



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA
Instituto de Ingeniería
Termofluidos

Modelo matemático de interacción fluido-estructura en
conductos deformables sujetos a flujos pulsantes

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:
GERARDO JUÁREZ CHÁVEZ

Tutor
Dr. Enrique Guzmán Vázquez
Instituto de Ingeniería



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado Asignado

Presidente: **Dr. Federico Méndez Lavielle**
Secretario: **Dr. Marco Antonio Reyes Huesca**
1^{er} vocal: **Dr. Enrique Guzmán Vázquez**
2^{do} vocal: **Dr. Pablo Luis Rendón Garrido**
3^{er} vocal: **Dr. Francisco José Sánchez Sesma**

Agradecimientos

Me veo obligado a comenzar con agradecimientos relacionados con el trabajo en sí, dejando así agradecimientos personales al final. Agradezco a Marcel Ramírez, a Alan Olvera y a Carlos Echeverría por la continua colaboración y amistad que me han ofrecido desde incluso antes de la Maestría. Marcel ha sido de particular relevancia por sus discusiones intelectuales y retroalimentación respecto al tema de modelado matemático. Agradezco su amabilidad conmigo en diversas ocasiones y su generosidad al presentarme a otros colegas en el medio de investigación, así como su disposición a revisar mi desarrollo analítico. A Carlos Echeverría le agradezco por siempre poner mis pies en la tierra cuando se trató de temas experimentales, de invitarme a dar clase en su asignatura en la Facultad de Ciencias o de asesoría personal sobre un futuro en la investigación. Espero poder contar con ellos como colegas y amigos, independientemente de en qué país me encuentre cuando pasen los años.

A Alan Olvera debo agradecerle por una plétora de experiencias y contribuciones. En primer lugar, sin su trabajo experimental esta tesis no tendría sentido de ser. Una vez más, pero quizás la última vez, trabajamos en conjunto, haciendo lo mejor que cada uno hacer. Le agradezco por su gran amistad y por recordarme cuál es el justo valor de las cosas, aún en tiempos adversos. Estoy incierto de qué camino escogerá al seguir adelante, pero espero que pueda contar con él como amigo y, de ser posible, como colega en años a seguir. Si algo le deseo es que tenga un futuro que merezca, dada su gran capacidad como profesionista y como persona, digno de todo el esfuerzo que ha puesto (¡incluso en ocasiones que ha sido por seguirme la corriente!).

Le agradezco mucho al Dr. Enrique Guzmán por la experiencia que he podido tener en el Instituto de Ingeniería como su estudiante, por todo lo que me ha enseñado de diversos temas y aspectos de la vida, pero sobre todo por el continuo apoyo que me ha ofrecido. Pasando a un ámbito más personal, le agradezco a mis padres por toda la paciencia que me han tenido durante una de las épocas más difíciles de mi vida. También quiero disculparme por aquellas ocasiones en las que no los recibí de la mejor manera. Sé que no ha sido fácil para ellos, pero quiero que sepan que en verdad aprecio la compañía y el apoyo. Sin ello, me hubiera costado mucho más salir adelante y mantener los ritmos y estándares de calidad que demanda la investigación científica.

Finalmente, cierro con Alan Ituriel. Hasta la fecha sigo dolido, pero estoy convencido de que detrás del asunto no hay una respuesta simple. A él le agradezco por el papel funda-

mental que ha jugado en mi vida, como mejor amigo y lo más cercano que he tenido a un hermano, y la fuente de inspiración que siempre ha representado para mí. Sin importar qué piensen otras personas, debo dejar constancia de que detrás de él hay un hombre que ha luchado toda su vida por construir un sueño, a pesar de haberse enfrentado con el fracaso una y otra vez. Alguien que ha confrontado problemas en la vida mucho más complicados de los que yo he experimentado, lo haya mencionado explícitamente o no. Alguien que está haciendo la diferencia por el país. Le deseo éxito en su lucha y que encuentre la felicidad, incluso si ya no puedo ser parte de su vida.

Resumen

En el presente trabajo se expone el desarrollo de la solución analítica exacta para el problema de interacción fluido-estructura en conductos elásticos isotropos sujetos al flujo pulsante de un fluido viscoso. Si bien soluciones similares se han obtenido anteriormente, pocas han incluido el nivel de detalle de la que se presenta aquí. En el transcurso del trabajo se explicarán con el mayor detalle posible los diversos pasos del método de solución, así como dónde subyacen las dificultades principales. La realización de esta tesis tiene como objetivo, más allá de las metas particulares de la investigación, avanzar el conocimiento sobre soluciones analíticas que describen sistemas acoplados. Esto con la esperanza de que futuras generaciones de investigadores en México tengan acceso a un documento que ilustre las características del método.

En el Capítulo 1 se resumen las principales líneas de investigación que han estudiado el problema de flujos en conductos elásticos. En el Capítulo 2 se explican los aspectos físicos del caso de estudio y se desarrolla el modelado matemático, así como el método de obtención de la solución. Como es de esperarse, este es el capítulo más importante y extenso de la tesis. En el Capítulo 3 se hace una interpretación de la solución analítica y de las tres representaciones posibles. En el Capítulo 4 se presentan las gráficas más importantes y se discuten los resultados, comparándose en la medida de lo posible con trabajos previos. Finalmente, el Capítulo 5 resume las conclusiones del trabajo. Con conocimiento, disciplina y suficiente tiempo invertido, alguien quizás podrá encontrar nuevas soluciones a problemas aledaños a este, o bien, corregir cualquier error que se haya cometido.

Contenido

Resumen	iv
1. Introducción	1
1.1. Aproximaciones al problema	2
1.1.1. Características generales	2
1.1.2. Aproximación de modelado I (Païdoussis, Chen, Bajaj)	3
1.1.3. Aproximación de modelado II (Ćanić, Zamir)	6
1.1.4. Aproximación de modelado III (Lin y Morgan, Chebair y Misra, Perton y Sánchez Sesma)	7
1.2. Objetivo de la tesis	8
1.2.1. Alcances	9
1.2.2. Acotaciones	9
1.2.3. Hipótesis	10
2. Modelo matemático	11
2.1. Formulación del problema	11
2.2. Ecuaciones fundamentales	16

2.2.1. Consideraciones de modelado	16
2.2.2. Ecuaciones escaladas	19
2.2.3. Linealización del sistema	21
2.3. Flujo viscoso oscilante en conducto deformable	22
2.3.1. Solución general para el fluido	23
2.3.2. Solución general para el sólido	31
2.3.3. Condiciones de frontera e iniciales	35
2.3.4. Condiciones periódicas	37
2.3.5. Condiciones de frontera axiales	44
2.3.6. Condiciones de frontera radiales	53
2.3.7. Resolución de sistema simultáneo de condiciones de frontera	62
3. Solución analítica	65
3.1. Información temporal y axial disponibles	65
3.2. Información temporal disponible, información axial ausente	68
3.2.1. Información temporal y axial ausentes	70
4. Resultados y discusión	74
4.1. Caso experimental de referencia	74
4.2. Gráficas de los parámetros	78
4.3. Gráficas de los campos	80
4.4. Validación experimental	91
4.5. Observaciones	93

5. Conclusiones	97
5.1. Aportaciones	97
5.2. Observaciones	98
5.3. Trabajo futuro	99
A. Solución de dos casos límite	103
A.1. Flujo viscoso estacionario en conductos rígidos	103
A.2. Flujo viscoso pulsante en conducto rígido	104
B. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a la solución parti-	
 cular	106
B.1. Solución con coeficientes variables	106
B.2. Solución con coeficientes constantes y argumento distinto	108
C. Consistencia de constantes asociadas a expansiones en series de funciones	
 propias	113
D. Lista de constantes de sistema algebraico asociado a las condiciones de	
 acoplamiento	119

Lista de Figuras

2.1. Esquema del sistema. Se resalta la forma esperada de los perfiles de velocidad axial (v_z) en el interior del conducto y el efecto del ensanchamiento de la pared sobre ellos. No se muestra la componente radial (v_r).	12
2.2. Comportamiento esperado de la presión (negro) y la velocidad axial (rojo) en el interior del conducto para un flujo oscilante en un conducto rígido. Las variables con barra representan cantidades medias y las variables con tilde representan cantidades pulsantes.	13
2.3. Comportamiento esperado de la presión fija y pulsante (negro), y de la onda viajera de presión (rojo) en el interior del conducto para un flujo oscilante rodeado de un medio deformable.	15
2.4. Representación abstracta del conducto. Se distingue el sistema de coordenadas cilíndricas, los dos radios de equilibrio y la longitud del conducto. También se distinguen el medio fluido y el medio sólido con los números romanos I y II, respectivamente.	16
4.1. Esquema del arreglo experimental, tomado de [61]. Se distinguen los dispositivos: (1) depósito de fluido, (2) descarga del sistema, (3) bomba peristáltica, (4) tarjeta de adquisición de datos, (5) mesa flotada, (6) soportes, (7) zona de visualización, (8) cámara de alta velocidad, (9) computadora. Se muestra el sistema de coordenadas $r - z$ como $R - Z$, así como la longitud del conducto como L	75
4.2. $Eu_{1,1}$ como función de $\lambda_{1,1}^{(1)*}$, dejando $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$ fijo.	79

4.3. $Eu_{1,1}$ como función de $\lambda_1^{(2)*}$, dejando $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$ fijo. 79

4.4. Comparación de los dos campos escalados en el fluido contra el radio para varios valores del tiempo, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$ 80

4.5. Regiones aproximadas a lo largo de r^* con comportamiento distinto para velocidad axial y esfuerzos cortantes: (I) $0 < r^* \leq 0.16$, donde $v_z^{I*} \approx 0$, $\sigma_{rz}^{I*} \approx 0$; y (II) $0.6 < r^* \leq 1$, donde $v_z^{I*} \neq 0$, $\sigma_{rz}^{I*} \neq 0$ 82

4.6. Regiones aproximadas a lo largo de r^* con comportamiento distinto para velocidad radial y esfuerzos normales: (III) $0 < r^* \leq 0.15$, donde $v_r^{I*} \approx 0$, $\sigma_{zz}^{I*} \approx 0$; (IV) $0.15 < r^* \leq 0.5$, donde $\sigma_{rr}^{I*} = cte$, $\sigma_{\theta\theta}^{I*} = cte$, $\sigma_{zz}^{I*} \approx 0$; (V) $0.5 < r^* \leq 0.6$, donde $\sigma_{rr}^{I*} \neq cte$, $\sigma_{\theta\theta}^{I*} \neq cte$, $\sigma_{zz}^{I*} \approx 0$; y (VI) $0.7 < r^* \leq 1$, donde $\sigma_{rr}^{I*} \neq cte$, $\sigma_{\theta\theta}^{I*} \neq cte$, $\sigma_{zz}^{I*} \neq 0$. Se grafican en el plano $z^* = 0.5$ 83

4.7. Comparación de los dos campos adimensionales en el sólido contra el radio para varios valores del tiempo, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$ 84

4.8. Comparación de los cinco campos adimensionales principales contra el tiempo para varios valores del radio, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$ 85

4.9. Comparación de los cuatro campos adimensionales de velocidad contra el tiempo para varios valores del radio, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$ 86

4.10. Defasamientos entre los campos v_z^{I*} , v_r^{I*} y u_z^{II*} , u_r^{II*} , respectivamente. Las líneas deben coincidir con sus parejas del color correspondiente. Las líneas sólidas indican que deben sufrir un corrimiento de fase, mientras que las líneas punteadas se asumen correctas. El defasamiento es de aproximadamente $\pm \frac{\pi}{5}$ rad, según sea el caso. 87

4.11. Comparación de los cuatro campos de velocidad con las correcciones de fase incorporadas. Se indican con líneas verticales los tiempos de correspondencia en fase esperados entre v_z^{I*} y $\frac{\partial u_z^{II*}}{\partial t^*}$, así como aquéllos entre v_r^{I*} y $\frac{\partial u_r^{II*}}{\partial t^*}$. No existen defasamientos en $r^* = 1$ 88

4.12. Comparación de los cinco campos de interés del problema con las correcciones de fase incorporadas. Se indican con líneas verticales los tiempos de correspondencia en fase esperados entre p^{I*} , v_z^{I*} y v_r^{I*} , así como aquéllos entre u_z^{II*} y u_r^{II*} . Los defasamientos que permanecen en las predicciones son de origen físico.	89
4.13. Comparación de desplazamientos radiales experimentales en pared externa ($r = R + h$) y desplazamientos radiales teóricos en el subdominio asociado al medio elástico ($R < r < R+h$). Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$.	92
4.14. Comparación entre perfiles de velocidad axial para flujo oscilante en conducto rígido (superior) y flujo oscilante en conducto deformable (inferior).	95

Lista de Tablas

- 4.1. Parámetros dimensionales estimados del sistema 75
- 4.2. Parámetros dimensionales conocidos del sistema 76
- 4.3. Parámetros derivados 77
- 4.4. Parámetros escalados del sistema 77

Nomenclatura

Letras latinas

- a_r : Deformación radial característica (amplitud máxima)
 a_r : Deformación axial característica (amplitud máxima)
 $\mathcal{B}_n^{(1)}$: Coeficiente de funciones propias (temporal) de velocidad axial
 $\mathcal{B}_{n,m}^{(2)}, \mathcal{B}_{n,m}^{(3)}$: Coeficientes de funciones propias (radial) de velocidad axial
 $\mathcal{B}_m^{(4)}, \mathcal{B}_m^{(5)}$: Coeficientes de funciones propias (axial) de velocidad axial
 $\mathcal{B}_n^{(6)}$: Coeficiente de funciones propias (temporal) de velocidad radial
 $\mathcal{B}_{n,m}^{(7)}, \mathcal{B}_{n,m}^{(8)}$: Coeficientes de funciones propias (radial) de velocidad radial
 $\mathcal{B}_m^{(9)}, \mathcal{B}_m^{(10)}$: Coeficientes de funciones propias (axial) de velocidad radial
 c : Velocidad de ondas longitudinales en el fluido
 $\mathcal{C}_n^{(1)}, \mathcal{C}_n^{(2)}$: Coeficientes de funciones propias (temporal) de desplazamiento axial
 $\mathcal{C}_m^{(3)}, \mathcal{C}_m^{(4)}$: Coeficientes de funciones propias (axial) de desplazamiento axial
 $\mathcal{C}_{n,m}^{(5)}, \mathcal{C}_{n,m}^{(6)}$: Coeficientes de funciones propias (radial) de desplazamiento axial
 $\mathcal{C}_n^{(7)}, \mathcal{C}_n^{(8)}$: Coeficientes de funciones propias (temporal) de desplazamiento radial
 $\mathcal{C}_m^{(9)}, \mathcal{C}_m^{(10)}$: Coeficientes de funciones propias (axial) de desplazamiento radial
 $\mathcal{C}_{n,m}^{(11)}, \mathcal{C}_{n,m}^{(12)}$: Coeficientes de funciones propias (radial) de desplazamiento radial
 E : Módulo de Young del material
 f : Frecuencia de oscilación del gradiente de presión
 $F_n^{\text{I}*}$: Función propia de dependencia temporal para armónico n de la presión
 $G_{n,m}^{\text{I}*}$: Función propia de dependencia radial para armónico n, m de la presión
 h : Espesor de equilibrio del conducto
 \mathcal{H} : Función de Heaviside
 $H_m^{\text{I}*}$: Función propia de dependencia axial para armónico m de la presión
 k : Contador de onda
 K : Número máximo de ondas consideradas
 $k_{n,m}^{(1)*}$: Coeficiente de funciones propias (radial) del forzamiento, dirección axial
 $k_m^{(2)*}$: Coeficiente de funciones propias (axial) del forzamiento, dirección axial

$k_n^{(3)*}$: Coeficiente de funciones propias (temporal) del forzamiento, dirección axial
$k_{n,m}^{(4)*}$: Coeficiente de funciones propias (radial) del forzamiento, dirección radial
$k_m^{(5)*}$: Coeficiente de funciones propias (axial) del forzamiento, dirección radial
$k_n^{(6)*}$: Coeficiente de funciones propias (temporal) del forzamiento, dirección radial
l	: Contador de reflexiones de onda
L	: Número máximo de reflexiones de onda consideradas
L	: Longitud de equilibrio (de sección de pruebas) del conducto
n	: Armónico temporal
m	: Armónico espacial
r	: Coordenada radial dimensional
r^*	: Coordenada radial adimensional
R	: Radio interno de equilibrio del conducto
$R_i(z, t)$: Radio interno del conducto
$R_o(z, t)$: Radio externo del conducto
$R_{n,m}^I$: Función propia (radial) para armónico n, m de velocidad axial
$R_{n,m}^{II}$: Función propia (radial) para armónico n, m de desplazamiento axial
$\mathcal{R}_{n,m}^I$: Función propia (radial) para armónico n, m de velocidad radial
$\mathcal{R}_{n,m}^{II}$: Función propia de (radial) para armónico n, m de desplazamiento radial
p^I	: Presión dimensional en el fluido
p^{I*}	: Presión adimensional en el fluido
$-p^I \mathbf{1}$: Tensor de esfuerzos esférico en el fluido
$\overline{\Delta p}, p_0 - p_1, p_{0,0}^I$: Parte media del gradiente de presión
$\widetilde{\Delta p}, p_{n,0}^I$: Parte oscilante (en conducto rígido) del gradiente de presión
$p_{n,m}^I$: Parte oscilante (en conducto deformable) del gradiente de presión
Q_0	: Caudal estacionario (Hagen-Poiseuille)
t	: Tiempo dimensional
t^*	: Tiempo adimensional
T	: Periodo de oscilación de gradiente de presión
T_n^I	: Función propia (temporal) para armónico n de velocidad axial
\mathcal{T}_n^I	: Función propia (temporal) para armónico n de velocidad radial
U_r^I	: Velocidad radial característica (amplitud máxima)
U_z^I	: Velocidad axial característica (media de flujo estacionario)
\mathbf{u}^{II}	: Campo de desplazamiento en el sólido
u_r^{II}	: Desplazamiento radial dimensional en el sólido
u_r^{II*}	: Desplazamiento radial adimensional en el sólido
u_z^{II}	: Desplazamiento axial dimensional en el sólido
u_z^{II*}	: Desplazamiento axial adimensional en el sólido

\mathbf{v}^I :	Campo de velocidad en el fluido
v_a :	Velocidad de propagación de onda calculada
v_r^I :	Velocidad radial dimensional en el fluido
v_r^{I*} :	Velocidad radial adimensional en el fluido
v_z^I :	Velocidad axial dimensional en el fluido
v_z^{I*} :	Velocidad axial adimensional en el fluido
$\overline{v_z}, \overline{v_z^{I*}}, v_{z0,0}^I$:	Parte media de campo de velocidad axial
$\tilde{v}_z, \tilde{v}_z^{I*}, v_{zn,0}^I$:	Parte oscilante (en conducto rígido) de campo de velocidad axial
$\tilde{\tilde{v}}_z, \tilde{\tilde{v}}_z^{I*}, v_{zn,m}^I$:	Parte oscilante (en conducto deformable) de campo de velocidad axial
z :	Coordenada axial dimensional
z^* :	Coordenada axial adimensional
Z_m^I :	Función propia (axial) para armónico m de velocidad axial
Z_m^I :	Función propia (axial) para armónico m de velocidad radial

Letras griegas

α :	Velocidad de ondas longitudinales en el sólido
β :	Velocidad de ondas transversales en el sólido
$\gamma_n^{I*}, \xi_n^{I*}$:	Valor propio en el fluido asociado al tiempo
$\gamma_n^{II*}, \xi_n^{II*}$:	Valor propio en el sólido asociado al tiempo
$\delta_m^{I*}, \kappa_m^{I*}$:	Valor propio en el fluido asociado a la coordenada axial
$\delta_m^{II*}, \kappa_m^{II*}$:	Valor propio en el sólido asociado a la coordenada axial
$\eta_{n,m}^{I*}, \zeta_{n,m}^{I*}$:	Valor propio en el fluido asociado a la coordenada radial
$\eta_{n,m}^{II*}, \zeta_{n,m}^{II*}$:	Valor propio en el sólido asociado a la coordenada radial
θ :	Coordenada tangencial dimensional
$\vartheta_n^{I*}, \varsigma_n^{I*}$:	Pseudovalores propios auxiliares
λ^I :	Viscosidad (dinámica) dilatacional en el fluido
λ^{II} :	Primer coeficiente de Lamé en el sólido
$\lambda_n^{(0)*}$:	Parámetro de compresibilidad consistente estacionaria para el armónico n
$\lambda_{n,m}^{(1)*}$:	Parámetro de compresibilidad consistente para el armónico n, m
$\lambda_n^{(2)*}$:	Parámetro de compresibilidad consistente para el armónico n
μ^I :	Viscosidad (dinámica) al corte en el fluido
μ^{II} :	Segundo coeficiente de Lamé en el sólido
ν :	Módulo de Poisson del material
π :	Número pi

ρ^I :	Densidad del fluido
ρ^{II} :	Densidad del sólido
$\boldsymbol{\sigma}^I$:	Tensor de esfuerzos deviatorio (de Cauchy) en el fluido
$\boldsymbol{\sigma}^{II}$:	Tensor de esfuerzos deviatorio (de Cauchy) en el sólido
σ_{rz}^I :	Esfuerzo cortante dimensional en el fluido
σ_{rz}^{I*} :	Esfuerzo cortante adimensional en el fluido
σ_{rr}^I :	Esfuerzo normal radial dimensional en el fluido
σ_{rr}^{I*} :	Esfuerzo normal radial adimensional en el fluido
$\sigma_{\theta\theta}^I$:	Esfuerzo normal tangencial dimensional en el fluido
$\sigma_{\theta\theta}^{I*}$:	Esfuerzo normal tangencial adimensional en el fluido
σ_{zz}^I :	Esfuerzo normal axial dimensional en el fluido
σ_{zz}^{I*} :	Esfuerzo normal axial adimensional en el fluido
σ_{rz}^{II} :	Esfuerzo cortante dimensional en el sólido
σ_{rz}^{II*} :	Esfuerzo cortante adimensional en el sólido
σ_{rr}^{II} :	Esfuerzo normal radial dimensional en el sólido
σ_{rr}^{II*} :	Esfuerzo normal radial adimensional en el sólido
$\sigma_{\theta\theta}^{II}$:	Esfuerzo normal tangencial dimensional en el sólido
$\sigma_{\theta\theta}^{II*}$:	Esfuerzo normal tangencial adimensional en el sólido
σ_{zz}^{II} :	Esfuerzo normal axial dimensional en el sólido
σ_{zz}^{II*} :	Esfuerzo normal axial adimensional en el sólido
τ_a :	Tiempo de arribo de onda calculado
τ_0 :	Tiempo dimensional de arribo de primera onda
τ_k :	Tiempo dimensional de arribo de k -ésima onda
$\tau_{k,l}^*$:	Tiempo adimensional de arribo de l -ésimo rebote de k -ésima onda
Υ :	Factor de disipación de ondas
φ :	Defasamiento entre campos de velocidad y de presión
χ^* :	Constante general de interacción fluido-estructura
χ_z^{I*} :	Constante de interacción fluido-estructura para velocidad axial
χ_r^{I*} :	Constante de interacción fluido-estructura para velocidad radial
$\chi_{z1}^{II*}, \chi_{z2}^{II*}$:	Constantes de interacción fluido-estructura para desplazamiento axial
$\chi_{r1}^{II*}, \chi_{r2}^{II*}$:	Constantes de interacción fluido-estructura para desplazamiento radial

Grupos adimensionales

- $Eu_{n,m}$: Número de Euler para armónico n,m
 Ma_c : Número de Mach respecto a velocidad de ondas longitudinales en el fluido
 Ma_α : Número de Mach respecto a velocidad de ondas longitudinales en el sólido
 Ma_β : Número de Mach respecto a velocidad de ondas transversales en el sólido
 Re_D : Número de Reynolds (respecto a diámetro del conducto)
 Re_L : Número de Reynolds (respecto a longitud del conducto)
 Sh_L : Número de Strouhal (respecto a longitud del conducto)
 U_{rel} : Relación de velocidades características axial-radial
 Wo_R : Número de Womersley (respecto al radio del conducto)
 ε : Relación geométrica radio-longitud del conducto
 ϵ : Relación geométrica espesor-radio del conducto
 Π_R : Número adimensional compuesto correspondiente al sólido, análogo al de Womersley
 $\rho^{I,II}$: Relación de densidades fluido-sólido

Otros símbolos

- d : Operador derivada total
 i : Número imaginario
 \mathbb{C} : Conjunto de los números complejos
 \mathbb{N} : Conjunto de los números naturales
 \mathbb{R} : Conjunto de los números reales
 \mathbb{Z} : Conjunto de los números enteros
 \mathcal{O} : Orden de magnitud
 ∂ : Operador derivada parcial
 \sum : Suma
 \int : Operador integral
 ∇ : Operador nabra
 \in : Pertenece a
 \forall : Para todo
 $||$: Valor absoluto
 ∞ : Infinito

Capítulo 1

Introducción

La interacción fluido-estructura, o FSI por sus siglas en inglés¹, es un fenómeno dinámico de sistemas acoplados. Se presenta en cualquier situación donde un medio sólido está en contacto con un fluido en movimiento[68]. Una parte importante de las investigaciones han permitido develar las características fundamentales de los procesos[68]. El espectro de aplicaciones es tan amplio que es difícil rastrear los trabajos más relevantes a una sola línea de investigación. Sin embargo, se puede afirmar que aproximadamente el 36 % de los casos involucran estructuras esbeltas y cilíndricas, o cuasi-cilíndricas, sometidas a flujos axiales[68]. Ejemplos concretos de problemas que se prestan a la descripción cilíndrica incluyen tuberías en sistemas de transporte de hidrocarburos, flujos en venas y arterias, intercambiadores de calor, entre otros[68]. Casos más generales incluyen el movimiento de velas en barcos, aleteo en alas de avión, etcétera.

Actualmente no se entiende el fenómeno en su totalidad. Esto se debe a que el problema es inherentemente difícil de estudiar por cualquiera de los tres caminos existentes: experimental, numérico y analítico. Cuando se presentan obstáculos por cualquiera de las vías disponibles, es preferible optar por la vía analítica para mejorar la comprensión básica del problema. Se han realizado varios intentos de obtener soluciones exactas para rangos específicos de valores de los parámetros del sistema, pero ninguna de ellas es apropiada para relacionar los desplazamientos en la pared externa de un conducto elástico con las pulsaciones de un fluido en su interior, de interés en el estudio de conductos magmáticos, lo cual es el foco de este trabajo. Antes de continuar, se explicarán algunas características generales de la interacción

¹*Fluid-Structure Interaction.*

fluido-estructura, así como las diferentes aproximaciones al problema.

1.1. Aproximaciones al problema

1.1.1. Características generales

Los sistemas acoplados sólido-fluido son complejos debido a que involucran una gran cantidad de variables y parámetros que están interactuando simultáneamente. Esto hace que sea difícil rastrear el origen de cualquier observación de la dinámica del sistema [68]. Cuando la fuente de excitación se encuentra en el fluido, el fenómeno de interacción recibe el nombre de *vibraciones inducidas por el flujo*. Estas se pueden clasificar en tres clases, según su origen: (i) excitaciones inducidas externamente, (ii) excitaciones inducidas por inestabilidades y (iii) excitaciones inducidas por movimiento. El flujo en conductos magmáticos o los flujos biológicos son un ejemplo de (i), las vibraciones inducidas por vórtices son un ejemplo de (ii) y el aleteo aeroelástico es un ejemplo de (iii). Sólo en (ii) y en (iii) existe realimentación. El caso más sencillo es evidentemente (i), porque sólo involucra los efectos de la excitación original. No sólo es importante distinguir las clases de problemas desde el punto de vista físico, sino también desde la perspectiva matemática.

En general, el modelado matemático del problema de interacción fluido-estructura en conductos que transportan fluido puede tratarse por tres aproximaciones distintas. Estas son: (I) el tratamiento del sistema como vigas sometidas a un forzamiento, i.e. modelado desde el punto de vista del sólido; (II) el tratamiento del sistema como un flujo rodeado de una membrana elástica, i.e. modelado desde el punto de vista del fluido; y (III) el tratamiento del sistema como dos medios acoplados, i.e. modelado desde una perspectiva monolítica. Debido al interés en aplicaciones prácticas inmediatas en sistemas de tuberías, la aproximación (I) es la más trabajada. La aproximación (II) ha resurgido en años recientes en el contexto de la ingeniería biomédica, buscando simplificar el conducto lo más posible. Mientras tanto, la aproximación (III) se reserva exclusivamente para casos donde se desea un alto grado de detalle, o bien, si se desea hacer hincapié en el movimiento de ondas a lo largo del sistema. Una revisión general de las publicaciones relevantes, hecha por Païdoussis, se puede encontrar en [71]. Asimismo, otra revisión, realizada por Quarteroni, et al, acerca de la metodología general para lidiar con estos sistemas se encuentra en [74].

El antecedente más importante fue el estudio de medios elásticos sometidos a fuerzas centrífugas por Aitken[2] en 1878. Este documento contiene detalles importantes sobre las características físicas esenciales de los sistemas elásticos. Sin embargo, la primera investigación significativa, analítica y experimental, con tuberías en voladizo que transportan fluido la llevó a cabo Bourrières[71] en 1939. Ashley y Haviland estudiaron las vibraciones en el Oleoducto Transarábigo[71] en 1950, en lo que sería la primera investigación del tema con una aplicación industrial en mente. En 1955, Handelman estudió las frecuencias de vibración con conductos que transportan fluido con expansiones en series[54]. Ese mismo año, Womersley obtuvo la muy conocida solución analítica al problema de flujo pulsante en conductos rígidos[77]. En 1956, Bolotin publicó un trabajo sobre las deformaciones en ductos flexibles[71]. Los trabajos de Biot[17][18] de 1956, lidiando con la propagación de ondas en conductos llenos de fluido, podrían considerarse el punto de ramificación entre las aproximaciones (I), (II) y (III) de modelado del problema. Es común el uso del término *sistema de ecuaciones tipo Biot* para problemas de interacción fluido-estructura en conductos[23].

En 1961, Benjamin estudió el comportamiento de conductos verticales articulados con un extremo libre, haciendo énfasis en el efecto de utilizar agua o aire[14][15]. Benjamin descubrió que es posible que estos sistemas sufran de pandeo, tal y como columnas a compresión. En relación con esto, Dodds y Runyan - cuando trabajaron en la NASA - investigaron los efectos del flujo interno a altas velocidades en el pandeo de tuberías[71] en 1965. En 1969, Bolotin y Zhinzher estudiaron la correlación entre regiones estables y cuasiestables de sistemas elásticos[69]. Un antecedente matemático importante es el estudio formal de la estabilidad de las ecuaciones de vigas viscoelásticas por Ball[13] en 1973. Es relevante debido a que estos sistemas comparten algunas características con las vigas en voladizo y, como se acaba de mencionar, con las columnas a compresión. En general, se pueden asociar a varios autores con cada una de las aproximaciones. Païdoussis, Chen y Bajaj representan a (I), mientras que Canic y Zamir simbolizan a (II). En cuanto a (III), Chebair y Sánchez Sesma ejemplifican la estrategia de modelado.

1.1.2. Aproximación de modelado I (Païdoussis, Chen, Bajaj)

Esta vía surge de la necesidad inmediata de predecir la conducta de sistemas industriales. Païdoussis caracterizó de manera exhaustiva el comportamiento de conductos horizontales inmersos en fluido en [65][66], publicados en 1966. Païdoussis identificó las condiciones en las que inician las inestabilidades del sistema para cada uno de los modos de vibración. Además,

analizó el efecto que tienen la tensión inicial, los esfuerzos viscosos del fluido, la relación de masa fluido-sólido y el tipo de soportes, i.e. las condiciones de frontera, en la estabilidad. En el proceso desarrolló el modelo matemático de tipo (I) y se corroboraron las predicciones de forma experimental.

Païdoussis y Gregory realizaron esta misma indagación para conductos horizontales que transportan fluido en voladizo. Los resultados se pueden consultar en [62][64]. La conclusión más importante es que la inestabilidad dinámica se presenta en ambos casos, pero la estática únicamente se presenta si el conducto tiene un extremo libre. En 1970, Païdoussis giró su atención a los conductos verticales que transportan fluido en voladizo [67], estableciendo que el pandeo sólo puede ocurrir si el extremo libre es el superior. Ese mismo año, Païdoussis y Deksnis plantearon que los conductos continuos son un caso límite de los articulados. Considerando los hallazgos de Benjamin, esto constituye una paradoja que los autores mencionados solo pudieron resolver parcialmente [70]. En 1974, Païdoussis e Issid hicieron una revisión sobre los detalles de obtención del modelo matemático de tipo (I), que puede hallarse en [63].

Con base en el marco teórico de Païdoussis, se desarrolló una línea de investigación sobre la no-linealidad de estos sistemas. En 1978, Holmes demostró en [56] que las inestabilidades que presentan los conductos soportados en ambos extremos no son del tipo bifurcación de Hopf. Este no es el caso de conductos en voladizo, por lo que, en 1980, Bajaj, et al hicieron un análisis exhaustivo en [12] de la bifurcación en conductos que transportan fluido con un extremo libre. En el proceso, identificaron dos tipos de soluciones periódicas que dependen de la relación de masa fluido-sólido y de la amplitud del gradiente de presión pulsante. Si bien esta investigación se limitó a las deformaciones en el plano, Bajaj, et al extendieron la teoría al caso tridimensional para conductos articulados en voladizo [9][10] en 1982. Dos años más tarde, Bajaj, et al repitieron este estudio para conductos continuos [11], identificando bifurcaciones subsecuentes de las soluciones que describen el comportamiento no-lineal. Bajaj concluyó sus aportaciones al tema al investigar el comportamiento no-lineal de los conductos en voladizo al someterse a flujos pulsantes, publicando el artículo [8] en 1987.

En paralelo con estos desarrollos, Chen partió de la línea de investigación de Païdoussis para realizar sus propios estudios. En 1970, obtuvo una solución analítica para el problema de conductos horizontales en voladizo en [27], mostrando los cambios en la frecuencia natural del sistema en función de la velocidad del flujo. En [28][30], Chen estudió exhaustivamente los sistemas de conductos curvos que transportan fluido con diversos tipos de soportes en

los extremos, llegando a conclusiones similares a las de Païdoussis sobre las inestabilidades que se presentan. Cabe mencionar que solo consideró deformaciones en el plano, pero al año siguiente extendió la teoría para el caso tridimensional[31]. En 1974, Chen resolvió un problema aplicado a barras de control en reactores nucleares de forma analítica. La aproximación utilizada en [29] es similar a aquella de las primeras publicaciones de Païdoussis. En 1985, Chen realizó una investigación para el Departamento de Energía de EE UU, también orientada a su uso en reactores nucleares. En la susodicha investigación reunió todo el conocimiento adquirido durante la década previa y sus resultados se pueden consultar en [32][33].

Algunas otras investigaciones aisladas con el mismo marco teórico, i.e. el modelo matemático de tipo (I), se realizaron durante varias décadas y se listan a continuación. Ginsberg también trabajó en el problema de un conducto excitado por un flujo pulsante[50] en 1973. En 1974, Bohn y Herrmann investigaron a fondo las condiciones bajo las cuales un sistema de dos tubos articulados presenta una inestabilidad al ser sometido a un flujo constante[21], o bien, a un flujo periódico[20]. Bishop y Fawzy hicieron un análisis teórico muy detallado de tubos verticales que transportan fluido[19] en 1976. Ese mismo año, Doll y Mote Jr. desarrollaron las ecuaciones de la dinámica para cilindros que se deforman, incluyendo su torsión[37], mientras que Done y Simpson aclararon algunas ambigüedades de tratar estos sistemas mediante los principios de Hamilton[38]. En 1982, Grotberg también estudió las inestabilidades en conductos horizontales[53]. En 1985, Dupuis y Rousselet utilizaron el método de la matriz de transferencia para tratar estos problemas numéricamente[39].

En 1986, Ariaratnam y Namachchivaya publicaron dos trabajos en los que investigaron el efecto de flujos pulsantes de amplitudes grandes y flujos con un perfil estocástico de velocidad en la estabilidad de los tubos soportados en los extremos[7]. Al año siguiente, Edelstein y Chen volvieron a publicar juntos, esta vez sobre una solución numérica con elementos finitos para el problema de las tuberías en voladizo[41]. Fan realizó un estudio del efecto de la masa agregada, de la fricción y de la presión del fluido en estos sistemas mediante el método de elemento finito[43] en 1987. Ese mismo año, Fan realizó un trabajo numérico para estudiar la estabilidad de tuberías helicoidales[44]. Dang, Liu y Zheng utilizaron la teoría de Floquet-Lyapunov para encontrar regiones de inestabilidad en estos sistemas que no aparecían utilizando métodos numéricos convencionales[36].

Aithal y Gipson estudiaron la dinámica de conductos curvos con diferentes condiciones de frontera en los extremos[1] en 1990. Bertram y Pedley estudiaron la estabilidad de tubos de silicón sometidos a presiones externas cercanas al punto de colapso del conducto[16] en

1991. La sensibilidad de la dinámica de sistemas de tubos articulados a la variación de sus parámetros fue estudiada nuevamente por Champneys[26] en 1991. Copeland y Moon investigaron el comportamiento de un tubo que cuelga con una masa en el extremo[34] en 1992. Ese mismo año, Dupuis y Rousselet compararon los modelos matemáticos de estos sistemas a los que se llega por la vía Hamiltoniana y por la vía Newtoniana[40]. En 1994, Glowinski, et al, trabajaron sobre un problema de Dirichlet en dominio ficticio, haciendo énfasis en la posible aplicación a flujos en conductos[51]. Olufsen, et al, desarrollaron un modelo de parámetros concentrados[60] en 2001.

1.1.3. Aproximación de modelado II ($\hat{\text{C}}\text{anić}$, Zamir)

Esta aproximación de modelado es más reciente que las otras dos. Se deriva, en términos de la aplicación buscada, a partir de la solución analítica de Womersley. Es decir, entender el comportamiento de flujos biológicos. Sin embargo, desde una perspectiva conceptual e histórica, también tiene influencia de una variante de los modelos de Païdoussis, i.e. aquella para conductos horizontales esbeltos, que se puede hallar en [76]. Esto se menciona en [52], donde se propone un modelo con flujo potencial para describir la dinámica en el interior de conductos flexibles. Este trabajo, publicado por Grotberg y Davis en 1980, es una primera aproximación al problema en el contexto de la fisiología. En 1991, Luchini, et al presentaron en [58] un modelo de flujo viscoso transitorio en el régimen de Stokes y de su interacción con una membrana elástica. Fung investigó las características físicas del fenómeno en sistemas biológicos y concluyó sobre la naturaleza iterativa de la solución que considera fronteras móviles[45][46][47].

En 1998, Haslam y Zamir estudiaron los flujos pulsantes en conductos rígidos con sección transversal elíptica[55]. Esto con el objetivo de entender el efecto de la dilatación y contracción de conductos biológicos en el perfil de velocidad. Más tarde, Zamir obtuvo una solución analítica - para conductos cilíndricos - cuyos resultados se pueden consultar en [78]. En este trabajo, Zamir introdujo la posibilidad de evaluar las condiciones de acoplamiento en un radio de equilibrio. En paralelo, $\hat{\text{C}}\text{anić}$ se interesó en el tema de los flujos en arterias y comenzó investigando las propiedades de la solución débil al problema, publicando a [3] en 2001. Hasta el conocimiento del autor, este representa el primer intento de considerar la no-linealidad del problema desde esta aproximación. En su siguiente publicación, $\hat{\text{C}}\text{anić}$ dedujo las ecuaciones efectivas para un modelo del tipo (II), considerando los términos no-lineales, rigurosamente con ayuda de expansiones asintóticas. Este desarrollo, así como las primeras predicciones a

lo largo de z^* , se ubican en [5][25]. Čanić también se valió del uso de radios de equilibrio y de la suposición de deformaciones pequeñas, i.e. menores al 5 %.

En 2003, Čanić estudió los efectos de la cuasilinealidad del sistema de ecuaciones propuesto con el propósito de conocer la estabilidad de soluciones numéricas al problema [4]. En 2005, Čanić, et al publicaron los artículos [6][24], que presentan una solución numérica del problema de interacción fluido-estructura en el contexto de flujos biológicos. Sus aportaciones más significativas son la validación experimental de su solución y las estimaciones energéticas de los desplazamientos máximos en la membrana elástica. También hay que hacer énfasis en que se valieron del uso de expansiones asintóticas para reducir la dimensionalidad del problema. Finalmente, Tambača, junto con Čanić y Mikelić, publicaron otro artículo en 2005. En este presentaron una variante de la solución del año previo, pero considerando un conducto donde el radio interno es variable a lo largo de la coordenada z^* .

1.1.4. Aproximación de modelado III (Lin y Morgan, Chebair y Misra, Perton y Sánchez Sesma)

Esta aproximación es la más cercana al modelo del presente trabajo y usualmente se destina a modelar procesos relacionados con la extracción de petróleo, o bien, los flujos en conductos magmáticos. Se originó a partir de la investigación de Biot, pero también a partir de las indagaciones de Lin y Morgan. En 1954, Morgan planteó el modelo matemático más cercano al propuesto en este trabajo en [59]. Su hallazgo más importante es que la viscosidad en el fluido tiene un efecto apreciable en la velocidad de propagación de las ondas. Dos años más tarde, Lin y Morgan publicaron una solución de interacción fluido-estructura en [57]. En esta consideraron un fluido no-viscoso y compresible, mientras que el sólido se asumió linealmente elástico sin disipación. La discusión sobre las frecuencias de corte a las que se presentan los distintos modos de vibración es la aportación más importante. En 1959, Gazis derivó la solución para modos superiores para un cilindro anular con ambas fronteras libres de esfuerzos a partir de la descomposición de Helmholtz, publicando sus resultados en [48][49].

Si bien Gazis no describe la interacción fluido-estructura, es un antecedente importante en términos de modelado. En 1989, Chebair, Misra y Païdoussis presentaron otra solución analítica en [42], describiendo un conducto sin espesor que contiene un flujo anular y enfocándose en las características de estabilidad del sistema. La mención de las dificultades inherentes

a las condiciones de frontera es crucial. Si bien no es posible predecir los desplazamientos en la pared externa, es un planteamiento similar al de este trabajo al buscar acoplar dos medios. En 1992, Sinha, et al presentaron otro modelo del tipo (III) en [73][75]. Sin embargo, los medios están invertidos, i.e. el fluido es un medio espacio y el sólido está contenido en el primero. Pese a esto, se puede considerar como una mejora del modelo de Lin y Morgan, dado que consideran la disipación en el término volumétrico.

En 2012, Perton, Sánchez Sesma, et al desarrollaron y validaron una solución semianalítica [72] para un conducto elástico que contiene y está rodeado por el mismo fluido. El experimento buscó reproducir la propagación de ondas en un pozo petrolero. Esto constituye el problema de interacción fluido-estructura de tres medios. A diferencia del modelo propuesto aquí, el forzamiento del sistema es una fuente puntual de ondas. Un modelo ligeramente distinto, pero que busca acoplar explícitamente dos medios e incorporar la no-linealidad en el fluido, es el propuesto por Corona-Romero, Arciniega-Ceballos, et al en [35]. La solución de carácter numérico se basó en: (1) el uso de un operador de promediado y (2) la suposición *a priori* de un perfil de velocidad radial. Los resultados sugieren una explicación del origen de los temblores volcánicos. Si bien se han expuesto numerosos trabajos en este capítulo, existen otras investigaciones, en particular aquellas de carácter experimental o aquellas que modelan el golpe de ariete, que no se mencionaron.

A pesar de ello, está claro que el problema ha sido trabajado de manera extensa y desde muchas perspectivas. Esto es testimonio de la relevancia que aún tiene el tratamiento matemático de la interacción fluido-estructura en conductos, así como la existencia de preguntas no resueltas sobre aspectos de modelado.

