



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Transporte turbulento en plasmas modelado por
mapeos simplécticos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Jorge Torres Ramos

TUTOR

Dr. Julio Javier Martinell Benito

Ciudad Universitaria, CDMX. 2021.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

Torres

Ramos

Jorge

66-74-31-11-37

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

414007660

Datos del Tutor

Dr.

Julio Javier

Martinell

Benito

Datos sinodal 1

Dr.

José Julio Emilio

Herrera

Velázquez

Datos sinodal 2

Dr.

Victor Manuel

Romero

Rochín

Datos sinodal 3

Dr.

David

Martínez

del Río

Datos sinodal 4

Dr.

Raúl Patricio

Esquivel

Sirvent

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con el proyecto CB-2017-2018-A1-S-24157-F-2508 y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM con el proyecto IN112118 por sus apoyos económicos para la realización este trabajo.

Agradezco a mis sinodales que revisaron y mejoraron mi tesis. En especial al Dr. David Martinez del Rio.

Agradezco a la Academia Mexicana de Ciencias (AMC) por el apoyo económico recibido durante los primeros años de mi carrera.

Agradezco a la Sociedad Mexicana de Física (SMF) por promover y organizar las Olimpiadas de física, eventos que me acercaron a la física desde la secundaria.

Agradezco a mi Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS) por todo el apoyo recibido durante mi preparatoria y carrera. En especial al Doctor Armando Flores Arco y la Maestra Asención Florina Ramirez Bernal de la Dirección General de Escuelas Preparatorias. El respaldo de la Universidad me hace llevar con orgullo y fuerza al nombre de Sinaloa.

Agradezco a Gelacio Atondo Rubio. Por que hace muchos años me dejó participar en mi primera olimpiada estatal de física aunque ya se habían pasado las fechas de inscripciones. Por ser mi entrenador de física por cinco años. Y por todos los sábados tan a gusto y cansados en la facultad.

Agradezco a Víctor Manuel Romero Rochín. Por ser un físico como de la primera mitad del siglo XX. Por sus clases de las que siempre salía emocionado con la física. Y por ser paternal conmigo y regañarme cuando no entregaba las tareas y estar al pendiente de mi en sus clases.

Agradezco a Julio Javier Martinell Benito. Por ser mi asesor de tesis y mi primer encuentro cercano con el estilo de vida de un científico. Por toda su paciencia y la libertad que me dio para familiarizarme con el proceso de investigación. Por todo el tiempo que me dedicó para discutir dudas e ideas. Y por hacerlo todo de una forma tan serena.

Agradezco a mis amigos Samantha Sandoval, Hector Cardenas, Amado Barraza, Emanuel Becerra, Raúl Padilla, Miroslava Sandoval, Sara Verdugo, Patricia Palazuelos, Vita Felix e Itzel Arredondo. Por la bonita comunidad de ciudadanos de bien que hemos creado y mantenido a lo largo de los años.

Agradezco a mis amigos físicos Alex Hernández Cásares y Kevin Bustillos Barrera. Por todo el tiempo que pasamos juntos. Descubriendo, discutiendo, disfrutando cosas de la vida y comiendo. Por las carcajadas, las canciones, las chokis lilas y los bocadines. Por haber cambiado tanto y seguir siendo ustedes. Por las pizzas, las parrilladas y la coca con cacahuates.

Agradezco a Emmanuel Fernando León Félix. Por ser mi mejor amigo. Por siempre estar y escucharme. Por ser un hombre fuerte y cabal. Y por disfrutar tanto de la vida.

Agradezco a Carolina Andrea Tafoya Turner. Por su apoyo y compañía a lo largo de este trabajo. Por ayudarme a ser ligero y valiente. Y por todo el cariño que me da.

Agradezco a Itzel Rocío Arredondo Serrano. Por todas tus energías. Por haberme acompañado siempre. Y Por que haces que me conmueva con la vida y me ayudas a que el mundo no me sea

indiferente.

Agradezco a mis hermanos Javier, Gabriel y Angélica por cuidarme y modelar tan bien la vida de adulto. También por mis múltiples sobrinos, que quiero y a través de los cuales he podido ver lo raro, sorprendente y arbitrario de las cosas.

Agradezco a mis hermanas Marissa y Marisol. Por cuidarme. Por Estar ahí para lo que necesite. Por hacerme un campito en la casa y en sus vidas cuando nací. Y por seguirme queriendo tanto aunque me fuera lejos.

A Rosalva Ramos Loaiza y Héctor Javier Torres Romero, mi má y mi pá. Por darme mi primer regalo. Por toda su entrega para que yo y mis hermanos saliéramos adelante. Por todas sus enseñanzas. Por creer siempre en mí. Y por darme la confianza para afrontar metas difíciles. Me siento extremadamente afortunado de ser su hijo y muy honrado de llevar tanto de ustedes en mí.

*Dedicado a
mi nana y mi papá Jorge.
Que no alcanzaron a verme como físico,
pero ya sabían.*

Contenido

Resumen	1
1. Introducción	2
1.1. Fusión nuclear por confinamiento magnético	2
1.1.1. Plasma	2
1.1.2. Fusión nuclear	2
1.1.3. Confinamiento Magnético	3
1.2. Transporte colisional.	6
1.2.1. Transporte clásico	7
1.2.2. Transporte Neoclásico	8
1.3. Transporte turbulento	11
1.4. Introducción al modelo de partícula prueba.	12
2. Modelo de partícula prueba	15
2.1. Mapeos.	15
2.1.1. Mapeo sin flujo	15
2.1.2. Mapeo sin flujo giropromediando	16
2.1.3. Mapeo con flujo	16
2.1.4. Mapeo con flujo giropromediando.	17
2.2. Características del Espacios fase.	18
2.2.1. Mapeo sin flujo	18
2.2.2. Mapeo sin flujo giropromediando	18
2.2.3. Mapeo con flujo	20
3. Transporte para partículas en ausencia de flujo	24
3.1. Mapeo sin flujo.	24
3.2. Distribución térmica para mapeo sin flujo giropromediando	29
4. Transporte para partículas con flujo	34
4.1. Flujo lineal	34
4.2. Mapeo simplificado.	35
4.2.1. Autosimilaridad	39
4.3. Flujo Gaussiano	40
4.4. Mapeo simplificado	41
4.5. Flujo de escalón	47
5. Oscilaciones del coeficiente de difusión	49
6. Conclusiones	57

Anexos	59
6.1. Deducción del mapeo sin flujo.	59
6.1.1. Reescritura del potencial eléctrico	59
6.1.2. Ecuaciones de movimiento	60
6.1.3. Integración de las ecuaciones de movimiento	60
6.2. Deducción del mapeo sin flujo giropromediando.	62
6.3. Deducción del mapeo con flujo.	64
6.4. Modos aceleradores de periodo 2	65
6.5. Coeficiente de difusión con correlación entre iteraciones	67
Bibliografía	71

Resumen

Se estudia la dinámica de partículas prueba bajo la acción de un campo magnético constante y un espectro fijo de ondas viajeras electrostáticas en una geometría bidimensional plana. Este problema modela el transporte débil debido a ondas de deriva de un plasma magnetizado. Inicialmente se consideran las trayectorias de centro guía y posteriormente se incluyen efectos de radio de Larmor finitos (RLF) sobre distribuciones térmicas de partículas. Finalmente se investiga el efecto de incluir flujos con cizalla en la dirección de propagación de las ondas. Se trabaja con perfiles de velocidad lineal, Gaussiano y de escalón. Estos sistemas son Hamiltonianos y se reformulan como mapeos simplécticos.

Se encuentra que cuando la amplitud de las ondas aumenta se producen trayectorias caóticas y un transporte difusivo. Cuando la amplitud tiende a infinito (el caso cuasilineal) el coeficiente de difusión es proporcional al cuadrado de la amplitud, sin embargo para valores intermedios se presenta, además, un término con dependencia oscilatoria en la amplitud. Al incluir los efectos de RLF el transporte disminuye pero sigue siendo difusivo. Al considerar distribuciones térmicas de partículas el escalamiento del transporte en el tiempo sigue siendo difusivo pero se presenta con distribuciones de probabilidad de posiciones que dejan de ser gaussianas al incrementarse el radio de Larmor típico de la distribución. Éstas adquieren colas que decaen más lentamente. Se obtienen expresiones analíticas para estas cantidades que coinciden con simulaciones numéricas y con lo reportado en la referencia [1], en donde se estudia este mismo problema en el límite cuasilineal.

Para los casos con flujo se encuentra mediante simulaciones numéricas que el transporte en la dirección perpendicular a los flujos prácticamente no es afectado y las variaciones se observan solo en el término oscilatorio. En la dirección paralela el transporte cambia de la siguiente forma: para el perfil lineal se vuelve superdifusivo, para el de escalón es balístico y para el gaussiano permanece difusivo pero con un término en el coeficiente de difusión inversamente proporcional a la amplitud de las ondas. El comportamiento del perfil lineal también había sido observado en la referencia [1]. En este trabajo se presenta un procedimiento con el cual es posible obtener analíticamente los coeficientes de transporte para los tres perfiles de flujo.

Finalmente se presenta una explicación sobre la aparición del término oscilatorio en el coeficiente de difusión en términos de la magnitud de los eigenvalores del mapeo y la observación de desviaciones localizadas en la distribución de desplazamientos después de dos iteraciones respecto de lo esperado para el límite cuasilineal. Esta explicación es parcial y necesita ser extendida.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Fusión nuclear por confinamiento magnético

1.1.1. Plasma

Intuitivamente y de acuerdo a [2] un plasma es un gas en el hay partículas cargadas y estas tienen suficiente importancia como para convertir al gas en un buen conductor. Estas partículas cargadas empiezan a aparecer en un gas en equilibrio térmico en forma de iones al irse incrementando su temperatura.

En [3] se definen a un plasma con las siguientes propiedades.

$$\lambda_D \ll L, \quad (1.1)$$

$$N_D \gg 1, \quad (1.2)$$

$$\omega\tau > 1. \quad (1.3)$$

Donde λ_D es la longitud de Debye que define la distancia de apantallamiento de cualquier desequilibrio local de carga eléctrica en el plasma. L es una medida de la extensión espacial del plasma. Que esta distancia sea pequeña implica que el plasma es quasineutral, es decir, que el desequilibrio entre partículas cargadas positiva y negativamente es muy pequeño, típicamente menor a 10^{-6} .

N_D se refiere al número de partículas cargadas en una esfera con radio igual a la longitud de Debye. Que este número sea muy grande asegura que el apantallamiento de cargas sea estadísticamente válido, pero además implica que la dinámica del plasma no depende solo de las propiedades locales sino que partes remotas del plasma pueden seguir afectándose de forma electromagnética.

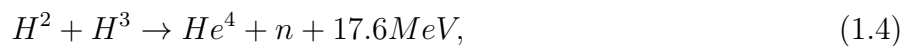
Finalmente en 1.3, ω se refiere a la frecuencia de plasma. Esta es la frecuencia de las oscilaciones de las partículas cargadas que ocurrirían si se presenta un desbalance abrupto de cargas. Por otro lado τ es el tiempo medio entre colisiones de partículas cargadas contra partículas neutras. Esta desigualdad implica que el plasma no se comporta como un gas neutro.

1.1.2. Fusión nuclear

La energía interna de los núcleos de los átomos está dada por las interacciones fuertes y electromagnéticas de los protones y neutrones que lo componen. La primera es atractiva y de corto alcance mientras que la segunda es repulsiva y de largo alcance. En la figura 1.1 se muestra esquemáticamente la forma del potencial entre dos protones. Para distancias largas la fuerza que sienten, dada por el negativo de la pendiente de la gráfica, es repulsiva. Conforme la distancia de separación se vuelve del orden de femtómetros la fuerza nuclear atractiva supera a la electromagnética

y comienza a atraer entre sí a los protones formando un átomo de helio. Este proceso se llama fusión nuclear. En la imagen se ilustra que este proceso de fusión libera energía al mostrar que la energía potencial es negativa para las distancias entre protones más pequeñas. La fusión nuclear de núcleos pequeños libera energía mientras el número atómico del producto sea menor que el del Hierro. Esto se ilustra en la figura 1.2 en donde se gráfica la energía de amarre por nucleón para los isótopos más comunes de los átomos. Esta cantidad representa la energía por nucleón que se debe impartir a un átomo para separar todos sus protones y neutrones entre sí, alternativamente es la energía por nucleón que se liberaría si se tuvieran estas mismas partículas y se fusionaran entre sí.

El comportamiento de las reacciones nucleares esta gobernado por la mecánica cuántica. En ella solo se puede describir de manera probabilística la aparición de cierta reacción. Esta probabilidad queda descrita por la sección eficaz que muestra esta probabilidad como función de la velocidad relativa. Se calculan esta cantidad para diferentes tipos de nucleos atómicos y se encuentra que la reacción que tiene más probabilidad de suceder a velocidades lo más bajas posibles es la siguiente[3]



y esta probabilidad empieza ser apreciable para energías del orden de la barrera de Coulomb entre las especies que es $10^5 eV$ es decir a temperaturas del orden de $10^8 K$. Estas energías están muy por encima de la energía de ionización de los átomos que son del orden de decenas de eV . De forma que sí se pretende que estas reacciones ocurran en un gas, éste sería un plasma. Además las temperaturas son tan altas que no hay contenedor material que pueda resistir contacto directo con él.

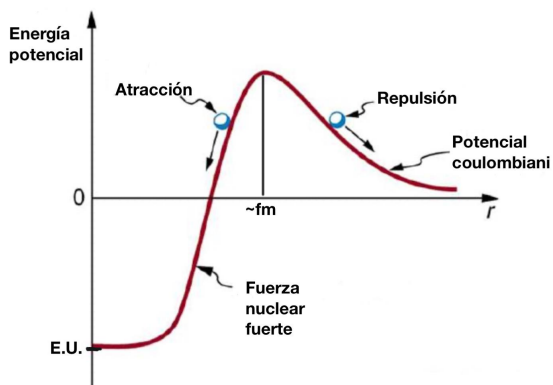


Figura 1.1: Gráfica esquemática de la energía potencial entre 2 protones.

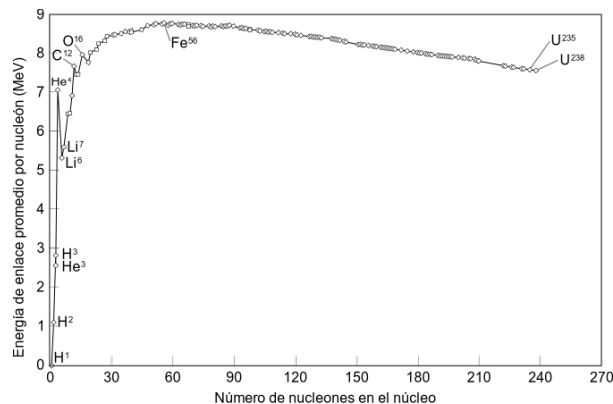


Figura 1.2: Energía de enlace por nucleón para los isótopos más comunes

1.1.3. Confinamiento Magnético

Uno de los enfoques para producir el número necesario de reacciones de fusión es el de confinar al plasma mediante campos magnéticos. El tiempo de confinamiento, la densidad del plasma y las temperaturas deben ser las adecuadas para producir la densidad de energía deseada. Para ver que el campo magnético es un buen candidato para confinar al plasma estudiemos el movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos. La fuerza que sienten las partículas con carga en un campo electromagnético es la de Lorentz que es

$$\vec{F} = q \left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E} \right), \quad (1.5)$$

donde q es su carga eléctrica, \vec{v} su velocidad y \vec{B} y \vec{E} son los campos eléctricos y magnéticos. Si \vec{E} es igual a 0 y \vec{B} es constante entonces la partícula se mueve a velocidad constante en la dirección del campo magnético si es que esta componente de velocidad no es 0. En el plano perpendicular al campo magnético realiza un movimiento circular uniforme de radio igual a

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}. \quad (1.6)$$

Este valor es conocido como radio de Larmor. El sentido en el que giran es tal que el campo magnético producido por estas cargas girando es opuesto al campo magnético externo. De esta forma se puede ver que un campo magnético uniforme acota el movimiento de las partículas en su dirección perpendicular pero no así en su dirección paralela. Para prevenir la fuga en esta dirección hay un par de enfoques, el más exitoso hasta ahora es la de cerrar las líneas de campo magnéticos en sí mismas de forma que las líneas magnéticas sean anillos magnéticos y en conjunto el campo magnético tenga una forma toroidal. Sin embargo esto produce que el campo magnético deje de ser uniforme y aparecen nuevos tipos de movimientos que se enuncian a continuación. Si la escala espacial del gradiente de \vec{B} es mucho menor que ρ entonces el movimiento perpendicular al campo magnético en campos electromagnéticos estáticos pero variables en el espacio se puede aproximar por [4]

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{W_{\perp}}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3} + \frac{2W_{\parallel}}{q} \frac{\vec{B} \times (\hat{b} \cdot \nabla)\hat{b}}{B^2}. \quad (1.7)$$

Que se conoce como velocidad de deriva. El primer termino se conoce como deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, el segundo deriva de ∇B y el tercero deriva de curvatura. Las cantidades $W_{\perp, \parallel}$ son la energía cinética paralela y perpendicular al campo magnético, $\frac{1}{2}mv_{\perp, \parallel}$. \hat{b} es el vector unitario en la dirección de \vec{B} . De forma que se intercambi6 la perdida de partículas en la dirección del campo magnético por perdidas en dirección perpendicular, sin embargo estas producen fugas de partículas más lentamente. En la figura 1.3 se muestra la geometría toroidal de las líneas de campo magnético así como la dirección típica de los gradientes de la magnitud del campo magnético de su curvatura, con estas se puede ver que las derivas por el campo magnético, que dependen del signo de la carga eléctrica, harían que las cargas positivas se movieran hacia abajo y las negativas hacia arriba, esta separación de cargas a su vez crearía un campo eléctrico vertical que finalmente produciría una deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ y expulsaría a las cargas hacia el extremo exterior del toro. Para prevenir este efecto se agrega lo que se conoce como componente poloidal del campo magnético que es un campo magnético de estructura similar a la que se produciría si hubiera una corriente eléctrica en la misma dirección de las líneas magnéticas toroidales. Esta estructura de campo magnético se muestra en la figura 1.4, la suma de estas dos componentes produce que las líneas de campo magnético se enrollen en la dirección poloidal conforme avanzan en la dirección toroidal. Qué tanto se enrollan en cada dirección determina si la línea de campo magnético se encuentra consigo misma, pero en general esto no pasa y más bien una misma línea de campo cubre toda una superficie, conocida como superficie magnética. Lo ideal para el confinamiento es que estas superficies magnéticas estén anidadas y la línea toroidal en torno a la que se anidan se conoce como eje magnético. Ahora resta ver cómo esta estructura de campo mitiga el efecto de derivas que tiene un campo magnético solamente toroidal. Como aproximación cero, las partículas cargadas siguen el campo magnético, es decir también se enrollan en la dirección poloidal conforme avanzan en la toroidal. Por esto las derivas de curvaturas y gradiente de B alejan a las partículas de la superficie magnética. Sin embargo la mitad del tiempo la alejan hacia superficies magnéticas más cercanas al eje magnético y en la otra mitad a superficies más lejanas, de forma que en promedio esta desviación de la superficie magnética original se cancela en buena medida. La cancelación no es perfecta pero sí retrasa en otro orden de magnitud la fuga de las partículas.

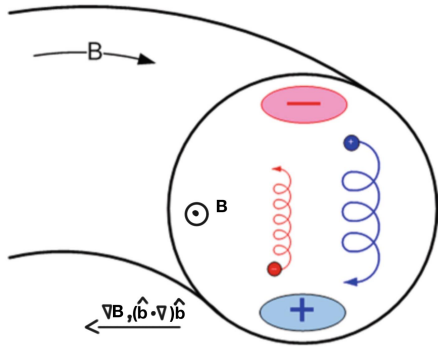


Figura 1.3: Campo magnético completamente toroidal y las derivas que produce. Imagen modificada de [5]

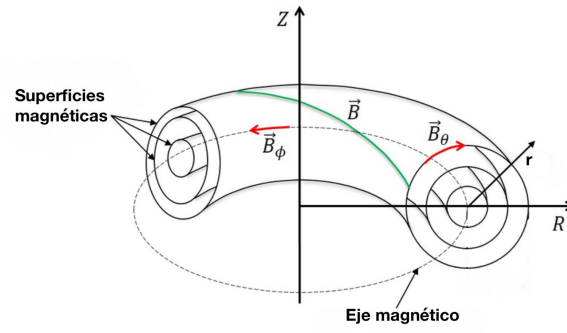


Figura 1.4: Estructura de campo magnético con componentes toroidales y poloidales. Imagen de [6]

Los prototipos de reactores de fusión nuclear con campos magnéticos de esta forma son llamados Tokamaks si el campo magnético presenta simetría axial, es decir que el eje magnético este sobre un plano y las superficies magnéticas se vean iguales conforme se avanza en la dirección toroidal.

Finalmente consideramos un efecto importante que sucede en el movimiento de las partículas cargadas en la dirección paralela al campo magnético. Este ocurre cuando la magnitud del campo magnético incrementa en la dirección de la misma línea de campo y es conocido como espejo magnético. La situación se ilustra en la figura 1.5

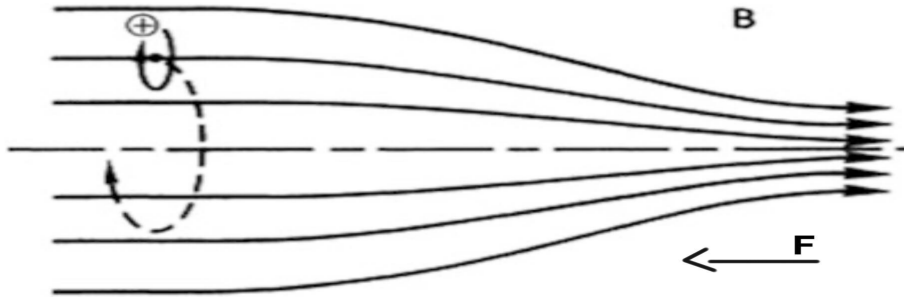


Figura 1.5: Forma del campo magnético cuando se presenta el efecto de espejo magnético. La intensidad del campo magnético aumenta y la partícula siente una fuerza que lo frena al acercarse a zonas de campo más intenso. Imagen de [3]

Como la divergencia del campo magnético es cero, si la intensidad del campo aumenta entonces las líneas de campo se deben juntar y esto produce una componente de campo magnética perpendicular a la dirección original. Esta componente produce una fuerza que frena a la partícula al acercarse a zonas de campo magnético más intenso y si su velocidad paralela no es lo suficientemente grande entonces puede invertir el sentido del movimiento de la partícula. Calcular este efecto es sencillo si se toma como cierto que el momento magnético μ es una constante de movimiento. Este es igual a

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B}. \quad (1.8)$$

La condición para que una partícula que cuando se encuentra en el campo magnético débil B_{min} tiene energía paralela y perpendicular $W_{\parallel 0}$ y $W_{\perp 0}$ respectivamente, alcance a llegar a una región de campo magnético mayor B_{max} es que

$$W_{\parallel 0} + W_{\perp 0} = W_{\perp f}. \quad (1.9)$$

Pero por la conservación del momento angular $W_{\perp f} = W_{\perp 0} \frac{B_{max}}{B_{min}}$. Por lo que

$$\frac{W_{\perp 0}}{W_{\parallel 0} + W_{\perp 0}} = \frac{v_{\perp 0}}{v_0} = \sin^2 \theta = \frac{B_{min}}{B_{max}}, \quad (1.10)$$

donde θ es el ángulo que hace el vector velocidad respecto del campo magnético en B_{min} . de forma que todas las partículas con un ángulo mayor no logran llegar al lugar donde la intensidad del campo magnético es B_{max} y son reflejadas antes, mientras que las que tienen un ángulo menor logran llegar y siguen avanzando. Alternativamente podemos dejar expresada esta relación en términos de la $\tan \theta$

$$\left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right)^2 = \tan^2 \theta = 1 - \frac{B_{max}}{B_{min}}. \quad (1.11)$$

Para entender el transporte en un plasma, además de considerar las trayectorias de las partículas cargadas bajo la influencia de un campo magnético estático, es necesario considerar cómo las partículas afectan su movimiento entre sí y cómo está dinámica puede cambiar los campos electromagnéticos impuestos externamente. En las secciones siguientes se presentan estos temas de forma cualitativa. Sin embargo, cabe notar que las colisiones entre partículas aún no han sido incluidas en el modelo que se investigará en los capítulos posteriores.

1.2. Transporte colisional.

El plasma está compuesto de un gran número de partículas. Las propiedades que se observan a nivel macroscópico son promedios de sus comportamientos individuales. La dinámica de las partículas en conjunto puede ser definida por la función de distribución, $f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$ que representa la cantidad de partículas de la especie a que se encuentran en la posición \vec{x} , con velocidad \vec{v} al tiempo t . El tipo de especie puede ser de iones o electrones. Si el número de partículas se considera fijo entonces esta función cumple la siguiente ecuación de conservación [7]

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (1.12)$$

Donde los campos eléctricos y magnéticos son los macroscópicos promediados sobre varias longitudes de Debye. Sin embargo en escalas de longitud menores a las de Debye, los campos electromagnéticos fluctúan grandemente por la presencia cercana de otras partículas. Para tomar esto en cuenta se agrega al lado derecho de la ecuación 1.12 un operador de colisiones

$$C_a = \left. \frac{\partial f_a}{\partial t} \right|_{\text{collisions}}. \quad (1.13)$$

Este operador debe cumplir varias condiciones: conservación de partículas, conservación de momento, conservación de energía, llevar la distribución al equilibrio termodinámico local y no afectar la densidad. Además este operador es a su vez la suma de los operadores de colisión de la especie a contra sí misma y el resto de las especies. Tomando los primeros momentos de la ecuación 1.12 se obtienen las ecuaciones de fluidos. El operador de colisiones, cuando sólo se consideran colisiones binarias es [7]

$$C_{ab}(f_a, f_b) = -\frac{q_a^2 q_b^2 \ln \Lambda}{8\pi \epsilon_0^2 m_a} \frac{\partial}{\partial v_k} \int U_{kl} \left[\frac{f_a(v)}{m_b} \frac{\partial f_b(v')}{\partial v'_l} - \frac{f_b(v')}{m_a} \frac{\partial f_a(v)}{\partial v_l} \right] d^3 v'. \quad (1.14)$$

Donde $U_{kl} = \frac{u^2 \delta_{kl} - u_k u_l}{u^2}$, $u = v - v'$ y $\Lambda = \frac{\lambda_D}{b_{min}}$ con b_{min} el parámetro de impacto que representa el acercamiento mínimo entre dos partículas. Este operador supone que la variación de la velocidad por la interacción coulombiana en cada colisión es pequeña, esto produce trayectorias suaves como la mostrada en la figura 1.6 donde se contraponen con trayectorias abruptas obtenidas por colisiones entre partículas neutras.

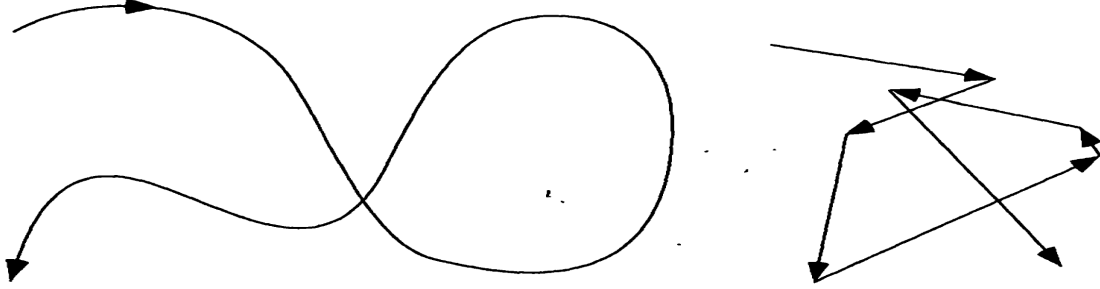


Figura 1.6: Izquierda: Tipo de trayectorias que sigue una partícula cargada debido a colisiones coulombianas en un plasma. Derecha: Trayectorias debido a colisiones entre partículas neutras en un gas. Imagen de [7]

Este operador de colisiones puede ser simplificado en muchas situaciones, entre las que se encuentran: Cuando una de las especies tiene una distribución maxwelliana, cuando las velocidades de las dos especies son muy diferentes, partículas relativistas, cuando las distribuciones distan muy poco de ser maxwellianas.

La ecuación 1.12 puede ser resuelta de forma asintótica bajo varias suposiciones aplicables para los plasmas magnetizados de fusión nuclear. Derivaciones de estas ecuaciones para Tokamaks se encuentran muy detalladas en el libro de la referencia [7] y resumido en las notas de la referencia [8]. La primera suposición que se considera es que se tienen distribuciones que son perturbaciones de una gaussiana. Otra suposición es que $\delta = \frac{\rho}{L} \ll 1$, donde L es la dimensiones macroscópicas en las que se estudia el transporte. Una tercera suposición es que la parcial respecto al tiempo es pequeña del orden: $\frac{\partial}{\partial t} \sim \delta^2 v_t / L$ con v_t la velocidad térmica de la distribución, con lo que se ignoran las oscilaciones de plasma. Las siguiente suposición son sobre el camino libre medio de las partículas, λ , que representa la distancia promedio que recorre una partícula entre colisiones. Asumiendo $\frac{\lambda}{L} \ll 1$ se trabaja en la teoría clásica de transporte y este sólo depende de las colisiones y el campo magnético local mientras que si λ es arbitraria entonces se trabaja con la teórica neoclásica en la que la geometría del campo magnético juega un papel importante. Finalmente la última suposición que se hace es sobre la magnitud de los campos eléctricos presentes y pueden ser $\frac{E}{B} \sim v_t$ ó $\frac{E}{B} \sim \delta v_t$ la primera se usa en la teoría clásica y la segunda en la neoclásica.

