



Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería
Eléctrica - Control

Control para Seguimiento de Trayectorias de una Clase de Sistemas
Hamiltonianos

T E S I S

que para optar por el grado de

Maestro en Ingeniería

PRESENTA:

Fernanda Ramos García

Tutor Principal:

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Facultad de Ingeniería

Ciudad Universitaria, CDMX. (Enero), 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Primer suplente: Dr. Ricardo Álvarez Salas

Segundo suplente: Dr. José Guadalupe Romero Velázquez

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Control perteneciente a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería en la UNAM.

Director de Tesis:

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez.

*"No basta saber, se debe también aplicar.
No es suficiente querer, se debe también hacer"*

Johann Wolfgang von Goethe

*A mis padres Fernando y Gabriela, y a mi hermana Jimena.
A toda mi familia, amigos y maestros por el apoyo incondicional y la confianza que en
mi tienen.*

Reconocimientos

Quiero agradecer a mi familia, en especial a mis papás **Fernando Ramos** y **Gabriela García**, por todo el cariño y apoyo para poder cumplir cada una de mis metas planteadas. A mi hermana **Jimena Ramos** por su ayuda y crítica que me han permitido superarme cada día para ser una mejor persona.

Al **Dr. Gerardo Espinosa** por su tutoría y guía para la realización de este trabajo, así como la confianza, tiempo invertido y apoyo tanto profesional como personal para poder seguir creciendo y no dejarme vencer por las adversidades.

A los miembros del jurado **Dr. Marco Arteaga**, **Dr. Jaime Moreno**, **Dr. Ricardo Salas** y **Dr. José Guadalupe Romero** por el tiempo invertido, las correcciones y comentarios que me ayudaron a mejorar este trabajo.

Al **Dr. Mich**, **Dr. Isaac** y todos los "habitantes del laboratorio de control" por el tiempo, guía, apoyo y motivación, parte fundamental para el desarrollo de este trabajo.

A todos mis amigos, en especial a los *bullies*, **Aban**, **Stephany**, **Hobbit**, **Majo**, **Tamara**, **Carlitos**, **Richie** y **Artur**, por el gran apoyo durante estas etapas de estudios y diversión, nunca me imaginé poder tener unos amigos como ustedes. La confianza, los regaños y consejos no los pude recibir de mejores personas.

A la **UNAM** y la **Facultad de Ingeniería** por darme la oportunidad de poder tener una formación profesional de calidad.

La realización de este trabajo fue posible gracias a los apoyos otorgados por:

- El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), mediante la beca nacional para estudios de posgrado (Agosto 2018 a Agosto 2020)
- Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) a través del proyecto DGAPA-UNAM PAPIIT IN118019

Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	VIII
Notación	IX
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Formulación del Problema	5
1.4. Contribuciones	5
1.5. Estructura de la Tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Sistemas Hamiltonianos	7
2.2. Estructura General de sistemas PCH	9
2.2.1. Matriz de Interconexión	10
2.2.2. Matriz de Disipación	11
2.2.3. Hamiltoniano y su gradiente	12
2.2.4. Matriz de Incidencia de entradas	12
2.2.5. Propiedades básicas de los sistemas PCH	12
2.3. Pasividad en sistemas PCH	14
2.3.1. Interconexión de Sistemas Pasivos	15
2.3.2. Retroalimentación Pasiva	16
2.4. Clase Particular de sistemas PCH	18
2.5. Interconexión	19
3. Control para Seguimiento de Trayectorias	21
3.1. Trayectorias Deseadas Admisibles de un Sistema	21
3.2. Dinámica del Error	22
3.2.1. Matriz $\Gamma(x_*)$	24
3.2.2. Salida Pasiva	25
3.3. Control Propuesto	25

3.4. Sistemas Perturbados	26
4. Caso de Estudio: Motor Síncrono de Imanes Permanentes	29
4.1. Modelo en el marco dq	30
4.2. Trayectorias Deseadas Admisibles	32
4.3. Dinámica del error	33
4.4. Control de Seguimiento de Trayectoria	35
4.5. Rechazo a Perturbaciones Constantes	38
4.5.1. Perturbaciones Desacopladas	39
4.5.1.1. Control	39
4.6. Simulación numérica y análisis de resultados	42
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	47
5.1. Conclusiones	47
5.2. Trabajo Futuro	47
A. Apéndice A	49
A.1. Trayectorias Deseadas Admisibles	49
Bibliografía	51

Índice de figuras

2.1. Estructura Geométrica de PCH	8
2.2. Retroalimentación Negativa	14
2.3. Retroalimentación Negativa con pre y post multiplicación de una Matriz M dependiente del estado x	16
2.4. Ejemplo de Interconexión de Sistemas PCH	20
4.1. Esquema del PMSM	30
4.2. Comportamiento de los estados y trayectorias de referencia del PMSM .	44
4.3. Error de los estados y trayectorias de referencia del PMSM	45
4.4. Entradas de Control del PMSM	46

Índice de tablas

4.1. Valores de Parámetros del PMSM	42
4.2. Valores de Diseño del PMSM	42
4.3. Condiciones Iniciales del PMSM	42
4.4. Trayectorias de Referencia	42

Notación

La notación utilizada en este trabajo se lista a continuación.

\mathcal{H}	— Hamiltoniano de un sistema.
\mathcal{L}	— Lagrangiano de un sistema.
q	— Coordenadas generalizadas.
p	— Momentos generalizados.
\mathbb{R}	— Conjunto de los reales.
x	— Estados de un sistema dinámico.
\dot{x}	— Vector velocidad en el espacio de estados.
g	— Matriz de incidencia de entradas al sistema.
u	— Entradas de control en un sistema dinámico.
n	— Dimensión de los estados x .
m	— Dimensión de las entradas u .
y	— Salidas de un sistema Hamiltoniano.
x_*	— Trayectoria deseada admisible del espacio de estados.
u_*	— Entrada necesaria para mantener el sistema en x_* .
\tilde{x}	—
J	— Matriz de interconexión del sistema Hamiltoniano.
R	— Matriz de disipación del sistema Hamiltoniano.
t	— La variable tiempo.
f	— Sistema general determinístico.
x_0	— Condiciones iniciales de un sistema dinámico.
I_n	— Matriz identidad.
L, L_1, L_2	— Valor de inductancia.
R, R_1, R_2	— Valor de resistencia.
ω_r	— Velocidad angular mecánica del rotor.
r_m	— Fricción viscosa en el rotor.
J_m	— Inercia en el rotor.
Φ	— Constante contra-electromotriz del <i>PMSM</i> .
n_p	— Número de pares de polos del <i>PMSM</i> .

Introducción

1.1. Motivación

El Control Basado en Pasividad (PBC, por sus siglas en inglés), es una metodología de diseño de controladores reconocida en la literatura, con la cual se han obtenido esquemas de control con alto desempeño para sistemas dinámicos no lineales. El moldeo de energía y la inyección de amortiguamiento, dos de los pasos fundamentales en el marco de trabajo del PBC en el desarrollo de controladores, nos permiten la construcción de controles cuya interpretación física es más sencilla de entender.

Dentro de la metodología de PBC, podemos encontrar diferentes técnicas para el desarrollo de técnicas de control, como el llamado Control Basado en Pasividad Estándar, el cuál se enfoca en el desarrollo de esquemas de control para los sistemas descritos por las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). Entre otras técnicas podemos encontrar el Control por Interconexión que se centra en la conexión interna entre plantas y controles vistos desde el punto de vista de dispositivos que transforman energía. Dichas conexiones se deben conectar de una manera que preserven potencia, para poder alcanzar el objetivo. Dentro de las técnicas que también podemos encontrar en el PBC se encuentran el control por Moldeo de Potencia y la técnica de Control por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento (IDA-PBC).

En la búsqueda de poder caracterizar una clase de sistemas que se puedan estabilizar bajo el moldeo de energía del PBC, se requiere de la incorporación de una estructura explícita a la dinámica de los sistemas. Los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCH, por sus siglas en inglés) exponen de forma transparente los términos de disipación así como su dependencia con la función de energía y nos abre una posibilidad en este ámbito. Una ventaja de los sistemas PCH sobre los sistemas Lagrangianos es la estructura canónica simétrica además de que el modelado basado en puertos tiene una interpretación física de la energía. La función de energía de los sistemas PCH, llamado Hamiltoniano, puede ser usado para mostrar la disipación y propiedades de estabilidad del sistema. Aunado al hecho de que los PCH engloban una gran variedad y cantidad de clases de sistemas físicos no lineales. Así mismo, la técnica de IDA-PBC, la cual se

enfoca en la estructura del sistema en lazo cerrado, han hecho de los sistemas PCH, una clase de sistemas con muchas posibilidades para desarrollar esquemas de control y cuya interpretación física está expuesta ante el entendimiento real del sistema físico. Dentro del marco de trabajo del PBC de sistemas PCH se han logrado obtener resultados muy fructíferos, logrando resolver un gran cantidad de problemas. El problema de control de regulación de sistemas lineales y no lineales ha sido resuelto tanto para sistemas actuados como para sistemas no actuados, abarcando diferentes clases de sistemas como lo son: los sistemas eléctricos, sistemas mecánicos, sistemas magnéticos, solo por mencionar unos. Sin embargo, a pesar de que existen resultados de sistemas no lineales enfocados en aplicaciones en específico, el problema de control de seguimiento de trayectoria aun sigue siendo un tema abierto en la teoría de control, específicamente en el caso de sistemas subactuados.

1.2. Antecedentes

En el marco de sistemas Hamiltonianos controlados por Puerto se han diseñado e implementado una gran variedad de herramientas para la resolución de los problemas de, estabilización y regulación de puntos de operación (por ejemplo en [1],[19], [18], [4], solo mencionando algunos). Sin embargo, para el problema de control de seguimiento de señales variantes en el tiempo no ha sido fácil el diseño de leyes de control para sistemas PCH y más aún que estas leyes tengan interpretación importante de la energía para el sistema en lazo cerrado. El problema de control para seguimiento de trayectorias ha sido un tema de mucho interés por lo que hay algunos resultados desatacados dentro de la literatura. Sin embargo, dicho problema no ha sido resuelto completamente con la metodología de PBC y para los sistemas PCH. Algunos resultados importantes que es posible encontrar son:

- **Transformación Canónica de Coordenadas:** Estudiado en [6] y [7] debido al interés por los sistemas PCH como una generalización de los Sistemas Hamiltonianos debido a la gran variedad de sistemas físicos que estos representan, además de que la estructura permite visualizar las interconexiones y las funciones de energía directamente en el sistema. Los resultados hasta la fecha de publicación del estudio, respecto al problema de seguimiento de trayectoria sólo se habían enfocado a sistemas Hamiltonianos convencionales como en [5] y [29]. Uno de los principales problemas que se enfrentaban con el control de seguimiento de trayectoria es que se debía modificar la función de energía para que esta fuera variante en el tiempo. La estabilización de un sistema no lineal variante en el tiempo no es sencillo de manera general, sin embargo en [7] se decidieron por desarrollar la dinámica del error en forma de un sistema Hamiltoniano controlado por puerto ya que este se puede estabilizar fácilmente con el método desarrollado en PBC en [8]. El cambio de coordenadas generalizadas permitió construir la dinámica del error de sistema con la estructura de un sistema PCH. La adversidad con la que se ha enfrentado

este resultado es que la transformación es posible a través de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) y puede ser sólo aplicado a una clase especial de sistemas PCH.

- **Dinámica del error locales lineales:** En [11] se propone una metodología sistemática para alcanzar la estabilización de la dinámica del error local de una planta no lineal. A través de la técnica IDA-PBC que preserva la estructura de los sistemas PCH se estabiliza la dinámica del error a través de una transformada generalizada de entrada y estado tal que el sistema final es identificable con la dinámica del error. Desafortunadamente, una desventaja de este método, es que se deben evitar singularidades en el desarrollo ya que se pueden llegar a incongruencias al linealizar el error en cero con la técnica IDA-PBC, además de que por medio de la linealización se limita el área de trabajo del controlador y su rendimiento al no considera las no linealidades del sistema.
- **Timed IDA-PBC:** En [33] se describe una versión en el tiempo de la metodología para diseño de control IDA-PBC, llamada timed IDA-PBC, la cual aprovecha los resultados obtenidos para el problema de estabilización a través de la técnica IDA-PBC y realiza algunas modificaciones en lazo cerrado del Hamiltoniano para adaptarlo al problema de seguimiento de trayectorias. Destacando que la metodología de IDA-PBC es aplicable para sistemas variantes en el tiempo, se realiza el moldeo de energía para el propósito de seguimiento de trayectoria y debido a que la energía en lazo cerrado depende de la trayectoria deseada se debe resolver una PDE de matching. Sin embargo una de las ventajas de esta técnica es que la PDE de matching que se debe resolver es muy parecida a la PDE de matching de la técnica IDA-PBC, difiriendo principalmente en las condiciones iniciales de estas ecuaciones diferenciales. A pesar de las ventajas de esta técnica al no modificar la estructura de los sistemas PCH, puede convertirse en un problema sin solución al tener que resolver un conjunto de PDE complejas.
- **Sistemas Hamiltonianos controlados por puerto contrayentes:** En [34] caracterizan una clase de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto contrayentes, donde a través de las propiedades contrayentes de los sistemas y la herramienta IDA-PBC proponen un control de seguimiento de trayectoria. Una de las propiedades principales de los sistemas contrayentes es que todas sus trayectorias convergen, lo que simplifica el control para el seguimiento de trayectoria ya que solo se enfoca en obtener la trayectoria deseada que se requiere seguir dentro de las trayectorias del sistema, de esta manera el problema de seguimiento de trayectoria puede ser tratado de manera similar al problema de regulación y en este resultado a través de la técnica conocida como IDA-PBC.