1.2. Objetivo de la tesis

Obtener y validar una solución analítica al problema de interacción fluido-estructura en conductos deformables sujetos a flujos pulsantes. Dicha solución permitirá describir las vibraciones producidas en el interior de conductos volcánicos y para analizar: (a) el fenómeno de interacción fluido-estructura y (b) el método requerido para deducir soluciones analíticas de problemas en sistemas acoplados.

1.2.1. Alcances

Concretamente, se prevee que la solución analítica

- Reduzca el tiempo de cálculo respecto a soluciones numéricas existentes, que sea inmediatamente utilizable para analizar casos más generales.
- Sea capaz de predecir los desplazamientos del conducto en su pared exterior al menos en orden de magnitud, de tal manera que se le dé la aplicación originalmente concebida.
- Considere el acoplamiento entre medios para establecer las características de su interacción.
- Permita establecer los efectos viscosos sobre el esfuerzo cortante de la pared interna.
- Considere los tres tipos de ondas presentes en el sistema: longitudinales en el fluido, longitudinales en el sólido y transversales en el sólido. Preferentemente se busca que se puedan separar los efectos de cada onda y asociarlos a características de las predicciones.

1.2.2. Acotaciones

Asimismo, la solución tendrá que

- Considerar flujo laminar, lo cual debería bastar para la aplicación en conductos volcánicos y para estar dentro de las capacidades de la instalación experimental.
- Considerar un medio elástico sin disipación, por lo que la única disipación del sistema provendrá del medio viscoso. Considerando un forzamiento de carácter periódico, la solución será una cota superior en términos de amplitud.
- Considerar modos de vibración sin pandeo y sin cambios tangenciales, lo cual basta si se interpretan los resultados como desplazamientos medios sobre toda la circunferencia de un plano transversal del conducto y si se controlan las variables del estado inicial en el experimento.
- Considerar dos medios, por motivos de simplificación del método de solución y que se verifique la primera aproximación antes de obtener variantes más complejas de la misma.

1.2.3. Hipótesis

Las características de la propagación de las perturbaciones mecánicas en ambos medios (líquido y sólido) diferirán en función de las propiedades de dichos medios. La solución analítica permitirá analizar este comportamiento y considerar, además, sus posibles efectos en puntos diversos del sistema de flujo.

Capítulo 2

Modelo matemático

Para construir un modelo efectivo de interacción fluido-estructura es necesario partir del caso más sencillo e incrementar su complejidad progresivamente. Esto para dilucidar los cambios en la solución a medida que se añaden factores a considerar. El ejemplo más simple de flujo interno es el *flujo estacionario* o flujo de Hagen-Poiseuille. El *flujo pulsante* o flujo de Womersley comprende el siguiente nivel de complejidad. Aquí se considerará un tercer caso que, a diferencia de los dos anteriores, no asumirá un conducto rígido. Como consecuencia, el modelo incluirá el movimiento de ondas longitudinales y ondas transversales en el sólido, e introducirá las ondas longitudinales en el fluido a través del forzamiento. Se utilizará la descripción euleriana de las ecuaciones de movimiento para este fin.

2.1. Formulación del problema

Se considera concretamente el caso de flujo de magma en conductos volcánicos. Estos flujos se caracterizan por ser de fluidos de muy alta viscosidad, exhibiendo un comportamiento intermedio entre la dinámica de un sólido y la de una espuma. Asimismo, la interfase entre el medio que fluye y el que lo rodea no necesariamente está definida. En general, el problema de interés es relacionar las mediciones que se pueden realizar en el exterior del volcán con lo que está ocurriendo en el interior. Es decir, relacionar los desplazamientos en el exterior del conducto y las velocidades del material en el interior. Tomando esto en cuenta, una primera aproximación es abstraer el problema como el flujo de un fluido viscoso en el interior de un conducto elástico. Esto no sólo permite estudiar las características esenciales del fenómeno,

sino que el espectro de posibles aplicaciones se amplía.

Se considera este sistema como un conducto perfectamente cilíndrico, de longitud finita L , simplemente apoyado en los extremos. Es decir, el conducto tiene libertad de desplazarse axialmente en los extremos, pero no radialmente. Se espera que las superficies cruciales del sistema, i.e. las paredes interna y externa del conducto, oscilen a raíz del flujo pulsante. Entonces, los radios que indican su posición, R_i y R_o , son funciones del tiempo y de la coordenada axial. Es necesario definir un par de radios adicionales, R y $R + h$, que están fijos. Los conocemos como *radios de equilibrio* [5] [24] [25] [78] y corresponden a las posiciones iniciales de las dos superficies, la interna y la externa respectivamente, antes de ser perturbadas. Siguiendo este esquema, h se denomina como el *espesor de equilibrio* del conducto. Con estas magnitudes el sistema ya está caracterizado geoméricamente. En lo que respecta a la cinemática del sistema, coexisten varios fenómenos.

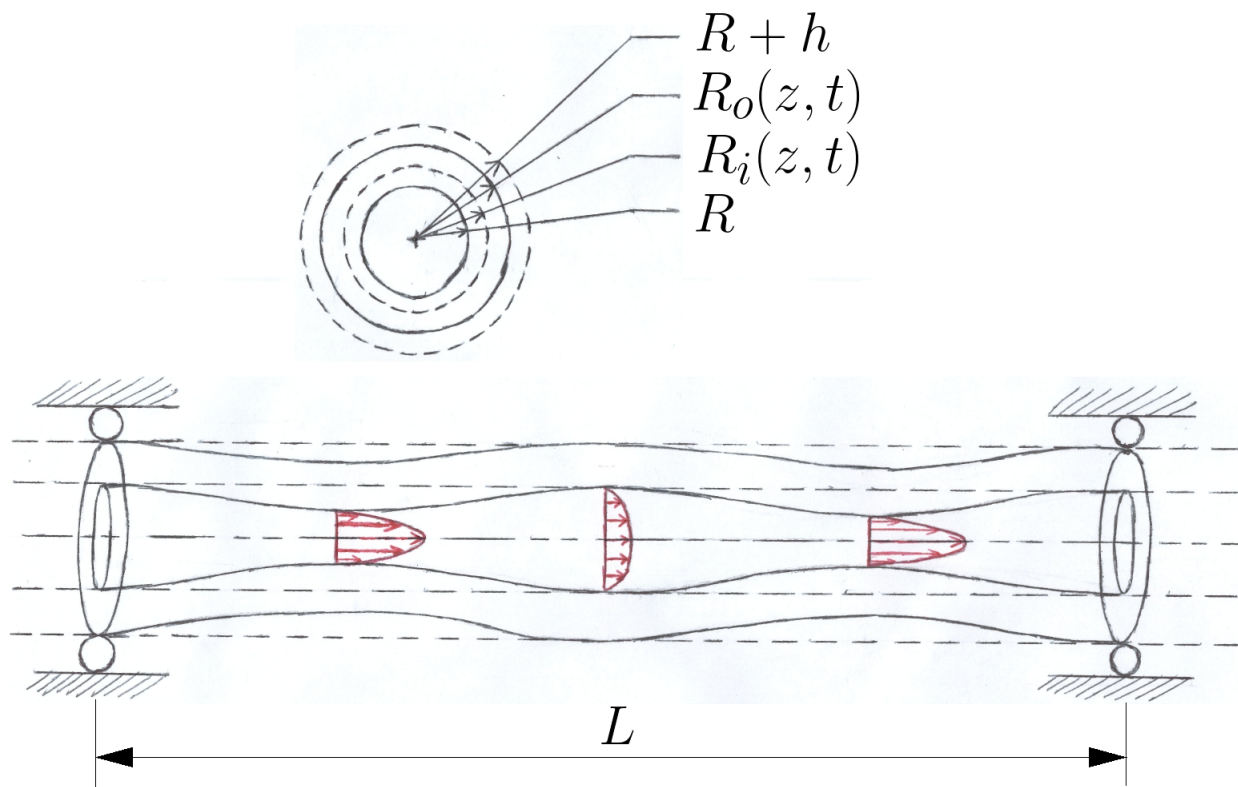


Figura 2.1: Esquema del sistema. Se resalta la forma esperada de los perfiles de velocidad axial (v_z) en el interior del conducto y el efecto del ensanchamiento de la pared sobre ellos. No se muestra la componente radial (v_r).

A partir de datos obtenidos de un experimento que reprodujo el flujo de Womersley, se sabe que las señales de velocidad y de presión en el sistema lucen como en la Figura 2.2. El gradiente de presión es pulsante y se puede descomponer en una serie de armónicos, múltiplos de la frecuencia de pulsación f de la bomba. Es decir, es la superposición de un gradiente de presión medio $\overline{\Delta p}$ y de un gradiente de presión oscilante $\widetilde{\Delta p}$. Como consecuencia, la velocidad v_z debe de tener el mismo carácter [63]: una velocidad media $\overline{v_z}$ y una pulsación $\widetilde{v_z}$. Se observa que existe una diferencia de fase φ entre las pulsaciones de la presión y las pulsaciones de la velocidad. El origen de este fenómeno es la inercia, i.e. el fluido tarda en responder a los cambios de presión. Dependiendo de la frecuencia de pulsación y de las propiedades del fluido, la densidad y la viscosidad, este desfaseamiento se verá modificado [78].

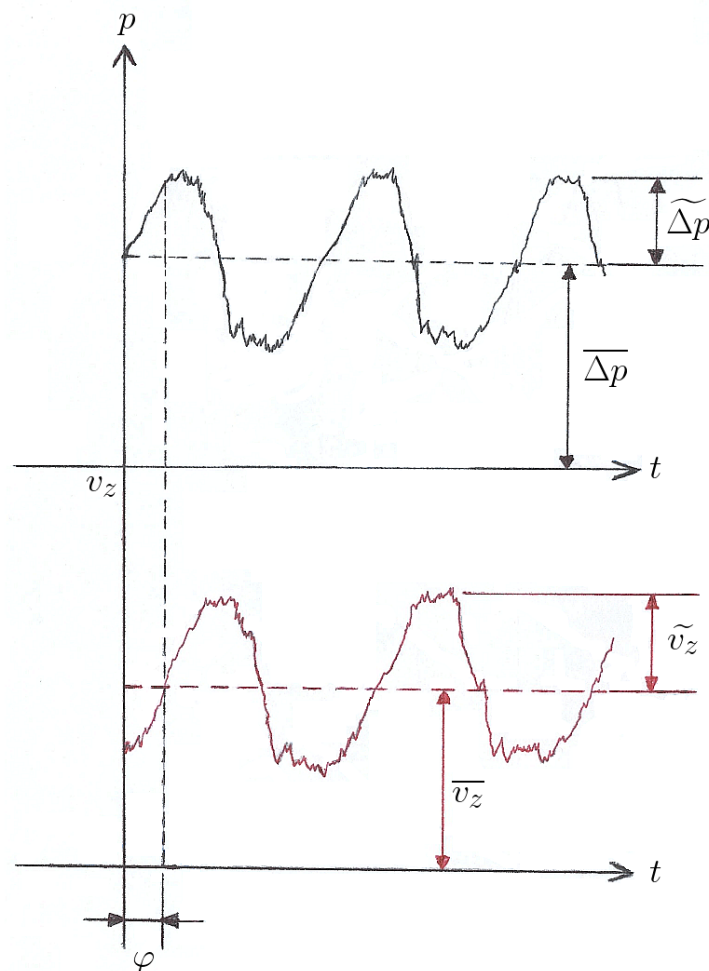


Figura 2.2: Comportamiento esperado de la presión (negro) y la velocidad axial (rojo) en el interior del conducto para un flujo oscilante en un conducto rígido. Las variables con barra representan cantidades medias y las variables con tilde representan cantidades pulsantes.

Si el conducto es rígido, la presión exhibe un gradiente espacial medio a lo largo de la longitud del conducto. No obstante, no presenta cambios en la dirección radial. Es decir, en cada corte transversal del conducto se observa un disco de presión homogéneo. Los cambios temporales, i.e. las pulsaciones, están en fase a lo largo del conducto. Esto significa que la información de los cambios se propaga instantáneamente por el sistema. Esta situación solo es aproximadamente cierta en circunstancias en las que la información se propaga suficientemente rápido respecto a los tiempos de observación. En realidad, la información se propaga como una serie de ondas a través del conducto mismo y del material en su interior. La consecuencia de asumir un conducto deformable radica en la aparición de este comportamiento [78].

A cada onda le corresponde una velocidad de propagación distinta: α , para las *ondas longitudinales en el sólido*, β para las *ondas transversales en el sólido* y c para las *ondas longitudinales en el fluido* [59] [57] [72]. Mientras que las ondas longitudinales se desplazan mediante deformaciones volumétricas, las ondas transversales lo hacen gracias a deformaciones cortantes. Adicionalmente existen las *ondas superficiales*, las cuales viajan a través de las interfaces, pero no se profundizará al respecto. La Figura 2.3 muestra el aspecto de la superficie de presión a lo largo del conducto si ha de considerarse la propagación de ondas. Entonces, se espera que exista una superposición del gradiente de presión medio, $p_0 - p_1$, de la pulsación visible en el plano $p - t$ y de las ondas de presión en el fluido, remarcadas con rojo.

La última característica a destacar del comportamiento del sistema es su dinámica. Con esto se hace referencia al movimiento de las paredes del conducto como resultado de los cambios que se mencionaron. Debido a la tercera ley de Newton, el sólido y el fluido deben cumplir ciertas condiciones de acoplamiento en la interfase. Es decir, velocidades y magnitudes de fuerzas iguales, pero con dirección opuesta. En contraposición a la situación del conducto rígido, la presión tiene un gradiente radial en cada plano transversal. Esto induce la aceleración de las partículas de fluido en la vecindad de la pared. Debido a la segunda ley de Newton, estas partículas no están en equilibrio mecánico y la posición de la pared se ve alterada. Sin embargo, las propiedades del medio sólido garantizan una recuperación elástica. Como resultado, la pared oscila, en lugar de adquirir una nueva posición fija. También es importante mencionar que los sistemas que presentan interacción entre un sólido y un fluido están sujetos a inestabilidades.

La inestabilidad estática, o *pandeo*, ocurre cuando el valor de las propiedades elásticas efectivas del sistema se vuelve negativo. De manera análoga, la inestabilidad dinámica, o *aleteo*, se presentan cuando el valor de las propiedades disipativas efectivas del sistema se vuelve negati-

vo. Los conductos elásticos que transportan fluido no son la excepción [68]. Esto es el resultado de que el fluido actúa como forzamiento del sólido y viceversa, de tal manera que existe un valor crítico de la velocidad (axial) característica del fluido, U_z^I , más allá del cual no es posible almacenar o disipar la energía que proporciona el flujo. Si bien se pueden presentar ambas inestabilidades en conductos horizontales soportados en los dos extremos [65] [66], es imposible observar el pandeo en el caso de conductos horizontales que están en voladizo [62] [64]. Sucede lo mismo en el caso de conductos verticales, con la excepción de que el pandeo bajo el propio peso del sistema es concebible si el extremo libre es el superior [67]. En el caso de estudio presentado aquí, la magnitud crítica de U_z^I no se excede [65] [66]. Entonces, no se anticipa que se observen estas inestabilidades.

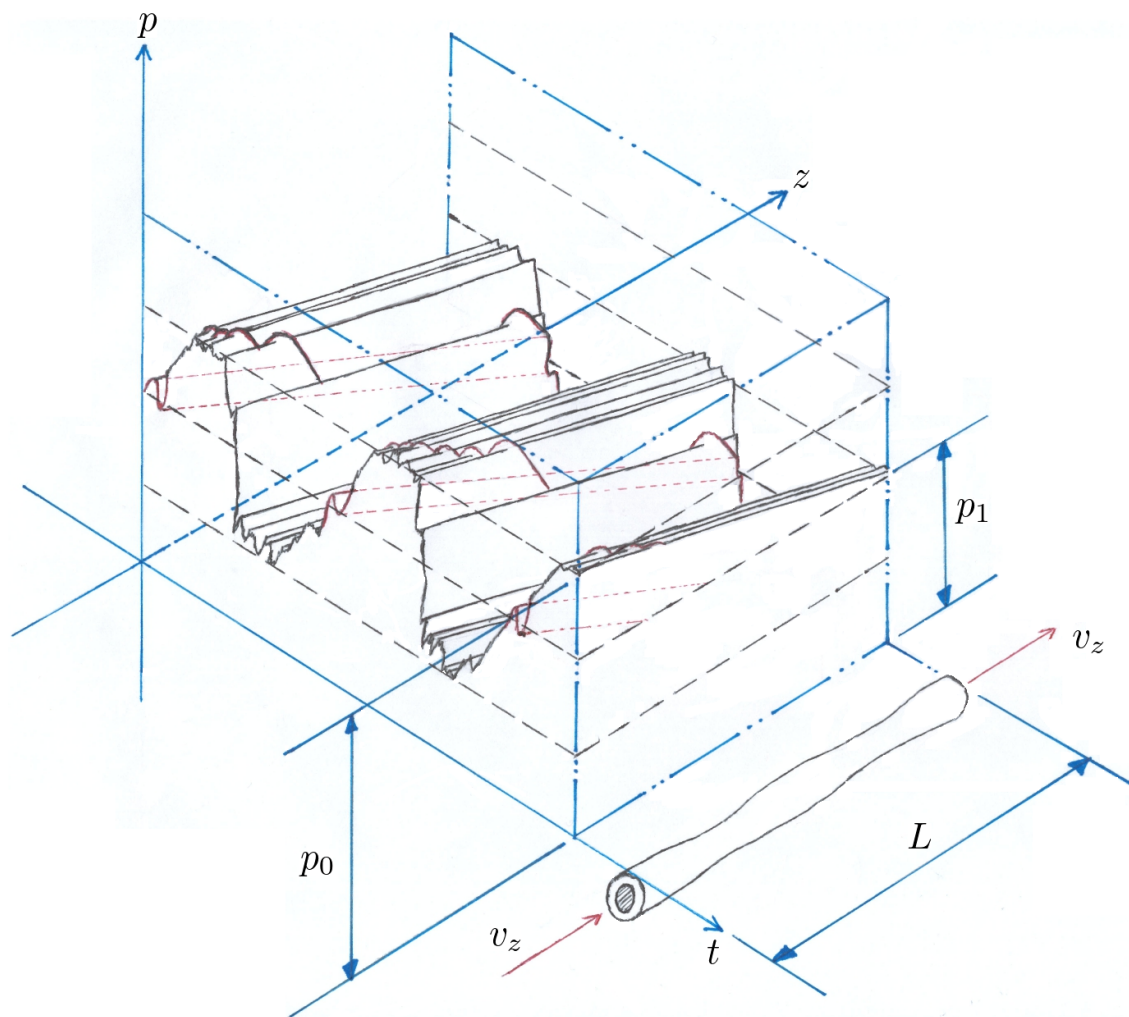


Figura 2.3: Comportamiento esperado de la presión fija y pulsante (negro), y de la onda viajera de presión (rojo) en el interior del conducto para un flujo oscilante rodeado de un medio deformable.

2.2. Ecuaciones fundamentales

2.2.1. Consideraciones de modelado

Sin importar cual sea el problema específico de interacción fluido-estructura que se estudie, existen una serie de características que estos sistemas comparten y que nos permiten hacer suposiciones comunes. Otro conjunto de suposiciones que no son universales, pero que son deseables, debe adoptarse para un modelo de primera aproximación. En la Figura 2.4 se muestra la representación abstracta del conducto.

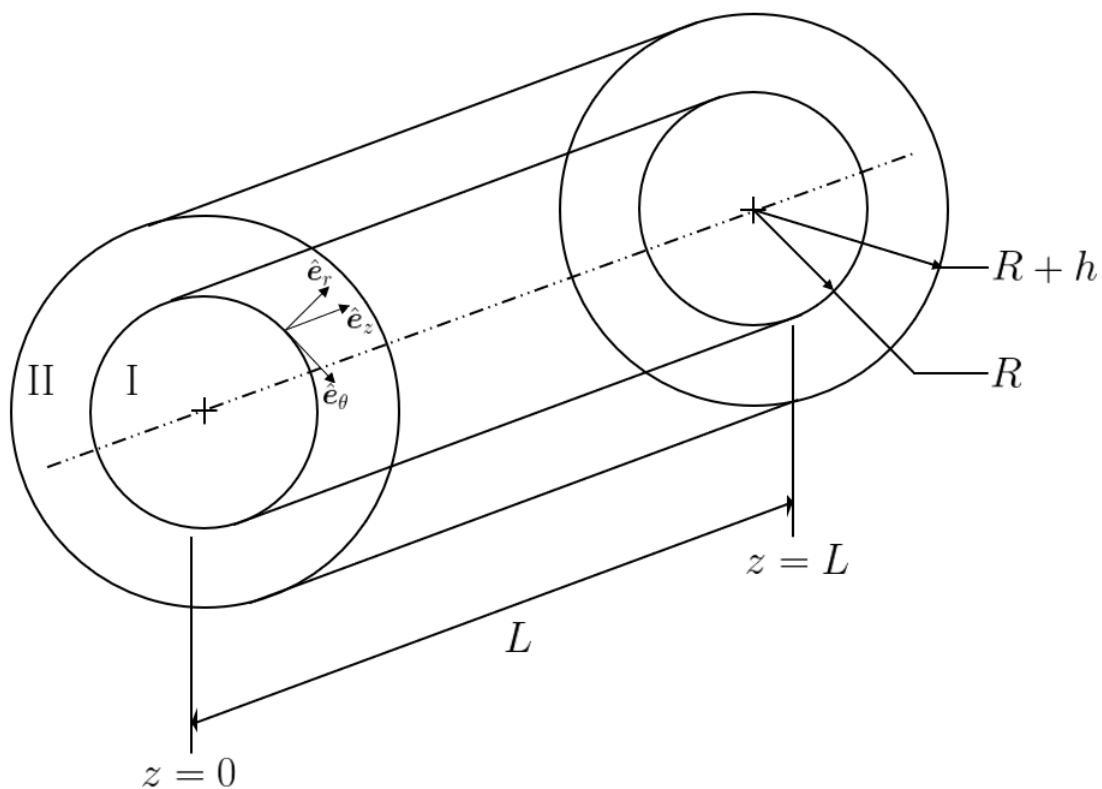


Figura 2.4: Representación abstracta del conducto. Se distingue el sistema de coordenadas cilíndricas, los dos radios de equilibrio y la longitud del conducto. También se distinguen el medio fluido y el medio sólido con los números romanos I y II, respectivamente.

Los números romanos I y II denotan al fluido y al sólido, correspondientemente. Se considera la siguiente nomenclatura: el campo de velocidad en el fluido está dado por \mathbf{v} , las componentes axial, radial y tangencial del mismo por v_z^I , v_r^I , v_θ^I , respectivamente; el tensor de esfuerzos en

el fluido por $\boldsymbol{\sigma}^I$, la presión por p^I , las viscosidades dilatacional y al corte del fluido por λ^I y μ^I , respectivamente; y su densidad por ρ^I . Entonces, se asume que se tiene:

1. Fluido newtoniano ($\boldsymbol{\sigma}^I = -p^I \mathbf{1} + \lambda^I [\nabla \cdot \mathbf{v}^I] \mathbf{1} + \mu^I [\nabla \mathbf{v}^I + \nabla \mathbf{v}^{IT}]$)
2. Condiciones isotérmicas ($\lambda^I = \text{cte}$, $\mu^I = \text{cte}$)
3. Flujo incompresible ($\rho^I = \text{cte}$)
4. Flujo transitorio ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)
5. Flujo axisimétrico ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$)
6. Flujo axial-radial ($v_z^I \neq 0$, $v_r^I \neq 0$, $v_\theta^I = 0$)
7. Flujo laminar ($\text{Re}_D \in (0, 10^2]$)

Tras haber aplicado las condiciones 1-4, las Ecs. de continuidad y de Navier-Stokes adquieren la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^I = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^I}{\partial t} + \mathbf{v}^I \cdot \nabla \mathbf{v}^I = -\frac{1}{\rho^I} \nabla p^I + \nu^I \nabla^2 \mathbf{v}^I \quad (2.2)$$

Dada la geometría y las simplificaciones 5-6, se requiere de (2.1) y (2.2) en coordenadas cilíndricas. Es decir,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^I) + \frac{\partial v_z^I}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_z^I}{\partial t} + v_r^I \frac{\partial v_z^I}{\partial r} + v_z^I \frac{\partial v_z^I}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^I} \frac{\partial p^I}{\partial z} + \frac{\mu^I}{\rho^I} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v_z^I}{\partial r} \right] + \nu^I \frac{\partial^2 v_z^I}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v_r^I}{\partial t} + v_r^I \frac{\partial v_r^I}{\partial r} + v_z^I \frac{\partial v_r^I}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^I} \frac{\partial p^I}{\partial r} + \frac{\mu^I}{\rho^I} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^I) \right] + \nu^I \frac{\partial^2 v_r^I}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

La suposición 7 para este medio se incorporará más adelante. En el caso del sólido, se considera la siguiente nomenclatura: el campo de desplazamiento en el sólido está dado por \mathbf{u} , las componentes axial, radial y tangencial del mismo por u_z^{II} , u_r^{II} , u_θ^{II} , respectivamente; el tensor de esfuerzos en el sólido por $\boldsymbol{\sigma}^{\text{II}}$, los coeficientes de Lamé por λ^{II} y μ^{II} , respectivamente; y su densidad por ρ^{II} . Las suposiciones correspondientes son:

1. Sólido hookeano¹ sin disipación ($\boldsymbol{\sigma}^{\text{II}} = \lambda^{\text{II}} [\nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{II}}] \mathbf{1} + \mu^{\text{II}} [\nabla \mathbf{u}^{\text{II}} + \nabla \mathbf{u}^{\text{II}T} + \mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}^{\text{II}})]$)
2. Condiciones isotérmicas ($\lambda^{\text{II}} = \text{cte}$, $\mu^{\text{II}} = \text{cte}$)
3. Deformaciones con compresibilidad consistente ($\rho^{\text{II}} = \text{cte}$)
4. Deformaciones transitorias ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)
5. Deformaciones axisimétricas ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$)
6. Deformaciones axiales-radiales ($u_z^{\text{II}} \neq 0$, $u_r^{\text{II}} \neq 0$, $u_\theta^{\text{II}} = 0$)
7. Deformaciones pequeñas ($\frac{d\mathbf{u}^{\text{II}}}{dt} \cdot \nabla \mathbf{u}^{\text{II}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}^{\text{II}}) = \mathbf{0}$)

Al aplicar las suposiciones 1-4 y 7, las Ecs. de continuidad y de Navier-Lamé que lo describen toman la forma

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{II}}}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{\text{II}}}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{II}}) + \beta^2 (\nabla^2 \mathbf{u}^{\text{II}} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{II}})) \quad (2.7)$$

Dada la geometría y las simplificaciones 5-6, requerimos de las Ecs. (2.6) y (2.7) en coordenadas cilíndricas. Es decir,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u_r^{\text{II}}}{\partial t} \right] + \frac{\partial^2 u_z^{\text{II}}}{\partial z \partial t} = 0 \quad (2.8)$$

¹Linealmente elástico, una vez incorporada la suposición 7 correspondiente a este medio, e isótropo.

$$\frac{\partial^2 u_z^{\text{II}}}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial r} \right] + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_z^{\text{II}}}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^{\text{II}}) \right] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 u_r^{\text{II}}}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^{\text{II}}) \right] + \beta^2 \frac{\partial^2 u_r^{\text{II}}}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_z^{\text{II}}}{\partial r \partial z} \quad (2.10)$$

donde α es la velocidad de las ondas longitudinales y β es la velocidad de las ondas transversales en el sólido. Éstas, a su vez, quedan expresadas como

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda^{\text{II}} + 2\mu^{\text{II}}}{\rho^{\text{II}}}} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu^{\text{II}}}{\rho^{\text{II}}}}$$

El conjunto de Ecs. (2.1)-(2.5) y (2.6)-(2.10) describen el comportamiento del sistema físico para el fluido y el sólido.

2.2.2. Ecuaciones escaladas

La manera más general que tenemos de normalizar las ecuaciones es con respecto a las escalas propias del sistema considerado. La idea es que los términos dominantes de las Ecs. sean de $\mathcal{O}(1)$. En este caso, las variables escaladas son

$$r^* = \frac{r}{R} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad v_z^{\text{I}*} = \frac{v_z^{\text{I}}}{U_z^{\text{I}}} \quad v_r^{\text{I}*} = \frac{v_r^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}} \quad p^{\text{I}*} = \frac{p^{\text{I}}}{\rho^{\text{I}} U_z^{\text{I}2}} \quad t^* = t f$$

La única dificultad es que $U_r^{\text{I}} = \max|v_r^{\text{I}}|$ no se conoce *a priori*. Siempre y cuando estudiemos un flujo pulsante, la velocidad axial de referencia será la velocidad media de la componente estacionaria, i.e. $U_z^{\text{I}} = \overline{v_z^{\text{I}}}$. Si se tiene un flujo pulsante, entonces $U_z^{\text{I}} = \max|v_z^{\text{I}}|$. En el caso del sólido, se proponen los parámetros dados por

$$r^* = \frac{r}{R} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad u_z^{\text{II}*} = \frac{u_z^{\text{II}}}{a_z L} \quad u_r^{\text{II}*} = \frac{u_r^{\text{II}}}{a_r R} \quad t^* = t f$$

donde $a_z L = \max|u_z^{\text{II}}|$ y $a_r R = \max|u_r^{\text{II}}|$. Estas cantidades, a_r y a_z , representan las deformaciones máximas que puede sufrir el medio elástico y tampoco las conocemos *a priori*. Se lidiará

con estos problemas más adelante, en un esfuerzo de obtener un modelo que nos proporcione información nueva. Los números adimensionales que aparecerán durante la deducción del modelo son

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{R}{L} & \epsilon &= \frac{h}{R} & \text{Sh}_L &= \frac{fL}{U_z^I} & \text{Ma}_\alpha &= \frac{U_z^I}{\alpha} & \text{Ma}_\beta &= \frac{U_z^I}{\beta} & \text{Ma}_c &= \frac{U_z^I}{c} \\ \varrho^{I,II} &= \frac{\rho^I}{\rho^{II}} & \text{Re}_L &= \frac{U_z^I L}{\nu^I} & \text{Wo}_R &= \sqrt{2\pi\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} & \Pi_R &= 2\pi\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\beta \end{aligned}$$

Los denominamos: ε , la *relación radio-longitud de equilibrio* del conducto; ϵ , la *relación radio-espesor de equilibrio* del conducto; Sh_L , el *número de Strouhal*; Ma_α , el *número de Mach* respecto a las ondas longitudinales en el sólido; Ma_β , *número de Mach* respecto a las ondas transversales en el sólido; Ma_c , el *número de Mach* respecto a las ondas longitudinales en el fluido; $\varrho^{I,II}$, la *relación de densidades* de los medios; Re_L , el *número de Reynolds*; Wo_R , el *número de Womersley*; y Π_R , un *análogo al número de Womersley* que, hasta el conocimiento del autor, no tiene nombre definido. Con base en estos parámetros, se llega al sistema

$$U_r^I \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^{I*}) + \varepsilon U_z^I \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*} = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial t^*} + \varepsilon^2 \text{Re}_L \left[\frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} v_r^{I*} \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} + v_z^{I*} \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*} \right] = \\ -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z^{I*}}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L \frac{\partial v_r^{I*}}{\partial t^*} + \varepsilon^2 \text{Re}_L \left[\frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} v_r^{I*} \frac{\partial v_r^{I*}}{\partial r^*} + v_z^{I*} \frac{\partial v_r^{I*}}{\partial z^*} \right] = \\ -\frac{\varepsilon U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial r^*} + \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^{I*}) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_r^{I*}}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$a_r \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \frac{\partial u_r^{II*}}{\partial t^*} \right] + a_z \frac{\partial^2 u_z^{II*}}{\partial z^{*2} \partial t^*} = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \frac{\partial^2 u_z^{\text{II}*}}{\partial t^{*2}} &= \text{Ma}_\alpha^2 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial r^*} \right] + \varepsilon^2 \text{Ma}_\beta^2 \frac{\partial^2 u_z^{\text{II}*}}{\partial z^{*2}} \\ &+ \frac{a_r}{a_z} \varepsilon^2 (\text{Ma}_\beta^2 - \text{Ma}_\alpha^2) \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u_r^{\text{II}*}) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \frac{\partial^2 u_r^{\text{II}*}}{\partial t^{*2}} &= \text{Ma}_\beta^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u_r^{\text{II}*}) \right] + \text{Ma}_\alpha^2 \frac{\partial^2 u_r^{\text{II}*}}{\partial z^{*2}} \\ &+ \frac{a_z}{a_r} (\text{Ma}_\beta^2 - \text{Ma}_\alpha^2) \frac{\partial^2 u_z^{\text{II}*}}{\partial r^* \partial z^*} \end{aligned} \quad (2.16)$$

A partir de las Ecs. (2.11)-(2.2.2) se pueden obtener soluciones analíticas exactas, soluciones analíticas aproximadas, o bien, soluciones numéricas a diversos problemas.

2.2.3. Linealización del sistema

Antes de continuar, es necesario hacer una breve discusión sobre el régimen de flujo bajo estudio. Se sabe que, en el caso de flujos magmáticos, se cumplen las condiciones siguientes:

- Conducto suficientemente largo ($\varepsilon \ll 1$)
- Flujo medio dominante ($v_z^{\text{I}*} \sim \overline{v_z^{\text{I}*}}$)
- Flujo medio suficientemente lento
- Viscosidad suficientemente alta ($\mu^{\text{I}} \gg 1$)

Es decir, se espera que se satisfaga $\text{Re}_D \ll 1$. La suposición 7 que se planteó anteriormente afirma que el flujo ocurre a $\text{Re}_D \in (0, 10^2]$. Hasta ese punto se tiene consistencia. Si se linealizan por completo las Ecs. (2.2.2) y (2.2.2), se llega a

$$\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L \frac{\partial v_z^{\text{I}*}}{\partial t^*} = -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{\partial p^{\text{I}*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^{\text{I}*}}{\partial r^*} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z^{\text{I}*}}{\partial z^{*2}} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L \frac{\partial v_r^{I*}}{\partial t^*} = -\frac{\varepsilon U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial r^*} + \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^{I*}) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_r^{I*}}{\partial z^{*2}} \quad (2.18)$$

El tipo de linealización que se propone es válida, estrictamente hablando, para el régimen de *flujo de Stokes*. Esta suposición se ha utilizado con éxito en el contexto de flujos biológicos en [58] y [78]. La viscosidad dinámica de los magmas es de hasta 10^{14} Pa·s, por lo que es concebible que estos flujos ocurran en el régimen de Stokes. Aún en modelos que consideran el término no-lineal [35], la condición de estabilidad de la solución numérica está sujeta a la magnitud de Re_L . Sin embargo, un experimento de pequeña escala, utilizando glicerina, agua y conductos de tamaños comerciales disponibles, presenta los siguientes órdenes de magnitud:

$$\varepsilon \in [10^{-3}, 10^{-2}] \quad \text{Sh}_L \in [10^{-1}, 10^0] \quad \text{Re}_L \in [10^2, 10^5]$$

y como $\text{Re}_D = 2\varepsilon \text{Re}_L$, entonces,

$$\text{Re}_D \in [10^{-1}, 10^3] \quad \text{Wo}_R \in [10^{-2}, 10^1]$$

Queda claro que las condiciones experimentales realizables no permiten estudiar este tipo de flujos en el régimen de Stokes. Solo es posible trabajar en el intervalo indicado, el cual nos garantiza la existencia de un flujo laminar, pero no concuerda con la linealización propuesta. Ante esta situación, se plantea que la solución de las Ecs. (2.17)-(2.18) se valide dentro de lo posible y se distingan sus limitaciones en este régimen. Posteriormente se podrá deducir, con ayuda del desarrollo del presente trabajo, una solución mejorada con un término de advección linealizado pero no ausente. En el escenario de el que las discrepancias no sean considerables, la solución obtenida podrá aplicarse directamente a flujos volcánicos.

2.3. Flujo viscoso oscilante en conducto deformable

A continuación se procede a resolver el sistema simultáneamente representado por las Ecs. (2.11) y (2.14)-(2.18).

2.3.1. Solución general para el fluido

Para resolver el sistema se utiliza el método de expansiones en series de funciones propias. Luchini recurrió a un método similar en [58] para resolver su problema. El procedimiento comienza expresando los campos de la forma

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[R_{n,m}^{I*}(r^*) Z_m^{I*}(z^*) T_n^{I*}(t^*) + \widetilde{R}_{n,m}^{I*}(r^*) \widetilde{Z}_m^{I*}(z^*) \widetilde{T}_n^{I*}(t^*) \right]$$

$$v_r^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mathcal{R}_{n,m}^{I*}(r^*) \mathcal{Z}_m^{I*}(z^*) \mathcal{T}_n^{I*}(t^*) + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}(r^*) \widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}(z^*) \widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}(t^*) \right]$$

$$u_z^{II*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} R_{n,m}^{II*}(r^*) Z_m^{II*}(z^*) T_n^{II*}(t^*)$$

$$u_r^{II*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_{n,m}^{II*}(r^*) \mathcal{Z}_m^{II*}(z^*) \mathcal{T}_n^{II*}(t^*)$$

Las funciones sin tilde pertenecen a la solución complementaria y aquéllas con tilde a la solución particular. Se observa que los campos de desplazamientos sólo consisten de la solución complementaria. La razón es que la excitación del sistema sólo afecta directamente al fluido. La información se transmite posteriormente al sólido gracias al acoplamiento entre los medios. Adicionalmente, se expande el campo de presión de la forma

$$p^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{n,m}^{I*}(r^*) H_m^{I*}(z^*) F_n^{I*}(t^*)$$

lo cual permite considerar soluciones en las que el forzamiento tenga un comportamiento más general, diferente al que se muestra en las Figuras [2.2] y [2.3]. La notación está estandarizada para resaltar que esta nueva solución es simplemente una extensión de [A.6].

Solución complementaria

El primer paso del método es obtener la solución complementaria, i.e. la solución al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo. Sustituyendo las expansiones en series de funciones propias en las Ecs. (2.2.2)-(2.2.2), se obtiene

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{T_n^{I*}} \frac{dT_n^{I*}}{dt^*} = \frac{1}{R_{n,m}^{I*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{dR_{n,m}^{I*}}{dr^*} \right] + \frac{\varepsilon^2}{Z_m^{I*}} \frac{d^2 Z_m^{I*}}{dz^{*2}} \quad (2.19)$$

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\mathcal{T}_n^{I*}} \frac{d\mathcal{T}_n^{I*}}{dt^*} = \frac{1}{\mathcal{R}_{n,m}^{I*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{I*} \right) \right] + \frac{\varepsilon^2}{\mathcal{Z}_m^{I*}} \frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} \quad (2.20)$$

Este sistema es separable. Se hacen las igualaciones

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{T_n^{I*}} \frac{dT_n^{I*}}{dt^*} = -\gamma_n^{I*2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{Z_m^{I*}} \frac{d^2 Z_m^{I*}}{dz^{*2}} = -\delta_m^{I*2} \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{R_{n,m}^{I*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dR_{n,m}^{I*}}{dr^*} \right) = -\eta_{n,m}^{I*2} \quad (2.23)$$

para la ecuación axial, donde $\eta_{n,m}^{I*2} = \gamma_n^{I*2} - \delta_m^{I*2}$. Estos son los valores propios del medio viscoso. Por otro lado, se hacen las igualaciones

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\mathcal{T}_n^{I*}} \frac{d\mathcal{T}_n^{I*}}{dt^*} = -\xi_n^{I*2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\mathcal{Z}_m^{I*}} \frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} = -\kappa_m^{I*2} \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{n,m}^{I*}} \frac{d}{dr^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{I*} \right) \right) = -\zeta_{n,m}^{I*2} \quad (2.26)$$

para la ecuación radial, donde $\zeta_{n,m}^{I*2} = \xi_n^{I*2} - \kappa_m^{I*2}$. Estos también son los valores propios del fluido, pero más adelante se demuestra que las dos ternas son idénticas. A partir de (2.21)-(2.26), se llega a las ecuaciones diferenciales ordinarias dadas por

$$\frac{dT_n^{I*}}{dt^*} + \frac{\gamma_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} T_n^{I*} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2 Z_m^{I*}}{dz^{*2}} + \frac{\delta_m^{I*2}}{\varepsilon^2} Z_m^{I*} = 0 \quad (2.28)$$

$$r^{*2} \frac{d^2 R_{n,m}^{I*}}{dr^{*2}} + r^* \frac{dR_{n,m}^{I*}}{dr^*} + \eta_{n,m}^{I*2} r^{*2} R_{n,m}^{I*} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{d\mathcal{T}_n^{I*}}{dt^*} + \frac{\xi_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} \mathcal{T}_n^{I*} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} + \frac{\kappa_m^{I*2}}{\varepsilon^2} \mathcal{Z}_m^{I*} = 0 \quad (2.31)$$

$$r^{*2} \frac{d^2 \mathcal{R}_{n,m}^{I*}}{dr^{*2}} + r^* \frac{d\mathcal{R}_{n,m}^{I*}}{dr^*} - \left(1 - \zeta_{n,m}^{I*2} r^{*2}\right) \mathcal{R}_{n,m}^{I*} = 0 \quad (2.32)$$

cuyas soluciones generales son

$$T_n^{I*}(t^*) = \mathcal{B}_n^{(1)*} \exp \left[-\frac{\gamma_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} t^* \right] \quad (2.33)$$

$$Z_m^{I*}(z^*) = \mathcal{B}_m^{(4)*} \exp \left[i \frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} z^* \right] + \mathcal{B}_m^{(5)*} \exp \left[-i \frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} z^* \right] \quad (2.34)$$

$$R_{nm}^{I*}(r^*) = \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} J_0 \left(\eta_{n,m}^{I*} r^* \right) + \mathcal{B}_{n,m}^{(3)*} Y_0 \left(\eta_{n,m}^{I*} r^* \right) \quad (2.35)$$

$$\mathcal{T}_n^{I*}(t^*) = \mathcal{B}_n^{(6)*} \exp \left[-\frac{\zeta_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} t^* \right] \quad (2.36)$$

$$\mathcal{Z}_m^{I*}(z^*) = \mathcal{B}_m^{(9)*} \exp \left[i \frac{\kappa_m^{I*}}{\varepsilon} z^* \right] + \mathcal{B}_m^{(10)*} \exp \left[-i \frac{\kappa_m^{I*}}{\varepsilon} z^* \right] \quad (2.37)$$

$$\mathcal{R}_{nm}^{I*}(r^*) = \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} J_1 \left(\zeta_{n,m}^{I*} r^* \right) + \mathcal{B}_{n,m}^{(8)*} Y_1 \left(\zeta_{n,m}^{I*} r^* \right) \quad (2.38)$$

donde J_0 , J_1 y Y_0 , Y_1 son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente. Asimismo, $\mathcal{B}_n^{(1)*}$, $\mathcal{B}_{n,m}^{(2)*}$, $\mathcal{B}_{n,m}^{(3)*}$, $\mathcal{B}_m^{(4)*}$, $\mathcal{B}_m^{(5)*}$, $\mathcal{B}_n^{(6)*}$, $\mathcal{B}_{n,m}^{(7)*}$, $\mathcal{B}_{n,m}^{(8)*}$, $\mathcal{B}_m^{(9)*}$ y $\mathcal{B}_m^{(10)*}$ son los coeficientes a determinarse a través de las condiciones de frontera e iniciales. La Ec. (2.11), correspondiente a la ley de conservación de masa, se considera posteriormente.