A continuación se darán los argumentos cualitativos de las caminatas aleatorias presentes en las dos teorías de transporte para determinar cualitativamente la dependencia del coeficiente de difusión en la dirección perpendicular al campo magnético. Este material se presenta de manera más detallada en [7]

1.2.1. Transporte clásico

La teoría clásica fue desarrollada independientemente por varios autores, el trabajo más conocido es el de [9]. Para que un plasma sea considerado magnetizado se debe cumplir que

$$\nu_{ei} \ll \Omega_e, \quad \nu_{ii} \ll \Omega_i. \quad (1.15)$$

Donde ν_{ei} es la frecuencia de colisiones de la especie e debido a la especie i , $\Omega = \frac{|q|B}{m}$ es la girofrecuencia en el campo magnético y los subíndices i y e son de los electrones. Estas desigualdades garantizan que el movimiento en escalas de tiempo cortas sea determinado por el campo magnético en vez de las colisiones. En el caso de las colisiones coulombianas la frecuencia de colisiones representa el inverso del tiempo promedio que debe transcurrir para que la velocidad se defleccione un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Entonces notando que la posición por el giro de las partículas en el campo magnético es $\vec{r} = \vec{b} \times \frac{\vec{v}}{\Omega}$ se tiene que en este mismo tiempo la colisión haría que la partícula se moviera a otra órbita circular vecina que distaría de la primera una cantidad del orden de el radio de Larmor. Entonces en el tiempo $\frac{1}{\nu}$ las partículas se desplazarían aleatoriamente distancias del orden de ρ el coeficiente de difusión iría como

$$D_{\perp} \sim \nu \rho^2. \quad (1.16)$$

Pues en una caminata aleatoria que da pasos de longitud Δx en intervalos de tiempo Δt el coeficiente de difusión es $D \sim (\Delta x)^2 / \Delta t$.

Si se consideran sólo colisiones entre iones y electrones entonces sus difusiones escalarían de la misma forma porque los giroradios se relacionan mediante $\rho_i = (m_i/m_e)^{1/2} \rho_e$ y sus frecuencias de colisiones mediante $\nu_{ie} = (m_e/m_i) \nu_{ei}$

En la dirección paralela al campo magnético las colisiones reducen la movilidad y simplemente el tamaño del paso entre cada tiempo de colisión es λ por lo que el coeficiente de difusión es

$$D_{\parallel} \sim \nu \lambda^2. \quad (1.17)$$

1.2.2. Transporte Neoclásico

En este caso la geometría del campo magnético juega un papel importante. Las cantidades que muestran su forma general son el factor de seguridad $q = \frac{r B_{\phi}}{R B_{\theta}}$ donde r es el radio medio de la superficie magnética, R la distancia del eje magnético al centro del toro. B_{ϕ} es el campo magnético toroidal y B_{θ} el campo magnético poloidal. Esta cantidad describe aproximadamente que tanto se enrollan las líneas magnéticas en el toro, entre menor sea se tendría una línea de campo magnético que completa más vueltas poloidales por cada vuelta toroidal. La otra cantidad importante es la variable $\epsilon = \frac{r}{R}$ que es conocida como la razón de aspecto inversa. Todas estas variables se ilustran en la figura 1.4. Para superficies magnéticas axisimétricas (Tokamaks) el transporte se divide en 3 regímenes. Divididos por la cantidad conocida como colisionalidad que representa la razón entre la frecuencia de colisiones, ν y la frecuencia de giro poloidal sobre la superficie magnética (frecuencia de tránsito), v_t/qR . También se puede ver como la razón entre la longitud que recorre una partícula en el campo magnético al dar una vuelta poloidal, L , entre el camino libre medio, λ .

El régimen de alta colisionalidad se cumple cuando

$$\frac{L}{\lambda} \sim \frac{\nu}{v_t/qR} \gg 1, \quad (1.18)$$

y es llamado régimen de Pfirsch-Schlüter

El régimen de colisionalidad baja se divide en 2 cuando $\epsilon \ll 1$. El régimen de Plateau que se define en

$$\epsilon^{3/2} \ll \frac{\nu}{v_t/qR} \ll 1, \quad (1.19)$$

y el de Banana

$$\frac{\nu}{v_t/qR} \ll \epsilon^{3/2}. \quad (1.20)$$

Régimen de Pfirsch-Schlüter

Como la frecuencia de colisión excede la de tránsito entonces el movimiento en la dirección paralela al campo magnético es difusivo

$$D_{\parallel} \sim \nu \lambda^2 \sim \frac{v_t}{\nu}. \quad (1.21)$$

Entonces el tiempo que tarda en dar una vuelta poloidal es

$$\Delta t \sim \frac{(qR)^2}{D_{\parallel}} \sim \nu \left(\frac{qR}{v_t} \right)^2. \quad (1.22)$$

El transporte a través de las superficies magnéticas está dado por la velocidad de deriva (ec. 1.7) de curvatura y de gradiente de B . Estas velocidades son de orden $v_d \sim \frac{\rho}{R} v_t$. Cuando está en la mitad superior de la superficie magnética la deriva es hacia superficies magnéticas más cercanas al eje magnético y hacia más alejadas cuando esta en la mitad inferior de su superficie. Esto es lo que produce la caminata aleatoria. Entonces en lo que tarda en dar una vuelta, la velocidad de deriva produce un paso de

$$\Delta r \sim v_d \Delta t \sim \frac{\rho v_t \Delta t}{R}, \quad (1.23)$$

y entonces el coeficiente de difusión escala como

$$D_{\perp} \sim \frac{(\Delta r)^2}{\Delta t} \sim q^2 \nu \rho^2. \quad (1.24)$$

Que es mayor que el coeficiente de transporte clásico por el factor q^2 .

Régimen de Banana

Este régimen recibe su nombre porque las trayectorias que lo causan tienen una forma similar a la fruta tal como se muestra en la figura 1.7. Para describirlas hay que notar que la intensidad del campo magnético decrece con la distancia al centro del toro como $B \propto 1/R$. Entonces en una superficie magnética ocurre el efecto de espejo magnético entre la parte más cercana al centro del toro y la más alejada. La razón entre las intensidades de los campos magnéticos en estos puntos es de $B_{min}/B_{max} = 1 - 2\epsilon$ y entonces de la ecuación 1.11 tenemos que las partículas atrapadas en estos espejos magnéticos son las que se encuentran en $|v_{\parallel}|/v_{\perp} \leq \sqrt{\epsilon}$. Para calcular el radio de estas órbitas consideremos lo siguiente. como ϵ es pequeño entonces la velocidad de las partículas atrapadas es mayoritariamente perpendicular a la línea de campo entonces $v_{\perp} \sim v_t$ y entonces $v_{\parallel} \sim \sqrt{\epsilon} v_t$. Además la distancia típica en la que se extienden son del orden de la necesaria para dar una vuelta poloidal, es decir qR de forma que el periodo de estas órbitas es del orden de $Rq/\sqrt{\epsilon} v_t$ y lo que produce el ancho de las órbitas son las velocidades de deriva de orden $(\rho/R)v_t$ por lo que el ancho de las islas es de orden

$$\delta r_b \sim \frac{\rho q}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (1.25)$$

Típicamente este valor es mucho más grande que ρ , lo que produce un paso largo en la caminata aleatoria.

Debido a que las partículas que dominan en este tipo de transporte se encuentran en un rango de velocidades muy acotado entonces el cambio en la dirección de la velocidad no necesita ser del orden de una vuelta completa para descorrelacionar estas órbitas de banana sino simplemente del mismo orden del rango donde están estas trayectorias en el espacio de velocidades, que es $\sqrt{\epsilon}$. Esto

reduce el tiempo de colisiones necesarias lo que es lo mismo que incremente la frecuencia efectiva de las colisiones. El operador de colisiones dispersa la dirección velocidades difusivamente por lo que la frecuencia efectiva es

$$\nu_{ef} = \frac{\nu}{(\sqrt{\epsilon})^2}. \quad (1.26)$$

Entonces el coeficiente de difusión es

$$D_{\perp} \sim \nu_{ef}(\delta r_b)^2 \sim \frac{q^2}{\epsilon^2} \nu \rho^2. \quad (1.27)$$

Que es mayor que el de Pfirsch-Schlüter por un factor $1/\epsilon^2$.

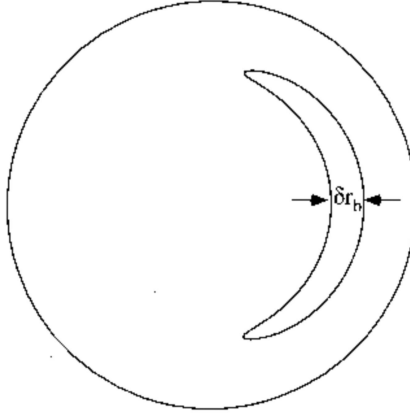


Figura 1.7: Órbita de banana. Imagen tomada de [7]

Régimen de Plateau

Este régimen solo se puede diferenciar de los otros cuando la razón de aspecto es muy grande. Aquí se tiene que la gran mayoría de las órbitas que no están atrapadas son prácticamente no colisionales por lo que no contribuyen mucho al transporte, mientras que por otro lado las órbitas de bananas son constantemente interrumpidas por las colisiones lo que causa que los grandes anchos de las órbitas de banana no se realicen y por lo tanto estas trayectorias no contribuyen mucho al transporte.

Sin embargo en este régimen hay partículas circulantes en un rango de velocidades paralelas lo suficientemente pequeñas como para que su frecuencia de colisiones efectivas, ν_{ef} , sea alta comparada con su frecuencia de tránsito poloidal, ω_{tp} . De forma que se puedan producir caminatas aleatorias del tipo del régimen de Pfirsch-Schlüter. Pero como son partículas circulantes su velocidad paralela también debe ser lo suficientemente alta como para sobrepasar la fuerza de espejo magnético. Por la necesidad de que se cumplan estas dos condiciones, este régimen solo ocurre cuando la razón de aspecto inversa es muy pequeña.

Por lo anterior este conjunto de partículas cumple que

$$\nu_{ef} \sim \omega_{tp}, \quad (1.28)$$

donde

$$\nu_{ef} \sim \nu \left(\frac{v_{\parallel}}{v_t} \right)^{-2}, \quad (1.29)$$

y

$$\omega_{tp} \sim \frac{v_{\parallel}}{qR}. \quad (1.30)$$

De forma que la ec. 1.28 se vuelve

$$\epsilon^{3/2} \ll \left(\frac{v_{\parallel}}{v_t}\right)^3 \sim \frac{\nu}{v/qR} \ll 1, \quad (1.31)$$

donde la primera desigualdad se usa por el requisito de que este conjunto de partículas sea circulante i.e $v_{\parallel}/v \gg \sqrt{\epsilon}$

La proporción de estas partículas es

$$\frac{n_{res}}{n} \sim \frac{v_{\parallel}}{v_t}, \quad (1.32)$$

y son llamadas partículas resonantes. El tamaño de su paso aleatorio es

$$\Delta r \sim \frac{v_d}{\nu_{ef}}. \quad (1.33)$$

De forma que este conjunto de partículas produce un coeficiente de difusión que escala como

$$D_{\perp} \sim \frac{n_{res}}{n} \nu_{ef} (\Delta r)^2 \sim \left(\frac{v_{\parallel}}{v_t}\right)^3 \frac{v_d^2}{\nu} \sim q v_t \rho^2 \sim q^2 \hat{\omega}_{tp} \rho^2. \quad (1.34)$$

Donde $\hat{\omega}_{tp}$ es la frecuencia de transito poloidal típica de la distribución térmica y no del subconjunto que produce el transporte. Se observa que el coeficiente de difusión es independiente de la frecuencia de colisiones ν y de ahí proviene el nombre del régimen.

Finalmente cabe notar que la frecuencia de colisiones es una cantidad que depende de la temperatura y la densidad del plasma por lo que en diferentes superficies magnéticas se encuentran diferentes regímenes de colisionalidad. Y que en el caso asimétrico aparecen nuevos regímenes de colisionalidad.

1.3. Transporte turbulento

Como se dijo en la sección pasada, para calcular el transporte colisional se supuso que la derivada parcial en el tiempo era pequeña y se ignoraba. Esto implica que no se consideran oscilaciones en el plasma. Sin embargo en muchas situaciones estas oscilaciones juegan un papel crucial. Aquí se entiende oscilaciones como perturbaciones respecto de la posición de equilibrio que pueden aparecer en una configuración del plasma. Estas oscilaciones del plasma pueden ser inestables y crecer conforme pasa el tiempo, lo que puede hacer que el plasma afecte la forma impuesta externamente del campo magnético y se pierda el confinamiento. Cuando estas inestabilidades son macroscópicas pueden ser estudiadas con la teoría de fluidos del plasma en donde se encuentra que se pueden prevenir si los parámetros del plasma se restringen a ciertos rangos. Ejemplos de esto es que el factor de seguridad debe cumplir que $q > 1$ y que la relación entre la presión del plasma y la presión magnética β que es proporcional $\sim T/B^2$ debe ser pequeña.

Las inestabilidades también se presentan en escalas pequeñas con una longitud de onda orden del radio de Larmor de los iones. Estas son conocidas como microinestabilidades y generan los mecanismos que provocan el transporte turbulento del plasma. El crecimiento de las ondas después de un tiempo se satura. Este es un problema no lineal complicado de resolver. Las inestabilidades suelen ocurrir como procesos de relajación y disipación de energía en cuyo caso se llaman disipativas, pero también las hay sin pérdida de energía y son llamadas reactivas. La formación de muchas

de estas microinestabilidades son descritas en la referencia [10]. De ellas la más común es la de las ondas de deriva, en la que se extrae energía de los gradientes de presión y temperatura.

Las microinestabilidades pueden ser electrostáticas o electromagnéticas, en el primer caso es el campo eléctrico es el responsable del transporte y en el segundo el magnético. El transporte se produce por una variación caótica de los campos. La escala temporal de estas variaciones suelen ser mayores a la frecuencia de giro de los electrones. Por esto, en el caso de las electrostáticas, el efecto del campo eléctrico se manifiesta a través de la velocidad de deriva que causa:

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (1.35)$$

Entonces la difusión se hace con velocidades típicas $\frac{E}{B}$

$$D_{\perp} \sim \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \sim v_E \Delta x \sim \frac{E}{B} \Delta x. \quad (1.36)$$

Suponiendo que el paso aleatorio es del orden la longitud de onda de las microinestabilidades entonces $E \Delta x \sim \phi$ con ϕ el potencial eléctrico típico de las ondas. Este potencial eléctrico es del orden del valor máximo de saturación de las ondas y es proporcional a la temperatura es decir, $q\phi \sim k_b T$. Por lo que el coeficiente de transporte turbulento escala como

$$D_{\perp} \sim \frac{k_b T}{qB}. \quad (1.37)$$

Con k_b la constante de Boltzmann. Éste es conocido como el coeficiente de difusión de Bohm. Esta cantidad disminuye más lentamente con el campo magnético B^{-1} que el transporte colisional B^{-2} .

1.4. Introducción al modelo de partícula prueba.

El transporte turbulento es complicado de describir analíticamente. Por otro lado, los estudios numéricos son muy demandantes computacionalmente y los resultados obtenidos no son fáciles de interpretar. En vista de esto resulta útil estudiar modelos reducidos en donde se incluyan los fenómenos físicos esenciales.

El presente trabajo se enfoca en un modelo de turbulencia débil en dónde se supone que existe un espectro fijo de fluctuaciones electrostáticas y las partículas se mueven en reacción a él.

El caso más simple para este espectro que reproduce un comportamiento caótico fue estudiado en la referencia [11]. Consiste solo de dos ondas sinusoidales de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = & \phi_{01} \cos(K_{1x}x) \cos[k_{1y}(y - V_{p1}t)] + \\ & \phi_{02} \cos(K_{2x}x) \cos[k_{2y}(y - V_{p2}t)] \end{aligned} \quad (1.38)$$

que producen dinámicas caóticas en partes del espacio cuando se satisface que

- Las velocidades de fase son distintas.
- Las derivas $\vec{E} \times \vec{B}$ son muy parecidas
- La deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ es mas grande que la velocidad de fase.

Si se elige un espectro más amplio de ondas el transporte se vuelve más complicado de describir. Sin embargo si se asume que todas las ondas tienen la misma amplitud y número de onda, entonces las ecuaciones de movimiento se pueden reducir a un mapeo simpléctico Hamiltoniano. Este espectro es el que se utiliza y su mapeo fue estudiado en la referencia [12] en un contexto diferente.

Siguiendo la referencia [1] se extiende el modelo de dos formas:

- Se consideran los efectos de radio de Larmor finitos .
- Se asume que existe un flujo de fondo

Lo primero se hace con el fin de estudiar el transporte de distribuciones térmicas de partículas. Lo segundo se hace para estudiar las observaciones experimentales que indican que los flujos con cizalla reducen el transporte en la dirección perpendicular a ellos. El objetivo de esta tesis es estudiar estos modelos.

El trabajo está organizada de la siguiente forma.

- En el capítulo dos se define el modelo y la geometría para el transporte turbulento que se usa así como sus dos extensiones. También se enuncian los mapeos que rigen la evolución temporal de las partículas y se describe de manera cualitativa sus espacios fase.
- En el capítulo tres se estudia el transporte turbulento sin considerar el flujo.
 - En la sección 3.1 Se encuentra que el mapeo sin giropromediar produce un transporte difusivo con un coeficiente de difusión que, para amplitudes de onda muy grandes, escala con la amplitud al cuadrado. También se explica que se pueden encontrar correcciones al coeficiente de difusión para amplitudes menores y se enuncia cuál es la primera corrección.
 - En la sección 3.2 se obtiene que cuando se toma una distribución térmica y se considera el giropromedio entonces el transporte sigue siendo difusivo pero el coeficiente de difusión del ensamble disminuye exponencialmente con la temperatura. Además la distribución de posiciones de las partículas deja de ser gaussiana al ir incrementando la temperatura y adquiere colas que decaen más lento.

Los resultados obtenidos se corroboran con simulaciones numéricas y concuerdan con lo encontrado en la referencia [1] cuando la amplitud de las ondas es muy grande. Sin embargo el desarrollo se hace considerando la primera corrección al coeficiente de difusión por lo que lo encontrado es válido en un rango mayor de amplitudes

- En el capítulo cuatro se estudia el efecto de incluir un flujo de fondo. Se estudian tres perfiles de flujo: lineal, gaussiano y de escalón. Con simulaciones numéricas se encuentra que el transporte en la dirección perpendicular a ellos prácticamente no cambia para valores de amplitud mayores a uno. Sin embargo en la dirección paralela el transporte cambia significativamente: se vuelve superdifusivo para el perfil lineal, balístico para el de escalón y para el gaussiano se mantiene el transporte difusivo pero aumenta significativamente para valores de amplitud pequeños. Se propone de manera original un procedimiento con el que se obtienen analíticamente los coeficientes de transporte en la dirección paralela y lo obtenido concuerda con las simulaciones.
- En el capítulo cinco se intenta encontrar una explicación ilustrativa al origen de las correcciones del coeficiente de difusión.

-
- En el capítulo seis se presentan las conclusiones.
 - Finalmente en los anexos se presentan las deducciones de los mapeos y la aplicación de un procedimiento presentado en la referencia [13] para obtener la primera corrección al coeficiente de difusión.

Capítulo 2

Modelo de partícula prueba

2.1. Mapeos.

2.1.1. Mapeo sin flujo

Con el siguiente modelo se estudia el transporte turbulento de un ensamble de partículas cargadas magnetizadas[11].

- Se considera un campo magnético uniforme en la dirección \hat{z}

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}. \quad (2.1)$$

Este campo esta asociado a la componente toroidal de un plasma toroidal.

- Se asume que el transporte es producido principalmente por la deriva del centro de guia debida al campo eléctrico:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.2)$$

Donde $\vec{r} = (x, y)$ y x y y están asociadas a las direcciones radiales y poloidales en un plasma toroidal respectivamente.

- Se supone que el campo eléctrico esta dado por el potencial eléctrico dependiente del tiempo mediante

$$\vec{E} = -\nabla\phi(x, y, t). \quad (2.3)$$

- Y se asume que el potencial eléctrico, que representa las fluctuaciones electrostáticas por microinestabilidades, esta dado de la siguiente forma

$$\phi = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n + nt) \quad \theta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{\pi}{2} & n \text{ impar} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Esta expresión describe un conjunto infinito de ondas que se propagan en la dirección y , todas con el mismo número de onda y con velocidades de fase uniformemente espaciadas.

Este modelo ignora la interacción entre los diferentes modos de la onda y la retroalimentación al potencial debida a la dinámica de las partículas. Es decir no es un sistema autoconsistente, sin embargo modelos de este estilo son útiles para obtener interpretaciones físicas simples de procesos complicados.

De las ecuaciones descritas se puede obtener que se esta estudiando un sistema Hamiltoniano donde el potencial eléctrico ϕ normalizado por el campo magnético juega el papel del Hamiltoniano y las variables conjugadas del espacio fase son x y y . Esto pues las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial(\phi/B)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial(\phi/B)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

La evolución temporal de las partículas se puede reducir al siguiente mapeo:

$$\begin{aligned} x_+^{n+1} &= x_+^n - 2\pi A \text{sen}(x_-^n), \\ x_-^{n+1} &= x_-^n + 2\pi A \text{sen}(x_+^{n+1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde $x_{\pm} = x \pm y$. Y cada iteración del mapeo representa un avance de 2π en el tiempo. Los pasos para llegar a esta expresión se describen detalladamente en los anexos en la sección 6.1.

2.1.2. Mapeo sin flujo giropromediando

El modelo anterior es válido cuando el radio de Larmor es muy pequeño comparado con las escalas espaciales relevantes del problema. Sin embargo al tratar con partículas con energías altas o variaciones del campo eléctrico muy grandes en distancias pequeñas, esta condición deja de cumplirse. En estos casos se deben considerar efectos de radio de Larmor finitos, esto se puede hacer promediando las ecuaciones de movimiento sobre una giro-orbita. Este promedio se puede definir de la siguiente forma [14]:

$$\langle \xi \rangle_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(x + \rho \cos \theta, y + \text{sen} \theta) d\theta. \quad (2.7)$$

Donde ρ es el radio de Larmor y (x, y) son las coordenadas del centro de guía. θ es la giro-fase.

Aplicando este promedio a las ecuaciones de movimiento, y en particular al potencial, se obtiene que el nuevo mapeo es:

$$\begin{aligned} x_+^{n+1} &= x_+^n - 2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \text{sen}(x_-^n), \\ x_-^{n+1} &= x_-^n + 2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \text{sen}(x_+^{n+1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donde J_0 es la función de Bessel de primer tipo de orden 0. La deducción de esta expresión se muestra en los anexos en la sección 6.2

2.1.3. Mapeo con flujo

Al modelo hasta ahora descrito se le puede incluir un flujo macroscópico en la dirección y producido también por una deriva $\vec{E} \times \vec{B}$. Esto se hace mediante la inclusión de un potencial $\phi_0(x)$ que solo dependa de x . De modo que el potencial en este caso es:

$$\phi = \phi_0(x) + \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\cos(x - y)\delta(t - (2m)\pi) + \cos(x + y)\delta(t - (2m + 1)\pi)]. \quad (2.9)$$

Con él, la evolución temporal de una partícula se puede dejar expresada como el mapeo a 2 pasos siguiente:

$$\begin{aligned}
x_+^{n+\frac{1}{2}} &= x_+^n + \pi\Omega(x^n), \\
x_-^{n+\frac{1}{2}} &= x_-^n + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+^{n+\frac{1}{2}}) - \pi\Omega(x^n), \\
x_-^{n+1} &= x_-^{n+\frac{1}{2}} - \pi\Omega(x^{n+\frac{1}{2}}), \\
x_+^{n+1} &= x_+^{n+\frac{1}{2}} - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-^{n+1}) + \pi\Omega(x^{n+\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Donde $\Omega(x) = \frac{d\phi_0(x)}{dx}$ es el perfil de velocidades en la dirección y producidas por el flujo. Cada uno de los mapeos representa un avance en el tiempo de π . De nuevo la deducción para este mapeo se puede encontrar en los anexos en la sección 6.3

2.1.4. Mapeo con flujo giropromediando.

Finalmente, si se desea incluir el flujo poloidal y las correcciones de radio de Larmor finito se puede hacer combinando los mapeos anteriores de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
x_+^{n+\frac{1}{2}} &= x_+^n + \pi\Omega_\theta(x^n), \\
x_-^{n+\frac{1}{2}} &= x_-^n + 2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(x_+^{n+\frac{1}{2}}) - \pi\Omega_\theta(x^n), \\
x_-^{n+1} &= x_-^{n+\frac{1}{2}} - \pi\Omega_\theta(x^{n+\frac{1}{2}}), \\
x_+^{n+1} &= x_+^{n+\frac{1}{2}} - 2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(x_-^{n+1}) + \pi\Omega_\theta(x^{n+\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Donde Ω_θ es el perfil de velocidades giropromediado

$$\Omega_\theta(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(x + \rho \cos \theta) d\theta. \tag{2.12}$$

Y de nuevo el mapeo se debe hacer a 2 pasos.

2.2. Características del Espacios fase.

2.2.1. Mapeo sin flujo

El espacio fase del mapeo sin flujo dado por la ecuación (2.6) se muestra en la figura 2.1 para diferentes valores de A . Estos se construyeron graficando las iteraciones del mapeo para diferentes condiciones iniciales. Cada color corresponde a una trayectoria diferente.

En la figura 2.1 a) se observa que espacio fase tiene una periodicidad de 2π en ambos ejes. En este caso $A = 0.01$ es muy cercana a 0 y se observa que la mayoría de las trayectorias son acotadas y orbitan en torno a puntos fijos elípticos localizados en

$$(x, y) = (m\pi, n\pi), \quad (2.13)$$

con n y m números enteros. Estas curvas son llamadas curvas invariantes pues bajo la aplicación del mapeo las partículas que comienzan en ellas permanecen en ellas.

Además existen puntos fijos hiperbólicos localizados en

$$(x, y) = ((m + \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi). \quad (2.14)$$

En torno a ellos existe una pequeña región donde las trayectorias no son acotadas y además presentan un comportamiento estocástico. Esta región es conocida como red estocástica[15].

En la figura 2.1 b) al aumentar A de 0.01 a 0.2 se observa que la región ocupada por la red estocástica aumenta. De acuerdo a [16] el crecimiento es exponencial para valores pequeños de A y tiene un ancho del orden de $\exp(\frac{2A}{\pi})$.

El tamaño de la región ocupada por las orbitas acotadas disminuye, además la diferencia entre sus anchos en la dirección x y la dirección y aumenta, las trayectorias que orbitan en torno a un punto fijo elíptico con $m + n$ par se elongan en la dirección x y si $m + n$ es impar las trayectorias se elongan en la dirección y .

En la figura 2.1 c) se vuelven mas notorios los efectos descritos. Al llegar a $A = 0.4$ en la figura 2.1 d) se observa que los puntos fijos que antes eran elípticos se vuelven hiperbólicos y pasan a formar parte de la red estocástica. Esto da lugar a orbitas acotadas que están divididas en dos partes inconexas. Cada una de estas partes se forma alrededor de puntos fijos elípticos de periodo 2. En este caso se dice que ocurre una bifurcación. Así como los puntos fijos se obtienen de la condición $x_{\pm}^{n+1} = x_{\pm}^n$, los puntos fijos de periodo 2 cumplen que $x_{\pm}^{n+2} = x_{\pm}^n$. A diferencia de los primeros, los de periodo 2 no se encuentran en posiciones fijas independientes de A y cuantos de ellos hay aumenta conforme se incrementa A .

En la figura 2.1 e) con $A = 0.5$ se observa que la región estocástica se esparce sobre una mayor parte del espacio fase y para $A = 1$ en la figura 2.1 f) parece ser que todo el espacio fase es ocupado por la red estocástica. Sin embargo a escalas más pequeñas que la mostrada siguen existiendo regiones con curvas invariantes que a su vez pueden estar separadas en más partes inconexas cada una en torno a puntos fijos de periodos más altos.

