



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

---

GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y DINÁMICA HAMILTONIANA EN  
UN SISTEMA CUÁNTICO BIPARTITO

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ING. FÍSICA ANA GABRIELA FLORES DELGADO.

TUTOR PRINCIPAL: DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS.

ICN, UNAM.

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, FEBRERO DE 2021.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Dedicatoria y agradecimientos**

Agradezco a DGAPA-UNAM por su apoyo parcial a través del proyecto PAPIIT  
IN111920.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Introducción y motivación</b>	<b>1</b>
<b>I Mecánica clásica y sistemas hamiltonianos</b>	<b>2</b>
1. Campos vectoriales hamiltonianos . . . . .	3
2. Coordenadas canónicas . . . . .	4
3. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	4
4. Ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	5
4.1. La acción como función de las coordenadas . . . . .	5
4.2. Ejemplo: Oscilador armónico simple unidimensional . . . . .	7
5. Sistemas integrables . . . . .	9
5.1. Teorema de Arnold-Liouville para sistemas integrables . . . . .	9
5.2. Variables de ángulo-acción . . . . .	10
<b>II Mecánica cuántica y sistemas hamiltonianos</b>	<b>14</b>
6. El espacio de Hilbert y su espacio proyectivo . . . . .	15
7. Mecánica clásica y mecánica cuántica . . . . .	17
8. Variedades de Kähler . . . . .	17
8.1. El espacio de Hilbert como variedad de Kähler . . . . .	17
8.2. Ejemplo: Partícula de spin 1/2 en un campo magnético . . . . .	21
9. Forma simpléctica en el espacio proyectivo . . . . .	25
9.1. Compatibilidad Ashtekar-Schilling y Kobayashi-Nomizu . . . . .	27
10. Métrica de Fubini-Study . . . . .	28
11. Sistemas cuánticos compuestos . . . . .	29
11.1. Producto tensorial de operadores . . . . .	30
12. Estados cuánticos puros y mixtos . . . . .	30
12.1. Matriz de densidad . . . . .	31
13. Representación de Majorana para estados de spin . . . . .	32

<b>III</b>	<b>Estados enredados</b>	<b>34</b>
14.	Estados factorizables y estados enredados . . . . .	35
14.1.	Separabilidad en estados puros . . . . .	35
14.2.	Separabilidad en estados mixtos . . . . .	37
15.	Criterios de separabilidad en estados puros . . . . .	38
15.1.	Descomposición de Schmidt . . . . .	39
16.	Grado de enredamiento . . . . .	41
<b>IV</b>	<b>Enredamiento y estados bipartitos</b>	<b>43</b>
17.	Matriz de densidad en términos de la descomposición polar . . . . .	44
17.1.	Espacio de estados máximamente enredados . . . . .	45
18.	Forma simpléctica en términos de la descomposición polar . . . . .	46
18.1.	Forma simpléctica sobre la subvariedad de estados máximamente enredados . . . . .	47
19.	Conjunto de coordenadas canónicas . . . . .	48
20.	Estado bipartito de dos partículas de spin $1/2$ . . . . .	51
20.1.	Coordenadas horizontales y verticales . . . . .	52
20.2.	Estado general . . . . .	53
20.3.	Evolución para estados máximamente enredados . . . . .	57
20.4.	Ejemplo: Estado no factorizable . . . . .	60
20.5.	Ejemplo: Estado factorizable . . . . .	64
20.6.	Método de Hamilton-Jacobi para el sistema bipartito . . . . .	68
20.7.	Cantidades conservadas . . . . .	70
<b>V</b>	<b>Geometría simpléctica y enredamiento</b>	<b>74</b>
21.	Momentum map . . . . .	75
21.1.	Ejemplos de momentum map . . . . .	77
21.2.	Espacio de estados cuánticos . . . . .	79
22.	Teoría de representaciones . . . . .	82
23.	Teorema de Kostant-Sternberg . . . . .	82
23.1.	Caso particular: estado bipartito . . . . .	83
24.	Medida geométrica de enredamiento para órbitas de enredamiento constante . . . . .	87
	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>94</b>
<b>VI</b>	<b>Apéndices</b>	<b>96</b>
A.	Descomposición polar	97
B.	Teorema de Darboux en mecánica cuántica	100

C. Matrices de densidad reducidas	106
Bibliografía	108



# Resumen

En esta tesis estudiamos estados cuánticos compuestos bipartitos a partir de la formulación geométrica/hamiltoniana de la mecánica cuántica planteada en [2].

Tratando estados bipartitos particulares que representan a sistemas en los que cada subsistema posee la misma dimensión, se encontró un conjunto de coordenadas canónicas a partir de la descomposición polar de la matriz de coeficientes, lo que permitió comprobar que la subvariedad de estados máximamente enredados es una subvariedad lagrangiana del espacio de estados cuánticos [6].

Se estudió una manera de foliar el espacio de estados cuánticos en órbitas de enredamiento constante, mediante lo cual fue posible notar que el grado de enredamiento se puede caracterizar según la degeneración de la forma simpléctica al restringirla a las órbitas mencionadas [51], siendo el caso de máximo enredamiento también el de mayor degeneración de la forma simpléctica.

Finalmente, a partir de la representación estelar de Majorana para estados de spin 1 obtuvimos una relación entre la medida geométrica de enredamiento y la entropía de enredamiento de Shannon, además de incluir el cálculo del tensor de Ricci y el escalar de Ricci sobre cada órbita de enredamiento constante (considerando que dichas órbitas son subvariedades riemannianas) para determinar si existe relación entre estas cantidades y las medidas de enredamiento mencionadas.



## Introducción y motivación

La idea de unificación ha estado siempre presente en la historia de la física [23]. El hecho de encontrar un conjunto de leyes que describan al universo de una manera concisa y consistente suena muy atractivo. No obstante, dada la naturaleza y la forma en la que estudiamos y entendemos diversas ramas de la física y la ciencia en general, esta idea de unificación se vuelve cada vez más complicada de llevar a cabo [57].

Actualmente la mecánica cuántica desempeña un papel fundamental para el estudio del universo a escalas microscópicas, y existen teorías cuánticas de campo que permiten describir algunas de las interacciones fundamentales entre partículas en términos cuánticos, tal es el caso de la electrodinámica cuántica [19] y de la cromodinámica cuántica [18] (que describe la interacción fuerte). Por otro lado, aunque en las últimas décadas ha habido grandes esfuerzos por cuantizar la gravedad, no se ha encontrado una teoría definitiva que lo permita, y por si fuera poco ambas teorías se consideran incompatibles en muchos sentidos [36].

Una alternativa que ha surgido para llegar a unificar la relatividad general y la teoría cuántica, o al menos para poder estudiarlas en los mismos términos, es la de geometrizar la mecánica cuántica antes de cuantizar la relatividad general [9, 2].

En general, las teorías clásicas pueden ser formuladas en un lenguaje geométrico; en el caso de la mecánica hamiltoniana la geometría simpléctica juega un papel primordial [53], mientras que en la relatividad general el punto de partida es la geometría pseudoriemanniana [12]. En contraste con esto, la forma estándar de estudiar la mecánica cuántica es más bien algebraica; se basa en el análisis funcional y en la linealidad del espacio de Hilbert [50, 40]. No obstante, estudiando la mecánica cuántica desde una perspectiva geométrica podemos identificar que en el espacio de estados cuánticos surgen estructuras geométricas de manera completamente natural [2].

Esta tesis tiene como punto de partida la formulación de la mecánica cuántica desde una perspectiva geométrica, esto con la motivación de que al estudiar la teoría cuántica desde un enfoque más cercano a las teorías clásicas puedan llegar a establecerse conexiones más claras entre dichas teorías. Es sabido que en cierto límite, a medida que los sistemas aumentan su tamaño y su energía, la teoría cuántica reproduce los resultados de la mecánica newtoniana [11], mientras que en cierto límite, a medida que los sistemas disminuyen sus velocidades y el campo gravitatorio se vuelve más débil (límite de espacio-tiempo plano), la relatividad general alcanza también el límite newtoniano [12]. Por esta razón, la mecánica clásica y los sistemas hamiltonianos se vuelven importantes para establecer esta conexión entre las teorías. Como se mencionó al principio de esta introducción, el hecho de que se tenga una descripción concisa y consistente sobre los fenómenos es algo deseable en física; los sistemas hamiltonianos poseen una dinámica bien definida y la descripción hamiltoniana de la mecánica clásica es consistente con el análisis newtoniano que determina la dinámica basado en las fuerzas que actúan sobre los sistemas.

Como una motivación más específica para la realización de esta tesis se estudian sistemas bipartitos enredados, esto con el fin de estudiar el enredamiento cuántico en términos geométricos.

En los últimos años ha habido resultados que relacionan el enredamiento cuántico con cantidades geométricas en el espacio de estados del problema a tratar [8, 51, 6, 48].

Para acercarnos un poco más a la física detrás del problema del enredamiento cuántico podemos mencionar la dualidad AdS/CFT [48] (Anti-de-Sitter/Conformal Field Theory). A pesar de que no es un tema que se trate en esta tesis resulta sumamente interesante darse cuenta de que la relación entre geometría y enredamiento, que se puede apreciar mediante esta dualidad o correspondencia, llega a hacernos pensar que el enredamiento tal vez podría entenderse de una manera más clara y a un nivel más fundamental a partir de la geometría. El resultado que destacamos es la denominada *fórmula de Ryu-Takayanagi* que relaciona la entropía de enredamiento de un determinado estado con el área de un espacio relacionado con el problema<sup>1</sup>. A partir de dicho resultado se hace una conexión entre el enredamiento cuántico, cuyo cálculo tiene una naturaleza principalmente algebraica, y por otro lado el área, una cantidad puramente geométrica y por lo tanto relevante en gravitación. Esta fórmula generaliza un resultado en el que se identifica al con el horizonte de un agujero negro y a la entropía de enredamiento con la entropía de dicho agujero negro [5].

Teniendo en mente como motivación la idea de unificación entre la relatividad general y la teoría cuántica y por otro lado, el hecho de que existen resultados que son indicadores de que el enredamiento puede entenderse de manera más clara relacionándolo con cantidades geométricas, tenemos razones para pensar que estudiar la mecánica cuántica desde una formulación geométrica para luego abordar el problema del enredamiento a partir de esta formulación puede traernos resultados con interpretaciones físicas de interés.

El trabajo registrado en esta tesis consta de cinco partes. La parte I incluye los aspectos básicos sobre mecánica hamiltoniana con el objetivo de hacer la conexión de manera más natural con la mecánica cuántica y su formulación geométrica, de la cual se habla en la parte II.

En la parte II se presenta al espacio de Hilbert como variedad de Kähler, identificando tres estructuras que surgen en dicho espacio de manera natural: la estructura métrica, la estructura simpléctica y la estructura compleja. Esta construcción matemática nos permite trabajar con sistemas cuánticos de manera hamiltoniana, identificando una función hamiltoniana y su campo hamiltoniano asociado, el cual dicta la evolución del sistema. Tomando en cuenta esto, se trata de manera clásica el problema cuántico de una partícula de spin  $1/2$  en un campo magnético. Posteriormente se introduce la forma simpléctica que

---

<sup>1</sup>Los detalles de este resultado sobrepasan los objetivos de este trabajo de tesis, sin embargo en [48] puede encontrarse la información de manera más específica.

se estará utilizando en el espacio proyectivo del espacio de Hilbert a partir del potencial de Kähler. Con ello surge el tema de las coordenadas canónicas y la naturaleza instructiva del teorema de Darboux para encontrar dichas coordenadas, las cuales, podemos notar que son relativamente arbitrarias en el sentido de que su interpretación física no necesariamente tiene que reflejar momentos y coordenadas clásicos.

En la parte III se introduce el enredamiento cuántico en sistemas bipartitos, para lo cual se definen los estados cuánticos factorizables y los estados cuánticos enredados como su contraparte, haciendo énfasis en el fenómeno de la correlación entre mediciones locales en los subsistemas individuales que caracteriza a un estado enredado. Se introduce la descomposición de Schmidt y la relación del entrelazamiento de un estado cuántico con la pureza de las matrices reducidas de cada subsistema. Por último se estudia una manera de medir el grado de enredamiento en sistemas bipartitos basada en la entropía de Shannon y con ello, la idea de un estado máximamente enredado.

En la parte IV se introduce un sistema de coordenadas en el espacio proyectivo basado en la descomposición polar de la matriz de coeficientes del estado cuántico. A partir de ello, vemos cómo es la forma simpléctica en términos de la descomposición polar y encontramos un conjunto de coordenadas canónicas para un sistema bipartito general. Posteriormente trabajamos con un estado bipartito particular conformado por dos partículas de spin  $1/2$ . Ya a partir de las coordenadas canónicas encontradas utilizamos el formalismo geométrico de la mecánica cuántica y vemos la evolución de dicho estado al ser sometido a un campo magnético uniforme en dirección  $\hat{z}$ . Se utiliza el método de Hamilton-Jacobi para encontrar la evolución del sistema y se interpretan las cantidades conservadas en términos físicos. Por último, se estudia la evolución para un estado inicial máximamente enredado. En esta parte de la tesis se explica también una publicación de Ingemar Bengtsson de 2007 [6] en la que se describe una propiedad interesante que tiene el espacio de estados puros bipartitos máximamente enredados: es una subvariedad lagrangiana del espacio total de estados bipartitos  $\mathbb{C}P^3$ .

En la parte V continuamos trabajando con estados bipartitos, estudiando su enredamiento en términos de geometría simpléctica [51]. En esta última parte vemos que, aunque aún no se tiene una interpretación física clara sobre el significado de que la subvariedad de estados máximamente enredados forme una subvariedad lagrangiana, el enredamiento puede clasificarse según el grado de degeneración de la forma simpléctica en las órbitas generadas por la acción de operadores locales unitarios sobre los estados, lo que generaliza el resultado obtenido por Bengtsson. Finalmente estudiamos estados cuánticos de spin 1 (matemáticamente equivalentes a un producto tensorial simetrizado de dos estados de spin  $1/2$ ) a partir de la representación de spin de Majorana [37] y obtenemos una relación entre la medida de enredamiento basada en la entropía de Shannon y la medida geométrica de enredamiento.

# Parte I

## Mecánica clásica y sistemas hamiltonianos

La mecánica clásica posee una descripción inherentemente geométrica. Los estados de un sistema clásico se representan mediante puntos en el espacio fase  $\mathcal{M}$ , el haz cotangente a la variedad de configuración  $\mathcal{Q}$ , el cual es una variedad simpléctica [39]. Por otro lado, los observables son funciones suaves  $f$  (con valores reales) sobre este espacio fase y hacer una medición del observable  $f$  en un punto  $p$  consiste en la evaluación  $f(p)$ .

A partir de la estructura simpléctica puede definirse un álgebra de Lie cuyos elementos están dados por el conjunto de observables y cuyo producto es el denominado *bracket de Poisson* [33].

En esta primera parte de la tesis se introducen los aspectos más esenciales sobre sistemas hamiltonianos, lo que nos permitirá establecer la relación con la forma en la que podemos estudiar sistemas cuánticos como sistemas hamiltonianos.

## 1. Campos vectoriales hamiltonianos

En mecánica clásica, a cada observable  $f$  se le asocia un campo vectorial  $X_f$ , denominado *campo vectorial hamiltoniano* de  $f$ :

**Definición 1.** Sea  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ , su campo vectorial hamiltoniano asociado  $X_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  se define como aquel para el que se cumple [1, 53]

$$df(Y) = \Omega(X_f, Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(T^*M), \quad (1.1)$$

donde  $\Omega$  es la estructura simpléctica [20] definida sobre  $\mathcal{M}$ . Dicho de otra forma,  $X_f$  es tal que cumple<sup>2</sup>

$$df = i_{X_f}\Omega \equiv \Omega(X_f, \bullet). \quad (1.2)$$

La dinámica o evolución de un sistema clásico se determina mediante el flujo generado por el campo  $X_H$  asociado a un observable en particular, la función *hamiltoniana*.

---

<sup>2</sup>En algunas referencias, por cuestiones de notación, se utiliza la forma  $df = \Omega(\bullet, X_f)$ .

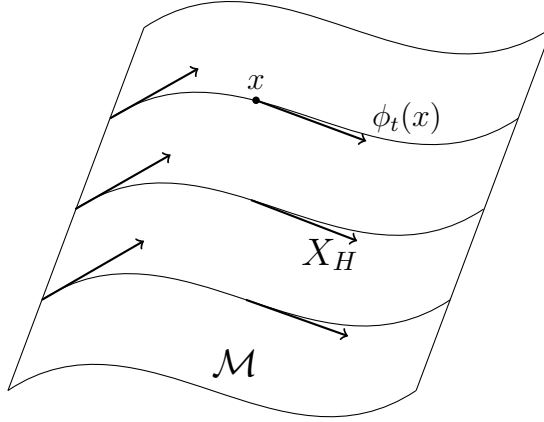


Figura 1: Flujo asociado a un campo vectorial.

**Definición 2.** Un sistema hamiltoniano es una terna  $(\mathcal{M}, \Omega, H)$ , donde  $(\mathcal{M}, \Omega)$  es una variedad simpléctica y  $H$  es una función denominada función hamiltoniana.

## 2. Coordenadas canónicas

El teorema de Darboux enuncia lo siguiente [39, 53]:

**Teorema 1.** Sea  $\Omega$  una 2-forma simpléctica en una vecindad de un punto  $x$  que pertenece a una variedad simpléctica  $\mathcal{M}^{2n}$ . Entonces en una vecindad de  $x$  es posible elegir un sistema coordenado  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  tal que  $\Omega$  se vea de la forma<sup>3</sup>

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i. \quad (2.1)$$

Es decir, este teorema nos asegura que en una variedad simpléctica siempre es posible encontrar localmente coordenadas canónicas.

## 3. Ecuaciones de Hamilton

**Proposición 1.** Consideramos un espacio fase de dimensión  $2n$  con coordenadas canónicas  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  y forma simpléctica dada por (2.1). La curva en el espacio fase  $\rho(t) =$

<sup>3</sup>En algunas referencias la convención es escribir la forma simpléctica como  $\sum_i dp_i \wedge dq_i$ .



$(q(t), p(t))$  es una curva integral del campo vectorial hamiltoniano  $X_H$  si se cumplen las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (3.1)$$

**Demostración** Si los componentes del campo vectorial hamiltoniano están dados por la ecuación (3.1), se tiene

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \quad (3.2)$$

Ahora tenemos que demostrar que si el campo hamiltoniano está dado por (3.2), se cumple que  $i_{X_H}\Omega = dH$ :

$$\begin{aligned} i_{X_H}\Omega &= \sum_j \left( i_{X_H}(dq_j \wedge dp_j) = \sum_j dq_j(X_H) \wedge dp_j - dq_j \wedge dp_j(X_H) \right) \\ &= \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j \right) = dH. \end{aligned} \quad (3.3)$$

■

## 4. Ecuación de Hamilton-Jacobi

### 4.1. La acción como función de las coordenadas

**Definición 3.** Considerando un sistema mecánico que ocupa, en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , las posiciones definidas por los conjuntos de coordenadas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$  respectivamente, la acción se define como [33]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (4.1)$$

donde  $L$  es la función lagrangiana del sistema.

**Teorema 2.** Un sistema mecánico caracterizado por una función lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  tendrá una evolución entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$  tal que extremice la acción  $S$  asociada.

En esta sección mostraremos una relación entre la acción  $S$  y la función hamiltoniana  $H$ , esto considerando a  $S$  como una función de las coordenadas  $q_i$  iniciales y finales. Por comodidad, iniciemos tomando en cuenta un sistema mecánico con un solo grado de libertad y

luego podemos generalizarlo. La variación de la acción de una trayectoria a otra trayectoria vecina está dada por

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt. \quad (4.2)$$

Como la trayectoria real del sistema cumple con las ecuaciones de Lagrange, el término de la integral es igual a cero. Para el primer término, decimos que el sistema parte del origen de coordenadas, por lo que  $\delta q(t_1) = 0$  y denotamos  $\delta q(t_2)$  como  $\delta q$ , por lo tanto

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = p \delta q, \quad (4.3)$$

ya que por definición, el momento canónico  $p$  está dado por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (4.4)$$

De la ecuación (4.3) obtenemos, ya generalizando para un número arbitrario de grados de libertad

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad (4.5)$$

por lo tanto, considerando a  $S$  como función solamente del parámetro  $t$  y de las coordenadas, se tiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i. \quad (4.6)$$

Por definición de la acción  $S$ , sabemos que

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (4.7)$$

Comparando (4.6) y (4.7) se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H(p, q, t), \quad (4.8)$$

donde  $H$  es la función hamiltoniana.

Dado que el objetivo es describir la dinámica del sistema de la manera más sencilla posible, a partir de (4.8) notamos que existe una transformación canónica que podemos realizar

de manera que la nueva función hamiltoniana sea igual a cero, lo que permitiría encontrar nuevas variables cuya dinámica se describa trivialmente. Recordemos que al realizar una transformación canónica mediante una función generatriz  $F$ , la nueva función hamiltoniana  $H'$  se relaciona con la hamiltoniana original  $H$  como

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Comparando (4.8) con (4.9) nos vemos motivados a introducir la función generatriz de tipo 2 [33] (dependiente de las coordenadas originales  $q_i$  y los nuevos momentos  $P_i = \alpha_i$ ) dada por

$$F(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + A, \quad (4.10)$$

donde  $A$  es una constante arbitraria (que podemos incluir porque en la ecuación (4.9) la función  $F$  sólo entra mediante sus derivadas). Mediante dicha función generatriz, la nueva hamiltoniana  $H'$  será igual a cero, por lo tanto las nuevas coordenadas  $Q_i$  y los nuevos momentos  $P_i$  serán constantes, es por ello que en la dependencia de  $F$  podemos escribir  $\alpha_i$  (que son constantes) en vez de  $P_i$ . A partir de  $F$  se obtiene que

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (4.11)$$

donde  $\beta_i$  son las nuevas coordenadas (constantes). La ecuación de Hamilton-Jacobi resulta de sustituir  $p_i$  por su expresión en (4.11):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) = 0. \quad (4.12)$$

Dadas las expresiones en (4.11), para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema solamente hay que resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi, y habiendo determinado  $S$ , bastará con derivar respecto a cada  $\alpha_i$  e igualar a otra constante  $\beta_i$ .

## 4.2. Ejemplo: Oscilador armónico simple unidimensional

En este ejemplo tenemos un sistema con solamente un grado de libertad, cuya función hamiltoniana está dada por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (4.13)$$

Como vemos, la función hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto, proponiendo una solución mediante separación de variables de tipo  $S(q, t) = W(q) + T(t)$  se encuentra que

$$S(q, t) = W(q) - Et, \quad (4.14)$$

donde  $E$  es nuestra primera constante  $\alpha$  (en este caso es la única ya que solamente hay un grado de libertad). Sustituyendo en la ecuación de Hamilton-Jacobi obtenemos

$$\frac{1}{m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + kq^2 = 2E, \quad (4.15)$$

cuya solución está dada por

$$W = \frac{1}{2}q\sqrt{2mE - mkq^2} - \frac{E}{\omega} \arctan \left( \frac{\omega q \sqrt{2mE - mkq^2}}{kq^2 - 2E} \right) + c_1, \quad (4.16)$$

donde  $c_1 = \text{cte.}$  y  $\omega = \sqrt{k/m}$ . De lo anterior obtenemos

$$S = \frac{1}{2}q\sqrt{2mE - mkq^2} - \frac{E}{\omega} \arctan \left( \frac{\omega q \sqrt{2mE - mkq^2}}{kq^2 - 2E} \right) + c_1 - Et. \quad (4.17)$$

Ahora hay que encontrar las ecuaciones de movimiento mediante (4.11), es decir

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{1}{\omega} \arctan \left( \frac{\sqrt{mk}q}{\sqrt{2mE - mkq^2}} \right), \quad (4.18)$$

y despejando  $q$  obtenemos la solución conocida para  $q(t)$ :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \phi) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (4.19)$$

donde  $\phi = \text{cte.}$

Por último, obtenemos la solución para  $p(t)$  derivando  $S$  respecto a  $q$  y sustituyendo  $q = q(t)$ :

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi), \quad (4.20)$$

que es el resultado esperado  $p(t) = m\dot{q}(t)$ .

## 5. Sistemas integrables

En mecánica clásica se define la operación denominada bracket de Poisson:

**Definición 4.** *El bracket de Poisson entre dos funciones  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$  se define como*

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g), \quad (5.1)$$

donde  $X_f$  y  $X_g$  son los campos vectoriales hamiltonianos asociados a los observables  $f$  y  $g$  respectivamente y  $\Omega$  es la forma simpléctica sobre el espacio fase.

El bracket de Poisson es una operación bilineal, asociativa, que satisface la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz, es decir, cumple con ser una derivación, por lo tanto se dice que  $(C^\infty(\mathcal{M}), \{\bullet, \bullet\})$  es un álgebra de Poisson [53].

Pasemos ahora a estudiar los sistemas integrables, para lo cual un concepto esencial es el de *integrales de movimiento*:

**Definición 5.** *Sea  $f$  una función  $C^\infty(\mathcal{M})$ , se dice que  $f$  es una integral de movimiento si cumple con que  $\{f, H\} = 0$ .*

**Definición 6.** *Un sistema hamiltoniano  $(\mathcal{M}, \Omega, H)$  con  $n$  grados de libertad, se dice completamente integrable si posee  $n$  integrales de movimiento independientes<sup>4</sup>  $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ , las cuales se dice que están en involución respecto al bracket de Poisson, es decir [53]*

$$\{f_i, f_j\} = 0, \quad \forall \quad i, j. \quad (5.2)$$

Hay varios ejemplos de sistemas integrables, tales como el oscilador armónico simple y el péndulo simple, y como veremos más adelante, al estudiar un sistema integrable tenemos acceso a muchas herramientas que nos permiten describir la dinámica de manera bastante sencilla. Para comprender dichas herramientas comencemos comprendiendo el teorema de Liouville.

### 5.1. Teorema de Arnold-Liouville para sistemas integrables

**Teorema 3.** *Dadas  $n$  funciones independientes  $f_1, \dots, f_n$  en involución sobre una variedad simpléctica de dimensión  $2n$ , considerando el conjunto de nivel de las funciones  $f_i$ :*

$$M_f = \{x : f_i(x) = f_i, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (5.3)$$

entonces:

---

<sup>4</sup>Dos funciones  $f_1, f_2$  son independientes si  $(df_1)_p$  y  $(df_2)_p$  son linealmente independientes para todo punto  $p$  en algún abierto denso de  $\mathcal{M}$ .

1.  $M_f$  es una subvariedad suave del espacio fase, la cual es invariante bajo el flujo generado por la función hamiltoniana  $f_1 = H$ .
2. Si  $M_f$  es conexa y compacta, entonces es difeomorfa a un  $n$ -toro:

$$T^n : \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod(2\pi)\}. \quad (5.4)$$

3. El flujo generado por la función hamiltoniana  $H$  determina un movimiento periódico en  $M_f$ , es decir, que en las coordenadas angulares  $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  se tiene

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i, \quad \omega_i = \omega_i(f_j). \quad (5.5)$$

4. Las ecuaciones de Hamilton pueden resolverse mediante cuadraturas.

La demostración de este teorema se encuentra en [1], y a grandes rasgos, se basa en el hecho de que  $M_f$  es una variedad compacta, lo que nos permite construir coordenadas periódicas (angulares) sobre la misma.

## 5.2. Variables de ángulo-acción

A partir del teorema de Liouville vimos que considerando la subvariedad  $M_f$ , la cual resulta difeomorfa a un  $n$ -toro, podemos encontrar coordenadas angulares  $\phi_i$  sobre dicho toro tales que

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(f), \quad \phi(t) = \phi(0) + \omega(f)t. \quad (5.6)$$

Tenemos entonces el sistema de coordenadas  $(f_1, \dots, f_n, \phi_1, \dots, \phi_n)$ , mediante el cual obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i(f_j), \quad \frac{df_i}{dt} = 0, \quad (5.7)$$

por lo tanto

$$f_i(t) = f_i(0), \quad \phi_i(t) = \phi_i(0) + \omega_i(f_j(0))t. \quad (5.8)$$

Las coordenadas  $\phi_i$  son denominadas variables de ángulo, y como vemos, es suficiente encontrar dichas coordenadas angulares para determinar la dinámica del sistema mediante

cuadraturas.

El sistema coordenado  $(f, \phi)$  tiene el problema de que no es simpléctico, es decir, las coordenadas  $f_i$  no son las canónicas conjugadas de  $\phi_i$ . Después de tener las variables de acción hay que encontrar variables  $I_i = I_i(f_j)$ , denominadas *variables de acción*, tales que la forma simpléctica sea

$$\Omega = \sum_i dI_i \wedge d\phi_i. \quad (5.9)$$

Mediante este nuevo sistema coordenado tenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i(I_j). \quad (5.10)$$

Para encontrar las variables de ángulo-acción comencemos con el caso más simple en el que se tiene un solo grado de libertad. El objetivo es hacer una transformación canónica  $(p, q) \rightarrow (I, \phi)$ . Buscamos entonces una función generatriz de tipo 2  $S(I, q)$  que satisface

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \phi = \frac{\partial S}{\partial I}, \quad (5.11)$$

y como  $H = f_1(I) = H(I)$ , es una constante (digamos  $h$ ) se tiene

$$H\left(\frac{\partial S(I, q)}{\partial q}, q\right) = h(I). \quad (5.12)$$

Ahora, consideramos que  $h(I)$  es invertible, y al tener un valor fijo de  $I$ , se tiene una curva  $M_{h(I)}$ , por lo tanto, para dicho valor fijo

$$dS \Big|_{I=\text{cte.}} = pdq. \quad (5.13)$$

Integrando  $dS$  sobre la curva  $M_{h(I)}$  se obtiene la función generatriz  $S(I, q)$  en una vecindad de un punto  $q_0$ :

$$S = \int_{q_0}^q pdq. \quad (5.14)$$

No obstante, hay una restricción que se debe cumplir. Dado que  $\phi$  es una variable angular, la condición es

$$\oint_{M_h} d\phi = 2\pi, \quad (5.15)$$

para ello, necesitamos que

$$I = \frac{\Delta S}{2\pi}, \quad (5.16)$$

donde  $\Delta S = \oint_{M_h} pdq$  es el área encerrada por la curva  $H = h$ .