- **Seguimiento de trayectorias a través de superficies deslizantes y análisis de contracción:** En [24] se propone una técnica para el problema de seguimiento de trayectoria basados en el análisis de contracción para sistemas PCH completamente actuados. La Teoría de convergencia se centra en la convergencia entre trayectorias, por lo que se puede adaptar fácilmente al problema de seguimiento de trayectorias. Esta técnica empieza con la construcción de la dinámica del error a través del método de backstepping, lo que permite identificar la subvariedad deslizante que posee con un estado estable deseable. Posteriormente, se desarrolla un control para la estabilización de dicha superficie deslizante de tal forma que la dinámica del error en lazo cerrado tenga una estructura Hamiltoniana. En el análisis de convergencia, el espacio de estados se extiende incorporando un sistema virtual donde se admiten las trayectorias de la dinámica del error y las del origen como soluciones. El uso del análisis de contracción parcial como en [32], implica que la contracción del sistema virtual se traduzca en la convergencia de los estados a los estados deseados.
- **Dinámica del error:** La obtención de la dinámica del error es un proceso por medio del cual, se intenta convertir el problema de seguimiento de trayectoria a un problema de regulación de un punto de equilibrio, sin embargo en el caso de sistemas no lineales este proceso no es fácil, ya que las no linealidades modifican la estructura del sistema PCH y no permiten el uso de metodologías usadas para la regulación de un punto de equilibrio. En [2] consiguen estabilizar el error a través de la linealización parcial por cambio de coordenadas. Sin embargo, se muestra que se debe usar alguna técnica de linealización para poder resolver el problema de seguimiento de trayectoria.

En los trabajos realizados con sistemas bilineales como en [3] proponen un marco teórico basado en pasividad para garantizar el seguimiento de trayectorias admisibles de manera global, a través de diseño de controladores PI los cuales son usados y aceptados en la práctica e industria, debido a su robustez y sencillez. Inspirados en el manejo de los sistemas como se realiza en [3], se puede vislumbrar un área de estudio para los sistemas PCH para el seguimiento de señales variantes en el tiempo de sistemas subactuados. A través de la identificación de propiedades y clases de sistemas PCH se puede proponer una metodología sistemática que resuelva el problema de seguimiento de trayectoria de dichos sistemas.

1.3. Formulación del Problema

En este trabajo de tesis se considera el problema de diseño de controladores para seguimiento de trayectorias para sistemas PCH. Considerando el escenario descrito en la sección anterior, se reconoce la necesidad de identificar clases de sistemas no lineales para las cuales sea posible proponer una solución a este problema. En este sentido, el objetivo de este estudio es abarcar un conjunto de sistemas dinámicos que incluya a un número de casos particulares lo más grande posible.

La clase estudiada en este trabajo de tesis corresponde a sistemas PCH cuya estructura, en términos de su matriz de interconexión, considera que las interconexiones internas entre variables de estados están moduladas por componentes del vector de estados mismos. Más aún, se considera que el producto de la matriz de interconexión del sistema por el gradiente de la función Hamiltoniana es tal que se puede expresar como el producto de una matriz anti-simétrica dependiente del estado multiplicada por una función lineal del vector de estados.

Adicionalmente, se supone que la matriz anti-simétrica se puede expresar como la sumatoria de matrices constantes anti-simétricas multiplicadas por cada componente del vector de estados. Finalmente, se plantea la posibilidad de que el sistema sea subactuado.

Bajo estas condiciones, el problema que se aborda en este trabajo de tesis se puede formular como: *Resolver el problema de control de seguimiento de trayectorias para la clase de sistemas PCH subactuados descrita arriba, basados en la obtención de la dinámica del error. Proponer una metodología sistemática y estructurada por pasos para el diseño de controladores para esta clase de sistemas PCH y aplicarla al Motor Síncrono de Imanes Permanentes (PMSM, por sus siglas en inglés), una aplicación de gran relevancia en el área de máquinas eléctricas.*

1.4. Contribuciones

La principal contribución de este trabajo es mostrar el proceso a través del cual se logró identificar una clase de sistemas PCH, lo que permitió el desarrollo de diseño de controladores de seguimiento de trayectorias para una clase de sistemas subactuados. La clase de sistemas Hamiltonianos identificada permitió que la obtención de la dinámica del error exhibiera una estructura lineal respecto al error de seguimiento.

Para la dinámica del error obtenida fue posible determinar diferentes alternativas para demostrar convergencia del error de seguimiento a cero, lo que a su vez permitió reconocer diferentes tipos de sistemas dinámicos para los cuales el resultado obtenido es válido.

Se aplicó el procedimiento descrito al caso particular de máquinas eléctricas dado por el PMSM, lo que permitió identificar algunas consideraciones que facilitaban o complica-

ban el análisis de estabilidad del sistema. Para el caso del PMSM se añadió el problema de rechazo a perturbaciones constantes, aplicando el resultado propuesto por [17], lo que permitió obtener un resultado trascendente en el área de máquinas eléctricas, ya que el control diseñado no sólo cumple con la función de seguimiento de trayectorias, sino que también rechaza perturbaciones constantes tanto acopladas como desacopladas.

1.5. Estructura de la Tesis

La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

- El Capítulo 2 esta compuesto por la información preliminar necesaria para el desarrollo del controlador, lo que incluye los sistemas PCH y la clase particular a la cual se le desarrollo el controlador de seguimiento de trayectorias.
- En el Capítulo 3 se presentan los resultados obtenidos y el procedimiento desarrollado para la obtención del control para seguimiento de trayectoria para la clase de sistemas PCH en estudio.
- En el Capitulo 4 se discute el caso particular del PMSM validando el resultado por medio de simulaciones. En este caso se considera el problema de rechazo a perturbaciones constantes, acopladas y desacopladas.
- Finalmente, en el Capítulo 5 se redactan las conclusiones a partir del trabajo realizado, aunado al trabajo futuro que se puede desarrollar siguiendo con esta línea de investigación y que se depende de esta Tesis.

Preliminares

2.1. Sistemas Hamiltonianos

La representación Hamiltoniana de los sistemas se desprende de la mecánica analítica. En contraposición a la mecánica clásica, donde la base se encontraba en cantidades vectoriales y la interacción de cada partícula con el entorno, la mecánica analítica se enfoca en el sistema como un ente completo basándose en cantidades escalares de energía total del sistema.

La teoría de los sistemas PCH interconecta diferentes áreas del análisis de sistemas dinámicos como el modelado y análisis de sistemas físicos, mecánica geométrica, así como el área de sistemas y teoría control, lo que nos permite contar con una herramienta muy completa para el desarrollo de esquemas de control.

Desde la perspectiva de modelado, sus orígenes se encuentran en la teoría de modelado basado en puertos de los años 50s descrita por Henry Paynter [21]. El modelado basado en puertos [15] tiene como principal objetivo proveer un marco de trabajo unificado para el modelado de sistemas que pertenecen a diferentes sistemas físicos, como puede ser sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, térmicos, por mencionar algunos. Este propósito se logra describiendo cada sistema en términos de energía para identificar los componentes físicos que forman al sistema a través de su característica física principal; elementos dinámicos que almacenan energía, disipadores estáticos de energía y conectores de energía sin pérdidas. Los elementos que almacenan energía S y los elementos que disipan energía R , se encuentran conectados, a través de las variables de flujo f y esfuerzo e , a una estructura geométrica central que distribuye la energía y preserva potencia, y de donde se encuentran los puertos externos p para conectar el sistema, como se ilustra en la Figura 2.1.

Desde la perspectiva de una de las ramas de las matemáticas, los sistemas PCH se formalizan de forma geométrica, usando el espacio de estados bajo una estructura que preserva potencia que junto a una función de energía conocido como Hamiltoniano, lleva a una teoría para el análisis dinámico de sistemas Hamiltonianos, que permite mostrar las características internas del sistema de manera directa, como simetrías, in-

terconexiones y cantidades conservativas. Dentro del área de los sistemas y teoría de control se enfatiza en la dinámica de los sistemas como abiertos y su interacción con el medio, a través de las entradas y salidas, y su posible interconexión con el control.

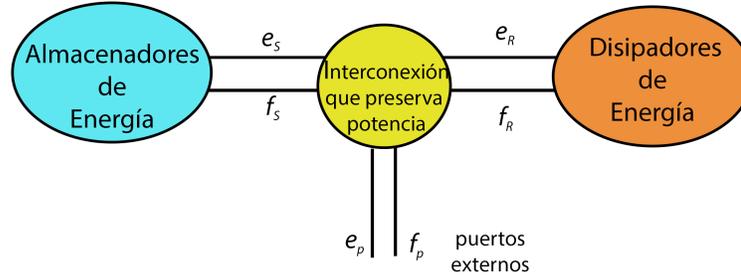


Figura 2.1: Estructura Geométrica de PCH

Las ecuaciones Hamiltonianas [30] se obtienen a través de la transformada de Legendre, se derivan de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) - \nabla_q L(q, \dot{q}) = u \quad (2.1)$$

donde $L(q, \dot{q})$ es la función Lagrangiana del sistema.

Se define una nueva variable $p = \nabla_{\dot{q}} L$, conocida como momento generalizado, recordando que q son las coordenadas generalizadas.

Aplicando el cambio de coordenadas de (q, \dot{q}) a (q, p) , aprovechando la propiedad de invarianza de las dinámicas Euler-Lagrange respecto a una transformación de coordenadas arbitrario [12].

Definiendo una nueva función escalar

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (2.2)$$

conocida como Hamiltoniano, la cual representa la energía total del sistema.

A este proceso se le conoce como la transformación de Legendre, a través del cuál se reemplaza un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden por un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden con una estructura simétrica.

El sistema Hamiltoniano tras el cambio de coordenadas con la transformación de Le-

gendre, presenta la estructura dada por

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad (2.3)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} + G(q)u \quad (2.4)$$

donde $G(q)$ es la matriz de incidencias de entrada y $G(q)u$ se denota como las fuerzas generalizadas que resultan en el conjunto de entradas de control donde $u \in \mathbb{R}^m$

2.2. Estructura General de sistemas PCH

Una generalización de los sistemas Hamiltonianos con entradas y salidas con disipación se define como un sistema Hamiltoniano controlado por puerto con disipación (PCHD, por sus siglas en inglés)

Definición 2.1. (*Sistema PCH [30]*) *Un sistema Hamiltoniano controlado por puerto entrada-estado-salida en el espacio de estados $X \subset \mathbb{R}^n$, con espacio de entradas $U \subset \mathbb{R}^m$, espacio de salidas $Y \subset \mathbb{R}^m$ y Hamiltoniano $\mathcal{H} : X \rightarrow \mathbb{R}$ esta dado por:*

$$\dot{x} = [J(x) - \mathcal{R}] \nabla_x \mathcal{H}(x) + g(x)u \quad (2.5)$$

$$y = g^T(x) \nabla_x \mathcal{H}(x) \quad (2.6)$$

donde las matrices de interconexión y disipación $J(x), \mathcal{R}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfacen $J(x) = J^T(x)$ y $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) \geq 0$ respectivamente, $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de incidencia de entradas de rango completo por columnas y u son las entradas del sistema, mientras que y es la salida pasiva del sistema. El gradiente de la función de energía respecto a x es $\nabla_x \mathcal{H}(x)$ y se define $\nabla_x \mathcal{H}(x) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x_n} \right]^T$.

Los sistemas PCH cuentan con una función de energía, Hamiltoniano \mathcal{H} , el cuál posteriormente servirá como función candidata de Lyapunov para el análisis de estabilidad. Así mismo las matrices $J(x)$ y $R(x)$ que describen el intercambio interno y disipativo del sistema, facilitan la interpretación de los controles diseñados.

En caso de que $m = n$, es decir, el espacio de estados y el espacio de entradas sea de la misma dimensión se trata de un sistema completamente actuado, lo que equivale a que si $g(x)$ es una matriz no singular, mientras que si $m \leq n$ se habla de un sistema subactuado.

Nota: Esta definición es la misma que la usada para sistemas mecánicos, solo que en este caso los puertos de control aparecen en q .

Dado un sistema de la forma 2.5, donde $x \in \mathbb{R}^n$, el vector x esta formado por $x = [q \ p]^T$, por lo que entonces

$$q \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}} \tag{2.7}$$

$$p \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}} \tag{2.8}$$

2.2.1. Matriz de Interconexión

Dentro de la estructura de los sistemas PCH, una parte fundamental se encuentra en la matriz de interconexión del sistema $J(x)$. A través de esta matriz se describen los flujos de energía a través de los elementos que almacenan energía dentro del sistema. La matriz de interconexión es una matriz antisimétrica, lo que significa que $J(x) = -J^T(x)$ dando como resultado interconexiones que preservan potencia. La estructura geométrica de $J(x)$ está determinada por una estructura de Poisson [23] [16]. En el formalismo Hamiltoniano, la derivada total con respecto al tiempo de cualquier cantidad $f(q_i, p_i, t)$ esta dado por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.9}$$

y sustituyendo (2.3 - 2.4) se obtiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.10}$$

Los corchetes de Poisson f, g de dos funciones $f(q, p)$ y $g(q, p)$ que dependen de las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados de los sistemas Hamiltonianos. Se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{2.11}$$

por lo que (2.10) se puede escribir como

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.12}$$

Si redefinimos (2.11) con x_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$ para $x_i = q_i$ para $i = 1, 2, \dots, N$ y $x_i = p_i$ para $j = N + 1, N + 2, \dots, 2N$ el paréntesis de Poisson se escribe como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i} J_c^{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

donde J_c es una matriz *simpléctica* dada por

$$J_c = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{bmatrix}$$

donde I_N es la matriz unitaria de dimensión N .

