



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MODELOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS DE JETS
ESTELARES UNIFORMEMENTE ACELERADOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:

Jorge Iván Castorena Gómez

TUTORES:

Dra. Liliana Hernández Martínez Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Cristian Raga Rasmussen Instituto de Ciencias Nucleares

Ciudad de México, 2021
Enero



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Claudia, Adriana y Judith,
los pilares de mi familia.*

A Silvia, mi bonita.

Agradecimientos

*Por lo pronto comparto lo que sé
es mi humilde forma de agradecer
siembro laureles que no veré crecer
porque disfruto la sombra de los que no sembré.*

Alguna vez uno de mis tíos me dijo que hay personas que nacen con estrella, y otras que nacen estrelladas. - Tú, gordito, eres de ambos tipos -. Y no se equivocaba. En el transcurso de mi vida he tomado decisiones que me han llevado a estrellarme como mosquito contra un parabrisas. Pero también he tenido la fortuna de contar con personas sumamente valiosas. Personas que considero mi estrella, mi más grande tesoro, y a las cuales quiero dedicar las siguientes líneas.

Primero que nada, quiero agradecer a mis asesores, Liliana Hernández y Alejandro Raga. Sin su apoyo, su paciencia, su experiencia y sus enseñanzas, nada de esto hubiera sido posible. De igual manera, agradezco a Ary Rodríguez, a quien desde que comenzó toda esta aventura he visto como mi asesor extraoficial. Gracias, Lili, Ary y Alex, por brindarme la oportunidad de levantar el vuelo. De no haber creído en mí, inevitablemente me hubiera estrellado contra un parabrisas académico.

Agradezco al grupo de Astroplasmas del ICN por adoptarme, por hacerme parte de la familia. En especial a Alex R., Ary, Lili, Antonio, Pedro, Malinalli, Jorge - el otro

Chan -, Alex E. y Jorge Cantó. No sabía que los investigadores podían ser tan chidos, que se podía disfrutar y aprender tanto estando a su lado. Ellas y ellos son un ejemplo de que sí se puede.

A mis sinodales, Luis Felipe Rodríguez, Susana Lizano, Ricardo González, Sergiy Silich y Carlos Carrasco, porque sus valiosos comentarios y sugerencias contribuyeron a hacer de esta tesis un mejor trabajo. Gracias por todo el tiempo que, pese a sus múltiples ocupaciones, invirtieron en leer este texto.

Agradezco a mis padres, Claudia y Jorge, por todo el amor que me dan. Desde pequeño me enseñaron que cada día se puede intentar ser una mejor persona, me enseñaron a ver por el otro, a estar ahí para los demás. Gracias por la educación que me brindaron, por nunca negarme un libro, por privarse de tantas cosas para permitir que yo siguiera adquiriendo conocimientos. Por todo su esfuerzo es que hoy he llegado hasta aquí.

A mi bonita, Silvia, por ser la estrella que le da forma a mi espacio-tiempo. Porque juntos comenzamos este viaje, que algunos llaman posgrado, y no ha pasado un día en que dejes de motivarme a seguir adelante, a llegar cada vez más lejos. Por todo tu amor, por todo tu apoyo, que nunca es poco. Por ser mi gurú de Python, mi colega y mi confidente. Gracias por caminar a mi lado, por estar presente en cada paso de este proceso, porque no ha sido fácil pero ha sido nuestro.

A mi hermanita, mis tíos y mis abues. Porque han tenido que lidiar con la ausencia que un proyecto de esta naturaleza implica. A ustedes, y a toda la familia, les agradezco que siempre estén ahí para brindarme su cariño, para escucharme y tener en cuenta mi opinión.

A mis profesores, Manuel Fernández y Diana Roselly. Ustedes fueron mi mayor inspiración durante la licenciatura. Alentaron a esos dos científicos que coexisten en mi

ser y me demostraron que el conocimiento no distingue entre fronteras, que se puede hacer *otra ciencia*.

A mis uamigos, Mariana y Atila, por siempre brindarme ese rato de ocio que es fundamental en el desarrollo de todo ser humano. Por todas las risas, por su cariño, su comprensión, sus consejos, y sus acertadas críticas; por la Conguita, aunque ya no esté físicamente con nosotros. A Morgan, porque además de ser mi amigo sigue siendo mi colega; hace años soñábamos con ser astrofísicos, y ya lo estamos logrando. A Omar, porque juntos aprendimos las artes oscuras del Modo Bryan. A Madrid, el hombre prolífico, por las férreas discusiones y las amenas charlas acompañadas de pizza. A Diana, mi más reciente uamiga, por brindarme tu apoyo y no dejar de estar pendiente de este proceso; no te conocí antes, pero estoy contento de que ahora formes parte de mi vida. A Meredyth, mi uamiga amante del mar, por estar ahí, sin importar el tiempo o las ocupaciones. Todas y todos ustedes son el regalo más grande que me llevé de la UAM-I. No podía dejar de mencionar a las niñas, Áuli y Sara, a Martín, Leonardo, Gabriel, Adrián, Cinthya, Tania, Edoardo, Omar F., Daniel, a Gabriela, y a los profes Ceci, Gerardo y Octavio.

A mis amigos del posgrado, Fernanda, Mabel, Carlos, Valeria, Carolina, Antonio, Rosslyn, Elizabeth, Alejandro y Claudia. Sin su compañía mi tránsito por los Institutos no hubiera sido tan agradable.

Al personal de los Institutos, que siempre estuvieron dispuestos a brindarme su ayuda, sin importar lo latoso que soy. En especial agradezco a Bertha, por la paciencia, y a Beatriz, quien siempre me recibía con una cálida sonrisa en la biblioteca.

Por último, agradezco el apoyo económico otorgado por CONACYT para realizar mis estudios de posgrado.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estrellas T Tauri	2
1.2. Jets estelares	5
1.3. Objetivos	8
2. Modelos analíticos	11
2.1. Un jet uniformemente acelerado	11
2.2. Centro de masa	14
2.3. Equilibrio de presión hidrodinámica	20
3. Simulaciones numéricas	33
3.1. Condiciones iniciales	34
3.2. Ecuaciones hidrodinámicas de Euler	36
3.3. Método de los volúmenes finitos (Godunov)	38

3.4. Términos de simetría	40
3.5. Función de enfriamiento	42
4. Resultados	47
4.1. Modelos con pérdida de masa constante	49
4.2. Modelos con densidad de eyección constante	53
5. Conclusiones	57
<i>A. The Uniformly Accelerated Jet</i>	61
B. Función de enfriamiento	75
Bibliografía	85

Capítulo 1

Introducción

Uno de los retos más grandes de la astrofísica moderna es entender por completo la manera en que las estrellas y los planetas se forman a partir del medio interestelar. Este fenómeno es complicado no solamente por el amplio rango de procesos físicos que involucra sino por los distintos tipos de parámetros de los que puede depender cada uno de los procesos que lo conforman (Bodenheimer, 2011). Aunque la formación estelar, que es como se le conoce a este fenómeno, todavía no se comprende del todo, el hecho de que las estrellas se forman debido a la contracción gravitacional de nubes moleculares es generalmente aceptado. Que se formen estrellas de baja masa ($M \leq 2 M_{\odot}$), de masa intermedia ($2 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$), o estrellas masivas ($M \geq 8 M_{\odot}$), depende principalmente de la densidad y masa de la nube molecular, pero hay muchos otros factores que pueden jugar un rol importante.

En su proceso de formación, las estrellas poco masivas suelen emitir material en forma de flujos bipolares colimados. Estos flujos se conocen como jets estelares y el estudio de su dinámica constituye el principal tema de investigación de este trabajo. A continuación se presentan las características más importantes de las estrellas T Tauri, un tipo de objetos estelares jóvenes que están íntimamente relacionados con la produc-

ción de jets estelares. Posteriormente se expone el estado del arte de los jets estelares y de los objetos HH, esas nebulosas de emisión que están asociadas con la presencia de flujos bipolares en las cercanías de una estrella recién formada. De igual manera, se presentan brevemente los formalismos analíticos mediante los cuales estudiamos la dinámica de estos jets.

1.1. Estrellas T Tauri

De entre todas las longitudes de onda en las que se han estudiado los espectros de emisión de las estrellas, por cuestiones históricas, el óptico ha sido el rango más explorado. En los años 40 del siglo pasado, el estudio de un tipo particular de objetos estelares sentó las bases empíricas de la teoría de la evolución estelar en sus etapas más tempranas. Estos objetos se caracterizaron principalmente por tres propiedades: su juventud, su asociación con nubes moleculares y su variabilidad temporal; fueron nombrados estrellas T Tauri debido al miembro más brillante de la nebulosa en la que se descubrieron por primera vez, la nube oscura de Taurus-Auriga.

Una manera muy común de caracterizar las propiedades físicas de una estrella es a través de su posición en el diagrama de Hertzsprung-Russell (HR). Para encontrar la posición de un objeto estelar en este diagrama se suele asignar una cierta temperatura efectiva a la estrella a partir de su emisión en el continuo. Esto funciona muy bien para estrellas en secuencia principal, sin embargo, para estrellas T Tauri una caracterización a partir del diagrama HR es una tarea más bien complicada. El principal obstáculo es que los patrones producidos por las líneas de absorción en estrellas T Tauri son apenas distinguibles¹. Se dice que los espectros de este tipo de estrellas experimentan

¹La contaminación que se observa en los espectros de las estrellas T Tauri se debe a una componente extra de radiación continua que no se encuentra presente en estrellas de secuencia principal (Stahler and Palla, 2008).

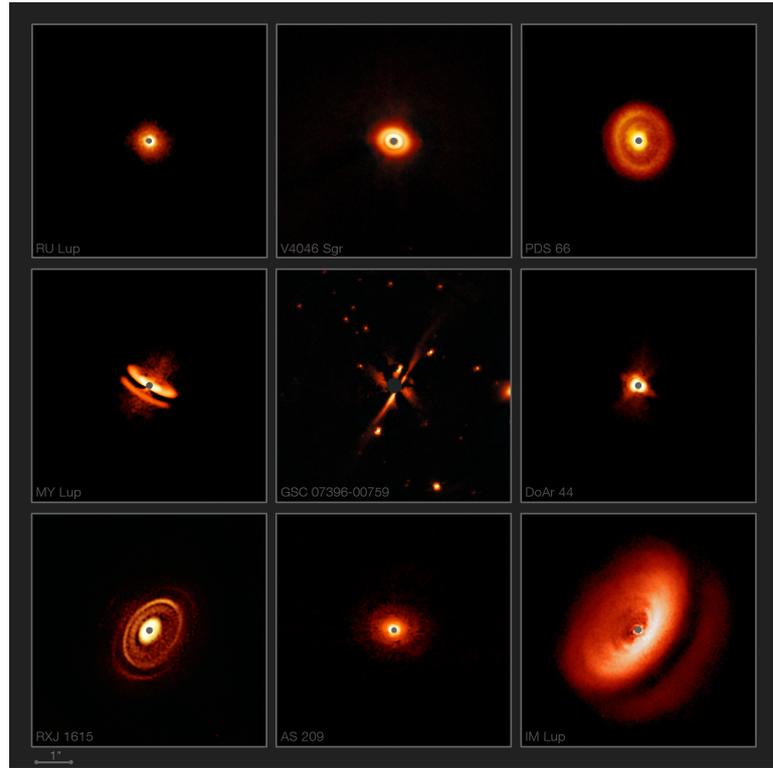


Figura 1.1: Discos de acreción alrededor de estrellas T Tauri capturados con el instrumento SPHERE del Very Large Telescope de la ESO. Es notoria la variedad de formas, tamaños y estructuras que se aprecian. Imagen tomada de: <https://www.eso.org/public/images/eso1811a/>

un fenómeno conocido como *velamiento* (Stahler and Palla, 2008). Aunado a esto, hay algunas líneas espectrales que aparecen en emisión, cuando lo usual es que aparezcan en absorción. Esto último, la presencia de prominentes líneas de emisión, resulta ser una de las principales características que define espectralmente a una estrella T Tauri.

Las estrellas T Tauri son objetos estelares masivos de reciente formación, visibles en el rango óptico del espectro electromagnético. Se caracterizan por tener masas $\leq 2 M_{\odot}$, luminosidades $\leq 50 L_{\odot}$ y edades entre 10^5 y 10^7 años (Calvet, 1996). De acuerdo a esta misma autora, la primer clasificación de estos objetos se realizó utilizando los siguientes criterios espectroscópicos: *i*) emisión en las líneas de hidrógeno (principalmente en $H\alpha$), y en las líneas resonantes de CaII; *ii*) líneas prohibidas en [OI] y [SII]; *iii*) emisión de las líneas 4063 y 4132 de FeI, y *iv*) absorción fuerte en la línea 6707 de LiI.

A pesar de que los criterios espectroscópicos que originalmente definieron a las

estrellas T Tauri corresponden a condiciones físicas específicas comunes a este tipo de objetos, sólo contemplan un pequeño intervalo del espectro electromagnético, el óptico. Es por ello que, con el paso de los años, el término T Tauri se ha vuelto un sinónimo de *objeto óptico de baja masa en etapa de pre-secuencia principal*; en cambio el término *objeto estelar joven*, acuñado por S. Strom en 1972, se usa ampliamente para referirse a todos los objetos estelares (visibles o no) en etapa de pre-secuencia principal (Bertout, 1989).

Actualmente se reconocen dos distintas clases de estrellas T Tauri: las clásicas (ETTC), dentro de las que se encuentran todas aquéllas que se detectaron en las primeras búsquedas, y las de líneas débiles (ETTD), que se encontraron con técnicas más novedosas como son la detección de fuentes en rayos X, identificación de miembros por asociación de movimientos propios e identificación de fuentes en el infrarrojo con colores apropiados (ver Calvet, 1996, para una reseña completa de las técnicas utilizadas para detectar este tipo de objetos). El criterio principal para distinguir entre estas dos clases es el ancho de línea equivalente $W(H\alpha) = 5 \text{ \AA}$, que corresponde al límite de detección en placas tomadas con prisma objetivo.

Todas las estrellas T Tauri presentan una emisión intensificada en rayos X, posiblemente causada por la superposición de numerosos destellos que no se pueden resolver individualmente. Algunas estrellas llegan incluso a presentar destellos en el continuo en radio. Estos destellos, tanto en radio como en rayos X, provienen de líneas de campo magnético que se unen fuera de la superficie estelar (Stahler and Palla, 2008).

El grueso de la emisión en $H\alpha$ se produce en numerosos choques localizados relativamente cerca de la superficie de las estrellas (Stahler and Palla, 2008). Sin embargo, es muy frecuente que también se produzca esta emisión en choques térmicos en un viento mucho más colimado. Estos microjets tienen menos de 10^3 UA de longitud y son detectables a partir de las líneas prohibidas de emisión en el óptico. A partir del

estudio de estas líneas se ha encontrado que la tasa de pérdida de masa en estrellas T Tauri debido a vientos es de alrededor de $10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ (Stahler and Palla, 2008).

Las estrellas T Tauri suelen presentar variabilidad en su emisión, tanto periódica como errática (Stahler and Palla, 2008). La variabilidad periódica se observa en ETTD y es producida por la rotación de regiones frías en las que los intensos campos magnéticos emergen de la superficie estelar. En cambio, la variabilidad errática se presenta en ETTC que a menudo presentan regiones tanto calientes como frías.

1.2. Jets estelares

Cuando las estrellas de masa baja e intermedia ($0.1 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$) se encuentran en sus etapas más tempranas de formación suelen emitir material en forma de flujos bipolares colimados. Este material eyectado suele interactuar con las nubes de gas y polvo ubicadas en las cercanías de la estrella para así formar brillantes condensaciones de gas conocidas como objetos Herbig-Haro (HH). Estos objetos y los correspondientes flujos que los producen se encuentran entre los jets astrofísicos más estudiados y mejor entendidos.

Los objetos HH se caracterizan por tener un gran número de líneas de emisión y un espectro continuo que ha sido observado tanto en ondas de radio, óptico, infrarrojo y rayos X. Esto diferencia a los jets HH de los jets extragalácticos, que generalmente sólo muestran emisión en el continuo (salvo algunos casos particulares de jets en galaxias Seyfert). La escala de tiempo en la que evolucionan estos objetos es lo suficientemente corta como para alcanzar a ser estudiados ampliamente en un período que es comparable con la duración de una vida humana. Los objetos HH suelen estar espacialmente resueltos y sus movimientos propios suelen determinarse con gran precisión (Raga et al., 2020).

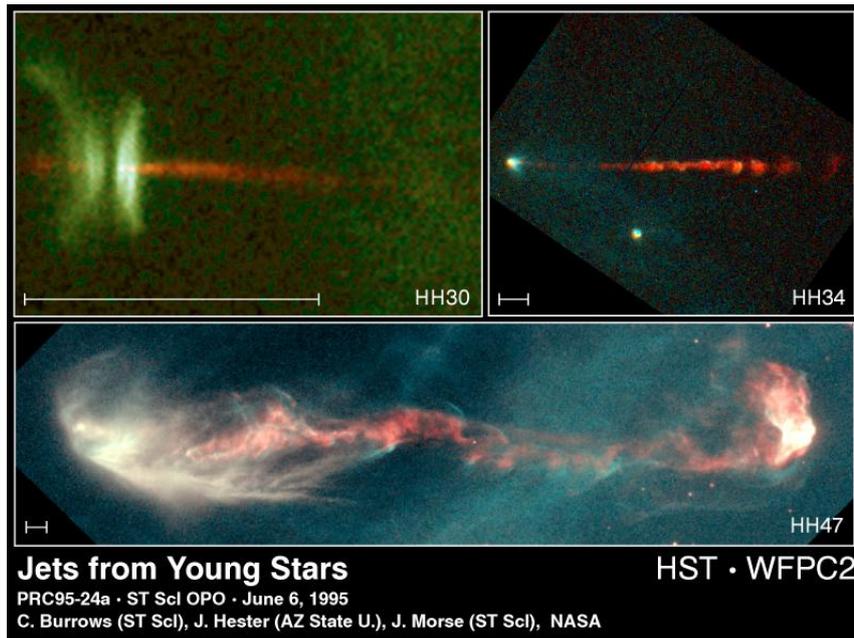


Figura 1.2: Flujos de estrellas jóvenes, y sus correspondientes objetos HH, capturados con el telescopio espacial Hubble. Imagen tomada de: <https://www.spacetelescope.org/images/opo9524a/>

En la Figura 1.2 se muestran algunos ejemplos de objetos HH. En estas imágenes se puede apreciar claramente la estructura colimada del flujo eyectado y la presencia de una serie de *nudos* que siguen al objeto principal. Una de las explicaciones que se ha dado a la formación de estos *nudos* (Raga et al., 1990) consiste en considerar que la eyección del flujo es temporalmente variable. Esto ocasiona que el material que ha sido emitido en un momento anterior sea alcanzado por el material emitido en un momento posterior, dando lugar así a una serie de conglomeraciones, o nudos, a lo largo del jet.

Es muy común que los *jets* que dan lugar a la formación de objetos HH presenten una región denominada primer superficie de trabajo (o *head*) en la que el material emitido interacciona con el medio ambiente. Esta superficie de trabajo es una estructura dual constituida por un choque de proa (o *bow shock*), que colisiona directamente con el medio ambiente, y un disco de Mach (o *jet shock*), que frena el material eyectado por la fuente. Se suele considerar al *head* como el remanente del encendido del jet, fenómeno que se produce en un tiempo de $\sim 10^3 - 10^4$ años. En muchos de los objetos HH que se encuentran en el catálogo de Herbig (1974), se observan tales *heads*.

A pesar de que los mecanismos de producción, estructura, e interacción con el medio ambiente de este tipo de *jets* han sido ampliamente estudiados desde finales del siglo pasado (Raga et al., 1990), un problema que no ha tenido mucha atención es el efecto que tiene sobre el *jet head* un encendido lento en el que la velocidad aumenta de manera gradual (contrario a este enfoque, se suele suponer que el jet se enciende instantáneamente, a toda velocidad). Hasta donde sabemos, las únicas simulaciones previas de un jet encendido lentamente fueron realizadas por Lim et al. (2002), pero estos autores concentraron su estudio principalmente en la supervivencia de moléculas de H_2 en el *head* resultante.

En este trabajo retomamos el problema de un jet con encendido lento y analizamos la dinámica del *head* por medio de modelos analíticos y simulaciones numéricas. Consideramos que el *jet* presenta una simetría cilíndrica y que la velocidad de eyección incrementa linealmente con el tiempo. Adicionalmente, consideramos dos posibles casos para la densidad de eyección: 1) una densidad de eyección constante y 2) una tasa de pérdida de masa constante, tal que la densidad de eyección sea proporcional al inverso de la velocidad de eyección.

Los modelos analíticos desarrollados consideran que el material eyectado sigue un régimen de flujo libre hasta antes de alcanzar el *head*, y que el movimiento de la primer superficie de trabajo puede ser descrito mediante dos formalismos: el primero de ellos se basa en la condición de equilibrio de presión hidrodinámica, el segundo asume que el movimiento del *head* coincide con el movimiento del centro de masa de todo el material que ha entrado en la superficie de trabajo. El formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica (Raga and Cantó, 1998) describe correctamente la dinámica de una superficie de trabajo ideal (sin masa) que instantáneamente eyecta lateralmente la mayor parte del material que pasa a través del choque de proa y el disco de Mach (formando así una estructura que se conoce como *cocoon*). El formalismo de centro de masa, en cambio, resulta apropiado para describir una superficie de trabajo (con masa)

dentro de la cual permanece la mayor parte del material chocado (Cantó et al., 2000).