Generalicemos la idea para el caso de un sistema con  $n$  grados de libertad. En dicho caso tendremos  $M_f$  siendo un  $n$ -toro, cuyo grupo fundamental está dado por [43]

$$\pi_1(T^n) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \otimes \cdots = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots, \quad (5.17)$$

un total de  $n$  veces. Consideremos entonces una serie de curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , tales que sean una base de curvas cerradas para formar el  $n$ -toro, es decir, el aumento en la coordenada  $\phi_i$  en una curva  $\gamma_j$  es igual a  $2\pi\delta_{ij}$ . Se tiene entonces

$$I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_j p_j dq_j \quad (5.18)$$

### Ejemplo: Oscilador armónico simple unidimensional

Tenemos la función hamiltoniana (4.13). Dado que la cantidad de Jacobi se conserva y es además igual a la energía  $E$  del sistema, se tiene

$$p = \sqrt{2mE - mkq^2}. \quad (5.19)$$

Por lo tanto, para encontrar la variable de acción  $I$  se tiene la integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \sqrt{2mE - mkq^2} dq. \quad (5.20)$$

No obstante, sabemos que la integral que aparece en el cálculo es simplemente el área encerrada por la curva  $M_h$ . Como sabemos, se tiene

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} = 1, \quad (5.21)$$

que es la ecuación de una elipse centrada en el origen con lados  $a^2 = 2mE$  y  $b^2 = 2E/k$ , cuya área está dada por



$$\Delta S = \pi \left( \sqrt{2mE} \right) \left( \sqrt{\frac{2E}{k}} \right) = 2\pi \frac{E}{\omega}, \quad (5.22)$$

donde  $\omega = \sqrt{k/m}$ . De lo anterior obtenemos la variable de acción

$$I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}, \quad (5.23)$$

y la variable angular

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial E}{\partial I} = \omega \quad \rightarrow \quad \phi = \omega t + \phi_0. \quad (5.24)$$

Por otro lado, en la ecuación (5.11) tenemos

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \int p dq, \quad (5.25)$$

y escribiendo  $p$  en términos de  $I$  obtenemos

$$p = \sqrt{2mI\omega - mkq^2}, \quad (5.26)$$

por lo que sustituyendo en (5.25) se tiene

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{2mI\omega - mkq^2} dq = \int \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2mI\omega - kq^2}} dq = \arctan \left( \frac{\sqrt{k}q}{\sqrt{2E - kq^2}} \right) \\ &= \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} q \right) = \omega t + \phi_0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

y despejando  $q$  se obtiene

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \phi_0), \quad (5.28)$$

justo el resultado esperado.

## Parte II

# Mecánica cuántica y sistemas hamiltonianos

En la parte I de esta tesis dimos una breve introducción al enfoque de la mecánica clásica, el cual es esencialmente geométrico. Por otro lado tenemos la descripción cuántica, cuyo enfoque se considera principalmente algebraico [2]. La manera estándar en la que se estudia mecánica cuántica se basa en ver a los estados de un sistema cuántico como vectores en el espacio de Hilbert [50], el cual es un espacio vectorial, por lo tanto la linealidad juega un papel primordial al enunciar los postulados de la mecánica cuántica a partir de esta perspectiva estándar. No obstante, al estudiar la mecánica cuántica de forma más detallada podemos ver que en realidad los estados viven en el espacio proyectivo del espacio de Hilbert [30], que no es un espacio vectorial.

En esta segunda parte de la tesis veremos que estudiando el espacio de estados cuánticos desde una perspectiva geométrica es posible tratar a los sistemas cuánticos como sistemas hamiltonianos, esto debido a que existe una forma simpléctica definida en el espacio de estados, lo que nos permite introducir un flujo hamiltoniano en dicho espacio de manera que el estado cuántico evolucione de acuerdo con este flujo.

## 6. El espacio de Hilbert y su espacio proyectivo

El espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  donde viven los estados cuánticos es un espacio vectorial complejo cuyos elementos  $|\psi\rangle$  se denominan *kets*. A su vez, el conjunto de funciones lineales  $\alpha$

$$\alpha(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1\alpha(|\psi_1\rangle) + c_2\alpha(|\psi_2\rangle), \quad (6.1)$$

donde  $c_i \in \mathbb{C}$  y  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ , es un conjunto vectorial denominado el espacio vectorial dual a  $\mathcal{H}$  y denotado como  $\mathcal{H}^*$ , cuyos elementos se denominan *bras* y se representan, según la notación de Dirac como  $\langle\psi|$ .

Dado que el espacio de Hilbert tiene una estructura lineal, podríamos pensar que la topología de los estados cuánticos no es muy interesante, no obstante, hay que tomar en cuenta que trabajamos con estados normalizados, además de que las cantidades que en realidad reflejan el comportamiento físico del sistema están dadas por módulos cuadrados, por lo que la fase global del estado cuántico es irrelevante al calcular dichos módulos cuadrados y tenemos entonces que centrarnos, no en el espacio de Hilbert completo, sino en su espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ , que es el conjunto de rayos  $[\psi]$  en el espacio de Hilbert definidos como

$$[\psi] = \{w|\psi\rangle, w \in \mathbb{C}^*\}, \quad (6.2)$$

donde  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ .

Para trabajar en el espacio proyectivo, consideramos primero una base en el espacio de Hilbert en la cual representamos al estado cuántico de un sistema  $n$  dimensional mediante sus componentes

$$Z \equiv |\psi\rangle = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n. \quad (6.3)$$

Para pasar al espacio proyectivo la relación de equivalencia que debemos considerar es la siguiente:

$$(z_1, \dots, z_n) \sim w(z_1, \dots, z_n), \quad w \in \mathbb{C}^*, \quad (6.4)$$

de modo que en un abierto  $U_i$  en el que  $z_i \neq 0$ , se puede trabajar con las coordenadas

$$\left( \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right) = (t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}) \in \mathbb{C}P^{n-1}, \quad (6.5)$$

donde  $t_m^{(i)} = \frac{z_m}{z_i}$  y por lo tanto  $t_i^{(i)} = 1$ , así que el espacio proyectivo del espacio de Hilbert  $n$  dimensional dado por  $\mathbb{P}(\mathcal{H}^n) = \mathbb{C}P^{n-1}$  tiene dimensión  $n - 1$ .

Hay que aclarar que si tenemos cierto conjunto de coordenadas  $\{z_i\}$  en el espacio de Hilbert, en muchas ocasiones es más fácil trabajar con dichas coordenadas que cambiar a las coordenadas  $\{t_i\}$  que hemos definido en el espacio proyectivo. Para ello, sabemos que los elementos del espacio de Hilbert son vectores, los cuales podemos escalar (multiplicar por  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) o rotar (multiplicar por una fase  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ), es decir, multiplicar por un número complejo  $w = \lambda e^{i\alpha}$ . Como vemos en la ecuación (6.4), en el espacio proyectivo dos vectores que difieren entre sí por un factor complejo no nulo pertenecen a la misma clase de equivalencia, por ello lo que tenemos que hacer en el espacio de Hilbert para que éste sea localmente isomorfo al espacio proyectivo es prohibir a los vectores  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  que sean escalados o rotados. Para evitar el escalamiento nos restringimos a vectores normalizados, por lo tanto nos quedamos en una subvariedad del espacio de Hilbert dada por una esfera  $S^n$  de radio 1. A partir de eso solamente hay que considerar la relación de equivalencia entre estados que difieren por una fase global. Digamos que tenemos un vector ya normalizado (un punto sobre la esfera mencionada), ahora hay todo un círculo grande sobre dicha esfera que pasa por el punto inicial, el cual está compuesto por otros puntos que difieren del primero por una fase global. Todos estos puntos o vectores en el espacio de Hilbert deben ser equivalentes. Habiendo hecho esto, el espacio resultante es efectivamente el espacio proyectivo.

## 7. Mecánica clásica y mecánica cuántica

En contraparte con la mecánica clásica, en mecánica cuántica los observables están dados por operadores hermíticos  $\hat{Q}$  en el espacio de Hilbert, y el espacio de todos estos observables permite definir un álgebra de Lie cuyo producto está dado por el conmutador entre los operadores correspondientes.

En mecánica cuántica la medición de un observable  $\hat{Q}$  en un sistema que se encuentra en un estado  $|\psi\rangle$ , arrojará como resultado un valor propio del operador  $\hat{Q}$  e inmediatamente luego de realizar la medición correspondiente, el estado *colapsará* al estado propio correspondiente, sin embargo, dicho resultado puede predecirse solamente a nivel probabilístico.

Así como cada campo hamiltoniano clásico genera un flujo en el espacio fase, cada observable cuántico define un flujo en el espacio de estados a partir del mapeo exponencial del observable dado. En este caso, también hay un observable particular que define la evolución del sistema, el operador *hamiltoniano*.

A pesar de que los métodos utilizados para estudiar sistemas clásicos y sistemas cuánticos son muy distintos, se sabe que la mecánica clásica corresponde a cierto límite de la mecánica cuántica. En esta sección se describe al espacio de Hilbert como variedad de Kähler, poniendo de manifiesto que la mecánica cuántica puede estudiarse como mecánica clásica/hamiltoniana.

## 8. Variedades de Kähler

**Definición 7.** *Una variedad de Kähler [30] es aquella variedad diferencial que posee tres estructuras: una métrica  $G$ , una forma simpléctica  $\Omega$  y una estructura compleja  $J$ , las cuales cumplen con la relación de compatibilidad*

$$G(X, Y) = \Omega(X, JY), \quad (8.1)$$

*para todos los campos vectoriales  $X, Y$ .*

### 8.1. El espacio de Hilbert como variedad de Kähler

El espacio de Hilbert es un espacio complejo; por otro lado, para trabajar con mecánica clásica necesitamos un espacio real. El primer paso es entonces hacer un mapeo que nos

permita trabajar en un espacio real. Para ello, consideremos un estado cuántico  $|\psi\rangle$  de dimensión  $n$  compleja, y el mapeo correspondiente a un estado de dimensión real  $2n$ , es decir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Sin embargo, no podemos simplemente ignorar el hecho de que el espacio de estados cuánticos es un espacio complejo. Para poder trabajar en un espacio real debemos encontrar una manera para multiplicar por  $i$ . Es ahí donde entra el papel de la *estructura compleja*. Primero veamos qué pasa con el estado  $|\psi\rangle$  si lo multiplicamos por  $i$ :

$$i|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -y_1 + ix_1 \\ \vdots \\ -y_n + ix_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y_1 \\ \vdots \\ -y_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

de donde podemos identificar el mapeo correspondiente

$$i|\psi\rangle \rightarrow J\Psi, \quad (8.4)$$

siendo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = -\mathbb{I}, \quad (8.5)$$

la estructura compleja, y donde  $\mathbb{I}_n$  representa la matriz identidad de dimensión  $n$ .

Ya que definimos la estructura compleja, se tiene entonces la correspondencia

$$(a + ib)|\psi\rangle \rightarrow (\mathbb{I}a + Jb)\Psi, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (8.6)$$

Llegado este punto, el espacio de Hilbert es ya un espacio real (dotado de la estructura compleja que hemos introducido). El siguiente paso para entender este espacio de manera

geométrica es descomponer el producto interno hermítico en sus partes real e imaginaria de la forma [2]

$$\langle \Phi, \Psi \rangle \equiv \frac{1}{2}G(\Phi, \Psi) + \frac{i}{2}\Omega(\Phi, \Psi). \quad (8.7)$$

**Proposición 2.**  $G(\Phi, \Psi) = 2\text{Re}(\langle \Phi, \Psi \rangle)$  es simétrica, definida positiva y no degenerada, por lo que cumple con las propiedades para ser considerada una métrica.

**Demostración** Por las propiedades del producto interno hermítico [50], se sabe que  $G$  es definida positiva y no degenerada. Recordando cómo se define la parte real de un número complejo podemos cerciorarnos de que  $G(\Phi, \Psi)$  es simétrica:

$$\begin{aligned} G(\Phi, \Psi) &= 2\text{Re}(\langle \Phi, \Psi \rangle) = \langle \Phi, \Psi \rangle + \langle \Phi, \Psi \rangle^* \\ &= \langle \Phi, \Psi \rangle + \langle \Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, \Phi \rangle^* + \langle \Psi, \Phi \rangle = G(\Psi, \Phi). \end{aligned} \quad (8.8)$$

■

**Proposición 3.**  $\Omega(\Phi, \Psi) = 2\text{Im}(\langle \Phi, \Psi \rangle)$  es antisimétrica y no degenerada, por lo que cumple con las propiedades para ser considerada una forma simpléctica sobre el espacio de Hilbert<sup>5</sup>.

**Demostración** La no degeneración de  $\Omega$  se debe a la no degeneración del producto interno hermítico. Recordando la definición de la parte imaginaria de un número complejo demostramos que la antisimetría de  $\Omega(\Phi, \Psi)$ :

$$\begin{aligned} \Omega(\Phi, \Psi) &= 2\text{Im}(\langle \Phi, \Psi \rangle) = -i(\langle \Phi, \Psi \rangle - \langle \Phi, \Psi \rangle^*) \\ &= -i(\langle \Phi, \Psi \rangle - \langle \Psi, \Phi \rangle) = i(\langle \Psi, \Phi \rangle - \langle \Phi, \Psi \rangle) = -\Omega(\Psi, \Phi). \end{aligned} \quad (8.9)$$

■

Por otra parte, como  $\langle \Phi, J\Psi \rangle = i\langle \Phi, \Psi \rangle$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Phi, J\Psi \rangle &= \frac{1}{2}G(\Phi, J\Psi) + \frac{i}{2}\Omega(\Phi, J\Psi) \\ &= \frac{i}{2}G(\Phi, \Psi) - \frac{1}{2}\Omega(\Phi, \Psi), \end{aligned} \quad (8.10)$$

de donde podemos identificar que  $G(\Phi, \Psi) = \Omega(\Phi, J\Psi)$ , es decir, se cumple la relación (8.1), lo que nos indica que el espacio de Hilbert puede estudiarse como una variedad de Kähler

---

<sup>5</sup>Para espacios vectoriales, la forma simpléctica se define como una 2-forma antisimétrica y no degenerada [53].

$(J, G, \Omega)$  ya que de manera natural surgen estas tres estructuras [4].

$G$  es simétrica y definida positiva y  $\Omega$  es antisimétrica y no degenerada. Esto se sigue directamente del hecho de que  $G$  es la parte real del producto interno y  $\Omega$  es la parte imaginaria. Pues el mismo es bilineal y definido positivo.

En este contexto, la ecuación de Schrödinger se expresa como

$$|\dot{\psi}\rangle = i\hat{H}|\psi\rangle \quad \rightarrow \quad \dot{\Psi} = -J\tilde{H}\Psi, \quad (8.11)$$

donde  $\tilde{H}$  es la nueva representación de  $\hat{H}$  que resulta de ver al espacio de Hilbert como un espacio real de dimensión  $2n$ .

lo que motiva a asociar a cada observable cuántico  $\hat{Q}$  un campo vectorial  $Y_{\hat{Q}}$ :

**Definición 8.** *El campo vectorial de Schrödinger  $Y_{\hat{F}}$  que se asocia a cada observable  $\hat{F}$  se define como*

$$Y_{\hat{F}}(\Psi) \equiv -J\tilde{F}\Psi. \quad (8.12)$$

**Proposición 4.** *El campo vectorial de Schrödinger  $Y_{\hat{F}}$  está definido de tal forma que la evolución temporal del sistema corresponde al flujo definido por el campo vectorial asociado al operador hamiltoniano  $\hat{H}$ , siendo el valor esperado de  $\hat{H}$  la función que genera dicho campo vectorial.*

**Demostración** El objetivo es demostrar que, definiendo la función  $F \equiv \langle \hat{F} \rangle$ , se cumple que

$$dF = i_{Y_{\hat{F}}}\Omega, \quad (8.13)$$

donde  $Y_{\hat{F}}$  está definida como (8.12). Es decir, queremos demostrar que la definición (8.12) cumple con la condición para ser el campo vectorial hamiltoniano correspondiente al observable  $\hat{F}$ .

Primero, dada la hermiticidad de  $\hat{F}$  tenemos

$$F \equiv \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle = \frac{1}{2}G(\Psi, \hat{F}\Psi). \quad (8.14)$$

Sea  $\eta$  cualquier vector tangente a  $\Psi$  definido como

$$\eta = \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0}, \quad \gamma(t) = \Psi + t\eta, \quad (8.15)$$



se tiene

$$\begin{aligned}
dF(\eta) &= \eta \triangleright F = \left. \frac{d}{dt} F(\gamma) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle \Psi + t\eta, \hat{F}(\Psi + t\eta) \rangle \right|_{t=0} \\
&= \langle \eta, \hat{F}\Psi \rangle + \langle \Psi, \hat{F}\eta \rangle = \frac{1}{2}G(\eta, \hat{F}\Psi) + \frac{1}{2}G(\hat{F}\Psi, \eta) \\
&= G(\hat{F}\Psi, \eta) = \Omega(\hat{F}\Psi, J\eta) = \Omega(-J\hat{F}\Psi, \eta) \\
&= i_{X_{\hat{F}}}\Omega(\eta).
\end{aligned} \tag{8.16}$$

■

Mediante la demostración anterior, concluimos que el campo vectorial hamiltoniano asociado con  $F$  coincide con el campo vectorial de Schrödinger asociado con  $\hat{F}$ . Esto significa que la evolución temporal de los sistemas cuánticos puede estudiarse a través de una formulación hamiltoniana, esto encontrando la función hamiltoniana  $H$  como el valor esperado del operador hamiltoniano y resolviendo las ecuaciones de Hamilton correspondientes.

Por último, aclaramos que, dado que el espacio en el que viven los estados cuánticos es el espacio proyectivo del espacio de Hilbert  $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}P^n$ , en general se trabaja con las estructuras métrica  $g$  y simpléctica  $\omega$  que se definen en dicho espacio proyectivo. Así, siendo  $\pi$  el mapeo  $\pi(|\psi\rangle) = [\psi]$ , se definen  $\omega$  y  $g$  de manera que cumplan con

$$\pi^*\omega = \Omega, \quad \pi^*g = G, \tag{8.17}$$

donde  $g$  se conoce como la métrica de Fubini-Study.

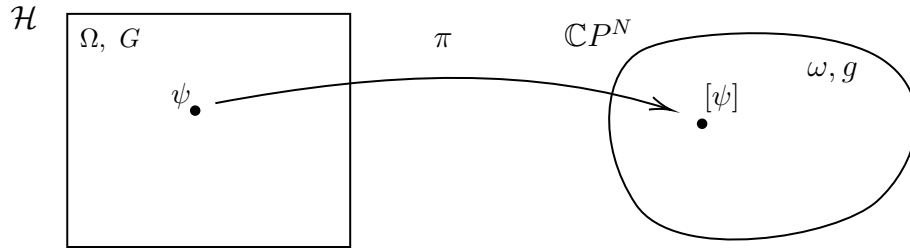


Figura 2: Estructuras métrica y simpléctica en el espacio proyectivo

## 8.2. Ejemplo: Partícula de spin 1/2 en un campo magnético

Vamos a estudiar un sistema cuántico que consiste en una partícula de spin 1/2 sobre la cual actúa un campo magnético constante en dirección  $z$ , esto con el objetivo de encontrar

la dinámica de este sistema usando la versión hamiltoniana de la mecánica cuántica que introducimos en la sección 8.1.

Primero escribimos el espinor  $Z$  que representa el estado de la partícula en la base  $|+\rangle, |-\rangle$  como

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ x^2 + iy^2 \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Este estado, como vimos en (8.2), lo escribimos mediante este enfoque geométrico como un estado con cuatro componentes reales:

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Escribiendo el producto interno en el espacio de Hilbert en la forma (8.7) podemos determinar las matrices que representan a  $G$  y a  $\Omega$ .

Los vectores de la base están dados por

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}. \quad (8.20)$$

Calculando el producto interno entre las combinaciones de dichos vectores podemos determinar la métrica  $G$  y la forma simpléctica  $\omega$ , las cuales resultan ser

$$G = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Identificamos la 2-forma  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^4$  como

$$\Omega = 2(dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2). \quad (8.22)$$

El siguiente paso consiste en considerar el estado en espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^1 \sim S^2$  donde en realidad viven los estados de spin 1/2. Para ello primero consideramos un estado normalizado factorizable dado por

$$Z = e^{i\eta} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Obteniendo partes reales e imaginarias para encontrar la matriz  $\mathcal{Z}$  real identificamos

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \cos \eta \\ \sin(\theta/2) \cos(\eta + \phi) \\ \cos(\theta/2) \sin \eta \\ \sin(\theta/2) \sin(\eta + \phi) \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Al expresar las coordenadas  $(x^i, y^i)$  en términos de  $\alpha$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , obtenemos un encajamiento  $\sigma : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Calculando el pullback  $\sigma^*\Omega$ , tenemos

$$\begin{aligned} dx^1 &\rightarrow \frac{\partial x^0}{\partial x^i} dx^i = -\frac{1}{2} \sin(\theta/2) \cos \eta d\theta - \cos(\theta/2) \sin \eta d\eta \\ dx^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \cos(\theta/2) \cos(\eta + \phi) d\theta - \sin(\theta/2) \sin(\eta + \phi) d\phi - \sin(\theta/2) \sin(\eta + \phi) d\eta \\ dy^1 &\rightarrow -\frac{1}{2} \sin(\theta/2) \sin \eta d\theta + \cos(\theta/2) \cos \eta d\eta \\ dy^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \cos(\theta/2) \sin(\eta + \phi) d\theta + \sin(\theta/2) \cos(\eta + \phi) d\phi + \sin(\theta/2) \cos(\eta + \phi) d\eta. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Según la forma simpléctica  $\Omega$  que encontramos en (8.22), obtenemos

$$\Omega_{S^3} = \sigma^*\Omega = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (8.26)$$

de donde podemos cerciorarnos de que el pullback no contiene términos de  $d\eta$  ni sus componentes dependen de  $\eta$ , lo cual no es una coincidencia. Dado que  $\eta$  contiene información de una fase global, el hecho de que el pullback no dependa de esta coordenada garantiza que existe una 2-forma única  $\omega$  en  $\mathbb{C}P^1$  tal que  $\sigma^*\Omega = \phi^*\omega$ , donde  $\phi : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \sim S^2$  es la proyección  $(\theta, \phi, \eta) \mapsto (\Theta = \theta, \Phi = \phi)$ . Se tiene por lo tanto la forma simpléctica  $\omega$  definida en el espacio proyectivo como

$$\omega = \frac{1}{2} \sin \Theta d\Theta d\Phi. \quad (8.27)$$

Vamos a elegir como variable  $q$  (el equivalente a una variable de posición en el enfoque de mecánica clásica) una variable arbitraria y posteriormente encontrar su momento canónico asociado de forma que tengamos

$$\omega = dq \wedge dp. \quad (8.28)$$

En este caso, podemos elegir que dicha posición esté dada por la variable angular  $\Phi$ . Para encontrar el momento  $p$  asociado consideramos que

$$\omega = \frac{1}{2} \sin \Theta d\Theta \wedge d\Phi = -\frac{1}{2} \sin \Theta d\Phi \wedge d\Theta = dq \wedge dp = d\Phi \wedge dp, \quad (8.29)$$

entonces  $dp = -\frac{1}{2} \sin \Theta d\Theta$ , y por lo tanto

$$p = \frac{1}{2} \cos \Theta \quad (8.30)$$

Hasta ahora sólo hemos descrito el estado inicial y las variables canónicas. Ahora queremos estudiar el sistema considerando que sobre él actúa un campo magnético constante en dirección  $\hat{z}$ , con lo que tenemos  $\vec{B} = B_z \hat{z}$ . A partir de ello obtenemos un operador hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \omega S_z = \omega \frac{\sigma_z}{2} = \frac{\sigma_z}{2}, \quad (8.31)$$

esto último considerando  $\omega = 1$  por simplicidad.

La función hamiltoniana en el espacio proyectivo está definida como el valor esperado del operador hamiltoniano  $H(\Theta, \Phi) = Z^\dagger \hat{H} Z$ , con lo que se tiene

$$\begin{aligned} Z^\dagger \frac{\sigma_z}{2} Z &= (\cos(\Theta/2) \quad e^{-i\Phi} \sin(\Theta/2)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) \\ e^{i\Phi} \sin(\Theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos \Theta}{2} = p. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Por último vamos a resolver las ecuaciones de Hamilton dado que  $H = p$ . El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = 1, \quad (8.33)$$

lo que resulta en

$$q(t) = t \quad \rightarrow \quad \Phi = t, \quad p(t) = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \Theta = \text{cte}. \quad (8.34)$$

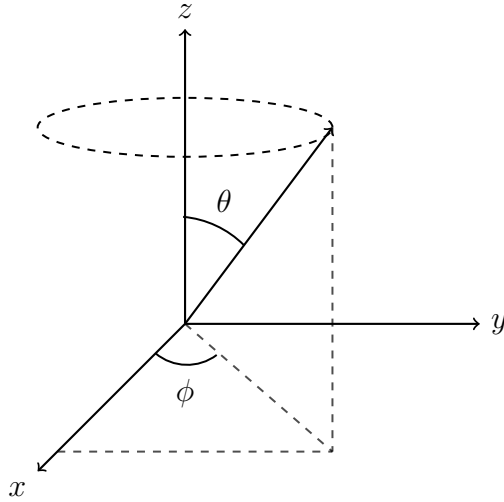


Figura 3: Eje de orientación de una partícula de spin 1/2 sometida a un campo magnético uniforme en dirección  $\hat{z}$ .

Podemos verificar que los resultados son consistentes con los conocidos al resolver la ecuación de Schrödinger para un sistema de spin 1/2 en un campo magnético constante, ya que el hecho de que  $\Theta$  sea constante mientras que  $\Phi$  cambia linealmente, indica que hay precesión alrededor del eje  $z$ .

## 9. Forma simpléctica en el espacio proyectivo

**Definición 9.** Se define el potencial de Kähler  $f$  como una función con valores reales sobre la variedad para la cual la forma simpléctica puede escribirse como [53]

$$\omega = i\partial\bar{\partial}f, \quad (9.1)$$

donde  $\partial = \frac{\partial}{\partial z}dz$  y  $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$ , siendo  $z_i$  las coordenadas complejas sobre la variedad.

En esta sección presentamos un potencial de Kähler apropiado para definir la forma simpléctica  $\omega$  sobre el espacio proyectivo. Comenzamos definiendo la función [30]

$$f_i = \sum_{k=0}^n t_k^{(i)} \bar{t}_k^{(i)}, \quad (9.2)$$

donde  $t_k^{(i)} = \frac{z_k}{z_i}$  son las coordenadas complejas en el espacio proyectivo del espacio de Hilbert. La función  $f_i$  es continua para cada abierto  $U_i$  del espacio proyectivo (con  $z_i \neq 0$ ).

En la intersección  $U_i \cap U_k$ , es fácil ver que se tienen las funciones de transición

$$f_i = f_k t_k^{(i)} \bar{t}_k^{(i)} = \sum_{m=0}^n t_m^{(k)} \bar{t}_m^{(k)} t_k^{(i)} \bar{t}_k^{(i)} = \sum_{m=0}^n \frac{z_m \bar{z}_m}{z_k \bar{z}_k} \frac{z_k \bar{z}_k}{z_i \bar{z}_i} = \sum_{m=0}^n \frac{z_m \bar{z}_m}{z_i \bar{z}_i}. \quad (9.3)$$

A partir de lo anterior, podemos cerciorarnos de que en la intersección  $U_i \cap U_j$  se cumple que

$$\partial \bar{\partial} \log f_i = \partial \bar{\partial} \log f_j. \quad (9.4)$$

Para verlo solamente hay que usar propiedades de los logaritmos y las funciones de transición en el traslape  $U_i \cap U_j$  que hemos encontrado:

$$\partial \bar{\partial} \log f_i = \partial \bar{\partial} \log(f_j t_j^{(i)} \bar{t}_j^{(i)}) = \partial \bar{\partial} \left[ \log f_j + \log t_j^{(i)} + \log \bar{t}_j^{(i)} \right] = \partial \bar{\partial} \log f_j. \quad (9.5)$$

Proponemos, para el abierto  $U_i$ , la 2-forma dada por [30]

$$\omega = i \partial \bar{\partial} (\log f_i). \quad (9.6)$$

Pasemos a hacer el cálculo explícitamente para obtener  $\omega$ . Primero se tiene

$$\bar{\partial} \log f_j = \sum_{k=0}^n \frac{t_k^{(j)} d\bar{t}_k^{(j)}}{f_j}, \quad (9.7)$$

y calculando la segunda derivada parcial obtenemos

$$\partial \bar{\partial} \log f_j = \frac{1}{f_j^2} \left[ f_j \left( \sum_{k=0}^n dt_k^{(j)} \wedge d\bar{t}_k^{(j)} \right) - \left( \sum_{k=0}^n \bar{t}_k^{(j)} dt_k^{(j)} \right) \wedge \left( \sum_{k=0}^n t_k^{(j)} d\bar{t}_k^{(j)} \right) \right]. \quad (9.8)$$

En particular, estaremos trabajando con la función definida en el abierto  $U_1$ :

$$f_1 = 1 + \sum_{m=1}^n t_m \bar{t}_m, \quad (9.9)$$

donde, para simplificar la notación, se considera  $t_m = t_m^{(1)}$ . Dicho esto, para el abierto  $U_1$  la forma simpléctica sobre el espacio proyectivo está dada por

$$\omega = i \left[ \frac{(1 + \sum_{k=1}^n t_k \bar{t}_k) (\sum_{k=1}^n dt_k \wedge d\bar{t}_k) - (\bar{t}_k dt_k) \wedge (t_k d\bar{t}_k)}{(1 + \sum_{k=1}^n t_k \bar{t}_k)^2} \right]. \quad (9.10)$$

Esta 2-forma  $\omega$  está en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}P^{n-1}$ , si queremos regresar al espacio complejo  $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$  debemos hacer el pullback correspondiente tomando en cuenta el mapeo

$$\varphi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left( t_2 = \frac{z_2}{z_1}, \dots, t_n = \frac{z_n}{z_1} \right), \quad (9.11)$$

de donde obtenemos

$$dt_k \rightarrow d\left(\frac{z_k}{z_1}\right) = \frac{dz_k}{z_1} - \frac{z_k}{z_1^2} dz_1 \quad (9.12)$$

y

$$\begin{aligned} dt_k \wedge d\bar{t}_l &\rightarrow \left( \frac{dz_k}{z_1} - \frac{z_k}{z_1^2} dz_1 \right) \wedge \left( \frac{d\bar{z}_l}{\bar{z}_1} - \frac{\bar{z}_l}{\bar{z}_1^2} d\bar{z}_1 \right) \\ &= \frac{dz_k \wedge d\bar{z}_l}{z_1 \bar{z}_1} - \frac{\bar{z}_l}{z_1 \bar{z}_1^2} dz_k \wedge d\bar{z}_1 - \frac{z_k}{z_1^2 \bar{z}_1} dz_1 \wedge d\bar{z}_l + \frac{z_k \bar{z}_l}{z_1^2 \bar{z}_1^2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Haciendo el pullback se obtiene

$$\Omega = i \left[ \frac{dZ \wedge d\bar{Z}}{Z\bar{Z}} - \frac{(Zd\bar{Z})(\bar{Z}dZ)}{(Z\bar{Z})^2} \right], \quad (9.14)$$

donde  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$  es la lista de coordenadas en el espacio de Hilbert, y restringiéndonos a estudiar estados normalizados en los que  $Z\bar{Z} = 1$ , obtenemos

$$d(Z\bar{Z}) = 0 = dZ\bar{Z} + Zd\bar{Z}, \quad (9.15)$$

por lo que solamente conservamos

$$\Omega = i dZ \wedge d\bar{Z}. \quad (9.16)$$

## 9.1. Compatibilidad Ashtekar-Schilling y Kobayashi-Nomizu

Como vimos en la sección 8.1, al descomponer el producto interno entre dos vectores en su parte real e imaginaria podemos definir de manera natural una estructura métrica y una estructura simpléctica sobre el espacio de Hilbert [2]. Veamos si dicha construcción es compatible con la basada en el potencial de Kähler (9.6) [30].