Así mismo a partir de la definición de la derivada total respecto al tiempo de cualquier cantidad (2.12), las ecuaciones Hamiltonianas se pueden escribir como

$$\dot{x}_i = J_c^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{x_i, H\}; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = i + N. \quad (2.13)$$

la cual es una forma de ver la separación entre la cinemática y dinámica. La cinemática se encuentra internamente en la definición del corchete de Poisson en J_c que determina la estructura del diagrama de fase mientras que la dinámica se encuentra representada por la elección del Hamiltoniano H .

2.2.2. Matriz de Disipación

Los elementos que describen la disipación de energía o pérdida de energía se encuentran en la matriz de disipación $R(x)$, la cual es simétrica positiva semidefinida $R(x) = R^T(x) \geq 0$ ya que su no negatividad es responsable de la disipación interna de energía. La estructura geométrica de $R(x)$ está determinada por métrica singular de Riemannian [16], en otras palabras, de medida donde cada punto de la variedad diferencial se le asigna una forma cuadrática definida positiva en su estado tangente y este va variando de manera suave de un punto a otro punto de la variedad. Para esto se define la métrica

$$\dot{x}_i = g_{i,j} \frac{\partial H}{\partial x_j} = (x_i, H) \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

donde $g_{i,j}$ es el elemento i, j de la matriz de incidencias y $H(x)$ es una función de espacio de fase, que le podemos dar la interpretación física de entropía. El paréntesis se define

como

$$(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} g_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

en funciones del espacio de fases f, g .

El paréntesis es lineal en cada uno de sus argumentos y se requiere que sea simétrico, lo que significa que $(f, g) = (g, f)$, que por consecuencia se ve reflejado en la estructura $g_{ij} = g_{ji}$, conocida como matriz simétrica, la cual puede depende de x . Esta métrica nos permite empezar de manera natural la construcción de estabilidad asintótica en la fase de estados. Si se añade el requerimiento que g_{ij} debe tener valores propios definidos positivos en todo el diagrama de fase, el conjunto máximo invariante de H es asintóticamente estable. Si se considera una matriz no singular g_{ij} entonces al espacio fásico tiene asociado un tensor Riemannian curvo, lo cual puede ayudar a la clasificación de la disipación.

2.2.3. Hamiltoniano y su gradiente

La función de energía del los sistemas PCH, Hamiltoniano, se encuentra explícitamente en la estructura a través de su gradiente $\nabla_x H(x)$. El Hamiltoniano describe la distribución interna del sistema entre los elementos que la almacenan y es una función escalar de variable vectorial por lo que $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la cual se puede ser usada como función candidata de Lyapunov. En el caso más básico de regulación se da cuando el punto de equilibrio deseado x_* es el estricto valor mínimo del Hamiltoniano, es decir $x_* = \operatorname{argmin} [H(x)]$.

2.2.4. Matriz de Incidencia de entradas

La matriz de entradas u se involucra directamente con la matriz de incidencias de entradas $g(x)$, la cual indica la manera en que la energía entra al sistema. Si la matriz de incidencias es una matriz cuadrada y de rango completo n , nos indica que estamos tratando de un sistema completamente actuado, sin embargo en caso de se una matriz rectangular y de rango completo por columna m , entonces se trabaja con un sistema subactuado.

2.2.5. Propiedades básicas de los sistemas PCH

Los sistemas PCH cuentan con una gran variedad de propiedades estructurales que se pueden aprovechar para el análisis y control de los sistemas. Algunas de ellas son

- Pasividad: La combinación de la estructura que preserva potencia de los sistemas PCH relacionado con la propiedad de almacenamiento de energía $\dot{H}(x) = -e_s^T f_s$

y de disipación de energía $e_R^T f_R \leq 0$, indican que el incremento en la energía almacenada H es menor o igual a la energía suministrada

$$\dot{H}(x) = e_R^T f_R + e_P^T f_P \leq e_P^T f_P \quad (2.16)$$

donde $e_S, f_S, e_R, f_R, e_P, f_P$ son las variables de esfuerzo y flujo de los elementos que almacenan energía, de los disipadores de energía y los puertos externos del sistema respectivamente, como se muestra en la Figura 2.1.

- Estructura: Los sistemas PCH son sistemas estructurales debido a la separación de los elementos que almacenan energía, aquellos que disipan energía y los que conectan la energía.
- Función Casimir de sistemas PCH [31]: Enfocándonos a las propiedades conservativas de los sistemas PCH, podemos encontrar funciones $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ independiente del Hamiltoniano \mathcal{H} que determina la solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial^T C}{\partial x}(x) [J(x) - \mathcal{R}(x)] = 0 \quad (2.17)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y (2.17) implica que $\frac{\partial^T C}{\partial x} = 0$ para $u = 0$. Si posmultiplicamos por $\frac{\partial C}{\partial x}$ usando las propiedades de antisimetría de $J(x) = -J^T(x)$ y simetría positiva semidefinida de $R(x) = R^T(x) \geq 0$, se obtiene el equivalente

$$\frac{\partial^T C(x)}{\partial x} J(x) = 0, \quad \frac{\partial^T C(x)}{\partial x} \mathcal{R}(x) = 0 \quad (2.18)$$

donde, es más fácil observar las cantidades conservativas y simetrías de los sistemas PCH. Así mismo, es menester mencionar que las funciones de Casimir tienen un papel importante en la combinación no lineal para la obtención de funciones candidatas de Lyapunov, junto con el Hamiltoniano.

- Interconexión de sistemas PCH: Una característica importante de los sistemas PCH es su interconexión, ya que los sistemas están constituidos por subsistemas más sencillos y las características del sistema completo puede estudiarse a partir de los subsistemas y las interconexiones que estos presentan. La interconexión, que preserva potencia, de sistemas PCH definen un sistema PCH en conjunto, donde su Hamiltoniano y estructura resistiva es la suma de los Hamiltonianos y la suma de las estructura resistiva de los sistemas PCH interconectados, respectivamente. Una interconexión particular que preserva potencia es la retroalimentación negativa de dos sistemas entrada-estado-salida. Dados, $u_1 = -y_2 + e_1$, $u_2 = y_1 + e_2$, donde las nuevas entradas externas del sistemas son e_1 y e_2 , como se ilustra en

la Figura 2.2.

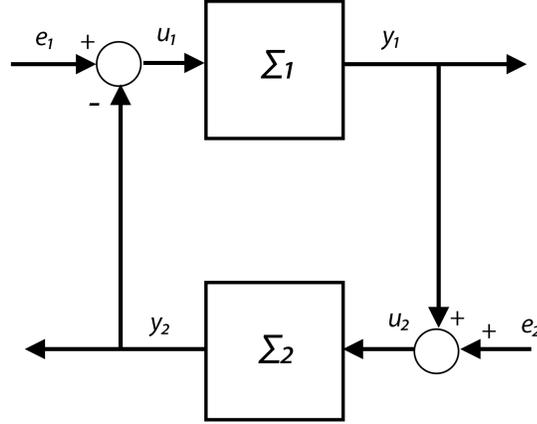


Figura 2.2: Retroalimentación Negativa

2.3. Pasividad en sistemas PCH

Una herramienta para el análisis de sistemas no-lineales y la cual se puede relacionar con la estabilidad en el sentido de Lyapunov, es la pasividad y las propiedades de los sistemas pasivos.

Definición 2.2. (*Pasividad [30]*)

Un sistema dado por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.19)$$

$$y = h(x, u) \quad (2.20)$$

donde $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$, es pasivo si existe una función de almacenamiento de energía $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ con $H(x) > 0$ satisface la desigualdad diferencial de disipación

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) \leq u^T(t)y(t) \quad (2.21)$$

a lo largo de todas las soluciones x que corresponden a las entradas u . El sistema es conservativo, es decir sin pérdidas, si (2.21) es una igualdad.

Los sistemas pasivos son aquellos sistemas que no pueden almacenar más energía que la que se les suministra y en caso de los sistemas conservativos la energía almacenada equivale a la energía suministrada.

La pasividad se puede relacionar directamente con la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Si la función de energía $H(x)$ tiene un mínimo en el estado x_* , entonces de la desigualdad de pasividad (2.21) con $u = 0$, x_* es un punto de equilibrio estable de la dinámica del sistema no forzado, con una función de Lyapunov $H(x)$.

Para sistemas PCH, la pasividad se puede obtener del balance de energías (2.16) y es una consecuencia directa de las propiedades de la estructura de los sistemas PCH y de la relación de disipación de energía. Asumiendo que el Hamiltoniano, es positivo definido, la desigualdad (2.16), implica que todo sistema PCH es pasivo respecto a sus variables de puerto f_P, e_P y función de energía H .

Otra de las características de los sistemas PCH es que si el sistema PCH es pasivo, el sistema desplazado como se define en [9] preservan la propiedad de pasividad que corresponde al estado x_*

2.3.1. Interconexión de Sistemas Pasivos

Teorema 2.1. (*Sistemas Pasivos Interconectados [27]*)

Suponga que

$$\Sigma_1 : u_1 \rightarrow y_1 \quad (2.22)$$

$$\Sigma_2 : u_2 \rightarrow y_2 \quad (2.23)$$

son pasivos. Entonces el sistema obtenido a partir de la interconexión de retroalimentación negativa mostrado en la Figura 2.2 es un sistema pasivo desde la entrada e hasta la salida y.

Demostración. Si los sistemas Σ_1 y Σ_2 son pasivos, existen funciones $H_1(x_1)$ y $H_2(x_2)$ tal que el cambio en la energía almacenada de un tiempo T es menor o igual al la energía suministrada durante este tiempo. Definiendo $x := (x_1, x_2)$ y $H(x) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$, se obtiene que $H(x) > 0$.

Para la interconexión por retroalimentación negativa se cumple que

$$H(x(T) - H(x(0))) \leq \int_0^T (u_1^T y_1 + u_2^T y_2) dt$$

por lo que sustituyendo $u_2 = y_1$ y $u_1 = e - y_2$ se obtiene

$$H(x(T) - H(x(0))) \leq \int_0^T e^T y_1 dt$$

probando que la interconexión de retroalimentación negativa de dos sistemas pasivos es pasiva. \square

Como ya se había explicado anteriormente, la interconexión que preserva potencia y una de las cuales permite la obtención de un sistema PCH es través de la interconexión de retroalimentación negativa subsistemas PCH. Este tipo de interconexión de sistemas será de gran beneficio más adelante.

Corolario 2.1. (*Interconexión con pre y post multiplicación*)

Sea M una matriz que depende de los estados del sistema Σ_1 y Σ_2 . Entonces el sistema interconectado de Σ_1 y Σ_2 por medio de una retroalimentación negativa sigue siendo pasivo, si cualquiera de los dos sistemas o ambos se encuentra pre-multiplicado por $M(x)$ y pos-multiplicado por $M^T(x)$ como se muestra en la Figura 2.3.

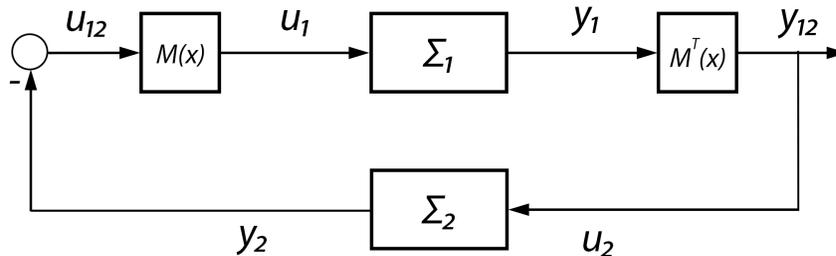


Figura 2.3: Retroalimentación Negativa con pre y post multiplicación de una Matriz M dependiente del estado x

2.3.2. Retroalimentación Pasiva

Teorema 2.2. (*Retroalimentación Pasiva [10]*) Si el sistema (2.19-2.20) es:

1. Pasivo con una función de energía positiva definida y radialmente no acotada
2. Es de estado-cero observable

el origen $x = 0$ puede ser estabilizado globalmente por una ley de control $u = -\phi(y)$, donde ϕ es una función localmente Lipschitz tal que $\phi(0) = 0$, $y^T \phi(y) > 0$ para toda $y \neq 0$.

Demostración. Considere la función de energía $H(x)$ como función candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado $\dot{x} = f(x, -\phi(y))$.

La derivada a lo largo de las trayectorias del sistema está dado por

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} f(x, -\phi(y)) \leq -y^T \phi(y) \leq 0$$

Por lo tanto, $\dot{H} < 0$ es negativa definida y $\dot{H} = 0$ si y solo si $y = 0$.

Por ser el sistema de estado-cero observable, $y(t) \equiv 0 \rightarrow u(t) \equiv 0 \rightarrow x(t) \equiv 0$. A partir del principio de invarianza, el origen es global y asintóticamente estable. \square

Considerando que la energía del sistema esta dada por la función de energía y esta tenga un mínimo en el origen, el origen de un sistema pasivo es estable, por lo que todo lo que se necesita para estabilizar el origen es la inyección de amortiguamiento a través de la función $\phi(y)$ para que la energía se disipe cuando $x(t)$ no sea idénticamente cero. Considerando $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ y que existe la función de energía positiva definida radialmente no acotada $H(x)$ entonces

$$\frac{\partial H}{\partial x} f(x) \leq 0, \forall x$$

Si se define la salida

$$y = h(x) = \left[\frac{\partial H}{\partial x} g(x) \right]$$

entonces el sistema con entrada u y salida y es pasivo. Si es de estado cero observable, entonces podemos aplicar el teorema anterior. Note la salida definida es la salida pasiva del sistema, por lo que para los sistemas PCH (2.5) con la retroalimentación proporcional negativa de la salida pasiva (2.6) podemos estabilizar asintóticamente el punto de equilibrio si es de estado-cero observable.

2.4. Clase Particular de sistemas PCH

En esta sección se presenta la clase de sistemas Hamiltonianos considerada en este trabajo de tesis.

