que combina al número domático con las funciones de dominación romana, a saber, el número domático romano de una gráfica. Éste fue propuesto por S.M. Sheikholeslami y L. Volkmann [12] en su árticulo *The Roman domatic number of a graph* publicado en 2010. Una *familia de dominación romana* sobre una gráfica es una familia de funciones de dominación romana tal que para todo vértice de la gráfica, la suma de las imágenes de dicho vértice bajo todas las funciones de la familia es a lo más 2. El número domático romano de una gráfica es la mayor cantidad de funciones que se pueden tener en una familia de dominación romana sobre la gráfica. Los primeros resultados sobre el número domático romano se presentan en [12], y luego por H. Tan en el artículo [14], donde se prueba que el problema de decidir si una gráfica tiene número domático romano al menos tres es un problema NP-completo. En este trabajo de tesis se estudian los primeros resultados sobre el número domático romano, como la relación de los números de la gráfica y sus componentes conexas o bloques, y así también, se analizan las distintas operaciones de gráficas y el número domático romano de éstas.

El trabajo está conformado por cuatro capítulos. En el primero partimos de la definición de gráficas y establecemos los conceptos con los cuales se trabajará, como los caminos, árboles, familias de gráficas (como las gráficas completas, las gráficas bipartitas, los abanicos y las ruedas). Además, se enuncian y se demuestran diversos resultados de la teoría de gráficas en general, que nos serán útiles en los capítulos posteriores. También presentamos las definiciones de las operaciones binarias de gráficas como la suma y el producto cartesiano, llegando a la composición y la corona de una gráfica y una familia de gráficas.

El segundo capítulo consiste en el desarrollo de dos de los conceptos de dominación de gráficas antes mencionados: el número domático y la dominación romana. Se enuncian y demuestran varios resultados referentes a estos dos conceptos, así como cotas para el número domático y para el número de dominación romana.

En el capítulo tres presentamos al número domático romano de una gráfica, viendo algunas propiedades que las familias de dominación romana. Se calcula el número domático romano de los ciclos, los árboles y los cactus. Veremos la relación del número domático romano de las componentes conexas de una gráfica y el de la gráfica original. También daremos un resultado similar respecto a los bloques terminales de una gráfica. Introduciremos el concepto de una gráfica d_R-*crítica*, así como una caracterización de las gráficas en las cuales el número domático coincide con el número domático romano.

En el cuarto y último capítulo, mostramos el comportamiento del número domático romano de la gráfica resultante de las distintas operaciones de gráficas ya mencionadas, calculando éste exactamente en el caso de la suma de un vértice y la suma de una gráfica con una gráfica completa, así como cotas inferiores al número domático romano del producto cartesiano, la composición y la corona de una gráfica.

Capítulo 1

Conceptos y resultados básicos

En este capítulo daremos la definición de una gráfica y primeros resultados de la teoría de gráficas. También se dan las definiciones de subgráficas, caminos, componentes conexax, bloques y algunas operaciones de gráficas.

1.1. Nociones básicas en gráficas

Una **gráfica simple G** es una pareja ordenada (V, A) tal que V es un conjunto no vacío y los elementos del conjunto A son parejas no ordenadas de dos elementos distintos de V. A los elementos de V les llamaremos **vértices**, y a los elementos de A les llamaremos **aristas**. Para enfatizar que V es el conjunto de vértices de la gráfica G, denotamos a V como $V(G)$. Del mismo modo, al conjunto de aristas de G, lo denotamos como $A(G)$. A cada arista $\{u, v\}$ de A simplemente la denotaremos por uv. Cabe mencionar que uv y vu denotan a la misma arista dado que representan a la misma pareja no ordenada. A las gráficas con una cantidad finita de vértices se les conoce como **gráficas finitas**. Respectivamente, a las gráficas con una cantidad infinita de vértices se les conoce como **gráficas infinitas**. Para cuestiones de este trabajo, consideraremos gráficas finitas solamente. Si G es una gráfica, al número de vértices de G se le llama el **orden de G**, y al número de aristas de G se le llama el **tamaño de G**.

Una de las características interesantes de las gráficas es que se pueden representar geométricamente en el plano asociando puntos a cada uno de sus vértices y a una arista uv se le denota como un segmento continuo entre los puntos correspondientes a u y v.

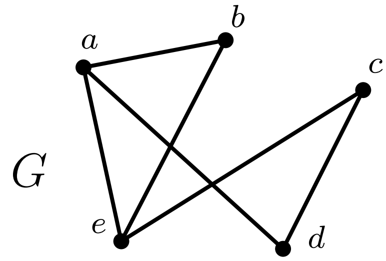


Figura 1.1: Representación geométrica de una gráfica G del ejemplo 1.1

Ejemplo 1.1. En la figura 1.1, la gráfica G tiene como conjunto de vértices $\{a, b, c, d, e\}$, y tiene como conjunto de aristas a $\{ab, ad, ae, be, ce, cd\}$.

Si e es una arista de G, con $e = uv$, decimos que u y v son **los extremos de la arista *e***, y también que los vérticees u y v son **adyacentes en *G***. Si e y f son dos aristas distintas de G, decimos que e y f son **aristas adyacentes** si comparten un extremo. Si u es un vértice de G y e es una arista de G, donde u es un vértice extremo de e, entonces u y e son **incidentes** el uno con el otro. Dado un vértice v de G, definimos a **la vecindad de *v*** como el conjunto de todos los vértices de G que son adyacentes a v y la denotamos por $N_G(v)$. Al conjunto $N_G(v) \cup \{v\}$ se le conoce como **la vecindad cerrada de *v***, y la denotamos por $N_G[v]$. Nos referiremos a la vecindad (vecindad cerrada, respectivamente) de un vértice v por $N(v)$ ($N[v]$ si es la vecindad cerrada, respectivamente) cuando sea claro que nos referimos a la gráfica G.

Dado un vértice v de G, definimos **el grado del vértice *v* en *G*** como el número de vértices en G que son adyacentes a v, y lo denotamos por $\delta_G(v)$. Cuando no exista ambigüedad de la gráfica en la que se está referenciado, nos referiremos simplemente al grado de un vértice v de G por $\delta(v)$. El grado de un vértice v coincide con el número de elementos en $N_G(v)$, o bien, con el número de aristas de G que son incidentes con v. Decimos que un vértice de G es **aislado** si tiene grado 0, y a un vértice de grado uno se le conoce como un **vértice final**. Se definen al **grado máximo de *G*** y al **grado mínimo de *G***, denotados por $\Delta(G)$ y $\delta(G)$ respectivamente, como

$$\Delta(G) = \text{máx}\{\delta_G(v) \colon v \in G\}$$
$$\delta(G) = \text{mín}\{\delta_G(v) \colon v \in G\}$$

Ocurre que para todo vértice v de una gráfica G,

$$0 \leq \delta(G) \leq \delta_G(v) \leq \Delta(G)$$

.

Observación 1.1.1. En toda gráfica G de orden p, todo vértice es adyacente a lo más a $p-1$ vértices. De esto, podemos ver que $\Delta(G) \leq p-1$.

Teorema 1.1.2 (El primer teorema de la teoría de gráficas)**.** *Si G es una gráfica de tamaño q, entonces*

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2q.$$

Demostración. Cuando se suman los grados de los vértices de G, cada arista de G es contada dos veces, una vez por cada uno de sus vértices incidentes. □

Un vértice v de una gráfica G se dice que es **par** si su grado es par. En caso contrario; es decir, si el grado de v es impar, entonces v es un vértice **impar**. Una gráfica G es **regular** si existe un número $r \geq 0$ tal que todos los vértices de G tienen grado r. En este caso, también decimos que G es ***r*-regular**. Una gráfica G es **vacía** si $A(G) = \emptyset$. Una gráfica es **completa** si para cualesquiera dos vértices distintos, estos son adyacentes. A una gráfica completa de orden p la denotamos por K_p.

Observación 1.1.3. Una gráfica completa G de orden p tiene tamaño $\frac{p(p-1)}{2}$ y es $(p-1)$-regular.

Demostración. Sea v un vértice de una gráfica completa G. Como G es una gráfica completa, entonces v es adyacente a todos los vértices G distintos a v. Así, v es adyacente a $p-1$ vértices; es decir, $\delta(v) = p-1$. Y esto para todo vértice de G. Por lo que G es una gráfica $(p-1)$-regular.

Por otro lado, ahora calcularemos el tamaño de G. Del teorema 1.1.2, tenemos que

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2q,$$

siendo q el tamaño de G. Como G es $(p-1)$-regular, se tiene que

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = \sum_{v \in V(G)} p-1 = p(p-1.)$$

Por lo tanto, tenemos que $2q = p(p-1)$, y así, G tiene tamaño $\frac{p(p-1)}{2}$. $\square$

Sean H y G dos gráficas. Se dice que H y G son **iguales** si $V(H) = V(G)$ y $A(H) = A(G)$. H es una **subgráfica de G** si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Si H es una subgráfica de G y $V(H) \neq V(G)$ o $A(H) \neq A(G)$, se dice que H es una **subgráfica propia de G**. Si H es una subgráfica de G y ocurre que $V(H) = V(G)$, entonces H es una **subgráfica generadora de G**. Para un subconjunto S no vacío de vértices de G, la **subgráfica inducida de S en G**, denotada por $G\langle S\rangle$, es la gráfica que tiene por conjunto de vértices a S y dos vértices de $G\langle S\rangle$ son adyacentes en $G\langle S\rangle$ si y solo si son adyacentes en G. H es una **subgráfica inducida de G** si existe un subconjunto S de $V(G)$ tal que $H = G\langle S\rangle$.

Observación 1.1.4. Toda gráfica G de orden p es subgráfica generadora de la gráfica K_p.

Observación 1.1.5. Para toda gráfica G se satisface que $G\langle V(G)\rangle = G$.

Demostración. Sea G una gráfica y $V(G)$ el conjunto de vértices de G. Por la definición de subgráfica inducida, el conjunto de vértices de $G\langle V(G)\rangle$ es el conjunto $V(G)$, por lo que $V(G\langle V(G)\rangle) = V(G)$. Ahora, veamos que $A\Big(G\langle V(G)\rangle\Big) = A(G)$. Recordando la definición de gráfica inducida, dos vértices de $G\langle V(G)\rangle$ son adyacentes si y solo si son adyacentes en G. Si e es una arista de $G\langle V(G)\rangle$, entonces e es una arista de G. Ahora, supongamos que e es una arista de G. De esta manera, existen dos vértices u y v de G tales que $e = uv$. Como $V(G) = V(G\langle V(G)\rangle)$, se tiene que u y v son vértices de $G\langle V(G)\rangle$, y como u y v son adyacentes en G, entonces u y v son adyacentes en $G\langle V(G)\rangle$; es decir, e es una arista de $G\langle V(G)\rangle$. De esta manera, $A(G) = A(G\langle V(G)\rangle)$, concluyendo así que $G\langle V(G)\rangle = G$. $\square$

Tomamos a u y v como vértices no adyacentes de una gráfica G. Denotamos por $G-u$ a la gráfica inducida por el conjunto $V(G) \setminus \{u\}$. De la misma manera, denotamos por $G+uv$ a la gráfica que tiene como conjunto de vértices a $V(G)$ y como conjunto de aristas al conjunto $A(G) \cup \{uv\}$. Si u y v son vértices adyacentes de G, denotamos por $G-uv$ a la gráfica que tiene por conjunto de vértices a $V(G)$ y por conjunto de aristas a $A(G) \setminus \{uv\}$.

Un conjunto S de vértices de G se dice que es **independiente** si cualesquiera dos vértices de S no son adyacentes entre sí. Un conjunto X de aristas de G se dice que es un **apareamiento** si cualesquiera dos aristas de X no son adyacentes.

Dada una gráfica G, definimos al **complemento de G**, denotada por $\overline{G}$, como la gráfica que tiene como conjunto de vértices al conjunto $V(G)$, y donde uv es una arista de $\overline{G}$ si y solo si u y v no son adyacentes en G.

Observación 1.1.6. Para toda gráfica G, $uv \notin A(G)$ si y solo si $uv \in A(\overline{G})$.

Lema 1.1.7. *Si G es una gráfica de orden p y $v \in V(G)$, entonces $\delta_G(v) + \delta_{\overline{G}}(v) = p - 1$ y $\delta(\overline{G}) + \Delta(G) = p - 1$.*

Demostración. Sea v en $V(G)$ y H una gráfica completa de orden p tal que G es subgráfica generadora de H. Por un lado, sabemos que $\delta_H(v) = p - 1$, pues H es completa. Consideremos a los conjuntos $N_G(v)$ y $N_{\overline{G}}(v)$. De la observación 1.1.6, se puede ver que $N_G(v) \cap N_{\overline{G}}(v) = \emptyset$. Por otro lado, tenemos que $N_G(v) \cup N_{\overline{G}}(v) \subseteq N_H(v)$. Sea u en $N_H(v)$. Nuevamente, de la observación 1.1.6, se tiene que u está en $N_G(v)$ o u está en $N_{\overline{G}}(v)$. Por tanto, u es elemento de $N_G(v) \cup N_{\overline{G}}(v)$, y así, $N_G(v) \cup N_{\overline{G}}(v) = N_H(v)$, por lo cual, $|N_G(v) \cup N_{\overline{G}}(v)| = |N_H(v)|$, concluyendo que $\delta_G(v) + \delta_{\overline{G}}(v) = p - 1$.

En particular, si v es tal que $\delta_G(v) = \Delta(G)$, entonces $\delta_{\overline{G}}(v) = p - 1 - \Delta(G)$. Además, $\delta_{\overline{G}}(v) = \delta(\bar{G})$, pues de no ser así, existe un vértice u en $V(\bar{G})$ tal que $\delta_{\bar{G}}(u) < \delta_{\bar{G}}(v)$. De esta manera, se tiene que $(p - 1) - \delta_G(u) < (p - 1) - \delta_G(v)$, y así, $\delta_G(u) > \delta_G(v)$, lo cual contradice el hecho de que $\delta_G(v) = \Delta(G)$. Por lo tanto, $\delta(\overline{G}) + \Delta(G) = p - 1$. $\square$

Dos gráficas G y H son **isomorfas** si existe una función $f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $uv \in A(G)$ si y solo si $f(u)f(v) \in A(H)$. De ocurrir lo anterior, defimos que f es un **isomorfismo de gráficas**. Denotamos como $G \cong H$, si G y H son isomorfas. Decimos que una gráfica G es **autocomplementaria** si $G \cong \overline{G}$.

Una gráfica G es **bipartita** si existe una partición de $V(G)$, digamos $\{U, W\}$ tal que U y W son conjuntos independientes. A dicha partición le llamaremos **bipartición**. En general, decimos que una gráfica G es ***k*-partita** si existe una partición de $V(G)$ en k subconjuntos, digamos $\{V_1, \ldots, V_k\}$ tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, V_i es un conjunto independiente. Decimos que una gráfica G es **bipartita completa** si G es bipartita, con partición en conjuntos independientes $\{U, V\}$ de $V(G)$, donde cualquier vértice en U es adyacente a cualquier vértice en V. Si una gráfica bipartita completa tiene partición de vértices $\{U, W\}$, con n vértices en U y m vértices en V, entonces denotamos a la gráfica por $K_{n,m}$.

Observación 1.1.8. Para toda gráfica bipartita completa $K_{m,n}$ se cumple que su orden $n+m$ y su tamaño es nm.

Demostración. Sea $K_{m,n}$ una gráfica bipartita completa, y digamos que $\{U, V\}$ es la bipartición de $V(K_{n,m})$, donde U tiene n vértices y V tiene m vértices, y todos los vértices de U son adyacentes a todos los vértices de V.

Como $\{U, V\}$ es una partición de $V(K_{n,m})$, entonces U y V son conjuntos ajenos, no vacíos y, además, $U \cup V = V(K_{n,m})$. De esta manera tenemos que $|V(K_{m,n})| = |U \cup V|$; es decir, $|V(K_{m,n}| = |U| + |V|$. Por lo tanto, el orden de $K_{m,n}$ es $m+n$.

Calcularemos ahora el tamaño de $K_{m,n}$. Denotemos por q al tamaño de $K_{m,n}$. Del teorema 1.1.2, tenemos que

$$\sum_{v \in V(K_{m,n})} \delta(v) = 2q.$$

Como $\{U, V\}$ es una partición de $V(K_{m,n})$,

$$\sum_{v \in V(K_{m,n})} \delta(v) = \sum_{v \in U} \delta(v) + \sum_{v \in V} \delta(v).$$

Observamos que si v es elemento de U, entonces $N(v) = V$, esto pues U es un conjunto independiente y que v es adyacente a todos los vértices de V. De esto, $\delta(v) = |V|$; es decir, $\delta(v) = m$. Análogamente, si v es un vértice de V, entonces $N(v) = U$, pues V es un conjunto independiente y v es adyacente a todos los vértices de U. Por tanto, $\delta(v) = |U|$, y de esta forma, $\delta(v) = n$. De esta manera, se sigue que

$$\sum_{v \in U} \delta(v) + \sum_{v \in U} \delta(v) = \sum_{v \in U} m + \sum_{v \in V} n.$$

Como U tiene n elementos y V tiene m elementos, entonces $\sum_{v \in U} m = mn$ y $\sum_{v \in V} n = mn$. De esta manera llegamos a que $2q = 2mn$; es decir, $q = mn$, concluyendo así que $K_{m,n}$ tiene tamaño mn.

□

Un **camino en una gráfica** G es una sucesión de vértices de G, digamos $(v_0, v_1, ..., v_k)$, en la cual, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ ocurre que $v_i v_{i+1} \in A(G)$. Decimos que v_0 es vértice inicial del camino y que v_k es el vértice final del camino. Un uv**-camino en** G es un camino que tiene a u como vértice inicial y a v como vértice final, respectivamente. A los vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ se les conoce como **vértices internos del camino**. Un **paseo** es un camino que no repite aristas; es decir, que para todo subconjunto $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $i \neq j$, se tiene que $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$. Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices; es decir, que para cada subconjunto $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$, si $i \neq j$, entonces $v_i \neq v_j$. Un **camino cerrado** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice (es decir, $v_0 = v_k$). La **longitud de un camino** W, con $W = (v_0, v_1, ..., v_k)$, se define como el número k, y se denota por $long(W)$. Un **ciclo** es un camino cerrado, digamos $(v_0, \ldots, v_k)$ de longitud al menos tres en el cual para todo subconjunto $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que $v_i \neq v_j$.

Sea $C = (u_0, u_1, ..., u_k)$ un camino en una gráfica G, y consideremos a dos vértices u_i y u_j, con $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, k\}$ y $i \leq j$. Denotamos por $u_i C u_j$ a la subsucesión $(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j)$ de C, y decimos que $u_i C u_j$ es un **subcamino de** $\boldsymbol{C}$. Si Q es otro camino en G, digamos que $Q = (v_0, v_1, ..., v_r)$, y $u_k = v_0$, denotamos por $C \cup Q$ a la sucesión $(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, v_1, \ldots, v_r)$. A $C \cup Q$ se le conoce como la **unión de los caminos** C **y** Q. Nótese que la longitud de $C \cup Q$ se define como la suma de las longitudes de C y de Q. Si xy es una arista en G y x es el vértice final de C, entonces $C \cup xy$ denota a la sucesión $(u_0, u_1, ..., u_{k-1}, x, y)$.

Denotaremos algunas familias de gráficas, como ya hicimos con las gráficas completas. A las gráficas que son ciclos de longitud n se les denota por C_n, y se les conoce como n-ciclos, donde $V(C_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ y $A(C_n) = \{v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{n-2} v_{n-1}, v_{n-1} v_0\}$. A las gráficas que son trayectorias de orden n y de longitud $n-1$ se les suele denotar por P_n,

$$V(P_n) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$$
$$A(P_m) = \{v_0 v_1, \ldots, v_{n-2} v_{n-1}\}$$

Para $p \geq 3$, definimos al **abanico de orden** $\boldsymbol{p}$, denotada por F_p, a la gráfica tal que $V(F_p) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ y $A(F_p) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{p-2} v_{p-1}\} \cup \{v_0 v_i \colon i \in \{1, \ldots, p-1\}\}$. Para $p \geq 3$, definimos a **la rueda de orden** $\boldsymbol{p+1}$,denotada por W_p, como la gráfica tal que $V(W_p) = \{v_0, \ldots, v_p\}$ y $A(W_p) = \{v_1 v_2, \ldots, v_{p-2} v_{p-1}, v_{p-1} v_1\} \cup \{v_0 v_i \colon i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Teorema 1.1.9. *Si una gráfica contiene un uv-camino, entonces dicho camino contiene*

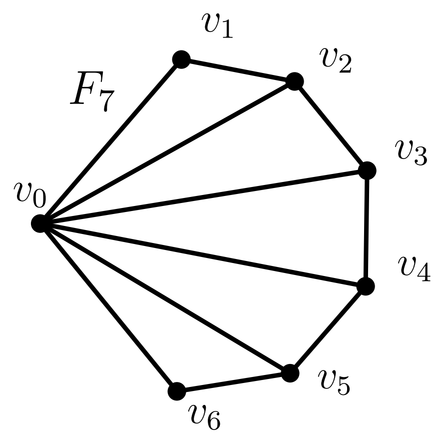


Figura 1.2: Abanico de orden 7

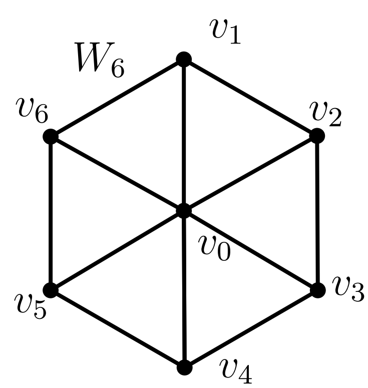


Figura 1.3: Rueda de orden 7

una uv-trayectoria.

Demostración. Sean G una gráficam u y v vértices de G y $P = (u = u_0, u_1, \ldots, u_k = v)$ un uv-camino en G. Procederemos por inducción sobre el número de vértices que P repite, al cual denotaremos por n.

Base de inducción. Cuando ocurre que $n = 0$, tenemos que P no repite vértices, y así P es una trayectoria.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $n \geq 0$ y que para todo uv-camino que repita a lo más n vértices, éste contiene una uv-trayectoria.

Paso inductivo. Supongamos que P repite $n + 1$ vértices. Así, para algún par de subíndices i y j en $\{0, \ldots, k\}$, tales que $i \neq j$ se tiene que $u_i = u_j$. Consideramos ahora a P' como el uv-camino definido como

$$P = (u = u_0, u_1 \ldots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k = v).$$

Así, tenemos que P' es un uv-camino que repite a lo más n vértices. Por la hipótesis de inducción, tenemos que P' contiene una uv-trayectoria, digamos T. Como P' es un subcamino de P, se tiene que T es una uv-trayectoria en P, concluyendo así la demostración.

□

Teorema 1.1.10. *Si G es una gráfica con $\delta(G) \geq 2$, entonces existe en G un ciclo de longitud al menos $\delta(G) + 1$.*

Demostración. Sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$. Sea P una trayectoria en G de longitud máxima, digamos $P = (x_0, \ldots, x_k)$. Afirmamos que todos los vecinos de x_0 son vértices de P; es decir, $N_G(x_0) \subseteq \{x_0, \ldots, x_k\}$. De no ser así, existiría $w \in N_G(x_0)$ tal que para todo i en $\{1, \ldots, k\}$ se tendría que $w \neq x_i$. Con esto, considerando al camino $wx_0 \cup P$, se tendría una trayectoria en G que tiene una longitud mayor a la de P, lo cual no es posible dada la elección de P. Sea $j \in \{1, \ldots, k\}$ el mayor subíndice tal que x_j y x_0 son adyacentes. Observamos que $j \geq \delta(G)$, y, así, que el camino cerrado $(x_0 P x_j) \cup (x_j x_0)$ es un ciclo en G de longitud al menos $\delta(G) + 1$. □

Dados dos vértices u y v de una gráfica G, definimos a la **distancia de u a v** como el mínimo de las longitudes de las uv-trayectorias en G. Denotamos a la distancia de u a v por $d_G(u, v)$, o simplemente por $d(u, v)$ si no existe ambigüedad de la gráfica en la cual trabajamos. Si no existen uv-trayectorias en G, definimos a la distancia entre éstos como $d(u, v) = \infty$. A una uv-trayectoria cuya longitud es igual a la distancia de u a v se le llama **geodésica** (o bien, uv-geodésica).

En una gráfica G, diremos que una gráfica es **conexa** si para cualesquiera dos vértices de G, digamos u y v, existe una uv-trayectoria. De no ser así, diremos que G es **inconexa**.

Lema 1.1.11. *En una gráfica G, se define la relación sobre $V(G)$ tal que dos vértices u y v están relacionados si y solo si existe un uv-camino en G. Afirmamos que esta relación es de equivalencia sobre $V(G)$.*

Demostración. Sean G una gráfica y u, v y w vértices de G. Claramente, la sucesión (u) es un uu-camino en G, por lo que u está conectado consigo mismo, haciendo que la relación sea reflexiva.
Supongamos que los vértices u y v están conectados. Así existe una uv-camino P en G, digamos que $P = (u = u_o, u_1, \ldots, u_k = v)$. Consideremos al camino P' definido como $P' = (v = u_k, u_{k-1}, \ldots, u_0 = u)$. Tenemos que P' es una vu-camino, y así, la relación es simétrica.
Por último, supongamos que u y v están relacionados y que v y w están relacionados en $V(G)$. Sea P una uv-camino y Q una vw-camino. De esta manera, el camino $P \cup Q$ es un uw-camino en G; y así, u y w están relacionados. Llegamos a que la relación es transitiva. Por lo ya probado, es una relación de equivalencia sobre $V(G)$. $\square$

Del lema 1.1.11, se tiene que para toda gráfica G, se puede inducir una partición $\{V_1, \ldots, V_k\}$ sobre $V(G)$ donde cada V_i es una clase de equivalencia de la relación definida en el lema 1.1.11. A las subgráficas inducidas $G_1, \ldots, G_k$ definidas por $G_i = G\langle V_i \rangle$ se les conoce como **compones conexas** de G. Denotamos por $k(G)$ al número de componentes conexas de G.

Lema 1.1.12. *Una gráfica G es conexa si y solo si $k(G) = 1$.*

Demostración. Supongamos que G es una gráfica conexa. Así, cualesquiera dos vértices u y v están conectados. De esto, la partición inducida de la relación *estar conectados* consiste en el conjunto $\{V(G)\}$, lo cual implica que G solamente tiene una componente conexa.
Ahora supongamos que $k(G) = 1$. Sean u y v vértices de G. Como G solamente tiene una componente conexa, u y v están en dicha componente; es decir, existe una uv-trayectoria en G. Por lo tanto, G es una gráfica conexa. $\square$

Decimos que una gráfica es un **árbol** si dicha gráfica es conexa y acíclica; es decir, si no tiene ciclos. Decimos que una gráfica es un **bosque** si sus componentes conexas son árboles. A un vértice de grado 1 de un bosque se le conoce como **hoja**.

Lema 1.1.13. *Todo árbol de orden n, con $n \geq 2$, tiene al menos dos hojas.*

Demostración. Sea T un árbol con al menos dos vértices. Supongamos que T no tiene hojas. Vemos que para todo v en $V(T)$, $\delta(v) \geq 2$, pues T es conexo. En particular,

$\delta(T) \geq 2$. Por el teorema 1.1.10, se tiene que existe un ciclo de longitud al menos $\delta(T)+1$ contradiciendo la condición de que T es acíclica.

Ahora supongamos que T tiene al menos una hoja, digamos u. Sea P una trayectoria de longitud máxima en T que tiene a u como vértice inicial. Llamemos v al vértice final de P.

Afirmación: v es una hoja en T.

> Supongamos que v no es una hoja; es decir, $\delta(v) \neq 1$. Como T es conexo, entonces $\delta(v) \neq 0$, por lo que $\delta(v) \geq 2$. Con esto, existe un vértice w en T tal que w es adyacente a v. Si w es un vértice en P, entonces el camino $wPv \cup vw$ es un ciclo en T, lo cual contradice la condición de que T no tiene ciclos. Si w no es un vértice de P, entonces el camino $P \cup vw$ es una trayectoria en T de longitud mayor que $long(P)$, lo cual es una contradicción a la elección de P. De esta manera, v es una hoja de T.

Por lo tanto, existen en T al menos dos hojas. □

Como siguiente paso mencionaremos algunas de las operaciones de gráficas que se trabajarán más adelante.
Consideremos a dos gráficas ajenas por vértices, G y H. La **unión de G y H**, denotada por $G \cup H$, es la gráfica donde

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$$
$$A(G \cup H) = A(G) \cup A(H).$$

De la definición, se sigue inmediatamente el siguiente resultado.

Lema 1.1.14. *Para un vértice v en $V(G \cup H)$ se tiene que*

$$\delta_{G\cup H}(v) = \begin{cases} \delta_G(v) & si\ v \in V(G) \\ \delta_H(v) & si\ v \in V(H) \end{cases}$$

Si $G_1, \ldots, G_k$ son gráficas ajenas por vértices, entonces definimos **la unión de las gráficas $G_1, \ldots, G_k$** como la gráfica denotada por $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ donde

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{k} G_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$$
$$A\left(\bigcup_{i=1}^{k} G_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} A(G_i).$$

Si G y H son ajenas por vértices, entonces la **suma de $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$** es la gráfica denotada por $G + H$ en la cual

$$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$$
$$A(G + H) = A(G) \cup A(H) \cup \{uv\colon u \in V(G) \text{ y } v \in V(H)\}.$$

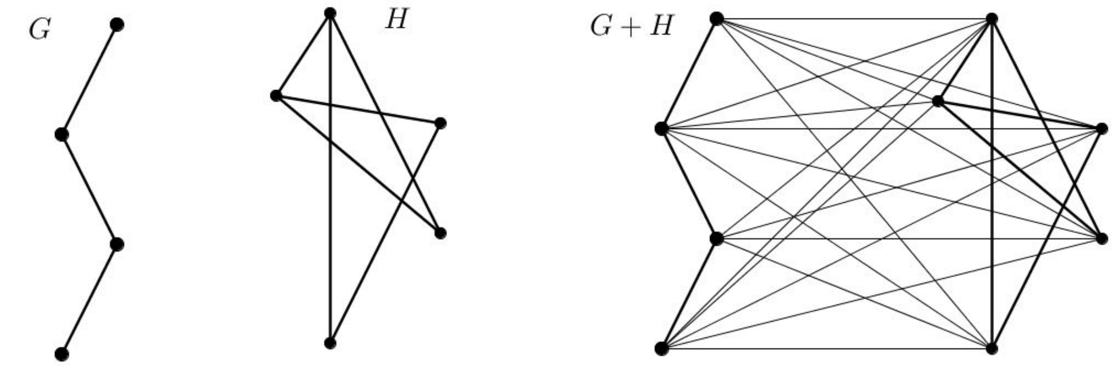
Lema 1.1.15. *Sean $p(G)$ el orden de G y $p(H)$ el orden de H. Para un vértice v en $V(G + H)$ se tiene que*

$$\delta_{G+H}(v) = \begin{cases} \delta_G(v) + p(H) & si\ v \in V(G) \\ \delta_H(v) + p(G) & si\ v \in V(H). \end{cases}$$

Definimos al **producto cartesiano de $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$** como la gráfica, denotada por $G\Box H$, en la cual $V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$ y dos vértices (u, v) y (s, t) son adyacentes en $G\Box H$ si y solo si ocurre una de estas dos condiciones: $us \in A(G)$ y $v = t$, ó bien, $u = s$ y $vt \in A(H)$.