De (8.1) recordamos que el producto interno se descompone como (8.7):

$$\langle \Phi, \Psi \rangle \equiv \frac{1}{2}G(\Phi, \Psi) + \frac{i}{2}\Omega(\Phi, \Psi), \quad (9.17)$$

donde  $G$  representa la estructura métrica y  $\Omega$  representa la estructura simpléctica. De lo anterior, obtenemos que

$$\text{Im}(\langle \Phi, \Psi \rangle) = \frac{1}{2} \Omega(\Phi, \Psi). \quad (9.18)$$

A partir de la base canónica  $\frac{\partial}{\partial z_i}$  tenemos

$$\begin{aligned} \Psi &= \psi_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \psi_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \psi_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \psi_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \\ \Phi &= \phi_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \phi_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \phi_3 \frac{\partial}{\partial z_3}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Calculando  $\text{Im}(\langle \Phi, \Psi \rangle)$  se tiene

$$\begin{aligned} \text{Im}(\langle \Phi, \Psi \rangle) &= \frac{1}{2i} (\langle \Phi, \Psi \rangle - \langle \Phi, \Psi \rangle^*) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_i (\bar{\phi}_i \psi_i - \bar{\psi}_i \phi_i) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_i d\bar{z}_i \wedge dz_i(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2i} d\bar{Z} \wedge dZ(\Phi, \Psi), \end{aligned} \quad (9.20)$$

por lo tanto, utilizando (9.18) encontramos

$$\Omega = -id\bar{Z} \wedge dZ = idZ \wedge d\bar{Z}, \quad (9.21)$$

que coincide<sup>6</sup> con (9.16).

## 10. Métrica de Fubini-Study

La métrica de Fubini-Study es la estructura métrica definida en el espacio proyectivo del espacio de Hilbert. Se tiene el producto interno entre dos rayos  $[\phi]$  y  $[\psi]$  dado por [9]

$$\langle [\phi], [\psi] \rangle = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle}}, \quad (10.1)$$

---

<sup>6</sup>En realidad en [30] se usa otra normalización con un factor  $-4$  que no estamos contemplando. En esta tesis utilizamos la normalización propuesta en [2].



el cual es independiente de los estados  $|\phi\rangle$  y  $|\psi\rangle$  en los rayos  $[\phi]$  y  $[\psi]$  respectivamente. Consideramos estados normalizados precisamente porque estamos trabajando en el espacio proyectivo.

La distancia de Fubini-Study se define como

$$D_{FS}([\phi], [\psi]) = \arccos(\langle[\phi], [\psi]\rangle), \quad (10.2)$$

lo que matemáticamente se interpreta como el *ángulo* entre los dos rayos [24, 9].

## 11. Sistemas cuánticos compuestos

Dado que queremos introducir la descripción matemática del fenómeno de enredamiento de estados cuánticos, vamos a estudiar primero sistemas cuánticos compuestos (que son para los que se define el enredamiento).

**Definición 10.** *Un sistema cuántico compuesto es aquel que se descompone en dos o más subsistemas, siendo cada subsistema un sistema cuántico por sí mismo.*

El espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  asociado con un sistema compuesto por  $n$  subsistemas denominado *multipartita* está dado por el producto tensorial

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n \quad (11.1)$$

donde  $\mathcal{H}_i$  representa el espacio de Hilbert correspondiente al subsistema  $i$ .

A lo largo de las siguientes secciones estaremos trabajando con estados de dos subsistemas o estados *bipartitos* de la forma particular

$$|\Psi\rangle = \frac{\Gamma_{m\mu}}{\sqrt{N}} |m\rangle \otimes |\mu\rangle, \quad m, \mu = 1, \dots, N, \quad (11.2)$$

donde  $|m\rangle$  y  $|\mu\rangle$  son los elementos de la base de los subsistemas 1 y 2 respectivamente, y  $N$  es un factor de normalización dado por la dimensión de los subespacios. Puesto que suponemos que ambos subespacios tienen la misma dimensión, los coeficientes  $\Gamma_{m\mu}$  pueden verse como componentes de una matriz cuadrada  $\Gamma$ .

## 11.1. Producto tensorial de operadores

El álgebra matricial de operadores forma también un espacio de Hilbert denominado *espacio vectorial de Hilbert-Schmidt*. El producto tensorial entre un operador  $\hat{A}$  que actúa sobre  $\mathcal{H}_1$  (con base  $\{|m\rangle\}_{m=1}^{N_1}$ ) y  $\hat{B}$  que actúa sobre  $\mathcal{H}_2$  (con base  $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^{N_2}$ ), está definido a partir de su acción sobre los elementos de base como [9]

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})|m\rangle \otimes |\mu\rangle = \hat{A}|m\rangle \otimes \hat{B}|\mu\rangle. \quad (11.3)$$

Los elementos de matriz de un operador general  $\hat{Q}$ , que puede ser un producto tensorial o una combinación lineal de éstos actuando sobre un estado bipartito están dados por

$$\hat{Q}_{m\mu,n\nu} = (\langle m| \otimes \langle \mu|) \hat{Q} (|n\rangle \otimes |\nu\rangle). \quad (11.4)$$

## 12. Estados cuánticos puros y mixtos

En el formalismo de la mecánica cuántica se hace referencia a la noción de *ensembles* o conjuntos representativos para introducir la naturaleza estadística de los sistemas cuánticos. Estos conjuntos representativos son colecciones de sistemas físicos preparados de manera idéntica; es decir, en la que cada sistema se encuentra en un estado determinado  $|\psi\rangle$ , por ejemplo, un haz de átomos que han sido *filtrados* a través de un aparato de Stern-Gerlach [50], de manera que se dice que el haz ha sido *polarizado* y por tanto se trata de un *estado puro*.

Por otra parte, están los conjuntos representativos aleatorios, es decir, en los que no hay un estado determinado para cada sistema de la colección. Un ejemplo de esto es un haz de átomos *no polarizado*, es decir, un haz que no ha sido filtrado a través de un aparato de Stern-Gerlach. En dicho caso se espera que los átomos tengan orientaciones de spin aleatorias.

La idea de aleatoriedad en los conjuntos representativos es distinta a la noción indeterminista que tenemos en un estado cuántico de una sola partícula, el cual se expresa como una superposición cuántica de los estados de la base. Por ejemplo, un estado general de un sistema de spin 1/2 está dado por una combinación lineal en la base de  $S_z$  de los vectores  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (12.1)$$

por ello podríamos pensar que el comportamiento aleatorio al que nos referimos anteriormente, ya está contemplado en (12.1). No obstante, la ecuación anterior simplemente

caracteriza un estado cuyo valor promedio de orientación del spin en varias mediciones apunta hacia  $\hat{n}$ , con ángulo polar  $\theta$  y ángulo azimutal  $\phi$ , por lo que en ningún momento se refiere a un conjunto representativo con orientaciones aleatorias. Un ensamble aleatorio de este tipo se denomina *mezcla de estados* o *estado mixto*, y para describirlo se introduce la noción de *matriz u operador de densidad*.

## 12.1. Matriz de densidad

Para tratar con estados mixtos, se introducen los denominados *pesos de probabilidad*. Por ejemplo, en el caso que mencionábamos sobre el haz de átomos de spin  $1/2$  con orientaciones aleatorias, podemos decir que la mitad de dichos átomos tiene la orientación  $|+\rangle$  y la otra mitad tiene la orientación  $|-\rangle$ . La matriz u operador de densidad toma en consideración estos pesos de probabilidad y se define como

$$\rho = \sum_i w_i |\psi^{(i)}\rangle \langle \psi^{(i)}|, \quad (12.2)$$

donde  $|\psi^{(i)}\rangle$  son los estados puros que conforman la mezcla de estados y  $w_i$  son sus respectivos pesos probabilísticos y tienen valores reales no negativos. Por supuesto, al tratarse de pesos probabilísticos una condición de normalización que debe cumplirse es que

$$\sum_i w_i = 1. \quad (12.3)$$

La matriz de densidad cumple con dos propiedades fundamentales. La primera de ellas es que es hermítica, lo cual puede verse directamente de (12.2), ya que  $w_i$  son valores reales:

$$\rho^\dagger = \rho. \quad (12.4)$$

La segunda propiedad fundamental de la matriz de densidad es que tiene traza igual a 1. Para demostrar esto consideremos una base ortonormal general  $|a\rangle$

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho &= \text{Tr} \left( \sum_i w_i |\psi^{(i)}\rangle \langle \psi^{(i)}| \right) = \sum_{a'} \sum_i w_i \langle a' | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | a' \rangle \\ &= \sum_{a'} \sum_i w_i \langle \psi^{(i)} | a' \rangle \langle a' | \psi^{(i)} \rangle = \sum_i w_i \langle \psi^{(i)} | \psi^{(i)} \rangle = 1. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Como sabemos, una parte esencial al estudiar sistemas cuánticos es calcular valores esperados de observables. Veamos cómo, mediante la matriz de densidad, es posible encontrar el valor esperado de un operador  $\hat{A}$ , esto partiendo también de la base  $|a\rangle$ :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle &= \sum_{a'} \sum_{a''} \sum_i w_i \langle \psi^{(i)} | a' \rangle \langle a' | \hat{A} | a'' \rangle \langle a'' | \psi^{(i)} \rangle \\
&= \sum_{a'} \sum_{a''} \sum_i w_i \langle a'' | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | a' \rangle \langle a' | \hat{A} | a'' \rangle \\
&= \sum_{a'} \sum_{a''} \langle a'' | \rho | a' \rangle \langle a' | \hat{A} | a'' \rangle \\
&= \sum_{a''} \langle a'' | \rho \hat{A} | a'' \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{A}).
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Por último, destacamos que para los estados puros es evidente que

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{12.7}$$

es decir,  $\rho$  se reduce a un operador de proyección, y por lo tanto, en dicho caso se tiene

$$\rho^2 = \rho. \tag{12.8}$$

### 13. Representación de Majorana para estados de spin

Mediante la representación de Majorana podemos estudiar los estados de spin  $s$  que viven en el espacio proyectivo del espacio de Hilbert  $\mathbb{P}(\mathcal{H}_s)$  como un conjunto de  $2s$  puntos (denominados *estrellas de Majorana*) sobre la esfera unitaria, definiendo así una *constelación de Majorana* para cada estado de spin  $s$  [37, 14, 24].

Dado un estado  $|\psi\rangle$  de spin  $s$  expresado en la base de los vectores propios de  $\hat{S}_z$  como

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle, \tag{13.1}$$

se define su polinomio asociado de Majorana como

$$P_{|\psi\rangle}(\zeta) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} c_m \zeta^{s+m}, \tag{13.2}$$

donde  $\zeta$  es una variable auxiliar. Este polinomio es de grado  $2s$  y sus  $2s$  raíces pueden mapearse mediante su proyección estereográfica desde el polo sur a  $2s$  puntos en la esfera, es decir, la constelación de Majorana del estado. Cabe mencionar que si  $c_m = 0$  para

$m = s, s - 1, \dots, s - k$ , entonces se tendrá  $\zeta = \infty$  como raíz  $k + 1$  veces, así que tendremos  $k + 1$  estrellas de Majorana en el polo sur de la esfera.

La asociación entre estados y constelaciones resulta ser uno a uno, por lo que dada una constelación sobre la esfera podemos recuperar el estado que representa. Si tenemos un conjunto de  $2s$  puntos sobre la esfera (que pueden ser degenerados), considerando la proyección estereográfica inversa encontramos las raíces  $\zeta_i$  y construimos el polinomio de Majorana  $P_{|\psi\rangle} = (\zeta - \zeta_1) \dots (\zeta - \zeta_{2s})$ , con lo que podemos expandir los términos y encontrar los coeficientes  $c_m$  correspondientes.

Ya que asociamos a un estado  $|\psi\rangle$  de spin  $s$  el conjunto de estrellas  $\{n_i\}_{i=1}^{2s}$ , podemos denotar a dicho estado como  $|\psi\rangle = |n_1, \dots, n_{2s}\rangle$ . Es importante mencionar que no existe un orden específico para las estrellas, y que la representación de Majorana está construida de tal forma que al aplicar operadores de rotación  $D(R)$  sobre un estado  $|\psi\rangle$ , la constelación de Majorana del estado rotado será una rotación de la constelación original [14].

Es bien sabido que matemáticamente el espacio de estados de una partícula de spin  $s$  es equivalente al espacio de estados dados por el producto tensorial totalmente simetrizado (bajo el intercambio de cualquier par de partículas) de  $2s$  estados de spin  $1/2$ , es decir, que se cumple

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |n_1, \dots, n_{2s}\rangle \\ &= \frac{1}{A_\psi} (|\hat{n}_{\sigma_1}\rangle \odot |\hat{n}_{\sigma_2}\rangle \odot \dots \odot |\hat{n}_{\sigma_{2s}}\rangle), \end{aligned} \quad (13.3)$$

donde el símbolo  $\odot$  se refiere a que se está calculando el producto tensorial simetrizado (la suma de todas las permutaciones),  $A_\psi$  es un factor de normalización y  $\hat{n}_{\sigma_i}$  es un estado de spin  $1/2$  de la forma

$$|\hat{n}_{\sigma_i}\rangle = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) e^{i\phi_i} |-\rangle, \quad (13.4)$$

donde  $(\theta, \phi)$  representan a las coordenadas esféricas asociadas a  $\hat{n}$ . De esta manera, decimos que las estrellas de Majorana del estado  $|\psi\rangle$  es el conjunto de vectores unitarios  $\hat{n}_{\sigma_i}$  que aparecen en la ecuación (13.3).

**Parte III**  
**Estados enredados**

Los sistemas cuánticos poseen propiedades que no tienen contraparte clásica, tales como la superposición de estados cuánticos y el tunelaje. Por otra parte, existen otros efectos de este tipo que se manifiestan solamente cuando se tiene un sistema cuántico compuesto por varios subsistemas. En este caso la correlación de dichos subsistemas posee un papel importante, especialmente porque se encuentran sistemas que están fuertemente correlacionados o *enredados*, los cuales sugieren la existencia de una acción remota a distancia. En 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen formularon la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen [17], en la que exponen este problema de acción a distancia. A partir de ello, el estudio de los estados enredados se ha convertido en un área fundamental de la mecánica cuántica.

En esta parte de la tesis se introducen los conceptos básicos sobre enredamiento cuántico, esto para trabajar posteriormente con sistemas bipartitos enredados.

## 14. Estados factorizables y estados enredados

Como mencionamos en la sección 11, el espacio de Hilbert de un sistema multipartito está dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert asociados a cada subsistema. Como ya hemos mencionado, nos vamos a concentrar en sistemas bipartita en los que el espacio de Hilbert está dado por un producto tensorial de la forma  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

### 14.1. Separabilidad en estados puros

Consideramos un estado bipartito en el que cada subsistema se encuentra inicialmente en un estado puro  $|\psi_i\rangle$ ,  $i = 1, 2$ , por lo tanto se tiene

$$|\Psi_f\rangle = |\psi_m\rangle \otimes |\psi_\mu\rangle. \quad (14.1)$$

Al hacer una medición local de un observable  $\hat{A} \otimes \mathbb{I}$ , es decir, una medición donde  $\hat{A}$  actúa sobre el primer subsistema y el operador identidad  $\mathbb{I}$  sobre el segundo subsistema, el valor esperado es:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{A} \otimes \mathbb{I} | \Psi_f \rangle &= (\langle \psi_m | \otimes \langle \psi_\mu |) (\hat{A} \otimes \mathbb{I}) (|\psi_m\rangle \otimes |\psi_\mu\rangle) \\ &= \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_m \rangle \langle \psi_\mu | \mathbb{I} | \psi_\mu \rangle = \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_m \rangle, \end{aligned} \quad (14.2)$$

mientras que mediante una medición local de un observable  $\mathbb{I} \otimes \hat{B}$ , es decir, una medición local en el segundo subsistema, análogamente obtenemos

$$\langle \Psi_f | \mathbb{I} \otimes \hat{B} | \Psi_f \rangle = \langle \psi_\mu | \hat{B} | \psi_\mu \rangle. \quad (14.3)$$

Entonces, para un estado de la forma (14.1), decimos que los valores esperados de mediciones locales no están correlacionados, dependen exclusivamente del estado del subsistema en el que se hace la medición [41].

**Definición 11.** *Los estados puros que pueden escribirse de la forma (14.1), es decir, como producto tensorial de estados puros, se denominan separables o factorizables y se caracterizan porque los resultados de las mediciones sobre los subsistemas no están correlacionados.*

Tomemos ahora un estado que está dado por una superposición de estados puros:

$$|\Psi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_m\rangle \otimes |\psi_\mu\rangle + |\phi_n\rangle \otimes |\phi_\nu\rangle). \quad (14.4)$$

En dicho caso, al hacer una medición local de un observable  $\hat{A} \otimes I$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Psi_e | \hat{A} \otimes \mathbb{I} | \Psi_e \rangle &= (\bar{\Psi}_e)_{mn} (\hat{A} \otimes \mathbb{I})_{mn,kl} (\Psi_e)_{kl} \\ &= (\bar{\Psi}_e)_{mn} \hat{A}_{mk} \mathbb{I}_{nl} (\Psi_e)_{kl} \\ &= (\bar{\Psi}_e)_{mn} \hat{A}_{mk} (\Psi_e)_{kn} \\ &= \hat{A}_{mk} (\rho_1)_{km} = \text{Tr}(\hat{A} \rho_1), \end{aligned} \quad (14.5)$$

siendo  $\rho = |\Psi_e\rangle\langle\Psi_e|$ ,  $\text{Tr}_i$  la traza parcial sobre el subsistema  $i$  y  $\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho$ .

**Definición 12.** *Los elementos de matriz de la matriz de densidad reducida  $\rho_1 \equiv \text{Tr}_2 \rho$  y  $\rho_2 \equiv \text{Tr}_1 \rho$  están dados respectivamente por*

$$(\rho_1)_{mn} = \sum_{\mu=1}^{N_2} (\rho)_{m\mu, n\mu}, \quad (\rho_2)_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{N_1} (\rho)_{m\mu, m\nu}. \quad (14.6)$$

Dado que (14.5) es válida para todo operador  $\hat{A}$ , basándonos en (12.6) concluimos que  $\rho_1$ , representa la matriz de densidad correspondiente al primer subsistema<sup>7</sup>, y similarmente,  $\rho_2 = \text{Tr}_1 \rho$  representa al segundo subsistema<sup>8</sup>. Sin embargo, el estado del sistema completo no está dado por el producto tensorial de los estados dados por las matrices reducidas:

<sup>7</sup>Cuando trabajamos con estados enredados, no existe un estado definido para cada subsistema.

<sup>8</sup>Para ver cómo son estos cálculos operacionalmente a partir de una base, consultar Apéndice C



$$\rho \neq \rho_1 \otimes \rho_2, \quad (14.7)$$

es decir, las matrices de densidad reducidas para hacer mediciones locales dependen del sistema compuesto, no solamente del subsistema sobre el que se hace la medición. Por lo tanto, se dice que las mediciones realizadas en cada subsistema están correlacionadas. Cabe mencionar que esto no implica de ninguna manera que sea posible transmitir información cuántica de manera superlumínica, esto debido al denominado *teorema de la no-comunicación* [46].

**Definición 13.** *Si no existen estados locales  $|\psi_m\rangle \in \mathcal{H}_1$  y  $|\psi_\mu\rangle \in \mathcal{H}_2$ , tal que  $|\Psi\rangle = |\psi_m\rangle \otimes |\psi_\mu\rangle$ , es decir, tal que el estado sea separable o factorizable, entonces  $|\Psi\rangle$  es un estado enredado.*

## 14.2. Separabilidad en estados mixtos

De manera análoga a la definición de separabilidad en estados puros se tiene

**Definición 14.** *Los estados mixtos factorizables son aquellos para los que*

$$\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}, \quad (14.8)$$

donde  $\rho^{(i)}$  es la matriz de densidad del subsistema  $i$ , y dicha matriz toma la forma más general (12.2).

Una suma convexa de estados mixtos factorizables de la forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}, \quad p_i > 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (14.9)$$

es también un estado mixto factorizable.

**Definición 15.** *Si no existen estados locales  $\rho_i^{(1)}$  y  $\rho_i^{(2)}$  con pesos no negativos  $p_i$  tal que  $\rho$  pueda expresarse como una suma convexa de la forma  $\rho = \sum_i p_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}$ , entonces  $\rho$  es un estado mixto enredado.*

## 15. Criterios de separabilidad en estados puros

Dadas las definiciones de estados separables y enredados, podría parecer una tarea trivial saber si un estado está enredado o no, sin embargo, un estado puede parecer enredado en cierta base y aún así no serlo. Por ejemplo, consideremos el estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|00\rangle + 2|01\rangle + |10\rangle + 2|11\rangle). \quad (15.1)$$

Veamos ahora si podemos expresar el estado de la forma

$$|\Psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle), \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad (15.2)$$

donde deben cumplirse las condiciones de normalización  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  y  $|c|^2 + |d|^2 = 1$ . Para ello, comparando (15.1) con (15.2) llegamos al sistema de ecuaciones

$$ac = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad ad = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad bc = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad bd = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad (15.3)$$

el cual tiene solución dada por

$$|\Psi\rangle = \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left( \frac{|0\rangle + 2|1\rangle}{\sqrt{5}} \right). \quad (15.4)$$

Concluimos que el estado (15.1) es factorizable. Otro ejemplo es el estado

$$|\Psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (15.5)$$

el cual quisiéramos expresar de la forma (15.2). En dicho caso, el sistema de ecuaciones que obtenemos al comparar (15.5) con (15.2) está dado por

$$ac = 0, \quad ad = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad bc = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad bd = 0, \quad (15.6)$$

que es un sistema de ecuaciones sin solución, por lo tanto se concluye que este estado es enredado.

A partir de lo anterior surge la pregunta natural de si existe un criterio simple que nos permita identificar si un estado es separable o enredado. Como hemos visto, la confusión surge con los estados aparentemente enredados, ya que está la opción de que verdaderamente sean estados enredados o la segunda opción de que sean estados factorizables pero no estén expresados en una base que nos permita verlo claramente. Teniendo en mente este problema surge la descomposición de Schmidt.

## 15.1. Descomposición de Schmidt

Para estados puros, es posible encontrar una base que refleja las propiedades de enredamiento del estado, lo cual se hace a partir de la denominada *descomposición de Schmidt*.

Dadas dos bases  $\{|\varphi_m\rangle\}$  y  $\{|\phi_\mu\rangle\}$  en los espacios  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente, se tiene un estado bipartito general expresado en dicha base como

$$|\Psi\rangle = \sum_{m\mu} d_{m\mu} |\varphi_m\rangle \otimes |\phi_\mu\rangle, \quad (15.7)$$

donde los coeficientes  $d_{m\mu}$  se definen como

$$d_{m\mu} = \langle \varphi_m | \otimes \langle \phi_\mu | \Psi \rangle. \quad (15.8)$$

Si hacemos un cambio de base de la forma  $|\tilde{\varphi}_m\rangle = \mathcal{U}|\varphi_m\rangle$ ,  $|\tilde{\phi}_\mu\rangle = \mathcal{V}|\phi_\mu\rangle$ , donde  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son transformaciones unitarias, se tienen los coeficientes nuevos dados por

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{m\mu} &= \left( \langle \tilde{\varphi}_m | \otimes \langle \tilde{\phi}_\mu | \right) \Psi = \left( \langle \varphi_m | \mathcal{U}^\dagger \otimes \langle \phi_\mu | \mathcal{V}^\dagger \right) |\Psi\rangle \\ &= \sum_{n,\nu} \langle \varphi_m | \mathcal{U}^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \phi_\mu | \mathcal{V}^\dagger | \phi_\nu \rangle \langle \varphi_n | \otimes \langle \phi_\nu | \Psi \rangle \\ &= \sum_{n,\nu} u_{mn} v_{\nu\mu} d_{n\nu} = (udv)_{m\mu}, \end{aligned} \quad (15.9)$$

esto definiendo los elementos de matriz  $u_{m\mu} = \langle \varphi_m | \mathcal{U}^\dagger | \varphi_\mu \rangle$  y  $v_{n\nu} = \langle \phi_\nu | \mathcal{V}^\dagger | \phi_n \rangle$ .

Para cualquier matriz compleja  $d$  podemos encontrar transformaciones unitarias  $u$  y  $v$  tal que  $udv$  sea una matriz diagonal, cuyas entradas (reales y no negativas) se denominan *valores singulares* de la matriz  $d$  y se representan como  $S_j$ . Entonces, para el caso de estados puros, siempre es posible encontrar la descomposición de Schmidt, es decir, las bases ortonormales  $\{|\varphi_j^S\rangle_{j=1}^{N_1}\}$  y  $\{|\phi_j^S\rangle_{j=1}^{N_2}\}$  en los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente tales que

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\min(N_1, N_2)} \sqrt{\lambda_j} |\varphi_j^S\rangle \otimes |\phi_j^S\rangle, \quad (15.10)$$

donde los valores  $\lambda_j = S_j^2$  son conocidos como coeficientes de Schmidt y la suma sobre  $j$  está limitada hasta la dimensión del subsistema más pequeño.

Los coeficientes de Schmidt son siempre únicos [41], por lo que la información de enredamiento de un estado puro está contenida en ellos. El estado  $|\Psi\rangle$  será separable si solamente tiene un coeficiente de Schmidt distinto de cero. Por otro lado, si al menos dos coeficientes de Schmidt son distintos de cero, el estado  $|\Psi\rangle$  será enredado.

**Proposición 5.** *Los coeficientes de Schmidt de un estado bipartito  $|\Psi\rangle$  están dados por los valores propios de las matrices de densidad reducidas  $\rho_1$  y  $\rho_2$ .*

**Demostración** Para demostrar lo anterior basta con tomar el estado  $|\Psi\rangle$  expresado en su base de Schmidt tal como en la ecuación (15.10) y calcular su traza parcial. Hagámoslo para el caso de  $\rho_1$ :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \text{Tr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= \text{Tr}_2 \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\varphi_i^S\rangle\langle\varphi_j^S| \otimes |\phi_i^S\rangle\langle\phi_j^S| = \sum_i \lambda_i |\varphi_i^S\rangle\langle\varphi_i^S|,\end{aligned}\quad (15.11)$$

es decir, los valores propios de  $\rho_1$  están dados por los coeficientes de Schmidt  $S_i^2$ .

Para  $\rho_2$  el procedimiento es completamente análogo, con lo que también podemos ver que los valores propios distintos de cero de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son iguales. ■

Así, se tiene una manera para encontrar los coeficientes de Schmidt de cualquier estado puro  $|\Psi\rangle$ , y además se sabe que la información sobre el entrelazamiento del estado está directamente relacionada con el grado de pureza de la matriz de densidad reducida (cualquiera de las dos). La traza de  $\rho_r$  (donde  $r$  puede referirse a cualquiera de los dos subsistemas) debe ser igual a 1 para estados normalizados. Se concluye entonces que

- Si  $\text{Tr}\rho_r^2 = 1$ ,  $\rho_r$  es pura y el estado completo es factorizable.
- Si  $\text{Tr}\rho_r^2 < 1$ ,  $\rho_r$  es mixta y el estado completo es enredado.

Algo importante a considerar es el hecho de que encontrar los coeficientes de Schmidt mediante trazas parciales funciona exclusivamente para estados puros bipartitos. El problema de enredamiento para sistemas conformados por más de dos subsistemas o para estados mixtos es mucho más complejo [28, 47] y aunque hay varios métodos, todos con ventajas y desventajas, no hay un método global que permita estudiar el enredamiento de manera estándar en estos sistemas, por lo que se considera un problema abierto.