Solución particular

En el caso de la solución particular, a partir de la sustitución de las expansiones en series de funciones propias en las Ecs. (2.2.2) y (2.2.2), se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}} \frac{d\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}}{dt^*} &= -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{G_{nm}^{I*}}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{1}{\widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}} \frac{dH_m^{I*}}{dz^*} \frac{F_n^{I*}}{\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}} \\ &+ \frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}}{dr^*} \right] + \frac{\varepsilon^2}{\widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}} \frac{d^2 \widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}}{dz^{*2}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}} \frac{d\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}}{dt^*} &= -\frac{\varepsilon U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{dG_{nm}^{I*}}{dr^*} \frac{H_m^{I*}}{\widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}} \frac{F_n^{I*}}{\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}} \\ &+ \frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*} \right) \right] + \frac{\varepsilon^2}{\widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}} \frac{d^2 \widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}}{dz^{*2}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Este sistema no es separable en estas condiciones. Una posibilidad es que no exista solución de variables separables para este tipo de flujo. La otra posibilidad es que dos de las funciones de la expansión de p^{I*} sean proporcionales a las funciones de las expansiones de v_z^{I*} y de v_r^{I*} . Existen tres posibilidades distintas, que son

$$\begin{cases} G_{n,m}^{I*} = k_{n,m}^{(1)*} \widetilde{R}_{n,m}^{I*} & \frac{dH_m^{I*}}{dz^*} = k_m^{(2)*} \widetilde{Z}_m^{I*} \\ \frac{dG_{n,m}^{I*}}{dr^*} = k_{n,m}^{(4)*} \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*} & H_m^{I*} = k_m^{(5)*} \widetilde{Z}_m^{I*} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_{n,m}^{I*} = k_{n,m}^{(1)*} \widetilde{R}_{n,m}^{I*} & F_n^{I*} = k_n^{(3)*} \widetilde{T}_n^{I*} \\ \frac{dG_{n,m}^{I*}}{dr^*} = k_{n,m}^{(4)*} \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*} & F_n^{I*} = k_n^{(6)*} \widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dH_m^{I*}}{dz^*} = k_m^{(2)*} \widetilde{Z}_m^{I*} & F_n^{I*} = k_n^{(3)*} \widetilde{T}_n^{I*} \\ H_m^{I*} = k_m^{(5)*} \widetilde{Z}_m^{I*} & F_n^{I*} = k_n^{(6)*} \widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*} \end{cases}$$

Esto equivale a representar el forzamiento como una expansión de funciones propias. Los coeficientes $k_{n,m}^{(1)*}$, $k_m^{(2)*}$, $k_n^{(3)*}$, $k_{n,m}^{(4)*}$, $k_m^{(5)*}$ y $k_n^{(6)*}$ se determinan aprovechando la ortogonalidad entre estas funciones. Evidentemente algunos de estos coeficientes están relacionados entre sí, por lo que no se necesitan todos simultáneamente. Siguiendo el procedimiento para deducir la solución que describe el flujo de Womersley, se escoge el tercer conjunto de igualdades. El significado físico de esta elección es que la respuesta descrita del sistema está en fase, axial y temporalmente, con el forzamiento. Debido al acoplamiento entre medios, el caso opuesto no es posible [65] [66]. Tomando esto en consideración, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\widetilde{T}_n^{I*}} \frac{d\widetilde{T}_n^{I*}}{dt^*} &= -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{G_{n,m}^{I*}}{\widetilde{R}_{n,m}^{I*}} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*} \\ &+ \frac{1}{\widetilde{R}_{n,m}^{I*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{d\widetilde{R}_{n,m}^{I*}}{dr^*} \right] + \frac{\varepsilon^2}{\widetilde{Z}_m^{I*}} \frac{d^2 \widetilde{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}} \frac{d\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}}{dt^*} &= -\frac{\varepsilon U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{dG_{n,m}^{I*}}{dr^*} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} \\ &+ \frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*} \right) \right] + \frac{\varepsilon^2}{\widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}} \frac{d^2 \widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}}{dz^{*2}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Este sistema también es separable. A partir de aquí, sabiendo que los valores propios del sistema son únicos, se llega a las igualdades

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\widetilde{T}_n^{I*}} \frac{d\widetilde{T}_n^{I*}}{dt^*} = -\gamma_n^{I*2} \quad (2.43)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\widetilde{Z}_m^{I*}} \frac{d^2 \widetilde{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} = -\delta_m^{I*2} \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{\widetilde{R}_{n,m}^{I*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{d\widetilde{R}_{n,m}^{I*}}{dr^*} \right] - \varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{G_{n,m}^{I*}}{\widetilde{R}_{n,m}^{I*}} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*} = -\eta_{n,m}^{I*2} \quad (2.45)$$

en el caso de la ecuación axial. Asimismo, se obtiene

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L}{\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}} \frac{d\widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}}{dt^*} = -\xi_n^{I*2} \quad (2.46)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}} \frac{d^2 \widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}}{dz^{*2}} = -\kappa_m^{I*2} \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*} \right) \right] - \frac{\varepsilon U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \frac{1}{\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}} \frac{dG_{n,m}^{I*}}{dr^*} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} = -\zeta_{n,m}^{I*2} \quad (2.48)$$

en el caso de la ecuación radial. Observando las expresiones (2.43), (2.44), (2.46) y (2.47) se concluye que $T_n^{I*} = \widetilde{T}_n^{I*}$, $\mathcal{T}_n^{I*} = \widetilde{\mathcal{T}}_n^{I*}$, $Z_m^{I*} = \widetilde{Z}_m^{I*}$ y $\mathcal{Z}_m^{I*} = \widetilde{\mathcal{Z}}_m^{I*}$. Es decir, las expansiones se transforman en

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[R_{n,m}^{I*}(r^*) + \widetilde{R}_{n,m}^{I*}(r^*) \right] Z_m^{I*}(z^*) T_n^{I*}(t^*)$$

$$v_r^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mathcal{R}_{n,m}^{I*}(r^*) + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}(r^*) \right] \mathcal{Z}_m^{I*}(z^*) \mathcal{T}_n^{I*}(t^*)$$

La solución particular únicamente difiere de la solución complementaria en la función radial. Para obtenerla es necesario resolver las tres ecuaciones diferenciales ordinarias pertinentes: (2.45), (2.48) y la ley de conservación de masa. Las incógnitas son $\widetilde{R}_{n,m}^{I*}$, $\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}$ y $G_{n,m}^{I*}$. No es posible conocer la forma de $G_{n,m}^{I*}$ a partir del experimento. Como consecuencia, deducir esta función se convierte en parte integral del problema. En otras palabras, necesariamente debe existir una variación radial de la presión para que la solución tenga sentido físico. Sustituyendo las expansiones en la Ec. (2.11), esta se convierte en

$$U_r^I \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* (\mathcal{R}_{n,m}^{I*} + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}) \right] \mathcal{Z}_m^{I*} \mathcal{T}_n^{I*} + \varepsilon U_z^I (\mathcal{R}_{n,m}^{I*} + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}) \frac{d\mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^*} \mathcal{T}_n^{I*} = 0 \quad (2.49)$$

Si bien (2.19) no es separable, se puede recurrir a las suposiciones que permitieron separar las Ecs. (2.3.1) y (2.3.1). Entonces,

$$k_m^{(5)*} \frac{d\mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^*} = k_m^{(2)*} \mathcal{Z}_m^{I*}$$

$$k_n^{(6)*} \mathcal{T}_n^{I*} = k_n^{(3)*} \mathcal{T}_n^{I*}$$

La primera de estas expresiones implica que

$$k_m^{(5)*} \frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} = k_m^{(2)*} \frac{d\mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^*}$$

Las derivadas de las funciones propias \mathcal{Z}_m^{I*} , \mathcal{Z}_m^{I*} , \mathcal{T}_n^{I*} y \mathcal{T}_n^{I*} tienen comportamiento cíclico. De hecho, a partir de (2.34) se puede verificar que

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{I*}}{dz^{*2}} = -\frac{\kappa_m^{I*2}}{\varepsilon^2} \mathcal{Z}_m^{I*} \quad (2.50)$$

Es decir,

$$\frac{dZ_m^{I*}}{dz^*} = -\frac{k_m^{(5)*} \kappa_m^{I*2}}{k_m^{(2)*} \varepsilon^2} Z_m^{I*} \quad (2.51)$$

$$T_n^{I*} = \frac{k_n^{(6)*}}{k_n^{(3)*}} \mathcal{T}_n^{I*} \quad (2.52)$$

Esto es consistente con las condiciones de frontera axiales esperadas². Sustituyendo estas últimas igualdades en (2.49), se cancelan los factores comunes y se obtiene que

$$U_r^I \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* (\mathcal{R}_{n,m}^{I*} + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*}) \right] - \varepsilon U_z^I (R_{n,m}^{I*} + \widetilde{R}_{n,m}^{I*}) \frac{k_m^{(5)*} \kappa_m^{I*2} k_n^{(6)*}}{k_m^{(2)*} \varepsilon^2 k_n^{(3)*}} = 0 \quad (2.53)$$

En este punto, se puede decir que la conservación de masa en el fluido se cumple para la solución complementaria y para la solución particular *por separado*. Entonces,

$$U_r^I \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \mathcal{R}_{n,m}^{I*} \right] - \varepsilon U_z^I R_{n,m}^{I*} \frac{k_m^{(5)*} \kappa_m^{I*2} k_n^{(6)*}}{k_m^{(2)*} \varepsilon^2 k_n^{(3)*}} = 0 \quad (2.54)$$

$$U_r^I \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{I*} \right] - \varepsilon U_z^I \widetilde{R}_{n,m}^{I*} \frac{k_m^{(5)*} \kappa_m^{I*2} k_n^{(6)*}}{k_m^{(2)*} \varepsilon^2 k_n^{(3)*}} = 0 \quad (2.55)$$

La Ec. (2.54) demuestra que los valores propios, $\eta_{n,m}^{I*}$ y $\zeta_{n,m}^{I*}$, son idénticos. Una consecuencia inmediata es que $\gamma_n^{I*} = \xi_n^{I*}$ y que $\delta_m^{I*} = \kappa_m^{I*}$. Esto también se verifica al evaluar las condiciones de frontera e iniciales. Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias está dado por (2.45), (2.48) y (2.55). Es decir,

²Relaciones de nodos y antinodos que se explicarán más adelante.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 r^* \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I}{dr^*} + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I - \frac{\varepsilon U_z^I k_m^{(5)*} \delta_m^{I*2} k_n^{(6)*}}{U_r^I k_m^{(2)*} \varepsilon^2 k_n^{(3)*}} r^* \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I = 0 \\
 r^{*2} \frac{d^2 \widetilde{R}_{n,m}^I}{dr^{*2}} + r^* \frac{d\widetilde{R}_{n,m}^I}{dr^*} + \eta_{nm}^{I*2} r^{*2} \widetilde{R}_{n,m}^I - \varepsilon^2 \text{Re}_L k_m^{(2)*} k_n^{(3)*} r^{*2} G_{n,m}^I = 0 \\
 r^{*2} \frac{d^2 \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I}{dr^{*2}} + r^* \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I}{dr^*} - \left(1 - \eta_{n,m}^{I*2} r^{*2}\right) \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I - \frac{\varepsilon U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} r^{*2} \frac{dG_{n,m}^I}{dr^*} = 0
 \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Para ver los detalles de la resolución de (2.56) se sugiere consultar el Apéndice B. La solución está dada por

$$\widetilde{R}_{n,m}^I(r^*) = \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} J_0\left(i\delta_m^{I*} r^*\right) \quad (2.57)$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^I(r^*) = \pm i \frac{\varepsilon U_z^I \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^{I*} J_1\left(i\delta_m^{I*} r^*\right) \quad (2.58)$$

$$G_{n,m}^I(r^*) = \text{Eu}_{n,m} J_0\left(i\delta_m^{I*} r^*\right) \quad (2.59)$$

donde $\text{Eu}_{n,m}$ es la amplitud del gradiente de presión producido por las ondas longitudinales en el fluido. En la Ec. (2.58), el signo positivo corresponde a ondas reflejadas y el negativo a ondas emitidas.

2.3.2. Solución general para el sólido

Solución complementaria

Como ya se mencionó anteriormente, no existe solución particular en el sólido. Esto facilita la deducción de la solución general para este medio. No obstante, el tratamiento de la ley de conservación de masa, i.e. la Ec. (2.14), afecta el procedimiento de una manera distinta. Se

comienza de forma similar al caso anterior, sustituyendo las expansiones en series de funciones propias en las Ecs. (2.14)-(2.2.2). Con ello se obtiene

$$a_r \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) \mathcal{Z}_m^{\text{II}*} \frac{dT_n^{\text{II}*}}{dt^*} + a_z R_{n,m}^{\text{II}*} \frac{dZ_m^{\text{II}*}}{dz^*} \frac{dT_n^{\text{II}*}}{dt^*} = 0 \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2}{T_n^{\text{II}*}} \frac{d^2 T_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} &= \frac{\text{Ma}_\alpha^2}{R_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{dR_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \right] + \frac{\varepsilon^2 \text{Ma}_\beta^2}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{d^2 Z_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} \\ &+ \frac{a_r}{a_z} \varepsilon^2 (\text{Ma}_\beta^2 - \text{Ma}_\alpha^2) \frac{1}{R_{n,m}^{\text{II}*}} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) \right] \frac{1}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{dZ_m^{\text{II}*}}{dz^*} \frac{T_n^{\text{II}*}}{T_n^{\text{II}*}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2}{\mathcal{T}_n^{\text{II}*}} \frac{d^2 \mathcal{T}_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} &= \frac{\text{Ma}_\beta^2}{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) \right] + \frac{\text{Ma}_\alpha^2}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{d^2 Z_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} \\ &+ \frac{a_z}{a_r} (\text{Ma}_\beta^2 - \text{Ma}_\alpha^2) \frac{1}{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{dR_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \frac{1}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{dZ_m^{\text{II}*}}{dz^*} \frac{T_n^{\text{II}*}}{\mathcal{T}_n^{\text{II}*}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Es imposible realizar la separación de variables en las Ecs. (2.3.2) y (2.3.2) en estas condiciones. Es aquí donde cobra importancia la conservación de masa. Hasta el conocimiento del autor, esta ley fundamental no se considera explícitamente al obtener soluciones en elasto-dinámica. Esto es cierto incluso en el modelo matemático que más se asemeja [57]. A partir de (2.60), se pueden hacer las separaciones de variables

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) = -\lambda_{n,m}^{(1)*} R_{n,m}^{\text{II}*} \quad (2.63)$$

$$\mathcal{Z}_m^{\text{II}*} = \frac{\lambda_n^{(2)*}}{\lambda_{n,m}^{(1)*}} \frac{a_z}{a_r} \frac{dZ_m^{\text{II}*}}{dz^*} \quad (2.64)$$

$$\frac{dT_n^{\text{II}*}}{dt^*} = \lambda_n^{(2)*} \frac{dT_n^{\text{II}*}}{dt^*} \quad (2.65)$$

y deducir a partir de estas que

$$\frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) \right] = -\lambda_{n,m}^{(1)*} \frac{dR_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \quad (2.66)$$

$$\frac{dZ_m^{\text{II}*}}{dz^*} = \frac{\lambda_n^{(2)*} a_z}{\lambda_{n,m}^{(1)*} a_r} \frac{d^2 Z_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} \quad (2.67)$$

$$T_n^{\text{II}*} = \lambda_n^{(2)*} \mathcal{T}_n^{\text{II}*} + \lambda_n^{(0)*} \quad (2.68)$$

Como esperamos una solución de carácter oscilatorio, se concluye que $\lambda_n^{(0)*} = 0$. Sustituyendo las relaciones (2.63)-(2.68) en las Ecs. (2.3.2) y (2.3.2), se obtiene

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2}{T_n^{\text{II}*}} \frac{d^2 T_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} = \frac{\text{Ma}_\alpha^2}{R_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{dR_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \right] + \frac{\varepsilon^2 \text{Ma}_\alpha^2}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{d^2 Z_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} \quad (2.69)$$

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2}{\mathcal{T}_n^{\text{II}*}} \frac{d^2 \mathcal{T}_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} = \frac{\text{Ma}_\alpha^2}{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) \right] + \frac{\text{Ma}_\alpha^2}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{d^2 Z_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} \quad (2.70)$$

A pesar de tener sólo dos variables, $u_z^{\text{II}*}$ y $u_r^{\text{II}*}$, y tres ecuaciones, la ley de conservación de masa no es redundante. Partiendo de las Ecs. (2.69) y (2.70) se hacen las igualaciones

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2}{T_n^{\text{II}*}} \frac{d^2 T_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} = -\gamma_n^{\text{II}*2} \quad (2.71)$$

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Ma}_\alpha^2}{Z_m^{\text{II}*}} \frac{d^2 Z_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} = -\delta_m^{\text{II}*2} \quad (2.72)$$

$$\frac{\text{Ma}_\alpha^2}{R_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \frac{dR_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \right] = -\eta_{n,m}^{\text{II}*2} \quad (2.73)$$

para la ecuación axial, donde $\eta_{n,m}^{\text{II}*2} = \gamma_n^{\text{II}*2} - \delta_m^{\text{II}*2}$. Estos son los valores propios del medio elástico. Por otro lado, se hacen las igualaciones

$$\frac{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2}{\mathcal{T}_n^{\text{II}*}} \frac{d^2 \mathcal{T}_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} = -\xi_n^{\text{II}*2} \quad (2.74)$$

$$\frac{\text{Ma}_\alpha^2}{\mathcal{Z}_m^{\text{II}*}} \frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} = -\kappa_m^{\text{II}*2} \quad (2.75)$$

$$\frac{\text{Ma}_\alpha^2}{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \right) \right] = -\zeta_{n,m}^{\text{II}*2} \quad (2.76)$$

para la ecuación radial, donde $\zeta_{n,m}^{\text{II}*2} = \xi_n^{\text{II}*2} - \kappa_m^{\text{II}*2}$. Estos vuelven a ser los valores propios del sólido, pero se demuestra posteriormente que las dos ternas son equivalentes. A partir de (2.71)-(2.76) se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2 \mathcal{T}_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} + \frac{\gamma_n^{\text{II}*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2} \mathcal{T}_n^{\text{II}*} = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} + \frac{\delta_m^{\text{II}*2}}{\varepsilon^2 \text{Ma}_\alpha^2} \mathcal{Z}_m^{\text{II}*} = 0 \quad (2.78)$$

$$r^{*2} \frac{d^2 \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^{*2}} + r^* \frac{d \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} + \frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*2}}{\text{Ma}_\alpha^2} r^{*2} \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{T}_n^{\text{II}*}}{dt^{*2}} + \frac{\xi_n^{\text{II}*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2} \mathcal{T}_n^{\text{II}*} = 0 \quad (2.80)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{\text{II}*}}{dz^{*2}} + \frac{\kappa_m^{\text{II}*2}}{\text{Ma}_\alpha^2} \mathcal{Z}_m^{\text{II}*} = 0 \quad (2.81)$$

$$r^{*2} \frac{d^2 \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^{*2}} + r^* \frac{d \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} - \left(1 - \frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*2}}{\text{Ma}_\alpha^2} r^{*2} \right) \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} = 0 \quad (2.82)$$

cuyas soluciones generales son

$$T_n^{\text{II}*}(t^*) = \mathcal{C}_n^{(1)*} \exp \left[i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} t^* \right] + \mathcal{C}_n^{(2)*} \exp \left[-i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} t^* \right] \quad (2.83)$$

$$Z_m^{\text{II}*}(z^*) = \mathcal{C}_m^{(3)*} \exp \left[i \frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} z^* \right] + \mathcal{C}_m^{(4)*} \exp \left[-i \frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} z^* \right] \quad (2.84)$$

$$R_{n,m}^{\text{II}*}(r^*) = \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} J_0 \left(\frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} r^* \right) + \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} Y_0 \left(\frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} r^* \right) \quad (2.85)$$

$$\mathcal{T}_n^{\text{II}*}(t^*) = \mathcal{C}_n^{(7)*} \exp \left[i \frac{\xi_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} t^* \right] + \mathcal{C}_n^{(8)*} \exp \left[-i \frac{\xi_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} t^* \right] \quad (2.86)$$

$$\mathcal{Z}_m^{\text{II}*}(z^*) = \mathcal{C}_m^{(9)*} \exp \left[i \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} z^* \right] + \mathcal{C}_m^{(10)*} \exp \left[-i \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} z^* \right] \quad (2.87)$$

$$\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}(r^*) = \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} J_1 \left(\frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} r^* \right) + \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} Y_1 \left(\frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} r^* \right) \quad (2.88)$$

donde J_0 , J_1 y Y_0 , Y_1 nuevamente son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente. Asimismo, $\mathcal{C}_n^{(1)*}$, $\mathcal{C}_n^{(2)*}$, $\mathcal{C}_m^{(3)*}$, $\mathcal{C}_m^{(4)*}$, $\mathcal{C}_{n,m}^{(5)*}$, $\mathcal{C}_{n,m}^{(6)*}$, $\mathcal{C}_n^{(7)*}$, $\mathcal{C}_n^{(8)*}$, $\mathcal{C}_m^{(9)*}$, $\mathcal{C}_m^{(10)*}$, $\mathcal{C}_{n,m}^{(11)*}$ y $\mathcal{C}_{n,m}^{(12)*}$ son los coeficientes a determinarse a través de las condiciones de frontera e iniciales. Entonces, la solución general para $v_z^{\text{I}*}$ se compone de las Ecs. (2.33)-(2.35) y (2.57), la solución general para $v_r^{\text{I}*}$ de las Ecs. (2.36)-(2.38) y (2.58), la solución general para $u_z^{\text{II}*}$ de las Ecs. (2.83)-(2.85) y, finalmente, la solución general para $u_r^{\text{II}*}$ consiste de las Ecs. (2.86)-(2.88).

2.3.3. Condiciones de frontera e iniciales

Como se indicó en la Sección 2.1, se espera una la solución periódica en el tiempo y en el espacio en la dirección axial. Se requieren 16 condiciones de frontera, 8 radiales y 8 axiales, y 6 condiciones en el tiempo para cerrar el problema. Estas últimas están dadas por

- Periodicidad en la velocidad axial del fluido:

$$v_z^{\text{I}}|_{t=0} = v_z^{\text{I}}|_{t=T}$$

- Periodicidad en la velocidad radial del fluido: $v_r^I|_{t=0} = v_r^I|_{t=T}$
- Periodicidad en la desplazamiento axial del sólido: $u_z^{\text{II}}|_{t=0} = u_z^{\text{II}}|_{t=T}$
- Periodicidad en la desplazamiento radial del sólido: $u_r^{\text{II}}|_{t=0} = u_r^{\text{II}}|_{t=T}$
- Periodicidad en la velocidad axial del sólido: $\frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial t}\Big|_{t=T}$
- Periodicidad en la velocidad radial del sólido: $\frac{\partial u_r^{\text{II}}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_r^{\text{II}}}{\partial t}\Big|_{t=T}$

Debido al tipo de soportes que se describieron anteriormente, se espera que existan nodos para $v_r^{\text{I}*}$ y antinodos para $v_z^{\text{I}*}$. Adicionalmente, esto se requiere para satisfacer la ley de conservación de masa. Ocurre la situación análoga en el caso de $u_r^{\text{II}*}$ y $u_z^{\text{II}*}$. Esto también es necesario para que exista una solución analítica que cumpla las condiciones de acoplamiento entre el sólido y el fluido. Dicho de otra forma, las condiciones de frontera de carácter axial son

- Antinodo para velocidad axial al final del conducto: $\frac{\partial v_z^{\text{I}}}{\partial z}\Big|_{z=L} = 0$
- Antinodo para velocidad axial al principio del conducto: $\frac{\partial v_z^{\text{I}}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$
- Nodo para velocidad radial al final del conducto: $v_r^{\text{I}}|_{z=L} = 0$
- Nodo para velocidad radial al principio del conducto: $v_r^{\text{I}}|_{z=0} = 0$
- Antinodo para desplazamiento axial al final del conducto: $\frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial z}\Big|_{z=L} = 0$
- Antinodo para desplazamiento axial al principio del conducto: $\frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$
- Nodo para desplazamiento radial al final del conducto: $u_r^{\text{II}}|_{z=L} = 0$
- Nodo para desplazamiento radial al principio del conducto: $u_r^{\text{II}}|_{z=0} = 0$

Finalmente, las condiciones de frontera de carácter radial son en general relaciones de interacción entre los dos medios. Existe continuidad cinemática y continuidad dinámica en las fronteras entre cada par de subdominios. Éstas son

- Punto crítico de perfil de velocidad en centro del conducto: $\frac{\partial v_z^I}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$
- Sin fuente lineal de masa en centro del conducto: $v_r^I \Big|_{r=0} = 0$
- Acoplamiento axial cinemático en pared interna: $v_z^I \Big|_{r=R} = \frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial t} \Big|_{r=R}$
- Acoplamiento radial cinemático en pared interna: $v_r^I \Big|_{r=R} = \frac{\partial u_r^{\text{II}}}{\partial t} \Big|_{r=R}$
- Acoplamiento axial dinámico en pared interna: $\sigma_{rz}^I \Big|_{r=R} = \sigma_{rz}^{\text{II}} \Big|_{r=R}$
- Acoplamiento radial dinámico en pared interna: $\sigma_{rr}^I \Big|_{r=R} - p^I \Big|_{r=R} = \sigma_{rr}^{\text{II}} \Big|_{r=R}$
- Libre de esfuerzo cortante en pared externa: $\sigma_{rz}^{\text{II}} \Big|_{r=R+h} = 0$
- Libre de esfuerzo normal en pared externa: $\sigma_{rr}^{\text{II}} \Big|_{r=R+h} = 0$

Los antecedentes que se tomaron como referencia para definir estas condiciones son [24] [72] [78]. En la experiencia del autor, estas condiciones son consistentes entre sí.

2.3.4. Condiciones periódicas

Las condiciones iniciales en realidad son condiciones periódicas en el tiempo. Estas se desarrollan a continuación.

Periodicidad en la velocidad axial del fluido

Adimensionalmente, la condición se expresa de la forma

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, 0) = v_z^{I*}(r^*, z^*, 1)$$

Utilizando la Ec. (2.33), esta condición se reescribe como

$$\exp \left[- \frac{\gamma_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} \right] = 1$$

Haciendo el cambio de variable $\gamma_n^{I*2} = i^3 \zeta_n^{I*2}$, esperando un comportamiento ondulatorio³, la condición implica que

$$\exp \left[i \frac{\zeta_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} \right] = 1$$

o bien, que

$$\begin{cases} \cos \frac{\zeta_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} = 1 \\ \sin \frac{\zeta_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} = 1 \end{cases}$$

dependiendo si tomas la parte real o la imaginaria. Lo anterior es cierto si

$$\begin{cases} \frac{\zeta_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} = 2n\pi, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\zeta_n^{I*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} = \frac{(4n-1)}{2}\pi, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

y, por lo tanto, regresando a la variable original,

$$\begin{cases} \gamma_n^{I*2} = i^3 2n\pi \varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \gamma_n^{I*2} = i^3 \left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi \varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

³En realidad, basta con que la parte imaginaria γ_n^{I*2} sea distinta de cero para describir un movimiento ondulatorio. Esto no dice nada sobre la parte real. Païdoussis afirmó en [65] que la frecuencia de oscilación del sistema sólido-fluido puede ser, en general, compleja. Es decir: (1) el sólido y fluido siempre están en fase, (2) la parte real de γ_n^{I*2} y/o de γ_n^{II*} puede ser distinta de cero. La sustitución de variable que se hace aquí es un caso particular.

Se distinguen dos posibles soluciones,

$$T_n^{I^*}(t^*) = \mathcal{B}_n^{(1)*} \exp \left[i2n\pi t^* \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.89)$$

y

$$T_n^{I^*}(t^*) = \mathcal{B}_n^{(1)*} \exp \left[i \left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi t^* \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.90)$$

Periodicidad en la velocidad radial del fluido

Esta condición se escribe adimensionalmente de la manera

$$v_r^{I^*}(r^*, z^*, 0) = v_r^{I^*}(r^*, z^*, 1)$$

Utilizando la Ec. (2.36), se reescribe como

$$\exp \left[- \frac{\xi_n^{I^*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} \right] = 1$$

Haciendo el cambio de variable $\xi_n^{I^*2} = i^3 \vartheta_n^{I^*2}$, esperando un comportamiento ondulatorio⁴, la condición implica que

$$\exp \left[i \frac{\vartheta_n^{I^*2}}{\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} \right] = 1$$

Es decir,

⁴Y que $i^3 = -i$.

$$\begin{cases} \xi_n^{I*2} = i^3 2n\pi\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \xi_n^{I*2} = i^3 \left(2n - \frac{1}{2}\right) \pi\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Nuevamente, se distinguen dos soluciones posibles,

$$\mathcal{T}_n^{I*}(t^*) = \mathcal{B}_n^{(6)*} \exp \left[i 2n\pi t^* \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.91)$$

y

$$\mathcal{T}_n^{I*}(t^*) = \mathcal{B}_n^{(6)*} \exp \left[i \left(2n - \frac{1}{2}\right) \pi t^* \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.92)$$

Periodicidad en el desplazamiento axial del sólido

Esta condición periódica se escribe como

$$u_z^{\text{II}*}(r^*, z^*, 0) = u_z^{\text{II}*}(r^*, z^*, 1)$$

de forma adimensional. Utilizando la Ec. (2.33) y haciendo⁵ $\mathcal{C}_n^{(2)*} = 0$, la condición se escribe como

$$\exp \left[i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \right] = 1$$

Esto equivale a

$$\begin{cases} \cos \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = 1 \\ \sin \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = 0 \end{cases}$$

⁵Se retuvo un exponente positivo, no negativo, en la función exponencial del tiempo.

o bien,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\gamma_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = \frac{(4n-3)}{2}\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

De aquí se deduce

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_n^{\text{II}^*} = 2n\pi\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \gamma_n^{\text{II}^*} = \left(2n - \frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta, \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Una vez más, se distinguen dos posibles soluciones,

$$T_n^{\text{II}^*}(t^*) = \mathcal{C}_n^{(1)*} \exp \left[i2n\pi t^* \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.93)$$

y

$$T_n^{\text{II}^*}(t^*) = \mathcal{C}_n^{(1)*} \exp \left[i \left(2n - \frac{3}{2}\right) \pi t^* \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.94)$$

Periodicidad en el desplazamiento radial del sólido

Esta condición periódica se expresa de la forma

$$u_r^{\text{II}^*}(r^*, z^*, 0) = u_r^{\text{II}^*}(r^*, z^*, 1)$$

adimensionalmente. Utilizando la Ec. (2.33) y haciendo $\mathcal{C}_n^{(2)*} = 0$, la condición se escribe como

⁶Se retuvo un exponente positivo, no negativo, en la función exponencial del tiempo.

$$\exp \left[i \frac{\xi_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \right] = 1$$

Esto es igual que

$$\begin{cases} \cos \frac{\xi_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = 1 \\ \sin \frac{\xi_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = 1 \end{cases}$$

o, dicho de otra manera,

$$\begin{cases} \frac{\xi_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = 2n\pi, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\xi_n^{\text{II}^*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} = \frac{(4n-3)}{2}\pi, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} \xi_n^{\text{II}^*} = 2n\pi \varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \xi_n^{\text{II}^*} = \left(2n - \frac{3}{2}\right) \pi \varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tal y como en los casos anteriores, se distinguen dos soluciones posibles,

$$\mathcal{T}_n^{\text{II}^*}(t^*) = \mathcal{C}_n^{(7)*} \exp \left[i 2n\pi t^* \right] \quad \text{si } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.95)$$

y

$$\mathcal{T}_n^{\text{II}^*}(t^*) = \mathcal{C}_n^{(7)*} \exp \left[i \left(2n - \frac{3}{2}\right) \pi t^* \right] \quad \text{si } n = 1, 2, \dots \quad (2.96)$$

Periodicidad en la velocidad axial del sólido

Esta condición se expresa de la forma

$$\frac{\partial u_z^{\text{II}^*}}{\partial t^*}(r^*, z^*, 0) = \frac{\partial u_z^{\text{II}^*}}{\partial t^*}(r^*, z^*, 1)$$

Se concluye lo mismo que en el caso de periodicidad en los desplazamientos axiales. Es decir, se distinguen las soluciones dadas por las Ecs. (2.93) y (2.94).

Periodicidad en la velocidad radial del sólido

Esta condición se expresa de la forma

$$\frac{\partial u_r^{\text{II}^*}}{\partial t^*}(r^*, z^*, 0) = \frac{\partial u_r^{\text{II}^*}}{\partial t^*}(r^*, z^*, 1)$$

Se concluye lo mismo que en el caso de periodicidad en los desplazamientos radiales. Es decir, se distinguen las soluciones dadas por las Ecs. (2.93) y (2.94).

Resumen

Las Ecs. (2.89), (2.91), (2.93) y (2.95) son las funciones de dependencia temporal de la solución si solo se considera la parte real. En otras palabras,

$$T_n^{\text{I}^*}, \mathcal{T}_n^{\text{I}^*}, T_n^{\text{II}^*}, \mathcal{T}_n^{\text{II}^*} \propto \exp \left[i2n\pi t^* \right]$$

En cambio, las Ecs. (2.90), (2.92), (2.94) y (2.96) son las funciones de dependencia temporal de la solución si solo se considera la parte imaginaria. En otras palabras,

$$T_n^{\text{I}^*}, \mathcal{T}_n^{\text{I}^*}, T_n^{\text{II}^*}, \mathcal{T}_n^{\text{II}^*} \propto \exp \left[i \left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi t^* \right]$$

2.3.5. Condiciones de frontera axiales

Las condiciones de frontera axiales son de suma importancia porque están íntimamente relacionadas con el tipo de soportes que se plantean para el conducto. Estas se desarrollan a continuación.

Antinodo en la velocidad axial al final del conducto

La condición de frontera se escribe de la manera

$$\frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*}(r^*, 1, t^*) = 0$$

Para evaluarla, se necesita la expresión

$$\frac{\partial Z_m^{I*}}{\partial z^*} = \frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} \left[\mathcal{B}_m^{(4)*} \exp \left[i \left(\frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} z^* + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \mathcal{B}_m^{(5)*} \exp \left[-i \left(\frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} z^* - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] \quad (2.97)$$

El procedimiento debe distinguir dos casos posibles: ondas que viajan del inicio al final del conducto, o bien, ondas que viajan del final al inicio del conducto. En el primer caso es necesario que $\mathcal{B}_m^{(4)*} = 0$. Evaluando la condición de frontera con ayuda de la Ec. (2.97), se obtiene

$$\exp \left[-i \left(\frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0 \quad (2.98)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

De aquí se deduce

$$\begin{cases} \frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} = \frac{(4m-1)\pi}{2}, & m = 1, 2, \dots \\ \frac{\delta_m^{I*}}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} = 2m\pi, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} \delta_m^{I*} = 2m\pi\varepsilon, & m = 1, 2, \dots \\ \delta_m^{I*} = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si se repite este procedimiento para el segundo caso. Para ello, es necesario que $\mathcal{B}_m^{(5)*} = 0$. En otras palabras,

$$\begin{cases} \delta_m^{I*} = (2m-1)\pi\varepsilon, & m = 1, 2, \dots \\ \delta_m^{I*} = \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon, & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Antinodo en la velocidad axial al inicio del conducto

En este caso, la condición normalizada se expresa de la forma

$$\frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*}(r^*, 0, t^*) = 0$$

Utilizando la Ec. (2.97), la nueva condición implica

$$\exp\left[i\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

En otras palabras,

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Sólo la función coseno cumple la igualdad. Es decir, para satisfacer la condición de frontera en ambos extremos del conducto, debe considerarse solo la parte real. Entonces, se distinguen dos posibles soluciones,

$$Z_m^{I*}(z^*) = \mathcal{B}_m^{(5)*} \exp \left[-i2m\pi z^* \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.99)$$

para ondas emitidas y

$$Z_m^{I*}(z^*) = \mathcal{B}_m^{(4)*} \exp \left[i(2m - 1)\pi z^* \right], \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.100)$$

para ondas reflejadas.

Nodo en la velocidad radial al final del conducto

Esta condición está dada por

$$v_r^{I*}(r^*, 1, t^*) = 0$$

Se necesita que $\mathcal{B}_m^{(9)*} = 0$, si es que las ondas viajan del inicio al final del conducto. Esto implica que

$$\exp \left[-i \frac{\kappa_m^{I*}}{\varepsilon} z^* \right] = 0 \quad (2.101)$$

Es decir,

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\kappa_m^{\text{I}*}}{\varepsilon}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\kappa_m^{\text{I}*}}{\varepsilon}\right) = 0 \end{cases}$$

De aquí se deduce

$$\begin{cases} \frac{\kappa_m^{\text{I}*}}{\varepsilon} = \frac{(4m-1)\pi}{2}, & m = 1, 2, \dots \\ \frac{\kappa_m^{\text{I}*}}{\varepsilon} = 2m\pi, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Se arriba a la conclusión

$$\begin{cases} \kappa_m^{\text{I}*} = \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon, & m = 1, 2, \dots \\ \kappa_m^{\text{I}*} = 2m\pi\varepsilon, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Haciendo que $\mathcal{B}_m^{(10)*} = 0$, se sigue un procedimiento análogo y se obtiene

$$\begin{cases} \kappa_m^{\text{I}*} = \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon, & m = 1, 2, \dots \\ \kappa_m^{\text{I}*} = 2m\pi\varepsilon, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Nodo en la velocidad radial al inicio del conducto

Esta condición se expresa de la forma

$$v_r^{I*}(r^*, 0, t^*) = 0$$

Evaluando la expresión (2.37), se obtiene

$$\exp[i(0)] = 0$$

Esto implica

$$\begin{cases} \cos(0) = 0 \\ \sin(0) = 0 \end{cases}$$

Solo la función seno cumple la igualdad. Es decir, para satisfacer la condición de frontera en ambos extremos del conducto, debe considerarse solo la parte imaginaria. Entonces, se distinguen dos posibles soluciones,

$$\mathcal{Z}_m^{I*}(z^*) = \mathcal{B}_m^{(10)*} \exp \left[-i2m\pi z^* \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.102)$$

para ondas emitidas y

$$\mathcal{Z}_m^{I*}(z^*) = \mathcal{B}_m^{(9)*} \exp \left[i2m\pi z^* \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.103)$$

para ondas reflejadas.

Antinodo en el desplazamiento axial al final del conducto

De manera análoga, se procede a desarrollar las condiciones de frontera axiales correspondientes al sólido. La primera se expresa en su forma normalizada

$$\frac{\partial u_z^{II*}}{\partial z^*}(r^*, 1, t^*) = 0$$

Derivando la Ec. (2.84), se obtiene

$$\frac{\partial Z_m^{\text{II}*}}{\partial z^*} = \frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} \left[\mathcal{C}_m^{(3)*} \exp \left[i \left(\frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} z^* + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \mathcal{C}_m^{(4)*} \exp \left[-i \left(\frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} z^* - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] \quad (2.104)$$

A partir de (2.104), se evalúa la condición de frontera para el caso de ondas que viajan del inicio al final del conducto. Esto implica que $\mathcal{C}_m^{(3)*} = 0$. En otras palabras,

$$\exp \left[-i \left(\frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0 \quad (2.105)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

De lo anterior se desprende que

$$\begin{cases} \frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} - \frac{\pi}{2} = \frac{(4m-1)\pi}{2}, & m = 1, 2, \dots \\ \frac{\delta_m^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Ma}_\alpha} - \frac{\pi}{2} = 2m\pi, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

y la conclusión inmediata es

$$\begin{cases} \delta_m^{\text{II}*} = 2m\pi\varepsilon\text{Ma}_\alpha, & m = 1, 2, \dots \\ \delta_m^{\text{II}*} = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon\text{Ma}_\alpha, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si se repite el proceso para el otro caso, cuando $\mathcal{C}_m^{(4)*} = 0$, se deduce

$$\begin{cases} \delta_m^{\text{II}*} = (2m - 1)\pi\varepsilon\text{Ma}_\alpha, & m = 1, 2, \dots \\ \delta_m^{\text{II}*} = \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon\text{Ma}_\alpha, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Antinodo en el desplazamiento axial al inicio del conducto

La segunda condición se escribe

$$\frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial z^*}(r^*, 0, t^*) = 0$$

Utilizando la Ec. (2.105) para evaluar la condición de frontera, se obtiene

$$\exp\left[i\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

Esto implica

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Esta igualdad solo es cierta para la función coseno. Si la condición de frontera se cumple en ambos extremos del conducto, se requiere solamente la parte real. Entonces, la solución

$$Z_m^{\text{II}*}(z^*) = \mathcal{C}_m^{(4)*} \exp\left[-i(2m - 1)\pi z^*\right], \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.106)$$

corresponde al caso de ondas emitidas, mientras que

$$Z_m^{\text{II}*}(z^*) = C_m^{(3)*} \exp \left[i2m\pi z^* \right], \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.107)$$

corresponde al de ondas reflejadas.

Nodo en el desplazamiento radial al final del conducto

Esta condición se escribe como

$$u_r^{\text{II}*}(r^*, 1, t^*) = 0$$

Con base en la Ec. (2.87), se considera el caso de ondas que viajan del inicio al final del conducto. Esto requiere que $C_m^{(9)*} = 0$. Al evaluar la condición, se obtiene

$$\exp \left[-i \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} \right] = 0 \quad (2.108)$$

Es decir,

$$\begin{cases} \cos \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} = 0 \\ \sin \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} = 0 \end{cases}$$

Esto implica que

$$\begin{cases} \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} = \frac{(4m-1)\pi}{2}, & m = 1, 2, \dots \\ \frac{\kappa_m^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} = 2m\pi, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{cases} \kappa_m^{\text{II}*} = \left(2m - \frac{1}{2}\right) \pi \text{Ma}_\alpha, & m = 1, 2, \dots \\ \kappa_m^{\text{II}*} = 2m\pi \text{Ma}_\alpha, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

En el segundo caso, cuando $\mathcal{C}_m^{(10)*} = 0$, se concluye

$$\begin{cases} \kappa_m^{\text{II}*} = \left(2m - \frac{1}{2}\right) \pi \text{Ma}_\alpha, & m = 1, 2, \dots \\ \kappa_m^{\text{II}*} = 2m\pi \text{Ma}_\alpha, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

si se sigue el mismo procedimiento.

Nodo en el desplazamiento radial al inicio del conducto

Finalmente, esta condición se expresa como

$$u_r^{\text{II}*}(r^*, 0, t^*) = 0$$

Utilizando la Ec. (2.87), se evalúa la condición, obteniéndose

$$\exp \left[i(0) \right] = 0$$

Esto implica que

$$\begin{cases} \cos(0) = 0 \\ \sin(0) = 0 \end{cases}$$

Solo la función seno cumple esta igualdad. Es necesario considerar solamente la parte imaginaria. Entonces, se distinguen dos posibles soluciones, que son

$$\mathcal{Z}_m^{\text{II}*}(z^*) = \mathcal{C}_m^{(10)*} \exp \left[-i2m\pi z^* \right] \quad \text{si } m = 1, 2, \dots \quad (2.109)$$

para ondas emitidas. Mientras tanto,

$$\mathcal{Z}_m^{\text{II}*}(z^*) = \mathcal{C}_m^{(9)*} \exp \left[i2m\pi z^* \right] \quad \text{si } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.110)$$

es válida para ondas reflejadas.

