



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN**

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE  
INSTRUMENTOS PARA LA INTRODUCCIÓN A  
LA TRANSFORMADA DE FOURIER  
MEDIANTE EL ANÁLISIS DE FENÓMENOS  
OSCILATORIOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO ELÉCTRICO-ELECTRÓNICO**

**P R E S E N T A:**

**CARL MICHAEL SUNE REIMER LÓPEZ**

**ASESOR:  
DR. JOSÉ MANUEL ALVARADO REYES**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Agradecimientos**

A mi querida madre, que siempre ha estado apoyándome a lo largo de mi vida y me ha forjado como la persona que soy. Te amo.

A mi abuelo Agustín, que fue una gran admiración, que me enseñó muchas cosas en mi andar.

Al Doctor José Manuel Alvarado Reyes que además de ser mi asesor de Tesis, ha sido un extraordinario amigo, excelente profesor, un magnifico mentor, y maravillosa persona, por la confianza otorgada, que me ha apoyado, enseñado, me ha permitido oportunidades y me ha brindado una inmensa paciencia a lo largo del tiempo en que lo conozco. Muchas gracias.

Al Proyecto PAPIIME PE110216, por el apoyo brindado para ser posible la realización del presente trabajo. Todo el equipo y sistemas presentados en el este trabajo fue gracias al apoyo de este proyecto.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, una gran institución que me ha brindado más que solo educación. Por mi raza hablará el espíritu.

A la Facultad de Ciencias, que me ha brindado muchas oportunidades y me ha permitido un lugar dentro de su comunidad, un hermoso lugar.

A los estudiantes que he conocido a lo largo de ser académico, y a los que en un futuro conoceré, ya que de ellos también se aprende mucho.

A todos mis profesores que he conocido a lo largo de mi trayectoria estudiantil, tanto buenos como malos, he aprendido algo de cada uno de ellos.

*Difícilmente algo trasciende si no se le da luz o voz Difícilmente existe la transformación si no es posible ver o escuchar.*

*Conclusión: ¡Sin ondas, nuestro mundo sería un cuarto oscuro cubierto de absorbedores!*

# Índice

<b>Agradecimientos .....</b>	<b>I</b>
<b>Índice .....</b>	<b>II</b>
<b>Presentación .....</b>	<b>IV</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>VI</b>
<b>Capítulo 1 .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción.....	1
1.2 Movimiento armónico simple.....	1
1.3 El movimiento de un resorte.....	2
1.4 El péndulo.....	3
1.5 Oscilación de una cuerda.....	6
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>12</b>
2.1 Introducción.....	12
2.2 El resorte.....	12
2.3 Propuesta experimental (resorte).....	15
2.4 El péndulo.....	17
2.5 Oscilación en una cuerda.....	21
2.6 Ejercicio de oscilación en una cuerda.....	23
2.7 Las oscilaciones: Un sendero para el estudio del fenómeno ondulatorio.....	24
<b>Capítulo 3 .....</b>	<b>27</b>
3.1 Introducción.....	27
3.2 Fenómenos oscilatorios introductorios al análisis del dominio temporal y el dominio frecuencial .....	28
3.3 Operación entre señales sinusoidales (suma de señales).....	31
3.4 Transformada de Fourier .....	33
3.5 Ejemplo de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) .....	36
3.6 Ancho de banda .....	46
3.7 Otros dispositivos .....	48
3.8 Desfase .....	49
<b>Capítulo 4 .....</b>	<b>53</b>
4.1 Introducción.....	53
4.2 Los fenómenos oscilatorios y los fenómenos ondulatorios .....	53

4.3 Sobre definiciones y conclusiones.....	54
4.3.1 Oscilaciones.....	54
4.3.2 Fenómeno ondulatorio (ondas).....	56
4.3.3 Transformada de Fourier .....	58
<b>Conclusiones.....</b>	<b>65</b>
<b>Trabajo a futuro .....</b>	<b>67</b>
Generador de Fourier.....	67
<b>Referencias .....</b>	<b>68</b>
<b>Apéndice .....</b>	<b>77</b>
Circuitos electrónicos empleados .....	77

## Presentación

Durante años se han creado una serie de paradigmas de la enseñanza en algunos temas relacionados con la Física, existen más descubrimientos científicos que cambios en la forma de enseñar un determinado tema de la Física. La invariante forma de enseñar a dado pie a la opacidad en temas relevantes de la ciencia. Hoy en día algunos conceptos han sido marginados por los estigmas creados debido a la opacidad con que se enseñan en el nivel medio superior, y ni que pensar en el nivel superior donde es considerado, inexorablemente, un tema que requiere un muy alto nivel de conocimiento.

El presente trabajo surge de un proyecto, PAPIME PE1102016, dirigido a la enseñanza del fenómeno ondulatorio. Tema de gran importancia en la Física como en la Ingeniería, sin embargo, es un tema que incluso en la bibliografía de libros especializados es opacado desde la introducción hasta el concepto mismo de su análisis.

Este trabajo está enfocado a presentar sistemas e instrumentos que permiten analizar y estudiar el movimiento oscilatorio, y así mismo mostrar que este tipo de fenómenos pueden ser introductorios a la transformada de Fourier, es inexorablemente adherente el fenómeno ondulatorio. Por lo que los sistemas e instrumentos, diseñados y construidos para la enseñanza de la Física e Ingeniería, son útiles para la introducción al fenómeno ondulatorio y la transformada de Fourier.

En el capítulo 1, se mostrará el estado del arte que hasta hoy día guarda la introducción del concepto oscilatorio, así mismo la forma en que la bibliografía enfoca los fenómenos tales como el péndulo, el resorte y la oscilación de una cuerda. En el capítulo 2 se muestran los sistemas diseñados para estudiar los fenómenos antes mencionados; con la construcción de dichos fenómenos cuyo movimiento de vaivén es representado por una función sinusoidal, el cual es graficada en la pantalla de un osciloscopio. En el capítulo 3 se muestra, mediante la ayuda del osciloscopio, que el mencionado movimiento es posible analizarlo en dos dominios diferentes: Frecuencial y temporal. Así mismo en este capítulo se presentan otras formas de analizar el movimiento de vaivén, para lo cual se construyeron otros dispositivos. También en este capítulo inevitablemente surge la necesidad de introducir a la transformada

de Fourier discreta, para tal objetivo se desarrolla un ejemplo que permita al estudiantado el entendimiento cuando se emplea tan importante herramienta. Finalmente, en el capítulo 4, se muestran las definiciones de conceptos tales como: Oscilación, ondulatorio y transformada de Fourier, y se da una definición personalizada de acuerdo a la experiencia obtenida durante el desarrollo del presente trabajo. En este mismo capítulo se dan las conclusiones y propuestas de trabajo a futuro.

Finalmente, en el apéndice se proporcionan los diagramas, tanto en esquemático como en PCB para la construcción de los instrumentos desarrollados en el presente trabajo, para su reproducción total o parcial.

## Objetivos

El objetivo medular del presente trabajo es mostrar que, mediante el estudio y análisis de movimientos oscilatorios es posible introducir de forma gradual al concepto de la transformada de Fourier. Para este fin se diseñaron y construyeron sistemas eléctricos, electrónicos y mecánicos con los cuales, en algunos casos, es posible medir las oscilaciones empleando un osciloscopio.

Un segundo objetivo fue el diseñar y construir los sistemas mecánicos empleados en la enseñanza tradicional para introducir a los estudiantes al concepto oscilatorio. Con algunos de estos sistemas fue posible estudiar y analizar su comportamiento oscilatorio empleando un osciloscopio.

Finalmente se planteó un tercer y último objetivo: Diseñar y construir dispositivos electrónicos, los cuales serían empleados para analizar señales semejantes a las proporcionadas por los sistemas oscilatorios. Por consiguiente, en este trabajo no se presenta el proceso de diseño ni el de construcción de dichos instrumentos; ya que el objetivo de su construcción es el de operar (sumar) señales eléctricas y observar su comportamiento en tiempo real en la pantalla de un osciloscopio.

# Capítulo 1

## *1.1 Introducción*

En este primer capítulo se presentarán algunos fenómenos comunes empleados en la enseñanza para introducir a los alumnos de niveles medio superior y superior al uso de funciones trigonométricas. Son fenómenos oscilatorios cuyo movimiento de vaivén puede ser descrito por medio de señales sinusoidales. En una revisión mesurada se observó que los fenómenos físicos más empleados para introducir a los alumnos al fenómeno oscilatorio son los siguientes: El péndulo, el resorte y la cuerda vibrante. El presente capítulo se enfocará a la presentación matemática que describe el movimiento de estos fenómenos, descrita en la mayoría de la bibliografía revisada durante el desarrollo del presente trabajo.

## *1.2 Movimiento armónico simple*

El movimiento armónico simple es un concepto basado en la *ley de Hooke*, Robert Hooke la formuló en 1660 mientras trabajaba como ayudante de Robert Boyle [1]-[3]. Estas son algunas definiciones encontradas en la bibliografía:

El movimiento armónico simple ocurre siempre que la fuerza resultante que actúa en un objeto *tiene dirección opuesta y es directamente proporcional a su desplazamiento* a partir de una posición de equilibrio en el que la fuerza resultante es cero [4, p. 349].

Siempre que un objeto se deforma, aparece en él una fuerza elástica de restitución que es proporcional a la deformación que ha sufrido. Cuando la fuerza deja de actuar, el objeto vibra de un lado a otro, con respecto a su posición de equilibrio [5, p. 306].

Esta fuerza es posible observarla en la expansión y compresión de un resorte. Un fenómeno que se comporta como movimiento armónico simple es el resorte, que a continuación se describe.

### 1.3 El movimiento de un resorte

Un resorte es sostenido verticalmente en un punto fijo en uno de sus extremos, consideremos esta posición del resorte un estado de reposo inicial, figura 1.1a [4, p. 356], [6, p. 207], [7, p. 413], [8, p. 276], [9, p. 449], en este punto solo se tiene considerada la fuerza de restitución. Al agregarle una masa  $m$  al extremo libre se incide sobre el resorte una fuerza  $F_g = mg$  que vence a la fuerza  $F_k = -kx$ , hasta el punto en que ambas fuerzas (la de gravedad y de restitución) se equilibran, es decir  $F_g = F_k$ . A este punto de equilibrio lo consideramos la posición  $x = 0$ , figura 1.1b. Si se aplica una fuerza externa que venza a la fuerza  $F_k$  y se deja de aplicar en un determinado punto, entonces sucederá que  $F_k$  intentará volver a su posición de equilibrio, pero a causa de la energía acumulada sobrepasará este punto y llegara a un desplazamiento máximo de compresión, figura 1.1d. En este punto, nuevamente la fuerza de gravedad  $F_g$  actuará sobre la masa, venciendo la fuerza de restitución  $F_k$ , haciendo que la masa nuevamente sobrepase por su punto de equilibrio. Este proceso continúa hasta que se pierda la energía acumulada en el resorte, lo que hará que la masa regrese a su estado de reposo o equilibrio, es decir, las fuerzas  $F_g = F_k$ .

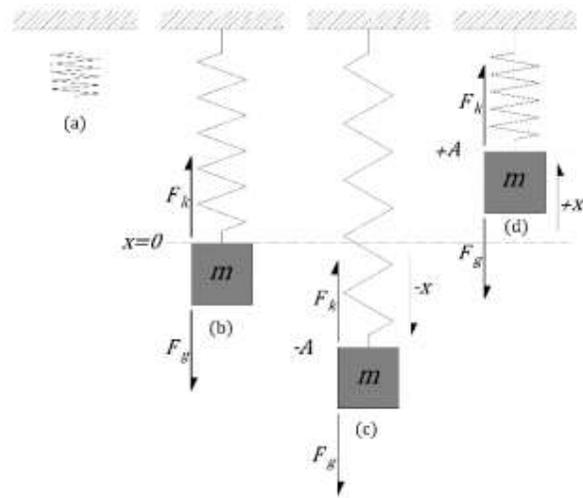


Figura 1.1. a) Resorte vertical sin estirar. b) Resorte estirado por una masa, aquí  $x = 0$  y se dice que se encuentra en su posición de equilibrio. c) Se perturba el sistema haciendo que la masa se desplace hacia abajo y por ende el resorte se estira, aquí  $x$  es negativa. d) El resorte se encuentra comprimido, aquí  $x$  es positiva.

Cuando el resorte está en reposo sin masa adjunta, tiene una cierta longitud  $l$ , figura 1.1a. Al agregarle la masa y encontrarse en su estado de equilibrio, se desplazará una distancia  $\Delta l$ , figura 1.1b. En el estado de equilibrio, la fuerza de gravedad y la fuerza ejercida por el resorte serán iguales, por lo tanto

$$k\Delta l = mg \quad (1.1)$$

Despejando  $k$  de la ecuación 1.1, se obtiene

$$k = \frac{mg}{\Delta l} \quad (1.2)$$

Con la ecuación 1.2 es posible obtener la constante de cualquier resorte, variando la masa y midiendo la longitud  $\Delta l$  que se desplaza el resorte.

Los paradigmas de la enseñanza experimental están limitados en solo obtener la constante  $k$  del resorte, aunque en algunos pocos casos se menciona que el movimiento oscilatorio “puede” ser dibujado si se construyera un sistema de rodillos en el que un papel se desplace a velocidad constante y de forma perpendicular al movimiento del resorte, figura 1.2a [10, p. 383]. Pero generalmente no es muy práctico, por lo que solo queda en la imaginación y lógica de los estudiantes. El sistema diseñado y construido en este trabajo es el que se muestra en la figura 1.2b, empleando un osciloscopio se muestra el comportamiento oscilatorio de dicho resorte. Dicho sistema se describirá en el capítulo 2 del presente trabajo.

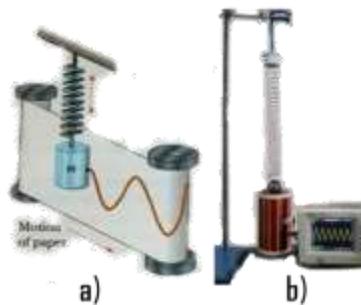


Figura 1.2. a) Sistema generalmente representado para que sea graficado el movimiento oscilatorio de un resorte sobre un papel. b) Sistema propuesto en este trabajo para observar el movimiento del resorte en un osciloscopio.

El movimiento armónico simple es empleado para estudiar y analizar varios fenómenos físicos, bajo la premisa de que estos cumplen con la *ley de Hooke*. En particular el estudio y análisis del movimiento oscilatorio de un péndulo tiene como resultado una importante ecuación que pronostica que el periodo de un péndulo es invariante ante la masa. Y esto es posible si se considera la *ley de Hooke*.

#### **1.4 El péndulo**

Galileo se interesó por primera vez en el movimiento pendular de un candelabro en la catedral de Pisa (1583) e intentó aplicar dicho movimiento pendular al reloj en 1641 [11]-[17]. El péndulo simple es un sistema idealizado que consiste en un hilo o varilla de longitud  $l$  inextensible y sin peso colgada a un punto fijo en uno de sus extremos, y en el

otro extremo se encuentra una masa  $m$  [18], figura 1.3 [4, p. 364], [5, p. 316], [6, p. 208], [7, p.416], [8, p. 278], [11, p. 479], [18, p. 323], [19, p. 395], [20, p. 134], [21, p. 484]. Cuando el sistema está en reposo, las fuerzas que se encuentran actuando serán: La fuerza de gravedad  $F_g$  y la tensión de la cuerda  $T$ . Cuando la masa es separada de su posición de equilibrio en cualquier dirección, se formará un ángulo  $\theta$  con la vertical. Cuando la masa es soltada a dicho ángulo, intervendrá una fuerza restauradora  $F_k = -mg \text{ sen } \theta$  que será la encargada de que la masa intente regresar a su posición de equilibrio. Al llegar a la posición de equilibrio, la aceleración de la masa será nula, pero la velocidad es máxima en este punto, por lo cual, la masa seguirá su camino, pasando de largo la vertical. Al llegar al máximo punto del extremo opuesto, la velocidad ahora será cero, pero en tanto, la aceleración será máxima y la fuerza de restauración volverá a entrar en juego, para que la masa intente regresar a su posición de equilibrio. Al llegar a la posición de equilibrio, la masa sobrepasará este punto una vez más a consecuencia de la energía acumulada. Este proceso se repetirá indefinidamente, hasta que el sistema pierda toda la energía y se encuentre en reposo de nuevo. Es muy importante mencionar que el movimiento del péndulo es inarmónico en la mayoría de las veces, pero también puede ser un movimiento armónico simple si se respeta la condición correcta [4].

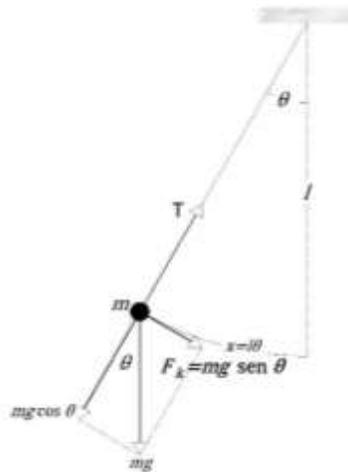


Figura 1.3. Representación gráfica del péndulo.

Analizando el movimiento de la masa suspendida tenemos que la fuerza de restauración en el péndulo está dada por

$$F_k = -mg \text{ sen } \theta \quad (1.3)$$

Generalmente en la bibliografía revisada, se busca que el movimiento de un péndulo cumpla con la condición de un movimiento armónico simple, por lo que se requiere que el ángulo al cual es soltada la masa suspendida sea menor a  $15^\circ$ , bajo esta condición se tiene que  $\text{sen } \theta \cong \theta$ , por lo que la ecuación 1.3 se puede reescribir como

$$F_k = -mg\theta \quad (1.4)$$

Por otro lado, bajo la primicia de que  $\theta \leq 15^\circ$  y tomando en cuenta la figura 1.4 [21, p. 485], se sabe que, bajo la condición de un ángulo pequeño, el cateto opuesto  $x$  se puede escribir como la ecuación 1.5.



Figura 1.4. Cuando el ángulo es pequeño, el recorrido de la masa se asemeja a una línea recta.

$$x = l\theta \quad (1.5)$$

De esta última ecuación se despeja  $\theta$ , con lo que se obtiene

$$\theta = \frac{x}{l} \quad (1.6)$$

Sustituyendo este valor de  $\theta$  en la ecuación 1.4

$$F_k = -mg \frac{x}{l} \quad (1.7)$$

En donde  $\frac{mg}{l}$  se considera la constante de recuperación  $k$  para este caso, considerando la ley de Hooke, es posible demostrar que el periodo es [4]-[6], [8], [9], [18]-[21]

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.8)$$

La ecuación 1.8 es el objetivo a demostrar en los laboratorios de experimentación, así mismo y de forma cualitativa, empleando la figura 1.5a [22, p.174], se “demuestra” que el movimiento de un péndulo se rige por una función sinusoidal. En este trabajo se muestra un sistema de bajo costo que permite demostrar de forma cuantitativa, empleando un osciloscopio, que el movimiento de vaivén de un péndulo es regido por una función sinusoidal, figura 1.5b. Este sistema será descrito en el capítulo 2.

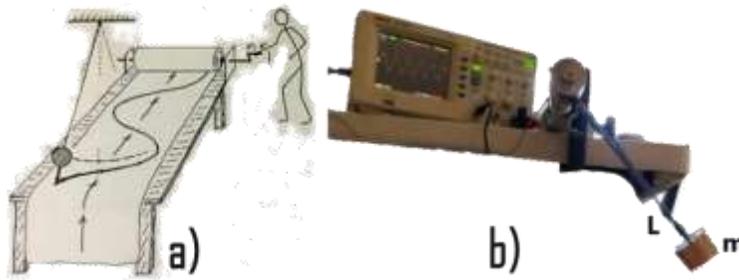


Figura 1.5. a) Sistema para graficar sobre un papel el movimiento oscilatorio de un péndulo. b) Sistema electromecánico para estudiar el movimiento de un péndulo en un osciloscopio.

El estudio y análisis de los anteriores fenómenos son comúnmente analizados, en la bibliografía revisada, para estudiar los movimientos de vaivén; conocidos como movimientos oscilatorios. Pero es la oscilación de una cuerda la que introduce de lleno al estudio y análisis de funciones sinusoidales y así mismo da la pauta para introducir a estudiantes de niveles superiores al análisis de operaciones con señales sinusoidales.

### ***1.5 Oscilación de una cuerda***

Es muy probable que la cuerda haya sido el primer fenómeno oscilatorio que provocó un interés de estudio científico. Los orígenes datan desde 550 años a. C., cuyo interés surge de entender el sonido que producen las cuerdas de un determinado instrumento musical. Más de veinte siglos después, en 1747, D'Alembert dio fin de forma contundente al problema de oscilación de una cuerda, que en ese entonces era el problema magistral de los científicos, cuyo objetivo era relacionar el sonido que producía la oscilación de una cuerda [23]-[25].

Un primer ejemplo para introducir al análisis de este experimento consta de una cuerda con un extremo fijo en el lado derecho y en el otro extremo se inicia una onda transversal en forma de pulso, que viaja de izquierda a derecha a través de la cuerda, como se muestra en la figura 1.6 [4, p. 406], [5, p. 477], [6, p. 475], [8, p. 493], [9, p. 464], [18, p. 438], [19, p. 432], [20, p. 241], [21, p. 522]. Esta onda se propagará por la cuerda hasta llegar al extremo derecho, el cual al estar fijo no podrá absorber la energía y hará que la onda se refleje, lo que dará como resultado una segunda onda con dirección opuesta, pero con misma frecuencia y amplitud que la primera. Cuando las dos ondas se encuentren, se hace uso del principio de superposición de ondas con misma frecuencia, donde existirá interferencia, la cual puede ser tanto constructiva o destructiva, como se aprecia en la figura 1.7 [5, p. 476], [6, p. 474], [7, p. 481], [9, p. 463], [11, p. 565], [18, p. 437], [19, p. 431], [20, pp. 243-244], [21, p. 517].

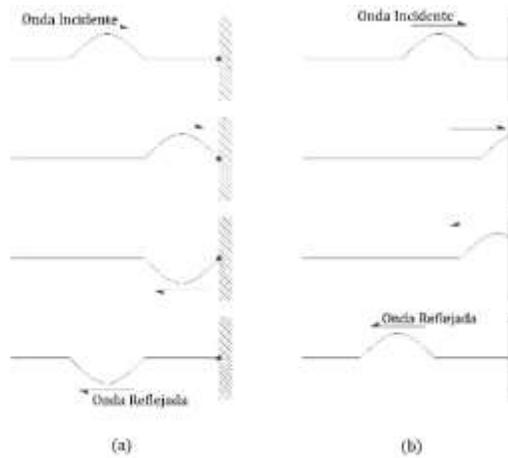


Figura 1.6. Reflexión de un pulso al llegar al extremo de la cuerda. a) Extremo fijo, b) Extremo libre.

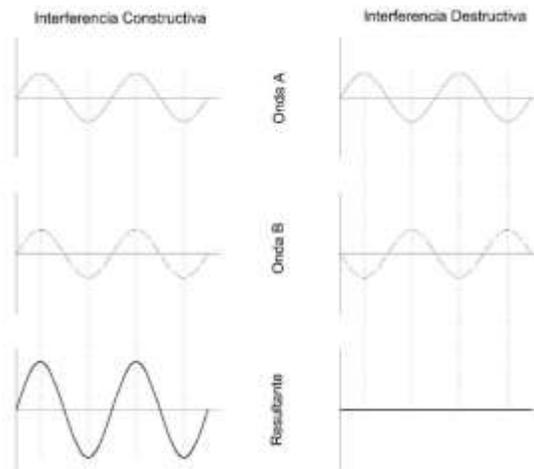


Figura 1.7. Interferencia constructiva y destructiva.

La función de la onda viajera original, que va con dirección hacia la derecha es

$$y_1(x, t) = A \text{ sen } (kx - \omega t) \quad (1.9)$$

Y la función de la onda viajera reflejada, ósea la de derecha a izquierda es

$$y_2(x, t) = A \text{ sen } (kx + \omega t) \quad (1.10)$$

Al sumarlas queda como

$$y = y_1 + y_2 = A \text{ sen}(kx - \omega t) + A \text{ sen}(kx + \omega t) \quad (1.11)$$

Para resolver la ecuación anterior, se usa la siguiente identidad trigonométrica

$$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{ sen } \left( \frac{a + b}{2} \right) \cos \left( \frac{a - b}{2} \right) \quad (1.12)$$

Con lo que se llega a la siguiente ecuación

$$y = 2A \operatorname{sen} \left( \frac{kx - \omega t + kx + \omega t}{2} \right) \cos \left( \frac{kx - \omega t - (kx + \omega t)}{2} \right) \quad (1.13)$$

Eliminando términos y simplificando la ecuación 1.13

$$y = 2A \operatorname{sen} \left( \frac{2kx}{2} \right) \cos \left( \frac{-2\omega t}{2} \right) \quad (1.14)$$

Y se obtiene [8], [19]

$$y = 2A \operatorname{sen}(kx) \cos(-\omega t) \quad (1.15)$$

Al hacer oscilar la cuerda, una onda se propagará con dirección opuesta. En su viaje de regreso, la onda reflejada se interferirá con las nuevas ondas provocadas y las ya existentes [9]. El movimiento resultante en la cuerda se muestra en la figura 1.8 [4, p. 407], [5, p. 479], [6, p. 477], [7, p. 486], [8, p. 494], [9, p. 466], [11, p. 513], [19, p. 433], [20, p.245], [21, p. 522], en donde hay puntos en que la cuerda no se mueve a causa de la interferencia destructiva, llamados nodos y puntos en que la amplitud de la cuerda es máxima, donde la interferencia es constructiva, conocidos como vientres o antinodos.