## 16. Grado de enredamiento

Ya que sabemos cómo identificar si un estado cuántico es o no enredado, surge la pregunta natural acerca de qué tan enredado es dicho estado y cómo podemos medir ese enredamiento.

No hay una medida de enredamiento única [52, 54]. Aquí mencionaremos dos medidas que describen el enredamiento para estados puros. La primera medida se basa en la entropía de Shannon [9].

**Definición 16.** Sea  $P$  una distribución de probabilidad descrita por un vector  $\vec{p}$  con  $N$  componentes  $p_i$  que cumplen con  $p_i \geq 0$  y  $\sum_i p_i = 1$ , la entropía de Shannon asociada a dicha distribución se define como

$$S(P) = -k \sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad (16.1)$$

donde  $k$  es un número positivo que usualmente se fija como  $k = 1$ .

La entropía de Shannon se interpreta como una medida de la incertidumbre acerca del resultado que puede obtenerse de un experimento que sigue cierta distribución de probabilidad, o también como la cantidad de información que se requiere para especificar dicho resultado. Si el resultado que se obtendrá se conoce con total certeza (cuando solamente un componente  $p_i = 1$  y todos los demás son cero), entonces la entropía de Shannon es igual a cero, porque el resultado no nos arroja ninguna información, por otro lado,  $S(P)$  toma el máximo valor  $k \log N$  cuando todos los componentes  $p_i$  son iguales a  $1/N$ .

La medida de enredamiento basada en la entropía de Shannon consiste en tomar los valores propios de la matriz de densidad reducida y considerarlos como los componentes de una distribución de probabilidad. Por lo tanto, cuando la matriz de densidad reducida es proporcional a la identidad, el estado se considera máximamente enredado.

Por otra parte se tiene la medida geométrica de enredamiento [56, 13, 3, 35, 29]:

**Definición 17.** La medida geométrica de enredamiento se define como la distancia de acuerdo con la métrica natural en el espacio de estados (Fubini-Study) entre el estado  $[\psi]$  que se quiere estudiar y el estado factorizable más cercano. Siendo  $\mathbb{P}_s$  el conjunto de todos los estados separables se tiene

$$E([\psi]) = \min_{[\phi] \in \mathbb{P}_s} D_{FS}([\phi], [\psi]), \quad (16.2)$$

que evidentemente es igual a cero para estados factorizables.

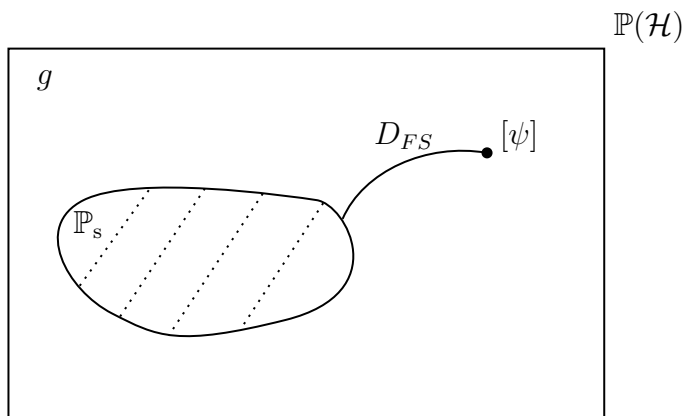


Figura 4: Esquema sobre la medida geométrica de enredamiento

## Parte IV

# Enredamiento y estados bipartitos

En esta parte de la tesis vamos a abordar el problema de enredamiento en estados bipartitos. Ya en la tercera parte dedicada a enredamiento mencionamos que hasta ahora solamente se conoce una forma estándar de estudiar el enredamiento para estados puros bipartitos, por lo que por ahora nos restringiremos a dicho caso. Para estudiar estos estados, vamos a introducir un sistema de coordenadas basado en la descomposición polar de la matriz de coeficientes (Véase el apéndice A).

## 17. Matriz de densidad en términos de la descomposición polar

Consideremos un estado bipartito (11.2) que describe un sistema donde ambos subsistemas tienen la misma dimensión

$$|\Psi\rangle = \frac{\Gamma_{m\mu}}{\sqrt{N}} |m\rangle \otimes |\mu\rangle, \quad 1 \leq m, \mu \leq N. \quad (17.1)$$

Como mencionamos en la sección 11, dado que los subsistemas tienen la misma dimensión, los coeficientes  $\Gamma_{ij}$  pueden verse como elementos de una matriz cuadrada de números complejos:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \dots & \Gamma_{NN} \end{pmatrix}. \quad (17.2)$$

Los estados de la forma (17.1) se describen en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^N \otimes \mathcal{H}^N$ , por lo tanto estos estados viven en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^{N^2-1}$ , cuya dimensión real es  $2(N^2 - 1)$ .

Para describir al sistema recurrimos a la matriz de densidad

$$\begin{aligned} \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| &= \frac{1}{N} \sum_{m,\mu,n,\nu} (\Gamma_{m\mu} |m\rangle \otimes |\mu\rangle) (\Gamma_{n\nu}^* \langle n| \otimes \langle \nu|) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m,\mu,n,\nu} (\Gamma_{m\mu} |m\rangle \otimes |\mu\rangle) (\Gamma_{\nu n}^\dagger \langle n| \otimes \langle \nu|), \end{aligned} \quad (17.3)$$

por lo tanto se tiene  $\rho_{m\mu,n\nu} = \frac{1}{N} \Gamma_{m\mu} \Gamma_{\nu n}^\dagger$ .

Para encontrar el grado de enredamiento del sistema, tal como se describió en la sección 16 encontraremos la traza parcial de la matriz de densidad para posteriormente tratar a sus valores propios como una distribución de probabilidad:



$$\begin{aligned}
(\rho_1)_{ij} &= (\text{Tr}_2 \rho)_{ij} = \langle i, \sigma | \rho | j, \sigma \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m, \mu, n, \nu, \sigma} \Gamma_{m\mu} \Gamma_{\nu n}^\dagger \langle i, \sigma | m, \mu \rangle \langle n, \nu | j, \sigma \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m, \mu, n, \nu, \sigma} \Gamma_{m\mu} \Gamma_{\nu n}^\dagger \delta_{im} \delta_{\sigma\mu} \delta_{nj} \delta_{\nu\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma} \Gamma_{i\sigma} \Gamma_{\sigma j}^\dagger = \frac{1}{N} (\Gamma \Gamma^\dagger)_{ij}.
\end{aligned} \tag{17.4}$$

Por lo tanto se tiene

$$\rho_1 = \sum_{i,j} (\rho_1)_{ij} |i\rangle \langle j| = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k} \Gamma_{ik} \Gamma_{kj}^\dagger |i\rangle \langle j| \tag{17.5}$$

Partiendo desde un enfoque que considera una representación matricial, la matriz de densidad reducida está dada por el producto de matrices

$$\rho_1 = \frac{1}{N} \Gamma \Gamma^\dagger. \tag{17.6}$$

Expresando  $\Gamma$  mediante su descomposición polar como el producto de una matriz positiva definida  $P$  y una matriz unitaria  $U$ , obtenemos

$$\rho_1 = \frac{1}{N} (PU)(PU)^\dagger = \frac{1}{N} P U U^\dagger P^\dagger = \frac{1}{N} P U U^{-1} P = \frac{1}{N} P^2. \tag{17.7}$$

## 17.1. Espacio de estados máximamente enredados

El espacio de estados máximamente enredados posee una propiedad que lo hace muy interesante. Para introducirla nos estaremos basando en la publicación [6] de Ingemar Bengtsson. Lo primero que haremos será ver en qué espacio viven los estados máximamente enredados y cuál es su dimensión.

Como se mencionó en la sección 16, si queremos estudiar los estados máximamente enredados necesitamos que  $\rho_1$  sea proporcional a la identidad [7], por lo tanto decimos, partiendo de (17.7), que  $P = \mathbb{I}$ , y por ello, la condición para tener un estado bipartito máximamente enredado es que  $\Gamma$  sea una matriz unitaria, con lo que, ya considerando el factor de normalización  $N$ , obtenemos

$$\rho_1 = \frac{I}{N} \quad \rightarrow \quad \Gamma \in U(N). \tag{17.8}$$

Esto puede verse incluso antes de escribir  $\Gamma$  en términos de su descomposición polar. Como hemos mencionado, para tener un estado cuántico máximamente enredado, todos los valores propios de  $\rho_1$  deben ser iguales, es decir,  $\Gamma\Gamma^\dagger = \mathbb{I}$ , lo cual solamente se logra si  $\Gamma \in U(N)$ .

Ya hemos concluido que la matriz de coeficientes  $\Gamma$  para un estados máximamente enredado es unitaria. Por otra parte, el determinante de una matriz unitaria está dado por una fase. Dado que la fase global del sistema es irrelevante, y tomando en cuenta las propiedades del determinante, siempre podemos multiplicar  $\Gamma$  por una fase global de manera que el determinante de  $U$  sea igual a 1, por lo que

$$\Gamma \in SU(N)/Z_N, \quad (17.9)$$

donde  $Z_N$  es el grupo cíclico [43], y aparece porque los estados que difieren por una  $n$ -ésima raíz de la identidad (que es una fase) son equivalentes. A partir de (17.9), podemos concluir que los espacios máximamente enredados viven en un espacio cuya dimensión es  $\dim SU(N) = N^2 - 1$ , justo la mitad de la dimensión del espacio total de estados. Esta es la primera característica del espacio de estados máximamente enredados que necesitamos para enunciar el resultado de Ingemar Bengtsson. El siguiente paso consiste en estudiar la forma simpléctica y restringirla a dicha subvariedad de estados máximamente enredados.

## 18. Forma simpléctica en términos de la descomposición polar

Consideramos la forma simpléctica (9.16), y un estado de la forma (17.1), de forma que

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= i \, dZ \wedge d\bar{Z} = \frac{i}{N} \sum_{i,j} d\Gamma_{ij} \wedge d\bar{\Gamma}_{ij} = \frac{i}{N} \sum_{i,j} d\Gamma_{ij} \wedge d\Gamma_{ji}^\dagger \\ &= \frac{i}{N} \operatorname{Tr}(d\Gamma \wedge d\Gamma^\dagger) = \frac{i}{N} \operatorname{Tr} d(\Gamma d\Gamma^\dagger) \\ &= \frac{i}{N} \operatorname{Tr} d [d(\Gamma\Gamma^\dagger) - (d\Gamma)\Gamma^\dagger] \\ &= -\frac{i}{N} d \operatorname{Tr} [(d\Gamma)\Gamma^\dagger], \end{aligned} \quad (18.1)$$

donde  $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$  es la lista de coeficientes del estado.

A partir la descomposición polar presentada en el apéndice A, escribimos  $\Gamma = PU$ , donde  $P$  es una matriz definida positiva y hermítica y  $U$  es una matriz unitaria, así que obtenemos

$$\begin{aligned}
\Omega &= -\frac{i}{N} \, d \operatorname{Tr} [d(PU)U^{-1}P] = -\frac{i}{N} \, d \operatorname{Tr} [(dPU + PdU)U^{-1}P] \\
&= -\frac{i}{N} \, d \operatorname{Tr} [dPP + PdUU^{-1}P],
\end{aligned} \tag{18.2}$$

Dado que la traza es cíclica y que  $dP^2 = dPP + PdP$ , obtenemos

$$\Omega = -\frac{i}{N} \, d \operatorname{Tr} \left[ \frac{dP^2}{2} + P^2 dU \cdot U^{-1} \right] = \frac{1}{N} \, d \operatorname{Tr} [P^2 \Lambda], \tag{18.3}$$

donde  $\Lambda = -i \, dU \cdot U^{-1}$ .

Por último, de la sección 17 sabemos que la matriz de densidad reducida (tomando su traza parcial), está dada por  $\rho_1 = P^2/N$ . Sustituyendo esto en (18.3) obtenemos

$$\Omega = \frac{1}{N} \, d \operatorname{Tr} [\rho_1 N \Lambda] = d \operatorname{Tr} [\rho_1 \Lambda]. \tag{18.4}$$

## 18.1. Forma simpléctica sobre la subvariedad de estados máximamente enredados

Trabajemos específicamente con la subvariedad de estados máximamente enredados. En dicho caso, la matriz de densidad reducida  $\rho_1$  es de la forma (17.8), por lo cual  $d\rho_1 = 0$  y la forma simpléctica  $\Omega$  se reduce a

$$\Omega_{\text{me}} = d \operatorname{Tr} \Lambda, \tag{18.5}$$

donde el subíndice me se refiere a que se trata de la restricción de  $\Omega$  sobre la subvariedad de estados máximamente enredados.

El siguiente paso es identificar qué es  $\Lambda$  y dónde vive para poder calcular su traza. Como definimos previamente,  $\Lambda = -i \, dU \cdot U^{-1}$ , entonces consideremos a  $U$  como un elemento de  $SU$  (restringimos el valor del determinante a 1), y siendo  $h = (x^1, \dots, x^{N^2-1}) \in SU(N)$ , y  $\{T_1, \dots, T_{N^2-1}\}$  la base del álgebra  $\mathfrak{su}(N)$ , obtenemos [25]

$$U = \exp \left[ \sum_{i=1}^{N^2-1} x^i T_i \right] = \exp [X] \quad \rightarrow \quad dU = \sum_{j=1}^{N^2-1} Y_j e^X dx^j, \tag{18.6}$$

donde

$$X = \sum_{i=1}^{N^2-1} x^i T_i, \quad Y_j = \left( \frac{\exp(\text{ad}_X) - 1}{\text{ad}_X} \right) T_j, \quad (18.7)$$

es decir,  $Y_j$  es un elemento del álgebra  $\mathfrak{su}(N)$ . Entonces, se tiene

$$dU \cdot U^{-1} = \sum_{j=1}^{N^2-1} Y_j dx^j, \quad (18.8)$$

que es un elemento del álgebra  $\mathfrak{su}(N)$  cuyas entradas son 1-formas (por lo tanto también lo es  $\Lambda$ ). Como sabemos [25], dichos elementos tienen traza igual a cero (ya que el determinante de los elementos del grupo es igual a 1). Por lo tanto  $\text{Tr}\Lambda = 0$  y

$$\Omega_{\text{me}} = 0. \quad (18.9)$$

Esta es la segunda característica que cumple la subvariedad de estados máximamente enredados, y aunada a que la dimensión del espacio total de estados bipartitos es el doble de la dimensión de la subvariedad de estados máximamente enredados, significa que el espacio de estados máximamente enredados es una subvariedad lagrangiana  $L$  del espacio total de estados cuánticos puros bipartitos, la cual puede verse físicamente como un espacio de configuración.

**Definición 18.** *Sea  $(M, \Omega)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$ . Una subvariedad  $Y$  de  $M$  es una **subvariedad lagrangiana** sí y sólo sí, considerando el mapeo  $i : Y \hookrightarrow M$ , se cumple que  $i^*\Omega = 0$  y  $\dim Y = \frac{1}{2}\dim M$  [53].*

## 19. Conjunto de coordenadas canónicas

El objetivo es encontrar un conjunto de coordenadas canónicas  $(p_i, q^i)$  tal que la forma simpléctica  $\Omega$  se vea como (2.1). Para ello, considerando la descomposición polar de  $\Gamma$  a la que ya hemos recurrido tenemos

$$\Gamma = PU. \quad (19.1)$$

Sabemos que  $P$  es una matriz hermítica y semidefinida positiva. Como los generadores de  $SU(N)$  son matrices hermíticas<sup>9</sup> y sin traza, podemos expresar  $P$  como la combinación lineal

$$P = x^0 I + \sum_{i=1}^{N^2-1} x^i T_i, \quad (19.2)$$

donde  $T_i$  son los generadores de  $SU(N)$  y consideramos aparte que  $P$  puede tener una componente en la identidad. De hecho,  $P$  debe tener una componente distinta de cero en la identidad, esto debido a que como vimos anteriormente,  $P^2 = \rho_1 N$ , y  $\text{Tr} \rho_1 = 1$ ; así, como la componente en la identidad es la única que contribuye a la traza, ésta tiene que ser distinta de cero. Por otra parte, para la matriz  $U$  tenemos

$$U = e^{-i \sum_j \alpha^j T_j}, \quad (19.3)$$

es decir, es un elemento de  $SU(N)$ .

Como vimos anteriormente,  $\Lambda = -i dU \cdot U^{-1}$  es una matriz de 1-formas, elemento de  $\mathfrak{su}(N)$ , por lo que podemos expresarla como combinación lineal de los generadores  $T_a$  con coeficientes dados por 1-formas invariantes por la derecha (RI)  $\Lambda^a$ :

$$\Lambda = \sum_a \Lambda^a T_a. \quad (19.4)$$

El siguiente paso es escribir los coeficientes  $\Lambda^a$  como

$$\Lambda^a = g^a_b d\alpha^b, \quad (19.5)$$

donde  $\alpha^b$  son las coordenadas de  $U$ .

Como vimos en la ecuación (17.7),  $P^2 = \rho_1 N$ , por lo que podemos expresar

$$\rho_1 = \frac{P^2}{N} = \frac{1}{N} (x^0 I + x^i T_i)^2. \quad (19.6)$$

Y dadas las propiedades de los generadores de  $SU(n)$ ,  $\rho_1$  también puede expresarse como combinación lineal de dichos generadores y la identidad. Para verlo, tenemos

---

<sup>9</sup>En realidad deberíamos considerar una base de matrices antihermíticas para  $SU(N)$ , sin embargo, dado que al exponenciar los generadores añadimos una  $i$ , la base de matrices hermíticas se convierte en una base de matrices antihermíticas [50].

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{P^2}{N} = \frac{1}{N}(x^0 I + x^i T_i)^2 \\
&= \frac{1}{N} [(x^0)^2 I + 2\gamma x^i T_i + x^i x^j T_i T_j] \\
&= \frac{1}{N} \left[ (x^0)^2 I + 2x^0 x^i T_i + \frac{1}{2N} x^i x^j \delta_{ij} I + \sum_{k=1}^{N^2-1} x^i x^j (i f_{ijk} + d_{ijk}) T_k \right] \\
&= \frac{1}{N} \left[ (x^0)^2 + \frac{1}{2N} x^i x^j \delta_{ij} \right] I + \frac{1}{N} \left[ 2x^0 x^k + \sum_{k=1}^{N^2-1} x^i x^j (i f_{ijk} + d_{ijk}) \right] T_k, \tag{19.7}
\end{aligned}$$

$f_{ijk}$  son las constantes de estructura y  $d_{ijk}$  coeficientes simétricos en todos los índices que dependen de la representación del álgebra con la que se decida trabajar<sup>10</sup>.

Entonces, se tiene

$$\rho_1 = \rho^0 I + \rho^i T_i, \tag{19.8}$$

donde, como hemos visto,  $\rho^0$  y  $\rho^i$  pueden ser expresados en términos de  $a^0$  y  $a^i$ .

Sustituyendo (19.4) y (19.8) en (18.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Omega &= d \operatorname{Tr} [\rho_1 \Lambda] = d \operatorname{Tr} [(\rho^0 I + \rho^i T_i) \Lambda^a T_a] \\
&= d [\rho^i \Lambda^a \operatorname{Tr} (T_i T_a)] = d \left[ \rho^i \Lambda^a \left( \frac{1}{2N} \delta_{ia} N \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} d(\rho_a \Lambda^a) = \frac{1}{2} d(\rho_a g^a_b) \wedge d\alpha^b, \tag{19.9}
\end{aligned}$$

donde, en la segunda línea se ignoró el coeficiente  $\rho^0$  ya que como vimos en la sección 18, la traza de  $\Lambda$  es cero, así que este término no contribuye a  $\Omega$ .

De (19.9) podemos identificar a los momentos canónicos de manera que la forma simpléctica quede expresada en su forma canónica como

$$\tilde{\Omega} = dq^b \wedge dp_b. \tag{19.10}$$

---

<sup>10</sup>También a partir de este cálculo se usa el convenio de suma de Einstein donde se considera que los índices repetidos representan una suma.

Dichos momentos canónicos están entonces dados por

$$p_b = -\frac{1}{2}\rho_a g^a_b + \text{cte.}, \quad (19.11)$$

es decir, podemos obtener un conjunto de coordenadas canónicas sin necesidad de usar todo el procedimiento que plantea el teorema de Darboux.

Al plantear un sistema cuántico específico con un operador hamiltoniano actuando sobre el mismo, mediante el enfoque geométrico de la mecánica cuántica que hemos estudiado en la sección (8.1) necesitamos encontrar la cantidad

$$H = Z^\dagger \hat{H} Z, \quad (19.12)$$

siendo  $Z$  el estado cuántico en el espacio de Hilbert.

Luego de encontrar  $H$ , dado que el objetivo es resolver las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}^i, \quad (19.13)$$

es necesario expresar  $H$  en términos de funciones de las coordenadas canónicas, por lo tanto necesitamos obtener las coordenadas  $\rho_i$  de  $P$  en términos del conjunto de coordenadas canónicas que hemos encontrado. Para ello basta con multiplicar (19.11) por la matriz inversa de  $g^a_b$ :

$$\rho_i = -2p_b (g^{-1})^b_i, \quad (19.14)$$

de tal manera que obtenemos los coeficientes de  $P^2$ , y a partir de seguir el proceso para encontrar la raíz cuadrada de una matriz descrito en A podemos encontrar también los coeficientes de  $P$ , es decir,  $a^i$ , en términos de  $p_b$  y  $q^b$ .

## 20. Estado bipartito de dos partículas de spin 1/2

Consideramos un sistema formado por dos subsistemas de spin 1/2. En dicho caso, el estado cuántico del sistema es de la forma

$$|\psi\rangle = \psi_1|++\rangle + \psi_2|+-\rangle + \psi_3|-+\rangle + \psi_4|--\rangle, \quad \psi_i \in \mathbb{C}. \quad (20.1)$$

La matriz  $\Gamma$  correspondiente será de dimensión  $2 \times 2$ . Como hemos visto, la elección de coordenadas con las que estaremos trabajando se basa en la descomposición polar de  $\Gamma$ .

## 20.1. Coordenadas horizontales y verticales

En general decimos que el estado de un sistema formado por dos partículas de spin  $1/2$  de la forma (20.1) vive en un espacio de Hilbert de dimensión 4 (dimensión 8 real), sin embargo, para describir el comportamiento físico del mismo sabemos que en realidad el estado vive en el espacio proyectivo [34, 40, 50], para lo cual podemos restringirnos a dimensión 3 (considerando la normalización del estado y la relación de equivalencia de estados en el espacio proyectivo en la que todos los estados que difieren por una fase global son equivalentes). Dicho esto, se necesitan 6 coordenadas reales para describirlo. Tres de estas coordenadas están dadas por la matriz  $P$  y las otras tres por la matriz  $U$ . Diremos que las coordenadas de  $U$  son las coordenadas horizontales, mientras que las coordenadas de  $P$  son las verticales<sup>11</sup>.

Particularmente, para un sistema bipartito se tiene  $U \in SU(2)$ , pero hay un aspecto importante a considerar, y es el hecho de que en realidad el espacio horizontal no está dado estrictamente por  $SU(2)$ , sino por el espacio cociente con la relación de equivalencia en la que las matrices que difieren por una  $n$ -ésima raíz de la identidad son equivalentes. Para comprenderlo veamos que si tenemos una matriz  $A \in SU(2)$  y la multiplicamos por una fase que es una raíz de la identidad, el resultado será el mismo que si tomamos  $-A$  y la multiplicamos por el negativo de la misma fase mencionada que también es raíz de la identidad. En este caso 2-dimensional, tenemos como raíces de la identidad a  $1$  y  $-1$ , por lo tanto  $A$  se identifica con  $-A$ . Entonces  $U \in SU(2)/Z_2$ .

Topológicamente,  $SU(2)$  es una 3-esfera [43, 44, 49]. Para verlo, recordemos que una matriz  $M \in SU(2)$  tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \quad (20.2)$$

de donde vemos que escribiendo  $a = x_1 + iy_1$  y  $b = x_2 + iy_2$ , la condición  $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$  se convierte en

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1. \quad (20.3)$$

No obstante, ahora que hemos aclarado que las matrices se identificarán con sus negativos, podemos restringir esta 3-esfera a un solo hemisferio, ya que al pasar al otro hemisferio podemos identificar cada punto con su antipodal correspondiente. Este hemisferio, topológicamente, lo podemos ver como  $SO(3)$ , es decir, podemos *aplanarlo* desde el polo norte, conservando su estructura topológica, y al aplanarlo obtendremos una bola 3-dimensional

---

<sup>11</sup>Viendo esto como una analogía con un haz fibrado y ya que como mencionamos anteriormente, el espacio de estados máximamente enredados puede verse como un espacio de configuración; sin embargo, cabe mencionar que para decir formalmente que nuestra variedad se trata de un haz fibrado hay que encontrar en la misma una estructura de grupo [20, 15, 22, 25, 26, 27].



con los puntos antipodales identificados (ya que son los puntos del ecuador de  $S^3$ ) que topológicamente es  $SO(3)$ , similar a lo que pasa al *aplanar*  $S^2$  y obtener un disco o bola 2-dimensional.

## 20.2. Estado general

Habiendo aclarado cuáles son las coordenadas que vamos a utilizar, empecemos a trabajar con el estado (20.1). Como ya mencionamos, la matriz  $\Gamma$  será de dimensión  $2 \times 2$ , y haciendo su descomposición polar podemos expresar  $P$  y  $U$  como

$$P = w\mathbb{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z, \quad U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}. \quad (20.4)$$

Dado que la traza de la matriz de densidad reducida es  $\text{Tr}\rho_1 = 1$ , tenemos

$$\text{Tr}(P^2) = \text{Tr}(\rho_1 N) = N = 2, \quad (20.5)$$

por lo tanto podemos calcular  $P^2$  y restringir su traza, con lo que obtenemos una condición sobre alguna de las cuatro coordenadas  $x, y, z, w$ , en este caso obtuvimos

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad (20.6)$$

donde consideramos la raíz positiva porque los valores propios de  $P$  deben ser positivos. Ya tenemos  $P$  en términos de tres coordenadas  $x, y, z$  y  $U$  en términos de otras tres coordenadas  $\alpha, \theta, \phi$ , lo que representa un conjunto completo de coordenadas en el espacio proyectivo.

Trabajemos ahora directamente con la expresión para la forma simpléctica (18.3) sabiendo que

$$\rho_1 = \rho_0\mathbb{I} + \rho_a\sigma_a, \quad \Lambda = \Lambda^a\sigma_a, \quad (20.7)$$

donde, como ya vimos,  $\Lambda$  es una matriz de 1-formas que pertenece al álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ , por lo que podemos expresarla como combinación lineal de las matrices de Pauli con coeficientes dados por 1-formas invariantes por la derecha (RI)  $\Lambda^a$ . Sustituyendo esto en (18.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \Omega &= d\text{Tr}[\rho_1\Lambda] \\ &= d\text{Tr}[(\rho_0\mathbb{I} + \rho_a\sigma_a)(\Lambda^b\sigma_b)], \end{aligned} \quad (20.8)$$

y recordando que la traza de  $\Lambda$  es cero, podemos deshacernos del primer término  $\rho_0 I$ , así que se tiene

$$\Omega = d(\rho_a \Lambda^b \text{Tr}[\sigma_a \sigma_b]) = d(\rho_a \Lambda^b) (2\delta_{ab}) = 2d(\rho_a \Lambda^a). \quad (20.9)$$

Sabiendo que  $\Lambda^a$  son 1-formas que dependen de las coordenadas  $\alpha, \theta, \phi$  solamente, podemos obtener una matriz tal que

$$\Lambda^a = g^a_b dx^b, \quad x^b = \alpha, \theta, \phi, \quad (20.10)$$

de manera que la forma simpléctica será

$$\Omega = 2d(\rho_a g^a_b) \wedge dx^b, \quad (20.11)$$

y podemos definir

$$p_b = -2\rho_a g^a_b + \text{cte.}, \quad q^b = \alpha, \theta, \phi. \quad (20.12)$$

Ahora el objetivo es encontrar explícitamente los momentos conjugados  $p_\alpha, p_\theta$  y  $p_\phi$  para tener el conjunto de coordenadas canónicas completo.

Comencemos calculando  $g^a_b$ . Para ello, encontremos primero la expresión explícita para  $\Lambda = -i dU \cdot U^{-1}$ . Siendo  $U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$  encontramos las componentes de  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,1} &= \frac{1}{2}(\sin\theta(d\theta \sin\alpha + d\phi(\cos\alpha - 1)\sin\theta) - d\alpha \cos\theta), \\ \Lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2}ie^{-i\phi} [d\theta(-i \sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha - 1) - i \sin\theta(d\alpha + d\phi(-i \sin\alpha + (\cos\alpha - 1)\cos\theta))], \\ \Lambda_{2,1} &= -\frac{1}{2}ie^{i\phi} [-d\theta(i \sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha - 1) - i \sin\theta(d\alpha + d\phi(i \sin\alpha + (\cos\alpha - 1)\cos\theta))], \\ \Lambda_{2,2} &= \frac{1}{4} (2d\alpha \cos\theta - 2d\theta \sin\alpha \sin\theta + d\phi(1 - 2\cos\alpha)\sin^2\theta - d\phi \cos^2\theta + d\phi). \end{aligned} \quad (20.13)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones  $\Lambda = \Lambda^b \sigma_b$  encontramos los coeficientes  $\Lambda^x, \Lambda^y$  y  $\Lambda^z$ . A partir de los mismos, podemos identificar  $g^a_b$  como

$$\left( \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}c_\phi s_\theta & \frac{1}{2}(-c_\theta c_\phi s_\alpha - c_\alpha s_\phi + s_\phi) & \frac{1}{2}(c_\phi s_\frac{\alpha}{2} s_{2\theta} + s_\alpha s_\theta s_\phi) \\ -\frac{1}{2}s_\theta s_\phi & \frac{1}{2}((c_\alpha - 1)c_\phi - c_\theta s_\alpha s_\phi) & -\frac{1}{2}s_\theta((c_\alpha - 1)c_\theta s_\phi + c_\phi s_\alpha) \\ -\frac{c_\theta}{2} & \frac{s_\alpha s_\theta}{2} & -s_\frac{\alpha}{2} s_\theta^2 \end{array} \right), \quad (20.14)$$

donde hemos utilizado una notación abreviada para las funciones trigonométricas. El siguiente paso es encontrar los coeficientes  $\rho_a$  tomando en cuenta que

$$\rho_1 = \rho_0 \mathbb{I} + \rho_a \sigma_a. \quad (20.15)$$

Para ello, recordemos que  $P^2 = \rho_1 N = 2\rho_1$ . Por lo tanto,  $\rho_1 = \frac{P^2}{2}$ . Dado que ya tenemos  $P$  en la ecuación (20.4) podemos entonces calcular  $P^2/2$  y ver cuáles son sus componentes  $\rho_a$  en la base de las matrices de Pauli y la identidad (aunque en realidad sólo nos interesan las componentes que multiplican a las matrices de Pauli). Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos

$$\rho_x = x\sqrt{1-r^2} = xw, \quad \rho_y = yw, \quad \rho_z = zw, \quad (20.16)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  y  $w = \sqrt{1-r^2}$ .