Lema 1.1.16. *Para un vértice (u, v) en $V(G\Box H)$ ocurre que*

$$\delta_{G\Box H}\left((u, v)\right) = \delta_G(u) + \delta_H(v).$$



(a) Gráfica G (b) Gráfica H (c) Gráfica $G+H$

Figura 1.4: Para las gráficas G (a) y H (b), la gráfica $G+H$ (c) representa a la suma de G y H.

Si G es una gráfica y k es un número natural, con $k \geq 2$, entonces kG denota a la gráfica definida como $V(kG) = \bigsqcup_{i=1}^{k} V(G)$ y dos vértices (u,i) y (v,j) son adyacentes en kG si y solo si u y v son adyacentes en G y $j=i$. donde $\bigsqcup$ denota a la unión disjunta de conjuntos.

Teorema 1.1.17. *Sean G y H dos gráficas, y supongamos que $V(H) = \{u_1, \ldots, u_p\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, consideremos al conjunto $S_i = \{(v, u_i) \colon v \in V(G)\}$. Entonces G es isomorfa a $(G \square H)\langle S_i \rangle$.*

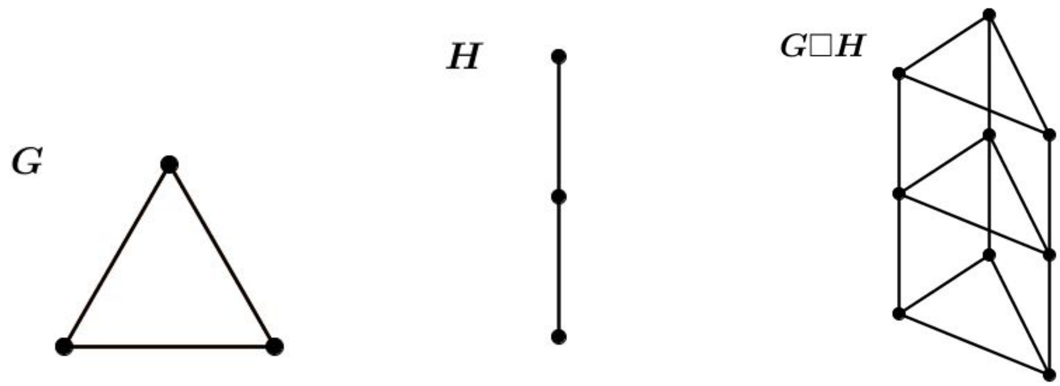
Demostración. Sean G y H dos gráficas, con $(VH) = \{u_1, \ldots, u_p\}$. Sean i en $\{1, \ldots, p\}$ y $S_i = \{(v, u_i) \colon v \in V(G)\}$.

Observamos que $V\Big((G \square H)\langle S_i \rangle\Big) = S_i$ por la definición de subgráfica generada. Definimos a la función

$$f \colon V(G) \to S_i$$
$$f(v) = (v, u_i),$$

y afirmamos que f es un isomorfismo de gráficas.

Sean u y w dos vértices de G tales que $f(u) = f(w)$. Por la definición de f, $(u, u_i) = (w, u_i)$. Por la definición de parejas ordenadas, se tiene que $u = w$. Por lo que f es una



(a) Gráfica G (b) Gráfica H (c) Gráfica $G\Box H$

Figura 1.5: Las gráficas G (a) y H (b) junto con la gráfica $G\Box H$ (c), el producto cartesiano de ellas.

función inyectiva.

Si (u, u_i) es un vértice de S_i, se puede observar que $f(u) = (u, u_i)$ de la definición de f. Por lo tanto, f es una función biyectiva.

Supongamos que u y w son dos vértices adyacentes en G. Esto ocurre si y solo si (u, u_i) y (w, u_i) son vértices adyacentes en $G\Box H$ por la definición de producto cartesiano, y $f(u) = (u, u_i)$, $f(w) = (w, u_i)$. Por lo tanto, u y w sin adyacentes en G si y sólo si $f(u)$ y $f(w)$ son adyacentes en $(G\Box H)\langle S_i\rangle$.

Concluimos así que G y $(G\Box H)\langle S_i\rangle$ son isomorfas. $\Box$

Para las siguientes definiciones de operaciones, supondremos que G es una gráfica y $\mathcal{H}$ es una familia de gráficas ajenas por vértices dos a dos, con $\mathcal{H} = \{G_v \colon v \in V(G)\}$.

Definimos a **la composición de G respecto a $\mathcal{H}$**, denotada por $G[\mathcal{H}]$, como la gráfica tal que

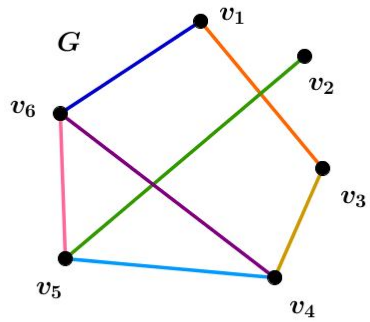
$$V\,(\,G[\mathcal{H}]\,) = \bigcup_{v \in V(G)} V(G_v)$$

$$A\,(\,G[\mathcal{H}]\,) = \left(\bigcup_{v \in V(G)} A(G_v) \right) \cup \{xy \colon x \in V(G_v), y \in V(G_u), vu \in A(G)\}$$

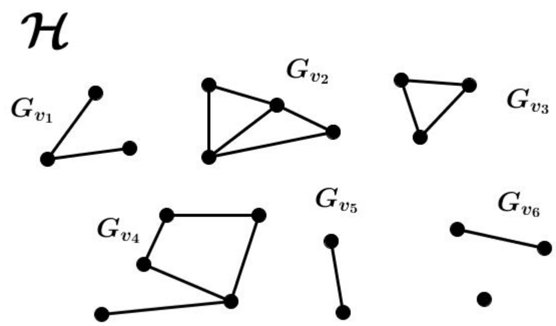
Definiremos a **la corona de G respecto a $\mathcal{H}$** como la gráfica, denotada por $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$, tal que

$$V\left(G \circ \mathcal{H}\right) = V(G) \cup \left(\bigcup_{v \in V(G)} V(G_v) \right)$$

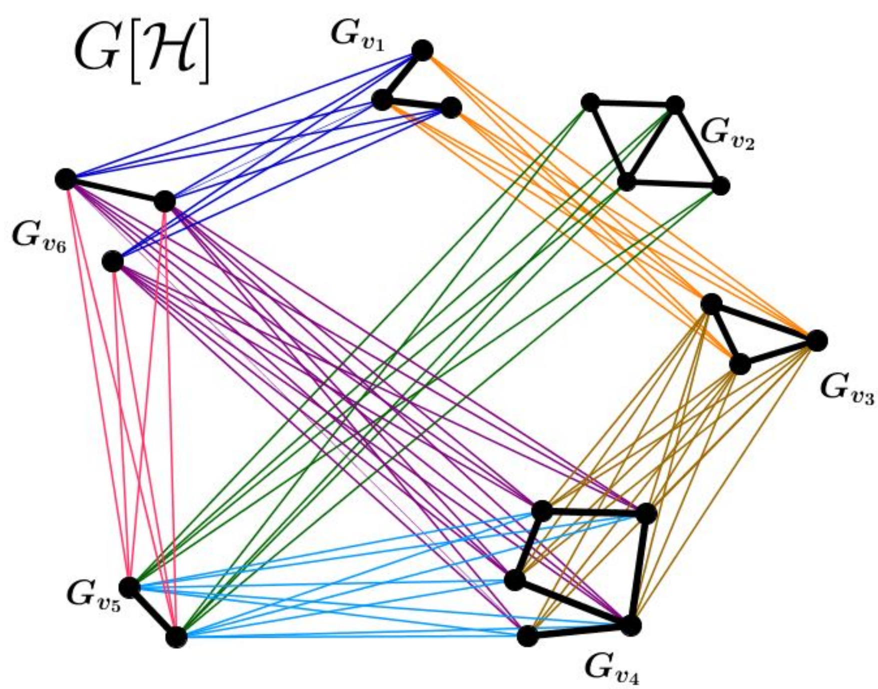
$$A\left(G \circ \mathcal{H}\right) = A(G) \cup \left(\bigcup_{v \in V(G)} A(G_v) \right) \cup \{vu \colon v \in V(G), u \in V(G_v)\}$$



(a) Gráfica G

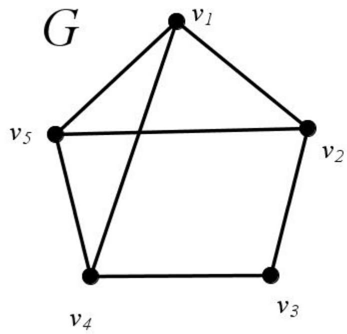


(b) Familia de gráficas $\mathcal{H}$

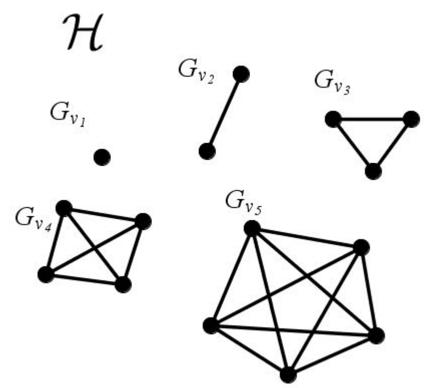


(c) Gráfica $G \circ H$

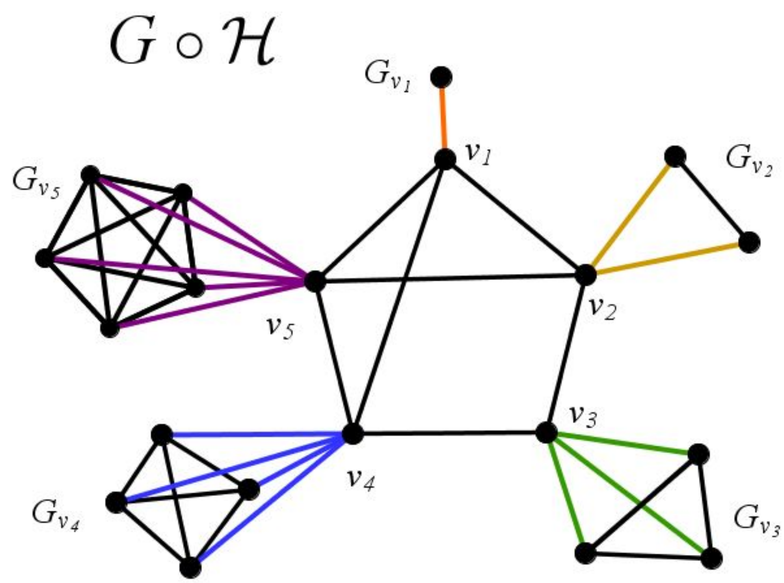
Figura 1.6: Las gráficas G y la familia de gráficas H junto con la gráfica $G \circ H$, la composición de G respecto a $\mathcal{H}$.



(a) Gráfica G



(b) Familia de gráficas $\mathcal{H}$



(c) Gráfica $G \circ H$

Figura 1.7: Las gráficas G y la familia de gráficas H junto con la gráfica $G \circ H$, la corona de G respecto a $\mathcal{H}$.

Lema 1.1.18. *Si G es una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_v : v \in V(G)\}$ una familia de gráficas ajenas por vértices, entonces para todo vértice x en $V(G \circ \mathcal{H})$ se cumple*

$$\delta_{G\circ\mathcal{H}}(x) = \begin{cases} \delta_G(x) + |V(G_x)| & \text{si } x \in V(G) \\ \delta_{G_v}(x) + 1 & \text{si } x \in V(G_v) \text{ para algún } v \text{ en } V(G) \end{cases}$$

En una gráfica conexa G, decimos que un vértice v de G es un **vértice de corte de *G*** si la gráfica $G - v$ es inconexa. Decimos que un subconjunto S de vértices de G es un **conjunto de corte de *G*** si $G - S$ es inconexa, o bien, si $G - S$ es isomorfa a la gráfica trivial K_1. De manera análoga, decimos que una arista e de G es un **puente** si $G - e$ es una gráfica inconexa. Decimos que un subconjunto de aristas de G, diremos X, es un **conjunto de corte de aristas de *G*** si $G - X$ es una gráfica inconexa.

Resultados inmediatos de estas definiciones son los siguientes:

Lema 1.1.19. *Si G es una gráfica de orden p, con $p \geq 2$, entonces para todo vértice v de G, el conjunto $V(G) \setminus \{v\}$ es un conjunto de corte.*

Proposición 1.1.20. *Para toda gráfica G no trivial, el conjunto $A(G)$ es un conjunto de corte de aristas.*

Dadas las gráficas G y B, decimos que la gráfica B es un **bloque de *G*** si B es una subgráfica conexa de G sin vértices de corte y maximal respecto a la contención con esta propiedad; es decir, si existe otra subgráfica H en G tal que B es subgráfica de H, entonces H tiene un vértice de corte o $H = B$. Decimos que B es un **bloque terminal de *G*** si B tiene un único vértice de corte de G.

Lema 1.1.21. *Si G es una gráfica conexa y v es un vértice de G tal que v no es un vértice de corte, entonces existe un único bloque B de G tal que v es elemento de $V(B)$.*

Lema 1.1.22. *Si G es una gráfica y v es un vértice de G tal que v no es de corte, entonces existe un bloque B de G tal que $N_G[v] \subseteq V(B)$.*

Demostración. Sea G una gráfica conexa y v un vértice de G tal que v no es un vértice de corte de G. Por el lema 1.1.21, existe un único bloque B de G tal que v es vértice de B. Sea u un vértice de G tal que u es adyacente a v. Si u es un vértice de corte de G, entonces

u es elemento de $V(B)$. Si u no es de corte, por el lema 1.1.21, existe un único bloque B' de G tal que u es un vértice de B'. Dada la unicidad de dicho bloque, se tiene que $B = B'$. Esto último ocurre para todo vértice u en $N_G(v)$. Por lo tanto, $N_G[v] \subseteq V(B)$. $\square$

Decimos que una gráfica es un **cactus** si todos sus bloques son ciclos o son isomorfos a K_2.

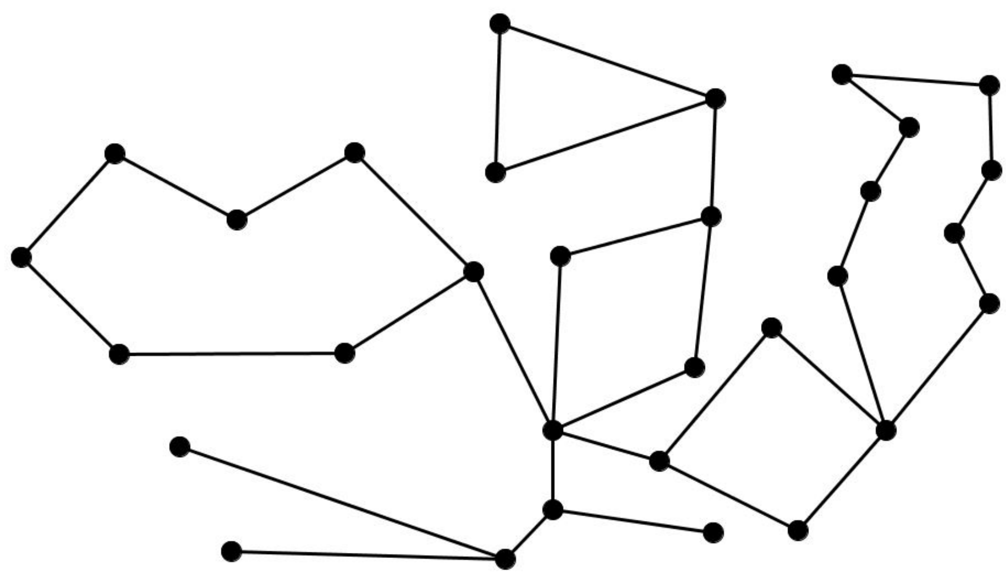


Figura 1.8: Ejemplo de un cactus.

1.2. Funciones sobre gráficas

En esta seción recordaremos nociones básicas de funciones, y daremos algunas caracterizaciones para funciones que tienen como dominio al conjunto de vértices de una gráfica.

Lema 1.2.1. *Dada una gráfica G, un conjunto C y una función $f\colon V(G) \to C$ se cumplen que*

1. $\bigcup_{y \in C} f^{-1}[\{y\}] = V(G)$.
2. $f^{-1}[\{x\}] \cap f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$ *si* $x \neq y$.

Este resultado, aunque es básico de la teoría de conjuntos, nos será útil al momento de caracterizar funciones a partir de la colección de imágenes inversas de los elementos del codominio.

Dada una gráfica G, n un número natural y una función $f\colon V(G) \to \{0, , \ldots, n\}$, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ denotaremos por V_i^f al conjunto definido como $V_i^f = f^{-1}[\{i\}]$. Del lema 1.2.1, vemos que la colección $\{V_0^f, \ldots, V_n^f\}$ cumple que sus elementos son ajenos dos a dos y que la unión de todos ellos es el conjunto $V(G)$. Escribiremos simplemente V_i cuando no exista ambigüedad de que nos referimos al conjunto inducido por la función f. Definimos a la **pseudo partición inducida por f** como la colección ordenada $(V_0^f, \ldots, V_n^f)$. Cabe mencionar que no utilizamos la palabra *partición* dado que no tiene que ocurrir que cada elemento de la familia $\{V_0^f, \ldots, V_n^f\}$ sea distinto del vacío.

Capítulo 2

Número domático y dominación romana en gráficas

El número domático romano de gráficas es un concepto que surgió de fusionar los conceptos del número domático de gráficas y dominación romana. En este capítulo, repasaremos las definiciones cada uno de ellos y algunos resultados que nos serán útiles posteriomente.

2.1. Número Domático

Decimos que un conjunto S de vértices de una gráfica G es un **conjunto dominante en** G si para todo vértice v de G se tiene que $v \in S$ o bien v es adyacente a al menos un vértice de S.

Dados dos subconjuntos V y U de $V(G)$, decimos que U **domina a** V si $V \subseteq N(U)$, y denotamos este hecho por $V \prec U$.

Se define al **número de dominación de** G, denotado por $\gamma(G)$, como

$$\gamma(G) = \text{mín}\{|S| \colon S \text{ es un conjunto dominante de } G\}.$$

Un conjunto S de vértices de G es un $\boldsymbol{\gamma(G)}$**-conjunto** si S es un conjunto dominante y tiene cardinalidad $\gamma(G)$.

En seguida, presentamos algunos de los resultados ya conocidos sobre el número de dominacón de gráficas.

Lema 2.1.1. *Para toda $p \geq 1$, $\gamma(P_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$.*

Demostración. Para los casos $p = 1$, y $p = 2$, es claro que si $V(P_p) = \{v_1, \ldots, v_p\}$, entonces el conjunto $S = \{v_1\}$ es un conjunto dominante de P_p. Para los siguientes casos, procederemos por inducción fuerte sobre p, con $p \geq 3$.

Base inductiva. Supongamos que $p = 3$. Consideremos a P_3 una trayectoria de longitud 2, con $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A(P_3) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$. De esta manera, tenemos que el conjunto $\{v_2\}$ es un conjunto dominante en P_3; y por lo tanto se cumple $\gamma(P_3) \leq \lceil \frac{3}{3} \rceil$.

Supongamos que $p = 4$, y $V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. En este caso, el conjunto $\{v_1, v_3\}$ es un conjunto dominante de P_4, por lo que $\gamma(P_4) \leq 2 = \lceil \frac{4}{3} \rceil$.

Hipótesis de inducción. Sea $p \geq 5$ y supongamos cierto para toda $m \in \{3, \ldots, p-1\}$ que $\gamma(P_m) \leq \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Paso inductivo. Consideremos que P_p denota a la trayectoria de longitud $p-1$.Digamos que $V(P_p) = \{v_1, \ldots, v_{p-2}, v_{p-1}, v_p\}$ y $A(P_p) = \{v_iv_{i+1} \colon i \in \{1, \ldots, p-1\}$. De esta manera, tenemos que la gráfica $P' = P_p - \{v_{p-2}, v_{p-1}, v_p\}$ es una trayectoria de longitud $p-3$; es decir, $P_p - \{v_{p-2}, v_{p-1}, v_p\} \cong P_{p-3}$, donde P_{p-3} denota a una trayectora de longitud $p-4$.

Por la hipótesis de inducción, tenemos que $\gamma(P') \leq \left\lceil \frac{p-3}{3} \right\rceil$. Sea S un conjunto dominante en P' de cardinalidad $\gamma(P')$. Sabemos que el vértice v_{p-1} es adyacente a v_{p-2} y a v_p. De esto, tenemos que el conjunto $S \cup \{v_{p-1}\}$ es un conjunto dominante en P_p. Por lo tanto, tenemos que

$$\gamma(P_p) \leq |S \cup \{v_{p-1}\}|.$$

Como S es un conjunto de cardinalidad $\gamma(P_{p-3})$, y v_p no es elemento de S, entonces

$$|S \cup \{v_{p-1}\}| = \gamma(P') + 1.$$

De esta manera,

$$\gamma(P') + 1 \leq \left\lceil \frac{p-3}{3} \right\rceil + 1.$$

Podemos observar que

$$\left\lceil \frac{p-3}{3} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{p-3}{3} + 1 \right\rceil.$$

Desarrollando,

$$\left\lceil \frac{(p-3)+3}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil.$$

Por lo tanto,

$$\gamma(P_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil.$$

Concluimos así que para toda $p \geq 1$, $\gamma(P_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$. □

Lema 2.1.2. *Para toda $p \geq 3$, se cumple que $\gamma(C_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$.*

Demostración. Sea $p \geq 3$ y consideremos al ciclo C_p, con $V(C_p) = \{v_1, \ldots, v_p\}$, donde $A(C_p) = \{v_p v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} \colon i \in \{1, \ldots, p-1\}\}$.
Si $p = 3$, entonces el conjunto $\{v_1\}$ es un conjunto dominante de C_1, y del número de dominación, $\gamma(C_3) \leq 1$; es decir, $\gamma(C_3) \leq \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil$.

Ahora, supongamos que $p \geq 4$ y consideremos a P como la subgráfica inducida $C_p - \{v_1, v_2, v_3\}$. Tenemos que $P \cong P_{p-3}$. Consideramos a S un $\gamma(P)$-conjunto. De esta manera, S domina a todos los vértices de C_p con la excepción de v_1, v_2 y v_3. Así, el conjunto $S \cup \{v_2\}$ es un conjunto dominante de C_p; y de esto observamos que

$$\gamma(C_p) \leq |S \cup \{v_2\}|.$$

Como v_2 no es elemento de S, se sigue que

$$|S \cup \{v_2\}| = |S| + 1.$$

Dado que S es un $\gamma(P)$-conjunto,

$$|S| + 1 = \gamma(P) + 1.$$

Por el lema 2.1.1 sabemos que

$$\gamma(P) + 1 \leq \left\lceil \frac{p-3}{3} \right\rceil + 1.$$

Se sigue que

$$\left\lceil \frac{p-3}{3} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{p-3}{3} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil.$$

Por tanto, $\gamma(C_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$.

Concluimos que para toda $p \geq 3$, se cumple que $\gamma(C_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$. $\square$

Dada una gráfica G, decimos que una partición $\mathcal{P}$ de $V(G)$ es una **partición domática de G** si cada elemento de $\mathcal{P}$ es un conjunto dominante de G. Se define al **número domático de G**, denotador por $\mathsf{d}(G)$, como

$$\mathsf{d}(G) = \text{máx}\left\{|\mathcal{P}| \colon \mathcal{P} \text{ es una partición domática de } V(G)\right\}.$$

Decimos que una partición domática $\mathcal{P}$ es una **d-partición** si $\mathcal{P}$ tiene cardinalidad $\mathsf{d}(G)$.

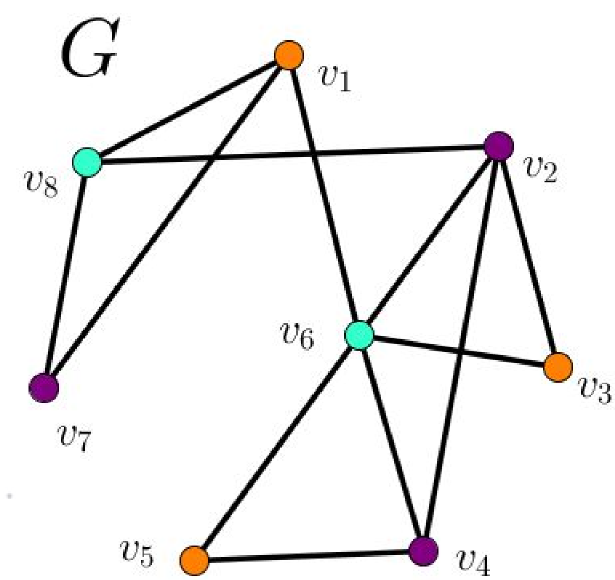


Figura 2.1: En la gráfica G, están representados por colores los elemetos de la partición domática P

Ejemplo 2.1. Sea G definida como se ve en la figura 2.1, se consideran los conjuntos de vértices $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, v_7\}$, $V_3 = \{v_6, v_8\}$. Si $P = \{V_1, v_2, V_3\}$, entonces P es una partición domática de G.

Lema 2.1.3 ([6])**.** *Dada una gráfica G de orden p, se cumple que*

$$\mathsf{d}(G) \cdot \gamma(G) \leq p.$$

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_d\}$ una partición de $V(G)$ en conjuntos dominantes de G. Por un lado, tenemos que

$$d \cdot \gamma(G) = \sum_{i=1}^{d} \gamma(G).$$

Como para toda $i \in \{1, \ldots, d\}$, D_i es un conjunto dominante de G, entonces $\gamma(G) \leq |D_i|$,

$$\sum_{i=1}^{d} \gamma(G) \leq \sum_{i=1}^{d} |D_i|.$$

Como $\mathcal{D}$ es una partición de $V(G)$, sabemos que

$$\sum_{i=i}^{d} |D_i| = p.$$

Por lo tanto, para toda partición en conjuntos dominantes se cumple que $d \cdot \gamma(G) \leq p$. En particular, si se tiene una partición domática, concluimos que $\mathsf{d}(G) \cdot \gamma(G) \leq p$. $\square$

2.2. Dominación Romana

Dada una gráfica G, una **función de dominación romana sobre $\boldsymbol{G}$** es una función $f \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ tal que si v es un vértice de G con $f(v) = 0$ entonces v es adyacente al menos a un vértice u, tal que $f(u) = 2$. Si f es una función de dominación romana en G, se define **el peso de $\boldsymbol{f}$** como el valor $\sum_{v \in V(G)} f(v)$, y se le denota por $\boldsymbol{\omega(f)}$.

Ejemplo 2.2. Sean G la gráfica definida como se ve en la figura 2.2, y $f \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ definida como

$$\begin{array}{llll} f(v_1) = 2 & f(v_3) = 0 & f(v_5) = 0 & f(v_7) = 0 \\ f(v_2) = 1 & f(v_4) = 2 & f(v_6) = 1 & f(v_8) = 2. \end{array}$$

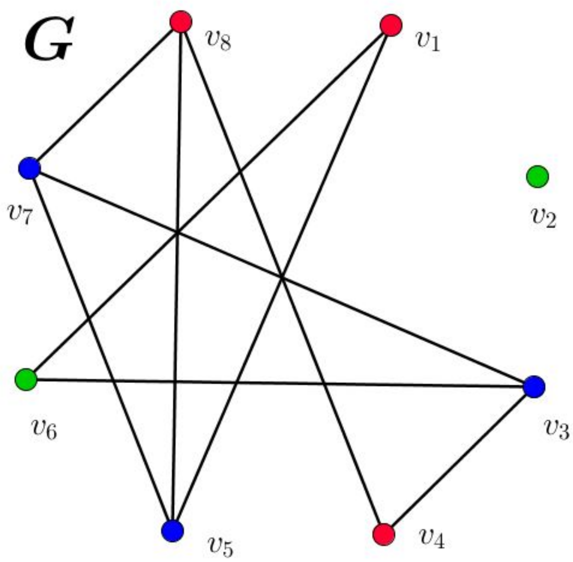


Figura 2.2: En la gráfica G, se representan a las imágenes de una función de dominación romana con los colores de los vértices.

Vemos en este ejemplo que justamente, la función f es una función de dominación romana, pues todos los vértices de imagen 0 bajo f son adyacentes a al menos un vértice de imagen 2 bajo f.

En los siguientes resultados, trabajaremos funciones de dominación romana sobre una gráfica. Para evitar alguna duda sobre la existencia de una función de este tipo sobre cualquier gráfica, damos el siguiente resultado.

Lema 2.2.1. *Dada una gráfica G, siempre existe al menos una función de dominación romana.*

Demostración. Si G es una gráfica, podemos considerar la función $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ tal que para todo $v \in V(G)$, $f(v) = 2$, y así, f es una función de dominación romana. $\square$

Como observación de la definición de función de dominación romana sobre una gráfica, damos el siguiente resultado, el cual nos será útil en pruebas posteriores.

Observación 2.2.2. Si f es una función de dominación romana sobre una gráfica G en la cual existe un vértice v tal que $f(v) = 0$, entonces existe un vértice w en G tal que $f(w) = 2$.

Demostración. De la definición de función de dominación romana, si $f(v) = 0$ para algún vértice v en G, se sigue que v es adyacente, al menos, a un vértice de valor 2 bajo f; es decir, existe u en $V(G)$ tal que u es adyacente a v y $f(u) = 2$. $\square$

De la observación 2.2.2 y de la misma definición de función de dominación romana, damos el siguiente resultado relacionando a dos de los elementos de la pseudo partición inducida por una función de dominación romana. Recordando, si f es una función de dominación romana sobre una gráfica G, entonces su pseudo partición inducida es la terna (V_0^f, V_1^f, V_2^f).

Lema 2.2.3. *Si G es una gráfica y $f\colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ una función de dominación romana sobre G, entonces se cumple que*

$$V_0^f \prec V_2^f.$$

Demostración. Sea G una gráfica y $f\colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ una función de dominación romana sobre G. Consideremos a $\mathcal{P} = \left(V_0^f, V_1^f, V_2^f\right)$ la pseudo partición inducida por f.