Las simulaciones numéricas resuelven las ecuaciones hidrodinámicas de Euler, en dos dimensiones, considerando una simetría axial. El código utilizado fue desarrollado por los autores del artículo *The Uniformly Accelerated Jet* (Castorena et al., entregado para publicación). Este código está paralelizado e incluye una función de enfriamiento radiativo que depende de la densidad, metalicidad, y temperatura, tal como se propone en Wang et al. (2014).

Con este trabajo se realiza por primera vez una comparación entre la dinámica descrita por simulaciones numéricas axisimétricas 2D y los formalismos analíticos de centro de masa y equilibrio de presión hidrodinámica.

Las soluciones analíticas y numéricas producto de esta tesis son la base de un artículo científico que ha sido enviado a la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica.

1.3. Objetivos

Generales

Analizar la evolución dinámica de jets estelares uniformemente acelerados en un medio homogéneo desde un punto de vista teórico (analítico y numérico). Estudiar la combinación de parámetros que resuelven la evolución de la cabeza del jet de manera satisfactoria. Comparar las soluciones analíticas obtenidas a partir de los formalismos de centro de masa y equilibrio de presión hidrodinámica, con las correspondientes soluciones numéricas, para así discernir las características más relevantes de cada uno de los modelos propuestos.

Particulares

- Proponer nuevas soluciones analíticas para describir la evolución del *head* de un jet uniformemente acelerado mediante dos distintos formalismos, centro de masa y equilibrio de presión hidrodinámica.
- Generar un código numérico 2D para resolver la dinámica de jets uniformemente acelerados, que evolucionan en un medio homogéneo.
- Incluir al código una función de enfriamiento radiativo que dependa de las condiciones físicas del medio (densidad, temperatura y metalicidad).
- Determinar las posiciones numéricas del *bow shock* y del *jet shock* a partir de la comparación de cantidades físicas, como la presión o la densidad, en celdas contiguas de la malla numérica.
- Paralelizar, y convertir a un sistema de unidades cgs, el código numérico.
- Comparar las soluciones analíticas, obtenidas a partir de los formalismos de centro de masa y equilibrio de presiones hidrodinámicas, y las soluciones numéricas, obtenidas a partir del código numérico 2D.

Capítulo 2

Modelos analíticos

2.1. Un jet uniformemente acelerado

Consideramos que la velocidad de eyección del jet incrementa linealmente con el tiempo, es decir, tiene un perfil de velocidad de la forma:

$$u_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ a\tau, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

siendo a una aceleración, que se supone constante, y τ el tiempo de eyección del flujo. Asumimos que la geometría del jet es cilíndrica, por lo que su correspondiente sección efectiva, σ , resulta independiente de la posición. Suponemos también que el movimiento del jet se lleva a cabo en un medio homogéneo de densidad ρ_a . La estructura general del jet considerado en este estudio se presenta en la Figura (2.1).

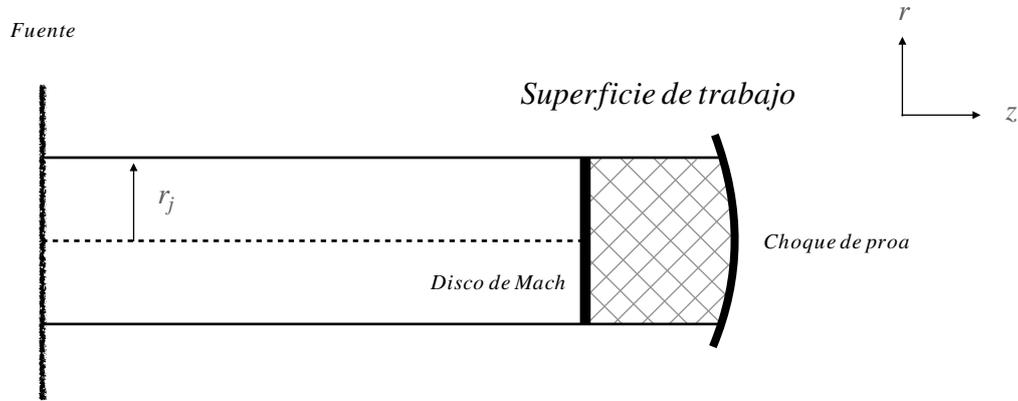


Figura 2.1: Estructura general de un jet uniformemente acelerado con geometría cilíndrica. A la izquierda se indica la *Fuente*, que es el sitio desde el cual se eyecta el jet; r_j representa el radio del jet. La malla en gris representa la *Superficie de trabajo*, conformada por el *Disco de Mach* (que frena el material eyectado por la fuente) y el *Choque de proa* (que colisiona directamente con el medio ambiente).

Los dos posibles casos para la densidad de eyección son:

1. Una tasa de pérdida de masa por unidad de área constante ($\dot{m} = \text{cte.}$), tal que la densidad de eyección sea proporcional al inverso de la velocidad

$$\rho_0(\tau) = \frac{\dot{m}}{u_0(\tau)} \quad (2.2)$$

2. Una densidad de eyección independiente del tiempo

$$\rho_0 = \text{cte.} \quad (2.3)$$

Al seguir un régimen de flujo libre, el material eyectado satisface la condición:

$$u(x, t) = \frac{x}{t - \tau} = u_0(\tau), \quad (2.4)$$

donde $u(x, t)$ representa la velocidad de una parcela de fluido que se encuentra a una distancia x de la fuente en un cierto tiempo t de evolución, y $u_0(\tau)$ representa la velocidad del material eyectado en un tiempo τ . Puesto que asumimos que el flujo que conforma el jet presenta una simetría cilíndrica y sigue el régimen antes mencionado, la densidad está dada por:

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0 u_0}{u_0 - (t - \tau)\dot{u}_0}, \quad (2.5)$$

siendo $\rho_0(\tau)$ la densidad de eyección (ver ecuaciones 2.2 y 2.3) y \dot{u}_0 la derivada de la velocidad con respecto al tiempo de eyección (ver Raga and Kofman, 1992, para una derivación completa de la ecuación 2.5).

Cuando el material comienza a ser eyectado ($\tau = 0$), una primer superficie de trabajo se forma a un tiempo $t = 0$, en la posición $x = 0$ (ver ecuación 2.4). Este *head* se aparta de la fuente que emite el material a medida que el tiempo t aumenta. Para describir la evolución de tal superficie de trabajo utilizamos dos aproximaciones analíticas:

- a) *Centro de masa* - considera que la posición de la superficie de trabajo coincide con el centro de masa del material eyectado (que sigue un régimen de flujo libre).
- b) *Equilibrio de presión hidrodinámica* - considera que el movimiento de la superficie de trabajo está determinado por el equilibrio entre las presiones hidrodinámicas del jet y del medio.

La primera de las aproximaciones es apropiada para describir una superficie de trabajo en la que permanece la mayor parte del material chocado, mientras que la segunda aproximación es válida para una superficie de trabajo que eyecta lateralmente la mayor parte del material con el que interactúa, formando una estructura conocida como *cocoon*.

En resumen, desarrollamos cuatro modelos analíticos basados en las posibles combinaciones entre densidad de eyección y formalismo analítico: dos opciones para el formalismo de centro de masa y dos para el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica (ver ecuaciones 2.2 y 2.3). Todos los modelos comparten la misma velocidad de eyección, linealmente acelerada, que se presenta en la ecuación (2.1).

Una descripción detallada de cada uno de los formalismos analíticos, así como su aplicación a cada uno de los posibles casos en la densidad de eyección, se presenta a continuación.

2.2. Centro de masa

Este formalismo se basa en la idea de una superficie de trabajo que conserva la masa a lo largo de toda su evolución, es decir, una estructura dentro de la cual permanece la mayor parte del material que pasa a través de ella. La posición de tal superficie de trabajo (conformada por el choque de proa y el disco de Mach) coincide con la posición del centro de masa de todas las parcelas de fluido que, siguiendo un régimen de flujo libre, se han apilado en su interior.

La expresión que describe la posición del centro de masa es:

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad (2.6)$$

siendo x la posición de una parcela de fluido a lo largo del jet y dm el elemento diferencial de masa, dado por

$$dm = \sigma \rho_0(\tau) u_0(\tau) d\tau + \sigma \rho_a(x) dx. \quad (2.7)$$

La primer componente de la expresión (2.7) está asociada a la variabilidad del material

eyectado, la segunda en cambio se debe al movimiento del flujo a través de un medio estacionario. Ambas componentes incluyen la sección del jet, σ , que se supone constante, es decir, independiente de la posición. La densidad y la velocidad de eyección están dadas, respectivamente, por $\rho_0(\tau)$ y $u_0(\tau)$. Finalmente, la densidad del medio, que en principio podría depender de la posición, es ρ_a .

Utilizando las ecuaciones (2.4 - 2.7) y considerando que el tiempo de eyección τ' se integra desde 0 hasta τ (siendo este último el tiempo de eyección del material que al tiempo t llega a la superficie de trabajo) se encuentra que:

$$x_{cm} \left[\int_0^\tau \rho_0(\tau') u_0(\tau') d\tau' + \int_0^{x_{cm}} \rho_a dx \right] = \int_0^\tau x_j \rho_0(\tau') u_0(\tau') d\tau' + \int_0^{x_{cm}} x \rho_a dx, \quad (2.8)$$

donde se ha elegido una densidad del medio homogénea, $\rho_a = \text{cte.}$, y se ha expresado como x_j la posición que las parcelas de fluido deberían tener si siguieran un régimen de flujo libre (ver ecuación 2.4):

$$x_j = (t - \tau') u_0(\tau'). \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8), y recordando la elección que se hizo para la velocidad de eyección (ver ecuación 2.1), se encuentra finalmente que:

$$x_{cm} \left[\int_0^\tau \rho_0(\tau') a\tau' d\tau' + \frac{\rho_a x_{cm}}{2} \right] = \int_0^\tau (t - \tau') a^2 \tau'^2 \rho_0(\tau') d\tau'. \quad (2.10)$$

Para poder resolver las integrales restantes es necesario especificar la forma de la densidad de eyección, $\rho_0(\tau')$. Consideremos en primer lugar el caso en el que la densidad es inversamente proporcional a la velocidad de eyección, y posteriormente el caso en el que la densidad de eyección es constante.

a) Pérdida de masa constante ($\dot{m} = \text{cte.}$)

En este caso la ecuación (2.10) toma la forma:

$$x_{cm} \left(\dot{m}\tau + \frac{\rho_a x_{cm}}{2} \right) = \dot{m}a\tau^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\tau}{3} \right). \quad (2.11)$$

Para resolver la ecuación (2.11) hace falta expresar una única dependencia temporal (τ o t). A partir de la condición de flujo libre (ver ecuación 2.4) y la forma de la velocidad de eyección (ver ecuación 2.1) se encuentra que la relación entre estos dos tiempos es:

$$t = \frac{x_{cm}}{a\tau} + \tau. \quad (2.12)$$

Por lo tanto, al sustituir t como función de τ , la ecuación (2.11) se convierte en

$$x_{cm}^2 + \frac{\dot{m}\tau}{\rho_a} x_{cm} - \frac{\dot{m}a\tau^3}{3\rho_a} = 0, \quad (2.13)$$

tomando la solución positiva de la ecuación anterior (pues la solución negativa nos llevaría a hallar una posición negativa), encontramos que:

$$x_{cm}(\tau) = \frac{\dot{m}\tau}{2\rho_a} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4a\rho_a\tau}{3\dot{m}}} \right]. \quad (2.14)$$

Si consideramos el límite en el que $\rho_a \rightarrow 0$, la ecuación (2.13) se reduce a la sencilla expresión:

$$x_{cm} = \frac{a\tau^2}{3}. \quad (2.15)$$

Por otro lado, si expresamos la ecuación de movimiento (2.11) en términos del tiempo de evolución, t , llegamos a una solución de la forma

$$x_{cm} = \frac{8}{9}x_c \left[\left(1 + \frac{3t}{4t_c} \right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9t}{8t_c} \right) \right], \quad (2.16)$$

donde se han definido las variables auxiliares

$$t_c \equiv \frac{\dot{m}}{a\rho_a} \quad \text{y} \quad x_c \equiv \frac{\dot{m}^2}{a\rho_a^2}. \quad (2.17)$$

La solución (2.16) puede reducirse a una expresión análoga a (2.15) si se realiza una expansión de Taylor a segundo orden para $t \ll t_c$ (lo cual corresponde al caso en el que $\rho_a \rightarrow 0$). En tal límite se encuentra una dependencia cuadrática en el tiempo de la forma:

$$x_{cm} \approx \frac{3}{16}at^2. \quad (2.18)$$

El comportamiento descrito por la solución (2.16), para un medio con una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$, se muestra en la Figura 2.2. Se ha considerado que el jet tiene un parámetro de aceleración $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y una pérdida de masa por unidad de área constante $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

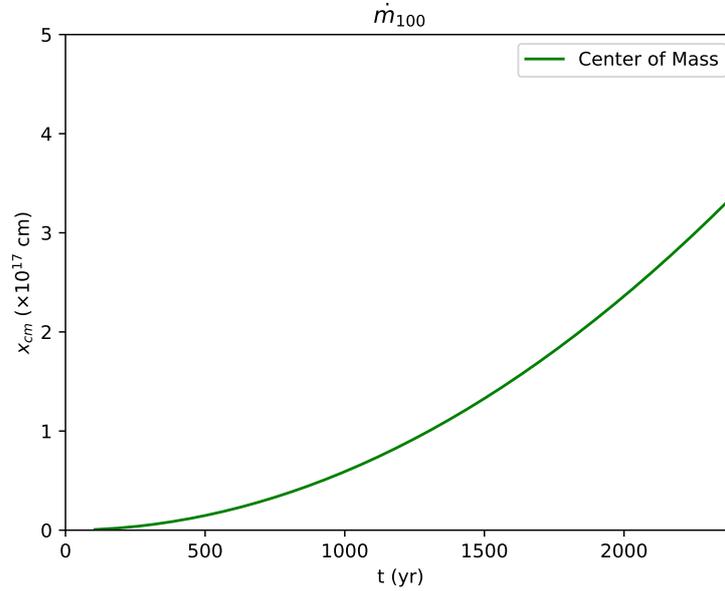


Figura 2.2: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para el formalismo de centro de masa, en el caso en el que la densidad es inversamente proporcional a la velocidad de eyección. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la pérdida de masa por unidad de área constante es $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

b) Densidad de eyección constante ($\rho_0 = \text{cte.}$)

En este caso la ecuación (2.10) toma la forma:

$$x_{cm} \left(\frac{\rho_0 a \tau^2}{2} + \frac{\rho_a x_{cm}}{2} \right) = \rho_0 a^2 \tau^3 \left(\frac{t}{3} - \frac{\tau}{4} \right), \quad (2.19)$$

donde el tiempo de evolución y el tiempo de eyección están nuevamente relacionados a través de la ecuación (2.12). Sustituyendo t como función de τ llegamos entonces a la ecuación de movimiento

$$x_{cm}^2 + \frac{\rho_0 a \tau^2}{3\rho_a} x_{cm} - \frac{\rho_0 a^2 \tau^4}{6\rho_a} = 0, \quad (2.20)$$

tomando la solución positiva de la ecuación anterior (pues la solución negativa nos llevaría a hallar una posición negativa), encontramos que:

$$x_{cm}(\tau) = \frac{\rho_0 a \tau^2}{6\rho_a} \left[-1 + \sqrt{1 + 6\frac{\rho_a}{\rho_0}} \right]. \quad (2.21)$$

Si consideramos nuevamente el límite en el que $\rho_a \rightarrow 0$, la ecuación (2.20) se reduce a la sencilla expresión:

$$x_{cm} = \frac{a\tau^2}{2}, \quad (2.22)$$

lo cual implica, tal como en el caso anterior, una dependencia cuadrática en el tiempo de eyección. De igual forma, es posible hallar una solución a la ecuación de movimiento (2.20) en términos del tiempo de evolución, mediante la relación (2.12). El resultado es:

$$x_{cm} = \frac{a}{9}\beta_0 \left[\frac{\beta_0(\beta_0^2 - 18) + (\beta_0^2 + 6)^{3/2}}{(\beta_0^2 - 2)^2} \right] t^2, \quad (2.23)$$

donde

$$\beta_0 \equiv \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_a}}. \quad (2.24)$$

La solución (2.23) representa un movimiento con una dependencia cuadrática en el tiempo t , y una aceleración constante g , dada por

$$g = \frac{2a}{9} \beta_0 \left[\frac{\beta_0(\beta_0^2 - 18) + (\beta_0^2 + 6)^{3/2}}{(\beta_0^2 - 2)^2} \right]. \quad (2.25)$$

En el límite $\rho_a \rightarrow 0$, tal expresión se aproxima a

$$g \approx \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} a \beta_0. \quad (2.26)$$

El comportamiento descrito por la solución (2.23), para un medio con una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$ (es decir, una densidad numérica $n = 100 \text{ cm}^{-3}$), se muestra en la Figura (2.3). Se ha considerado que el jet tiene un parámetro de aceleración $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y una densidad de eyección de masa constante $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$, es decir, una densidad numérica de átomos+iones $n_j = 1.66 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$.

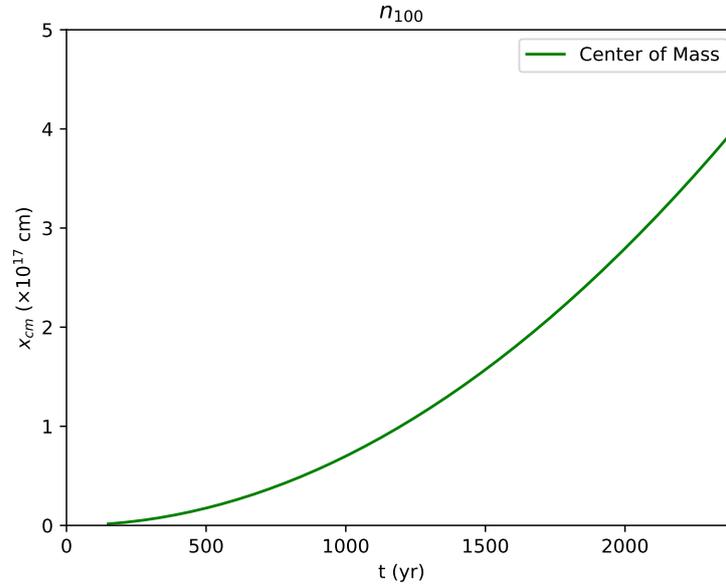


Figura 2.3: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para el formalismo de centro de masa, en el caso en el que la densidad de eyección es constante. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la densidad de eyección de masa constante es $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$.

2.3. Equilibrio de presión hidrodinámica

En la Figura 2.4 se muestra el esquema de un *head* que se propaga a través de un medio estacionario. Una primer superficie de trabajo así se caracteriza por tener una estructura conformada por dos choques: el primer choque se conoce como disco de Mach (o *jet shock*), es el responsable de frenar el material eyectado por la fuente; el segundo choque es conocido como *bow shock*, colisiona directamente con el medio ambiente y por lo tanto acelera el material que se encuentra a su alrededor. Ambos choques se alejan de la fuente emisora con una misma velocidad v_{ws} . Bajo este esquema, el material eyectado posee una velocidad v_j y una densidad ρ_j . La densidad del medio ambiente está expresada como ρ_a .

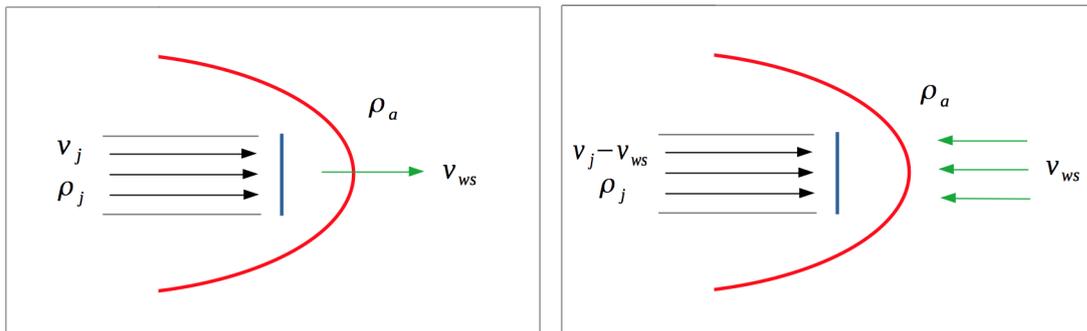


Figura 2.4: Superficie de trabajo de un *head* visto desde un marco de referencia que se encuentra en reposo con respecto a la fuente que emite el *jet* (izquierda) y desde un marco de referencia que se mueve junto con la superficie de trabajo (derecha). En rojo se representa el *bow shock* y en azul el *jet shock*. La densidad del medio es ρ_a , la velocidad de la superficie de trabajo es v_{ws} , la densidad del jet es ρ_j y la velocidad de eyección es v_j .