A partir de lo anterior podemos encontrar los momentos conjugados mediante la expresión (20.12), los cuales resultan

$$p_\alpha = w\vec{x}_P \cdot \hat{e}_r, \quad (20.17)$$

$$p_\theta = 2w \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{x}_P \cdot \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_\theta + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_\phi \right], \quad (20.18)$$

$$p_\phi = -2w \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\theta \vec{x}_P \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_\theta - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_\phi \right], \quad (20.19)$$

donde  $w = \sqrt{1-r^2}$  y  $\vec{x}_P = (x, y, z)$  (refiriéndose el subíndice a que son las coordenadas de la matriz  $P$ ).

### Hamiltoniano clásico para el sistema bipartito sometido a un campo magnético

Ya que hemos obtenido  $\Gamma$  en la base  $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$  y  $|--\rangle$ , tenemos el estado para el sistema bipartito dado por

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (w+z) \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\theta) \right) - ie^{i\phi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\theta)(x-iy) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( \cos(\theta)(y+ix) - ie^{-i\phi} \sin(\theta)(w+z) \right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) (x-iy) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( \cos(\theta)(y-ix) - ie^{i\phi} \sin(\theta)(w-z) \right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) (x+iy) \\ (w-z) \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\theta) \right) + e^{-i\phi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\theta)(y-ix) \end{pmatrix}. \quad (20.20)$$

Considerando un campo magnético constante en dirección  $z$ , tenemos  $\vec{B} = B_z \hat{z}$ , de manera que, suponiendo que ambas partículas son electrones (con la misma masa y carga), tenemos un operador hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \omega S_z = \omega(S_{z,1} + S_{z,2}), \quad (20.21)$$

donde  $S_{z,1} = \frac{\sigma_z}{2} \otimes I$  y  $S_{z,2} = I \otimes \frac{\sigma_z}{2}$ . Fijando por simplicidad la constante  $\omega = 1$ , se tiene

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (20.22)$$

con lo que podemos calcular el correspondiente hamiltoniano clásico a partir de lo visto en la sección 8.1:

$$\begin{aligned} H = Z^\dagger \hat{H} Z &= w \left( z + z \cos \alpha + 2z \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \theta + 2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta (-y \cos \phi + x \sin \phi) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta \cos \theta (x \cos \phi + y \sin \phi) \right) \\ &= zw \left( 1 + \cos \alpha + 2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) + 2w \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta \vec{x}_P \cdot \left[ \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \hat{e}_\theta - \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \hat{e}_\phi \right] \\ &= zw \left( 1 + \cos \alpha + 2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) - p_\phi = 2\rho_z - p_\phi. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Para poder expresar el hamiltoniano en términos de las variables canónicas es necesario encontrar los valores de  $x, y, z$  (las coordenadas de  $P$ ) en términos de dichas variables canónicas. Para ello, recordemos que es posible obtener las coordenadas de la matriz de densidad reducida (y por lo tanto de  $P^2$ ) a partir de la matriz inversa de  $g^a_b$  tal como se describe en la ecuación (19.14).

En este caso, de la ecuación (20.12) vemos que

$$\rho_c = -\frac{1}{2} p_b (g^{-1})^b_c. \quad (20.24)$$

El siguiente paso es encontrar  $x, y, z$  en términos de  $\rho_i$ , es decir, invertir las relaciones (20.16). No obstante, en este caso no es necesario hacer este procedimiento ya que en el hamiltoniano que estamos estudiando tenemos directamente una expresión  $\rho_z$ , la cual se puede obtener directamente en términos de las coordenadas canónicas mediante (20.24). Se tiene entonces

$$\rho_z = \frac{1}{2} (2p_\alpha \cos \theta - p_\theta \cot \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta + p_\phi) \quad (20.25)$$

De lo anterior obtenemos  $H$  en términos de las variables canónicas como

$$H = 2p_\alpha \cos \theta - p_\theta \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta. \quad (20.26)$$

Las ecuaciones de Hamilton que resultan están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \dot{\alpha} = 2 \cos \theta, & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} &= \dot{\theta} = -\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta, & \frac{\partial H}{\partial p_\phi} &= \dot{\phi} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -\dot{p}_\alpha = \frac{1}{2} p_\theta \sin \theta \csc^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \frac{\partial H}{\partial \theta} &= -\dot{p}_\theta = -p_\theta \cos \theta \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2p_\alpha \sin \theta, \\ \frac{\partial H}{\partial \phi} &= -\dot{p}_\phi = 0. \end{aligned} \quad (20.27)$$

### 20.3. Evolución para estados máximamente enredados

El objetivo en esta sección es continuar estudiando estados bipartitos compuestos por dos partículas de spin  $1/2$  sometidos a un campo magnético uniforme en dirección  $\hat{z}$ , pero ahora tomando como condición inicial un estado máximamente enredado, es decir, estudiar dichos sistemas en la subvariedad lagrangiana  $L$  de estados máximamente enredados. Para ello, recordemos de la sección 17 que para estados máximamente enredados, la matriz de densidad reducida resulta ser proporcional a la identidad, lo que implica que, utilizando estas coordenadas basadas en la descomposición polar de la matriz de coeficientes  $\Gamma$ , la matriz  $P$  es igual a la identidad. A partir de esto, obtenemos

$$\Gamma = \mathbb{I}U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}, \quad (20.28)$$

por lo que el estado inicial estará dado por

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\theta) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\theta) (-\sin(\phi) - i \cos(\phi)) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\theta) (\sin(\phi) - i \cos(\phi)) \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (20.29)$$

Recordemos que el conjunto de coordenadas canónicas que hemos introducido está dado por  $\alpha, \theta, \phi, p_\alpha, p_\theta, p_\phi$ , donde los momentos conjugados (20.17) se expresan en términos de  $\alpha, \theta, \phi$  y de las coordenadas verticales  $x, y, z$  que resultan de escribir la matriz  $P$  como combinación lineal de las matrices de Pauli y la matriz identidad. Particularmente, para un estado  $Z$

de la forma (20.29) que corresponde a un estado máximamente enredado, las coordenadas  $x, y, z$  son iguales a cero, ya que  $P$  no tiene coeficientes en las matrices de Pauli. Como podemos ver en las ecuaciones (20.17), las expresiones para los momentos conjugados en el caso de que  $(x, y, z) = \vec{x}_P = 0$ , se anulan, por lo tanto, la función hamiltoniana (20.26) que resulta de someter al sistema a un campo magnético constante en dirección  $\hat{z}$ , en el caso de un estado inicial máximamente enredado es igual a cero:

$$H \Big|_L = 2p_\alpha \cos \theta - p_\theta \cot \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta \Big|_L = 0, \quad (20.30)$$

lo que puede comprobarse al hacer el producto  $Z^\dagger \hat{H} Z$ .

**Proposición 6.** *La función hamiltoniana es constante sobre una subvariedad lagrangiana  $L$  sí y sólo sí el campo vectorial hamiltoniano  $X_H$  es tangente a  $L$ :  $X_H \in T_p L \quad \forall p \in L$  [55].*

**Demostración** Una subvariedad lagrangiana  $L$  (ver Definición 18), es la máxima subvariedad de una variedad  $(M, \Omega)$  tal que todo vector tangente a ella es simplécticamente ortogonal a todo vector tangente a ella:

$$\omega(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in TL. \quad (20.31)$$

Considerando la definición anterior, si se tiene  $H|_L = \text{cte.}$ , de la ecuación  $dH = i_{X_H} \Omega$ , sabemos que para todo  $Y \in TL$ , donde  $Y = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0}$ , se cumple

$$\Omega(Y, X_H) = dH(Y) = \frac{d}{dt} H(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \text{cte.} = 0, \quad (20.32)$$

es decir,  $X_H$  es simplécticamente ortogonal a todo vector tangente a  $L$ , y por lo tanto se deduce que  $X_H \in TL$ , pues de otra forma tendría que haber una subvariedad de dimensión mayor donde  $\omega$  se anulara.

Por otra parte, si partimos ahora de que  $X_H \in TL$ , se tendrá que  $dH|_L = 0$ , y por lo tanto  $H|_L = \text{cte.}$  ■

Cabe mencionar que las dimensiones de las subvariedades son importantes para entender lo que implica la proposición anterior. Sea el espacio fase de dimensión  $2n$ , primero en dicho espacio fase nos restringimos a un conjunto de nivel o hipersuperficie de  $H = h = \text{cte.}$  (la cual es de codimensión 1). Posteriormente, dentro de esta hipersuperficie nos situamos en la subvariedad lagrangiana de estados máximamente enredados, la cual tiene dimensión  $n$ . Lo que se sabe de manera inmediata es que  $X_H$  será tangente a la hipersuperficie de  $H$  constante, sin embargo, el hecho de que al tomar un punto sobre  $L$ ,  $X_H$  sea tangente a  $L$ ,

no es evidente. Eso es lo que se demostró en la proposición anterior.

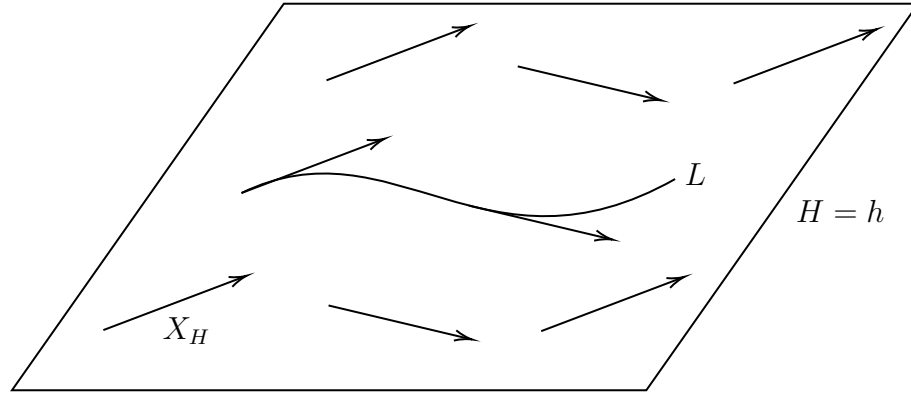


Figura 5: Subvariedad lagrangiana encajada en subvariedad de  $H = \text{cte.}$

Para este caso la función hamiltoniana resulta ser constante sobre la subvariedad de estados máximamente enredados, lo cual, según vimos con la proposición, significa que el campo hamiltoniano  $X_H$  es tangente a  $L$ , lo que implica que un estado máximamente enredado, permanecerá siendo máximamente enredado mientras la función hamiltoniana no tenga cambios. El hecho de que  $H = 0$  sobre esta subvariedad no necesariamente significa que no haya evolución del estado, simplemente que dicha evolución se da sobre la misma subvariedad. Si vemos la evolución temporal mediante las ecuaciones de Hamilton (20.27) y nos restringimos a  $L$  obtenemos

$$X_H \Big|_L = (2 \cos \theta, -\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta, 0, 0, 0, 0)^T, \quad (20.33)$$

de donde vemos que el campo vectorial solamente involucra movimiento a través de las coordenadas de  $U$  (las coordenadas horizontales). A partir de lo anterior podemos encontrar la dinámica  $\alpha(\theta)$  para  $L$  al resolver las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -\frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan \theta} \rightarrow \alpha(\theta) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{4} c_1 \csc(\theta)\right), \quad (20.34)$$

siendo  $c_1$  una constante.

En conclusión, al tratar un estado bipartito inicial máximamente enredado, la evolución hamiltoniana que resulta de someter al sistema a un campo magnético constante en dirección  $\hat{z}$  preserva el grado de enredamiento del mismo, es decir, la evolución se da sobre la subvariedad lagrangiana de estados máximamente enredados. Esto no debe sorprendernos, ya que como sabemos, la acción del operador hamiltoniano con el que hemos trabajado

provoca una precesión en el sistema (es decir, una rotación), y bajo una rotación del sistema el grado de entrelazamiento permanece invariante [9], por lo tanto la dinámica resulta darse en una subvariedad con enredamiento constante. Algo que resulta más interesante en este cálculo es que la subvariedad es la correspondiente a  $H = 0$ .

## 20.4. Ejemplo: Estado no factorizable

Para este ejemplo vamos a estudiar un sistema bipartito no factorizable de dos partículas de spin 1/2. Empecemos considerando una partícula de spin 1/2 en un estado de la forma

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \end{pmatrix}, \quad (20.35)$$

esto en la base  $|\pm \hat{z}\rangle$ , el cual vive en  $\mathbb{C}P^1 \sim S^2$ , donde  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos de coordenadas esféricas estándar. A partir de esto, consideremos dos partículas, las cuales están en un estado inicial con ángulo  $\phi_1(t=0) = \phi_2(t=0) = 0$ , y  $\theta_1(t=0) = \theta_2(t=0) = \theta_0$ , con lo que obtenemos el estado del sistema compuesto dado por el producto tensorial

$$|\Psi_1(t=0)\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (20.36)$$

en la base  $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$ .

El estado (20.36) lo vamos a superponer con otro estado  $|\Psi_2(t=0)\rangle$  que representa un sistema compuesto de dos partículas de spin 1/2 pero ahora con la diferencia de que en dicho estado  $\phi_1(t=0) = \phi_2(t=0) = \pi$ . El estado inicial ya normalizado está dado por

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cos^4 \left(\frac{\theta_0}{2}\right)}} \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 2 \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta_0 + 1}{\sqrt{\cos(2\theta_0) + 3}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1 - \cos \theta_0}{\sqrt{\cos(2\theta_0) + 3}} \end{pmatrix}. \quad (20.37)$$

El siguiente paso es encontrar cómo evoluciona el estado del sistema compuesto ante la acción del campo magnético constante sobre él para posteriormente encontrar su descomposición polar. Para ello, consideramos el operador hamiltoniano dado en la ecuación (20.22).



La evolución temporal del sistema está dada por el operador unitario de evolución  $\hat{U}$  aplicado al estado inicial. Para este caso particular, como el operador hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, tenemos un operador  $\hat{U} = e^{-it\hat{H}}$ , por lo tanto, la evolución del sistema está dada por  $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}|\Psi(t=0)\rangle$ :

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \frac{e^{-it}(\cos(\theta_0)+1)}{\sqrt{\cos(2\theta_0)+3}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{e^{it}(1-\cos(\theta_0))}{\sqrt{\cos(2\theta_0)+3}} \end{pmatrix}. \quad (20.38)$$

Ahora vamos a hacer la descomposición polar del estado para introducir las nuevas coordenadas, para ello escribamos la matriz  $\Gamma$  correspondiente a  $|\psi(t)\rangle$ , la cual es simplemente  $\sqrt{2}|\psi(t)\rangle$  vista como matriz cuadrada<sup>12</sup> de dimensión  $2 \times 2$ :

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}e^{-it}(\cos(\theta_0)+1)}{\sqrt{\cos(2\theta_0)+3}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}e^{it}(1-\cos(\theta_0))}{\sqrt{\cos(2\theta_0)+3}} \end{pmatrix}. \quad (20.39)$$

Calculando la descomposición polar de  $\Gamma(t) = P(t)U(t)$  mediante su relación con la descomposición en valores singulares obtenemos

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\cos^2(\frac{\theta_0}{2})}{\sqrt{\cos^2(\theta_0)+1}} & 0 \\ 0 & \frac{2\sin^2(\frac{\theta_0}{2})}{\sqrt{\cos^2(\theta_0)+1}} \end{pmatrix}. \quad (20.40)$$

Para calcular la evolución de las coordenadas de  $P$  escribimos la matriz, tal como en la ecuación (19.3), como una combinación lineal de la identidad y las matrices de Pauli:

$$P = w\mathbb{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z. \quad (20.41)$$

Veamos que en la ecuación anterior tenemos cuatro coordenadas en vez de las tres que habíamos mencionado, sin embargo por la restricción en la traza de la matriz de densidad (20.5), sabemos que sólo tres de éstas son independientes. No obstante, en este caso en el que tenemos las componentes de  $\Gamma$  dadas explícitamente no es necesario hacer ese procedimiento.

---

<sup>12</sup>Donde hemos agregado el factor  $\sqrt{2}$  debido a que, recordando de la ecuación (17.1), se tiene que el estado normalizado está dado por la matriz  $\Gamma$  dividida sobre  $\sqrt{N}$  (en este caso con  $N = 2$ ). Como este estado ya está normalizado, en realidad  $\Gamma = \sqrt{2}\psi$ .

Calculamos entonces los coeficientes  $x, y, z, w$  de la matriz  $P$ , mediante la ecuación

$$x^i = \text{Tr} \left( \frac{1}{2} P \sigma_i \right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (20.42)$$

y donde para calcular  $w = x^0$  se tiene  $\sigma_0 = \mathbb{I}$ . Los coeficientes obtenidos son

$$w = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\theta_0) + 1}}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{\sqrt{2} \cos(\theta_0)}{\sqrt{\cos(2\theta_0) + 3}}. \quad (20.43)$$

De esta forma, ya hemos determinado la evolución de las coordenadas de  $P$  (las coordenadas verticales).

Respecto a  $U$ , podemos escribir la matriz (20.66) como  $U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ , donde  $\alpha$  representa un ángulo de rotación y  $\hat{n} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$  es el vector normal con coordenadas  $\theta, \phi$  esféricas estándar. De lo anterior podemos identificar que tres coordenadas apropiadas para  $U$  son  $\alpha, \theta, \phi$ , y dado que

$$U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbb{I} - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad (20.44)$$

podemos encontrar el ángulo de rotación  $\alpha$  y el eje de rotación  $\hat{n}$  como funciones del tiempo ya que

$$U = u^0 \mathbb{I} + u^1 \sigma_x + u^2 \sigma_y + u^3 \sigma_z, \quad (20.45)$$

es decir, encontrando los coeficientes de la matriz  $U$  a partir de

$$u^i = \text{Tr} \left( \frac{1}{2} U \sigma_i \right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (20.46)$$

donde para  $u^0$  consideramos  $\sigma_0 = \mathbb{I}$ . Los coeficientes encontrados son

$$\begin{aligned} u^0 &= \cos t, \\ u^1 &= 0, \\ u^2 &= 0, \\ u^3 &= -i \sin t. \end{aligned} \quad (20.47)$$

Ya habiendo calculado los coeficientes mencionados solamente hay que despejar para encontrar  $\alpha$  y  $\vec{n}$  como funciones del tiempo igualando (20.44) y (20.45). Haciendo esto obtenemos

$$\alpha = 2 \arccos u^0, \quad n_x = \frac{iu^1}{\sqrt{1-u^{02}}}, \quad n_y = \frac{iu^2}{\sqrt{1-u^{02}}}, \quad n_z = \frac{iu^3}{\sqrt{1-u^{02}}}. \quad (20.48)$$

Recordemos que las coordenadas horizontales para  $U$  que estamos utilizando son  $\alpha, \theta, \phi$ . Sabiendo que  $\hat{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$  podemos obtener directamente  $\theta$  y  $\phi$ . Calculando explícitamente las tres coordenadas obtenemos

$$\alpha(t) = 2t, \quad \phi(t) = 0, \quad \theta(t) = 0. \quad (20.49)$$

Este caso puede llegar a parecernos muy trivial, sin embargo es una buena forma de cerciorarnos de que los resultados (20.26) y (20.27) son correctos. Es decir, la función hamiltoniana asociada a este sistema particular debe ser igual a (20.26) al sustituir los momentos correspondientes y la evolución de las coordenadas debe satisfacer las ecuaciones de Hamilton (20.27). Veamos primero si las coordenadas  $q_i$  satisfacen las ecuaciones de Hamilton (4.13), para ello tenemos

$$\dot{\alpha} = 2, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 0, \quad (20.50)$$

lo que concuerda con las ecuaciones de Hamilton, ya que en este caso  $\cos \theta = 1$  y  $\sin \theta = 0$ .

Sustituyendo la evolución de las coordenadas en (20.17) encontramos la evolución de los momentos conjugados

$$p_\alpha(t) = \frac{2 \cos(\theta_0)}{\cos(2\theta_0) + 3}, \quad p_\theta(t) = 0, \quad p_\phi(t) = 0. \quad (20.51)$$

Veamos ahora si se satisfacen las ecuaciones de Hamilton (20.26). Como vemos en este caso ninguno de los momentos depende del tiempo, por lo que las ecuaciones de Hamilton deben ser consistentes. Vemos que en dichas ecuaciones  $\dot{p}_\alpha$  depende de  $\sin \theta$ , que como mencionamos es igual a cero, por lo tanto dicha ecuación se satisface. La evolución  $\dot{p}_\theta$  depende de  $p_\theta = 0$  y de  $\sin \theta = 0$ , por lo tanto esta también se satisface. La evolución de  $p_\phi$  se satisface trivialmente.

Por otro lado, la función hamiltoniana que resulta de la ecuación (20.26) está dada por

$$H = 2p_\alpha \cos \theta - p_\theta \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta = 2p_\alpha = \frac{4 \cos(\theta_0)}{3 + \cos(2\theta_0)}, \quad (20.52)$$

lo cual, en efecto, coincide con la función  $H$  del sistema (el valor esperado del operador hamiltoniano).

## 20.5. Ejemplo: Estado factorizable

Vamos a estudiar un sistema bipartito factorizable particular compuesto por dos partículas de spin  $1/2$ , ambas estando en un estado de la forma (20.35):

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\phi_0} \end{pmatrix}, \quad (20.53)$$

en la base  $|\pm \hat{z}\rangle$ . A partir de esto, consideramos el estado factorizable (20.36).

El siguiente paso es encontrar cómo evoluciona el estado del sistema compuesto ante la acción del campo magnético constante sobre él para posteriormente encontrar su descomposición polar. La matriz de coeficientes  $\Gamma$  para el estado inicial está dada por

$$\Gamma = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (20.54)$$

Algo importante a considerar es que en la sección (A) se consideró la descomposición de una matriz  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , lo que implica que dicha matriz a descomponer es una matriz invertible. En este caso, tenemos una matriz que es no invertible ya que

$$\det \Gamma = 0. \quad (20.55)$$

Cabe señalar que un estado factorizable siempre tendrá  $\det \Gamma = 0$  ya que sus filas serán múltiplos del mismo vector. Para ver esto más claramente podemos pensar precisamente en un estado bipartito factorizable (por ejemplo, un sistema conformado por dos partículas de spin  $1/2$ ) tal como se describió en la sección 14, es decir, un estado de la forma

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad (20.56)$$

donde, expresando de la manera más general  $|\psi_i\rangle$ ,  $i = 1, 2$  en la base  $|\pm, \hat{z}\rangle$  tendremos

$$|\psi_1\rangle = a_1|+\rangle + b_1|-\rangle, \quad |\psi_2\rangle = a_2|+\rangle + b_2|-\rangle, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}, \quad (20.57)$$

con lo que calculando el producto tensorial para obtener  $|\Psi\rangle$  se tiene

$$|\Psi\rangle = a_1 a_2 |++\rangle + a_1 b_2 |+-\rangle + b_1 a_2 |-+\rangle + b_1 b_2 |--\rangle, \quad (20.58)$$

así que la matriz  $\Gamma$  (módulo constantes de normalización) estará dada por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 \\ b_1 a_2 & b_1 b_2 \end{pmatrix}, \quad (20.59)$$

de donde vemos claramente que ambas filas son múltiplos del mismo vector  $(a_2, b_2)$ , y por lo tanto el determinante de la matriz será igual a cero y la matriz  $\Gamma$  será singular.

En  $A$  podemos ver que la descomposición polar para matrices invertibles es única. En este caso, el hecho de que  $\Gamma$  sea no invertible implica que la descomposición polar no es única.

Consideremos por ejemplo una matriz  $A$  singular y un vector  $X \in \ker A$ , por lo tanto

$$AX = 0, \quad PUX = 0. \quad (20.60)$$

Ahora consideremos una matriz  $Q$  tal que

$$QX = -X, \quad QY = Y, \quad \forall Y \perp X, \quad (20.61)$$

donde se considera  $Y \perp X$  respecto a la métrica euclidiana. De esto podemos ver que  $Q$  es unitaria, ya que si tomamos una base ortonormal  $(e_1, \dots, e_n)$  tal que  $e_1$  sea paralelo a  $X$ ,  $Q$  se representa por  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , que es una matriz unitaria. Por lo tanto el producto  $UQ$  también lo es. De esta forma se tiene que  $PUQX = 0 = AX$  y que  $PUQY = PUY = AY$ , por lo que  $A = PUQ$  es también una descomposición polar válida. En resumen, aunque es válido encontrar una descomposición polar válida para matrices singulares, la matriz  $U$  no es única.

Habiendo explicado esto, continuemos estudiando el sistema considerando que sobre él actúa un campo magnético constante en dirección  $z$ , es decir, tenemos  $\vec{B} = B_z \hat{z}$ . Igual que en el caso anterior, se tiene el operador hamiltoniano (20.22). Siendo el operador de evolución  $\hat{U} = e^{-it\hat{H}}$ , la evolución del sistema está dada por  $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}|\Psi(t=0)\rangle$ :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}} \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-it} \cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ e^{it} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (20.62)$$

La matriz  $\Gamma(t)$  correspondiente está dada por

$$\Gamma(t) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{-it} \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & e^{it} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (20.63)$$

Calculando una descomposición polar de  $\Gamma = PU$  mediante su relación con la descomposición en valores singulares obtenemos

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-2it} \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) + e^{it} \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) & \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - e^{-it} \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - e^{-it} \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) + e^{it} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (20.64)$$

$$P(t) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & \frac{1}{2} e^{-it} \sin \theta_0 \\ \frac{1}{2} e^{it} \sin \theta_0 & \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (20.65)$$

y podemos fácilmente cerciorarnos de que efectivamente  $PU = \Gamma(t)$ .

Como sabemos, la matriz  $U$  es unitaria lo que indica que su determinante está dado por una fase, sin embargo vamos a restringirla para que  $U \in SU(2)$ . Calculando el determinante de (20.64) obtenemos  $e^{-it}$ , por lo que, dado que es una matriz  $2 \times 2$ , hay que multiplicarla por la fase global  $e^{it/2}$ . En dicho caso tendremos una nueva matriz  $\Gamma$  dada por  $\Gamma = e^{it/2} \Gamma(t)$ , donde  $\Gamma(t)$  es (20.63). Entonces, la matriz definitiva  $U$  estará dada por

$$U = e^{it/2} \begin{pmatrix} e^{-2it} \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) + e^{it} \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) & \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - e^{-it} \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - e^{-it} \sin \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2}\right) & \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) + e^{it} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (20.66)$$

cuyo determinante ya es 1.

Notemos que a pesar de que la fase global  $e^{it/2}$  será multiplicada por todo el estado  $\Gamma(t)$ , al calcular en Wolfram Mathematica la descomposición polar de  $e^{it/2} \Gamma(t)$  a partir de la descomposición en valores singulares, en general no vamos a obtener las matrices (20.65) y (20.66) como podríamos esperar, ya que como mencionamos anteriormente, la descomposición polar no es única. Por lo tanto, lo que optamos por hacer es agregar la fase directamente a  $U(t)$ .

Para describir a las coordenadas de  $P$  escribimos la matriz, tal como en la ecuación (19.3), como una combinación lineal de la identidad y las matrices de Pauli:

$$P = w\mathbb{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z. \quad (20.67)$$

Calculamos entonces los coeficientes  $x, y, z, w$  de la matriz  $P$ , mediante la ecuación (20.42). Los coeficientes obtenidos son

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \sin \theta_0, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \sin \theta_0, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_0, \quad (20.68)$$

de donde vemos que solamente las componentes en  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  tienen evolución temporal, y éstas definen un círculo. De esta forma, ya hemos determinado la evolución de las coordenadas de  $P$  (las coordenadas verticales).

Respecto a  $U$ , podemos, igual que en el ejemplo anterior, escribir la matriz (20.66) como  $U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ , donde  $\alpha$  representa un ángulo de rotación y  $\hat{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$  es el vector normal con coordenadas  $\theta, \phi$  esféricas estándar. Dado que

$$U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{I} - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{n}\cdot\vec{\sigma} = u^0\mathbb{I} + u^1\sigma_x + u^2\sigma_y + u^3\sigma_z, \quad (20.69)$$

vemos que encontrando los coeficientes de la matriz  $U$  podemos despejar y encontrar las coordenadas  $\alpha, \theta, \phi$  como funciones del tiempo. Los coeficientes encontrados son

$$\begin{aligned} u^0 &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)(\cos \theta_0 - \cos \theta_0 \cos t + \cos t), & u^1 &= i \sin \theta_0 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ u^2 &= 0, & u^3 &= i \sin\left(\frac{t}{2}\right)((\cos \theta_0 - 1) \cos t - 1). \end{aligned}$$

La evolución de las coordenadas, recordando la ecuación (20.48), está entonces dada por

$$\alpha(t) = 2 \arccos u^0, \quad \phi(t) = 0, \quad \theta(t) = \arccos n_z(t). \quad (20.70)$$

Finalmente, podemos graficar  $\alpha(t) \cdot \hat{n}(t)$  sobre  $SO(3)$ . Un punto importante a recordar es que para  $t < \pi$  se grafica la función  $\alpha(t) \cdot \hat{n}(t)$ , sin embargo para  $t > \pi$  debemos graficar  $(2\pi - \alpha(t)) \cdot (-\hat{n}(t))$ . A partir de esto obtenemos la figura 1, en la cual podemos ver que  $\alpha(t)$  va aumentando, y el vector respecto al cual se da la rotación cambia continuamente, además de que la curva es cerrada (recordando que en  $SO(3)$  los puntos antipodales se identifican). Esto indica que hay precesión en el sistema, justo lo que se espera obtener al estudiar un spin sometido a un campo magnético.