Resumen

Las Ecs. (2.99), (2.102), (2.106) y (2.109) son las funciones axiales de la solución en el caso de ondas de presión que viajan del inicio al final del conducto, i.e. *ondas emitidas*. Únicamente difieren en la fase respecto a m . Es decir,

$$Z_m^{\text{I}*}, \mathcal{Z}_m^{\text{I}*}, Z_m^{\text{II}*}, \mathcal{Z}_m^{\text{II}*} \propto \exp \left[-i2m\pi z^* \right]$$

En cambio, las Ecs. (2.100), (2.103), (2.107) y (2.110) corresponden al caso de ondas de presión que viajan del final al inicio del conducto, i.e. *ondas reflejadas*. Para esta situación se observa que

$$Z_m^{\text{I}*}, \mathcal{Z}_m^{\text{I}*}, Z_m^{\text{II}*}, \mathcal{Z}_m^{\text{II}*} \propto \exp \left[i2m\pi z^* \right]$$

2.3.6. Condiciones de frontera radiales

Resta evaluar las condiciones de frontera radiales. Son las de mayor importancia porque describen la manera en la que se propaga la información de un medio al otro. Antes que nada, es necesario recordar la definición de los esfuerzos, en un fluido newtoniano incompresible y en un sólido linealmente elástico e isótropo, en coordenadas cilíndricas. Es decir,

$$\sigma_{rz}^I = \mu^I \left(\frac{\partial v_z^I}{\partial r} + \frac{\partial v_r^I}{\partial z} \right) \quad \sigma_{rr}^I = 2\mu^I \frac{\partial v_r^I}{\partial r}$$

$$\sigma_{rz}^{II} = \mu^{II} \left(\frac{\partial u_z^{II}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{II}}{\partial z} \right) \quad \sigma_{rr}^{II} = \lambda^{II} \left(\frac{\partial u_r^{II}}{\partial r} + \frac{u_r^{II}}{r} + \frac{\partial u_z^{II}}{\partial z} \right) + 2\mu^{II} \frac{\partial u_r^{II}}{\partial r}$$

donde μ^I es la viscosidad dinámica del fluido y λ^{II} , μ^{II} son los parámetros de Lamé. Hasta este momento, las funciones radiales de v_z^I , v_r^I , u_z^{II} y u_r^{II} son

$$\begin{aligned} R_{n,m}^{I*} &= \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} J_0(\eta_{n,m}^I r^*) + \mathcal{B}_{n,m}^{(3)*} Y_0(\eta_{n,m}^I r^*) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} J_0(i\delta_m^I r^*) \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,m}^{I*} &= \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} J_1(\zeta_{nm}^I r^*) + \mathcal{B}_{n,m}^{(8)*} Y_1(\zeta_{nm}^I r^*) \\ &\quad \pm i \frac{\varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^I J_1(i\delta_m^I r^*) \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$R_{nm}^{II*} = \mathcal{C}_{nm}^{(5)*} J_0\left(\frac{\eta_{nm}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) + \mathcal{C}_{nm}^{(6)*} Y_0\left(\frac{\eta_{nm}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) \quad (2.113)$$

$$\mathcal{R}_{nm}^{II*} = \mathcal{C}_{nm}^{(11)*} J_1\left(\frac{\zeta_{nm}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) + \mathcal{C}_{nm}^{(12)*} Y_1\left(\frac{\zeta_{nm}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) \quad (2.114)$$

respectivamente. Asimismo, sus primeras derivadas respecto a r^* son

$$\begin{aligned} \frac{dR_{n,m}^{I*}}{dr^*} &= -\eta_{n,m}^I \left[\mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} J_1(\eta_{n,m}^I r^*) + \mathcal{B}_{n,m}^{(3)*} Y_1(\eta_{n,m}^I r^*) \right] \\ &\quad - i \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^I J_1(i\delta_m^I r^*) \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{R}_{n,m}^I}{dr^*} &= \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} \left[\zeta_{n,m}^I J_0(\zeta_{n,m}^I r^*) - \frac{1}{r^*} J_1(\zeta_{n,m}^I r^*) \right] \\
 &\quad + \mathcal{B}_{n,m}^{(8)*} \left[\zeta_{n,m}^I Y_0(\zeta_{n,m}^I r^*) - \frac{1}{r^*} Y_1(\zeta_{n,m}^I r^*) \right] \\
 \mp \frac{\varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{nm}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^{I*} &\left[\delta_m^{I*} J_0(i\delta_m^{I*} r^*) + \frac{i}{r^*} J_1(i\delta_m^{I*} r^*) \right]
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\frac{dR_{n,m}^{II}}{dr^*} = -\frac{\eta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} \left[\mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} J_1\left(\frac{\eta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) + \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} Y_1\left(\frac{\eta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) \right] \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{R}_{n,m}^{II}}{dr^*} &= \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} \left[\frac{\zeta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} J_0\left(\frac{\zeta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) - \frac{1}{r^*} J_1\left(\frac{\zeta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) \right] \\
 &\quad + \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} \left[\frac{\zeta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} Y_0\left(\frac{\zeta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) - \frac{1}{r^*} Y_1\left(\frac{\zeta_{n,m}^{II}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Por último, la dependencia radial del campo de presión está dada por

$$G_{n,m}^I = \text{Eu}_{n,m} J_0(i\delta_m^{I*} r^*) \tag{2.119}$$

Se requieren todas estas expresiones para evaluar las condiciones de frontera radiales. A continuación se desarrolla cada una de ellas en el orden en el que se listaron. Los detalles adicionales se pueden consultar en el Apéndice [C](#).

Punto crítico del perfil de velocidad en el centro del conducto: $\left. \frac{\partial v_z^I}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$

Se espera que la forma del perfil de velocidad sea similar a la de flujos más simples, siempre y cuando $u_z^{II}, u_r^{II} \ll R$. Entonces, se hereda la condición de frontera utilizada en las soluciones de Hagen-Poiseuille y de Womersley. Dicha condición es

$$\left. \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \tag{2.120}$$

en términos de las variables escaladas. Es decir,

$$\left. \frac{dR_{n,m}^I}{dr^*} \right|_{r^*=0} = 0$$

Evaluando a (2.115) en el centro del conducto, se concluye que

$$\mathcal{B}_{n,m}^{(3)*} = 0 \quad (2.121)$$

bajo el argumento de que la solución debe permanecer acotada. Como resultado, las expresiones (2.111) y (2.115) se reescriben como

$$R_{n,m}^I = \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} J_0(\eta_{n,m}^I r^*) + \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} J_0(i\delta_m^I r^*) \quad (2.122)$$

$$\frac{dR_{n,m}^I}{dr^*} = -\eta_{n,m}^I \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} J_1(\eta_{n,m}^I r^*) - i \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^I J_1(i\delta_m^I r^*) \quad (2.123)$$

Ausencia de fuente de masa en el centro del conducto: $v_r^I|_{r=0} = 0$

Esta condición de frontera es nueva para un lector familiarizado únicamente con la parte hidrodinámica. Existe una componente de flujo radial v_r^I cuya magnitud es mayor cerca de la pared interna del conducto que en el centro. Sin embargo, no se puede predecir en qué posición se ubica su valor máximo. Está claro que v_r^I al menos debe ser finita en $r = 0$. Al no existir una fuente de masa en $r = 0$, es posible decir que v_r^I debe ser cero. Entonces, la condición de frontera se escribe

$$v_r^{I*} \Big|_{r^*=0} = 0 \quad (2.124)$$

Es decir,

$$\mathcal{R}_{n,m}^I \Big|_{r^*=0} = 0$$

Evaluando a (2.112) en el centro del conducto, se concluye que

$$\mathcal{B}_{n,m}^{(8)*} = 0 \quad (2.125)$$

nuevamente bajo el argumento de que la solución debe permanecer acotada. Entonces, las Ecs. (2.112) y (2.116) se reescriben como

$$\mathcal{R}_{n,m}^{I*} = \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} J_1(\zeta_{n,m}^{I*} r^*) \pm i \frac{\varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^{I*} J_1(i \delta_m^{I*} r^*) \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{R}_{n,m}^{I*}}{dr^*} &= \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} \left[\zeta_{n,m}^{I*} J_0(\zeta_{n,m}^{I*} r^*) - \frac{1}{r^*} J_1(\zeta_{n,m}^{I*} r^*) \right] \\ \mp \frac{\varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \delta_m^{I*} &\left[\delta_m^{I*} J_0(i \delta_m^{I*} r^*) + \frac{i}{r^*} J_1(i \delta_m^{I*} r^*) \right] \end{aligned} \quad (2.127)$$

Acoplamiento cinemático axial en la pared interna: $v_z^I|_{r=R} = \frac{\partial u_z^{\text{II}}}{\partial t} \Big|_{r=R}$

La condición de no-deslizamiento se satisface en casi cualquier problema de flujos de fluidos viscosos. La diferencia de este caso respecto a otros es que la pared es móvil. En términos de las variables normalizadas, esto es

$$v_z^{I*} \Big|_{r^*=1} = a_z \text{Sh}_L \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial t^*} \Big|_{r^*=1} \quad (2.128)$$

Si se asume que las Ecs. (C.7)-(C.12) son relaciones de igualdad exactas, entonces la condición de frontera se traduce a

$$R_{n,m}^{I*} \Big|_{r^*=1} = a_z \text{Sh}_L R_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1}$$

Evaluando a (2.113) y a (2.122) en el radio interno de equilibrio, se deduce

$${}^1J_0^{\text{I}*} \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} - a_z \text{Sh}_L {}^1J_0^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} - a_z \text{Sh}_L {}^1Y_0^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} = - \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*}}{\eta_{n,m}^{\text{I}*2} + \delta_m^{\text{I}*2}} {}^1\mathcal{J}_0^{\text{I}*} \quad (2.129)$$

donde las constantes requeridas se definen en las Ecs. (D.24)-(D.35). Estas se pueden consultar en el Apéndice D

Acoplamiento cinemático radial en pared interna: $v_r^{\text{I}}|_{r=R} = \left. \frac{\partial u_r^{\text{II}}}{\partial t} \right|_{r=R}$

La condición de no-penetración está casi siempre presente en problemas de hidrodinámica. Al igual que en la Subsección 2.3.6, la diferencia está en que la pared es móvil. En otras palabras,

$$v_r^{\text{I}*}|_{r^*=1} = \varepsilon \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}} a_r \text{Sh}_L \left. \frac{\partial u_r^{\text{II}*}}{\partial t^*} \right|_{r^*=1} \quad (2.130)$$

Si se asumen las Ecs. (C.7)-(C.12) como relaciones de igualdad exactas, la condición se expresa de la forma

$$\mathcal{R}_{n,m}^{\text{I}*}|_{r^*=1} + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}^{\text{I}*}|_{r^*=1} = \varepsilon \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}} a_r \text{Sh}_L \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}|_{r^*=1}$$

Evalutando a (2.114) y a (2.126) en el radio interno de equilibrio, se obtiene

$$\begin{aligned} & {}^1J_1^{\text{I}*} \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} - \varepsilon \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}} a_r \text{Sh}_L {}^1J_1^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} - \varepsilon \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}} a_r \text{Sh}_L {}^1Y_1^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} \\ & = \mp i \frac{\varepsilon \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{n,m}^{\text{I}*2} + \delta_m^{\text{I}*2}} \delta_m^{\text{I}*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \end{aligned} \quad (2.131)$$

donde las constantes requeridas se definen en las Ecs. (D.24)-(D.35). Estas se pueden consultar en el Apéndice D

Acoplamiento dinámico axial en pared interna: $\sigma_{rz}^I|_{r=R} = \sigma_{rz}^{II}|_{r=R}$

Esta condición corresponde a la tercera ley de Newton aplicada en la pared interna del conducto, exclusivamente en lo que respecta a los esfuerzos cortantes. Es decir,

$$\frac{\text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II}}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} + \varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \frac{\partial v_r^{I*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1} \right) = a_z \frac{\partial u_z^{II*}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} + \varepsilon^2 a_r \frac{\partial u_r^{II*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1} \quad (2.132)$$

Suponiendo que (C.7)-(C.12) son relaciones exactas de igualdad, la Ec. (2.132) se reescribe como

$$\begin{aligned} & i \frac{\gamma_n^{II*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \frac{\text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II}}{\text{Re}_L} \left(\frac{k_n^{(6)*}}{k_n^{(3)*}} \left(\frac{dR_{n,m}^{I*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \widetilde{\frac{dR_{n,m}^{I*}}{dr^*}} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \frac{k_m^{(2)*}}{k_m^{(5)*}} \left(\mathcal{R}_{n,m}^{I*} \Big|_{r^*=1} + \widetilde{\mathcal{R}_{n,m}^{I*}} \Big|_{r^*=1} \right) \right) \\ & = a_z \lambda_n^{(2)*} \left(\frac{dR_{n,m}^{II*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - \frac{\delta_m^{II*2}}{\text{Ma}_\alpha^2 \lambda_{n,m}^{(1)*}} \mathcal{R}_{n,m}^{II*} \Big|_{r^*=1} \right) \end{aligned}$$

Tras evaluar a (2.114), (2.117), (2.123) y (2.126) en el radio interno de equilibrio, se deduce

$$\begin{aligned} & -i \frac{\gamma_n^{II*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \frac{\text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II}}{\text{Re}_L} \frac{k_n^{(6)*}}{k_n^{(3)*}} \eta_{n,m}^{I*} {}_1J_1^{I*} \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} + i \frac{\gamma_n^{II*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \frac{\text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II}}{\text{Re}_L} \varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \frac{k_m^{(2)*}}{k_m^{(5)*}} {}_1J_1^{I*} \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} \\ & + a_z \lambda_n^{(2)*} \frac{\eta_{n,m}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha} {}_1J_1^{II*} \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} + a_z \lambda_n^{(2)*} \frac{\eta_{n,m}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha} {}_1Y_1^{II*} \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} + a_z \frac{\lambda_n^{(2)*}}{\lambda_{n,m}^{(1)*}} \frac{\delta_m^{II*2}}{\text{Ma}_\alpha^2} {}_1J_1^{II*} \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} + a_z \frac{\lambda_n^{(2)*}}{\lambda_{n,m}^{(1)*}} \frac{\delta_m^{II*2}}{\text{Ma}_\alpha^2} {}_1Y_1^{II*} \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} \\ & = - \frac{\gamma_n^{II*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \frac{\varepsilon^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II} \text{Eu}_{n,m} \delta_m^{I*} k_m^{(2)*} k_n^{(6)*}}{\eta_{n,m}^{I*2} + \delta_m^{I*2}} \left(1 \mp \frac{U_z^I}{U_r^I} \right) {}_1\mathcal{J}_1^{I*} \quad (2.133) \end{aligned}$$

donde las constantes requeridas se definen en las Ecs. (D.24)-(D.35). Estas se pueden consultar en el Apéndice D

Acoplamiento dinámico radial en pared interna: $\sigma_{rr}^I|_{r=R} - p^I|_{r=R} = \sigma_{rr}^{II}|_{r=R}$

La tercera ley de Newton en la pared interna del conducto también debe desarrollarse en términos de la componente normal de los esfuerzos. En otras palabras,

$$\begin{aligned} \text{Ma}_\beta^2 \left(a_r \left(\frac{\partial u_r^{\text{II}*}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} + u_r^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1} \right) + a_z \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1} \right) - 2\text{Ma}_\alpha^2 \left(a_r u_r^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1} + a_z \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1} \right) \\ = \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{I,II}} \left(\frac{2}{\text{Re}_L} \frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} \frac{\partial v_r^{\text{I}*}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} - p^{\text{I}*} \Big|_{r^*=1} \right) \end{aligned} \quad (2.134)$$

Si asumimos que (C.7)-(C.12) son relaciones de igualdad exactas, la Ec. (2.3.6) adquiere la forma

$$\begin{aligned} i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{I,II}} \left(\frac{2}{\text{Re}_L} \frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} \left(\frac{d\mathcal{R}_{n,m}^{\text{I}*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \frac{d\widetilde{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{I}*}}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \\ \left. - k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} G_{n,m}^{\text{I}*} \Big|_{r^*=1} \right) = \text{Ma}_\beta^2 a_r \left(\left(\frac{d\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \\ \left. + \lambda_{n,m}^{(1)*} R_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1} \right) - 2\text{Ma}_\alpha^2 a_r \left(\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1} + \lambda_{n,m}^{(1)*} R_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1} \right) \end{aligned}$$

Tras evaluar a (2.113), (2.114), (2.118), (2.3.6) y (2.119) en el radio interno de equilibrio, se obtiene

$$\begin{aligned} i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \frac{2\text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{I,II}}}{\text{Re}_L} \frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} \left(\zeta_{n,m}^{\text{I}*} {}^1\text{J}_0^{\text{I}*} - {}^1\text{J}_1^{\text{I}*} \right) \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} \\ + \lambda_{n,m}^{(1)*} a_r \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right) {}^1\text{J}_0^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} + \lambda_{n,m}^{(1)*} a_r \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right) {}^1\text{Y}_0^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} \\ - a_r \left(\text{Ma}_\beta^2 \frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} {}^1\text{J}_0^{\text{II}*} - 2\text{Ma}_\alpha^2 {}^1\text{J}_1^{\text{II}*} \right) \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} - a_r \left(\text{Ma}_\beta^2 \frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} {}^1\text{Y}_0^{\text{II}*} - 2\text{Ma}_\alpha^2 {}^1\text{Y}_1^{\text{II}*} \right) \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} \\ = i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{I,II}} \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*} k_n^{(3)*} \left({}^1\mathcal{J}_0^{\text{II}*} \pm \frac{2\varepsilon^2 U_z^{\text{I}*2} \delta_m^{\text{I}*}}{\eta_{n,m}^{\text{I}*2} + \delta_m^{\text{I}*2}} \left(\delta_m^{\text{I}*} {}^1\mathcal{J}_0^{\text{II}*} + i {}^1\mathcal{J}_1^{\text{II}*} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.135)$$

donde las constantes requeridas se definen en las Ecs. (D.24)-(D.35). Estas se pueden consultar en el Apéndice D

Libre de esfuerzo cortante en pared externa: $\sigma_{rz}^{\text{II}}|_{r=R+h} = 0$

Esta condición es necesaria dado que los desplazamientos no pueden ser cero en la pared externa. Además, no se tomó en cuenta un tercer medio contiguo al segundo. La misma se escribe como

$$a_z \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + \epsilon^2 a_r \frac{\partial u_r^{\text{II}*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} = 0 \quad (2.136)$$

e implica que

$$\frac{dR_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} - \frac{\delta_m^{\text{II}*2}}{\text{Ma}_\alpha^2 \lambda_{n,m}^{(1)*}} \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} = 0$$

Tras evaluar a (2.114) y a (2.117) en el radio externo de equilibrio del conducto, se concluye

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} \Big|_{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} + \frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} \Big|_{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} \\ & + \frac{1}{1+\epsilon} \frac{\delta_m^{\text{II}*2}}{\text{Ma}_\alpha^2 \lambda_{n,m}^{(1)*}} \Big|_{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} + \frac{1}{1+\epsilon} \frac{\delta_m^{\text{II}*2}}{\text{Ma}_\alpha^2 \lambda_{n,m}^{(1)*}} \Big|_{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} = 0 \end{aligned} \quad (2.137)$$

donde las constantes requeridas se definen en las Ecs. (D.24)-(D.35). Estas se pueden consultar en el Apéndice D

Libre de esfuerzo normal en pared externa: $\sigma_{rr}^{\text{II}}|_{r=R+h} = 0$

Esta condición es necesaria por las mismas razones que (2.136) y queda expresada como

$$\text{Ma}_\beta^2 \left(a_r \left(\frac{\partial u_r^{\text{II}*}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + \frac{u_r^{\text{II}*}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) + a_z \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right)$$

$$-2\text{Ma}_\alpha^2 \left(a_r \frac{u_r^{\text{II}*}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + a_z \frac{\partial u_z^{\text{II}*}}{\partial z^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) = 0 \quad (2.138)$$

La misma implica que

$$\begin{aligned} & \text{Ma}_\beta^2 \left(\left(\frac{d\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + \frac{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) + \lambda_{n,m}^{(1)*} \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) \\ & - 2\text{Ma}_\alpha^2 \left(\frac{\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + \lambda_{n,m}^{(1)*} \mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) = 0 \end{aligned}$$

Luego de evaluar las Ecs. (2.113), (2.114) y (2.118) en el radio externo de equilibrio, se obtiene

$$\begin{aligned} & \lambda_{n,m}^{(1)*} \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right)^{1+\epsilon} \text{J}_0^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} + \lambda_{n,m}^{(1)*} \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right)^{1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}*} \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} \\ & + \left(\text{Ma}_\beta^2 \frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} \Big|_{1+\epsilon} \text{J}_0^{\text{II}*} - \frac{2\text{Ma}_\alpha^2}{1+\epsilon} \text{J}_1^{\text{II}*} \right) \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} \\ & + \left(\text{Ma}_\beta^2 \frac{\zeta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} \Big|_{1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}*} - \frac{2\text{Ma}_\alpha^2}{1+\epsilon} \text{Y}_1^{\text{II}*} \right) \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} = 0 \end{aligned} \quad (2.139)$$

donde las constantes requeridas se definen en las Ecs. (D.24)-(D.35). Estas se pueden consultar en el Apéndice D.

2.3.7. Resolución de sistema simultáneo de condiciones de frontera

Ahora se procede a resolver el sistema compuesto por las Ecs. (2.129), (2.3.6), (2.3.6), (2.3.6), (2.3.6) y (2.3.6). El sistema es de la forma

$$\begin{bmatrix} \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} \\ \mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} \\ \mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} \\ \mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} \\ \mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} \\ \mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación matricial, se obtienen los coeficientes

$$\mathcal{B}_{n,m}^{(2)*} = -i \frac{\varepsilon \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \chi_z^{I*}}{a_r \lambda_{n,m}^{(1)*} \gamma_n^{I*2} \chi^*} \quad (2.140)$$

$$\mathcal{B}_{n,m}^{(7)*} = i \frac{\varepsilon \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \frac{U_z^I}{U_r^I} k_m^{(5)*} \chi_r^{I*}}{\gamma_n^{I*2} \chi^*} \quad (2.141)$$

$$\mathcal{C}_{n,m}^{(5)*} = \frac{\text{Ma}_\beta \varrho^{I,II} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \gamma_n^{II*} k_m^{(5)*} \chi_{z_1}^{II*}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n,m}^{(1)*} \gamma_n^{I*2} \chi^*} \quad (2.142)$$

$$\mathcal{C}_{n,m}^{(6)*} = -\frac{\text{Ma}_\beta \varrho^{I,II} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \gamma_n^{II*} k_m^{(5)*} \chi_{z_2}^{II*}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n,m}^{(1)*} \gamma_n^{I*2} \chi^*} \quad (2.143)$$

$$\mathcal{C}_{n,m}^{(11)*} = -i \frac{\text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta \varrho^{I,II} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \gamma_n^{II*} k_m^{(5)*} \chi_{r_1}^{II*}}{a_r \text{Sh}_L \gamma_n^{I*2} \chi^*} \quad (2.144)$$

$$\mathcal{C}_{n,m}^{(12)*} = i \frac{\text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta \varrho^{I,II} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \gamma_n^{II*} k_m^{(5)*} \chi_{r_2}^{II*}}{a_r \text{Sh}_L \gamma_n^{I*2} \chi^*} \quad (2.145)$$

Consecuentemente, las funciones radiales son

$$R_{n,m}^{I*}(r^*) = \frac{\varepsilon \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m}}{\gamma_n^{I*2}} \left[\varepsilon k_m^{(2)*} k_n^{(3)*} J_0(i \delta_m^{I*} r^*) - i \frac{\chi_z^{I*}}{a_r \lambda_{n,m}^{(1)*} \chi^*} J_0(\eta_{nm}^{I*} r^*) \right] \quad (2.146)$$

$$\mathcal{R}_{n,m}^{I*}(r^*) = i \frac{\varepsilon \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \frac{U_z^I}{U_r^I} k_m^{(5)*}}{\gamma_n^{I*2}} \left[\pm k_n^{(6)*} \delta_m^{I*} J_1(i \delta_m^{I*} r^*) + \frac{\chi_r^{I*}}{\chi^*} J_1(\eta_{n,m}^{I*} r^*) \right] \quad (2.147)$$

$$R_{n,m}^{II*}(r^*) = \frac{\text{Ma}_\beta \varrho^{I,II} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \gamma_n^{II*} k_m^{(5)*}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n,m}^{(1)*} \gamma_n^{I*2} \chi^*} \left[\chi_{z_1}^{II*} J_0\left(\frac{\eta_{n,m}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) - \chi_{z_2}^{II*} Y_0\left(\frac{\eta_{n,m}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha} r^*\right) \right] \quad (2.148)$$

$$\mathcal{R}_{n,m}^{\text{II}*}(r^*) = -i \frac{\text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta \varrho^{\text{I,II}} \text{Re}_L \text{Eu}_{n,m} \gamma_n^{\text{II}*} k_m^{(5)*}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n,m}^{(1)*} \gamma_n^{\text{I}*2} \chi^*} \left[\chi_{r_1}^{\text{II}*} \text{J}_0 \left(\frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} r^* \right) - \chi_{r_2}^{\text{II}*} \text{Y}_0 \left(\frac{\eta_{n,m}^{\text{II}*}}{\text{Ma}_\alpha} r^* \right) \right] \quad (2.149)$$

Nuevamente, se pueden consultar las constantes involucradas en el Apéndice [D](#). En aquellos casos donde aparezca una duplicidad de signos, ya sea \pm o \mp , el signo superior corresponderá a *ondas reflejadas* y el inferior a *ondas emitidas*. En este punto, todas las condiciones de frontera y condiciones periódicas han sido evaluadas.

Capítulo 3

Solución analítica

Una solución analítica es una expresión matemática que permite hacer predicciones sobre un fenómeno físico concreto. Esto no restringe la posibilidad de que exista más de una forma de representar esta solución. El caso de flujo viscoso oscilante en un conducto deformable no es la excepción. Dependiendo de la información experimental disponible es deseable optar por una representación u otra. A continuación se explican las tres variantes que se presentan para este caso de estudio.

3.1. Información temporal y axial disponibles

Suponiendo que se tienen suficientes sensores distribuidos a lo largo del conducto en la dirección axial y una tasa de muestreo adecuada, se consideraría que la información temporal y la axial están disponibles. Utilizando las Ecs. (2.89), (2.91), (2.93) y (2.95), que corresponden a la dependencia temporal; las Ecs. (2.99), (2.102), (2.106) y (2.109) que corresponden a la dependencia axial; las Ecs. (2.146)-(2.149), que corresponden a la dependencia radial; escogiendo el signo inferior en situaciones de duplicidad, y las Ecs. (C.7)-(C.18), asumiendo que se tratan de relaciones de igualdad exactas; se obtiene la solución

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{Eu_{n,m}}{2m\pi a_z \text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_z^{I*}}{\varepsilon \chi^*} J_0 \left(\sqrt{i^3 n \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right]$$

$$+a_r \lambda_{n,m}^{(1)*} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*} J_0(2m\pi i \varepsilon r^*) \Big] \exp[2\pi i (nt^* - mz^*)] \quad (3.1)$$

$$v_r^{\text{I}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Eu}_{n,m} U_z^{\text{I}} k_m^{(5)*}}{\text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_r^{\text{I}*}}{\varepsilon \chi^*} J_1 \left(\sqrt{i^3 n \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) - 2m\pi k_n^{(6)*} J_1(2m\pi i \varepsilon r^*) \right] \exp[2\pi i (nt^* - mz^*)] \quad (3.2)$$

$$u_z^{\text{II}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -i \frac{\text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{II}} \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*}}{2m\pi a_z \text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_{z1}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} J_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) - \frac{\chi_{z2}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} Y_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right] \exp[2\pi i (nt^* - mz^*)] \quad (3.3)$$

$$u_r^{\text{II}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{II}} \text{Eu}_{n,m} k_m^{(5)*}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n,m}^{(1)*}} \left[\frac{\chi_{r1}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} J_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) - \frac{\chi_{r2}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} Y_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right] \exp[2\pi i (nt^* - mz^*)] \quad (3.4)$$

$$p^{\text{I}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{Eu}_{n,m} J_0(2m\pi i \varepsilon r^*) k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} \exp[2\pi i (nt^* - mz^*)] \quad (3.5)$$

que describe el efecto producido por *ondas de presión emitidas*.

Por otro lado, si se utilizan las Ecs. (2.100), (2.103), (2.107) y (2.110), que corresponden a la dependencia axial; las Ecs. (2.146)-(2.149), que corresponden a la dependencia radial; escogiendo el signo superior en situaciones de duplicidad, y no se altera la selección del resto de las Ecs. involucradas; se deduce la solución

$$v_z^{\text{I}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Eu}_{n,m}}{2m\pi a_z \text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_z^{\text{I}*}}{\varepsilon \chi^*} J_0 \left(\sqrt{i^3 n \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right]$$

$$+a_r \lambda_{n,m}^{(1)*} k_m^{(2)*} k_n^{(3)*} J_0(2m\pi i \varepsilon r^*) \Big] \exp[2\pi i (nt^* + mz^*)] \quad (3.6)$$

$$v_r^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Eu_{n,m} \frac{U_z^I}{U_r^I} k_m^{(5)*}}{\text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_r^{I*}}{\varepsilon \chi^*} J_1 \left(\sqrt{i^3 n \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right. \\ \left. + 2m\pi k_n^{(6)*} J_1(2m\pi i \varepsilon r^*) \right] \exp[2\pi i (nt^* + mz^*)] \quad (3.7)$$

$$u_z^{II*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} i \frac{\text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II} Eu_{n,m} k_m^{(5)*}}{2m\pi a_z \text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_{z1}^{II*}}{\varepsilon \chi^*} J_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right. \\ \left. - \frac{\chi_{z2}^{II*}}{\varepsilon \chi^*} Y_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right] \exp[2\pi i (nt^* + mz^*)] \quad (3.8)$$

$$u_r^{II*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II} Eu_{n,m} k_m^{(5)*}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n,m}^{(1)*}} \left[\frac{\chi_{r1}^{II*}}{\varepsilon \chi^*} J_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right. \\ \left. - \frac{\chi_{r2}^{II*}}{\varepsilon \chi^*} Y_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 m^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right] \exp[2\pi i (nt^* + mz^*)] \quad (3.9)$$

$$p^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Eu_{n,m} J_0(2m\pi i \varepsilon r^*) k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} \exp[2\pi i (nt^* + mz^*)] \quad (3.10)$$

que describe el efecto producido por *ondas de presión reflejadas*.

Las constantes $k_m^{(2)*}$, $k_n^{(3)*}$, $k_m^{(5)*}$ y $k_n^{(6)*}$ son los coeficientes de las expansiones en series de Fourier de la señal experimental de la presión¹. No existe forma de relacionar causalmente las reflexiones de ondas con emisiones específicas, dado que toda esta información queda condensada en la descomposición de los armónicos n , m . En otras palabras, *se sacrifica la capacidad de estudiar los efectos de las reflexiones y de la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el fluido por la posibilidad de modelar un flujo provocado por una oscilación muy general de la presión*.

¹ Asumiendo que cualquier sensor solo es capaz de medir la presión en un radio específico, presumiblemente en la pared interna del conducto, i.e. $r^* = 1$. Como se explicó previamente, la dependencia radial $G_{n,m}^{I*}$ de la presión se deduce como parte del problema.

3.2. Información temporal disponible, información axial ausente

Suponiendo que es posible realizar mediciones con una tasa de muestreo adecuada, pero no se cuenta con suficientes sensores a lo largo del conducto, se consideraría que solo la información temporal está disponible. En este caso, la información ausente puede reemplazarse por la velocidad de propagación de las ondas en el fluido, denotada por c . Para ello, se asume existe un armónico espacial que cumple la relación

$$mz^* = \frac{f}{c}z$$

Es decir,

$$m = \text{Sh}_L \text{Ma}_c \quad (3.11)$$

Nótese que la Ec. (3.11) no siempre es igual a 1 o un número entero. Como resultado, las Ecs. (3.1)-(3.10) se reinterpretan de la siguiente manera

$$v_z^{\text{I}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\text{Eu}_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}}{2\pi a_z \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c} \left[\frac{\chi_z^{\text{I}*}}{\varepsilon \chi^*} \text{J}_0 \left(\sqrt{i^3 n \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) + a_r \lambda_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}^{(1)*} k_n^{(3)*} \text{J}_0(2\text{Sh}_L \text{Ma}_c \pi i \varepsilon r^*) \right] \exp[2\pi i (nt^* - \text{Sh}_L \text{Ma}_c z^*)] \quad (3.12)$$

$$v_r^{\text{I}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Eu}_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c} \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}}}{\text{Sh}_L} \left[\frac{\chi_r^{\text{I}*}}{\varepsilon \chi^*} \text{J}_1 \left(\sqrt{i^3 n \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) - 2\text{Sh}_L \text{Ma}_c \pi k_n^{(6)*} \text{J}_1(2\text{Sh}_L \text{Ma}_c \pi i \varepsilon r^*) \right] \exp[2\pi i (nt^* - \text{Sh}_L \text{Ma}_c z^*)] \quad (3.13)$$

$$u_z^{\text{II}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{\text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{I,II}} \text{Eu}_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}}{2\pi a_z \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c} \left[\frac{\chi_{z1}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} \text{J}_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right]$$

$$-\frac{\chi_{z_2}^{\text{II}*}}{\varepsilon\chi^*}Y_0\left(\sqrt{n^2\Pi_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)\Bigg]\exp\left[2\pi i\left(nt^*-\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}z^*\right)\right] \quad (3.14)$$

$$u_r^{\text{II}*}(r^*,z^*,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{Ma}_{\alpha}^2\text{Ma}_{\beta}^2\rho^{\text{I,II}}\text{Eu}_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}}{a_r\text{Sh}_{\text{L}}\lambda_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}^{(1)*}}\left[\frac{\chi_{r_1}^{\text{II}*}}{\varepsilon\chi^*}J_0\left(\sqrt{n^2\Pi_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)-\frac{\chi_{r_2}^{\text{II}*}}{\varepsilon\chi^*}Y_0\left(\sqrt{n^2\Pi_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)\right]\exp\left[2\pi i\left(nt^*-\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}z^*\right)\right] \quad (3.15)$$

$$p^{\text{I}*}(r^*,z^*,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\text{Eu}_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}J_0\left(2\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}\pi i\varepsilon r^*\right)k_n^{(6)*}\exp\left[2\pi i\left(nt^*-\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}z^*\right)\right] \quad (3.16)$$

para ondas emitidas.

Por otro lado,

$$v_z^{\text{I}*}(r^*,z^*,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{Eu}_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}}{2\pi a_z\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}}\left[\frac{\chi_z^{\text{I}*}}{\varepsilon\chi^*}J_0\left(\sqrt{i^3n\text{Wo}_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)+a_r\lambda_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}^{(1)*}k_n^{(3)*}J_0\left(2\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}\pi i\varepsilon r^*\right)\right]\exp\left[2\pi i\left(nt^*+\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}z^*\right)\right] \quad (3.17)$$

$$v_r^{\text{I}*}(r^*,z^*,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{Eu}_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}\frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}}}{\text{Sh}_{\text{L}}}\left[\frac{\chi_r^{\text{I}*}}{\varepsilon\chi^*}J_1\left(\sqrt{i^3n\text{Wo}_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)+2\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}\pi k_n^{(6)*}J_1\left(2\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}\pi i\varepsilon r^*\right)\right]\exp\left[2\pi i\left(nt^*+\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}z^*\right)\right] \quad (3.18)$$

$$u_z^{\text{II}*}(r^*,z^*,t^*)=\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{\text{Ma}_{\alpha}\text{Ma}_{\beta}^2\rho^{\text{I,II}}\text{Eu}_{n,\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}}}{2\pi a_z\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}}\left[\frac{\chi_{z_1}^{\text{II}*}}{\varepsilon\chi^*}J_0\left(\sqrt{n^2\Pi_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)-\frac{\chi_{z_2}^{\text{II}*}}{\varepsilon\chi^*}Y_0\left(\sqrt{n^2\Pi_{\text{R}}^2-4\pi^2\text{Sh}_{\text{L}}^2\text{Ma}_{\text{c}}^2\varepsilon^2r^*}\right)\right]\exp\left[2\pi i\left(nt^*+\text{Sh}_{\text{L}}\text{Ma}_{\text{c}}z^*\right)\right] \quad (3.19)$$

$$u_r^{\text{II}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{\text{I,II}} \text{Eu}_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}}{a_r \text{Sh}_L \lambda_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}^{(1)*}} \left[\frac{\chi_{r_1}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} \text{J}_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) - \frac{\chi_{r_2}^{\text{II}*}}{\varepsilon \chi^*} \text{Y}_0 \left(\sqrt{n^2 \Pi_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right] \exp [2\pi i (nt^* + \text{Sh}_L \text{Ma}_c z^*)] \quad (3.20)$$

$$p^{\text{I}*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Eu}_{n, \text{Sh}_L \text{Ma}_c} \text{J}_0 (2\text{Sh}_L \text{Ma}_c \pi i \varepsilon r^*) k_n^{(6)*} \exp [2\pi i (nt^* + \text{Sh}_L \text{Ma}_c z^*)] \quad (3.21)$$

corresponden a *ondas reflejadas*. Es equivalente considerar únicamente la parte real o la imaginaria de las Ecs. (3.2)-(3.21). La consecuencia de estas modificaciones es que las constantes $k_m^{(2)*}$ y $k_m^{(5)*}$ son iguales a 1. En cambio, $k_n^{(3)*}$ y $k_n^{(6)*}$ siguen siendo los coeficientes de la expansión en series de Fourier en el tiempo. Esta expansión de los armónicos temporales n contendrá la información de las reflexiones de ondas. Es decir, *se sacrifica la capacidad de estudiar los efectos de las reflexiones de las ondas longitudinales en el fluido, pero es posible modelar un flujo, sin tener información de la dependencia axial, a través del conocimiento de la velocidad de propagación de estas ondas*.

3.2.1. Información temporal y axial ausentes

Si adicionalmente no se tiene información temporal suficiente, es posible hacer otra interpretación en función de los tiempos de arribo y reflexión de las ondas. El tiempo de emisión de la k -ésima onda queda expresado de la forma

$$\tau_k = kT \quad \forall k \in 0, 1, 2, \dots$$

o bien, de forma escalada,

$$\tau_k^* = k \quad \forall k \in 0, 1, 2, \dots$$

Considerando la longitud del conducto y la velocidad de propagación de las ondas en el fluido, se deduce que

$$\tau_0 = \frac{L}{c}$$

es el tiempo de arribo de la primera onda. Por lo tanto,

$$\tau_k = kT + \frac{L}{c} \quad \forall k \in 0, 1, 2, \dots$$

será el tiempo de arribo de la k -ésima onda emitida al inicio del conducto. Esto en su forma escalada es

$$\tau_k^* = k + \text{Sh}_L \text{Ma}_c \quad \forall k \in 0, 1, 2, \dots$$

Si se generaliza para todas las ondas subsecuentemente reflejadas, i.e. rebotes posteriores en cualquier extremo del conducto; se arriba a la expresión

$$\tau_{k,l}^* = k + l \text{Sh}_L \text{Ma}_c \quad \forall k, l \in 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

La Ec. (3.22) representa los tiempos de arribo al inicio o al final del conducto, según corresponda, del l -ésimo rebote de la k -ésima onda. El rebote $l = 0$ corresponde a la emisión original de la onda de presión. En este caso, la información de la relación causal entre ondas emitidas y ondas reflejadas queda explícita en la solución analítica. Es decir, las Ecs. (3.2)-(3.21) se modifican, obteniéndose

$$\begin{aligned} v_z^{\text{I}^*}(r^*, z^*, t^*) = & \frac{\text{Eu}_{1, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}}{2\pi a_z \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c} \sum_{k=0}^{\text{K}} \sum_{l=0}^{\text{L}} (-1)^{l+1} \Upsilon^l \left[\frac{\chi_z^{\text{I}^*}}{\varepsilon \chi^*} \text{J}_0 \left(\sqrt{i^3 \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right. \\ & \left. + a_r \lambda_{1, \text{Sh}_L \text{Ma}_c}^{(1)*} \text{J}_0(2 \text{Sh}_L \text{Ma}_c \pi i \varepsilon r^*) \right] \mathcal{H}(t^* - \tau_{k,l}^*) \cdot \\ & \exp \left[2\pi i \left(t^* - \tau_{k,l}^* + (-1)^{l+1} \text{Sh}_L \text{Ma}_c z^* \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$v_r^{\text{I}^*}(r^*, z^*, t^*) = \frac{\text{Eu}_{1, \text{Sh}_L \text{Ma}_c} \frac{U_z^{\text{I}}}{U_r^{\text{I}}}}{\text{Sh}_L} \sum_{k=0}^{\text{K}} \sum_{l=0}^{\text{L}} \Upsilon^l \left[\frac{\chi_r^{\text{I}^*}}{\varepsilon \chi^*} \text{J}_1 \left(\sqrt{i^3 \text{Wo}_R^2 - 4\pi^2 \text{Sh}_L^2 \text{Ma}_c^2 \varepsilon^2 r^*} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & +(-1)^{l+1}2\text{Sh}_L\text{Ma}_c\pi\text{J}_1\left(2\text{Sh}_L\text{Ma}_c\pi i\varepsilon r^*\right)\left]\mathcal{H}(t^*-\tau_{k,l}^*)\cdot\right. \\
 & \left.\exp\left[2\pi i\left(t^*-\tau_{k,l}^*+(-1)^{l+1}\text{Sh}_L\text{Ma}_c z^*\right)\right]\right. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z^{\text{II}^*}(r^*, z^*, t^*) &= i\frac{\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta^2\varrho^{\text{I,II}}\text{Eu}_{1,\text{Sh}_L\text{Ma}_c}}{2\pi a_z\text{Sh}_L^2\text{Ma}_c}\sum_{k=0}^K\sum_{l=0}^L(-1)^{l+1}\Upsilon^l\left[\frac{\chi_{z_1}^{\text{II}^*}}{\varepsilon\chi^*}\text{J}_0\left(\sqrt{\Pi_R^2-4\pi^2\text{Sh}_L^2\text{Ma}_c^2\varepsilon^2r^*}\right)\right. \\
 & \left.-\frac{\chi_{z_2}^{\text{II}^*}}{\varepsilon\chi^*}\text{Y}_0\left(\sqrt{\Pi_R^2-4\pi^2\text{Sh}_L^2\text{Ma}_c^2\varepsilon^2r^*}\right)\right]\mathcal{H}(t^*-\tau_{k,l}^*)\cdot \\
 & \exp\left[2\pi i\left(t^*-\tau_{k,l}^*+(-1)^{l+1}\text{Sh}_L\text{Ma}_c z^*\right)\right] \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_r^{\text{II}^*}(r^*, z^*, t^*) &= \frac{\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta^2\varrho^{\text{I,II}}\text{Eu}_{1,\text{Sh}_L\text{Ma}_c}}{a_r\text{Sh}_L\lambda_{1,\text{Sh}_L\text{Ma}_c}^{(1)*}}\sum_{k=0}^K\sum_{l=0}^L\Upsilon^l\left[\frac{\chi_{r_1}^{\text{II}^*}}{\varepsilon\chi^*}\text{J}_0\left(\sqrt{\Pi_R^2-4\pi^2\text{Sh}_L^2\text{Ma}_c^2\varepsilon^2r^*}\right)\right. \\
 & \left.-\frac{\chi_{r_2}^{\text{II}^*}}{\varepsilon\chi^*}\text{Y}_0\left(\sqrt{\Pi_R^2-4\pi^2\text{Sh}_L^2\text{Ma}_c^2\varepsilon^2r^*}\right)\right]\mathcal{H}(t^*-\tau_{k,l}^*)\cdot \\
 & \exp\left[2\pi i\left(t^*-\tau_{k,l}^*+(-1)^{l+1}\text{Sh}_L\text{Ma}_c z^*\right)\right] \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p^{\text{I}^*}(r^*, z^*, t^*) &= \text{Eu}_{1,\text{Sh}_L\text{Ma}_c}\sum_{k=0}^K\sum_{l=0}^L\Upsilon^l\text{J}_0(2\text{Sh}_L\text{Ma}_c\pi i\varepsilon r^*)\cdot \\
 & \mathcal{H}\left(t^*-\tau_{k,l}^*\right)\exp\left[2\pi i\left(t^*-\tau_{k,l}^*+(-1)^{l+1}\text{Sh}_L\text{Ma}_c z^*\right)\right] \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Esta representación de la solución permite considerar la parte real, o la parte imaginaria, de las Ecs. (3.2.1)-(3.2.1) de manera equivalente. Es válida para el intervalo finito de tiempo $0 \leq t^* \leq \tau_{K,L}^*$, tal que se cumpla la Ec. (3.22), donde \mathcal{H} es la función de Heaviside.