Considere el sistema PCH dado por

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \nabla_x H(x) + g(x)u + \tau \quad (2.24)$$

donde, $x \in \mathbb{R}^n$, la matriz de interconexión es $J(x) = -J(x)^T$, la matriz de disipación $R(x) = R(x)^T \geq 0$. El jacobiano de la función de energía está definido por $\nabla_x H(x) = \left[\frac{\partial H(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H(x)}{\partial x_n} \right]^T$. El vector de entradas es $u \in \mathbb{R}^m$ y el vector de perturbaciones es τ .

Suponga que:

- **S₁**: La función de energía $H(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ es cuadrática, por lo tanto, el gradiente es $\nabla_x H(x) = Qx$, con $Q = Q^T > 0$.
- **S₂**: La matriz incidencia de entradas $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ donde $n \geq m$, es constante y de rango completo por columna.
- **S₃**: La matriz de interconexión se puede descomponer linealmente respecto a los estados de la forma

$$J(x) = J_0 + J_1 x_1 + \dots + J_n x_n = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i x_i \quad (2.25)$$

- **S₄**: La matriz de disipación $R(x)$ es constante y positiva semidefinida $R = R^T \geq 0$.
- **S₅**: El vector de perturbaciones τ es constante.

La propiedad S_1 , referente a la función de energía y más específico al gradiente de la función de la energía, y la suposición S_3 , que proviene de las interconexiones de los estados, crean una restricción en el tipo de sistemas con los que vamos a poder trabajar. Sin embargo son las propiedades fundamentales que nos permitieron obtener la dinámica del error y poder aplicar un control para el seguimiento de trayectorias. Ambas restricciones se encuentran estrechamente relacionadas con la estructura del sistema y la interconexión de los elementos que la componen.

La suposición S_2 nos indica que se trabajará con sistemas subactuados, sin embargo no trabajaremos con sistemas bilineales PCH ya que $g(x)$ es constante y no depende de los estados x . Así mismo, esto nos indica que las entradas de control y señales externas entran de manera lineal al sistema.

Finalmente, la suposición S_5 sobre las perturbaciones, que deben constantes, limita a

la gran mayoría de perturbaciones reales, sin embargo el poder rechazar perturbaciones no acopladas de los sistemas subactuados, sigue siendo un resultado relevante.

2.5. Interconexión

La interconexión de sistemas PCH dan como resultado otro sistema PCH, por lo que si descomponemos el sistema PCH en subsistemas PCH podemos observar de manera más clara que es lo que pasa con sus interconexiones.

Una de las restricciones más fuertes S_3 , es sobre la matriz de interconexión y queremos ilustrar lo que implica la restricción mencionada.

Dado el sistema,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [J(x)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

donde $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, separamos el sistema en dos subsistemas. El estado del primer sistema x_1 y el del segundo subsistema es x_2 .

Considere el caso particular dado por

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_1 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

El sistema esta descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_1 \end{aligned}$$

Si se consideran los Hamiltonianos de cada subsistema de la forma $H(x) = \frac{1}{2}x^2$, entonces

$$\begin{aligned} H(x_1) &= \frac{1}{2}x_1^2 \rightarrow \dot{H}(x_1) = -x_1x_1x_2 \\ H(x_2) &= \frac{1}{2}x_2^2 \rightarrow \dot{H}(x_2) = -x_2x_1x_1 \end{aligned}$$

Por lo que es posible identificar los mapas pasivos dados por

$$\Sigma_1 : -x_2 \rightarrow y_1 = x_1 x_1$$

$$\Sigma_2 : y_1 \rightarrow x_2$$

A partir de estas expresiones es posible representar al sistema completo como la interconexión mostrada en la Figura 2.4

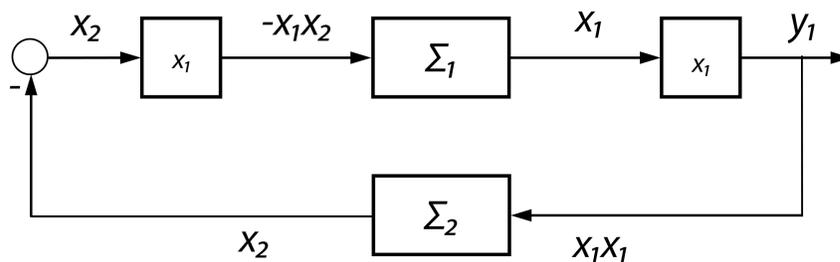


Figura 2.4: Ejemplo de Interconexión de Sistemas PCH

A partir de este ejemplo, se concluye que la suposición S_3 en realidad no impone una restricción fuerte por que en realidad implica que las interconexiones internas entre estados están moduladas por componentes del vector de estados. Esta situación se presenta frecuentemente en sistemas prácticos.

Control para Seguimiento de Trayectorias

En este capítulo se presenta el resultado principal de este trabajo de tesis. El diseño de un esquema de control para seguimiento de trayectorias para la clase de sistemas descrita en la **Sección 2.4**. Este resultado está planteado para el caso sin perturbaciones, aunque más adelante se ilustra que para el caso del PMSM es posible incluir la existencia de estas variables.

Dado el sistema PCH particular sin perturbaciones de la forma

$$\dot{x} = [J(x) - R]Qx + gu \tag{3.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$, y la matriz de interconexión $J(x) = J^T(x)$ y la matriz de disipación $R = R^T \geq 0$ cumplen con S_3 y S_4 , respectivamente. El gradiente de la función de energía es de forma $\nabla_x H(x) = Qx$ como se supone en S_1 y la matriz de incidencias es constante y de rango completo por columna siguiendo S_2 . Se diseña un control para seguimiento de trayectoria a través de la siguiente metodología.

3.1. Trayectorias Deseadas Admisibles de un Sistema

Todo sistema físico tiene limitaciones ya que un controlador no puede seguir arbitrariamente cualquier trayectoria de estado que se le imponga, por lo que se define las trayectorias admisibles de un sistema PCH.

Definición 3.1. (*Trayectorias Admisibles del sistema [26]*) *Las trayectorias admisibles de un sistema PCH (2.5) son el conjunto de todas las trayectorias $x^*(t) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para las cuales existe una entrada $u_*(t) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que cumplen con la*

igualdad para

$$\dot{x}_*(t) = [J(x_*(t)) - \mathcal{R}(x_*(t))] \nabla \mathcal{H}(x) |_{x=x_*(t)} + g(x_*(t))u_*(t) \quad (3.2)$$

todo tiempo $t \geq 0$.

Defina las trayectorias deseadas admisibles para el sistema (3.1) en x_* como soluciones de

$$\dot{x}_* = [J(x_*) - R] Qx_* + gu_* \quad (3.3)$$

3.2. Dinámica del Error

Definición 3.2. (*Dinámica del Error*) La dinámica del error $e(t)$ de un sistema es un mecanismo usado para realizar el seguimiento de trayectoria $x(t)$ del sistema dada una trayectoria admisible dada $x_*(t)$ y se realiza a través del cambio de variable $e(t) = x(t) - x_*(t)$.

En el caso de sistemas lineales, la dinámica en coordenadas del error se puede obtener con relativa facilidad, sin embargo en los sistemas no lineales la obtención de esta dinámica no siempre es tarea fácil.

A través de la obtención de la dinámica del error del sistema, se realiza el control para seguimiento de trayectorias para convertir el problema de seguimiento a un problema de regulación.

La característica principal de la clase de sistemas PCH considerada en este trabajo radica en el hecho de que la dinámica del error asociada exhibe una estructura lineal respecto al error $e(t)$. Para mostrar esto se presenta la siguiente proposición.

Proposición 1. Considere el sistema (3.1) y las trayectorias deseadas admisibles (3.3). La dinámica en coordenadas del error esta dada por

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R + \Gamma(x_*)] Q\tilde{x} + g\tilde{u} \quad (3.4)$$

donde $\tilde{x} = x - x_*$, $\tilde{u} = u - u_*$ y $\Gamma(x_*)$ es una matriz que depende de los estados deseados x_* dada por

$$\Gamma(x_*) = \begin{bmatrix} J_1 x_* & J_2 x_* & \dots & J_n x_* \end{bmatrix} Q^{-1} \quad (3.5)$$

Demostración. Considerando las definiciones para \tilde{x} y \tilde{u} se tiene que la dinámica del

error esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} - \dot{x}_\star &= [J_0 + \bar{J}(x) - R] Qx + gu - [J_0 + \bar{J}(x_\star) - R] Qx_\star - gu_\star \\ \dot{\tilde{x}} &= J_0 Q\tilde{x} - RQ\tilde{x} + g\tilde{u} + \bar{J}(x)Qx - \bar{J}(x_\star)Qx_\star \\ &= J_0 Q\tilde{x} - RQ\tilde{x} + g\tilde{u} + \bar{J}(x)Qx - \bar{J}(x - \tilde{x})Qx_\star\end{aligned}$$

donde $\bar{J}(x) = J_1x_1 + J_2x_2 + \dots + J_nx_n$. Usando la propiedad de S_3 , se cumple que $\bar{J}(x - \tilde{x}) = \bar{J}(x) - \bar{J}(\tilde{x})$ de donde

$$\tilde{x} = [J_0(x) - R] Q\tilde{x} + g\tilde{u} + \bar{J}(x)Qx - \bar{J}(x)Qx_\star + \bar{J}(\tilde{x})Qx_\star \quad (3.6)$$

$$= [J_0(x) + \bar{J}(x) - R] Q\tilde{x} + g\tilde{u} + \bar{J}(\tilde{x})Qx_\star \quad (3.7)$$

$$= [J(x) - R] Q\tilde{x} + g\tilde{u} + \bar{J}(\tilde{x})Qx_\star \quad (3.8)$$

donde, debido a la suposición **S.3** podemos hacer la equivalencia

$$\bar{J}(\tilde{x})Qx_\star = \bar{\Gamma}(x_\star)\tilde{x} \quad (3.9)$$

Desarrollando la primera parte de la ecuación 3.9

$$\bar{J}(\tilde{x})Qx_\star = J_1\tilde{x}_1Qx_\star + J_2\tilde{x}_2Qx_\star + \dots + J_n\tilde{x}_nQx_\star \quad (3.10)$$

$$= J_1Qx_\star\tilde{x}_1 + J_2Qx_\star\tilde{x}_2 + \dots + J_nQx_\star\tilde{x}_n \quad (3.11)$$

$$= \begin{bmatrix} J_1Qx_\star & J_2Qx_\star & \dots & J_nQx_\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matriz $\bar{\Gamma}$ está formada por los vectores columna de J_iQx_\star , $i = 1 \dots n$ por lo que

$$\bar{\Gamma}(x_\star) = \begin{bmatrix} J_1Qx_\star & J_2Qx_\star & \dots & J_nQx_\star \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para poder agrupar términos se considera $\Gamma(x_\star) = \bar{\Gamma}(x_\star)Q^{-1}$ y la dinámica del error del sistema sin perturbaciones finalmente toma la forma

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R + \Gamma(x_\star)] Q\tilde{x} + g\tilde{u} \quad (3.14)$$

□

3.2.1. Matriz $\Gamma(x_\star)$

Como se verá más adelante, un elemento que será fundamental para mostrar las propiedades de estabilidad del esquema de control propuesto es la matriz $\Gamma(x_\star)$. En este sentido es importante reconocer algunos de sus propiedades. Analizando la matriz $\Gamma(x_\star)$ primero separamos la matriz en su parte simétrica y anti-simétrica de la forma

$$\Gamma(x_\star) = \Gamma_{skew}(x_\star) + \Gamma_{sym}(x_\star)$$

Trabajando con la parte simétrica de $\Gamma(x_\star)$ se tiene que

$$\Gamma_{sym}(x_\star) = \frac{1}{2} [\Gamma(x_\star) + \Gamma^T(x_\star)]$$

donde

$$\Gamma_{sym} = \frac{1}{2} Q^{-1} \begin{bmatrix} q_1^T J_1 Q x_\star - x_\star^T Q J_1 q_1 & q_1^T J_2 Q x_\star - x_\star^T Q J_1 q_2 & \dots & q_1^T J_n Q x_\star - x_\star^T Q J_1 q_n \\ q_2^T J_1 Q x_\star - x_\star^T Q J_2 q_1 & q_2^T J_2 Q x_\star - x_\star^T Q J_2 q_2 & \dots & q_2^T J_n Q x_\star - x_\star^T Q J_2 q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T J_1 Q x_\star - x_\star^T Q J_n q_1 & q_n^T J_2 Q x_\star - x_\star^T Q J_n q_2 & \dots & q_n^T J_n Q x_\star - x_\star^T Q J_n q_n \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\Gamma_{sym} = \frac{1}{2} Q^{-1} [q_i^T J_j Q x_\star - x_\star^T Q J_i q_j] Q^{-1}$$

Se puede observar que la diagonal principal de la parte simétrica de la matriz Γ se compondría por $2q_i^T J_i Q x_\star$.

3.2.2. Salida Pasiva

Considerando (3.1), la salida pasiva del sistema $y = g^T Qx$. De la misma forma para (3.3), la salida pasiva está dada por $y_\star = g^T Qx_\star$. Definiendo $\tilde{y} = y - y_\star$, la salida pasiva de (3.14) está dada por

$$\tilde{y} = g^T Q\tilde{x} \quad (3.15)$$

3.3. Control Propuesto

El control propuesto para el seguimiento de trayectorias es a través de la retroalimentación proporcional negativa de la salida pasiva.

Proposición 2. Considere la dinámica del error dada por (3.4) si se define

$$\tilde{u} = -K\tilde{y} \quad (3.16)$$

el sistema en lazo cerrado con la retroalimentación de la salida pasiva toma la forma

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\left[J(x) - R + \Gamma(x_\star) - gKg^T \right]}_{A(x, x_\star, K)} Q\tilde{x} \quad (3.17)$$

Bajo estas condiciones, si K es tal que $A_{sym}(x, x_\star, K) < 0 \forall t \geq 0$ se garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_\star(t)) = 0 \quad (3.18)$$

con estabilidad interna.