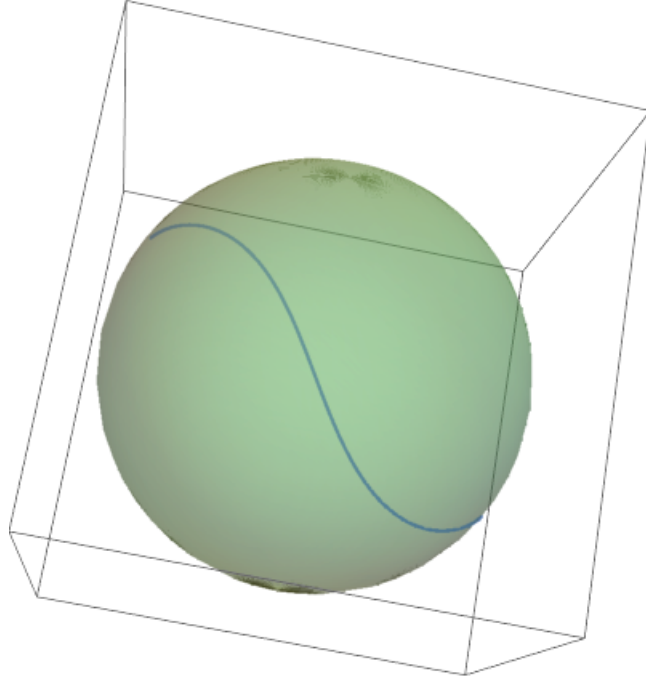


Figura 6:  $\alpha(t)\hat{n}(t)$  para un ángulo  $\theta_0 = \pi/3$  sobre  $SO(3)$ .

## 20.6. Método de Hamilton-Jacobi para el sistema bipartito

Teniendo como función hamiltoniana la ecuación (20.26), vemos que la misma no depende explícitamente del tiempo, por lo que dicha hamiltoniana es una cantidad conservada y se tiene la función principal  $S$  que aparece en la sección (4) dada por

$$S(\alpha, \theta, t) = W(\alpha, \theta) - ht, \quad (20.71)$$

esto ya que la función hamiltoniana tampoco depende de  $\phi$  ni su variable conjugada  $p_\phi$ . Tenemos entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$2 \left( \frac{\partial W(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} \right) \cos \theta - \left( \frac{\partial W(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \right) \cot \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta = h, \quad (20.72)$$

cuya solución está dada por

$$W(\alpha, \theta) = -ih \log \left[ 4 \left( \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) + i \cos \theta \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] + f \left( 4 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta \right) + c, \quad (20.73)$$



donde  $c = \text{cte.}$  y se especifica que  $f$  es una función con argumento dado por el término entre paréntesis.

Dado que buscamos soluciones reales, vamos a elegir  $f$  de tal manera que cancele la parte imaginaria del término logarítmico. Primero veamos que

$$\log(a + ib) = \log(\rho e^{i\phi}) = \log(\rho) + i\phi, \quad (20.74)$$

donde hemos expresado el argumento del logaritmo en su forma polar. Ya que hay una  $i$  multiplicando a todo el término, la cantidad imaginaria que queremos eliminar mediante la elección de  $f$  es  $\log \rho$ , por ello

$$f\left(4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta\right) = c_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta + ih \log \rho, \quad (20.75)$$

donde  $c_1 = \text{cte.}$  y

$$\rho = 4\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \theta} = 4\sqrt{1 - \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta\right)^2}. \quad (20.76)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} S(\alpha, \theta, t) &= -ih(\log \rho + i\phi) + c_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta + ih \log \rho - ht + c \\ &= h\phi + c_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta - ht + c, \end{aligned} \quad (20.77)$$

donde

$$\phi = \arctan\left(\cos \theta \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right). \quad (20.78)$$

Vemos que  $S$  tiene dependencia en dos constantes  $h$  y  $c_1$  (aparte de  $c$  que es libre), las cuales serán entonces los nuevos momentos

$$P_1 = h, \quad P_2 = c_1, \quad (20.79)$$

y con ello se tiene

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial h} = \phi - t, \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial c_1} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta, \quad (20.80)$$

donde  $\beta_1 = Q_1$  y  $\beta_2 = Q_2$  son constantes<sup>13</sup>. A partir de lo anterior obtenemos el sistema de ecuaciones

---

<sup>13</sup>Véase sección 4.

$$\phi = t + \beta_1 \quad \rightarrow \quad \cos \theta \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \tan(t + \beta_1), \quad (20.81)$$

$$\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta = \beta_2 \quad \rightarrow \quad \sin \theta = \frac{\beta_2}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)}, \quad (20.82)$$

a partir del cual se determina la dinámica del sistema:

$$\sqrt{1 - \frac{\beta_2^2}{\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \tan(t + \beta_1), \quad (20.83)$$

$$\alpha(t) = 2 \operatorname{arccsc} \left( \frac{\sec(\beta_1 + t)}{\sqrt{\beta_2^2 + \tan^2(\beta_1 + t)}} \right), \quad (20.84)$$

$$\theta(t) = \arcsin \left( \frac{\beta_2}{\sin \left( \frac{\alpha(t)}{2} \right)} \right). \quad (20.85)$$

## 20.7. Cantidades conservadas

La función hamiltoniana obtenida en la ecuación (20.26) no depende explícitamente del tiempo, lo que significa que se trata de una integral de movimiento, no obstante a partir de esto no podemos afirmar que dicha integral de movimiento se refiere a la energía del sistema, ya que para ello primero necesitamos verificar que en la función lagrangiana correspondiente, la energía cinética sea una forma cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas y el potencial sea independiente de dichas velocidades. Lo primero que llama la atención acerca de esta función hamiltoniana es que depende de manera lineal de los momentos canónicos y no de manera cuadrática como es lo usual [33], por lo tanto al hacer la transformación de Legendre para encontrar la función lagrangiana asociada, al calcular las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ , éstas no pueden invertirse para expresar los momentos en términos de velocidades generalizadas, de manera que no podemos encontrar una función lagrangiana apropiada para describir al sistema.

El significado en términos físicos de la función hamiltoniana no es claro y no tiene por qué serlo, esto debido a que las coordenadas canónicas que hemos elegido son hasta cierto punto arbitrarias; el procedimiento que seguimos para encontrar estas coordenadas canónicas se basó en plantear tres coordenadas  $\alpha = q_1$ ,  $\theta = q_2$  y  $\phi = q_3$  de manera arbitraria y encontrar sus correspondientes coordenadas canónicas conjugadas  $p_\alpha$ ,  $p_\theta$  y  $p_\phi$ , pero la elección se basó simplemente en la construcción matemática del problema. Los conjuntos de coordenadas canónicas no son en general únicos, el teorema de Darboux nos muestra un procedimiento bastante libre para construirlos.

El objetivo de esta sección es determinar cómo es que se relacionan las constantes de movimiento que hemos encontrado hasta ahora en el problema con las cantidades que sabemos intuitivamente que se conservan en un sistema como el que estamos estudiando.

A partir del método de Hamilton-Jacobi encontramos dos constantes de movimiento  $P_1$  y  $P_2$ . Aparte de estas dos constantes de movimiento se tiene  $P_3 = p_\phi$ , que es también una constante de la que la función hamiltoniana es independiente. Ya sabemos cómo expresar  $P_1$  en términos de las coordenadas canónicas (ya que es precisamente la función hamiltoniana); ahora, para hacer lo mismo con  $P_2$  vamos a tomar en cuenta que

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (20.86)$$

mediante lo cual podemos encontrar los momentos originales  $p_i$  en términos de las coordenadas originales  $\alpha, \theta, \phi$  y de los nuevos momentos  $P_i$ . A partir de ello podemos invertir las relaciones y encontrar los nuevos momentos  $P_i$  en términos del conjunto de coordenadas canónicas originales. Con ello obtenemos

$$\begin{aligned} P_1 = h &= 2p_\alpha \cos \theta - p_\theta \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta, \\ P_2 = c_1 &= \frac{\sec \theta \left( p_\theta \csc\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p_\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan \theta \right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan^2 \theta + 1}. \end{aligned} \quad (20.87)$$

En un sistema cuántico tal como el que estamos estudiando hay tres cantidades que podemos intuir que se conservan. Primero sabemos que se conserva el valor esperado del operador hamiltoniano, lo que se traduce en que los valores esperados de  $\hat{S}_{1z}$  y  $\hat{S}_{2z}$  sean constantes (el operador hamiltoniano depende directamente de estos dos operadores). Físicamente, el hecho de que  $S_{1z}$  y  $S_{2z}$  sean constantes de movimiento, significa que el ángulo entre el eje  $z$  la orientación del spin de ambas partículas no cambia. Como sabemos dicho ángulo se expresa como

$$\cos \varphi_i = \frac{S_{z_i}}{\sqrt{S_i^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (20.88)$$

donde dichas cantidades son en realidad el valor esperado del operador correspondiente a cada una:  $S_1 = \langle S_1 \rangle$ .

Por otro lado, sabemos que se conserva el valor esperado<sup>14</sup> de  $\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$ , lo

---

<sup>14</sup>Sabemos cuáles valores esperados se conservan porque sus operadores correspondientes conmutan con el operador hamiltoniano [50].

que físicamente se traduce en que el ángulo que forma la orientación del spin entre ambas partículas no cambia. Dicho ángulo está dado por

$$\cos \eta = \frac{S_1 \cdot S_2}{\sqrt{S_1^2} \sqrt{S_2^2}}. \quad (20.89)$$

Calculando  $S_{1z}$ ,  $S_{2z}$  y  $S_1 \cdot S_2$  se tiene

$$\begin{aligned} S_{1z} &= zw = \rho_z = \frac{1}{2} (2p_\alpha \cos \theta - p_\theta \cot \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta + p_\phi) \\ &= \frac{1}{2} (h + p_\phi) = \frac{1}{2} (P_1 + P_3). \\ S_{2z} &= \rho_z - p_\phi = \frac{1}{2} (h - p_\phi) = \frac{1}{2} (P_1 - P_3). \\ S_1 \cdot S_2 &= \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) (-\cos(2\theta) (3x^2 + y^2 - 1) - 2 \sin^2 \theta \cos(2\phi) (x^2 + y^2 + 2z^2 - 1) - x^2 \\ &\quad + 4xz \sin(2\theta) \cos \phi + y^2) + y \sin \alpha (x \cos \theta - z \sin \theta \cos \phi) - \frac{1}{8} (4y^2 - 1) (\cos \alpha + 1). \end{aligned} \quad (20.90)$$

Volviendo a (20.88) tenemos

$$\cos \varphi_1 = \frac{S_{1z}}{\sqrt{S_1^2}} = \frac{\frac{1}{2}(P_1 + P_3)}{\sqrt{3/4}} = \frac{P_1 + P_3}{\sqrt{3}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{P_1 - P_3}{\sqrt{3}}, \quad (20.91)$$

y por lo tanto podemos expresar los nuevos momentos  $P_1$  y  $P_3$  en función de los ángulos entre la orientación del spin de las partículas y el eje  $z$ :

$$P_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad P_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (20.92)$$

Respecto al resultado de  $S_1 \cdot S_2$ , sabiendo que  $\rho_x = xw$ ,  $\rho_y = yw$  y  $\rho_z = zw$ , y dado que podemos encontrar los coeficientes  $\rho_i$  en términos de los momentos canónicos a partir de la ecuación (20.24), sustituiremos cada una de las coordenadas  $x, y, z$  en términos de las coordenadas canónicas (dejando por el momento el resultado en términos de  $w$ ). A partir de eso, y sabiendo que los momentos canónicos  $p_i$  pueden expresarse en términos de los nuevos momentos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  mediante (20.86) se tiene

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= A + \frac{1}{w^2} \left[ -\frac{P_1^2 B}{4C} - \frac{P_2^2 C (8B - 4 \sin^2 \phi)}{16} + \frac{P_3^2 \sin^2 \phi}{4} \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{B} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_2 P_3 C \sin^2 \phi \cos \phi}{2\sqrt{B}} \right], \end{aligned} \quad (20.93)$$

donde se definen

$$B = \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \theta \sin^2 \phi, \quad A = \frac{1}{4} - B, \quad C = B \csc^2 \phi - 1, \quad (20.94)$$

las cuales son cantidades constantes, y podemos cerciorarnos fácilmente de ello al derivar  $B$  respecto a  $t$  y sustituir las ecuaciones de Hamilton que obtuvimos en (20.27):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B &= \sin^2 \phi \left[ 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \dot{\alpha} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= 2 \sin^2 \phi \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\cos \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)} \sin \theta \right] = 0. \end{aligned} \quad (20.95)$$

De la misma forma puede demostrarse que  $w$  es también una constante de movimiento, de modo que ya hemos encontrado  $S_1 \cdot S_2$  (y con ello el ángulo  $\eta$ ) en términos de los nuevos momentos del sistema y otras cantidades conservadas (recordemos de las ecuaciones de Hamilton (20.27) que  $\phi$  también es una constante).

Como vimos, a pesar de que los nuevos momentos encontrados mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi parecen no tener un sentido físico claro, éstos se relacionan con cantidades del sistema que intuitivamente sabemos que se conservan, aunque sus relaciones no sean precisamente sencillas como en el caso de  $S_1 \cdot S_2$ .

Parte V

Geometría simpléctica y  
enredamiento

A lo largo de este trabajo hemos visto que hay indicios de que la geometría simpléctica desempeña un papel importante para la descripción del fenómeno de enredamiento. Nos cercioramos de que para el caso de estados cuánticos puros bipartitos, los estados máximamente enredados forman una subvariedad lagrangiana del espacio de estados totales. Aunque aún no tenemos una interpretación física para este hecho, analizando las órbitas de acciones de grupos locales unitarios (que por definición preservan el grado de enredamiento) sobre el espacio proyectivo, es posible ver que se genera una foliación del espacio de estados en subvariedades de enredamiento constante. En esta última parte de la tesis vamos a estudiar el procedimiento para generar esta foliación, esto siguiendo el planteamiento del artículo [51].

Por definición, el enredamiento de un estado permanece invariante ante la acción de operadores local de operadores unitarios de la forma

$$U = U_1 \otimes \cdots \otimes U_N, \quad (20.96)$$

donde  $U_i$  representa una transformación unitaria actuando sobre la partícula  $i$ . Mediante lo anterior surge el camino natural que consiste en analizar las órbitas de la acción de grupo de este tipo de operadores sobre el espacio proyectivo. Esto es lo que estudiaremos, tomando para ello como base el artículo [31].

Consideramos un grupo compacto y semisimple de transformaciones unitarias locales  $K$  de la forma (20.96) actuando sobre una variedad simpléctica  $(\mathcal{M}, \omega)$  (el espacio proyectivo). Se considera que la acción del grupo  $K$  sobre  $M$  se da a través de simplectomorfismos:

$$\Phi_g(x) \in \mathcal{M}, \quad \Phi_g^* \omega = \omega. \quad (20.97)$$

Esto último implica que, dado que la restricción de la forma simpléctica  $\omega$  no cambia a lo largo de la órbita, su degeneración  $D$  es constante, así que  $D$  puede usarse como una medida discreta de enredamiento.

## 21. Momentum map

Sea  $\mathfrak{k}$  el álgebra de Lie asociada al grupo  $K$  y  $\xi \in \mathfrak{k}$ , se tiene la curva en  $K$  dada por  $\exp(t\xi)$ , y por lo tanto, se tiene la curva en  $\mathcal{M}$  dada por  $\exp(t\xi) \triangleright x$  (véase la figura 7). Dado que esto puede hacerse para todo elemento  $x \in \mathcal{M}$ , se define el campo vectorial

$$\hat{\xi}(x) = \left. \frac{d}{dt} (\Phi_{\exp(t\xi)})(x) \right|_{t=0}. \quad (21.1)$$

Como la acción del grupo es a través de simplectomorfismos  $\Phi_g^* \omega = \omega$ , entonces la derivada de Lie de  $\omega$  a lo largo del generador del flujo (que es  $\hat{\xi}$ ) es igual a cero, y por lo tanto,  $\hat{\xi}$  puede verse como un campo vectorial hamiltoniano, de manera que se tiene una función hamiltoniana  $\mu_\xi(x) : M \rightarrow \mathbb{R}$  asociada a  $\hat{\xi}$  tal que

$$d\mu_\xi = i_{\hat{\xi}} \omega \equiv \omega(\hat{\xi}, \bullet). \quad (21.2)$$

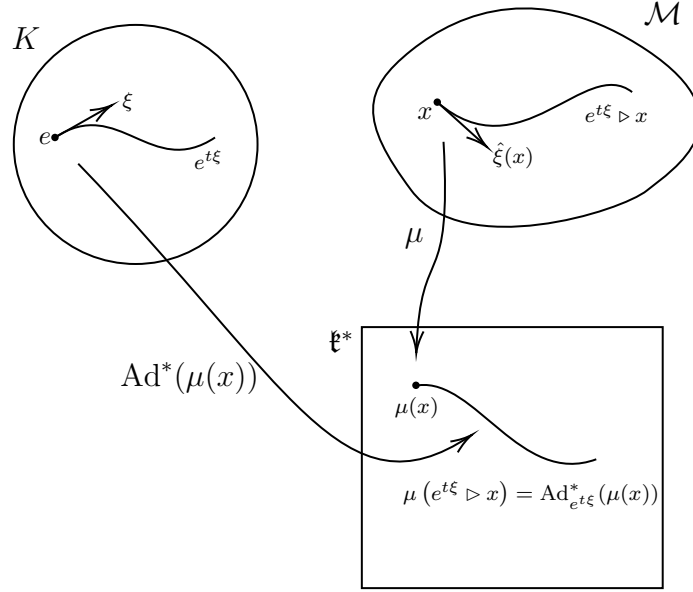


Figura 7: Esquema del momentum map.

La función  $\mu_\xi$  puede elegirse lineal en  $\xi$ , es decir

$$\mu_\xi(x) = \langle \mu(x), \xi \rangle, \quad \mu(x) \in \mathfrak{k}^*, \quad (21.3)$$

donde  $\mathfrak{k}^*$  es el espacio vectorial dual al álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ . Para ver esto último suponemos una base de  $\mathfrak{k}$  dada por  $(e_1, \dots, e_m)$ , y el campo  $\hat{e}_i$ , por lo que  $\hat{\xi} = \xi^i \hat{e}_i$ . Sabemos que se cumple  $d\mu_j = i_{\hat{e}_j} \omega$ , por lo que  $\mu_j$  son las funciones hamiltonianas asociadas a los campos  $\hat{e}_j$ . Ahora, calculando  $d(\xi^i \mu_i)$  obtenemos

$$d(\xi^i \mu_i) = \xi^j d\mu_j = \xi^j i_{\hat{e}_j} \omega = \xi^j \omega(\hat{e}_j, \bullet) = \omega(\xi^j \hat{e}_j, \bullet), \quad (21.4)$$

mientras que por otro lado se tiene  $d\mu_\xi = \omega(\hat{\xi}, \bullet) = \omega(\xi^j \hat{e}_j, \bullet)$ , con lo que concluimos que



$$\mu_\xi(x) = \mu^i \xi_i = \langle \mu(x), \xi \rangle, \quad \mu(x) \in \mathfrak{k}^*, \quad (21.5)$$

entonces, como  $\mu(x)$  es un elemento del espacio dual al álgebra de Lie, se puede definir un mapeo  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ , el cual es *equivariante* respecto a la acción coadjunta de  $K$ :

$$\mu(\Phi_g(x)) = \text{Ad}_g^* \mu(x). \quad (21.6)$$

Construido el mapeo  $\mu$  de la forma mencionada, se le denomina *momentum map*.

## 21.1. Ejemplos de momentum map

### Traslaciones sobre la línea

Consideramos como sistema una partícula moviéndose sobre la línea, por lo que el espacio fase  $M$  de la partícula tendrá dimensión 2 (posición sobre la línea  $x$  y momento  $p$ ). La forma simpléctica estará dada por

$$\omega = dx \wedge dp. \quad (21.7)$$

Se considera el grupo  $T$  de traslaciones sobre la línea, el cual es unidimensional y actúa sobre  $(x, p) \in M$  como

$$a \triangleright (x, p) \rightarrow (x + a, p), \quad a \in T. \quad (21.8)$$

El elemento identidad del grupo  $K = T$  está dado por  $e = 0$  y se tiene el generador del álgebra de Lie asociada a  $T$  como

$$X = \frac{\partial}{\partial a}. \quad (21.9)$$

Para encontrar el campo vectorial en  $M$  dado por  $\hat{\partial}_a$  tomamos la curva  $t$  en el grupo  $T$  y aplicamos esa acción al punto  $(x, p)$ , para luego derivar respecto al parámetro  $t$  y evaluar en  $t = 0$ :

$$t \triangleright (x, p) \rightarrow (x + t, p), \quad \hat{\partial}_a = \left. \frac{d}{dt}(x + t, p) \right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (21.10)$$

Por lo tanto se obtiene

$$i_{\hat{\partial}_a} \omega = dx \wedge dp(\partial_x) = dp \quad \rightarrow \quad \mu_{\partial_a}(x) = p, \quad (21.11)$$

con lo que el momentum map está dado por

$$\mu_{\partial_a}(x) = \langle \mu(x), \partial_x \rangle = p \quad \rightarrow \quad \mu(x) = p dx, \quad (21.12)$$

es decir, justamente el momento de la partícula.

### Rotaciones sobre el plano

Ahora consideramos como sistema una partícula en el plano, por lo que su espacio fase  $M$  será de dimensión 4. La forma simpléctica estará dada por

$$\omega = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y. \quad (21.13)$$

Consideramos el grupo de rotaciones sobre el plano  $K = SO(2)$ , el cual puede identificarse con  $S^1$ , por lo tanto es unidimensional y actúa sobre  $(x, y, p_x, p_y) \in M$  como

$$R_\phi \triangleright (x, y, p_x, p_y) = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi, p_x \cos \phi - p_y \sin \phi, p_x \sin \phi + p_y \cos \phi). \quad (21.14)$$

El elemento identidad del grupo está dado por  $e = 0$  y su generador como  $\partial_\phi$ . Para encontrar  $\hat{\partial}_\phi$  tomamos la curva  $\phi$  y aplicamos esa acción a  $(x, y, p_x, p_y)$  para derivar respecto a  $\phi$  y evaluar en  $\phi = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_\phi &= \left. \frac{d}{d\phi} (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi, p_x \cos \phi - p_y \sin \phi, p_x \sin \phi + p_y \cos \phi) \right|_{\phi=0} \\ &= (-y, x, -p_y, p_x) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - p_y \frac{\partial}{\partial p_x} + p_x \frac{\partial}{\partial p_y}. \end{aligned} \quad (21.15)$$

Al evaluar en la forma simpléctica se obtiene

$$\begin{aligned} i_{\hat{\partial}_\phi} \omega &= (dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y)(-y \partial_x + x \partial_y - p_y \partial_{p_x} + p_x \partial_{p_y}) \\ &= -y dp_x + x dp_y + p_y dx - p_x dy = d(x p_y - y p_x) = dL_z, \end{aligned} \quad (21.16)$$

donde  $L_z$  es la componente  $z$  del momento angular. Por lo tanto se tiene

$$\mu(x, y, p_x, p_y) = L_z d\phi. \quad (21.17)$$

## 21.2. Espacio de estados cuánticos

En el caso del espacio de estados cuánticos puros, la variedad simpléctica en la que trabajamos es  $\mathcal{M} = \mathbb{P}(V)$ , es decir, el espacio proyectivo del espacio de Hilbert. Se tiene un vector  $A \in \mathfrak{u}(V)$ , es decir, un vector en el álgebra de Lie asociada al grupo unitario actuando sobre el espacio de Hilbert, y por otro lado se tiene  $A_x \in T_x\mathbb{P}(V)$ , un vector tangente en  $t = 0$  a la curva  $\pi(\exp(tA)v)$  donde  $\pi : V \rightarrow \mathbb{P}(V)$ .

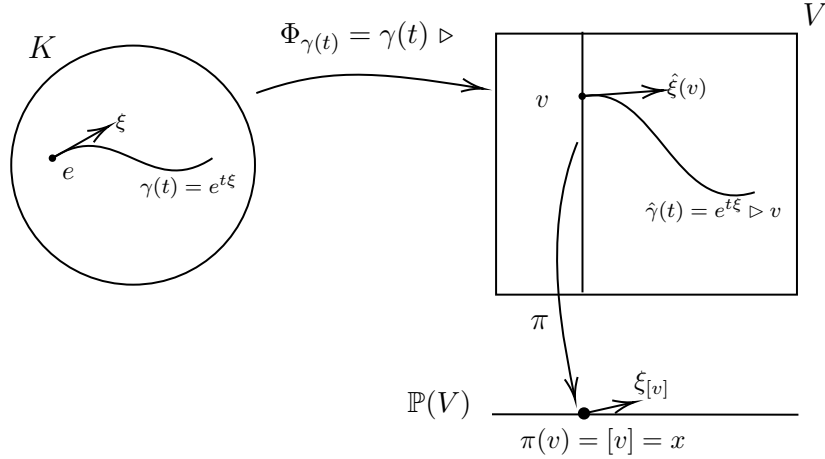


Figura 8: Esquema de la acción de  $K$  y del álgebra  $\mathfrak{k}$  sobre el espacio proyectivo.

**Proposición 7.** *La forma simpléctica en el espacio proyectivo está dada por*

$$\omega_x(A_x, B_x) = 2\text{Im}\langle \hat{A}v | \hat{B}v \rangle, \quad (21.18)$$

*esto utilizando la definición de la forma simpléctica en el espacio de Hilbert y tomando como representante de la clase de equivalencia en  $\mathbb{P}(V)$  a un vector  $v \in V$ .*

**Demostración** Para demostrar que (21.18) es una forma simpléctica en el espacio proyectivo, tenemos que demostrar que está bien definida en el espacio proyectivo (que no importa cuál representante de la clase de equivalencia utilicemos para calcularla), que es antisimétrica, cerrada y no degenerada. Comencemos demostrando que está bien definida:

$$\begin{aligned} \omega_{[e^{i\alpha}v]}(A_{[e^{i\alpha}v]}, B_{[e^{i\alpha}v]}) &= 2\text{Im}(\langle \hat{A}(e^{i\alpha}v) | \hat{B}(e^{i\alpha}v) \rangle) \\ &= 2\text{Im}(e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \langle \hat{A}(v) | \hat{B}(v) \rangle) = 2\text{Im}(\langle \hat{A}(v) | \hat{B}(v) \rangle) \\ &= \omega_{[v]}(A_{[v]}, B_{[v]}). \end{aligned} \quad (21.19)$$

Veamos ahora que  $\omega$  es antisimétrica:

$$\omega_x(A_x, B_x) = 2\text{Im}(\langle \hat{A}(v) | \hat{B}(v) \rangle) = -2\text{Im}(\langle \hat{B}(v) | \hat{A}(v) \rangle) = -\omega_x(A_x, B_x). \quad (21.20)$$

La no degeneración de  $\omega$  proviene directamente de la no degeneración del producto interno hermítico. Finalmente, demostremos que  $\omega$  es cerrada:

$$(d\omega)(x)(A_x, B_x, C_x) = \langle d(\omega_x(B_x, C_x)), A_x \rangle - \langle d(\omega_x(A_x, C_x)), B_x \rangle + \langle d(\omega_x(A_x, B_x)), C_x \rangle. \quad (21.21)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \langle d(\omega_x(B_x, C_x)), A_x \rangle &= A_x \triangleright \omega_x(B_x, C_x) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \omega(\pi(e^{tA} \triangleright v))(B_x, C_x) \right) \Big|_{t=0} \\ &= 2 \frac{d}{dt} \text{Im} \left( \langle \hat{B}(e^{tA} \triangleright v) | \hat{C}(e^{tA} \triangleright v) \rangle \right) \Big|_{t=0} \\ &= 2\text{Im} \left( \langle \rho(\hat{B}).v | \rho(\hat{C})\rho(\hat{A}).v \rangle + \langle \rho(\hat{B})\rho(\hat{A}).v | \rho(\hat{C}).v \rangle \right) \\ &= 2\text{Im} \left( -\langle \rho(\hat{C})\rho(\hat{B}).v | \rho(\hat{A}).v \rangle - \langle \rho(\hat{A}).v | \rho(\hat{B})\rho(\hat{C}).v \rangle \right), \end{aligned} \quad (21.22)$$

donde  $\rho$  se refiere a la representación matricial del álgebra actuando sobre el espacio vectorial, y en el último paso se recurre a la antihermiticidad de dicha representación (tomando en cuenta que se trata del álgebra de Lie asociada a un grupo unitario [25]). Hecha esta aclaración continuamos con el cálculo:

$$\begin{aligned} \langle d(\omega_x(B_x, C_x)), A_x \rangle &= -2\text{Im} \left( \langle \rho(\hat{C})\rho(\hat{B}).v | \rho(\hat{A}).v \rangle \right) + 2\text{Im} \left( \rho(\hat{B})\rho(\hat{C}).v | \rho(\hat{A}).v \right) \\ &= 2\text{Im} \left( \left[ \widehat{B, C} \right] (v) | \hat{A}(v) \rangle \right), \end{aligned} \quad (21.23)$$

de tal forma que

$$(d\omega)_x(A_x, B_x, C_x) = 2\text{Im} \left( \left\langle \left[ \widehat{B, C} \right] (v) | \hat{A}(v) \right\rangle - \left\langle \left[ \widehat{A, C} \right] (v) | \hat{B}(v) \right\rangle + \left\langle \left[ \widehat{A, B} \right] (v) | \hat{C}(v) \right\rangle \right). \quad (21.24)$$

Recurriendo al hecho de que los generadores son antihermíticos se puede demostrar que el resultado anterior es igual a cero:

$$\begin{aligned}
(d\omega)_x(A_x, B_x, C_x) &= 2\text{Im} \left( -\langle \rho(\hat{A})\rho(\hat{B})\rho(\hat{C}).v|v \rangle + \langle \rho(\hat{A})\rho(\hat{C})\rho(\hat{B}).v|v \rangle \right. \\
&\quad + \langle \rho(\hat{B})\rho(\hat{A})\rho(\hat{C}).v|v \rangle + \langle v|\rho(\hat{A})\rho(\hat{C})\rho(\hat{B}).v \rangle \\
&\quad \left. + \langle v|\rho(\hat{B})\rho(\hat{A})\rho(\hat{C}).v \rangle - \langle v|\rho(\hat{A})\rho(\hat{B})\rho(\hat{C}).v \rangle \right) \\
&= 2 \left( -\text{Im} \left( \langle \rho(\hat{A})\rho(\hat{B})\rho(\hat{C}).v|v \rangle \right) - \text{Im} \left( \langle \rho(\hat{A})\rho(\hat{B})\rho(\hat{C}).v|v \rangle^\dagger \right) \right. \\
&\quad + \text{Im} \left( \langle \rho(\hat{A})\rho(\hat{C})\rho(\hat{B}).v|v \rangle \right) + \text{Im} \left( \langle \rho(\hat{A})\rho(\hat{C})\rho(\hat{B}).v|v \rangle^\dagger \right) \\
&\quad \left. + \text{Im} \left( \langle \rho(\hat{B})\rho(\hat{A})\rho(\hat{C}).v|v \rangle \right) + \text{Im} \left( \langle \rho(\hat{B})\rho(\hat{A})\rho(\hat{C}).v|v \rangle^\dagger \right) \right) \\
&= 0, \tag{21.25}
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado que  $\omega$  es cerrada. ■

**Proposición 8.** *Existe un momentum map  $\mu : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathfrak{u}^*$  dado por*

$$\mu_A(x) = i\langle v|\hat{A}(v)\rangle. \tag{21.26}$$

**Demostración** Para demostrar lo anterior necesitamos que se cumpla

$$d(\mu_A(x)) = i_{A_x}\omega_x. \tag{21.27}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\langle d(\mu_A(x)), B_x \rangle &= \frac{d}{dt}\mu_A([e^{tB} \triangleright v]) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( \left\langle e^{tB} \triangleright v | i\hat{A}(e^{tB} \triangleright v) \right\rangle \right) \Big|_{t=0} \\
&= i \left( \langle \hat{B}(v)|\hat{A}(v)\rangle + \langle v|\hat{A}\hat{B}(v)\rangle \right) \\
&= i \left( \langle \hat{B}(v)|\hat{A}(v)\rangle - \langle \hat{A}(v)|\hat{B}(v)\rangle \right) \\
&= -i \left( \langle \hat{A}(v)|\hat{B}(v)\rangle - \langle \hat{A}(v)|\hat{B}(v)\rangle^\dagger \right) \\
&= 2\text{Im} \left( \langle \hat{A}(v)|\hat{B}(v)\rangle \right) = \omega_x(A_x, B_x), \tag{21.28}
\end{aligned}$$

y como el cálculo es válido para todo  $B_x \in T_x\mathbb{P}(V)$ , se cumple (21.27). ■

## 22. Teoría de representaciones

En esta sección daremos un breve resumen de teoría de representaciones, esto debido a que seguido de esto se introducirá el *Teorema de Kostant-Sternberg*, el cual nos permite identificar las órbitas simplécticas generadas por la acción de  $K$ , para lo que se hace referencia a conceptos sobre la teoría de representaciones del grupo  $K$  y su álgebra de Lie asociada. Así, el objetivo es entender el teorema de Kostant-Sternberg y poder aplicarlo a un caso particular, identificando las órbitas simplécticas y demostrando que éstas corresponden con estados separables.