A pesar de que podría utilizarse un sistema de referencia como el que se muestra en el panel izquierdo de la Figura 2.4 para describir la dinámica del *head*, un análisis más conveniente se consigue al realizar una transformación galileana hacia un sistema de referencia que se aleja de la fuente con una velocidad v_{ws} , tal como el que se muestra en el panel derecho. Esta configuración resulta ser más conveniente porque desaparece la dependencia temporal y entonces el problema puede ser descrito mediante un conjunto

de ecuaciones conocido como relaciones de Rankine-Hugoniot:

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + P_1 &= \rho_2 u_2^2 + P_2 \\ u_1 \left(\frac{\rho_1 u_1^2}{2} + \frac{\gamma P_1}{\gamma - 1} \right) &= u_2 \left(\frac{\rho_2 u_2^2}{2} + \frac{\gamma P_2}{\gamma - 1} \right)\end{aligned}\quad (2.27)$$

donde los subíndices 1 representan las variables pre-choque y los subíndices 2 las variables post-choque. La primera de estas relaciones expresa la conservación de la masa, la segunda enuncia el hecho de que un choque implica una conversión de presión hidrodinámica en presión térmica, y la tercera hace referencia a la conversión de energía cinética en entalpía (Clarke et al., 2007).

Existe una forma de escribir las relaciones de Rankine-Hugoniot en términos del número de Mach, definido como $M_1 = \frac{u_1}{c_s}$, y la velocidad del sonido, $c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$. Tal forma resulta más práctica nuestros fines y es:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{u_1}{u_2} \\ P_2 &= P_1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_1^2} \rho_1 u_1^2\end{aligned}\quad (2.28)$$

En el límite $M_1 \gg 1$ el conjunto de ecuaciones (2.28) toma la forma de las llamadas relaciones de salto para choques fuertes:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \frac{u_1}{u_2}, \\ P_2 &= \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 u_1^2,\end{aligned}\quad (2.29)$$

estas relaciones son sumamente útiles para nuestro estudio pues consideramos un flujo en el que los dos choques que conforman el *head* se mueven a velocidades hipersónicas

(Raga et al., 2020). Así, las presiones post-choque quedan dadas por

$$P_{bs} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_a v_{ws}^2, \quad (2.30)$$

para el choque de proa (o *bow shock*), y

$$P_{js} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_j (v_j - v_{ws})^2, \quad (2.31)$$

para el disco de Mach (o *jet shock*). Las ecuaciones (2.30) y (2.31) son válidas siempre y cuando se considere que el calor específico, γ , tiene el mismo valor tanto en el jet como en el medio. En estas ecuaciones, v_j es la velocidad a la que se mueve el material con respecto a la fuente y ρ_j es la densidad del material eyectado que está pasando a través del disco de Mach.

Si la superficie de trabajo en cuestión se mueve con una velocidad constante entonces la siguiente condición debe satisfacerse:

$$\begin{aligned} P_{bs} &= P_{js} \\ \Rightarrow \rho_a v_{ws}^2 &= \rho_j (v_j - v_{ws})^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta expresión es conocida como la condición de equilibrio de presión hidrodinámica, y es lo que da sustento a este formalismo analítico. Esta condición también es válida para una superficie de trabajo que se mueve con una velocidad variable siempre y cuando la inercia del material entre el *bow shock* y el *jet shock* sea despreciable (esto sucede cuando, por ejemplo, la mayor parte del material que interacciona con la superficie de trabajo es eyectado lateralmente, formando una estructura conocida como *cocoon*).

A partir de la ecuación (2.32) se puede ver que

$$v_{ws} = \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_a}} (v_j - v_{ws}), \quad (2.33)$$

se reduce a

$$v_{ws} = \frac{\beta v_j}{1 + \beta}, \quad \text{con} \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_a}}. \quad (2.34)$$

Dada la configuración inicial de este problema, la velocidad del choque asociada con el *bow shock* es $v_{bs} = v_{ws}$, mientras que la velocidad de choque del *jet shock* (es decir, la velocidad con la que el material eyectado por la fuente pasa a través del *jet shock*) es

$$v_{js} = v_j - v_{ws}. \quad (2.35)$$

Utilizando (2.34), la velocidad de choque del *jet shock* se reduce a

$$v_{js} = \frac{v_j}{1 + \beta}. \quad (2.36)$$

Para bajos valores de β (ver ecuación 2.34), la velocidad de choque del *jet shock* se aproxima a $v_{js} \approx v_j$, y la superficie de trabajo se mueve lentamente ($v_{ws} \ll v_j$). En cambio, para altos valores de β se obtiene una rápida superficie de trabajo, con $v_{ws} \approx v_j$. En jets astrofísicos, el primer caso ($\beta \ll 1$) aplica para jets extragalácticos, el segundo caso ($\beta \gg 1$) resulta más apropiado para jets estelares (Raga et al., 2020).

Consideremos ahora la ecuación de movimiento de la superficie de trabajo: $v_{ws} = dx_{ws}/dt$. Haciendo que $v_j = u_0(\tau)$, es decir, que la velocidad del material que entra a la superficie de trabajo sea igual a la velocidad de eyección en el correspondiente tiempo τ , la ecuación (2.34) nos conduce a hallar:

$$\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_j}}\right) \frac{dx_{ws}}{dt} = u_0(\tau). \quad (2.37)$$

Nuevamente encontramos una expresión que contiene una doble dependencia temporal (tanto en τ como en t). Para salvar esta situación basta recordar que la condición de

flujo libre nos da una relación entre estos dos tiempos de la siguiente forma:

$$x_{ws} = (t - \tau)u_0(\tau). \quad (2.38)$$

Resolviendo para t y diferenciando con respecto a τ , se encuentra que:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{1}{u_0} \frac{dx_{ws}}{d\tau} - \frac{x_{ws}}{u_0^2} \frac{du_0}{d\tau}. \quad (2.39)$$

Al combinar las ecuaciones (2.37) y (2.39) se llega a la expresión:

$$\frac{dx_{ws}}{d\tau} \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_j}} = u_0 - x_{ws} \frac{d \ln u_0}{d\tau}. \quad (2.40)$$

En general, la densidad del material eyectado que entra al *head* es función tanto de la posición de la superficie de trabajo como del tiempo de evolución (ver ecuación 2.5), es decir, $\rho_j = \rho(x_{ws}, t)$. Por lo tanto, para la velocidad de eyección que elegimos (ver ecuación 2.1), la densidad queda determinada por:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{x_{ws}}{a\tau^2}}. \quad (2.41)$$

Sustituyendo este último resultado en (2.40) se llega finalmente a la ecuación:

$$\frac{dx_{ws}}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_a}} a\tau \sqrt{1 - \frac{x_{ws}}{a\tau^2}}. \quad (2.42)$$

Para poder resolver la ecuación anterior es necesario especificar la forma de la densidad de eyección, $\rho_0(\tau)$. Tal como en el formalismo anterior, consideraremos en primer lugar el caso en el que la densidad es directamente proporcional al inverso de la velocidad de eyección, y posteriormente el caso en el que la densidad de eyección es constante.

a) Pérdida de masa constante ($\dot{m} = \text{cte.}$)

En este caso la ecuación (2.42) toma la forma:

$$\frac{dx_{ws}}{d\tau} = \sqrt{\frac{\dot{m}}{\rho_a} \left(a\tau - \frac{x_{ws}}{\tau} \right)}. \quad (2.43)$$

Resulta conveniente definir las siguientes variables adimensionales:

$$\eta = \frac{a\rho_a^2}{\dot{m}^2} x_{ws}, \quad y = \frac{a\rho_a}{\dot{m}} \tau, \quad (2.44)$$

pues en términos de éstas la ecuación (2.43) toma la siguiente forma:

$$\frac{d\eta}{dy} = \sqrt{y - \frac{\eta}{y}}. \quad (2.45)$$

Al integrar numéricamente (2.45) es posible obtener la solución $\eta(y)$ que se muestra en la Figura 2.5. En esta figura se muestran también las soluciones

$$\eta_n(y) = y^2, \quad \eta_f(y) = \frac{2}{3}y^{3/2}, \quad (2.46)$$

que corresponden, respectivamente, a los casos límite en que $y \rightarrow 0$ (es decir, cuando la densidad del medio es muy baja, $\rho_a \ll 1$, o bien, cuando el tiempo de eyección $\tau \rightarrow 0$) y $y \gg 1$ (es decir, cuando la densidad del medio es muy alta $\rho_a \gg 1$ y el tiempo de eyección también lo es $\tau \gg 1$). Los subíndices en estas soluciones hacen referencia al tipo de aproximación que se está realizando ($n = \text{near}$, para referirse al caso en el que y se aproxima a 0, y $f = \text{far}$, para el caso en el que y es mucho mayor que 1).

Puesto que las soluciones en (2.46) representan dos regímenes con integrales analíticas, un promedio no lineal entre estas dos aproximaciones de la forma:

$$\eta^{(a)} = \left(\eta_n^{-5/4} + \eta_f^{-5/4} \right)^{-4/5}. \quad (2.47)$$

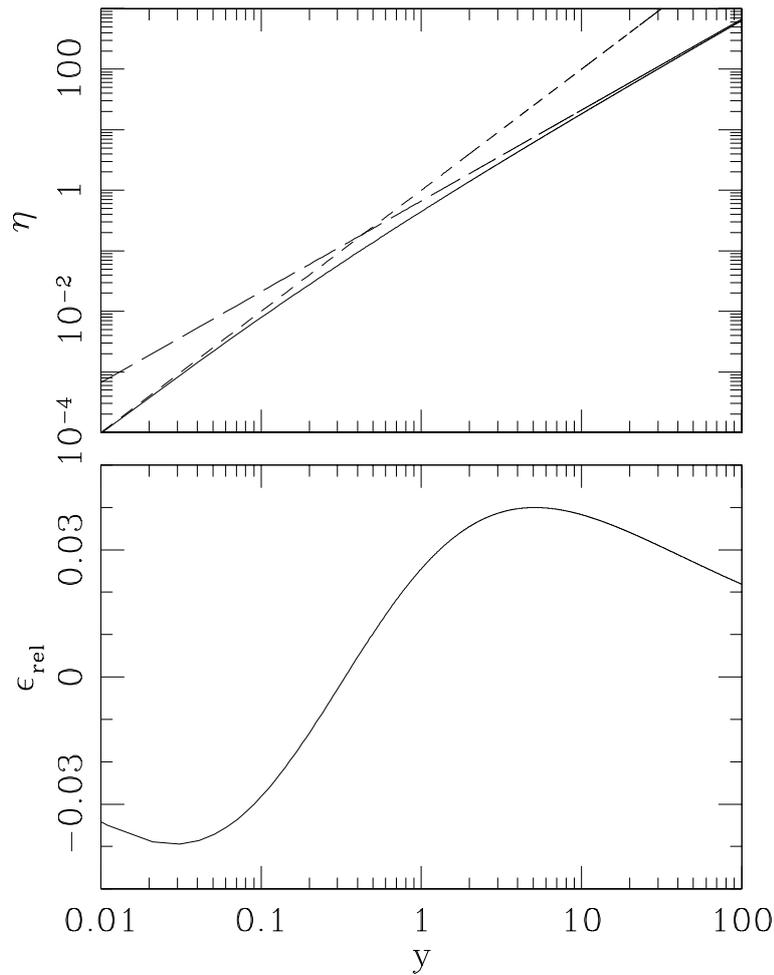


Figura 2.5: Panel superior: la línea curva sólida representa la solución exacta (i.e., numérica) de la ecuación (2.45); la línea discontinua (trazos cortos) representa la solución correspondiente al límite $y \rightarrow 0$ y la línea discontinua larga (trazos largos) corresponde a la solución en el límite $y \gg 1$. Panel inferior: desviación relativa de la solución analítica aproximada (ecuación 2.47) con respecto a la solución exacta (ecuación 2.45).

puede calcularse para obtener así una aproximación a la solución completa $\eta(y)$. Tal promedio tiene un error relativo $\epsilon_{rel} = \eta^{(a)}/\eta - 1 < 0.04$ con respecto a la solución exacta $\eta(y)$. De aquí que se concluya que este promedio es una muy razonable aproximación analítica a la solución. La dependencia entre el error relativo ϵ_{rel} y la variable adimensional y (ver ecuación 2.45) se muestra en el panel inferior de la Figura 2.5.

Otra posible aproximación a la solución numérica $\eta(y)$ es:

$$\eta^{(b)} = \frac{2y}{9} \left(-1 + \sqrt{1 + 9y} \right), \quad (2.48)$$

esta expresión coincide con la solución exacta en los límites $y \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$, y tiene una desviación máxima relativa de ≈ 0.09 . Esta interpolación tiene una forma funcional similar a la solución para el caso de pérdida de masa constante obtenida con el formalismo de centro de masa (ver ecuación 2.14). La solución numérica aproximada (2.48) se presenta en la Figura 2.6.

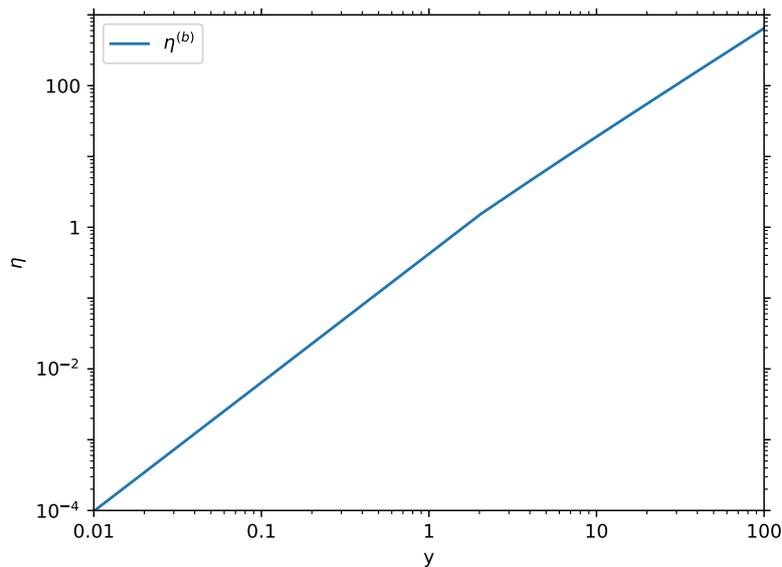


Figura 2.6: Solución numérica aproximada $\eta^{(b)}$ como función de la variable adimensional y (ver ecuaciones 2.44 y 2.45).

Si se sustituye (2.44) en (2.46), y esto en (2.47), se encuentra que la mejor solución

analítica aproximada a la ecuación de movimiento (2.43), en términos de las variables dimensionales correspondientes, es:

$$x_{ws} = \frac{\dot{m}^2}{a\rho_a^2} \left[\left(\frac{a\rho_a}{\dot{m}} \tau \right)^{-\frac{5}{2}} + \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{a\rho_a}{\dot{m}} \tau \right)^{-\frac{15}{8}} \right]^{-\frac{4}{5}}. \quad (2.49)$$

Al expresar la solución (2.49) en términos del tiempo de evolución, la trayectoria descrita por la superficie de trabajo, para un medio con una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$ (es decir, una densidad numérica $n = 100 \text{ cm}^{-3}$), sigue la tendencia mostrada en la Figura 2.7. En este caso se considera que el jet tiene un parámetro de aceleración $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y una pérdida de masa por unidad de área constante $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

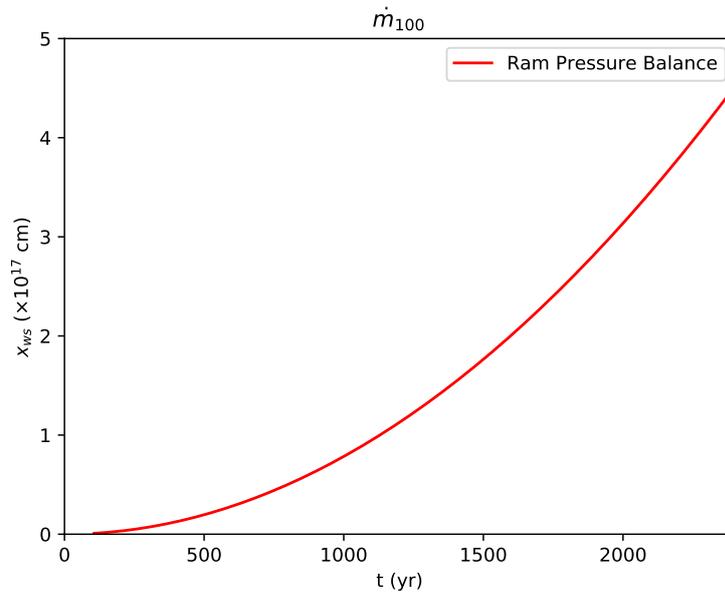


Figura 2.7: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica, en el caso en el que la densidad es inversamente proporcional a la velocidad de eyección. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la pérdida de masa por unidad de área constante es $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

b) Densidad de eyección constante ($\rho_0 = \text{cte.}$)

Fijando esta elección para la densidad de eyección en la ecuación (2.42), y ele-

vando al cuadrado tal expresión, se encuentra que:

$$\frac{\rho_a}{a\rho_0} \left(\frac{dx_{ws}}{d\tau} \right)^2 + x_{ws} - a\tau^2 = 0. \quad (2.50)$$

Proponiendo una solución que siga una ley de potencias se encuentra que:

$$x_{ws} = \frac{a\rho_0}{8\rho_a} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{16\rho_a}{\rho_0}} \right] \tau^2. \quad (2.51)$$

representa la solución a la ecuación (2.50); nuevamente se encuentra una dependencia cuadrática en el tiempo de eyección.

Si utilizamos la relación (2.12), es posible expresar la solución (2.51) como función del tiempo de evolución. El resultado es

$$x_{ws} = \frac{8a\beta_0^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\beta_0^2}} \right)}{\left[8 + \beta_0^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\beta_0^2}} \right) \right]^2} t^2, \quad (2.52)$$

donde β_0 está dado por la expresión (2.24).

En el límite $\beta_0 \ll 1$, que corresponde al límite físico en que la densidad del medio $\rho_a \gg 1$, la ecuación (2.52) se reduce a:

$$x_{ws} \approx \frac{a}{2} \beta_0^2 t^2. \quad (2.53)$$

Por otro lado, en el límite $\beta_0 \gg 1$, que corresponde al límite físico en que la densidad del medio $\rho_a \ll 1$, la ecuación (2.52) toma la forma:

$$x_{ws} \approx \frac{a}{4} t^2. \quad (2.54)$$

Tanto la expresión (2.53) como (2.54) implican una dependencia cuadrática en el tiempo de evolución t .

El comportamiento descrito por la ecuación (2.52), para un medio con una den-

sidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$, se muestra en la Figura 2.8. Se ha considerado que el jet tiene un parámetro de aceleración $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y una densidad de eyección de masa constante $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$.

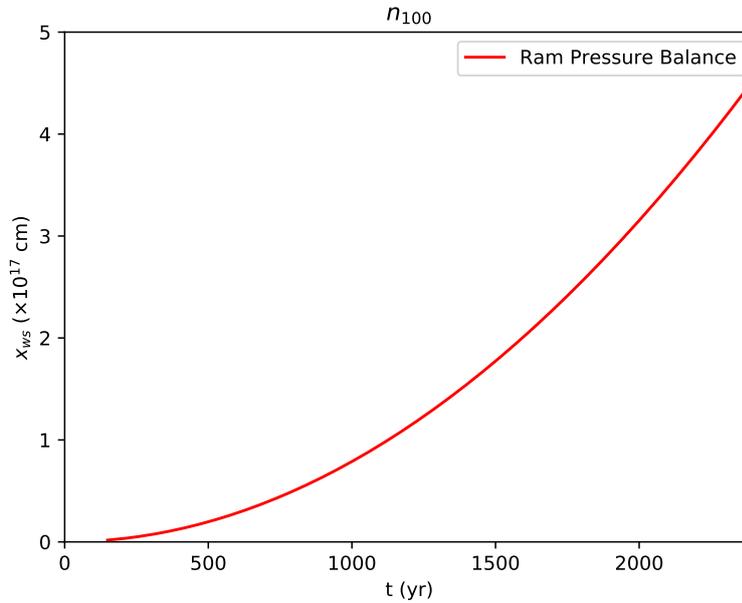


Figura 2.8: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica, en el caso en el que la densidad de eyección es constante. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la densidad de eyección de masa constante es $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$.

En las Figuras 2.9 - 2.12 se comparan las soluciones de los formalismos analíticos descritos anteriormente, tanto para los modelos con pérdida de masa constante (\dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000}) como para los modelos con densidad de eyección constante (n_{100} y n_{5000}). En los modelos \dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000} se considera que $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. En los modelos n_{100} y n_{5000} se considera que $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$. En todos los casos se utiliza un mismo parámetro de aceleración $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$.

En general, se observa que la trayectoria descrita por el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica se encuentra por encima de la trayectoria asociada con el formalismo de centro de masa. Esto implica que una superficie de trabajo evoluciona más rápidamente si se modela con el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica.