Si $V_0^f = \emptyset$, entonces el enunciado se cumple por vacuidad. Supongamos ahora que $V_0^f \neq \emptyset$ y sea v un vértice en V_0^f. Tenemos que $f(v) = 0$, y de la definición de función de dominación romana, existe un vértice u en $V(G)$ tal que $f(u) = 2$ y uv en $A(G)$. De esta manera, u en V_2^f y uv en $A(G)$. Por lo tanto, concluimos que $V_0^f \prec V_2^f$. $\square$

Para fines prácticos, en las ilustraciones correspondientes a funciones de dominación romana sobre alguna gráfica, asignaremos el color azul a los vértices de imagen 0 bajo la función, rojo a los vértices de imagen 2 y verde a los vértices de imagen 1.

Definimos **el número de dominación romana de $\boldsymbol{G}$**, denotado por $\boldsymbol{\gamma_R(G)}$, como

$$\gamma_R(G) = \text{mín}\left\{\omega(f) \colon f \text{ es una función de dominación romana sobre } G\right\}.$$

A una función de dominación romana de peso $\gamma_R(G)$ se le conoce como una **$\boldsymbol{\gamma_R(G)}$-función**, o bien, una γ_R-función si no existe duda de que nos referimos a la gráfica G.

Dada una gráfica y una función de dominación romana sobre ésta, podemos caracterizar a dicha función a partir de su pseudo partición inducida. Para ver esto, el siguiente lema nos muestra las condiciones que hay que pedirle a una terna de subconjuntos de $V(G)$

para asociarle una función de dominación romana que induzca a dicha terna como su pseudopartición.

Lema 2.2.4. *Si $P = (V_0, V_1, V_2)$ es una terna de subconjuntos de $V(G)$ tales que*

1. $\bigcup_{i=0}^{2} V_i = V(G)$,
2. *Para todo subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2\}$ tal que $i \neq j$ se cumple que $V_i \cap V_j = \emptyset$,*
3. $V_0 \prec V_2$,

entonces existe una función de dominación romana f sobre G tal que f tiene a P una como pseudo partición inducida.

Demostración. Sean G una gráfica y $P = (V_0, V_1, V_2)$ una terna de subconjuntos tales que

1. $\bigcup_{i=0}^{2} V_i = V(G)$,
2. Para todo subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2\}$ se cumple que $V_i \cap V_j = \emptyset$,
3. $V_0 \prec V_2$.

Definimos a la función $f \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ como

$$f(v) = \begin{cases} 2 & \text{si } v \in V_2 \\ 1 & \text{si } v \in V_1 \\ 0 & \text{si } v \in V_0. \end{cases}$$

Veamos que f es una función de dominación romana sobre G. Sea v un vértice de G tal que $f(v) = 0$. De la definición de f, tenemos que $v \in V_0$. Como $V_0 \prec V_2$, existe $u \in V_2$ tal que $uv \in V(G)$. De la definición de f, se tiene que $f(u) = 2$. Por tanto, f es una función de dominación romana. Por último, veamos que f tiene como pseudo partición inducida por P. De la definición de f, tenemos que para cada i en $\{0, 1, 2\}$, $V_i = f^{-1}[\{i\}]$. Además, como $\bigcup_{i=0}^{2} V_i = V(G)$ y como para todo subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2\}$ tal que $i \neq j$ se cumple que $V_i \cap V_j = \emptyset$, concluimos que P es la pseudo partición inducida por f. □

De los lemas 1.2.1 y 2.2.4 podemos dar una caracterización de una función de dominación romana sobre una gráfica a partir de su pseudo-partición inducida, lo cual nos resultará útil para analizar resultados posteriores.

Lema 2.2.5. *Dada una gráfica G y una función de dominación romana f sobre G, con pseudo partición inducida (V_0, V_1, V_2), se tiene que*

$$\omega(f) = |V_1| + 2|V_2|.$$

Demostración. Sea G una gráfica y f una función de dominación romana sobre G, con (V_0, V_1, V_2) la pseudo partición inducida de f. De la definición del peso de f se tiene que

$$\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v).$$

Sabemos que $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$, donde V_0, V_1 y V_2 son ajenos dos a dos; tenemos que

$$\sum_{v \in V(G)} f(v) = \sum_{v \in V_0} f(v) + \sum_{v \in V_1} f(v) + \sum_{v \in V_2} f(v).$$

Como para cada i en $\{0, 1, 2\}$ y v en V_i se tiene que $f(v) = i$, entonces

$$\sum_{v \in V_0} f(v) + \sum_{v \in V_1} f(v) + \sum_{v \in V_2} f(v) = \sum_{v \in V_0} 0 + \sum_{v \in V_1} 1 + \sum_{v \in V_2} 2 = |V_1| + 2|V_2|.$$

Por lo tanto, $\omega(f) = |V_1| + 2|V_2|$. $\square$

Lema 2.2.6. *Dada una función de dominación romana f sobre una gráfica G, con pseudo partición inducida (V_0, V_1, V_2), el conjunto $V_1 \cup V_2$ es un conjunto dominante de G.*

Demostración. Sea G una gráfica y f una función de dominación romana sobre G, con pseudo partición inducida (V_0, V_1, V_2). Veamos que el conjunto $V_1 \cup V_2$ es un conjunto dominante de G. Sea v un vértice de G y supongamos que $v \in V(G) \setminus V_1 \cup V_2$. De esto, se sigue que $v \in V_0$, y se tiene que $f(v) = 0$. Como f es una función de dominación romana, existe al menos un vértice u de G tal que v es adyacente a u y $f(u) = 2$. De esto tenemos que $u \in V_2$ y en particular, $u \in V_1 \cup V_2$. Concluimos que v es adyacente al menos a un vértice de $V_1 \cup V_2$. Por tanto, $V_1 \cup V_2$ es un conjunto dominante de G. $\square$

El siguiente resultado se obtiene como una observación a la definición de una función de dominación romana.

Lema 2.2.7. *Dada una gráfica G y f una función de dominación romana sobre G con pseudo-partición inducida $(V_0, V_1.V_2)$, se cumple que*

$$|V_0| \leq \Delta(G) \cdot |V_2|.$$

Demostración. Sea f una función de dominación romana sobre G y v un vértice de G tal que $f(v) = 0$. De la definición de función de dominacón romana, existe un vértice u de G tal que u y v son adyacentes y $f(u) = 2$. De este modo, u es un vértice de V_2 y v es un vértice de $N(V_2)$. De esto se tiene que $V_0 \subseteq N(V_2)$. De esta manera, observamos que

$$|V_0| \leq |N(V_2)|.$$

Por definición de vecindad, tenemos que $N(V_2) = \bigcup_{v\in V_2} N(v)$, y así

$$|N(V_2)| = |\bigcup_{v\in V_2} N(v)|.$$

Por principio de inclusión exclusión, vemos que

$$|\bigcup_{v\in V_2} N(v)| \leq \sum_{v\in V_2} |N(v)|.$$

Además, sabemos que para todo vértice $v \in V(G)$, $\delta(v) = |N(v)|$ y que $\delta(v) \leq \Delta(G)$. Por lo tanto

$$\sum_{v\in V_2} |N(v)| \leq \Delta(G)|V_2|.$$

Llegando a que $|V_0| \leq \Delta(G)|V_2|$. □

En el siguiente lema, damos el número de dominación romana para la familia de gráficas completas.

Lema 2.2.8. *Para toda $p \geq 1$ se tiene que*

$$\gamma_R(K_p) = \begin{cases} 1 & si\ p = 1 \\ 2 & si\ p \geq 2. \end{cases}$$

Demostración. Para $p = 1$, supongamos que $V(K_1) = \{v\}$, y sea $f : V(K_1) \to \{0, 1, 2\}$

una función. Tenemos tres casos para los valores que puede tomar v bajo f. Si $f(v)=0$, tenemos que f no es una función de dominación romana. Si $f(v)\in\{1,2\}$, entonces f es una función de dominación romana sobre K_1. Más aún, tenemos que $\omega(f)=f(v)$. Por lo que, $\gamma_R(K_1)=1$.
Supongamos ahora que $p\geq 2$. Sea v un vértice de K_p y consideremos a la función $f: V(K_p)\to\{0,1,2\}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x=v\\ 0 & \text{si } x\neq v.\end{cases}$$

Notamos que por ser K_p completa y $p\geq 2$, entonces f es una función de dominación romana, y además, $\omega(f)=2$. Veamos ahora que f es una función de peso mínimo. Supongamos que f no es una función de dominación romana de peso mínimo, y sea g una γ_R-función. Tenemos que $\omega(g)<\omega(f)$. De esto se sigue que $\omega(g)\in\{0,1\}$. Afirmamos que $\omega(g)\neq 0$, pues de no ser así, se cumple que para todo vértice $v\in V(K_p)$, $g(v)=0$, contradiciéndo así que g es una función de dominación romana. Por tanto, $\omega(g)=1$; es decir, $\sum_{v\in V(K_p)} g(v)=1$. De esta manera, existe un único vértice $v\in V(K_p)$ tal que $g(v)=1$; y para todo vértice $w\in V(K_p)\setminus\{v\}$, $g(w)=0$. Como $p\geq 2$, entonces existe un vértice u de K_p tal que $u\neq v$. Pero $g(u)=0$, y u no es adyacente a algún vértice de imagen 2 bajo g, lo cual es una contradicción. De esto, llegamos a que no es posible la existencia de una función de dominación romana de peso menor al de f. Por tanto, f es una función de dominación romana de peso mínimo, concluyendo que $\gamma_R(K_p)=2$. □

Lema 2.2.9 ([7])**.** *En toda gráfica G se cumple que*

$$\gamma(G)\leq\gamma_R(G)\leq 2\gamma(G).$$

Demostración. Primero mostraremos que $\gamma(G)\leq\gamma_R(G)$. Sea f una $\gamma_R(G)$-función y consideremos a su pseudo partición inducida (V_0,V_1,V_2). Por lo probado en el lema 2.2.6, tenemos que $V_1\cup V_2$ es un conjunto dominante de G. De acuerdo a la definición del número de dominación de G,

$$\gamma(G)\leq|V_1\cup V_2|.$$

Como V_1 y V_2 son conjuntos ajenos, tenemos que

$$|V_1 \cup V_2| = |V_1| + |V_2|.$$

Como V_2 es un conjunto finito, vemos que

$$|V_1| + |V_2| \leq |V_1| + 2|V_2|.$$

Del lema 2.2.5,

$$|V_1| + 2|V_2| = \omega(f).$$

Por último, como f es una γ_R-función,

$$\omega(f) = \gamma_R(G).$$

Concluimos que $\gamma(G) \leq \gamma_R(G)$.

Ahora veamos que $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$. Si S es un γ-conjunto, la terna $P = (V(G)-S, \emptyset, S)$ cumple las condiciones del lema 2.2.4. Por esto, la función $g\colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ es la función tal que tiene como pseudo partidición inducida a P. Se sigue que

$$\gamma_R(G) \leq \omega(g).$$

Luego, del lema 2.2.5, se tiene que

$$\omega(g) = |\emptyset| + 2|S|.$$

Como S es un $\gamma(G)$-conjunto, vemos que $|S| = \gamma(G)$. De esta manera, llegamos a que

$$\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

□

Ahora daremos una cota inferior para el número de dominación romana de una gráfica G, cuando ésta cumple que $\Delta(G) \geq 1$. Esta cota nos será de utilidad al momento de calcular el número de dominación romana de ciertas familias de gráficas.

Lema 2.2.10 ([5]). *Si G es una gráfica de orden p y grado máximo $\Delta(G)$, con $\Delta(G) \geq 1$,* *entonces*

$$\left\lceil \frac{2p}{\Delta(G)+1} \right\rceil \leq \gamma_R(G).$$

Demostración. Sean G una gráfica de orden p, de grado máximo $\Delta(G) \geq 1$, y f una γ_R-función con pseudo partición inducida (V_0, V_1, V_2). Denotemos a $\Delta = \Delta(G)$.

Veremos que $(\Delta+1)\gamma_R(G) \geq 2p$. Del lema 2.2.5, tenemos que $\gamma_R(G) = |V_1| + 2|V_2|$, y por lo tanto

$$(\Delta+1)\gamma_R(G) = (\Delta+1)(|V_1| + 2|V_2|).$$

Observamos que

$$\begin{aligned}(\Delta+1)(|V_1| + 2|V_2|) &= (\Delta+1)|V_1| + (\Delta+1)2|V_2| \\ &= (\Delta+1)|V_1| + 2\Delta|V_2| + 2|V_2|.\end{aligned}$$

Del lema 2.2.7 sabemos que $|V_0| \leq \Delta|V_2|$, entonces

$$(\Delta+1)|V_1| + 2\Delta|V_2| + 2|V_2| \geq (\Delta+1)|V_1| + 2|V_0| + 2|V_2|.$$

Por tanto,

$$(\Delta+1)\gamma_R(G) \geq (\Delta+1)|V_1| + 2|V_0| + 2|V_2|$$

Como $\Delta \geq 1$, entonces $\Delta + 1 \geq 2$,

$$(\Delta+1)|V_1| + 2|V_0| + 2|V_2| \geq 2|V_1| + 2|V_0| + 2|V_2|.$$

Como los conjuntos V_0, V_1 y V_2 son ajenos dos a dos y la unión de ellos es $V(G)$, tenemos que $|V_0| + |V_1| + |V_2| = p$, luego,

$$2|V_1| + 2|V_0| + 2|V_2| = 2p.$$

Por lo tanto, llegamos a que $(\Delta+1)\gamma_R(G) \geq 2p$. Obtenemos que $\gamma_R(G) \geq \frac{2p}{\Delta(G)+1}$. Como $\gamma_R(G)$ es un número entero, concluimos que $\gamma_R(G) \geq \lceil \frac{2p}{\Delta(G)+1} \rceil$.

□

Lema 2.2.11 ([7]). *Para toda $p \geq 3$, se tiene que $\gamma_R(C_p) = \left\lceil \frac{2p}{3} \right\rceil$.*

Demostración. Por el algoritmo de Euclides, existen $k \geq 1$ y $r \in \{0, 1, 2\}$ tales que $p = 3k + r$. Del lema 2.2.10, tenemos que para toda $p \geq 3$, $\left\lceil \frac{2p}{\Delta(C_p)+1} \right\rceil \leq \gamma_R(C_p)$, es decir, se tiene que $\left\lceil \frac{2(3k+r)}{3} \right\rceil \leq \gamma_R(C_p)$, y de esto,

$$2k + \left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil \leq \gamma_R(G).$$

Por otro lado, del lema 2.1.2 sabemos que $\gamma(C_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$; y del lema 2.2.9 vemos que $\gamma_R(C_p) \leq 2\gamma(C_p)$. De esta manera, vemos que

$$\gamma_R(C_p) \leq 2 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil.$$

Como $p = 3k + r$, entonces

$$\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3k + r}{3} \right\rceil = k + \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil.$$

De esto último, se sigue que

$$\gamma_R(G) \leq 2k + 2 \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil.$$

Por lo tanto,

$$2k + \left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil \leq \gamma_R(G) \leq 2k + 2 \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil.$$

Observemos los siguientes casos:

Caso 1 $r \in \{0, 2\}$

En este caso, observamos que $\lceil \frac{2r}{3} \rceil = 2\lceil \frac{r}{3} \rceil$, y por lo tanto, $\gamma_R(C_p) = \frac{2p}{3}$.

Caso 2 $r = 1$

En este caso podemos ver que $\lceil \frac{2}{3} \rceil = 1$ y que $2\lceil \frac{1}{3} \rceil = 2$. Por lo tanto, tenemos que $\gamma_R(C_p) \in \{2k + 1, 2k + 2\}$. Afirmamos que $\gamma_R(C_p) = 2k + 1$. Sea $V(C_p) = \{v_1, v_2 \ldots, v_{3k}, v_{3k+1}\}$. Definimos a la función $f \colon V(C_p) \to \{0, 1, 2\}$ como

$$f(v_j) = \begin{cases} 2 \quad \text{si } j \in \{1, \ldots, 3k\} \text{ y } j \quad \equiv 2 \pmod 3 \\ 0 \quad \text{si } j \in \{1, \ldots, 3k\} \text{ y } j \not\equiv 2 \pmod 3 \\ 1 \text{ si } j = 3n + 1 \end{cases}$$

Veamos que f es una función de dominación romana sobre C_p. Sea v en $V(C_p)$ tal que $f(v) = 0$. De la definición de f tenemos que $v = v_j$ para alguna j en $\{1, \ldots, 3k\}$ y $j \not\equiv 2$. Supongamos $j \equiv 1 \pmod 3$. Si $j = 1$, entonces $j + 1 \equiv 2 \pmod 3$ y de la definición de f, $f(v_2) = 2$ y $v_1v_2 \in A(C_p)$. Si $j \neq 1$, entonces $j - 1 \equiv 2$ y así, $f(v_{j-1}) = 2$ y $v_{j-1}v_j \in A(C_p)$. Ahora, supongamos que $j \equiv 0 \pmod 3$. Si $j \equiv 0 \pmod 3$, entonces $j-1 \equiv 2 \pmod 3$ y de esta manera, $f(v_{j-1}) = 2$ y $v_{j-1}v_j \in A(C_p)$. Por lo tanto, f es una función de dominación romana sobre C_p. Ahora, observamos que $\omega(f) = 2k+1$. y de la definición de número romano, tenemos que $\gamma_R(C_p) \leq 2k+1$. Como ya habíamos probado, $2k + 1 \leq \gamma_R(C_p)$. Por lo tanto, $\gamma_R(C_p) = 2k + 1$.

De los casos anteriores concluimos que $\gamma_R(G) = \left\lceil \frac{2p}{3} \right\rceil$. □

Como un resultado de este lema, damos el siguiente corolario, el cual calcula el número de dominación romana de los ciclos a partir de su longitud $\pmod 3$.

Lema 2.2.12 ([5]). *Para cada $k \geq 1$, se cumple que*

1. $\gamma_R(C_{3k}) = 2k$,
2. $\gamma_R(C_{3k+1}) = 2k + 1$,
3. $\gamma_R(C_{3k+2}) = 2k + 2$.

Demostración. A partir del lema 2.2.11, tenemos que para C_{3k}

$$\gamma_R(C_{3k}) = \left\lceil \frac{2(3k)}{3} \right\rceil = 2k.$$

Tenemos que, para C_{3k+1},

$$\gamma_R(C_{3k+1}) = \left\lceil \frac{2(3k+1)}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(3k)+2}{3} \right\rceil = \left\lceil 2k + \frac{2}{3} \right\rceil = 2k + 1.$$

Por último, para C_{3k+2}, se tiene que

$$\gamma_R(C_{3k+2}) = \left\lceil \frac{2(3k+2)}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{6k+4}{3} \right\rceil = 2k + 2.$$

□

Nota 2.2.13. En el artículo [12], S. M. Sheikholeslami y L.Volkman presentan una mejora a la cota del lema 2.2.10, donde se dice que si G es una gráfica de orden p, $\Delta(G) \geq 1$ y además si existe $r \in \{2, \ldots, \Delta(G)\}$ tal que $p \equiv r \pmod{\Delta(G)+1}$, entonces

$$\left\lceil \frac{2p}{\Delta(G)+1} \right\rceil + 1 \leq \gamma_R(G). \tag{2.1}$$

Encontramos una inconsistencia en dicho resultado, que desarrollaremos de la siguiente manera:

Analizaremos este resultado para la familia de gráficas C_p. De esto, se tiene que $\Delta(C_p) = 2$, y así,

$$\gamma_R(C_p) \geq \left\lceil \frac{2p}{3} \right\rceil.$$

Ahora, vemos que para $p = 5$, $p \not\equiv 0 \pmod 3$ y $p \not\equiv 1 \pmod 3$, es decir, $p \equiv 2 \pmod 3$.

Según la desigualdad 2.1, se cumple que

$$\gamma_R(C_5) \geq \left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil + 1 = 4 + 1 = 5. \tag{2.2}$$

Sabemos que $5 = 3(1) + 2$, y por lo visto en el lema 2.2.12, se tiene que

$$\gamma_R(C_5) = 2(1) + 2 = 4,$$

lo cual es una contradicción a 2.2.

De hecho, este caso se cumple para toda las gráficas C_p en las cuales $p \equiv 2 \pmod 3$. Este hecho trae consecuencias en pruebas de [12] que discutiremos más adelante.

A partir del orden y del grado máximo de una gráfica, podemos dar una cota superior de su número de dominación romana.

Lema 2.2.14 ([7]). *Si G es una gráfica de orden p, entonces*

$$\gamma_R(G) \leq p - \Delta(G) + 1.$$

Demostración. Sea v en $V(G)$ tal que $\delta(v) = \Delta(G)$., y definimos la función $f\colon V(G) \to$

$\{0,1,2\}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in N(v) \\ 1 & \text{si } x \in V(G) \setminus N[v] \\ 2 & \text{si } x \in \{v\} \end{cases}$$

Afirmamos que f es una función de dominación romana. Sea w en $V(G)$ tal que $f(w) = 0$; es decir, $w \in N(v)$. Por la definición de f, tenemos que $f(v) = 2$. Como w es adyacente a v, se tiene que f es una función de dominación romana.
Calculando el peso de f, tenemos del lema 2.2.5 que

$$\omega(f) = |V(G) - N[v]| + 2|\{v\}|.$$

Por definición, tenemos que $N[v] = N(v) \cup \{v\}$, y de esta manera, $|N[v]| = \Delta(G) + 1$. Se sigue que

$$|V(G) - N[v]| + 2|\{v\}| = p - (\Delta(G) + 1) + 2.$$

Por lo tanto, vemos que

$$\omega(f) = p - \Delta(G) + 1.$$

De este modo, concluimos que $\gamma_R(G) \leq p - \Delta(G) + 1$. $\square$

Lema 2.2.15. *Si G es una gráfica y $H_1, \ldots, H_k$ son las componentes conexas de G, entonces se tiene que*

$$\gamma_R(G) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i).$$

Demostración. Sean G una gráfica y $H_1, \ldots, H_k$ las componentes conexas de G.
Para cada i en $\{1, \ldots, k\}$, consideremos f_i como una $\gamma_R(H_i)$-función. A partir de esto, definimos a $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$ como la función tal que $f(v) = f_i(v)$ si v es vértice de $V(H_i)$. Veamos que f está bien definida. Sea v un vértice en $V(G)$. Como la familia $\mathcal{P} = \{V(H_1), \ldots, V(H_k)\}$ es una partición de $V(G)$, entonces existe una única i en $\{1, \ldots, k\}$ tal que $v \in V(H_i)$. Como f_i es una función sobre H_i, el valor $f_i(v)$ está bien definido. Como $f(v) = f_i(v)$, tenemos que el valor $f(v)$ también está bien definido, por lo que, f es una función bien definida.
Veamos ahora que f es una función de dominación romana en G. Sea v en $V(G)$ tal que $f(v) = 0$. Como $\mathcal{P}$ es una partición de $V(G)$, entonces existe un único índice i en

$\{1,\ldots,k\}$ tal que $v \in V(H_i)$, y por cómo f está definida, tenemos que $f(v) = f_i(v)$, es decir, $f_i(v) = 0$. Puesto que f_i es una función de dominación romana en H_i, tenemos que existe w en $V(H_i)$ tal que $f_i(w) = 2$ y w es adyacente a v en H_i. Dado que H_i es una subgráfica de G, tenemos que w es adyacente a v en G y que $f(w) = f_i(w)$, es decir, $f(w) = 2$. De esta manera, f es una función de dominación romana en G.

De esto último, por la definición de $\gamma_R(G)$, llegamos a que

$$\gamma_R(G) \leq \omega(f).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v).$$

Como $\mathcal{P}$ es una partición te $V(G)$, se tiene que

$$\sum_{v \in V(G)} f(v) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} f(v) \right).$$

Por la definición de f, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} f(v) \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} f_i(v) \right).$$

Por la definición del peso, vemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} f_i(v) \right) = \sum_{i=1}^{k} \omega(f_i).$$

Como cada f_i es una $\gamma_R(H_i)$-función, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(f_i) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i).$$

Tenemos que $\omega(f) \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i)$. Concluyendo que

$$\gamma_R(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i).$$

Probemos ahora que $\sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i) \leq \gamma_R(G)$. Sea f una función de dominación romana en G, y para cada i en $\{1, \dots, k\}$, definimos a $g_i \colon V(H_i) \to \{0, 1, 2\}$ como $g_i(v) = f(v)$. Veamos que para toda i en $\{1, \dots, k\}$, g_i es una función de dominación romana en H_i. Sean i en $\{1, \dots, k\}$ y v en $V(H_i)$ tal que $g_i(v) = 0$. Por la elección de g_i, tenemos que $f(v) = 0$. Como f es una función de dominación romana en G, tenemos que existe w en $V(G)$ tal que $f(w) = 2$ y w es adyacente a v. Como H_i es una componente conexa de G y $v \in V(H_i)$, entonces $w \in V(H_i)$. Así, tenemos que $g_i(w) = f(w)$, es decir, $g_i(w) = 2$ y w es adyacente a v. Concluyendo que g_i es una función de dominación romana en H_i.

Por la definición del número de dominación romana, tenemos que para cada índice i en $\{1, \dots, k\}$,

$$\gamma_R(H_i) \leq \omega(g_i).$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \omega(g_i)$$

Por definición, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(g_i) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} g_i(v) \right).$$

Por la elección de g_i, vemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} g_i(v) \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} f(v) \right).$$

Como $\{V(H_1), V(H_2), \dots, V(H_k)\}$ es una partición de $V(G)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in V(H_i)} f(v) \right) = \sum_{v \in V(G)} f(v).$$

De la defininición del peso de f, tenemos que

$$\sum_{v \in V(G)} f(v) = \omega(f).$$

Llegamos a que $\sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i) \leq \omega(f)$; en particular, si f es una $\gamma_R(G)$-función, tenemos que $\sum_{i=1}^{k}(H_i) \leq \gamma_R(G)$. Concluimos que

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_R(H_i) = \gamma_R(G).$$

$\square$

Capítulo 3

El número domático romano de una gráfica

En este capítulo presentamos el concepto de número domático romano de una gráfica. Éste surge como una variante del concepto de número domático utilizando funciones de dominación romana. Este concepto fue presentado por L. Volkman y S. Sheikholeslami en [12] en 2010, y posteriormente trabajado por H. Tan y su equipo en [14] en el año de 2016.

A partir de este punto, los resultados no referenciados son resultados propios que surgieron en el desarrollo de este trabajo.

3.1. Número domático romano

Dada una gráfica G, **una familia de dominación romana sobre G** es un conjunto no vacío de distintas funciones de dominación romana sobre G, digamos $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_d\}$, tales que para todo vértice v de G se tiene que $\sum_{i=1}^{d} f(v) \leq 2$.

Ejemplo 3.1. Considere una gráfica como en la fugura 3.1, y una familia de dominación romana sobre G, $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ donde:

$f_1(v_1) = 2$	$f_1(v_5) = 0$	$f_2(v_3) = 0$	$f_3(v_1) = 0$
$f_1(v_2) = 0$	$f_1(v_6) = 0$	$f_2(v_4) = 0$	$f_3(v_2) = 0$
$f_1(v_3) = 1$	$f_2(v_1) = 0$	$f_2(v_5) = 0$	$f_3(v_3) = 1$
$f_1(v_4) = 0$	$f_2(v_2) = 2$	$f_2(v_6) = 1$	$f_3(v_4) = 2$

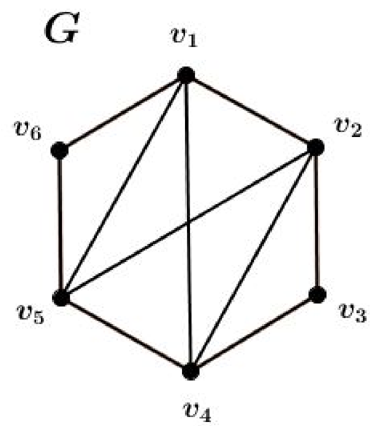
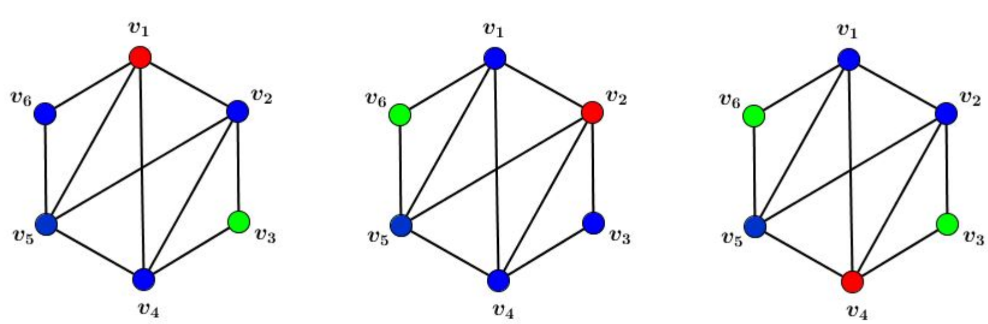


Figura 3.1: Gráfica G

$f_3(v_5) = 0$ $\quad \sum_{i=0}^{3} f_i(v_1) = 2$ $\quad \sum_{i=0}^{3} f_i(v_3) = 2$ $\quad \sum_{i=0}^{3} f_i(v_5) \leq 2$

$f_3(v_6) = 1$ $\quad \sum_{i=0}^{3} f_i(v_2) = 2$ $\quad \sum_{i=0}^{3} f_i(v_4) = 2$ $\quad \sum_{i=0}^{3} f_i(v_6) = 2$

Para simplificar algunos ejemplos posteriores, dada una familia de dominación romana, digamos $\mathcal{F}$ sobre una gráfica G, $v \in V(G)$ y $f \in \mathcal{F}$, si $f(v) = 2$, a v le asignamos el color rojo; si $f(v) = 1$, le asignamos el color verde y si $f(v) = 0$, entonces a v le asignamos el color azul.



(a) $V(G)$ bajo f_1 (b) $V(G)$ bajo f_2 (c) $V(G)$ bajo f_3

Figura 3.2: La gráfica G del ejemplo 3.1 con las funciones de la familia $\mathcal{F}$.

Observación 3.1.1. Notemos que en el ejemplo anterior, dado un vértice v de G, a v se le puede asignar a lo más una vez el color rojo ó, a lo más, dos vecer el color verde. Ésto es debido a la definición de familia de dominación romana.

Dados una gráfica G, un vértice v de G y una familia de dominación romana $\mathcal{F}$ sobre G, definimos a los conjuntos $\mathcal{F}_0(v)$, $\mathcal{F}_1(v)$ y $\mathcal{F}_2(v)$ como $\mathcal{F}_i(v) = \{f \in \mathcal{F} \colon f(v) = i\}$ para $i \in \{0, 1, 2\}$.

Observación 3.1.2. Si G es una gráfica, v un vértice de G y $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre G, entonces $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0(v)| + |\mathcal{F}_1(v)| + |\mathcal{F}_2(v)|$.