Como hemos mencionado, estamos trabajando con un grupo de Lie compacto y semisimple  $K$  de transformaciones unitarias locales que actúa sobre el espacio proyectivo a través de simplectomorfismos. Asociada a este grupo tenemos al álgebra de Lie correspondiente  $\mathfrak{k}$ , y sabemos que sus representaciones en distintas dimensiones tienen una correspondencia uno a uno. Trabajaremos con el álgebra  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ , es decir, con la complejificación de  $\mathfrak{k}$ . Como sabemos por teoría de representaciones, existe una subálgebra denominada *subálgebra de Cartan*, la cual es la máxima subálgebra conmutativa  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ , la cual tiene la propiedad de que todos los generadores  $H \in \mathfrak{h}$ , pueden diagonalizarse simultáneamente, lo que nos permite definir los *vectores de peso*, dados por la lista de valores propios de los generadores de Cartan. Así,  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  puede verse como

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+. \quad (22.1)$$

Por otra parte, el espacio  $V$  sobre el que actúa el grupo de Lie puede verse como una suma directa de subespacios de peso positivos y negativos (los subespacios generados por vectores de peso positivos y negativos respectivamente):

$$V = \oplus V_\lambda, \quad H.v = \lambda(H).v \quad \forall H \in \mathfrak{h} \quad y \quad v \in V_\lambda, \quad (22.2)$$

donde  $v$  son los vectores de peso y  $\lambda$  son los pesos o valores propios de los mismos. En este caso, el espacio que queremos descomponer en subespacios de peso es el espacio de Hilbert, que es sobre el que actúan directamente los elementos de grupo.

A partir de lo anterior, ya podemos introducir el teorema de Kostant-Sternberg.

## 23. Teorema de Kostant-Sternberg

**Teorema 4.** *La órbita  $\mathcal{O} = K.x$ ,  $x = \pi(v)$ ,  $v \in V_\lambda$  para algún peso  $\lambda$  es simpléctica sí y sólo sí para cada raíz positiva  $\alpha$  con  $\lambda(H_\alpha) = 0$  se cumple que  $E_\alpha.v = 0 = E_{-\alpha}.v$ .*

### 23.1. Caso particular: estado bipartito

En esta sección vamos a ver cómo funciona el teorema de Kostant-Sternberg para un caso particular. El objetivo es identificar las órbitas simplécticas (con degeneración nula de la forma simpléctica) y ver que efectivamente éstas corresponden con estados factorizables, y posteriormente estudiar estados máximamente enredados y ver que sus órbitas son lagrangianas (con degeneración máxima de la forma simpléctica).

Estudiaremos el caso particular con el que hemos trabajado a lo largo de la tesis. Consideremos entonces un sistema compuesto por dos partículas de spin  $1/2$ . El espacio de Hilbert está dado por  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Por lo tanto, grupo de operadores unitarios que generan transformaciones locales con el que vamos a trabajar está dado por  $K = SU(2) \times SU(2)$ . De esta manera se tiene un elemento  $(g_1, g_2) \in K$  tal que  $g_1, g_2 \in SU(2)$ , que actúa sobre el espacio de Hilbert de la forma

$$(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = g_1 v_1 \otimes g_2 v_2, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2. \quad (23.1)$$

Como mencionamos, el objetivo es primero identificar las órbitas simplécticas de  $K$ . Para ello, primero identificamos el álgebra de Lie correspondiente

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2, \quad (23.2)$$

y su complejización

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \quad (23.3)$$

donde  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_2^{\mathbb{C}}$  es el álgebra de Lie cuyos generadores están dados por matrices  $2 \times 2$  con traza igual a cero. Una base estándar para esta álgebra está dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23.4)$$

donde identificamos que  $H$  es una matriz diagonal,  $X$  es triangular superior y  $Y$  es triangular inferior. Además, no hay pares de matrices que conmuten entre sí, por lo que podemos decir que  $H$  es el generador del álgebra de Cartan mientras que  $\text{Span}(X)$  es el espacio de raíces positivas y  $\text{Span}(Y)$  es el espacio de raíces negativas. A partir de los conmutadores entre las matrices de la representación dada obtenemos

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H. \quad (23.5)$$

Se tiene entonces el álgebra para  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  dada por (23.5). Ahora, para  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  un elemento está dado por  $(Z_1, Z_2)$  donde  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  y se tiene

$$[(Z_1, Z_2), (W_1, W_2)] = ([Z_1, W_1], [Z_2, W_2]), \quad (23.6)$$

de donde identificamos que los generadores de la subálgebra de Cartan son  $(H, 0)$  y  $(0, H)$  y las relaciones de conmutación están dadas por

$$\begin{aligned} [(H, 0), (X, 0)] &= 2(X, 0), & [(H, 0), (Y, 0)] &= -2(Y, 0), \\ [(X, 0), (Y, 0)] &= (H, 0), & [(0, H), (0, X)] &= 2(0, X), \\ [(0, H), (0, Y)] &= -2(0, Y), & [(0, X), (0, Y)] &= (0, H), \\ [(0, W), (Z, 0)] &= 0, & & \end{aligned} \quad (23.7)$$

a partir de lo cual encontramos la representación adjunta de los generadores de Cartan

$$\text{ad}_{(H,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{(0,H)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (23.8)$$

esto bajo el ordenamiento  $\{(H, 0), (0, H), (X, 0), (0, X), (Y, 0), (0, Y)\}$  de los generadores. A partir de la representación adjunta podemos obtener las raíces (pesos de la representación adjunta) y los subespacios generados por las mismas (espacios raíces). Se tiene entonces

$$\alpha = (2, 0), \quad V_\alpha = \text{Span}\{(X, 0)\}, \quad (23.9)$$

ya que  $\text{ad}_{(H,0)}(X, 0) = 2(X, 0)$  y  $\text{ad}_{(0,H)}(X, 0) = 0$ . De la misma manera se obtienen

$$\begin{aligned} \beta &= (0, 2), & V_\beta &= \text{Span}\{(0, X)\}, \\ -\alpha &= (-2, 0), & V_{-\alpha} &= \text{Span}\{(Y, 0)\}, \\ -\beta &= (0, -2), & V_{-\beta} &= \text{Span}\{(0, Y)\}, \end{aligned} \quad (23.10)$$

de donde vemos que las raíces  $\alpha$  y  $\beta$  se definen como raíces positivas mientras que  $-\alpha$  y  $-\beta$  como negativas, por lo tanto se identifica la descomposición de  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  como



$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad (23.11)$$

donde los subespacios positivo ( $\mathfrak{n}_+$ ), negativo ( $\mathfrak{n}_-$ ) y el subespacio de Cartan  $\mathfrak{c}$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_- &= \text{Span}\{(Y, 0), (0, Y)\}, \\ \mathfrak{n}_+ &= \text{Span}\{(X, 0), (0, X)\}, \\ \mathfrak{c} &= \text{Span}\{(H, 0), (0, H)\}. \end{aligned} \quad (23.12)$$

Tomando en cuenta cómo actúa un elemento de  $K$  sobre el espacio de Hilbert a partir de la ecuación (23.1) se pueden encontrar la versión diferencial de esta transformación para encontrar cómo actúa un elemento de  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  dado por  $(Z_1, Z_2)$  sobre el mismo espacio:

$$(Z_1, Z_2)(v_1 \otimes v_2) = \left. \frac{d}{dt} (\exp(tZ_1)v_1 \otimes \exp(tZ_2)v_2) \right|_{t=0} = Z_1v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Z_2v_2. \quad (23.13)$$

Por lo tanto, suponiendo la base canónica para  $\mathbb{C}^2$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (23.14)$$

el álgebra  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  actúa sobre  $\mathbb{C}^2$  a través de la representación (23.4), por lo tanto se tienen los generadores del álgebra de Cartan de  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  dados por

$$H \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (23.15)$$

de donde surgen los pesos y los vectores de peso

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1, 1), & v_1 &= e_1 \otimes e_1, \\ \lambda_2 &= (1, -1), & v_2 &= e_1 \otimes e_2, \\ \lambda_3 &= (-1, 1), & v_3 &= e_2 \otimes e_1, \\ \lambda_4 &= (-1, -1), & v_4 &= e_2 \otimes e_2. \end{aligned} \quad (23.16)$$

Para saber si la órbita a través de un vector de peso es simpléctica hay que verificar que  $\lambda((0, H)) \neq 0$  y  $\lambda((H, 0)) \neq 0$ , donde  $\lambda$  son los pesos de la lista dada. Tal como lo enuncia el teorema de Kostant-Sternberg en caso de que  $\lambda(H_\alpha)$  fuera cero, tendríamos que verificar también que se cumple que  $E_\alpha.v = 0 = E_{-\alpha}.v$ . Como los pesos están dados por números distintos de cero  $(n_1, n_2)$ , encontramos que en este caso particular de dos qubits solamente las órbitas a través de los vectores de peso son simplécticas en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$  y todos los vectores de peso están dentro de la misma órbita, la cual contiene a todos los estados separables. Por otro lado, las órbitas a través de estados enredados no son simplécticas.

Consideremos por ejemplo estados con grado de enredamiento máximo dados por  $e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_1$ . El objetivo es saber la dimensión del subespacio de degeneración de sus órbitas ante la acción de  $K = SU(2) \otimes SU(2)$ . Como se ha definido, el momentum map está dado por

$$\mu_A(x) = \frac{i}{2} \langle v | Av \rangle, \quad x = \pi(v). \quad (23.17)$$

Para el estado que queremos estudiar se tiene

$$\begin{aligned} \mu_{(Z_1, Z_2)}(x) &= \frac{i}{2} \langle e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_1 | (Z_1, Z_2)(e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_1) \rangle \\ &= \frac{i}{2} \langle e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_1 | Z_1 e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes Z_2 e_2 \pm Z_1 e_2 \otimes e_1 \pm e_2 \otimes Z_2 e_1 \rangle \\ &= \frac{i}{2} [\text{Tr}(Z_1) + \text{Tr}(Z_2)] = 0, \end{aligned} \quad (23.18)$$

esto debido a que  $Z_1$  y  $Z_2$  son elementos de  $\mathfrak{su}(2)$ , cuyos generadores no tienen traza.

Se sabe entonces que el momentum map en este caso es cero, lo que implica que la restricción de la forma simpléctica a la órbita es cero de igual manera. Con ello sabemos que el espacio de degeneración es todo el espacio tangente a la órbita, por lo tanto la degeneración es máxima, es decir, la órbita a través de estados máximamente enredados es lagrangiana (máximamente no simpléctica).

Al estudiar este caso particular nos cercioramos de que efectivamente, la única órbita simpléctica (cuyo espacio de degeneración es nulo) es la que contiene a todos los estados separables, mientras que la órbita que contiene a los estados máximamente enredados es lagrangiana (cuyo espacio de degeneración es todo el espacio tangente de dimensión 3, máxima para este caso), lo que generaliza el resultado obtenido por Ingemar Bengtsson del

que se habló en la parte IV de esta tesis. Concluimos entonces que la dimensión del espacio de degeneración representa una manera para cuantificar el enredamiento de forma discreta.

## 24. Medida geométrica de enredamiento para órbitas de enredamiento constante

Como se ha mencionado, la acción de un grupo  $K$  de operadores locales unitarios sobre el espacio proyectivo se da a través de simplectomorfismos. Después de todo, la forma simpléctica en el espacio proyectivo proviene de la parte imaginaria del producto interno hermítico, el cual permanece invariante ante operaciones unitarias; de esta manera, tanto la forma simpléctica como la métrica de Fubini-Study (que depende de la parte real del producto interno hermítico) son invariantes ante la acción del grupo  $K$ . Habiendo puntualizado esto, si calculamos la métrica inducida en cada una de las órbitas de enredamiento constante, y con base en ello, obtenemos objetos tales como el tensor de curvatura de Riemann, éste resultará ser independiente de cada punto de la órbita. Lo mismo se cumplirá para el tensor de Ricci y la curvatura escalar de Ricci.

El objetivo de esta sección es averiguar si existe alguna relación entre la curvatura escalar de Ricci en cada órbita y las medidas de enredamiento que hemos estudiado (entropía de Shannon y medida geométrica de enredamiento). Para ello, centraremos nuestra atención en estados bipartitos de spin  $1/2$  simetrizados, los cuales corresponden matemáticamente con sistemas de spin  $1$  [3]. Para ello trabajaremos con la representación del spin de Majorana (véase sección 13).

Los estados de spin  $s$  coherentes son aquellos cuya constelación de Majorana está dada por  $2s$  estrellas en el mismo punto (degeneradas) [14]. Un estado coherente de spin  $s$  estará dado por

$$|\hat{n}\rangle_C = |\hat{n}\rangle \otimes |\hat{n}\rangle \otimes \cdots \otimes |\hat{n}\rangle \quad 2s \text{ veces}, \quad (24.1)$$

donde  $|\hat{n}\rangle$  es un estado de spin  $1/2$  y en este caso no es necesario simetrizar el estado; como todos los factores son iguales por la definición de un estado coherente, este estado ya es simétrico y a raíz de que no es necesario hacer suma de permutaciones se cumple que los estados coherentes son estados factorizables.

Lo que haremos para calcular la medida geométrica de enredamiento para un estado de spin  $1$  (obtenido de simetrizar un producto tensorial de dos estados de spin  $1/2$ ) es identificar el estado de spin  $1$  que sea factorizable/coherente más cercano y calcular su distancia de acuerdo con la métrica de Fubini-Study.

Para simplificar el problema, sin perder generalidad podemos pensar en una constelación que represente un estado de spin 1 que tenga la forma de la figura 9, es decir, una constelación en la que ambas estrellas se encuentran en plano  $xz$ . Dado que para spin 1 solamente tenemos dos estrellas, el único parámetro que nos interesa es el ángulo entre ellas, así que podemos proponer esta constelación en particular y a partir de ello, sabemos que cualquier otra puede obtenerse a partir de rotaciones de la misma.

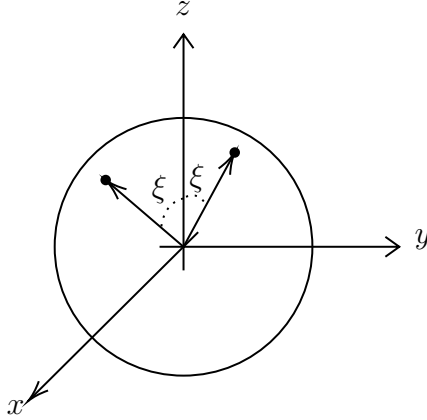


Figura 9: Constelación de Majorana para un estado arbitrario de spin 1.

A partir de la constelación de la figura 9 con estrellas en los puntos  $\hat{n}_1 = (\sin \xi, 0, \cos \xi)$  y  $\hat{n}_2 = (-\sin \xi, 0, \cos \xi)$ , obtenemos el estado de spin 1 correspondiente

$$|\Psi_\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^4\left(\frac{\xi}{2}\right)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (24.2)$$

Se puede demostrar que el estado separable más cercano es precisamente el estado coherente en el que ambas estrellas se encuentran en el polo norte [3], el cual está dado por

$$|\hat{z}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24.3)$$

A partir de lo anterior, encontramos la distancia de acuerdo con la métrica de Fubini-Study entre  $|\Psi_\xi\rangle$  y  $|\hat{z}\rangle$ , es decir, la medida geométrica de enredamiento (véase sección 16):

$$E_\xi = \arccos \left( \sqrt{|\langle \hat{z} | \Psi_\xi \rangle|^2} \right) = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^4\left(\frac{\xi}{2}\right)}} \right). \quad (24.4)$$

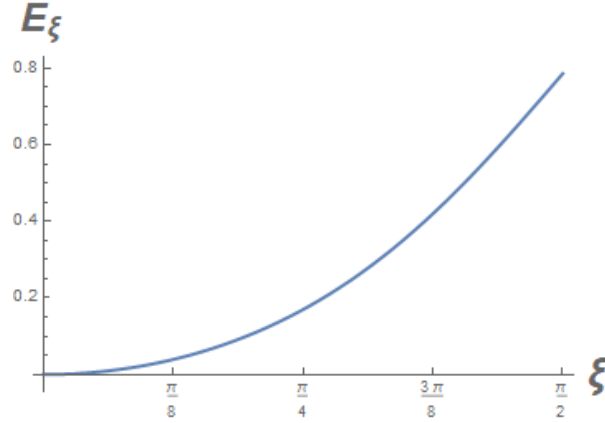


Figura 10: Medida geométrica de enredamiento en función de  $\xi$ , siendo  $2\xi$  el ángulo entre las dos estrellas de Majorana.

Como se mencionó, los estados de spin 1 pueden verse como estados de la forma

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{A} |\hat{n}_1\rangle \odot |\hat{n}_2\rangle, \quad (24.5)$$

donde  $A$  es un factor de normalización,  $\odot$  representa el producto tensorial simetrizado y  $|\hat{n}_i\rangle$  describe un estado de spin 1/2. Dado que los estados caracterizados por un mismo ángulo  $\xi$  son equivalentes (están en la misma fibra), el grado de enredamiento del estado visto como estado bipartito debe ser el mismo para todas las constelaciones de esta forma que se relacionen mediante rotaciones.

Ya que tenemos la medida geométrica de enredamiento  $E_\xi$ , calcularemos la medida de enredamiento de Shannon del sistema bipartito correspondiente. Para ello, consideramos que el estado de spin 1 que estamos estudiando puede escribirse de la forma (24.5), donde  $|\hat{n}_1\rangle$  representa un estado de spin 1/2 con  $\theta_1 = \xi$  y  $\phi_1 = 0$ , mientras que  $|\hat{n}_2\rangle$  tiene  $\theta_2 = \xi$  y  $\phi_2 = \pi$ , esto debido a las posiciones de las dos estrellas de Majorana en la figura 9. Tenemos entonces el estado bipartito ya normalizado dado por

$$|\Psi_{\text{bip}}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\xi)+1}{\sqrt{\cos(2\xi)+3}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\cos(\xi)-1}{\sqrt{\cos(2\xi)+3}} \end{pmatrix}, \quad (24.6)$$

cuya matriz de densidad es

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{(\cos(\xi)+1)^2}{\cos(2\xi)+3} & 0 & 0 & -\frac{\sin^2(\xi)}{\cos(2\xi)+3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin^2(\xi)}{\cos(2\xi)+3} & 0 & 0 & \frac{(\cos(\xi)-1)^2}{\cos(2\xi)+3} \end{pmatrix}. \quad (24.7)$$

Trazando sobre el segundo subespacio obtenemos la matriz de densidad reducida  $\rho_1$ :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{(\cos(\xi)+1)^2}{\cos(2\xi)+3} & 0 \\ 0 & \frac{(\cos(\xi)-1)^2}{\cos(2\xi)+3} \end{pmatrix}. \quad (24.8)$$

A partir de los valores propios de  $\rho_1$  calculamos el enredamiento de Shannon:

$$S_\xi = - \frac{4 \sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right) \log\left(\frac{4 \sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\cos(2\xi)+3}\right) + 4 \cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right) \log\left(\frac{4 \cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\cos(2\xi)+3}\right)}{\cos(2\xi) + 3}. \quad (24.9)$$

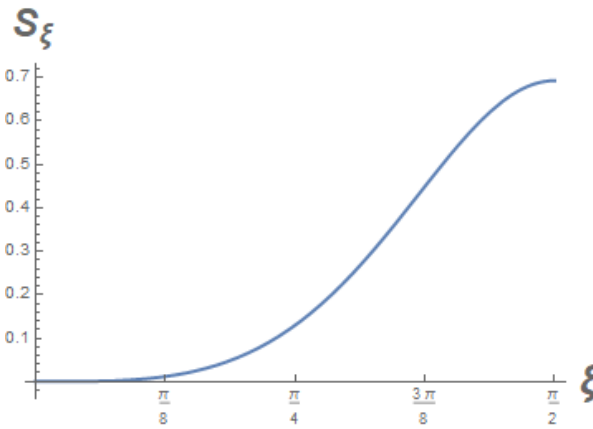


Figura 11: Medida de enredamiento de Shannon en función de  $\xi$ .

Haciendo una gráfica paramétrica (con parámetro  $\xi$ ) que relaciona la medida de enredamiento geométrica y la medida de Shannon obtenemos

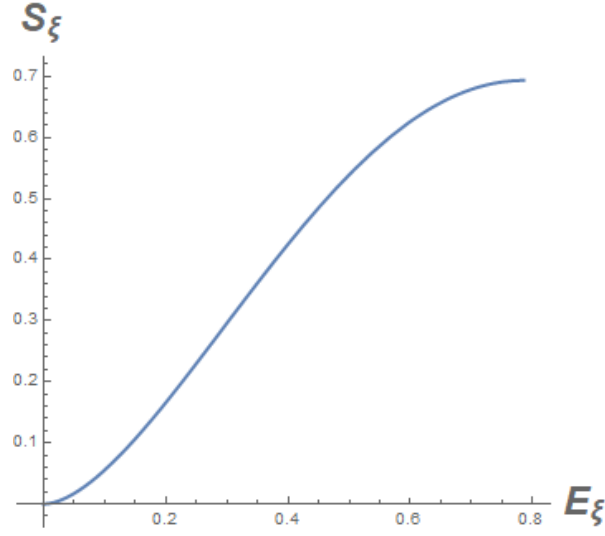


Figura 12: Relación entre medida de enredamiento geométrica y medida de Shannon.

Con base en lo anterior encontramos una expresión para la medida de enredamiento de Shannon en términos de la medida geométrica dada por

$$S_\xi = -\cos^2(E_\xi) \log(\cos^2(E_\xi)) - \sin^2(E_\xi) \log(\sin^2(E_\xi)), \quad (24.10)$$

es decir, la entropía de Shannon considerando como componentes de la distribución de probabilidad a  $\cos^2(E_\xi)$  y a  $\sin^2(E_\xi)$ .

Por último, tratando a las órbitas de enredamiento constante como subvariedades riemannianas, podemos considerar la métrica inducida sobre la fibra y calcular a partir de ésta el tensor de curvatura de Riemann, el tensor de Ricci y la curvatura escalar de Ricci, esto con el objetivo de averiguar si existen relaciones entre estas cantidades y las medidas de enredamiento que hemos calculado. En particular, sería interesante ver cómo se relacionan el escalar de Ricci sobre la órbita y el ángulo  $\xi$  asociado a la misma.

La métrica inducida por la métrica de Fubini-Study sobre cada fibra/órbita de enredamiento constante (representada por un ángulo  $\xi$  entre 0 y  $\pi/2$ ) está dada por [24]

$$k_{ij} = \text{Re}\langle S_i S_j \rangle_\xi - \langle S_i \rangle_\xi \langle S_j \rangle_\xi, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (24.11)$$

donde el subíndice  $\xi$  se refiere a que calculamos el valor esperado sobre el estado  $|\Psi_\xi\rangle$ .

A partir de la métrica inducida  $k$  se obtiene el tensor de Riemann

$$R^\nu_{\beta\delta\mu} = -T^\nu_{\gamma\beta} (T^\gamma_{\mu\delta}) + T^\nu_{\delta\gamma} T^\gamma_{\mu\beta} - T^\nu_{\mu\gamma} T^\gamma_{\delta\beta}, \quad (24.12)$$

donde los símbolos  $T^\nu_{\beta\gamma}$  dependen de las constantes de estructura del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  con la que estamos trabajando mediante<sup>15</sup>

$$T^\nu_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( C^\nu_{\beta\gamma} - C_{\gamma\beta}{}^\nu - C_{\beta\gamma}{}^\nu \right), \quad (24.13)$$

y el escalar de Ricci [24]

$$R = \frac{(\text{Tr } k)^2 - 2 \text{Tr } ((k)^2)}{2 \text{Det } k}. \quad (24.14)$$

Calculando  $k$  para un estado de spin 1, es decir, considerando la representación de los generadores de  $SU(2)$  mediante matrices  $3 \times 3$  en la ecuación (24.11), obtenemos

$$k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{\cos(2\xi)+3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\cos(2\xi)+3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4 \sin^4(\xi)}{(\cos(2\xi)+3)^2} \end{pmatrix}. \quad (24.15)$$

A partir de esto, encontramos el tensor de Ricci  $R_{\beta\mu} = R^\nu_{\beta\nu\mu}$ :

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{8 \cos^2(\xi) \cot^2(\xi)}{\cos(2\xi)+3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8 \csc^2(\xi)}{\cos(2\xi)+3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8 \sin^4(\xi)}{(\cos(2\xi)+3)^2} \end{pmatrix} \quad (24.16)$$

y calculando finalmente el escalar de Ricci obtenemos

$$R = 2. \quad (24.17)$$

Dado que  $R$  no depende de  $\xi$ , concluimos que no existe una relación entre el escalar de Ricci  $R$  y el enredamiento del sistema.

Un aspecto interesante a destacar es que es un hecho conocido que el espacio proyectivo como variedad de Kähler es un ejemplo de variedad de Einstein [16, 10], es decir, que es una variedad dotada de una métrica  $g$  tal que  $g$  es proporcional al tensor de Ricci:

<sup>15</sup>Si denotamos por  $e_\nu$  a los generadores del álgebra, se tienen las constantes de estructura  $C^\gamma_{\nu\beta}$  definidas como  $[e_\nu, e_\beta] = C^\gamma_{\nu\beta} e_\gamma$ .



$$\text{Ricc} = \lambda g, \tag{24.18}$$

donde  $\lambda$  es una constante de proporcionalidad. Las variedades de Einstein son de interés porque la métrica definida sobre ellas resulta ser solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío considerando una constante cosmológica. En el caso del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^N$  con la métrica de Fubini-Study, la constante cosmológica correspondiente se da en función de la dimensión  $N$ :

$$\text{Ricc}_{ij} = 2(N + 1)g_{ij}. \tag{24.19}$$

No obstante, al comparar la métrica  $k$  inducida por la métrica de Fubini-Study sobre las fibras con el tensor de Ricci  $\text{Ricc}$ , podemos notar que estos dos tensores no son proporcionales, por lo que las fibras u órbitas de enredamiento constante como subvariedades del espacio proyectivo no resultan ser variedades de Einstein.

## Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis estudiamos al espacio de estados cuánticos como un espacio fase dotado de una estructura simpléctica. Particularmente, tratamos el problema de estados bipartitos para los que cada subsistema posee la misma dimensión, lo que nos permitió ver a los componentes del estado en una determinada base como entradas de una matriz cuadrada. A partir de esto, se recurrió a la descomposición polar de dicha matriz cuadrada y se encontró un conjunto de coordenadas canónicas en el espacio proyectivo, el cual permite caracterizar a los estados máximamente enredados de manera que  $n$  de las  $2n$  coordenadas en el espacio proyectivo sean nulas. Con base en esto comprobamos que la subvariedad de estados máximamente enredados es una subvariedad lagrangiana del espacio de estados [6], por lo que puede interpretarse como un espacio de configuración (ya sea de posiciones o de momentos). A pesar de que no encontramos una interpretación física para determinar si existe alguna propiedad de los estados con máximo enredamiento que nos permita considerar al espacio en el que viven como dicho espacio de configuración, incluimos un resultado que generaliza esta característica; estudiando las órbitas generadas por la acción de grupo de operadores locales unitarios sobre el espacio de estados, se encuentra que dicho espacio puede foliarse por subvariedades de enredamiento constante, sobre las cuales la degeneración de la forma simpléctica es también constante ya que el grupo actúa a través de simplectomorfismos. Se detalló entonces una medida discreta de enredamiento [51] que surge de la degeneración de la forma simpléctica al restringirla a subvariedades de enredamiento constante. Así, el caso límite en el que los estados tienen enredamiento máximo coincide con una degeneración máxima de la forma simpléctica, mientras que el otro caso límite en el que los estados son factorizables, coincide con una degeneración nula de la forma simpléctica (la única órbita simpléctica).

Dado que no existe una forma estándar para cuantificar el enredamiento en el caso de estados multipartitos o en el caso de estados mixtos, el estudio de distintas medidas de enredamiento es aún un problema abierto. Por ello, como trabajo futuro, estudiar sistemas mixtos o compuestos por más de dos subsistemas y ver si esta medida discreta de enredamiento puede generalizarse podría resultar útil.

Se requiere una manera para caracterizar el enredamiento que no implique necesariamente la búsqueda de bases privilegiadas (como es el caso de la descomposición de Schmidt) y que pueda ser generalizada. Ya que las cantidades geométricas no dependen de la base en la que se está trabajando el problema, una medida de enredamiento basada en cantidades geométricas puede ser una buena alternativa, principalmente considerando que existen indicios de que la geometría simpléctica desempeña un papel importante para la descripción del enredamiento cuántico.

En la parte V de esta tesis, a partir de la representación estelar de Majorana estudiamos estados de spin 1, los cuales es sabido que son matemáticamente equivalentes al producto tensorial simetrizado de dos estados de spin  $1/2$ , por lo que pueden ser tratados como

estados bipartitos. Con base en esto encontramos una relación entre la medida geométrica de enredamiento y la medida de entropía de Shannon para estos estados de spin 1; estudiar si hay manera de relacionar estas dos medidas para estados generales es parte del trabajo futuro de este proyecto. Para ello, se requiere seguir estudiando las propiedades geométricas que caracterizan a las subvariedades de enredamiento constante que surgen como una foliación del espacio de estados cuánticos.

Finalmente, debido a que la acción de operadores locales unitarios preserva el producto interno hermítico en el espacio de Hilbert, y dado que tanto la métrica como la forma simpléctica en el espacio proyectivo provienen de dicho producto interno, concluimos que la acción de estos operadores deja invariante tanto la métrica como la forma simpléctica a lo largo de las órbitas de enredamiento constante. Teniendo esto en mente y siguiendo en el camino de la representación estelar de Majorana y los estados de spin 1 vistos como estados bipartitos, estudiamos las órbitas de enredamiento constante como subvariedades riemannianas sobre las cuales se tiene una métrica inducida por la métrica de Fubini-Study en el espacio de estados. A través de esto, incluimos el cálculo de la métrica inducida, la cual, efectivamente, resulta ser invariante sobre cada una de las órbitas. Esto nos permitió calcular el tensor de Ricci y el escalar de Ricci asociados a cada órbita [24], con el objetivo de entender si la curvatura escalar de Ricci sobre cada órbita tiene alguna relación directa con el enredamiento de la misma. Se concluyó que no existe dicha relación y que las órbitas no son variedades de Einstein, a diferencia del espacio proyectivo, cuya métrica sí es solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica dada según la dimensión del espacio.

**Parte VI**  
**Apéndices**

# Apéndice A

## Descomposición polar

Un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  puede escribirse de la forma  $z = x + iy$ , donde  $x$ ,  $y$  son ambos números reales, y por lo tanto un número complejo vive en un espacio de dos dimensiones que puede verse como el plano  $xy$ , donde el eje  $x$  representa la parte real y el eje  $y$  representa la parte imaginaria del mismo. Es bien sabido que los números complejos también pueden escribirse en su forma polar considerando que se tiene un punto en  $\mathbb{C}$  y especificando su distancia al origen y el ángulo polar, es decir

$$z = up \tag{0.1}$$

donde la información acerca de la distancia al origen está dada por  $p$ , que es un número real y positivo (o cero, en caso de que  $z = 0$ ) y el ángulo polar está dado por la cantidad  $u$ , donde  $|u| = 1$ , por lo que, al contener  $u$  la información imaginaria de  $z$ , sabemos que será de la forma  $u = e^{i\theta}$ , no obstante, con la coordenada polar  $\theta$  siempre hay problemas respecto a la continuidad y periodicidad ( $\theta$  no es único), por lo tanto, en vez de escribir  $p$  como lo mencionamos, podemos escribirlo como  $p = e^x$ , donde  $x \in \mathbb{R}$  (y a diferencia de  $\theta$  sí es único) y  $|u| = 1$  [25]. Ahora, lo que queremos hacer es generalizar esta descomposición polar para  $GL(n, \mathbb{C})$ .

**Teorema 5.** *Toda matriz  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  puede escribirse como [25]*

$$A = PU \tag{0.2}$$

con  $P$  y  $U$  únicas, donde  $P$  es una matriz hermítica y positiva semidefinida y  $U$  es una matriz unitaria.

**Demostración 6.** *Para demostrar lo anterior lo primero que haremos es definir una función  $f(A)$  de la matriz  $A$ , siendo ésta positiva semidefinida y hermítica, particularmente queremos definir la raíz cuadrada de  $A$ . Para ello, lo primero que hacemos es construir  $AA^\dagger$ , cuyo conjugado hermítico es*

$$(AA^\dagger)^\dagger = AA^\dagger, \tag{0.3}$$

y para la cual se cumple

$$\langle v, AA^\dagger v \rangle = \langle A^\dagger v, A^\dagger v \rangle \geq 0, \quad (0.4)$$

para todo  $v \neq 0$ , esto debido a las propiedades del producto interno. Las dos condiciones anteriores implican que  $AA^\dagger$  es hermítica y no negativa por construcción. Ahora, considerando una base ortonormal de eigenvectores, podemos, mediante un cambio de base, escribir  $AA^\dagger$  en su forma diagonal como

$$AA^\dagger = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} M^{-1} \quad (0.5)$$

donde  $M$  es una matriz de cambio de base y  $\lambda_i$  son los eigenvalores de  $AA^\dagger$  (los cuales son no negativos). Ahora, para obtener la función  $f(AA^\dagger)$ , lo que tenemos que hacer es utilizar y calcular  $f(\lambda_i)$ , en particular para la raíz cuadrada tendremos

$$M \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} M^{-1}, \quad (0.6)$$

El siguiente paso es regresar a la base original mediante  $M^{-1}$ , mediante lo cual obtenemos, por definición,  $\sqrt{AA^\dagger}$ . Notemos que, como los valores de  $\lambda_i$  son no negativos, los valores de  $\sqrt{\lambda_i}$  también lo serán (consideramos solamente la raíz positiva) por lo que la raíz definida es única para cada matriz.

Ahora que hemos definido la raíz cuadrada de una matriz no negativa y hermítica notemos que al escribir la matriz  $A$  como  $PU$  tenemos

$$AA^\dagger = PUU^\dagger P^\dagger = P^2, \quad (0.7)$$

por lo tanto  $P = \sqrt{AA^\dagger}$ , y como ya hemos demostrado  $AA^\dagger$  es ya positiva y hermítica por definición (justo lo que queríamos de  $P$ ). Ahora sólo falta demostrar que escribiendo  $A$  como el producto  $PU$ , la matriz  $U$  correspondiente es unitaria. Para ello tenemos

$$U = P^{-1}A = [(AA^\dagger)^{1/2}]^{-1}A, \quad (0.8)$$

y por lo tanto

$$UU^\dagger = P^{-1}A = [(AA^\dagger)^{1/2}]^{-1}AA^\dagger[(AA^\dagger)^{1/2}]^{-1} = I. \quad (0.9)$$

■

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, pero ahora con  $P^2 = A^\dagger A$ , podemos demostrar que también se puede hacer una descomposición polar como  $A = UP$ , donde  $U$  y  $P$  tendrán las mismas propiedades que hemos descrito pero serán en general distintas para una misma matriz  $A$ .

# Apéndice B

## Teorema de Darboux en mecánica cuántica

En esta sección comprenderemos con más detalle la importancia de este teorema, además de aplicar, en el contexto de la mecánica cuántica, una serie de instrucciones para encontrar un conjunto de coordenadas canónicas apropiado para un sistema particular. A partir de ello podremos ver este teorema desde otro enfoque, ya que además de asegurarnos la existencia de las coordenadas canónicas mencionadas, el teorema de Darboux tiene también una naturaleza instructiva. Como ejemplo, siguiendo la demostración del teorema presentada en [1] mostramos el caso de  $\mathbb{C}P^2$ , es decir, un sistema cuántico de spin 1.

Comenzamos considerando el estado cuántico  $Z$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ .

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ x^2 + iy^2 \\ x^3 + iy^3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}, \quad (0.1)$$

donde, al pasar al espacio  $\mathbb{R}^6$  con coordenadas reales, la forma simpléctica está dada por  $\Omega = dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3$ . Ahora, dada una parametrización para el estado cuántico

$$Z = \frac{e^{i\eta}}{\sqrt{1 + e^\rho}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\rho/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \\ e^{\rho/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$



el cual está normalizado, vamos a encontrar las coordenadas  $x^0, x^1, x^2, y^0, y^1, y^2$  para encontrar  $\mathcal{Z}$ :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\sqrt{1+e^\rho}} \begin{pmatrix} \cos \eta \\ e^{\rho/2} \cos(\theta/2) \cos(\eta + \phi_1 + \phi_2) \\ e^{\rho/2} \sin(\theta/2) \cos(\eta + \phi_1 - \phi_2) \\ \sin \eta \\ e^{\rho/2} \cos(\theta/2) \sin(\eta + \phi_1 + \phi_2) \\ e^{\rho/2} \sin(\theta/2) \sin(\eta + \phi_1 - \phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}. \quad (0.3)$$

A partir de lo anterior, podemos calcular las derivadas exteriores  $dx^1, dx^2, dx^3, dy^1, dy^2$  y  $dy^3$ , y con base en eso obtenemos la forma simpléctica (que no depende de  $\eta$ ) en  $M^4$  con la proyección  $\pi : S^5 \rightarrow M^4$  que resulta simplemente de ignorar  $\eta$ . Esta forma simpléctica está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3 \\ &= \frac{1}{4+4\cosh\rho} d\rho d\phi_1 + \frac{\cos\theta}{4+4\cosh\rho} d\rho d\phi_2 - \frac{e^\rho \sin\theta}{2+2e^\rho} d\theta d\phi_2. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Ahora, seleccionamos la función  $p_1 = p_1(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{x} = (\rho, \theta, \phi_1, \phi_2)$ , de forma que su diferencial en  $\mathbf{x}_0$  (que en este caso seleccionamos como el origen) sea diferente de cero. Esta función la seleccionamos como  $p_1 = \rho$ . Calculando  $dp_1$  obtenemos

$$d\rho = dp_1 = \left[ \frac{1}{4+4\cosh\rho} d\rho d\phi_1 + \frac{\cos\theta}{4+4\cosh\rho} d\rho d\phi_2 - \frac{e^\rho \sin\theta}{2+2e^\rho} d\theta d\phi_2 \right] [\cdot, P_1], \quad (0.5)$$

donde  $P_1$  es el campo vectorial hamiltoniano  $P_1 = P^\rho \partial_\rho + P^\theta \partial_\theta + P^{\phi_1} \partial_{\phi_1} + P^{\phi_2} \partial_{\phi_2}$ .

Evaluando (0.5) obtenemos

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{1}{4+4\cosh\rho} (P^{\phi_1} d\rho - P^\rho P d\phi_1) + \frac{\cos\theta}{4+4\cosh\rho} (P^{\phi_2} d\rho - P^\rho d\phi_2) \\ &\quad - \frac{e^\rho \sin\theta}{2+2e^\rho} (P^{\phi_2} d\theta - P^\theta d\phi_2), \end{aligned} \quad (0.6)$$

por lo tanto

$$\frac{P^{\phi_1} d\rho}{4+4\cosh\rho} = d\rho \quad \rightarrow \quad P^{\phi_1} = 4+4\cosh\rho, \quad (0.7)$$

que es la única componente distinta de cero en el campo, así que

$$P_1 = (0, 0, 4 + 4 \cosh \rho, 0). \quad (0.8)$$

El siguiente paso es seleccionar el hiperplano  $(\rho, \theta, \phi_2)$  que pasa por  $\mathbf{x}_0$ , el cual está contenido en  $M^4$  y está definido al tomar  $\phi_1 = 0$ . Resolviendo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = P_1$  podemos calcular el flujo  $P_1^t$  con condiciones de que a  $\mathbf{x}(0) = (\rho(0), \theta(0), 0, \phi_2(0))$ . Entonces tenemos

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi}_2 = 0, \quad \dot{\phi}_1 = 4 + 4 \cosh \rho, \quad (0.9)$$

por lo tanto

$$\phi_1(t_0) = (4 + 4 \cosh \rho)t_0, \quad \rightarrow \quad t = \frac{\phi_1}{4 + 4 \cosh \rho} = q_1(\mathbf{x}). \quad (0.10)$$

Calculamos el campo vectorial hamiltoniano correspondiente:

$$\begin{aligned} dq_1 &= \left[ \frac{1}{4 + 4 \cosh \rho} d\rho d\phi_1 + \frac{\cos \theta}{4 + 4 \cosh \rho} d\rho d\phi_2 - \frac{e^\rho \sin \theta}{2 + 2e^\rho} d\theta d\phi_2 \right] [\cdot, Q_1] \\ &= \frac{1}{4 + 4 \cosh \rho} d\phi_1 + \frac{\sinh \rho \phi_1}{4(\cosh \rho + 1)^2} d\rho, \end{aligned} \quad (0.11)$$

con lo que se obtiene

$$Q^\rho = -1, \quad Q^{\phi_1} = -\phi_1 \tanh(\rho/2), \quad Q^\theta = -\frac{\cot \theta}{1 + e^\rho}, \quad Q^{\phi_2} = 0. \quad (0.12)$$

Es fácilmente verificable que el paréntesis de Poisson es igual a 1:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(P_1, Q_1) &= \left[ \frac{1}{4 + 4 \cosh \rho} d\rho d\phi_1 + \frac{\cos \theta}{4 + 4 \cosh \rho} d\rho d\phi_2 - \frac{e^\rho \sin \theta}{2 + 2e^\rho} d\theta d\phi_2 \right] [P_1, Q_1] \\ &= \frac{1}{4 + 4 \cosh \rho} [-Q_1^\rho P_1^{\phi_1}] = \frac{1}{4 + 4 \cosh \rho} [1(4 + 4 \cosh \rho)] = 1. \end{aligned} \quad (0.13)$$

Considerando la subvariedad definida por  $p_1 = q_1 = 0$ , que implica que  $\rho = \phi_1 = 0$ , hacemos el mismo procedimiento, esto seleccionando una función  $p_2(\theta, \phi_2)$  arbitraria que cumpla con que su diferencial sea diferente de cero en  $\mathbf{x}_0$ . En este caso, seleccionamos  $p_2 = \theta$  y calculamos el campo  $P_2$ . Ahora, la forma simpléctica en  $M^2$  será

$$\tilde{\omega}_{M^2} = -\frac{\sin \theta}{4} d\theta d\phi_2. \quad (0.14)$$

Para calcular el campo  $P_2$  tenemos

$$d\theta = dp_2 = -\frac{\sin \theta}{4} d\theta d\phi_2 [\cdot, P_2] = -\frac{\sin \theta}{4} (P_2^{\phi_2} d\theta - P_2^\theta d\phi_2), \quad (0.15)$$

así que  $P_2^{\phi_2} = -\frac{4}{\sin \theta}$ , y  $P_2^\theta = 0$ , entonces

$$P_2 = \left( 0, -\frac{4}{\sin \theta} \right). \quad (0.16)$$

Resolviendo las ecuaciones  $\theta' = 0$  y  $\phi_2' = -\frac{4}{\sin \theta}$ , con respecto a un parámetro  $s$  y, análogamente a lo que hicimos anteriormente, obtenemos

$$\phi_2(s_0) = -\frac{4}{\sin \theta_0} s_0 \quad \rightarrow \quad s = q_2 = -\frac{\sin \theta}{4} \phi_2, \quad (0.17)$$

Ahora calculamos el campo  $Q_2$  a partir de

$$dq_2 = \left( -\frac{\cos \theta}{4} \phi_2 d\theta - \frac{\sin \theta}{4} d\phi_2 \right) = -\frac{\sin \theta}{4} (Q_2^{\phi_2} d\theta - Q_2^\theta d\phi_2), \quad (0.18)$$

obteniendo

$$Q_2^\theta = -1, \quad Q_2^{\phi_2} = \cot \theta \phi_2, \quad \rightarrow \quad Q_2 = (-1, \cot \theta \phi_2). \quad (0.19)$$

Calculando el paréntesis de Poisson entre ambos campos, podemos verificar que éste es igual a 1:

$$\tilde{\omega}_{M_2}(P_2, Q_2) = \left[ -\frac{\sin \theta}{4} d\theta d\phi_2 \right] [P_2, Q_2] = -\frac{\sin \theta}{4} [-P_2^{\phi_2} Q_2^\theta] = \frac{-\sin \theta}{4} \left[ \frac{4}{\sin \theta} (-1) \right] = 1$$

El siguiente paso para encontrar el sistema de coordenadas canónicas es hacer evolucionar el punto de la preimagen a través del flujo  $P_1^2 Q_1^t$ . Para ello, calculemos primero las curvas integrales de  $Q_1^t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -1, & \rho(t) &= -t + \rho_0, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\cot \theta}{1 + e^\rho} \\ \dot{\phi}_1 &= -\phi_1 \tanh(\rho/2) \\ \dot{\phi}_2 &= 0, & \phi_2 &= cte = c, \end{aligned} \quad (0.20)$$

y ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\dot{\theta} = -\frac{\cot \theta}{1 + e^{-t+\rho_0}} \quad \rightarrow \quad \theta(t) = \arccos [c_1(e^{\rho_0} + e^t)], \quad (0.21)$$

donde  $c_1$  es una constante que determinamos a partir de condiciones iniciales. Sea  $\theta(0) = \theta_0$  obtenemos

$$\cos \theta_0 = c_1 e^{\rho_0} \quad \rightarrow \quad c_1 = \cos \theta_0 e^{-\rho_0}. \quad (0.22)$$

Resolviendo la ecuación diferencial para  $\phi_1$  encontramos

$$\dot{\phi}_1(t) = -\phi_1 \tanh \left( \frac{-t + \rho_0}{2} \right) \quad \rightarrow \quad \phi_1(t) = c_2 \cosh^2 \left( \frac{-t + \rho_0}{2} \right), \quad (0.23)$$

donde  $c_2$  también la determinamos a partir de considerar  $\phi_1(0) = \phi_{1_0}$ , con lo que obtenemos

$$c_2 = \phi_{1_0} \operatorname{sech}^2(\rho_0/2). \quad (0.24)$$

Tomando como condición inicial  $Q_1^t(\mathbf{x}_0) = (0, \bar{\theta}, 0, \bar{\phi}_2)$ , evolucionamos a partir del flujo encontrado y obtenemos

$$Q_1^t(\bar{x}) = (-t, \arccos [\cos \bar{\theta}(1 + e^t)], 0, \bar{\phi}_2). \quad (0.25)$$

El siguiente paso es aplicar a este punto el flujo  $P_1^2$  encontrado en (0.9), obteniendo

$$P_1^s Q_1^t(\bar{x}) = (-t, \arccos [\cos \bar{\theta}(1 + e^t)], 4(1 + \cosh t)s, \bar{\phi}_2). \quad (0.26)$$

Ahora, llamamos  $\mathbf{x}$  a las coordenadas de este punto y encontramos  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ :

$$\theta = \arccos [\cos \bar{\theta}(1 + e^t)] \quad \rightarrow \quad \bar{\theta} = \arccos \left( \frac{\cos \theta}{1 + e^{-\rho}} \right) \quad (0.27)$$

$$\bar{\phi}_2 = \phi_2, \quad (0.28)$$

esto considerando que  $-t = \rho$ . El siguiente paso es asignar al punto  $\mathbf{x}$ , que ya está en  $M^4$ , las coordenadas de su preimagen en  $M^2$ , esto debido a que un  $\mathbf{x}$  en  $M^4$  se obtiene a partir de

evolucionar un punto único de la preimagen definido por  $p_2$  y  $q_2$ , así que podemos extender dichas coordenadas. Esto lo hacemos encontrando  $(p_2(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})), q_2(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})))$ . Recordando que  $p_2 = \theta$  y  $q_2 = -\frac{\sin \theta}{4}\phi_2$ , tenemos

$$p_2(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = \bar{\theta} = \arccos \left( \frac{\cos \theta}{1 + e^{-\rho}} \right) \quad (0.29)$$

$$q_2(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = -\frac{\sin \bar{\theta}}{4}\bar{\phi}_2 = -\frac{1}{4} \sin \left( \arccos \left[ \frac{\cos \theta}{1 + e^{-\rho}} \right] \right) \phi_2 = -\frac{\phi_2}{4} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{(1 + e^{-\rho})^2}}. \quad (0.30)$$

Dichas coordenadas, junto con

$$p_1 = \rho, \quad q_1 = \frac{\phi_1}{4(1 + \cosh \rho)}, \quad (0.31)$$

forman entonces un conjunto de coordenadas canónicas definidas en  $M^4$ . El último paso para verificar que esto es cierto, es invertir las relaciones y encontrar  $\rho, \theta, \phi_1, \phi_2$  en términos de  $q_1, q_2, p_1, p_2$  de forma que podamos hacer el pullback de la forma simpléctica (0.4) y obtengamos una matriz de la forma

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (0.32)$$

Para ello, encontramos las relaciones inversas dadas por

$$\rho = p_1, \quad \phi_1 = 4q_1(1 + \cosh p_1) \quad (0.33)$$

$$\theta = \arccos [\cos p_2(1 + e^{-p_1})] \quad (0.34)$$

$$\phi_2 = -\frac{4q_2}{\sin p_2}, \quad (0.35)$$

sustituyendo esto en (0.4) con los diferenciales correspondientes, obtenemos (0.32).

# Apéndice C

## Matrices de densidad reducidas

La traza de un operador  $\hat{A}$  representado por una matriz  $A$  expresado en una base  $|a'\rangle$  se define como

$$\text{Tr}\hat{A} = \sum_{a'} \langle a'|A|a'\rangle. \quad (0.1)$$

Operacionalmente, esto equivale a sumar los elementos diagonales de la matriz. Por ejemplo, para una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

se tiene

$$\text{Tr}\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} = a + d. \quad (0.3)$$

Para hacer la operación de traza parcial en uno de los subsistemas (considerando un sistema compuesto bipartito), tenemos que hacer el mismo procedimiento con los elementos de la base del subsistema sobre el que se desea hacer la traza parcial. Por ejemplo, para una matriz de dimensión 4 correspondiente a una matriz de densidad para un sistema bipartito compuesto por dos partículas de spin 1/2:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (0.4)$$

se tienen como elementos de base en el espacio de la partícula 1:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0.5)$$

y en el espacio de la partícula 2:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (0.6)$$

Dicho lo anterior, se tienen las matrices de densidad reducidas

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho = b_1^T \rho b_1 + b_2^T \rho b_2 = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (0.7)$$

$$\rho_2 = \text{Tr}_1 \rho = a_1^T \rho a_1 + a_2^T \rho a_2 = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} + \rho_{34} \\ \rho_{21} + \rho_{43} & \rho_{22} + \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (0.8)$$

# Bibliografía

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Second Edition)*. Springer Verlag, 1989.
- [2] A. Ashtekar and T. Schilling. Geometrical Formulation of Quantum Mechanics. In A. Harvey, editor, *On Einstein's Path*, pages 23–65. Springer, 1999.
- [3] M. Aulbach, D. Markham, and M. Murao. The maximally entangled symmetric state in terms of the geometric measure. *New J. Phys.*, 12:073025, 2010.
- [4] W. Ballmann. *Lectures on Kähler Manifolds*. Cambridge University Press, 2007.
- [5] J. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7:2333–2346, 1973.
- [6] I. Bengtsson. A Curious Geometrical Fact About Entanglement. *AIP Conference Proceedings*, 962, 2007.
- [7] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] I. Bengtsson, J. Brännlund, and K. Życzkowski.  $CP^n$ , or, entanglement illustrated. *Int. J. Mod. Phys. A*, 17:4675, 2002.
- [9] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States (2nd Ed.)*. Cambridge University Press, 2017.
- [10] A Besse. *Einstein Manifolds (Classics in Mathematics)*. Springer, 2007.
- [11] P. Bokulich and A. Bokulich. Niels Bohr's Generalization of Classical Mechanics. *Foundations of Physics*, 35:347–371, 2005.
- [12] J. Wheeler C. Misner, K. Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [13] L. Chen, M. Aulbach, and M. Hajdušek. Comparison of different definitions of the geometric measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 89:042305, 2014.
- [14] C. Chryssomalakos, E. Guzmán, and E. Serrano. Geometry of spin coherent states. *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical*, 51:165202, 2018.



- [15] R. V. Gamkrelidze (ed.). *Geometry I*, volume 28 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1991.
- [16] T. Eguchi, P. Gilkey, and A. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics Reports*, 66:213–393, 1980.
- [17] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [18] A. Martin F. Halzen. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. Wiley, 1984.
- [19] R. Feynman. *Quantum Electrodynamics*. Westview Press, 1998.
- [20] T. Frankel. *The Geometry of Physics (Second Edition)*. Cambridge University Press, 2004.
- [21] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1982.
- [22] R. Gilmore. *Lie Groups, Physics, and Geometry*. Cambridge University Press, 2008.
- [23] B. Greene. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*. Vintage Books, 2000.
- [24] E. Guzmán. *Geometric Study of the Space of a Spin via the Majorana Representation*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2018.
- [25] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer, 2003.
- [26] M. Hamermesh. *Group theory*. Addison-Wesley, 1962.
- [27] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. American Mathematical Society, 2001.
- [28] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223:1–8, 1996.
- [29] R. Hubener, M. Kleinmann, T.-C. Wei, C. González-Guillén, and O. Gühne. Geometric measure of entanglement for symmetric states. *Phys. Rev. A*, 80:032324, 2009.
- [30] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry II*. J. Wiley, 1969.
- [31] B. Kostant and B. Sternberg. Symplectic projective orbits. In Young G.S. (eds) Hilton P.J., editor, *New Directions in Applied Mathematics.*, pages 81– 84. Springer, New York, 1982.
- [32] M. Kuś and K. Życzkowski. Geometry of entangled states. *Phys. Rev. A*, 63:032307, 2001.

- [33] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1976. Third edition.
- [34] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press, 1981. Third edition.
- [35] Aulbach M. Classification of entanglement in symmetric states. *Int. J. of Quantum Inf.*, 10(7):1230004, 2012.
- [36] A. Macías and A. Camacho. On the incompatibility between quantum theory and general relativity. *Physics Letters B*, 663:99–102.
- [37] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 9:43–50, 1958.
- [38] J. Maldacena. The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38:1113–1133, 1999.
- [39] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer Verlag, 1999.
- [40] A. Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover Publications, 1999.
- [41] F. Mintert, C. Viviescas, and A. Buchleitner. Basic Concepts of Entangled States. *Lecture Notes in Physics*, 768:61–86, 2009.
- [42] F. D. Murnaghan. *The unitary and rotation groups*. Spartan Books, Washington D. C., 1962.
- [43] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 1990.
- [44] C. Nash and S. Sen. *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, 1983.
- [45] V. Ovsienko and S. Tabachnikov. *Projective Differential Geometry Old and New*. Cambridge University Press, 2005.
- [46] Anirban Pathak. *Elements of quantum computation and quantum communication*. CRC Press, 2013.
- [47] A. Peres. Separability Criterion for Density Matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, 1996.
- [48] M. Raamsdonk. Lectures on gravity and entanglement.
- [49] B. A. Rozenfel'd. *The geometry of Lie groups*. Kluwer, New York, 1997.
- [50] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison-Wesley, 1994.

- [51] A. Sawicki, A. Huckleberry, and M. Kuś. Symplectic geometry of entanglement. *Commun. Math. Phys.*, 305:441–468, 2011.
- [52] A. Shimony. Degree of entanglement. *Ann. New York Acad. Scien.*, 755(1):675–679.
- [53] A. Cannas Da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.
- [54] M. Sinolecka, K.l Zyczkowski, and Marek Kuś. Manifolds of Equal Entanglement for Composite Quantum Systems. *Acta Physica Polonica B*.
- [55] M. Vaquero. *On the Geometry of the Hamilton-Jacobi Equation*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 2015.
- [56] T. Wei and P. M. Goldbart. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Phys. Rev. A*, 68:042307, 2003.
- [57] S. Weinberg. *Dreams of a final theory*. Vintage Books, 1994.