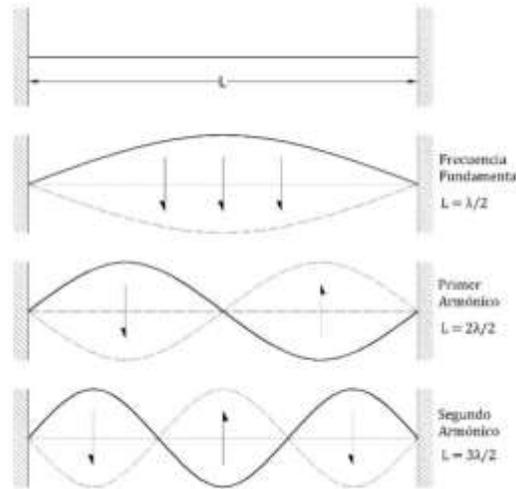


Figura 1.8. Ondas estacionarias en una cuerda con extremos fijos.

La oscilación de una cuerda sujeta en sus extremos es también conocida como onda estacionaria, esto es debido a que no se puede propagar fuera de sus límites al estar sujeta en sus dos extremos. Las ondas estacionarias tienen como una de sus características la producción de nodos y antinodos. Considerando la ecuación 1.15, los nodos (aquellos donde no hay amplitud) ocurren cuando el valor de la función seno es cero. Esta condición ocurre cuando

$$kx = n\pi, \text{ para } n = 0,1,2, \dots \quad (1.16)$$

El término  $k$ , que es conocido como el número de onda, puede escribirse como [19]

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.17)$$

Sustituyendo a  $k$  en la ecuación 1.16 se obtiene

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \quad x = \frac{\lambda n}{2} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

La ecuación 1.18 indica la posición o distancia entre los nodos, los cuales estarán separados entre ellos una distancia de  $\lambda/2$ .

Nuevamente considerando de la ecuación 1.15 el argumento de la función seno, se sabe que los máximos de esta función ocurren cuando  $\text{sen}(kx) = 1$ , es decir cuando

$$kx = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Sustituyendo nuevamente a  $k$  en la ecuación anterior

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad x = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

Al igual que los nodos, la distancia entre dos antinodos consecutivos están separados  $\lambda/2$  [19].

Retomando la figura 1.8 y considerando que  $x = L$ , se puede observar que la primera oscilación posible que se puede provocar es en donde existe un nodo en cada extremo y un solo antinodo. Esto ocurre cuando

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad (1.21)$$

En donde  $L$  es la longitud de la cuerda y ambos nodos abarcan la totalidad de la cuerda, por ende, es igual a  $\lambda/2$ . Esta primera oscilación se le conoce como frecuencia fundamental.

Las siguientes oscilaciones posibles siempre tienen como característica que en los extremos solo existan nodos y en cada múltiplo se agrega un nodo extra. Estas condiciones permiten apoyarnos en la ecuación 1.18 para determinar las posibles frecuencias a las cuales puede oscilar la cuerda [6], [8], [9], [11], [19], [21].

$$f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.22)$$

En donde  $\mu$  es la densidad lineal de la cuerda y  $F_T$  es la tensión en la cuerda. Cuando  $n = 1$ , se tiene la frecuencia fundamental, y los siguientes múltiplos de esta frecuencia se llaman armónicos, donde  $n = 2$  es el primer armónico,  $n = 3$  es el segundo armónico y así sucesivamente [9]. En la figura 1.8 se muestran las tres primeras frecuencias naturales. Nótese que en la frecuencia fundamental solo hay un antinodo, en el primer armónico hay dos antinodos y así sucesivamente.

La oscilación de una cuerda es un ejemplo de *onda transversal*, tema propio del fenómeno ondulatorio y que por el momento no está en el interés del presente trabajo, pero sin duda alguna, consideramos que es un fenómeno de gran importancia en la Física. Lo extraordinario de dicho fenómeno de oscilación es la producción de una onda de sonido al hacer oscilar una cuerda de guitarra. El estudio y análisis de la cuerda, en la mayoría de los laboratorios difícilmente es posible reproducir dicho fenómeno debido a que no se cuenta con los materiales necesarios o, si se cuentan con ellos, son un poco elevados de precio y por ende no se les permite a los estudiantes el uso de estos instrumentos, por lo cual, los estudiantes solo permanecerán con la idea teórica. La figura 1.9 es un sistema propuesto para este proyecto. Por otra parte, en la figura 1.10 [26] se presenta un sistema en forma de kit vendido por una empresa, en donde solo la bocina tiene un valor aproximado de 2870 pesos [27].

El sistema de la figura 1.9 es económico y de fácil construcción. Con la ayuda de un generador de funciones y un amplificador de audio, es posible observar los diferentes modos de vibración que pueden existir en una cuerda, y teniendo la posibilidad de acoplar diferentes tipos de cuerdas.



Figura 1.9. Sistema construido para el estudio y análisis de la oscilación de una cuerda.

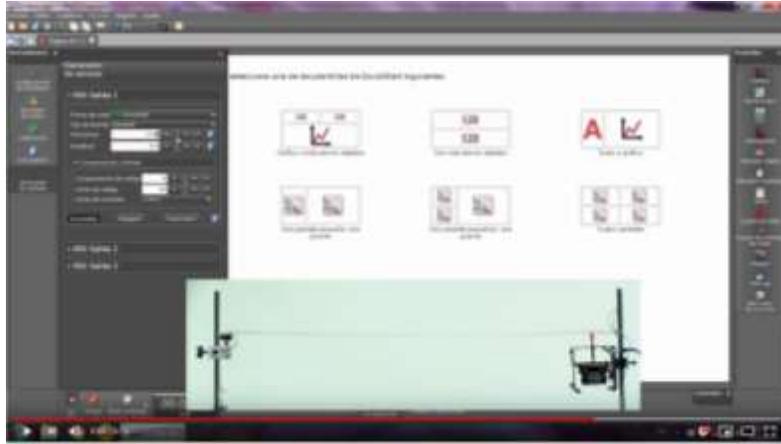


Figura 1.10. Sistema de cuerda vibrante vendido en forma de kit por la compañía PASCO, con un costo mayor de 20000 pesos.

El estudio de los fenómenos antes mencionados, representan, en la mayoría de la bibliografía revisada, la introducción a temas más complejos analizados en ramas de la Física, tales como la acústica, el electromagnetismo e incluso la mecánica cuántica. No obstante, estos fenómenos han sido estudiados con muy poca claridad, además de confusos, como para ser parte introductoria a dichas ramas de la Física.

En este trabajo se desarrollaron dispositivos eléctricos y electrónicos, que forman parte de los sistemas mecánicos empleados para la enseñanza del fenómeno oscilatorio. Dichos dispositivos permiten observar el movimiento sinusoidal, producido por un movimiento oscilatorio, directamente sobre la pantalla de un osciloscopio. Pocos artículos (no se encontraron libros de enseñanza) exponen el comportamiento sinusoidal, regido por el movimiento oscilatorio, mediante el análisis de datos graficados en una computadora (en general) que exponen este tipo de fenómenos mediante la simulación empleando una computadora.

En el siguiente capítulo se mostrarán dichos instrumentos y sus resultados, con los cuales los alumnos podrán analizar y estudiar un fenómeno oscilatorio y así mismo se mostrará que es posible observar el comportamiento de un movimiento de vaivén en la pantalla de un osciloscopio.

## Capítulo 2

### 2.1 Introducción

En este segundo capítulo se presentan los sistemas que permiten reproducir los fenómenos oscilatorios descritos en el capítulo 1. Dichos sistemas pretenden ser una alternativa de bajo costo y con alta probabilidad de ser empleados en el ámbito de la enseñanza. Una propuesta interesante de los sistemas que se expondrán a continuación es que estos sistemas permiten graficar el comportamiento del movimiento de vaivén regido por este tipo de fenómenos. El movimiento de vaivén, generalmente se presenta a los alumnos de las carreras de Física, Ingeniería y a fines, empleando una computadora; graficando datos de los experimentos oscilatorios o simulando las matemáticas de dichos fenómenos.

Los sistemas presentados en este capítulo son una excelente alternativa para ser empleados en la enseñanza del fenómeno oscilatorio, debido a que no se tiene registro de experimentos semejantes en donde sea posible estudiar y analizar en tiempo real, empleando la pantalla de un osciloscopio, el movimiento de vaivén de estos fenómenos, los cuales se presentan a continuación.

### 2.2 El resorte

El resorte es un fenómeno que establece los principios fundamentales de una oscilación, muchos ejemplos de una gran gama de las ciencias se basan en el análisis de un sistema de resorte. El interés por comprender su comportamiento es un conocimiento medular para introducirse a ramas más complejas de la ciencia, tales como la Física cuántica.

Sin más preámbulo, se retoma el análisis de la figura 1.1, la cual se presenta en este capítulo como la figura 2.1 [4, p. 356], [6, p. 207], [7, p. 413], [8, p. 276], [9, p. 449]. Cómo se mencionó en el anterior capítulo, la ley de Hooke expresa una relación que permite evaluar la constante de restitución de un resorte. Se representa matemáticamente por la ecuación 2.1, siendo  $k$  la constante de restitución del resorte [18].

$$F_k = -kx \quad (2.1)$$

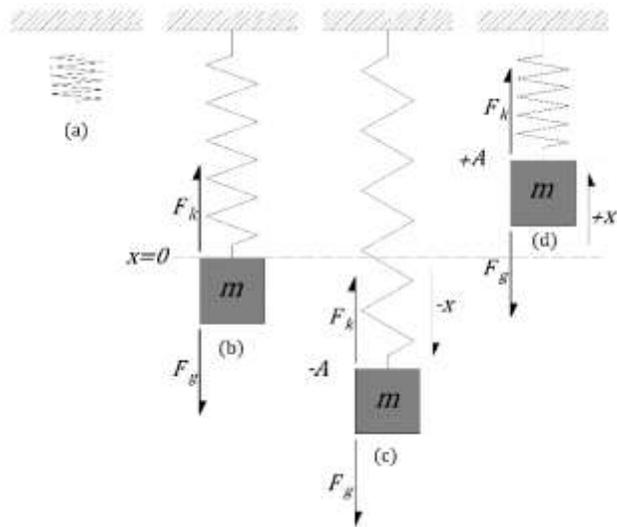


Figura 2.1. a) Resorte vertical sin estirar. b) Resorte estirado por una masa, aquí  $x = 0$  y se dice que se encuentra en su posición de equilibrio. c) Se perturba el sistema haciendo que la masa se desplace hacia abajo y por ende el resorte se estira, aquí  $x$  es negativa. d) El resorte se encuentra comprimido, aquí  $x$  es positiva.

Considerando la figura 2.1, se observa que el fenómeno que se está estudiando es un resorte suspendido, el cual sostiene una masa  $m$ , por lo consiguiente, el resorte está sometido a una segunda fuerza, la cual depende de la gravedad, ecuación 2.2. Esta fuerza es opuesta a la fuerza descrita por la ecuación 2.1.

$$F_g = mg \quad (2.2)$$

Cuando el resorte se encuentra en la posición de equilibrio, esto es, cuando la fuerza de la ecuación 2.1 es igual a la fuerza de oposición, ecuación 2.2, se tiene que en esta condición las fuerzas se anulan y matemáticamente se obtiene

$$mg - kx_0 = 0 \quad (2.3)$$

Despejando a  $x_0$  de la ecuación anterior

$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 representa la posición inicial, cuando el sistema resorte-masa se encuentra en reposo. Si se aplica una fuerza que saque de reposo al sistema, este comenzara a oscilar, es decir, a tener desplazamientos de vaivén, repitiendo posiciones máximas y mínimas, así mismo, cruzando constantemente por la posición de equilibrio. Por tal motivo debemos reescribir la ecuación 2.3.

$$mg - k(x + x_0) = ma \quad (2.5)$$

Siendo  $x$  el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio. Resolviendo para obtener la aceleración se tiene que

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 no aporta mucha información y su comprobación experimental requiere de una gran habilidad o repeticiones que permitan obtener  $x$ .

Los movimientos de vaivén pueden ser descritos solo por funciones sinusoidales, estas funciones matemáticas son las únicas que describen la repetición de la posición en un determinado tiempo. Por tal motivo podemos escribir la posición como [4], [5], [7]-[9], [11], [18], [19], [21]

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \theta) \quad (2.7)$$

Para obtener la aceleración de la ecuación 2.7 e igualarla con la ecuación 2.6, es necesario obtener la 2ª derivada, por lo que se obtiene [11]

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (2.8)$$

Comparando la ecuación 2.6 con la ecuación 2.8 y despejando la velocidad angular  $\omega$ , se obtiene

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

Con la ecuación 2.9 se obtiene la frecuencia y el periodo de oscilación del resorte [6], [19], [21]

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.10)$$

La ecuación 2.10 pocas veces es de interés en los laboratorios de enseñanza, por lo laborioso, además de que la precisión depende del observador. En general es muy frecuente que los experimentos con resortes se enfoquen a encontrar la constante  $k$  del resorte. Este es un procedimiento estático, en donde se mide la distancia que el resorte se desplaza de su posición de equilibrio original a consecuencia de agregar una masa conocida, usando la ecuación 1.2. La obtención de  $k$  a partir de la medición del periodo es un procedimiento dinámico; donde los estudiantes hacen oscilar un resorte con una masa anexada, y miden con un cronometro el tiempo que tarda en completar varios ciclos (esto para reducir la incertidumbre de la medición). Al tener el valor del periodo, estadísticamente, se despeja la constante  $k$  de la ecuación 2.10 y se puede calcular de forma indirecta [28]–[33].

### 2.3 Propuesta experimental (resorte)

Se muestra un sistema que permite medir de forma directa el periodo de un resorte, cuando sobre este se hace oscilar una masa. Con la ayuda de un imán y una bobina fue posible detectar las variaciones oscilatorias del resorte, figura 2.2 y figura 2.3. El imán induce un campo magnético sobre la bobina, lo que ocasiona una diferencia de potencial, la cual es posible medir empleando un osciloscopio.

Lo interesante de esta propuesta es que los alumnos pueden observar directamente, en la pantalla de un osciloscopio, el movimiento sinusoidal que rige el vaivén del resorte, figura 2.2.



Figura 2.2. Sistema para el análisis del movimiento oscilatorio de un resorte.



Figura 2.3. Bobina construida para registrar el movimiento del resorte.

Como un ejemplo del uso del sistema mostrado en la figura 2.2, se realizaron mediciones que permitieron verificar las ecuaciones que rigen el comportamiento de un resorte.

El resorte que se empleó en este ejemplo se le determinó experimentalmente su constante  $k$ , mediante el procedimiento de elongación del resorte cuando a este se le coloca una masa ( $m = 0.5763 \text{ kg}$ ), con la cual se registró una elongación de su posición de equilibrio  $\Delta l = 0.205 \text{ m}$ . Con estos valores, y considerando que  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , se sustituyen en la ecuación 1.2, con lo que se obtiene

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{0.5763(9.81)}{0.205} = 27.578 \frac{N}{m} \quad (2.11)$$

Con el valor de  $k$  obtenido en este ejercicio, si se hace oscilar este sistema con la masa antes medida, se espera un periodo de oscilación de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.5763}{27.578}} = 0.908 \text{ s} \quad (2.12)$$

Con el sistema propuesto en este apartado es posible verificar la forma sinusoidal cualitativamente, y así mismo verificar que el movimiento de vaivén del resorte puede ser descrito por una función sinusoidal. La figura 2.4 muestra la pantalla de un osciloscopio, la cual registra el movimiento de vaivén del resorte empleado en el presente experimento. En el recuadro superior derecho se observa información de la señal registrada, en particular muestra la variable  $\Delta X = 900ms$ , la cual corresponde al periodo de la señal. Este valor tiene una discrepancia porcentual de

$$\% \epsilon = \frac{0.908 - 0.900}{0.908} \times 100\% = 0.88\% \quad (2.13)$$

El uso del osciloscopio, además de permitir analizar el comportamiento sinusoidal del movimiento de vaivén que rige a un resorte, también es posible obtener el periodo del mismo con un error porcentual mínimo. El error porcentual obtenido mediante la ecuación 2.13 es muy difícil lograrlo con los instrumentos de medición clásicos, independientemente del experimentador.

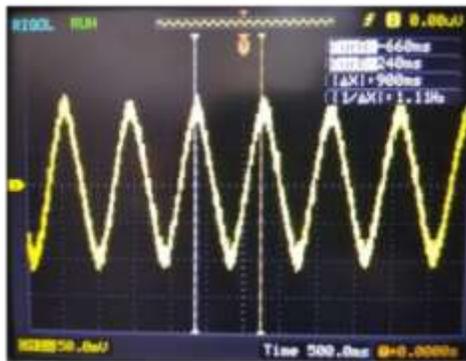


Figura 2.4. Gráfica del movimiento oscilatorio del resorte registrado en el osciloscopio.

Una de las características del uso de instrumentación digital es que, en la mayoría de las veces, es posible guardar los datos en forma de archivo de dos columnas. Teniendo esta información es posible usar un software para graficar (por ejemplo, en Excel), y reportar la gráfica obtenida analizada directamente con el software empleado, como en la figura 2.5.

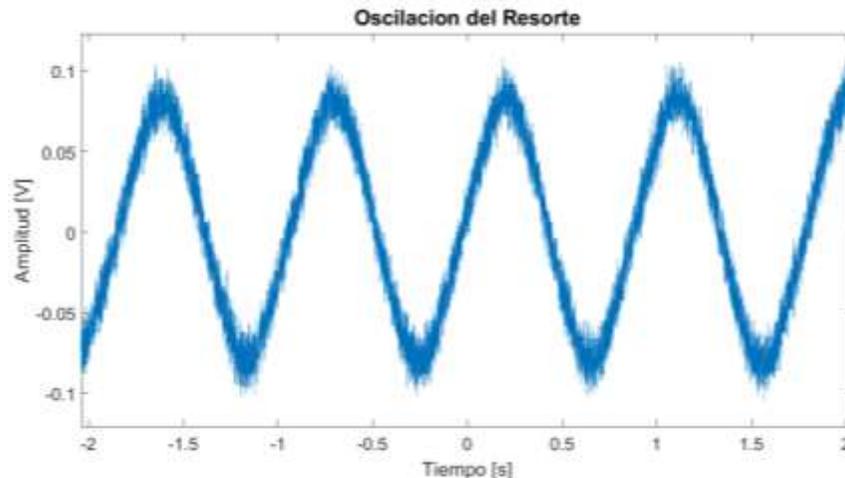


Figura 2.5. Datos graficados en software a partir del archivo proporcionado por el osciloscopio.

Este sistema propuesto resuelve uno de los paradigmas de la enseñanza experimental, con mayor precisión y sin espacio a la ambigüedad, respecto a que el movimiento de vaivén de un resorte es regido por una función sinusoidal, lo que permitiría a los alumnos de nivel medio superior y superior reforzar sus conocimientos sobre el concepto de oscilación. La versatilidad del presente sistema permite estudiar la oscilación y obtener la constante  $k$ , u obtener la constante  $k$  y verificar el periodo de oscilación. Esto último permitiría a los alumnos a tener mayor diversidad de experimentación.

Con el estudio de este fenómeno se pretende introducir a los estudiantes al concepto de oscilación, por lo que se pudo observar que el análisis de un resorte es el primer fenómeno estudiado en la mayoría de la bibliografía revisada. Los razonamientos matemáticos empleados para analizar el movimiento de vaivén del resorte son empleados para analizar un fenómeno muy importante; el movimiento de un péndulo, el cual se presenta a continuación.

## 2.4 El péndulo

Como se mencionó en el capítulo 1, el péndulo es un sistema que consta de una masa suspendida de un hilo, la cual se hace oscilar soltando dicha masa en un determinado ángulo respecto a la perpendicular formada cuando la masa suspendida se encuentra en reposo. Retomando la figura 1.3 como la figura 2.6 [4, p. 364], [5, p. 316], [6, p. 208], [7, p. 416], [8, p. 278], [11, p. 479], [18, p. 323], [19, p. 395], [20, p. 134], [21, p. 484].

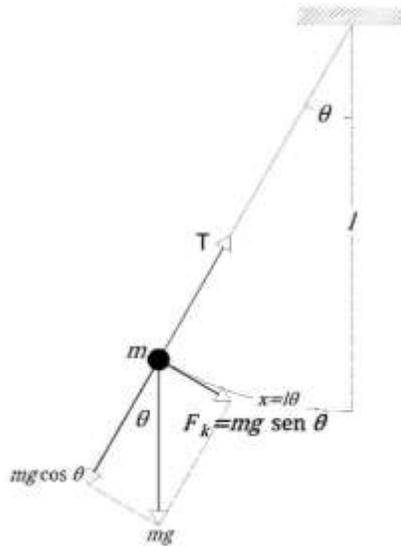


Figura 2.6. Fuerzas que interactúan en el movimiento de un péndulo.

Uno de los resultados más importantes de estudiar este fenómeno es que, para ángulos pequeños (menores a  $15^\circ$ ) y retomando la ecuación 1.8 como la ecuación 2.14, se cumple

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.14)$$

Es decir, el periodo no depende de la masa suspendida. Este importante resultado es uno de los objetivos que se persiguen en los laboratorios de enseñanza; comprobar que el período de un péndulo es independiente de la masa para ángulos pequeños. En general los resultados obtenidos por los estudiantes (dependiendo de los instrumentos empleados, incluso del experimentador) se obtienen errores porcentuales desde el 5% y hasta el 20%.

Se muestra un dispositivo electromecánico empleado para registrar las oscilaciones de un péndulo mediante el uso de un osciloscopio. Para este fin se empleó un circuito muy sencillo, mejor conocido como divisor de voltaje, figura 2.7 [34]. Los movimientos de vaivén son detectados por dicho circuito mediante variaciones de voltaje en  $R_2$ . Los voltajes registrados oscilan en  $\pm 300 \text{ mV}$ .

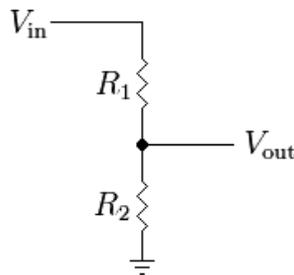


Figura 2.7. Divisor de voltaje.

El circuito de la figura 2.7 es instalado en un sistema mecánico como el mostrado en la figura 2.8. Dicha figura corresponde a la parte mecánica diseñada y construida para experimentar con distintas masas  $m$  y longitudes  $L$ . Este sistema es muy versátil, por lo que permite a los alumnos analizar los movimientos de vaivén de una masa suspendida en el punto de apoyo del sistema mecánico.

## Punto de apoyo para las variaciones de masa y $L$

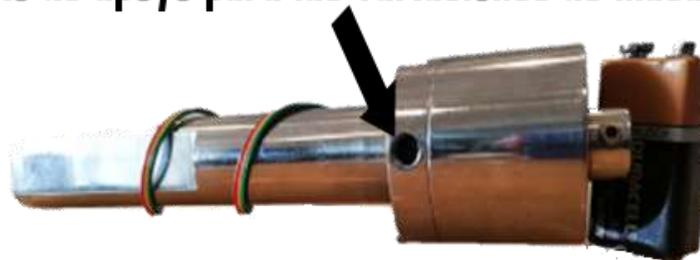


Figura 2.8. Sistema mecánico donde se instala el divisor de voltaje. Se puede experimentar con las distintas masas  $m$  y longitudes  $L$ .

El montaje experimental del péndulo que se propone en el presente trabajo es como el que se muestra en la figura 2.9.

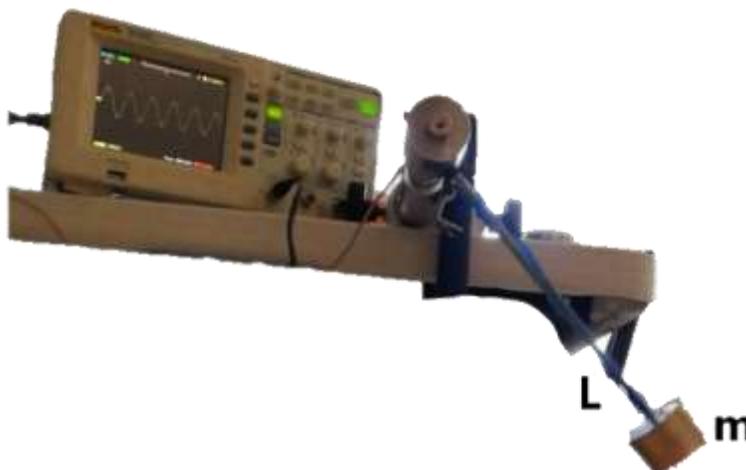


Figura 2.9. Sistema que permite registrar el movimiento oscilatorio del péndulo en un osciloscopio.