Se observa que ya no existen dos soluciones dependiendo de la dirección de movimiento de la onda, sino que ambos casos se han incorporado en la suma. El número de ondas máximo K considerado en el modelo depende del tiempo de duración del experimento. Solo falta

determinar el número de rebotes máximo L a tomar en cuenta. Se espera que las ondas se disipen después de una cantidad de reflexiones dada, por lo que se incluye el parámetro Υ , tal que $0 < \Upsilon \leq 1$. Este es un *parámetro empírico de disipación*. Dado que el material del conducto se asumió como no-disipativo, toda disipación no relacionada con el fluido proviene del material de los soportes o de la instalación más allá del dominio del problema. Dependiendo del grado de disipación, el valor necesario de L será menor. En un modelo matemático posterior, en el que se considere la disipación del sólido, no se requerirá de este parámetro adicional.

En otras palabras, en esta última variante de la solución, *se sacrifica la capacidad de modelar un flujo provocado por una oscilación muy general de la presión, pero es posible describir los efectos de las ondas emitidas y de todas las reflexiones significativas, únicamente conociendo la amplitud de la onda original, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el fluido e introduciendo un parámetro empírico de disipación*. Con la solución analítica exacta en alguna estas tres representaciones, se puede analizar la interacción fluido-estructura en conductos elásticos sujetos a flujos oscilantes de fluidos viscosos, bajo las suposiciones descritas en este capítulo.

Capítulo 4

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados teóricos que luego se contrastan con los resultados experimentales disponibles. Se mostrarán en cuatro etapas: (1) explicación del caso experimental de referencia, (2) las gráficas del comportamiento de los coeficientes, (3) las gráficas de los campos $v_z^{\text{I}*}$, $v_r^{\text{I}*}$, $u_z^{\text{II}*}$ y $u_r^{\text{II}*}$; y (4) la validación con los resultados experimentales.

4.1. Caso experimental de referencia

Un estudio experimental en paralelo buscó generar los datos para validar a este modelo matemático. Los resultados se encuentran en la tesis [61]. El sistema experimental se muestra esquemáticamente en la Figura 4.1. Se bombea un fluido con una concentración 50 %-50 % de glicerina y agua con ayuda de una bomba peristáltica de tres rodillos, operando a una frecuencia de 8 Hz, a lo largo de un conducto de acrílico de 3.75 mm de radio y 3.2 mm de espesor. La longitud de la sección de pruebas, i.e. del sistema entre la bomba y la descarga, es de 1.6 m. Sin embargo, el conducto en la sección de visualización es un segmento de caucho opaco sobre el cual se colocaron dos sensores piezoeléctricos. Estos sensores miden esfuerzos, $\sigma_{rr}^{\text{II}*}$ y $\sigma_{zz}^{\text{II}*}$, a través de un cambio en la diferencia de potencial entre sus extremos. El segmento de conducto hecho de caucho está soportado en sus dos extremos y simplemente apoyado. Asimismo, $u_r^{\text{II}*}$ y $u_z^{\text{II}*}$ en la pared externa del conducto se filmaron con una cámara de alta velocidad. El caudal estacionario se midió ópticamente filmando la superficie libre en la zona de descarga.

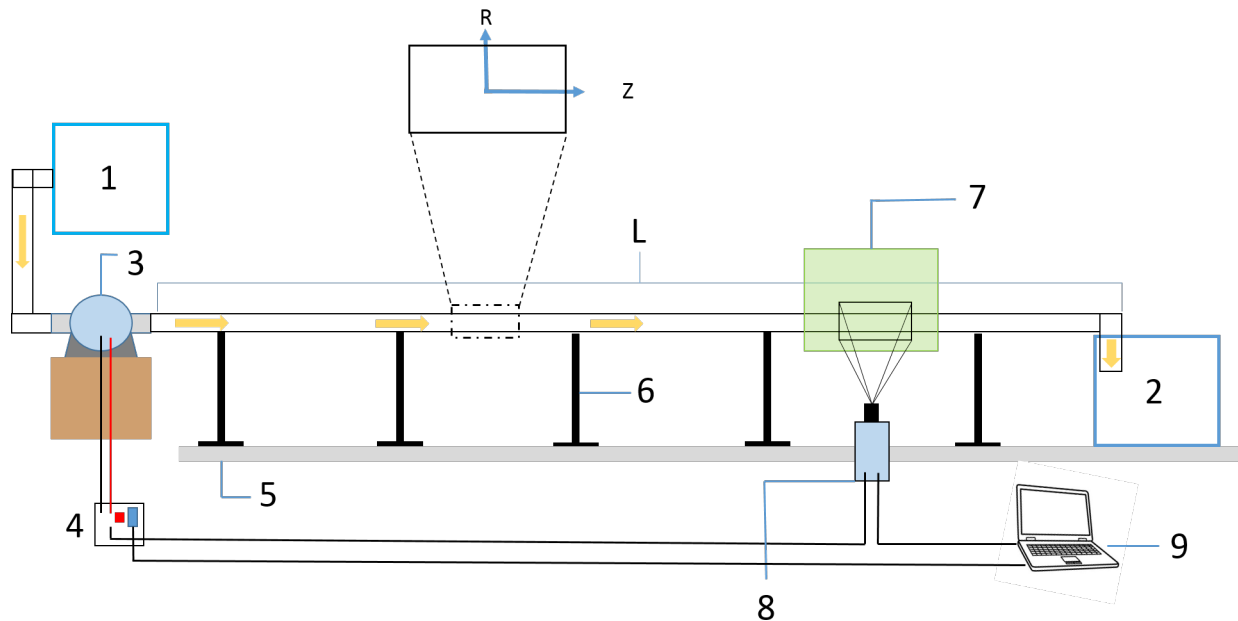


Figura 4.1: Esquema del arreglo experimental, tomado de [61]. Se distinguen los dispositivos: (1) depósito de fluido, (2) descarga del sistema, (3) bomba peristáltica, (4) tarjeta de adquisición de datos, (5) mesa flotada, (6) soportes, (7) zona de visualización, (8) cámara de alta velocidad, (9) computadora. Se muestra el sistema de coordenadas $r - z$ como $R - Z$, así como la longitud del conducto como L .

Durante las pruebas, se midieron desplazamientos en la pared externa del conducto, i.e. $u_z^{\text{II}}|_{r=R+h, z=\frac{L}{2}}$, tal que

$$\text{máx}\{u_z^{\text{II}}\} = \mathcal{O}(10^{-5}) \text{ m} \quad (4.1)$$

$$\text{máx}\{u_r^{\text{II}}\} = \mathcal{O}(10^{-4}) \text{ m} \quad (4.2)$$

Considerando lo que se explicó en la Subsección 2.2.2 y conociendo a R y a L , incluidos posteriormente en la Tabla 4.1, se hacen las estimaciones que se muestran a continuación

Tabla 4.1: Parámetros dimensionales estimados del sistema

	Orden de magnitud
Deformación axial normal máxima (a_z)	10^{-6}
Deformación radial normal máxima (a_r)	10^{-2}

Además de estas estimaciones, el sistema experimental se caracteriza por los siguientes parámetros dimensionales conocidos

Tabla 4.2: Parámetros dimensionales conocidos del sistema

	Valor
Caudal estacionario (Q_0)	$4.845 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
Densidad del fluido (ρ^I)	$1.126 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Densidad del sólido (ρ^{II})	$1.25 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Espesor de equilibrio del conducto (h)	$3.2 \times 10^{-3} \text{ m}$
Frecuencia de oscilación (f)	8 Hz
Longitud de sección de pruebas del conducto (L)	1.6 m
Módulo de Poisson del sólido (ν)	0.499
Módulo de Young del sólido (E)	$3.465 \times 10^6 \text{ Pa}$
Radio interno de equilibrio del conducto (R)	$3.75 \times 10^{-3} \text{ m}$
Viscosidad dinámica al corte del fluido (μ^I)	$8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

A partir del fenómeno físico, una inferencia heurística es que

$$U_r^I = \mathcal{O}(a_r f R) \quad (4.3)$$

donde el producto fR representa una velocidad: la distancia que recorre una partícula de fluido en la dirección radial en un tiempo equivalente al inverso de la frecuencia de oscilación. Esta velocidad está ponderada por la deformación radial máxima a_r , que incrementa o disminuye la distancia recorrida en función de la rigidez del medio elástico. A partir de estudios experimentales se sabe que las velocidades de las ondas longitudinales en agua y en glicerina pura a 25 °C son aproximadamente de 1480 m/s y 1920 m/s, según corresponda. Asumiendo linealidad, se estima esta magnitud para una mezcla con concentración 50%-50%. A partir de la Tabla 4.2 y lo que se acaba de exponer, se calculan los siguientes parámetros derivados

Tabla 4.3: Parámetros derivados

	Valor calculado
Primer coeficiente de Lamé (del sólido) (λ^{II})	$5.774 \times 10^9 \text{ Pa}$
Segundo coeficiente de Lamé (del sólido) (μ^{II})	$1.155 \times 10^6 \text{ Pa}$
Velocidad de ondas longitudinales en el sólido (α)	$2.15 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Velocidad de ondas transversales en el sólido (β)	$3.04 \times 10^1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Velocidad de ondas longitudinales en el fluido (c)	$1.7 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Velocidad axial media estacionaria del fluido (U_z^{I})	$1.097 \times 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Velocidad radial media oscilante del fluido (U_r^{I})	$3 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Entonces, los parámetros escalados del sistema son

Tabla 4.4: Parámetros escalados del sistema

	Valor
ε	2.344×10^{-3}
ϵ	8.533×10^{-1}
Sh_L	1.167×10^2
Ma_α	5.102×10^{-5}
Ma_β	3.608×10^{-3}
Ma_c	1.122×10^{-4}
U_{rel}	3.656×10^2
$\varrho^{\text{I,II}}$	9.008×10^{-1}
Re_L	2.47×10^4
Wo_R	9.974
Π_R	6.201×10^{-3}

Solo resta definir a los parámetros $\lambda_{n,m}^{(1)*}$ y $\lambda_n^{(2)*}$ para cada par de armónicos n, m . Se denominan como *parámetros de compresibilidad consistente*, dado que controlan el balance entre deformaciones axiales y radiales - para cada armónico - de manera que se conserve una deformación volumétrica dada. Surgen a partir de la ley de conservación de masa en el sólido como consecuencia directa del método de separación de la solución. Están relacionados con los valores propios del sistema, pero son dos cantidades que no se pueden conocer, calcular ni estimar en orden de magnitud¹. Es necesario determinar sus valores utilizando el método de

¹A decir verdad, se descubrió una equivocación respecto a este punto *a posteriori*. En realidad, es posible

prueba y error. Esto no quiere decir que sus valores numéricos sean arbitrarios. En realidad, *sólo una pareja de valores específicos permitirá que los campos adimensionales v_r^{I*} , u_z^{II*} y u_r^{II*} sean de orden unidad. Solo estos valores serán físicamente admisibles.* Esta condición se volvió necesaria desde el momento en el que se normalizaron las cantidades físicas del problema en la Subsección [2.2.2](#).

En otras palabras, se aspira a que las predicciones teóricas del modelo matemático sean exactas al menos hasta el orden de magnitud. Tras el proceso de prueba y error, considerando solamente el primer armónico $n = 1$, $m = 1$, se determinó que los valores adecuados para el experimento planteado son

$$\lambda_{1,1}^{(1)*} = \pm 10^{-4}i \quad (4.4)$$

$$\lambda_1^{(2)*} = 10^4 \quad (4.5)$$

donde el signo + corresponde a ondas que viajan del final al principio del conducto y el signo - a ondas que viajan del principio del conducto al final del mismo. Más adelante se muestra el comportamiento de estos parámetros.

4.2. Gráficas de los parámetros

En el caso de los parámetros de compresibilidad consistente, fijando el valor $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$, la dependencia del gradiente de presión $Eu_{1,1}$ está dada por

conocer la relación entre $\lambda_{n,m}^{(1)*}$, $\lambda_n^{(2)*}$ y los valores propios del sistema si se sustituyen las Ecs. [\(2.85\)](#) y [\(2.88\)](#) en [\(2.63\)](#)-[\(2.65\)](#) y se utilizan las expresiones del Apéndice [C](#). El sistema de ecuaciones está cerrado. Esta corrección y sus efectos se destinan para el trabajo futuro.

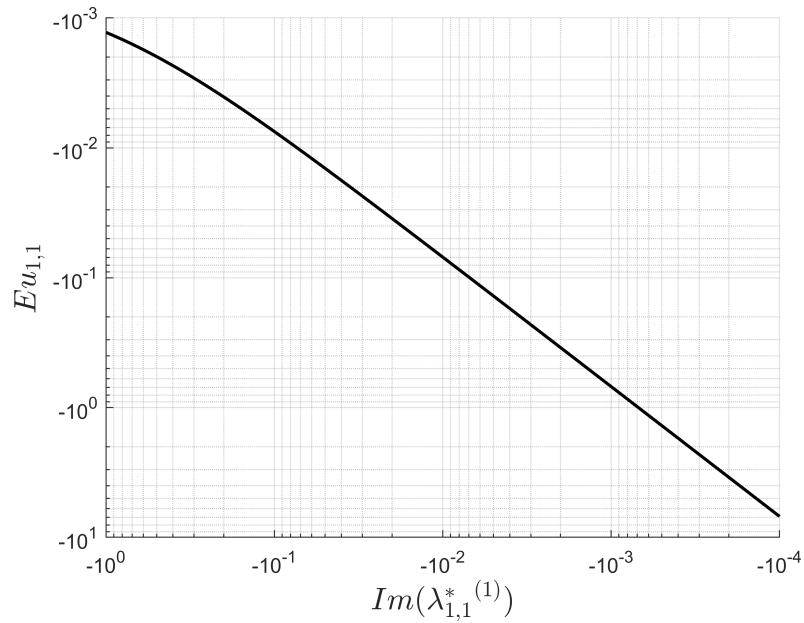


Figura 4.2: $Eu_{1,1}$ como función de $\lambda_{1,1}^{*(1)*}$, dejando $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$ fijo.

y, fijando el valor $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, la dependencia del gradiente de presión $Eu_{1,1}$ está dada por

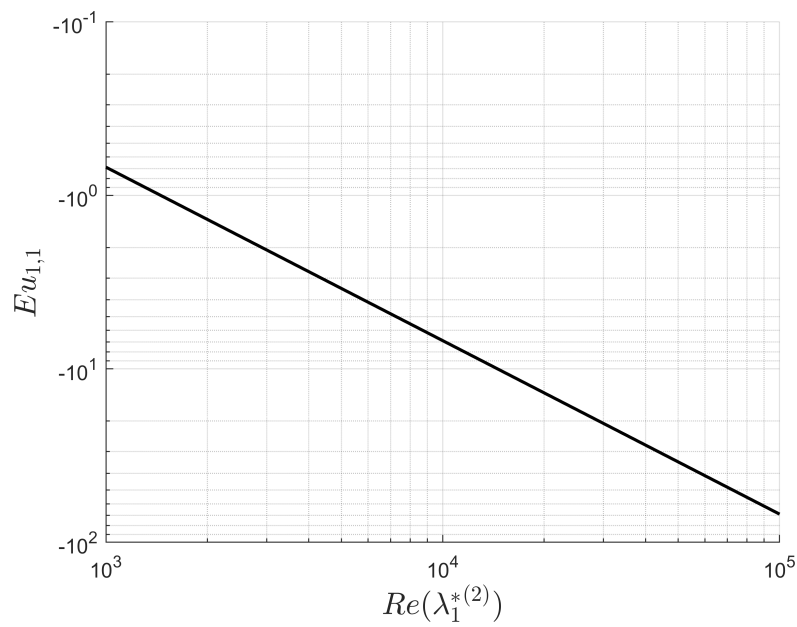


Figura 4.3: $Eu_{1,1}$ como función de $\lambda_{1,1}^{*(2)*}$, dejando $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$ fijo.

Nótese que $Eu_{1,1}$ es independiente de la parte real de $\lambda_{1,1}^{(1)*}$ y de la parte imaginaria de $\lambda_1^{(2)*}$.

4.3. Gráficas de los campos

Es ilustrativo comparar las gráficas de los campos, tal y como se muestra a continuación

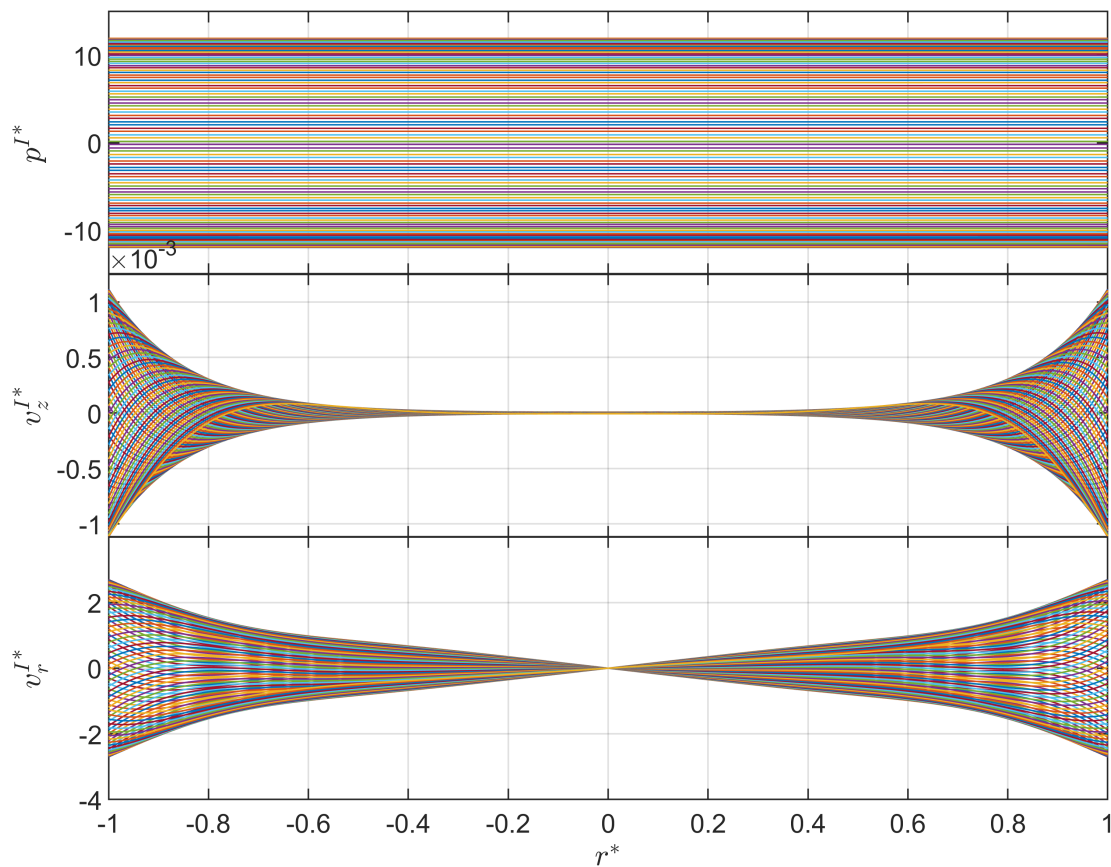


Figura 4.4: Comparación de los dos campos escalados en el fluido contra el radio para varios valores del tiempo, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$.

La Figura [4.4](#) muestra los tres campos asociados al fluido, v_z^{I*} , v_r^{I*} y p^{I*} ; como función de la coordenada radial r^* . Cada línea representa el perfil en un tiempo t^* distinto. Es necesario resaltar la importancia de haber considerado a v_r^{I*} , pues sin esta componente se

pierde una parte esencial del fenómeno. Dada la forma en la que se normalizaron v_r^I , u_z^I y u_r^I , necesariamente deben ser de orden unidad. A raíz de esto, se confirma que la componente radial es del orden de magnitud esperado, i.e. $v_r^I = \mathcal{O}(10^{-3}U_z^I)$. El hecho de que su amplitud esté acotada simétricamente es consistente con [78]. La discrepancia en la mantisa se debe a que los valores de U_r^I , a_z y a_r únicamente se estimaron. En cambio, v_z^{I*} no tiene por qué ser de orden unidad. Para este sistema en particular la solución predice que $v_z^I = \mathcal{O}(10^{-3}U_z^I)$. En otras palabras, ambas componentes de la velocidad en el fluido son del mismo orden de magnitud. Esto sugiere que: $U_r^I \sim \varepsilon U_z^I$, $\varepsilon \ll 1$. Observando la Ec. (2.11), una consecuencia de esto es

$$\frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^{I*}) \sim \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*}, \quad \varepsilon \ll 1$$

Es decir, las derivadas tienen un comportamiento suave, lo que es consistente con la suposición de pequeñas deformaciones. Se le recuerda al lector que ε es la relación entre el radio de equilibrio y la longitud del conducto. En cuanto al campo de presión, el orden de magnitud predicho por la solución es $p^I = \mathcal{O}(10^1 \rho^I U_z^{I2})$. Esto significa que los cambios de presión, provocados por el paso de las ondas planas a lo largo del conducto, tienen una amplitud diez veces mayor que la presión dinámica. Se puede hacer una observación adicional. No hay variación radial apreciable de p^I , por lo que $G_{n,m}^{I*}$ en este sistema. El parámetro ε es el que determina si $G_{n,m}^{I*}$ es significativa o no. Esta distribución radial difiere de la reportada en [58], pero hay que hacer hincapié en que Luchini propuso la forma de $G_{n,m}^{I*} \approx \text{cte}$ a priori, en lugar de deducirla.

Una característica notable de v_z^{I*} es que, a diferencia de los perfiles del flujo de Womersley [77], es que el valor máximo se encuentra en la pared, i.e. $r^* = 1$. Esto sugiere que en la Figura 4.4 no se está observando el mismo aspecto del fenómeno y representa un conflicto aparente con los resultados obtenidos por Zamir en [78]. Pese a esto, existen otras características de los campos que enriquecen la interpretación. Por ejemplo, en la Figura 4.5 se observan los campos v_z^{I*} y σ_{rz}^{I*} . Es decir, la componente axial de la velocidad y los esfuerzos cortantes. Se puede dividir el subdominio correspondiente al fluido en dos regiones en función de la magnitud de ambos campos. Las líneas en negro indican el límite entre dos regiones. Si la línea es sólida significa que el criterio que determina su ubicación proviene de la gráfica donde se encuentra. Las líneas punteadas son extensiones de las líneas sólidas a gráficas adyacentes. Las líneas rojas indican una ordenada del 10% del valor máximo en una gráfica dada.

La región I, $0 < r^* \leq 0.6$, es aquella donde la interacción fluido-estructura no domina en la dirección axial. Por el contrario, la región II, $0.6 < r^* \leq 1$ es aquella donde la interacción fluido-estructura domina en la dirección axial. El parámetro de control del espesor de estas regiones es Re_L . La relación aparente entre la magnitud de v_z^{I*} y σ_{rz}^{I*} , así como la dependencia entre su espesor y Re_L , sugieren una interpretación: la región II es una capa límite generada por el movimiento de la pared. Nótese que es distinta a la capa límite que se forma en las paredes del conducto como producto del flujo estacionario. Cuando el valor de Re_L es suficiente alto, la región II crece hasta que ocupa toda la sección transversal del conducto. En ese momento, la interacción fluido-estructura provoca que el fluido se mueva aproximadamente como cuerpo rígido en la dirección axial. Esto no ha sido mencionado por autores previos en este tipo de problemas, por lo que facilita una vía adicional de modelado en el caso de flujos internos a alta velocidad.

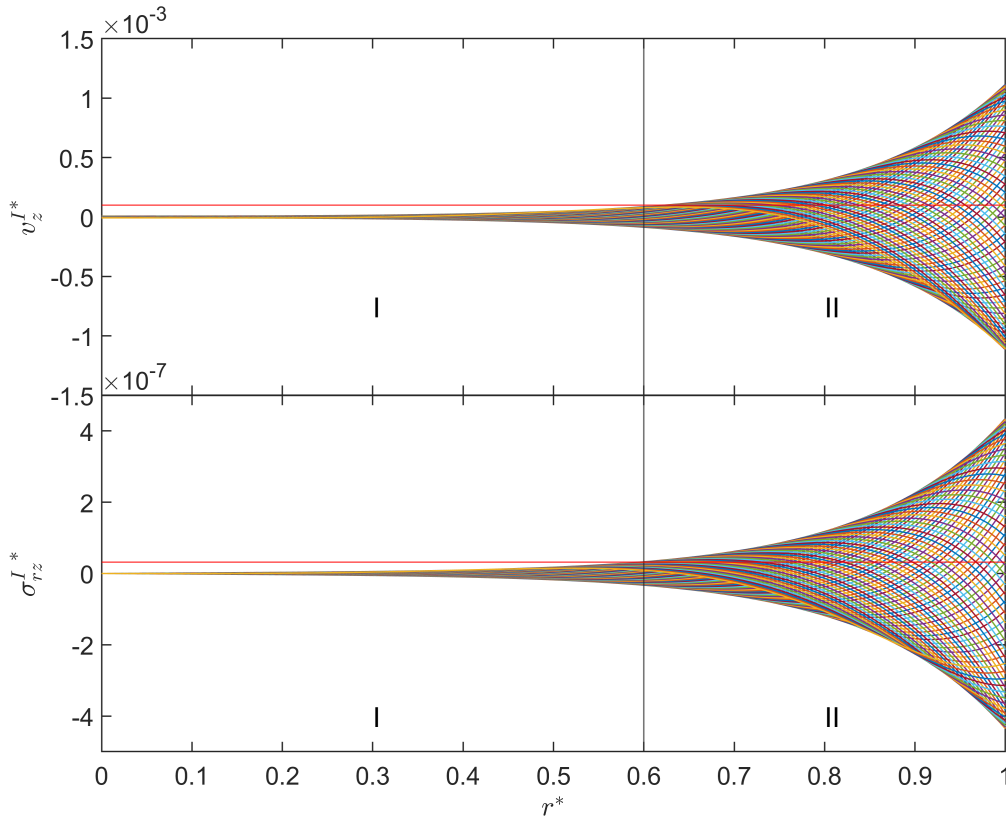


Figura 4.5: Regiones aproximadas a lo largo de r^* con comportamiento distinto para velocidad axial y esfuerzos cortantes: (I) $0 < r^* \leq 0.16$, donde $v_z^{I*} \approx 0$, $\sigma_{rz}^{I*} \approx 0$; y (II) $0.6 < r^* \leq 1$, donde $v_z^{I*} \neq 0$, $\sigma_{rz}^{I*} \neq 0$.

Realizando un procedimiento análogo en la Figura [4.6](#), se obtienen cuatro regiones. La

región III, $0 < r^* \leq 0.15$, es aquella donde la interacción fluido-estructura no domina en la dirección radial y la velocidad radial misma es despreciable. La región IV, $0.15 < r^* \leq 0.5$, es aquella donde la interacción fluido-estructura no domina en la dirección radial, pero la velocidad radial no puede despreciarse. Se caracteriza porque σ_{rr}^{I*} y $\sigma_{\theta\theta}^{I*}$ son constantes, mientras que σ_{zz}^{I*} es despreciable. La región V, $0.5 < r^* \leq 0.6$, es aquella de transición. Se caracteriza porque σ_{rr}^{I*} y $\sigma_{\theta\theta}^{I*}$ no son constantes, mientras que σ_{zz}^{I*} sigue siendo despreciable. Finalmente, la región VI, $0.6 < r^* \leq 1$, es aquella donde la interacción fluido-estructura domina en la dirección radial. Se caracteriza porque los tres esfuerzos normales varían a lo largo del radio. En este escenario, existe una relación entre la magnitud de las derivadas respecto a r^* y el espesor de estas regiones. Sin embargo, debido a p^{I*} , no está claro si la interpretación de capa límite es igualmente válida. De cualquier forma, esto abre la posibilidad de utilizar traslapes asintóticos y obtener una solución efectiva por regiones.

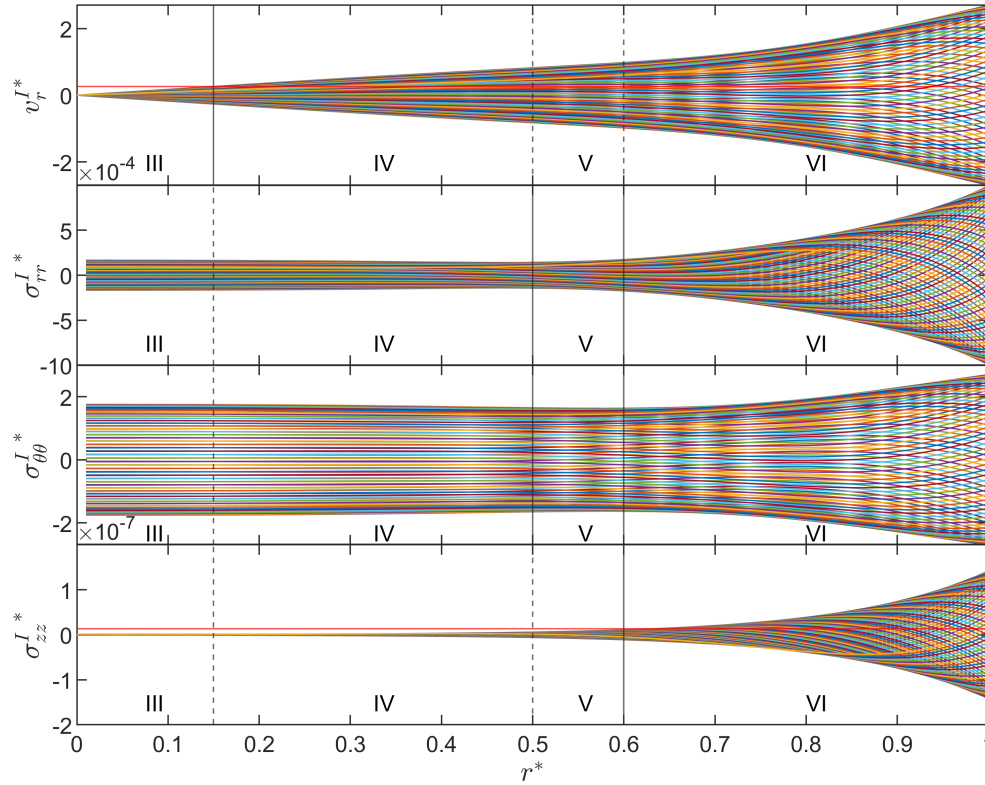


Figura 4.6: Regiones aproximadas a lo largo de r^* con comportamiento distinto para velocidad radial y esfuerzos normales: (III) $0 < r^* \leq 0.15$, donde $v_r^{I*} \approx 0$, $\sigma_{zz}^{I*} \approx 0$; (IV) $0.15 < r^* \leq 0.5$, donde $\sigma_{rr}^{I*} = \text{cte}$, $\sigma_{\theta\theta}^{I*} = \text{cte}$, $\sigma_{zz}^{I*} \approx 0$; (V) $0.5 < r^* \leq 0.6$, donde $\sigma_{rr}^{I*} \neq \text{cte}$, $\sigma_{\theta\theta}^{I*} \neq \text{cte}$, $\sigma_{zz}^{I*} \approx 0$; y (VI) $0.7 < r^* \leq 1$, donde $\sigma_{rr}^{I*} \neq \text{cte}$, $\sigma_{\theta\theta}^{I*} \neq \text{cte}$, $\sigma_{zz}^{I*} \neq 0$. Se grafican en el plano $z^* = 0.5$.

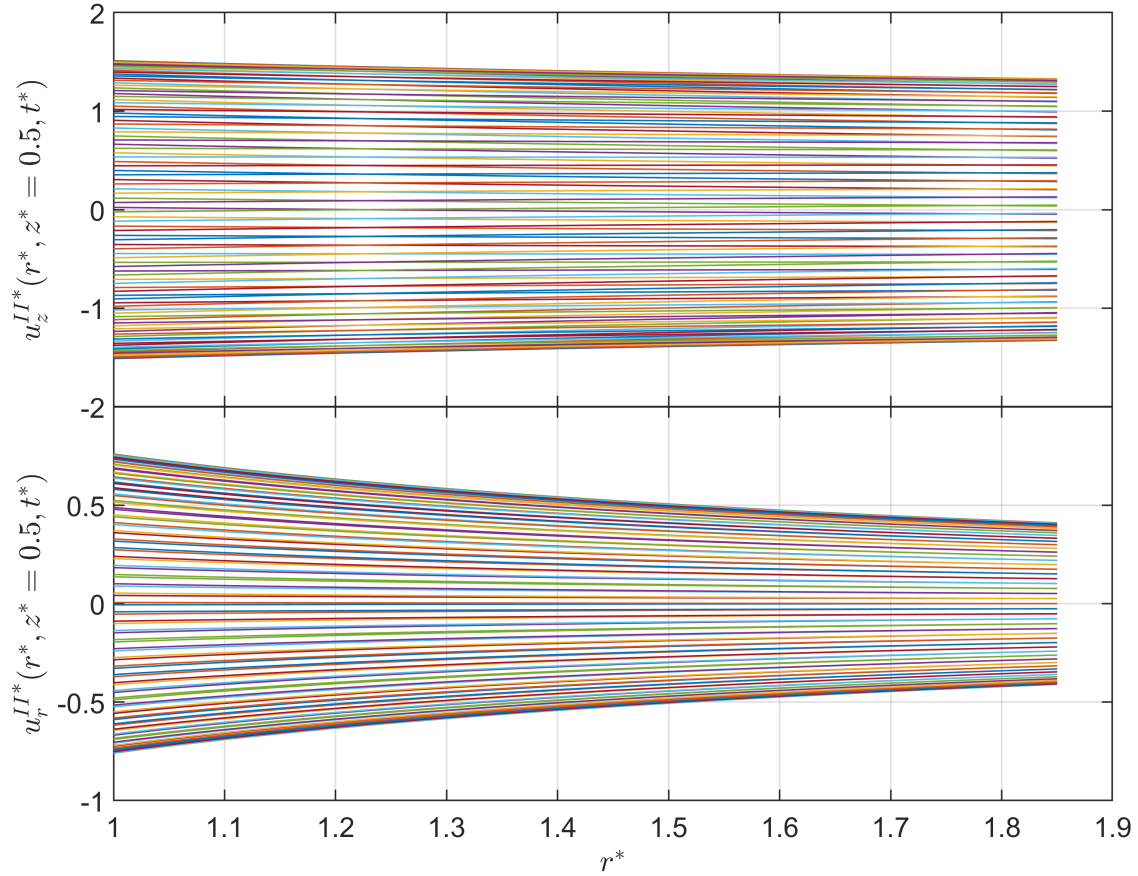


Figura 4.7: Comparación de los dos campos adimensionales en el sólido contra el radio para varios valores del tiempo, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$.

En la Figura 4.7 se muestran los campos en el sólido. Esta es la aportación de este trabajo, dado que en ninguna de las investigaciones que simplifican el sólido como una membrana [3] [5] [6] [24] [25] [52] [58] [78] es posible predecir el comportamiento en el medio sólido como función del radio. Cualitativamente se observa el comportamiento esperado: los desplazamientos decrecen en magnitud conforme aumenta r^* y, debido al valor de ε , u_z^{II*} y u_r^{II*} difieren en magnitud². Cabe mencionar que u_r^{II*} no varía de forma lineal con r^* , ni siquiera en conductos con espesor pequeño. En este caso, ninguno de los dos campos alcanza una magnitud del 10% del máximo, por lo que no es posible hacer una distinción de regiones como en los campos del fluido. Se puede plantear la posibilidad de que existan tres regiones

²Considerando la normalización de las variables.

análogas, V, VI y VII; donde *la interacción fluido-estructura es relevante, la interacción sólo es relevante en la dirección radial* y donde *los desplazamientos son despreciables*, respectivamente. Por supuesto, esto está sujeto al tipo de problema que se esté analizando. Además, se requiere un experimento con un conducto de espesor mayor para validar dicha propuesta.

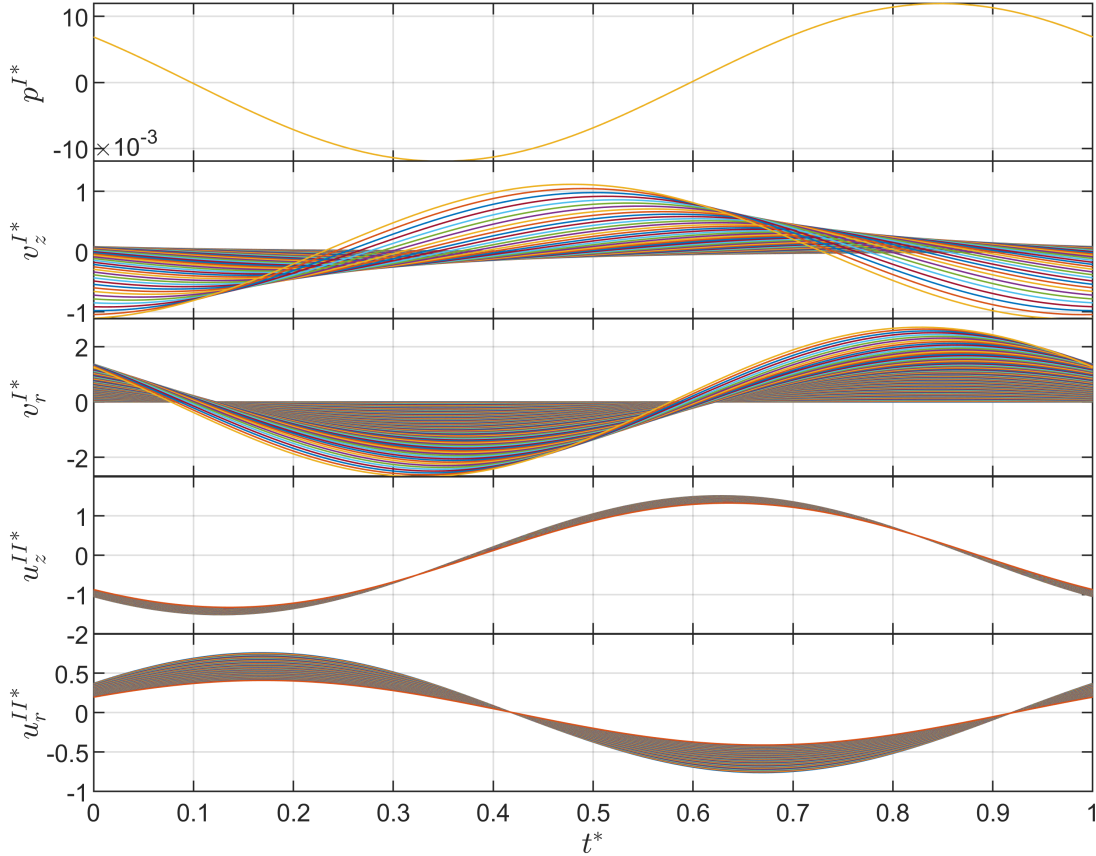


Figura 4.8: Comparación de los cinco campos adimensionales principales contra el tiempo para varios valores del radio, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$.

En la Figura 4.8 se distinguen las diferencias entre las fases de los cinco campos. Sin embargo, antes de hacer una discusión al respecto, es necesario determinar cuáles defasamientos son de origen físico. Si bien no conocemos las diferencias exactas entre las fases de v_z^I* , v_r^I* y u_z^{II*} , u_r^{II*} , sí se conoce que las velocidades en la pared interna deben estar en fase para todo t^* . Para ello se presenta la Figura 4.9. En ella se comparan únicamente las componentes, axial y radial, de la velocidad en ambos medios. Se observa que existe un defasamiento en-

tre componentes correspondientes, contradiciendo las condiciones de acoplamiento dadas por (2.120) y (2.130). Esta diferencia debe ser de origen matemático, posiblemente al manipular las condiciones de acoplamiento. La corrección requerida se deja para el trabajo futuro.

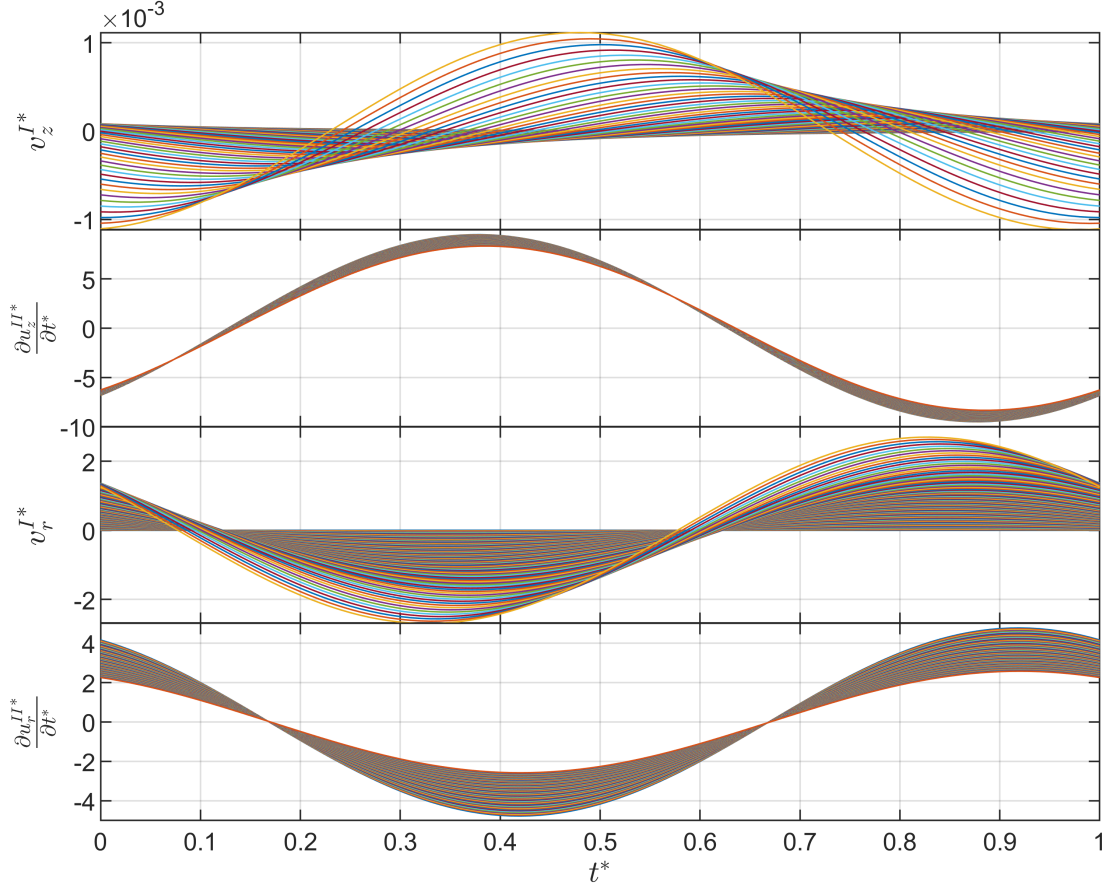


Figura 4.9: Comparación de los cuatro campos adimensionales de velocidad contra el tiempo para varios valores del radio, evaluados en $z^* = 0.5$. Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$.

Considerando la fase de los campos en el fluido como la de referencia, dado que la heredan directamente del campo de presión, se hace un corrimiento de fase a u_z^{II*} y u_r^{II*} . El defasamiento de $\frac{\partial u_z^{II*}}{\partial t^*}$ respecto a v_z^{II*} es de aproximadamente $\frac{\pi}{5}$ rad. Por otro lado, el defasamiento de $\frac{\partial u_r^{II*}}{\partial t^*}$ respecto a v_r^{II*} es de aproximadamente $-\frac{\pi}{5}$ rad. Ambos se ilustran en la Figura 4.10. Las líneas rojas corresponden a componentes axiales, mientras que las azules corresponden a componentes radiales. Las líneas punteadas, rojas o azules, corresponden a campos cuya fase se asume correcta. Las líneas sólidas indican campos que requieren una corrección de

fase. Es decir, líneas punteadas y sólidas de un mismo color deben coincidir. Finalmente, las líneas negras en $\frac{\partial u_z^{II*}}{\partial t^*}$ muestran una diferencia de fase entre los ceros de la pared interna y de la pared externa, i.e. el tiempo que tarda la perturbación en viajar por el sólido.