2.2.2. Mapeo sin flujo giropromediando

El efecto de giropromediar el mapeo sin flujo fue el de producir una amplitud de las oscilaciones efectivas dada por

$$A \rightarrow J_0(\sqrt{2}\rho)A. \quad (2.15)$$

Con J_0 la función de Bessel del primer tipo de orden 0. Esta función se muestra en la figura 2.2 como función de su argumento, en nuestro caso $x = \sqrt{2}\rho$. En ella notamos que $J_0(0) = 1$, como

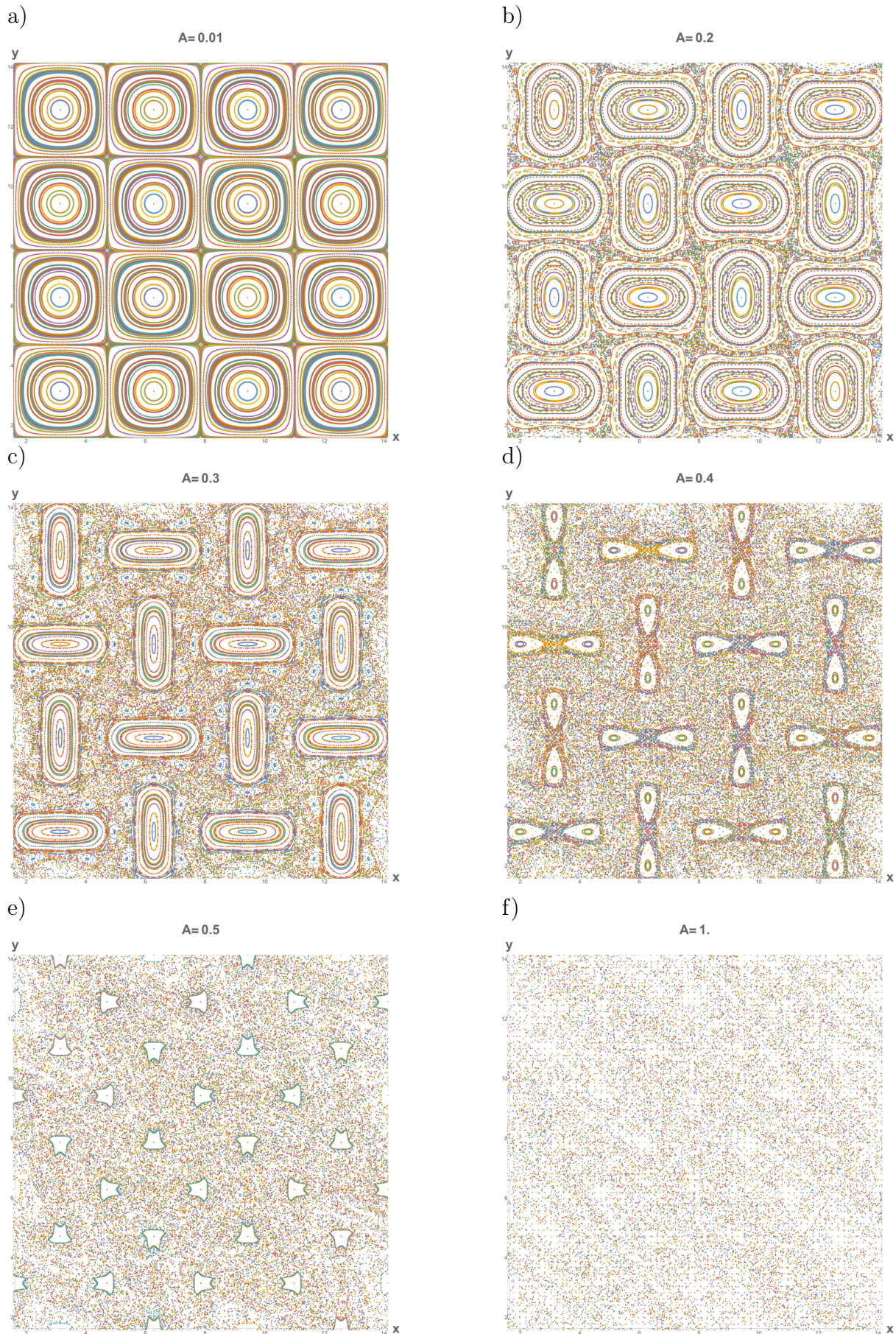


Figura 2.1: Espacio fase del mapeo sin flujo para diferentes valores de A .

debería de ser pues para $\rho = 0$ no hay correcciones por radio de Larmor finito. Además se observa que $J_0(x)$ se hace 0 en una infinidad de valores. Para estos valores de radio de larmor, el modelo predice que las partículas no sentirán efecto alguno por las ondas electricas. También notamos que la amplitud efectiva se hace negativa para otro conjunto de valores. Valores negativos de A producen prácticamente el mismo espacio fase que si A fuera positivo y de la misma magnitud, la única diferencia es una traslación de la siguiente forma

$$(x, y) \rightarrow (x + \pi, y + \pi). \quad (2.16)$$

Finalmente, se muestran en líneas punteadas negras el comportamiento de la amplitud máxima de las oscilaciones para $x \gg 1$. Estas decaen inversamente proporcional a \sqrt{x} . Mientras tanto, las oscilaciones se presentan con un periodo asintótico de 2π . La expansión asintótica de $J_0(x)$ válida para $x \gg \frac{1}{4}$ es [17]

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.17)$$

De esto concluimos que el giropromedio siempre disminuye la amplitud de las ondas efectivas y por lo tanto también reduce el nivel de caos. En la figura 2.3 se muestra como disminuye la región estocástica al considerar efectos de radio finito mediante el giropromedio para un valor de $A = 0.55$ y $\rho = 0.9$.

2.2.3. Mapeo con flujo

La aparición de flujo poloidal produce nuevas características en la estructura del espacio fase para valores pequeños de A . Los perfiles de velocidades $\Omega(x)$ que se usaron en esta sección son los mostrados en la figura 2.4, son 2. El primero consiste en un perfil monótono lineal en un rango acotado de la forma

$$\Omega_1(x) = \begin{cases} \frac{2d}{M}x & \text{si } |x| < \frac{M}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{M}{2}. \end{cases} \quad (2.18)$$

esto se traduce en una recta con pendiente $m = \frac{2d}{M}$ en un intervalo de ancho M centrado en el origen. El segundo perfil de velocidades es no monótono y gaussiano de la forma:

$$\Omega_2(x) = de^{-\left(\frac{4x}{M}\right)^2}, \quad (2.19)$$

que tiene amplitud d y ancho M . El ancho se eligió de forma que fuera de él, el flujo fuera lo suficientemente pequeño para no cambiar la estructura del mapeo sin flujo. En nuestro caso $M = 4\sqrt{2}\sigma$, donde σ es la desviación estándar definida para la distribución normal.

En la figura 2.5 se muestra el espacio fase con perfil de velocidades gaussianos para los parámetros $(\rho, A, d, M) = (0, 0.1, 0.2, 6)$. En ella se muestra la aparición de barreras de transporte. Que son producidas por las curvas invariantes verticales cerca del origen. Estas causan que las partículas que se encuentran en la red estocástica y que en ausencia del flujo tienen trayectorias sin cota en todas direcciones no puedan pasar del lado izquierdo al lado derecho de la zona con flujo. La persistencia de las barreras de transporte para mapeos con flujo no monótonos específicos han sido estudiadas en las referencias [18] y [19], donde se encontró que la región en el espacio de parámetros en que ocurren tiene una estructura fractal.

En la figura 2.6 se gráfica el espacio fase con perfil de velocidades gaussiano para los valores $(\rho, A, d, M) = (0, 0.1, 2, 6)$. En esta se ilustra que si el valor de las velocidades del perfil se aumenta lo suficiente, el espacio fase se vuelve estocástico en la región del flujo, esto a pesar de que el valor de A sea pequeño y el mapeo sin flujo produzca mayoritariamente curvas invariantes.

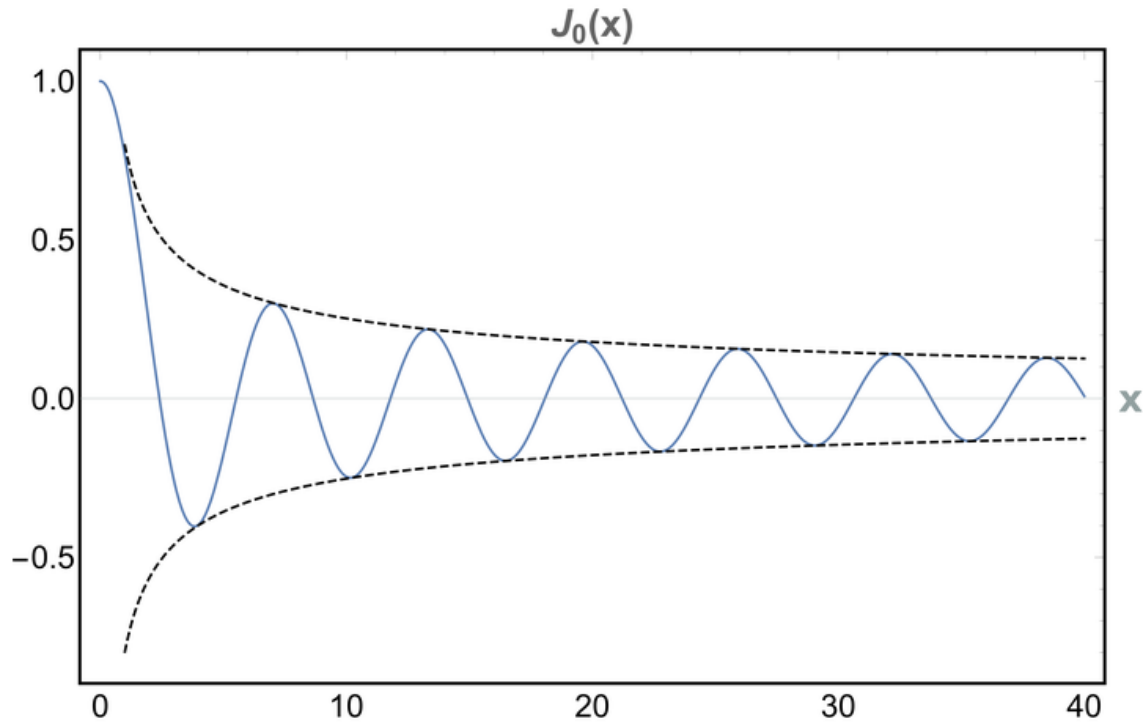


Figura 2.2: Gráfica de $J_0(x)$ la función de Bessel de primer tipo de orden 0

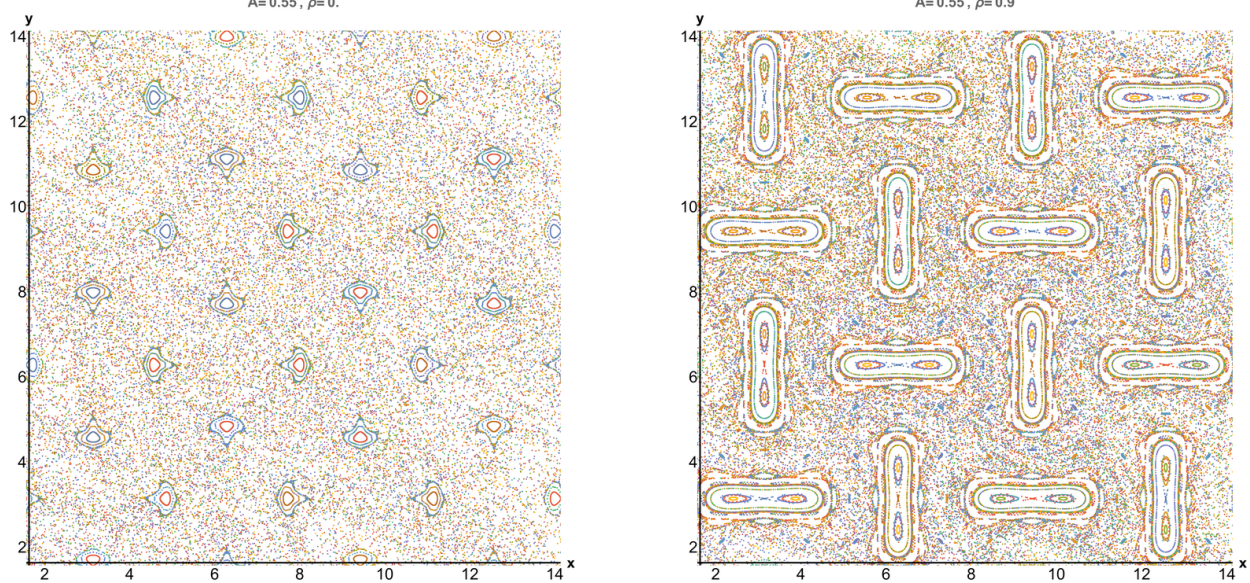


Figura 2.3: Reducción de la región estocástica al aumentar el radio de Larmor de $\rho = 0.0$ (izquierda) a $\rho = 0.9$ (derecha) para una amplitud de las ondas igual a $A = 0.55$.

En la figura 2.7 se muestra el espacio fase con perfil de velocidades gaussiano para los valores $(\rho, A, d, M) = (0, 0.1, 6, 0.1)$. En este caso el perfil de velocidades es grande pero esta restringido a una región muy pequeña. El efecto es la producción de regiones estocásticas en escalas de longitud mayores que la del flujo.

En la figura 2.8 se muestra el espacio fase con perfil de velocidades lineal para los valores $(\rho, A, d, M) = (0, 0.1, 6, 0.1)$. Se puede observar que para este flujo y valor pequeño de A aparecen también barreras de transporte y regiones estocásticas inducidas por flujo.

En la figura 2.9 se muestra el espacio fase con perfil de velocidades gaussiano para los valores $(\rho, A, d, M) = (0, 1, 1.6)$. Esta gráfica ilustra que siempre que $A > 1$ el espacio fase será estocástico independientemente del flujo.

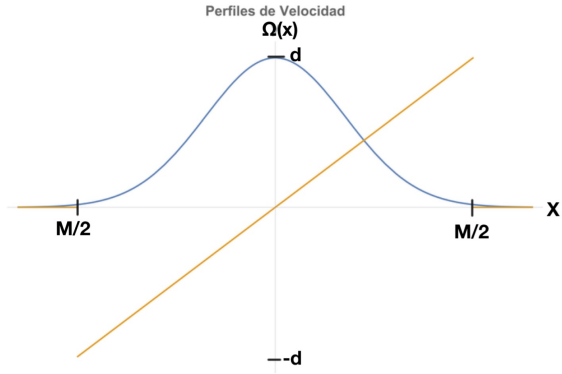


Figura 2.4: Perfiles de velocidad gaussianos y lineales de ancho M y amplitud d

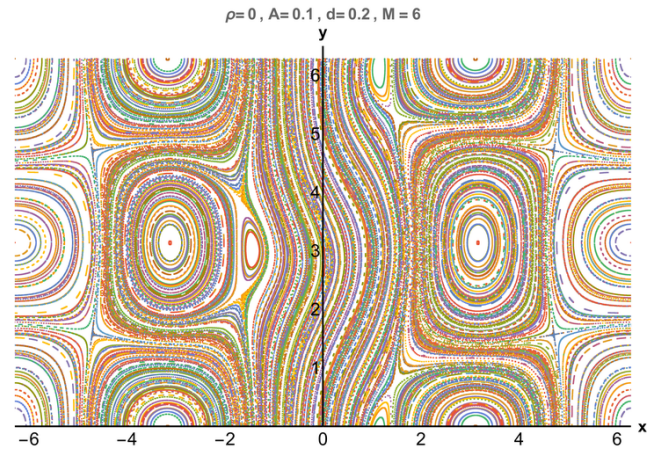


Figura 2.5: Formación de barreras de transporte debidas a un perfil de velocidad gaussiano y valor de A pequeño

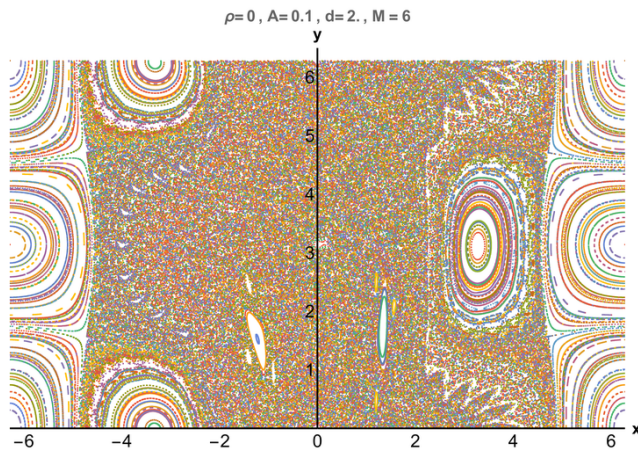


Figura 2.6: Producción de regiones estocásticas debido al flujo para valor de A pequeño

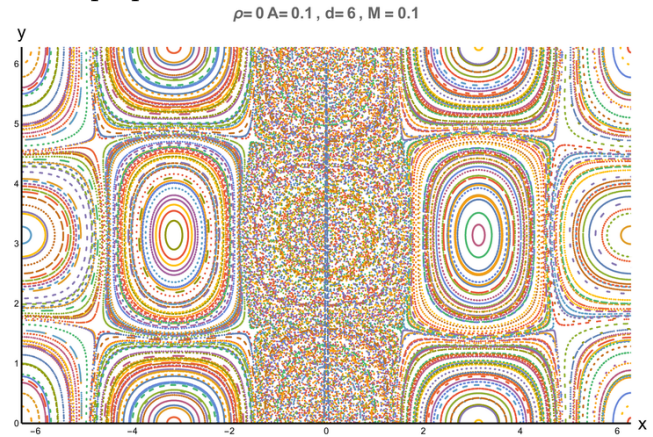


Figura 2.7: Un perfil de velocidades gaussiano altamente localizado produce una región estocástica mucho más grande que su ancho.

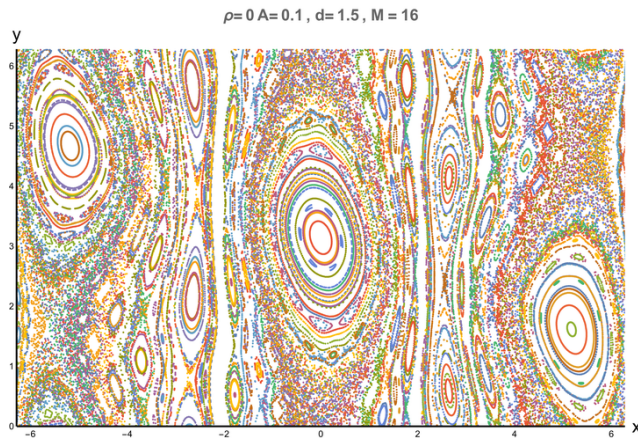


Figura 2.8: El perfil de velocidades lineal también provoca la aparición de barreras de transporte y de regiones estocásticas para valores de A pequeños

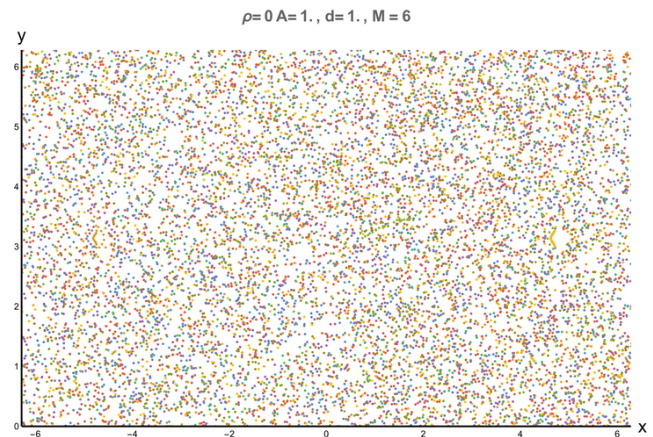


Figura 2.9: Para Valores de amplitud efectiva grandes o velocidades de flujo grandes el espacio fase se vuelve estocástico.

Capítulo 3

Transporte para partículas en ausencia de flujo

3.1. Mapeo sin flujo.

La entropía de Kolmogorov-Sinai, h , para el mapeo sin flujo y para $A \gg 1$ se define, de acuerdo a la referencia [12], como

$$h = 2 \log(\pi A). \quad (3.1)$$

Esta cantidad caracteriza al movimiento de las partículas como estocástico ya que es una medida de la divergencia exponencial de trayectorias inicialmente muy cercanas. Con ella podemos obtener un estimado del número de iteraciones, n_{rand} necesarias para que una población de partículas que inician su movimiento en una región pequeña del espacio fase $\Delta x \Delta y$ evolucionen y llenen aleatoriamente el espacio fase considerando una periodicidad de 2π . Esto se hace mediante la siguiente ecuación,

$$n_{rand} = \frac{\log(\frac{2\pi}{\Delta x})}{h}. \quad (3.2)$$

Por ejemplo, si las partículas comenzaran separadas una distancia no mayor a $\Delta x = 10^{-10}$ y $A = 10$ entonces $n_{rand} = 3.6$. Entonces después del orden de 4 iteraciones las posiciones de las partículas modulo 2π llenarán aleatoriamente el espacio fase. Esta propiedad es conocida como ergodicidad. Esta evolución aleatoria de trayectorias cercanas hace que todo el espacio fase se esté mezclando continuamente lo que reduce la correlación de las trayectorias con su pasos anteriores y hace que la evolución del sistema sea descrita mejor de manera estadística. Entonces podemos hablar de la función de distribución de probabilidad $P(x, n)$ de las partículas. Si suponemos que las trayectorias de las partículas carecen de correlación, entonces podemos expresar la evolución temporal de la siguiente forma

$$P(x, n + 1) = \int P(x - \Delta x, n) W_t(x - \Delta x, n, \Delta x) d(\Delta x). \quad (3.3)$$

donde $W_t(x, n, \Delta x)$ es la probabilidad de que un conjunto de partículas que se encontraban en x durante la iteración n sufran un incremento en x igual a Δx en esa iteración. Expandiendo el integrando a segundo orden en Δx y reacomodando se llega a una ecuación de Fokker-Planck. Ver por ejemplo [13].

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(DP), \quad (3.4)$$

donde

$$B(x) = \int \Delta x W_t(x, n, \Delta x) d(\Delta x) \quad ; \quad D(x) = \int (\Delta x)^2 W_t(x, n, \Delta x) d(\Delta x). \quad (3.5)$$

Son los coeficientes de fricción y difusión respectivamente. Estos están relacionados mediante la igualdad de Landau

$$B = \frac{1}{2} \frac{dD}{dx}. \quad (3.6)$$

Sin embargo después del orden de n_{rand} iteraciones cualquier distribución inicial de las partículas se vuelve aleatoria en el espacio fase con la modularidad considerada. Esto implica que para $n \gg n_{rand}$ D no depende de la posición y por lo tanto la ecuación que describe la función de distribución de las partículas es

$$\frac{\partial P}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Donde se absorbió el factor de 2 dentro de la definición del coeficiente de Difusión. La ergodicidad del mapeo y la suposición de no correlación entre iteraciones consecutivas implica que en vez de usar la ecuación (3.5) para D podemos simplemente hacer un promedio de los desplazamientos cuadráticos sobre el espacio fase de la forma

$$D = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta x)^2 dx dy = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle_{(x,y)}}{2}. \quad (3.8)$$

La ec. (3.7) es una ecuación de difusión estándar. Si ponemos como condición inicial $P(x, 0) = \delta(x)$ la evolución temporal es gaussiana y de la forma

$$P(x, n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} e^{-\frac{x^2}{4Dn}}. \quad (3.9)$$

El ancho de la gaussiana, dado por su desviación estándar σ , crece con el tiempo de la siguiente forma $\sigma^2 = 2Dt$. Este comportamiento es distintivo de los procesos difusivos. La ecuación (3.9) presenta un comportamiento autosimilar por ser de la forma

$$P(x, n) = \frac{1}{\sqrt{Dn}} \mathcal{G}\left(\frac{x}{\sqrt{Dn}}\right). \quad (3.10)$$

Lo que significa que si se usan las variables escaladas

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x/\sqrt{2Dn}, \\ P(\xi_1) &= P(x, n)\sqrt{2Dn}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

entonces todas las Distribuciones de probabilidad que dependen de x , n y D colapsan en la misma distribución

$$P(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}. \quad (3.12)$$

Ahora calculemos el coeficiente de difusión para el mapeo sin flujo usando la ecuación (3.8), el mapeo de la ec. (2.6), así como la transformación inversa $x = (x_+ + x_-)/2$. Se tiene que

$$\Delta x = x^{n+1} - x^n = \pi A(\text{sen}(x_+^{n+1}) - \text{sen}(x_-^n)). \quad (3.13)$$

Como se supone que el espacio fase está distribuido aleatoriamente antes y después de la iteración y que x_+^{n+1} no está correlacionado con x_-^n se tiene que

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \pi^2 A^2 \langle (\text{sen}(x_+^{n+1}) - \text{sen}(x_-^n))^2 \rangle = \pi^2 A^2 (\langle \text{sen}^2(x_+^{n+1}) \rangle + \langle \text{sen}^2(x_-^n) \rangle) = \pi^2 A^2. \quad (3.14)$$

Donde se usó que el promedio de $\sin^2(x)$ sobre periodos completos es $\frac{1}{2}$. Entonces el coeficiente de difusión para el mapeo sin flujo es

$$D = \frac{\pi^2 A^2}{2}. \quad (3.15)$$

Este valor obtenido con la suposición de no correlación entre iteraciones sucesivas del mapeo es conocido como coeficiente de difusión cuasilineal. Cabe notar que este valor se obtiene definiendo a la unidad de tiempo como el tiempo entre iteraciones que es igual a 2π . Los resultados obtenidos se hicieron para la dirección x , los resultados en la dirección y son idénticos para el mapeo sin flujo.

Los resultados hasta ahora obtenidos se corroboraron con una simulación numérica. Para esto se iniciaron 2000 partículas en un cuadrado centrado en el origen de ancho $\delta = 1 \times 10^{-5}$. Se iteraron sus posiciones con el mapeo sin flujo 100 veces para garantizar que 3.2 se cumpliera. Después se iteró 5000 veces más y se calculó la varianza de las posiciones de las partículas cada 200 iteraciones, $S(t)$. Esto se hizo para 300 valores de A distribuidos exponencialmente ($\ln(A)$ uniformemente distribuido) en el rango $[10^1, 10^5]$. De la ec. (3.8) y la ergodicidad se tiene que el coeficiente de difusión y la desviación estándar de un ensamble de partículas se relacionan mediante.

$$D = \frac{S(t)}{2n}. \quad (3.16)$$

Para comprobar que se cumple esta proporcionalidad lineal entre la varianza del ensamble de partículas y el tiempo se hizo un ajuste lineal con parámetro γ a la ecuación

$$S(t) = B(A)n^\gamma, \quad (3.17)$$

es decir a

$$\ln(S) = \ln(B(A)) + \gamma \ln n. \quad (3.18)$$

Se obtuvo un valor de γ para cada A en ambas direcciones. En la figura 3.1 se muestra el histograma para γ_x . Los valores obtenidos se encuentran entre

$$\begin{aligned} \gamma_x &= 1.001 \pm 0.017, \\ \gamma_y &= 1.002 \pm 0.018. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Donde la incertidumbre se consideró como la desviación estándar de la distribución. Entonces el comportamiento sí es lineal en los rangos estudiados con un 2% de incertidumbre. En vez de utilizar la ec. 3.18 para obtener D , se hizo un ajuste lineal al \ln de la ec.3.16. En la figura 3.2 se muestran los valores de $D_x(A)$ obtenidos y su ajuste lineal. Los valores de los ajustes fueron

$$\begin{aligned} \ln(D_x) &= (2.000 \pm 0.002) \ln(A) + (1.60 \pm 0.02), \\ \ln(D_y) &= (2.000 \pm 0.002) \ln(A) + (1.60 \pm 0.02). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Es decir

$$\begin{aligned} D_x &= (4.9330 \pm .09)A^{(2.000 \pm 0.002)}, \\ D_y &= (4.9332 \pm 0.08)A^{(2.000 \pm 0.002)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

y notando que $\pi^2/2 = 4.935$ vemos que la ecuación (3.15) se cumple dentro de la incertidumbre obtenida.

Finalmente en la figura 3.4 se comprueba la autosimilaridad de las funciones de distribución de probabilidad como función del tiempo bajo el reescalamiento 3.11. Esto se hace para los valores de

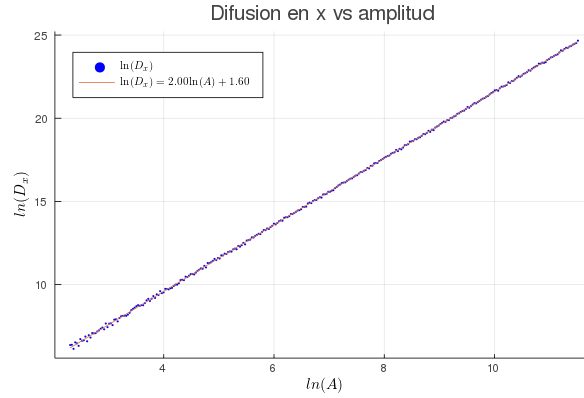
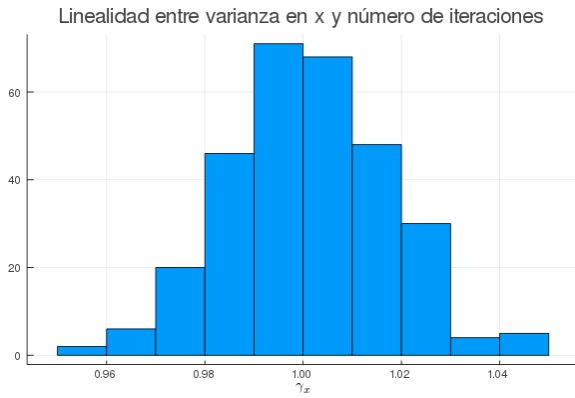


Figura 3.1: Histograma para los valores de γ para comprobar la linealidad de la varianza con el número de iteraciones .

Figura 3.2: Coeficiente de difusión en x , D_x , para A en escala logarítmica. El ajuste lineal es $\ln D = 2.00A + 1.60$

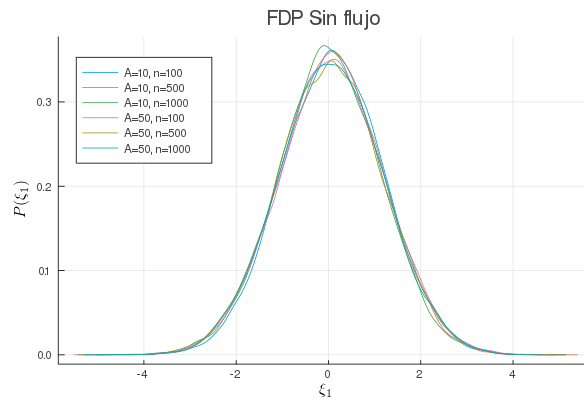
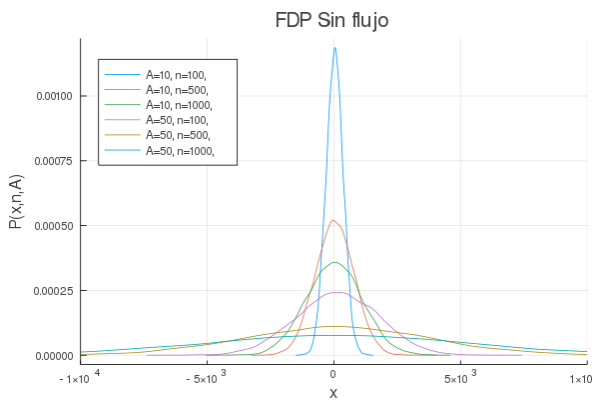


Figura 3.3: funciones de distribución en las iteraciones $x = [100, 500, 1000]$, para los valores de amplitud $A = [10, 30]$

Figura 3.4: funciones de distribución en las iteraciones $n = [100, 500, 1000]$, para los valores de amplitud $A = [10, 30]$ en la variable reescalada $\xi_1 = \frac{x}{\sqrt{Dn}}$

amplitud $A = [10, 30]$ y $n = [10, 500, 1000]$. La diferencia principal de las FDP se presenta cerca del origen. Como referencia también se ponen estas mismas funciones en la figura 3.3.