Nota: Al momento no se han identificado las condiciones de cuando tal K existe, sin embargo hay características que permiten encontrar tal K , por ejemplo cuando R es positiva definida

Demostración. Considerando la función de energía $H(\tilde{x})$ como función candidata de Lyapunov se tiene que

$$H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q\tilde{x} \quad (3.19)$$

implica que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (3.4) esta dada por

$$\dot{H}(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T Q \dot{\tilde{x}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^T Q \tilde{x} \quad (3.20)$$

$$= \tilde{x}^T Q \dot{\tilde{x}} \quad (3.21)$$

$$= \tilde{x}^T Q \left[J(x) - R(x) + \Gamma(x_*) - gKg^T \right] Q \tilde{x} \quad (3.22)$$

De esta expresión es claro que para poder asegurar estabilidad asintótica es necesario que la parte simétrica de A sea negativa definida para todo tiempo, es decir

$$A_{sym}(x, x_*, K) = - \left[R - \Gamma_{sym}(x_*) + gKg^T \right] < 0 \quad (3.23)$$

de donde la condición se traduce en $\left[R - \Gamma_{sym}(x_*) + gKg^T \right] > 0$.

En caso de que solamente se cumpla que

$$\left[R - \Gamma_{sym}(x_*) + gKg^T \right] \geq 0 \quad (3.24)$$

es posible utilizar argumentos basados en el Lema de Barbalat para asegurar estabilidad asintótica. \square

3.4. Sistemas Perturbados

Otra manera de abordar el problema anterior, es considerar a $\Gamma(x_*)Q\tilde{x}$ como término de perturbación. De (3.17) el sistema puede expresarse como

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\left[J(x) - R - gKg^T \right]}_{M(x,K)} Q \tilde{x} + \Gamma(x_*)Q \tilde{x} \quad (3.25)$$

o equivalentemente

$$\dot{\tilde{x}} = M(x, K)Q \tilde{x} + \Gamma(x_*)Q \tilde{x} \quad (3.26)$$

Observando las propiedades de estabilidad del sistema nominal dado por

$$\dot{\tilde{x}} = M(x, K)Q\tilde{x} \quad (3.27)$$

el sistema es asintóticamente estable si existe K tal que $M_{sym}(x, K) < 0$. En caso de que sólo podamos encontrar tal K que $M_{sym}(x, K) \leq 0$, entonces usando el lema de invarianza de LaSalle podemos probar estabilidad asintótica.

Considerando que el sistema nominal es asintóticamente estable se analiza el término de perturbación $\Gamma(x_*)Q$. En este sentido, para que la perturbación sea desvaneciente en el origen, se debe asegurar que la matriz $\Gamma(x_*)$ sea de rango completo por columna y que x_* sea acotada. Recordando (3.5), la matriz $\Gamma(x_*)$ está formada por los vectores columna de $J_i Q x_*$, entonces:

- **P₁**: Si x_i no aparece en $J(x)$, es decir, $J_i(x) = 0$ entonces no aparecerá el término \tilde{x}_i en $\Gamma(x_*)Q\tilde{x}$, esto implica que una de las columnas de la matriz $\Gamma(x_*)$ será un vector columna 0 y por lo tanto $\Gamma(x_*)$ no sea de rango completo por columna.

De lo contrario, si todas las x_i aparecen en $J(x)$, entonces ninguna columna de Γ será 0, y si aseguramos que todas las columnas sean linealmente independientes, entonces $\Gamma(x_*)$ es de rango completo lo que implica que el único vector contenido en el kernel es $\ker \Gamma = \{\tilde{x} = 0\}$.

Reescribiendo el sistema para separar las componentes de $x = [\bar{x}_2 \quad \bar{x}_2]^T$, donde $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^s$, $s \leq n$ son las componentes de x que aparecen en la matriz de interconexión del sistema $J(x)$ y $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-s}$ las componentes de x que no aparecen en $J(x)$.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= M(x, K)Q\tilde{x} + \Gamma(x_*)Q \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= M(x, K)Q\tilde{x} + \Gamma(x_*) \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} & q_{1(s+1)} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & \cdots & q_{ss} & q_{s(s+1)} & \cdots & q_{sn} \\ q_{(s+1)1} & \cdots & q_{(s+1)s} & q_{(s+1)(s+1)} & \cdots & q_{(s+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{ns} & q_{n(s+1)} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_{s+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

(3.29)

Simplificando ya que se considera que Q es simétrica positiva definida y separando $\Gamma(x_*)$

$$\dot{\tilde{x}} = M(x, K)Q\tilde{x} + \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{s1} & \cdots & \gamma_{ss} \\ \gamma_{(s+1)1} & \cdots & \gamma_{(s+1)s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{ns} \end{pmatrix}}_{\Lambda(x_*)} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{1(s+1)} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{s(s+1)} & \cdots & \gamma_{sn} \\ \gamma_{(s+1)(s+1)} & \cdots & \gamma_{(s+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n(s+1)} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}}_{0_{n \times (n-s)}} \right] \begin{bmatrix} q_{11}\tilde{x}_1 \\ \vdots \\ q_{ss}\tilde{x}_s \\ q_{(s+1)(s+1)}\tilde{x}_{s+1} \\ \vdots \\ q_{nn}\tilde{x}_n \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$= M(x, K)Q\tilde{x} + \begin{bmatrix} \Lambda(x_*) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

para poder estabilizar asegurar que la perturbación es desvaneciente en el origen las n_s columnas de la sub-matriz $\Lambda(x_*)$ deben ser linealmente independientes.

Caso de Estudio: Motor Síncrono de Imanes Permanentes

El motor síncrono de imanes permanentes (PMSM por sus siglas en inglés) es una aplicación de máquinas eléctricas que se ha ido ganando el interés de la industria debido a su alto desempeño, reducción en costos de mantenimiento y uso en diversas aplicaciones. Una de las mayores ventajas del uso del PMSM se debe a que al no tener que excitar el rotor se eliminan pérdidas eléctricas, permitiendo una alta eficiencia en su desempeño. El desarrollo de PMSM se dio a partir de la introducción de nuevos materiales magnéticos como son los imanes de tierras raras. En la literatura en general existen tres modelos del PMSM, basados en el esquema de la Figura 4.1, que se han estudiaron; el modelo variacional en [25], el modelo $\alpha\beta$ en [28] y modelo el dq en [22], [13], [26]. De estos modelos estudiados, en este trabajo se presenta el desarrollo con el modelo en el marco dq , ya que este cumple con las características de la clase de sistemas PCH dadas por S_1 , S_2 , S_3 , S_4 y S_5 que se describieron en el capítulo anterior. La transformación $dq0$ fue presentada por R. H. Park en [20] a finales de los años 20, siendo un gran avance en el análisis de máquinas eléctricas. La transformación $dq0$ de máquinas eléctricas síncronas permite convertir las señales sinusoidales del marco abc al señales constantes en el marco dq .

El PMSM en el marco dq está constituido por tres estados, los primeros dos estados x_1 y x_2 son los flujos magnéticos en estas bobinas, mientras que el estado x_3 es el momento angular del rotor. Las entradas u_1 y u_2 son los voltajes de los devanados.

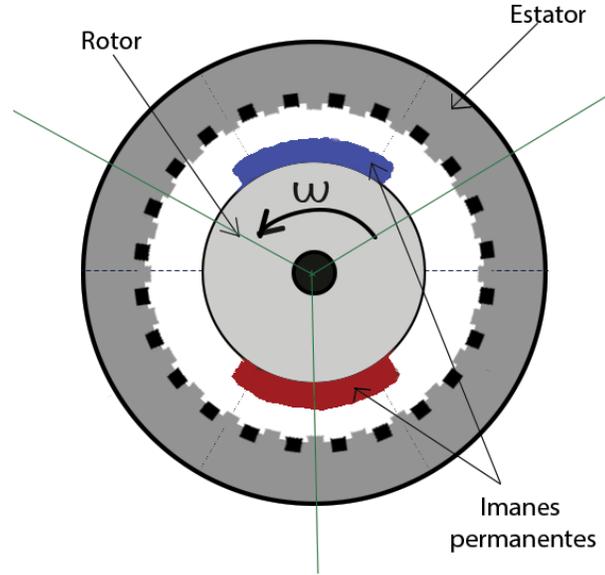


Figura 4.1: Esquema del PMSM

4.1. Modelo en el marco dq

El PMSM en coordenadas dq tiene una estructura de sistema PCH, de la siguiente forma:

$$\dot{x} = [J(x) - R] \nabla H(x) + gu + \mathcal{E} \quad (4.1)$$

donde:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_p x_2 \\ 0 & 0 & -n_p(x_1 + \phi) \\ -n_p x_2 & n_p(x_1 + \phi) & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_m \end{bmatrix};$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_L \end{bmatrix};$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 i_d \\ L_2 i_q \\ J_m w \end{bmatrix};$$

y

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix}$$

La función de energía está dada por

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2}{L_1} + \frac{x_2^2}{L_2} + \frac{x_3^2}{J_m} \right] \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde se obtiene el gradiente de la función de energía y su Hessiano dados por

$$\begin{aligned} \nabla_x H(x) &= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{L_1} \\ \frac{x_2}{L_2} \\ \frac{x_3}{J_m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\nabla_x^2 H(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix}$$

los diferentes coeficientes y variables están definidos como

- J_m es el momento de inercia
- L es la inductancia en el estator
- R es la resistencia en el estator
- ϕ es el flujo magnético
- n_p es la cantidad de pares de polos
- τ_L es el par de carga
- ω es la velocidad del rotor
- i_d es la corriente en el eje de directa
- i_q es la corriente en el eje de cuadratura
- u_d es el voltaje en el eje de directa
- u_q es el voltaje en el eje de cuadratura

4.2. Trayectorias Deseadas Admisibles

Las trayectorias deseadas deben cumplir con la dinámica del sistema y tienen que ser admisibles, de lo contrario el sistema no será capaz de seguirlas. Las trayectorias deseadas son solución del sistema x_\star (desarrolladas en Apéndice A).

$$\dot{x}_\star = [J(x_\star) - R]Qx_\star + gu_\star + \mathcal{E} \tag{4.2}$$

o equivalentemente

$$\dot{x}_{1\star} = -\frac{R_1}{L_1}x_{1\star} + \frac{n_p}{J_m}x_{2\star}x_{3\star} + u_{1\star} \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_{2\star} = -\frac{R_2}{L_2}x_{2\star} - \frac{n_p}{J_m}x_{1\star}x_{3\star} - \frac{n_p\phi}{J_m}x_{3\star} + u_{2\star} \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_{3\star} = -\frac{r_m}{J_m}x_{3\star} + \frac{n_p\phi}{L_2}x_{2\star} + \tau_L \quad (4.5)$$

4.3. Dinámica del error

Sea el sistema PMSM de la forma (4.1) y las trayectorias deseadas (4.2). La dinámica del error esta dada por

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R + \Gamma(x_\star)] Q\tilde{x} + g\tilde{u} + \tilde{\mathcal{E}} \quad (4.6)$$

Para obtener estas expresiones, la única diferencia para este caso es que se considera el par de carga como una perturbación externa, por lo que se debe añadir el cambio de coordenadas dado por

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x_\star \\ \tilde{u} &= u - u_\star \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} - \mathcal{E}_\star \end{aligned}$$

Realizando la resta del sistema \dot{x} menos \dot{x}_\star se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{x}_\star &= [J(x) - R] Qx + gu + \mathcal{E} - [J(x_\star) - R] Qx_\star - gu_\star - \tilde{\mathcal{E}} \\ \dot{\tilde{x}} &= J(x)Qx - J(x_\star)Qx_\star - RQx + RQx_\star + gu - gu_\star - \mathcal{E} + \mathcal{E}_\star \\ \dot{\tilde{x}} &= J(x)Qx - J(x_\star)Qx_\star - R\tilde{x} + g\tilde{u} + \tilde{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

en donde considerando la perturbación conocida para el diseño de la ley de control se tiene que $\mathcal{E}_\star = 0$.