Lema 3.1.3. *Si G es una gráfica, $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre G y v un vértice de G, entonces $|\mathcal{F}_0(v)| \leq \delta_G(v)$.*

Demostración. Sean G una gráfica, $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre G, v un vértice de G. Si $\mathcal{F}_0(v) = \emptyset$, el resultado se sigue directamente. Supongamos que $\mathcal{F}_0(v) \neq \emptyset$ y sea f en $\mathcal{F}_0(v)$.

Como f es una función de dominación romana sobre G, existe un vértice $u_f \in V(G)$ tal que $f(u_f) = 2$ y u_f es adyacente a v. Para cada función f en $\mathcal{F}_0(v)$, elegimos un vértice u_f y consideremos al conjunto $C = \{u_f \colon f \in \mathcal{F}_0(v)\}$. Afirmamos que la asignación $H \colon \mathcal{F}_0(v) \to C$ definida como $H(f) = u_f$ es inyectiva. Sea $\{f, g\} \subseteq C$ tal que $H(f) = H(g)$ y $f \neq g$. Por definición de H, $u_f = u_g$, y como f y g son funciones de dominación romana, $f(u_f) = 2$ y $g(u_f) = 2$. Luego, $f(u_f) + g(u_f) = 4$, lo cual es una contradicción al hecho de que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G. Como H es inyectiva. $|\mathcal{F}_0(v)| \leq |C|$, y como $C \subseteq N_G(v)$, se tiene que $|\mathcal{F}_0(v)| \leq \delta_G(v)$. $\square$

Directamente de la definición de familia de dominación romana, se pueden dar dos resultados inmediatos.

Lema 3.1.4. *Si $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre una gráfica G y existe una función f en $\mathcal{F}$ tal que para todo vértice v se tiene que $f(v) = 1$, entonces $|\mathcal{F}| = 1$.*

Demostración. Sea G una gráfica y $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre G. Supongamos que existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que para todo vértice v de G se tiene que $f(v) = 1$.

Demostraremos el lema por contradicción; es decir, supongamos que existe una función $g \in \mathcal{F}$ tal que $f \neq g$. Existe un vértice v en G tal que $f(v) \neq g(v)$. Por hipótesis, tenemos que $f(v) = 1$, por lo que $g(v) \in \{0, 2\}$. Si $g(v) = 2$, entonces $f(v) + g(v) = 3$, lo cual

contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana.
Si $g(v) = 0$, entonces existe un vértice $u \in V(G)$ adyacente a v tal que $g(u) = 2$. De misma manera, tenemos por hipótesis que $f(u) = 1$, y luego, $f(u) + g(u) = 3$, lo que contradice que $\mathcal{F}$ es una familia dominación romana sobre G. Por lo tanto, $|\mathcal{F}| = 1$. $\square$

Lema 3.1.5. *Si $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ es una familia de dominación romana sobre una gráfica G y v en $V(G)$, entonces existe a lo más una función f_j en $\mathcal{F}$ tal que $f_j(v) = 2$.*

Demostración. Sean G una gráfica y $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una familia de dominación romana sobre G. Sea v en $V(G)$, y supongamos que existe f_j en $\mathcal{F}$ tal que $f_j(v) = 2$.
Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, para toda f_k en $\mathcal{F}$ con $k \neq j$ se cumple que $f_k(v) = 0$. De no ocurrir esto; es decir, si existe f_k en $\mathcal{F}$ con $f_k(v) \neq 0$ y $k \neq j$, entonces $f_k(v) + f_j(v) \geq 3$, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 3.1.6. *Si G es una gráfica y $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana con al menos dos elementos, entonces para cada f en $\mathcal{F}$ existe al menos un vértice v en $V(G)$ tal que $f(v) = 2$.*

Demostración. Sea G una gráfica, $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre G tal que $2 \leq |\mathcal{F}|$. Supongamos que el enunciado es falso; es decir, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que para todo vértice v en $V(G)$, se tiene que $f(v) \neq 2$.

Sea v un vértice de G. Observemos que $f(v) \in \{0, 1\}$. Si $f(v) = 0$, entonces como f es una función de dominación romana sobre G, existe un vértice u en $V(G)$ tal que $uv \in A(G)$ y $f(u) = 2$, pero esto es una contradicción a nuestra primera suposición. Por lo tanto, se tiene que $f(v) = 1$, y esto ocurre para todo vértice $v \in V(G)$.

Del lema 3.1.4, como f es la función constante uno, se tiene que $|\mathcal{F}| = 1$, contradiciendo nuestra condición inicial de que $\mathcal{F}$ tiene al menos dos elementos. Por lo tanto, para toda función f en $\mathcal{F}$ existe un vértice v en $V(G)$ tal que $f(v) = 2$. $\square$

A partir del lema 2.2.1 podemos ver que para toda gráfica G siempre existe al menos una familia de dominación romana sobre G. Ahora veamos que para toda familia de dominación romana $\mathcal{F}$, la cardinalidad de $\mathcal{F}$ está acotada superiormente.

Lema 3.1.7. *Si G es una gráfica de orden p y $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana en G, entonces $|\mathcal{F}| \leq p$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una familia de dominación romana. Si $|\mathcal{F}| = 1$, entonces ocurre que $|\mathcal{F}| \leq p$. Supongamos que $|\mathcal{F}| \geq 2$, por el lema 3.1.6, para cada función f_i en $\mathcal{F}$ existe un vértice v_i tal que $f_i(v_i) = 2$. De esto vemos que para cada i en $\{1, \ldots, d\}$, $V_2^{f_i} \neq \emptyset$. Para cada función f_k consideramos a un vértice fijo v_k en $V_2^{f_k}$. Luego, definimos a la función

$$H : \mathcal{F} \to V(G)$$
$$H(f_k) = v_k,$$

Dado que para cada f_i, el vértice v_i es fijo, entonces la función H está bien definida. Veamos que H es una función inyectiva. Supongamos que existen funciones f_k y f_j $\mathcal{F}$ tales que $H(f_k) = H(f_j)$. De la definición de H, vemos que $v_k = v_j$. Por lo tanto, $f_k(v_j) = 2$ y $f_j(v_j) = 2$. Si $kneqj$, entonces $f_k(v_j) + f_j(v_j) = 4$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, H es inyectiva. De esta manera, tenemos que $|\mathcal{F}| \leq |V(G)|$.

□

Como se prueba en el lema 3.1.7, dada una gráfica, la cardinalidad de toda familia de dominación romana sobre dicha gráfica se ve acotada superiormente por el orden de la gráfica. Esto nos dice que el máximo de estas cardinalidades dada una gráfica fija existe. Se define al **número domático romano de G**, denotado por $\mathsf{d}_R(G)$ como

$$\mathsf{d}_R(G) = \text{máx}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ es una familia de dominación romana sobre } G\}.$$

Se dice que una familia de funciones de dominación romana sobre una gráfica G, digamos $\mathcal{F}$, es una **$\mathsf{d}_R(G)$-familia**, si $\mathcal{F}$ tiene cardinalidad $\mathsf{d}_R(G)$. Nos referiremos simplemente a una familia de dominación romana como una d_R-familia si no existe ambigüedad sobre la gráfica en la cual se está trabajando. Inmediatamente del lema 3.1.7, tenemos el siguiente corolario, con una prueba alterna a la mostrada en el artículo [12].

Corolario 3.1.8. *Para toda gráfica G de orden p, se tiene que $1 \leq \mathsf{d}_R(G) \leq p$.*

Demostración. Del lema 2.2.1, podemos afirmar la existencia de una función de dominación romana sobre G, digamos f. Así, tenemos que el conjunto $\{f\}$ es una familia de dominación romana, pues para todo vértice v de G se cumple que $f(v) \leq 2$. Concluimos que $1 \leq \mathsf{d}_R(G)$.

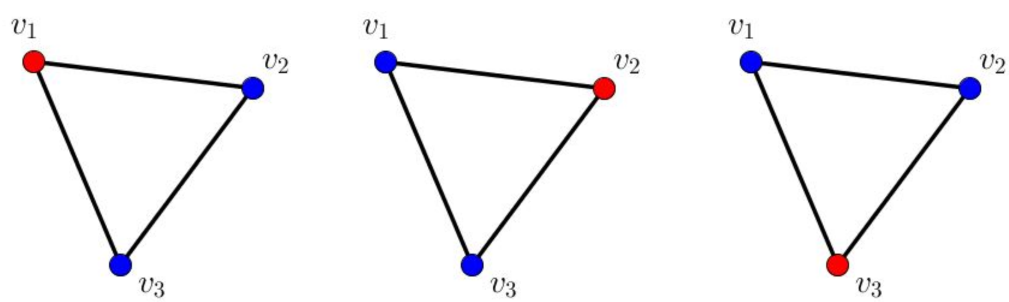
Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia, entonces del lema 3.1.7 ocurre que $|\mathcal{F}| \leq p$. De esta forma, $\mathsf{d}_R(G) \leq p$. □

A partir del corolario 3.1.8, calculamos el número domático romano de la gráfica mostrada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Sean G una gráfica completa de orden 3 tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$, y $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ una familia de funciones de dominación romana sobre G, donde:

$$\begin{array}{lll} g_1(v_1) = 2 & g_2(v_1) = 0 & g_3(v_1) = 0 \\ g_1(v_2) = 0 & g_2(v_2) = 2 & g_3(v_2) = 0 \\ g_1(v_3) = 0 & g_2(v_3) = 0 & g_3(v_3) = 2. \end{array}$$

Podemos ver que $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana sobre G. Por la definición del número domático romano, $3 \leq \mathsf{d}_R(G)$. Por otro lado, del lema 3.1.8, tenemos que $\mathsf{d}_R(G) \leq 3$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) = 3$ y $\mathcal{G}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia.



(a) $V(G)$ bajo g_1 (b) $V(G)$ bajo g_2 (c) $V(G)$ bajo g_3

Figura 3.3: Los vértices de la gráfica G bajo g_1, g_2 y g_3.

El número domático romano es una propiedad que es invariante bajo isomorfismos, lo cual se prueba en el siguiente lema.

Lema 3.1.9. *Si G y H son isomorfas, entonces* $\mathsf{d}_R(G) = \mathsf{d}_R(H)$.

Demostración. Sean G y H dos gráficas isomorfas, y $\phi\colon V(G) \to V(H)$ un isomorfismo de G a H. Consideremos a $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(G)$-familia. Para cada i en $\{1, \ldots, d\}$, definimos a la función

$$\begin{aligned} g_i \colon V(H) &\to \{0,1,2\} \\ g_i(v) &= f_i\left(\phi^{-1}(v)\right). \end{aligned}$$

Veamos que g_i es una función de dominación romana. Sea v un vértice de H tal que $g_i(v) = 0$. Por definición, tenemos que $g_i(v) = f_i(\phi^{-1}(v))$; es decir, $f_i(\phi^{-1}(v)) = 0$. Sea $v' = \phi^{-1}(v)$. Luego, $f_i(v') = 0$. Como f_i es una función de dominación romana en G, existe un vértice u' en G tal que $f_i(u') = 2$ y u' es adyacente a v'. De esta manera, tenemos que $u' \neq v'$, y como ϕ es una función biyectiva, se cumple que $\phi(u') \neq \phi(v')$. Sea $u = \phi(u')$. Como ϕ es un isomorfismo de gráficas y u' es adyacente a v' en G, entonces u es adyacente a v en H. Además, $f_i(\phi^{-1}(u)) = f_i(u')$. Por lo tanto, $g_i(u) = 2$ y u es adyacente a v, por lo que que g_i es una función de dominación romana.

Ahora consideramos a la familia $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_d\}$. Veamos que $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana en H. Sea v un vértice de H. Por definición, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(v) = \sum_{i=1}^{d} f_i\left(\phi^{-1}(v)\right).$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana en G y $\phi^{-1}(v) \in V(G)$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i\left(\phi^{-1}(v)\right) \leq 2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(v) \leq 2.$$

Por último, veamos que $\mathcal{G}$ tiene d elementos. Sea $\{i, j\}$ un subsconjunto de $\{1, \ldots, d\}$, con $i \neq j$. Como $f_i \neq f_j$, existe un vértice $v' \in V(G)$ tal que $f_i(v') \neq f_j(v')$. Sea $v = \phi(v')$. De esta manera, tenemos que $f_i(\phi^{-1}(v)) = f_i(v')$ y que $f_j(\phi^{-1}(v)) = f_j(v')$. Se cumple que $g_i(v) \neq g_j(v)$; es decir, $g_i \neq g_j$, concluyendo que $\mathcal{G}$ tiene d elementos.

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana sobre H con d elementos; y así, $\mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(H)$.
Considerando ahora a la función $\phi^{-1} \colon V(H) \to V(G)$, se tiene de manera análoga que

$\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G)$. Concluyendo que $\mathsf{d}_R(G) = \mathsf{d}_R(H)$. $\square$

Lema 3.1.10. *Si G es una gráfica y H es una subgráfica generadora de G, entonces toda familia de dominación romana sobre H es una familia de dominación romana sobre G.*

Demostración. Sean G una gráfica, H una subgráfica generadora de G y $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre H, digamos $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$. Como H es una subgráfica generadora de G, entonces $V(H) = V(G)$. Para cada i en $\{1, \ldots, d\}$ definimos a las funciones $g_i \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ como $g_i(v) = f_i(v)$. Veamos que g_i es una función de dominación romana en G. Sea v un vértice de G tal que $g_i(v) = 0$. Por definición de g_i, tenemos que $f_i(v) = 0$. Como $V(H) = V(G)$, entonces v es un vértice de H y dado que f_i es una función de dominación romana sobre H, entonces existe u en $V(H)$ tal que u es adyacente a v en H y $f_i(u) = 2$. Tenemos que u es adyacente a v en G y de la definición de g_i, $g_i(u) = 2$. De este modo, vemos que g_i es una función de dominación romana para todo i en $\{1, \ldots, d\}$.

Consideramos ahora a la familia de funciones $\mathcal{F}' = \{g_1, \ldots, g_d\}$. Veamos que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana en G. Sea v en $V(G)$; de la definición de g_i, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(v) = \sum_{i=1}^{d} f_i(v).$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre H, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2.$$

Llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(v) \leq 2.$$

Por tanto, $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana en G. $\square$

Corolario 3.1.11. *Si G es una gráfica y H es una subgráfica generadora de G, entonces*

$$\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G).$$

Demostración. Sea G una gráfica, H una subgráfica generadora de G y $\mathcal{F}$ una familia de dominación romana sobre H. Del lema 3.1.10, tenemos que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G. De la definición de número domático romano, se sigue que $|\mathcal{F}| \leq \mathsf{d}_R(G)$. En particular, si $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(H)$-familia, se concluye que $\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G)$. $\square$

Continuando, damos una prueba alterna a la mostrada en el artículo [12] del resultado siguiente.

Lema 3.1.12 ([12])**.** *En una gráfica G ocurre que $\mathsf{d}_R(G) = 1$ si y sólo si $A(G) = \emptyset$.*

Demostración. Partamos de suponer que G es una gráfica vacía; es decir, $A(G) = \emptyset$. y llegaremos a que $\mathsf{d}_R(G) = 1$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una familia de dominación romana en G, digamos $\mathcal{F}$, tal que $|\mathcal{F}| \geq 2$. Sean f y g dos funciones distintas de $\mathcal{F}$ y sea v un vértice arbitrario de G. Tenemos que como f y g son funciones de dominación romana, entonces $\{f(v), g(v)\} \subseteq \{0, 1, 2\}$. Como G es una gráfica vacía, entonces $f(v) \neq 0$ y $g(v) \neq 0$. Además, como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, tenemos que $f(v) + g(v) \leq 2$. De esta manera, para todo vértice v de G se tiene que $f(v) = 1$ y $g(v) = 1$, lo cual concluye que $f = g$, contradiciendo nuestra suposición de que $f \neq g$. Por tanto, $\mathsf{d}_R(G) \leq 1$. Por el corolario 3.1.8, concluimos que $\mathsf{d}_R(G) = 1$, demostrando la condición necesaria del enunciado.

Por otro lado, probemos por contraposición la condición suficente del lema. Supongamos que $A(G) \neq \emptyset$, y veamos que $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$. Sea uv en $A(G)$ y consideramos a las funciones

$$\begin{aligned} f :&V(G) \to \{0, 1, 2\} \\ f(x) &= \begin{cases} 2 & \text{si } x = u \\ 0 & \text{si } x = v \\ 1 & \text{si } x \in V(G) \setminus \{u, v\}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :&V(G) \to \{0, 1, 2\} \\ g(x) &= \begin{cases} 2 & \text{si } x = v \\ 0 & \text{si } x = u \\ 1 & \text{si } x \in V(G) \setminus \{u, v\} \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que de la definición, f y g son funciones de dominación romana sobre G. Además, $f \neq g$ pues $f(u) = 2$ y $g(u) = 0$. Por último, para todo w en $V(G)$, $f(w)+g(w) = 2$. De esta manera llegamos a que $\{f, g\}$ es una familia de dominación romana con dos elementos, y por tanto, $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$, concluyendo la prueba. $\square$

Lema 3.1.13. *Si G es una gráfica con al menos un vértice aislado, entonces $\mathsf{d}_R(G) \leq 2$.*

Demostración. Sean G una gráfica, v un vértice aislado de G y $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una familia de dominación romana sobre G.
Como v es un vértice aislado de G, entonces $\delta(v) = 0$, es decir, no existen vértices adyacentes a v en G. De esto, para toda f_i en $\mathcal{F}$ se tiene que $f_i(v) \neq 0$.
Si existe una función $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(v) = 2$, entonces afirmamos que $|\mathcal{F}| = 1$, pues de no ser así, existe $f_j \in \mathcal{F}$ tal que $f_i \neq f_j$.
Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana y $f_i(v) = 2$, entonces $f_j(v) = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $|\mathcal{F}| = 1$.

Supongamos ahora que para toda i en $\{1, \ldots, d\}$ se tiene que $f_i(v) = 1$. Afirmamos que en este caso $|\mathcal{F}| \leq 2$. De no ser así, existen al menos tres funciones distintas f_i, f_j, f_k en $\mathcal{F}$. De esta manera, tenemos que

$$f_1(v) + f_j(v) + f_k(v) = 3.$$

Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $|\mathcal{F}| \leq 2$. De ambos casos, llegamos a que para toda familia de dominación romana $\mathcal{F}$ se tiene que $|\mathcal{F}| \leq 2$. En particular, si $\mathcal{F}$ es una d_R-familia, concluimos que $\mathsf{d}_R(G) \leq 2$. $\square$

Siguiendo la línea de resultados del lema anterior, daremos una cota superior para el número domático romano de las gráficas en las cuales existe al menos un vértice de grado 1.

Lema 3.1.14. *Si G es una gráfica en la cual existe al menos un vértice de grado 1, entonces $\mathsf{d}_R(G) \in \{2, 3\}$.*

Demostración. Sean G una gráfica y v un vértice de G tal que $\delta(v) = 1$. Supongamos que existe una familia de dominación romana $\mathcal{F}'$ para la cual $4 \leq |\mathcal{F}'|$. Consideremos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ con 4 elementos, digamos $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Demostraremos que existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, 2, 3, 4\}$ tal que $i \neq j$, $f_i(v) = 0$ y $f_j(v) = 0$. Para ello consideremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. Existe k en $\{1, \ldots, 4\}$ tal que $f_k(v) = 0$.

Supongamos lo contrario; es decir, para todo índice j en $\{1, \ldots, 4\}$ ocurre que $f_j(v) \neq 0$. De esto, se tiene que para todo j aen $\{1, , \ldots 4\}$, $f_j(v) \geq 1$. Y con esto, $\sum_{i=1}^{4} f_i(v) \geq 4$, lo cual no es posible pues $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre G.

Afirmación 2. Existe un índice i en $\{1, \ldots, 4\} \setminus \{k\}$ tal que $f_i(v) = 0$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k = 1$. Supongamos que esta afirmación es falsa. De esta manera, para todo índice j en $\{2, 3, 4\}$ ocurre que $f_j(v) \neq 0$. Si $j \in \{2, 3, 4\}$, se tiene que $f_j(v) \geq 1$; y de este modo, $f_2(v) + f_3(v) + f_4(v) \geq 3$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana.

De las afirmaciones anteriores, existe un subconjunto $\{i, k\}$ de $\{1, \ldots, 4\}$ tal que $i \neq k$, $f_i(v) = 0$ y $f_k(v) = 0$. Como f_i y f_k son funciones de dominación romana, se tiene que existen u_i y u_k vértices de G tal que $\{u_i v, u_k v\} \subseteq A(G)$, $f_i(u_i) = 2$ y $f_k(u_k) = 2$. Por otro lado, como $\delta(v) = 1$, entonces $u_i = u_k$. De esto, $f_i(u_i) = 2$ y $f_k(u_i) = 2$ con $i \neq k$, lo cual es una contradicción al hecho de que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana.

Concluimos que $\mathsf{d}_R(G) \leq 3$. Por último, como $\delta(v) = 1$, se tiene que $A(G) \neq \emptyset$, y del lema 3.1.12, $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$. Por tanto, $\mathsf{d}_R(G) \in \{2, 3\}$. $\square$

De manera análoga al lema 2.1.3, existe una relación entre el número de dominación de una gráfica con el número domático romano de la misma.

Teorema 3.1.15 ([12])**.** *Si G es una gráfica de orden p, entonces se cumple que*

$$\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) \leq 2p.$$

Además, si $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) = 2p$, entonces para toda d_R-familia $\{f_1, \ldots, f_d\}$, se tiene que para cada índice i en $\{1, \ldots, d\}$, f_i es una $\gamma_R(G)$-función y para todo vértice v de G, $\sum_{i=1}^{d} f_i(v) = 2$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una familia de dominación romana de G y v un vértice de G.

Observamos que

$$d \cdot \gamma_R(G) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_R(G)\,.$$

Por definición del número de dominación romano de una gráfica, se tiene que para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\gamma_R(G) \leq \omega(f_i)$, y $\omega(f_i) = \sum_{v \in V(G)} f_i(v)$. De esto

$$\sum_{i=1}^{d} \gamma_R(G) \leq \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{v \in V(G)} f_i(v) \right) .$$

Como $V(G)$ es un conjunto finito, entonces

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{v \in V(G)} f_i(v) \right) = \sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \right) .$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, tenemos que

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \right) \leq \sum_{v \in V(G)} 2.$$

Llegamos a que $d \cdot \gamma_R(G) \leq 2p$. En particular, si $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia, concluimos que $\mathsf{d}_R(G) \cdot \gamma_R(G) \leq 2p$

Ahora, procederemos a probar la segunda parte del teorema. Supongamos que $\mathsf{d}_R(G) \cdot \gamma_R(G) = 2p$. Así, todas las desigualdades de la primera parte de esta prueba se vuelven igualdades. En particular, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} \gamma_R(G) = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{v \in V(G)} f_i(v) \right) . \tag{3.1}$$

También,

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \right) = \sum_{v \in V(G)} 2\,. \tag{3.2}$$

Dado que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, para todo vértice v de G, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2.$$

A partir de esto y de la igualdad 3.2, podemos concluir que para todo vértice v en $V(G)$,

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) = 2\,.$$

Además, como f_i es una función de dominación romana para todo índice i en $\{1, \ldots, d\}$,

$$\gamma_R(G) \leq \sum_{v \in V(G)} f_i(v).$$

De esto y de la igualdad 3.1,

$$\gamma_R(G) = \sum_{v \in V(G)} f_i(v)\,.$$

Concluyendo que para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$, f_i es una $\gamma_R(G)$-función y para todo vértice v de G se cumple que $\sum_{i=1}^{d} f_i(v) = 2$. □

Ejemplo 3.3. En el ejemplo 3.2, vimos que para una gráfica completa de orden 3; es decir, para K_3, se cumple que $\mathsf{d}_R(K_3) = 3$. Por otro lado, del lema 2.2.8, $\gamma_R(K_3) = 2$. Por tanto, K_3 es un ejemplo de una gráfica donde ocurre la igualdad del teorema 3.1.15. Esto es un hecho que ocurre para las gráficas de la familia K_p, y que podremos probar más adelante.

Similarmente al resultado del lema 2.2.9, vemos la relación que existe entre el número domático de una gráfica y el número domático romano de esta.

Lema 3.1.16 ([12])**.** *En toda gráfica G de orden p se cumple que $\mathsf{d}(G) \leq \mathsf{d}_R(G)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_d\}$ una partición domática de G, con $d = \mathsf{d}(G)$. De esta manera, para cada índice i en $\{1, \ldots, d\}$ definimos a la función $f_i \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ tal que para todo v en $V(G)$ se tiene que

$$f_i(v) = \begin{cases} 2 & \text{si } v \in D_i \\ 0 & \text{si } v \in V(G) \setminus D_i \end{cases}$$

y consideramos a la familia $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$. Veamos que f_i es una función de dominación romana. Sea v un vértice de G tal que $f_i(v) = 0$. Por la definición de f_i, $v \in V(G) \setminus D_i$. Como D_i es un conjunto dominante, tenemos que existe w en D_i tal que w es adyacente a v. De la definición de f_i, tenemos que $f_i(w) = 2$. Concluyendo así que f_i es una función de dominación romana.

Ahora, veamos que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana. Sea v un vértice de $V(G)$. Como $\mathcal{P}$ es una partición de $V(G)$, existe un único índice j en $\{1, \ldots, d\}$ tal que $v \in D_j$. De esta manera se sigue que $f_j(v) = 2$; y que para todo índice k en $\{1, \ldots, d\} \setminus \{j\}$, $f_k(v) = 0$. Por tanto, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) = f_j(v) = 2.$$

Por último, veamos que $|\mathcal{F}| = d$. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ tal que $i \neq j$, y demostraremos que $f_i \neq f_j$. Supongamos que esto no ocurre, es decir, que para todo vértice v en $V(G)$ $f_i(v) = f_j(v)$. En particular, para todo vértice v en D_i se tiene que $f_i(v) = f_j(v)$. Esto último implica que $D_i = D_j$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $f_i \neq f_j$. De esta manera, concluimos que $|\mathcal{F}| \leq \mathsf{d}_R(G)$; es decir, $\mathsf{d}(G) \leq \mathsf{d}_R(G)$. □

Ya se vio en el lema 2.2.9 que relación cumplen estos dos números dada cualquier gráfica. Daremos una caracterización para aquellas gráficas para las cuales su número domático coincide con su número domático romano.

Proposición 3.1.17. *Sea G una gráfica tal que $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$. Se cumple que $\mathsf{d}(G) = \mathsf{d}_R(G)$ si y sólo si existe una d_R-familia $\mathcal{F}$ sobre G tal que para todo vértice v en $V(G)$ existe f en $\mathcal{F}$ tal que $f(v) = 2$.*

Demostración. Sea G una gráfica tal que $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$. Supongamos primero que G es tal que $\mathsf{d}(G) = \mathsf{d}_R(G)$, y probemos la existencia de dicha familia $\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_d\}$ una partición domática de $V(G)$ de cardinalidad máxima. Para cada i en $\{1, \ldots, d\}$, definimos a la función $f_i \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ como

$$f_i(v) = \begin{cases} 2 \text{ si } v \in D_i \\ 0 \text{ si } v \in V(G) \setminus D_i \end{cases}$$

y veamos que cada una de estas es una función de dominación romana sobre G. Sean i un índice en $\{1, \ldots, d\}$ y u un vértice de G tal que $f_i(u) = 0$. Por contrucción de f_i, ocurre que u es elemento de $V(G) \setminus D_i$. Como D_i es un conjunto dominante de G, existe $v \in D_i$ tal que v es adyacente a u. De esta manera, se tiene que $f_i(v) = 2$.

Continuando, consideramos a la familia $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$, y afirmamos que $\mathcal{F}$ es una famila de dominación romana sobre G. Sea v un vértice de G.. Dado que $\mathcal{P}$ es una partición de $V(G)$, existe un único índice i en $\{1, \ldots, d\}$ tal que v es elemento de D_i.

Observamos que

$$\sum_{k=1}^{d} f_k(v) = \sum_{j \neq i} f_j(v) + f_i(v).$$

De la construcción de las funciones, se tiene que $f_i(v) = 2$ y $f_j(v) = 0$ si $j \neq i$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{d} f_k(v) = 2.$$

Por último, veamos que $|\mathcal{F}| = d$. Sea $\{i, j, \}$un subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ tal que $i \neq j$. Tenemos que $D_i \neq D_j$ pues éstos son ajenos. Existe $u \in D_i$ tal que $u \in V(G) \setminus D_j$. Con esto, $f_i(u) = 2$ y $f_j(u) = 0$, concluyendo que $f_i \neq f_j$. Por lo tanto, $|\mathcal{F}| = \mathsf{d}(G)$, por lo que $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia.

Para observar que $\mathcal{F}$ es la familia deseada, consideramos a v un vértice de G. Dado que $\mathcal{P}$ es una partición de $V(G)$, existe i en $\{1, \ldots, d\}$ tal que v es elemento de D_i. Así, $f_i(v) = 2$. Por tanto, para todo vértice v de G existe una función f de $\mathcal{F}$ tal que $f(v) = 2$.

Ahora probaremos la condición necesaria de la prueba. Supongamos que existe una d_R-familia $\mathcal{F}$ tal que para todo vértice v de G existe una función f en $\mathcal{F}$ tal que $f(v) = 2$.

Consideramos a la familia $\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_d\}$ donde para cada i en $\{1, \ldots, d\}$, $D_i = V_2^{f_i}$. Afirmamos que esta familia $\mathcal{P}$ es una partición domática de $V(G)$.

Veamos que todo elemento de $\mathcal{P}$ cumple ser no vacío suponiendo que existe alguno que sí lo es, digamos D_i. Por construcción, se tiene que $V_2^{f_i} = \emptyset$. De esta manera, se tiene que para todo vértice x de G ocurre que $f_i(x) \neq 2$. Sea v un vértice de G. Por hipótesis, existe

j en $\{1, \ldots, d\}$ tal que $f_j(v) = 2$. Luego, como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, $f_i(v) + f_j(v) \leq 2$, por lo cual, $f_i(v) = 0$. Como f_i es una función de dominación romana, existe un vértice u en $V(G)$ tal que $f_i(u) = 2$ y u es adyacente a v. Por tanto, u es un elemento de $V_2^{f_i}$, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Lo que nos arroja que todos los elementos de $\mathcal{P}$ son no vacíos.

Como siguiente paso veamos que los elementos de $\mathcal{P}$ son ajenos entre sí. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ tal que $i \neq j$ y supongamos que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, y sea u en $D_i \cap D_j$. De la construcción de $\mathcal{P}$, se tiene que $u \in V_2^{f_i}$ y $u \in V_2^{f_j}$; es decir, $f_i(v) = 2$ y $f_j(v) = 2$.

Por otro lado, dado que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, se cumple que

$$\sum_{k=1}^{d} f_k(v) \leq 2.$$

Pero esto es una contradicción pues $f_i(v) + f_j(v) \leq \sum_{k=1}^{d} f_k(v)$. Por tanto, D_i y D_j son ajenos.