Como se mencionó anteriormente, el enfoque experimental del estudio y análisis del movimiento de vaivén de un péndulo es demostrar la ecuación 2.14, y en ocasiones, es evaluar la constante de gravedad  $g$  de la Tierra [35]–[39], el cual tiene un valor aproximado de  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Con el sistema de la figura 2.9, es posible continuar con los paradigmas de la enseñanza y tener mejores resultados que los antes mencionados, como se presenta a continuación.

Para demostrar que la ecuación 2.14 se cumple, se emplearon diferentes masas con la misma geometría, figura 2.10.



Figura 2.10. Masas empleadas para la demostración de la ecuación 2.14. 1) Cobre, 2) Acrílico, 3) Latón y 4) Aluminio.

Los resultados obtenidos evidenciaron que para una longitud  $L = 0.60 \text{ m}$  y masas de 2)  $72.5 \text{ g}$ , 4)  $161.9 \text{ g}$ , 3)  $517.7 \text{ g}$  y 1)  $545.2 \text{ g}$ , el período es invariante e independientemente de la masa. Empleando la ecuación 2.14 se calculó un período aproximado de

$$T_{TEO} = 2\pi \sqrt{\frac{0.60}{9.81}} = 1.553 \text{ s} \quad (2.15)$$

Se empleó el montaje experimental mostrado en la figura 2.9 para medir el período de las distintas masas. La figura 2.11 muestra la pantalla de un osciloscopio con uno de los resultados, para una masa  $m = 545.2 \text{ g}$ , en la cual se puede observar en la parte superior derecha el resultado del período experimental, el cual corresponde a  $T_{EXP} = \Delta X = 1.56 \text{ s}$  y un valor teórico de  $T_{Teo} = 1.553 \text{ s} \approx 1.55 \text{ s}$ . Con lo que se obtiene un error porcentual del 0.64%. Este valor es mucho menor al 5%, el cual se obtiene con sistemas de alto costo.

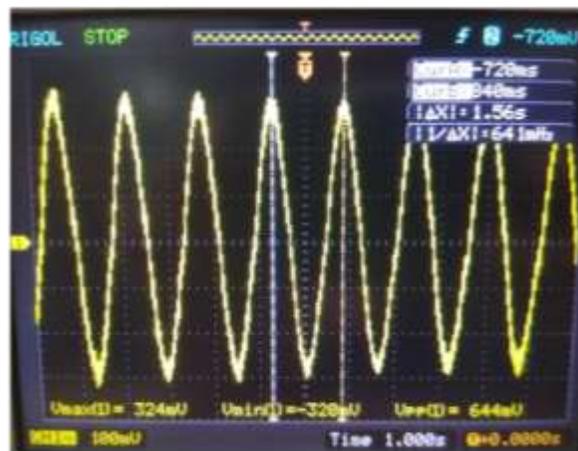


Figura 2.11. Señal registrada en el osciloscopio a partir del movimiento de un péndulo.

La figura 2.11 muestra el comportamiento de vaivén de un péndulo del sistema mostrado en la figura 2.9. Con este sistema no solo es posible medir directamente el período de un péndulo, sino además es posible observar que dicho movimiento puede ser descrito mediante una función sinusoidal. De igual manera, como se mencionó en el análisis de un resorte, el instrumento digital permite obtener los datos de dicho comportamiento permitiendo graficar estos datos en un software estadístico, figura 2.12.

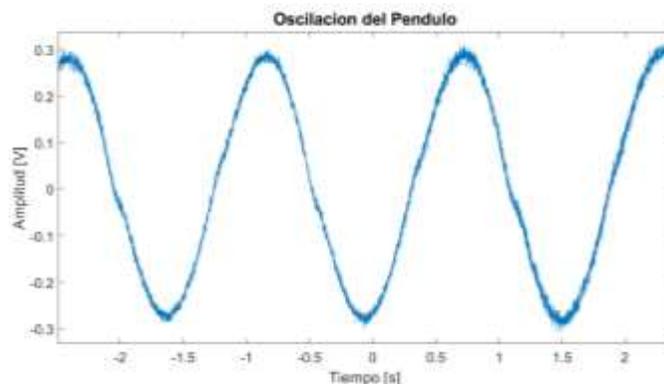


Figura 2.12. Datos graficados en software a partir de las capturas registradas del osciloscopio para el sistema del péndulo.

El estudio y análisis del resorte y del péndulo, son dos fenómenos introductorios a fenómenos más interesantes e importantes de la Física e Ingeniería. Sus análisis, de fácil entendimiento y poca complejidad, abren la puerta a un extenso universo, desde lo microscópico (moléculas) a lo macroscópico (galaxias). Sin embargo, los paradigmas de la enseñanza no han logrado matizar la importancia de tan importantes fenómenos, que solo se han enfocado a la matemática esencial que describe el movimiento del resorte y el péndulo. Pocas veces en los laboratorios de enseñanza es posible mostrar que el movimiento descrito por estos fenómenos es regido por una función sinusoidal.

Una de las variables más importantes en este tipo de fenómenos oscilatorios es el período  $T$ , con el cual es posible describir el tiempo en el que la masa oscilante regresa a la posición de origen. Una vez que los alumnos logran entender esta variable se calcula de forma indirecta otra de las variables relevantes en este tipo de oscilaciones y de todo fenómeno ondulatorio: La frecuencia  $f$ . Esta variable surge del estudio y análisis de otro fenómeno oscilatorio: La cuerda; la cual se describe a continuación.

## ***2.5 Oscilación en una cuerda***

No hay claridad en que época la oscilación de la cuerda produce su primer sonido; pero es conocido que este fenómeno tenía un gran interés en la antigua Grecia. “De hecho, para los griegos la teoría matemática de la música formaba parte de una teoría general conocida

como la *Armonía del Cosmos*. Pitágoras y sus discípulos, Platón, Aristógenes, Aristóteles y Claudio Ptolomeo fueron algunos de los filósofos y astrólogos más relevantes que profundizaron en los intervalos musicales como fuente de nociones matemáticas y de importantes extrapolaciones científicas y cosmológicas” [23, p. 1]. El interés por entender la oscilación de una cuerda y el sonido que esta producía resurge en el siglo XVIII, hasta la resolución final del problema por parte de Joseph Fourier ya bien avanzado el siglo XIX. Se produjo un interesante debate en el que participaron grandes matemáticos como Brook Taylor, Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Jean-le-Rond D’Alembert, J. L. Lagrange y L. Dirichlet, entre otros. Este debate dirigido a explicar cómo una cuerda en vibración es el resultado de una suma infinita de movimientos vibratorios de diferentes frecuencias [23].

Esta breve introducción histórica pretende exponer la gran importancia que le dieron muchos de los grandes pensadores y matemáticos por analizar la oscilación de una cuerda y así mismo, la estrecha relación de un fenómeno oscilatorio con un fenómeno ondulatorio. Es en este punto en donde el presente trabajo tiene una importante relevancia en la construcción de dispositivos eléctricos y electrónicos para la enseñanza del fenómeno oscilatorio empleados para introducir a la *transformada de Fourier*, como lo veremos más adelante.

A continuación, se muestra el sistema para el estudio y análisis de la oscilación de una cuerda. Este importante fenómeno es pocas veces estudiado en los laboratorios de enseñanza por los sistemas empleados de alto precio, lo que generalmente se realiza manualmente, proporcionando un conocimiento ambiguo sobre el concepto de oscilación. El sistema de marca en forma de kit [40] empleado para hacer oscilar una cuerda puede costar desde \$22000 [41], hasta más de \$30000 [42]. El sistema que se muestra en este trabajo tiene un costo aproximado de \$500.00, figura 2.13.



Figura 2.13. Sistema para la oscilación de una cuerda de bajo costo.

El sistema mostrado en la figura 2.13 se empleó para estudiar los nodos y antinodos de una cuerda. Solo como dato histórico, cabe mencionar que *Joseph Sauveur* fue el primero que uso el concepto de *NODOS*, el cual lo empleo para definir las zonas donde no había movimiento, y las zonas donde existía movimiento las llamo *VIENTRES* [23], en vez de antinodos, como también se les conoce actualmente.

## 2.6 Ejercicio de oscilación en una cuerda

Con el siguiente ejercicio se pretende reproducir una de las prácticas comunes que se llegan a desarrollar en los laboratorios de enseñanza con sistemas de alto costo, y con ello mostrar que con este sistema que se propone es posible obtener excelentes resultados. Por tal motivo es que nos enfocaremos en verificar la ecuación 1.22, la cual está en función de la tensión, misma que despejaremos para obtener la siguiente ecuación.

$$F_T = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2} \quad (2.16)$$

Para verificar la ecuación 2.16, es necesario realizar las mediciones, experimentalmente, de la densidad lineal de la cuerda  $\mu$ . Para este fin es necesario medir la masa  $m$  y su longitud total  $l$  de la cuerda. Con estos valores será posible evaluar la densidad lineal mediante la siguiente relación

$$\mu = \frac{m}{l} \quad (2.17)$$

Para este ejercicio se obtuvo una  $m = 0.0481 \text{ kg}$  y una  $l = 1.235 \text{ m}$  de la cuerda empleada, sustituyendo estos valores en la ecuación 2.17 se tiene

$$\mu = \frac{0.0481 \text{ kg}}{1.235 \text{ m}} = 0.039 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad (2.18)$$

El valor de  $L$  corresponde a la longitud de la cuerda entre los dos extremos fijos del sistema de la figura 2.13, midiendo  $L = 0.49 \text{ m}$ . Considerando estos valores se realizaron los siguiente tres experimentos, figura 2.14. Recordando que los modos de vibración son múltiplos de la longitud de onda, es que se empleó  $f = 25\text{Hz}, 2f$  y  $3f$ . Y con esto se obtuvieron los modos mostrados en la figura 2.14.

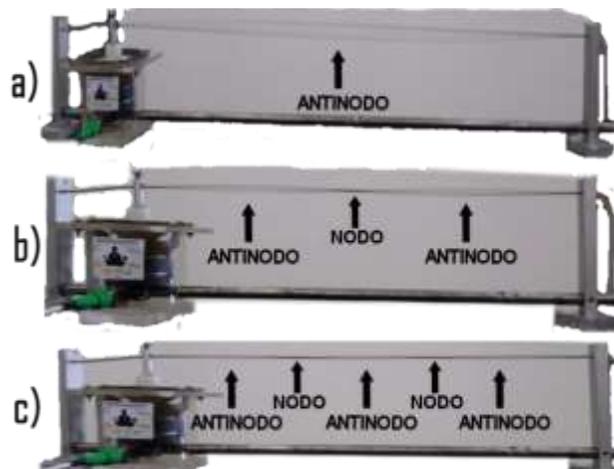


Figura 2.14. Los primeros tres modos de vibración de la cuerda empleada. a) Primer modo o Frecuencia Fundamental a 25 Hz, b) Primer armónico a 50 Hz y c) Segundo armónico a 75 Hz.

Sustituyendo en la ecuación 2.16 las distintas frecuencias empleadas en este ejercicio, se obtienen los siguientes resultados:

Frecuencia fundamental

$$F_{T1} = \frac{4(0.49)^2(25)^2(0.039)}{1^2} = 23.4 \text{ N} \quad (2.19)$$

Primer armónico queda

$$F_{T1} = \frac{4(0.49)^2(50)^2(0.039)}{2^2} = 23.4 \text{ N} \quad (2.20)$$

Segundo armónico

$$F_{T1} = \frac{4(0.49)^2(75)^2(0.039)}{3^2} = 23.4 \text{ N} \quad (2.21)$$

Donde se puede apreciar que la tensión es constante para las diferentes frecuencias empleadas, como era de esperarse. Este ejercicio da pie a una importante reflexión sobre las cuerdas de una guitarra (o cualquier instrumento de cuerdas), sobre la importancia de sus densidades y la tensión de las mismas para producir un sonido armónico.

## ***2.7 Las oscilaciones: Un sendero para el estudio del fenómeno ondulatorio***

Hasta este momento se han expuesto los fenómenos oscilatorios empleados para introducir al fenómeno ondulatorio a estudiantes de carreras de Física e Ingenierías y carreras afines. Las matemáticas desarrolladas en el estudio y análisis de las oscilaciones son movimientos de vaivén, los cuales pueden ser descritos por una función sinusoidal. Esto es, la posición de un movimiento de vaivén de una masa se describe por la siguiente ecuación:  $x = A \text{ sen}(\omega t + \theta)$ . Esta aseveración pocas veces es cotejada experimentalmente, aunque se comprueba mediante simulaciones en computadoras o con sistemas de alto costo. Los instrumentos mostrados en el presente trabajo permitieron observar dicho comportamiento en la pantalla de un osciloscopio.

El estudio y análisis del movimiento oscilatorio de la cuerda es un fenómeno empleado para la introducción al estudio y análisis de ondas. Este fenómeno ha generado un interés desde hace más de 2000 años. En la actualidad los laboratorios de enseñanza de las carreras de Física, Ingenierías y afines estudian este fenómeno con ligereza y minimizando su importancia como tema medular al estudio de fenómenos ondulatorios.

¿Porque un fenómeno oscilatorio, como lo es la cuerda, es un tema central para el estudio de un fenómeno ondulatorio? Es una paradoja de la enseñanza que puede ser desentrañable si enfocamos el interés en la producción de sonido ocasionado por la oscilación de la cuerda en los distintos instrumentos de cuerda conocidos, tal como la guitarra, figura 2.15.



Figura 2.15. La guitarra es el instrumento de cuerda más conocido.

La complejidad del análisis y estudio de la vibración de una cuerda (*Teoría del Sonido*) requirió de un largo tiempo, desde el siglo XVII al XIX. Y no solo un largo tiempo, sino también se requirieron de grandes genios matemáticos reconocidos por sus grandes contribuciones matemáticas, como lo son Brook Taylor, Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Jean-le-Rond D'Alembert, J. L. Lagrange, L. Dirichlet, Jean Baptiste Joseph Fourier, entre otros.

No hay claridad del momento en que se empleó el concepto de onda, pero no fue durante el estudio y análisis de la cuerda vibrante, pero...

D'Alembert fue quien consiguió una solución casi exhaustiva de este problema en su famoso artículo de 1747 *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, *Hist. Acad. Sci. Berlin 3 (1747), 214-219*. Él establece directamente que el objetivo de su artículo es probar que la forma de la cuerda vibrante posee infinitas soluciones además de la fundamental. Para ello considera que el desplazamiento  $y$  de la cuerda es una función de dos variables: el tiempo  $t$  y la posición  $x$  a lo largo de la cuerda. Por tanto, las ecuaciones más apropiadas deben ser escrita [sic] en términos de las derivadas parciales. La ecuación que describe la vibración de una cuerda se denomina la *ecuación de ondas* uni-dimensional y viene dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.22)$$

donde  $c$  denota la velocidad de propagación de una perturbación transversal en la cuerda. Esta es una constante que depende únicamente de la tensión  $\tau$  a la que esta sometida y de la masa por unidad de longitud  $\rho$  [23, p. 4].

En 1822 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), en su “Teoría Analítica del Calor”, introdujo la idea de que las funciones periódicas pueden analizarse usando series trigonométricas. Este hecho fue crucial para la resolución definitiva del problema de las cuerdas vibrantes. Se entiende por *serie trigonométrica de Fourier* correspondiente a una función  $\phi$  a la dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.23)$$

[23, p. 5]

Fourier tuvo grandes contribuciones matemáticas, y el interés del presente trabajo es su contribución que permite el análisis de frecuencias involucradas en una señal. En otras palabras, Fourier creo la herramienta matemática que permite que una señal temporal pueda ser observada en el dominio frecuencial. Esta transformación la discutiremos con un poco más de detalle en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

### 3.1 Introducción

Los fenómenos oscilatorios revisados hasta este momento han permitido demostrar que dichos movimientos pueden ser descritos por una señal sinusoidal. En este trabajo se usaron algunos dispositivos electrónicos para que, con el uso de un osciloscopio, fuera posible visualizar y comprobar que efectivamente el movimiento de vaivén es una señal sinusoidal. Como se ha venido mencionando en los capítulos anteriores, este tipo de fenómenos son estudiados en los laboratorios de enseñanza, de nivel medio superior y superior, con el único fin de comprobar la teoría matemática y que, a saber, esta teoría solo predice que la elongación y restauración de un resorte se rige por la ley de Hooke. Así mismo, y bajo la hipótesis de que el movimiento de un péndulo se rige por la ley de Hooke, es posible obtener que el período de un péndulo no depende de la masa [5], [7]-[9], [18], [19], [21].

Este trabajo emplea el estudio y análisis de los fenómenos oscilatorios para introducir a los alumnos, de carreras de Física, Ingeniería y afines, al análisis frecuencial y temporal del movimiento producido por dicho fenómeno. Con los dispositivos expuestos en el capítulo 2, se mostró que el movimiento de estos fenómenos es regido por una función sinusoidal; requisito necesario para que una señal pueda ser analizada en el dominio frecuencial [43]-[48].

Aunque de una manera más cualitativa que cuantitativa, se propone que este tipo de fenómenos oscilatorios sean estudiados en el nivel medio superior (bachillerato) [49], mediante la observación de graficas trazadas en la pantalla de un osciloscopio; siendo una excelente alternativa para mostrar a estudiantes que las funciones sinusoidales (las cuales son una introducción en el nivel medio superior) son útiles para representar el movimiento oscilatorio, o un movimiento de vaivén. Haciendo uso de la nueva tecnología, donde los instrumentos de medición proporcionan una variedad de opciones.

El osciloscopio digital actualmente cuenta con una función muy importante conocida como FFT, cuyo significado es *Fast Fourier Transform*. Con esta función es posible observar la señal sinusoidal en otro dominio, conocido como el dominio de las frecuencias, y es posible gracias a la *transformada de Fourier*. Esta importante alternativa permite que un conocimiento tan importante como la transformada de Fourier pueda ser introducido a estudiantes de nivel medio superior, sin más conocimiento que el haber conocido la gráfica de una función sinusoidal.

Un conductor de auto no requiere saber mecánica para ser un excelente conductor, un usuario de computadora no requiere saber programar para saber usar una computadora adecuadamente. Estos ejemplos solo tienen la finalidad de mostrar que es posible introducir

a los alumnos a visualizar el dominio frecuencial sin más herramientas que un instrumento que lo permita. Con la ayuda de algunos instrumentos, como los expuestos en este trabajo, es posible realizar dicha tarea sin mayor problema. Pero antes de presentar dichos instrumentos se demostrará que los fenómenos oscilatorios están regidos por una función sinusoidal, la cual es posible visualizarla en el dominio temporal y, simultáneamente, con ayuda del mismo instrumento puede ser observada en el dominio frecuencial.

Así mismo, en este capítulo se presentan algunos instrumentos para realizar operaciones de suma entre sinusoidales; el resultado de dichas operaciones puede ser visualizado en tiempo real en la pantalla de un osciloscopio. Dichos resultados podrán ser analizados tanto en el dominio temporal como en el frecuencial. Después de mostrar operaciones entre señales sinusoidales, empleando los instrumentos construidos para este fin, analizaremos brevemente, y sin rigurosidad, las operaciones matemáticas de Fourier. Si bien es cierto que la transformada de Fourier se presenta en cursos avanzados de carreras de Física e Ingeniería, creo que no es una matemática que requiera de un amplio adiestramiento ni conocimiento, solo sumar y algunos conceptos trigonométricos, para que los principiantes interesados puedan entenderla. Lograr este objetivo conllevó a una revisión bibliográfica y debates con gente experta, así mismo romper con las formalidades, tecnicismos y el rechazo de las complejidades matemáticas.

### ***3.2 Fenómenos oscilatorios introductorios al análisis del dominio temporal y el dominio frecuencial***

En la actualidad, los osciloscopios digitales (la mayoría de estos) cuentan con una opción que permite observar la señal periódica en dos dominios diferentes, a saber: El dominio temporal y el dominio frecuencial. En el capítulo 2, se mostró experimentalmente y sin ambigüedad que el comportamiento de un movimiento oscilatorio es posible describirlo mediante una función sinusoidal. El comportamiento de este tipo de funciones está estrechamente regido por parámetros muy importantes tales como la frecuencia o periodo y su amplitud. La enseñanza en los niveles medio superior y superior ha enfocado más su interés a su comportamiento periódico; como ya se mencionó antes, ha sido más por la supuesta sencillez de su interpretación en el dominio temporal.

Para observar o entender no se requiere de profundos y elevados conocimientos, es suficiente una explicación que permita interpretar lo que se observa. La gente que maneja o hace uso de una computadora no requiere de estudios elevados para emplear estos instrumentos, si quiere saber cómo funciona un motor o cómo funcionan los circuitos de una computadora, es entonces cuando entra la importancia de un mayor conocimiento. Este párrafo pretende desmitificar la aberración de observar una señal en el dominio frecuencial. Esto es posible mediante el uso de un osciloscopio digital, debido a que estos instrumentos

permiten analizar, gráficamente, señales o comportamientos oscilatorios directamente en su pantalla, como se observó en el capítulo 2. Así mismo este tipo de señales es posible observarlas en el dominio frecuencial, como se muestra a continuación.

La figura 3.1 muestra en la pantalla de un osciloscopio el comportamiento de una oscilación producida por un resorte. La cual es representada por la señal temporal, parte superior, y su respectiva componente frecuencial, parte inferior.

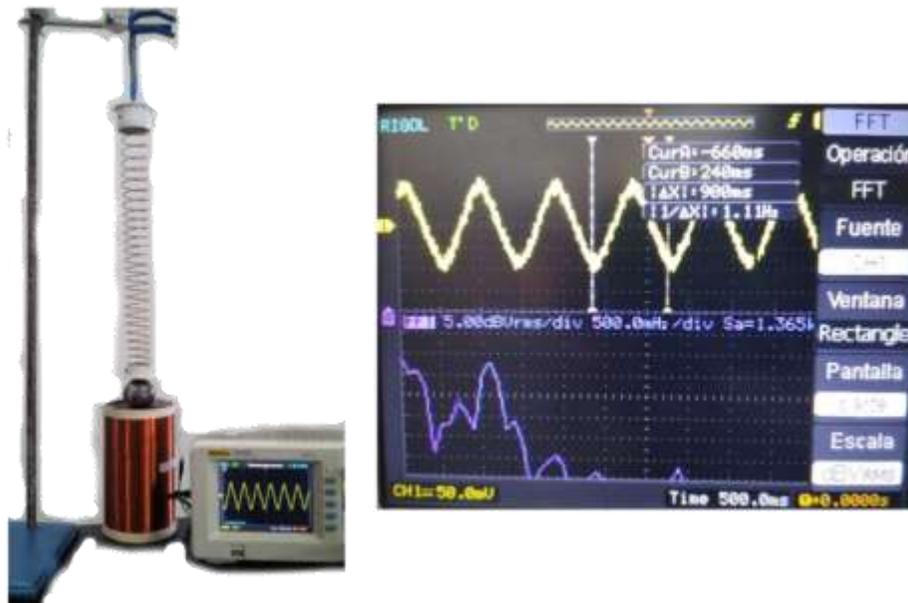


Figura 3.1. Oscilación de un resorte. La señal sinusoidal representada en el dominio temporal y su equivalente representación en el dominio de las frecuencias (señal morada).

La misma pantalla nos permite medir directamente, sobre el recuadro superior derecho, el período de la señal. Esto es posible mediante el control de las barras verticales que lo señalan, las diferencias temporales entre estas dos barras calculan que  $\Delta x = 900ms$ . Esta medición representa el periodo de la señal sinusoidal mostrada en la pantalla del osciloscopio, con este valor es posible calcular la frecuencia mediante la ecuación 1.8.

$$f = \frac{1}{T}, \quad \text{donde } T = 900 \text{ ms} \quad (3.1)$$

Por lo tanto, se tiene que la frecuencia de la oscilación del resorte es de  $f = 1.11 \text{ Hz}$ . Volviendo a la parte inferior de la pantalla que representa la señal en el dominio frecuencial mediante un solo pico, y considerando que cada cuadro equivale a  $500 \text{ mHz}$  y cada cuadro está dividido en 5 puntos, por lo que cada punto equivale a  $0.1 \text{ Hz}$ , es que podemos evaluar que el pico (gráfica de color morado) está en una posición de dos cuadros y un punto, por lo que podemos calcular el valor del pico a  $f = 1.1 \text{ Hz}$ . El valor calculado y el medido directamente de la pantalla del osciloscopio representan un error porcentual aproximado del 0.9%, menos del 1%, lo que podría considerarse un error insignificante.