Entonces la dinámica del error del sistema es

$$\dot{\tilde{x}} = J(x)Qx - J(x_\star)Qx_\star - RQ\tilde{x} + g\tilde{u} + \mathcal{E}$$

Usando el cambio de variable $x_\star = x - \tilde{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = J(x)Qx - J(x - \tilde{x})Qx_\star - RQ\tilde{x} + g\tilde{u} + \mathcal{E}$$

A través de la suposición S_3 dada en (2.25) es posible separar la matriz $J(x)$ de la siguiente forma

$$J(x) = x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_p \\ 0 & n_p & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_p \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_p & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_p\phi \\ 0 & n_p\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = x_1 J_1 + x_2 J_2 + J_0$$

Entonces $J(x - \tilde{x}) = J(x) - J(\tilde{x})$ por lo que

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R] Q \tilde{x} + g \tilde{u} + \mathcal{E} + J(\tilde{x}) Q x_\star \quad (4.7)$$

Usando la propiedad S_3 presentada en (2.25) podemos arreglar el termino $J(\tilde{x}) Q x_\star = [(\tilde{x}_1)J_1 + (\tilde{x}_2)J_2] Q x_\star$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [(\tilde{x}_1)J_1 + (\tilde{x}_2)J_2] Q x_\star &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_p \\ 0 & n_p & 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_p \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\star} \\ x_{2\star} \\ x_{3\star} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_p \\ 0 & n_p & 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_p \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_{1\star}}{L_1} \\ \frac{x_{2\star}}{L_2} \\ \frac{x_{3\star}}{J_m} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{x}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -n_p \frac{x_{3\star}}{J_m} \\ n_p \frac{x_{2\star}}{L_2} \end{bmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{bmatrix} n_p \frac{x_{3\star}}{J_m} \\ 0 \\ -n_p \frac{x_{1\star}}{L_1} \end{bmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & n_p \frac{x_{3\star}}{J_m} & 0 \\ -n_p \frac{x_{3\star}}{J_m} & 0 & 0 \\ n_p \frac{x_{2\star}}{L_2} & -n_p \frac{x_{1\star}}{L_1} & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\Gamma}(x_\star)} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} \end{aligned}$$

Así, la dinámica del error queda definida de la siguiente manera

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R] Q \tilde{x} + \bar{\Gamma}(x_\star) \tilde{x} + g \tilde{u} + \mathcal{E}$$

Si $\Gamma(x_\star) = \bar{\Gamma}(x_\star) Q^{-1}$, entonces se obtiene finalmente la expresión

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R + \Gamma(x_\star)] Q \tilde{x} + g \tilde{u} + \mathcal{E}$$

4.4. Control de Seguimiento de Trayectoria

Trabajando con el sistema sin perturbaciones

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R + \Gamma(x_*)] Q\tilde{x} + g\tilde{u} \quad (4.8)$$

donde $J(x) = -J^T(x)$ es la matriz de interconexión, $R = R^T > 0$ es la matriz de disipación y g la matriz de pesos de entrada de rango completo por columna es posible utilizar la retroalimentación proporcional negativa de la salida pasiva, dada por

$$y = g^T \nabla H(\tilde{x}) \quad (4.9)$$

$$= g^T Q\tilde{x} \quad (4.10)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{L_1} \\ \frac{\tilde{x}_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Bajo esta condición la ley de control se define como

$$\tilde{u} = -Ky \quad (4.13)$$

$$= - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{L_1} \\ \frac{\tilde{x}_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$= - \begin{bmatrix} k_1 \frac{\tilde{x}_1}{L_1} \\ k_2 \frac{\tilde{x}_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

El sistema en lazo cerrado queda de la siguiente forma

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R + \Gamma(x_*)] Q\tilde{x} + \begin{bmatrix} -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{L_1} \\ -k_2 \frac{\tilde{x}_2}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando la función de energía como función candidata de Lyapunov

$$H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q\tilde{x}$$

su derivada evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{H}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T Q \dot{\tilde{x}} \\ &= \tilde{x}^T Q [[J(x) - R + \Gamma(x_*)] Q \tilde{x} - gKy] \\ &= -\tilde{x}^T Q [R - \Gamma(x_*) + gKg^T] Q \tilde{x}\end{aligned}$$

Ahora tenemos que asegurarnos que $[R - \Gamma(x_*) + gKg^T] > 0$ donde

$$[R - \Gamma(x_*) + gKg^T] = \begin{bmatrix} R_1 + K_1 & -n_p L_2 \frac{x_{3*}}{J_m} & 0 \\ n_p L_1 \frac{x_{3*}}{J_m} & R_2 + K_2 & 0 \\ -n_p L_1 \frac{x_{2*}}{L_2} & n_p L_2 \frac{x_{1*}}{L_1} & r_m \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada, se puede descomponer en su parte simétrica y su parte antisimétrica [14] de la siguiente forma

$$X = \frac{1}{2} \underbrace{[X + X^T]}_{Sym} + \frac{1}{2} \underbrace{[X - X^T]}_{Skew}$$

Trabajando con la parte simétrica de la matriz, y considerando que $L_1 = L_2$ se tiene que

$$X_{sym} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_1 + K_1 & 0 & -n_p x_{2*} \\ 0 & R_2 + K_2 & n_p x_{1*} \\ -n_p x_{2*} & n_p x_{1*} & r_m \end{bmatrix}$$

Usando el complemento de Schur [35] para probar que es positiva definida, se tiene identificados los elementos dados por

$$X_{sym} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + K_1 \end{bmatrix}}_A & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -n_p x_{2*} \end{bmatrix}}_{B^T} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -n_p x_{2*} \end{bmatrix}}_B & \underbrace{\begin{bmatrix} R_2 + K_2 & n_p x_{1*} \\ n_p x_{1*} & r_m \end{bmatrix}}_C \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La positividad de la matriz es equivalente a obtener el término

$$X_{sym}/C = A - B^T C^{-1} B \quad (4.17)$$

Para usar C en (4.17) primero se comprueba que sea positivo definido

$$C = \begin{bmatrix} R_2 + K_2 & n_p x_{1\star} \\ n_p x_{1\star} & r_m \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

El complemento de Schur de C/A_2 esta dado de la siguiente forma

$$C/A_2 = R_2 + K_2 - \begin{bmatrix} n_p x_{1\star} r_m^{-1} n_p x_{1\star} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$= R_2 + K_2 - \begin{bmatrix} n_p^2 x_{1\star}^2 r_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

y garantizar la condición

$$R_2 + K_2 - \begin{bmatrix} n_p^2 x_{1\star}^2 r_m^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

lo cual se logra con

$$K_2(x_{1\star}) > n_p^2 x_{1\star}^2 r_m^{-1} - R_2 \quad (4.22)$$

Obteniendo el término (4.17)

$$X_{sym}/C = \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} R_1 + K_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -n_p x_{2\star} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 + K_2 & n_p x_{1\star} \\ n_p x_{1\star} & r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -n_p x_{2\star} \end{bmatrix} \right] \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} R_1 + K_1 - \begin{bmatrix} -n_p x_{2\star} n_p x_{1\star} & -n_p x_{2\star} r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -n_p x_{2\star} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right] \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} R_1 + K_1 - n_p^2 x_{2\star}^2 r_m \end{bmatrix} \right] \quad (4.25)$$

y garantizar la condición

$$\frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} R_1 + K_1 - n_p^2 x_{2\star}^2 r_m \end{bmatrix} \right] > 0 \quad (4.26)$$

la cual se logra en

$$K_1(x_{2\star}) > n_p^2 x_{2\star}^2 r_m - R_1 \quad (4.27)$$

El diseño de la ley de control finaliza entonces definiendo las ganancias

$$K_1(x_{2\star}) > \frac{n_p^2 x_{2\star}^2 r_m}{\epsilon_1} - R_1 \quad (4.28)$$

$$K_2(x_{1\star}) > \frac{n_p^2 x_{1\star}^2 r_m^{-1}}{\epsilon_2} - R_2 \quad (4.29)$$

donde $0 < \epsilon_1 < n_p^2 r_m$ y $0 < \epsilon_2 < \frac{n_p^2}{r_m}$.

De esta forma se imponen condiciones para K para poder asegurar estabilidad asintótica.

Un dato interesante es que si las restricciones sobre las ganancias K_1 y K_2 son

$$K_1(x_{2\star}) = \frac{1}{4} \frac{n_p^2}{J_m \theta^2 r_m} x_{2\star}^2 - R_1 \quad (4.30)$$

$$K_2(x_{1\star}) = \frac{1}{4} \frac{n_p^2}{J_m \theta^2 r_m} x_{1\star}^2 - R_2 \quad (4.31)$$

entonces es posible definir

$$k_3 \geq 2 \frac{(1 - \theta) r_m}{L^2 J_m} \quad (4.32)$$

y garantizar que el punto de equilibrio es **exponencialmente estable**. Sin embargo, las condiciones (4.30 - 4.31) imponen el conocimiento exacto de los parámetros.

4.5. Rechazo a Perturbaciones Constantes

Con el fin de complementar el resultado anterior y considerar la presencia de pares de carga, en esta sección se aplica el resultado propuesto en [17] para tratar a esta variable como una perturbación externa.

Considere el sistema:

$$\dot{\tilde{x}} = \left[J(x) - R + \Gamma(x_\star) + gKg^T \right] Q\tilde{x} + gv + \mathcal{E} \quad (4.33)$$

donde $J(x) = -J^T(x)$ es la matriz de interconexión, $R = R^T > 0$ es la matriz de disipación, $\Gamma(x_\star)$ es la matriz resultado de la dinámica del error que depende de x_\star , gKg^T es la retroalimentación proporcional negativa de la salida pasiva, v son las entradas de control y \mathcal{E} son las perturbaciones constantes desconocidas que en este caso es el par de carga como perturbaciones desacopladas.

4.5.1. Perturbaciones Desacopladas

Dado que el par de carga corresponde al caso de perturbaciones desacopladas, el sistema en lazo cerrado forzado por el control propuesto y el PMSM se escribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + K_1 & -n_p L_2 \frac{x_3^*}{J_m} & -n_p x_2 \\ n_p L_1 \frac{x_3^*}{J_m} & R_2 + K_2 & n_p(x_1 + \phi) \\ -n_p \frac{L_1}{L_2} x_2^* + n_p x_2 & n_p \frac{L_2}{L_1} x_1^* - n_p(x_1 + \phi) & r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{L_1} \\ \frac{\tilde{x}_2}{L_2} \\ \frac{\tilde{x}_3}{J_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

donde τ_L es el par de carga que se considera desconocido pero constante.

4.5.1.1. Control

Aplicando el resultado presentado en [17], se buscan dos mapeos $\hat{u}, \psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que el sistema expresado en las coordenadas z

$$z_1 = \psi((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x}_3, \zeta) \quad (4.35)$$

$$z_2 = \tilde{x}_3 \quad (4.36)$$

$$z_3 = \zeta \quad (4.37)$$

donde $z_1 \in \mathbb{R}^2, z_2 \in \mathbb{R}^1, z_3 \in \mathbb{R}^1$ con el control integral

$$\dot{\zeta} = K_i [\nabla_i H(\psi((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x}_3, \zeta), \tilde{x}_3)] \quad (4.38)$$

$$u = \hat{u}((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x}_3, \zeta) \quad (4.39)$$

donde $\nabla_i H(x) := (\frac{\partial H(x)}{\partial x_i})^T$, en nuestro caso $i = 3$, $u, \hat{u} \in \mathbb{R}^2$, y el sistema en lazo cerrado quede de la siguiente forma

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} F(z_1, z_2) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_i \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \nabla U(z) \quad (4.40)$$

donde $z \in \mathbb{R}^4$ y $z_1 = [z_{11} \ z_{12}]^T$ corresponde a la sección del sistema actuada que se compone de dos estados y para facilitar los cálculos se trabaja de manera separada.

En este caso

$$F(\tilde{x}, x^*) = \begin{bmatrix} R_1 + K_1 & -n_p L_2 \frac{x_3^*}{J_m} & -n_p(\tilde{x}_2 + x_2^*) \\ n_p L_1 \frac{x_3^*}{J_m} & R_2 + K_2 & n_p((\tilde{x}_1 + x_1^*) + \phi) \\ -n_p \frac{L_1}{L_2} x_2^* + n_p(\tilde{x}_2 + x_2^*) & n_p \frac{L_2}{L_1} x_1^* - n_p((\tilde{x}_1 + x_1^*) + \phi) & r_m \end{bmatrix}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \frac{R_1 + K_1}{L_1} \tilde{x}_1 - n_p L_2 \frac{x_3^*}{J_m} \frac{\tilde{x}_2}{L_2} - n_p(\tilde{x}_2 + x_2^*) \frac{\tilde{x}_3}{J_m} + v_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= n_p L_1 \frac{x_3^*}{J_m} \frac{\tilde{x}_1}{L_1} + \frac{R_2 + K_2}{L_2} \tilde{x}_2 + n_p(\tilde{x}_1 + x_1^* + \phi) \frac{\tilde{x}_3}{J_m} + v_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \left(-n_p \frac{L_1}{L_2} x_2^* + n_p(\tilde{x}_2 + x_2^*) \right) \frac{\tilde{x}_1}{L_1} + \left(n_p \frac{L_2}{L_1} x_1^* - n_p(\tilde{x}_1 + x_1^* + \phi) \right) \frac{\tilde{x}_2}{L_2} + r_m \frac{\tilde{x}_3}{J_m} + d_2 \end{aligned}$$

por lo que

$$F(z, x^*) = \begin{bmatrix} R_1 + K_1 & -n_p L_2 \frac{x_3^*}{J_m} & -n_p z_{12} - n_p x_2^* \\ n_p L_1 \frac{x_3^*}{J_m} & R_2 + K_2 & n_p z_{11} + n_p(x_1^* + \phi) \\ -n_p x_2^* \left(\frac{L_1}{L_2} - 1 \right) + n_p z_{12} & n_p x_1^* \left(\frac{L_2}{L_1} - 1 \right) - n_p(z_{11} + \phi) & r_m \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{11}(z, x^*) &= \begin{bmatrix} R_1 + K_1 & -n_p L_2 \frac{x_3^*}{J_m} \\ n_p L_1 \frac{x_3^*}{J_m} & R_2 + K_2 \end{bmatrix} \\ F_{12}(z, x^*) &= \begin{bmatrix} -n_p(z_{12} + x_2^*) \\ n_p(z_{11} + x_1^* + \phi) \end{bmatrix} \\ F_{21}(z, x^*) &= \begin{bmatrix} -n_p x_2^* \left(\frac{L_1}{L_2} - 1 \right) + n_p z_{12} & n_p x_1^* \left(\frac{L_2}{L_1} - 1 \right) - n_p(z_{11} + \phi) \end{bmatrix} \\ F_{22}(z, x^*) &= [r_m] \end{aligned}$$

La función de energía del sistema con control integral es

$$U(z) = H(z) + \frac{1}{2}(z_3 - d_2)^T k_i^{-1}(z_3 - d_2) \quad (4.41)$$

donde

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z_{11}^2}{L_1} + \frac{z_{12}^2}{L_2} + \frac{z_2^2}{J_m} \right]$$