Ahora probaremos que $\bigcup_{i=1}^{d} D_i = V(G)$. Dado que cada D_i es un subconjunto de $V(G)$, entonces $\bigcup_{i=1}^{d} D_i \subseteq V(G)$. De esto solamente basta probar la otra contención. Sea x un elemento de $V(G)$. Por hipótesis, existe una función f_i en $\mathcal{F}$ tal que $f_i(x) = 2$. Tenemos que x está en $V_2^{f_i}$; es decir, x es elemento de D_i. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{i=1}^{d} D_i$. Concluyendo así que $\bigcup_{i=1}^{d} D_i = V(G)$.

Demostraremos que cada elemento de la partición $\mathcal{P}$ es un conjunto dominante de $V(G)$. De la definicicón de $\mathcal{P}$ observamos que, dada una función de dominación romana f_i en $\mathcal{F}$, $V_2^{f_i} = D_i$ y que $V_0^{f_i} = V(G) \setminus D_i$. Por el lema 2.2.3, sabemos que $V_0^{f_i} \prec V_2^{f_i}$. Por lo que para todo vértice de v en $V(G)$ ocurre que v está en D_i, o bien, si v es elemento de $V(G) \setminus D_i$, entonces existe un vértice u en D_i tal que u es adyacente a v. Concluyendo que cada conjunto D_i es un conjunto dominante de $V(G)$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una partición domática de $V(G)$.

Para terminar esta prueba, vemos que por construcción $|\mathcal{P}| = |\mathcal{F}|$ y como $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia, $|\mathcal{P}| = \mathsf{d}_R(G)$. Por la definición de número domático, $\mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}(G)$. Por el lema 3.1.16, llegamos a que $\mathsf{d}(G) = \mathsf{d}_R(G)$. $\square$

En el lema 3.1.14, vimos que si G es una gráfica con al menos un vértice de grado 1, entonces su número domático romano es a lo más 2. En el siguiente resultado, se caracterizan a las gráficas en las cuáles sólo existen vértices de grado 1 y 0.

Lema 3.1.18 ([12])**.** *En toda gráfica G de orden p se tiene que $\gamma_R(G) = p$ y $\mathsf{d}_R(G) = 2$ si y sólo si $\Delta(G) = 1$.*

Demostración. Sea G una gráfica de orden p. Primero, supongamos que $\gamma_R(G) = p$ y $\mathsf{d}_R(G) = 2$. Del lema 2.2.14, tenemos que $\gamma_R(G) \leq p - \Delta(G) + 1$; es decir, $\Delta(G) \leq 1$. Por otro lado, del lema 3.1.12, como $\mathsf{d}_R(G) = 2$, $A(G) \neq \emptyset$, y de esta forma, $\Delta(G) \geq 1$. Llegamos a que $\Delta(G) = 1$.

Ahora mostraremos la condición necesaria del teorema. Supongamos que $\Delta(G) = 1$. Todo vértice v de G cumple que $\delta(v) = 1$ ó $\delta(v) = 0$. Consideremos al conjunto $R = \{v \in V(G) : \delta(v) = 0\}$, y sea $r = |R|$. De la definición de R, notemos que para todo v en $V(G) \setminus R$, $\delta(v) = 1$. Sea q el tamaño de G. Del teorema 1.1.2, tenemos que

$$2q = \sum_{v \in V(G)} \delta(v);$$

y por otro lado, observamos que

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = \sum_{v \in R} \delta(v) + \sum_{v \in V(G) \setminus R} \delta(v)\,.$$

De la definición de R, se sigue que

$$\sum_{v \in R} \delta(v) + \sum_{v \in V(G) \setminus R} \delta(v) = \sum_{v \in R} 0 + \sum_{v \in V(G) \setminus R} 1\,.$$

Como $V(G)$ es un conjunto finito, tenemos que

$$\sum_{v \in V(G) \setminus R} 1 = |V(G) \setminus R| = p - r\,.$$

Llegamos a que $2q = p - r$; es decir, existen $\frac{p-r}{2}$ aristas en G. Además, como $\Delta(G) = 1$, no existen aristas adyacentes entre sí, de lo cual podemos afirmar que

$$G \cong rK_1 \cup \frac{p-r}{2} K_2.$$

Por el lema 2.2.15, tenemos que

$$\gamma_R(G) = r \cdot \gamma_R(K_1) + \frac{p-r}{2} \cdot \gamma_R(K_2)\,.$$

Del lema 2.2.8, vemos que

$$r \cdot \gamma_R(K_1) + \frac{p-r}{2} \cdot \gamma_R(K_2) = r(1) + \frac{p-r}{2}(2)\,.$$

Tenemos que

$$\gamma_R(G) = r + (p-r) = p.$$

Llegamos a que $\gamma_R(G) = p$. Ahora, como $\Delta(G) = 1$, entonces $A(G) \neq \emptyset$, y del lema 3.1.12, $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$. Del teorema 3.1.15, tenemos que $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) \leq 2p$, y como $\gamma_R(g) = p$, $\gamma_R(G) \neq 0$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) \leq 2$; concluyendo así que $\mathsf{d}_R(G) = 2$. $\square$

En el ejemplo 3.2, probamos que $\mathsf{d}_R(K_3) = 3$. En el siguiente resultado, se prueba esto ocurre para todos los elementos de la familia de gráficas completas K_p.

Lema 3.1.19 ([12])**.** *Si G es una gráfica de orden p, entonces $\mathsf{d}_R(G) = p$ si y sólo si $G \cong K_p$.*

Demostración. Probemos la condición recíproca de este enunciado. Sea G una gráfica completa de orden p y consideremos a su conjunto de vértices como $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Consideramos al conjunto $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_p\}$ como las funciones tales que para cada j en $\{1, \ldots, p\}$ se tiene que $f_j : V(G) \to \{0, 1, 2\}$ con

$$f_j(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Veamos que para cada índice j en $\{1, \ldots, p\}$, f_j es una función de dominación romana. Sea v_i en $V(G)$ con $f_j(v_i) = 0$; es decir, $i \neq j$. Por definición de f_j, tenemos que $f_j(v_j) = 2$ y como G es completa, v_i es adyacente a v_j. Así, f_j es una función de dominación romana. Más aún, si f_i y f_j son tales que $i \neq j$, tenemos que $f_i(v_i) = 2$, y $f_j(v_i) = 0$, por lo que tenemos que $f_i \neq f_j$. De esta manera, $|\mathcal{F}| = p$.

Por último, por la definición de $\mathcal{F}$, para cada v_i en $V(G)$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{p} f_j(v_i) = f_i(v_i) = 2.$$

Tenemos que el conjunto $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana con p elementos. Por lo

tanto, $p \leq \mathsf{d}_R(G)$. Por el lema 3.1.7, llegamos a que $\mathsf{d}_R(G) = p$.
Ahora probaremos la condición necesaria del enunciado. Suponemos que $\mathsf{d}_R(G) = p$ y demostraremos que G es completa. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 $p = 1$.

En este caso es inmediato que G es completa.

Caso 2 $p = 2$.

En este caso, G tiene dos vértices. Por otro lado, como $\mathsf{d}_R(G) = 2$, por el lema 3.1.12, entonces $A(G) \neq \emptyset$, es decir, existe al menos una arista en G. Como G tiene exactamente dos vértices, se sigue que $G \cong K_2$.

Caso 3 $p \geq 3$.

En este caso afirmamos que $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) = 2p$, para ello primero mostraremos que $\gamma_R(G) = 2$. Sea f una $\gamma_R(G)$-función. Si existe al menos un vértice v de G tal que $f(v) = 0$, entonces existe otro vértice w tal que $f(w) = 2$, y si G no tiene vértices de valor cero bajo f, entonces para todo vértice v de G se tiene que $f(v) \in \{1, 2\}$, y como $p \geq 3$, esto nos lleva a concluir que $\omega(f) \geq 2$, por lo que $\gamma_R(G) \geq 2$.
Por otro lado, del teorema 3.1.15, tenemos que $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) \leq 2p$, y como $\mathsf{d}_R(G) = p$, entonces $\gamma_R(G) \leq 2$, concluyendo que $\gamma_R(G) = 2$.

Inmediatamente se sigue que $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) = 2p$. Del teorema 3.1.15 tenemos que, para toda i en $\{1, \ldots, p\}$, f_i es una γ_R-función, y que para todo v en $V(G)$, $\sum_{i=1}^{p} f_i(v) = 2$.

Afirmación 1: Para todo índice i en $\{1, \ldots, p\}$ y para todo v en $V(G)$, $f_i(v) \neq 1$.

Supongamos que esto no ocurre, es decir, que existe un vértice v de G y un índice i en $\{1, \ldots, p\}$ tal que $f_i(v) = 1$. Como f_i es una γ_R-función y $\gamma_R(G) = 2$, entonces para todo u en $V(G)$, $f_i(u) \neq 2$; es decir, $f_i(u) = 1$ o $f_i(u) = 1$.

Por otro lado, $\sum_{x \in V(G)} f_i(x) = 2$, existe un vértice u de G tal que $f_i(u) = 1$ y $u \neq v$. Como $|V(G)| \geq 3$, existe al menos un vértice w en $V(G)$ tal que $f_i(w) = 0$, lo cual no es posible pues no existen vértices de imagen 2 bajo f_i, mostrando así la afirmación 1.

Afirmación 2: Para todo v en $V(G)$ existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(v) = 2$.

Si v es un vértice en de G, entonces $\sum_{i=1}^{p} f_i(v) = 2$, y por la afirmación 1, existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(v) = 2$, concluyendo así la afirmación 2.

Probaremos que G es completa mostrando que para todo vértice v en $V(G)$, $\delta(v) = p - 1$. Sea v en $V(G)$, por la afirmación 2, existe una única función f_i en $\mathcal{F}$ tal que $f_i(v) = 2$, y dado que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, se tiene que para toda f_k de $\mathcal{F} \setminus \{f_i\}$, $f_k(v) = 0$, por lo que $|\mathcal{F}_0(v)| = p - 1$. Del lema 3.1.3, se sigue que $|\mathcal{F}_0(v)| \leq \delta(v)$, concluyendo que $\delta(v) = p - 1$, por lo que G es completa.

□

Teorema 3.1.20 ([12]). *Si G es una gráfica no trivial de orden p, entonces*

$$\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq p + 2.$$

Además, $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) = p + 2$ si y sólo si $\Delta(G) = 1$ o bien si G es una gráfica completa.

Demostración. Sea G una gráfica de orden p, con $2 \leq p$. Empecemos por probrar que $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq p + 2$. Supongamos primero que $\mathsf{d}_R(G) = 1$. Por el lema 3.1.12, tenemos que G es una gráfica vacía. Al considerar la función

$$\begin{gathered} f\colon V(G) \to \{0, 1, 2\} \\ f(v) = 1, \end{gathered}$$

se tiene que ésta es una función de dominación romana de peso p. Tenemos que $\gamma_R(G) \leq p$; es decir, $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq p + 1$; y en particular, $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq p + 2$.

Ahora supongamos que $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$. Nuevamente, por el lema 3.1.12, tenemos ahora que $A(G) \neq \emptyset$. Una función de dominación romana f sobre G tiene al menos un vértice de valor 2, o bien, al menos dos vértices de valor 1. Se cumple que para toda función de dominación romana f se tiene que $2 \leq \omega(f)$. En particular, ocurre que $2 \leq \gamma_R(G)$. Del lema 3.1.7, dado que $\mathsf{d}_R(G) \leq p$, y del teorema 3.1.15, tenemos que $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) \leq 2p$; es decir,

$$\gamma_R(G) \leq \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)}.$$

Llegamos a que

$$\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(G) + \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)}.$$

Por un lado, consideremos a la función $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que para todo x en $(0,\infty)$,

$$g(x) = x + \frac{2p}{x}.$$

Vemos que la derivada de g es la función

$$g'(x) = 1 - \frac{2p}{x^2}.$$

Dado que $\mathsf{d}_R(G) \in [2,p]$, consideraremos la función g sólo en dicho intervalo. Del criterio de la derivada, tenemos que g es decreciente sobre el intervalo $[2,\sqrt{2p}]$, y es creciente sobre el intervalo $[\sqrt{2p},p]$.

Si $\mathsf{d}_R(G) \in [2,\sqrt{2p}]$, entonces $g(\mathsf{d}_R(G)) \leq g(2)$; es decir,

$$\mathsf{d}_R(G) + \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)} \leq 2 + \frac{2p}{2} = 2 + p.$$

Ahora, si $\mathsf{d}_R(G) \in [\sqrt{2p},p]$, entonces $g(\mathsf{d}_R(G)) \leq g(p)$; es decir,

$$\mathsf{d}_R(G) + \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)} \leq p + \frac{2p}{p} = p + 2.$$

Por lo tanto, llegamos a que $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq p + 2$.

Ahora veamos que $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) = p + 2$ si y sólo si G es una gráfica completa o si $\Delta(G) = 1$.

Partamos de la condición necesaria del enunciado. Si G es completa, se sigue que $\gamma_R(G) = 2$, y del lema 3.1.19, $\mathsf{d}_R(G) = p$. De esta manera, $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) = 2 + p$. Si $\Delta(G) = 1$, del lema 3.1.18, se sigue que $\mathsf{d}_R(G) = 2$ y $\gamma_R(G) = p$. Así, tenemos que $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) = p + 2$.

Probemos la parte suficiente del enunciado. Supongamos que $\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) = p + 2$. Como vimos en la primera parte de esta prueba, tenemos que

$$\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(G) + \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)} \leq p + 2$$

. Luego,
$$\gamma_R(G) + \mathsf{d}_R(G) = \mathsf{d}_R(G) + \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)}.$$

Por lo tanto, $\gamma_R(G) = \frac{2p}{\mathsf{d}_R(G)}$; es decir, $\gamma_R(G) \cdot \mathsf{d}_R(G) = 2p$. Del teorema 3.1.20, tenemos que G es una gráfica completa o bien $\Delta(G) = 1$.

En esto últmo, vemos que la cota sólo se alcanza cuando $\Delta(G) = 1$, o bien, cuando G es una gráfica completa de orden p, $p \geq 2$. □

Teorema 3.1.21 ([12])**.** *Para toda gráfica G se tiene que*

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G) + 2.$$

Además, la cota es justa.

Demostración. Si $\mathsf{d}_R(G) \leq 2$, entonces vemos que $\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G) + 2$.
Ahora supongamos que $\mathsf{d}_R(G) \geq 3$. Sean $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(G)$-familia y v en $V(G)$ tal que $\delta(v) = \delta(G)$.

Afirmamos que $\sum_{u \in N[v]} f_i(u) = 1$ se cumple para a lo más dos funciones de $\mathcal{F}$. Si para algún i en $\{1, \ldots, d\}$ se tiene que $\sum_{u \in N[v]} f_i(u) = 1$, entonces exsite un vértice u en $N[v]$ tal que se $f_i(u) = 1$ y que para todo w en $N[v] - \{u\}$ se tiene que $f_i(w) = 0$. Esto nos lleva a que $u = v$, pues de no ser así, v tiene valor cero bajo f_i y no existe un vértice adyacente a v de valor dos, contradiciendo que f_i es una función de dominación romana. De esta manera, si tenemos un índice i en $\{1, \ldots, d\}$ tal que $\sum_{u \in N[v]} f_i(u) = 1$, entonces $f_i(v) = 1$. Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, entonces $\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2$. Por lo tanto, existe a lo más un índice j en $\{1, \ldots, d\}$, con $j \neq i$, tal que $\sum_{u \in N[v]} f_j(v) = 1$, mostrando la afirmación.

Tenemos entonces que para todo i en $\{1, \ldots, d\}$, salvo a los más dos índices, se tiene que
$$2 \leq \sum_{u \in N[v]} f_i(u).$$

Podemos afirmar que se cumple

$$2d - 2 \leq \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{u \in N[v]} f_i(u) \right)$$

Como $N[v]$ es un conjunto finito, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{u\in N[v]} f_i(v)\right) = \sum_{u\in N[v]}\left(\sum_{i=1}^{d} f_i(v)\right).$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, entonces

$$\sum_{u\in N[v]}\left(\sum_{i=1}^{d} f_i(u)\right) \leq \sum_{u\in N[v]} 2 = 2(\delta(G)+1).$$

Tenemos que $2d-2 \leq 2(\delta(G)+1)$; es decir, $d \leq \delta(G)+2$.
En particular, si $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia, concluimos que $\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G)+2$.

Ahora veamos que la cota dada por el teorema es justa; es decir, existe una gráfica G tal que $\mathsf{d}_R(G) = \delta(G)+2$. Sea k un entero positivo. Para cada i en $\{1,\ldots,k\}$, consideremos a G_i una gráfica completa de orden $k+3$, con $V(G_i) = \{v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{k+3}^i\}$. Luego, sea v un vértice distinto a todos los ya mencionados, y construimos a G como la gráfica tal que

$$\begin{aligned} V(G) &= \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i) \cup \{v\}; \\ A(G) &= \bigcup_{i=1}^{k} A(G_i) \cup \left\{vv_1^i \colon i \in \{1,\ldots,k+3\}\right\}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathsf{d}_R(G) = \delta(G)+2$. Primero demostraremos que $\delta(G) = k$, y aún más, $\delta_G(v) = \delta(G)$. Sea u en $V(G)$, por definición de G, $u \in \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$ o $u = v$. Veamos los siguientes casos:

Caso 1 $u \in \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$.

En este caso, para algún i en $\{1,\ldots,k\}$, $u \in V(G_i)$. Por construcción $G_i \cong K_{k+3}$, es decir, u es adyacente a todos los demás vértices de G_i. Si $u = v_1^i$, entonces $\delta_G(u) = \delta_{G_i}(u)+1$ pues $uv \in A(G_i)$, y así, $\delta_G(u) = k+3$. Si $u \neq v_1^i$, entonces $\delta_G(u) = \delta_{G_i}(u)$, concluyendo que $\delta_G(u) = k+2$.

Caso 2 $u = v$.

Por definición de G, $\delta_G(u) = |N_G(v)|$. Por la construcción de G,

$$|N_G(v)| = |\left\{vv_1^i \colon i \in \{1, \ldots, k\}\right\}|.$$

Por tanto, $\delta_G(u) = k$.

Llegamos a que $\delta(G) = k$ y que v es un vértice de grado mínimo de G; además, es el único vértice de grado mínimo.

Ahora, daremos una familia de dominación romana sobre G con $k+2$ elementos. Para cada i en $\{1, \ldots, k\}$ consideraremos a las siguientes funciones $f_i \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ como sigue:

$$f_i(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = v_1^i \\ 2 & \text{si } x \in \left\{v_{i+1}^j \in V(G) \colon j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}\right\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideraremos a las siguientes dos funciones $f_{k+1} \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ y $f_{k+2} \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ definidas como

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = v \\ 2 & \text{si } x \in \{v_{k+2}^j \in V(G) \colon j \in \{1, \ldots, k\}\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_{k+2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = v \\ 2 & \text{si } x \in \{v_{k+3}^j \in V(G) \colon j \in \{1, \ldots, k\}\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos que para cada i en $\{1, \ldots, k+2\}$, f_i es una función de dominación romana. Sea u un vértice de G tal que $f_i(u) = 0$, donde i en $\{1, \ldots, k\}$. Tenemos dos posibles casos para u:

Caso 1 $u = v$.

En este caso, por definición de G, $uv_1^i \in A(G)$ y $f_i(v_1^i) = 2$.

Caso 2 $u \neq v$.

Por definición de G, $u \in V(G_j)$, para algún índice j de $\{1, \ldots, k\}$. Si $j = i$, como $f_i(u) = 0$, entonces $u \neq v_1^i$ y como G_j es completa, $uv_1^i \in A(G)$ y $f_i(v_1^i) = 2$. Si $j \neq i$, como $f_i(u) = 0$, entonces $u \neq v_{i+1}^j$. Como G_j es completa, $uv_{i+1}^j \in A(G)$ y $f_i(v_{i+1}^j) = 2$.

Veamos ahora el caso en el que $i = k + 1$. Como $f_{k+1}(u) = 0$, se sigue que $u \neq v$, por lo que $u \in V(G_j)$, para algún j en $\{1, \ldots, k\}$. Nuevamente, $u \neq v_{k+2}^j$, y como G_j es completa, $uv_{k+1}^j \in A(G)$, donde $f_{k+1}(v_{k+2}^j) = 2$.

De manera análoga, si $i = k+2$, y $f_{k+2}(u) = 0$, entonces $uv_{k+3}^j \in A(G)$ y $f_{k+2}(v_{k+3}^j) = 2$ para algún j en $\{1, \ldots, k\}$.

Por lo tanto, para toda i en $\{1, \ldots, k+2\}$, la función f_i es de dominación romana. Ahora veamos que la familia $\mathcal{F}$ definida como $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_{k+2}\}$ es una familia de dominación romana sobre G.

Consideremos u en $V(G)$ y mostraremos que $\sum_{i=1}^{k+2} f_i(u) \leq 2$. Por construcción de G, tenemos que $u \in \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i) \cup \{v\}$. Analizamos los siguientes casos:

Caso 1 $u = v$.

En este caso, para toda i en $\{1, \ldots, k\}$, ocurre que $f_i(v) = 0$, $f_{k+1}(v) = 1$ y $f_{k+2}(v) = 1$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{k+2} f_i(v) = 2.$$

Caso 2 $u \neq v$.

Como $u \in V(G) \setminus \{v\}$, existe n en $\{1, \ldots, k\}$ tal que $u \in V(G_n)$; es decir, $u = v_r^n$ para alguna $r \in \{1, \ldots, k+3\}$.

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{k+2} f_i(v_r^n) = \sum_{i=1}^{k} f_i(v_r^n) + f_{k+1}(v_r^n) + f_{k+2}(v_r^n).$$

Analizaremos la suma anterior por casos:

Caso 1 $r = k+3$.

Se tiene que $f_{k+2}(v_{k+3}^n) = 2$, $f_{k+1}(v_{k+3}^n) = 0$ y por la definición de f_i, con i en $\{1, \ldots, k\}$, $f_i(v_{k+3}^n) = 0$, de donde se obtiene que $\sum_{i=1}^{k+2} f_i(v_r^n) = 2$.

Caso 2 $r = k+2$.

Por la definición de las funciones se tiene que para toda i en $\{i, \ldots, k\}$, $f_i(v_{k+2}^n) = 0$; y por otro lado, $f_{k+1}(v_{k+2}^n) = 2$ y $f_{k+2}(v_{k+2}^n) = 0$. Por tanto, $\sum_{i=1}^{k+2} f_i(v_r^n) = 2$.

Caso 3 $r = 1$.

Por la definición de las funciones, se tiene que $f_{k+1}(v_1^n) = 0$, $f_{k+2}(v_1^n) = 0$.De la misma manera, para todo i en $\{1, \ldots, k\} \setminus \{n\}$, $f_i(v_1^n) = 0$ y $f_n(v_1^n) = 2$, y así

$$\sum_{i=1}^{k+2} f_i(v_1^n) = 2.$$

Caso 4 $r \in \{2, \ldots, k+1\}$.

De la definición de f_{k+1} y de f_{k+2}, se tiene que $f_{k+1}(v_r^n) = 0$ y $f_{k+2}(v_r^n) = 0$.

De la definición de f_i, cuando $i \in \{1, \ldots, k\}$, si $i = r-1$ y $n \neq i$ tenemos que $f_i(v_r^n) = 2$, y $f_i(v_r^n) = 0$ en cualquier otra situación. Luego,

$$\sum_{i=1}^{k+2} f_i(v_r^n) \leq 2.$$

Concluimos que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana de G, y $|\mathcal{F}| = k+2$, por tanto, $k+2 \leq \mathsf{d}_R(G)$. Luego, como $\delta(G) = k$, de la primera parte de la prueba se tiene que $\mathsf{d}_R(G) \leq k+2$. Por lo tanto $\mathsf{d}_R(G) = \delta(G) + 2$. □

Ejemplo 3.4. Para ilustrar la construcción del teorema 3.1.21, veamos un ejemplo cuando $k = 2$; es decir, construiremos una gráfica G tal que $\delta(G) = 4$ y $\mathsf{d}_R(G) = 6$. (Ver 3.4.)

Siguiendo la construcción mostrada en la prueba anterior, para cada índice i en $\{1, \ldots, 4\}$, consideraremos a G_i como una gráfica completa de orden 7, donde $V(G_i) = \{v_1^i, v_2^i, \ldots, v_7^i\}$ y v un vértice distinto a todos los anteriores. Sea G tal que

$$V(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{4} V(G_i)\right) \cup \{v\}$$
$$A(G) = \left(\bigcup_{I=1}^{4} A(G_i)\right) \cup \{vv_1^1, vv_1^2, vv_1^3, vv_1^4\}.$$

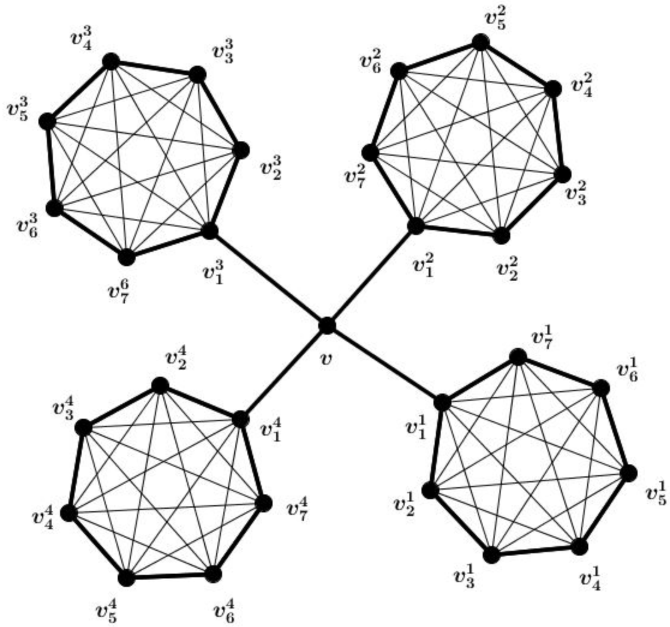


Figura 3.4: La gráfica G, siguiendo la construcción del teorema 3.1.21 para $k = 2$

Y según la prueba del lema 3.1.21, coloreamos a G con las funciones $f_1, \ldots, f_6$ como se muestra en las siguientes figuras. (Ver figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10.)

Considerando a la familia $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, tenemos que $6 \leq \mathsf{d}_R(G)$. Por el lema 3.1.21, también se ve que $\mathsf{d}_R(G) \leq 6$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) = 6$; es decir, $\mathsf{d}_R(G) = \delta(G) + 2$.

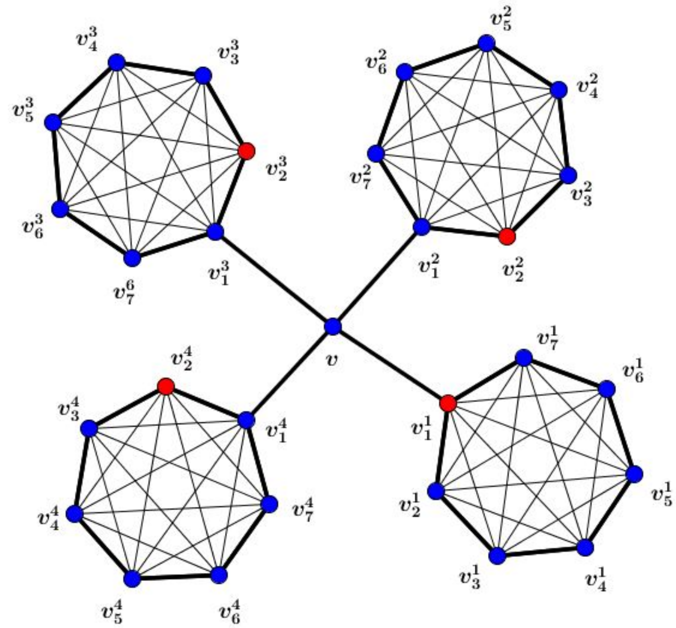


Figura 3.5: Los vértices de G bajo la función f_1.

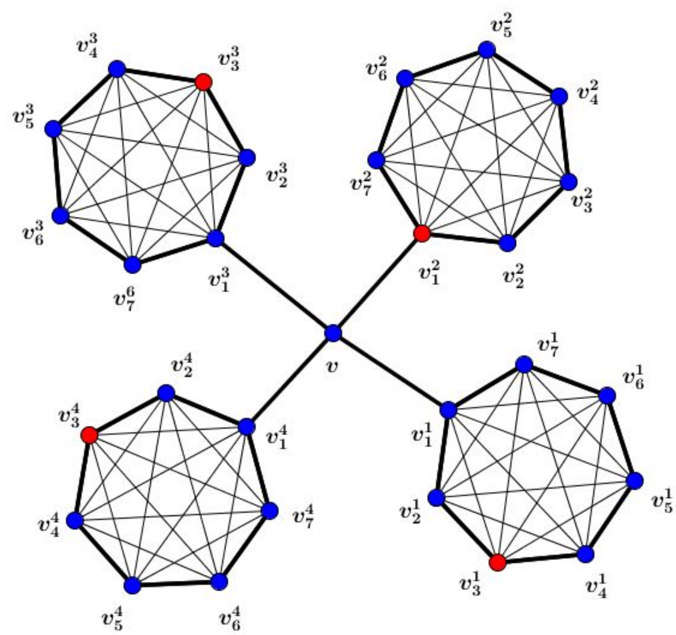


Figura 3.6: Los vértices de G bajo la función f_2.

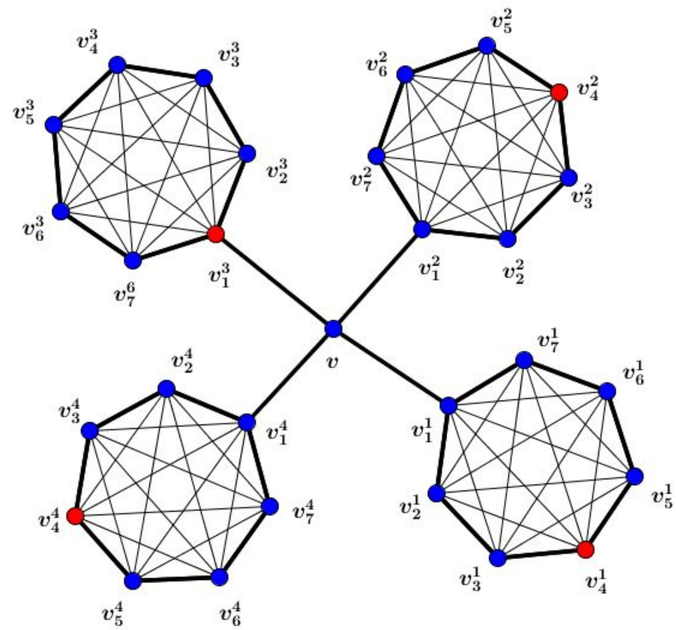


Figura 3.7: Los vértices de G bajo la función f_3.