Los resultados obtenidos se cumplen bien en el rango simulado $A \in [10^2, 10^5]$ sin embargo para valores más pequeños esta descripción debe ser mejorada. En la figura 3.5 se muestran 600 valores uniformemente distribuidos para el coeficiente de difusión en x como función de A en el rango $[0, 30]$. Estos valores se obtuvieron con el mismo número de partículas que antes y de la misma forma. El coeficiente de difusión presenta oscilaciones respecto a A . Las oscilaciones del coeficiente de difusión respecto a parámetros del mapeo fueron observadas por primera vez en la referencia [20] para el mapeo estándar. Este comportamiento puede ser descrito si se considera la correlación entre iteraciones sucesivas del mapeo. Estas correcciones fueron obtenidas por primera vez en [21] para el mapeo estándar. En la sección 6.5 se describe el procedimiento necesario para obtener que para nuestro mapeo

$$D_x = \frac{\pi^2 A^2}{2} (1 + 2J_0(2\pi A) + \mathcal{O}(A^{-1})). \quad (3.22)$$

Donde $J_0(x, 0)$ es la función de Bessel de primer tipo de orden 0. Como se vio en la sección 2.2.2, esta función decae como $1/\sqrt{A}$ para $A > 1$

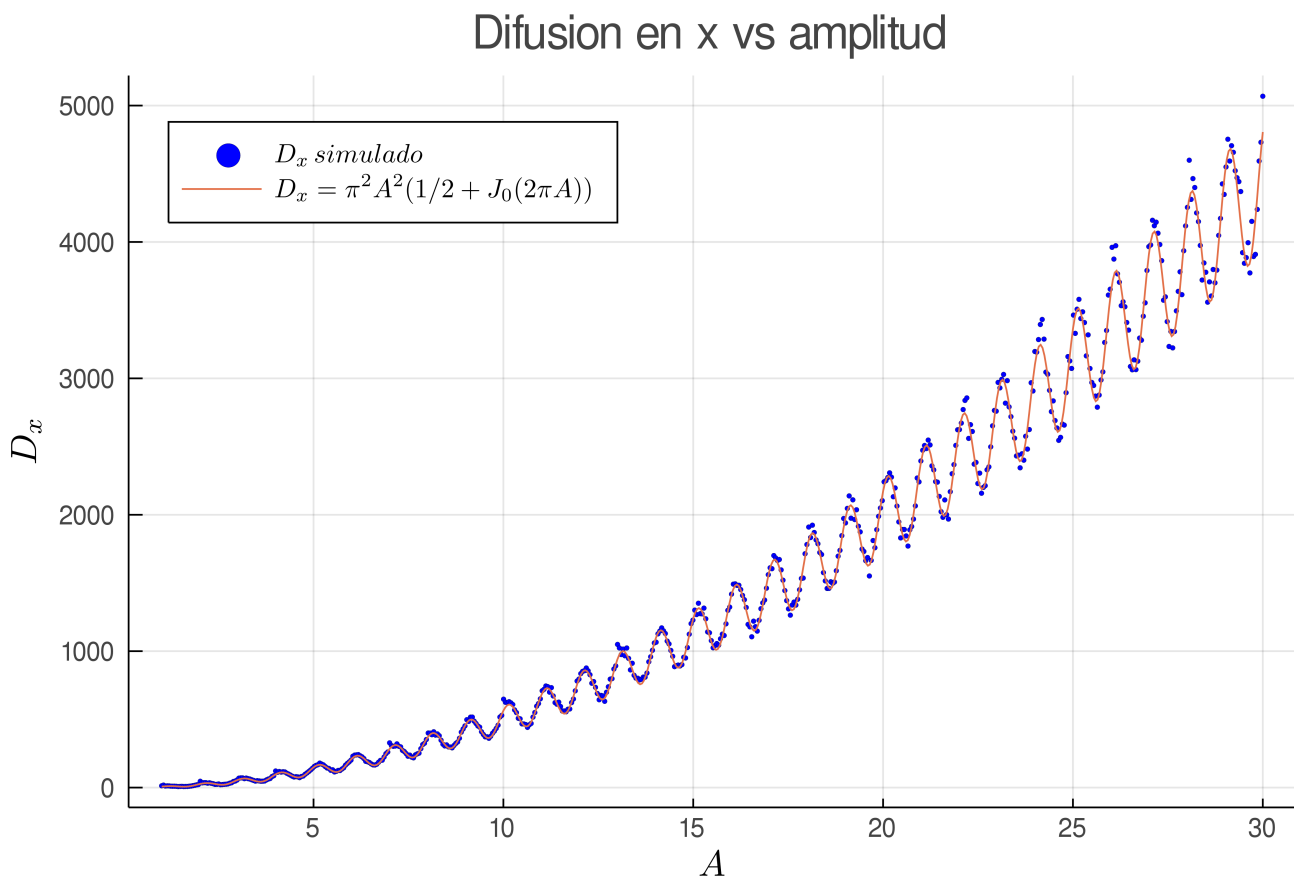


Figura 3.5: Coeficiente de difusión como función de $A \in [1, 30]$. Se observan oscilaciones entorno al valor quasilineal.

3.2. Distribución térmica para mapeo sin flujo giropromediando

Si se consideran ensambles de partículas con radio de Larmor constante, ρ , los resultados de la sección pasada se aplican directamente a este mapeo con la identificación $A \rightarrow J_0(\sqrt{2}\rho)A$. Sin embargo, si los radios de Larmor están dados por una distribución térmica entonces la evolución temporal de cada partícula se obtendrá con un mapeo con parámetro de amplitud diferente y el comportamiento estadístico del ensamble sera diferente al caso anterior. Este problema fue estudiado en [1] para el caso cuasilineal. Aquí reproduciremos su trabajo considerando la correlación de las iteraciones del mapeo.

Comencemos considerando una distribución térmica de radios de Larmor dada por

$$f_{th}(\rho) = \frac{2\rho}{\rho_{th}^2} e^{-\left(\frac{\rho}{\rho_{th}}\right)^2}. \quad (3.23)$$

Esto se obtiene de que la velocidad del ensamble térmico tienen una distribución maxwelliana y $\rho \propto |v_\perp|$. Aquí $\rho_{th} = \frac{\sqrt{2mK_bT}}{|q|B_0}$ el radio de Larmor térmico del ensamble. Este es una medida del radio de Larmor típico del ensamble. De acuerdo a las secciones pasadas las partícula con radio de Larmor ρ evolucionan con un mapeo con amplitud efectiva $AJ_0(\sqrt{2}\rho)$ por lo que de acuerdo a (3.22) tendrán un coeficiente de difusión dado por

$$D_\rho = \frac{\pi^2 A^2 J_0^2(\sqrt{2}\rho)}{2} (1 + 2J_0(2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho))). \quad (3.24)$$

Esta función se gráfica para $A = 10$ en la figura 3.6.

Además, se difunden en el espacio y el tiempo con la función de distribución de probabilidad

$$f_\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\rho n}} e^{-\frac{x^2}{4D_\rho n}}. \quad (3.25)$$

Como la evolución de las partículas es independiente del de las otras, la distribución del ensamble térmico será un promedio pesado por la distribución térmica de radios de Larmor de las gaussianas descritas.

$$P(x, n) = \int_0^\infty f_{th}(\rho) f_\rho(x, t) d\rho. \quad (3.26)$$

Como ambos integrandos estan normalizados, también lo esta P . Podemos observar que esta distribución sigue presentando un comportamiento difusivo al obtener la varianza de la distribución, σ^2

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) = \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left[\int_0^\infty f_{th}(\rho) f_\rho(x, t) d\rho \right] dx = \int_0^\infty f_{th}(\rho) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\rho(x, t) dx \right] d\rho \\ &= n \int_0^\infty f_{th}(\rho) (2D_\rho n) d\rho = 2\langle D \rangle n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Esta proporcionalidad directa con el tiempo, o en nuestro caso, con el número de iteración es la propiedad distintiva del comportamiento difusivo. El coeficiente de difusión promedio depende de ρ_{th} y A y es igual a

$$\langle D \rangle = \int_0^\infty \frac{2\rho}{\rho_{th}^2} e^{-\left(\frac{\rho}{\rho_{th}}\right)^2} \frac{\pi^2 A^2 J_0^2(\sqrt{2}\rho)}{2} (1 + 2J_0(2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho))) d\rho. \quad (3.28)$$

El primer término es el coeficiente de difusión promedio cuasilineal, $\langle D \rangle_{cl}$, y tiene expresión analítica pero el segundo no. Podemos reescribirlo como

$$\langle D \rangle_{\rho} = \frac{\pi^2 A^2}{2} \left[e^{-\rho_{th}^2} I_0(\rho_{th}^2) + \int_0^{\infty} \frac{4\rho}{\rho_{th}^2} e^{-\left(\frac{\rho}{\rho_{th}}\right)^2} J_0^2(\sqrt{2}\rho) J_0(2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho)) d\rho \right], \quad (3.29)$$

donde I_0 es la función modificada de Bessel de primera especie de orden cero. En la figura 3.7 se gráfica $\frac{\langle D \rangle_{\rho}}{D_0}$ con $D_0 = \pi^2 A^2 / 2$ para $A = 1$.

La función de densidad de probabilidad es

$$P(x; n, A, \rho_{th}) = \int_0^{\infty} \frac{2\rho}{\rho_{th}^2} e^{-\left(\frac{\rho}{\rho_{th}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{\rho} n}} e^{-\frac{x^2}{4D_{\rho} n}} d\rho. \quad (3.30)$$

En el caso cuasilineal con

$$D_{cl} = \pi^2 A^2 J_0^2(\sqrt{2}\rho) / 2 = \langle D \rangle_{cl} J_0(\sqrt{2}\rho) \frac{e^{\rho_{th}^2}}{I_0(\rho_{th}^2)}, \quad (3.31)$$

la distribución de probabilidad tiene un escalamiento autosimilar con la variable $\xi = \frac{x}{\sqrt{2\langle D \rangle_n}}$ por ser de la forma

$$P_{cl}(x; n, A, \rho_{th}) = \frac{1}{\sqrt{2\langle D \rangle_n}} \mathcal{G} \left(\frac{x}{\sqrt{2\langle D \rangle_n}}, \rho_{th} \right). \quad (3.32)$$

De modo que podemos escribir

$$P_{cl}(\xi, \rho_{th}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{I_0(\rho_{th}^2)}}{e^{\rho_{th}^2} J_0(\sqrt{2}\rho)} \frac{2\rho}{\rho_{th}} \exp \left(\frac{\xi^2}{2} \frac{I_0(\rho_{th}^2)}{e^{\rho_{th}^2} J_0^2(\sqrt{2}\rho)} - \frac{\rho^2}{\rho_{th}^2} \right) d\rho. \quad (3.33)$$

Sin embargo cuando se considera el coeficiente de difusión completo, la autosimilaridad deja de ser exacta. A continuación se comparan los resultados teóricos con simulaciones numéricas.

En la figura 3.6 se muestra la dependencia del coeficiente de difusión con D_{ρ} en la dirección x como función del radio de Larmor ρ para $A = 10$. La simulación se realizó con 4000 partículas y 5000 iteraciones ajustando que se iniciaban en un cuadrado de ancho $\delta x = 1 \times 10^{-8}$ en torno a un punto hiperbólico. El coeficiente de difusión se obtuvo del ajuste lineal de la relación entre la varianza y el número de iteración que se calculaba cada 200 iteraciones. Los resultados obtenidos coinciden con lo predicho en la ecuación (3.24).

En la figura 3.7 se muestra el coeficiente de difusión promedio dado por la ecuación (3.29) y las respectivas simulaciones. Los coeficientes de difusión se obtuvieron igual que antes solo que en vez de usar radios de Larmor iguales, se elegían aleatoriamente de la distribución térmica (3.23). Para lograr esto se usa el método de la transformada inversa [22], con el cual se obtiene que si u es una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$ entonces se obtienen radios de Larmor aleatorios ρ_{rnd} con distribución térmica de ancho ρ_{th} mediante la transformación

$$\rho_{rnd} = \rho_{th} \sqrt{|\log(1 - u)|}.$$

De nuevo se aprecia la coincidencia con la predicción teórica.

En la figura 3.8 se muestran las funciones de distribución de probabilidad para diferentes parámetros. Estas se obtuvieron de un ensamble de 10^5 partículas. En cada gráfica se muestran las funciones de probabilidad con $A = [10, 100]$ y en las iteraciones $n = [500, 1000]$ como función de la variable reescalada $\xi = x / \sqrt{\langle D \rangle_{cl} n}$ así como su predicción teórica dada por la ec. (3.30). Las gráficas de arriba hacia abajo tienen $\rho_{th} = [0.1, 1, 10]$ y las gráficas de la izquierda son en escala

natural mientras que en las de la derecha el eje vertical esta en escala logarítmica. Se observa que en cada gráfica las 4 funciones de probabilidad con diferentes valores de A y n colapsan en una misma que coincide con la curva teórica cuasilineal salvo en la región muy cercana al origen. Esta diferencia muy probablemente se deba a un mal ajuste computacional de los histogramas. En general no se observan diferencias en la forma de las distribuciones debido a las correcciones del coeficiente de difusión.

Además se observa de las gráficas en escala logarítmica que para radio de Larmor térmico ρ_{th} muy pequeño la distribución es normal

$$P(\xi, \rho_{th} \rightarrow 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Mientras que para $\rho_{th} \gg 1$ se obtiene una distribución con colas exponenciales.

$$P(\xi, \rho_{th} \gg 1) \approx \frac{m}{2} e^{-m|\xi|},$$

con m función de ρ_{th} . Esto pues en esta escala se aprecia la forma de parábola y recta respectivamente.

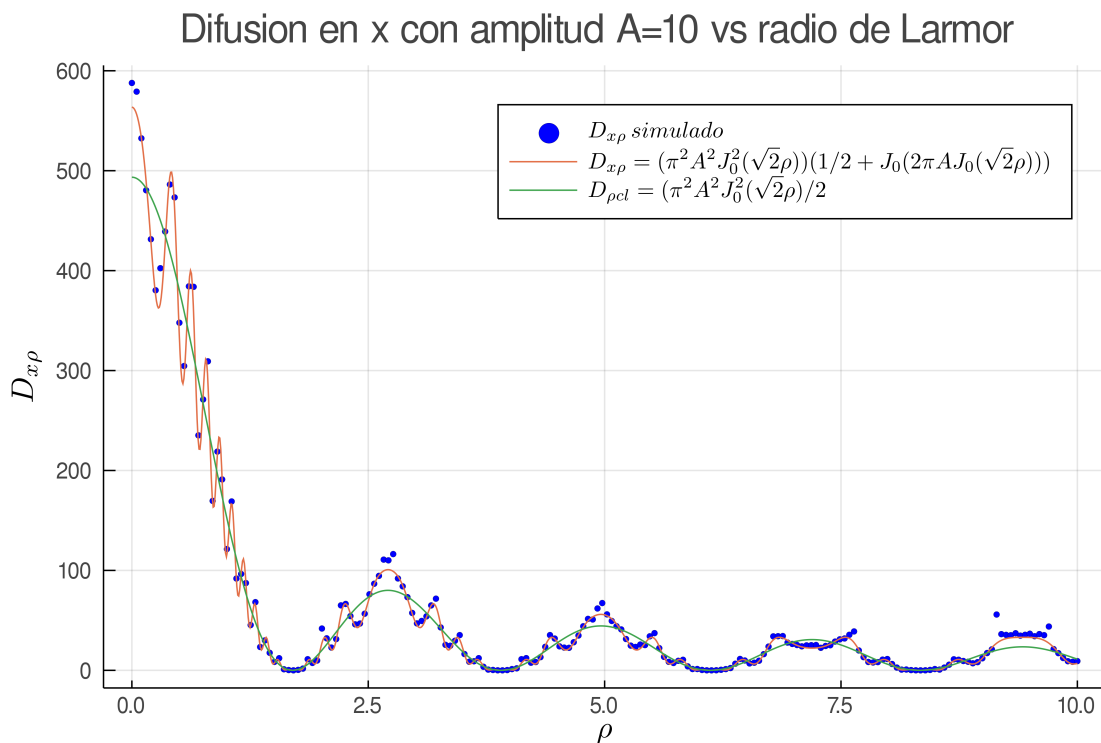


Figura 3.6: Simulaciones para el coeficiente de difusión como función del radio de Larmor ρ para $A = 10$ (puntos azules). Coeficiente de difusión cuasilineal (línea verde). Coeficiente de difusión con correlación (línea naranja).

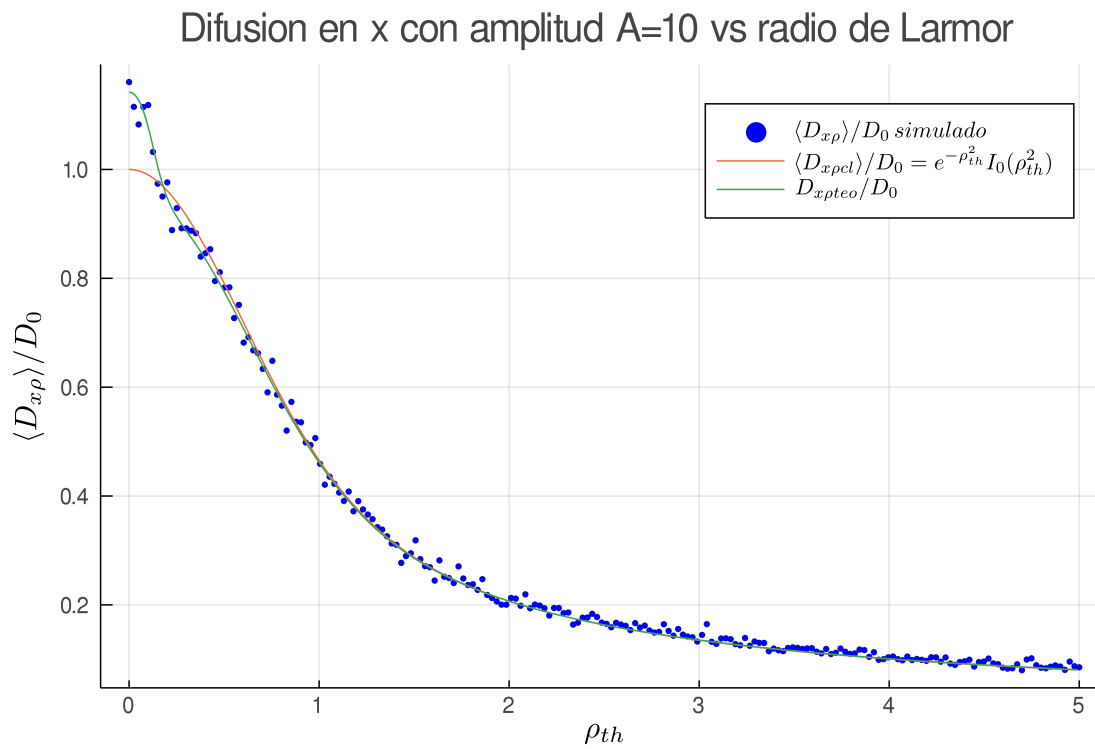


Figura 3.7: Simulación del coeficiente de difusión promedio del ensemble térmico de partículas (azul). Coeficiente de difusión cuasilínea (línea naranja). Coeficiente de difusión correlación (línea verde).

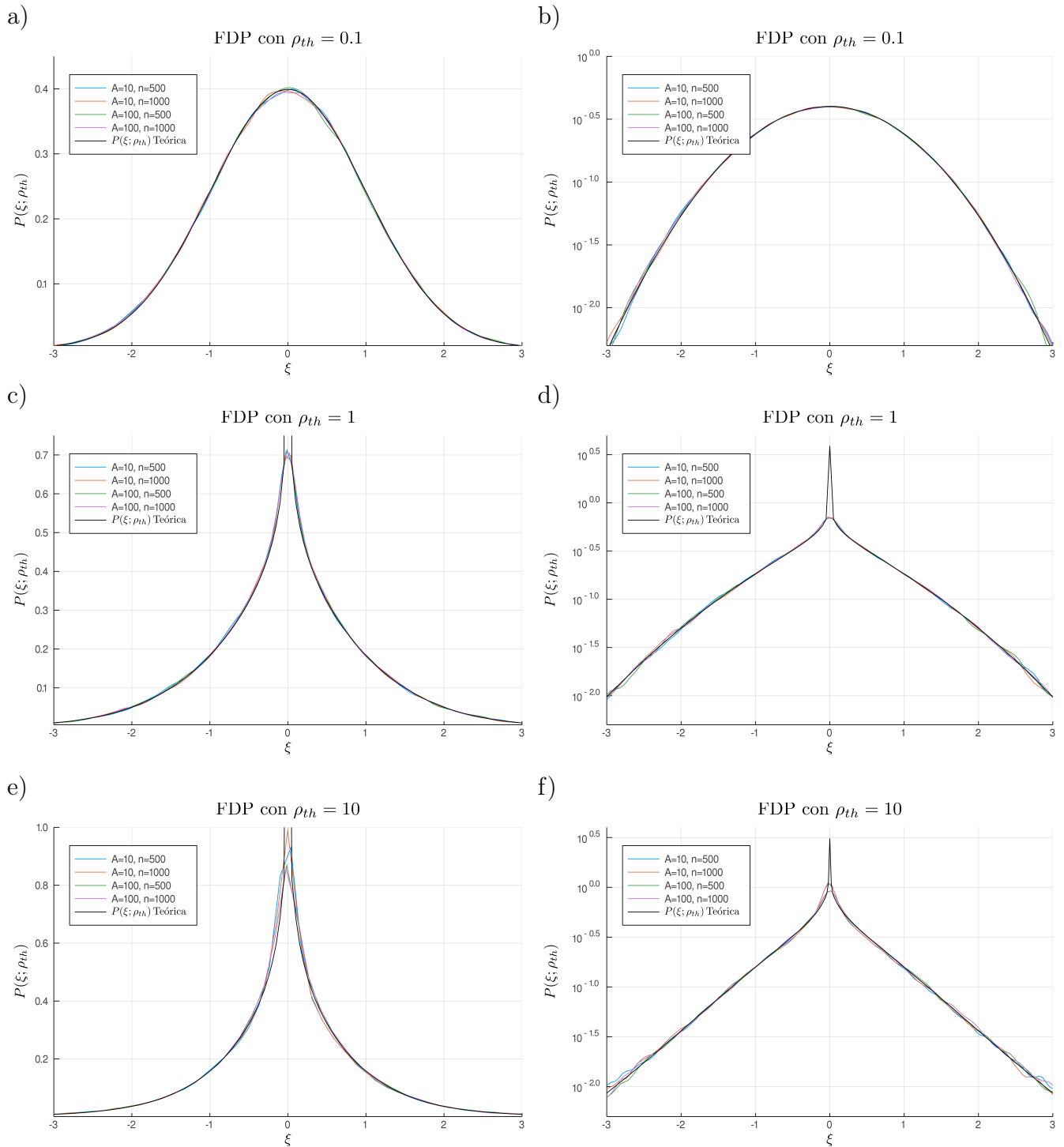


Figura 3.8: Funciones de distribución de probabilidad simuladas y teóricas como función de la variable autosimilar reescalada $\xi = x/\sqrt{\langle D \rangle_{cl} n}$ para valores de $A = [10, 100]$, $n = [500, 1000]$. De arriba a abajo $\rho_{th} = [0.1, 1, 10]$. La columna izquierda es en escala natural y en la derecha el eje vertical tiene escala logarítmica.

Capítulo 4

Transporte para partículas con flujo

4.1. Flujo lineal

Si se considera un flujo lineal no acotado de la forma

$$\Omega(x) = mx \quad x \in [-\infty, \infty], \quad (4.1)$$

el mapeo sin giropromediar, dado por la ec. (4.24), es

$$\begin{aligned} x_+^{n+\frac{1}{2}} &= x_+^n + m\pi x^n, \\ x_-^{n+\frac{1}{2}} &= x_-^n + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+^{n+\frac{1}{2}}) - m\pi x^n, \\ x_-^{n+1} &= x_-^{n+\frac{1}{2}} - m\pi x^{n+\frac{1}{2}}, \\ x_+^{n+1} &= x_+^{n+\frac{1}{2}} - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-^{n+1}) + m\pi x^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Además, se observa que al aplicar el giropromedio al flujo (ec. 2.12) éste permanece invariante para cualquier ρ . Por lo que el mapeo de la ec.(4.2) es igual al giropromediado si se hace la identificación a la amplitud equivalente $A \rightarrow AJ_0(\sqrt{2}\rho)$.

Se procede a estudiar numéricamente las propiedades estadísticas del mapeo de la misma forma que en el capítulo anterior. Para esto se inician 4000 partículas distribuidas aleatoriamente en un cuadrado de longitud $\delta x = 10^{-5}$ centrado en el origen. Se itera el mapeo 5000 veces y se calcula la varianza, σ^2 del ensamble cada 200 pasos. Esto se hizo para 600 valores de A uniformemente distribuidos en el intervalo $[1, 30]$ y con $m = 1$. Finalmente se hizo un ajuste potencial entre σ^2 como función del número de iteraciones, n , de la siguiente forma

$$\sigma^2 \propto n^\gamma. \quad (4.3)$$

Y se obtuvieron los valores de γ en ambas direcciones para cada valor de A. Se observó lo siguiente:

- En la dirección de x el comportamiento sigue siendo difusivo como lo muestra la figura 4.1 en donde se gráfica un histograma de γ_x . Estos valores presentan una media y una desviación estándar de

$$\gamma_x = 1.00 \pm 0.01. \quad (4.4)$$

Lo que muestra la proporcionalidad lineal entre la varianza y el tiempo que es la característica distintiva del comportamiento difusivo. La constante de proporcionalidad de esta relación se define como dos veces el coeficiente de difusión $2D_x$.

A pesar de que el flujo solo es en la dirección y la difusión en x se ve afectada. Como se muestra en la gráfica de la figura 4.2, desaparecen las oscilaciones que se observan en la figura 3.2 para el caso cuando no hay flujo. Estas oscilaciones se producen por la correlación de iteraciones sucesivas del mapeo. El hecho de que los valores de difusión se acerquen más al valor cuasilineal implica una disminución de esta correlación.



Figura 4.1: Histograma para los valores de γ para comprobar la linealidad de la varianza con el número de iteraciones .

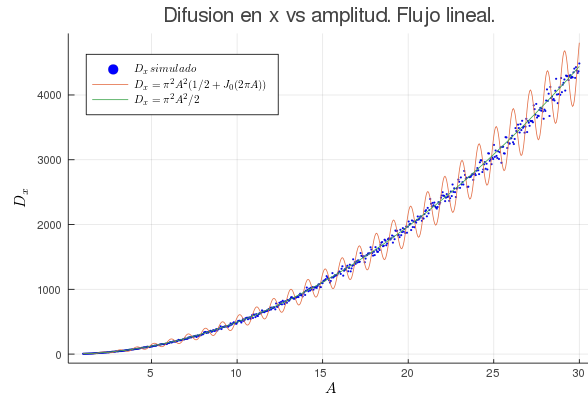


Figura 4.2: Coeficiente de difusión en x , D_x , como función de A . En naranja se muestra el coeficiente de difusión en ausencia de flujo y en verde el valor cuasilineal.

- En la dirección y el comportamiento cambia drásticamente. En la figura 4.3 se muestra el histograma de valores de γ_y obtenidos para cada valor de amplitud A . El valor promedio obtenido es

$$\gamma_y = 3.01 \pm 0.01. \quad (4.5)$$

Esto indica un comportamiento no difusivo superbalístico. Este comportamiento se puede explicar cualitativamente de la siguiente forma: Si solo existiera el flujo en la dirección y y las partículas tuvieran coordenadas en x fijas y distribuidas simétricamente entonces la trayectoria de las partículas sería balística (a velocidad constante) y entonces la desviación estandar sería proporcional al tiempo, es decir su varianza incrementaría con el tiempo al cuadrado $\sigma^2 \propto n^2$. Sin embargo la parte caótica del mapeo sin flujo produce que las partículas se dispersen en el eje x difusivamente, esto a su vez causa que en promedio se tengan partículas más alejadas del origen y por lo tanto que se encuentren en zonas con valor de flujo cada vez más alto. Por eso concluimos que la varianza debe comportarse superbalísticamente.

Para calcular cuantitativamente el comportamiento a primer orden de la varianza podemos simplificar nuestro mapeo considerando solo la evolución difusiva en el eje x y el flujo en el eje y . Es decir, se ignora el efecto del mapeo sin flujo en el eje y . En la siguiente sección se calcula la evolución temporal de la varianza producida por este mapeo.

4.2. Mapeo simplificado.

El mapeo simplificado es

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \chi_n, \\ y_n &= y_{n-1} + 2\pi m x_n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

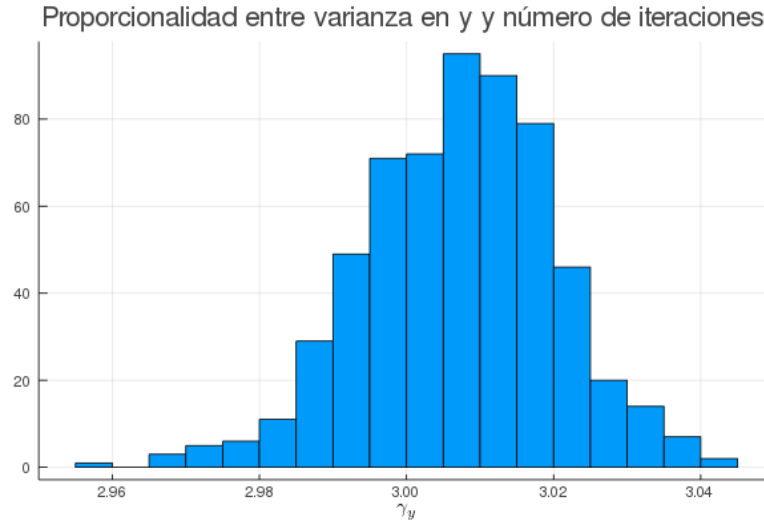


Figura 4.3: Histograma para los valores de γ_y para obtener la proporcionalidad de la varianza con una potencia del número de iteraciones .