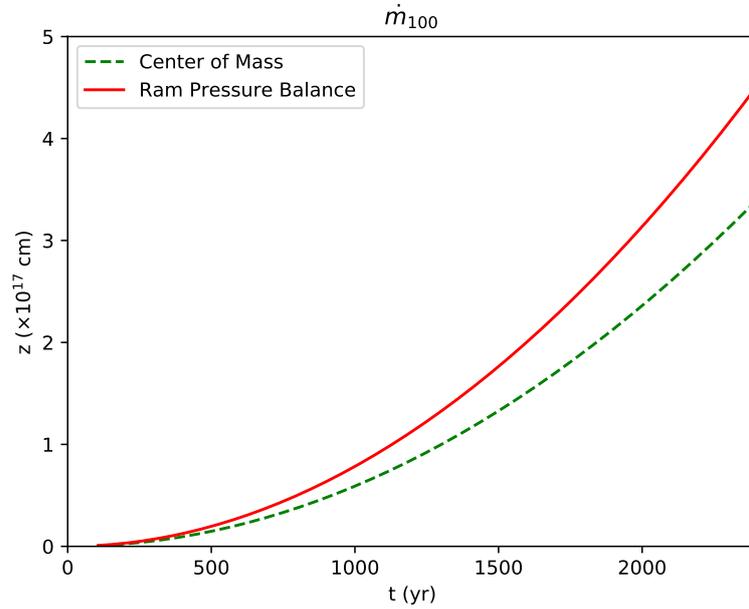


Figura 2.9: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para ambos formalismos analíticos, en el caso en el que la densidad de eyección es inversamente proporcional a la velocidad de eyección. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la pérdida de masa por unidad de área constante es $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

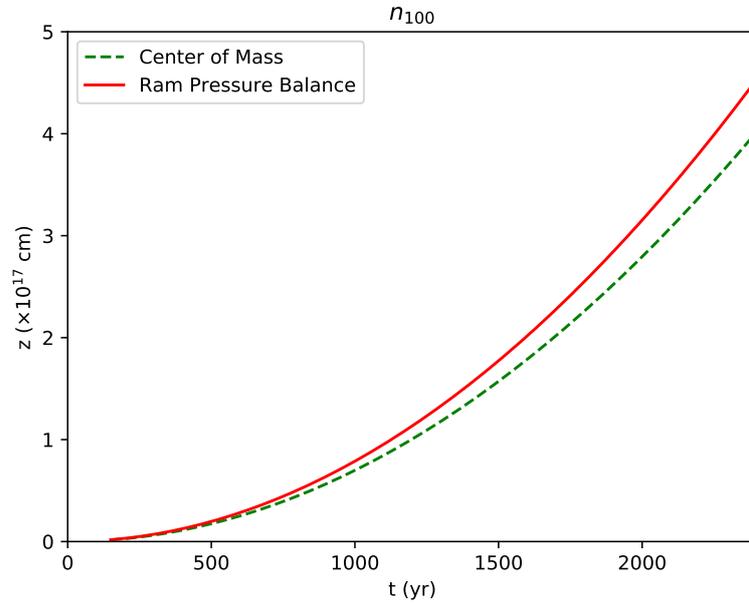


Figura 2.10: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para ambos formalismos analíticos, en el caso en el que la densidad de eyección es constante. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 2.16 \times 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la densidad de eyección de masa constante es $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$.

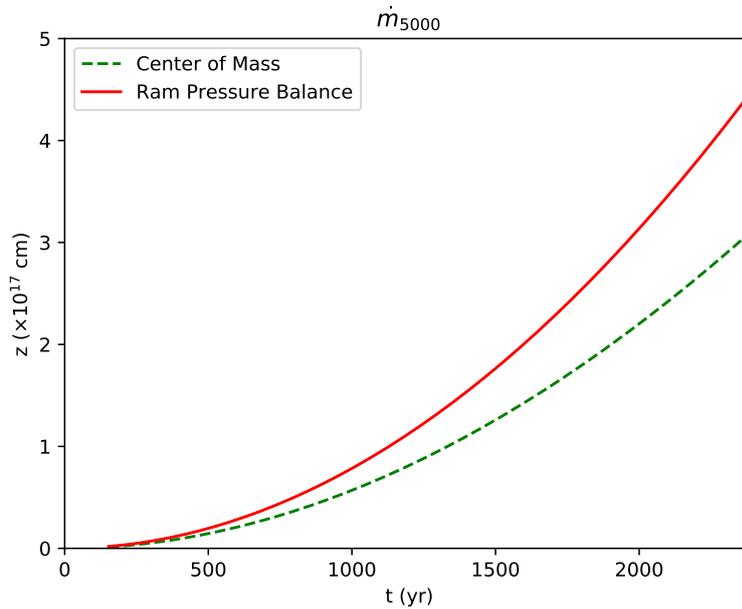


Figura 2.11: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para ambos formalismos analíticos, en el caso en el que la densidad de eyección es inversamente proporcional a la velocidad de eyección. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 5000 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 1.08 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la pérdida de masa por unidad de área constante es $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

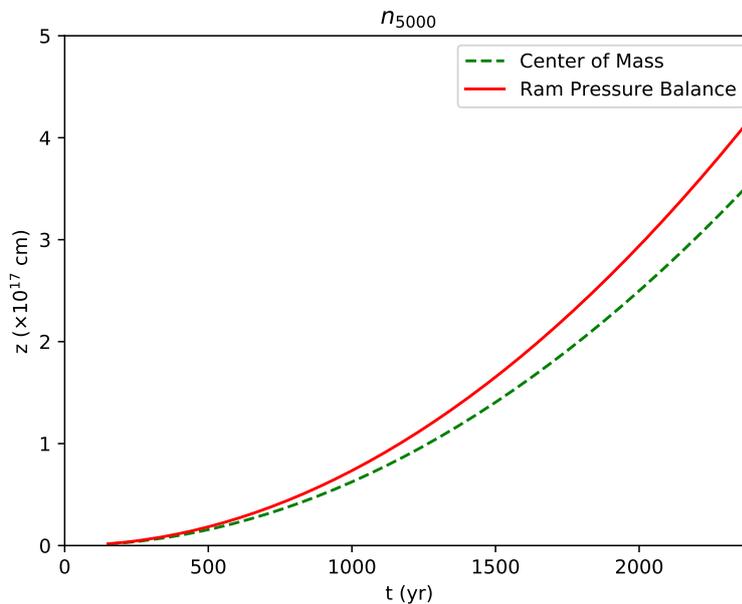


Figura 2.12: Posición de la superficie de trabajo como función del tiempo de evolución para ambos formalismos analíticos, en el caso en el que la densidad de eyección es constante. Se ha considerado que la densidad del medio es de $n = 5000 \text{ cm}^{-3}$, lo cual es equivalente a una densidad de masa $\rho_a = 1.08 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$. El parámetro de aceleración utilizado es de $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$ y la densidad de eyección de masa constante es $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$.

Capítulo 3

Simulaciones numéricas

El código utilizado para realizar las simulaciones fue desarrollado durante el curso de Hidrodinámica Numérica. Este código resuelve las ecuaciones de Euler en dos dimensiones, mediante el método de Godunov, considerando una simetría axial; está paralelizado, es de malla fija, y fue escrito en Fortran 90. Al código original (contenido en <https://bigbang.nucleares.unam.mx/astroplasmas>) se le implementaron las siguientes características:

- Inclusión de los términos fuente en las ecuaciones hidrodinámicas de Euler.
- Conversión de las cantidades físicas al sistema de unidades cgs.
- Implementación de la eyección del jet y modificación de las condiciones de frontera.
- Inclusión de una función de enfriamiento radiativo dependiente de las condiciones físicas (densidad, metalicidad y temperatura) del medio.
- Paralelización del código.
- Determinación de las posiciones del *bow shock* y del *jet shock* a partir de la

comparación del valor de cantidades físicas como la presión o la densidad en celdas contiguas.

3.1. Condiciones iniciales

Nuestra configuración inicial considera dos escenarios para cada uno de los posibles casos en la densidad de eyección (ver ecuaciones 2.2 y 2.3). En el primer escenario el jet se propaga a través de un medio homogéneo con una densidad numérica de 100 cm^{-3} , en el segundo escenario la propagación se lleva a cabo en un medio, también homogéneo, de 5000 cm^{-3} . Por simplicidad, se decidió utilizar la nomenclatura \dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000} para hacer referencia a los modelos con pérdida de masa constante, y n_{100} y n_{5000} para los modelos con densidad de eyección constante. En ambos casos el subíndice que acompaña al modelo hace referencia a la densidad numérica del medio en cuestión.

El dominio físico de estas simulaciones es de 0.02 pc a lo largo de la dirección radial (r) y 0.2 pc a lo largo de la dirección longitudinal (z). En ambas direcciones, la resolución espacial máxima alcanzada fue de $\sim 6.89 \text{ AU}$, lo cual corresponde a un dominio computacional de 600×6000 celdas.

En la Tabla 3.1 se presentan las condiciones físicas utilizadas durante las simulaciones. Los valores de pérdida de masa total, \dot{M}_j , y densidad numérica de eyección, n_j , calculados para los modelos de densidad constante y pérdida de masa constante, respectivamente, consideran un tiempo de eyección típico de 1000 años. Para determinar el parámetro de aceleración consideramos que la velocidad de eyección tiene un incremento de 100 km s^{-1} cada 1000 años, es decir, $a = 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$. Un mismo radio de jet se utilizó para todas las simulaciones: $r_j = 300 \text{ UA}^1$. Este radio representa

¹En un conjunto de simulaciones previas se consideró un jet con un radio de 50 UA . Los valores de los parámetros de aceleración, pérdida de masa por unidad de área y densidad de masa fueron los mismos que se consideraron en las simulaciones para el jet con un radio de 300 UA , sin embargo, la resolución espacial y el tiempo de evolución fueron distintos. Se consideró una malla de 500×4000 celdas, correspondiente a un dominio físico de 0.075 pc a lo largo de la

la distancia a lo largo del eje radial en la que se eyecta el jet. Una misma temperatura $T = 100$ K se consideró tanto en el jet como en el medio. Puesto que el flujo que consideramos en este estudio se mueve a velocidades hipersónicas, los choques que se producen se encuentran en el límite de choques fuertes. Por lo tanto, la temperatura post-choque será mucho mayor que la temperatura del jet. En ese sentido, elegir una temperatura del jet de 100 K o 1000 K no hará una diferencia significativa en los resultados.

Para los modelos con pérdida de masa constante (\dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000}) elegimos una tasa de pérdida de masa total igual a $\dot{M} = 3.35 \times 10^{-7} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$, que corresponde a una tasa de pérdida de masa por unidad de área de $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{g cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Para los modelos con densidad de eyección constante (n_{100} y n_{5000}) consideramos una densidad de masa $\rho_j = 3.60 \times 10^{-20} \text{g cm}^{-3}$, es decir, una densidad numérica de átomos+iones $n_j = 1.66 \times 10^4 \text{cm}^{-3}$ para un gas con 90 % H y 10 % He ($m_H + m_{He} = 2.17 \times 10^{-24} \text{g}$). Una vez que se ha determinado el valor de la densidad de eyección (o la tasa de pérdida de masa por unidad de área), el valor de la velocidad de eyección, $u(\tau)$, queda determinado por la ecuación (2.2).

Tabla 3.1: Condiciones físicas para las simulaciones numéricas.

Modelo	\dot{M}_j ($M_{\odot} \text{yr}^{-1}$)	n_j (cm^{-3})	n_a (cm^{-3})
n_{100}	$1.30 \times 10^{-7} *$	1.66×10^4	100
n_{5000}			5000
\dot{m}_{100}	3.35×10^{-7}	$1.55 \times 10^4 *$	100
\dot{m}_{5000}			5000

* Estos valores se calcularon para un tiempo de eyección $\tau = 1000 \text{yr}$.

dirección radial y 0.6 pc a lo largo de la dirección longitudinal. El tiempo total de evolución fue de 5000 años. Se decidió no incluir estos resultados en el presente trabajo debido a que las simulaciones correspondientes al jet con un radio de 300 UA tienen una mayor resolución y presentan una dinámica más compleja.

3.2. Ecuaciones hidrodinámicas de Euler

La dinámica de los fluidos compresibles está gobernada por un conjunto de leyes de conservación que se conocen como ecuaciones hidrodinámicas de Euler. Este sistema de ecuaciones es ideal para describir líquidos y gases que se encuentran a presiones muy altas. Expresadas en su forma más simple, estas ecuaciones no consideran las contribuciones debidas a fuerzas externas, esfuerzos viscosos o flujos de calor. En este trabajo se considera una pérdida de energía por enfriamiento radiativo, pero tal contribución será añadida a las ecuaciones más adelante, junto con los términos de simetría.

Una deducción detallada de cada una de las ecuaciones de Euler puede encontrarse en Raga et al., 2020. Aquí nos limitaremos únicamente a presentarlas en su forma vectorial, sin considerar contribuciones de fuerzas externas o esfuerzos viscosos, y posteriormente las llevaremos a una notación que resulte útil para resolverlas numéricamente.

Conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.1)$$

Conservación del momento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla P = 0, \quad (3.2)$$

Conservación de la energía:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(E + P)] = G - L. \quad (3.3)$$

siendo

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{P}{(\gamma - 1)}, \quad (3.4)$$

la energía total (térmica y cinética) por unidad de volumen, $\gamma = C_p/C_v$ el cociente entre los calores específicos, G la ganancia neta de energía (asociada con procesos de absorción) y L la pérdida neta de energía (asociada con procesos de emisión). Como es habitual, ρ representa la densidad de masa, P la presión y \mathbf{u} el vector velocidad.

Para describir un flujo sobre el cual no actúan fuerzas externas, y en el que los esfuerzos viscosos son despreciados, se suelen utilizar dos distintos tipos de variables, las *primitivas* y las *conservadas* (ver Toro (2013)). Puesto que en este trabajo se busca generar un código numérico capaz de resolver las ecuaciones que describen la dinámica de los gases, resulta más conveniente utilizar las variables conservadas. En términos de estas variables se pueden definir los siguientes vectores columna:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho uv^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

siendo ρ la densidad de masa, ρu el momento a lo largo de la componente x , ρv el momento a lo largo de la componente y , ρw el momento a lo largo de la componente z , p la presión y E la energía total por unidad de masa.

Con tales expresiones es posible reescribir las ecuaciones de Euler (3.1)-(3.3) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

siempre y cuando se considere que no hay ganancias o pérdidas de energía. Para tener en cuenta estas contribuciones energéticas, o el efecto de fuerzas externas, es necesario añadir a la expresión (3.6) otro vector columna \mathbf{S} con la información referente a los términos fuente:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ G - L + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

En este trabajo no se consideran fuerzas externas ni ganancias de energía, por lo que $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ y $G = 0$, pero sí se tienen en cuenta pérdidas de energía asociadas con el enfriamiento radiativo. Así, el sistema de ecuaciones a resolver es de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S}. \quad (3.8)$$

Este sistema se soluciona utilizando el método de los volúmenes finitos de Godunov y el algoritmo HLLC desarrollado por Toro en 1992.

3.3. Método de los volúmenes finitos (Godunov)

Un método de volúmenes finitos es una herramienta numérica utilizada para resolver un problema de valores iniciales². Este tipo de métodos se basan en la discretización de los dominios espacial y temporal, fueron propuestos para resolver las ecuaciones de la dinámica de los fluidos por von Neumann (1950), posteriormente fueron desarrollados

²Un problema de valores iniciales es un conjunto de ecuaciones diferenciales sujetas a determinadas condiciones iniciales. Cuando el conjunto de ecuaciones se compone de variables conservadas con una condición inicial de datos constantes separados por una discontinuidad, el problema en cuestión toma el nombre de *problema de Riemann*.

por Lax (1954), y perfeccionados por Godunov (1959).

La manera en que una discretización de los dominios espacial y temporal se lleva a cabo depende principalmente del esquema que decida utilizarse (Toro, 2013). En este trabajo utilizamos un esquema de Godunov (1959).

El punto de partida para resolver el sistema de ecuaciones (3.8) por medio del esquema de Godunov consiste en expresar las ecuaciones de Euler, en una dimensión, en su forma integral:

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right] = 0, \quad (3.9)$$

resolviendo la integral temporal en el primero de los sumandos y la integral espacial el segundo, se encuentra que:

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x} \left\{ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [U(x, t + \Delta t) - U(x, t)] dx + \int_t^{t+\Delta t} [F(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - F(x_{i-\frac{1}{2}}, t)] dt \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Considerando el promedio espacial de las cantidades en la i -ésima celda:

$$\tilde{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t) dx, \quad (3.11)$$

y el promedio temporal de los flujos:

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F [U(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dx] dx, \quad (3.12)$$

es posible hallar una solución exacta a las ecuaciones de Euler de la forma:

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \tilde{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right], \quad (3.13)$$

o bien, omitiendo las tildes de \mathbf{U} y \mathbf{F} :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.14)$$

Esta última expresión se puede extender fácilmente a dos dimensiones, resultando en:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.15)$$

siendo n la variable que discretiza el tiempo de la forma $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Antes de avanzar la solución en cada una de las celdas, es necesario calcular el paso de tiempo Δt mediante *la condición de Courant-Friedrichs-Lewy*:

$$\Delta t = C_o \frac{\Delta x}{|u|_{max} + c_s}, \quad (3.16)$$

con $C_o < 1$ un parámetro que se establece en el código, $|u|_{max}$ la máxima velocidad que se alcanza en una celda particular y c_s la velocidad del sonido. Esta condición asegura la estabilidad y convergencia del método (Esquivel, 2020).

3.4. Términos de simetría

Una de las modificaciones realizadas al código consistió en cambiar la configuración bidimensional cartesiana por una correspondiente configuración cilíndrica. Cuando se realiza una transformación desde una simetría cartesiana hacia otra tipo de simetría es necesario incluir los términos correspondientes en las ecuaciones de conservación.

Consideremos un flujo con velocidad $\vec{u} = (u, v)$ en un sistema de referencia cilíndrico de la forma (z, r) . En tal sistema $u = v_z$ y $v = v_r$, por lo que las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los gases, sin fuerzas externas ni ganancia de energía, son:

Conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \rho u + \frac{\partial}{\partial r} \rho v + \frac{\rho u}{r} = 0, \quad (3.17)$$

Conservación del momento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} \rho u^2 + \frac{\partial}{\partial r} \rho u v \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\rho u v}{r} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho u v + \frac{\partial}{\partial r} \rho v^2 \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\rho v^2}{r} = 0, \quad (3.19)$$

Conservación de la energía:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} u(E + P) + \frac{\partial}{\partial r} v(E + P) + \frac{v(E + P)}{r} = -L, \quad (3.20)$$

siendo

$$E = \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)}, \quad (3.21)$$

$$L = \sum_X n_e n_X \alpha_X. \quad (3.22)$$

En la ecuación (3.22), n_e es la densidad de electrones, n_X es la densidad de partículas que producen el enfriamiento y α_X es un coeficiente asociado con los procesos de enfriamiento que involucran a los electrones y a las especies X . En general, X puede ser un ion o un átomo. Las unidades de la tasa de pérdida de energía, o tasa de enfriamiento L , son $[\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1}]$. La forma de la función de enfriamiento dada en la ecuación (3.22) es adecuada para incluir el enfriamiento por recombinación, por emisión libre-libre, por ionización colisional y por emisión de líneas excitadas colisionalmente, en el límite de bajas densidades electrónicas.

3.5. Función de enfriamiento

La tasa de pérdida de energía incluida en nuestras simulaciones produce un cambio en la temperatura (y/o la energía térmica) del gas en cada paso temporal adicional al producido por los procesos hidrodinámicos (expansión, compresión, choques). Incluimos el efecto de tal pérdida energía de la siguiente forma:

- Primero calculamos el paso temporal hidrodinámico sin tener en cuenta la pérdida de energía.
- Posteriormente calculamos un paso temporal de pérdida de energía para cada celda (suponiendo que la celda tiene una densidad constante durante este paso temporal). Esto resulta en que cada una de las celdas tenga una cierta “temperatura final” T_f .

Con esta temperatura recalculamos la energía total de cada celda como:

$$E = \frac{nk}{\gamma - 1} T_f + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}. \quad (3.23)$$

La energía térmica se define como $E_{th} = P/(\gamma - 1)$, por lo tanto, su evolución, a densidad constante, puede describirse mediante la ecuación:

$$\frac{\partial E_{th}}{\partial t} = \frac{nk}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial t} = G - L, \quad (3.24)$$

siendo G y L las tasas de ganancia y pérdida de energía, respectivamente, n la densidad numérica del gas y T la temperatura. Para realizar un paso temporal semi-implícito de la pérdida/ganancia de energía, suponemos que dentro del paso temporal G es constante y la función de enfriamiento tiene una dependencia lineal con la temperatura:

$$L = L_0 \left(\frac{T}{T_0} \right), \quad (3.25)$$

con L_0 la tasa de pérdida de energía a una temperatura $T = T_0$, que se alcanza al inicio del paso temporal. Sustituyendo (3.25) en (3.24) se encuentra que

$$\frac{nk}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial t} = G - L_0 \left(\frac{T}{T_0} \right). \quad (3.26)$$

Al integrar esta última expresión desde una temperatura inicial T_0 hasta una temperatura final T_f , y desde un tiempo inicial t_0 hasta un cierto tiempo final t_f , se obtiene:

$$\int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{G - L_0(T/T_0)} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{(\gamma - 1) dt}{nk}, \quad (3.27)$$

o bien, resolviendo las integrales y utilizando $\Delta t = t_f - t_0$,

$$-\frac{(\gamma - 1)L_0}{T_0} \frac{\Delta t}{nk} = \ln \left(\frac{G - L_0(T_f/T_0)}{G - L_0} \right). \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) describe la evolución de la energía térmica en general, sin embargo, cuando se considera que no hay ganancias de energía en el sistema ($G = 0$) toma una forma particularmente simple. En tal caso, al hacer $G = 0$ y despejar a la temperatura, la ecuación (3.28) toma la forma:

$$T_f = T_0 e^{-L_0(\gamma-1)\Delta t/nkT_0} \quad (3.29)$$

Esta expresión para la temperatura es la que se debe incluir en el cálculo de la energía total (ecuación 3.23). En el código desarrollado para este trabajo la rutina de enfriamiento obtiene una L_0 a partir de una temperatura inicial T_0 y una densidad n .