El mismo análisis se aplica a la figura 3.2. En dicha figura se puede observar, en el lado derecho de la figura, la pantalla del osciloscopio con la señal temporal y frecuencial, parte superior e inferior respectivamente.

$$f = \frac{1}{T}, \quad \text{donde } T = 1.56 \text{ s} \quad (3.2)$$

Por lo que se obtiene que el péndulo oscila a una frecuencia de  $f = 641 \text{ mHz}$ , y de la gráfica inferior de la pantalla del osciloscopio se mide una frecuencia aproximada de  $f = 650 \text{ mHz}$ . Recordemos que el texto superior de la gráfica del dominio de las frecuencias puede leerse que se tiene  $500 \text{ mHz/div}$ , es decir que cada cuadro mide  $500 \text{ mHz}$ , y cada punto dentro de este cuadro mide  $100 \text{ mHz}$ . Con estos datos se evalúa que el pico tiene un valor aproximadamente de  $650 \text{ mHz}$ , por lo que se tiene un error porcentual de  $1.4\%$ .

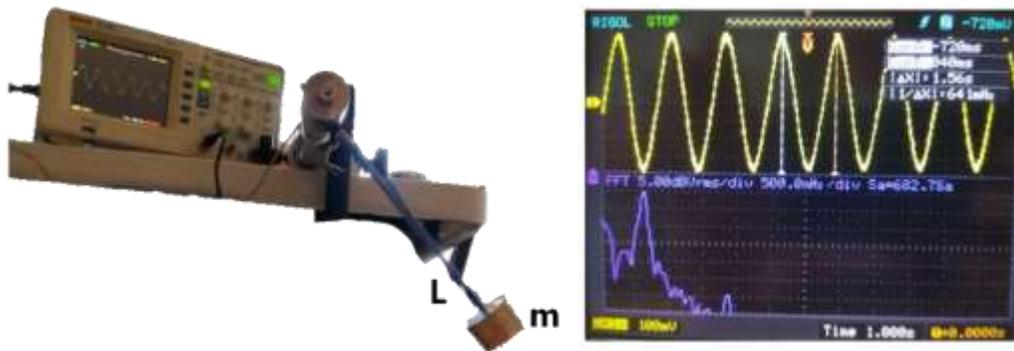


Figura 3.2 Oscilación de un péndulo. La señal sinusoidal representada en el dominio temporal y su equivalente representación en el dominio de las frecuencias (señal morada).

Se han empleado dos fenómenos oscilatorios y se han analizado sus movimientos usando un osciloscopio. Con este instrumento fue posible demostrar que el movimiento de dichos fenómenos es descrito por una señal sinusoidal. El hecho de que un movimiento produzca una señal sinusoidal (en otras palabras, una señal periódica) es una condición necesaria y suficiente para considerarla una señal que puede ser visualizada en el dominio frecuencial [45], [48], [50]-[52].

Los fenómenos antes descritos muestran sin mayor problema el comportamiento sinusoidal en dos dominios diferentes: Frecuencial y temporal. No obstante, podría ser el inicio de introducir a estudiantes a estudiar fenómenos en ambos dominios, sin más información que la observación y la lógica elemental. Esto último nos indujo a desarrollar más instrumentos que reforzarán el entendimiento de analizar señales en el dominio frecuencial. Por lo consiguiente se propuso diseñar y construir instrumentos de bajo costo que proporcionarán señales sinusoidales; y con los cuales los estudiantes podrían manipular y hacer operaciones con dichas señales: Sumas. Pero su invaluable conocimiento es el de observar, con la ayuda de dichos instrumentos, el comportamiento temporal y frecuencial de una determinada señal con diferentes contenidos frecuenciales.

### 3.3 Operación entre señales sinusoidales (suma de señales)

Existe un gran dicho milenario que dice: “*La práctica hace al maestro*”. O una frase poco conocida, pero según la historia fue dicha por el gran filósofo griego Platón: “El que aprende y aprende y no práctica lo que sabe, es como el que ara y ara y no siembra” [53]. Contundente frase de este gran filósofo Platón, y cuya verdad es incuestionable.

Durante el presente trabajo, y bajo la premisa de Platón, es que se exhiben instrumentos que permiten introducir a estudiantes de nivel medio superior y superior al estudio y análisis de señales en el dominio temporal y frecuencial. Los Esquemáticos y PCB's de los circuitos electrónicos empleados para realizar estos dispositivos se encuentran en el apéndice.

En la figura 3.3 se muestra un *sumador de señales*, figura 3.3b, y un *generador de funciones de cuatro canales*, figura 3.3a. Este último instrumento realmente es un excelente dispositivo y de muy bajo costo, los comerciales con dos canales tienen un costo aproximado de 63 mil pesos [54], y otro generador de cuatro salidas que se manipula vía software con un costo superior a los 95 mil pesos [55]; y para un gran conocimiento no es necesario un alto costo, para generar conocimiento no se requiere de grandes instrumentos, los grandes instrumentos son requeridos para grandes descubrimientos.

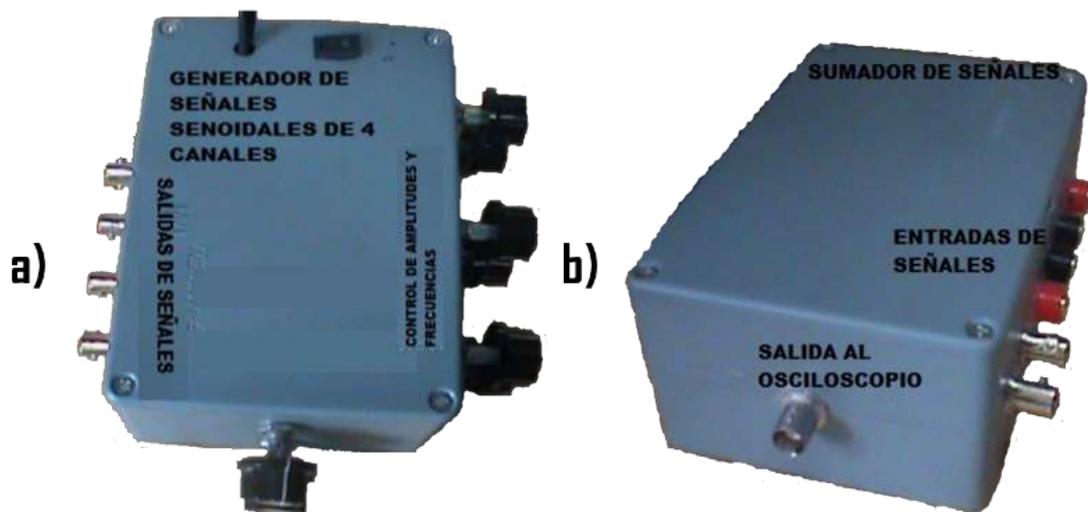


Figura 3.3. a) Generador de funciones de cuatro canales. b) Sumador de señales.

Cuando se tiene una señal sinusoidal, como en la figura 3.4a, su análisis en el dominio temporal no presenta problema alguno, y de ella se puede extraer directamente aquella información deseada. Pero ¿qué ocurre cuando tenemos una señal que es el resultado de la suma de varias señales? En la figura 3.4c se presenta el caso de una suma de dos señales sinusoidales. Desde aquí, ya es posible observar que la señal aparenta no ser una función sinusoidal bien definida y ya no es tan sencillo determinar las características más elementales.

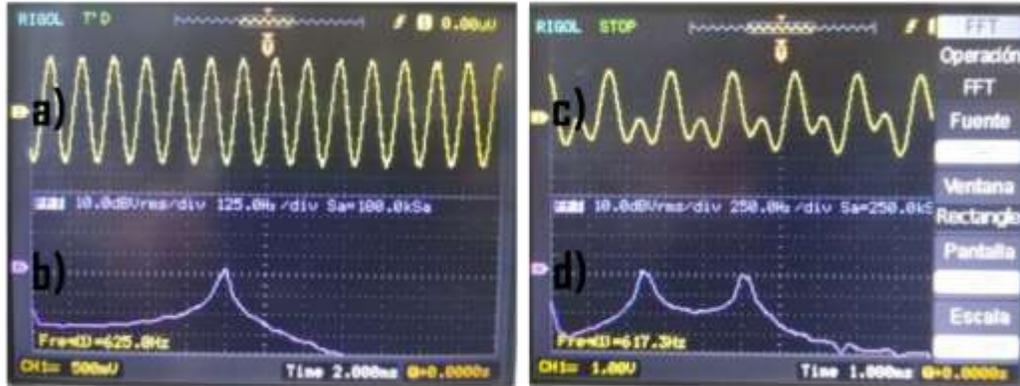


Figura 3.4. Señales observadas en la pantalla de un osciloscopio. a) Una señal sinusoidal en el dominio temporal, b) dominio frecuencial de una sola señal, c) suma de dos señales en el dominio temporal y d) dominio frecuencial de la suma de dos señales.

La situación es más complicada al agregar una tercera señal, figura 3.5e, en donde ya no es posible determinar alguna medición en concreto, y ni que hablar de la suma de cuatro señales que se muestra en la figura 3.5g, la cual podría confundir a cualquiera (incluso a un experto en la materia) de que es una señal “ruidosa” y descartarla para su estudio.

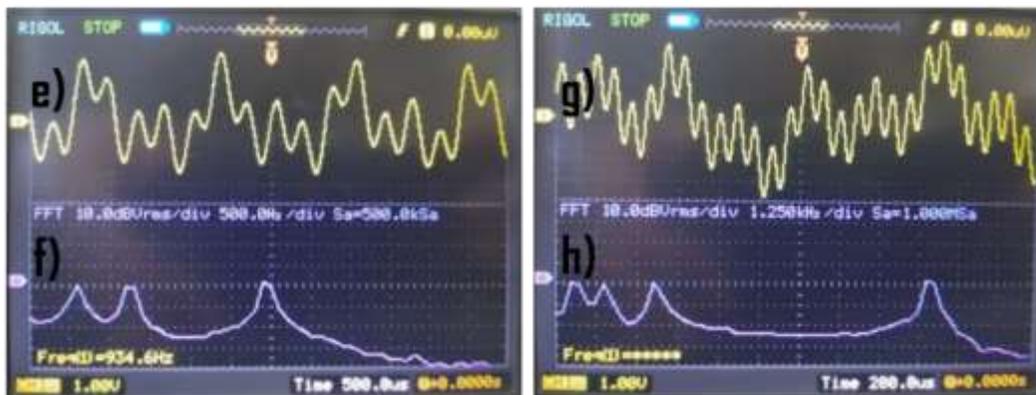


Figura 3.5. Señales observadas en la pantalla de un osciloscopio. e) Suma de tres señales en el dominio temporal, f) dominio frecuencial de tres señales, g) suma de cuatro señales en el dominio temporal y h) dominio frecuencial de la suma de cuatro señales.

Cuando ocurren estos casos en los que ya no es posible obtener alguna característica esencial de la señal, se hace uso de estudiar la señal en el dominio frecuencial, con la cual se puede determinar que las señales estudiadas están compuestas por varias componentes frecuenciales.

La práctica que se propone a los estudiantes con el uso del generador de funciones de cuatro canales y el sumador es que empiecen a analizar una sola señal en el osciloscopio, y vayan agregando señales a la primera, con la finalidad de observar los cambios que se presentan tanto en el dominio temporal como en el dominio frecuencial, haciendo uso de la función FFT del osciloscopio.

Se observa que, para la situación de una sola señal en el dominio temporal, figura 3.4a, encontramos un “pico”, figura 3.4b, que determinara la frecuencia de la señal a partir de su posición en el eje de las abscisas. Por cada señal sumada encontraremos más “picos” en el dominio frecuencial, es por eso que en la figura 3.4d se tienen dos “picos”; en la figura 3.5f existen tres “picos” y en la figura 3.5h son cuatro “picos”, y si sumáramos más señales, encontraríamos más “picos”, cada uno de ellos por cada señal sinusoidal existente. Ahora, podemos decir que no es una señal “fea”, en su lugar es una señal compuesta por varias frecuencias.

### ***3.4 Transformada de Fourier***

Hasta este momento se ha mencionado que es posible observar señales sinusoidales en dos dominios diferentes: Dominio temporal y dominio frecuencial. El dominio temporal es el más conocido y tratado en todos los niveles educativos, así mismo se han desarrollado una infinidad de instrumentos tanto para el control del tiempo como su medición. Es posible que por esta razón estemos más acostumbrados a entender y estudiar tiempos que frecuencias; aunque esto no justifica porque estudiar (incluso “entender” u “observar”) el concepto de frecuencia sea un concepto propio de estudios avanzados, probablemente solo sean los paradigmas de la enseñanza. En párrafos anteriores se analizaron señales sinusoidales, o periódicas, unas descritas por fenómenos oscilatorios y otras fueron proporcionadas por instrumentos construidos durante el desarrollo del presente trabajo. Los estudiantes de carreras de estudios superiores saben bien como obtener la frecuencia mediante el periodo de una señal sinusoidal, pero lejos están de saber cómo representar dicha señal en el dominio de las frecuencias. ¿Y para señales como las mostradas en las figuras anteriores? La mayoría de nuestros estudiantes están completamente incapacitados para analizar este tipo de señales experimentalmente en el dominio de las frecuencias.

La herramienta matemática que hace posible que una señal temporal pueda ser analizada en el dominio frecuencial es conocida como la *transformada de Fourier*. Esta herramienta permite disgregar las componentes con las que está constituida una determinada señal. Esta puede estar constituida por una sola señal, como lo muestra la figura 3.4b, o puede ser una señal compuesta, como lo muestran el resto de las imágenes de la figura 3.4 y la figura 3.5. Así mismo puede ser una señal más compleja, como la que se mostrará más adelante. Llámese una señal compleja a aquella donde no es posible distinguir las componentes frecuenciales que constituyen a este tipo de señales, por lo que solo se caracteriza por su *ancho de banda*. Es importante mencionar que en este trabajo también se desarrolló un instrumento para la enseñanza que permite introducir a los estudiantes a este importante concepto.

El desarrollo matemático de la transformada de Fourier es un concepto de gran importancia en nuestra vida, sin lugar a duda nadie podría negar que sin esta importante herramienta mucha de la tecnología no pudiera haber sido desarrollada, entre ellas los dispositivos de comunicaciones. La complejidad matemática introductoria a la transformada de Fourier ha generado mitos infundados, incluso en estudios superiores. Mediante el desarrollo del presente trabajo, queda de manifiesto que una innovadora introducción a la transformada de Fourier podría ser el uso de fenómenos oscilatorios. Que si bien la transformada de Fourier es una herramienta matemática que requiere estudios avanzados, de ninguna manera implica que la interpretación gráfica requiera de entender dicha matemática. En otras palabras, saber manejar un automóvil o una computadora no requiere entender el funcionamiento del motor o de circuitos electrónicos respectivamente. Entender una gráfica en el dominio de las frecuencias no requiere en lo mínimo una pizca de matemáticas para su comprensión; tan solo una breve explicación de los que saben interpretar y entienden la transformada de Fourier.

Durante el desarrollo de la presente tesis, se ha estado buscando la forma de interpretar y entender la aplicación de la transformada de Fourier en señales temporales, es decir, cómo es que esta herramienta hace posible que una señal vista en el dominio temporal pueda ser visualizada en el dominio de las frecuencias. Con la ayuda de asesoramientos es que se expone a continuación, brevemente, la matemática de la **transformada discreta de Fourier** aplicada a una señal con dos componentes frecuenciales.

La matemática empleada en los salones de clases de estudios superiores es desarrollada para señales continuas  $x(t)$ , con ciertas características matemáticas, integrable, continua, periódica, etc. La ecuación 3.3 es la interpretación matemática de la transformada de Fourier, con la cual es posible analizar una señal periódica continua en el dominio frecuencial.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.3)$$

Donde  $x(t)$  es una señal continua en el Dominio del Tiempo. En la escuela de ingeniería, llamamos a la Ecuación 3.3 la transformación de "cuatro años" porque fue necesario alrededor de cuatro años hacer frente a un problema de tarea.

...Se podría argumentar que la Transformada de Fourier es el mecanismo matemático más dominante y difundido disponible para el análisis de los sistemas físicos. Lord Kelvin expresa mejor este sentimiento: "El teorema de Fourier no es sólo uno de los resultados más hermosos del análisis moderno,

sino que puede decirse que proporciona un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones recónditas de la física moderna." Por cierto, la historia del trabajo original de Fourier en el análisis armónico, relacionado con el problema de la conducción de calor, es fascinante, y las referencias [56] y [57] son un buen punto de partida para aquellos interesados en el tema [43, pp. 49-50].

La ecuación 3.3, es la representación matemática para el análisis de funciones continuas, muy empleada para analizar funciones matemáticas en el salón de clases, aunque pocas veces estos análisis se realizan de forma experimental.

En realidad, la matemática de la transformada de Fourier aplicada a funciones continuas es una herramienta empleada con fines de investigación, pero no es funcional (o no se aplica), para el desarrollo de instrumentos de adquisición de señales. Para tal fin se analiza la transformada discreta de Fourier empleada en los instrumentos digitales. Entre los instrumentos empleados para analizar señales en el dominio frecuencial están el osciloscopio y el analizador de espectros. Es el osciloscopio el más común y económico para analizar señales en el dominio frecuencial. Estos instrumentos hacen posible esta transformación empleando un algoritmo regido por la ecuación 3.4. Con el advenimiento de la computadora digital, los esfuerzos de los primeros pioneros del procesamiento digital condujeron al desarrollo de la DFT (Transformada Discreta de Fourier) definida como la secuencia de dominio de frecuencia discreta  $X(m)$ , donde

*Ecuación DFT (Forma exponencial)*

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (3.4)$$

Para nuestro análisis de la Ecuación 3.4,  $x(n)$  es una secuencia discreta de valores muestreados en el Dominio del Tiempo de la variable continua  $x(t)$ . La "e" en la Ecuación 3.4 es, por supuesto, la base de los logaritmos naturales ...

$X(m)$  = la componente de salida mth de la DFT, es decir,  $X(0), X(1), X(2), X(3), etc.$

$m$  = indice de la salida DFT en el dominio de la frecuencia,

$m = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$

$x(n)$  = secuencia de las muestras de entrada,  $x(0), x(1), x(2), x(3),$

*etc.,*

*n = indice del dominio temporal de las muestras de entrada*

*n = 0, 1, 2, 3, ... , N - 1*

*j =  $\sqrt{-1}$  y*

*N = numero de muestras de la secuencia de entrada y el numero de puntos de frecuencia en la salida DFT. [43, pp. 50-51]*

### **3.5 Ejemplo de la Transformada Discreta de Fourier (DFT)**

La transformación de una señal temporal a una frecuencial realmente es sencilla, pero eso no quiere decir que lo sea también en términos generales. Pero es un menester que los estudiantes de nivel medio superior, e indudablemente los de nivel superior, conozcan y analicen experimentalmente señales en dos dominios diferentes. Esto les permitirá, llegado el momento, hacerlo en el futuro de una forma inercial y natural.

Comenzaremos con una señal cuya expresión matemática tiene la forma de la ecuación 3.5.

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi * 1000 * t) + 0.5 \sin(2\pi * 2000 * t + 3\pi/4). \quad (3.5)$$

La gráfica de la ecuación 3.5, no es posible realizarla de forma inmediata como la simulación de una simple función. Para graficar la ecuación 3.5 se requiere de un conocimiento extra de otras herramientas matemáticas; tales como el teorema de Nyquist. El *teorema de Nyquist* es considerado el teorema más importante en la adquisición de señales; este teorema establece la condición necesaria y suficiente para la reconstrucción de una señal en el dominio temporal de una señal adquirida. Dicho teorema menciona que la velocidad de muestreo (mejor conocida como frecuencia de muestreo) debe ser mayor a dos veces la frecuencia más alta de la señal que se quiere reconstruir, es decir

$$f_s \geq 2f_{max} \quad (3.6)$$

Tomando en cuenta la ecuación 3.5, la cual contiene dos señales con frecuencias  $f_1 = 1000 \text{ Hz}$  y  $f_2 = 2000 \text{ Hz}$  (esta última con un desfasamiento de  $\frac{3\pi}{4}$ ) y considerando el teorema de Nyquist se elige, arbitrariamente, una frecuencia de muestreo  $f_s = 8000 \text{ Hz}$ , lo que implica que la señal en el dominio temporal tendrá un tiempo de muestreo  $t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{8000} = 125 \mu\text{s}$ . Es decir cada  $125 \mu\text{s}$  se adquiere una muestra de la señal analógica como la descrita en la ecuación 3.5. Con estos datos es posible reescribir la ecuación 3.5 como

$$x(n) = x_{in}(nt_s) = \sin(2\pi * 1000 * nt_s) + 0.5 \sin(2\pi * 2000 * nt_s + 3\pi/4). \quad (3.7)$$

... $x(n)$  = secuencia de las muestras de entrada,  $x(0), x(1), x(2), x(3), \text{etc.}$ ,

$n$  = indice en el dominio temporal de las muestras de entrada

$n = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1 \dots$

Donde

... $N$  = Es el numero de muestras de la secuencia de entrada y el numero de puntos de frecuencia en la salida DFT. [43]

Por lo analizado en el apartado 3.3, se espera que en el dominio frecuencial sea posible distinguir dos picos, correspondientes a las componentes involucradas en la señal de la ecuación 3.7. Para realizar cálculos entendibles y sencillos, es que consideraremos trabajar con 8 muestras, es decir  $N = 8$ . Por lo que las variables involucradas en este ejercicio tienen una secuencia  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ . Esto implica que se deben evaluar los valores de la secuencia de entrada  $x(n)$ , que son:  $x(0), x(1), x(2), x(3), \dots, x(7)$ .

Sustituyendo los valores de  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  y  $7$  y  $t_s = 125 \mu s$ , se obtienen los siguientes valores de la ecuación 3.7.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} n = 0 & & n = 0 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ x(0) & = \sin(2\pi * 1000 * 0 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 0 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \end{array} \\ & = \sin(0) + 0.5 \sin\left(0 + \frac{3\pi}{4}\right) = 0 + 0.5 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.5 * 0.7071 = 0.3535 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} n = 1 & & n = 1 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ x(1) & = \sin(2\pi * 1000 * 1 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 1 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \end{array} \\ & = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0.7071 + 0.5(-0.7071) \\ & = 0.7071 - 0.3535 = 0.3535 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} n = 2 & & n = 2 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ x(2) & = \sin(2\pi * 1000 * 2 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 2 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \end{array} \\ & = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0.5 \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = 1 + 0.5 \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 + 0.5(-0.7071) = 1 - 0.3535 = 0.6464 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} n = 3 \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 3 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 3 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \\
x(3) &= \sin(2\pi * 1000 * 3 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 3 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{6\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = 0.7071 + 0.5 \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 0.7071 + 0.5(0.7071) \\
&= 0.7071 + 0.3535 = 1.0606
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} n = 4 \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 4 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 4 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \\
x(4) &= \sin(2\pi * 1000 * 4 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 4 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \sin(\pi) + 0.5 \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = 0 + 0.5 \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 0.5(0.7071) = 0.3535
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} n = 5 \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 5 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 5 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \\
x(5) &= \sin(2\pi * 1000 * 5 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 5 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{10\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -0.7071 + 0.5 \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -0.7071 + 0.5(-0.7071) \\
&= -0.7071 - 0.3535 = -1.0606
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} n = 6 \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 6 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 6 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \\
x(6) &= \sin(2\pi * 1000 * 6 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 6 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{12\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -1 + 0.5 \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -1 + 0.5(-0.7071) = -1 - 0.3535 \\
&= -1.3535
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} n = 7 \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 7 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} n = 7 \quad t_s = 125 \mu s \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \\
x(7) &= \sin(2\pi * 1000 * 7 * 125 \times 10^{-6}) + 0.5 \sin\left((2\pi * 2000 * 7 * 125 \times 10^{-6}) + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{14\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -0.7071 + 0.5 \sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) = -0.7071 + 0.5(0.7071) \\
&= -0.7071 + 0.3535 = -0.3535
\end{aligned}$$

Resumiendo, se presentan los valores de  $x(0), x(1), x(2), x(3) \dots x(7)$  en la tabla 3.1.

Tabla 3.1. Resultados de la secuencia de entrada  $x(n)$ .

$n$	$x(n)$	Resultados
0	$x(0)$	0.3535
1	$x(1)$	0.3535
2	$x(2)$	0.6464
3	$x(3)$	1.0606
4	$x(4)$	0.3535
5	$x(5)$	-1.0606
6	$x(6)$	-1.3535
7	$x(7)$	-0.3535

La representación gráfica de las operaciones obtenidas de  $x(n)$  se muestran en la figura 3.6 en color negro, las otras gráficas representan las señales individuales involucradas en la ecuación 3.5. El color verde corresponde a la frecuencia de 1 kHz y la de color azul a la señal de 2 kHz, mientras que el resultado de la suma de ambas señales corresponde a la gráfica de color negro.