Donde χ_n es una variable aleatoria con distribución normal centrada en 0 y desviación estándar igual a σ . Es decir su función de distribución de probabilidad, f_{χ_n} es

$$f_{\chi_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\chi_n^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.7)$$

La desviación estándar se ajusta más adelante de forma que el comportamiento difusivo en x sea el obtenido en el mapeo real.

Suponiendo $x_0 = y_0 = 0$ tendríamos para la n -ésima iteración

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=1}^n \chi_i, \\ y_n &= 2\pi m \sum_{i=1}^n x_i = 2\pi m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \chi_j = 2\pi m \sum_{i=1}^n i \chi_{n+1-i}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Al ser y_n suma de variables aleatorias normales con igual desviación estándar entonces la función de distribución de probabilidades de y_n es también normal.

$$f_{y_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y_n^2}{2\sigma_y^2}}. \quad (4.9)$$

Para encontrar la desviación estándar obtenemos el promedio del cuadrado de y_n

$$\langle y_n^2 \rangle = 4\pi^2 m^2 \left\langle \left(\sum_{i=1}^n i \chi_{n+1-i} \right)^2 \right\rangle = 4\pi^2 m^2 \left\langle \sum_{i=1}^n i^2 \chi_{n+1-i}^2 \right\rangle + 8\pi^2 m^2 \left\langle \sum_{(i,j), i \neq j} i j \chi_{n+1-i} \chi_{n+1-j} \right\rangle. \quad (4.10)$$

El segundo término es igual a 0 por ser momentos impares de la distribución normal. El primer término es igual a

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n i^2 \chi_{n+1-i}^2 \right\rangle &= \int_{\chi_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\chi_n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n i^2 \chi_{n+1-i}^2 \right) f_{\chi_1} \cdots f_{\chi_n} d\chi_1 \cdots d\chi_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\chi_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\chi_n=-\infty}^{\infty} (i^2 \chi_{n+1-i}^2) f_{\chi_1} \cdots f_{\chi_n} d\chi_1 \cdots d\chi_n \\
&= \sum_{i=1}^n i^2 (1)^{(n-1)} \int_{\chi_{n+1-i}=-\infty}^{\infty} \chi_{n+1-i}^2 f_{\chi_{n+1-i}} d\chi_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n i^2 \sigma^2. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\langle y_n^2 \rangle = 4\pi^2 m^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n i^2 = 4\pi^2 m^2 \sigma^2 \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{4.12}$$

y para $n \gg 1$

$$\langle y_n^2 \rangle = \sigma_{y_n}^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{3} \sigma^2 n^3. \tag{4.13}$$

El número de iteraciones es directamente proporcional al tiempo por lo que la varianza de y escala con el tiempo al cubo. Esto indica el comportamiento superdifusivo .

De igual forma x_n sigue una distribución normal y siguiendo un procedimiento análogo al hecho para y_n se obtiene que su varianza es igual a

$$\sigma_{x_n}^2 = \sigma^2 n. \tag{4.14}$$

Como el coeficiente de difusión en el eje x , D_x se obtiene de

$$D_x = \frac{\sigma_{x_n}^2}{2n} = \frac{\sigma^2}{2}. \tag{4.15}$$

Entonces

$$\sigma_{y_n}^2 = \frac{8\pi^2 m^2 D_x}{3} n^3. \tag{4.16}$$

En nuestro caso el coeficiente de difusión en x , $D_x = \frac{\pi^2 A^2}{2}$ Por lo que la varianza en y es

$$\sigma_{y_n}^2 = \frac{4\pi^4 A^2 m^2}{3} n^3. \tag{4.17}$$

En este caso la constante de proporcionalidad ya no es un coeficiente de difusión sino simplemente un coeficiente de transporte T_{y1}

$$T_{y1} = \frac{4\pi^4 A^2 m^2}{3}. \tag{4.18}$$

Si se hubiera considerado el comportamiento difusivo en la dirección y simplemente se hubiera agregado el termino correspondiente de la difusión a la varianza. Entonces en realidad

$$\sigma_{y_n}^2 = 2D_x n + T_{y1} n^3. \tag{4.19}$$

Pero claramente el segundo termino es el que domina para n grande. En la siguiente sección se trata un perfil de flujo para el que es necesario no ignorar este término.

Para comprobar que el coeficiente de transporte obtenido es correcto se hizo una nueva simulación con el mismo procedimiento que antes, esta vez para 120 valores uniformemente distribuidos de A en $[0, 30]$ para valores de pendiente del flujo $m = [1, 2, 3, 4, 5]$. Los resultados de la simulación indican que se tiene un buen ajuste tal como se muestra en la figura 4.4.

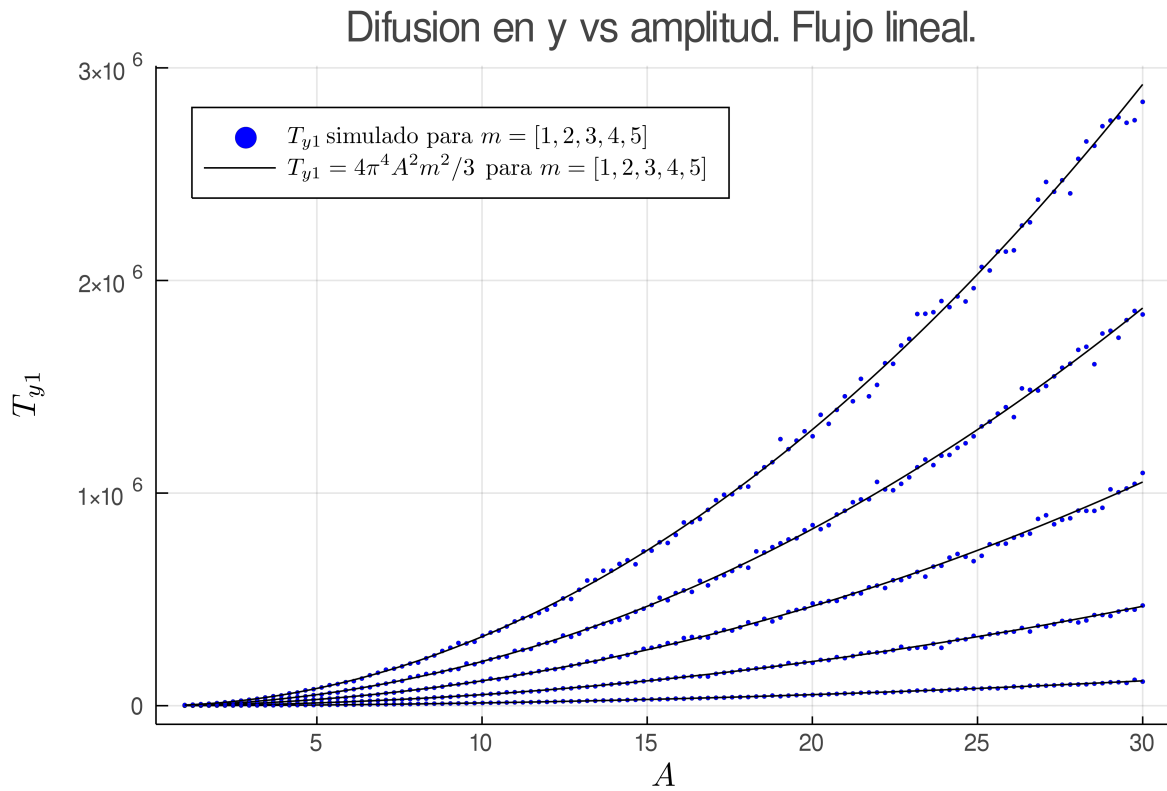


Figura 4.4: Coeficiente de transporte T_{y1} como función de la amplitud A para los valores de pendiente de flujo $m = [1, 2, 3, 4, 5]$. En azul se muestran los puntos simulados y en negro las curvas teóricas respectivas.

4.2.1. Autosimilaridad

Se encontró que la función de distribución de probabilidad en la dirección y es Gaussiana y esta dada por

$$P_y(y; n, A, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^3 T_1}} e^{-\frac{y^2}{2T_1 n^3}}. \quad (4.20)$$

De donde se observa que se presenta una autosimilaridad bajo la variable reescalada

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{T_1 n^3}}. \quad (4.21)$$

en este caso todas las distribuciones de probabilidad de esta variable colapsan en la distribución normal. De manera análoga al procedimiento de la sección 3.2 se puede considerar el caso de una población de partículas térmicas con radios de Larmor variables y obtener la distribución de probabilidad en términos de la variable reescalada $\xi = \frac{y}{\sqrt{\langle T_1 \rangle n^3}}$ con $\langle T_1 \rangle$ el coeficiente de transporte promedio de la distribución. El resultado es idéntico al encontrado previamente en la ec. (3.33) .

$$P_{cl}(\xi, \rho_{th}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{I_0(\rho_{th}^2)}}{e^{\rho_{th}^2} J_0(\sqrt{2}\rho)} \frac{2\rho}{\rho_{th}} \exp\left(\frac{\xi^2}{2} \frac{I_0(\rho_{th}^2)}{e^{\rho_{th}^2} J_0^2(\sqrt{2}\rho)} - \frac{\rho^2}{\rho_{th}^2}\right) d\rho. \quad (4.22)$$

4.3. Flujo Gaussiano

Ahora se considerará el caso con un flujo gaussiano de la siguiente forma

$$\Omega(x) = me^{-x^2/2\sigma_\Omega^2}. \quad (4.23)$$

Este flujo tiene un ancho proporcional a σ_Ω y tiene un valor máximo en el origen igual m . Este perfil de velocidades decae rápidamente a 0 fuera de su ancho típico σ_Ω , por lo que es un flujo localizado o zonal. Además, a diferencia del flujo anterior, éste siempre apunta en una sola dirección. Para este flujo solo se considerará el mapeo sin giropromediar pues solo así se ha logrado hacer un tratamiento analítico.

El mapeo es:

$$\begin{aligned} x_+^{n+\frac{1}{2}} &= x_+^n + m\pi \exp[-(x_+^n)^2/2\sigma_\Omega^2], \\ x_-^{n+\frac{1}{2}} &= x_-^n + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+^{n+\frac{1}{2}}) - m\pi \exp[-(x_-^n)^2/2\sigma_\Omega^2], \\ x_-^{n+1} &= x_-^{n+\frac{1}{2}} - m\pi \exp[-(x_-^{n+\frac{1}{2}})^2/2\sigma_\Omega^2], \\ x_+^{n+1} &= x_+^{n+\frac{1}{2}} - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-^{n+1}) + m\pi \exp[-(x_+^{n+\frac{1}{2}})^2/2\sigma_\Omega^2]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

El flujo ocurre en la dirección y . Su efecto en la dirección x es el de afectar la correlación entre iteraciones sucesivas que producen la parte oscilatoria del coeficiente de difusión como función de A . Sin embargo, como este flujo es localizado, una vez que la distribución se difunde lo suficiente en x , las partículas se encuentran mayormente en zonas donde el flujo es imperceptible y por lo tanto el efecto neto del flujo en esta dirección se vuelve pequeño. En la figura 4.5 se muestra el coeficiente de difusión en x , como función de la amplitud, A . En ésta se observa que el efecto del flujo es pequeño pues se obtiene el mismo comportamiento con las oscilaciones que cuando no hay flujo. Sin embargo, hay un efecto muy evidente en los cinco picos que se observan en $A < 10$. Estos comportamientos para valores muy específicos de A , se producen cuando existen trayectorias periódicas con comportamiento balístico en torno a puntos fijos estables de algún periodo, éstos son llamados modos aceleradores. Estos puntos no serán analizados en el análisis subsiguiente.

Aplicando el razonamiento del párrafo anterior uno podría esperar que para el número de iteraciones $n \rightarrow \infty$ el flujo deje de tener importancia por la dispersión de las partículas en la dirección x y por consiguiente el coeficiente de difusión en y (que se define en éste límite) se mantenga sin cambio, sin embargo como se verá a continuación, no resulta ser el caso.

Un efecto cualitativo que muestra que el flujo mantiene su importancia en la distribución conforme avanza el tiempo es la estimación de la posición promedio de la distribución, que se muestra a continuación.

Como el flujo siempre es positivo la posición de las partículas avanza. El flujo tiene un ancho σ_Ω y una velocidad de orden m en esta zona. Por otro lado la función de distribución en x presenta una distribución $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, con comportamiento difusivo dado por $\sigma^2 = 2Dn$. Entonces la proporción de partículas que sienten el efecto del flujo es del orden del área bajo la curva de la distribución de probabilidad en el ancho σ_Ω que es del orden $\delta N \approx N \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. y están sometidas a un flujo con magnitud del orden de m . El resto de las partículas tiene posición media 0 por lo que la media de todas las partículas cambia en una iteración como $\delta\langle y \rangle = m \frac{\delta N}{N} \approx m \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{2\pi}\sigma} = m \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{4\pi Dn}}$ que es proporcional a $1/\sqrt{n}$. Finalmente el valor de la media al tiempo n se puede encontrar como la suma de éstos cambios que se puede aproximar por una integral en n . Así $\langle y \rangle \approx m \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{\pi D}} \sqrt{n}$. Que crece sin cota conforme aumenta el número de iteraciones.

Cabe notar que para que una simulación numérica reproduzca este comportamiento esperado es necesario que haya suficientes partículas como para siempre haya una fracción apreciable de éstas que sientan el efecto del flujo, o que se use un número de iteraciones lo suficientemente grandes como para que la presencia de partículas en estas regiones tengan una contribución estadística suficiente.

A continuación se muestra un análisis cuantitativo para obtener la dinámica en la dirección y . Igual que antes se propondrá un mapeo simplificado que reproduce el comportamiento del mapeo real.

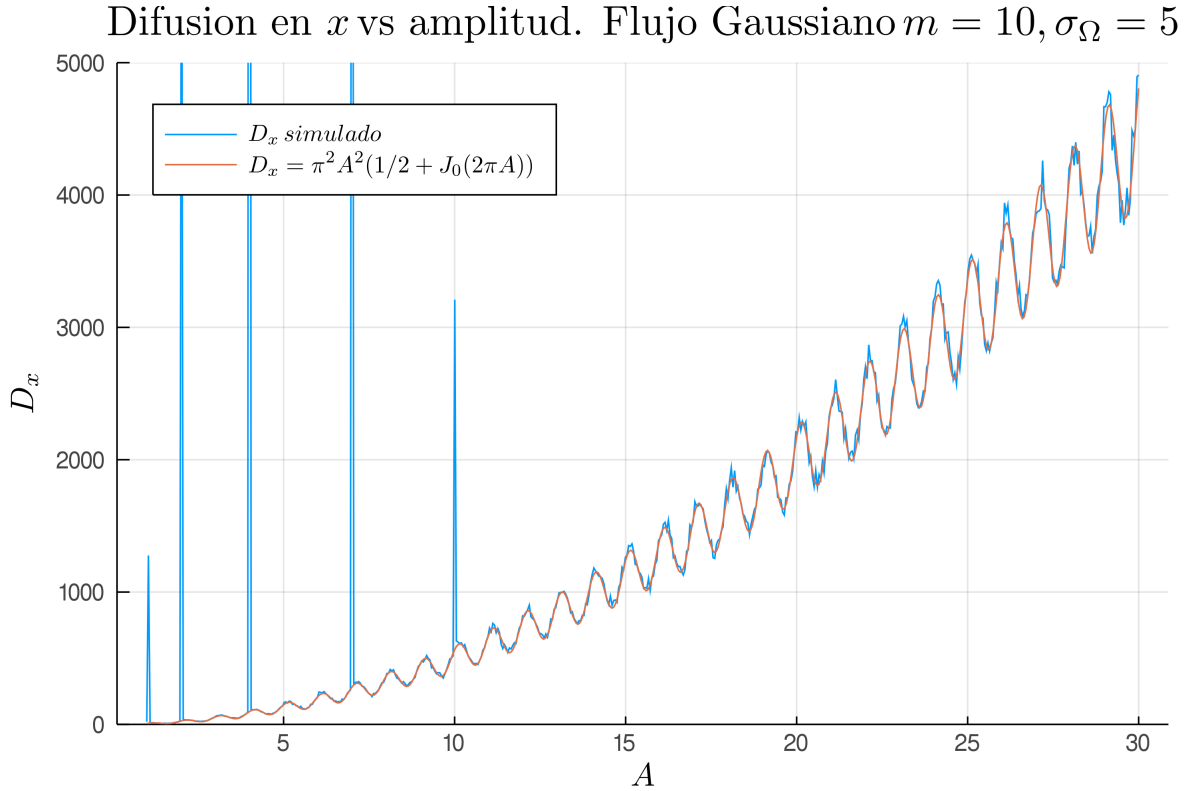


Figura 4.5: Coeficiente de difusión en x , D_x como función de la amplitud A para flujo Gaussiano con parámetros $m = 10$ y $\sigma_\Omega = 5$

4.4. Mapeo simplificado

A diferencia del flujo pasado, no se espera un comportamiento superbalístico en la dirección y por lo que es necesario mantener el efecto del comportamiento difusivo por el mapeo sin flujo. Para esto se definieron los pasos aleatorios λ_i de manera totalmente análoga a las χ_i . De forma que el nuevo mapeo simplificado es

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \chi_n, \\ y_n &= y_{n-1} + \lambda_n + 2\pi m \exp[-x_n^2/2\sigma_\Omega^2]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Donde las funciones de densidad de probabilidad de λ_n y χ_n son

$$f_{\chi_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\chi_n^2}{2\sigma^2}}, \quad f_{\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\lambda_n^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.26)$$

Donde

$$\sigma^2 = 2D_x \approx \pi^2 A^2 (1 + 2J_0(2\pi A)). \quad (4.27)$$

Supondremos que $x_0 = y_0 = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=1}^n \chi_i, \\ y_n &= \sum_{i=1}^n \lambda_i + 2\pi m \sum_{i=1}^n \exp[-x_i^2/2\sigma_\Omega^2]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En x se obtiene el mismo comportamiento difusivo que con el flujo pasado. Concentrémonos en la segunda ecuación que, usando la primera ecuación, se puede reescribir como

$$y_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i + 2\pi m \sum_{i=1}^n \exp\left[-\left(\sum_{j=1}^i \chi_j\right)^2 / 2\sigma_\Omega^2\right]. \quad (4.29)$$

Calculemos primero la posición media de las partículas.

$$\langle y_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i \rangle + 2\pi m \sum_{i=1}^n \left\langle \exp\left[-\left(\sum_{j=1}^i \chi_j\right)^2 / 2\sigma_\Omega^2\right] \right\rangle. \quad (4.30)$$

Dónde recordamos que el promedio se hace con las distribuciones de probabilidad de las variables λ_i y χ_i de las que dependa la función a promediar. Entonces

$$\langle \lambda_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_i e^{-\frac{\lambda_i^2}{2\sigma^2}} d\lambda_i = 0, \quad (4.31)$$

$$\left\langle \exp\left[-\left(\sum_{j=1}^i \chi_j\right)^2 / 2\sigma_\Omega^2\right] \right\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^i} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\sum_{j=1}^i \chi_j\right)^2 / 2\sigma_\Omega^2\right] e^{-\frac{\chi_1^2}{2\sigma^2}} \cdots e^{-\frac{\chi_i^2}{2\sigma^2}} d\chi_1 \cdots d\chi_i. \quad (4.32)$$

Estas últimas integrales ser realizaron en Mathematica [23] para $i = 1, 2, 3, 4$ y todas coinciden con la fórmula

$$\left\langle \exp\left[-\left(\sum_{j=1}^i \chi_j\right)^2 / 2\sigma_\Omega^2\right] \right\rangle = \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{i\sigma^2 + \sigma_\Omega^2}}. \quad (4.33)$$

Por lo que se supone que este patrón se conserva para toda i . Así

$$\langle y_n \rangle = 2\pi m \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{i\sigma^2 + \sigma_\Omega^2}}. \quad (4.34)$$

Y para $n \gg 1$

$$\langle y_n \rangle \approx 2\pi m \int_0^n \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{i\sigma^2 + \sigma_\Omega^2}} di = 2\pi m \left(-2\frac{\sigma_\Omega^2}{\sigma^2} + \frac{2\sigma_\Omega}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma_\Omega^2}{\sigma^2} + n}\right) \approx \frac{4\pi m \sigma_\Omega}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\sqrt{8\pi m \sigma_\Omega}}{\sqrt{D_x}} \sqrt{n}, \quad (4.35)$$

que tiene la misma dependencia en los parámetros que la relación obtenida cualitativamente. En la figura 4.6 se muestran simulaciones numéricas de la evolución promedio $\langle y_n \rangle$, para un ensamble

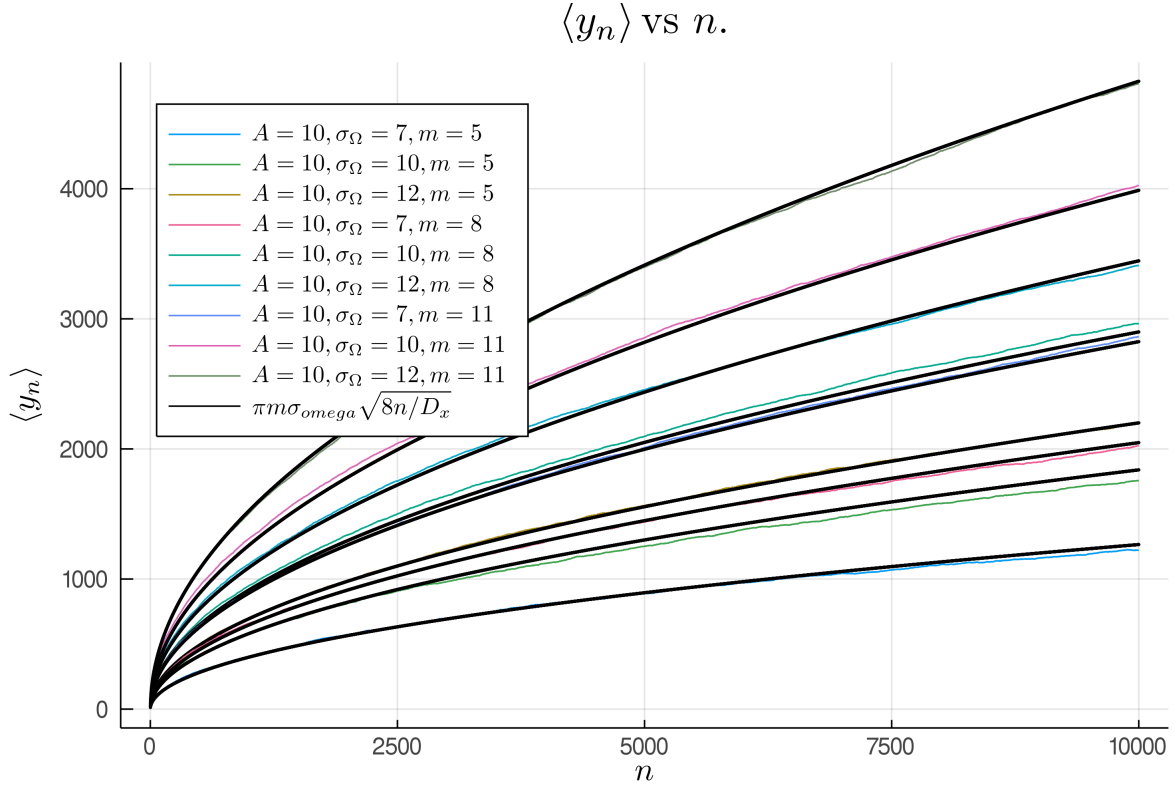


Figura 4.6: Posición promedio, $\langle y_n \rangle$, para un ensamble de 10^4 partículas como función del número de iteración n en un rango de $n \in [0, 10^4]$ para flujo gaussiano para los siguientes valores de los parámetros. $A = [10]$, $m = [5, 8, 11]$, $\sigma_\Omega = [7, 10, 12]$. En negro se muestra la predicción analítica dada por la ec. (4.35)

de 10^4 partículas como función del número de iteración n en el rango $n \in [0, 10^4]$. Los parámetros usados fueron los siguientes $A = [10]$, $m = [5, 8, 11]$, $\sigma_\Omega = [7, 10, 12]$. En todas se ve un buen ajuste.

Ahora enfoquémonos en la obtención de la varianza del ensamble.

$$\text{var}(y_n) = \langle y_n^2 \rangle - \langle y_n \rangle^2. \quad (4.36)$$

Esto pues la posición promedio no es 0. El segundo término ya se encontró en 4.35 y es igual a

$$\langle y_n \rangle^2 = \frac{8\pi^2 m^2 \sigma_\Omega^2}{D_x} n. \quad (4.37)$$

Ahora calculemos el primero

$$\langle y_n^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \right\rangle + 4\pi m \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \exp[-x_i^2/2\sigma_\Omega^2] \right) \right\rangle + 4\pi^2 m^2 \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \exp[-x_i^2/2\sigma_\Omega^2] \right)^2 \right\rangle. \quad (4.38)$$

El término de en medio es 0 pues los términos entre paréntesis dependen de variables independientes entre sí. De forma que el promedio del producto es el producto de los promedios. Además el promedio también entra en la primer sumatoria. Es decir:

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \exp[-x_i^2/2\sigma_\Omega^2] \right) \right\rangle = \left(\sum_{i=1}^n \langle \lambda_i \rangle \right) \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \exp[-x_i^2/2\sigma_\Omega^2] \right) \right\rangle = 0. \quad (4.39)$$

El primer término da el comportamiento difusivo en el caso sin flujo. Tomando en cuenta que λ_i es independiente de λ_j se cancelan los promedios cruzados. Además cada una tiene una función de distribución con una varianza σ^2 .

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i^2 \rangle = n\sigma^2 = 2nD_x. \quad (4.40)$$

El término complicado es el tercero. Desarrollémoslo. Recordando que $x_i = \sum_{j=1}^i \chi_j$

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^i \chi_j \right)^2 / 2\sigma_\Omega^2 \right] \right)^2 \right\rangle = \\ & \sum_{i=1}^n \left\langle \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^i \chi_j \right)^2 / \sigma_\Omega^2 \right] \right\rangle + 2 \sum_{\{(\alpha, \beta) | \beta < \alpha\}} \left\langle \exp \left[- \left(\sum_{l=1}^\alpha \chi_l \right)^2 / 2\sigma_\Omega^2 \right] \exp \left[- \left(\sum_{k=1}^\beta \chi_k \right)^2 / 2\sigma_\Omega^2 \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.41)$$

El primer término es igual al usado en la obtención de el promedio de y_n solo que sin el factor de 2, es decir es igual bajo la identificación $\sigma_\Omega \rightarrow \sigma_\Omega/\sqrt{2}$. Por lo tanto haciendo el mismo procedimiento de antes

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^i \chi_j \right)^2 / \sigma_\Omega^2 \right] \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{2i\sigma^2 + \sigma_\Omega^2}} \approx \frac{\sqrt{4\pi m \sigma_\Omega}}{\sqrt{D_x}} \sqrt{n}. \quad (4.42)$$

Este término es proporcional a \sqrt{n} , por lo que representa un aporte subdifusivo que se puede despreciar.

El segundo término se tuvo que explorar en detalle. El tipo de integrales que representa cada término se ilustra para el caso $\alpha = 3, \beta = 2$:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-(\chi_1+\chi_2+\chi_3)^2-(\chi_1+\chi_2)^2}/2\sigma_\Omega^2 \times e^{-(\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2)/2\sigma^2} d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3. \quad (4.43)$$

Estas integrales se hicieron para todas las parejas con $\alpha \leq 7$ y se encontró que son de la forma

$$\frac{\sigma_\Omega^2}{\sqrt{\sigma_\Omega^4 + C_{\alpha,\beta}^1 \sigma_\Omega^2 \sigma^2 + C_{\alpha,\beta}^2 \sigma^4}}. \quad (4.44)$$

Donde las C son enteros que se dan en la siguiente tabla:

$$C_{\alpha,\beta}^1 = \begin{array}{c|cccccc} & \beta \rightarrow & & & & & \\ \alpha \downarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & & & & & \\ 3 & 4 & 5 & & & & \\ 4 & 5 & 6 & 7 & & & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}, C_{\alpha,\beta}^2 = \begin{array}{c|cccccc} & \beta \rightarrow & & & & & \\ \alpha \downarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & & & & & \\ 3 & 2 & 2 & & & & \\ 4 & 3 & 4 & 3 & & & \\ 5 & 4 & 6 & 6 & 4 & & \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 8 & 5 & \\ 7 & 6 & 10 & 12 & 12 & 10 & 6 \end{array}. \quad (4.45)$$

De estas se dedujo que las integrales son de la forma:

$$\frac{\sigma_\Omega^2}{\sqrt{\sigma_\Omega^4 + (\alpha + \beta)\sigma_\Omega^2 \sigma^2 + (\alpha - \beta)\beta\sigma^4}}. \quad (4.46)$$

Entonces

$$\sum_{\{(\alpha,\beta)|\beta<\alpha\}}^n \left\langle \exp \left[- \left(\sum_{l=1}^{\alpha} \chi_l \right)^2 / 2\sigma_\Omega^2 \right] \exp \left[- \left(\sum_{k=1}^{\beta} \chi_k \right)^2 / 2\sigma_\Omega^2 \right] \right\rangle = \sum_{\{(\alpha,\beta)|\beta<\alpha\}}^n \frac{\sigma_\Omega^2}{\sqrt{\sigma_\Omega^4 + (\alpha + \beta)\sigma_\Omega^2 \sigma^2 + (\alpha - \beta)\beta\sigma^4}}. \quad (4.47)$$

Esta suma se puede aproximar por una integral al dejar ser a α y β variables continuas. La región de integración sería la delimitada por la recta identidad, el eje α y la recta $\alpha = n$. Antes notamos que el primer término dentro del radical es una constante, el segundo es proporcional a n y el tercero a n^2 de forma que si solo estamos interesados en el comportamiento $n \gg 1$ podemos despreciar los primeros términos. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\{(\alpha,\beta)|\beta<\alpha\}}^n \frac{\sigma_\Omega^2}{\sqrt{\sigma_\Omega^4 + (\alpha + \beta)\sigma_\Omega^2 \sigma^2 + (\alpha - \beta)\beta\sigma^4}} &\approx \sum_{\{(\alpha,\beta)|\beta<\alpha\}}^n \frac{\sigma_\Omega^2}{\sigma^2 \sqrt{(\alpha - \beta)\beta}} \\ &\approx \frac{\sigma_\Omega^2}{\sigma^2} \int_{\alpha=0}^n \int_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{(\alpha - \beta)\beta}} d\alpha d\beta \\ &= \frac{\sigma_\Omega^2}{\sigma^2} \int_{\alpha=0}^n \pi d\alpha = \frac{\pi\sigma_\Omega^2}{\sigma^2} n = \frac{\pi\sigma_\Omega^2}{2D_x} n. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Entonces juntando todos los términos de aporte difusivo, es decir los encontrados en las ecuaciones (4.37), (4.40), (4.48) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{var}(y_n^2) &= \left(2D_x + \frac{4\pi^3 m^2 \sigma_\Omega^2}{D_x} - \frac{8\pi^2 m^2 \sigma_\Omega^2}{D_x}\right) n \\ &= \left(2D_x + \frac{4\pi^2 m^2 \sigma_\Omega^2}{D_x} (\pi - 2)\right) n. \end{aligned} \quad (4.49)$$

De forma que el coeficiente de difusión es

$$D_y = D_x + \frac{2\pi^2 m^2 \sigma_\Omega^2}{D_x} (\pi - 2) \quad (4.50)$$

con $D_x = \frac{\pi^2 A^2}{2} (1 + 2J_0(2\pi A))$.