En el Apéndice B se presenta la manera en que se implementó dentro del código el cálculo de la ecuación de energía para cada una de las celdas. De igual forma, se presenta

la sección del código desarrollada para incluir la función de enfriamiento utilizada a lo largo de este trabajo.

Cuando se estudia un sistema que sigue un régimen de bajas densidades es habitual que se considere una función de enfriamiento, independiente de la densidad, de la siguiente forma:

$$\Lambda = \frac{L}{n_e n_H}, \quad (3.30)$$

siendo n_H la densidad numérica del hidrógeno, n_e la densidad de electrones, y [erg cm³ s⁻¹] las unidades que caracterizan a la función de enfriamiento Λ en el sistema CGS.

La función de enfriamiento Λ (ver la ecuación 3.30) tiene implícito que sepamos cuál es la dependencia del estado de ionización de cada especie atómica/iónica y cuáles son las abundancias de cada especie. Por más que el estado de ionización fuera de equilibrio en principio debe ser calculado junto con la integración de las ecuaciones hidrodinámicas, se pueden hacer dos aproximaciones simplificantes:

1. Suponer que el estado de ionización viene dado por la condición de equilibrio coronal (entre ionizaciones colisionales y recombinaciones), que da una receta completa del estado de ionización en función de la temperatura.
2. Considerar que el estado de ionización corresponde al de una parcela de gas que se enfría isocóricamente (a densidad constante) desde una temperatura alta. Esto también da una determinación del estado de ionización de todas las especies en función de la temperatura.

En nuestras simulaciones, incluimos la función de enfriamiento de Wang et al. (2014), calculada para un gas en equilibrio coronal. Esta función de enfriamiento incluye en forma explícita la dependencia de Λ con la temperatura y la metalicidad del gas.

También, están consideradas las pérdidas de energía por excitación de líneas fuera del límite de baja densidad.

Siguiendo a Wang et al. (2014) entonces escribimos:

$$L(T, n_H, Z) = n_e n_H \Lambda(T, n_H, Z). \quad (3.31)$$

Esta tasa de enfriamiento es mucho más reciente que aquéllas utilizadas en estudios previos de jets estelares (Dalgarno and McCray (1972), Raymond et al. (1976), etc.). Resulta más conveniente pues, como se comentó anteriormente, puede utilizarse en un amplio rango de metalicidades ($Z < 30Z_\odot$) y densidades ($n_H < 10^{12} \text{ cm}^{-3}$). La función de enfriamiento que incluye la expresión (3.31) está compuesta por la suma de cuatro contribuciones. La primera corresponde al enfriamiento producido por los átomos o iones de Hidrógeno y Helio ($\Lambda_{H\&He}$), e incluye las interacciones *bremsstrahlung* ión-electrón. La segunda está asociada con el enfriamiento ocasionado por los átomos e iones más pesados que el Helio (Λ_{metal}), y también incluye las interacciones *bremsstrahlung* ión-electrón. La tercera corresponde al enfriamiento producido únicamente por la interacción *bremsstrahlung* entre electrones (Λ_{ee}), muy importante para $T > 10^9$ K. La cuarta considera la contribución debida al enfriamiento por la interacción con granos de polvo, que es relevante a altas temperaturas siempre y cuando los granos sobrevivan (Λ_{grain}). Una exposición mucho más detallada sobre esta función de enfriamiento se puede encontrar en Wang et al. (2014).

En la Figura 3.1 se presenta una comparación entre la función de enfriamiento utilizada en este trabajo y las funciones de enfriamiento obtenidas por Dere et al. (2009) y Raga et al. (2000), para distintos valores de densidad y metalicidad.

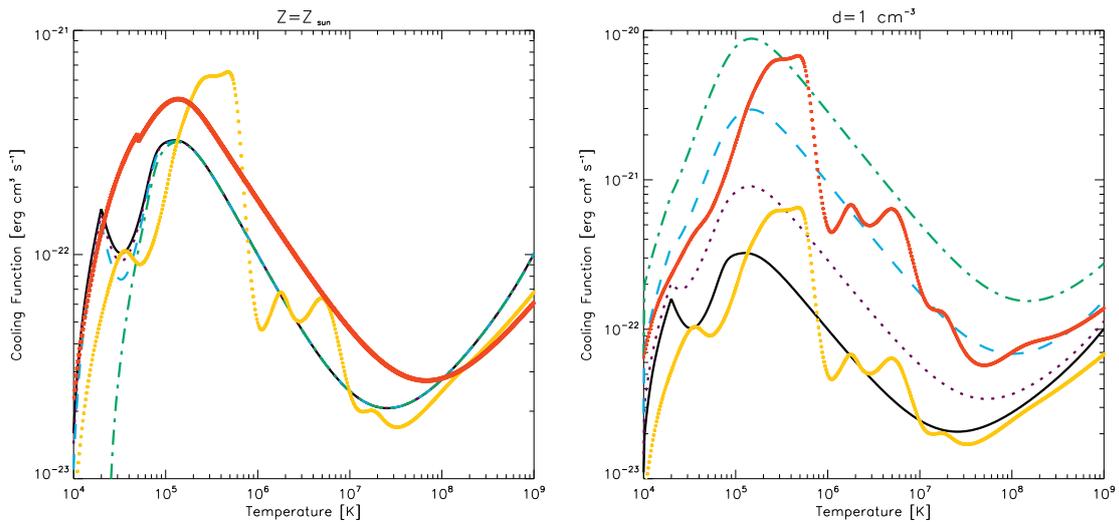


Figura 3.1: Función de enfriamiento para distintos valores de densidad (izquierda) y metalicidad (derecha). Panel izquierdo: se considera una metalicidad $Z = Z_{\odot}$; en rojo se representa la función obtenida por Raga et al. (2000), en amarillo se representa la función calculada a partir de Dere et al. (2009) (estas funciones de enfriamiento son independientes de la densidad, pues fueron construidas para un régimen de bajas densidades, tal como se describe en la ecuación 3.30); mediante líneas se representa la función utilizada en este trabajo, la línea sólida en color negro es para una densidad $n = 1 \text{ cm}^{-3}$, las líneas cortas en color morado son para una densidad $n = 10 \text{ cm}^{-3}$, las líneas largas en color azul se utilizan para una densidad $n = 100 \text{ cm}^{-3}$, la combinación de líneas cortas y largas en color verde son para una densidad $n = 1000 \text{ cm}^{-3}$. Panel derecho: se considera una densidad $n = 1 \text{ cm}^{-3}$; en color amarillo y rojo se presenta la función calculada a partir de Dere et al. (2009), la línea amarilla es la función para una metalicidad solar ($Z = Z_{\odot}$) y la línea roja es para treinta veces la metalicidad solar ($Z = 30 Z_{\odot}$); mediante líneas se representa la función utilizada en este trabajo, la línea sólida en color negro es para una metalicidad solar (Z_{\odot}), las líneas cortas en color morado son para tres veces la metalicidad solar ($3 Z_{\odot}$), las líneas largas en azul se utilizan para diez veces la metalicidad solar ($10 Z_{\odot}$), la combinación de líneas cortas y largas en color verde son para treinta veces la metalicidad solar ($30 Z_{\odot}$).

Capítulo 4

Resultados

Realizamos cuatro simulaciones numéricas, dos para los modelos con pérdida de masa constante (\dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000}) y dos para los modelos con densidad de eyección constante (n_{100} y n_{5000}). En la Figura 4.1 se muestra la estratificación en densidad y temperatura, para los cuatro modelos antes mencionados, correspondiente a un tiempo evolutivo igual a 2400 años. Al examinar esta figura encontramos importantes diferencias cualitativas. Una diferencia es que en los modelos con densidad de eyección constante (n_{100} y n_{5000}) las superficies de trabajo recorren mayores distancias que en los modelos con pérdida de masa constante (\dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000}). Esta disparidad es consecuencia de la dependencia entre la tasa de momento eyectado, $\dot{M}_j v_j$, y la velocidad de eyección, v_j . Mientras que en los modelos con pérdida de masa constante la dependencia es lineal, en los modelos con densidad de eyección constante la dependencia es cuadrática.

Al estudiar simulaciones numéricas de jets HH es usual encontrar los más altos valores de densidad y presión en la región frontal del jet, a lo largo del eje de simetría. Sin embargo, no todas las superficies de trabajo que simulamos obedecen tal comportamiento. En los modelos con pérdida de masa constante (\dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000}) se observa la formación de una estructura de choque incidente/reflejado que atraviesa el *head*. Esta

estructura es producida por la disminución drástica en los valores de densidad y presión del jet. Tal disminución ocasiona que se formen zonas en el *head* que se mueven mucho más rápido fuera del eje de simetría que sobre él (ver los dos paneles inferiores de la Figura 4.1). Es usual encontrar este tipo de estructuras en simulaciones numéricas de jets que cumplen con los parámetros adecuados (Raga, 1988; Downes and Ray, 1999).

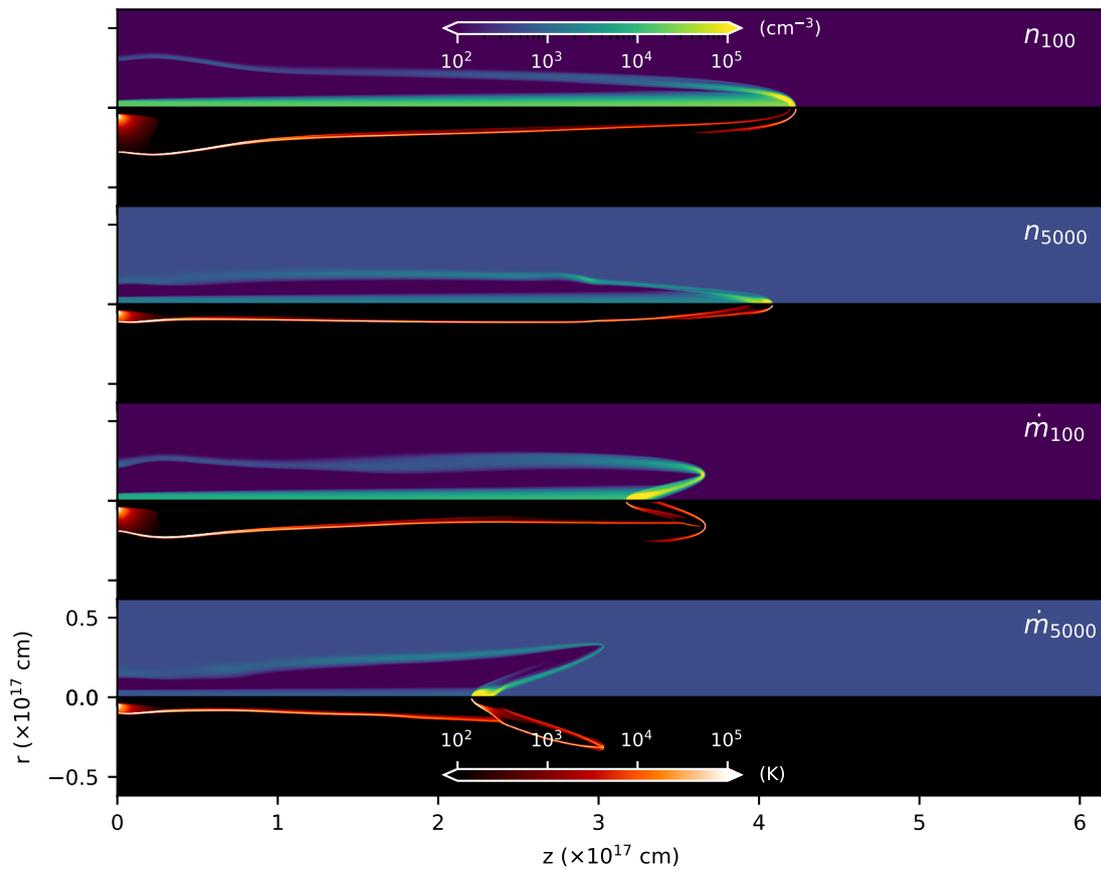


Figura 4.1: Estratificación en densidad (paneles superiores) y temperatura (paneles inferiores), para todos nuestros modelos (ver Tabla 3.1), a un tiempo de evolución de 2400 años. Las densidades y temperaturas se expresan en una escala de color logarítmica dada por las barras superior e inferior (respectivamente). Los ejes radial y longitudinal están dados en unidades de 10^{17} cm. En los modelos con pérdida de masa constante (\dot{m}_{100} y \dot{m}_{5000}) se observa la formación de una estructura de choque incidente/reflejado que atraviesa el *head*. Tal estructura es consecuencia de que el jet experimente una disminución drástica en sus correspondientes valores de densidad y presión.

Las trayectorias numéricas obtenidas a partir de las simulaciones se compararon con las correspondientes soluciones analíticas. Un análisis detallado de cada una de estas comparaciones puede encontrarse en las siguientes secciones.

4.1. Modelos con pérdida de masa constante

En la Figura 4.2 se presentan las estratificaciones en densidad y temperatura, obtenidas a partir de las simulaciones, para los modelos con pérdida de masa constante, a diferentes tiempos de evolución. En la parte superior de estas figuras se muestra el nombre de cada uno de los modelos (ver Tabla 3.1). Se consideran 4 distintos tiempos de evolución: 600, 1200, 1800 y 2400 años. Tal como se hizo en la Figura 4.1, las densidades y temperaturas se expresan en una escala de color logarítmica. Los ejes radial y longitudinal están dados en unidades de 10^{17} cm.

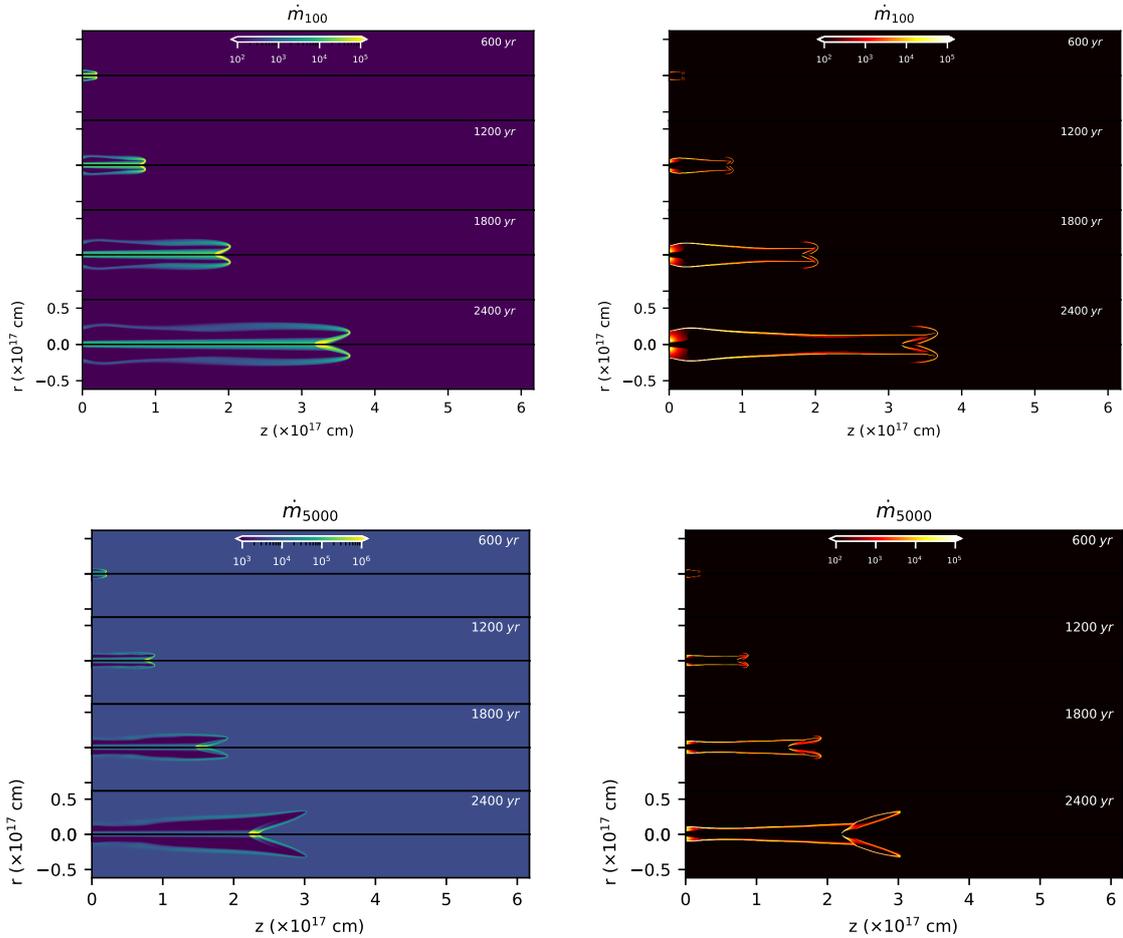


Figura 4.2: Estratificaciones en densidad (paneles lado izquierdo) y temperatura (paneles lado derecho), a diferentes tiempos, para el modelo con pérdida de masa constante que evoluciona en un medio con una densidad $n = 100 \text{ cm}^{-3}$ y con una densidad $n = 5000 \text{ cm}^{-3}$, respectivamente. La escala logarítmica en densidad está dada en cm^{-3} y la escala en temperatura está dada en K. Los ejes radial y longitudinal están dados en unidades de 10^{17} cm.

Los modelos con pérdida de masa constante descritos en las secciones 2.2 y 2.3 para los formalismos de centro de masa y equilibrio de presión hidrodinámica, respectivamente, se comparan a continuación con las correspondientes soluciones numéricas. Primero se considera un escenario en el que la densidad numérica del medio es de 100 cm^{-3} y posteriormente se considera un medio en el que la densidad es de 5000 cm^{-3} .

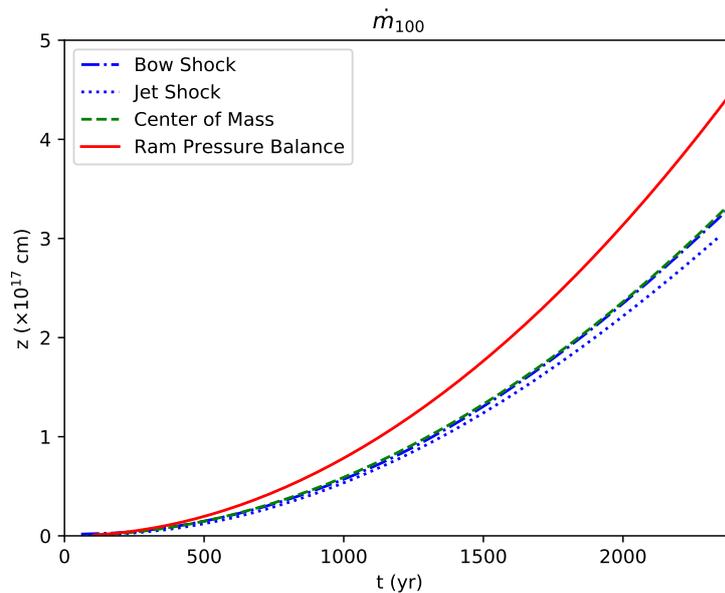


Figura 4.3: Evolución de la posición del *head* de un jet para un modelo con pérdida de masa constante en un medio con densidad numérica de 100 cm^{-3} . La línea sólida en rojo representa la solución para el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica. La línea discontinua en verde corresponde a la solución para el formalismo de centro de masa. Las soluciones numéricas se representan en color azul, la línea discontinua-punteada es para el choque de proa (o *bow shock*) y la línea punteada es para el disco de Mach (o *jet shock*).

En la Figura 4.3 se comparan las posiciones numéricas del *bow shock* (línea discontinua/punteada azul) y del *jet shock* (línea punteada azul) con las soluciones analíticas descritas por los formalismos de centro de masa (línea discontinua verde) y equilibrio de presión hidrodinámica (línea sólida roja). Las posiciones numéricas se obtuvieron buscando saltos en el valor de la estratificación en presión a lo largo del eje de simetría. Fuera del eje de simetría el salto en presión no es lo suficientemente grande como para poder seguir las trayectorias numéricas a lo largo de toda la evolución.