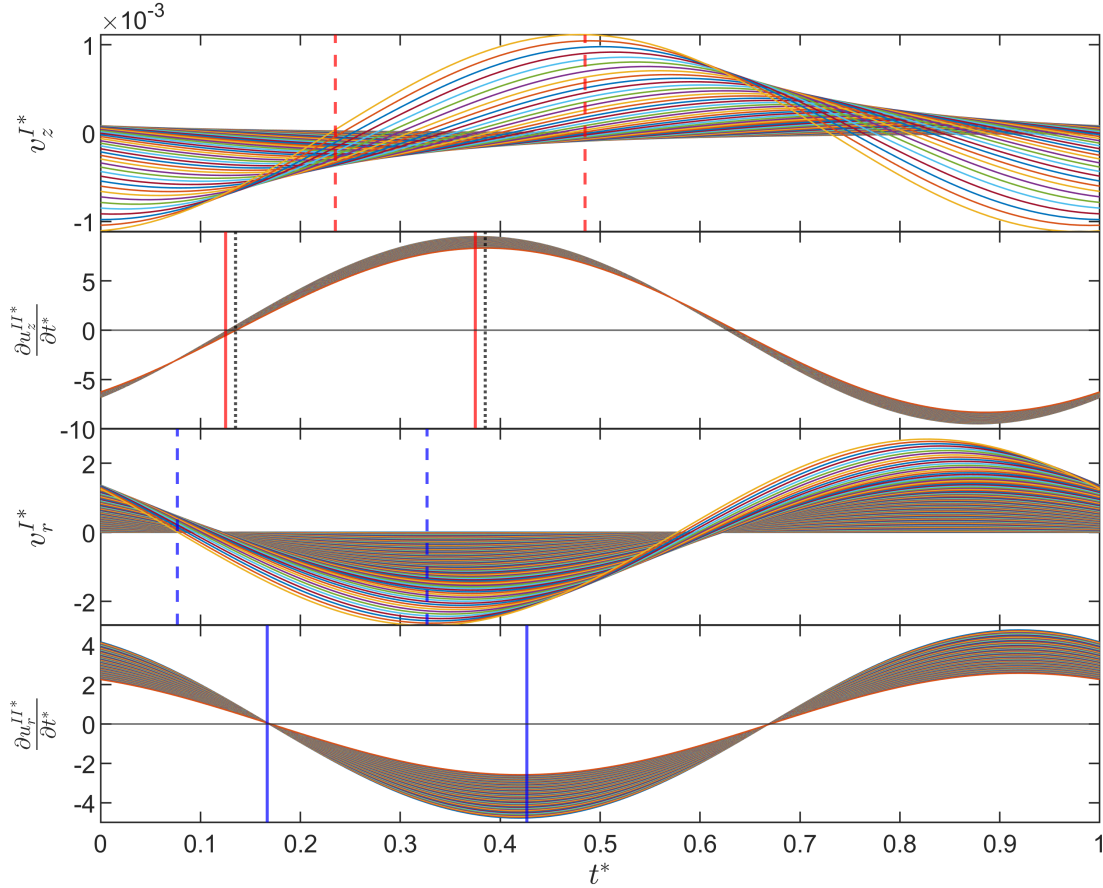


Figura 4.10: Defasamientos entre los campos v_z^{I*} , v_r^{I*} y u_z^{II*} , u_r^{II*} , respectivamente. Las líneas deben coincidir con sus parejas del color correspondiente. Las líneas sólidas indican que deben sufrir un corrimiento de fase, mientras que las líneas punteadas se asumen correctas. El defasamiento es de aproximadamente $\pm \frac{\pi}{3}$ rad, según sea el caso.

Estas correcciones se incorporan a los campos pertinentes. Como consecuencia, se generan las Figuras [4.11](#) y [4.12](#). El análisis físico se realiza con base en la información que estas últimas presentan. Zamir le da preferencia al análisis de fases espacial, a lo largo de la dirección axial, y no presenta de manera tan explícita el análisis temporal [\[78\]](#). El presente autor considera que esto es necesario para identificar si la solución es matemáticamente correcta.

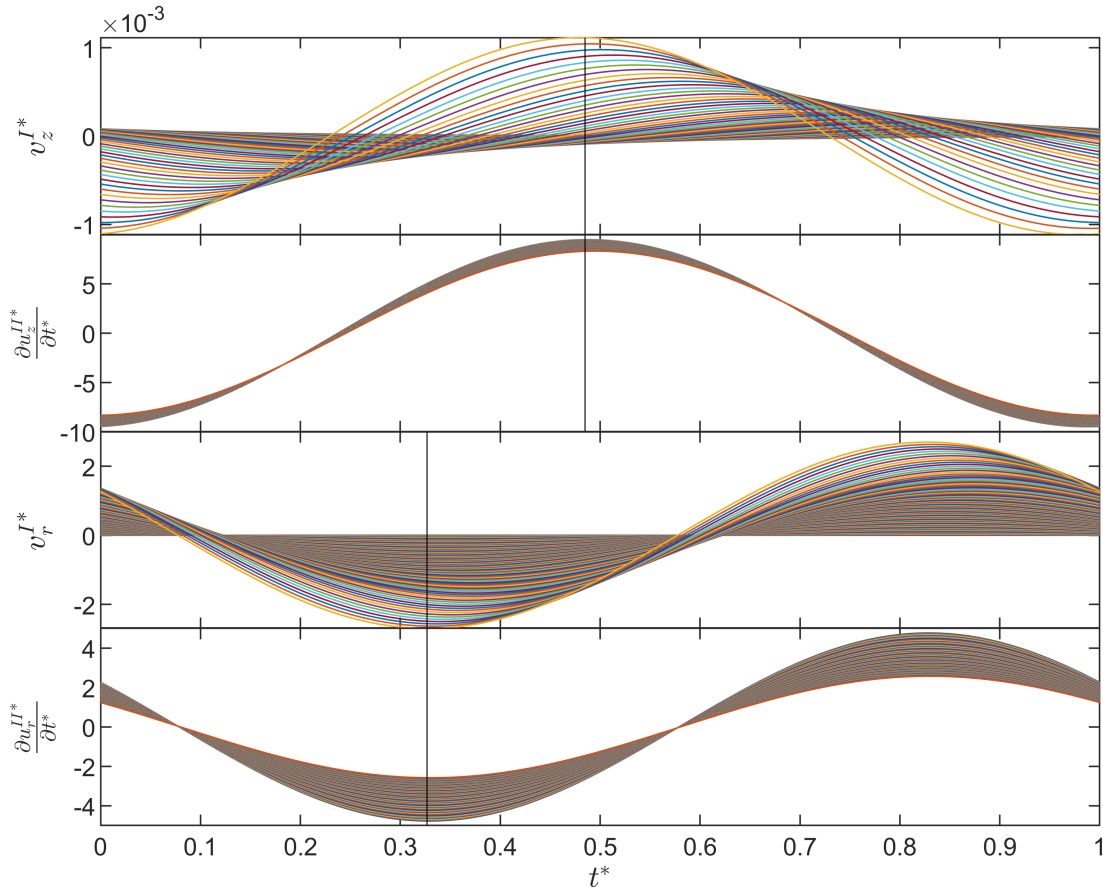


Figura 4.11: Comparación de los cuatro campos de velocidad con las correcciones de fase incorporadas. Se indican con líneas verticales los tiempos de correspondencia en fase esperados entre v_z^{I*} y $\frac{\partial v_z^{I*}}{\partial t^*}$, así como aquéllos entre v_r^{I*} y $\frac{\partial v_r^{I*}}{\partial t^*}$. No existen defasamientos en $r^* = 1$.

Las evoluciones de p^{I*} y $v_r^{I*}|_{r^*=1}$ casi están en fase, siendo el defasamiento de la última respecto a la primera de aproximadamente $\frac{23}{100}\pi$ rad. Sin embargo, $v_r^{I*}|_{0 < r^* < 1}$ sufre un defasamiento adicional respecto a p^{I*} y disminución de amplitud progresivamente hasta que $r^* = 0$, donde la información deja de propagarse. El campo p^{I*} muestra que *la onda plana de presión se propaga a la misma velocidad y con la misma amplitud a lo largo del conducto para cualquier valor de la coordenada radial*. En cambio, el campo v_r^{I*} ilustra que *el efecto del paso de la onda ocurre a distintos tiempos y con distintas amplitudes para cada posición radial en un corte transversal dado*. Además, es necesario hacer hincapié en estas dos interpretaciones: la primera hace referencia a la causa y la segunda al efecto. Lo anterior significa que las ondas de presión se comportan como discos de presión uniforme. La información de la alteración se

propaga por el fluido y produce una respuesta en el sistema.

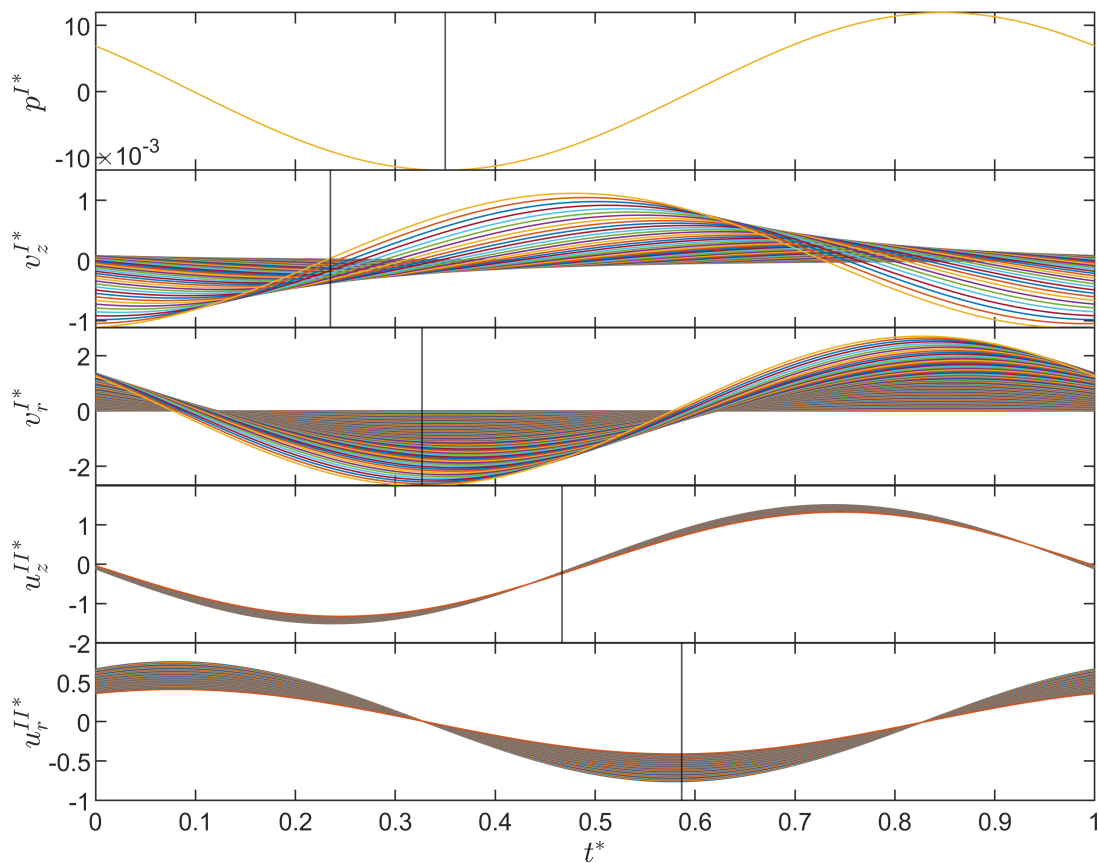


Figura 4.12: Comparación de los cinco campos de interés del problema con las correcciones de fase incorporadas. Se indican con líneas verticales los tiempos de correspondencia en fase esperados entre p^{I*} , v_z^{I*} y v_r^{I*} , así como aquéllos entre u_z^{II*} y u_r^{II*} . Los defasamientos que permanecen en las predicciones son de origen físico.

En un plano z^* dado, la evolución del sistema se caracteriza por cuatro puntos críticos. A continuación se sintetiza el comportamiento del conducto haciendo referencia a estos cuatro puntos. Para entender las descripciones, véase la Figura [4.12](#). Cabe mencionar que, cuando se utilizan las palabras “avance” y “retroceso”, se hace referencia al movimiento en la dirección axial. Asimismo, los conceptos “adelante” y “atrás” se deben interpretar respecto a la coordenada axial z^* .

Los cuatro puntos críticos y sus características son los siguientes:

1. Conducto con grosor de equilibrio:

- a) Pared en retroceso: $v_z^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} < 0$
- b) Grosor del conducto en incremento: $v_r^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} = \text{máx}\{v_r^{\text{I}*}\}$
- c) Pared adelante de la posición de equilibrio: $u_z^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} > 0$
- d) Radio interno en posición de equilibrio: $u_r^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} = 0$

2. Conducto alcanza grosor máximo:

- a) Pared en retroceso: $v_z^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} < 0$
- b) Grosor de conducto en equilibrio: $v_r^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} = 0$
- c) Pared atrás de la posición de equilibrio: $u_z^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} < 0$
- d) Radio interno máximo: $u_r^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} = \text{máx}\{u_r^{\text{II}*} \big|_{r^*=1}\}$

3. Conducto nuevamente con grosor de equilibrio:

- a) Pared en avance: $v_z^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} > 0$
- b) Grosor del conducto en decremento: $v_r^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} = \text{mín}\{v_r^{\text{I}*}\}$
- c) Pared atrás de la posición de equilibrio: $u_z^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} < 0$
- d) Radio interno en posición de equilibrio: $u_r^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} = 0$

4. Conducto alcanza grosor mínimo:

- a) Pared en avance: $v_z^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} < 0$
- b) Grosor de conducto en equilibrio: $v_r^{\text{I}*} \big|_{r^*=1} = 0$
- c) Pared adelante de la posición de equilibrio: $u_z^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} > 0$
- d) Radio interno mínimo: $u_r^{\text{II}*} \big|_{r^*=1} = \text{mín}\{u_r^{\text{II}*} \big|_{r^*=1}\}$

Está claro que, contrario a lo que se pensaría, ninguno de los campos $v_z^{\text{I}*}$, $v_r^{\text{I}*}$, $u_z^{\text{II}*}$, $u_r^{\text{II}*}$ está en fase. El defasamiento de $v_r^{\text{I}*}$ respecto a $v_z^{\text{I}*}$ es de aproximadamente $\frac{917}{5000}\pi$ rad y el de $u_z^{\text{II}*}$ respecto a $u_r^{\text{II}*}$ es de aproximadamente $\frac{6}{25}\pi$ rad. Estos defasamientos entre componentes axiales y radiales se deben a la inercia del fluido. Matemáticamente, esto se refleja en el argumento complejo de las funciones de Bessel. Como último comentario al respecto, se hace referencia a las líneas negras de la Figura [4.10](#). Previamente se mencionó que estas líneas muestran que la perturbación tarda en propagarse de la pared interna a la pared externa del conducto. El tiempo de arribo es

$$\tau_a \approx 0.00125 \text{ s}$$

y considerando la distancia radial h entre paredes, i.e. el espesor del conducto, entonces

$$v_a \approx 2.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esta velocidad de propagación radial no corresponde a α ni a β . Sin embargo, esto puede atribuirse a que los valores numéricos de las propiedades, E y ν , no corresponden exactamente al material utilizado. En el experimento no existía una manera confiable de determinar las propiedades del caucho utilizado, por lo que se recurrió a datos reportados por el fabricante. Estos materiales pueden presentar grandes variaciones en sus propiedades como función de su porosidad.

4.4. Validación experimental

En la Figura 4.13, se observa que hay un buen acuerdo entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales. Se subpredice el desplazamiento radial en la pared externa en un 50%. No obstante, los resultados experimentales están contenidos entre las predicciones teóricas correspondientes a las paredes interna y externa. En otras palabras, las predicciones teóricas sirven como cotas, superior e inferior, para los resultados experimentales. Esto significa que la solución dada por las Ecs. (3.1)-(3.1) tiene la misma energía que el sistema físico. La Figura 4.13 confirma que la predicción teórica está en fase con la señal experimental en el plano $z = \frac{L}{2}$. Está claro que, en el caso de este experimento, el primer armónico basta para describir los aspectos más relevantes del fenómeno físico. El espectrograma del experimento indica que la frecuencia dominante es la de pulsación de la bomba, 8 Hz, y que el efecto de otras frecuencias no es significativo.

La estrategia de validación explica en parte la magnitud relativa de la predicción teórica respecto a las mediciones experimentales. Al tomarse mediciones de desplazamientos axiales en la pared externa y en el plano medio del conducto, i.e. $u_z^{\text{II}}|_{r=R+h, z=\frac{L}{2}}$, como desplazamientos medios a lo largo del medio sólido, es de esperarse que las mediciones de los desplazamientos radiales en esta posición, i.e. $u_r^{\text{II}}|_{r=R+h, z=\frac{L}{2}}$, correspondan a una predicción en un punto

intermedio entre el radio externo y el interno. Ésto es consistente con la observación sobre las cotas, superior e inferior, que se hizo previamente y, por lo tanto, la subpredicción no es significativa, aún si es del 50%. Al ser un modelo exacto de primera aproximación que también recupera los órdenes de magnitud de v_r^I y de u_z^II , es posible asumir que la validación de un solo campo implica la validación de los otros.

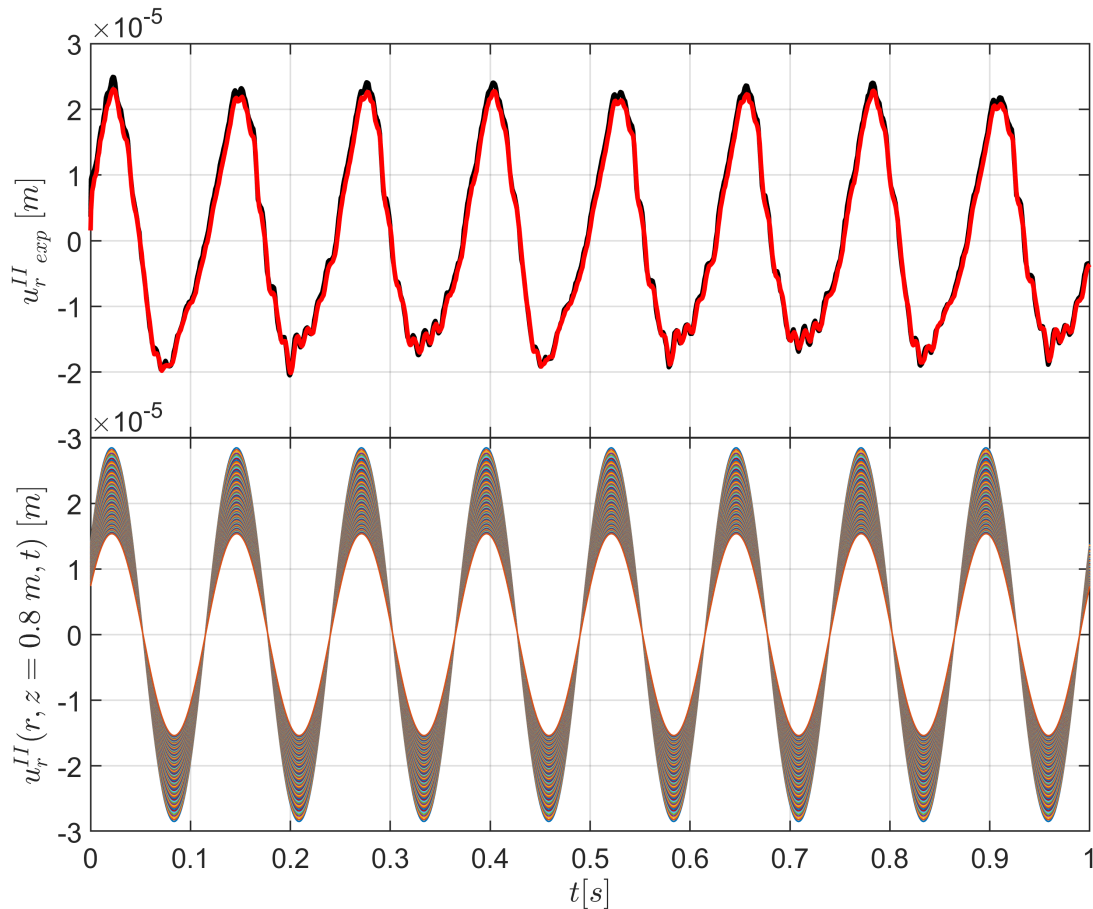


Figura 4.13: Comparación de desplazamientos radiales experimentales en pared externa ($r = R + h$) y desplazamientos radiales teóricos en el subdominio asociado al medio elástico ($R < r < R + h$). Los parámetros de compresibilidad consistente utilizados fueron: $\lambda_{1,1}^{(1)*} = -10^{-4}i$, $\lambda_1^{(2)*} = 10^4$.

4.5. Observaciones

Haciendo referencia a la Figura [2.2](#), la solución que describe el flujo completo fue inicialmente concebida de la forma

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \overline{v_z^{I*}}(r^*) + \widetilde{v_z^{I*}}(r^*, z^*, t^*)$$

y el campo de presión asociado como

$$p^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \overline{p^{I*}}(r^*) + \widetilde{p^{I*}}(r^*, z^*, t^*)$$

Sin embargo, cuando se presentó la Figura [2.3](#), se sugirió que, en realidad, existe una superposición de las pulsaciones en conducto rígido y de las ondas viajeras de presión. Si bien esto no es inconsistente con [63](#), es necesario estudiar las implicaciones a nivel sistema. Desde una perspectiva diferencial-, la solución es de la forma

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \overline{v_z^{I*}}(r^*) + \widetilde{v_z^{I*}}(r^*, t^*) + \widetilde{\widetilde{v_z^{I*}}}(r^*, z^*, t^*)$$

y el campo de presión correspondiente está dado por

$$p^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \overline{p^{I*}}(r^*) + \widetilde{p^{I*}}(r^*, t^*) + \widetilde{\widetilde{p^{I*}}}(r^*, z^*, t^*)$$

de modo que, si la solución de tipo Womersley es una primera corrección de carácter transitorio entonces, la solución de interacción fluido-estructura es la segunda corrección. Después de todo, las descomposiciones en series de funciones propias son *representaciones de la solución*. Asimismo, la descripción del fenómeno mediante una superposición de flujos más simples es posible gracias a la linealización que dio lugar a las Ecs. [\(2.17\)](#)-[\(2.18\)](#). Como consecuencia, no es posible recuperar la Ec. [\(A.6\)](#) a partir de [\(3.1\)](#)-[\(3.1\)](#) en el límite de un conducto rígido. Sin embargo, el acuerdo entre predicciones teóricas y experimento sugiere que la solución obtenida es correcta. Esto implica que la interpretación del caso límite de conducto rígido debe ser diferente.

Entonces, se puede afirmar lo siguiente: *en un sistema con interacción fluido-estructura, siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas³, el campo de presión se podrá descomponer en: una componente estacionaria, una componente transitoria que es independiente de la interacción entre medios y una componente transitoria asociada a la onda de presión que viaja por el conducto a velocidad finita. Este campo de presión producirá un campo de velocidades que se podrá descomponer en: una componente estacionaria, una componente transitoria correspondiente a un conducto rígido y una componente transitoria que contiene exclusivamente la información del movimiento de la pared.* Esto significa que

$$p^{I*}(r^*, z^*, t^*) = p^{I*}_{0,0}(r^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p^{I*}_{n,0}(r^*, t^*) + \sum_{m=1}^{\infty} p^{I*}_{n,m}(r^*, z^*, t^*) \right] \quad (4.6)$$

$$v_z^{I*}(r^*, z^*, t^*) = v_z^{I*}_{0,0}(r^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[v_z^{I*}_{n,0}(r^*, t^*) + \sum_{m=1}^{\infty} v_z^{I*}_{n,m}(r^*, z^*, t^*) \right] \quad (4.7)$$

$$v_r^{I*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_r^{I*}_{n,m}(r^*, z^*, t^*) \quad (4.8)$$

$$u_z^{II*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_z^{II*}_{n,m}(r^*, z^*, t^*) \quad (4.9)$$

$$u_r^{II*}(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_r^{II*}_{n,m}(r^*, z^*, t^*) \quad (4.10)$$

donde $v_r^{I*}_{0,0} = 0$, $u_z^{II*}_{0,0} = 0$ y $u_r^{II*}_{0,0} = 0$. Estas son las componentes estacionarias de los campos, por lo que no presentan interacción entre el fluido y la estructura. Por otro lado, $v_r^{I*}_{n,0} = 0$, $u_z^{II*}_{n,0} = 0$ y $u_r^{II*}_{n,0} = 0$ para todos los valores de n . Estas son las componentes transitorias de conducto rígido, por lo que tampoco incluyen efectos de la interacción entre los medios. En el límite cuando el conducto es rígido, $\text{Eu}_{n,m}$ es cero. Como resultado, las componentes de la suma sobre m se hacen cero y se recupera la solución de tipo Womersley [77] en la suma sobre n . Físicamente, esto ocurre porque no se aprecian variaciones axiales a lo largo del conducto. Esto provoca que los coeficientes de la descomposición en series de Fourier

³La no-linealidad no domina el fenómeno.

(espacial) de la señal experimental sean cero. Los cambios temporales del fenómeno se retienen en los coeficientes de las series de Fourier en el tiempo.

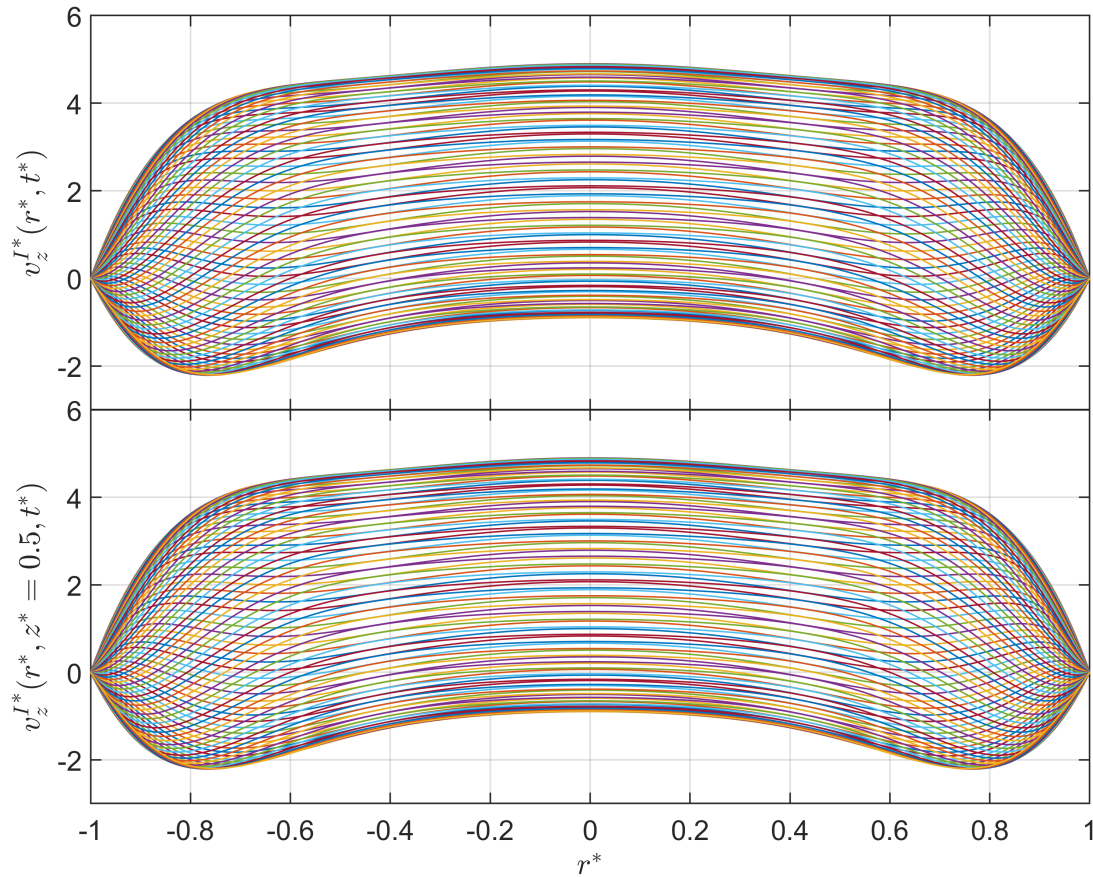


Figura 4.14: Comparación entre perfiles de velocidad axial para flujo oscilante en conducto rígido (superior) y flujo oscilante en conducto deformable (inferior).

En el extremo opuesto, cuando se tiene un material poco rígido, los cambios espaciales cobran mayor importancia que los netamente temporales. En este caso, se espera que $Eu_{n,m}$ sea distinto de cero como caso general, mientras que Eu_n sea cero para todos los valores de n . En otras palabras, *el fenómeno físico ocurre de manera combinada, como resultado de una oscilación general de la presión. La magnitud de las variaciones netamente temporales se balanceará con la magnitud de las variaciones relacionadas con el movimiento de la pared, en función de la rigidez del medio sólido.* En la Figura [4.14](#) se comparan los perfiles de

v_z^{I*} con⁴ y sin⁵ interacción fluido-estructura. Los perfiles son indistinguibles entre sí. Como $\widetilde{v_z^{I*}} = \mathcal{O}(10^{-3}U_z^I)$, utilizando la nomenclatura de esta sección, se espera que los cambios que resultan del movimiento de la pared sean demasiado pequeños como para apreciarse en el perfil. Esto explica la discrepancia entre los perfiles obtenidos aquí y los de [78]. Los perfiles reportados por Zamir muestran la superposición de la pulsación en conducto rígido y los efectos de la interacción fluido-estructura. La razón es que, al considerar el sólido como una membrana, se desprecian los efectos de u_z^{II*} y, de esta manera, el campo v_z^{I*} queda parcialmente desacoplada del medio elástico. Como consecuencia, los perfiles retienen la información combinada de dos de las soluciones que, en principio, se superpondrían según las Ecs. (4.6)-(4.10).

Esto también se contrapone a la idea de que basta contemplar la componente estacionaria de v_z^{I*} para obtener un modelo que describa el comportamiento de los dos medios. Esta estrategia se ha propuesto en [35], pero resulta en un mayor desacoplamiento de las variables del sistema. Estos detalles reflejan que la ley de conservación de masa no se satisface en el medio elástico. En resumen, para el rango de valores de Wo_R correspondiente al experimento y para deformaciones pequeñas, siempre y cuando no interese estudiar lo que ocurre en el sólido, v_z^{I*} puede modelarse como un flujo oscilante en un conducto rígido. Además, dado el acuerdo de perfiles en la Figura 4.14 con otros resultados obtenidos en la literatura para casos similares [24] [6] [78], se confirma que el término advectivo puede despreciarse para los valores de Wo_R considerados aquí. Estas observaciones son las aportaciones principales de la solución analítica desarrollada en este trabajo.

⁴En la parte inferior.

⁵En la parte superior.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Aportaciones

La solución analítica obtenida en el presente trabajo cumplió todos los objetivos que se plantearon en un principio y fue validada, al menos en orden de magnitud, con resultados experimentales. Los desplazamientos en la pared externa se pudieron predecir a partir del modelo con condiciones de acoplamiento en un radio de equilibrio y considerando todos los tipos de onda. Es decir, fue posible relacionar los cambios en las variables del sólido como función de los cambios en las variables del fluido, así como los efectos de los parámetros del sistema. Esto deja en claro que las suposiciones realizadas en un principio bastan para que el modelo pueda aplicarse de forma práctica en el estudio de conductos volcánicos, entre otros sistemas. En particular, es válida la linealización que se propuso.

La solución proporcionó información nueva sobre la descomposición de la interacción fluido-estructura en sus componentes esenciales. Asimismo, se pudieron distinguir las características principales de los campos de velocidad y desplazamiento que resultan del acoplamiento entre medios. Específicamente, la velocidad axial puede modelarse como un flujo oscilante en un conducto rígido, pero no es posible despreciar la velocidad radial si interesa estudiar la dinámica del sólido. Finalmente, el trabajo resolvió dudas existentes sobre el método de solución de problemas en sistemas acoplados, haciendo énfasis en la importancia de la ley de conservación de masa, la existencia de variaciones radiales del campo de presión y en la consistencia de los coeficientes al evaluar las condiciones de frontera.

5.2. Observaciones

1. El orden de magnitud de la velocidad axial es mil veces menor que el de la velocidad media del flujo estacionario presente en el sistema. Es decir, $v_z^I = \mathcal{O}(10^{-3}U_z^I)$.
2. El orden de magnitud de la velocidad radial es mil veces menor que el de la velocidad media del flujo estacionario presente en el sistema. Es decir, $v_r^I = \mathcal{O}(10^{-3}U_z^I)$.
3. Debido a (1) y (2), la velocidad axial y la velocidad radial tienen el mismo orden de magnitud. Es decir, $v_z^I = \mathcal{O}(v_r^I)$ y, por transitividad, $v_z^I = \mathcal{O}(U_r^I)$.
4. Debido a (3), los cambios espaciales de las componentes de la velocidad, v_z^I y v_r^I , deben ser de orden unidad. Es decir, la conservación de masa en el fluido se cumple tal que $U_r^I \approx \varepsilon U_z^I$, $\varepsilon \rightarrow 0$.
5. El orden de magnitud de los cambios de amplitud en la presión, debido al paso de las ondas planas por el conducto, es diez veces mayor que la magnitud de la presión dinámica. Es decir, $p^I = \mathcal{O}(10^1 \rho^I U_z^I{}^2)$.
6. La variación radial de la presión no es apreciable dada la relación geométrica del conducto. Es decir, $G_{n,m}^I \approx \text{cte}$.
7. La diferencia entre el perfil radial de p^{I*} de este trabajo y el de [58] se explica porque el primero se dedujo, mientras que el último se propuso *a priori*, i.e. se trata de un caso ligeramente distinto.
8. La región donde la interacción fluido-estructura no es dominante está delimitada por $r^* \in (0, 0.5]$.
9. La región donde la interacción fluido-estructura sólo es dominante en la dirección axial está delimitada por $r^* \in (0.5, 0.6]$.
10. La región donde la interacción fluido-estructura es dominante, tanto en la dirección axial como en la radial, está delimitada por $r^* \in (0.6, 1]$.
11. En lo que respecta a la relación entre v_z^{I*} y σ_{rz}^{I*} , la región dada por $r^* \in (0.6, 1]$ puede interpretarse como una capa límite. Esto sugiere una vía de modelado matemático para el problema de conductos deformables sometidos a flujos internos de alta velocidad.
12. En lo que respecta a la relación entre v_r^{I*} , $\sigma_{\theta\theta}^{I*}$ y σ_{rr}^{I*} , no está claro la región dada por $r^* \in (0.6, 1]$ puede interpretarse como una capa límite. Sin embargo, el cambio de

comportamiento por regiones sugiere el uso de varias soluciones aproximadas y traslape asintótico.

13. El comportamiento cualitativo de $u_z^{\text{II}*}$ y $u_r^{\text{II}*}$ es el esperado. Es decir, los valores máximos corresponden a la pared interna y los mínimos a la externa. Esto no se podía predecir con modelos anteriores que consideraran simultáneamente un flujo viscoso.
14. Se espera que existan al menos tres regiones similares, V, VI y VII; en el sólido. Sin embargo, no se puede verificar esto con el sistema experimental disponible debido al espesor del conducto.
15. Los perfiles de $v_z^{\text{I}*}$ de este trabajo difieren de los que se presentan en [78]. Estos últimos se asemejan más a los perfiles de la solución de Womersley [77]. La explicación subyace en la simplificación del medio sólido a una membrana. Es decir, se retiene la información de $u_r^{\text{II}*}$, pero se desprecia a $u_z^{\text{II}*}$. Esto desacopla a $v_z^{\text{I}*}$ del movimiento en la pared, por lo que la solución contiene al flujo pulsante en un conducto rígido y a los efectos de la conservación de masa en el fluido. El mismo argumento es válido para explicar las discrepancias respecto a [24].

5.3. Trabajo futuro

El modelo matemático abre la puerta al desarrollo de numerosas variantes. Estas variantes permitirían estudiar problemas físicos relacionados, o bien, contar con una mejor descripción del caso. Las posibles variantes son:

1. Corrección del modelo actual

Evidentemente, la primera ruta a seguir es incorporar las expresiones explícitas

$$\lambda_{n,m}^{(1)*} = \lambda_{n,m}^{(1)*} \left(\eta_{n,m}^{\text{I}*} \right), \quad \lambda_n^{(2)*} = \lambda_n^{(2)*} \left(\gamma_n^{\text{I}*} \right),$$

que se obtienen a partir de las Ecs. (2.63)-(2.65), en la solución obtenida en el presente trabajo. Esto con el objetivo de cerrar el problema sin necesidad de los valores dados por las expresiones (4.4)-(4.5). Se espera recuperar valores muy cercanos a los propuestos.

2. Modelo de interacción fluido-estructura con tres medios

Esto implica considerar explícitamente el tercer medio, i.e. el fluido que rodea el conducto sólido. Esto significaría hacer una investigación similar a [72], pero con un método completamente analítico¹. El interés detrás de este planteamiento sería estudiar los efectos en la superficie externa, así como los efectos acústicos a grandes distancias del conducto, utilizando condiciones de frontera más adecuadas. Para ello, las condiciones dadas por (2.136)-(2.3.6) se transforman en

$$\sigma_{rz}^{\text{II}*} |_{r^*=1+\epsilon} = \sigma_{rz}^{\text{III}*} |_{r^*=1+\epsilon}$$

y

$$\sigma_{rr}^{\text{II}*} |_{r^*=1+\epsilon} = \sigma_{rr}^{\text{III}*} |_{r^*=1+\epsilon} - p^{\text{III}*} |_{r^*=1+\epsilon}$$

respectivamente. Esto incorpora el acoplamiento entre los medios II y III. Asimismo, las dos condiciones de frontera radiales que se agregan son

$$\lim_{r^* \rightarrow \infty} r^* \left(\frac{\partial}{\partial r^*} - ik \right) v_z^{\text{III}*} = 0$$

y

$$\lim_{r^* \rightarrow \infty} r^* \left(\frac{\partial}{\partial r^*} - ik \right) v_r^{\text{III}*} = 0$$

Estas corresponden a la condición de irradiación de Sommerfeld. Se espera que los campos en el fluido queden expresados en términos de funciones de Hankel de segunda especie, tal y como en [73] [75] [72].

3. Modelo de interacción fluido-estructura con advección linealizada

El modelo desarrollado aquí asumió la linealización que se muestra en las Ecs. (2.17)-(2.18). Esto equivale a que las derivadas materiales se transformen de la forma

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{d}{dt^*} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t^*}$$

y

¹Reduciendo los tiempos de cálculo en el proceso.

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \frac{d^2}{dt^{*2}} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}$$

Esta linealización es válida siempre y cuando $\text{Re}_D \ll 1$. De hecho, los resultados del trabajo sugieren que esta suposición es válida si $\text{Re}_D < 10^3$. Sin embargo, para estudiar las características del fenómeno para magnitudes mayores de U_z^I , se plantea una linealización menos drástica. Esta equivale a que las derivadas materiales se interpreten de la forma

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + U_z^I \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{d}{dt^*} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U_z^I \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U_z^{I2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{d^2}{dt^{*2}} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t^* \partial z^*} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

bajo el argumento de que U_z^I corresponde al flujo dominante. Esta linealización se puede encontrar en [68] y tiene la virtud de no alterar la energía del sistema modelado por las ecuaciones de Navier-Stokes [24].

4. Modelo de interacción fluido-estructura para el modo $n = 2$

El modo que corresponde a la solución de este trabajo es $n = 1$, i.e. deformaciones axisimétricas sin variación tangencial. El modo $n = 2$ representa el escenario en el que el conducto se pandea. Esto ocurre cuando se supera una velocidad axial (media) crítica en el fluido [65] [66]. Esto significa que cualquier modelo de este tipo es capaz de predecir únicamente el inicio del pandeo [68]. Predecir el comportamiento del sistema una vez que ocurre la inestabilidad requiere de un modelo que incluya la no-linealidad, tal y como en [6] y [24].

5. Modelo de interacción fluido-estructura para modos superiores, $n \geq 3$

Cualquier modo superior, $n \geq 3$, presenta deformaciones con variación tangencial con periodo de $2\pi/n$ rad. Asimismo, la componente tangencial v_θ^{I*} no puede despreciarse. Este escenario sólo se presenta para valores más elevados de U_z^I que en el caso del pandeo. En general, situaciones como esta y a mayores velocidades de flujo deben tratarse numéricamente o vía métodos analíticos aproximados. De cualquier forma, es necesario tomar en cuenta las conclusiones de [57] [48] [49] como referencia para modelar este caso.

6. Modelo de interacción fluido-estructura considerando fronteras móviles

Finalmente, esta variante es realizable con el contenido de este trabajo. De acuerdo con investigaciones previas sobre problemas con fronteras móviles, la idea general consiste en obtener una solución para un dominio distinto en cada instante. Considerando esto, se pueden evaluar iterativamente las condiciones de frontera (2.130)-(2.3.6) en dos radios variables R^* , $R^* + h^*$, para obtener una serie de soluciones analíticas anidadas que describen el problema. Esta aproximación permite darle seguimiento al movimiento de las paredes del conducto y retener las ventajas en velocidad de cálculo que tiene una solución analítica. Para seguir este camino, se requiere estudiar a fondo la suavidad de las fronteras móviles, tal y como en [22], pero se sugiere comenzar con [45] [46] [47].

7. Modelo de interacción fluido-estructura mediante teoría asintótica

Tal y como se mencionó previamente, los hallazgos de este trabajo sugieren el uso de teoría de capa límite, o bien, de traslapes asintóticos. La primera permitiría representar la solución en dos regiones, una donde σ_{rz}^{II*} sufre cambios apreciables y otra donde no. La segunda permitiría replantear la solución en múltiples regiones dependiendo del comportamiento de σ_{rr}^{II*} y $\sigma_{\theta\theta}^{II*}$. Como referencia se pueden consultar las publicaciones [6] [24], donde ya se recurre al uso de expansiones asintóticas. Existe la posibilidad de que los métodos de escalas múltiples también puedan utilizarse, dadas las distintas velocidades de propagación de ondas, pero este trabajo no profundiza lo suficiente al respecto.

Apéndice A

Solución de dos casos límite

A.1. Flujo viscoso estacionario en conductos rígidos

A continuación se describe el modelo de flujo de Hagen-Poiseuille. Dada la rigidez y la ausencia de porosidad del conducto, sólo retenemos la componente v_z^{I*} . Por ello, las Ecs. (2.14)-(2.2.2) no juegan ningún papel en la descripción del medio viscoso. Considerando un flujo estacionario, las Ecs. (2.11)-(2.2.2) se simplifican de la siguiente manera

$$\begin{cases} \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*} = 0 \\ \varepsilon^2 \text{Re}_L v_z^{I*} \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*} = -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z^{I*}}{\partial z^{*2}} \\ \frac{\partial p^{II*}}{\partial r^*} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A partir de las Ecs. (A.1), se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$0 = -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dv_z^{I*}}{dr^*} \right) \quad (\text{A.2})$$

Las condiciones de frontera son

$$\frac{dv_z^{I*}}{dr^*}(0) = 0 \quad v_z^{I*}(1) = 0$$

las cuales restringen la forma del perfil de velocidad y el valor de la variable en las paredes del conducto. La solución exacta es

$$v_z^{I*}(r^*) = \frac{\varepsilon^2 \text{Re}_L \text{Eu}_0}{4} (1 - r^{*2}) \quad (\text{A.3})$$

A.2. Flujo viscoso pulsante en conducto rígido

Si se plantea la solución para el flujo de Womersley, las Ecs. (2.14)-(2.2.2) quedan desacopladas del sistema nuevamente. Igual que en el caso anterior, las Ecs. (2.11)-(2.2.2) se simplifican a

$$\begin{cases} \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*} = 0 \\ \varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial t^*} + \varepsilon^2 \text{Re}_L v_z^{I*} \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial z^*} = -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z^{I*}}{\partial z^{*2}} \\ \frac{\partial p^{II*}}{\partial r^*} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

o bien, de forma equivalente, a

$$\varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial t^*} = -\varepsilon^2 \text{Re}_L \frac{\partial p^{I*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*} \right) \quad (\text{A.5})$$

con las condiciones dadas por

$$\frac{\partial v_z^{I*}}{\partial r^*}(0, t^*) = 0 \quad v_z^{I*}(1, t^*) = 0 \quad v_z^{I*}(r^*, 0) = v_z^{I*}(r^*, 1)$$

Resolviendo a través del método de expansiones en series de funciones propias, se llega a la solución

$$v_z^{I*}(r^*, t^*) = \varepsilon^2 \text{Re}_L \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} W_{OR} r^*)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} W_{OR})} \right) \frac{i E u_n}{n W_{OR}^2} \exp [i 2 \pi n t^*] \quad (\text{A.6})$$

Para tener una solución físicamente relevante, se debe de tomar la parte real de (A.6),

$$v_z^{I*}(r^*, t^*) = \varepsilon^2 \text{Re}_L \Re \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} W_{OR} r^*)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} W_{OR})} \right) \frac{i E u_n}{n W_{OR}^2} \exp [i 2 \pi n t^*] \right\} \quad (\text{A.7})$$

o bien, la parte imaginaria de (A.6),

$$v_z^{I*}(r^*, t^*) = \varepsilon^2 \text{Re}_L \Im \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} W_{OR} r^*)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} W_{OR})} \right) \frac{i E u_n}{n W_{OR}^2} \exp [i 2 \pi n t^*] \right\} \quad (\text{A.8})$$

Naturalmente, la solución para flujo pulsante es la suma de las Ecs. (A.3) y (A.6).