En la figura 4.5 se muestran los valores del coeficiente de difusión en y como función de la amplitud simulados con 4000 partículas por 5000 iteraciones en un rango de $A \in [1, 25]$, con los valores de flujo $(m, \sigma_\Omega) = (6, 5), (7, 8), (10, 10), (10, 15), (15, 15)$. Estos se comparan con la expresión analítica recién obtenida y se observa que los comportamientos coinciden.

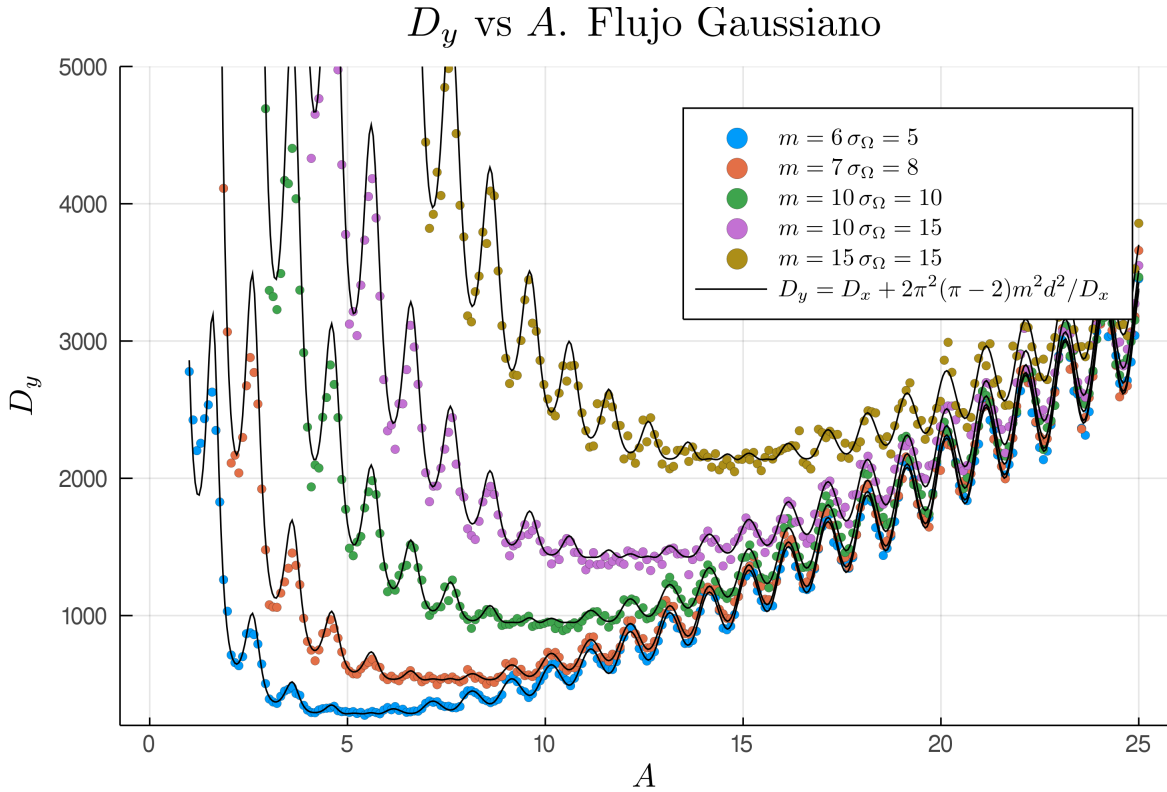


Figura 4.7: Coeficiente de difusión en y como función de la amplitud para un perfil gaussiano. Los puntos de color son valores simulados numéricamente con 4000 partículas durante 5000 iteraciones para los valores de amplitud de flujo m y ancho σ_ω mostrados. En negro se grafican las predicciones analíticas dadas por la ecuación 4.50 con el flujo D_x dado por $\frac{\pi^2 A^2}{2} (1 + 2J_0(2\pi A))$

4.5. Flujo de escalón

Finalmente consideremos el siguiente flujo

$$\Omega(x) = \begin{cases} +m & \text{si } x > 0, \\ -m & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (4.51)$$

Como el flujo no tiende a 0 cuando $|x| \rightarrow \infty$ se espera que la dispersión de las partículas sea superdifusiva. El efecto del flujo sobre la dirección x es del mismo tipo que en el caso lineal, el de reducir la amplitud de las oscilaciones. Además, en este caso tampoco se observaron picos en el coeficiente de difusión en x como los encontrados para el flujo gaussiano.

Concentrémonos solamente en obtener la varianza en la dirección y . Para esto se propone el siguiente mapeo simplificado

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \chi_n = \sum_{i=1}^n \chi_i, \\ y_n &= y_{n-1} + 2\pi\Omega(x_n) = 2\pi \sum_{i=1}^n \Omega(x_i). \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde se considera que se comienza en el origen. Se ignora la parte difusiva en la dirección y producida por el mapeo sin flujo porque el flujo no decae a 0 cuando $|x| \rightarrow \infty$. En este flujo es más conveniente definir los χ_i de la siguiente forma

$$\Omega(x) = \begin{cases} +\sigma & p_+ = \frac{1}{2}, \\ -\sigma & p_- = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.53)$$

Es decir una variable aleatoria discreta con un 50% de probabilidad de avanzar σ en x y el otro 50% de retroceder la misma cantidad. Con $\sigma^2 = 2D_x$, x_n tiende a su distribución gaussiana cuando $n \gg 1$.

Para encontrar la distribución de probabilidad de y_N primero hagamos $n = 2N$ y definamos $2k$ como el número de iteraciones en los que una trayectoria se encuentra del lado positivo del eje x , es decir $2N - 2K$ es el número de veces que esta del lado negativo y por lo tanto

$$y_{2N} = 2\pi m(-2N + 4k). \quad (4.54)$$

La probabilidad de que $x_i > 0$ se cumpla $2k$ veces en $2N$ iteraciones esta dada por la siguiente expresión

$$P(2k, 2n) = u_{2k} u_{2N-2K}, \quad (4.55)$$

con $u_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$. La deducción de esta expresión se puede encontrar en muchos libros de probabilidad bajo el nombre de ley de arco seno (por ejemplo [24]). Cuando $n \gg 1$ se pueden expandir los factorial con la fórmula de Stirling y obtener

$$P(2k, 2n) = \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}. \quad (4.56)$$

En vez de $2k$ podemos cambiar a una nueva variable $\alpha = \frac{k}{n}$ que sea la fracción del número de iteraciones que esta del lado positivo. Entonces

$$y_n = 2\pi m n(2\alpha - 1), \quad (4.57)$$

con

$$p(\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \quad (4.58)$$

Entonces

$$\langle y_n^2 \rangle = 4\pi^2 n^2 m^2 (1 - 4\langle \alpha \rangle + 4\langle \alpha^2 \rangle), \quad (4.59)$$

$$\text{con } \langle \alpha \rangle = \int_0^1 \alpha P(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}; \quad \langle \alpha^2 \rangle = \int_0^1 \alpha^2 P(\alpha) d\alpha = \frac{3}{8}.$$

Por lo que

$$\langle y_n^2 \rangle = 2\pi^2 m^2 n^2. \quad (4.60)$$

Lo que describe un comportamiento superdifusivo balístico con coeficiente de transporte $T_{yc} = 2\pi^2 m^2$. Observamos que este coeficiente de transporte es independiente de A . En la figura 4.8 se muestran simulaciones para $A = [1, 2, \dots, 30]$ y $m = [1, 2, 3, 4, 5]$ del coeficiente de transporte. Estas se hicieron con 4000 partículas por 5000 iteraciones. Los datos se ajustan bien a lo encontrado. Si se quisiera considerar la difusión por el mapeo sin flujo se debería agregar a la expresión para la varianza el factor $2D_x n$ que, si A es muy grande, pudiera ser un termino dominante por una buena cantidad de iteraciones iniciales.

Difusion en y vs amplitud. Flujo escalón.

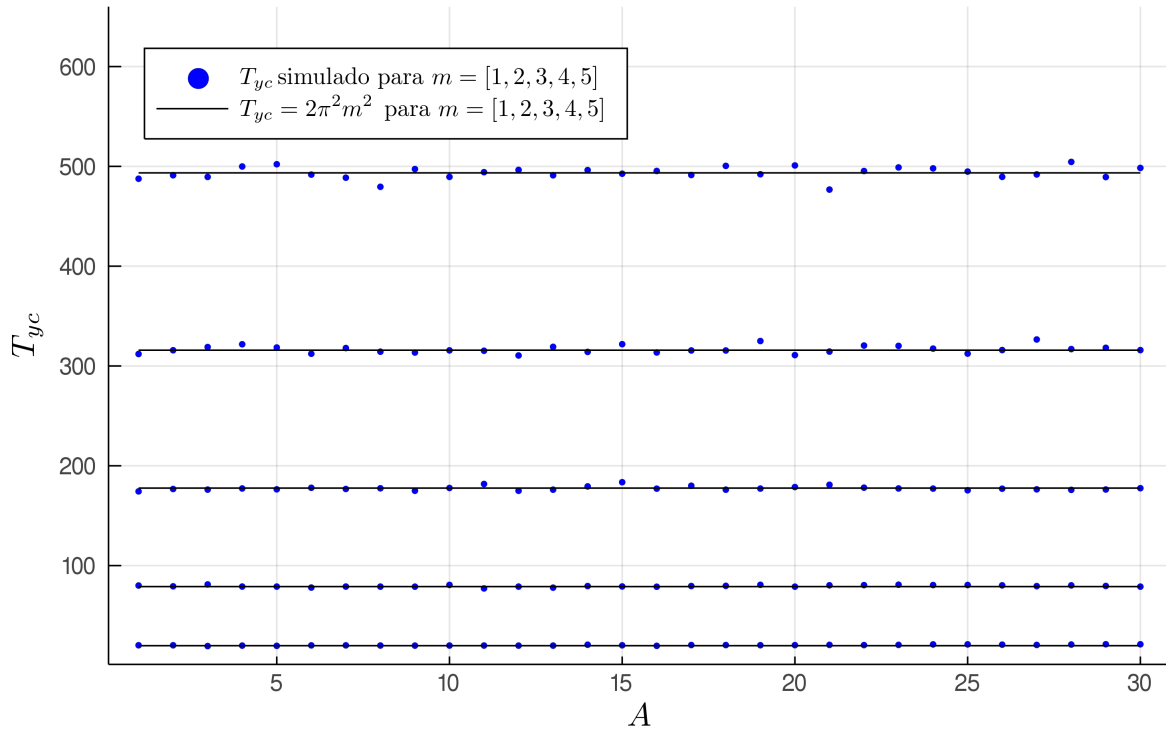


Figura 4.8: Coeficiente de transporte para el caso de flujo de paso. Simulaciones de 4000 partículas por 5000 iteraciones se muestran en azul para los valores de $m = [1, 2, 3, 4, 5]$. En negro se muestra la predicción analítica.

Capítulo 5

Oscilaciones del coeficiente de difusión

En esta sección se intenta explicar de un modo más ilustrativo las características del mapeo sin flujo que producen las oscilaciones del coeficiente de difusión, D , como función de la amplitud A . Las oscilaciones a orden $A^{-\frac{1}{2}}$ son de la forma:

$$\frac{D}{D_{cl}} = 1 + 2J_0(2\pi A) \approx 1 + \frac{2}{\pi\sqrt{A}} \cos\left(2\pi\left(A - \frac{1}{8}\right)\right). \quad (5.1)$$

Donde D_{cl} es el coeficiente de difusión cuasilineal y la aproximación es válida para $A \gg \frac{1}{8\pi}$. El valor máximo y mínimo de estas oscilaciones se encuentra en $A = m + \frac{1}{8}$ y $A = m + \frac{5}{8}$ con $m = 0, 1, 2, \dots$. El coeficiente de difusión cuasilineal se obtiene bajo la suposición de la ergodicidad de las trayectorias bajo el modulo 2π y la independencia estadística entre 2 iteraciones consecutivas del mapeo. Entonces las correcciones a este valor provienen justamente de las correlaciones de las trayectorias en iteraciones sucesivas. La forma directa de identificar las trayectorias con altas correlaciones es estudiar el histograma en una de las coordenadas en función del número de iteraciones y observar diferencias en su forma respecto de lo esperado si hubiera independencia estadística entre las iteraciones. Se observa que para todos los valores de A la función de distribución converge rápidamente a una distribución normal y las oscilaciones simplemente producen una variación en el ancho de la distribución. Si embargo si lo que se estudia es la variación de la función de distribución, es decir un histograma de la variable $x_+^{n+m} - x_+^n$ para $n \gg 1$ el número de iteración y m un entero pequeño, entonces es posible obtener información. Si $m = 1$ se esta considerando el desplazamiento por una sola iteración que es de la forma

$$\Delta^1 x_+ = x_+^{n+1} - x_+^n = 2\pi A \text{sen}(x_-^n), \quad (5.2)$$

y como n es lo suficientemente grande entonces x_-^n es una variable uniforme de valor $\frac{1}{2\pi}$, de modo que al hacer el cambio de variable en la distribución de probabilidad al de $\text{sen}(x_-^n)$ se puede obtener que la función de distribución es

$$P(\Delta^1 x_+) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 A^2 - \Delta^1 x_+^2}}. \quad (5.3)$$

Esta ecuación se obtiene de la igualdad $P(\Delta^1 x_+)d(\Delta^1 x_+) = (1/2\pi)d(x_-^n)$. Esta función de distribución también se puede obtener numéricamente si se toman valores aleatorios uniformemente distribuidos de x_-^n en $[0, 2\pi]$, se calculan los lados derecho de 5.2 y se hace un histograma. Este cálculo se hizo para 10^8 valores de x_-^n y se muestra en la figura 5.1 a). La forma de esta función de distribución no presenta una dependencia oscilatoria para diferentes valores de A donde la amplitud de las oscilaciones del coeficiente de difusión son diferentes. Solamente se ensancha

conforme aumenta A . Sin embargo si ahora consideramos los desplazamientos después de 2 iteraciones entonces se manifiesta una dependencia oscilatoria en las funciones de distribución. Sin embargo, primero consideremos el resultado si no hubiera correlación entre iteraciones sucesivas. Para el caso cuasilineal:

$$\Delta^2 x_+ = x_+^{n+2} - x_+^n = 2\pi A (\text{sen}(x_{1-}^n) + \text{sen}(x_{2-}^n)). \quad (5.4)$$

Donde x_{1-}^n y x_{2-}^n son variables aleatorias uniformes independientes entre sí. Hacer el cambio de variable a $\Delta^2 x_+^2$ de la función de probabilidad de este desplazamiento es más complicado, sin embargo se puede calcular numéricamente de la misma forma que antes. El histograma para 10^8 parejas de valores se muestra en la figura 5.1 b). Al ser el caso cuasilineal la forma de esta gráfica tampoco presenta la dependencia oscilatoria.

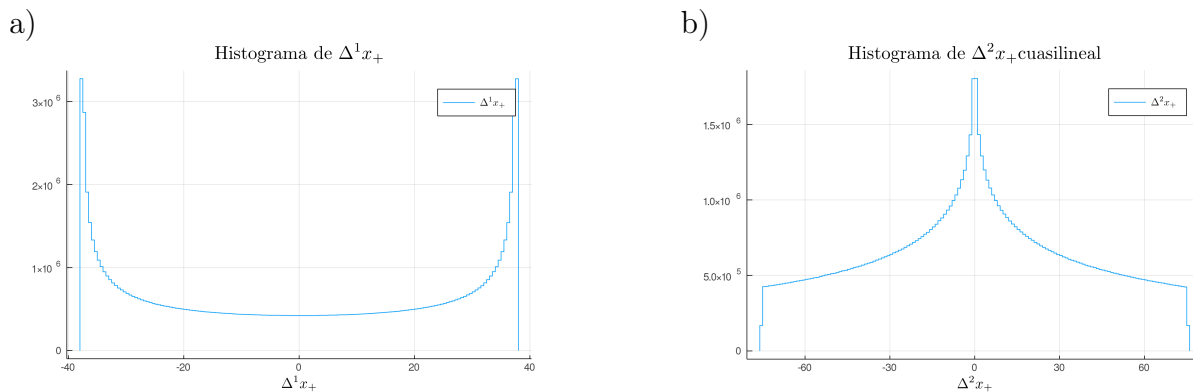


Figura 5.1: Histograma de desplazamientos para 10^8 partículas en el caso cuasilineal para $A = 6$ después de una y dos iteraciones; a) y b) respectivamente

Ahora, el desplazamiento real obtenido de nuestro mapeo es

$$x_+^{n+2} - x_+^n = 2\pi A (\text{sen}(x_-^n) + \text{sen}(x_-^n + 2\pi A \text{sen}(x_+^n - 2\pi A \text{sen}(x_-^n))). \quad (5.5)$$

Los histogramas para 10^8 condiciones iniciales aleatorias de esta cantidad para los valores de A que abarcan el ciclo de las oscilaciones del coeficiente de difusión entre $[5.375, 6.250]$ se muestran en la figura 5.2 en azul. Centrando nuestra atención en estas curvas se pueden observar diferencias respecto a la distribución esperada para el caso sin correlación. Estas variaciones de la distribución son periódicas con el mismo periodo de las oscilaciones del coeficiente de difusión. Además, para un gran número de valores de A , por ejemplo en las figuras 5.2 a) b) f) g) y h), las diferencias aparentes respecto del caso sin correlación están localizadas. Esto hace pensar que las oscilaciones son causadas por un pequeño subconjunto del espacio fase que presenta una alta correlación. El candidato para este subconjunto es en el que la matriz jacobiana, M , del mapeo tiene eigenvalores pequeños. Esto debido a que este eigenvalor representa el factor de escala máximo en el que aumenta la separación de puntos muy cercanos, de forma que si éste es muy grande los puntos se dispersan mucho y entonces la posición final depende muy poco de la inicial.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_+^{n+1}}{\partial x_+^n} & \frac{\partial x_+^{n+1}}{\partial x_-^n} \\ \frac{\partial x_-^{n+1}}{\partial x_+^n} & \frac{\partial x_-^{n+1}}{\partial x_-^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\pi A \cos(x_-^n) \\ 2\pi A \cos(x_+^n) & 1 - 4\pi^2 A^2 \cos(x_+^n - 2\pi A \text{sen}(x_-^n)) \cos(x_-^n) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Sus eigenvalores están dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4}}{2}. \quad (5.7)$$

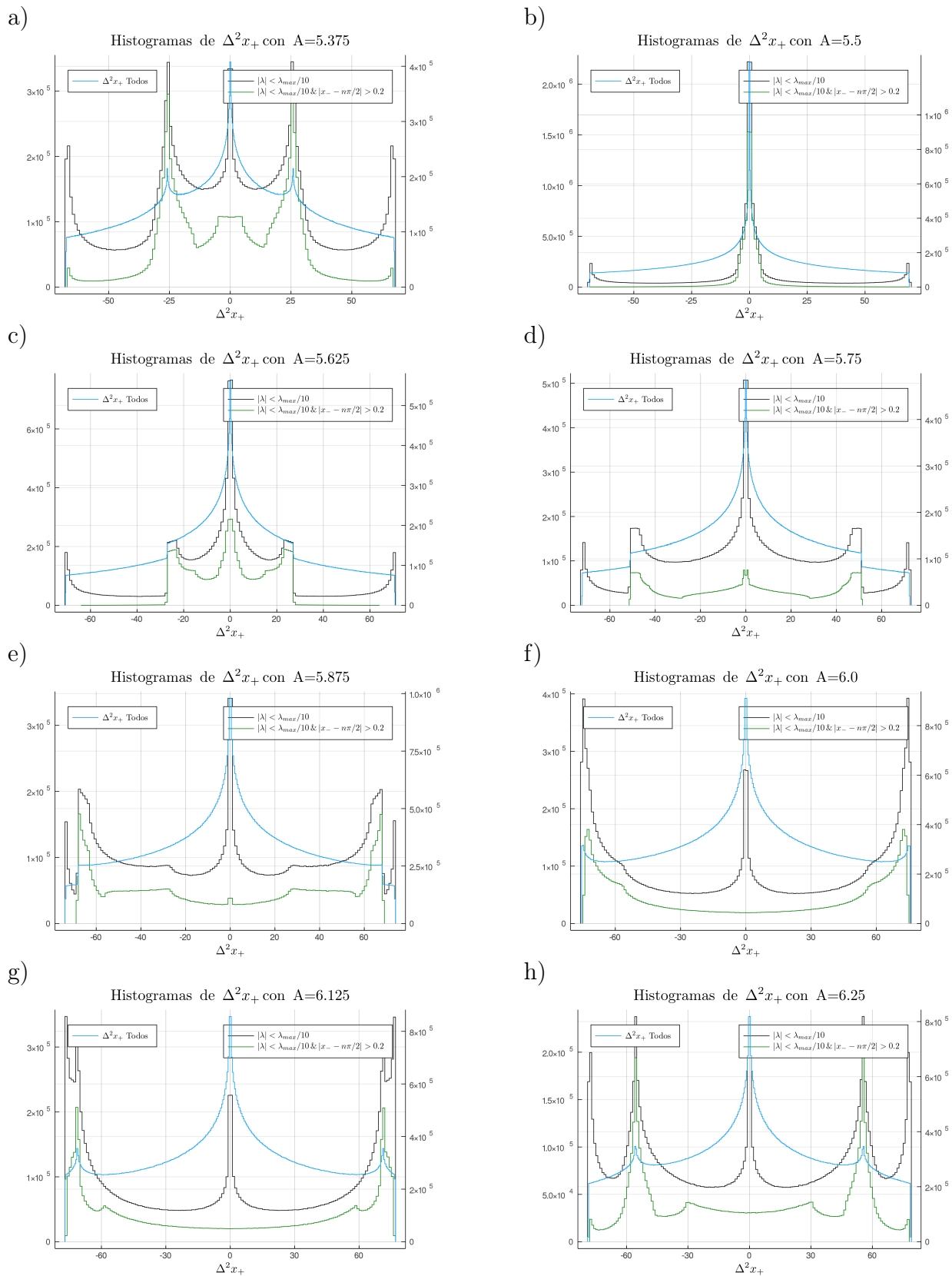


Figura 5.2: Histogramas del desplazamiento $\Delta^2 x_+$ para diferentes valores de A . En azul se muestra el de 10^8 partículas uniformemente distribuidas. En negro solo el subconjunto de las anteriores que iniciaron en puntos con eigenvalor menor a $\lambda_{max}/10$. En verde se muestra el del subconjunto de las anteriores que además distan de un semientero de π más que 0.2

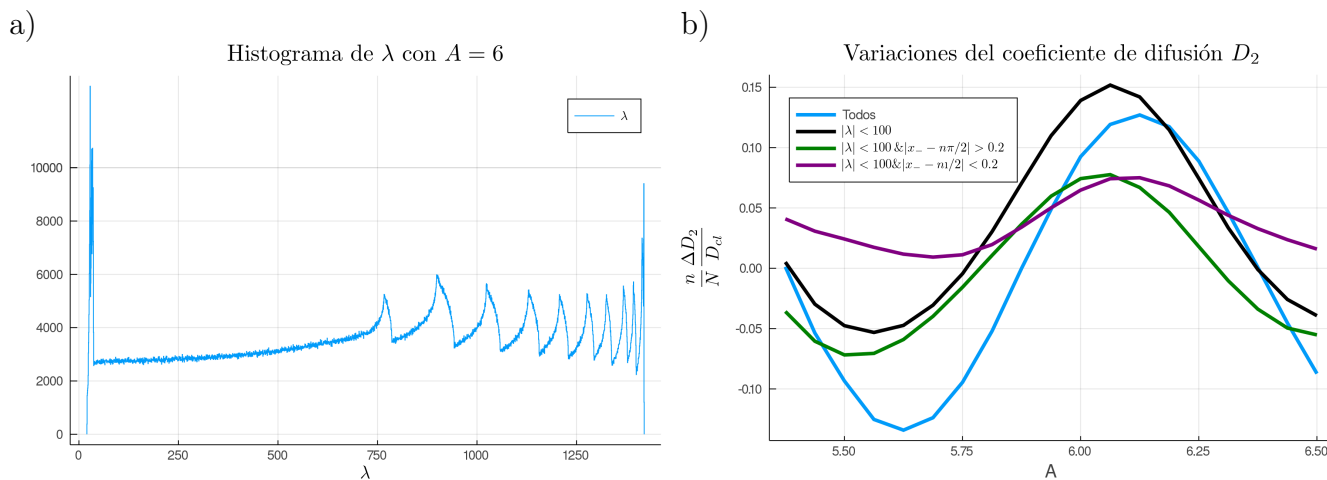


Figura 5.3: a) Histograma de eigenvalores mayores. b) Variaciones relativas del coeficiente de difusión D_2 respecto del valor cuasilineal para diferentes sunconjuntos del espacio fase.

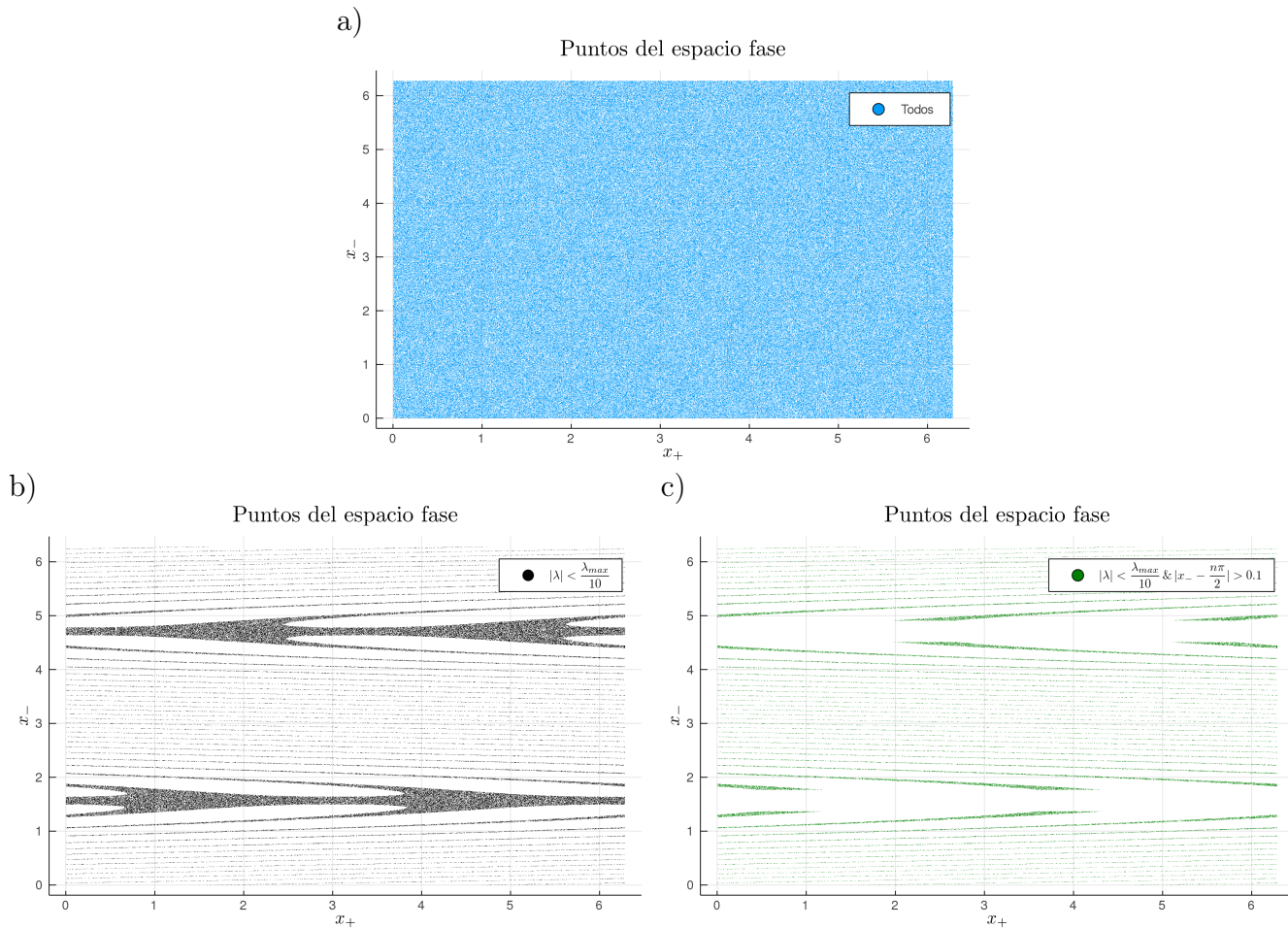


Figura 5.4: Puntos aleatorios en diferentes subconjuntos del espacio fase. a) Todo el espacio fase. b) Puntos donde $|\lambda| < 100$. c) Puntos donde $|\lambda| < 100$. y además distan de los semienteros de π más de 0.2

En la figura 5.3 a) se muestra el histograma de los eigenvalores mayores (i.e $\lambda = \max(\lambda_{\pm})$) para todo el espacio fase. El valor máximo posible para esta variable es muy cercano a $\lambda_{max} = 4\pi^2 A^2$. En el rango estudiado $\lambda_{max} \in [1140, 1542]$. Se eligen el conjunto de puntos que se van a estudiar como aquellos con $\lambda < 100 < \lambda_{max}/10$. Definir λ pequeño cuando sea menor al 10% del valor máximo es una decisión arbitraria. Estos puntos se encuentran en la región mostrada en la figura 5.4 b). Y los histogramas de sus desplazamientos después de 2 iteraciones se muestra de negro en la figura 5.2. Estos histogramas están compuestos de 5 picos. 3 están fijos en el origen y los otros 2 en los desplazamientos máximos. Su amplitud varía inversamente proporcional; cuando los extremos aumentan el central disminuye y al revés también. Los picos más interesantes son los intermedios, estos cambian de posición conforme se varía A . Su posición y forma coincide muy parecidamente a las desviaciones de la distribución total del caso cuasilineal (azul). Al inspeccionar la posición de estos puntos en el espacio fase se observan dos regiones distintivas: una región ancha cercana a $x_- = \pi/2$ y $3\pi/2$ y un conjunto de líneas alejadas de estos valores. Se calcularon los histogramas de estas dos regiones que se eligieron arbitrariamente con una separación vertical de 0.2 respecto a los semienteros de π . Se encontró que la primera región produce los picos en los desplazamientos máximos mientras que la segunda produce los picos que coinciden con la distribución total. De esta forma se identifican puntos que contribuyen distintivamente a estas desviaciones de la función de distribución cuasilineal. Cabe notar que estos picos también presentan una relación inversa con el pico centrado en el origen.