Uno de los resultados más relevantes que se extrae del análisis de la Figura 4.3 es que

las posiciones del *bow shock* y del *jet shock* siguen muy de cerca la evolución descrita por el formalismo de centro de masa. A pesar de que en las etapas más tempranas de evolución las soluciones numéricas siguen la trayectoria descrita por ambos formalismos analíticos, para tiempos mayores a 500 años, las posiciones del *bow shock* y del *jet shock* se alejan de la trayectoria descrita por el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica. Después de aproximadamente 1200 años de evolución, las soluciones numéricas tienden a separarse entre sí, pero mantienen la tendencia descrita por la solución analítica de centro de masa.

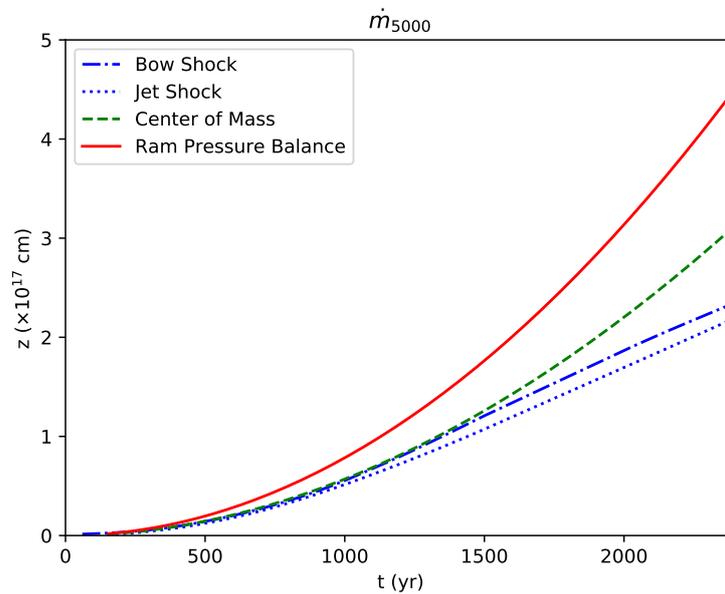


Figura 4.4: Evolución de la posición del *head* para un modelo con una pérdida de masa constante en un medio con una densidad numérica de $= 5000 \text{ cm}^{-3}$. La nomenclatura para cada una de las soluciones es la misma que se describió en la Figura 4.3. En este caso las posiciones del *bow shock* y del *jet shock* tienden a separarse entre sí. Esta separación es producida por la drástica disminución en la densidad del jet, que ocasiona que la superficie de trabajo prácticamente no pierda material lateralmente (ver los dos paneles inferiores de la Figura 4.1).

Si consideramos que el movimiento del jet se realiza en un medio con una densidad numérica de 5000 cm^{-3} (Figura 4.4), la evolución del head, determinada por medio de las simulaciones, muestra importantes diferencias con el caso en el que la densidad del medio es de 100 cm^{-3} . La principal diferencia es que las trayectorias numéricas no siguen al formalismo de centro de masa durante toda la evolución. Para tiempos mayores a 1500 años, las posiciones del *bow shock* y el *jet shock* tienden a separarse

drásticamente de las soluciones analíticas. La superficie de trabajo generada mediante las simulaciones se mueve mucho más lento de lo que predicen las soluciones analíticas. Estas significativas desviaciones entre soluciones numéricas y analíticas no resultan sorprendentes si se tiene en cuenta que, debido a la drástica disminución en los valores de la densidad y la presión del jet, los modelos numéricos pierden la simetría cilíndrica que caracteriza a los modelos analíticos (ver los dos paneles inferiores de la Figura 4.1).

La disminución en densidad y presión, mencionada anteriormente, ocasiona que se produzcan choques incidentes/reflejados que atraviesan la superficie de trabajo y dan lugar a la formación de estructuras complejas fuera del eje de simetría que están muy lejos de poseer una geometría cilíndrica simple. De ahí que los resultados numéricos hallados para este modelo se alejen tanto de las correspondientes soluciones analíticas.

4.2. Modelos con densidad de eyección constante

En la Figura 4.5 se presentan las estratificaciones en densidad y temperatura, obtenidas a partir de las simulaciones, para los modelos con densidad de eyección constante, a diferentes tiempos de evolución. En la parte superior de estas figuras se muestra el nombre de cada uno de los modelos (ver Tabla 3.1). Se consideran 4 distintos tiempos de evolución: 600, 1200, 1800 y 2400 años. Tal como se hizo en la Figura 4.1, las densidades y temperaturas se expresan en una escala de color logarítmica. Los ejes radial y longitudinal están dados en unidades de 10^{17} cm.

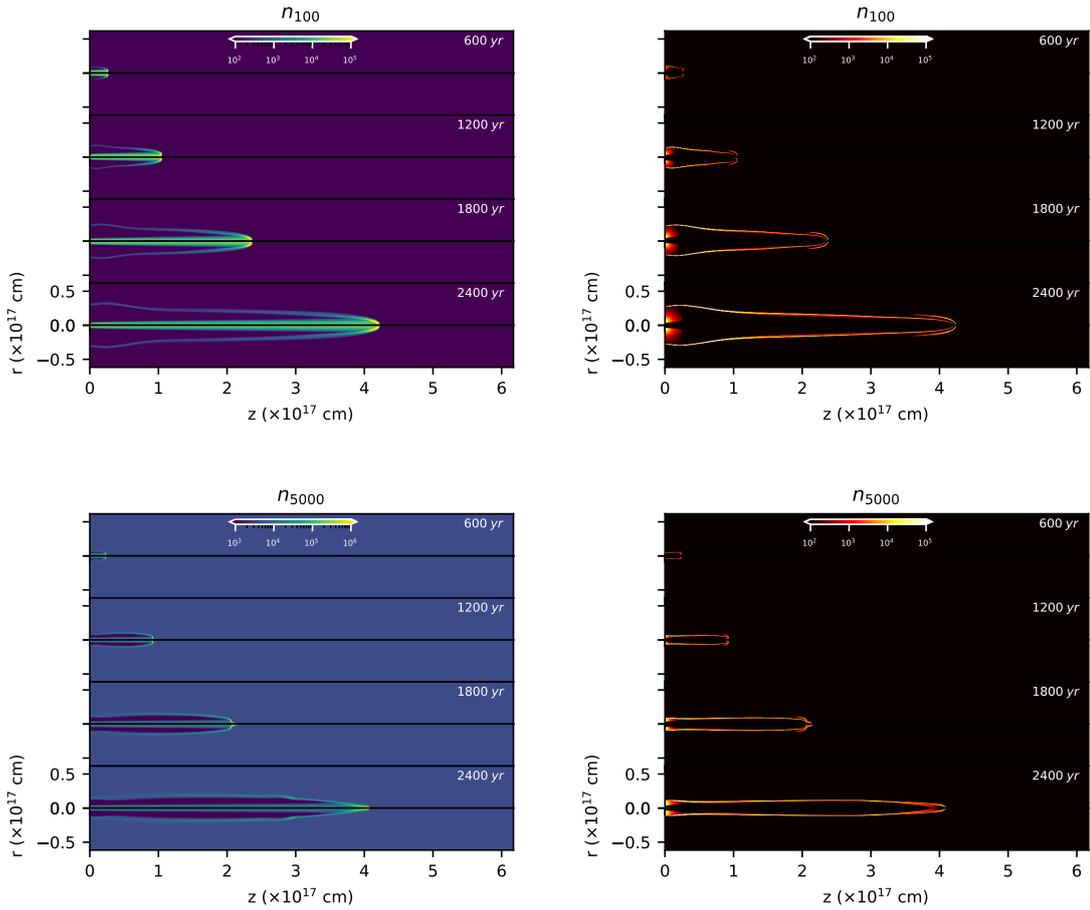


Figura 4.5: Estratificaciones en densidad (paneles lado izquierdo) y temperatura (paneles lado derecho), a diferentes tiempos, para el modelo con densidad de eyección constante que evoluciona en un medio con una densidad $n = 100 \text{ cm}^{-3}$ y con una densidad $n = 5000 \text{ cm}^{-3}$, respectivamente. La escala logarítmica en densidad está dada en cm^{-3} y la escala en temperatura está dada en K. Los ejes radial y longitudinal están dados en unidades de 10^{17} cm.

En esta sección se comparan las soluciones analíticas obtenidas para los modelos con densidad de eyección constante, descritos en los apartados 2.2 y 2.3, con las correspondientes soluciones numéricas. Tal como se hizo en el caso de los modelos con pérdida de masa constante, se considera un escenario en el que la densidad numérica del medio es de 100 cm^{-3} y posteriormente se considera un medio cuya densidad es de 5000 cm^{-3} .

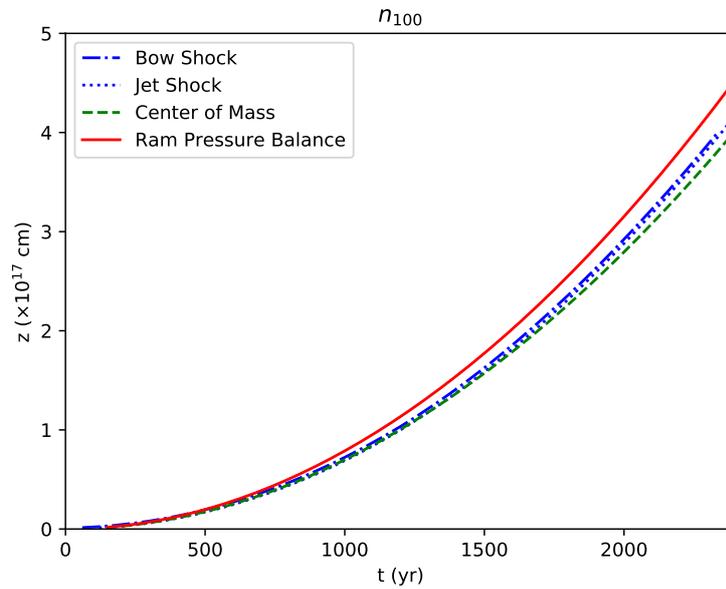


Figura 4.6: Evolución de la posición del *head* para un modelo con densidad de eyección constante en un medio con una densidad numérica de 100 cm^{-3} . La nomenclatura para cada una de las soluciones es la misma que se utilizó en la Figura 4.3.

En la figura 4.6 se presenta la dinámica de un jet que evoluciona en un medio con una densidad de 100 cm^{-3} . La nomenclatura que se utiliza aquí para designar a cada una de las soluciones (numéricas y analíticas) es la misma que se utilizó en las dos figuras anteriores. En este caso se observa que para tiempos de evolución menores a 1500 años las posiciones de las soluciones numéricas siguen muy de cerca la trayectoria descrita por la solución analítica de centro de masa. Para tiempos mayores, las posiciones del *bow shock* y del *jet shock* se desvían del formalismo de centro de masa y comienzan a aproximarse al formalismo de equilibrio de presiones hidrodinámicas. Durante toda la evolución, la dinámica de las soluciones numéricas queda contenida

entre las trayectorias descritas por los modelos analíticos.

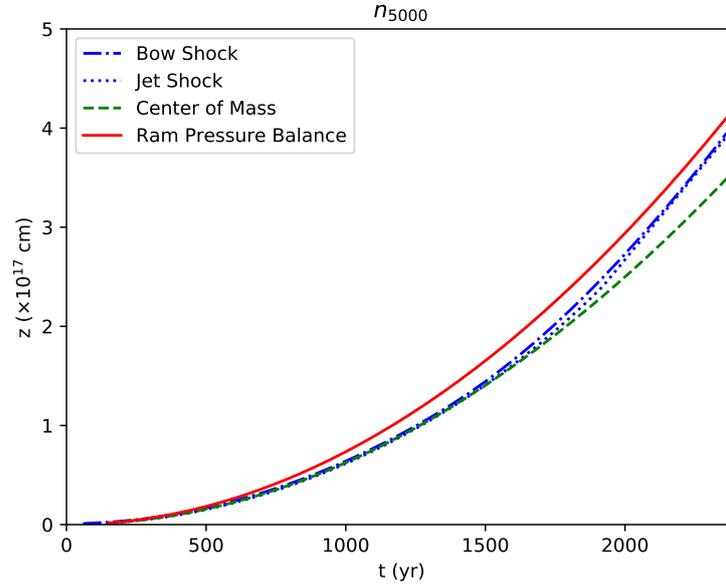


Figura 4.7: Evolución de la posición del *head* para un modelo con densidad de eyección constante en un medio cuya densidad numérica es de 5000 cm^{-3} . La nomenclatura para cada una de las soluciones es la misma que se describió en la Figura 4.4.

El modelo que describe la evolución de un jet en un medio cuya densidad es de 5000 cm^{-3} se muestra en la Figura 4.7. En este caso se observa que para tiempos de evolución menores a 1500 años las posiciones del *bow shock* y del *jet shock* se aproximan a la trayectoria descrita por la solución analítica de centro de masa. Pasado ese tiempo, las posiciones numéricas se acercan rápidamente hacia la trayectoria descrita por el modelo de equilibrio de presión hidrodinámica. La nomenclatura utilizada para designar a cada una de las soluciones es la misma que se empleó en las figuras anteriores.

Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis refleja un primer esfuerzo por comparar la dinámica de jets HH descrita por los formalismos analíticos de equilibrio de presión hidrodinámica (Raga and Kofman, 1992) y centro de masa (Cantó et al., 2000), con la dinámica obtenida a partir de simulaciones numéricas axisimétricas. Para conseguirlo, retomamos el problema de un jet con encendido lento en el que la superficie de trabajo principal (o *head*) es producida por una fuente que expulsa material con una velocidad de eyección que incrementa linealmente con el tiempo. Exploramos dos posibles casos para la densidad de eyección: una densidad de eyección constante y una tasa de pérdida de masa por unidad de área constante tal que la densidad es inversamente proporcional a la velocidad de eyección.

Soluciones analíticas para estos casos de densidad de eyección fueron obtenidas tanto para el formalismo de equilibrio de presión hidrodinámica como para el de centro de masa. Posteriormente, se realizaron simulaciones numéricas axisimétricas para los mismos casos de densidad de eyección, y para dos distintos valores en la densidad del medio (100 y 5000 cm⁻³). A partir de las simulaciones calculamos las posiciones del *bow shock* y del *jet shock*, sobre el eje de simetría, y las comparamos con las predicciones de los modelos analíticos (en los que se considera que la posición del *bow shock* y del

jet shock coinciden espacialmente).

En tres de nuestras cuatro simulaciones (modelos n_{100} , n_{5000} y \dot{m}_{100}) se encontró un buen acuerdo con la dinámica descrita por los modelos analíticos. En un inicio, las posiciones del *bow shock* y del *jet shock*, en estos tres modelos, siguen la trayectoria descrita por la solución analítica de centro de masa. Posteriormente se observa que, en los modelos con densidad de eyección constante (n_{100} y n_{5000}), las trayectorias numéricas se desvían hacia la curva que evoluciona más rápidamente, es decir, hacia la solución analítica de equilibrio de presiones hidrodinámicas. Puesto que para tiempos cortos de evolución se espera que la mayor parte del material chocado permanezca dentro de la superficie de trabajo (tal como se asume en el formalismo de centro de masa), y para tiempos largos se espera que una parte importante del material se escape por los costados (como sucede en el formalismo de equilibrio de presiones hidrodinámicas), los resultados obtenidos para estos tres modelos son completamente satisfactorios.

La superficie de trabajo del jet con pérdida de masa constante que se mueve en un medio cuya densidad es $n = 5000 \text{ cm}^{-3}$ (modelo \dot{m}_{5000}) presentó diferencias considerables con respecto a las predicciones de los formalismos analíticos. En este modelo, la densidad y la presión del jet disminuyen drásticamente a medida que el tiempo de evolución aumenta. Esta disminución ocasiona que se produzcan choques incidentes/reflejados que atraviesan la superficie de trabajo, dando lugar a la formación de estructuras complejas fuera del eje de simetría. Tales estructuras están muy lejos de poseer una geometría cilíndrica simple, como la que se considera en los modelos analíticos. De ahí que los resultados hallados para este modelo sean tan distintos a los encontrados previamente.

Los resultados hallados nos permiten concluir que las simulaciones numéricas de jets uniformemente acelerados producen una superficie principal de trabajo (o *head*) que para tiempos cortos puede ser modelada analíticamente con el formalismo de centro de

masa, y para tiempos largos con el formalismo de equilibrio de presiones hidrodinámicas. Este comportamiento es válido siempre y cuando los valores de estratificación en densidad y presión del jet no sean menores a los correspondientes valores del medio en el cual se produce el movimiento.

Apéndice A

The Uniformly Accelerated Jet

En esta sección se presenta el artículo escrito a partir de los resultados obtenidos en esta tesis. Este artículo ha sido enviado a la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, para su publicación, y se encuentra en proceso de arbitraje.

Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, **00**, 1–12 (2007)

ESTIMATING THE PROPAGATION OF A UNIFORMLY ACCELERATED JET

J.I. Castorena,¹ A.C. Raga,¹ A. Esquivel,¹ A. Rodríguez-González¹ L. Hernández-Martínez,²
F. Clever,³ J. Cantó,³

Received ; accepted

RESUMEN

Estudiamos el problema de un jet Herbig-Haro que viaja en un medio ambiente homogéneo con una velocidad de eyección uniformemente acelerada. Consideramos dos casos para la densidad de eyección: una densidad constante, y una tasa de pérdida de masa constante. En ambos casos utilizamos tanto una ecuación de equilibrio de presiones hidrodinámicas como una de posición de centro de masa para obtener soluciones analíticas que describan la propagación de la cabeza del jet. También realizamos simulaciones numéricas de este flujo, y comparamos la dependencia temporal de la posición de los choques que conforman la superficie de trabajo con las predicciones de los modelos analíticos. Encontramos que si la densidad y la presión del jet son mayores que los correspondientes valores ambientales durante toda la evolución, entonces una buena coincidencia con los modelos analíticos es obtenida: en un inicio el flujo sigue la solución analítica de centro de masa y en tiempos posteriores (para el caso de densidad de eyección constante) se acerca a la solución de balance de presiones hidrodinámicas.

ABSTRACT

We study the problem of a Herbig-Haro jet with a uniformly accelerating ejection velocity, travelling into a uniform environment. For the ejection density we consider two cases: a time-independent density, and a time-independent mass loss rate. For these two cases, we obtain analytic solutions for the motion of the jet head using a ram-pressure balance and a center of mass equation of motion. We also compute axisymmetric numerical simulations of the same flow, and compare the time-dependent positions of the leading working surface shocks with the predictions of the two analytic models. We find that if the jet is over-dense and over-pressured (with respect to the environment) during its evolution, a good agreement is obtained with the analytic models, with the flow initially following the center of mass analytic solution, and (for the constant ejection density case) at later times approaching the ram-pressure balance solution.

Key Words: — ISM: Jets and outflows — HH objects —

1. INTRODUCTION

Jets from young stars and their associated Herbig-Haro objects (HH) are now the most studied and **best** understood of all astrophysical jets. HH jets are collimated bipolar ejections from low to intermediate mass protostars or young stars. They sometimes show “heads” in which the jet interacts with the surrounding environment forming a bow/jet shock pair (known as a “working surface”), that are

a clear sign of the “turning on” of the jet (typically at times of $\sim 10^3 \rightarrow 10^4$ yr ago). Several of the “classical HH objects” of the catalogue of Herbig (1974) are associated with such jet heads.

HH jets also have a structure of emitting knots (some of them resembling the jet head, and others forming aligned chains of more compact emission peaks) in the region between the outflow source and the jet head (see, e.g., Reipurth & Heathcote 1990 and the review of Reipurth & Bally 2001). Several possibilities of how to model these knots have been explored (see, e.g., Raga & Kofman, 1992,

¹Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, México.

²Facultad de Ciencias, UNAM, México

³Instituto de Astronomía, UNAM, México.

and Micono, M., et al., 1998), but presently the favoured explanation is that they are the result of a time-variability in the ejection, which leads to the formation of “internal working surfaces” within the jet beam (see, e.g., Raga et al 1990).

A problem that has received little attention is the effect on the jet head of a “slow turning on” of the outflow **on the jet head**. As far as we are aware, the only simulations of a “slow turning on” jet (as opposed to a jet which is instantaneously “switched on” at full velocity) are the ones of Lim et al. (2002). These authors focus their study on the survival of H₂ molecules in the resulting, accelerating jet head.

In the present paper, we revisit this “slow turn on jet” problem. We study the dynamics of the head of a cylindrical jet with a linear ramp of increasing ejection velocity as a function of ejection time. We combine this ejection velocity with two forms for the ejection density variability:

- a constant ejection density,
- a constant mass loss rate (so that the ejection density is proportional to the inverse of the ejection velocity).

We obtain analytical models of this flow by assuming that the material in the jet beam is free streaming (before reaching the jet head), and that the motion of the working surface of the jet head can be described:

- by using a ram-pressure balance condition,
- by assuming that it coincides with the motion of the center of mass of the material that has entered the working surface.

The first of these assumptions (see, e.g., Raga & Cantó 1998) is correct for a “massless” working surface which instantaneously ejects **most of the material** sideways (into a jet cocoon) most of the material going through the bow and jet shocks, while the latter assumption (see Cantó et al. 2000) is appropriate for the “mass conserving” case in which the shocked material mostly stays within the working surface.

We also carry out axisymmetric numerical simulations of the flow, and compare the results with the ram-pressure balance and center of mass analytic models. This is the first time that a comparison between numerical simulations and the two analytic approximations (described above) **has been attempted**.