Por lo tanto, el gradiente de $U(z)$ es de la siguiente forma

$$\nabla U(z) = \frac{\partial U(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{L_1} \\ \frac{z_{12}}{L_2} \\ \frac{z_2}{J_m} \\ K_i^{-1}(z_3 - d_2) \end{bmatrix}$$

Los mapeos que debemos obtener son

$$\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.42)$$

$$\hat{u} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.43)$$

forzando a que el sistema en lazo cerrado quede de la forma (4.40) así los mapeos quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \tilde{x}_1 - a_{11}(t)(\tilde{x}_2 + x_2^*) + c_{21} + b_1(t)\zeta \\ \psi_2 &= \tilde{x}_2 + a_{11}(t)(\tilde{x}_1 + x_1^* + \phi) + c_{12} + b_2(t)\zeta \end{aligned}$$

de donde los controles son

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= \frac{1}{a_{11}^2 + 1} \left[\tilde{x}_1 a_{11} \left(\frac{R_2 + K_2}{L_2} - \frac{R_1 + K_1}{L_1} \right) + \tilde{x}_2 a_{11}^2 \left(\frac{R_1 + K_1}{L_1} - \frac{R_2 + K_2}{L_2} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{a_{11}^2 + 1} \left[a_{11}(x_1^* + \phi + c_{12}) \left(a_{11} n_p \frac{x_3^*}{J_m} + \frac{R_2 + K_2}{L_2} \right) + \frac{\tilde{x}_3}{J_m} K_i \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{a_{11}^2 + 1} \left[(x_2^* a_{11} - c_{21}) \left(a_{11} \frac{R_1 + K_1}{L_1} - n_p \frac{x_3^*}{J_m} \right) \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{v}_2 &= \frac{1}{a_{11}^2 + 1} \left[(\tilde{x}_1 a_{11} - \tilde{x}_2 a_{11}^2) \left(\frac{R_2 + K_2}{L_2} - \frac{R_1 + K_1}{L_1} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{a_{11}^2 + 1} \left[a_{11}(x_1^* + \phi + c_{12}) \left(a_{11} n_p \frac{x_3^*}{J_m} + \frac{R_2 + K_2}{L_2} \right) + \frac{\tilde{x}_3}{J_m} K_i \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{a_{11}^2 + 1} \left[(x_2^* a_{11} - c_{21}) \left(a_{11} \frac{R_1 + K_1}{L_1} - n_p \frac{x_3^*}{J_m} \right) \right] \end{aligned}$$

4.6. Simulación numérica y análisis de resultados

A partir de los parámetros de la Tabla 4.1 y con los parámetros de diseño de la Tabla 4.2 se realizaron las simulaciones numéricas con las condiciones iniciales consideradas en Tabla 4.3 mientras que las trayectorias de referencia se presentan en Tabla 4.4, con un τ_L desconocido pero constante.

Parámetros	Valor [Unidad]
R	0.225[Ω]
r_m	0.00063[Ω]
L	3.8[mH]
J_m	0.012[kgm ²]
n_p	3[1]
ϕ	0.17[Wb]

Tabla 4.1: Valores de Parámetros del PMSM

Parámetros	Valor
$K_1(x_\star)$	$n_p^2 x_{\star 2}^2 r_m / \epsilon + R$
$K_2(x_\star)$	$n_p^2 x_{\star 1}^2 / \epsilon + R$
K_{i_1}	0,5
K_{i_2}	1
a_{11}	1

Tabla 4.2: Valores de Diseño del PMSM

Estado Inicial	Valor
\tilde{x}_{1_0}	0
\tilde{x}_{2_0}	0
\tilde{x}_{3_0}	0

Tabla 4.3: Condiciones Iniciales del PMSM

Trayectoria	función
$x_{1\star}$	0.1 sin(t)
$x_{3\star}$	$10\pi \sin(t) + 2.66 \sin(3t) + 53.33\pi$

Tabla 4.4: Trayectorias de Referencia

En la Figura 4.2 se observa como los estados siguen a las funciones de referencia y se puede observar el rechazo a perturbaciones cuando se inserta una perturbación

constante de magnitud 2 en x_3 en el tiempo 10[s]. Posteriormente, en la Figura 4.3 se observan los errores de seguimiento, viéndose afectados cuando las perturbaciones entran al sistema. Finalmente en la Figura 4.4 se muestran las entradas de control, las cuales se fuerzan más con la presencia de las perturbaciones.

4.6 Simulación numérica y análisis de resultados

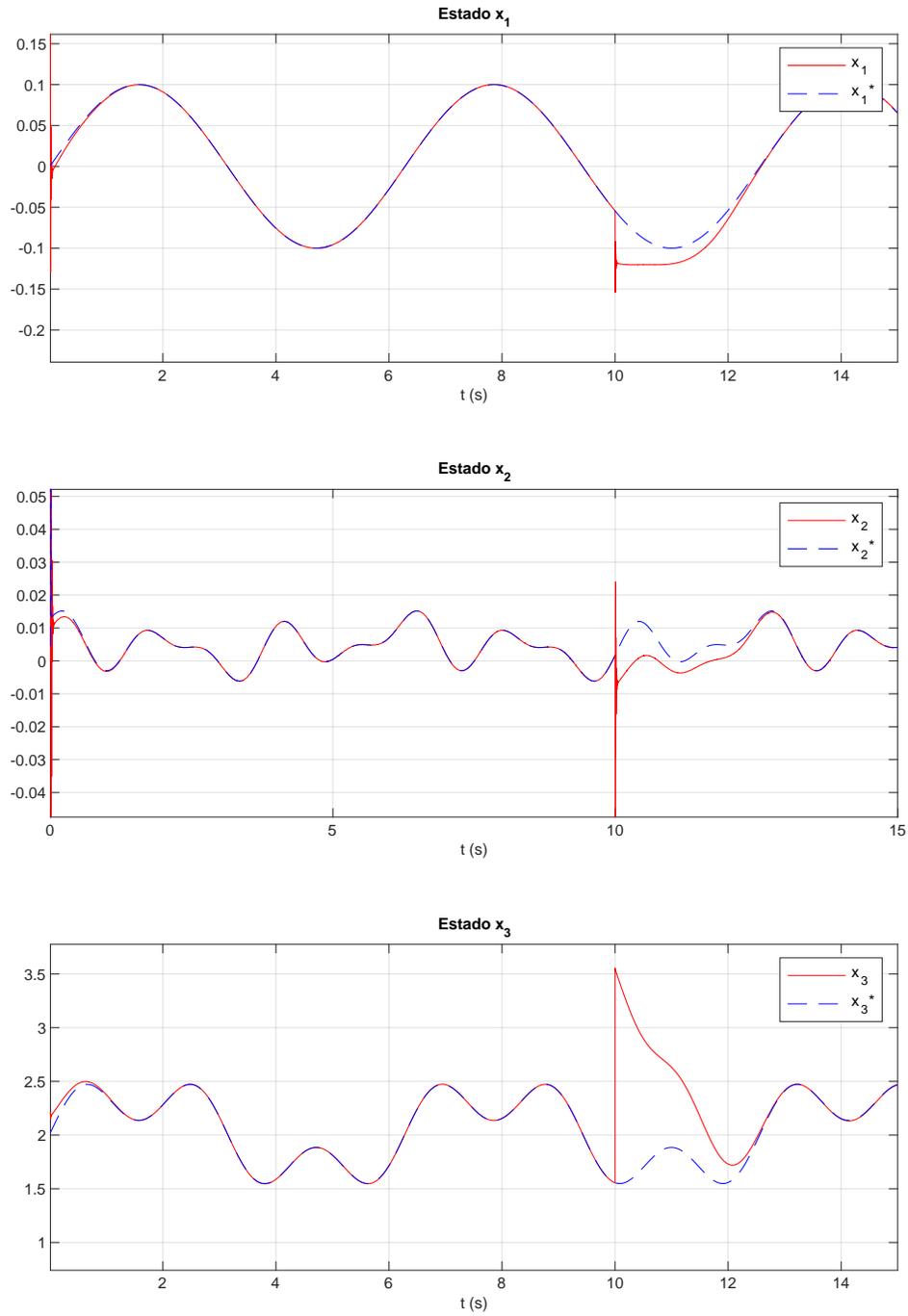


Figura 4.2: Comportamiento de los estados y trayectorias de referencia del PMSM

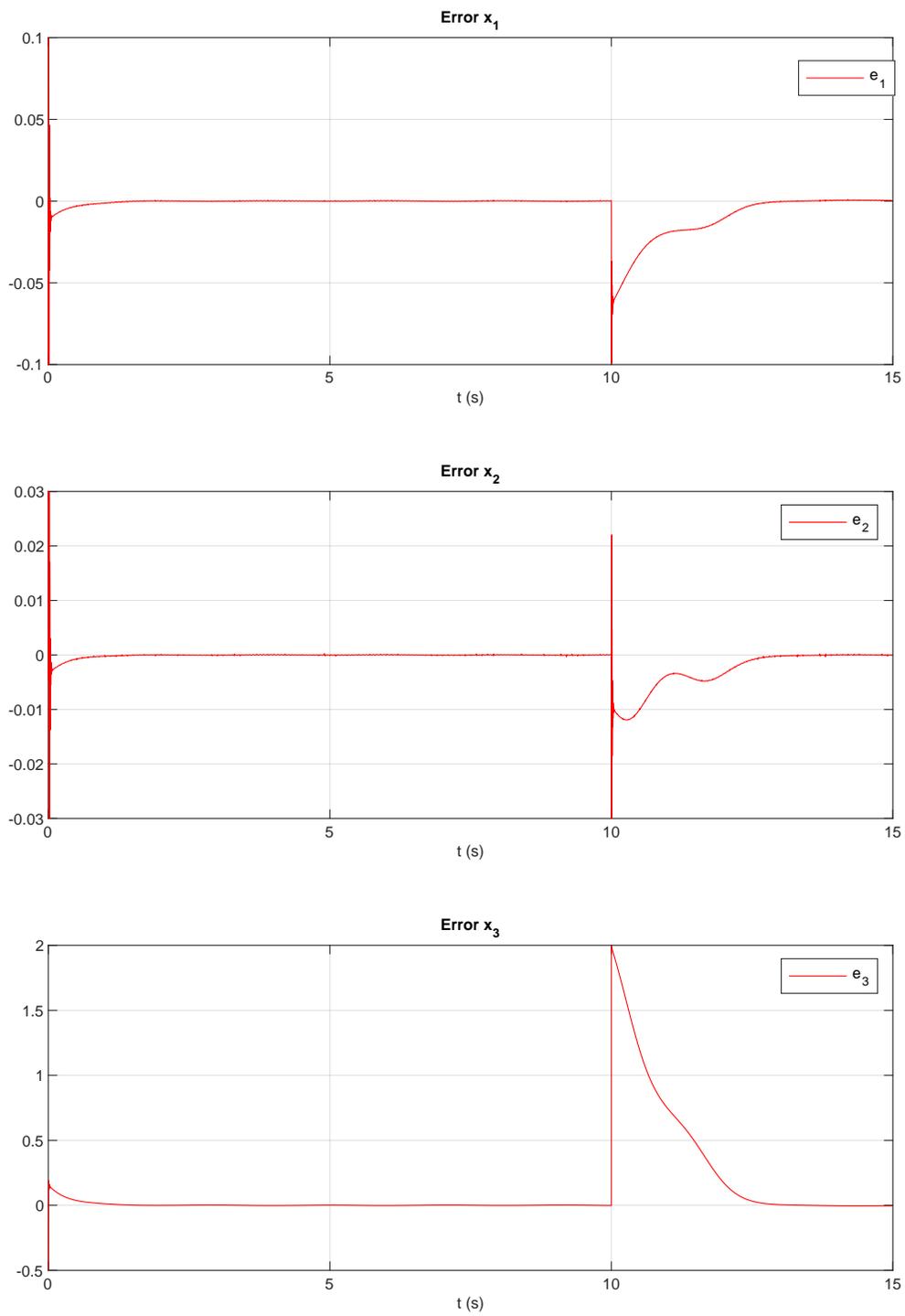


Figura 4.3: Error de los estados y trayectorias de referencia del PMSM

4.6 Simulación numérica y análisis de resultados

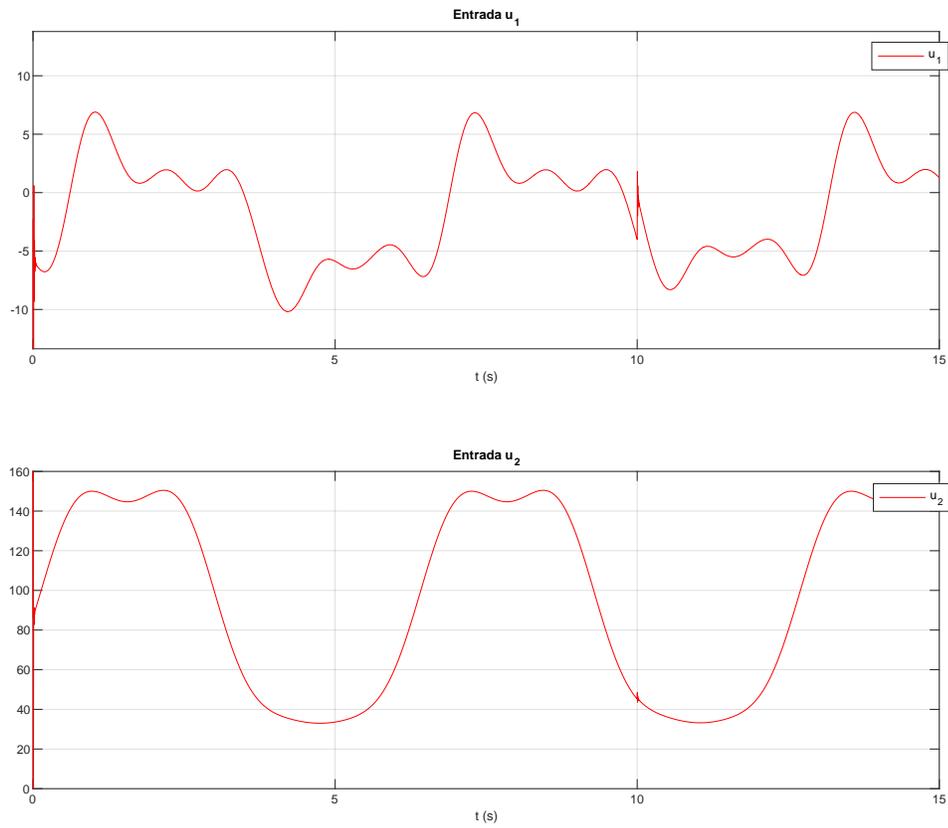


Figura 4.4: Entradas de Control del PMSM

Conclusiones y Trabajo Futuro

5.1. Conclusiones

A través del desarrollo de este trabajo se diseñó una metodología para el diseño de control para el seguimiento de trayectorias de una clase de sistemas PCH. Se mostró paso por paso, desde la obtención de las dinámicas en coordenadas del error hasta las pruebas de estabilidad para el caso de retroalimentación proporcional negativa de la salida pasiva. Al identificar esta clase de sistemas PCH también se analizaron las restricciones que afectan al sistema, es decir, lo que significan y las interconexiones que estos presentan.