Lo siguiente es calcular la desviación del coeficiente de difusión respecto del valor cuasilineal producida por este conjunto de puntos. Para esto consideramos que la difusión esta producida por un conjunto de n_1 puntos con difusión cuasilineal y nuestro conjunto de tamaño n_2 y coeficiente de difusión D_{corr} , ambos con desplazamientos simétricos respecto al origen de forma que

$$D_n = \frac{1}{2} \frac{\sum_i^N (\Delta^n x_i)^2}{N} = \frac{\sum_i^{n_1} (\Delta^n x_{icl})^2 + \sum_i^{n_2} (\Delta^n x_i)^2}{2N} = \frac{n_1}{N} D_{cl} + \frac{n_2}{N} D_{corr} = D_{cl} \left(1 + \frac{n_2}{N} \frac{\Delta D}{D_{cl}}\right). \quad (5.8)$$

Con $\Delta D = D_{corr} - D_{cl}$. En la gráfica 5.3 b) se gráfica $\frac{n_2}{N} \frac{\Delta D}{D_{cl}}$ para los subconjuntos estudiados: Todo el espacio fase (en azul y en cuyo caso se obtiene el valor real), los puntos con $\lambda < 100$ (negro) y los subconjuntos de este último que tienen x_- cercanas (lila) o alejadas (verde) de $\pi/2$ y $3 * \pi/2$.

Los resultados no son los esperados. Los coeficientes de difusión sí son oscilatorios y de periodo igual al real pero sus máximos y mínimos están desfasados. Los puntos que producen los picos intermedios (verde) alcanzan su máximo y mínimo en los enteros y semienteros, mientras que el real se desfasa $1/8$ hacia la derecha. Además contribuyen notablemente más al aumento del coeficiente de difusión que a su disminución. Este es un comportamiento compartido con el coeficiente de difusión para iteraciones infinitas como se verá más adelante, sin embargo no lo es para el coeficiente obtenido para 2 iteraciones. Por otro lado los puntos cercanos a los semienteros de π contribuyen solo al aumento del coeficiente de difusión. Esto nos hace concluir que hay otros puntos del espacio fase que contribuyen a la oscilación del coeficiente de difusión y que más bien hacen que éste disminuya, sin embargo con lo que hemos hecho se deduce que estas regiones tendrán valores de λ aun mayores.

Un descubrimiento importante sobre las trayectorias encontradas, que se encontró que contribuyen a la oscilación del coeficiente de difusión es el siguiente. Para ciertos valores de A , todas las trayectorias terminan muy cerca del origen. Esto indica que en esos valores se encuentran muy cerca de los puntos fijos de periodo dos o bien de modos aceleradores con número de periodo pequeño.

Estos puntos son los que cumplen las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} x_+^{n+2} - x_+^n &= 2\pi m_+, \\ x_-^{n+2} - x_-^n &= 2\pi m_-. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Con m_{\pm} enteros. En el caso de puntos fijos, estos valores son iguales a 0 y para los modos aceleradores son diferentes de 0.

Esto sugiere la posibilidad de que la correlación del coeficiente de difusión para 2 iteraciones este determinado por el comportamiento en las vecindades en torno a este tipo de puntos y no tanto a su eigenvalor local. Esta idea se terminará de explorar en otro lugar. Por ahora simplemente mostramos en la gráfica 5.6 la ubicación de los puntos que son modos aceleradores de periodo 2 en el espacio fase. Para $A = 6$ se encontraron 412955 valores de m_{\pm} enteros entre $[-12, 12]$. En la sección 6.4 se muestra la expresión para obtenerlos y se resuelve numéricamente con ayuda de la paquetería IntervalRootFinding de Julia. [25]

Finalmente mostramos el valor del coeficiente de difusión real si solo se consideran las primeras 2 iteraciones D_2 y damos una expresión para el coeficiente que considera la correlación de n iteraciones D_n

$$D_n = \frac{\langle (\Delta^n x_+^0)^2 \rangle}{2n} = \frac{\langle (\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^1 x_+^i)^2 \rangle}{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle (\Delta^1 x_+^i)(\Delta^1 x_+^j) \rangle}{2n}. \quad (5.10)$$

Donde el promedio se realiza sobre el espacio fase en las posiciones iniciales (x_+^0, x_-^0) . En esta igualdad estamos suponiendo que ya se alcanzó una distribución uniforme de todas las variables. Esto implica que la correlación entre una iteración del mapeo y otra a un tiempo posterior no dependa de la iteración en la que se encontraba sino solo en la distancia entre estas iteraciones es decir $\langle (\Delta^1 x_+^i)(\Delta^1 x_+^j) \rangle = \langle (\Delta^1 x_+^k)(\Delta^1 x_+^{k+(j-i)}) \rangle$ considerando esto con $k = 0$ la expresión anterior se simplifica a

$$D_n = \frac{\langle (\Delta^1 x_+^0)^2 \rangle}{2} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(n-l)}{n} \langle (\Delta^1 x_+^0)(\Delta^1 x_+^k) \rangle. \quad (5.11)$$

Entonces definiendo $C_k = \langle (\Delta^1 x_+^0)(\Delta^1 x_+^k) \rangle$

$$D_1 = \frac{C_0}{2}; \quad D_2 = \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2}C_1; \quad D_3 = \frac{C_0}{2} + \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_3; \quad \dots \quad D_{\infty} = \frac{C_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i. \quad (5.12)$$

Este último valor solo es finito si la suma de los C_i lo es. Para nuestro mapeo en las variables (x_+, x_-)

$$\Delta^1 x_+^0 = -2\pi A \text{sen}(x_-^0) \rightarrow C_0 = 2\pi^2 A^2 \langle \text{sen}^2(x_-^0) \rangle = \pi^2 A^2. \quad (5.13)$$

Y también del mismo mapeo

$$\Delta^1 x_+^k = -2\pi A \text{sen} \left(x_-^0 + 2\pi A \sum_{i=1}^k \text{sen}(x_+^i) \right). \quad (5.14)$$

Por lo que

$$C_k = \langle (\Delta^1 x_+^0)(\Delta^1 x_+^k) \rangle = 4\pi^2 A^2 \left\langle \text{sen}^2(x_-^0) \cos \left(2\pi A \sum_{i=1}^k \text{sen}(x_+^i) \right) \right\rangle. \quad (5.15)$$

Donde se usó la identidad de suma de ángulos y se supuso que el segundo termino es 0 por la simetría del mapeo. Entonces

$$C_1 = 4\pi^2 A^2 \left\langle \sin^2(x_-^0) \cos(2\pi A \sin(x_+^0) - 2\pi A \sin(x_-^0)) \right\rangle = 2\pi^2 J_0(2\pi A). \quad (5.16)$$

El promedio tiene una expresión analítica que se calculó en Mathematica [23]. Se obtuvo que

$$D_2 = \pi^2 A^2 (1 + J_0(2\pi A)). \quad (5.17)$$

Y

$$D_\infty = \pi^2 A^2 (1 + 2J_0(2\pi A)) + \sum_{i=2}^{\infty} C_i \quad (5.18)$$

Esta aproximación fue la obtenida con el método de Fourier en los anexos, sin embargo con estos cálculos no se puede asegurar que el resto de los C_i sean de un orden menor en A . Se vuelve muy complicado obtener el resto de los C_i . La desviación de los valores de D_n respecto del coeficiente cuasilineal se grafican en la figura 5.5

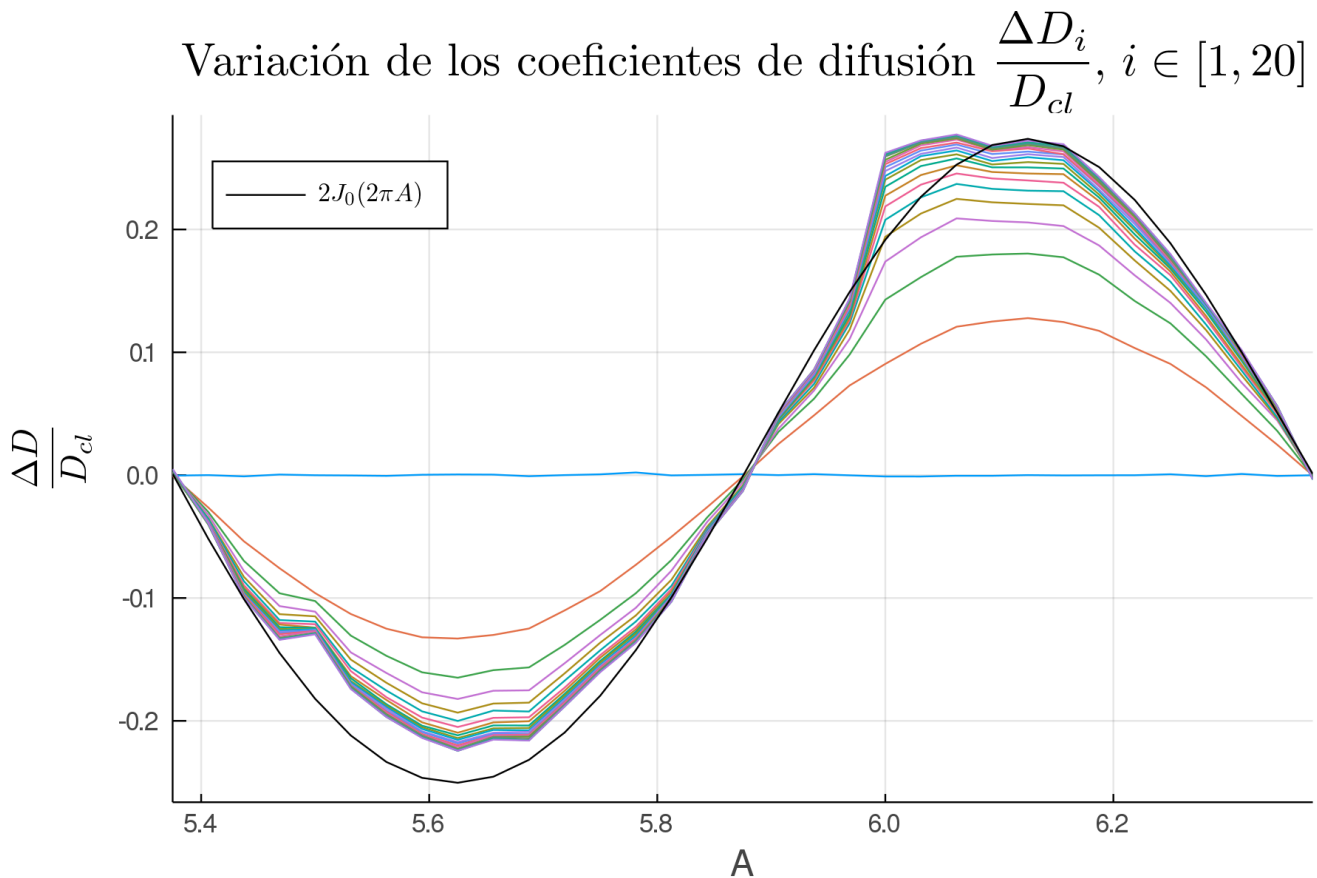


Figura 5.5: Variación de los coeficientes de difusión respecto del valor cuasilineal para un número de iteraciones cada vez mayor en el rango $A \in [5.375, 6.375]$

Modos aceleradores de periodo 2: $x_{\pm}^{n+2} - x_{\pm}^n = 2\pi m_{\pm}$. ($A = 6$)

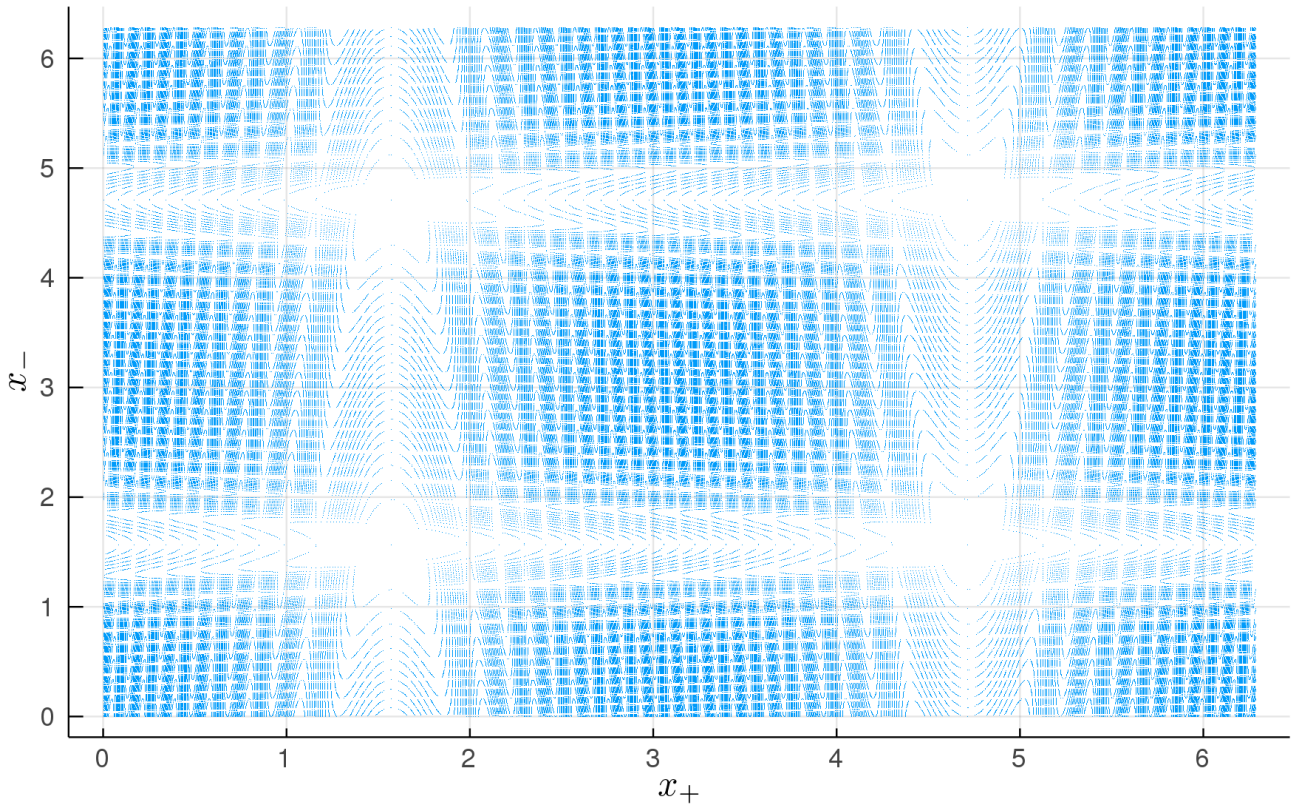


Figura 5.6: Modos aceleradores de periodo dos para una amplitud de $A=6$. Son 412955 puntos con valores de $m_{\pm} \in [-12, 12]$.

Capítulo 6

Conclusiones

Se estudió el transporte turbulento producido por un espectro constante e infinito de ondas de deriva dado por.

$$\phi = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n + nt) ; \theta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{\pi}{2} & n \text{ impar} \end{cases} . \quad (6.1)$$

- Se comprobó que cuando la amplitud de las ondas es mayor que 1 se produce un comportamiento difusivo. Se calculó el coeficiente de difusión en el caso cuasilineal y se obtuvo la corrección sucesiva. Estos resultados son iguales a lo encontrado en la referencia [26] y fueron validados por simulación numérica.
- Siguiendo la referencia [1] se realizó un giropromedio en las ecuaciones de movimiento de las partículas y se comprobó que éste disminuía el coeficiente de difusión. Suponiendo una distribución térmica de radios de Larmor se obtuvo que el coeficiente de difusión promedio del ensamble disminuía exponencialmente conforme se aumentaba el radio de Larmor térmico de la distribución, ρ_{th} . La función de distribución de probabilidad del ensamble dejaba de ser gaussiana al incrementar ρ_{th} y adquiría colas que decrecían más lentamente. Además se seguía presentando la autosimilaridad típica de los procesos difusivos con el tiempo, la distancia y el coeficiente de difusión promedio. La diferencia de este trabajo respecto de la ref. [1] fue considerar la primera corrección del coeficiente de difusión sin giropromediar. Con ella se obtuvieron dependencias más exactas de los coeficientes de difusión del mapeo giropromediado y del ensamble térmico como función de A , cuando A tiene valores intermedios. Estos resultados también fueron validados por simulaciones numéricas.
- Se estudió el efecto en el transporte de un flujo poloidal producido por un potencial que solo dependía de la dirección x . Se propuso un mapeo aleatorio para sustituir la evolución temporal exacta de las partículas y con ello fue posible hacer predicciones analíticas que concordaron con las simulaciones numéricas. Se consideraron 3 casos particulares de perfiles de flujo, para los cuales se encontró que el transporte en la dirección perpendicular al flujo no se veía mayormente afectado; El coeficiente cuasilineal se conserva y las variaciones solo se observaron en la primera corrección. Sobre el transporte en la dirección y se encontró que: (tomando σ^2 como la desviación estándar del ensamble y n el número de iteración del mapeo.)
 - Flujo lineal sin cota.
El transporte es superdifusivo y superbalístico con $\sigma^2 \propto n^3$.

- Flujo zonal gaussiano

El transporte permanece difusivo pero el coeficiente de difusión se ve modificado por un término inversamente proporcional al coeficiente de difusión en la dirección x

- Flujo escalón

El transporte es superdifusivo y balístico con $\sigma^2 \propto n^2$.

En la referencia [1] se observó numericamente este escalamiento superdifusivo del flujo lineal. Con el método propuesto en este trabajo fue posible calcular además, el coeficiente de transporte para los 3 perfiles de flujo.

- Finalmente se intentó explicar cualitativamente la razón para la primera corrección del coeficiente de difusión. Se encontró que en la función de distribución de probabilidad de desplazamientos después de dos iteraciones se observan 2 picos definidos que distan del comportamiento esperado para el caso cuasilineal. Con estos picos se podría identificar las trayectorias que contribuyen más a la corrección del coeficiente de difusión. Se propuso que estas partículas son las que tienen eigenvalores máximos pequeños y se observó una coincidencia con la ubicación de estos picos, sin embargo no fueron suficientes para producir completamente la corrección al coeficiente de difusión.

Algunas extensiones futuras a este trabajo son

- Calcular la siguiente corrección al coeficiente de difusión en el mapeo sin flujo buscando las trayectorias relevantes en el espacio de Fourier con el mismo procedimiento con el que se obtuvo la primera corrección.
- Buscar una explicación consistente para las correcciones al coeficiente de difusión en términos de correlaciones entre vecindades de puntos periódicos de orden 2. Además de estudiar si existen más diferencias de la distribución de probabilidad de desplazamientos respecto del caso cuasilineal.
- Estudiar el caso de flujo lineal acotado, es decir el caso en el que el flujo tiende a valores constantes fuera de una vecindad del origen y cerca del origen varía linealmente. Con base en los flujos estudiados se puede esperar que el comportamiento para tiempos grandes es balístico y para tiempos pequeños cortos superbalístico, pero sería interesante observar la transición de σ^2 de un régimen a otro.

Anexos

6.1. Deducción del mapeo sin flujo.

6.1.1. Reescritura del potencial eléctrico

El potencial eléctrico es:

$$\phi = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n + nt) ; \theta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{\pi}{2} & n \text{ impar} \end{cases} . \quad (6.2)$$

Usando la identidad para el producto de cosenos: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$

$$\phi = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + y + nt + 2\theta_n) + \cos(x - y - nt). \quad (6.3)$$

Usando la identidad: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$ para separar $x + y$ y $x - y$ respectivamente

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + y) \cos(nt + 2\theta_n) - \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x + y) \text{sen}(nt + 2\theta_n) \\ &\quad \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x - y) \cos(nt) + \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x - y) \text{sen}(nt). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Seno es una función impar, por lo que $\text{sen}(nt) = -\text{sen}(-nt)$ por lo que las sumatorias con estos términos son 0. Entonces

$$\phi = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + y) \cos(nt + 2\theta_n) + \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x - y) \cos(nt). \quad (6.5)$$

Notando que: $2\theta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \pi & n \text{ impar} \end{cases}$ y que: $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ con k un entero, es fácil comprobar

$$\phi = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + y) \cos(n(t - \pi)) + \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x - y) \cos(nt). \quad (6.6)$$

Finalmente, como $\cos(x \pm y)$ sale de la sumatoria por no depender de n y usando la igualdad,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(nt) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m), \quad (6.7)$$

se llega a

$$\phi(x, y, t) = \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\cos(x - y) \delta(t - (2m)\pi) + \cos(x + y) \delta(t - (2m + 1)\pi)]. \quad (6.8)$$

6.1.2. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento a considerar son las debidas a la deriva $\vec{E} \times \vec{B}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (6.9)$$

Con $\vec{B} = B\hat{z}$ y $\vec{E} = -\nabla\phi(x, y, t) = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}$ Se tiene que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{B^2} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -\frac{1}{B} \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{x} + \frac{1}{B} \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{y}. \quad (6.10)$$

Como B es una constante, se puede redefinir un potencial normalizado $\phi_n = \frac{\phi}{B}$ para eliminarlo de las ecuaciones y obtener

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\phi_n}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi_n}{\partial x}. \quad (6.11)$$

En lo sucesivo se omite el subíndice n . Trabajando con las variables $x_{\pm} = x \pm y$ las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dx_+}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (6.12)$$

$$\frac{dx_-}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (6.13)$$

Sustituyendo la ec. (6.8) en estas ecuaciones se obtiene

$$\frac{dx_+}{dt} = -2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_-)\delta(t - 2\pi m), \quad (6.14)$$

$$\frac{dx_-}{dt} = 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+)\delta(t - (2m + 1)\pi). \quad (6.15)$$

Para el modelo del potencial se ha elegido que las ondas tengan un vector de onda, k y una frecuencia angular, ω_0 , igual a 1, sin embargo las ecuaciones de movimiento son las mismas bajo el cambio de variables: $x, y \rightarrow kx, ky, t \rightarrow \omega_0 t, A \rightarrow \frac{k^2 A}{\omega_0}$

6.1.3. Integración de las ecuaciones de movimiento

En la figura 6.1 se muestra un esbozo del potencial eléctrico como función del tiempo. Este tiene un periodo de 2π y solo es diferente de 0 en los múltiplos de π . Los instantes de tiempo marcados son infinitésimos de tiempo antes y después de las deltas de Dirac, por ejemplo $t_1 = 2\pi m - \epsilon$ La integración se debe hacer por partes en los intervalos marcados. Un mapéo ligeramente diferente resultará dependiendo de en qué parte de un periodo del potencial se inicie. En este caso se inicia inmediatamente antes de un múltiplo par de πt

Integración de t_1 a t_2 .

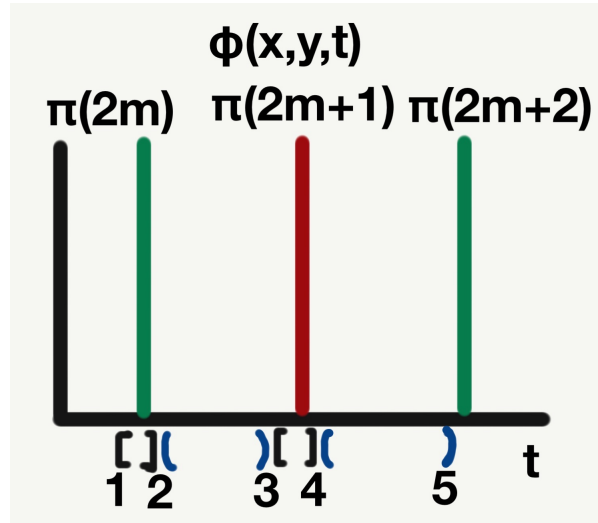


Figura 6.1: Esbozo del potencial eléctrico como función del tiempo

$$\begin{aligned}
 x_-(t_2) - x_-(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_-}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+) \delta(t - (2m+1)\pi) dt = 0, \\
 x_+(t_2) - x_+(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_+}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_-) \delta(t - 2\pi m) dt = -2\pi \text{sen}(x_-(t_1)).
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

En la segunda integral se usó que x_- es constante en este intervalo y que $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta(x) = f(0)$. Las ecuaciones se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned}
 x_-(t_2) &= x_-(t_1), \\
 x_+(t_2) &= x_-(t_1) - 2\pi A \text{sen}(x_-(t_2)).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Integración de t_2 a t_3 .

$$\begin{aligned}
 x_-(t_3) &= x_-(t_2), \\
 x_+(t_3) &= x_-(t_2).
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Esto debido al que el potencial es 0 en este intervalo.

Integración de t_3 a t_4 .

$$\begin{aligned}
 x_+(t_4) - x_+(t_3) &= \int_{t_3}^{t_4} \frac{dx_+}{dt} dt = - \int_{t_3}^{t_4} 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_-) \delta(t - 2\pi m) dt = 0, \\
 x_-(t_4) - x_-(t_3) &= \int_{t_3}^{t_4} \frac{dx_-}{dt} dt = \int_{t_3}^{t_4} 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+) \delta(t - (2m+1)\pi) dt = 2\pi \text{sen}(x_+(t_3)).
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Esto se hizo de modo análogo a (6.16). También se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 x_+(t_4) &= x_+(t_3), \\
 x_-(t_4) &= x_-(t_3) + 2\pi \text{sen}(x_+(t_4)).
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Integración de $t4$ a $t5$.

$$\begin{aligned}x_-(t5) &= x_-(t4), \\x_+(t5) &= x_-(t5).\end{aligned}\tag{6.21}$$

Pues el potencial es 0 en este intervalo.