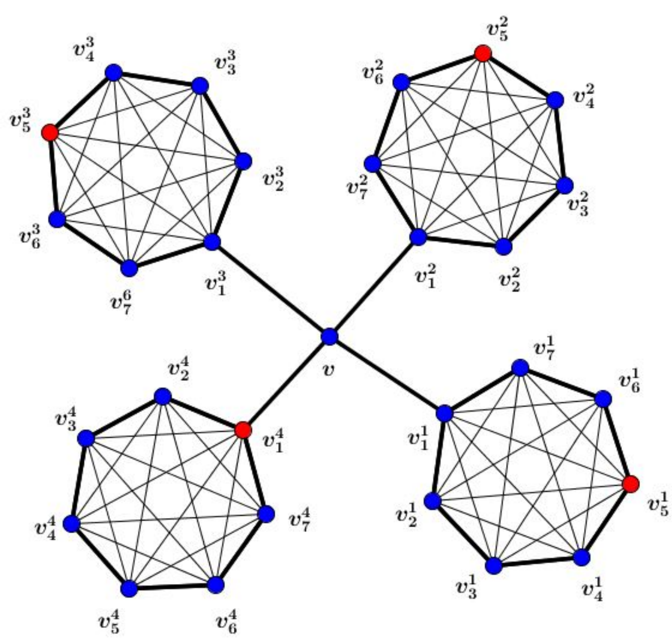


Figura 3.8: Los vértices de G bajo la función f_4.

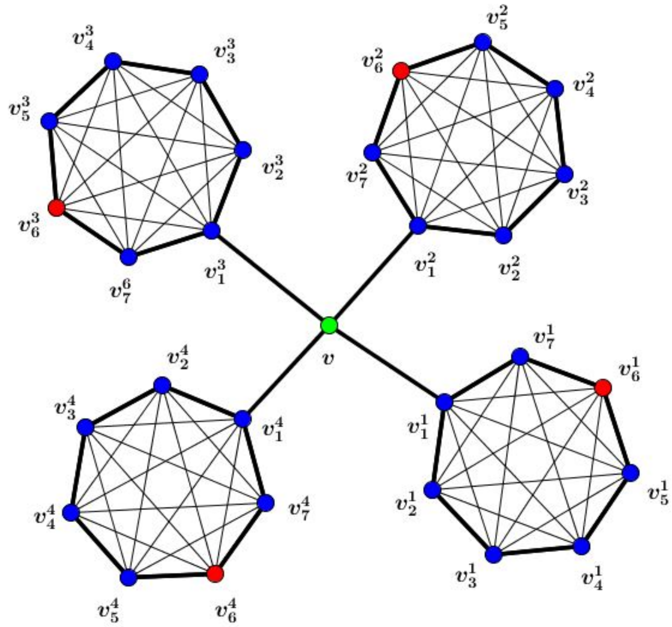


Figura 3.9: Los vértices de G bajo la función f_5.

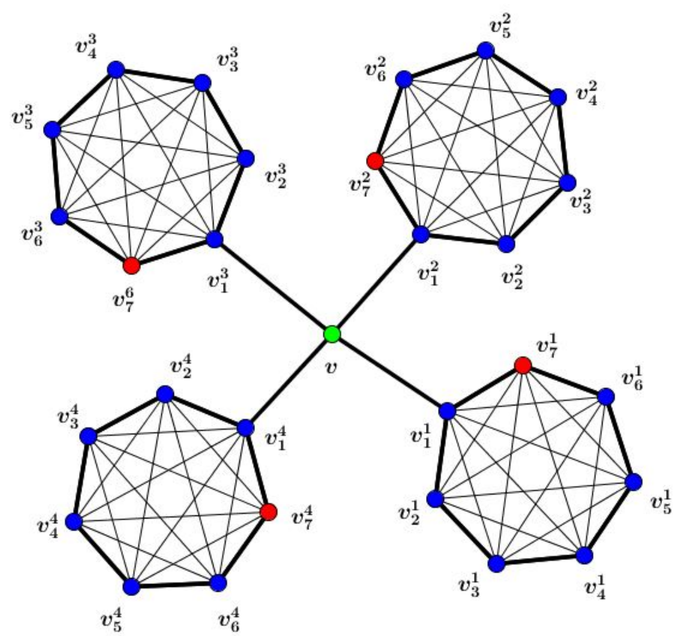


Figura 3.10: Los vértices de G bajo la función f_6.

Tal como en el lema 2.2.15, es posible dar una caracterización del número domático romano de una gráfica a partir del número domático romano de sus componentes conexas. Los siguientes resultados nos permiten dar esta relación.

Lema 3.1.22. *Si G es una gráfica y $H_1, \dots, H_k$ son las componentes conexas de G, entonces*

$$\text{mín}\Big\{\mathsf{d}_R(H_i)\colon i \in \{1, \dots, k\}\Big\} \leq \mathsf{d}_R(G).$$

Demostración. Sean G una gráfica y $H_1, \dots, H_k$ las componentes conexas de G. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathsf{d}_R(H_i) \leq \mathsf{d}_R(H_j)$ si $i \leq j$.

Para cada i en $\{1, \dots, k\}$, consideremos a

$$\mathcal{F}_i = \{f_1^i, f_2^i, \dots, f_{t_i}^i\}$$

una $\mathsf{d}_R(H_i)$-familia, donde $t_i = \mathsf{d}_R(H_i)$. Observamos que, por la elección de índices, $t_1 = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_i)\colon i \in \{1, \dots, k\}\}$.
Ahora, para $j \in \{1, \dots, t_1\}$, consideramos a la función $g_j\colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ tal que

$$g_j(v) = f_j^i(v) \text{ si } v \in V(H_i).$$

Consideramos a la familia de funciones $\mathcal{F} = \{g_1, \dots, g_{t_1}\}$ y afirmamos que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana de G. Veamos que g_j es una función de dominación romana en G para cada j en $\{1, \dots, t_1\}$. Sea v en $V(G)$ tal que $g_j(v) = 0$, para alguna j en $\{1, \dots, t_1\}$. Como $v \in V(G)$, entonces existe un único índice i de $\{1, \dots, k\}$ tal que $v \in V(H_i)$. Por definición de g_j, tenemos que $g_j(v) = f_j^i(v)$, y de esta manera, $f_j^i(v) = 0$. Como f_j^i es una función de dominación romana sobre H_i, entonces existe u en $V(H_i)$ tal que u es adyacente a v y $f_j^i(u) = 2$. Nuevamente, de la definición de g_j, tenemos que $g_j(u)$. Por lo tanto, v es adyacente a u en G y $g_j(u) = 2$. Llegamos a que g_j es una función de dominación romana en G.

Probaremos que $\mathcal{F}$ tiene t_1 elementos. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{1, \dots, t_1\}$ tal que $i \neq j$, y veamos que $g_i \neq g_j$. Como $\mathcal{F}_1$ es una familia de dominación romana, tenemos que $f_i^1 \neq f_j^1$. Existe un vértice v en $V(H_1)$ tal que $f_i^1(v) \neq f_j^1(v)$. De la definición de g_i y g_j, se sigue que $g_i(v) = f_i^1(v)$, y también, $g_j(v) = f_j^1(v)$. Por lo tanto, $g_i(v) \neq g_j(v)$, y de esta manera, $g_i \neq g_j$. $\mathcal{F}$ tiene afectivamente t_1 elementos.

Por último, sea v un vértice de G y veamos que se cumple que

$$\sum_{j=1}^{t_1} g_j(v) \leq 2.$$

Como v está en $V(G)$, entonces existe un único índice i en $\{1, \ldots, k\}$ tal que $v \in V(H_i)$. De la definición de g_j, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{t_1} g_j(v) = \sum_{j=1}^{t_1} f_j^i(v).$$

Como $t_1 \leq t_i$, entonces

$$\sum_{j=1}^{t_1} f_j^i(v) \leq \sum_{j=1}^{t_i} f_j^i(v).$$

Como $\mathcal{F}_i$ es una familia de dominación romana sobre H_i, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{t_i} f_j^i(v) \leq 2;$$

llegando a que

$$\sum_{j=1}^{t_1} g_j(v) \leq 2.$$

Por tanto, tenemos que $\mathcal{F}$ es una función de dominación romana sobre G. Por definición, tenemos que $|\mathcal{F}| \leq \mathsf{d}_R(G)$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(H_1) \leq \mathsf{d}_R(G)$. De la elección de H_1, concluimos que

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\} \leq \mathsf{d}_R(G).$$

$\square$

Ejemplo 3.5. En la gráfica de la figura 3.11, se muestra que la desigualdad del lema 3.1.22 es estricta.

Vemos que la familia $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ donde f_1 y f_2 están dadas como en la figura 3.12.

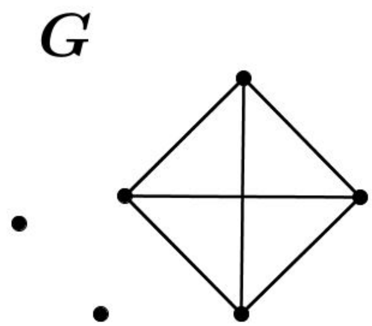
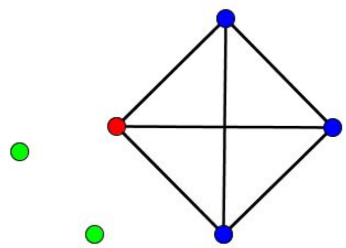
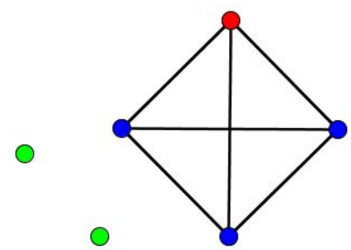


Figura 3.11: La gráfica G.



(a) $V(G)$ bajo f_1.



(b) $V(G)$ bajo f_2.

Figura 3.12: Las funciones de la familia $\mathcal{F}$.

Por el teorema 3.1.23 se tiene que $\mathsf{d}_R(G) \leq 2$ pues G tiene vértices aislados. Por otro lado, como $|\mathcal{F}| = 2$, entonces $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) = 2$. Así también podemos ver que

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(H)\colon H \text{ es componente conexa de } G\} = 1.$$

Probando que la desigualdad del lema 3.1.22 es estricta en este caso.

En el ejemplo 3.5, vemos que la desigualdad del lema 3.1.22 es estricta, lo cual se debe a la existencia de vértices de grado 0. En el siguiente lema, probaremos que la cota del lema 3.1.22 es justa cuando no hay vértices aislados.

Lema 3.1.23. *Si G es una gráfica sin vértices aislados y $H_1, \ldots, H_k$ son las componentes conexas de G, entonces*

$$\mathsf{d}_R(G) = \text{mín}\left\{\mathsf{d}_R(H_i)\colon i \in \{1, \ldots, k\}\right\}.$$

Demostración. Sean G una gráfica, $H_1, \ldots, H_k$ las componentes conexas de G, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_t\}$ una $\mathsf{d}_R(G)$-familia, y H una componente conexa de G tal que el número domático romano de H sea mínimo respecto al número domático romano de las componentes conexas de G; es decir, $\mathsf{d}_R(H) = \text{mín}\,\{\mathsf{d}_R(H_i)\colon i \in \{1, \ldots, k\}\}$.
Para cada i en $\{1, \ldots, t\}$, consideramos la función

$$\begin{aligned} g_i\colon V(H) &\to \{0, 1, 2\} \\ g_i(x) &= f_i(x). \end{aligned}$$

Demostraremos que g_i es una función de dominación romana sobre H. Como G no tiene vértices aislados, entonces H no tiene vértices aislados. Sea v un vértice de H tal que $g_i(v) = 0$. Por definición de g_i, tenemos que $g_i(v) = f_i(v)$. Como f_i es una función de dominación romana de G, existe u en $V(G)$ tal que u es adyacente a v y $f_i(u) = 2$. Como H es una componente conexa de G y u es adyacente a v, entonces $u \in V(H)$. Por la definición de g_i, $g_i(u) = 2$. Por tanto, g_i es una función de dominación romana de H.

Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_t\}$, y veamos ahora que para todo vértice v de H, $\sum_{i=1}^{t} g_i(v) \leq 2$.

Como para cada i en $\{1, \ldots, t\}$ se tiene que $g_i(v) = f_i(v)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{t} g_i(v) = \sum_{i=1}^{t} f_i(v).$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana en G, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{t} f_i(v) \leq 2.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{t} g_i(v) \leq 2.$$

Analizaremos los siguientes casos:

Caso 1 Para todo subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, \ldots, t\}$ tal que $i \neq j$ sucede que $g_i \neq g_j$.

En este caso, $|\mathcal{G}| = |\mathcal{F}|$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(H)$.

Caso 2 Existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, \ldots, t\}$ tal que $i \neq j$ y $g_i = g_j$.

Como $g_i = g_j$, entonces para todo vértice v de H, $g_i(v) = g_j(v)$. Si $g_i(v) = 2$ para algún vértice v en $V(H)$, entonces $g_j(v) = 2$. De la definición de $\mathcal{G}$, $g_i(v) = f_i(v)$ y $g_j(v) = f_j(v)$, por lo que, $f_i(v) + f_j(v) = 4$, lo cual es una contradicción al hecho de que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana. Por lo cual, no existen vértices en H con imagen 2 bajo g_i, concluyendo que $g_i(v) = 1$ para todo vértice v d4 H. Además, como $g_i = g_j$, también ocurre que $g_j(v) = 1$ para todo vértice v en $V(H)$.

Afirmamos que $|\mathcal{F}| = 2$. Supongamos lo contrario, por el lema 3.1.12, como $A(G) \neq \emptyset$, entonces $|\mathcal{F}| \neq 1$, por lo que, $|\mathcal{F}| \geq 3$. De esta manera, existe al menos una función f_l en $\mathcal{F} \setminus \{f_i, f_j\}$. Si existe x en $V(H)$ tal que $f_l(x) = 2$, entonces $f_l(x)+f_i(x)+f_j(x) = 4$, lo cual no es posible pues $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G. Para todo vértice x en $V(H)$ se tiene que $f_l(x) = 1$, concluyendo que $f_l(x)+f_i(x)+f_j(x) = 3$, contradiciendo nuevamente que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G. Por lo tanto, $|\mathcal{F}| = 2$. Por el lema 3.1.12, como H no es vacía, $\mathsf{d}_R(H) \geq 2$. Concluyendo que $|\mathcal{F}| \leq \mathsf{d}_R(H)$, y como $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia, entonces $\mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(H)$.

De ambos casos y de la elección de H llegamos a que

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Por el lema 3.1.22,

$$\mathsf{d}_R(G) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

□

De manera similar al resultado anterior, podemos dar una relación entre los números domáticos romanos de una gráfica conexa y sus bloques.

Lema 3.1.24. *Si G es una gráfica conexa y $B_1, \ldots, B_k$ son los bloques de G, entonces*

$$\text{mín}\left\{\mathsf{d}_R(B_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\right\} \leq \mathsf{d}_R(G).$$

Demostración. Sea G una gráfica conexa y $B_1, \ldots, B_k$ los bloques de G. Procederemos por inducción sobre k.

Base Inductiva Para $k = 1$.

En este caso se cumple la igualdad, pues G es un sólo bloque.

Hipótesis de Inducción Sean $k \geq 2$ y supongamos cierto que para toda gráfica G' con l bloques, digamos $B'_1, \dots, B'_l$, donde $l < k$, se cumple que

$$\text{mín}\,\{\mathsf{d}_R(B'_i) \colon i \in \{1, \dots, l\}\} \leq \mathsf{d}_R(G').$$

Paso Inductivo Supongamos que G tiene exactamente k bloques, digamos $B_1, \dots, B_k$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que B_k es un bloque terminal de G. Sea $B = \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$.

Dado que B_k es un bloque terminal, observamos que $|V(B) \cap V(B_k)| = 1$, y tomamos a v en $V(B) \cap V(B_k)$. Sean $\mathcal{F}_1 = \{f_1, \dots, f_{t_1}\}$ una $\mathsf{d}_R(B)$-familia y $\mathcal{F}_2 = \{g_1, \dots, g_{t_2}\}$ una $\mathsf{d}_R(B_k)$-familia. Supongamos que para todo i en $\{2, \dots, t_1\}$ se cumple que $f_i(v) \leq f_{i-1}(v)$; así mismo para todo j en $\{2, \dots, t_2\}$, $g_j(v) \leq g_{j-1}(v)$. Aún más, supongamos también que $g_1(v) \leq f_1(v)$, y consideremos $t = \text{mín}\{t_1, t_2\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, t\}$ consideramos la función $h_i \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ tal que

$$h_i(u) = \begin{cases} f_i(u) \text{ si } u \in V(B) \\ g_i(u) \text{ si } u \in V(B_k) \setminus \{v\} \end{cases} .$$

Afirmamos que para toda i en $\{1 \dots, t\}$, h_i es una función de dominación romana sobre G. Sea u un vértice de G tal que $h_i(u) = 0$. Si $u \in V(B)$, entonces tenemos que $h_i(u) = f_i(u)$. Como f_i es una función de dominación romana sobre B, sabemos que existe un vértice w de B adyacente a u tal que $f_i(w) = 2$. De la definición de h_i sabemos que $h_i(w) = f_i(w)$. Por lo tanto,existe un vértice w de G adyacente a u tal que $h_i(w) = 2$.

Si $u \in V(B_k) \setminus \{v\}$, entonces $h_i(u) = g_i(u)$. Como g_i es una función de dominación romana sobre B_k, tenemos que existe un vértice w de B_k tal que $g_i(w) = 2$. Veamos el caso en que $w = v$. Sabemos que para todo índice i de $\{1, \dots, t\}$, $g_i(v) \leq 2$, y que $g_{i-1}(v) \geq g_i(v)$. Por lo tanto, $g_i = g_1$. Además, tenemos que $f_1(v) \geq g_1(v)$. Por lo tanto, $g_1(v) = f_1(v)$, y en particular, $f_1(v) = 2$; es decir, $h_1(v) = 2$.

Si $w \neq v$, entonces $h_i(w) = g_i(w)$. Por tanto, u es adyacente a un vértice w tal que

$h_i(w) = 2$. Concluyendo así que h_i es una función de dominación romana sobre G.

Sean $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_t\}$. Probemos que $\mathcal{H}$ es una familia de dominación romana en G. Consideremos a u un vértice de G y analizamos los siguientes casos.

Caso 1 $u \in V(B)$.

De la definición de h_i tenemos que

$$\sum_{i=1}^{t} h_i(u) = \sum_{i=1}^{t} f_i(u).$$

Como $t \leq t_1$,

$$\sum_{i=1}^{t} f_i(u) \leq \sum_{i=1}^{t_1} f_i(u).$$

Como $\mathcal{F}_1$ es una familia de dominación romana sobre B,

$$\sum_{i=1}^{t_1} f_i(u) \leq 2.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{t} h_i(u) \leq 2.$$

Caso 2 $u \in V(B_k) \setminus \{v\}$.

De la definición de h_i tenemos que

$$\sum_{i=1}^{t} h_i(u) = \sum_{i=1}^{t} g_i(u).$$

Como $t \leq t_2$,

$$\sum_{i=1}^{t} g_i(u) \leq \sum_{i=1}^{t_2} g_i(u).$$

Como $\mathcal{F}_2$ es una familia de dominación romana sobre B_k,

$$\sum_{i=1}^{t_2} g_i(u) \leq 2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{t} h_i(u) \leq 2.$$

.

Concluyendo así que $\mathcal{H}$ es una familia de dominación romana sobre G. Veamos que $|\mathcal{H}| = t$. Dado que $\mathcal{F}$ tiene t elementos, entonces para todo subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, \ldots, t\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que existe un vértice u de B tal que $f_i(u) \neq f_j(u)$. De la definición de h_i y h_j se tiene que $h_i(u) = f_i(u)$ y $h_j(u) = f_j(u)$. De esta manera, $h_i(u) \neq h_j(u)$.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es una familia de dominación romana sobre G con t elementos, por lo tanto $t \leq \mathsf{d}_R(G)$.

Sin embargo, sabemos que $t = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(B), \mathsf{d}_R(B_k)\}$, además por la hipótesis de inducción, $\mathsf{d}_R(B) = \text{mín}\left\{\mathsf{d}_R(B_i) \colon i \in \{1, \ldots, k-1\}\right\}$, por lo que,

$$t = \text{mín}\left\{\text{mín}\left\{\mathsf{d}_R(B_i) \colon i \in \{1, \ldots, k-1\}\right\}, \mathsf{d}_R(B_k)\right\}.$$

Por lo que

$$t = \text{mín}\left\{\mathsf{d}_R(B_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\right\}.$$

Concluyendo que

$$\text{mín}\left\{\mathsf{d}_R(B_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\right\} \leq \mathsf{d}_R(G).$$

□

Ejemplo 3.6. Veamos que en la gráfica de la figura 3.13 la desigualdad del Lema 3.1.24 es estricta.

Sea $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ la familia de funciones donde f_1, f_2 y f_3 están dadas como en la figura 3.14.

Con la familia $\mathcal{F}$ vemos que $3 \leq \mathsf{d}_R(G)$, mientras que si $B = G\langle\{u, v\}\rangle$, entonces B es un bloque de G. Con esto,

$$2 = \mathsf{d}_R(B) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H) \colon H \text{ es un bloque de } G\}.$$

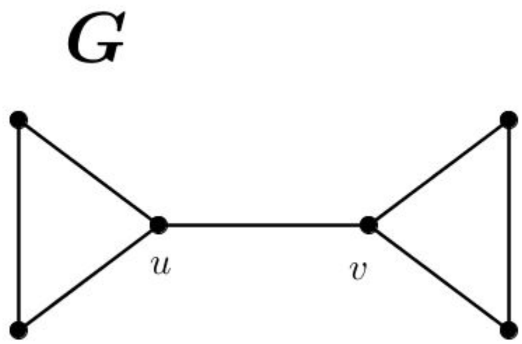
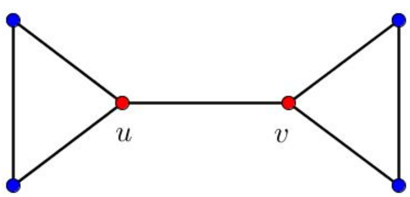
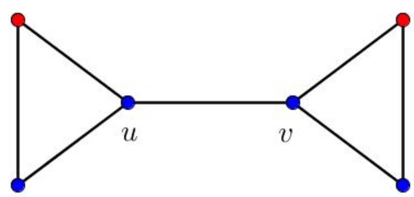


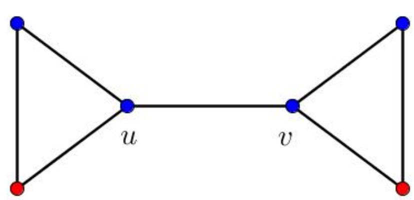
Figura 3.13: La gráfica G.



(a) $V(G)$ bajo f_1.



(b) $V(G)$ bajo f_2.



(c) $V(G)$ bajo f_3.

Figura 3.14: Las funciones de la familia $\mathcal{F}$.

Ahora daremos una cota superior al número domático romano de una gráfica conexa G, cuando ésta tiene al menos un vértice de corte.

Lema 3.1.25. *Sea G una gráfica conexa con al menos un vértice de corte, tal que todos sus bloques terminales tienen al menos tres vértices. Si $B_1, \ldots, B_k$ son los bloques terminales de G, entonces*

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \text{mín}\left\{|V(B_i)| \colon i \in \{1, \ldots, k\}\right\}.$$

Demostración. Sean G una gráfica conexa con al menos un vértice de corte y $B_1, \ldots, B_k$ los bloques terminales de G donde para todo índice i en $\{1, \ldots, k\}$ se tiene que B_i tiene orden al menos 3, y

$$p = \text{mín}\{|V(B_i)| \colon i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Supongamos que B_m es tal que $|V(B_m)| = p$ donde $m \in \{1, \ldots, k\}$ y tomemos a x un vértice de B_m tal que x no es vértice de corte de G.

Por un lado, del lema 3.1.21 sabemos que $\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G) + 2$. En particular, como $\delta(G) \leq \delta_G(x)$, se tiene $\mathsf{d}_R(G) \leq \delta_G(x) + 2$. Por otro lado, como x no es un vértice de corte, del lema 1.1.22 se sabe que $N_G(x) \subseteq V(B_m)$. De esta manera, $\delta_G(x) \leq |V(B_m)| - 1$; es decir, $\delta_G(x) \leq p - 1$, por lo que, $\mathsf{d}_R(G) \leq p + 1$.

Afirmamos que $\mathsf{d}_R(G) \leq p$, Supongamos que $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_{p+1}\}$ una familia de dominación romana sobre G con $p + 1$ elementos.

Afirmación: Para todo vértice v en $V(B_m)$ tal que v no es de corte y todo índice i en $\{1, \ldots, p + 1\}$ se tiene que $f_i(v) \neq 2$.

Supongamos que esto no sucede; es decir, que para algún vértice v de B_m y para algún índice i en $\{1, \ldots, p + 1\}$, se tiene que $f_i(v) = 2$. De esto, se sigue que para todo j en $\{1, \ldots, p + 1\} \setminus \{i\}$, $f_j(v) = 0$. Luego,

$$|\mathcal{F}_0(v)| = p.$$

Por otro lado, del lema 1.1.22, se tiene que $N_G(v) \subseteq V(B_i)$. Llegamos a que $\delta_G(v) \leq p - 1$. Del lema 3.1.3 como sabemos que $|\mathcal{F}_0(v)| \leq \delta_G(v)$, teniendo que $p \leq \delta_G(v)$, lo cual contradice la condición anterior. Concluyendo así que la afirmación es verdadera.

Sea w el vértice de corte de B_m y y un vértice de B_m tal que y no es de corte, de la observación 3.1.2, sabemos que

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0(y)| + |\mathcal{F}_1(y)| + |\mathcal{F}_2(y)|.$$

Por lo tanto, de la afirmación, $p+1 = |\mathcal{F}_0(y)| + |\mathcal{F}_1(y)|$.

Por otro lado, por el lema 3.1.5, sabemos que para todo vértice y de G, y tiene imagen 1 a lo más en dos funciones de $\mathcal{F}$, es decir, $|\mathcal{F}_1(y)| \leq 2$. Y con esto,

$$|\mathcal{F}_0(y)| + |\mathcal{F}_1(y)| \leq |\mathcal{F}_0(y)| + 2.$$

De esta forma, tenemos que $p+1 \leq |\mathcal{F}_0(y)| + 2$, o bien, que $p-1 \leq |\mathcal{F}_0(y)|$. Como $3 \leq p$, llegamos a que $2 \leq |\mathcal{F}_0(y)|$. Esto nos dice que existe al menos un subconjunto $\{i.j\}$ de $\{1, \ldots, p+1\}$ tal que $i \neq j$ y $\{f_i, f_j\} \subseteq \mathcal{F}_0(y)$. Como f_i y f_j son funciones de dominación romana, existen dos vértices u_i y u_j de G tales que $\{u_i, u_j\} \subseteq N_G(y)$, $f_i(u_i) = 2$ y $f_j(u_j) = 2$. Como vimos anteriormente, para los vértices de B_m que no son de corte, estos no tienen imagen dos bajo ninguna función de $\mathcal{F}$. Esto nos dice que los vértices u_i y u_j son ambos vértices de corte de B_m; y dada la unicidad de w, tenemos que $u_i = w$ y $u_j = w$. Por tanto, tenemos que $f_i(w) + f_j(w) = 4$, lo cual es una contradicción pues la familia $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana; lo cual nos lleva a que no puede existir dicha familia $\mathcal{F}$ con $p+1$ elementos.

Concluimos que $\mathsf{d}_R(G) \leq p$; es decir,

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \text{mín}\,\{|V(B_i)|\colon i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

$\square$

Nota 3.1.26. Habíamos mencionado en la nota 2.2.13 que el resultado presentado en [12] no es verdadero en el caso de la gráfica C_5 y así también para C_p con $p \equiv 2 \pmod 3$.

En dicho trabajo, se prueba que para toda gráfica G regular ocurre que

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G) + 1$$

e incluso, la cota se mejora a $\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G)$ cuando el orden de G, digamos p, cumple que $p \equiv 0$ o $p \equiv 1 \pmod{\delta(G)+1}$.

Con lo mostrado en la nota 2.2.13, vemos que este resultado queda como un problema abierto, así como los resultados consecuentes de este.

3.2. El número domático romano de familias de gráficas

En esta sección calculamos el número domático romano de ciertas familias de gráficas, como los ciclos, árboles, abanicos y ruedas.

Teorema 3.2.1 ([12]). *Si C_p es un ciclo de orden p, con $p \geq 3$, entonces se tiene que*

$$\mathsf{d}_R(C_p) = \begin{cases} 2 & \text{si } p \equiv 1 \pmod 3 \text{ ó } p \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } p \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Demostración. Sea C_p un ciclo de orden p, con $p \geq 3$. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 $p \equiv 0 \pmod 3$.

Consideremos las funciones f_0, f_1, f_2 tales que para cada j en $\{0, 1, 2\}$, $f_j \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ y para cada índice i en $\{1, \ldots, p\}$ se tiene que

$$f_j(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \equiv j \pmod 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Afirmamos que f_0, f_1 y f_3 son funciones de dominación romana. Sean j un índice en $\{0, 1, 2\}$ y v_i en $V(C_p)$ tal que $f_j(v_i) = 0$. Tenemos que i no es congruente con j módulo 3. Observamos que $i + 1 \equiv j \pmod 3$ o bien $i + 2 \equiv j \pmod 3$. Si $i + 1 \equiv j \pmod 3$, entonces $f_j(v_{i+1}) = 2$, y además, $v_i v_{i+1} \in A(C_p)$. Si $i + 2 \equiv j \pmod 3$, entonces $i - 1 \equiv j \pmod 3$. Vemos que $f_j(v_{i-1}) = 2$, y además, sabemos que $v_{i-1} v_i \in A(C_p)$. Para toda j en $\{0, 1, 2\}$ se cumple que f_j es una función de dominación romana.

Ahora probemos que $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2\}$ es una familia de dominación romana. Sea v un vértice de C_p y veamos que $\sum_{j=0}^{2} f_j(v) \leq 2$. Como $v \in V(C_p)$, entonces existe un único índice i en $\{1, \ldots, p\}$ tal que $v = v_i$. De este modo, tenemos que existe un único j en $\{0, 1, 2\}$ tal que $i \equiv j \pmod 3$. Vemos que

$$\sum_{j=0}^{2} f_j(v) = f_j(v_i) = 2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, y $3 \leq d_R(C_p)$.

Por otro lado, como $p \equiv 0 \pmod 3$, entonces $p = 3k$, para algún entero positivo k. Del lema 2.2.12, tenemos que $\gamma_R(C_p) = 2k$. Del teorema 3.1.15, vemos que

$$\gamma_R(C_p) \cdot \mathsf{d}_R(C_p) \leq 2p = 2 \cdot 3k.$$

Llegamos a que $\mathsf{d}_R(C_p) \leq 3$, y por lo tanto, $\mathsf{d}_R(C_p) = 3$.