Por otro lado, el caso de estudio trabajado, el motor síncrono de imanes permanentes, el cual cumple con las suposiciones que engloban la clase de sistemas PCH identificada y a la que se le diseñó el control para seguimiento de trayectoria, es un resultado de gran relevancia en el área de máquinas eléctricas. Además de que se le añadió un control para que rechazara perturbaciones constantes. El motor PMSM es un sistema subactuado, por lo que en general, complica un poco el diseño de controles para el seguimiento de trayectorias y aun más que rechacen perturbaciones no acopladas.

El PMSM es una aplicación muy importante en la industria, ya que las ventajas de este motor como la reducción de costos de mantenimiento y alto desempeño, han provocado que cada vez se requiera de mejores controles para esta aplicación. A pesar de que en general, la industria no se enfoca en los controles basados en modelo, creemos que es un resultado importante que en el área de máquinas eléctricas ya que se pudo seguir las trayectorias deseadas admisibles y rechazar las perturbaciones constantes tanto acopladas y las no acopladas.

5.2. Trabajo Futuro

A lo largo del trabajo desarrollado, se pudieron identificar áreas de oportunidad para trabajo futuro. Uno de las áreas más grandes es el probar otro tipo de controles,

ya que en este trabajo solo nos enfocamos en el uso de un control proporcional, sin embargo existen otros esquemas para el diseño de controles, como es el IDA-PBC y comparar los desempeños que los diferentes controladores tienen. Así mismo, existe otras oportunidades para el estudio de las clases de sistemas PCH y como se puede extender la metodología usada en este trabajo. Por ejemplo, el caso donde la matriz de disipación dependa de los estados, como afectaría esto en la obtención de la dinámica del error, en la estructura de la matriz de interconexión y también en las funciones de energía. Estas dos últimas, son las suposiciones donde se encuentran las restricciones más grandes que determinan la clase de sistemas PCH con la que estamos trabajando. En el caso del PMSM el primer caso que se debe analizar en un futuro es el control en el caso de que la resistencia mecánica r_m del PMSM sea nula y extender el resultado para el caso donde $R = 0$.

Apéndice A

A.1. Trayectorias Deseadas Admisibles

Las Trayectorias Deseadas del sistema son de la siguiente forma:

$$\dot{x}_{\star 1} = n_p x_{\star 2} \frac{x_{\star 3}}{J_m} - R_1 \frac{x_{\star 1}}{L_1} + u_{d\star} + d_{11\star} \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{x}_{\star 2} = -n_p (x_{\star 1} + \phi) \frac{x_{\star 3}}{J_m} - R_2 \frac{x_{\star 2}}{L_2} + u_{q\star} + d_{12\star} \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{x}_{\star 3} = -n_p x_{\star 2} \frac{x_{\star 1}}{L_1} + n_p (x_{\star 1} + \phi) \frac{x_{\star 2}}{L_2} - r_m \frac{x_{\star 3}}{J_m} - \tau_{L\star} \quad (\text{A.3})$$

Considerando que las perturbaciones deseadas sean igual a 0, es decir, $\tau_{L\star} = 0$, $d_{11\star} = 0$ y $d_{12\star} = 0$. De (A.3) se deben obtener las entradas de control deseadas u_{\star} y los estados deseados x_{\star}

$$u_{d\star} = \dot{x}_{\star 1} - n_p x_{\star 2} \frac{x_{\star 3}}{J_m} + R_1 \frac{x_{\star 1}}{L_1} \quad (\text{A.4})$$

$$u_{q\star} = \dot{x}_{\star 2} + n_p (x_{\star 1} + \phi) \frac{x_{\star 3}}{J_m} + R_2 \frac{x_{\star 2}}{L_2} \quad (\text{A.5})$$

Dando la velocidad deseada y una corriente deseada (2 estados), debemos obtener el tercer estado.

$$\dot{x}_{\star 3} = -n_p x_{\star 2} \frac{x_{\star 1}}{L_1} + n_p (x_{\star 1} + \phi) \frac{x_{\star 2}}{L_2} - r_m \frac{x_{\star 3}}{J_m} \quad (\text{A.6})$$

De aqui

$$\dot{x}_{\star 3} + r_m \frac{x_{\star 3}}{J_m} = \left(x_{\star 1} \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) + \phi \right) n_p x_{\star 2}$$

$$x_{\star 2} = \frac{1}{n_p} \left(\dot{x}_{\star 3} + r_m \frac{x_{\star 3}}{J_m} \right) \left(x_{\star 1} \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) + \phi \right)^{-1} \quad (\text{A.7})$$

Por lo que pone una restricción en la trayectoria deseada $x_{\star 1} \neq 0$ ya que se encuentra en el denominador, a menos que pongamos la restricción de $L_1 = L_2$, donde entonces, la trayectoria deseada $x_{\star 2}$ queda definida de la siguiente forma:

$$x_{\star 2} = \frac{1}{n_p} \left(\dot{x}_{\star 3} + r_m \frac{x_{\star 3}}{J_m} \right) \left(x_{\star 1} \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) + \phi \right)^{-1} \quad (\text{A.8})$$

$$x_{\star 2} = \frac{1}{n_p \phi} \left(\dot{x}_{\star 3} + r_m \frac{x_{\star 3}}{J_m} \right) \quad (\text{A.9})$$

Esta restricción nos obliga a ver más a profundidad sobre si es posible restringir de esa manera a $x_{\star 1}$, de lo contrario tendremos que considerar la segunda restricción mencionada $L_1 = L_2$. En caso de que $r_m = 0$, podemos obtener de manera parcial la trayectoria deseada $x_{\star 3}$ dando solamente las trayectorias de $x_{\star 1}$ y $x_{\star 2}$ de la siguiente manera:

$$\dot{x}_{\star 3} = \left(x_{\star 1} \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) + \phi \right) n_p x_{\star 2}$$

Debemos resolver la siguiente ED.

$$\dot{x}_{\star 3} = n_p \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) x_{\star 1} x_{\star 2} + \frac{n_p \phi}{L_2} x_{\star 2} \quad (\text{A.10})$$

En caso de que $r_m \neq 0$

$$\dot{x}_{\star 3} = n_p \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) x_{\star 1} x_{\star 2} + \frac{n_p \phi}{L_2} x_{\star 2} - \frac{r_m}{J_m} x_{\star 3} \quad (\text{A.11})$$

Bibliografía

- [1] Acosta, J. A., Ortega, R., Astolfi, A., and Mahindrakar, A. D. (2005). Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12):1936–1955. [2](#)
- [2] Borja-Rosales, L. P. (2003). Control Basado en Pasividad mediante cambio de coordenadas. Master’s thesis, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería. Ingeniería Eléctrica - Control. Universidad Nacional Autónoma de México. [4](#)
- [3] Cisneros, R., Pirro, M., Bergna, G., Ortega, R., Ippoliti, G., and Molinas, M. (2015). Global tracking passivity-based pi control of bilinear systems: Application to the interleaved boost and modular multilevel converters. *Control Engineering Practice*, 43:109–119. [4](#)
- [4] Donaire, A., Perez, T., and Renton, C. (2011). Manoeuvring control of fully-actuated marine vehicles. a port-hamiltonian system approach to tracking. In *2011 Australian Control Conference*, pages 32–37. IEEE. [2](#)
- [5] Flashner, H. and Skowronski, J. (1989). Model tracking control of hamiltonian systems. [2](#)
- [6] Fujimoto, K., Sakurama, K., and Sugie, T. (2001). Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems and its application to a magnetic levitation system. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, volume 4, pages 3388–3393. IEEE. [2](#)
- [7] Fujimoto, K., Sakurama, K., and Sugie, T. (2003). Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems via generalized canonical transformations. *Automatica*, 39(12):2059–2069. [2](#)
- [8] Fujimoto, K. and Sugie, T. (2001). Canonical transformation and stabilization of generalized hamiltonian systems. *Systems & Control Letters*, 42(3):217–227. [2](#)

- [9] Jayawardhana, B., Ortega, R., Garcia-Canseco, E., and Castanos, F. (2007). Passivity of nonlinear incremental systems: Application to pi stabilization of nonlinear rlc circuits. *Systems & control letters*, 56(9-10):618–622. [15](#)
- [10] Khalil, H. K. and Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ. [16](#)
- [11] Kotyczka, P., Volf, A., and Lohmann, B. (2010). Passivity based trajectory tracking control with predefined local linear error dynamics. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 3429–3434. IEEE. [3](#)
- [12] Lanczos, C. (2012). *The variational principles of mechanics*. Courier Corporation. [8](#)
- [13] Liu, J. and Chen, W. (2013). Generalized dq model of the permanent magnet synchronous motor based on extended park transformation. In *2013 1st International Future Energy Electronics Conference (IFEEEC)*, pages 885–890. IEEE. [29](#)
- [14] Meyer, C. D. (2000). *Matrix analysis and applied linear algebra*, volume 71. Siam. [36](#)
- [15] Montbrun-Di Filippo, J., Delgado, M., Brie, C., and Paynter, H. M. (1991). A survey of bond graphs: Theory, applications and programs. *Journal of the Franklin Institute*, 328(5-6):565–606. [7](#)
- [16] Morrison, P. J. (1986). A paradigm for joined hamiltonian and dissipative systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 18(1-3):410–419. [10](#), [11](#)
- [17] Ortega, R. and Romero, J. G. (2012). Robust integral control of port-hamiltonian systems: The case of non-passive outputs with unmatched disturbances. *Systems & Control Letters*, 61(1):11–17. [6](#), [38](#), [39](#)
- [18] Ortega, R., Van Der Schaft, A., Castanos, F., and Astolfi, A. (2008). Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 53(11):2527–2542. [2](#)
- [19] Ortega, R., Van Der Schaft, A., Maschke, B., and Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4):585–596. [2](#)
- [20] Park, R. H. (1929). Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part i. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 48(3):716–727. [29](#)
- [21] Paynter, H. M. (1961). *Analysis and design of engineering systems*. MIT press. [7](#)
- [22] Petrovic, V., Ortega, R., and Stankovic, A. M. (2001). Interconnection and damping assignment approach to control of pm synchronous motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(6):811–820. [29](#)

- [23] Ramirez, H., Maschke, B., and Sbarbaro, D. (2013). Modelling and control of multi-energy systems: An irreversible port-hamiltonian approach. *European journal of control*, 19(6):513–520. [10](#)
- [24] Reyes-Báez, R., van der Schaft, A., and Jayawardhana, B. (2017). Tracking control of fully-actuated port-hamiltonian mechanical systems via sliding manifolds and contraction analysis. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):8256–8261. [4](#)
- [25] Rodriguez, H. and Ortega, R. (2003). Stabilization of electromechanical systems via interconnection and damping assignment. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 13(12):1095–1111. [29](#)
- [26] Rodríguez-Leyva, L. F. (2019). Seguimiento de Trayectorias en sistemas Hamiltonianos por contracción . Master’s thesis, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería. Ingeniería Eléctrica - Control. Universidad Nacional Autónoma de México. [21](#), [29](#)
- [27] Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P. V. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media. [15](#)
- [28] Shah, D., Espinosa-Pérez, G., Ortega, R., and Hilairret, M. (2014). An asymptotically stable sensorless speed controller for non-salient permanent magnet synchronous motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(4):644–668. [29](#)
- [29] Slotine, J.-J. E. and Li, W. (1989). Composite adaptive control of robot manipulators. *Automatica*, 25(4):509–519. [2](#)
- [30] Van Der Schaft, A. (2006). Port-hamiltonian systems: an introductory survey. In *Proceedings of the international congress of mathematicians*, volume 3, pages 1339–1365. Citeseer. [8](#), [9](#), [14](#)
- [31] van der Schaft, A. (2020). Port-hamiltonian modeling for control. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 3:393–416. [13](#)
- [32] Wang, W. and Slotine, J.-J. E. (2005). On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators. *Biological cybernetics*, 92(1):38–53. [4](#)
- [33] Yaghmaei, A. and Yazdanpanah, M. J. (2015). Trajectory tracking of a class of port hamiltonian systems using timed ida-pbc technique. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5037–5042. IEEE. [3](#)
- [34] Yaghmaei, A. and Yazdanpanah, M. J. (2017). Trajectory tracking for a class of contractive port hamiltonian systems. *Automatica*, 83:331–336. [3](#)
- [35] Zhang, F. (2006). *The Schur complement and its applications*, volume 4. Springer Science & Business Media. [36](#)