Combinando (6.17), (6.18), (6.20) y (6.21) para eliminar los tiempos intermedios, se obtiene:

$$\begin{aligned}x_+(t5) &= x_+(t1) - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-(t1)), \\x_-(t5) &= x_-(t1) + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+(t5)).\end{aligned}\tag{6.22}$$

Esta relación se mantiene para cada periodo del potencial por lo que podemos renombrar genéricamente $x_{\pm}(t5) = x_{\pm}^{n+1}$ y $x_{\pm}(t1) = x_{\pm}^n$ por lo que

$$\begin{aligned}x_+^{n+1} &= x_+^n - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-^n), \\x_-^{n+1} &= x_-^n + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+^{n+1}).\end{aligned}\tag{6.23}$$

6.2. Dedución del mapeo sin flujo giropromediando.

Las ecuaciones de movimiento están dadas por la ec. (6.11), por lo que las ecuaciones de movimiento giro promediadas serán

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle_{\theta} = -\frac{\partial \langle \phi \rangle_{\theta}}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle_{\theta} = \frac{\partial \langle \phi \rangle_{\theta}}{\partial x}.\end{aligned}\tag{6.24}$$

Por lo que solo basta obtener $\langle \phi \rangle_{\theta}$. De la expresión (6.8) para el potencial podemos obtener que

$$\begin{aligned}\langle \phi \rangle_{\theta} &= \left\langle \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\cos(x-y)\delta(t-(2m)\pi) + \cos(x+y)\delta(t-(2m+1)\pi)] \right\rangle_{\theta} \\ &= \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\langle \cos(x-y) \rangle_{\theta} \delta(t-(2m)\pi) + \langle \cos(x+y) \rangle_{\theta} \delta(t-(2m+1)\pi)].\end{aligned}\tag{6.25}$$

Entonces basta obtener $\langle \cos(x \pm y) \rangle_{\theta}$

$$\langle \cos(x \pm y) \rangle_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \pm y + \rho(\cos \theta \pm \operatorname{sen} \theta)) d\theta.\tag{6.26}$$

Usando $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ para separar $\cos(x \pm y)$

$$\begin{aligned}\langle \cos(x \pm y) \rangle_{\theta} &= \cos(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\rho(\cos \theta \pm \operatorname{sen} \theta)) d\theta \\ &\quad + \operatorname{sen}(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\rho(\cos \theta \pm \operatorname{sen} \theta)) d\theta.\end{aligned}\tag{6.27}$$

De la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2}\right) \cos \left(\frac{a-b}{2}\right)$ y que $\cos \theta = \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})$ se obtiene

$$\cos \theta \pm \operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{2} \operatorname{sen}(\theta \pm \frac{\pi}{4}).\tag{6.28}$$

Sustituyendo esto en la ec. (6.27)

$$\begin{aligned} \langle \cos(x \pm y) \rangle_\theta &= \cos(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(\theta \pm \frac{\pi}{4})) d\theta \\ &\pm \operatorname{sen}(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}((\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(\theta \pm \frac{\pi}{4})) d\theta. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Donde se usó la imparidad y paridad de seno y coseno. Haciendo el cambio de variable $\theta^\pm = \theta \pm \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \langle \cos(x \pm y) \rangle_\theta &= \cos(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_{\pm \frac{\pi}{4}}^{2\pi \pm \frac{\pi}{4}} \cos(\sqrt{2}\rho \operatorname{sen}(\theta^\pm)) d\theta^\pm \\ &\pm \operatorname{sen}(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_{\pm \frac{\pi}{4}}^{2\pi \pm \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\rho \operatorname{sen}(\theta^\pm)) d\theta^\pm. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pero como seno (el de adentro del argumento) es periódica con periodo 2π las integrales son equivalentes a una de $[0, 2\pi]$, estos nos permite dejar el superíndice \pm para obtener:

$$\begin{aligned} \langle \cos(x \pm y) \rangle_\theta &= \cos(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\sqrt{2}\rho \operatorname{sen}(\theta)) d\theta \\ &\pm \operatorname{sen}(x \pm y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\rho \operatorname{sen}(\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (6.31)$$

La segunda integral es cero pues

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\rho \operatorname{sen}(\theta)) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\rho \operatorname{sen}(\theta)) d\theta = 0. \quad (6.32)$$

La primera igualdad es debido a la periodicidad 2π de la función seno del argumento, la segunda por la imparidad del seno de afuera. Finalmente identificamos la primera integral al hacer $\sqrt{2}\rho \rightarrow x$ con la representación de la función de Bessel del primer tipo de orden cero:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (6.33)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.31)

$$\langle \cos(x \pm y) \rangle_\theta = J_0(\sqrt{2}\rho) \cos(x \pm y). \quad (6.34)$$

Que sustituyendo en la ec. (6.25)

$$\langle \phi \rangle_\theta = \pi J_0(\sqrt{2}\rho) A \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\cos(x - y) \delta(t - (2m)\pi) + \cos(x + y) \delta(t - (2m + 1)\pi)]. \quad (6.35)$$

Entonces el potencial eléctrico es el mismo que en el caso sin giropromediar bajo la identificación $A \rightarrow J_0(\sqrt{2}\rho)A$ con ρ igual a constante para cada partícula, por lo que se puede hacer el resto de los pasos descritos en la sección 6.1 y obtener de la ec. (6.23)

$$\begin{aligned} x_+^{n+1} &= x_+^n - 2\pi J_0(\sqrt{2}\rho) A \operatorname{sen}(x_+^n), \\ x_-^{n+1} &= x_-^n + 2\pi J_0(\sqrt{2}\rho) A \operatorname{sen}(x_+^{n+1}). \end{aligned} \quad (6.36)$$

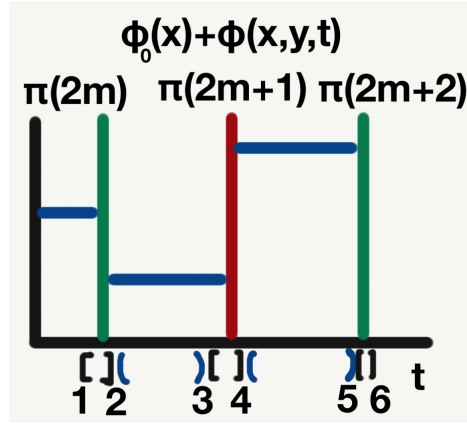


Figura 6.2: Esbozo del potencial eléctrico con flujo incluido como función del tiempo

6.3. Dedución del mapeo con flujo.

Cuando se agrega un flujo en la dirección y mediante un potencial $\phi_0(x)$. El nuevo potencial se convierte en

$$\phi = \phi_0(x) + \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\cos(x - y)\delta(t - (2m)\pi) + \cos(x + y)\delta(t - (2m + 1)\pi)]. \quad (6.37)$$

La integración de las ecuaciones de movimiento no cambia para los intervalos infinitesimales alrededor de las funciones delta de Dirac, pues se supone $\phi_0(x)$ suave tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)dt = 0$. En los intervalos de tiempo entre la aparición de las delta de Dirac solo el potencial asociado al flujo es diferente de 0. En ellos, de la ec. (6.11), las ecuaciones de movimiento en las variables x y y son:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\phi_0(x)}{dx}. \quad (6.38)$$

Integrándolas por ejemplo en el intervalo $[t_2, t_3]$ se obtiene:

$$\begin{aligned} x(t_3) - x(t_2) &= 0, \\ y(t_3) - y(t_2) &= \int_{t_2}^{t_3} \frac{d\phi_0(x)}{dx} dt = \frac{d\phi_0(x(t_3))}{dx} \int_{t_2}^{t_3} dt = \pi \frac{d\phi_0(x(t_3))}{dx}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

En la segunda ecuación $\frac{d\phi_0}{dx}$ sale de la integral porque x es constante en este intervalo. En las variables x_{\pm} las ecuaciones 6.39 se convierte en

$$\begin{aligned} x_+(t_3) &= x_+(t_2) + \Omega\left(\frac{x_+(t_2) + x_-(t_2)}{2}\right), \\ x_-(t_3) &= x_-(t_2) - \Omega\left(\frac{x_+(t_2) + x_-(t_2)}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Donde se nombró $\Omega(x) = \frac{d\phi_0(x)}{dx}$. Esta relación es igual en todos los intervalos de este tipo. El mapeo se escribe más compactamente si en vez de comenzar antes de un múltiplo de πt se inicia después. En la figura 6.2 se comienza al tiempo t_2 y se termina en t_6 . Los mapeos en cada uno de los intervalos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
x_+(t3) &= x_+(t2) + \pi\Omega\left(\frac{x_+(t2)+x_-(t2)}{2}\right), \\
x_-(t3) &= x_-(t2) - \pi\Omega\left(\frac{x_+(t2)+x_-(t2)}{2}\right), \\
x_+(t4) &= x_+(t3), \\
x_-(t4) &= x_-(t3) + 2\pi A \text{sen}(x_+(t4)), \\
x_+(t5) &= x_+(t4) + \pi\Omega\left(\frac{x_+(t4)+x_-(t4)}{2}\right), \\
x_-(t5) &= x_-(t4) - \pi\Omega\left(\frac{x_+(t4)+x_-(t4)}{2}\right), \\
x_-(t6) &= x_-(t5), \\
x_+(t6) &= x_-(t5) - 2\pi A \text{sen}(x_-(t6)).
\end{aligned} \tag{6.41}$$

En este caso solo se pueden eliminar simplemente las posiciones en los tiempos $t3$ y $t5$, obteniéndose

$$\begin{aligned}
x_+(t4) &= x_+(t2) + \pi\Omega\left(\frac{x_+(t2)+x_-(t2)}{2}\right), \\
x_-(t4) &= x_-(t2) + 2\pi A \text{sen}(x_+(t4)) - \pi\Omega\left(\frac{x_+(t2)+x_-(t2)}{2}\right), \\
x_-(t6) &= x_-(t4) - \pi\Omega\left(\frac{x_+(t4)+x_-(t4)}{2}\right), \\
x_+(t6) &= x_+(t4) - 2\pi A \text{sen}(x_-(t6)) + \pi\Omega\left(\frac{x_+(t4)+x_-(t4)}{2}\right).
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Llamando genéricamente a $x_\pm(t2) = x_\pm^n$, $x_\pm(t4) = x_\pm^{n+\frac{1}{2}}$ y $x_\pm(t6) = x_\pm^{n+1}$ y dejando al argumento de Ω en términos de $x = \frac{x_++x_-}{2}$ se obtiene que el mapeo con flujo es:

$$\begin{aligned}
x_+^{n+\frac{1}{2}} &= x_+^n + \pi\Omega(x^n), \\
x_-^{n+\frac{1}{2}} &= x_-^n + 2\pi A \text{sen}(x_+^{n+\frac{1}{2}}) - \pi\Omega(x^n), \\
x_-^{n+1} &= x_-^{n+\frac{1}{2}} - \pi\Omega(x^{n+\frac{1}{2}}), \\
x_+^{n+1} &= x_+^{n+\frac{1}{2}} - 2\pi A \text{sen}(x_-^{n+1}) + \pi\Omega(x^{n+\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Que es un mapeo a 2 pasos.

6.4. Modos aceleradores de periodo 2

La expresión obtenida en esta sección se utiliza para calcularlos numéricamente.

La condición de punto acelerador de periodo j es $x_\pm^{n+j} = x_\pm^n + 2\pi m_\pm$ con m_\pm diferente de cero .

El mapeo es

$$\begin{aligned}
x_-^{n+1} &= x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n), \\
x_+^{n+1} &= x_+^n - \epsilon \sin(x_-^{n+1}).
\end{aligned} \tag{6.44}$$

con $\epsilon = 2\pi A$. Dos iteraciones consecutivas del mapeo toman la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
x_-^{n+1} &= x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n), \\
x_+^{n+1} &= x_+^n - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n)).
\end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned}
x_-^{n+2} &= x_-^{n+1} + \epsilon \sin(x_+^{n+1}), \\
x_+^{n+2} &= x_+^{n+1} - \epsilon \sin(x_-^{n+1} + \epsilon \sin(x_+^{n+1})).
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Eliminando los términos x_{\pm}^n de las iteraciones pasadas.

$$\begin{aligned} x_-^{n+2} &= x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n) + \epsilon \sin(x_+^n - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n))), \\ x_+^{n+2} &= x_+^n - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n)) - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n) + \epsilon \sin(x_+^n - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n)))). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Usando la condición de punto acelerador de periodo 2, $x_{\pm}^{n+2} = x_{\pm}^n + 2\pi m_{\pm}$, se obtiene que

$$\epsilon \sin(x_+^n) + \epsilon \sin(x_+^n - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n))) = 2\pi m_-, \quad (6.48)$$

$$-\epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n)) - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n) + \epsilon \sin(x_+^n - \epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n)))) = 2\pi m_+. \quad (6.49)$$

Sustituyendo la primera en la segunda y sustituyendo la ecuación resultante en la primera se obtiene

$$\epsilon \sin(x_-^n + \epsilon \sin(x_+^n)) = -\epsilon \sin(x_-^n) - 2\pi m_+, \quad (6.50)$$

$$\epsilon \sin(x_+^n + \epsilon \sin(x_-^n)) = -\epsilon \sin(x_+^n) + 2\pi m_-. \quad (6.51)$$

De donde se sigue

$$\epsilon \sin(x_+^n) = -x_-^n - \arcsin\left(\sin(x_-^n) + \frac{m_+}{A}\right) + 2\pi n_+, \quad (6.52)$$

$$\epsilon \sin(x_-^n) = -x_+^n - \arcsin\left(\sin(x_+^n) + \frac{m_-}{A}\right) + 2\pi n_-. \quad (6.53)$$

con n_{\pm} enteros. Si $m_{\pm} = 0$, los puntos fijos de periodo 2 satisfacen la condición

$$\epsilon \sin(x_+^n) = -2x_-^n + 2\pi n_+, \quad (6.54)$$

$$\epsilon \sin(x_-^n) = -2x_+^n + 2\pi n_-. \quad (6.55)$$

6.5. Coeficiente de difusión con correlación entre iteraciones

El método descrito en esta sección fue propuesto por primera vez en [21] y [27] para el mapeo estándar. Posteriormente fue aplicado para el mapeo sin flujo en [26]. En esta sección seguiremos un procedimiento similar al usado para el mapeo estándar en [13], basado en [28].

Anteriormente, para obtener el coeficiente de difusión cuasilínea se calculó en la ec. (3.8) el promedio de los desplazamientos cuadráticos después una sola iteración. Si ahora se quiere considerar la correlación de las trayectorias en iteraciones sucesivas, se puede obtener el coeficiente de difusión promediando los desplazamientos cuadráticos después de n iteraciones. Por simplicidad haremos los cálculos en las variables (x_+, x_-) .

$$D_n = \frac{\langle (\Delta x_+^n)^2 \rangle_{(x_+, x_-)}}{2n} \quad (6.56)$$

donde $\Delta x_+^n = x_+^n - x_+^0$. Para obtener esta cantidad se necesita calcular la probabilidad de densidad condicionada

$$W(x_+^n, x_-^n, n | x_+^0, x_-^0, 0) \quad (6.57)$$

que representa la probabilidad de terminar en las posición (x_+^n, x_-^n) después de n iteraciones si se comenzó en las posiciones (x_+^0, x_-^0) .

Esta probabilidad se puede obtener recursivamente como

$$W(x_+, x_-, n | x_+^0, x_-^0, 0) = \int dx'_+ dx'_- W(x_+, x_-, n | x'_+, x'_-, n-1) W(x'_+, x'_-, n-1 | x_+^0, x_-^0, 0) \quad (6.58)$$

y podemos obtener la primera distribución de probabilidad del integrando con el mapeo sin flujo de la ec. (2.6). Se tiene que

$$W(x_+, x_-, n | x'_+, x'_-, n-1) = \delta(x_+ - x'_+ + 2\pi A \sin(x'_-)) \delta(x_- - x'_- - 2\pi A \sin(x_+)) \quad (6.59)$$

Por otra parte, podemos calcular D como

$$D_n = \frac{1}{2n} \int W(x_+^n, x_-^n, n | x_+^0, x_-^0, 0) (x_+^n - x_+^0)^2 dx_+^n dx_-^n \quad (6.60)$$

y como estamos interesados en el límite $n \rightarrow \infty$, podemos considerar que x_+^n es proporcional a \sqrt{n} y despreciar x_+^0 de modo que

$$D_n = \frac{1}{2n} \int W(x_+^n, x_-^n, n | x_+^0, x_-^0, 0) (x_+^n)^2 dx_+^n dx_-^n \quad (6.61)$$

Resolver esta ecuación exactamente usando iterativamente las ecuaciones (6.58) y (6.59) se vuelve muy complicado, en vez de esto se usa el siguiente procedimiento: Primero se expande W de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} W(x_+, x_-, n | x_+^0, x_-^0, 0) &= \left(\sum_m a_{n1}(x_-^0, m) e^{imx_-} \right) \int dq a_{n2}(x_+^0, q) e^{iqx_+} \\ &= \int dq \sum_m a_n(m, q) e^{(imx_- + iqx_+)} \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde se expandió x_+ en una integral de Fourier y x_- en una sumatoria de Fourier. a_n también depende de x_{\pm}^0 . Después, sustituyendo la ec. (6.62) en la (6.61) se obtiene.

$$D_n = \frac{1}{2n} = \int dx_+ x_+^2 \int (dq e^{iqx_+}) \int dx_- \sum_m a_n(m, q) e^{imx_-} \quad (6.63)$$

La tercera integral es igual a $2\pi a_n(0, q)$. A continuación podemos integrar la integral respecto de q por partes dos veces para obtener un factor $-1/x_+^2$ que se cancele con el x_+^2 de la primera integral, obteniendo

$$D_n = -\frac{2\pi}{2n} \iint dq dx_+ \frac{\partial^2 a_n(0, q)}{\partial q^2} e^{iqx_+} \quad (6.64)$$

La integral en x_+ es $2\pi\delta(q)$, pues $a_n(0, q)$ solo depende de x_{\pm}^0 . Entonces

$$D_n = -\frac{4\pi^2}{2n} \frac{\partial^2 a_n(0, q)}{\partial q^2} \Big|_{q=0} \quad (6.65)$$

Ahora resta encontrar $a_n(m, n)$. De 6.62 obtenemos

$$a_n = \frac{1}{4\pi^2} \iint dx_+ dx_- e^{(-imx_- - iqx_+)} W(x_+, x_-, n | x_+^0, x_-^0, 0) \quad (6.66)$$

para $n = 0$ usando una distribución inicial en (x_+^0, x_-^0) .

$$\begin{aligned} W &= \delta(x_+ - x_+^0) \delta(x_- - x_-^0) \\ a_0(m, n) &= \frac{1}{4\pi^2} e^{(-iqx_+^0 - imx_-^0)} \end{aligned} \quad (6.67)$$

para $n > 0$ usamos las ecs. (6.66) y (6.58)

$$\begin{aligned} a_n(m, q) &= \frac{1}{4\pi^2} \int dx_+ dx_- e^{(-imx_- - iqx_+)} \dots \\ &\dots \int dx'_+ dx'_- \delta(x_+ - x'_+ + 2\pi A \text{sen}(x'_-)) \delta(x_- - x'_- - 2\pi A \text{sen}(x_+)) \dots \\ &\dots \int dq' \sum_{m'} a_{n-1}(m', q') e^{(im'x'_- + iq'x'_+)} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Usamos las funciones δ para integrar respecto a x_- y x'_+

$$\begin{aligned} a_n(m, q) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m'} \int dq' dx'_- dx_+ a_{n-1}(m', q' \dots) \\ &\dots \exp[-im(x'_- + 2\pi A \text{sen } x_+) + im'x'_- - iqx_+ + iq'(x_+ + 2\pi A \text{sen } x'_-)] \end{aligned} \quad (6.69)$$

Reacomodando y definiendo $\epsilon = 2\pi A$ se tiene

$$\begin{aligned} a_n(m, q) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m'} \int dq' dx'_- dx_+ a_{n-1}(m', q') \dots \\ &\dots \exp[(x'_- i(m' - m) + \text{sen } x'_- (iq'\epsilon)) + (x_+ i(q' - q) - \text{sen } x_+ (im\epsilon))] \end{aligned} \quad (6.70)$$

Usando la identidad

$$e^{iz \text{sen } \theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(|z|) e^{\hat{z}il\theta} \quad (6.71)$$

donde $\hat{z} = \frac{z}{|z|}$ es el signo de z y J_l es la función de primer tipo de Bessel de orden l . Podemos expandir la ec. (6.70) para obtener

$$a_n(m, q) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m', r, s} \int dq' dx'_- dx'_+ J_r(|q'\epsilon|) J_s(|m\epsilon|) a_{n-1}(m', q') \cdots \cdots \exp [x'_- i(m' - m + \hat{q}'r) + x'_+ i(q' - q - \hat{m}s)] \quad (6.72)$$

Se usaron los r y s como índices mudos para las expansiones. Las integrales en x'_- y x'_+ dan las funciones $2\pi\delta(q' - q - \hat{m}s)$ y $2\pi\delta(m' - m + \hat{q}'r)$ por lo que

$$a_n(m, q) = \sum_{m', r, s} J_s(|m\epsilon|) \int dq' J_r(|q'\epsilon|) a_{n-1}(m', q') \cdots \cdots \delta(q' - q - \hat{m}s) \delta(m' - m + \hat{q}'r) \quad (6.73)$$

Entonces, integrando en q' , usando la segunda δ para evaluar la sumatoria en m' y notando que las cantidades primadas eran para la iteración $n - 1$ y las no primadas para la n se tiene que

$$a_n(m, q) = \sum_{r, s} J_s(|m_n\epsilon|) J_r(|q_{n-1}\epsilon|) a_{n-1}(m_{n-1}, q_{n-1}) \quad (6.74)$$

con

$$\begin{aligned} m_n &= m_{n-1} + \hat{q}_{n-1}r \\ q_n &= q_{n-1} - \hat{m}_n s \end{aligned} \quad (6.75)$$

Iterando la recursión encontrada n veces se tiene que

$$a_n(m, q) = \sum_{r_n \cdots r_1, s_n \cdots s_1} J_{r_n} J_{s_n} \cdots J_{r_1} J_{s_1} a_0(m_0, q_0) \quad (6.76)$$

Cada conjunto de n parejas de enteros $\{(r_n, s_n) \cdots (r_1, s_1)\}$ define un camino en el espacio (m, q) . Este camino es el dado por el conjunto ordenado de parejas $\{(m_n, q_n) \cdots (m_1, q_1)\}$ y (m_0, q_0) obtenidas con la ec. (6.75) en cada iteración. Nosotros estamos interesados en caminos que concluyan con $m_n = 0$ y $q_n \rightarrow 0$ para poder aplicar la ec. (6.65) (hay que recordar que m es una variable discreta y p es continua). Sin embargo no todos los caminos que terminan en $(0, 0)$ contribuyen equitativamente a a_n , de hecho el peso de cada camino esta dado por $J_{r_n} J_{s_n} \cdots J_{r_1} J_{s_1}$ que tienen como argumento a $2\pi m_i A$ y $2\pi q_i A$. Una propiedad de las funciones de Bessel es que para $A \gg 1$ decaen inversamente proporcional a \sqrt{A} . De modo que, en este rango de valores de A , los caminos que más contribuyen a a_n son los que se encuentran cerca del origen. Además, muy cerca del origen, las funciones de Bessel son más pequeñas entre mayor es su orden. De modo que, los caminos que más contribuye son los que se quedan cerca del origen con $(r_n, s_n) = (0, 0) \forall n$ con $m = 0$ y $q \rightarrow 0$ y dan, usando también la ec. (6.67), una contribución

$$a_n(q, 0) = J_0^n(\epsilon q) e^{-iqx_+} \quad (6.77)$$

donde el exponente n de las J_0^n es en realidad $n = 1$ porque $m = 0$. Expandiendo a segundo orden y usando la ec. (6.65) obtenemos

$$D = - \frac{1}{2n} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(1 - n \frac{\epsilon^2 q^2}{4} + \cdots \right) (1 - iqx_+ \cdots) \Big|_{q=0} \quad (6.78)$$

que es igual a

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} = \pi^2 A^2 \quad (6.79)$$

Este es el resultado cuasilineal, que es dos veces mas grande en las variables (x, y) que en las (x_+, x_-) porque la transformación no esta normalizada. i.e. como $x_{\pm} = x \pm y$ entonces el jacobiano es -2 .

Para encontrar la siguiente corrección al coeficiente de difusión buscamos caminos que se alejen ligera y momentáneamente del origen. Busquemos caminos que salen del origen en la iteración número α y regresan en la siguiente iteración $\alpha + 1$. Se debe cumplir que

$$\begin{aligned} (m_{\alpha-1}, q_{\alpha-1}) &= (0, 0) \\ (m_{\alpha+0}, q_{\alpha+0}) &= (r_{\alpha}, -\hat{r}_{\alpha} s_{\alpha}) \\ (m_{\alpha+1}, q_{\alpha+1}) &= (r_{\alpha} - \widehat{s_{\alpha}} \widehat{r_{\alpha}} r_{\alpha+1}, -\hat{r}_{\alpha} s_{\alpha} - s_{\alpha+1}) = (0, 0) \end{aligned} \quad (6.80)$$

donde se asume que el signo de 0 es $+1$, es decir $\hat{m}_{\alpha-1} = \hat{m}_{\alpha+1} = \hat{q}_{\alpha-1} = +1$. Este sistema de ecuaciones tiene solución para cualquier (r_{α}, s_{α}) , que es $(r_{\alpha+1}, s_{\alpha+1}) = (\widehat{s_{\alpha}} \widehat{r_{\alpha}} r_{\alpha}, -\hat{r}_{\alpha} s_{\alpha})$. Por lo tanto esta salida y regreso al origen aporta un factor

$$J_{s_{\alpha}}(|r_{\alpha}\epsilon|) J_{r_{\alpha}}(|q\epsilon|) J_{s_{\alpha+1}}(0) J_{r_{\alpha+1}}(|s_{\alpha}\epsilon|) \quad (6.81)$$

Para que esta cantidad pueda ser diferente de cero debe ocurrir que $s_{\alpha+1} = 0$, en cuyo caso $J_0(0) = 1$. Esto implica que $s_{\alpha} = 0$ de modo que, el factor es

$$J_0(|r_{\alpha}\epsilon|) J_{r_{\alpha}}(|q\epsilon|) J_{r_{\alpha+1}}(|q\epsilon|) \quad (6.82)$$

ahora se cumple que $r_{\alpha+1} = r_{\alpha}$. Los caminos más importantes ocurren para el menor $|r_{\alpha}|$, en este caso los caminos con $r_{\alpha} = \pm 1$. Puesto que $r_{\alpha} = 0$ ya se consideró para el resultado cuasilineal. Así pues la contribución de estos caminos es

$$J_0(|\epsilon|) J_1^2(|q\epsilon|) \quad (6.83)$$

Donde se usó que $J_{-1} = (-1)^1 J_1$. Ahora resta considerar cuantos caminos de este tipo existen. Hay uno para $r = 1$ y otro para $r = -1$, además este trayecto fuera del origen se puede comenzar en casi cualquier iteración. De modo que si consideramos n iteraciones habrá $n - 2$ iteraciones para salir del origen. De forma que hay $2(n - 2)$ caminos que aportan esta contribución. como estamos interesados en $n \rightarrow \infty$ el segundo dos se puede omitir. Así, la contribución a a_n por estas trayectorias es

$$a_n(q, 0) = \frac{2n}{4\pi^2} J_0(\epsilon) J_0^{n-2}(q\epsilon) J_1^2(q\epsilon) e^{-iqx_+} \quad (6.84)$$

Expandiendo a segundo orden en q y usando la ec. (6.65)

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{2n}{2n} J_0(\epsilon) \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left[\left(1 - (n-2) \frac{\epsilon^2 q^2}{4} + \dots \right) \left(\frac{\epsilon^2 q^2}{4} + \dots \right) (1 - iqx_+ + \dots) \right]_{q=0} \\ &= J_0(\epsilon) \frac{\epsilon^2}{2} \\ &= \pi^2 A^2 (2J_0(2\pi A)) \end{aligned} \quad (6.85)$$

De modo que el coeficiente de difusión con correlación en las variables (x_+, x_-) es

$$D = \pi^2 A^2 (1 + 2J_0(2\pi A)) \quad (6.86)$$

Esta primera corrección es del orden $A^{-\frac{1}{2}}$. Si se hubieran considerado $r_{\alpha} > 1$ se hubieran aparecido $J_{r_{\alpha}}(q\epsilon)$ que no contribuyen al coeficiente de difusión. Mientras que de haber elegido caminos que tomaban más de dos iteraciones en salir y regresar al origen, las correcciones serían de orden A^{-1} o menor. Ya estuvo.

Bibliografía

- [1] N. Kryukov, J. J. Martinell, and D. del Castillo-Negrete. Finite larmor radius effects on $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ weak turbulence transport. *Journal of Plasma Physics*, 84(3):905840301, 2018.
- [2] Allen H. Boozer. Physics of magnetically confined plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, 76:1071–1141, Jan 2005.
- [3] Francis F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer International Publishing, 2015.
- [4] R. J. Goldston and P.H. Rutherford. *Introduction to Plasma Physics*. Plasma physics series. Institute of Physics Pub., 1995.
- [5] F. Chen. *An Indispensable Truth: How Fusion Power Can Save the Planet*. Springer New York, 2011.
- [6] Justin Barton, W. Wehner, Eugenio Schuster, Federico Felici, and O. Sauter. Simultaneous closed-loop control of the current profile and the electron temperature profile in the tcv tokamak. *Proceedings of the American Control Conference*, 2015:3316–3321, 07 2015.
- [7] P. Helander and D.J. Sigmar. *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge Monographs on Plasma Physics. Cambridge University Press, 2005.
- [8] P. Helander. Classical and neoclassical transport in tokamaks. *Fusion Science and Technology*, 61:133–141, 02 2012.
- [9] S.I. Braginskii. *Reviews of Plasma Physics edited Leontovich, M.A*, volume 1. Springer US, 1965.
- [10] J. Wesson and D.J. Campbell. *Tokamaks*. International Series of Monogr. OUP Oxford, 2011.
- [11] Robert G. Kleva and J. F. Drake. Stochastic $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ particle transport. *The Physics of Fluids*, 27(7):1686–1698, 1984.
- [12] Charles F. F. Karney. Stochastic ion heating by a lower hybrid wave: Ii. *The Physics of Fluids*, 22(11):2188–2209, 1979.
- [13] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1992.
- [14] W.W Lee. Gyrokinetic particle simulation model. *Journal of Computational Physics*, 72(1):243 – 269, 1987.
- [15] George M Zaslavsky. *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. IMPERIAL COLLEGE PRESS, 1998.

-
- [16] A. Fukuyama, H. Momota, R. Itatani, and T. Takizuka. Stochastic acceleration by an electrostatic wave near ion cyclotron harmonics. *Phys. Rev. Lett.*, 38:701–704, Mar 1977.
- [17] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2013.
- [18] Susumu Shinohara and Yoji Aizawa. The Breakup Condition of Shearless KAM Curves in the Quadratic Map. *Progress of Theoretical Physics*, 97(3):379–385, 03 1997.
- [19] M. V. Budyansky, M. Yu. Uleysky, and S. V. Prants. Detection of barriers to cross-jet lagrangian transport and its destruction in a meandering flow. *Phys. Rev. E*, 79:056215, May 2009.
- [20] Boris V Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263 – 379, 1979.
- [21] A. B. Rechester and R. B. White. Calculation of turbulent diffusion for the chirikov-taylor model. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1586–1589, Jun 1980.
- [22] L. Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer New York, 1986.
- [23] Wolfram Researc Inc. Mathematica, version 11.2 student edition.
- [24] Steven R. Dunbar. Arcsen law. topics in probability theory and stochastic processes.
- [25] Jeff Bezanson, Alan Edelman, Stefan Karpinski, and Viral B Shah. Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM review*, 59(1):65–98, 2017.
- [26] Thomas M. Antonsen and Edward Ott. Diffusion coefficient for ions in the presence of a coherent lower hybrid wave. *The Physics of Fluids*, 24(9):1635–1640, 1981.
- [27] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, and R. B. White. Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the chirikov-taylor model. *Phys. Rev. A*, 23:2664–2672, May 1981.
- [28] Henry D.I. Abarbanel and John David Crawford. Diffusion in very chaotic hamiltonian systems. *Physics Letters A*, 82(8):378 – 382, 1981.