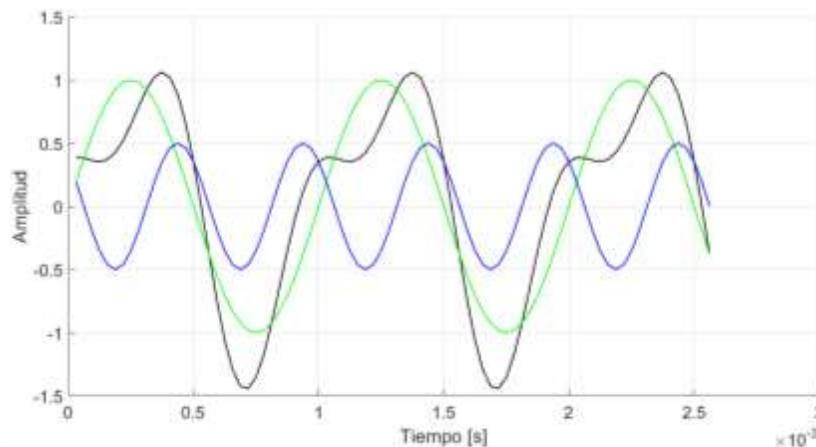


Figura 3.6. Representación gráfica de la Ecuación 3.7.

Antes de continuar con este ejercicio es necesario detenerse un instante. La simulación de la ecuación 3.7 dista enormemente de una función continua como la mostrada en la ecuación 3.8.

$$Y(x) = \sin(x) \quad (3.8)$$

La gráfica de dicha ecuación es didáctica, y en lo general no permite información clara de una señal real, como las mostradas en el presente trabajo. La ecuación 3.8 se graficó en un intervalo de  $-2\pi$  a  $2\pi$ , y su representación matemática es la mostrada en la figura 3.7.

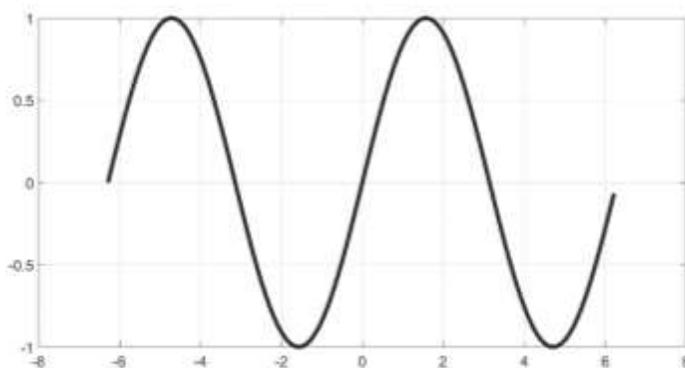


Figura 3.7. Gráfica de una señal sinusoidal con fines demostrativos.

En la simulación de dicha figura no fue necesario ninguna consideración más que muestras en un determinado intervalo. Por lo que difícilmente podría hablarse de su contenido frecuencial, y solo podría comentarse sobre su forma sinusoidal y su posición en fracciones de  $\pi$ .

La finalidad del ejercicio anterior es diferenciar la simulación de señales con fines didácticos o con fines de investigación. La figura 3.7 es generalmente empleada con fines didácticos más que con fines de investigación (como lo es la ecuación 3.7), para la cual, como se dijo anteriormente, es necesario el conocimiento previo sobre la adquisición de señales.

Para realizar la transformación del dominio temporal al frecuencial es necesario recordar las variables involucradas en la transformada discreta de Fourier, ecuación 3.4, que a continuación la volvemos a escribir.

$$X(m) = \sum_{n=1}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (3.4)$$

Los parámetros que nos gustaría resaltar de la ecuación 3.4 son dos:  $X(m)$ , la cual indica el valor de la componente correspondiente de la transformación  $m$ -ésima, al aplicar la transformada discreta de Fourier a una señal en el dominio temporal  $x(n)$ , este valor se encuentra en el eje de las ordenadas; y  $m$  es el índice de salida de dicha transformada en el dominio de las frecuencias, para  $N = 8$  se tiene  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, 8 - 1$ . Con ello las salidas serán:  $X(0), X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7)$ , las cuales son posibles representar en la figura 3.8.

“ $X(m)$  = la componente de salida  $m$ th de la DFT, es decir,  $X(0), X(1), X(2), X(3), etc.$

$m$  = indice de la salida DFT en el dominio de la frecuencia,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1...$ ” [43].

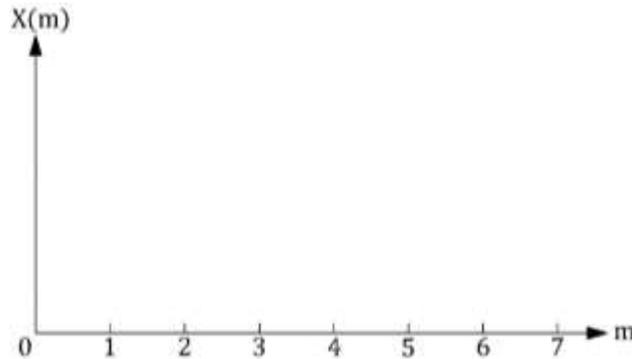


Figura 3.8. Plano cartesiano que representa los índices de salida de la DFT.

Cuando se ha elegido el número de muestras  $N$  con las que se va a graficar la señal temporal, ecuación 3.7, con este mismo número de muestras es posible calcular la distribución de frecuencias en el eje de las abscisas para graficar la ecuación 3.4, calculando  $\Delta f$  mediante la ecuación 3.9. Lo que la figura 3.8 se puede redibujar como se muestra en la figura 3.9.

$$\Delta f(m) = \frac{mf_s}{N}. \quad (3.9)$$

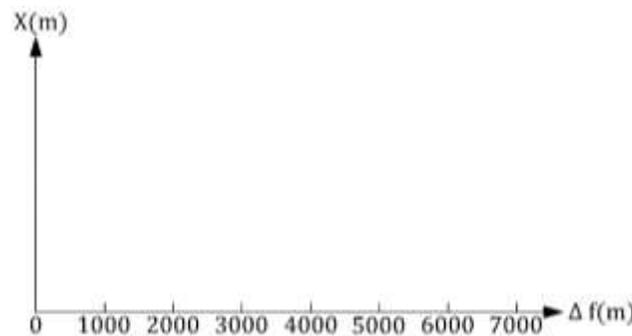


Figura 3.9. Plano cartesiano donde el eje de las abscisas representa la distribución de frecuencias.

Con todo lo dicho anteriormente y considerando los valores de la tabla 3.1, los cuales se sustituyen en la ecuación 3.4 podemos representar la señal temporal  $x(n)$  en el dominio de las frecuencias  $X(m)$ . Aplicando la transformada discreta de Fourier se obtienen los valores de  $X(m)$ , para  $N = 8$ , de las componentes  $m$ -ésima de salida de la DFT, es decir, se deben realizar las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
X(1) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right). \\
X(2) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n * 2}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n * 2}{8}\right). \\
X(3) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n * 3}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n * 3}{8}\right). \\
X(4) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n * 4}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n * 4}{8}\right). \\
X(5) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n * 5}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n * 5}{8}\right). \\
X(6) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n * 6}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n * 6}{8}\right). \\
X(7) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cos\left(\frac{2\pi n * 7}{8}\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi n * 7}{8}\right).
\end{aligned}$$

Como ejemplo se resolverá la sumatoria, cuyo valor de  $m$  es igual a dos.

$$\begin{aligned}
X(2) &= \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\frac{2\pi n * 2}{8}} = x(0) e^{-j\frac{2\pi * 0 * 2}{8}} + x(1) e^{-j\frac{2\pi * 1 * 2}{8}} + x(2) e^{-j\frac{2\pi * 2 * 2}{8}} \\
&+ x(3) e^{-j\frac{2\pi * 3 * 2}{8}} + x(4) e^{-j\frac{2\pi * 4 * 2}{8}} + x(5) e^{-j\frac{2\pi * 5 * 2}{8}} + x(6) e^{-j\frac{2\pi * 6 * 2}{8}} + x(7) e^{-j\frac{2\pi * 7 * 2}{8}} \\
X(2) &= \boxed{0.3535} e^0 + 0.3535 e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0.6464 e^{-j\pi} + 1.0606 e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 0.3535 e^{-j2\pi} \\
&- 1.0606 e^{-j\frac{5\pi}{2}} - 1.3535 e^{-j3\pi} - 0.3535 e^{-j\frac{7\pi}{2}} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Como se puede observar, la operación se extiende debido a que  $n$  toma todos los valores desde  $n = 0$  hasta  $n = 7$ .

Por otro lado, con un conocimiento matemático previo pero sencillo, para estudiantes de estudios superiores se empleará la notación de Euler [58].

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x \quad (3.11)$$

Recordando un poco la trigonometría para identificar los posibles valores que pueden adquirir las funciones trigonométricas, seno y coseno, nos apoyamos de las figuras 3.10 y 3.11, para resolver el primer término encerrado en el recuadro rojo de la ecuación 3.10, aplicando la ecuación 3.11. Obteniendo el siguiente resultado

$$0.3535 e^0 = 0.3535[\cos(0) - j * \text{sen}(0)] = 0.3535[1 - 0] = 0.3535$$

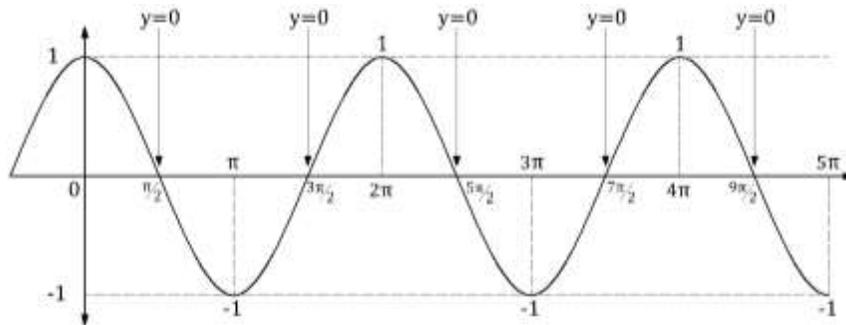


Figura 3.10. Gráfica de la función coseno.

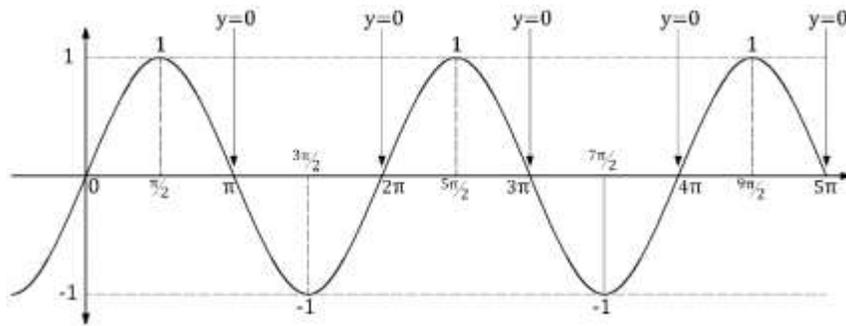


Figura 3.11. Gráfica de la función seno.

Las exponentes involucradas en la exponencial  $e$  (ecuación 3.10) y usando la ecuación 3.11, contienen fácilmente los valores de  $\pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots, 7\pi/2$ ; auxiliándonos de las figuras 3.10 y 3.11. Apoyándonos de dichas figuras es posible observar para que valores, las funciones seno y coseno se hacen 0, 1 o  $-1$ . Es decir, observando directamente la gráfica de la figura 3.11 se observa que el  $\text{sen}(x) = 0$  para valores de  $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ ; el  $\text{sen}(x) = 1$  para  $x = \pi/2, 5\pi/2$ ; y finalmente el  $\text{sen}(x) = -1$  se obtiene para valores de  $x = 3\pi/2, 7\pi/2$ . Este mismo razonamiento se aplica para la gráfica del coseno, es decir, observar los valores para los cuales el  $\cos(x) = 0, 1$  o  $-1$ . Tomando esto en cuenta se tiene que la ecuación 3.10

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(2) = & 0.3535 e^0 + 0.3535 e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0.6464 e^{-j\pi} + 1.0606 e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 0.3535 e^{-j2\pi} \\ & - 1.0606 e^{-j\frac{5\pi}{2}} - 1.3535 e^{-j3\pi} - 0.3535 e^{-j\frac{7\pi}{2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tiene como resultado

$$\mathbf{X}(2) = 0.3535 - j0.3535 - 0.6464 + j1.0606 + 0.3535 + j1.0606 + 1.3535 - j0.3535$$

$$\mathbf{X}(2) = 1.4141 + j1.4142 \quad (3.12)$$

El valor que se está buscando representar en el dominio de las frecuencias es un valor real, por lo que se trabajara en el plano cartesiano y, para lo cual, es necesario encontrar la magnitud de  $\mathbf{X}(2)$ , la cual se obtiene con [43]

$$\mathbf{X}_{mag}(m) = |\mathbf{X}(m)| = \sqrt{\mathbf{X}_{real}(m)^2 + \mathbf{X}_{imag}(m)^2} \quad (3.13)$$

Sustituyendo el resultado de la forma rectangular de la ecuación 3.12 en la ecuación 3.13 queda

$$|\mathbf{X}(2)| = \sqrt{1.4141^2 + 1.4142^2} = \sqrt{3.9996} = 1.9999 \approx 2 \quad (3.14)$$

Realizando estas mismas operaciones para cada uno de los valores de  $\mathbf{X}(m)$ , se obtiene la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Magnitudes de las componentes de salida  $\mathbf{X}(m)$ .

$m$	$\mathbf{X}(m)$	Magnitud
0	$\mathbf{X}(0)$	0
1	$\mathbf{X}(1)$	4
2	$\mathbf{X}(2)$	2
3	$\mathbf{X}(3)$	0
4	$\mathbf{X}(4)$	0
5	$\mathbf{X}(5)$	0
6	$\mathbf{X}(6)$	2
7	$\mathbf{X}(7)$	4

La gráfica de la transformación del dominio temporal al dominio  $X(m)$ . Siendo  $m$  el índice de salida de la DFT, representado en el dominio de las frecuencias, es graficada en la figura 3.12.

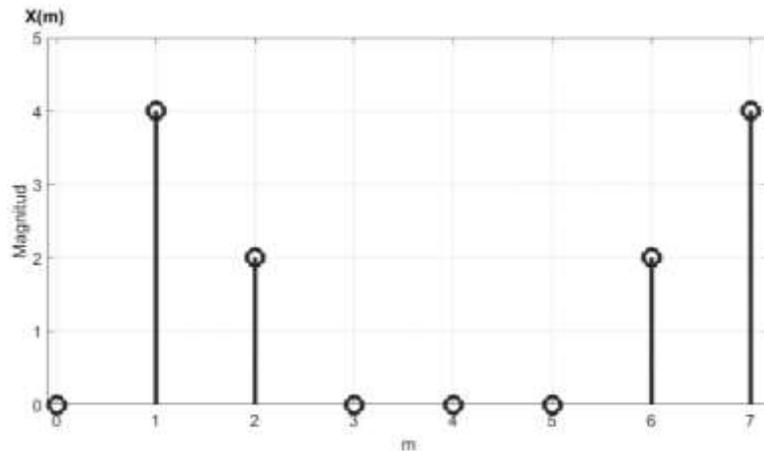


Figura 3.12. Grafica de las magnitudes en el dominio  $m$ .

Pero una clara representación para identificar las componentes frecuenciales involucradas en la señal temporal, se emplea la ecuación 3.9.

$$\Delta f(m) = \frac{mf_s}{N}. \quad (3.9)$$

Por lo que se obtiene la gráfica en el dominio de las frecuencias de la señal temporal de la ecuación 3.7, representada en la figura 3.13.

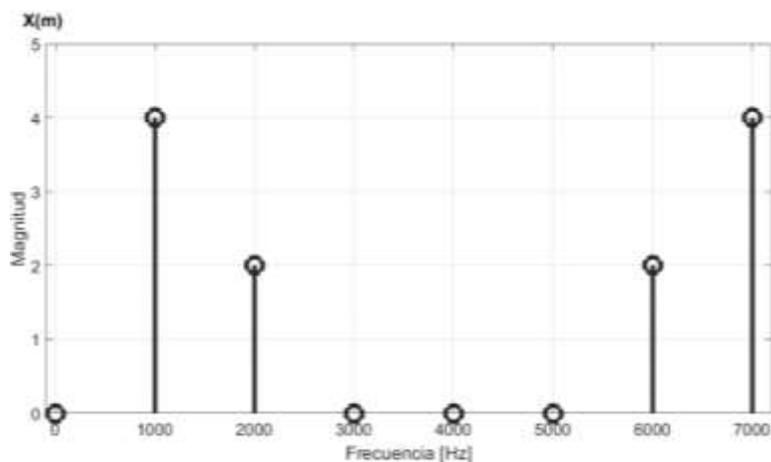


Figura 3.13. Representación de una señal en el dominio de las frecuencias.

Se han obtenido los valores numéricos y se han representados en la figura 3.13 (transformada en el dominio frecuencial), los cuales se obtuvieron desarrollando la ecuación 3.4, que permite transformar una señal temporal y visualizarla en el dominio frecuencial.

### 3.6 Ancho de banda

Los ejemplos anteriores no son más que una introducción al entendimiento de la transformada de Fourier, pero existen señales en las cuales no se puede distinguir el número de señales que la componen. Tal es el caso de una señal compuesta de un continuo de señales, este tipo de señales es conocida como barrido de señales, con este tipo de señales es posible introducir a los alumnos a un concepto relevante al estudio de las comunicaciones en donde el *ancho de banda* es un lenguaje común. Aunque su concepto en lo general es muy ambiguo porque no existen instrumentos en la docencia que permitan introducir a los alumnos a este importante concepto y sus invaluable aplicaciones.

Algunas definiciones encontradas en la bibliografía sobre el ancho de banda se presentan a continuación:

El ancho de banda es la longitud, medida en hercios (Hz), de la extensión de frecuencias en la que se concentra la mayor potencia de la señal. Se puede calcular a partir de una señal temporal mediante el análisis de Fourier. Las frecuencias que se encuentran entre esos límites se denominan también frecuencias efectivas [59].

El concepto de ancho de banda es uno de los más importantes y actuales en el campo de las telecomunicaciones. Denominaremos ancho de banda de una señal a lo siguiente

Intervalo de frecuencias para las cuales la distorsión lineal y la atenuación permanecen bajo los límites determinados y constantes. Los valores que se toman como valores de referencia pueden ser arbitrarios.

$$\Delta f = f_2 - f_1 \quad (3.15)$$

Si bien los límites pueden ser arbitrarios, en la generalidad de los casos, se definen para una atenuación de 3 dB con respecto al valor que tiene la señal a la frecuencia de referencia ...

Los límites de  $f_1$  y  $f_2$  se denominan límites inferior y superior del ancho de banda de una señal.

Para los mismos la atenuación de la señal es de 3 dB respecto al valor  $f_0$  de referencia, que se encuentra a 0 dB [60, p. 91].

El oído humano promedio es capaz de escuchar el intervalo de frecuencias que va de los 20 Hz a los 20 kHz. Si utilizamos esto para ejemplificar mejor el concepto de ancho de banda, los valores quedarían como:  $f_1 = 20 \text{ Hz}$  y  $f_2 = 20000 \text{ Hz}$ . Con ellos obtenemos un ancho de banda de

$$\Delta f = 20000 - 20 = 19980 \text{ Hz} \quad (3.16)$$

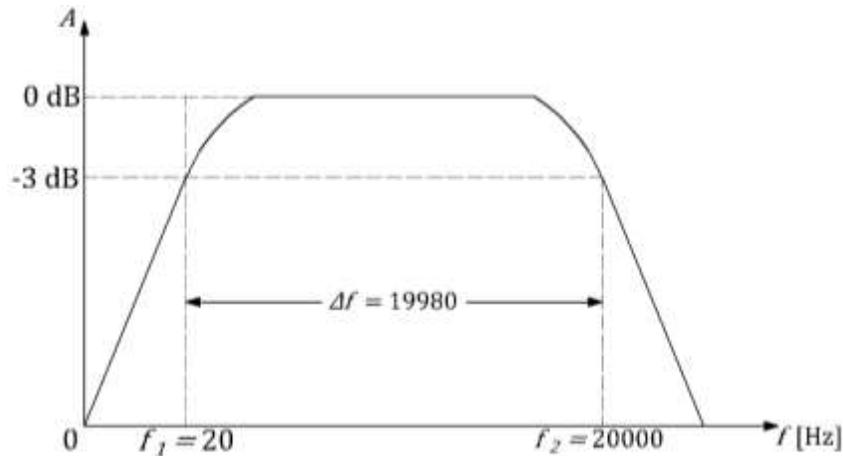


Figura 3.14. Gráfica del ejemplo para el ancho de banda del oído humano promedio [59].

Para lo dicho en los anteriores párrafos, es que se decidió desarrollar un instrumento que proporcionara un barrido de señales. El generador de barrido proporciona una señal que va cambiando la frecuencia conforme pasa el tiempo, manteniendo su amplitud constante, figura 3.15. Al analizar esta señal con la ayuda de la herramienta de FFT se observa un fenómeno muy usado, pero a su vez, poco entendido por la mayoría: El *ancho de banda*, figura 3.16.

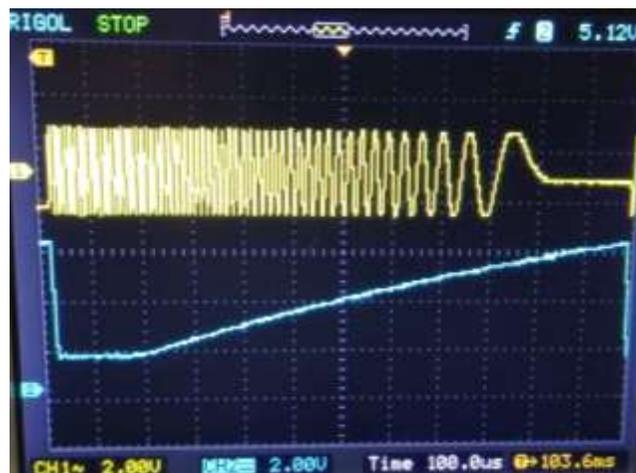


Figura 3.15. En la parte superior se muestra el barrido y en la parte inferior la señal rampa que controla el cambio de frecuencias del barrido.

Si intentáramos obtener información del barrido en el dominio temporal, podríamos obtener la amplitud de la señal (ya que se mantiene constante), pero no sería posible obtener el rango de frecuencias directamente. Entonces, ¿qué ocurre si observamos el barrido en el dominio frecuencial? En la figura 3.16 se muestra la respuesta a esta pregunta. El barrido se caracteriza porque no es posible observar una componente frecuencial en concreto, en su lugar, tenemos un conjunto de muchas frecuencias, las cuales conforman un ancho de banda.

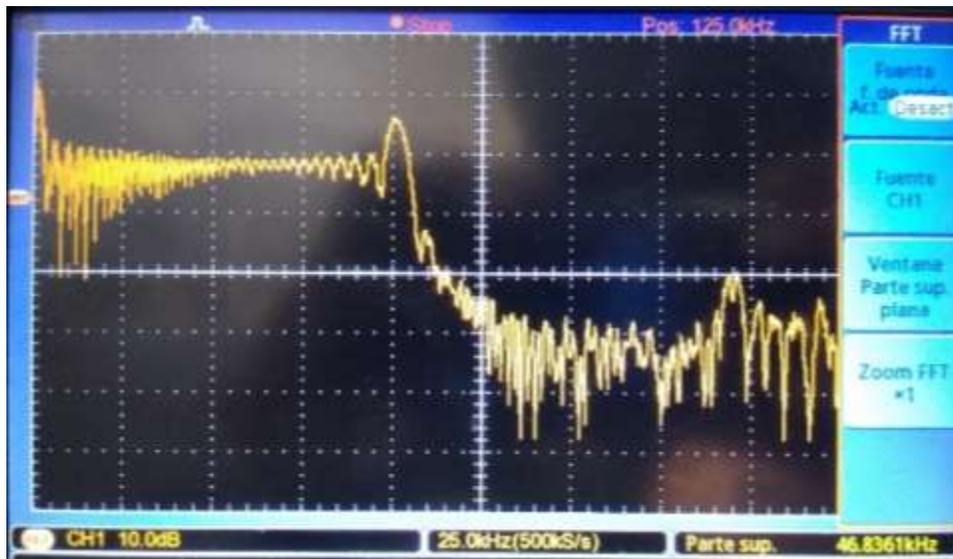


Figura 3.16. Ancho de banda visto con ayuda de la FFT.

### 3.7 Otros dispositivos

Cuando las señales interactúan con medios tales como sólidos, líquidos o gases pueden tener comportamientos distintos según la frecuencia de la señal, pero también pueden tener variaciones en otro parámetro conocido como fase. La *fase* es un parámetro que nos indica un determinado retardo de la señal cuando esta viaja en uno de los medios antes mencionados. Este concepto, así como el de ancho de banda, en ocasiones no es posible observarlo en los laboratorios de enseñanza, ya que son conceptos muy teóricos y confusos, debido a que son aceptados por dogma que por convencimiento.