The paper is organized as follows. In §2 we present the center of mass and the ram-pressure balance solutions for a uniformly accelerated jet evolving in a homogeneous interstellar medium. In §3 we

present the axisymmetric numerical simulations, and a comparison of the results with the analytic models is done in §4. The results are summarized in §5, and concluding remarks are given in §6.

2. ANALYTIC MODEL

We consider a jet with an ejection velocity of the form

$$u_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ a\tau, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

where a is a constant acceleration and τ the ejection time. We assume a cylindrical flow, with a jet cross section σ which is **circular and constant**. We also assume that the jet moves into an environment of uniform density ρ_a .

We consider two different forms for the ejection density:

1. a constant mass loss rate per unit area \dot{m} , such that the ejection density is given by

$$\rho_0(\tau) = \frac{\dot{m}}{u_0(\tau)}, \quad (2)$$

2. a time-independent ejection density,

$$\rho_0 = \text{const.} \quad (3)$$

We assume that the flow in the jet beam is free-streaming, satisfying the condition:

$$u(x, t) = \frac{x}{t - \tau} = u_0(\tau), \quad (4)$$

where $u(x, t)$ is the velocity as a function of distance x from the source at **an evolutionary time** t and $u_0(\tau)$ is the ejection velocity (at the ejection time $\tau < t$). **For an ejection time** $\tau < 0$, $x = 0$. Also, for a cylindrical, free-streaming flow, the density is given by:

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0 u_0}{u_0 - (t - \tau)\dot{u}_0}, \quad (5)$$

where $\rho_0(\tau)$ is the ejection density (see equation 2) and $\dot{u}_0 = du_0/d\tau$ is the derivative of the ejection velocity with respect to the ejection time (for a derivation of this equation, see Raga & Kofman, 1992). **The relationship between the evolutionary time, t , and the ejection time, τ , could be obtained from the equations (1) and (4). Later, in section 2.1, we explicitly show this relationship.**

When the flow starts (at $t = 0$), a working surface is formed at $x = 0$. This “jet head” then travels away from the outflow source for increasing times. In order to describe the time evolution of this working surface, we use two analytic approximations:

1. *center of mass*- we assume that the position of the working surface coincides with the center of mass of the ejected, free-streaming material,
2. *ram-pressure balance*- we assume that the motion of the working surface is determined by the jet/environment ram-pressure balance condition.

The first of these approximations is appropriate for a working surface in which the shocked gas mostly remains within the jet head, and the latter approximation is valid for a working surface that ejects most of the matter sideways (into a jet cocoon).

We therefore develop four analytic models, with the two ejection densities and the two analytic approximations described above. The models all share the linearly accelerating ejection velocity given by equation (1).

2.1. Center of mass equation of motion

We consider a “mass conserving” working surface within which stays most of the jet and environmental material that goes through the working surface shocks. The working surface position should then coincide with the center of mass of the free-streaming fluid parcels that have piled up within it. This center of mass position is given by:

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad (6)$$

with the differential element of mass given by:

$$dm = \sigma \rho_0(\tau) u_0(\tau) d\tau + \sigma \rho_a(x) dx, \quad (7)$$

formed by two components: one for the ejected material (first term on the right), and the second one for the swept up, stationary environment (second term). In equation (7), σ is the jet cross section, $\rho_0(\tau)$ is the ejection density, $u_0(\tau)$ the ejection velocity and $\rho_a(x)$ the (possibly position-dependent) environmental density.

Using equations (4-7) and considering that the ejection time τ' is integrated from 0 to τ (the ejection time of the jet material that at time t is going into the working surface), we obtain:

$$x_{cm} \left[\int_0^\tau \rho_0(\tau') u_0(\tau') d\tau' + \int_0^{x_{cm}} \rho_a dx \right] = \int_0^\tau x_j \rho_0(\tau') u_0(\tau') d\tau' + \int_0^{x_{cm}} x \rho_a dx, \quad (8)$$

where we have set $\rho_a = \text{const.}$, and x_j is the position that the fluid parcels would have if they were still free-streaming:

$$x_j = (t - \tau') u_0(\tau'), \quad (9)$$

see equation (4).

Also, from equations (1) and (4) we find:

$$t = \frac{x_{cm}}{a\tau} + \tau. \quad (10)$$

Equation (10) can be inverted to obtain

$$\tau = \frac{1}{2} \left(t + \sqrt{t^2 - \frac{4x_{cm}}{a}} \right). \quad (11)$$

Combining equations (8-10), we obtain:

$$x_{cm} \left[\int_0^\tau \rho_0(\tau') a\tau' d\tau' + \frac{\rho_a x_{cm}}{2} \right] = \int_0^\tau (t - \tau') a^2 \tau'^2 \rho_0(\tau') d\tau'. \quad (12)$$

In order to carry out the remaining integrals, we have to specify $\rho_0(\tau')$. We consider two forms for the ejection density (see equation 2):

a) *Constant mass loss rate*

equation (12) takes the form:

$$x_{cm} \left(\dot{m}\tau + \frac{\rho_a x_{cm}}{2} \right) = \dot{m}a\tau^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\tau}{3} \right). \quad (13)$$

Using equations (10) and (13), we obtain

$$x_{cm}^2 + \frac{\dot{m}\tau}{\rho_a} x_{cm} - \frac{\dot{m}a\tau^3}{3\rho_a} = 0, \quad (14)$$

this is a quadratic equation with one positive solution, given by

$$x_{cm}(\tau) = \frac{\dot{m}\tau}{2\rho_a} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4a\rho_a\tau}{3\dot{m}}} \right]. \quad (15)$$

In the low density limit $\rho_a \rightarrow 0$, equation (14) takes a particularly simple form that leads to finding the solution

$$x_{cm} = \frac{a\tau^2}{3}. \quad (16)$$

By substituting the equation (11) into (13), we can also obtain x_{cm} as an explicit function of t , giving

$$x_{cm} = \frac{8}{9} x_c \left[\left(1 + \frac{3t}{4t_c} \right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9t}{8t_c} \right) \right], \quad (17)$$

with, $t_c \equiv \dot{m}/a\rho_a$ and $x_c \equiv \dot{m}^2/a\rho_a^2$.

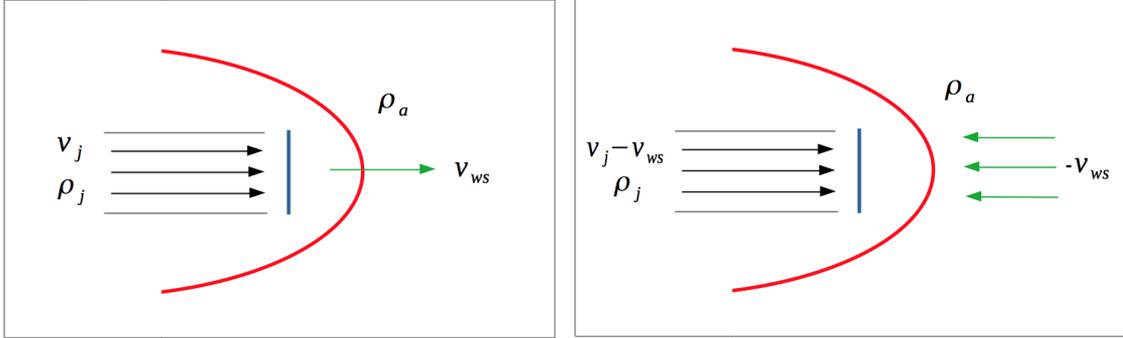


Fig. 1. Jet head working surface in a reference frame at rest with respect to the outflow source (left) and in a reference frame moving along with the working surface (right). The bow shock is in red and the jet shock is in blue.

In the limit $t \ll t_c$, a second order Taylor expansion can be done in order to see that equation (17) becomes

$$x_{cm} \approx \frac{3}{16} a t^2. \quad (18)$$

b) *Constant ejection density*

equation (12) takes the form:

$$x_{cm} \left(\frac{\rho_0 a \tau^2}{2} + \frac{\rho_a x_{cm}}{2} \right) = \rho_0 a^2 \tau^3 \left(\frac{t}{3} - \frac{\tau}{4} \right), \quad (19)$$

where t and τ are related through equation (4).

Substituting t as a function of τ we obtain:

$$x_{cm}^2 + \frac{\rho_0 a \tau^2}{3 \rho_a} x_{cm} - \frac{\rho_0 a^2 \tau^4}{6 \rho_a} = 0, \quad (20)$$

which has a positive solution

$$x_{cm}(\tau) = \frac{\rho_0 a \tau^2}{6 \rho_a} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{6 \rho_a}{\rho_0}} \right]. \quad (21)$$

In the $\rho_a \rightarrow 0$ limit, equation (21) takes the form

$$x_{cm} = \frac{a \tau^2}{2}, \quad (22)$$

with a quadratic dependency on the ejection time.

We can also find a solution to (19) as a function of evolutionary time t (using equation 11), giving:

$$x_{cm} = \frac{a}{9} \beta_0 \left[\frac{\beta_0(\beta_0^2 - 18) + (\beta_0^2 + 6)^{3/2}}{(\beta_0^2 - 2)^2} \right] t^2, \quad (23)$$

where,

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_a}}, \quad (24)$$

and therefore the position x_{cm} has a quadratic dependency on the evolutionary time t .

Equation (23) takes the form of a constant acceleration equation, with acceleration given by

$$g = \frac{2a}{9} \beta_0 \left[\frac{\beta_0(\beta_0^2 - 18) + (\beta_0^2 + 6)^{3/2}}{(\beta_0^2 - 2)^2} \right], \quad (25)$$

which in the low density limit $\rho_a \rightarrow 0$ becomes,

$$g \approx \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} a \beta_0. \quad (26)$$

2.2. Ram-pressure balance equation of motion

Figure 1 shows a schematic diagram of a jet head propagating through a stationary environment. This leading working surface has a structure **consisting of two shocks**: an upstream shock known as the jet shock (or Mach disk), which is slowing down the jet material, and a downstream bow shock which is accelerating the surrounding material. The two-shock working surface structure travels away from the outflow source at a velocity v_{ws} .

The right panel of Figure 1 shows the situation seen in a **reference framerather** at motion with the jet head. For a hypersonic flow, the two working surface shocks are strong, so that the post-shock gas pressures are given by:

$$P_{bs} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_a v_{ws}^2, \quad (27)$$

for the bow shock, and

$$P_{js} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_j (v_j - v_{ws})^2, \quad (28)$$

for the jet shock (assuming that the jet and the environment have the same specific heat ratio γ). In this equation, v_j is **the ejection velocity** and ρ_j the density of the jet material that is presently entering the jet shock.

If the working surface is moving with a constant velocity then the condition

$$P_{bs} = P_{js} \Rightarrow \rho_a v_{ws}^2 = \rho_j (v_j - v_{ws})^2, \quad (29)$$

is satisfied. This is called the *ram-pressure balance* condition. This condition is also valid for a working surface moving with a variable velocity as long as the inertia of the material between the bow shock and the jet shock is negligible, which is the case if most of the material is ejected sideways from the working surface into a jet cocoon.

From equation (29) we find that

$$v_{ws} = \frac{\beta v_j}{1 + \beta}, \quad \text{with} \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_a}}. \quad (30)$$

Clearly, the shock velocity associated with the bow shock is $v_{bs} = v_{ws}$ and the shock velocity of the jet shock is:

$$v_{js} = \frac{v_j}{1 + \beta}. \quad (31)$$

We now consider the equation of motion $v_{ws} = dx_{ws}/dt$ for the working surface. Setting $v_j = u_0(\tau)$ (i.e., the velocity of the material entering the working surface is equal to the ejection velocity at the corresponding ejection time τ), we then have:

$$\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_j}}\right) \frac{dx_{ws}}{dt} = u_0(\tau). \quad (32)$$

The ejection time τ of the material entering the working surface is obtained from the free-streaming relation

$$x_{ws} = (t - \tau)u_0(\tau),$$

where t is the evolutionary time (see equation 4). Solving for t and **differentiating** with respect to τ we obtain

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{1}{u_0} \frac{dx_{ws}}{d\tau} - \frac{x_{ws}}{u_0^2} \frac{du_0}{d\tau}, \quad (33)$$

Combining equations (32) and (33), we obtain:

$$\frac{dx_{ws}}{d\tau} \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_j}} = u_0 - x_{ws} \frac{d \ln u_0}{d\tau}. \quad (34)$$

The density of the jet material entering the working surface is $\rho_j = \rho(x_{ws}, t)$ (see equation 5), which for

our chosen ejection velocity variability (see equation 1) becomes:

$$\rho_j = \frac{\rho_0}{1 - \frac{x_{ws}}{a\tau^2}}. \quad (35)$$

Finally, from equations (34) and (35) we obtain:

$$\frac{dx_{ws}}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_a}} a\tau \sqrt{1 - \frac{x_{ws}}{a\tau^2}}. \quad (36)$$

In order to proceed it is now necessary to specify the form of $\rho_0(\tau)$. We therefore consider the two cases of constant mass loss rate and constant ejection density.

a) *Constant mass loss rate*

for $\dot{m} = \text{const.}$ equation (36) takes the form:

$$\frac{dx_{ws}}{d\tau} = \sqrt{\frac{\dot{m}}{\rho_a}} \left(a\tau - \frac{x_{ws}}{\tau}\right). \quad (37)$$

It is convenient to use the dimensionless variables:

$$\eta = \frac{a\rho_a^2}{\dot{m}^2} x_{ws}, \quad y = \frac{a\rho_a}{\dot{m}} \tau. \quad (38)$$

In terms of these variables, equation (37) is

$$\frac{d\eta}{dy} = \sqrt{y - \frac{\eta}{y}}. \quad (39)$$

In Appendix A, it is shown that an approximate analytic solution of equation (39) can be constructed as a non-linear average of a “near” and a “far field” analytic solution (see equations 46 and 47), which in terms of the respective dimensional variables is

$$x_{ws} = \frac{\dot{m}^2}{a\rho_a^2} \left[\left(\frac{a\rho_a}{\dot{m}} \tau\right)^{-\frac{5}{2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{a\rho_a}{\dot{m}} \tau\right)^{-\frac{15}{8}} \right]^{-\frac{4}{5}}. \quad (40)$$

b) *Constant ejection density*

Setting $\rho_0 = \text{const.}$ in (36) and taking the square of the equation, we obtain:

$$\frac{\rho_a}{a\rho_0} \left(\frac{dx_{ws}}{d\tau}\right)^2 + x_{ws} - a\tau^2 = 0. \quad (41)$$

Proposing a **power law solution**, we find that

$$x_{ws} = \frac{a\rho_0}{8\rho_a} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{16\rho_a}{\rho_0}}\right] \tau^2. \quad (42)$$

We therefore find a quadratic dependency on the ejection time.

Using equations (11) and (42) we then obtain:

$$x_{ws} = \frac{8a\beta_0^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\beta_0^2}}\right)}{\left[8 + \beta_0^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\beta_0^2}}\right)\right]^2} t^2, \quad (43)$$

where β_0 is given by (24). This implies a quadratic dependency on the evolutionary time.

In the $\beta_0 \ll 1$ limit, equation (43) becomes

$$x_{ws} \approx \frac{a}{2} \beta_0 t^2, \quad (44)$$

and the $\beta_0 \gg 1$ limit leads to

$$x_{ws} \approx \frac{a}{4} t^2. \quad (45)$$

3. THE NUMERICAL SIMULATIONS

In order to check our analytical solutions we computed a set of 2D axisymmetric simulations for both the constant mass loss rate and constant ejection density cases. **For the simulations we used a code that solves the ideal gas-dynamic (Euler) equations in a fixed two dimensional grid. The code uses a second order Godunov type method with the HLLC (Toro et. al. 1994) approximate Riemann solver, including a linear reconstruction of the primitive variables with the *minmod* slope limiter to avoid spurious oscillations. To make the code axisymmetric (cylindrical coordinates), the appropriate geometrical source ($\propto 1/r$) terms are added after each timestep in an operator splitting fashion. Additionally, for the energy equation (also as source term), we included a cooling function dependent on density, metallicity and temperature proposed by Wang et al. (2014). In order to stabilize the method an artificial viscosity with a value of 0.01, a Courant factor of 0.2 was required. We assumed a solar metallicity throughout. The code is written in fortran and it is paralelized with the *Message Passing Interface*. We used a computational grid with a size of 0.05 and 0.2 pc along the r and z directions, respectively. The spatial resolution was ~ 6.89 au, corresponding to 600×6000 cells along the radial and axial directions.**

3.1. Initial and boundary conditions

We model jets propagating into a uniform, **quiescent** environment, and consider the values $n_a = 100 \text{ cm}^{-3}$ and $n_a = 5000 \text{ cm}^{-3}$ for the environmental density. **For convenience, from now on we**

will use number density instead of mass density. We consider a mean molecular weight of $\mu = 1.3$. We also consider the cases of jets with a constant mass loss rate and a constant ejection density.

In all simulations, we consider the ejection velocity variability given by equation (1) with $a = 100 \text{ km s}^{-1}$ per millenium $= 3.17 \times 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}$. An initial jet radius $r_j = 300 \text{ AU}$ and a temperature $T = 100 \text{ K}$ (for both the jet and the environment) was imposed in all models.

We therefore compute four models, two with constant ejection density (which we label n_{100} and n_{5000} , with the subscript giving the ambient density in cm^{-3}) and two with constant mass loss rate (which we label \dot{m}_{100} and \dot{m}_{5000}). For the models \dot{m}_{100} and \dot{m}_{5000} we choose a total mass loss rate $\dot{M} = 2.24 \times 10^{-8} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}$, which corresponds to a mass loss rate at the jet source per unit area $\dot{m} = 3.36 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. For the models n_{100} and n_{5000} , we choose a density $n_j = 1.66 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$ (for a gas with 90% H and 10% He). These model parameters are summarized in Table 1.

In the constant mass flux cases, we find a maximum jet density of $n_j = 1.56 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$, and a minimum jet density of $n_j = 6.24 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$, corresponding to an ejection time $\tau = 1 \text{ yr}$, and $\tau = 2500 \text{ yr}$, respectively.

TABLE 1
PHYSICAL CONDITIONS FOR THE NUMERICAL SIMULATIONS.

	\dot{M}_j ($\text{M}_\odot \text{ yr}^{-1}$)	n_j (cm^{-3})	n_a (cm^{-3})
n_{100}	$1.30 \times 10^{-7*}$	1.66×10^4	100
n_{5000}			5000
\dot{m}_{100}	3.35×10^{-7}	$1.55 \times 10^4*$	100
\dot{m}_{5000}			5000

* These values correspond to an ejection time $\tau = 1000 \text{ yr}$.

4. RESULTS

We computed four numerical simulations, two with a constant ejection density (models n_{100} and n_{5000}) and two with a constant mass loss rate (models \dot{m}_{100} and \dot{m}_{5000}). The top (purple background) and bottom (black background) subpanels of each subfigure presented in Figure 2 display the numerical density and temperature stratifications at an evolutionary time of 2500 yr for these four models.

Generally, the highest densities and temperatures are found in the on-axis regions of the jet heads. The

jet heads of the models with constant ejection density (models n_{100} and n_{5000}) have traveled to larger distances from the outflow source than the ones of constant mass loss rate (\dot{m}_{100} and \dot{m}_{5000}). This qualitative difference is due to the fact that in the constant mass loss rate models the injected momentum rate $\dot{M}_j v_j$ scales linearly with v_j (and hence also increases linearly with time, see equation 1), while this scaling is quadratic (with ejection velocity and with time) in the constant ejection density models.

As a result of the lower jet beam density and **pressure**, the constant mass loss rate models develop an incident/reflected crossing shock structure, which (in the incident shock region) leads to the production of faster off-axis motions in the jet head (see the two bottom panels of Figure 2). This kind of structure is always found in jet simulations with appropriate parameters, **i.e. simulations where the jet is under-dense and under-pressured with respect to the environment during its evolution** (see, e.g., Raga 1988; Downes & Ray 1999).

The upper left panel of Figure 3 shows the positions of the bow shock (dash-dotted blue line) and jet shock (dotted blue line) for the $n_a = 100 \text{ cm}^{-3}$, \dot{m}_{100} constant mass loss rate model. These positions, **for both the bow shock and the jet shock**, were obtained by searching for the jumps along the symmetry axis of the pressure stratifications. We compare these shock positions with the analytical solution of the center of mass (dashed green line) and ram-pressure balance (solid red line) analytic models. We find that the position of both the bow shock lies close to the prediction from the center of mass analytic model, and the jet shock position lies somewhat below.

The upper right panel of Figure 3 shows the time-dependent position of the jet head for the constant ejection density model in a medium of $n_a = 100 \text{ cm}^{-3}$ (model n_{100}). For times $< 1500 \text{ yr}$, the jet and bow shock positions (obtained from the numerical simulation) quite closely follow the center of mass analytic solution. At larger times, the jet and bow shock positions lie above the center of mass solution, and begin to approach the ram-pressure balance solution. At all times, the positions of the jet and bow shock lie in between the working surface positions predicted by the two analytic models. **In this case, the dependence on the ejection velocity means the constant ejection density jets have a higher momentum content.**

The lower left panel of Figure 3 shows the positions of the bow shock (dash-dotted blue line) and the jet shock (dotted blue line) for the $n_a =$

5000 cm^{-3} , \dot{m}_{5000} constant mass loss rate model. For this model, the positions of the jet and bow shock initially follow the center of mass analytic solution, but for times $t > 1500 \text{ yr}$ begin to show large deviations, moving slower than the predictions of the two analytic models. These strong deviations are not surprising given the rather extreme departures from a constant cross section, cylindrical jet beam (assumed in the analytic models) found in the numerical simulation (see the bottom panel of Figure 2).