Apéndice B

Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a la solución particular

En este apéndice se detalla la solución del sistema (2.56) a través del método de coeficientes indeterminados. Se considera el sistema simultáneo siguiente

$$\begin{cases} x \frac{dY}{dx} + Y - axX = 0 \\ x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x \frac{dX}{dx} + b^2x^2X - cx^2W = 0 \\ x^2 \frac{d^2Y}{dx^2} + x \frac{dY}{dx} - \left(1 - b^2x^2\right)Y - ex^2 \frac{dW}{dx} = 0 \end{cases}$$

B.1. Solución con coeficientes variables

Se proponen las soluciones particulares

$$\begin{cases} X(x) = A_1(x)J_0(bx) + A_2(x)Y_0(bx) \\ Y(x) = B_1(x)J_1(bx) + B_2(x)Y_1(bx) \\ W(x) = C_1(x)J_0(bx) + C_2(x)Y_0(bx) \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{dA_1}{dx} J_0(bx) - bA_1 J_1(bx) + \frac{dA_2}{dx} Y_0(bx) - bA_2 Y_1(bx) \\ \frac{dY}{dx} = bB_1 J_0(bx) + \left(\frac{dB_1}{dx} - \frac{B_1}{x} \right) J_1(bx) - bB_2 Y_0(bx) + \left(\frac{dB_2}{dx} - \frac{B_2}{x} \right) Y_1(bx) \\ \frac{dW}{dx} = \frac{dC_1}{dx} J_0(bx) - bC_1 J_1(bx) + \frac{dC_2}{dx} Y_0(bx) - bC_2 Y_1(bx) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} = \left(\frac{d^2 A_1}{dx^2} - b^2 A_1 \right) J_0(bx) - b \left(2 \frac{dA_1}{dx} - \frac{A_1}{x} \right) J_1(bx) + \left(\frac{d^2 A_2}{dx^2} - b^2 A_2 \right) Y_0(bx) - b \left(2 \frac{dA_2}{dx} - \frac{A_2}{x} \right) Y_1(bx) \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} = b \left(2 \frac{dB_1}{dx} - \frac{B_1}{x} \right) J_0(bx) + \left(\frac{d^2 B_1}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dB_1}{dx} - \left(b^2 - \frac{2}{x^2} \right) B_1 \right) J_1(bx) \\ \quad + b \left(2 \frac{dB_2}{dx} - \frac{B_2}{x} \right) Y_0(bx) + \left(\frac{d^2 B_2}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dB_2}{dx} - \left(b^2 - \frac{2}{x^2} \right) B_2 \right) Y_1(bx) \end{cases}$$

Comenzamos con la ecuación

$$x \frac{dY}{dx} + Y - axX = 0$$

donde sustituimos las derivadas y funciones requeridas. Agrupando los coeficientes para cada una de las funciones de Bessel que sean de la misma especie y del mismo orden, se obtiene

$$\begin{cases} xbB_1 - axA_1 = 0 \\ x \left(\frac{dB_1}{dx} - \frac{B_1}{x} \right) + B_1 = 0 \\ xbB_2 - axA_2 = 0 \\ x \left(\frac{dB_2}{dx} - \frac{B_2}{x} \right) + B_2 = 0 \end{cases}$$

y concluimos que

$$\begin{cases} A_1(x) = \frac{b}{a}B_1(x) \\ B_1(x) = \text{cte} \\ A_2(x) = \frac{b}{a}B_2(x) \\ B_2(x) = \text{cte} \end{cases}$$

Es evidente que existe una contradicción. Si las Ecs. anteriores son ciertas entonces, la solución particular es linealmente dependiente con la solución complementaria. Es necesario proponer otro tipo de solución.

B.2. Solución con coeficientes constantes y argumento distinto

Ahora, se proponen las soluciones particulares

$$\begin{cases} X(x) = A_1J_0(gx) + A_2Y_0(gx) \\ Y(x) = B_1J_1(gx) + B_2Y_1(gx) \\ W(x) = C_1J_0(gx) + C_2Y_0(gx) \end{cases}$$

donde $g \neq b$. Esta familia de soluciones particulares no es inusual [58] [78]. De aquí se deduce

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = -gA_1J_1(gx) - gA_2Y_1(gx) \\ \frac{dY}{dx} = gB_1J_0(gx) - \frac{B_1}{x}J_1(gx) + gB_2Y_0(gx) - \frac{B_2}{x}Y_1(gx) \\ \frac{dW}{dx} = -gC_1J_1(gx) - gC_2Y_1(gx) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} = -g^2A_1J_0(gx) + \frac{gA_1}{x}J_1(gx) - g^2A_2Y_0(gx) + \frac{gA_2}{x}Y_1(gx) \\ \frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{gB_1}{x}J_0(gx) + \left(\frac{2}{x^2} - g^2\right)B_1J_1(gx) - \frac{gB_2}{x}Y_0(gx) + \left(\frac{2}{x^2} - g^2\right)B_2Y_1(gx) \end{cases}$$

Nuevamente, comenzando con la ecuación

$$x \frac{dY}{dx} + Y - axX = 0$$

se sustituyen las soluciones y sus derivadas. Agrupando los coeficientes para cada una de las funciones de Bessel, que sean de la misma especie y del mismo orden, se obtiene,

$$\begin{cases} xgB_1 - axA_1 = 0 \\ -B_1 + B_1 = 0 \\ xgB_2 - axA_2 = 0 \\ -B_2 + B_2 = 0 \end{cases}$$

y se concluye

$$\begin{cases} A_1 = \frac{g}{a} B_1 \\ A_2 = \frac{g}{a} B_2 \end{cases}$$

A continuación, se prosigue con la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \frac{dX}{dx} + b^2 x^2 X - cx^2 W = 0$$

realizando un procedimiento análogo. Se sigue

$$\begin{cases} -x^2 g^2 A_1 + b^2 x^2 A_1 - cx^2 C_1 = 0 \\ xgA_1 - xgA_1 = 0 \\ -x^2 g^2 A_2 + b^2 x^2 A_2 - cx^2 C_2 = 0 \\ xgA_2 - xgA_2 = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} C_1 = \frac{b^2-g^2}{c} A_1 \\ C_2 = \frac{b^2-g^2}{c} A_2 \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} C_1 = \frac{g(b^2-g^2)}{ac} B_1 \\ C_2 = \frac{g(b^2-g^2)}{ac} B_2 \end{cases}$$

Finalmente, se hacen estas sustituciones en la Ec.

$$x^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + x \frac{dY}{dx} - \left(1 - b^2 x^2\right) Y - ex^2 \frac{dW}{dx} = 0$$

y, tras llevar a cabo agrupaciones similares, se arriba a

$$\begin{cases} -xgB_1 + xgB_1 = 0 \\ x^2 \left(\frac{2}{x^2} - g^2\right) B_1 - B_1 - \left(1 - b^2 x^2\right) B_1 + gex^2 C_1 = 0 \\ -xgB_2 + xgB_2 = 0 \\ x^2 \left(\frac{2}{x^2} - g^2\right) B_2 - B_2 - \left(1 - b^2 x^2\right) B_2 + gex^2 C_2 = 0 \end{cases}$$

La conclusión es

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{b^2-g^2}{ge} B_1 \\ C_2 = -\frac{b^2-g^2}{ge} B_2 \end{cases}$$

Igualando los dos pares de expresiones para C_1 y C_2 , queda claro que

$$\begin{cases} -\frac{b^2-g^2}{ge} B_1 = \frac{g(b^2-g^2)}{ac} B_1 \\ -\frac{b^2-g^2}{ge} B_2 = \frac{g(b^2-g^2)}{ac} B_2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$g = \pm i \sqrt{\frac{ac}{e}}$$

En otras palabras, esta solución particular es viable y tiene la forma

$$X(x) = \pm i \sqrt{\frac{c}{ae}} \left(B_1 J_0 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) + B_2 Y_0 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \right) \quad (\text{B.1})$$

$$Y(x) = B_1 J_1 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) + B_2 Y_1 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.2})$$

$$W(x) = \frac{b^2 + \frac{ac}{e}}{\mp i \sqrt{ace}} B_1 J_0 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) + \frac{b^2 + \frac{ac}{e}}{\mp i \sqrt{ace}} B_2 Y_0 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.3})$$

Si por alguna razón $x = 0$ se encuentra en el dominio del problema, $B_2 = 0$ debido a que la solución debe permanecer acotada. Si esto es cierto, la solución es

$$X(x) = \pm i \sqrt{\frac{c}{ae}} B_1 J_0 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.4})$$

$$Y(x) = B_1 J_1 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.5})$$

$$W(x) = \frac{b^2 + \frac{ac}{e}}{\mp i \sqrt{ace}} B_1 J_0 \left(\pm i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.6})$$

Tomando únicamente el signo superior, la solución se simplifica a

$$X(x) = B_1 i \sqrt{\frac{c}{ae}} J_0 \left(i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.7})$$

$$Y(x) = B_1 J_1 \left(i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.8})$$

$$W(x) = B_1 \frac{i \left(b^2 + \frac{ac}{e} \right)}{\sqrt{ace}} J_0 \left(i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.9})$$

Para terminar, se realiza el cambio de variable

$$K = B_1 \frac{i \left(b^2 + \frac{ac}{e} \right)}{\sqrt{ace}}$$

debido a que K representa la amplitud de $W(x)$ y es la magnitud más relevante en el problema físico. Como resultado, la solución particular está dada por

$$X(x) = \frac{c}{b^2 + \frac{ac}{e}} K J_0 \left(i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.10})$$

$$Y(x) = \frac{-i \sqrt{ace}}{b^2 + \frac{ac}{e}} K J_1 \left(i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.11})$$

$$W(x) = K J_0 \left(i \sqrt{\frac{ac}{e}} x \right) \quad (\text{B.12})$$

Apéndice C

Consistencia de constantes asociadas a expansiones en series de funciones propias

En el presente apéndice se explican las relaciones que existen entre las diferentes constantes asociadas a las expansiones de los campos v_z^{I*} , v_r^{I*} , u_z^{II*} y u_r^{II*} . Esto es importante para que los campos sean consistentes entre sí, para que satisfagan la ley de conservación de masa (tanto en el fluido como en el sólido) y para que las condiciones de acoplamiento estén bien definidas. De otra manera, la búsqueda de un modelo matemático viable rápidamente se topa con dificultades[42]. Partiendo de la Subsección 2.3.6, las condiciones de acoplamiento se expresan de la manera

$$R_{nm}^{I*} \Big|_{r^*=1} Z_m^{I*} T_n^{I*} = a_z \text{Sh}_L R_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} Z_m^{II*} \frac{dT_n^{II*}}{dt^*} \quad (\text{C.1})$$

$$\left(\mathcal{R}_{nm}^{I*} \Big|_{r^*=1} + \widetilde{\mathcal{R}}_{nm}^{I*} \Big|_{r^*=1} \right) \mathcal{Z}_m^{I*} \mathcal{T}_n^{I*} = \varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} a_r \text{Sh}_L \mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} \mathcal{Z}_m^{II*} \frac{d\mathcal{T}_n^{II*}}{dt^*} \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II}}{\text{Re}_L} \left(\left(\frac{dR_{nm}^{I*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \frac{d\widetilde{R}_{nm}^{I*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) Z_m^{I*} T_n^{I*} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} \left(\mathcal{R}_{nm}^{I*} \Big|_{r^*=1} + \widetilde{\mathcal{R}_{nm}^{I*}} \Big|_{r^*=1} \right) \frac{dZ_m^{I*}}{dz^*} \mathcal{T}_n^{I*} \Big) \\
 & = a_z \frac{dR_{nm}^{II*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} Z_m^{II*} T_n^{II*} + \varepsilon^2 a_r \mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*} T_n^{II*} \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II} \left(\frac{2}{\text{Re}_L} \frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} \left(\frac{d\mathcal{R}_{nm}^{I*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \frac{d\widetilde{\mathcal{R}_{nm}^{I*}}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) \Big|_{r^*=1} Z_m^{I*} \mathcal{T}_n^{I*} - G_{nm}^{I*} \Big|_{r^*=1} H_m^{I*} F_n^{I*} \right) \\
 & = \text{Ma}_\beta^2 \left(a_r \left(\frac{d\mathcal{R}_{nm}^{II*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} \right) Z_m^{II*} \mathcal{T}_n^{II*} + a_z R_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*} T_n^{II*} \right) \\
 & \quad - 2\text{Ma}_\alpha^2 \left(a_r \mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} Z_m^{II*} \mathcal{T}_n^{II*} + a_z R_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*} T_n^{II*} \right) \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

y las dos condiciones de frontera para la pared externa del conducto son

$$a_z \frac{dR_{nm}^{II*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon} Z_m^{II*} T_n^{II*} + \varepsilon^2 a_r \mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*} T_n^{II*} = 0 \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Ma}_\beta^2 \left(a_r \left(\frac{d\mathcal{R}_{nm}^{II*}}{dr^*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon} + \frac{\mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \right) Z_m^{II*} \mathcal{T}_n^{II*} + a_z R_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*} T_n^{II*} \right) \\
 & \quad - 2\text{Ma}_\alpha^2 \left(a_r \frac{\mathcal{R}_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} Z_m^{II*} \mathcal{T}_n^{II*} + a_z R_{nm}^{II*} \Big|_{r^*=1+\varepsilon} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*} T_n^{II*} \right) = 0 \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

para cada armónico. Como en cualquier condición de frontera, es necesario que las Ecs. (C.1)-(C) queden exclusivamente en términos de las funciones radiales. Entonces, a partir de (C.1) y (C.2) deducimos que

$$Z_m^{I*} \sim Z_m^{II*}$$

$$\mathcal{Z}_m^{I*} \sim \mathcal{Z}_m^{II*}$$

Es decir,

$$\mathcal{B}_m^{(5)*} \sim \mathcal{C}_m^{(4)*} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{B}_m^{(10)*} \sim \mathcal{C}_m^{(10)*} \quad (\text{C.8})$$

en el caso de *ondas de presión emitidas*, o bien,

$$\mathcal{B}_m^{(4)*} \sim \mathcal{C}_m^{(3)*} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{B}_m^{(9)*} \sim \mathcal{C}_m^{(9)*} \quad (\text{C.10})$$

en el caso de *ondas de presión reflejadas*. En cualquiera de los dos casos mencionados también se concluye que

$$T_n^{\text{I}*} \sim \frac{dT_n^{\text{II}*}}{dt^*}$$

$$\mathcal{T}_n^{\text{I}*} \sim \frac{d\mathcal{T}_n^{\text{II}*}}{dt^*}$$

Es decir,

$$\mathcal{B}_n^{(1)*} \sim i \frac{\gamma_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \mathcal{C}_n^{(1)*} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathcal{B}_n^{(6)*} \sim i \frac{\xi_n^{\text{II}*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \mathcal{C}_n^{(7)*} \quad (\text{C.12})$$

Las Ecs. (C.7)-(C.12) caracterizan la relación de amplitudes que hay entre los campos del fluido y los del sólido. No existe una ley fundamental auxiliar con la que se puedan conocer las igualdades exactas. En el caso de la Ec. (C), se deducen las nuevas relaciones

$$Z_m^{I*} \sim \frac{dZ_m^{I*}}{dz^*}$$

$$Z_m^{II*} \sim \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*}$$

No obstante, con ayuda de las Ecs. (2.51) y (2.67), es evidente que

$$Z_m^{I*} = \frac{k_m^{(5)*}}{k_m^{(2)*}} \frac{dZ_m^{I*}}{dz^*}$$

$$Z_m^{II*} = -\frac{\lambda_{nm}^{(1)*}}{\lambda_n^{(2)*}} \frac{a_r}{a_z} \frac{\varepsilon^2 \text{Ma}_\alpha^2}{\delta_m^{II*2}} \frac{dZ_m^{II*}}{dz^*}$$

Es decir,

$$\mathcal{B}_m^{(5)*} = -i \frac{\kappa_m^{I*}}{\varepsilon} \frac{k_m^{(5)*}}{k_m^{(2)*}} \mathcal{B}_m^{(10)*} \quad (\text{C.13})$$

$$\mathcal{C}_m^{(4)*} = i \frac{\lambda_{nm}^{(1)*}}{\lambda_n^{(2)*}} \frac{a_r}{a_z} \frac{\varepsilon \text{Ma}_\alpha}{\delta_m^{II*}} \mathcal{C}_m^{(10)*} \quad (\text{C.14})$$

en el caso de *ondas de presión emitidas*, o bien,

$$\mathcal{B}_m^{(4)*} = i \frac{\kappa_m^{I*}}{\varepsilon} \frac{k_m^{(5)*}}{k_m^{(2)*}} \mathcal{B}_m^{(9)*} \quad (\text{C.15})$$

$$\mathcal{C}_m^{(3)*} = -i \frac{\lambda_{nm}^{(1)*}}{\lambda_n^{(2)*}} \frac{a_r}{a_z} \frac{\varepsilon \text{Ma}_\alpha}{\delta_m^{II*}} \mathcal{C}_m^{(9)*} \quad (\text{C.16})$$

en el caso de *ondas de presión reflejadas*. Para ambos casos, también se concluye que

$$T_n^{I*} \sim \mathcal{T}_n^{I*}$$

$$T_n^{\text{II}^*} \sim \mathcal{T}_n^{\text{II}^*}$$

Por otra parte, dado que las Ecs. (2.52) y (2.68) son

$$T_n^{\text{I}^*} = \frac{k_n^{(6)*}}{k_n^{(3)*}} \mathcal{T}_n^{\text{I}^*}$$

$$T_n^{\text{II}^*} = \lambda_n^{(2)*} \mathcal{T}_n^{\text{II}^*}$$

se pueden utilizar como relaciones de igualdad exactas. En otras palabras,

$$\mathcal{B}_n^{(1)*} = \frac{k_n^{(6)*}}{k_n^{(3)*}} \mathcal{B}_n^{(6)*} \quad (\text{C.17})$$

$$\mathcal{C}_n^{(1)*} = \lambda_n^{(2)*} \mathcal{C}_n^{(7)*} \quad (\text{C.18})$$

Finalmente, la Ec. (C) debe satisfacer los mismos requerimientos. En este caso, se deduce la última relación

$$\frac{dZ_m^{\text{II}^*}}{dz^*} = -\frac{\lambda_{nm}^{(1)*} a_r \varepsilon^2 \text{Ma}_\alpha^2}{\lambda_n^{(2)*} a_z \delta_m^{\text{II}^*2}} \frac{d^2 \mathcal{Z}_m^{\text{II}^*}}{dz^{*2}}$$

o, dicho de otra forma,

$$\frac{dZ_m^{\text{II}^*}}{dz^*} = \frac{\lambda_{nm}^{(1)*} a_r}{\lambda_n^{(2)*} a_z} \mathcal{Z}_m^{\text{II}^*} \quad (\text{C.19})$$

tanto para *ondas de presión emitidas* como para *ondas de presión reflejadas*. Entonces, a partir de (C.7)-(C.18), las condiciones de acoplamiento (C.1)-(C) se reescriben estrictamente de la forma

$$R_{nm}^{\text{I}^*} \Big|_{r^*=1} \sim a_z \text{Sh}_L R_{nm}^{\text{II}^*} \Big|_{r^*=1} \quad (\text{C.20})$$

$$\mathcal{R}_{nm}^I \Big|_{r^*=1} + \widetilde{\mathcal{R}}_{nm}^I \Big|_{r^*=1} \sim \varepsilon \frac{U_z^I}{U_r^I} a_r \text{Sh}_L \mathcal{R}_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} & i \frac{\gamma_n^{II*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \frac{\text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II}}{\text{Re}_L} \left(\frac{k_n^{(6)*}}{k_n^{(3)*}} \left(\frac{dR_{nm}^I}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \frac{d\widetilde{R}_{nm}^I}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \frac{U_z^I k_m^{(2)*}}{U_r^I k_m^{(5)*}} \left(\mathcal{R}_{nm}^I \Big|_{r^*=1} + \widetilde{\mathcal{R}}_{nm}^I \Big|_{r^*=1} \right) \right) \\ & \sim a_z \lambda_n^{(2)*} \left(\frac{dR_{nm}^{II}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - \frac{\delta_m^{II*2}}{\text{Ma}_\alpha^2 \lambda_{nm}^{(1)*}} \mathcal{R}_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} & i \frac{\gamma_n^{II*}}{\varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \varrho^{I,II} \left(\frac{2}{\text{Re}_L} \frac{U_r^I}{\varepsilon U_z^I} \left(\frac{d\mathcal{R}_{nm}^I}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{nm}^I}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \\ & \quad \left. - k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} G_{nm}^I \Big|_{r^*=1} \right) \sim \text{Ma}_\beta^2 a_r \left(\left(\frac{d\mathcal{R}_{nm}^{II}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + \mathcal{R}_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \lambda_{nm}^{(1)*} R_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1} \right) - 2 \text{Ma}_\alpha^2 a_r \left(\mathcal{R}_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1} + \lambda_{nm}^{(1)*} R_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Si se asume una igualdad exacta en las Ecs. (C.7)-(C.12), entonces las condiciones de acoplamiento (C.20)-(C) también se convertirán en igualdades exactas. En el caso de las Ecs. (C.5)-(C), permanecen como igualdades desde un principio. Ésto es

$$\frac{dR_{nm}^{II}}{dr^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} - \frac{\delta_m^{II*2}}{\text{Ma}_\alpha^2 \lambda_{nm}^{(1)*}} \frac{\mathcal{R}_{nm}^{II}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} = 0 \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned} & \text{Ma}_\beta^2 \left(\left(\frac{d\mathcal{R}_{nm}^{II}}{dr^*} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + \frac{\mathcal{R}_{nm}^{II}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) + \lambda_{nm}^{(1)*} R_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) \\ & - 2 \text{Ma}_\alpha^2 \left(\frac{\mathcal{R}_{nm}^{II}}{1+\epsilon} \Big|_{r^*=1+\epsilon} + \lambda_{nm}^{(1)*} R_{nm}^{II} \Big|_{r^*=1+\epsilon} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Apéndice D

Lista de constantes de sistema algebraico asociado a las condiciones de acoplamiento

En este apéndice se listan las constantes, desde el nivel más básico hasta el más complejo, que se necesitan para definir los coeficientes de la solución. No es la única simplificación posible, pero es una que busca ser consistente con las reglas de asociatividad que se siguen. En un primer nivel se tienen algunos de los parámetros adimensionales del sistema. Es decir,

$$\varepsilon = \frac{R}{L} \quad (\text{D.1}) \quad \text{Ma}_\alpha = \frac{U_z^I}{\alpha} \quad (\text{D.4}) \quad \varrho^{I,II} = \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \quad (\text{D.7})$$

$$\epsilon = \frac{h}{R} \quad (\text{D.2}) \quad \text{Ma}_\beta = \frac{U_z^I}{\beta} \quad (\text{D.5}) \quad \text{Re}_L = \frac{\rho^I U_z^I L}{\mu^I} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Sh}_L = \frac{fL}{U_z^I} \quad (\text{D.3}) \quad U_{\text{rel}}^I = \frac{U_z^I}{U_r^I} \quad (\text{D.6}) \quad \text{Eu}_{nm} = \frac{\Delta p_{nm}}{\rho^I U_z^I{}^2} \quad (\text{D.9})$$

En un segundo nivel se tienen los valores propios del sistema, así como otras constantes que al lector le serán familiares. Esto es

$$k_m^{(2)*} = \frac{2}{\mathcal{B}_m^{(4),(5)*}} \int_0^{\frac{2\pi}{L}} \frac{dH^{I*}(z^*)}{dz^*} \exp \left[\pm i2\pi m z^* \right] dz^* \quad (\text{D.10})$$

$$k_m^{(5)*} = \frac{2}{\mathcal{B}_m^{(9),(10)*}} \int_0^{\frac{2\pi}{L}} H^{I*}(z^*) \exp \left[\pm i2\pi m z^* \right] dz^* \quad (\text{D.11})$$

$$k_n^{(3)*} = \frac{2}{\mathcal{B}_n^{(1)*}} \int_0^1 F^{I*}(t^*) \exp \left[i2\pi n t^* \right] dt^* \quad (\text{D.12})$$

$$k_n^{(6)*} = \frac{2}{\mathcal{B}_n^{(6)*}} \int_0^1 F^{I*}(t^*) \exp \left[i2\pi n t^* \right] dt^* \quad (\text{D.13})$$

$$\gamma_n^{I*} = \sqrt{i^3 2\pi n \varepsilon^2 \text{Sh}_L \text{Re}_L} \quad (\text{D.14})$$

$$\gamma_n^{\text{II}*} = 2\pi n \varepsilon \text{Sh}_L \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta \quad (\text{D.16})$$

$$\delta_m^{I*} = 2\pi m \varepsilon \quad (\text{D.15})$$

$$\delta_m^{\text{II}*} = 2\pi m \varepsilon \text{Ma}_\alpha \quad (\text{D.17})$$

$$a_z = a_z \left(; \varepsilon, \epsilon, \text{Sh}_L, \text{Ma}_\alpha, \text{Ma}_\beta, U_{\text{rel}}^{\text{I}}, \varrho^{\text{I,II}}, \text{Re}_L, \text{Eu}_{nm} \right) \quad (\text{D.18})$$

$$a_r = a_r \left(; \varepsilon, \epsilon, \text{Sh}_L, \text{Ma}_\alpha, \text{Ma}_\beta, U_{\text{rel}}^{\text{I}}, \varrho^{\text{I,II}}, \text{Re}_L, \text{Eu}_{nm} \right) \quad (\text{D.19})$$

Nótese que se hace hincapié en la forma funcional desconocida de a_z y a_r en las Ecs. (D.18)-(D.19). En un tercer nivel solo se tienen los dos valores propios del sistema y otro par de constantes familiares. En otras palabras,

$$\eta_{n,1m}^{\text{I}} = \sqrt{\gamma_n^{I*2} - \delta_m^{I*2}} \quad (\text{D.20})$$

$$\lambda_{n,m}^{(1)*} = \lambda_{n,m}^{(1)*} \left(n, m; a_r, a_z \right) \quad (\text{D.22})$$

$$\eta_{n,m}^{\text{II}} = \sqrt{\gamma_n^{\text{II}*2} - \delta_m^{\text{II}*2}} \quad (\text{D.21})$$

$$\lambda_n^{(2)*} = \lambda_n^{(2)*} \left(n, m; a_r, a_z \right) \quad (\text{D.23})$$

Nuevamente, se hace énfasis en la forma funcional esperada para $\lambda_{n,m}^{(1)*}$ y $\lambda_n^{(2)*}$. En un cuarto nivel se tienen funciones de Bessel evaluados en radios específicos, tal y como

$${}^1J_0^{I*} = J_0(\eta_{nm}^{I*}) \quad (D.24)$$

$${}^1Y_1^{II*} = Y_1\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}\right) \quad (D.31)$$

$${}^1\mathcal{J}_0^{I*} = J_0(i\delta_m^{I*}) \quad (D.25)$$

$${}^{1+\epsilon}J_0^{II*} = J_0\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}(1+\epsilon)\right) \quad (D.32)$$

$${}^1J_1^{I*} = J_1(\eta_{nm}^{I*}) \quad (D.26)$$

$${}^1\mathcal{J}_1^{I*} = J_1(i\delta_m^{I*}) \quad (D.27)$$

$${}^{1+\epsilon}Y_0^{II*} = Y_0\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}(1+\epsilon)\right) \quad (D.33)$$

$${}^1J_0^{II*} = J_0\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}\right) \quad (D.28)$$

$${}^{1+\epsilon}J_1^{II*} = J_1\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}(1+\epsilon)\right) \quad (D.34)$$

$${}^1Y_0^{II*} = Y_0\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}\right) \quad (D.29)$$

$${}^1J_1^{II*} = J_1\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}\right) \quad (D.30)$$

$${}^{1+\epsilon}Y_1^{II*} = Y_1\left(\frac{\eta_{nm}^{II*}}{\text{Ma}_\alpha}(1+\epsilon)\right) \quad (D.35)$$

En un quinto nivel de complejidad aparecen las primeras constantes compuestas de este problema, denominadas con la letra a . Estas son

$$a_{-2} = \eta_{nm}^I {}^1J_0^{I*} - {}^1J_1^{I*} \quad (D.36)$$

$$a_{-1} = 1 \mp U_{\text{rel}}^I{}^2 \quad (D.37)$$

$$a_0 = {}^1\mathcal{J}_0^{I*} \pm \frac{2\delta_m^I \varepsilon^2 U_{\text{rel}}^I{}^2 (\delta_m^I {}^1\mathcal{J}_0^{I*} + i {}^1\mathcal{J}_1^{I*})}{\delta_m^I{}^2 + \eta_{nm}^{I*}{}^2} \quad (D.38)$$

$$a_1 = {}^1J_1^{II*} {}^{1+\epsilon}Y_1^{II*} - {}^{1+\epsilon}J_1^{II*} {}^1Y_1^{II*} \quad (D.39)$$

$$a_2 = \eta_{nm}^{II}{}^2(1+\epsilon) - \delta_m^{II}{}^2 \lambda_{nm}^{(1)*} \quad (D.40)$$

$$a_3 = 1 + \epsilon - \lambda_{nm}^{(1)*} \quad (D.41) \quad a_4 = {}^{1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} Y_0^{\text{II}*} - \lambda_{nm}^{(1)*} {}^{1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*} Y_1^{\text{II}*} \quad (D.42)$$

$$a_5 = \eta_{nm}^{\text{II}^2} (1 + \epsilon) + \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \quad (D.43)$$

$$a_6 = -i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varrho^{\text{I,II}} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} + \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 Y_0^{\text{II}*} + \gamma_n^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \varrho^{\text{I,II}^2} \text{Ma}_\beta^2 Y_0^{\text{II}*} \quad (D.44)$$

$$a_7 = \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 + \gamma_n^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \varrho^{\text{I,II}^2} \text{Ma}_\beta^2 \quad (D.45)$$

$$a_8 = \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha - i\gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta \quad (D.46)$$

$$a_9 = \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} + i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}^{1+\epsilon}} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta \quad (D.47)$$

$$a_{10} = \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L^1 Y_0^{\text{II}*} - i\gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (D.48)$$

$$a_{11} = \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} {}^{1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*} Y_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} {}^{1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} Y_0^{\text{II}*} \quad (D.49)$$

$$a_{12} = \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varepsilon \text{Re}_L^1 Y_0^{\text{II}*} + i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} (1 + \epsilon) \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (D.50)$$

$$a_{13} = \eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon) {}^{1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - {}^{1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (D.51)$$

$$a_{14} = -i\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^2 Y_0^{\text{II}*} + 2i\varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 Y_1^{\text{II}*} + 2\gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (D.52)$$

$$a_{15} = \gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta + i\varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha \quad (\text{D.53})$$

$$a_{16} = \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^{21} \text{Y}_0^{\text{II}*} - 2\varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 \text{Y}_1^{\text{II}*} + 2i\gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta \text{Y}_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.54})$$

$$a_{17} = \eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \varepsilon)^{1+\varepsilon} \text{Y}_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - 2^{1+\varepsilon} \text{Y}_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.55})$$

$$a_{18} = 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} \text{Y}_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} \text{Y}_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 \left(\eta_{nm}^{\text{II}^2} - \delta_m^{\text{II}^2} \right) - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{Y}_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.56})$$

$$a_{19} = \text{Ma}_\beta^2 \left(\delta_m^{\text{II}^2} - \eta_{nm}^{\text{II}^2} \right) - 2\delta_m^{\text{II}^2} \text{Ma}_\alpha^2 \quad (\text{D.57})$$

$$a_{20} = \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} \text{Y}_0^{\text{II}*} \text{Y}_1^{\text{II}*} - \text{Y}_1^{\text{II}*} \text{Y}_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.58})$$

$$a_{21} = \delta_m^{\text{II}^2} \varepsilon \text{Re}_L \text{Y}_0^{\text{II}*} - i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta \text{Y}_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.59})$$

$$a_{22} = -4\delta_m^{\text{II}^4} \lambda_{nm}^{(1)*} \varepsilon \text{Re}_L \text{Y}_0^{\text{II}*} + 4i\gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta \text{Y}_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.60})$$

$$a_{23} = 2\delta_m^{\text{II}^2} \text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \gamma_n^{\text{II}^2} \quad (\text{D.61})$$

$$a_{24} = \eta_{nm}^{\text{II}} \text{Ma}_\beta^{21} \text{Y}_0^{\text{II}*} - 2\text{Ma}_\alpha^3 \text{Y}_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.62})$$

$$a_{25} = 4\eta_{nm}^{\text{II}} \text{Ma}_\alpha^6 \text{Y}_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} \text{Y}_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.63})$$

$$a_{26} = 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} \text{Y}_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} \text{Y}_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{Y}_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.64})$$

$$a_{27} = 2\delta_m^{\text{II}^2} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Y}_0^{\text{II}^*} - \text{Ma}_\beta^2 \text{Y}_0^{\text{II}^*} \gamma_n^{\text{II}^2} + 2\eta_{nm}^{\text{II}} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Y}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.65})$$

$$a_{28} = 2\delta_m^{\text{II}^2} \text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \gamma_n^{\text{II}^2} \quad (\text{D.66})$$

$$a_{29} = 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \text{Ma}_\alpha^2 - \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \text{Ma}_\beta^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{Y}_1^{\text{II}^*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.67})$$

$$a_{30} = -2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varepsilon \text{Re}_L \text{Y}_0^{\text{II}^*} + 2i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} (1+\epsilon) \text{Ma}_\beta \text{Y}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.68})$$

$$a_{31} = \eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{Y}_1^{\text{II}^*} \text{Y}_0^{\text{II}^*} - \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \text{Y}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.69})$$

$$a_{32} = \text{J}_1^{\text{II}^*1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} - \text{J}_0^{\text{II}^*1+\epsilon} \text{Y}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.70})$$

$$a_{33} = \gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta \text{Y}_1^{\text{II}^*} + 2i\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L \text{Y}_0^{\text{II}^*} \quad (\text{D.71})$$

$$a_{34} = 2\delta_m^{\text{II}^2} (1+\epsilon)^{1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \text{Ma}_\alpha^2 - (1+\epsilon)^{1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \text{Ma}_\beta^2 \left(\delta_m^{\text{II}^2} - \eta_{nm}^{\text{II}^2} \right) - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{Y}_1^{\text{II}^*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.72})$$

$$a_{35} = (1+\epsilon)^{1+\epsilon} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \text{Y}_1^{\text{II}^*} + \text{Y}_1^{\text{II}^*} \text{Y}_0^{\text{II}^*} \quad (\text{D.73})$$

$$a_{36} = \eta_{nm}^{\text{II}^2} \text{J}_0^{\text{II}^*} \text{Ma}_\beta^2 - \text{J}_1^{\text{II}^*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.74})$$

En un sexto nivel aparece las constantes denominadas con la letra *b*. Es decir,

$$b_1 = a_2 \text{Ma}_\beta^2 + 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \text{Ma}_\alpha^2 \quad (\text{D.75})$$

$$b_2 = a_2^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 + 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} {}^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}} {}^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.76})$$

$$b_3 = -ia_2 \gamma_n^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varrho^{\text{I,II}} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\beta {}^1 Y_1^{\text{II}*} + 2a_3 \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 {}^1 Y_0^{\text{II}*} \\ + \gamma_n^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}^2} (1 + \epsilon) \text{Ma}_\beta^2 {}^1 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.77})$$

$$b_4 = a_2^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} {}^1 Y_1^{\text{II}*} + {}^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} {}^1 Y_0^{\text{II}*} \gamma_n^{\text{II}^2} \quad (\text{D.78})$$

$$b_5 = a_4 \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 - 2i \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varrho^{\text{I,II}} \varepsilon \text{Re}_L {}^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta {}^1 Y_1^{\text{II}*} \\ + \gamma_n^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \varrho^{\text{I,II}^2} {}^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 {}^1 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.79})$$

$$b_6 = a_3 \eta_{nm}^{\text{II}^2} + 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \quad (\text{D.80})$$

$$b_7 = 2a_3 \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 + \gamma_n^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \varrho^{\text{I,II}^2} (1 + \epsilon) \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.81})$$

$$b_8 = 2a_6 \text{Ma}_\alpha^2 - \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\beta^2 {}^1 Y_0^{\text{II}*} \gamma_n^{\text{II}^2} + 2\eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\alpha^3 {}^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.82})$$

$$b_9 = 2a_7 \text{Ma}_\alpha^2 - \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\beta^2 \gamma_n^{\text{II}^2} \quad (\text{D.83})$$

$$b_{10} = a_5 \text{Ma}_\beta^2 - 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \text{Ma}_\alpha^2 \quad (\text{D.84})$$

$$b_{11} = a_2 \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L {}^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^4 {}^1 Y_0^{\text{II}*} + 2a_{11} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^2 + 2a_{10} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} {}^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 \\ - 4a_9 \text{Ma}_\alpha^5 {}^1 Y_1^{\text{II}*} + 4\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L {}^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^6 {}^1 Y_1^{\text{II}*} \\ + 4i \gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,III}+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 \text{Ma}_\beta^2 {}^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.85})$$

$$b_{12} = a_2 \varepsilon \operatorname{Re}_L \operatorname{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} + 2a_{12} \operatorname{Ma}_\alpha^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \varepsilon) \varepsilon \operatorname{Re}_L \operatorname{Ma}_\alpha^{31} Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.86})$$

$$b_{13} = a_5^{1+\varepsilon} Y_0^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\beta^2 - 2\delta_m^{\text{II}2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} Y_0^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\alpha^2 + 2\eta_{nm}^{\text{II}1+\varepsilon} Y_1^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.87})$$

$$b_{14} = 2^{1+\varepsilon} Y_1^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\alpha^3 - a_3 \eta_{nm}^{\text{II}1+\varepsilon} Y_0^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.88})$$

$$b_{15} = a_3 \eta_{nm}^{\text{II}1+\varepsilon} J_0^{\text{II}*1+\varepsilon} Y_1^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\beta^2 + a_{18}^{1+\varepsilon} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.89})$$

$$b_{16} = 2a_3 \delta_m^{\text{II}2} \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \operatorname{Re}_L Y_0^{\text{II}*} - ia_2 \gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \operatorname{Ma}_\beta Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.90})$$

$$b_{17} = 2a_{20} \delta_m^{\text{II}2} \varepsilon \operatorname{Re}_L + 4i \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}1+\varepsilon} Y_1^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\beta Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.91})$$

$$b_{18} = 2a_{21} \operatorname{Ma}_\alpha^2 - \varepsilon \operatorname{Re}_L \operatorname{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} \gamma_n^{\text{II}2} + 2\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \operatorname{Re}_L \operatorname{Ma}_\alpha^{31} Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.92})$$

$$\begin{aligned} b_{19} = & a_2 \eta_{nm}^{\text{II}1+\varepsilon} Y_0^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} + 2a_{11} \operatorname{Ma}_\alpha^3 \operatorname{Ma}_\beta^2 + 2\delta_m^{\text{II}2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} Y_0^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\alpha^2 \operatorname{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} \\ & - 4\delta_m^{\text{II}2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\varepsilon} Y_0^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\alpha^5 Y_1^{\text{II}*} + 4\eta_{nm}^{\text{II}1+\varepsilon} Y_1^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\alpha^6 Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.93})$$

$$b_{20} = a_2 \operatorname{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} + 2\delta_m^{\text{II}2} \lambda_{nm}^{(1)*} \operatorname{Ma}_\alpha^{21} Y_0^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \varepsilon) \operatorname{Ma}_\alpha^{31} Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.94})$$

$$b_{21} = a_{26}^{1+\varepsilon} J_1^{\text{II}*} + \eta_{nm}^{\text{II}2} (1 + \varepsilon)^{1+\varepsilon} J_0^{\text{II}*1+\varepsilon} Y_1^{\text{II}*} \operatorname{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.95})$$

$$b_{22} = \eta_{nm}^{\text{I}} k_n^{(3)1} J_1^{\text{I}*1} \mathcal{J}_0^{\text{I}*} - ia_{-1} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)1} J_0^{\text{I}*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \quad (\text{D.96})$$

$$b_{26} = -a_2^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + 2\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.97})$$

$$b_{27} = a_5 \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^{2^1} Y_0^{\text{II}*} + a_{30} \text{Ma}_\alpha^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon) \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^{3^1} Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.98})$$

$$b_{28} = a_0 k_n^{(3)} \gamma_n^{1^2} J_1^{\text{I}*} \pm 2ia_{-2} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)^1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \quad (\text{D.99})$$

$$\begin{aligned} b_{29} = & 2a_{31} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^2 + 2ia_{33} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 + 4a_9 \text{Ma}_\alpha^{5^1} Y_1^{\text{II}*} \\ & + 2\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*} \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{4^1} Y_0^{\text{II}*} - 4\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^{6^1} Y_1^{\text{II}*} \\ & - 4i\gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,II}^1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 \text{Ma}_\beta^{1^1} Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.100})$$

$$b_{30} = a_5^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.101})$$

$$b_{31} = a_{15} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - i\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.102})$$

$$\begin{aligned} b_{32} = & \pm a_{24} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)} \varepsilon^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Re}_L U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} + a_{-1} a_{16} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)^1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \\ & + 2\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}^2} k_n^{(3)} \varrho^{\text{I,II}^1} \mathcal{J}_0^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{1^1} Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.103})$$

$$b_{33} = a_{35} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.104})$$

$$b_{34} = a_{34}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - a_3 \delta_m^{\text{II}^2} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \quad (\text{D.105})$$

$$b_{35} = a_{17} \eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}} J_1^{\text{II}*} + \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \quad (\text{D.106})$$

$$b_{36} = -a_{35} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 + \eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon) \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{2^1} Y_0^{\text{II}*}$$

$$+i\gamma_n^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} (1+\epsilon)^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.107})$$

$$b_{37} = a_5 \text{Ma}_\beta^{2^1} Y_0^{\text{II}*} - 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \text{Ma}_\alpha^{2^1} Y_0^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}} (1+\epsilon) \text{Ma}_\alpha^{3^1} Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.108})$$

$$b_{38} = a_{35} \text{Ma}_\alpha^3 - \eta_{nm}^{\text{II}} (1+\epsilon)^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{2^1} Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.109})$$

$$b_{39} = 2a_3 \delta_m^{\text{II}^2 1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - a_3 \delta_m^{\text{II}^2 1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 + 2\eta_{nm}^{\text{II}} {}^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.110})$$

$$b_{40} = \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^2 - a_8 {}^1 J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \quad (\text{D.111})$$