En el presente trabajo también se desarrollaron dispositivos que permitieran a la enseñanza de nivel medio superior y superior al estudio y análisis de fases entre señales. Este concepto es de importancia debido a que el desfaseamiento entre señales ocasiona resultados tales como interferencia constructiva o destructiva, como lo veremos a continuación.

### 3.8 Desfase

Durante el presente trabajo también se desarrolló un instrumento que permite observar el fenómeno de interferencia constructiva y destructiva al sumar dos señales de la misma frecuencia, así como también permite apreciar las diferentes *figuras de Lissajous* al cambiar la fase de una de las señales.

El dispositivo consta de un generador que manda una señal con frecuencia y amplitud fijas, esta señal es la salida original. La siguiente etapa consta de un amplificador operacional (el circuito se encuentra en el apéndice), el cual se encarga de manipular la fase de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  de la salida original. Estas dos salidas son entregadas al osciloscopio, en donde se sumarán con la función matemática correspondiente en el osciloscopio y se pueden ver los fenómenos de interferencia, como en la figura 3.17.

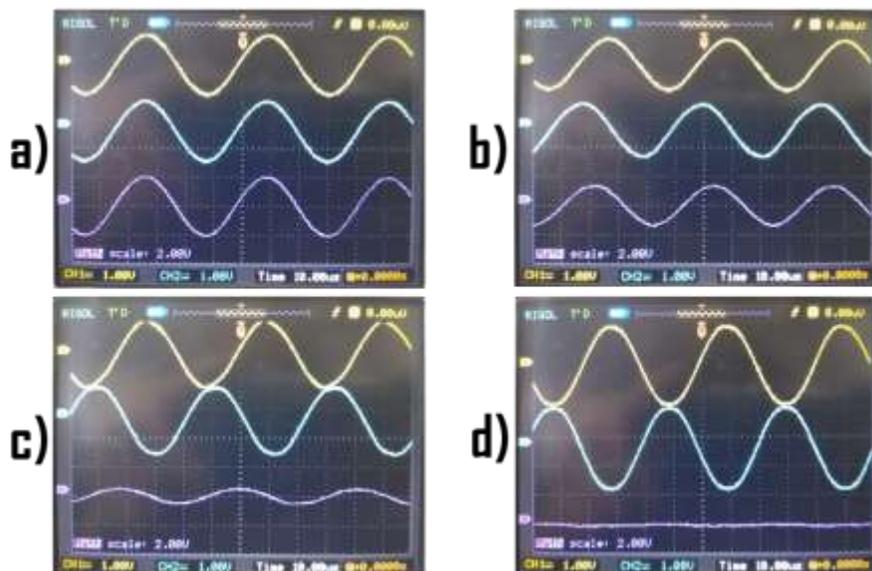


Figura 3.17. Suma de dos señales con fases distintas, provocando el fenómeno de: a) Interferencia constructiva completa, b) y c) interferencia intermedia, d) interferencia destructiva completa.

Otra manera de observar el desfase de señales es mediante la gráfica de funciones en el plano cartesiano, esta forma de analizar dichas señales es debido al matemático francés Jules Antoine Lissajous. Los osciloscopios permiten graficar dos señales en un mismo plano cartesiano empleando la función X-Y.

A fin de trazar las trayectorias que describen las fuentes sonoras, Chowning recurre a las denominadas figuras de Lissajous. Estas curvas fueron creadas en 1815 por Nathaniel Bowditch (1773-1838) – capitán de navío y matemático, recordado como el fundador de la navegación moderna – quien las obtiene a partir de la experimentación con péndulos sostenidos por dos

puntos fijos. Posteriormente, en 1865, el matemático francés Jules Antoine Lissajous (1822-1880) las estudia empleando un haz de luz proyectado sobre dos espejos, unidos a diapasones que oscilaban perpendicularmente.

Las figuras se obtienen a partir de la trayectoria que describe un punto, cuyas coordenadas rectangulares están dadas por dos movimientos oscilatorios armónicos, perpendiculares entre sí. Las curvas sobre un plano, en dos dimensiones, se obtienen a través de la siguiente ecuación paramétrica

$$x(t) = a \cos(2\pi f_x t + \delta_x) \quad (3.17)$$

$$y(t) = b \cos(2\pi f_y t + \delta_y) \quad (3.18)$$

en la cual  $a$  y  $b$  son las amplitudes de las sinusoides que determinan las coordenadas  $x$  e  $y$ ,  $f_x$  y  $f_y$ , son sus frecuencias,  $\delta_x$  y  $\delta_y$  son sus fases iniciales, y  $t$  es el tiempo [61, p. 32].

Las figuras de Lissajous (o curvas de Lissajous) se obtienen al aplicar una señal en el eje de las ordenadas y otra señal en el eje de las abscisas, figura 3.18. La figura resultante dependerá de la relación de frecuencias entre ambas señales y su fase inicial, figura 3.20.

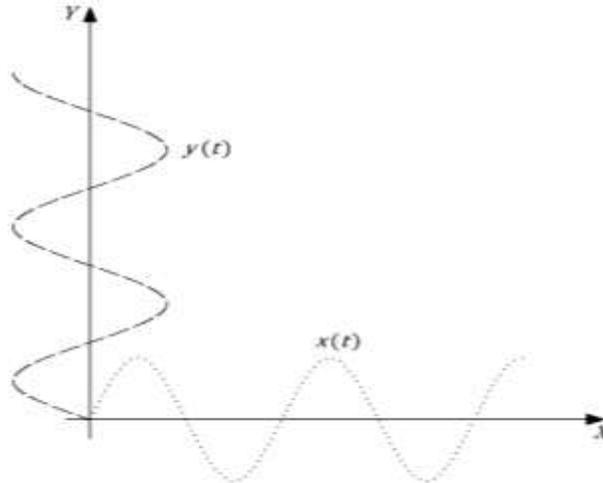


Figura 3.18. Representación X-Y de la gráfica de Lissajous.

Usando la figura 3.18 como referencia y graficando las señales  $x(t) = \sin(2\pi * 1000 * t + \frac{\pi}{2})$  e  $y(t) = \sin(2\pi * 1000 * t)$  en el plano, la figura de Lissajous producto del desfase de  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ) resulta en un círculo, como se muestra en la figura 3.19. Esta curva está presente en la figura 3.20 [62, p. 3702-2], donde se muestran las diferentes figuras de Lissajous que son posible formar.

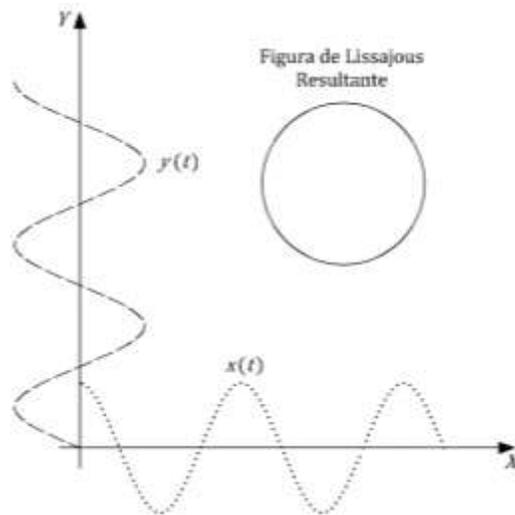


Figura 3.19. Circulo resultante como figura de Lissajous a causa de dos señales con misma frecuencia desfasadas  $\frac{\pi}{2}$ .

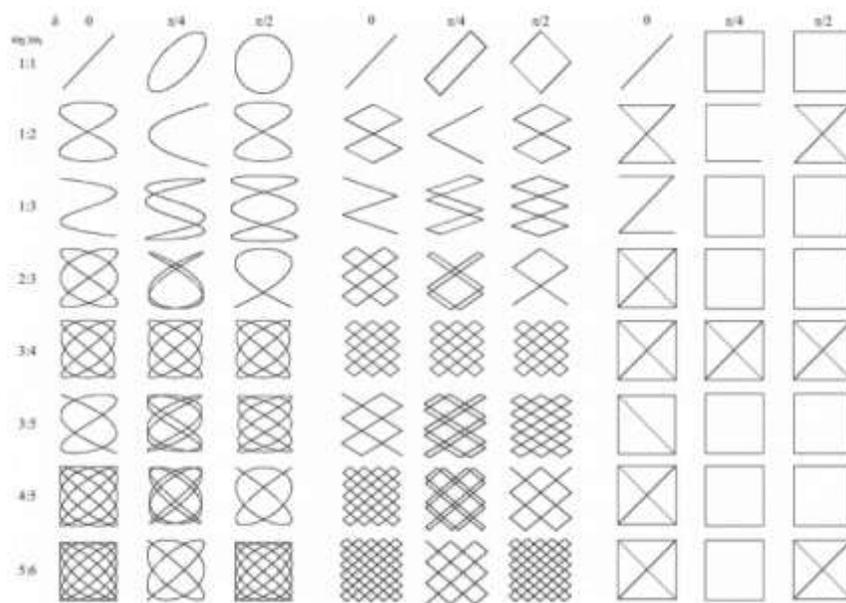


Figura 3.20. Diferentes figuras de Lissajous, dependiendo de la relación de frecuencias y el desfase entre ellas. También se incluyen para señales triangulares y cuadradas.

El dispositivo diseñado se conecta directamente en los canales del osciloscopio, figura 3.21, para obtener de forma experimental las gráficas mostradas en la figura 3.20. Las figuras de Lissajous se obtienen al graficar las amplitudes de ambas señales en el plano X-Y, una en el eje de las abscisas y la otra señal en el eje de las ordenadas, como se mostró en la figura 3.18 (omitiendo por completo el tiempo). En la figura 3.22 se presentan tres figuras de Lissajous para señales con misma frecuencia, pero las figuras que se pueden lograr son una variedad dependiendo del desfaseamiento entre señales, a saber, las que se muestran en la figura 3.20.

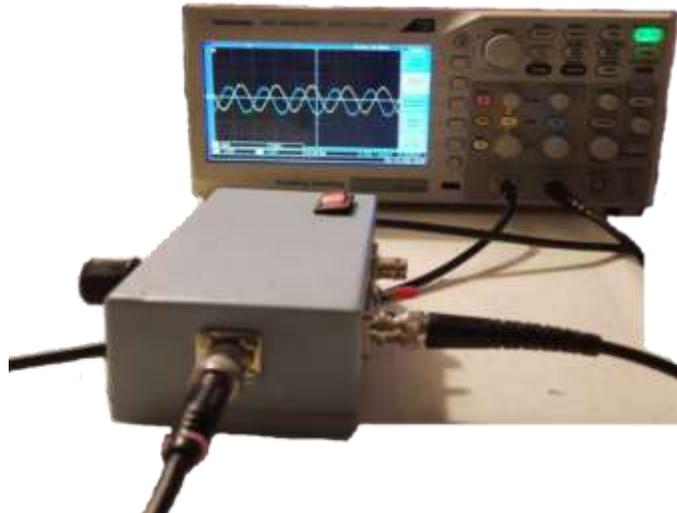


Figura 3.21. Conexión del instrumento construido en el presente trabajo.

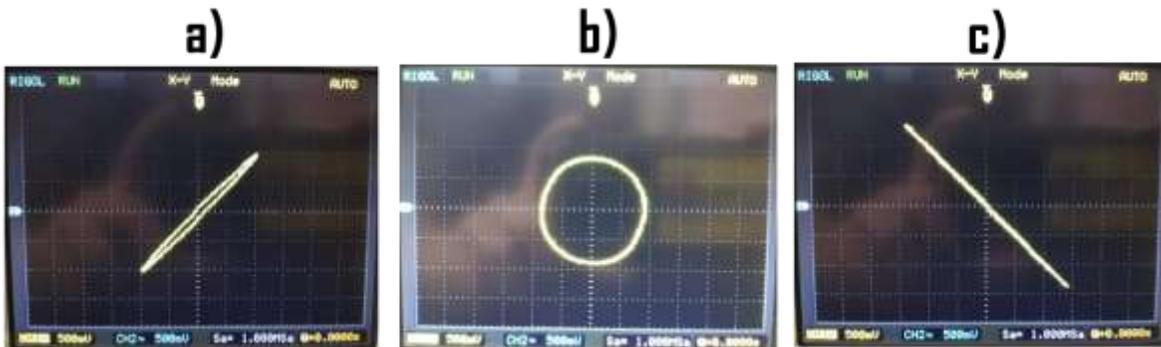


Figura 3.22. Figuras de Lissajous mostradas en la pantalla de un osciloscopio empleando el montaje de la figura 3.21. Se observa como resultado de dos señales de misma frecuencia y con distintas fases: a)  $5^\circ$ , b)  $90^\circ$  y c)  $180^\circ$ .

En este capítulo se presentó el análisis de fenómenos oscilatorios cuyo movimiento es posible estudiar y analizar, con la ayuda de un osciloscopio, en el dominio frecuencial y en el temporal; así mismo se mostraron algunos instrumentos y sistemas desarrollados en el presente trabajo con la finalidad de reforzar el estudio y análisis de señales sinusoidales. Estos sistemas, son una gran alternativa y de bajo costo, permiten introducir a los alumnos del nivel medio superior y superior a una de las más importantes herramientas del análisis de señales: La transformada de Fourier.

Otro de los parámetros involucrados en una función sinusoidal es la fase, parámetro que da información sobre el retardo o adelanto de una señal respecto a su origen. Para este fin se construyó un instrumento que permite desfazar una señal respecto a la original. Con estas señales es posible realizar la suma de estas y observar sus implicaciones, interferencia destructiva y constructiva, además es posible introducir a los alumnos a observar las figuras de Lissajous.

## Capítulo 4

### 4.1 Introducción

Los movimientos realizados por el resorte, el péndulo y la cuerda; son estudiados experimentalmente (o teóricamente) en el nivel superior, en las carreras de Física, Ingeniería y a fines. Los paradigmas de la enseñanza enfocan el análisis y estudio de estos movimientos a la comprobación de las ecuaciones 1.2, 1.8 y 1.22, teniendo poco interés en la importancia que tiene que estos movimientos de vaivén puedan ser descritos por una función sinusoidal. La mayoría de la bibliografía revisada estudia y analiza estos movimientos para introducir a los estudiantes al análisis del fenómeno ondulatorio; aunque con muy poca claridad debido a que pocos libros mencionan sobre el comportamiento sinusoidal del movimiento de vaivén de dichos fenómenos.

Que un movimiento de vaivén pueda ser descrito por una función sinusoidal, y estas funciones sean las más importantes para el análisis y estudio del fenómeno ondulatorio, debería ser un argumento suficiente para romper los paradigmas de la enseñanza en el estudio de fenómenos oscilatorios, analizando este tipo de fenómenos con mayor profundidad. El fenómeno ondulatorio es un fenómeno de gran importancia en la Física e Ingeniería por lo que inexorablemente la enseñanza de este tipo de fenómenos debería ahondar en el análisis oscilatorio.

En los últimos dos párrafos se expuso la coyuntura que tienen dos fenómenos distintos, pero con un análisis común, ambos se describen (o analizan) mediante una función sinusoidal. Una función sinusoidal, representa ¡*periodicidad!* La periodicidad es un valor importante que permite estudiar la ¡*frecuencia!* Y, por último, la frecuencia es un parámetro que sin lugar a duda se estudia y analiza mejor en el dominio frecuencial, lo cual es posible gracias a la *transformada de Fourier*.

### 4.2 Los fenómenos oscilatorios y los fenómenos ondulatorios

Una de las motivaciones principales del presente trabajo surgió en el momento de analizar ondas, el término onda es un concepto comúnmente empleado en el fenómeno ondulatorio. La bibliografía elemental que “introducía” a ondas [6]-[9], [11], [19]-[21], [63], empleaba el fenómeno oscilatorio para estudiar ondas; y la bibliografía especializada, se enfocaba al estudio de funciones sinusoidales las cuales se emplean para el estudio y análisis de propagación de ondas [64]-[70]. Sin embargo, en ninguna de las bibliografías, avanzadas o elementales, no había una clara separación entre el concepto oscilatorio del ondulatorio. Libros, enfocados al estudio y análisis de ondas avanzadas, usan el concepto de oscilación,

resortes [71]-[74], para introducir al fenómeno ondulatorio. *La confusión sobre ambos conceptos es una de las motivaciones fundamentales en la que se basa el presente trabajo, el cual propone el estudio y análisis de fenómenos oscilatorios mediante el uso de un osciloscopio para introducir a los estudiantes a uno de los conceptos más importantes en la ciencia Física e Ingenierías... la transformada de Fourier.* Esta importantísima herramienta es fundamental para analizar y estudiar adecuadamente el fenómeno ondulatorio; al revés, no necesariamente es válido, saber ondas para entender Fourier; esta última afirmación ésta basada en los actuales paradigmas de la enseñanza. Y aun a los estudiantes les cuesta mucho trabajo diferenciar ambos conceptos.

No es la finalidad del presente trabajo estudiar el fenómeno ondulatorio, pero si sumar la importancia debida al presente trabajo; con el cual se pretende mostrar que es posible romper los paradigmas de la enseñanza y que, al hacerlo, se abre un mayor beneficio hacia los estudiantes, debido a que el presente trabajo muestra que es posible analizar fenómenos oscilatorios en el dominio frecuencial con una herramienta que hasta hoy día sigue siendo un reto para su comprensión y aprendizaje a nivel teórico y práctico... *la transformada de Fourier.* Es la oscilación de una cuerda la que da cabida al estudio del fenómeno ondulatorio. En el estudio y análisis de la cuerda se trabajan dos conceptos propios de un fenómeno ondulatorio: Longitud de onda y frecuencia; por lo que se considera en el presente trabajo que el fenómeno oscilatorio de una cuerda es el génesis del fenómeno ondulatorio.

### ***4.3 Sobre definiciones y conclusiones***

Hay tres importantes conceptos: Oscilaciones, ondas y transformada de Fourier.

#### ***4.3.1 Oscilaciones***

A lo largo de tres años de trabajar como ayudante de profesor en la carrera de Física, he observado que los estudiantes han experimentado con los fenómenos oscilatorios mencionados anteriormente en el capítulo 1: El resorte, el péndulo y la cuerda vibrante, pero las practicas que se realizan se concentran en otros parámetros (que si bien son significativos de tener en cuenta, no son los únicos) tales como determinar la constante  $k$  y el periodo (para el resorte) o la constante de gravedad  $g$  de la Tierra y el período (para el caso del péndulo), dejando de lado una de las características más importantes en ellos: La función sinusoidal. Incluso si ven esta función, es con ayuda de software para simular el movimiento que, si bien apoya al conocimiento, no es una manera real. Esto a causa de que poder observar dicha función de forma cualitativa o poder interactuar con ella es sumamente difícil. Esto hace que los estudiantes no puedan relacionar de una manera correcta como es que se rige un fenómeno oscilatorio y, por ende, es muy complicado que puedan entender un fenómeno ondulatorio. No se puede comprender bien un tema si desde

el inicio no se entienden bien sus bases. Lo que hace pensar, que se les muestra solo la parte teórica del movimiento de estos fenómenos oscilatorios, para que al final el estudiante se encargue de imaginar la forma experimental de cómo se comportan.

A continuación, se expondrán diferentes conceptos sobre oscilación que se encontraron en la bibliografía consultada.

**Primera definición:** “Oscilatorio: 1. adj. Que oscila” [75].

**Segunda definición:**

Oscilar: 1. intr. Efectuar movimientos de vaivén a la manera de un péndulo o de un cuerpo colgado de un resorte o movido por él. 2. intr. Dicho de algunas manifestaciones o fenómenos: Crecer y disminuir alternativamente, con más o menos regularidad, su intensidad. Oscilar el precio de las mercancías, la presión atmosférica. 3. intr. Titubear, vacilar [76].

**Tercera definición:** En el libro de Halliday y Resnick se encuentra: “Si una partícula en un movimiento periódico se mueve de ida y vuelta sobre la misma trayectoria, decimos que el movimiento es oscilatorio o vibratorio” [18, p. 311].

**Cuarta definición:**

Las vibraciones u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la física...

La característica común de todos estos fenómenos es su periodicidad. Existe un esquema de movimiento o desplazamiento que se repite una y otra vez. Este esquema puede ser sencillo o complicado [77, pp. 3-4].

**Quinta definición:**

Cuando un objeto se desplaza repetidamente hacia adelante y hacia atrás por el mismo camino se dice que oscila o vibra. Algunos ejemplos familiares son un niño en un columpio, un péndulo de reloj o la cuerda de un violín. Las oscilaciones también juegan un papel importante en muchos fenómenos físicos fuera del campo de la mecánica [6, p. 203].

**Sexta definición:** “... Si el movimiento periódico es un movimiento de ida y vuelta a lo largo de una línea recta o curva, se llama oscilación” [21, p. 469].

**Séptima definición:** “Una vibración u oscilación implica un movimiento “de ida y vuelta”, como el de un péndulo” [9, p. 444].

**Octava definición:**

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama vibración u oscilación. El vaivén de un péndulo y el movimiento de una cuerda pulsada son ejemplos comunes de vibración. La teoría de la vibración tiene que ver con el estudio de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos [52, p. 13].

#### **4.3.2 Fenómeno ondulatorio (ondas)**

La cuerda vibrante se basa en la teoría de las *ondas estacionarias* y el *principio de superposición*, temas que, si bien no son el objetivo del presente trabajo, son temas fundamentales para introducir al estudio y análisis de un importante fenómeno: *El fenómeno ondulatorio*. El estudio y análisis de oscilaciones concluye con este extraordinario fenómeno oscilatorio. Este fenómeno está matizado en una serie de funciones matemáticas y fenómenos físicos que recaen en forma natural al fenómeno ondulatorio. A continuación, algunas definiciones.

**Primera definición:** De la Real Academia Española: “Movimiento Ondulatorio: 1. m. Fís. movimiento que se propaga por medio de ondas, con transporte de energía, pero no de materia, como en la superficie del agua, en las partículas de un medio elástico o en el campo electromagnético” [78].

**Segunda definición:**

Ondulación: 1. f. Acción y efecto de ondular. 2. f. Formación en ondas de una cosa. La ondulación del terreno. 3. f. Fís. Movimiento que se propaga en un fluido o en un medio elástico sin traslación permanente de sus moléculas [79].

**Tercera definición:** Kane y Sternheim lo definen como:

La mayoría de los movimientos ondulatorios que nos resultan familiares implican una perturbación coordinada a gran escala de muchas partículas u objetos. En tanto que las partículas individuales no se mueven mucho, la perturbación puede recorrer grandes distancias, llevando consigo ímpetu y energía. Los movimientos de las partículas varían con el tipo de onda [6, p. 469].

***Cuarta definición:***

Para mucha gente, quizá para la mayoría, la palabra “onda” trae a la mente una descripción de un océano, con las olas barriendo la playa procedente del mar abierto...Y aquí tenemos la característica esencial de lo que se denomina movimiento ondulatorio. Se transmite una propiedad de un lugar a otro por medio de un medio, pero el medio en sí mismo no se transporta [77, p. 227].

***Quinta definición:***

Como una oscilación simple, el movimiento ondulatorio se presenta en un sistema con un estado de equilibrio. La onda es una perturbación que aparta al sistema de su estado de equilibrio.

A diferencia de un oscilador simple, una onda implica movimiento en muchos puntos distintos en un sistema distribuido. Esos movimientos están acoplados y se puede transmitir la energía a través del sistema [11, p. 498].

***Sexta definición:***

El segundo método de transmisión de energía implica el movimiento ondulatorio. Todas las ondas transmiten energía. Las ondas sonoras transmiten la energía de la cuerda vibratoria de una guitarra, a su oído...Las ondas son una forma de transmitir la energía [20, p. 233].

***Séptima definición:***

Una onda es un movimiento vibratorio de sacudida en un cuerpo elástico deformable. La onda se inicia mediante alguna fuerza externa que actúa sobre alguna parte del cuerpo y lo deforma. Las fuerzas restauradoras elásticas que hay dentro del cuerpo comunican esta perturbación inicial a la parte adyacente. Por tanto, la perturbación se propaga gradualmente a lo largo del cuerpo elástico [21, p. 508].

***Octava definición:*** “Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio sin transportar materia. En las ondas mecánicas este proceso tiene lugar mediante una perturbación del medio” [7, p. 441].

Las anteriores definiciones son muy generales en la bibliografía revisada sobre el fenómeno oscilatorio y ondulatorio. Es posible observar que existen unas sutiles semejanzas entre estas definiciones, pero si es posible diferenciar que la ondulación es una propagación de energía, concepto que no está referido en la definición de oscilación; es esta matización la que en ocasiones no permite diferenciar entre un fenómeno oscilatorio de un ondulatorio.