Caso 2 $p \equiv 1 \pmod 3$.

Tenemos que para algún k en $\mathbb{N}$, $p = 3k+1$. Del lema 2.2.12, vemos que $\gamma_R(C_p) = 2k+1$; y del teorema 3.1.15, observamos que

$$\mathsf{d}_R(C_p)(2k+1) \leq 2(3k+1).$$

Se tiene que

$$\mathsf{d}_R(C_p) \leq \frac{2(3k+1)}{2k+1}.$$

Observamos que para toda n en $\mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{3n+1}{2n+1} < \frac{3}{2}.$$

Luego,

$$\frac{2(3k+1)}{2k+1} < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3;$$

es decir, $\mathsf{d}_R(C_p) \leq 2$. Del lema 3.1.19, como $A(C_p) \neq \emptyset$, tenemos que $2 \leq \mathsf{d}_R(C_p)$. Concluimos que $\mathsf{d}_R(C_p) = 2$.

Caso 3 $p \equiv 2 \pmod 3$.

En este caso, existe k en $\mathbb{N}$ tal que $p = 3k+2$. De manera análoga al caso anterior, del lema 2.2.12 tenemos que $\gamma_R(C_p) = 2k+2$, y del teorema 3.1.15, se sigue que

$\mathsf{d}_R(C_p)(2k+2) \leq 2(3k+2)$; es decir,

$$\mathsf{d}_R(C_p) \leq \frac{2(3k+2)}{2k+2}.$$

Observamos que para todo n en $\mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{3n+2}{2n+2} < \frac{3}{2}.$$

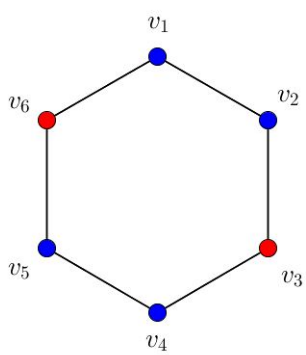
Se sigue que

$$\mathsf{d}_R(C_p) < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

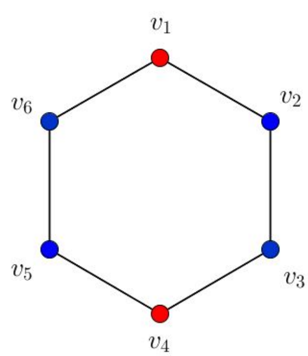
De esta manera, $\mathsf{d}_R(C_p) \leq 2$. Del lema 3.1.19, como $A(C_p) \neq \emptyset$, entonces $2 \leq \mathsf{d}_R(C_p)$, concluyendo que $\mathsf{d}_R(C_p) = 2$.

□

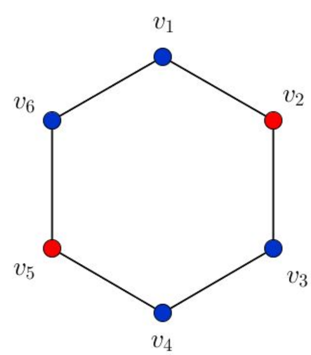
Ejemplo 3.7. Para ilustrar la prueba del Teorema 3.2.1, vemos cómo actúan las funciones f_0, f_1 y f_2 sobre C_6 en la figura 3.15.



(a) $V(C_6)$ bajo f_0



(b) $V(C_6)$ bajo f_1.



(c) $V(C_6)$ bajo f_2.

Figura 3.15: Las funciones f_0, f_1 y f_2 sobre C_6.

Daremos cotas y valores específicos del número domático romano de dos familias de gráficas: los árboles y los cactus.

Teorema 3.2.2 ([12])**.** *Para cualquier árbol T de orden p, con $p \geq 2$, se tiene que* $\mathsf{d}_R(T) = 2$*.*

Demostración. Sea T un árbol de orden p, con $p \geq 2$. Sabemos que $A(T) \neq \emptyset$, y por el lema 3.1.12, se sigue que $\mathsf{d}_R(T) \geq 2$.

Sea $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ una trayectoria en T de longitud máxima. Observamos que si u es un vértice adyacente a v_1 y $u \neq v_2$, entonces u es una hoja de T puesto que P es una trayectria de longitud máxima. Sean $u_0, \ldots, u_k$ las hojas adyacentes a v_1, y supongamos que $v_0 = u_0$. Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(T)$-familia. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 Supongamos que existen i en $\{1. \ldots, d\}$ y j en $\{0, \ldots, k\}$ tales que $f_i(u_j) = 2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f_1(v_0) = 2$. Por el lema 3.1.5, tenemos que esto ocurre para a lo más una función; es decir, para todo índice $i \in \{2, \ldots, d\}$ se tiene que $f_i(v_0) = 0$. Dado que para cada i en $\{2, \ldots, d\}$, f_i es una función de dominación romana, pasa que $f_i(v_1) = 2$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, debe suceder que $d = 2$.

Caso 2 Supongamos ahora que para todo i en $\{1, \ldots, d\}$ y para todo j en $\{0, \ldots, k\}$ ocurre que $f_i(u_j) \leq 1$. Esto nos lleva a ver otros dos subcasos.

Veamos el caso en el que existen i en $\{1, \ldots, d\}$ y j en $\{0, \ldots, k\}$ tales que $f_i(u_j) = 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f_1(v_0) = 0$. Como f_1 es una función de dominación romana y v_0 es una hoja, tenemos que $f_1(v_1) = 2$. De hecho, $f_1(u_j) = 0$ para toda j en $\{0, \ldots, k\}$. Para toda i en $\{2, \ldots, d\}$ se tiene que $f_i(v_1) = 0$. De acuerdo al caso en el que estamos, como para todo i en $\{1, \ldots, d\}$ y para todo j en $\{0, \ldots, k\}$ ocurre que $f_i(u_j) \neq 2$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, concluimos que $d \leq 2$.

Ahora veamos el caso en el que para todo i en $\{1, \ldots, d\}$ y para todo j en $\{0, \ldots, k\}$ se tiene que $f_i(u_j) \neq 0$. Notemos que en particular, $f_i(v_0) = 1$ para toda i en $\{1, \ldots, d\}$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, concluimos que $d = 2$.

Concluyendo de todos los casos que $\mathsf{d}_R(T) = 2$. □

Teorema 3.2.3 ([12]). *Si G es un cactus, entonces* $\mathsf{d}_R(G) \leq 3$.

Demostración. Sean G un cactus y $d = \mathsf{d}_R(G)$. Si $\delta(G) \leq 1$, entonces del teorema 3.1.21 se tiene que

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \delta(G) + 2.$$

Concluyendo así que $\mathsf{d}_R(G) \leq 3$. Supongamos ahora que $\delta(G) = 2$. Con esto, vemos que todos los bloques terminales de G son ciclos. Sea C_t un bloque terminal de G. Como $\delta(G) = 2$, entonces C_t es un ciclo, digamos que $C_t = (v_1, \ldots, v_t, v_1)$. Como C_t es un bloque terminal, entonces C_t tiene exactamente un vértice de corte de G. Sean v_1 dicho vértice y $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una familia de dominación romana sobre G. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 Para alguna i en $\{2, \ldots, t\}$ y j en $\{1, \ldots, d\}$ ocurre que $f_j(v_i) = 2$.

Supongamos que $f_1(v_i) = 2$. Por la observación 3.1.2, tenemos que

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0(v_i)| + |\mathcal{F}_1(v_i)| + |\mathcal{F}_2(v_i)|.$$

Del lema 3.1.3, sabemos que $|\mathcal{F}_0(v_i)| \leq \delta_G(v_i)$. Como $\delta_G(v_i) = 2$, $|\mathcal{F}_2(v_i)| = 1$ y $|\mathcal{F}_1(v_i)| = 0$, entonces $|\mathcal{F}| \leq 3$.

Caso 2 Para todo i en $\{2, \ldots, t\}$ y j en $\{1, \ldots, d\}$ ocurre que $f_j(v_i) \leq 1$.

Primero supongamos que $t \geq 4$, y consideremos a v_3. Notemos que $|\mathcal{F}_1(v_3)| \leq 2$ y $|\mathcal{F}_2(v_3)| = 0$ por el caso en el que estamos. Supongamos que $f_j(v_3) = 0$ para alguna j en $\{1, \ldots, d\}$. Como f_j es una función de dominación romana, entonces existe un vértice u adyacente a v_3 tal que $f_j(u) = 2$. Como v_3 sólo es adyacente a v_2 y a v_4. tenemos una contradicción a la hipótesis del caso en el que estamos. Por tanto, $|\mathcal{F}_0| = 0$. Concluimos que $|\mathcal{F}| \leq 3$.

Si $t = 3$, entonces del lema 3.1.25, $\mathsf{d}_R(G) \leq 3$.

Por lo visto en todos los casos, llegamos a que para toda familia de dominación romana $\mathcal{F}$ con d elementos se cumple que $d \leq 3$; concluyendo que $\mathsf{d}_R(G) \leq 3$. □

En 2016, H. Tan, H. Liang, R. Wang y J. Zhou calcularon el número domático romano de las gráficas bipartitas completas.

Teorema 3.2.4 ([14]). *Para cualesquiera números enteros $m \geq 1$ y $n \geq 1$ se cumple que*

$$\mathsf{d}_R(K_{m,n}) = \max\{2, \min\{m, n\}\}.$$

Demostración. Sean m y n dos números enteros tales que $m \geq 1$ y $n \geq 1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m \leq n$.

Si $m = 1$, entonces $K_{m,n}$ es un árbol de orden al menos dos, y por el teorema 3.2.2, sabemos que $\mathsf{d}_R(K_{m,n}) = 2$, cumpliéndose así el resultado.
Supongamos ahora que $m \geq 2$; es decir, $m = \text{máx}\,\{2, \text{mín}\{m, n\}\}$. Digamos que $V(K_{m,n}) = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 forman una bipartición de $V(K_{m,n})$ tal que todo vértice de U_1 es adyacente a todo vértice de U_2. Consideremos también que $U_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,m}\}$ y $U_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,n}\}$.
Probaremos primero que $\mathsf{d}_R(K_{m,n}) \leq m$. Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(K_{m,n})$-familia. Analizamos ahora los siguientes casos.

Caso 1 Para toda f_i en $\mathcal{F}$ existe x_i en U_2 tal que $f_i(x_i) = 0$.

Como f_i es una función de dominación romana y $f_i(x_i) = 0$, entonces existe y_i en U_1 tal que $f_i(y_i) = 2$. Observamos que si $\{i, j\}$ es un subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ tal que $i \neq j$, entonces $y_i \neq y_j$, pues $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana. Por lo tanto, $|\mathcal{F}| \leq |U_1|$.

Caso 2 Existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que para toda $x \in U_2$, $f_i(x) \geq 1$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 1$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana, para toda j en $\{2, \ldots, d\}$ y toda $x \in U_2$, $f_l(x) \leq 1$, en particular, $f_j(x) \neq 2$. Como f_j es una función de dominación romana, para toda j en $\{2, \ldots, d\}$ y $y \in U_1$, $f_j(y) \neq 0$.

De esta manera, para toda y en U_1 y j en $\{1, \ldots, d\}$ ocurre que $f_j(y) \geq 1$. Por lo tanto, $|\mathcal{F} \setminus \{f_1\}| \leq 2$, concluyendo que $d \leq 3$.

Supongamos que $d = 3$. Consideremos a x_0 en U_2. Como ya se había mencionado, para toda j en $\{2, 3\}$, $f_j(x_0) \leq 1$, y como $f_1(x_0) \geq 1$, entonces para alguna j en $\{2, 3\}$, $f_j(x_0) = 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $j = 2$. Como f_2 es una función de dominación romana, existe $y_0 \in U_1$ tal que $f_2(y_0) = 2$ y y_0 es adyacente a x_0. Pero sabemos también que $f_3(y_0) \geq 1$, lo cual es una contradicción pues $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana. Por lo tanto, $d \leq 2$.

De ambos casos, concluimos que $d \leq \text{máx}\{2, m\}$.

Ahora probaremos que $\max\{2, \min\{m,n\}\} \leq \mathsf{d}_R(K_{m,n})$. Para cada índice i de $\{1,\ldots,m\}$ definimos la función

$$f_i \colon V(K_{m,n}) \to \{0,1,2\}$$
$$f_i(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in \{v_{1,i}, v_{2,i}\} \\ 0 \text{ si } x \in (U_1 \cup U_2) \setminus \{v_{1,i}, v_{2,i}\} \end{cases}$$

Afirmamos que f_i es una función de dominación romana. Sean i en $\{1,\ldots,m\}$ y v un vértice en $V(K_{m,n})$ tal que $f_i(v) = 0$. De la definición de f_i sabemos que $v \in V(K_{m,n}) \setminus \{v_{1,i}, v_{2,i}\}$. Si v está en U_1, entonces v es adyacente a $v_{2,i}$, y nuevamente, de la definición de f_i, tenemos que $f_i(v_{2,i}) = 2$. Si v es elemento de U_2, entonces v es adyacente a $v_{1,i}$ y $f_i(v_{1,i}) = 2$. Por tanto, f_i es una función de dominación romana sobre $K_{m,n}$.
Consideramos a la familia $\mathcal{F} = \{f_1,\ldots,f_m\}$, y afirmamos que $\mathcal{F}$ es una función de dominación romana sobre $K_{m,n}$. Sea k un índice en $\{1,\ldots,n\}$ y consideremos a los vértices $v_{j,k}$, con j en $\{1,2\}$. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 Para $k \leq m$.

De la definición de f_i, sabemos que

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(v_{j,k}) = f_i(v_{j,i}),$$

donde para toda $j \in \{1,2\}$ se tiene que $f_i(v_{j,i}) = 2$.

Caso 2 Para $k > m$.

De aquí, vemos que $j = 2$; es decir, $v_{j,k}$ es un vértice en U_2. De la definición de $\mathcal{F}$,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(v_{2,k}) = 0.$$

De ambos casos, concluimos que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre $K_{m,n}$, y por tanto, $m \leq \mathsf{d}_R(K_{m,n})$. Se concluye que

$$\mathsf{d}_R(K_{m,n}) = \max\{2, \min\{m,n\}\}.$$

$\square$

Corolario 3.2.5. *Si G es una gráfica bipartita, con bipartición $\{U,V\}$, entonces*

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \text{máx}\{2, \text{mín}\{|U|,|V|\}\}.$$

Demostración. Sea G una gráfica bipartita, con bipartición $\{U,V\}$ de $V(G)$. Consideremos a $K_{|U|,|V|}$ una gráfica bipartita completa con bipartición $\{U,V\}$. Sabemos que G es una subgráfica de $K_{|U|,|V|}$. Del lema 3.1.11, se tiene que

$$\mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(K_{|U|,|V|}).$$

Luego, del teorema 3.2.4, sabemos que

$$\mathsf{d}_R(K_{|U|,|V|}) = \text{máx}\{2, \text{mín}\{|U|,|V|\}\}.$$

Concluyendo que $\mathsf{d}_R(G) \leq \text{máx}\{2, \text{mín}\{|U|,|V|\}\}$. □

Decimos que una gráfica G es **d_R-crítica** si $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$ y para toda arista e de G se cumple que $\mathsf{d}_R(G-e) < \mathsf{d}_R(G)$.

Ejemplo 3.8. Para $k \geq 1$, el ciclo C_{3k} es una gráfica d_R-crítica, pues del teorema 3.2.1 tenemos que $\mathsf{d}_R(C_{3k}) = 3$, mientras que si e es una arista de C_{3k}, entonces $C_{3k}-e$ es una trayectoria de longitud $3k-1$, y por tanto, un árbol de orden al menos tres. De esta manera, del teorema 3.2.2 sabemos que $\mathsf{d}_R(C_{3k}-e) = 2$.

A partir de la definición, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.6. *Si G es una gráfica conexa, entonces existe una subgráfica de G, digamos H, tal que $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(G)$ y H es d_R-crítica.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el tamaño q de la gráfica G.

Base de Inducción. Si $q=1$, entonces G tiene una única arista. Por un lado, $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$ por el lema 3.1.12. Por otro lado, $\mathsf{d}_R(G-e) = 1$ pues $G-e$ es vacía, y de esta manera, G es d_R-crítica y es subgráfica de sí misma.

Hipótesis de Inducción. Supongamos cierto que para toda gráfica G' conexa de tamaño k, con $k \leq q$, existe una subgráfica H' de G' tal que H' es d_R-crítica y $\mathsf{d}_R(H') = \mathsf{d}_R(G')$.

Paso Inductivo. Sea G una gráfica conexa de tamaño $q+1$. Si G es d_R-crítica, entonces G es la subgráfica buscada. Supongamos que G no es d_R-crítica. Existe una arista e de G de tal modo que $\mathsf{d}_R(G) = \mathsf{d}_R(G-e)$. Digamos que $e = uv$, para algunos vértices $\{u, v\} \subseteq V(G)$. Veamos los siguientes casos:

Caso 1 $G - e$ es conexa.

Por la hipótesis de inducción, como $G-e$ es de tamaño q, existe H una subgráfica d_R-crítica de G tal que $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(G)$.

Caso 2 $G - e$ es no es conexa.

Observamos que al quitar la arista e de G, la gráfica resultante tiene exactamente dos componentes conexas. Sean H_1 y H_2 las componentes conexas de $G-e$.

Caso 2.1 $G - e$ tiene al menos un vértice aislado.

Supongamos que para algún índice i en $\{1,2\}$, ocurre $H_i \cong K_1$. Digamos que $H_1 \cong K_1$, y también que v es elemento de $V(H_1)$. Del lema 3.1.22, sabemos que

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_1), \mathsf{d}_R(H_2)\} \leq \mathsf{d}_R(G-e).$$

Aún más, como $H_1 \cong K_1$, se tiene que

$$\mathsf{d}_R(H_1) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_1), \mathsf{d}_R(H_2)\}.$$

También, como $G-e$ tiene un vértice aislado, del lema 3.1.13 se ve que $\mathsf{d}_R(G-e) \leq 2$. Por lo tanto, $1 \leq \mathsf{d}_R(G) \leq 2$. Si $\mathsf{d}_R(G) = 1$, entonces, por el teorema 3.1.12, G es una gráfica vacía, lo cual es una contradicción pues G tiene al menos dos aristas. Por tanto, ocurre que $\mathsf{d}_R(G) = 2$. Sea $H = G\langle u, v\rangle$. Sabemos que H' es una gráfica isomorfa a K_2, pues consiste de los vértices u y v y de la arista e. Es más, $\mathsf{d}_R(H') = 2$, por lo que H' es una subgráfica d_R-crítica de G y $\mathsf{d}_R(H') = \mathsf{d}_R(G)$.

Caso 2.2 $G - e$ no tiene vértices aislados.

Del lema 3.1.23, sabemos

$$\mathsf{d}_R(G-e) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_1), \mathsf{d}_R(H_2)\}.$$

Digamos que $\mathsf{d}_R(H_1) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_1), \mathsf{d}_R(H_2)\}$. Se sigue que $\mathsf{d}_R(G) = \mathsf{d}_R(H_1)$. Como $G - e$ no tiene vértices aislados, entonces H_1 y H_2 tienen al menos una arista cada una de las aristas de G, y en particular, $|A(H_1)| \leq q$. Por la hipótesis de inducción, se tiene que existe H una subgráfica d_R-crítica de H_1 tal que $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(H_1)$. Por lo tanto, H es una subgráfica d_R-crítica de G tal que $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(G)$.

□

Podemos extender la proposición 3.2.6 para todo tipo de gráficas, sin la necesidad de que éstas sean conexas.

Proposición 3.2.7. *Si G es una gráfica con $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$, entonces existe una subgráfica H de G tal que $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(G)$ y H es d_R-crítica.*

Demostración. Sea G una gráfica. Procederemos analizando los siguientes casos:

Caso 1 G es conexa.

Del lema 3.2.6 se tiene la existencia de dicha subgráfica H.

Caso 2 G no es conexa.

Nuevamente, procedemos por casos.

G no tiene vértices aislados.

Del lema 3.1.23,

$$\mathsf{d}_R(G) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(H_i) \colon i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

donde $H_1, \ldots, H_k$ son las componentes conexas de G. Digamos que H_1 cumple que su número domático romano es de valor mínimo de entre las componentes conexas de G. Como H_1 es conexa, del lema 3.2.6 se tiene que existe una subgráfica de H_1, digamos H, tal que $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(H_1)$ y H es d_R-crítica. H es la subgráfica de G buscada.

G tiene al menos un vértice aislado.

Por el lema 3.1.13, tenemos que $\mathsf{d}_R(G) \leq 2$, y como $\mathsf{d}_R(G) \geq 2$, entonces $\mathsf{d}_R(G) = 2$. Por el lema 3.1.12, G tiene al menos una arista, digamos e. Sean u, v vértices de G tales que $uv = e$. Sea $H = G\langle u, v\rangle$. Observamos que H es una subgráfica de G que es isomorfa a K_2, y así, $\mathsf{d}_R(H) = 2$. Por lo tanto, H es la subgráfica buscada.

Concluimos así que para toda gráfica G existe una subgráfica H tal que H es d_R-crítica y $\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(G)$. $\square$

Capítulo 4

Número Domático Romano y las Operaciones de Gráficas

En este capítulo, veremos la relación entre el número domático romano de gráficas bajo las operaciones de gráficas persentadas en el capítulo 1.

Se comienza con tres resultados presentados en [14], que conciernen a la relación del número domático romano de una gráfica al sumarle un vértice.

Teorema 4.0.1 ([14]). *Para toda gráfica G ocurre que*

$$\mathsf{d}_R(G + K_1) = \mathsf{d}_R(G) + 1.$$

Demostración. Sean G una gráfica de orden p y K_1, con $V(K_1) = \{v_0\}$. Consideremos a H la gráfica definida como $H = G + K_1$.

Si $A(G) = \emptyset$, entonces $H \cong K_{1,p}$. De esta manera, tenemos que H es un árbol. Por un lado, como $A(G) = \emptyset$, del teorema 3.1.12 se tiene que $\mathsf{d}_R(G) = 1$. Por otro lado, como H es un árbol no trivial, del teorema 3.2.2, se cumple que $\mathsf{d}_R(H) = 2$, y así, se cumple el resultado.

Partamos ahora suponiendo que $A(G) \neq \emptyset$. Nuevamente, por el teorema 3.1.12, $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$. Probemos primero que $\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G) + 1$. De la definición de H tenemos que $V(H) = V(G) \cup \{v_0\}$. Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(H)$-familia. Para cada índice i en

$\{1, \dots, d\}$ definamos a la función

$$f_i' \colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$$
$$f_i'(v) = f_i(v).$$

Consideremos al conjunto $\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, d\} \colon f_i(v_0) < 2\}$. Del lema 3.1.5, tenemos que v_0 tiene valor 2 para a lo más una función de $\mathcal{F}$, por lo cual $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{F}' = \{f_i' \colon i \in \mathcal{I}\}$. Afirmamos ahora que para toda f_i' en $\mathcal{F}'$, f_i' es una función de dominación romana en G. Sea f_i' en $\mathcal{F}'$ y v un vértice de G tal que $f_i'(v) = 0$. Por la definición de f_i' se tiene que $f_i'(v) = f_i(v)$. Como f_i es una función de dominación romana en H, existe u un vértice de H tal que $f_i(u) = 2$ y u es adyacente a v en H. Como $f_i' \in \mathcal{F}'$, se tiene que $f_i(v_0) \neq 2$. Con esto, podemos asegurar que $u \neq v_0$. Tenemos que $u \in V(H) \setminus \{v_0\}$; es decir, u es un vértice de G. Nuevamente, de la definición de f_i' se sigue que $f_i'(u) = f_i(u)$. Por tanto, obtenemos que $f_i'(u) = 2$ y u es adyacente a v en G.

Ahora veamos que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana. Sea v un vértice de G. Observamos que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} f_i'(v) = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(v).$$

Como $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, d\}$, se tiene que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(v) \leq \sum_{i=1}^{d} f_i(v).$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre H, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2.$$

Afirmamos que $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{I}|$. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\mathcal{I}$ tal que $i \neq j$. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 $f_i(v_0) = f_j(v_0)$.

En este caso, como $f_i \neq f_j$, existe un vértice u de H tal que $f_i(u) \neq f_j(u)$. Por el caso en el que estamos, $u \neq v_0$. Por lo tanto, $u \in V(G)$, concluyendo que $f_i' \neq f_j'$.

Caso 2 $f_i(v_0) \neq f_j(v_0)$.

Como $\{i, j\} \subseteq \mathcal{I}$, entonces podemos suponer que $f_i(v_0) = 0$ y $f_j(v_0) = 1$. Como f_i es una función de dominación romana sobre H, existe un vértice u en $V(H)$ tal que $f_i(u) = 2$ y u es adyacente a v_0. De esta manera, $u \neq v_0$; es decir, $u \in V(G)$. Del mismo modo, $f_j(u) = 0$ pues $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre H. Por lo tanto, tenemos que $f_i'(u) \neq f_j'(u)$, llegando a que $f_i' \neq f_j'$.

Hasta ahora, tenemos que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre G tal que $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{I}|$. Una vez más, por el lema 3.1.5 tenemos que existe a lo más una función f en $\mathcal{F}$ tal que $f(v_0) = 2$, por lo que podemos afirmar que $d - 1 \leq |\mathcal{I}|$. Por lo tanto, $d \leq |\mathcal{I}| + 1$.

Por un lado, como $d = \mathsf{d}_R(H)$, entonces $\mathsf{d}_R(H) \leq |\mathcal{I}| + 1$. Por otro lado, como $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre G, se sigue que $|\mathcal{I}| \leq \mathsf{d}_R(G)$. Concluyendo que $\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G) + 1$.

Probemos ahora que $\mathsf{d}_R(G) + 1 \leq \mathsf{d}_R(H)$. Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(G)$-familia. Para cada índice i en $\{1, \ldots, d\}$ definimos a la función

$$f_i' \colon V(H) \to \{0, 1, 2\}$$
$$f_i'(v) = \begin{cases} f_i(v) & \text{si } v \in V(G) \\ 0 & \text{si } v = v_0, \end{cases}$$

y también definimos a la función

$$f_{d+1}' \colon V(H) \to \{0, 1, 2\}$$
$$f_{d+1}'(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in V(G) \\ 2 & \text{si } v = v_0. \end{cases}$$

Afirmamos que para cada i en $\{1, \ldots, d+1\}$, la función f_i' es una función de dominación romana sobre H. Sea i en $\{1, \ldots, d+1\}$ y v un vértice de H tal que $f_i'(v) = 0$. Analizamos los siguientes casos.

Caso 1 $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Si $v \in V(G)$, entonces tenemos que $f_i'(v) = f_i(v)$. Como f_i es una función de dominación romana sobre G, existe un vértice u adyacente a v en G tal que $f_i(u) = 2$. Como $u \in V(G)$, tenemos que $f_i'(u) = f_i(v)$. Por tanto, v es adyacente a u en H y

$f_i'(u) = 2$.

Supongamos ahora que $v = v_0$. De lema 3.1.6, como $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$, tenemos que para f_i existe un vértice u en G tal que $f_i(u) = 2$. De la definición de f_i' vemos que $f_i'(u) = f_i(u)$. De la definición de H, se tiene que u es adyacente a v_0 en H. Por lo tanto, v es adyacente a u en H y $f_i'(u) = 2$.

Caso 2 $i = d + 1$.

De la definición de f_{d+1}', como $f_{d+1}'(v) = 0$, entonces $v \in V(G)$. Por lo tanto, $f_{d+1}'(v_0) = 2$ y v_0 es adyacente a v en H.

Consideramos ahora a la familia $\mathcal{F}' = \{f_1', \ldots, f_d', f_{d+1}'\}$. Probaremos que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre H. Sea v un vértice de H. Si $v \in V(G)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{d+1} f_i'(v) = \sum_{i=1}^{d} f_i(v).$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G, se tiene que $\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2$.
Si $v = v_0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{d} f_i'(v) = f_{d+1}'(v)$$

donde $f_{d+1}'(v_0) = 2$. Para todo vértice v de H se cumple que $\sum_{i=1}^{d+1} f_i'(v) \leq 2$. Por último, probemos que $|\mathcal{F}'| = d + 1$. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{1, \ldots, d + 1\}$ tal que $i \neq j$. Veamos los siguientes casos.

Caso 1 $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, d\}$.

Sabemos que $f_i \neq f_j$ pues $|\mathcal{F}| = d$. Por lo tanto, $f_i' \neq f_j'$.

Caso 2 $i = d + 1$.

Sabemos que $f_{d+1}'(v_0) = 2$ y que $f_j'(v_0) = 0$. Por lo tanto, $f_i' \neq f_j'$.

Llegamos a que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre H, y por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) + 1 \leq \mathsf{d}_R(H)$. De lo anterior, se cumple que

$$\mathsf{d}_R(H) = \mathsf{d}_R(G) + 1.$$

$\square$

A partir de este teorema, podemos calcular el número domático romano de algunas familias de gráficas específicas.

Corolario 4.0.2 ([14]). *Para toda $p \geq 3$ se cumple que*

$$\mathsf{d}_R(F_p) = 3.$$

Demostración. Sea F_p el abanico de orden p, con $p \geq 3$. De la definición de F_p, observamos que, para algún vértice v_0 en $V(F_p)$,

$$F_p \cong (F_p - v_0) + v_0.$$

Por un lado, sabemos que $F_p - v_0$ es una trayectoria, y por ende, un árbol. Del lema 3.2.2, se tiene que

$$\mathsf{d}_R(F_p - v_0) = 2.$$

Del teorema 4.0.1, tenemos que

$$\mathsf{d}_R((F_p - v_0) + v_0) = \mathsf{d}_R(F_p - v_0) + 1.$$

Concluimos que $\mathsf{d}_R(F_p) = 3$. □

Corolario 4.0.3 ([14]). *Para toda $p \geq 4$ se tiene que*

$$\mathsf{d}_R(W_p) = \begin{cases} 4 \text{ \textit{si} } p \equiv 0 \pmod 3 \\ 3 \text{ \textit{en otro caso.}} \end{cases}$$

Demostración. Sea W_p la rueda de orden $p+1$, con $p \geq 4$. De la definición de W_p observamos que, para algún vértice v_0 de W_p,

$$W_p \cong (W_p - v_0) + v_0.$$

Por un lado, vemos que $W_p - v_0$ es un ciclo. Del teorema 3.2.1, tenemos que

$$\mathsf{d}_R(W_p - v_0) = \begin{cases} 3 \text{ si } p \equiv 0 \pmod 3 \\ 2 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, del teorema 4.0.1 se sigue que

$$\mathsf{d}_R\left((W_p - v_0) + v_0\right) = \mathsf{d}_R(W_0 - v_0) + 1.$$

Por lo tanto,

$$\mathsf{d}_R(W_p) = \begin{cases} 4 \text{ si } p \equiv 0 \pmod 3 \\ 3 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$\square$

Como corolario del teorema 4.0.1, podemos extender este resultado para el caso cuando a una gráfica dada se le suma una gráfica completa.