En un séptimo nivel aparecen las constantes denominadas con la letra c . En otras palabras,

$$c_1 = b_1 {}^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}} {}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.112})$$

$$\begin{aligned} c_2 = & -a_3 \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^{2^1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{4^1} Y_0^{\text{II}*} + b_4 \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^2 \\ & + b_3 {}^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 - 2b_5 \text{Ma}_\alpha^5 - 2i\gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \lambda_n^{(2)*} \varrho^{\text{I,II}} \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \\ & - 4\eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^{2^1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^{6^1} Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.113})$$

$$\begin{aligned} c_3 = & ia_2 \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varrho^{\text{I,II}} \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} + b_6 \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^{2^1} Y_0^{\text{II}*} \\ & + \gamma_n^{\text{II}^2} \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,II}^2} \text{Ma}_\beta^{2^1} Y_0^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.114})$$

$$c_4 = b_7 \text{Ma}_\alpha^2 - a_3 \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.115})$$

$$c_5 = b_6 \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 + \gamma_n^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,II}^2} \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.116})$$

$$c_6 = b_1^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} Y_1^{\text{II}*} - 2a_{13} \eta_{nm}^{\text{II} \ 1} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.117})$$

$$c_7 = b_{12} \eta_{nm}^{\text{II} \ 1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 + b_{11}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.118})$$

$$c_8 = b_{13}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II} \ 2} (1+\epsilon)^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.119})$$

$$c_9 = 2a_{15} a_{17} \eta_{nm}^{\text{II} \ 1} J_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + i a_{16} b_1^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.120})$$

$$c_{10} = b_1^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} Y_1^{\text{II}*} + b_{14} \eta_{nm}^{\text{II} \ 1} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.121})$$

$$\begin{aligned} c_{11} = & -a_3 \delta_m^{\text{II}2} \eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} + b_4 \varepsilon \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^2 + b_{16}^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 + b_{17} \text{Ma}_\alpha^5 \\ & - 4\eta_{nm}^{\text{II}} \varepsilon \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^6 Y_1^{\text{II}*} - 2i \gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}2} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,II}1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.122})$$

$$c_{12} = b_6 \delta_m^{\text{II}2} \varepsilon \text{Re}_L^1 Y_0^{\text{II}*} + i a_2 \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \varrho^{\text{I,II}} \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.123})$$

$$c_{13} = b_2^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} - b_{15}^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.124})$$

$$\begin{aligned} c_{14} = & a_5^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^4 \left(\delta_m^{\text{II}2} - \eta_{nm}^{\text{II} \ 2} \right) - 2b_6 \delta_m^{\text{II}2+1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 + 4\delta_m^{\text{II}4} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 \\ & + 2\eta_{nm}^{\text{II} \ 1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^2 \gamma_n^{\text{II}2} - 4\delta_m^{\text{II}2} \eta_{nm}^{\text{II} \ 1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^5 \end{aligned} \quad (\text{D.125})$$

$$c_{15} = b_1^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} Y_1^{\text{II}*} - a_{17} \eta_{nm}^{\text{II} \ 1} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.126})$$

$$c_{16} = a_{24}b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*} + 2a_{17}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.127})$$

$$c_{17} = b_2^1J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} - b_{21}^1Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.128})$$

$$c_{18} = b_{20}\eta_{nm}^{\text{II}}J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\beta^2 + 2b_2^1J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^3 + b_{19}^{1+\epsilon}J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.129})$$

$$\begin{aligned} c_{19} = & 2a_3\delta_m^{\text{II}2}\eta_{nm}^{\text{II}}J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta^{21}Y_0^{\text{II}*} - a_3\delta_m^{\text{II}2}\eta_{nm}^{\text{II}}J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*}\text{Ma}_\beta^{41}Y_0^{\text{II}*} + 2a_{20}\delta_m^{\text{II}2}\text{Ma}_\alpha^5 \\ & + b_4\text{Ma}_\alpha^3\text{Ma}_\beta^2 - 4\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^6Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.130})$$

$$\begin{aligned} c_{20} = & a_5\text{Ma}_\beta^{41}Y_0^{\text{II}*} \left(\delta_m^{\text{II}2} - \eta_{nm}^{\text{II}2} \right) + 2a_2\eta_{nm}^{\text{II}}\text{Ma}_\alpha^3\text{Ma}_\beta^{21}Y_1^{\text{II}*} - 2b_6\delta_m^{\text{II}2}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta^{21}Y_0^{\text{II}*} \\ & + 4\delta_m^{\text{II}4}\lambda_{nm}^{(1)*}\text{Ma}_\alpha^{41}Y_0^{\text{II}*} + 4\delta_m^{\text{II}2}\eta_{nm}^{\text{II}}\lambda_{nm}^{(1)*}\text{Ma}_\alpha^5Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.131})$$

$$\begin{aligned} c_{21} = & -a_5^{1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*}\text{Ma}_\beta^4 \left(\delta_m^{\text{II}2} - \eta_{nm}^{\text{II}2} \right) + 2b_6\delta_m^{\text{II}21+\epsilon}Y_0^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta^2 - 4\delta_m^{\text{II}4}\lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon}Y_0^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^4 \\ & - 2\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^3\text{Ma}_\beta^2\gamma_n^{\text{II}2} + 4\delta_m^{\text{II}2}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^5 \end{aligned} \quad (\text{D.132})$$

$$c_{22} = a_{17}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*} - b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1}Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.133})$$

$$c_{23} = b_{21}^1Y_1^{\text{II}*} - b_2^1J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.134})$$

$$c_{24} = a_{24}b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*} + 2a_{17}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.135})$$

$$c_{26} = b_2^1J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} - b_{21}^1Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.136})$$

$$\begin{aligned}
 c_{27} = & -b_2 \eta_{nm}^{\text{II}} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 + 2b_2^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 + 4\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} \\
 & - 2\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} - 2\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} \\
 & + \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} + \eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} \\
 & + \eta_{nm}^{\text{II}^3} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} + 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} \\
 & - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} \\
 & - 4\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^5 Y_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} \\
 & + 4\eta_{nm}^{\text{II}^3} \epsilon^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^6 Y_1^{\text{II}*} \tag{D.137}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{28} = & 2a_8 b_{26}^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + b_2 \eta_{nm}^{\text{II}} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 \\
 - 4\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} & + 2\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} \\
 + 2\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} & - \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} \\
 - \eta_{nm}^{\text{II}^3} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} & - \eta_{nm}^{\text{II}^3} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} \\
 - 2\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} & + 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} \\
 + 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} & + 4\delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^5 Y_1^{\text{II}*} \\
 + 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_0^{\text{II}*} & - 4\eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^6 Y_1^{\text{II}*} \\
 - 4i\gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} & + 2i\gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{31} Y_1^{\text{II}*} \\
 - 2i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{31} Y_1^{\text{II}*} & - 2i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^{31} Y_1^{\text{II}*} \\
 + 4i\gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}^2} \epsilon^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^5 \text{Ma}_\beta^1 Y_1^{\text{II}*} & \tag{D.138}
 \end{aligned}$$

$$c_{29} = b_2 \eta_{nm}^{\text{II}} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - b_{27} \eta_{nm}^{\text{II}^3} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 + b_{29} \epsilon^1 J_1^{\text{II}*} \tag{D.139}$$

$$c_{30} = b_{21}^1 Y_1^{\text{II}*} - b_2^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \tag{D.140}$$

$$c_{31} = a_{17} \eta_{nm}^{\text{II}^3} \epsilon^1 J_1^{\text{II}*} - b_1 \epsilon^1 J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \tag{D.141}$$

$$c_{32} = a_{16}b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*} - b_{30}\eta_{nm}^{\text{II}}\varepsilon^1J_0^{\text{II}*}\text{Re}_L\text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.142})$$

$$c_{33} = b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1}Y_1^{\text{II}*} + b_{14}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.143})$$

$$c_{34} = a_{24}b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*} + 2a_{17}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^3 - b_{30}\eta_{nm}^{\text{II}}J_0^{\text{II}*}\text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.144})$$

$$c_{35} = a_{-1}b_{33} \pm a_{36}\varepsilon\text{Re}_L U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \quad (\text{D.145})$$

$$c_{36} = b_{34}J_1^{\text{II}*} - b_2J_1^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.146})$$

$$c_{37} = b_{35}Y_0^{\text{II}*} - b_2J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.147})$$

$$c_{38} = b_2\varepsilon^1J_0^{\text{II}*}\text{Re}_L^{1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} + b_{27}^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} - 2b_{36}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.148})$$

$$c_{39} = b_{37}^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} + 2b_{38}\eta_{nm}^{\text{II}}J_1^{\text{II}*} + b_2J_0^{\text{II}*1+\epsilon}Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.149})$$

$$c_{40} = b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1}Y_1^{\text{II}*} + b_{39}J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.150})$$

$$c_{41} = a_{26}J_0^{\text{II}*} - b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1}Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.151})$$

$$c_{42} = b_1^{1+\epsilon}J_0^{\text{II}*1}Y_0^{\text{II}*} + b_{13}J_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.152})$$

$$c_{43} = a_{-1}b_{40} \pm a_{36}\varepsilon\text{Re}_L U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \quad (\text{D.153})$$

En un octavo nivel de complejidad aparecen las constantes denominadas con la letra d . Estas son

$$d_1 = b_2^1 J_1^{\text{II}*} - c_1^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.154})$$

$$\begin{aligned} d_2 = & -a_5 \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\beta^{41} Y_0^{\text{II}*} \left(\delta_m^{\text{II}^2} - \eta_{nm}^{\text{II}^2} \right) - 2a_2 \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^{21} Y_1^{\text{II}*} \\ & - 4a_6 \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*} \text{Ma}_\alpha^4 + 2c_3 \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 - 4\delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^2 \text{Ma}_\alpha^5 Y_1^{\text{II}*} \end{aligned} \quad (\text{D.155})$$

$$\begin{aligned} d_3 = & -a_5 \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^{21+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^4 \left(\delta_m^{\text{II}^2} - \eta_{nm}^{\text{II}^2} \right) - 4a_7 \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^4 + 4a_7 \eta_{nm}^{\text{II}^2} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^5 \\ & + 2c_5 \delta_m^{\text{II}^2} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta^2 - 2\eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^2 \text{Re}_L^{21+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \text{Ma}_\beta^2 \gamma_n^{\text{II}^2} \end{aligned} \quad (\text{D.156})$$

$$d_4 = b_{10}^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} + c_6^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} Y_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.157})$$

$$d_5 = b_2^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} + c_8^1 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.158})$$

$$d_6 = 2a_{15} b_2^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + ic_7 \quad (\text{D.159})$$

$$d_7 = 2a_{15} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) + 2a_{14} \eta_{nm}^{\text{II}^2} Y_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 + c_9^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.160})$$

$$d_8 = 2a_3 \delta_m^{\text{II}^2} \eta_{nm}^{\text{II}^2} Y_0^{\text{II}*1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right) + c_{21}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.161})$$

$$d_9 = c_{22}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} + \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) + 2\eta_{nm}^{\text{II}^2} Y_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.162})$$

$$d_{10} = c_{20}^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} + 2c_{19} \eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.163})$$

$$d_{11} = a_{25}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*2} + c_{24}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} + 2\delta_m^{\text{II}2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \quad (\text{D.164})$$

$$d_{12} = a_{32} \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}} \lambda_{nm}^{(1)*} \varrho^{\text{I,II}1} J_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\beta^3 Y_0^{\text{I}*} - ic_{13} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^1 J_0^{\text{I}*} \text{Re}_L \quad (\text{D.165})$$

$$d_{13} = a_0 c_{26} \gamma_n^{\text{II}} k_n^{(3)*} \varrho^{\text{I,II}} \gamma_n^{\text{I}2} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta \mp c_{27} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)*} \varepsilon^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Re}_L \quad (\text{D.166})$$

$$d_{14} = -2a_{15} b_2^1 J_1^{\text{I}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + ic_{29} \quad (\text{D.167})$$

$$d_{15} = c_{31}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} + \delta_m^{\text{II}2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) + 2\eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.168})$$

$$d_{16} = -2a_{15} a_{17} \eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - ic_{32} \quad (\text{D.169})$$

$$d_{17} = a_{34} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} + c_{33}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.170})$$

$$d_{18} = c_{35} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} + \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}} k_n^{(3)*} \varrho^{\text{I,II}1} \mathcal{J}_0^{\text{I}*1} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta \quad (\text{D.171})$$

$$d_{19} = c_{36} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^1 J_0^{\text{I}*} \text{Re}_L - ic_{37} \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}} \varrho^{\text{I,II}1} J_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\beta \quad (\text{D.172})$$

$$d_{20} = -ia_{-1} c_{38} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} + 2ia_{32} \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}} \eta_{nm}^{\text{II}} k_n^{(3)*} \varrho^{\text{I,II}} (1+\epsilon)^1 \mathcal{J}_0^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta Y_1^{\text{II}*} \\ \mp ic_{39} \delta_m^{\text{I}} k_n^{(6)*} \varepsilon^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Re}_L U_{\text{rel}}^{\text{I}2} \quad (\text{D.173})$$

$$d_{21} = a_{19}(1 + \epsilon)^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} + c_{40}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - 2\eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.174})$$

$$d_{22} = c_{41}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} + \eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon)^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 + 2\eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.175})$$

$$d_{23} = 2a_8 \eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon)^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 - c_{42} \epsilon \text{Re}_L \quad (\text{D.176})$$

$$d_{24} = c_{42} - 2\eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon)^1 J_1^{\text{II}*1+\epsilon} Y_0^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^3 \quad (\text{D.177})$$

$$d_{25} = c_{43} \delta_m^1 k_n^{(6)*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} + \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}} k_n^{(3)*2} \varrho^{\text{I,III}} \mathcal{J}_0^{\text{I}*1} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta \quad (\text{D.178})$$

En un noveno nivel de complejidad aparecen las constantes denominadas con la letra e . Es decir,

$$e_1 = d_3^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - 2c_4 \eta_{nm}^{\text{II}} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 \quad (\text{D.179})$$

$$e_2 = d_2^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} - 2c_2 \eta_{nm}^{\text{II}} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.180})$$

$$e_3 = d_5^1 J_0^{\text{II}*} + d_4^1 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.181})$$

$$e_4 = ib_2 \eta_{nm}^{\text{II}} \epsilon^1 J_0^{\text{II}*2} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 - d_6^1 J_0^{\text{II}*} + d_7^1 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.182})$$

$$e_5 = c_{13}^1 J_0^{\text{II}*} + d_8^1 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.183})$$

$$e_6 = -2a_3 \delta_m^{\text{II}2} \eta_{nm}^{\text{II}} \epsilon^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1} J_0^{\text{II}*} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\beta^2 \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right)$$

$$+2b_{18}\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}}\text{J}_1^{\text{II}^{*2}}\text{Ma}_\alpha^3 + d_{10}^{1+\epsilon}\text{J}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.184})$$

$$e_7 = a_{23}b_2\varepsilon^1\text{J}_0^{\text{II}^*}\text{Re}_L^{1+\epsilon}\text{Y}_1^{\text{II}^*} - 2c_{11}\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}}\text{J}_1^{\text{II}^*} + d_9^{1+\epsilon}\text{J}_0^{\text{II}^{*1+\epsilon}}\text{Y}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.185})$$

$$e_8 = -b_2\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}}\text{J}_0^{\text{II}^{*2}}\text{Y}_1^{\text{II}^*}\text{Ma}_\beta^2 + c_{18}^1\text{J}_0^{\text{II}^*} - d_{12}^1\text{Y}_0^{\text{II}^*} \quad (\text{D.186})$$

$$e_9 = c_{17}^1\text{J}_0^{\text{II}^*} + d_{11}^1\text{Y}_0^{\text{II}^*} \quad (\text{D.187})$$

$$e_{10} = -2a_3\delta_m^{\text{II}^2}\eta_{nm}^{\text{II}^2}\varepsilon^{1+\epsilon}\text{J}_0^{\text{II}^{*1}}\text{J}_0^{\text{II}^*}\text{Re}_L^{1+\epsilon}\text{Y}_1^{\text{II}^*}\text{Ma}_\beta^2 \left(\text{Ma}_\beta^2 - 2\text{Ma}_\alpha^2 \right) \\ + 2b_{18}\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}}\text{J}_1^{\text{II}^{*2}}\text{Ma}_\alpha^3 + d_{13}^{1+\epsilon}\text{J}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.188})$$

$$e_{11} = c_{23}^1\text{J}_0^{\text{II}^*} + d_9^1\text{Y}_0^{\text{II}^*} \quad (\text{D.189})$$

$$e_{12} = a_{28}b_2^1\text{J}_1^{\text{II}^{*1+\epsilon}}\text{Y}_1^{\text{II}^*} + d_8^1\text{Y}_1^{\text{II}^*} \quad (\text{D.190})$$

$$e_{13} = b_2\eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}}\text{J}_0^{\text{II}^{*2}}\text{Y}_1^{\text{II}^*}\text{Ma}_\beta^2 - c_{18}^1\text{J}_0^{\text{II}^*} + d_{11}^1\text{Y}_0^{\text{II}^*} \quad (\text{D.191})$$

$$e_{14} = a_{-1}c_{28}\delta_m^{\text{I}}k_n^{(6)*1}\mathcal{J}_1^{\text{II}^*} + 2c_{26}\gamma_n^{\text{II}}\eta_{nm}^{\text{I}^2}k_n^{(3)*}\varrho^{\text{I,II}}\mathcal{J}_0^{\text{I}^*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta + d_{13}U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \quad (\text{D.192})$$

$$e_{15} = d_{19}k_m^{(5)*}a_z \\ + ia_{32}\gamma_n^{\text{II}}\eta_{nm}^{\text{II}}\lambda_{nm}^{(1)*}k_m^{(2)*}\varrho^{\text{I,II}}(1+\epsilon)\varepsilon^2a_r^1\text{J}_0^{\text{II}^*}\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}^2}\text{Y}_1^{\text{II}^*} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \quad (\text{D.193})$$

$$e_{16} = 2a_{-1}a_{32}\gamma_n^{\text{II}}\delta_m^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{II}}k_n^{(6)*}\varrho^{\text{I,II}}(1+\epsilon)^1\text{J}_0^{\text{I}^{*2}}\mathcal{J}_0^{\text{I}^*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta^1\text{Y}_1^{\text{II}^*} \\ + c_{38}\eta_{nm}^{\text{I}}k_n^{(3)*1}\text{J}_1^{\text{I}^{*2}}\mathcal{J}_0^{\text{I}^*} + d_{20}^1\text{J}_0^{\text{I}^{*1}}\text{J}_1^{\text{I}^*} \quad (\text{D.194})$$

$$e_{17} = d_{21}\eta_{nm}^{\text{II}}\lambda_n^{(2)*}\varepsilon^1 J_0^{\text{I}*}\text{Re}_L + i\gamma_n^{\text{II}}d_{22}\eta_{nm}^{\text{I}}\varrho^{\text{I,III}}J_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\beta \quad (\text{D.195})$$

$$e_{18} = -a_{-1}d_{23} \pm d_{24}\varepsilon\text{Re}_L U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \quad (\text{D.196})$$

$$e_{19} = 2b_{40}\eta_{nm}^{\text{II}}(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}J_0^{\text{I}*1+\varepsilon}Y_1^{\text{II}*} + d_{23}^{1+\varepsilon}J_1^{\text{II}*} + 2\eta_{nm}^{\text{II}}\varepsilon^{1+\varepsilon}J_1^{\text{II}*2}\text{Re}_L\text{Ma}_\alpha^3{}^{1+\varepsilon}Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.197})$$

En un décimo nivel aparecen las constantes denominadas con la letra f , las cuales son

$$\begin{aligned} f_0 = & 2ia_{-1}c_{30}\gamma_n^{\text{II}}\delta_m^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{I}}k_n^{(6)*}\varrho^{\text{I,III}}J_0^{\text{I}*21}\mathcal{J}_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta \\ & + d_{14}\eta_{nm}^{\text{I}}k_n^{(3)*1}J_1^{\text{I}*21}\mathcal{J}_0^{\text{I}*} + e_{14}{}^1J_0^{\text{I}*1}J_1^{\text{I}*} \end{aligned} \quad (\text{D.198})$$

$$f_1 = b_2b_9{}^1J_1^{\text{II}*1+\varepsilon}Y_1^{\text{II}*} + e_1{}^1Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.199})$$

$$f_2 = -2a_{15}b_2\eta_{nm}^{\text{II}}{}^1J_1^{\text{II}*21+\varepsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^2 - ie_7{}^1J_1^{\text{II}*} + ie_6{}^1Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.200})$$

$$f_3 = \delta_m^{\text{II}2}e_5\lambda_n^{(2)*}k_m^{(5)*}a_z\text{Re}_L + i\gamma_n^{\text{II}}e_9\lambda_{nm}^{(1)*}k_m^{(2)*}\varrho^{\text{I,II}}\varepsilon a_r\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \quad (\text{D.201})$$

$$f_4 = 2\gamma_n^{\text{II}}e_9\eta_{nm}^{\text{I}}\varrho^{\text{I,III}}J_0^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta + e_4{}^1J_1^{\text{I}*} \quad (\text{D.202})$$

$$f_5 = -2a_{15}b_2\eta_{nm}^{\text{II}}{}^1J_1^{\text{II}*21+\varepsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^2 - ie_7{}^1J_1^{\text{II}*} + ie_{10}{}^1Y_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.203})$$

$$f_6 = a_1d_1\eta_{nm}^{\text{II}}\lambda_n^{(2)*}\varepsilon^1 J_0^{\text{I}*}\text{Re}_L + i\gamma_n^{\text{II}}e_{11}\eta_{nm}^{\text{I}}\varrho^{\text{I,III}}J_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\beta \quad (\text{D.204})$$

$$f_7 = a_{27}c_1^{1+\varepsilon}J_1^{\text{II}*1}Y_1^{\text{II}*} + 2b_2\eta_{nm}^{\text{II}}{}^1J_1^{\text{II}*21+\varepsilon}Y_1^{\text{II}*}\text{Ma}_\alpha^3 - d_{10}{}^1J_1^{\text{I}*} + e_{12}{}^1J_0^{\text{I}*} \quad (\text{D.205})$$

$$f_8 = \gamma_n^{\text{II}} d_{15} \lambda_{nm}^{(1)*} k_m^{(2)*} \varrho^{\text{I,II}} \varepsilon^2 a_r^1 J_0^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} + \delta_m^{\text{II}^2} e_{15} k_m^{(5)*} a_z \quad (\text{D.206})$$

$$f_9 = 2c_{31} \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}^2} k_n^{(3)*} \varrho^{\text{I,III}} \mathcal{J}_0^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta - i \delta_m^{\text{I}} e_{17} k_n^{(6)*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \quad (\text{D.207})$$

$$f_{10} = e_{17} k_m^{(5)*} a_z + i a_{32} \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_{nm}^{(1)*} k_n^{(3)*} \varrho^{\text{I,II}} (1 + \epsilon) \varepsilon^2 a_r^1 J_0^{\text{I}*} J_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha \text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \quad (\text{D.208})$$

$$f_{11} = \delta_m^{\text{I}} e_{18} k_n^{(6)*1} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} + 2 \gamma_n^{\text{II}} \eta_{nm}^{\text{I}^2} \eta_{nm}^{\text{II}} k_n^{(3)*} \varrho^{\text{I,II}} (1 + \epsilon)^1 J_0^{\text{I}*1} J_1^{\text{I}*1+\epsilon} Y_0^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta \quad (\text{D.209})$$

En un décimo primer nivel se tienen las constantes que se denominan con la letra g . Las susodichas son

$$g_1 = 2a_8 b_2 \eta_{nm}^{\text{II}} \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^1 J_0^{\text{I}*2} \text{Re}_L^{1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \text{Ma}_\alpha^2 + b_8 c_1^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*1} Y_1^{\text{II}*} + e_2^1 J_1^{\text{II}*} + f_1^1 J_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.210})$$

$$g_2 = f_5 \lambda_n^{(2)*} k_n^{(3)*1} \mathcal{J}_0^{\text{I}*} \mp i \gamma_n^{\text{II}} \delta_m^{\text{I}} e_8 k_n^{(6)*} \varrho^{\text{I,III}} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}^2} \quad (\text{D.211})$$

$$g_3 = \gamma_n^{\text{II}} e_{13} \eta_{nm}^{\text{I}} \varrho^{\text{I,III}} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\beta - i f_7 \lambda_n^{(2)*} \varepsilon^1 \mathcal{J}_0^{\text{I}*} \text{Re}_L \quad (\text{D.212})$$

$$g_4 = 2b_{32} \eta_{nm}^{\text{II}^{1+\epsilon}} J_1^{\text{II}*2} \text{Ma}_\alpha^3 + 2d_{18} \delta_m^{\text{II}^2} \lambda_{nm}^{(1)*1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) + f_9^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} \quad (\text{D.213})$$

$$g_5 = -2d_{25} \eta_{nm}^{\text{II}} (1 + \epsilon)^{1+\epsilon} J_0^{\text{II}*1+\epsilon} Y_1^{\text{II}*} + f_{11}^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*} - 2\delta_m^{\text{I}} \eta_{nm}^{\text{II}} k_n^{(6)*} \varepsilon^{1+\epsilon} J_1^{\text{II}*2} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Re}_L \text{Ma}_\alpha^3 Y_0^{\text{II}*} \quad (\text{D.214})$$

En un décimo segundo nivel aparece las constantes denominadas con la letra h . Es decir,

$$\begin{aligned}
 h_1 = & 2ia_1\gamma_n^{\text{II}}d_1\eta_{nm}^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{II}}\lambda_n^{(2)*}\varrho^{\text{I,II}}\varepsilon^1\text{J}_0^{\text{I}*2}\text{Re}_L\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta \\
 & +\gamma_n^{\text{II}}e_4\eta_{nm}^{\text{I}}\varrho^{\text{I,III}}\text{J}_1^{\text{I}*2}\text{Ma}_\beta + g_1^1\text{J}_0^{\text{I}*1}\text{J}_1^{\text{I}*}
 \end{aligned} \tag{D.215}$$

$$h_2 = 2a_1\gamma_n^{\text{II}}d_1\eta_{nm}^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{II}}\lambda_n^{(2)*}k_n^{(3)*}\varrho^{\text{I,III}}\text{J}_0^{\text{I}*1}\mathcal{J}_0^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta + g_2^1\text{J}_1^{\text{I}*} \tag{D.216}$$

$$h_3 = -b_{22}\gamma_n^{\text{II}}e_3\lambda_n^{(2)*}k_m^{(2)*}\varrho^{\text{I,II}}\varepsilon^2a_r\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2\right) \mp i\delta_m^{\text{I}}g_3k_m^{(5)*}k_n^{(6)*}a_z^1\mathcal{J}_1^{\text{I}*} \tag{D.217}$$

$$\begin{aligned}
 h_4 = & -2ia_{-1}\gamma_n^{\text{II}}d_{15}\delta_m^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{I}}k_n^{(6)*}\varrho^{\text{I,III}}\text{J}_0^{\text{I}*21}\mathcal{J}_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta \\
 & +e_{16}\eta_{nm}^{\text{I}}k_n^{(3)*1}\text{J}_1^{\text{I}*21}\mathcal{J}_0^{\text{I}*} + g_4^1\text{J}_0^{\text{I}*1}\text{J}_1^{\text{I}*}
 \end{aligned} \tag{D.218}$$

$$\begin{aligned}
 h_5 = & 2a_{-1}a_{32}\gamma_n^{\text{II}}\delta_m^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{I}}\eta_{nm}^{\text{II}}k_n^{(6)*}\varrho^{\text{I,II}}(1+\varepsilon)^1\mathcal{J}_0^{\text{I}*21}\mathcal{J}_1^{\text{I}*1}\text{J}_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha^2\text{Ma}_\beta \\
 & +e_{19}\eta_{nm}^{\text{I}}k_n^{(3)*1}\text{J}_1^{\text{I}*21}\mathcal{J}_0^{\text{I}*} + ig_5^1\text{J}_0^{\text{I}*1}\text{J}_1^{\text{I}*}
 \end{aligned} \tag{D.219}$$

En un décimo tercer nivel de complejidad sólo existe una constante denominada con la letra i . Ésta es

$$\begin{aligned}
 i_1 = & \gamma_n^{\text{II}}e_3\lambda_{nm}^{(1)*2}k_m^{(2)*2}k_n^{(3)*}\varrho^{\text{I,II}}\varepsilon^4a_r^{21}\text{J}_1^{\text{I}*1}\mathcal{J}_0^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}*2} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2\right) \\
 & \pm i2a_{-2}\gamma_n^{\text{II}}\delta_m^{\text{I}}\delta_m^{\text{II}2}e_5\lambda_n^{(2)*}k_m^{(5)*2}k_n^{(6)*}\varrho^{\text{I,II}}a_z^{21}\mathcal{J}_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta + h_2\lambda_{nm}^{(1)*}k_m^{(2)*}k_m^{(5)*}\varepsilon^2a_r a_z
 \end{aligned} \tag{D.220}$$

En un décimo cuarto y último nivel de complejidad se encuentran las constantes denominadas por la letra griega χ . Las susodichas son

$$\chi^* = h_1k_m^{(5)*}a_z + i\gamma_n^{\text{II}}e_3\lambda_{nm}^{(1)*}k_m^{(2)*}\varrho^{\text{I,II}}\varepsilon^3a_r^1\text{J}_0^{\text{I}*1}\text{J}_1^{\text{I}*}\text{Re}_L\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta U_{\text{rel}}^{\text{I}*2} \left(2\text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2\right) \tag{D.221}$$

$$\chi_z^{\text{I}*} = a_0\gamma_n^{\text{II}}f_3k_n^{(3)*}k_m^{(5)*}\varrho^{\text{I,II}}a_z\gamma_n^{\text{I}21}\text{J}_1^{\text{I}*}\text{Ma}_\alpha\text{Ma}_\beta$$

$$+a_{-1}\gamma_n^{\text{II}}\delta_m^{\text{I}}f_4\lambda_{nm}^{(1)*}k_m^{(2)*}k_m^{(5)*}k_n^{(6)*}\varrho^{\text{I,II}}\varepsilon a_r a_z^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\beta + i_1 \text{Re}_L \quad (\text{D.222})$$

$$\chi_r^{\text{I}*} = a_0 \gamma_n^{\text{II}} f_6 k_n^{(3)*} k_m^{(5)*} \varrho^{\text{I,II}} a_z \gamma_n^{\text{I}^2} \text{Ma}_\alpha^2 \text{Ma}_\beta + h_3 \varepsilon \text{Re}_L \quad (\text{D.223})$$

$$\chi_{z_1}^{\text{II}*} = b_{28} d_{12} \delta_m^{\text{II}^2} k_m^{(5)*} a_z \text{Ma}_\alpha + f_0 \lambda_{nm}^{(1)*} k_m^{(2)*} \varepsilon^2 a_r \quad (\text{D.224})$$

$$\chi_{z_2}^{\text{II}*} = \mp i 2 a_{-2} \delta_m^{\text{I}} \delta_m^{\text{II}^2} e_{14} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} a_z^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha + a_0 f_8 k_n^{(3)*} \gamma_n^{\text{I}^2} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha + h_4 \lambda_{nm}^{(1)*} k_m^{(2)*} \varepsilon^2 a_r \quad (\text{D.225})$$

$$\begin{aligned} \chi_{r_1}^{\text{II}*} &= \pm i 2 a_{-2} d_{19} \delta_m^{\text{I}} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} a_z^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha + a_0 e_{15} k_n^{(3)*} \gamma_n^{\text{I}^2} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha \\ &\quad + e_{16} \lambda_{nm}^{(1)*} k_m^{(2)*} \varepsilon^2 a_r \left(2 \text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.226})$$

$$\begin{aligned} \chi_{r_2}^{\text{II}*} &= \pm i 2 a_{-2} e_{17} \delta_m^{\text{I}} k_m^{(5)*} k_n^{(6)*} a_z^1 \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha + a_0 f_{10} k_n^{(3)*} \gamma_n^{\text{I}^2} \mathcal{J}_1^{\text{I}*} \text{Ma}_\alpha \\ &\quad + h_5 \lambda_{nm}^{(1)*} k_m^{(2)*} \varepsilon^2 a_r \left(2 \text{Ma}_\alpha^2 - \text{Ma}_\beta^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.227})$$

Bibliografía

- [1] R. Aithal and G. S. Gipson. Instability of internally damped curved pipes. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(10):2456, 1991.
- [2] J. Aitken. XIV. An account of some experiments on rigidity produced by centrifugal force . *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5(29):81–105, 1878.
- [3] S. Čanić. Blood flow through compliant vessels after endovascular repair: wall deformations induced by the discontinuous wall properties. *Comput Visual Sci*, 4(3):147–155, Feb. 2002.
- [4] S. Čanić and E. H. Kim. Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model blood flow through compliant axi-symmetric vessels. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 26(14):1161–1186, Sept. 2003.
- [5] S. Čanić and A. Mikelić. Effective equations describing the flow of a viscous incompressible fluid through a long elastic tube. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(10):661–666, Oct. 2002.
- [6] S. Čanić, A. Mikelić, and J. Tambača. A two-dimensional effective model describing fluid–structure interaction in blood flow: analysis, simulation and experimental validation. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(12):867–883, Dec. 2005.
- [7] S. T. Ariariatnam and N. N. S. Dynamics Stability of Pipes Conveying Pulsating Fluid. *October*, 107:215–230, 1986.
- [8] A. Bajaj. Nonlinear dynamics of tubes carrying a pulsatile flow. *Dynamics and Stability of Systems*, 2(1):19–41, Jan. 1987.

- [9] A. K. Bajaj and P. R. Sethna. Bifurcations in Three-Dimensional Motions of Articulated Tubes, Part 1: Linear Systems and Symmetry. *Journal of Applied Mechanics*, 49(3):606–611, Sept. 1982.
- [10] A. K. Bajaj and P. R. Sethna. Bifurcations in Three-Dimensional Motions of Articulated Tubes, Part 2: Nonlinear Analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 49(3):612–618, Sept. 1982.
- [11] A. K. Bajaj and P. R. Sethna. Flow Induced Bifurcations to Three-Dimensional Oscillatory Motions in Continuous Tubes. *SIAM J. Appl. Math.*, 44(2):270–286, Apr. 1984.
- [12] A. K. Bajaj, P. R. Sethna, and T. S. Lundgren. Hopf Bifurcation Phenomena in Tubes Carrying a Fluid. *SIAM J. Appl. Math.*, 39(2):213–230, Oct. 1980.
- [13] J. M. Ball. Stability theory for an extensible beam. *Journal of Differential Equations*, 14(3):399–418, 1973.
- [14] T. B. Benjamin. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid - II. Experiments. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 261(1307):487–499, May 1961.
- [15] T. B. Benjamin. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid - I. Theory. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 261(1307):457–486, May 1961.
- [16] C. D. Bertram, C. J. Raymond, and T. J. Pedley. Application of nonlinear dynamics concepts to the analysis of self-excited oscillations of a collapsible tube conveying a fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 5(4):391–426, 1991.
- [17] M. A. Biot. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid II: High-Frequency Range. 1956.
- [18] M. A. Biot. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid I: Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2), 2014.
- [19] R. E. D. Bishop and I. Fawzy. Free and Forced Oscillation of a Vertical Tube Containing a Flowing Fluid. 284(1316):1–47, 2014.
- [20] M. P. Bohn and G. Herrmann. Dynamic Behavior of Articulated Pipes Conveying Fluid With Periodic Flow Rate. *American Society of Mechanical Engineers (Paper)*, (73 - APMW-32):55–62, 1973.
- [21] M. P. Bohn and G. Herrmann. Instabilities of a Spatial System of Articulated Pipes Conveying Fluid. *American Society of Mechanical Engineers (Paper)*, (74 -FE-5), 1974.

- [22] L. A. Caffarelli. The regularity of free boundaries in higher dimensions. *Acta Math.*, 139(0):155–184, 1977.
- [23] S. Čanić, D. Lamponi, A. Mikelić, and J. Tambača. Self-consistent effective equations modeling blood flow in medium-to-large compliant arteries. *Multiscale Modeling and Simulation*, 3(3):559–596, 2005.
- [24] S. Canic, D. Lamponi, A. Mikelic, and J. Tambaca. Self-Consistent Effective Equations Modeling Blood Flow in Medium-to-Large Compliant Arteries. *Multiscale Model. Simul.*, 3(3):559–596, Jan. 2005.
- [25] S. Canic and A. Mikelic. Effective Equations Modeling the Flow of a Viscous Incompressible Fluid through a Long Elastic Tube Arising in the Study of Blood Flow through Small Arteries. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2(3):431–463, Jan. 2003.
- [26] A. R. Champneys. Homoclinic orbits in the dynamics of articulated pipes conveying fluid. *Nonlinearity*, 4(3):747–774, 1991.
- [27] S. S. Chen. Forced Vibration of a Cantilevered Tube Conveying Fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 48(3B):773–775, Sept. 1970.
- [28] S. S. Chen. Flow-induced in-plane instabilities of curved pipes. *Nuclear Engineering and Design*, 23(1):29–38, Oct. 1972.
- [29] S. S. Chen. Parallel-Flow-Induced Vibration of Fuel Rods. *Nuclear Engineering and Design*, 18:253–278, 1972.
- [30] S. S. Chen. Vibration and Stability of a Uniformly Curved Tube Conveying Fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(1B):223–232, Jan. 1972.
- [31] S. S. Chen. Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tubes Conveying Fluid. *Journal of Applied Mechanics*, 40(2):362–368, June 1973.
- [32] S. S. Chen. Flow-Induced Vibrations of Circular Cylindrical Structures, 1985.
- [33] S. S. Chen and J. A. Jendrzejczyk. General characteristics, transition, and control of instability of tubes conveying fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(3):887–895, Mar. 1985.
- [34] G. S. Copeland and F. C. Moon. Chaotic flow-induced vibration of a flexible tube with end mass. *Journal of Fluids and Structures*, 6(6):705–718, 1992.

- [35] P. Corona-Romero, A. Arciniega-Ceballos, and F. Sánchez-Sesma. Simulation of LP seismic signals modeling the fluid–rock dynamic interaction. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 211-212:92–111, Jan. 2012.
- [36] X. Q. Dang, W. M. Liu, and T. S. Zheng. Efficient numerical analysis for dynamic stability of pipes conveying fluids. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 111(3):300–303, 1989.
- [37] R. W. Doll and C. D. Mote. On the dynamic analysis of curved and twisted cylinders transporting fluids. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 98(2):143–150, 1976.
- [38] G. T. S. Done and A. Simpson. Dynamic Instability of Certain Conservative and Non-conservative Systems. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1(1):1–7, 2012.
- [39] C. Dupuis and J. Rousselet. Application of the transfer matrix method to non-conservative systems involving fluid flow in curved pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 98(3):415–429, 1985.
- [40] C. Dupuis and J. Rousselet. The equations of motion of curved pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 153(3):473–489, 1992.
- [41] W. S. Edelstein, S. S. Chen, and J. A. Jendrzejczyk. A finite element computation of the flow-induced oscillations in a cantilevered tube. *Journal of Sound and Vibration*, 107(1):121–129, 1986.
- [42] A. El Chebair, A. Misra, and M. Païdoussis. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 138(3):457–478, May 1990.
- [43] C. N. Fan and W. H. Chen. Vibration and Stability of Helical Pipes Conveying Fluid. 119:429–442, 1987.
- [44] C. N. Fan and W. H. Chen. Vibration and stability of helical pipes conveying fluid. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 109(4):402–410, 1987.
- [45] Y. C. Fung. *Biomechanics*. Springer New York, New York, NY, 1981.
- [46] Y. C. Fung. *Biomechanics*. Springer New York, New York, NY, 1990.
- [47] Y. C. Fung. *Biomechanics*. Springer New York, New York, NY, 1997.

- [48] D. C. Gazis. Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(5):568–573, May 1959.
- [49] D. C. Gazis. Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. II. Numerical Results. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(5):573–578, May 1959.
- [50] J. H. Ginsberg. The dynamic stability of a pipe conveying a pulsatile flow. *International Journal of Engineering Science*, 11(9):1013–1024, 1973.
- [51] R. Glowinski, T. W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 111(3-4):283–303, 1994.
- [52] J. Grotberg and S. Davis. Fluid-dynamic flapping of a collapsible channel: Sound generation and flow limitation. *Journal of Biomechanics*, 13(3):219–230, Jan. 1980.
- [53] J. B. Grotberg and E. L. Reiss. A Subsonic Flutter Anomaly. 80:444–446, 1982.
- [54] G. H. Handelman. A Note on the Transverse Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid. XIII(3):326–330, 1955.
- [55] M. Haslam and M. Zamir. Pulsatile Flow in Tubes of Elliptic Cross Sections. *Annals of Biomedical Engineering*, 26(5):780–787, Sept. 1998.
- [56] P. J. Holmes. Pipes Supported at Both Ends Cannot Flutter. *Journal of Applied Mechanics*, 45(3):619–622, Sept. 1978.
- [57] T. C. Lin and G. W. Morgan. Wave Propagation through Fluid Contained in a Cylindrical, Elastic Shell. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(6):1165–1176, Nov. 1956.
- [58] P. Luchini, M. Lupo, and A. Pozzi. Unsteady Stokes Flow in a Distensible Pipe. *Z. angew. Math. Mech.*, 71(10):367–378, 1991.
- [59] G. W. Morgan and J. P. Kiely. Wave Propagation in a Viscous Liquid Contained in a Flexible Tube. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 26(3):323–328, May 1954.

- [60] M. S. Olufsen, A. Nadim, and L. A. Lipsitz. Dynamics of cerebral blood flow regulation explained using a lumped parameter model. *American Journal of Physiology - Regulatory Integrative and Comparative Physiology*, 282(2 51-2):611–622, 2002.
- [61] A. J. Olvera Mata. Estudio experimental de la interacción fluido-estructura en conductos circulares con flujo pulsátil, 2020.
- [62] M. Païdoussis and R. W. Gregory. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid I. Theory. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 293(1435):512–527, Aug. 1966.
- [63] M. Païdoussis and N. Issid. Dynamic stability of pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 33(3):267–294, Apr. 1974.
- [64] M. P. Païdoussis and R. W. Gregory. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid II. Experiments. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 293(1435):528–542, Aug. 1966.
- [65] M. P. Paidoussis. Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, 26(4):717–736, Dec. 1966.
- [66] M. P. Paidoussis. Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow Part 2. Experiments. *J. Fluid Mech.*, 26(4):737–751, Dec. 1966.
- [67] M. P. Paidoussis. Dynamics of Tubular Cantilevers Conveying Fluid. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 12(2):85–103, Apr. 1970.
- [68] M. P. Païdoussis. *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow Volume 1*, volume 47. 2005.
- [69] M. P. Paidoussis. Dynamics of Tubular Cantilevers Conveying Fluid. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1(1):1–7, 2012.
- [70] M. P. Paidoussis and E. B. Deksnis. Articulated Models of Cantilevers Conveying Fluid: The Study of a Paradox. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 12(4):288–300, Aug. 1970.
- [71] M. P. Païdoussis and G. X. Li. Pipes conveying fluid: A model dynamical problem, 1993.
- [72] M. Perton, F. J. Sánchez-Sesma, J. H. Spurlin, E. Flores, M. Navarrete, R. Gómez, and H. Marengo-Mogollón. Numerical and Ultrasonic Experimental Simulations of Elastic Wave Propagation Around Hollow Cylinder. *J. Comp. Acous.*, 20(02):1240008, June 2012.

- [73] T. J. Plona, B. K. Sinha, S. Kostek, and S.-K. Chang. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. II: Theory versus experiment. page 12, 1992.
- [74] A. Quarteroni, M. Tuveri, and A. Veneziani. Computing and Visualization in Science Survey article Computational vascular fluid dynamics : problems , models and methods. *Computing and Visualization in Science*, 197:163–197, 2000.
- [75] B. K. Sinha, T. J. Plona, S. Kostek, and S. Chang. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. I: Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(2):1132–1143, Aug. 1992.
- [76] D. Weaver and M. Paidoussis. On collapse and flutter phenomena in thin tubes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 50(1):117–132, Jan. 1977.
- [77] J. R. Womersley. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *The Journal of Physiology*, 127(3):553–563, Mar. 1955.
- [78] M. Zamir. *The Physics of Pulsatile Flow*. Springer New York, New York, NY, 2000.