A continuación, se presenta la propuesta de definición para estos dos conceptos, la cual surge de reflexionar las definiciones encontradas; así mismo de profesores y estudiantes.

***Primera definición: Una oscilación es un movimiento macroscópico de vaivén que NO sirve para propagar energía.***

***Segunda definición: Un fenómeno ondulatorio es un movimiento microscópico de vaivén que sirve para propagar energía.***

***Tercera definición: La función sinusoidal es una herramienta matemática que sirve para describir el movimiento de vaivén de un sistema físico y para estudiar la propagación de energía de una onda.***

Si bien, son definiciones acotadas, no cabe duda alguna de que funcionan muy bien para esclarecer una verdadera diferencia entre ambos fenómenos, y cuando el estudio de posgrado alcance a los estudiantes, podrán darse cuenta del amplio mundo que es el fenómeno ondulatorio.

Los fenómenos estudiados en este trabajo, aún en la actualidad, se estudian en salones y laboratorios de enseñanza solo en el dominio temporal. En este trabajo se propone que se analicen además en el dominio frecuencial, lo cual es posible mediante la transformada de Fourier. El rechazo alrededor del concepto de la transformada de Fourier es debido a lo complejo que es describir dicha herramienta: Para qué sirve o qué significa, lo que suceda primero. Con este fin se presenta la definición de algunos autores que procuran resaltar la importancia de tan importante herramienta.

### ***4.3.3 Transformada de Fourier***

Tal vez el desatino de la transformada de Fourier se debe a que difícilmente puede ser definida de una forma tal que pueda carecer, en su definición, de palabras técnicas. La mayoría de los autores expertos en el área, así como los principiantes, emplean tecnicismos tales que son difíciles de comprender, aun para estudiantes de estudios superiores. A continuación, se muestran algunos conceptos concebidos por algunos autores especializados en el uso y aplicación de la transformada de Fourier.

### ***Primera definición:***

...Para determinar el espectro más simple de una función se puede recurrir a la Transformada de Fourier (FT), con sus limitaciones para ofrecer información en el tiempo; es decir no indica los instantes en los que ocurren ciertos eventos importantes para la señal...

La transformada de Fourier es el procedimiento matemático que descompone una función en las frecuencias que le forman de la misma manera que un prisma [sic] descompone la luz en los diferentes colores y longitudes de onda. La función que inicialmente se define en el tiempo  $f(t)$  es la transformada al dominio de la frecuencia  $F(w)$ . Esta nueva función  $F(w)$  se llama la Transformada de Fourier o Serie de Fourier cuando la función es Periódica. Fourier determinó que era posible expresar una función como [sic] la suma de Senos y Cosenos de diferentes frecuencias y amplitudes hasta lograr determinar la función original. Este procedimiento fue implementado inicialmente para funciones periódicas, pero se puede extender a funciones no periódicas haciendo tender a infinito su período T [80, pp. 151-152].

### ***Segunda definición:***

La Transformada de Fourier [81] es una herramienta de análisis muy utilizada en el campo científico (acústica, ingeniería biomédica, métodos numéricos, procesamiento de señal, radar, electromagnetismo, comunicaciones, etc.). Transforma una señal representada en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia pero sin alterar su contenido de información, sólo es una forma diferente de representarla. La potencia del análisis de Fourier radica en que nos permite descomponer una señal compleja en un conjunto de componentes de frecuencia única; sin embargo, no nos indica el instante en que han ocurrido. Por ello, esta descomposición es útil para señales estacionarias: las componentes de las frecuencia [sic] que forman la señal compleja no cambian a lo largo del tiempo [82, p. 78].

***Tercera definición:*** “La FFT es un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta (TFD) y su inversa. Dadas las características de la transformada, es posible analizar una señal vista desde su espectro en frecuencia” [83, p. 21].

#### ***Cuarta definición:***

...mientras que la de Fourier representa (transforma) un objeto (o cualquier función, modelo o variación) en un conjunto de patrones de ondas sinusales con fases y frecuencias diferentes ... Propuesta por primera vez al comienzo del siglo XIX por Fourier, la idea fue ridiculizada entonces por numerosos matemáticos y científicos eminentes de la Academia Francesa de las Ciencias. Desde entonces, sus principios se han mantenido y extendido hasta convertirla en un instrumento fundamental para el desarrollo de la ciencia y la ingeniería moderna. La riqueza de este método y la disponibilidad de algoritmos de computación para la transformada de Fourier rápida (TFR), que permiten obtener de modo conveniente transformadas directa e inversa discretas, han contribuido a que este análisis se aplique con más frecuencia en diferentes campos de la tecnología.

La transformada de Fourier de una función proporciona una relación, para cada incremento de frecuencia, de las amplitudes (y fases) de los componentes sinusoidales que se suman para obtener esa función. El concepto se extiende fácilmente a múltiples dimensiones y la transformada de Fourier 2D de una imagen representa la descomposición de los componentes de la frecuencia espacial que definen los modelos de intensidad medida en la imagen de entrada... [84, p. 19].

#### ***Quinta definición:***

La Transformada de Fourier, es una herramienta matemática desarrollada por Jean Baptiste Fourier y en primera instancia fue creada con la intención de explicar el fenómeno de propagación del calor como un conjunto de oscilaciones cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una oscilación fundamental. Por tal motivo, esta transformada toma como base la función exponencial compleja para expresar el comportamiento de señales en el dominio de la frecuencia.

...

Los coeficientes de Fourier, permiten la caracterización de una señal continua en el tiempo con la propiedad de periodicidad. Estos coeficientes ofrecen la información de la señal en el dominio de la frecuencia. Según la teoría de Fourier, es posible tomar estos coeficientes y reconstruir una señal periódica [50, pp. 9, 13].

### ***Sexta definición:***

La Transformada de Fourier (TF, como nos referiremos a ella), es una herramienta muy poderosa que tiene una gran variedad de aplicaciones, en diversas ramas de la matemática y la física matemática, desde la teoría de números y geometría hasta mecánica cuántica, así como en otras áreas de la ciencia e ingeniería tales como procesamiento de señales (electrónica), comunicaciones, óptica, procesamiento de imágenes y medicina, por mencionar algunos...

La Transformada de Fourier es una operación matemática que transforma a una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, pero sin alterar su contenido de información. La idea básica, radica en que es posible formar cualquier función como una suma de una serie de términos seno y coseno de frecuencia creciente. En otras palabras, cualquier espacio o tiempo que varía datos puede ser transformado en un dominio diferente llamado el espacio de frecuencia ... [85, pp. VII, 21].

### ***Séptima definición:***

La Transformada de Fourier (TF) es la herramienta que permite el análisis de una cierta señal con un comportamiento periódico (frecuencias, periodos, amplitud, etc.) y acotada. Es decir, nos brinda información adicional de la señal respecto a la frecuencia ( $f$ ) de repeticiones de eventos que la describen. Aplicada a un conjunto de datos ( $t$ ) de precipitación, la TF nos muestra directamente su frecuencia característica para poder predecir comportamientos (periódicos) posteriores [86, p. 3].

### ***Octava definición:***

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformarse en cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce [87].

***Novena definición:***

La transformada de Fourier es básicamente el espectro de frecuencias de una función. Un buen ejemplo de eso es lo que hace el oído humano, ya que recibe una onda auditiva y la transforma en una descomposición en distintas frecuencias (que es lo que finalmente se escucha). El oído humano va percibiendo distintas frecuencias a medida que pasa el tiempo, sin embargo, la transformada de Fourier contiene todas las frecuencias del tiempo durante el cual existió la señal; es decir, en la transformada de Fourier se obtiene un sólo espectro de frecuencias para toda la función [88].

***Decima definición:***

La Transformada de Fourier (TF) es la herramienta matemática que nos permite pasar de una representación en el dominio temporal a una representación en el dominio frecuencial. De manera general, la Transformada de Fourier es un procedimiento matemático que mapea cualquier señal analógica estacionaria a una serie infinita de sinusoides, cada una de ellas con una determinada amplitud y fase [89, pp. 1, 3].

***Onceava definición:***

La palabra "transformada" indica que estamos trabajando con una herramienta para transformar un tipo determinado de problema en otro. De hecho, la transformada de Fourier será útil (como veremos) para simplificar el estudio de la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales, convirtiendo el problema de la solución de una ED en un problema de solución de ecuaciones algebraicas. La motivación para dicho estudio está en el hecho de que la transformada de Fourier posee buenas propiedades algebraicas cuando se aplica a las derivadas sucesivas de una señal, o al trasladar la señal, etc. ... [90, p. 3].

***Doceava definición:***

La transformada de Fourier es una herramienta matemática que lleva una función, sea periódica o no, del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Así mismo, la transformada de Fourier hace corresponder a una función  $F$  con valores complejos y definidos en la recta, otra función  $f$  definida ... [91, p. 1].

La primera de las siguientes páginas web muestra un video que para muchos se considera una excelente forma de entender el significado de la transformada de Fourier. En lo particular considero que es una página para estudiantes de cursos avanzados y enfocados a análisis frecuencial. Mientras que la segunda página web muestra un lenguaje que sin duda podría ser entendido por estudiantes del nivel bachillerato.

***Página web [92]:***

1.- <https://www.xataka.com/otros/alguien-ha-hecho-el-video-perfecto-para-todos-los-que-sufrimos-intentando-entender-la-transformada-de-fourier>

***Página web [93]:***

2.- <http://www.jezzamon.com/fourier/es.html>

La serie de definiciones expuestas en los anteriores párrafos muestran la diversidad y dispersión de la definición de la transformada de Fourier. Algunas definiciones muy generales y otras muy elevadas para el entendimiento. En libros especializados y enfocados al estudio y entendimiento de la transformada de Fourier, la definición es puramente matemática. La mayoría de la bibliografía enfocada a la aplicación de la transformada de Fourier tiene en común la paráfrasis: *Transforma una señal temporal en el dominio de las frecuencias*. La ambigüedad o la rigurosidad de las definiciones se debe que hasta hoy día la transformada de Fourier ha sido una herramienta propia de estudios de posgrado y sus aplicaciones en la ciencia y tecnología; por lo que “es imposible” aterrizar en aplicaciones básicas como las mostradas durante el presente trabajo.

A continuación, se propone la siguiente definición, basada en la experiencia obtenida durante el desarrollo del presente trabajo.

***Definición: La transformada de Fourier proporciona o muestra, en forma de picos o un continuo de picos, la componente o las componentes involucradas en una señal periódica.***

Si bien la transformada de Fourier es más que picos y continuo de picos, es una buena aproximación que permite eliminar la rigurosidad y ayuda al entendimiento del concepto en un aspecto sencillo y fácil de comprender. Para reforzar la definición antes mencionada, se describe el siguiente ejemplo.

Sin lugar a duda, el uso del *prisma de Newton* para mostrar solo la separación de los colores de la luz blanca es un gran ejemplo que ha sido desaprovechado. La figura 4.1 [94] muestra el fenómeno que se produce cuando una luz blanca pasa a través de un prisma, el prisma sirve como separador de los colores que constituyen la luz blanca. Este es el significado preciso de lo que una herramienta matemática (***la transformada de Fourier***) realiza sobre señales físicas: La luz blanca representa el dominio temporal y los colores que la

constituyen representan el dominio frecuencial; el prisma podría ser la herramienta que me permite visualizar dichos colores, es decir *la transformada de Fourier*. En otras palabras, una señal puede estar constituida de una o varias señales, y *la transformada de Fourier* permite visualizar dichas señales.



Figura 4.1. Interpretación análoga para entender el dominio frecuencial. La luz blanca representaría el dominio temporal, los colores representarían la composición de la luz blanca en el dominio frecuencial.

El anterior ejemplo muestra de forma clara, figura 4.1, el funcionamiento y significado de la transformada de Fourier. El entender el significado sin tecnicismos permite que estudiantes de niveles medio superior y superior logren emplear esta importante herramienta en el análisis del fenómeno ondulatorio, y poder analizar ondas no solo en el dominio temporal sino además en el dominio frecuencial. Este análisis solo se realiza a nivel investigación y en general no se emplea en los laboratorios de enseñanza. Es aquí donde recae la importancia del uso de la transformada de Fourier, y que puede ser introducida mediante el estudio y análisis de fenómenos oscilatorios, ya que este tipo de fenómenos son de muy fácil entendimiento y muy visuales en los laboratorios de enseñanza.

## Conclusiones

En el presente trabajo se presentaron los fenómenos oscilatorios empleados para la introducción del fenómeno ondulatorio que, si bien no era el objetivo del presente trabajo, es un tema inexorablemente adherente al fenómeno oscilatorio. Estos últimos fenómenos son estudiados en la investigación, empleando una de las herramientas más importantes en las Ciencias e Ingenierías: la transformada de Fourier. Son las alternativas mostradas en el presente trabajo las que permiten introducir a estudiantes, incluso de niveles básicos, de forma cualitativa al uso de esta importante herramienta.

Los sistemas diseñados y construidos para el estudio y análisis de fenómenos oscilatorios son sin lugar a duda una excelente alternativa para el registro del movimiento de vaivén de dichos fenómenos mediante la ayuda de un osciloscopio. Sin embargo, el concepto podría desvanecerse sin un reforzamiento dirigido al estudio de funciones sinusoidales. Para este fin se construyeron, con el apoyo del proyecto PAPIME PE110216, generadores de funciones de cuatro canales y sumadores de señales, con los cuales es posible reforzar el concepto, estudio y análisis de señales sinusoidales en el dominio frecuencial.

Además de los instrumentos antes mencionados, se desarrollaron una serie de instrumentos (Apéndice) que permiten a los estudiantes de las carreras de Física, Ingenierías y a afines, introducirlos al estudio y análisis de señales sinusoidales. Este tipo de señales serán posible analizarlas tanto en el dominio frecuencial como en el temporal.

La equivocada desaprobación dada a la transformada de Fourier ha obstaculizado que estudiantes de niveles medio superior y superior no consideren el uso de tan importante herramienta en el análisis de sus señales. Usar los sistemas mostrados en el presente trabajo permitiría a los estudiantes de temprana edad al uso de esta importante herramienta para el análisis de señales.

Entender la transformada de Fourier como se ha mencionado anteriormente, es un tema desacreditada inadecuadamente, pero que conlleva al desuso para quienes la conocen teóricamente; mientras que la aplicación experimental deja mucho que desear cuando de definir el concepto de tan mencionada herramienta queda en la ambigüedad. Por lo que

cuando se les pregunta a los expertos sobre el tema se obtienen respuestas variadas, sus paráfrasis ambiguas y confusas contienen una palabra medular en donde incide energía o espectro.

Todos los instrumentos mostrados en el presente trabajo cumplen con el objetivo de ser de bajo costo, novedosos, de fácil construcción y uso. Pero no todo es miel sobre hojuelas, al ser instrumentos orientados al ámbito de la enseñanza, los circuitos electrónicos no cumplen con la precisión que presentan los instrumentos de marca, y solo nos referimos a la precisión de selección y control de la señal. Pero cumplen con un propósito loable e invaluable que es la enseñanza. Durante los tres años como ayudante, me han permitido ser testigo de cómo los estudiantes de la carrera de séptimo semestre de Física se maravillan de entender el uso práctico de la transformada de Fourier; y así mismo entender el concepto de la misma.

Los fenómenos ondulatorios son parte de nuestra vida cotidiana, estamos rodeados de ellos, desde el hablar y escuchar, ver un objeto, sentir algo, hasta el movimiento de un sismo; el universo solo se puede entender si entendemos ondas, es por ello que es importante que los estudiantes puedan distinguir entre los fenómenos oscilatorio y ondulatorio. También es importante recalcar que un fenómeno oscilatorio tiene cambios de energía y un fenómeno ondulatorio (una onda) transfiere energía. Con todo lo anterior, los tres fenómenos oscilatorios mostrados en este trabajo: El resorte, el péndulo y la cuerda vibrante; sirven como bases para entrar de lleno a los fenómenos ondulatorios.

## Trabajo a futuro

Se continuará trabajando en propuestas que permitan la enseñanza de la transformada de Fourier; por lo que se propone desarrollar un software que permita evaluar la transformada de Fourier de datos capturados por otros medios o dispositivos, e incluso, provenientes de un osciloscopio. Existe poco software con dicha capacidad, entre ellos Matlab y Mathematica. Desde hace poco, dichos softwares son gratuitos en la UNAM, pero el fin es promover que más estudiantes analicen señales en el dominio frecuencial. Sin lugar a duda un software con dicha capacidad sería de gran utilidad para estudiantes de otras universidades.

El trabajo futuro más complejo y difícil de realizar es romper los paradigmas de la enseñanza, debido a que no solo es cambiar la forma de enseñar sino cambiar la forma de pensar y más aún, que los promotores de la enseñanza se den la oportunidad de salir de su estado de confort para emplear sistemas electrónicos desconocidos y sencillos, pero que permiten transmitir un gran conocimiento.

### ***Generador de Fourier***

Este instrumento se encuentra en fase de desarrollo y engloba un generador de funciones de tres canales, un generador de barrido y un desfasador en una sola PCB. Se propuso el nombre de ***generador de Fourier***, ya que las señales de salida están involucradas con la transformada de Fourier. Con esto se logra disminuir el costo al usar una alimentación para todas las etapas de instrumentos, y también, se hace más portátil que tener tres instrumentos separados.

## Referencias

- [1] L. C. Cuervo Daza, “Unidad didáctica para la enseñanza del concepto de fuerza en resortes reales más allá de la Ley de Hooke,” Trabajo final Magister. Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá D.C, Colombia, 2019. Disponible: <http://bdigital.unal.edu.co/73857/2/LuisCarlosCuervoDaza.2019.pdf>.
- [2] W. F. Ramos Castiblanco, “Enseñanza de la Ley de Hooke a partir de la deformación en rocas, asistido con laboratorio convencional-virtual,” Trabajo final Magister. Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Enseñanza de la Ciencias de la Tierra, Geomorfología y Procesos Fluviales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá D.C, Colombia, 2013. Disponible: <http://bdigital.unal.edu.co/57421/6/WilmarF.RamosCastiblanco.2013.pdf>
- [3] A. C. Santiago Zaragoza y M. J. Santiago Puertas. *HISTORIA Y FUNDAMENTOS DE FÍSICA (de 1º de Bachillerato)*. Madrid: Aebius, 2012.
- [4] J. P. McKelvey H. Grotch. *FÍSICA PARA CIENCIAS E INGENIERÍA, Tomo I*. México: HARLA, 1980.
- [5] P. E. Tippens. *FÍSICA: CONCEPTOS Y APLICACIONES*. 6ta ed. México: McGraw-Hill Interamericana, 2001.
- [6] J. W. Kane y M. M. Sternheim. *FÍSICA*. 2da ed. Barcelona: Reverté, 1989.
- [7] P. A. Tipler. *Física para la ciencia y la tecnología, Volumen 1*. 4ta ed. Barcelona: Reverté, 2001.
- [8] F. W. Sears, M. W. Zemansky H. D. Young . *FISICA UNIVERSITARIA*. 6ta ed. México: Fondo Educativo Interamericano, 1986.
- [9] J. D. Wilson, A. J. Buffa y B. Lou. *Física*. 5ta ed. México: Pearson Educación, 2003.
- [10] L. Kirkpatrick & G. Wheeler. *Physics: A World View*. 3rd ed. Cengage Learning, 1999.
- [11] S. M. Lea y J. R. Burke. *Física: La naturaleza de las cosas, Volumen 1*. México: International Thomson Editores, S.A. de C.V., 1999.
- [12] I. Del Villar. *Ciencia y fe católica: de Galileo a Lejeune*. Madrid: BibliotecaOnline SL, 2017.

- [13] R. Pérez, “El péndulo: un clásico que no pasa de moda,” *Cienciorama*. [En línea]. Disponible: [http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/484\\_cienciorama.pdf](http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/484_cienciorama.pdf). [Consultado: 20 de marzo de 2020].
- [14] Á. Acevedo, “Galileo Galilei(1564-1642)(Cuarta y última parte),” *boletín Facultad de Ciencias UNAM*, no. 268, pp. 2-3, 2009. Disponible: <http://actuaria.fciencias.unam.mx/boletin/2009/Febrero/268.pdf>.
- [15] J. Pérez Garrido, “EL METRÓNOMO: ORIGEN Y EVOLUCIÓN,” *SINFONÍA VIRTUAL*, no. 22, 2012. Disponible: [http://www.sinfoniavirtual.com/revista/022/metronomo\\_origen\\_evolucion.php](http://www.sinfoniavirtual.com/revista/022/metronomo_origen_evolucion.php).
- [16] B. I. Prada Márquez. *Galileo Galilei: Su vida, su obra y sus aportes al método de la ciencia moderna*. 2da ed. California: Windmills Editions, 2016.
- [17] G. Grabinsky, “Historia del Cronómetro Naval,” *Ciencias*, no. 15, pp 32-38, 1989. Disponible: <https://www.revistaciencias.unam.mx/images/stories/Articles/15/CNS01506.pdf>.
- [18] R. Resnick y D. Halliday. *FISICA, Parte 1*. México: COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. de C.V., 1980.
- [19] D. Halliday, R. Resnick y J. Walker. *Fundamentos de Física, Volumen 1*. 8va ed. México: GRUPO EDITORIAL PATRIA, 2009.
- [20] J. T. Murphy y R. C. Smoot. *Física: Principios y problemas*. México: COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. de C.V., 1981.
- [21] H. C. Ohanian y J. T. Markert. *Física para ingeniería y ciencias, Volumen 1*. 3ra ed. México: McGRAW – HILL/INTERAMERICANA, 2009.
- [22] E. M. Rogers. *Physics: For The Inquiring Mind: The Methods, Nature, And Philosophy Of Physical Science*. New Jersey: Princeton University Press, 1960.
- [23] J. C. González-Dávila, “Matemáticas y Música: Sobre la contribución de las Matemáticas a la Teoría del Sonido,” *Universidad del Pais Vasco*. [En línea]. Disponible: <http://www.ehu.es/ccwmuura/irakaskuntza/mat/sonido.pdf>. [Consultado: 10 de diciembre de 2019].
- [24] J. M. Almira, “Cuerdas vibrantes y calor: la génesis del Análisis de Fourier.,” *Matematicalia*, vol. 4, no. 1, 2008. Disponible: [http://www.matematicalia.net/index.php?option=com\\_content&task=view&id=442&Itemid=266](http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=442&Itemid=266).
- [25] J. M. Arriaga Romero, “EL DEBATE DE LA CUERDA VIBRANTE Y EL

- CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SIGLO XVIII,” Tesis Maestría. Posgrado en Filosofía de la Ciencia, Campo de conocimiento: Historia de la Ciencia. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2017.
- [26] PUCP, “Generación de ondas estacionarias en una cuerda tensa – PUCP,” *Youtube*, 23 de septiembre de 2016. [Video]. Disponible: [https://www.youtube.com/watch?v=D3QDX\\_O-poM](https://www.youtube.com/watch?v=D3QDX_O-poM). [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [27] “Vibrador mecánico PASCO SCIENTIFIC SF-9324,” *ebay*. [En línea]. Disponible: [https://www.ebay.com/itm/PASCO-SCIENTIFIC-SF-9324-MECHANICAL-VIBRATOR-as-is-/183332638901?\\_ul=MX](https://www.ebay.com/itm/PASCO-SCIENTIFIC-SF-9324-MECHANICAL-VIBRATOR-as-is-/183332638901?_ul=MX). [Consultado: 2 de diciembre de 2019].
- [28] A. Beléndez, G. Bernabeu, J. Vera Guarinos, C. Pastor Antón y A. Martín García. “Prácticas de Física: Determinación de la constante elástica de un resorte,” *Universidad de Alicante*. [En línea]. Disponible: <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/13682>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [29] “CINEMÁTICA Y DINÁMICA PRACTICA DE LABORATORIO No. 6 LEY DE HOOKE - MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE,” *Pontificia Universidad Javeriana Cali*. [En línea]. Disponible: [https://www.javerianacali.edu.co/sites/ujc/files/node/field-documents/field\\_document\\_file/laboratorio6.pdf](https://www.javerianacali.edu.co/sites/ujc/files/node/field-documents/field_document_file/laboratorio6.pdf). [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [30] “PRACTICA DE LABORATORIO: SISTEMA MASA–RESORTE.” [En línea]. Disponible: <http://files.rmosquerainfiii.webnode.es/200000156-a337ba430f/practicalaboratoriomasa.pdf>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [31] “Práctica de laboratorio: ESTUDIO DINÁMICO DE UN RESORTE HELICOIDAL.” [En línea]. Disponible: <https://personal.us.es/lguti/ejemplo.pdf>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [32] “Estudio del Muelle Elástico,” *Universidad Autónoma de Madrid*. [En línea]. Disponible: [http://webs.ftmc.uam.es/rafael.delgado/docencia/FISICA\\_ITI/PRACTICAS/Muelle.pdf](http://webs.ftmc.uam.es/rafael.delgado/docencia/FISICA_ITI/PRACTICAS/Muelle.pdf). [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [33] “El resorte elástico: Determinación de la constante elástica de un muelle; estudio estático y dinámico,” *experimentación didáctica en el aula*. [En línea]. Disponible: [http://recursostic.educacion.es/eda/web/eda2008/profesores\\_newton/practicas\\_newt](http://recursostic.educacion.es/eda/web/eda2008/profesores_newton/practicas_newt)

on/p3/Eda2008%20Newton/paco\_casas/Practica3\_web/Documentos/prac\_resorte.pdf. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].