Corolario 4.0.4. *Si G es una gráfica y $p \geq 1$, entonces*

$$\mathsf{d}_R(G + K_p) = \mathsf{d}_R(G) + p.$$

Demostración. Sea G una gráfica y $p \geq 1$. Procederemos por inducción sobre p.

Base de Inducción El caso $p = 1$ se sigue directamente del lema 3.1.20; es decir,$\mathsf{d}_R(G + K_1) = \mathsf{d}_R(G) + 1$.

Hipótesis de Inducción Supongamos cierto que si G' es una gráfica y $p \geq 2$, entonces

$$\mathsf{d}_R(G' + K_p) = \mathsf{d}_R(G') + p.$$

Paso de Inducción. Sea G una gráfica. Mostraremos que $\mathsf{d}_R(G+K_{p+1}) = \mathsf{d}_R(G)+(p+1)$. Consideremos a la gráfica $G+K_{p+1}$ y a sea v un vértice en $V(K_{p+1})$. De esta manera, tenemos que

$$G + K_{p+1} \cong \Big(G + (K_{p+1} - v)\Big) + v.$$

Por el lema 4.0.1, se sigue que

$$\mathsf{d}_R\Big(\,(G + (K_{p+1} - v)) + v\Big) = \mathsf{d}_R\Big(G + (K_{p+1} - v)\Big) + 1.$$

Por el lema 3.1.9, dado que $G + (K_{p+1} - v) \cong G + K_p$, entonces

$$\mathsf{d}_R\Big(G + (K_{p+1} - v)\Big) = \mathsf{d}_R(G + K_p).$$

De la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\mathsf{d}_R(G + K_p) = \mathsf{d}_R(G) + p.$$

Por lo tanto,

$$\mathsf{d}_R(G + K_{p+1}) = \mathsf{d}_R\Big(G + (K_{p+1} - v)\Big) + 1 = \mathsf{d}_R(G) + (p + 1).$$

Concluimos así que para toda gráfica G y $p \geq 1$ se cumple que

$$\mathsf{d}_R(G + K_p) = \mathsf{d}_R(G) + p.$$

$\square$

Continuando con la operación suma de gráficas, vemos el caso general cuando tenemos dos gráficas ajenas por vértices.

Lema 4.0.5. *Si G y H son dos gráficas tales que* $\text{mín}\{\mathsf{d}_R(G), \mathsf{d}_R(H)\} \geq 2$*, entonces*

$$\mathsf{d}_R(G) + \mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G + H).$$

Demostración. Sean G y H dos gráficas, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(G)$-familia y $\mathcal{F}' = \{f_1', \ldots, f_t'\}$ una $\mathsf{d}_R(H)$-familia. Para cada índice i en $\{1, \ldots, d\}$ consideramos la función

$$g_i \colon V(G + H) \to \{0,1,2\}$$
$$g_i(v) = \begin{cases} f_i(v) & \text{si } v \in V(G) \\ 0 & \text{si } v \in V(H) \end{cases}$$

Para cada índice i en $\{d+1, d+2, \ldots, d+t\}$ definimos la función

$$g_i \colon V(G+H) \to \{0,1,2\}$$
$$g_i(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in V(G) \\ f'_{i-d}(v) & \text{si } v \in V(H) \end{cases}$$

Veamos que para toda i en $\{1, \ldots, d+t\}$ la función g_i es una función de dominación romana sobre $G+H$. Sea v un vértice de $G+H$ tal que $g_i(v) = 0$. Analizamos los siguientes casos sobre i:

Caso 1 $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Si $v \in V(G)$, entonces $g_i(v) = f_i(v)$. Como f_i es una función de dominación romana sobre G, entonces existe un vértice u adyacente a v en G tal que $f_i(u) = 2$. Como $u \in V(G)$, entonces $g_i(u) = f_i(u)$. De esta manera, v es adyacente a u en $G+H$ y $g_i(u) = 2$.

Supongamos que v es un vértice de H. Como $\mathcal{F}$ es una $\mathsf{d}_R(G)$-familia y $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$, por el lema 3.1.6, para f_i existe un vértice u en G tal que $f_i(u) = 2$. Como $v \in V(H)$ y $u \in V(G)$, entonces u y v son adyacentes en $G+H$. También, como $u \in V(G)$, entonces $g_i(u) = f_i(u)$; es decir, $g_i(u) = 2$.

Caso 2 $i \in \{d+1, \ldots, d+t\}$.

Supongamos que $v \in V(G)$. Como $\mathcal{F}'$ es una $\mathsf{d}_R(H)$-familia y $2 \leq \mathsf{d}_R(H)$, entonces por el lema 3.1.5, para f'_{i-d} existe un vértice u en H tal que $f'_{i-d}(u) = 2$. Por definición, como $u \in V(H)$ y $v \in V(G)$, entonces u y v son adyacentes en $G+H$. De igual forma, como $u \in V(H)$ se tiene que $g_i(u) = f'_{i-d}(u)$, es decir, $g_i(u) = 2$.

Si $v \in V(H)$, entonces $g_i(v) = f'_{i-d}(v)$, y como f'_{i-d} es una función de dominación romana sobre H, existe un vértice u adyacente a v en H tal que $f'_{i-d}(u) = 2$. Por definición, tenemos que $g_i(u) = f'_{i-d}(u)$, es decir, u es adyacente a v en $G+H$ y $g_i(u) = 2$.

Por lo visto en estos casos, concluimos que para toda i en $\{1, \ldots, d+t\}$, g_i es una función de dominación romana sobre $G+H$.

Ahora consideramos la colección $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_{d+t}\}$. Afirmamos que $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana sobre $G+H$. Sea v un vértice de $G+H$. Observamos que

$$\sum_{i=1}^{d+t} g_i(v) = \sum_{i=1}^{d} g_i(v) + \sum_{i=d+1}^{d+t} g_i(v). \tag{4.1}$$

Tenemos los dos siguientes casos:

Caso 1 $v \in V(G)$.

Por definición de g_i y de la ecuación 4.1 se sigue que

$$\sum_{i=1}^{d+t} g_i(v) = \sum_{i=1}^{d} f_i(v) + \sum_{i=d+1}^{d+t} 0.$$

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2.$$

De esta manera,

$$\sum_{i=1}^{d+t} g_i(v) \leq 2.$$

Caso 2 $v \in V(H)$.

Por definición de g_i, vemos que

$$\sum_{i=1}^{d+t} g_i(v) = \sum_{i=1}^{d} 0 + \sum_{i=d+1}^{d+t} f'_{i-d}(v).$$

Observamos que

$$\sum_{i=d+1}^{d+t} f'_{i-d}(v) = \sum_{j=1}^{t} f'(v).$$

Como $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre H,

$$\sum_{j=1}^{t} f'(v) \leq 2.$$

Por lo tanto,
$$\sum_{i=1}^{d+t} g_i(v) \leq 2.$$

De los casos anteriores llegamos a que $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana sobre $G+H$. Por último, veamos que $\mathcal{G}$ tiene $d+t$ elementos. Sea $\{i,j\}$ un subconjunto de $\{1,\ldots,d+t\}$ tal que $i \neq j$. Tenemos ahora estos tres casos:

Caso 1 $\{i,j\} \subseteq \{1,\ldots,d\}$.

Como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G, entonces $f_i \neq f_j$, es decir, exite un vértice v en G tal que $f_i(v) \neq f_j(v)$. Por definición de g_i y g_j, tenemos $g_i(v) = f'_{i-d}(v)$ y $g_j(v) = f'_{j-d}(v)$, y por lo tanto, $g_i \neq g_j$.

Caso 2 $\{i,j\} \subseteq \{d+1,\ldots,d+t\}$.

Por un lado, como $i \neq j$, entonces $i-d \neq j-d$. Por otro lado, dado que $\mathcal{F}'$ es una familia de dominación romana sobre H, entonces $f'_{i-d} \neq f'_{j-d}$, es decir, existe un vértice v en H tal que $f'_{i-d}(v) \neq f'_{j-d}(v)$. Por definición de g_i y g_j, tenemos que $g_i(v) = f'_{i-d}(v)$ y $g_j(v) = f'_{j-d}(v)$. Por tanto, $g_i(v) \neq g_j(v)$.

Caso 3 $i \in \{1,\ldots,d\}$ y $j \in \{d+1,\ldots,d+t\}$.

Como $2 \leq \mathsf{d}_R(G)$, del lema 3.1.6 tenemos que existe un vértice v tal que $f_i(v) = 2$. Por definición de g_i, tenemos que $g_i(v) = f_i(v)$ y que $g_j(v) = 0$. Por lo tanto, $g_i \neq g_j$.

De esta manera, concluimos que la familia $\mathcal{G}$ tiene efectivamente $d+t$ elementos. Por lo tanto, se cumple que $d+t \leq \mathsf{d}_R(G+H)$, es decir,
$$\mathsf{d}_R(G) + \mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G+H).$$
□

Analizamos el comportamiento del número domático romano de una gráfica que es el producto cartesiano de otras dos y los número domáticos romanos de las componentes.

Proposición 4.0.6. *Si G y H son dos gráficas, entonces*
$$\text{máx}\,\{\mathsf{d}_R(G), \mathsf{d}_R(H)\} \leq \mathsf{d}_R(G \,\square\, H).$$

Demostración. Sean G y H dos gráficas, y supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathsf{d}_R(G) = \text{máx}\{\mathsf{d}_R(G), \mathsf{d}_R(H)\}$, y $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una $\mathsf{d}_R(G)$-familia.
Para cada índice i en $\{1, \ldots, d\}$ definimos la función

$$F_i \colon V(G \,\square\, H) \to \{0, 1, 2\}$$
$$F_i(v, u) = f_i(v)$$

Afirmamos que F_i es una función de dominación romana sobre $G \,\square\, H$. Supongamos que existe un vértice (v, u) en $V(G \,\square\, H)$ tal que $F_i(v, u) = 0$. De la definición de F_i, tenemos que $F_i(v, u) = f_i(v)$, y por lo tanto, $f_i(v) = 0$. Como f_i es una función de dominación romana sobre G, existe un vértice w en G tal que w es adyacente a v en G y $f_i(w) = 2$. De la definición de $G \,\square\, H$, obtenemos que el vértice (w, u) es adyacente al vértice (v, u) en $G \,\square\, H$. Nuevamente, de la definición de F_i, vemos que $F_i(w, u) = f_i(w)$. Por lo tanto, $F_i(w, u) = 2$ y (w, u) es adyacente a (v, u) en $G \,\square\, H$, concluyendo que F_i es una función de dominación romana en $G \,\square\, H$.
Consideramos a la familia $\mathcal{G} = \{F_1, \ldots, F_d\}$. Primero, veamos que $\mathcal{G}$ tiene d elementos. Sea $\{i, j\}$ un suconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ tal que $i \neq j$. Sabemos que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G, por lo que $f_i \neq f_j$. De esta manera, existe un vértice v de G tal que $f_i(v) \neq f_j(v)$. Sea u un vértice de H. De la definición de F_i se sigue que $F_i(v, u) = f_i(v)$ y que $F_j(v, u) = f_j(v)$. Por tanto, llegamos a que $F_i(v, u) \neq F_j(v, u)$; es decir, $F_i \neq F_j$.

Por último, probemos que $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana sobre $G \,\square\, H$. Consideremos un vértice de $G \,\square\, H$, digamos (v, u). Por definición, tenemos que $F_i(v, u) = f_i(v)$. De esta manera, vemos que

$$\sum_{i=1}^{d} F_i(v, u) = \sum_{i=1}^{d} f_i(v).$$

Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre G, observamos que

$$\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 2.$$

De esto último, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{d} F_i(v, u) \leq 2.$$

Así, $\mathcal{G}$ es una familia de dominación romana en $G \,\square\, H$ con $|\mathcal{F}|$ elementos. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G) \leq \mathsf{d}_R(G \,\square\, H)$. $\square$

Nota 4.0.7. Para el caso en que G y H son gráficas completas se cumple la igualdad de la proposición 4.0.6, mostrando así que dicha cota es justa.

Para continuar con esta sección, daremos resultados respecto a la composición de una gráfica con una familia de funciones y a la corona de una gráfica con una familia de funciones. Para esto, supondremos que G es una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_v \colon v \in V(G)\}$ es una familia de gráficas ajenas por vértices entre sí, y que cada elemento de la familia no comparte vértices con G.

Lema 4.0.8. *Si G es una gráfica y $\mathcal{H}$ una familia de gráficas, entonces*

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\} \leq \mathsf{d}_R\left(G[\mathcal{H}]\right).$$

Demostración. Sean G una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_u \colon u \in V(G)\}$ una familia de gráficas. Abordaremos esta prueba analizando los siguientes casos:

Caso 1 Existe v un vértice de G tal que $G_v \cong K_1$.

De esta manera, ocurre que $1 = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_u) \colon u \in V(G)\}$. De este modo tenemos que $1 \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$.

Caso 2 Para todo vértice v en $V(G)$, G_v no es isomorfa a K_1.

Sean $H = \bigcup_{v \in V(G)} G_v$, y sea u un vértice en $V(G)$ tal que $\mathsf{d}_R(G_u) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\}$. Veamos los siguientes subcasos:

Subcaso 2.1 G_u tiene al menos un vértice aislado.

En este caso se tiene que $\mathsf{d}_R(G_u) \leq 2$. Si $\mathsf{d}_R(G_u) = 1$, se sigue directamente que

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\} \leq \mathsf{d}_R\left(G[\mathcal{H}]\right).$$

Si $\mathsf{d}_R(G_u) = 2$, entonces $A\left(G_u\right) \neq \emptyset$, y en particular, $A(G[\mathcal{H}]) \neq \emptyset$, por lo que $2 \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$, concluyendo que la desigualdad se cumple.

Subcaso 2.2 G_u no tiene vértices aislados.

Supongamos primero que G_u es inconexa, y sea U' la componente conexa de G_u cuyo número domático romano es mínimo. Del lema 3.1.22, tenemos que $\mathsf{d}_R(U') = \mathsf{d}_R(G_u)$ y de la elección de u, tenemos que U' es una componente conexa de H y con el número domático romano mínimo; es decir, $\mathsf{d}_R(U') \leq \mathsf{d}_R(H)$. De la construcción de H se tiene que H es una subgráfica generadora de $G[\mathcal{H}]$. Por el lema 3.1.11, $\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$. Por lo tanto, $\mathsf{d}_R(U') \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$, cumpliéndose así la desigualdad deseada.

Por último, supongamos que G_u es conexa. Esto hace que G_u sea una componente conexa de H, y por el lema 3.1.22 tenemos $\mathsf{d}_R(G_u) \leq \mathsf{d}_R(H)$. Como H es una subgráfica generadora de $G[\mathcal{H}]$ se tiene que $\mathsf{d}_R(H) \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$; y por lo tanto, $\mathsf{d}_R(G_u) \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$.

Por tanto, concluimos que $\mathsf{d}_R(G_u) \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$.

Llegamos que en todos los casos ocurre que $\text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\} \leq \mathsf{d}_R(G[\mathcal{H}])$. □

Ahora, daremos una cota para la corona de una gráfica respecto a una familia de gráficas.

Lema 4.0.9. *Si G es una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_v \colon v \in V(G)\}$ es una familia de gráficas, entonces*

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\} + 1 \leq \mathsf{d}_R\left(G \circ \mathcal{H}\right).$$

Demostración. Sean G una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_v \colon v \in V(G)\}$ una familia de gráficas. Primero supongamos que existe un vértice u de G tal que G_u es una gráfica vacía. Por un lado, como G_u es vacía, del lema 3.1.12, se tiene que $\mathsf{d}_R(G_u) = 1$. Y así, $\mathsf{d}_R(G_u) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\}$. Por otro lado, vemos que $A\left(G \circ \mathcal{H}\right) \neq \emptyset$, y por el mismo argumento anterior, el lema 3.1.12 nos dice que $\mathsf{d}_R\left(G \circ \mathcal{H}\right) \geq 2$. De esta manera, tenemos que $\mathsf{d}_R(G_v) + 1 \leq \mathsf{d}_R\left(G \circ \mathcal{H}\right)$.

Ahora, supongamos que para todo vértice u en $V(G)$ se tiene que $A(G_u) \neq \emptyset$. Del lema 3.1.12 tenemos que $2 \leq \mathsf{d}_R(G_u)$. Para cada vértice u en $V(G)$, consideramos a $\mathcal{F}_u = \{f_1^u, \ldots, f_{\mathsf{d}_R(G_u)}^u\}$ una $\mathsf{d}_R(G_u)$-familia. Sea v en $V(G)$ tal que $\mathsf{d}_R(G_v) = \text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_u \colon u \in V(G)\}$, y asumamos que $d = \mathsf{d}_R(G_v)$.

Para cada índice i de $\{1, \ldots, d\}$ definiremos a la función $f_i\colon V(G \circ \mathcal{H}) \to \{0,1,2\}$ tal que

$$f_i(x) = \begin{cases} f_i^u(x) & \text{si } x \in V(G_u) \\ 0 & \text{si } x \in V(G), \end{cases}$$

y definimos a la función

$$f_{d+1}\colon V(V \circ \mathcal{H}) \to \{0,1,2\}$$
$$f_{d+1}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in V(G) \\ 0 & \text{si } x \in V(G \circ \mathcal{H}) \setminus V(G). \end{cases}$$

Afirmamos que para todo índice i en $\{1, \ldots, d+1\}$, f_i es una función de dominación romana sobre $G \circ \mathcal{H}$. Sean i en $\{1, \ldots, d+1\}$ y x en $V(G \circ \mathcal{H})$ tal que $f_i(x) = 0$. Procederemos analizando los siguientes casos:

Caso 1 $i \in \{1, \ldots, d\}$.

De este paso, analizaremos los dos subcasos siguientes:

Subcaso 1.1 Existe un vertice u en $V(G)$ tal que x es vértice de G_u.

Por la definición de f_i, se tiene que $f_i(x) = f_i^u(x)$; es decir, $f_i^u(x) = 0$. Como f_i^u es una función de dominación romana sobre G_v, existe un vértice y en $V(G_v)$ tal que $f_i^u(y) = 2$ y y es adyacente a x en G_u. Se tiene que $f_i(y) = f_i^u(y)$ y que y es adyacente a x en $G \circ \mathcal{H}$. Por lo tanto, $f_i(y) = 2$ y $xy \in A(G \circ \mathcal{H})$.

Subcaso 1.2 $x \in V(G)$.

Del lema 3.1.6, como $\mathcal{F}_x$ es una $\mathsf{d}_R(G_x)$-familia y $2 \leq \mathsf{d}_R(G_x)$, entonces para la función f_i^x existe un vértice y en $V(G_x)$ tal que $f_i^x(y) = 2$. De la definición de f_i, se sigue que $f_i(y) = f_i^x(y)$; es decir, $f_i(y) = 2$. Por definición de $G \circ \mathcal{H}$, $yx \in A(G \circ \mathcal{H})$. Por tanto, f_i es una función de dominación romana.

Caso 2 $i = d+1$.

De la definición de f_{d+1}, como $f_{d+1}(x) = 0$, se tiene que $x \in \bigcup_{v \in V(G)} V(G_v)$; es decir, existe $v \in V(G)$ tal que $x \in V(G_v)$. De la definición de $G \circ \mathcal{H}$, $xv \in A(G \circ \mathcal{H})$, y como $v \in V(G)$, $f_{d+1}(v) = 2$. Concluyendo así que f_{d+1} es una función de dominación romana sobre $G \circ \mathcal{H}$.

Probaremos que la familia $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_d, f_{d+1}\}$ es una familia de dominación romana sobre $G \circ \mathcal{H}$. Sea x un vértice de $G \circ \mathcal{H}$, y notemos que

$$\sum_{i=1}^{d+1} f_i(x) = \sum_{i=1}^{d} f_i(x) + f_{d+1}(x).$$

Analizamos los siguientes casos:

Caso 1 $x \in V(G)$.

Por construcción se tiene que para todo índice i en $\{1, \ldots, d\}$, $f_i(x) = 0$, y $f_{d+1}(x) = 2$, por lo que

$$\sum_{i=1}^{d+1} f_i(x) = 2.$$

Caso 2 Existe u en $V(G)$ tal que $x \in V(G_u)$.

De la definición de las funciones f_i, se tiene que para todo índice i en $\{1, \ldots, d\}$, $f_i(x) = f_i^u(x)$, y que $f_{d+1}(x) = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{d+1} f_i(x) = \sum_{i=1}^{d} f_i^u(x).$$

Como $d \leq \mathsf{d}_R(G_u)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{d} f_i^u(x) \leq \sum_{i=1}^{\mathsf{d}_R(G_u)} f_i^u(x).$$

Dado que la familia $\mathcal{F}_u$ es una familia de dominación romana sobre G_u, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}_R(G_u)} f_i^u(x) \leq 2.$$

Concluyendo que $\sum_{i=1}^{d} f_i(x) \leq 2$.

Falta por ver que $|\mathcal{F}| = d + 1$. Se sigue de la definición de la familia $\mathcal{F}$ que para todo índice i de $\{1, \ldots, d\}$ ocurre que $f_i \neq f_{d+1}$. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ tal que

$i \neq j$, y u un vértice de G. Consideremos las funciones f_i^u y f_j^u. Como $f_i^u \neq f_j^u$, entonces existe x en $V(G_u)$ tal que $f_i^u(x) \neq f_j^u(x)$. Por lo tanto, $f_i(u) \neq f_j(u)$, y por tanto, $f_i \neq f_j$.

Para finalizar, llegamos a que la familia $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana sobre $G \circ \mathcal{H}$; y por ende, $|\mathcal{F}| \leq \mathsf{d}_R(G \circ \mathcal{H})$; es decir,

$$\text{mín}\, \{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\} + 1 \leq \mathsf{d}_R(G \circ \mathcal{H}).$$

□

Para continuar con esta sección, veremos el caso especial de la corona de una gráfica cuando los componentes de la familia $\mathcal{H}$ son todos gráficas completas no triviales del mismo orden.

Lema 4.0.10. *Si G es una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_v \colon v \in V(G)\}$ es una familia de gráficas tal que para todo $v \in V(G)$, $G_v \cong K_p$, con $p \geq 2$, entonces*

$$\mathsf{d}_R(G \circ \mathcal{H}) = p + 1.$$

Demostración. Sea G una gráfica y $\mathcal{H} = \{G_v \colon v \in V(G)\}$ tal que para todo vértice v de G, $G_v \cong K_p$, con $p \geq 2$.

Por un lado, del lema 4.0.9, tenemos que

$$\text{mín}\{\mathsf{d}_R(G_v) \colon v \in V(G)\} + 1 \leq \mathsf{d}_R(G \circ \mathcal{H}).$$

Como $G_v \cong K_p$, del lema 3.2.4, se tiene que para todo vértice v de G, $\mathsf{d}_R(G_v) = p$, y por tanto, $p + 1 \leq \mathsf{d}_R(G \circ \mathcal{H})$.

Por otro lado, del lema 3.1.21,

$$\mathsf{d}_R(G \circ \mathcal{H}) \leq \delta(G \circ \mathcal{H}) + 2.$$

Ahora calcularemos $\delta(G \circ \mathcal{H})$. Sea x en $V(G \circ \mathcal{H})$. Del lema 1.1.18, sabemos que para todo vértice x de G,

$$\delta_{G \circ \mathcal{H}}(x) = \begin{cases} \delta_G(x) + |V(G_x)| & \text{si } x \in V(G) \\ \delta_{G_v}(x) + 1 & \text{si } x \in V(G_v) \text{ para algún } v \in V(G). \end{cases}$$

Como para todo v en $V(G)$ se cumple que $G_v \cong K_p$, entonces

$$\delta_{G\circ\mathcal{H}}(x) = \begin{cases} \delta_G(x) + p & \text{si } x \in V(G) \\ p & \text{si } x \in V(G_v) \text{ para algún } v \in V(G). \end{cases}$$

De esto, podemos concluir que $\delta(G\circ\mathcal{H}) = p$. Tenemos que $\mathsf{d}_R(G\circ\mathcal{H}) \leq p+2$, llegando que $\mathsf{d}_R(G\circ\mathcal{H}) \in \{p+1, p+2\}$. Afirmamos ahora que $\mathsf{d}_R(G\circ\mathcal{H}) = p+1$. Supongamos que justamente esto no ocurre; es decir, consideremos a una familia de dominación romana $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_{p+2}\}$. Sean v un vértice de G y x en $V(G_v)$.

Por un lado, del lema 2.2.2 tenemos que $|\{i\colon f_i(x) = 0\}| \leq \delta_{G\circ\mathcal{H}}(x)$; es decir,

$$|\{i\colon f_i(x) = 0\}| \leq p.$$

Por otro lado, supongamos que ocurre que para alguna i en $\{1, \ldots, p+2\}$, $f_i(x) = 2$, entonces para todo j en $\{1, \ldots, p+2\} \setminus \{i\}$, $f_j(x) = 0$, y luego, $|\{i\colon f_i(x) = 0\}| = p+1$, lo cual contradice nuestra condición anterior. Esto nos dice que para todos los índices i en $\{1, \ldots, p+2\}$, $f_i(x) \neq 2$.

Del hecho de que $|\{i\colon f_i(x) = 0\}| \leq p$ y $|\mathcal{F}| \geq 4$, existe $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{1, \ldots, p+2\}$ tal que $i \neq j$ y $f_i(x) = 0$ y $f_j(x) = 0$.

Como f_i y f_j son funciones de dominación romana, existen dos vértices u_i y u_j en $N_{G\circ\mathcal{H}}(x)$ tales que $f_i(u_i) = 2$ y $f_j(u_j) = 2$. Como ya se vio anteriormente, para todo vértice y en $V(G_v)$ y toda función f de $\mathcal{F}$, $f(y) \neq 2$. Como $\{v\} = N_{G\circ\mathcal{H}}(x) \setminus V(G_v)$, se tiene que $u_i = v$ y $u_j = v$, y por lo tanto, $f_i(v) + f_j(v) = 4$, lo cual contradice la condición de que $\mathcal{F}$ es una familia de dominación romana. Concluyendo de esta forma que $\mathsf{d}_R(G\circ\mathcal{H}) \leq p+1$; es decir $\mathsf{d}_R(G\circ\mathcal{H}) = p+1$. $\square$

Conclusiones

En este trabajo de tesis desarrollamos algunos resultados iniciales sobre el número domático romano de gráficas. Dicho concepto fue introducido por S. M. Sheikholeslami y L. Volkmann en [12] y retomado por el equipo conformado por H. Tan, H. Lyang, R. Wuang y J. Zhou en [14]. En los artículos mencionados se presentan cotas para el número domático romano relacionadas con diversos parámetros, como el orden, el grado mínimo, entre otros. Además, calculan el número domático romano de algunas familias de gráficas conocidas, como son las gráficas completas, ciclos y árboles. En este trabajo se retomaron dichos resultados analizando detenidamente las demostraciones. Incluso nos percatamos que algunos de los resultados mostrados no son necesariamiente verdaderos, como el caso mencionado en la nota 2.2.13.

Además de lo anterior, presentamos resultados derivados directamente de la definición de una familia de dominación romana. Entre dichos resultados, podemos mencionar el lema 3.1.6 el cual fue utilizado frecuentemente en este trabajo. En los capítulos tres y cuatro se dan los resultados más relevantes del trabajo. Mostramos que el número domático romano se preserva bajo isomorfismos y que el número domático romano preserva una relación entre una gráfica y sus subgráficas generadoras. Se caracterizan a las gráficas en las que el número domático romano es exactamente el orden de la gráfica y también se caracterizan a las gráficas en las cuales el número domático romano es igual a uno, que es en el caso de las gráficas vacías. En [12] se muestra que el número domático de una gráfica siempre es menor o igual al número domático romano de ésta, y en este trabajo presentamos una caractelización de las gráficas en las que dicha cota es justa.

Presentamos a una familia de gráficas nueva, las gráficas d_R-críticas, cuya inspiración para definirlas fue la idea de dada una gráfica, en qué momento el número domático romano de ésta cambia si se quitan aristas de ésta. También mostramos una relación entre el número domático romano de una gráfica y el número domático romano de sus componentes conexas. De la misma manera, exhibimos una relación similar entre el número domático romano de una gráfica y el de sus bloques.

En el capítulo cuatro se estudió el número domático romano de algunas gráficas resultantes de operaciones de gráficas, como son la suma, el producto cartesiano, la composición de gráficas y la corona. Para todas estas operaciones se mostraron diversas cotas para sus números domáticos romanos.

Quedan algunos problemas abiertos a la investigación que nos percatamos durante la elaboración de esta tesis, como el problema de si es posible encontrar una familia de dominación romana en la cual ninguno de los vértices de la gráfica tenga imagen 1, cuando la gráfica tiene al menos una arista. También queda la pregunta sobre la relación entre el número domático romano de una gráfica y el número domático romano de su gráfica de líneas.

Bibliografía

[1] Gerald Alexanderson. About the cover: Euler and königsberg's bridges: A historical view. *Bulletin of the american mathematical society*, 43(4):567–573, 2006.

[2] Erin W Chambers, Bill Kinnersley, Noah Prince, and Douglas B West. Extremal problems for roman domination. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(3):1575–1586, 2009.

[3] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic graph theory*. CRC press, 2008.

[4] EJ Cockayne. Domination of undirected graphs—a survey. In *Theory and Applications of Graphs*, pages 141–147. Springer, 1978.

[5] EJ Cockayne, PJP Grobler, WR Grundlingh, J Munganga, and JH van Vuuren. Protection of a graph. *Utilitas Mathematica*, 67:19–32, 2005.

[6] EJ Cockayne and ST Hedetniemi. Towards a theory of domination in graphs [j]. *Networks*, 7:247–261, 1977.

[7] Ernie J Cockayne, Paul A Dreyer Jr, Sandra M Hedetniemi, and Stephen T Hedetniemi. Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 278(1-3):11–22, 2004.

[8] Allan Frendrup, Michael A Henning, Bert Randerath, and Preben Dahl Vestergaard. An upper bound on the domination number of a graph with minimum degree 2. *Discrete Mathematics*, 309(4):639–646, 2009.

[9] Frank Harary. Graph theory. 1969.

[10] Teresa W Haynes, Stephen Hedetniemi, and Peter Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. CRC Press, 1998.

[11] Charles S ReVelle and Kenneth E Rosing. Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy. *The American Mathematical Monthly*, 107(7):585–594, 2000.

[12] Seyed Mahmoud Sheikholeslami and Lutz Volkmann. The roman domatic number of a graph. *Applied Mathematics Letters*, 23(10):1295–1300, 2010.

[13] Ian Stewart. Defend the roman empire! *Scientific American*, 281(6):136–138, 1999.

[14] Haisheng Tan, Hongyu Liang, Rui Wang, and Jipeng Zhou. Computing roman domatic number of graphs. *Information Processing Letters*, 116(9):554–559, 2016.

[15] Douglas Brent West et al. *Introduction to graph theory*, volume 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.