- [34] “Divisor de tensión,” *Wikipedia*. [En línea]. Disponible: [https://es.wikipedia.org/wiki/Divisor\\_de\\_tensi%C3%B3n](https://es.wikipedia.org/wiki/Divisor_de_tensi%C3%B3n). [Consultado: 20 de marzo de 2020].
- [35] “PRÁCTICA 2: PÉNDULO SIMPLE. DETERMINACIÓN DE LA GRAVEDAD,” *Universidad de Castilla-La Mancha*. [En línea]. Disponible: [https://previa.uclm.es/profesorado/ajbarbero/Practicas/02\\_Pendolo\\_simple.pdf](https://previa.uclm.es/profesorado/ajbarbero/Practicas/02_Pendolo_simple.pdf). [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [36] “El Péndulo Simple,” *Universidad Autónoma de Madrid*. [En línea]. Disponible: [http://webs.ftmc.uam.es/rafael.delgado/docencia/FISICA\\_ITI/PRACTICAS/Pendolo-Simp.pdf](http://webs.ftmc.uam.es/rafael.delgado/docencia/FISICA_ITI/PRACTICAS/Pendolo-Simp.pdf). [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [37] “PRÁCTICA 6 Péndulo simple y péndulo físico,” *Universidad de Sevilla*. [En línea]. Disponible: [http://www.esi2.us.es/DFA/FFII/Practicas/Curso%200809/Pr\\_6\\_08-09.pdf](http://www.esi2.us.es/DFA/FFII/Practicas/Curso%200809/Pr_6_08-09.pdf). [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [38] “PRÁCTICA N° 3 El Péndulo Simple. Medida de la aceleración de la gravedad,” Escuela Politécnica de Ingeniería de Minas y Energía. [En línea]. Disponible: <https://ocw.unican.es/pluginfile.php/1593/course/section/2045/Prac03.pdf>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [39] “Práctica 5. Péndulo Simple. Medida de g,” *Universidad Complutense Madrid*. [En línea]. Disponible: <https://webs.ucm.es/info/Geofis/practicas/prac05r.pdf>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [40] “Mechanical Wave Driver SF-9324,” *PASCO*. [En línea]. Disponible: <https://www.pasco.com/products/lab-apparatus/waves-and-sound/ripple-tank-and-standing-waves/sf-9324>. [Consultado: 25 de noviembre de 2019].
- [41] “PASCO Functiegenerator digital,” *VOSinstrumenten*. [En línea]. Disponible: <https://www.vosinstrumenten.nl/onderwijs/natuurkunde/elektriciteit/functiegeneratoren/pasco-functiegenerator-digitaal.html>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [42] “PASCO 850 Universal Interface (UI-5000),” *Wiltronics*. [En línea]. Disponible: <https://www.wiltronics.com.au/product/7948/pasco-850-universal-interface-2/>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [43] R. G. Lyons. *Understanding Digital Signal Processing*. 3rd ed. New Jersey: Pearson Education Inc., 2011.

- [44] Transnational College of LEX. *Aventuras con Fourier*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [45] J. E. Briceño Márquez. *Principios de las Comunicaciones*. Venezuela: Universidad de Los Andes Facultad de Ingeniería Publicaciones, 2012.
- [46] J. F. James. *A Student's Guide to Fourier Transforms with Applications in Physics and Engineering*. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2011.
- [47] R. G. Lyons & D. L. Fugal. *The Essential Guide to Digital Signal Processing*. New Jersey: Pearson Education, Inc., 2014.
- [48] S. W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. 2nd ed. California: California Technical Publishing, 1999.
- [49] R. Ruiz Gutiérrez, L. Ortega González y A. Arnaud Bobadilla. *Conocimientos Fundamentales para la Enseñanza Media Superior: Una propuesta de la UNAM para su bachillerato*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [50] J. E. González Barajas. *Series y Transformada de Fourier para Señales Continuas y Discretas en el Tiempo: Algoritmos para el desarrollo de ejercicios prácticos*. Bogotá: OmniaScience, 2015.
- [51] C. J. Carrillo González. *Fundamentos del Análisis de Fourier*. Universidade de Vigo 2003. Disponible: [http://grupo\\_ene.webs.uvigo.es/wordpress/publicaciones/Apuntes\\_Fourier.pdf](http://grupo_ene.webs.uvigo.es/wordpress/publicaciones/Apuntes_Fourier.pdf).
- [52] S. S. Rao. *Vibraciones mecánicas*. 5ta ed. México: Pearson Educación, 2012.
- [53] “Frase de Platón,” *Aki Frases*. [En línea]. Disponible: <https://akifrases.com/frase/126106>. [Consultado: 18 de febrero de 2020].
- [54] “Tektronix AFG3022C Generador Arbitrario de 25 MHz 128k puntos de memoria 250 MS/s 2 Canales con USB, GPIB y LAN,” *Final Test*. [En línea]. Disponible: <https://www.finaltest.com.mx/Tektronix-AFG3022C-p/afg3022c.htm>. [Consultado: 18 de febrero de 2020].
- [55] “LeCroy ARBSTUDIO 1104 4ch 16bit 1gs/s Arbitrary Waveform Generator,” *TEquipment*. [En línea]. Disponible: <https://www.tequipment.net/LeCroyARBSTUDIO1104.html>. [Consultado: 18 de febrero de 2020].
- [56] R. Bracewell. *The Fourier Transform*. Scientific American, 1989.
- [57] D. J. Struik. *A Concise History of Mathematics*. 4th ed. New York: Dover

- Publications, Inc., 1987.
- [58] M. Faúndez Zanuy. *Sistemas de Comunicaciones*. Barcelona: MARCOMBO, S.A., 2001.
- [59] “Ancho de banda,” *Wikipedia*. [En línea]. Disponible: [https://es.wikipedia.org/wiki/Ancho\\_de\\_banda](https://es.wikipedia.org/wiki/Ancho_de_banda). [Consultado: 15 de marzo de 2020].
- [60] A. R. Castro Lechtaler y R. J. Fusario. *Teleinformática para Ingenieros en Sistemas de Información, Volumen 1*. 2da ed. Barcelona: Reverté, S.A., 1999.
- [61] P. Cetta, “Trayectorias espaciales a partir de curvas notables,” *Sonic Ideas/Ideas Sónicas*, vol. 8, no. 16, pp. 32-38, 2016. Disponible: <https://repositorio.uca.edu.ar/bitstream/123456789/9181/1/trayectorias-espaciales-curvas-notables.pdf>.
- [62] J. Flemming y A. Hornes, “Lissajous-like figures with triangular and square waves (Generalização de figuras de Lissajous com ondas triangulares e quadradas),” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 35, no. 3, pp. 3702-1 - 3702-4, 2013. Disponible: <https://www.scielo.br/pdf/rbef/v35n3/a31v35n3.pdf>.
- [63] F. S. Crawford. *Ondas: Berkeley physics course - Volumen 3*. Barcelona: Reverté, S. A., 1994.
- [64] W. Tomasi. *Sistemas de comunicaciones electrónicas*. 4ta ed. México: Pearson Educación, 2003.
- [65] A. M. Jaramillo Jaramillo. *ACÚSTICA: La ciencia del sonido*. Medellín: ITM, 2007.
- [66] J. Rodríguez García y J. M. Virgós Rovira. *Fundamentos de óptica ondulatoria*. Universidad de Oviedo, 1999.
- [67] R. W. Ditchburn. *Óptica*. Barcelona: Reverté, S. A., 1982.
- [68] J. M. Espíndola Castro y Z. Jiménez Jiménez. *Terremotos y ondas sísmicas: Una breve introducción*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1994.
- [69] B. A. Bolt. *Terremotos*. Barcelona: Reverté, S. A., 1981.
- [70] O. E. Hernández B. *Talleres de física y biofísica para medicina*. Barranquilla: Universidad del Norte, 2014.
- [71] N. Zamorano H. *Introducción a la Física Newtoniana*. Chile: Universidad de Chile, 2017.

- [72] P. A. Tipler. *Física preuniversitaria. I, Volumen 1*. Barcelona: Reverté, S. A., 1991.
- [73] R. A. Serway y J. S. Faughn. *Física*. 5ta ed. México: Pearson Educación, 2001.
- [74] C. Tomé López , “Sólidos cuánticos,” *Cuaderno de Cultura Científica*, 24 de marzo de 2020. [En línea]. Disponible: <https://culturacientifica.com/2020/03/24/solidos-cuanticos/>. [Consultado: 10 de abril de 2020].
- [75] “oscilatorio, ria,” *Real Academia Española*. [En línea]. Disponible: <https://dle.rae.es/?w=oscilatorio>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [76] “oscilar,” *Real Academia Española*. [En línea]. Disponible: <https://dle.rae.es/oscilar?m=form>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [77] A. P. French. *Vibraciones y Ondas*. Barcelona: Reverté, S.A., 1974.
- [78] “movimiento,” *Real Academia Española*. [En línea]. Disponible: <https://dle.rae.es/movimiento?m=form#2hTTr6n>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [79] “ondulación,” *Real Academia Española*. [En línea]. Disponible: <https://dle.rae.es/ondulaci%C3%B3n>. [Consultado: 20 de noviembre de 2019].
- [80] J. A. CORTÉS O., F. A. MEDINA A. y J. A. CHAVES O., “Del análisis de Fourier a las wavelets análisis de Fourier,” *Scientia et Technica*, vol. 1, no. 34, pp. 151-156, 2007. Disponible: <https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/5563/3125>.
- [81] E. O. Brigham. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. New Jersey: Prentice-Hall, 1988.
- [82] J. Bernal, P. Gómez y J. Bobadilla, “Una visión práctica en el uso de la transformada de Fourier como herramienta para el análisis espectral de la voz,» *Estudios de Fonética Experimental*, vol. X, pp. 76-105, 1999. Disponible: [https://www.ub.edu/journalofexperimentalphonetics/pdf-articles/EFE-X-JBernal\\_PGomez\\_JBobadilla-FFT\\_una\\_vision\\_practica\\_herramienta\\_para\\_el\\_analisis\\_espectral\\_de\\_la\\_voz.pdf](https://www.ub.edu/journalofexperimentalphonetics/pdf-articles/EFE-X-JBernal_PGomez_JBobadilla-FFT_una_vision_practica_herramienta_para_el_analisis_espectral_de_la_voz.pdf).
- [83] J. I. Riaño, C. E. Ladino y F. H. Martínez, “Implementación de la transformada FFT sobre una FPGA orientada a su aplicación en convertidores electrónicos de potencia,” *Tekhnê*, vol. 9, pp. 21-32, 2012. Disponible: <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/tekhne/article/view/8925/10297>.
- [84] W. W. Orrison. *Neurorradiología*. Madrid: Harcourt, S. A., 2001.

- [85] F. A. Trinidad Torres, “Transformada de Fourier y su aplicación en procesamiento digital de imágenes,” Tesis Licenciatura. Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue., 2017. Disponible: <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/ma/FlorAngelicaTrinidadTorres.pdf>.
- [86] C. Yarlequé, A. Posadas y R. Quiroz. *Reconstrucción de datos de precipitación pluvial en series de tiempo mediante transformadas de wavelet con dos niveles de descomposición*. Lima: Centro Internacional de la Papa (CIP), 2007.
- [87] “Transformada de Fourier,” *Wikipedia*. [En línea]. Disponible: [https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada\\_de\\_Fourier](https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier). [Consultado: 20 de marzo de 2020].
- [88] “Álgebra Universitaria/Transformada de Fourier/Definición,” *Wikilibros*. [En línea]. Disponible: [https://es.wikibooks.org/wiki/%C3%81gebra\\_Universitaria/Transformada\\_de\\_Fourier/Definici%C3%B3n](https://es.wikibooks.org/wiki/%C3%81gebra_Universitaria/Transformada_de_Fourier/Definici%C3%B3n). [Consultado: 20 de marzo de 2020].
- [89] T. Martín, “Transformada de Fourier - Representación de señales de sonido,” Marzo 2015. [En línea]. Disponible: <http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-MartinTomas.pdf>. [Consultado: 10 de abril de 2020].
- [90] “Transformada de Fourier.” [En línea]. Disponible: [http://www4.ujaen.es/~jmalmira/transformada\\_fourier\\_almira.pdf](http://www4.ujaen.es/~jmalmira/transformada_fourier_almira.pdf). [Consultado: 20 de marzo 2020].
- [91] “Transformada de Fourier,” *Universidad Nacional Autónoma de México*. [En línea]. Disponible: [http://dctrl.fi-b.unam.mx/lab\\_control/docs/asys/P05\\_LASyS.pdf](http://dctrl.fi-b.unam.mx/lab_control/docs/asys/P05_LASyS.pdf). [Consultado: 20 de marzo de 2020].
- [92] “Alguien ha hecho el vídeo perfecto para todos los que sufrimos intentando entender la Transformada de Fourier,” *xataka*. [En línea]. Disponible: <https://www.xataka.com/otros/alguien-ha-hecho-video-perfecto-para-todos-que-sufrimos-intentando-entender-transformada-fourier-1>. [Consultado: 20 de marzo de 2020].
- [93] J. Swanson, “Una introducción interactiva a las transformadas de Fourier.” [En línea]. Disponible: <http://www.jezzamon.com/fourier/es.html>. [Consultado: 20 de marzo de 2020].

[94] “El Prisma Triangular Rompe La Luz,” *CanStockPhoto*. [Imagen]. Disponible: <https://www.canstockphoto.es/luz-prisma-se-estropea-triangular-19678046.html>. [Consultado: 20 de marzo de 2020].

## Apéndice

Los interesados en reproducir los instrumentos mostrados en el presente trabajo pueden solicitarlos enviando un correo electrónico al ingeniero Reimer López: [ingenieromreimer@ciencias.unam.mx](mailto:ingenieromreimer@ciencias.unam.mx); o al Dr. Alvarado Reyes: [jmar@ciencias.unam.mx](mailto:jmar@ciencias.unam.mx). Esto para enviar el circuito en tamaño exacto, con el cual pueda ser posible realizar el respectivo PBC.

Si se requiere asesoría en la construcción, se debe llenar una solicitud para hacer uso de las instalaciones.

### *Circuitos electrónicos empleados*

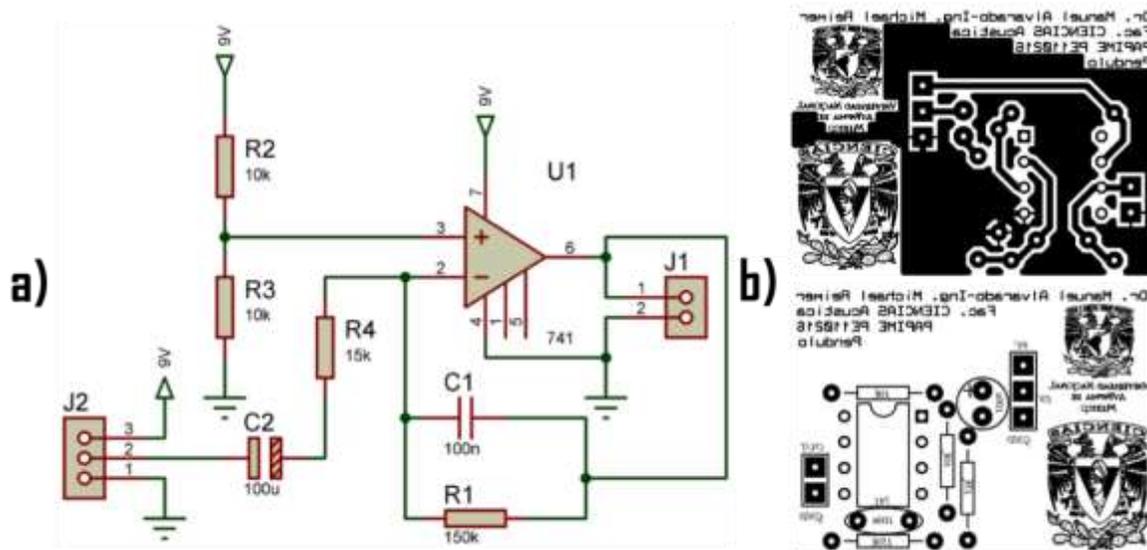


Figura A.1. Circuito de amplificación para el sistema del péndulo. a) Esquemático, b) PCB.

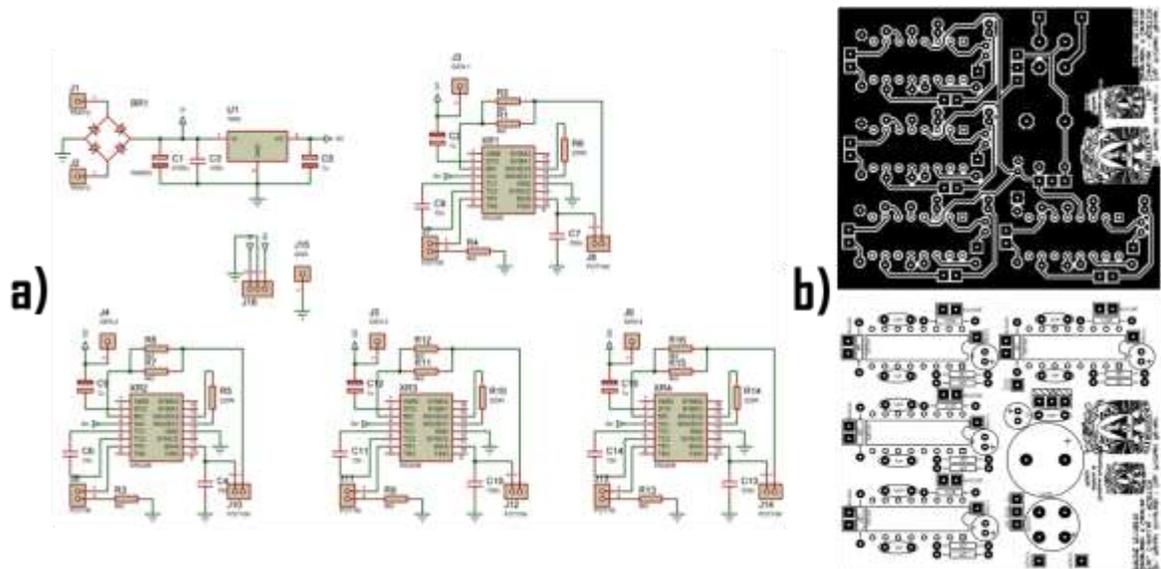


Figura A.2. Circuito del generador de funciones de cuatro canales. a) Esquemático, b) PCB.



Figura A.3. Generador de funciones de cuatro canales instalado en caja.

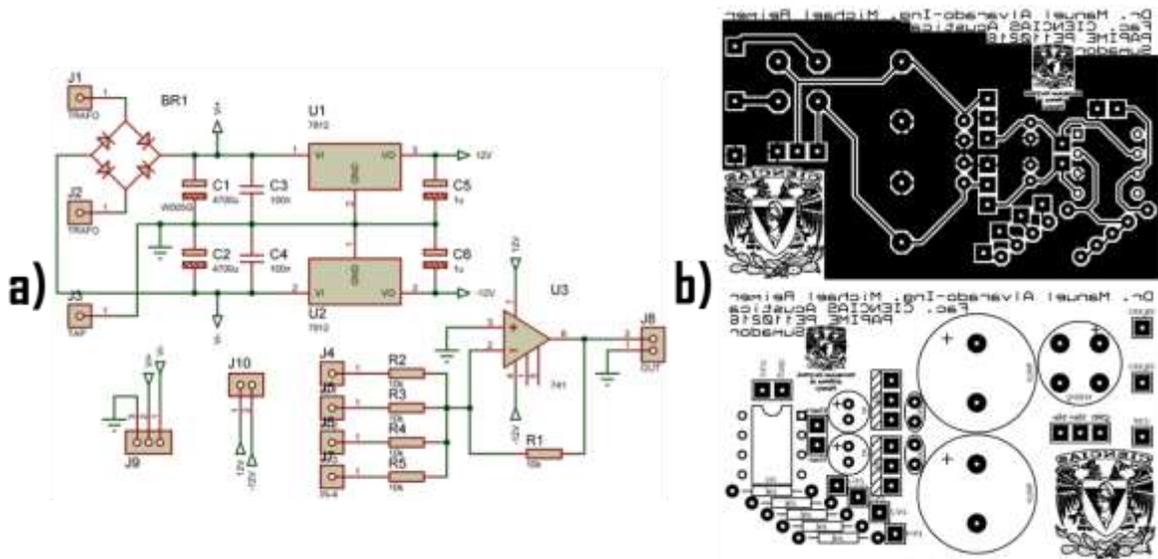


Figura A.4. Circuito del sumador. a) Esquemático, b) PCB.



Figura A.5. Sumador instalado en caja.

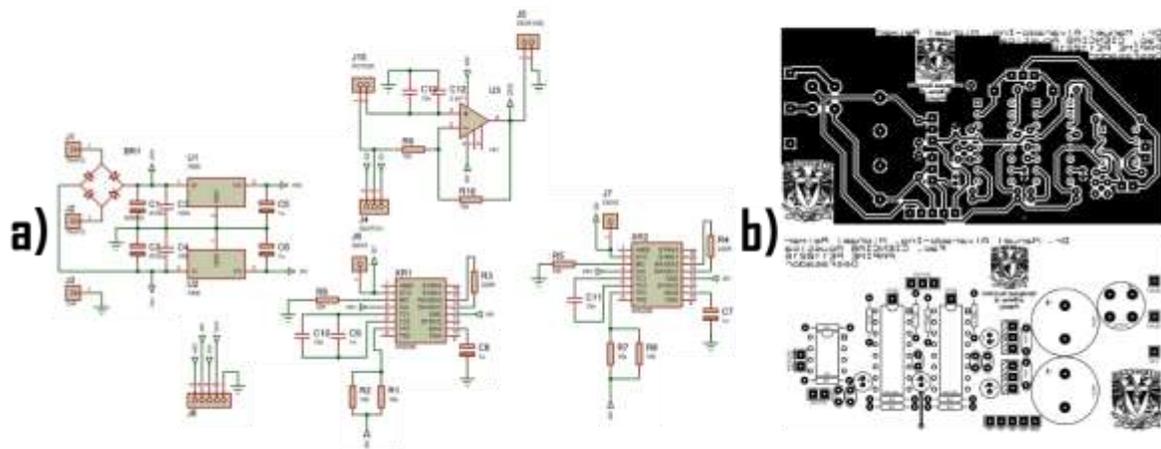


Figura A.6. Circuito del desfasador (en desarrollo). a) Esquemático, b) PCB.



Figura A.7. Desfasador instalado en caja.

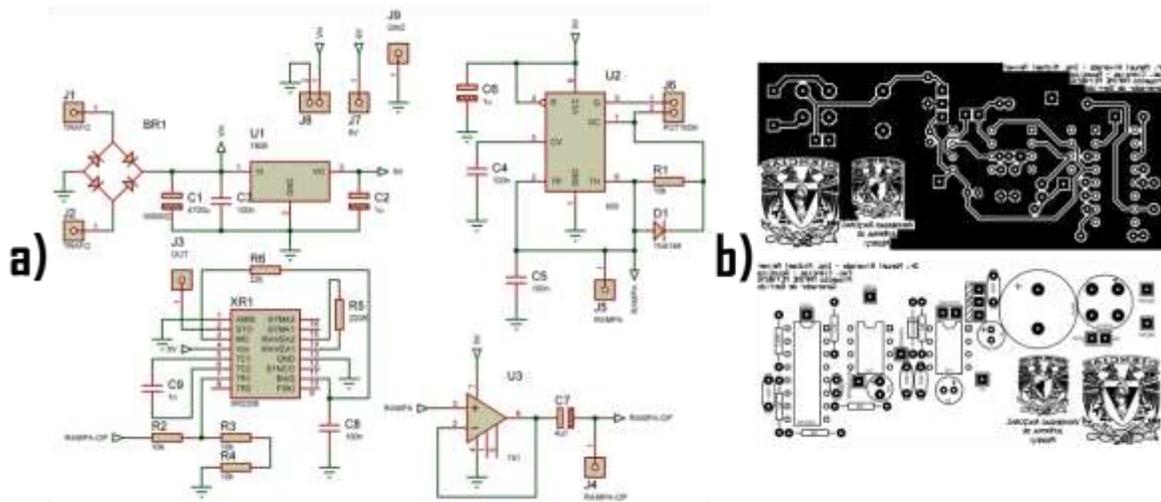


Figura A.8. Circuito del generador de barrido (en desarrollo). a) Esquemático, b) PCB.



Figura A.9. Generador de barrido sin instalar.