Finally, the lower right panel of Figure 3 shows the time-dependent position of the jet head for the constant ejection density model in a medium of $n = 5000 \text{ cm}^{-3}$ (model n_{5000}). This model shows jet and bow shock positions that initially follow the center of mass analytic model, and at times $t_{ccc} > 1500 \text{ yr}$ deviate to larger distances from the outflow source, and start approaching the ram-pressure balance model.

For three of our four simulations (models n_{100} , n_{5000} and \dot{m}_{100}), a good agreement is found between the numerical simulations and the analytic models. In these three models the jet and bow shock positions initially follow the center of mass analytic solution, and (for two of these models) at later times deviate towards the faster moving, ram-pressure balance analytic model. This result is completely satisfying, as one would expect that at early times the shocked jet and environment material will mostly remain within the working surface (as assumed in the center of mass formalism), and that a substantial sideways leakage of material (as assumed in the ram-pressure balance model) should occur at later times.

5. DISCUSSION

We have presented a first attempt to compare the analytic ram-pressure balance (Raga & Kofman 1992) and center of mass (Cantó et al. 2000) analytic formalisms (for obtaining the motions of working surfaces in variable ejection jets) with axisymmetric numerical simulations. To this effect, we choose the relatively simple problem of the leading head of a jet produced **with an ejection velocity that increases linearly with time**. We explore the cases of a time-independent mass loss rate (in which the ejection density scales as the inverse of the ejection velocity) and of a constant ejection density.

For these two types of ejection density variability (and a linear ejection velocity vs. time), we obtain analytic solutions with both the ram-pressure

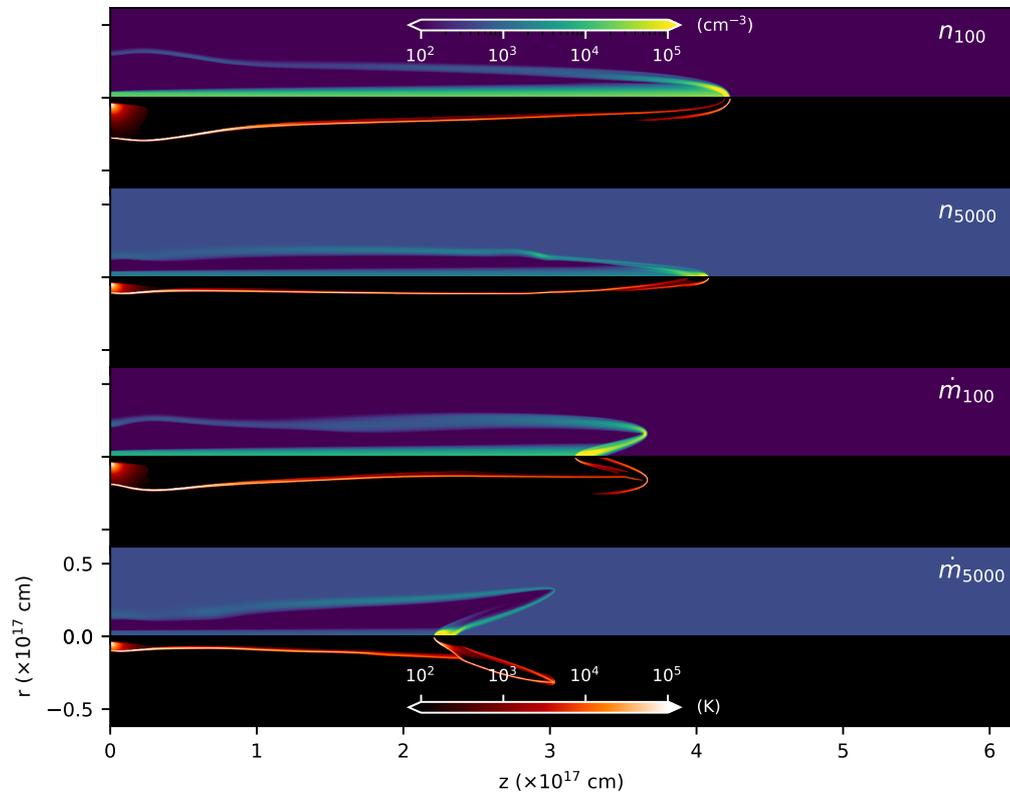


Fig. 2. Numerical density (top two panels) and temperature stratifications (bottom two panels) obtained from our four models (see the text and Table 1), at an evolutionary time of 2500 years. The densities and temperatures are displayed with the logarithmic colour scales given by the top and bottom bars (respectively). The axial and radial axes are given in units of 10^{17} cm. In the constant mass loss rate models the jet density, and pressure, drops quite considerably leading to the formation of internal “crossing shocks”.

ACCELERATED JET

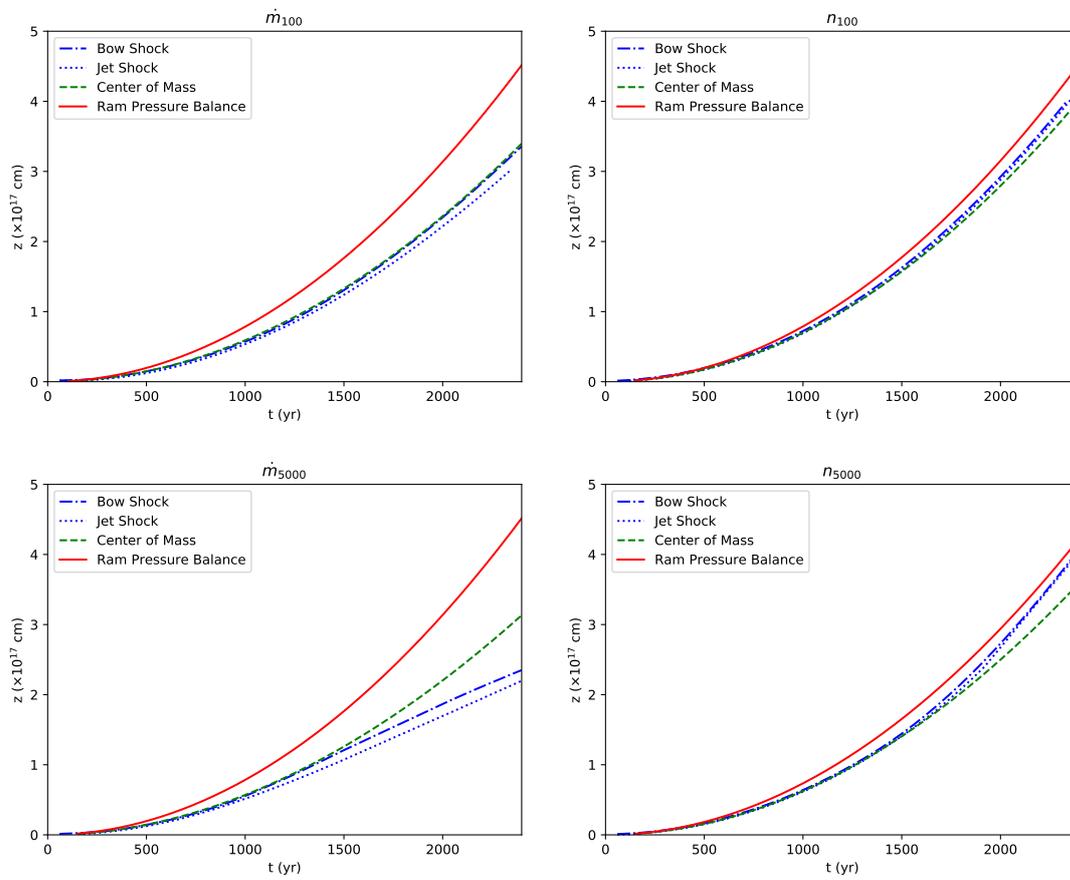


Fig. 3. Position of the jet head as a function of time for the constant mass loss rate models (left panels) and the constant ejection density models (right panels). The red solid line shows the ram-pressure balance solution and the green dashed line shows the center of mass solution. The dash-dotted line shows the bow shock and the dotted line the jet shock positions obtained from the numerical simulations.

balance and the center of mass formalisms. We then run axisymmetric numerical simulations with the two ejection density laws, and with two densities (100 and 5000 cm^{-3}) for the uniform environment. From the simulations we compute the on-axis positions of the jet and bow shock (associated with the jet head), and compare them with the predictions of the analytic models (in which the jet and bow shock are assumed to be spatially coincident).

For our constant mass loss rate jet moving into a dense environment (model \dot{m}_{5000} , see Table 1) we find substantial deviations from the head positions predicted from the two analytic formalisms. In this model, at increasing times the jet density (and pressure) drops quite considerably, leading to the formation of internal “crossing shocks”. These shocks lead to the formation of a complex off-axis structures in the leading head, which then shows strong departures from the simple, cylindrical structure assumed in the analytic models.

To summarize, we find that numerical simulations of a jet with a linearly accelerating ejection velocity vs. time produce a leading head which at early times can be analytically modeled with the center of mass formalism, and (for appropriate flow parameters) at later evolutionary times approaches the ram-pressure balance solutions. This result holds provided that during its time-evolution the jet does not become under dense/under pressured, in which case strong departures from the analytic solutions are found.

6. CONCLUSIONS

This paper presents a first attempt to compare analytic solutions based on both the “ram-pressure balance” and “center of mass” formalisms with hydrodynamical (axisymmetric) simulations. For this comparison, we have studied the case of a linearly increasing ejection velocity as a function of time (and two different forms for the ejection density, see §2).

This simple ejection variability could apply to the early evolution of an HH outflow, and is relevant for the problem of entrainment of environmental molecular material into the jet head (see Lim et al. 2002) and the destruction of molecules in the region close to the outflow source (which might at least be partially spared by a slow turning on of the jet). As a direct application to the observed, evolved HH jets is not straightforward, the interest of our work is primarily theoretical.

While full analytic solutions for different forms of the ejection variability have been found in the past with the “center of mass” formalism (see Cantó et al,

2000 and Cantó & Raga 2003), no solutions (except the trivial one for the constant ejection case) have been previously found with the “ram-pressure balance” equation of motion for the working surfaces. We were surprised to find that the “linearly accelerating” ejection velocity case does lead to a full, analytic ram-pressure balance solution for the case of a constant ejection density (though we managed to find only an approximate analytic solution for the constant mass loss rate case). This result gives hope that ram-pressure balance analytic solutions might also exist for other ejection velocity/density variability combinations.

Comparing the center of mass and the ram-pressure balance solutions with axisymmetric numerical simulations (with the same parameters) we find that for the case of overdense jets (with higher densities in the jet side of the leading working surface) the numerical results initially follow the center of mass solution, and at later times approach the ram-pressure balance analytic solution. This result shows a satisfying consistency between the analytic approaches and the numerical solutions with the full (axisymmetric) hydrodynamic equations. Not entirely unexpectedly, we do not find a good agreement between the analytic and numerical results for cases in which the jet density drops to values lower than the environmental density, as the jet beam then develops internal shocks (in the numerical solutions) that affect the motion of the leading working surface.

Clearly, it would be interesting to extend this comparison between numerical simulations and analytic solutions of variable jets to the case of jet with “internal working surfaces” within their beams. This is left for a future study.

ARa and JC acknowledges support from the DGAPA-UNAM grant IG100218.

REFERENCES

- Cantó, J., Raga, A.C., D’Alessio, P., 2000, *MNRAS*, 313, 656.
 Cantó, J., Raga, A.C., 2003, *RMxAA*, 39, 261.
 Downes, T.P., & Ray, T.P., 1999, *A&A*, 345, 977.
 Heathcote & Reipurth, 1990, *AJ*, 104, 2193.
 Herbig, G. 1974, *Lick Obs. Bull.*, 658, 1H
 Lim, A., Raga, A. C., Rawlings, J. M. C., Williams, D. A., 2002, *MNRAS*, 335, 817
 Micono, M., Massaglia, S., Bodo, G., Rossi, P., Ferrari, A., 1998, *A&A*, 333, 1001.
 Raga, A. C. 1988, *ApJ*, 335, 820.
 Raga, A. C., Cantó, J., Binette, L. Calvet, N., 1990, *ApJ*, 364, 601.
 Raga, A. C. & Cantó, J. 1998, *RMxAA*, 34, 73.
 Raga, A. C. & Kofman, L. 1992, *ApJ*, 386, 222

ACCELERATED JET

11

- Reipurth, B., 1991, *ESOC*, 33, 247.
Reipurth, B. & Bally, J., 2001, *ARA&A*, 39, 403
Reipurth, B. & Heathcote, S., 1990, *A&A*, 229, 527
Reipurth, B. & Heathcote, S., 1991, *A&A*, 246, 511.
Toro, E. F., Spruce, M., & Speares, W. 1994, *Shock Waves*, 4, 25
Wang, Y., Ferland, G. J., Lykins, M. L., et al. 2014, *MNRAS*, 440, 3100.

- J.I. Castorena: Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-543, 04510, CDMX, México.(jicastorena@correo.nucleares.unam.mx).
A.C. Raga, A. Rodríguez-González, A. Esquivel: Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-543, 04510, CDMX, México (raga, ary, esquivel@nucleares.unam.mx).
L. Hernández-Martínez: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad Universitaria, D.F., México (lilhe@ciencias.unam.mx)
J. Cantó and F. Clever: Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-264, 04510, CDMX, México (mclever@astro.unam.mx).

A. APPENDIX

In §2.1 we established that for a constant mass loss rate the ram-pressure balance assumption leads to equation (37). In terms of dimensionless variables (see equation 38) the equation of motion takes the form presented in (39). By integrating it numerically we obtain the $\eta(y)$ dependency shown in the top frame of Figure 4.

This figure also shows the “near” and “far field” solutions

$$\eta_n(y) = y^2, \quad \eta_f(y) = \frac{2}{3}y^{3/2}, \quad (46)$$

which correspond to the $y \rightarrow 0$ (near) and $y \gg 1$ (far) limits, respectively. These two solutions can be obtained straightforwardly taking the appropriate limits in equation (39).

Since the solutions in (46) represent two regimes with analytical integrals, a non-linear average between these approximations is computed:

$$\eta^{(a)} = \left(\eta_n^{-5/4} + \eta_f^{-5/4} \right)^{-4/5}. \quad (47)$$

to obtain an approximation to the full $\eta(y)$ solution. This average has a relative error $\epsilon_{rel} = \eta^{(a)}/\eta - 1 < 0.04$ with respect to the “exact” (i.e., numerical) solution $\eta(y)$, and is therefore a reasonable analytical approximation of the solution. The dependency of ϵ_{rel} on y is shown in the bottom panel of Figure 4.

Another approximation to the numerical $\eta(y)$ solution is

$$\eta^{(b)} = \frac{2y}{9} \left(-1 + \sqrt{1 + 9y} \right), \quad (48)$$

which coincides with the exact solution in the $y \rightarrow 0$ and $y \rightarrow \infty$ limits, and has a maximum relative deviation of ≈ 0.09 . This **approximation** has a functional form similar to the solution for the constant mass loss rate case obtained with the “center of mass formalism” (see equation 15).

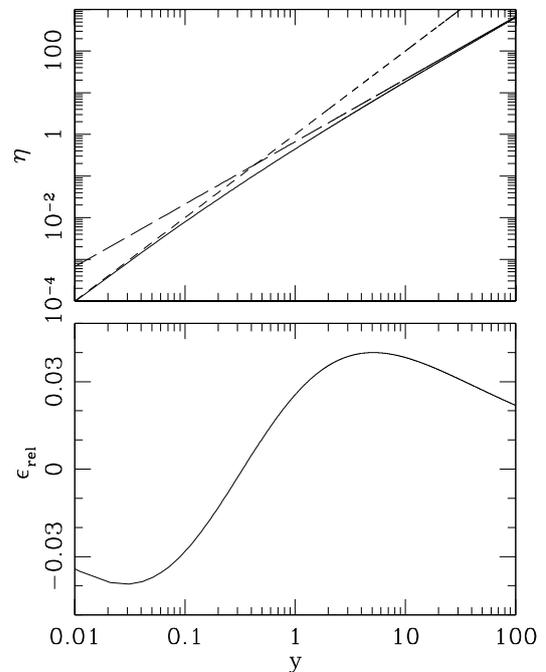


Fig. 4. Top frame: the exact (i.e., numerical) solution of equation (39) (solid curve), the “near” (short dashes) and the “far field” (long dashes) analytic solutions given by equation (46). Bottom frame: relative deviation of the approximate solution of equation (47) with respect to the “exact” (numerical) solution of equation (39).

Apéndice B

Función de enfriamiento

En esta sección se presentan las secciones del código desarrolladas con la finalidad de incluir la función de enfriamiento y realizar el cálculo de la ecuación de energía en cada una de las celdas (ver sección 3.5).

```
1 !=====
2 ! In this section is calculated the energy for each of the cells
3 !=====
4 subroutine cooling(dt)
5   use globals
6   use cooling_funct , only : Lum_rad
7   implicit none
8   real , parameter :: met=1.1, k=1.38E-16
9   real , parameter :: mu=1.3, mh=1.67E-24
10  real , parameter :: R=8.31E+7
11  real :: T0, L0, n, Tnew
12  real , intent(in) :: dt
13  integer :: i, j
14
15  do j=-1,ny+2
```

```

16  do i=-1,nx+2
17      n=prim(1,i,j)/(mu*mh)
18      T0=mu*prim(4,i,j)/(R*prim(1,i,j))
19      L0=Lum_rad(T0,n,met)
20      Tnew=T0*exp(-L0*(gamma-1)*dt/(n*k*T0))
21      Tnew=min(Tnew,10.0*T0)
22      Tnew=max(Tnew,0.1*T0)
23      Tnew=max(Tnew,10.0)
24      prim(4,i,j)=n*k*Tnew
25      u(4,i,j)=(n*k*Tnew)/(gamma-1.0)+0.5*prim(1,i,j)*(prim(2,i,j)**2+
    prim(3,i,j)**2)
26  end do
27  end do
28
29  end subroutine cooling
30  !=====
31
32  !=====
33  ! # This module contains the cooling function proposed by Wang+2014 #
34  !=====
35  module cooling_funct
36      implicit none
37      contains
38      function Lum_rad(temperature,density,metallicity)
39          ! this subroutine calculate the total energy loss via radiative process
    using the equation (19) of Wang + (2014)
40      implicit none
41      real :: lum_rad, LambdaeeT, LambdaEE, Lambda,ET
42      real :: temperature, density, metallicity
43
44      LambdaeeT = cooling_ee(temperature)
45      LambdaEE=Lambda_ee(temperature,density,metallicity)
46      Lambda=cooling_function(temperature,density,metallicity)
47      ET=fracden(temperature)

```

```

48
49 lum_rad=LambdaEE*ET*Lambda*density**2
50
51 end function Lum_rad
52
53 function cooling_function (temperature , density , metallicity)
54 implicit none
55 real :: Lambda, LambdaHHe,LambdaMet, LambdaEE
56 real :: temperature , density , metallicity
57 real :: cooling_function
58
59 LambdaHHe=Lambda_HHe(temperature , density , metallicity)
60 LambdaMet=Lambda_Met(temperature , density , metallicity)
61 LambdaEE=Lambda_ee(temperature , density , metallicity)
62
63 Lambda=LambdaHHe+LambdaMet+LambdaEE
64 cooling_function=Lambda
65
66 return
67 end function cooling_function
68
69 !-----
70 !               * Hydrogen and Helium *
71 !-----
72 function Lambda_HHe (temperature , density , metallicity)
73 implicit none
74 real          :: temperature , density , metallicity , coolingi
75 real , parameter :: Zsun=1.0, dens0= 1.0
76 real          :: LambdaHHeT,LambdaHHe,LambdaHHeZsun
77 real          :: LambdaHHeDen0Zsun, Lambda_HHe
78 real          :: DHHe, MHHe
79
80 ! (solving equations 6, 7 and 8)
81 LambdaHHeT=cooling_hhe(temperature)

```

```

82 LambdaHHe=cooling_i_hhe (temperature , density , metallicity , LambdaHHeT)
83 LambdaHHeZsun=cooling_i_hhe (temperature , density , Zsun , LambdaHHeT)
84 LambdaHHeDen0Zsun=cooling_i_hhe (temperature , dens0 , Zsun , LambdaHHeT)
85
86 ! (solving equations 3, 4 and 5)
87 MHe=metal_depend (LambdaHHeZsun , LambdaHHe)
88 DHe=density_depend (LambdaHHeDen0Zsun , LambdaHHe)
89
90 Lambda_HHe=MHe*DHe*LambdaHHeDen0Zsun
91
92 return
93 end function Lambda_HHe
94
95 function cooling_hhe (temperature)
96 implicit none
97 real , parameter :: ahhe=4.86567e-13, bhhe=-2.21974, chhe=1.35332e-5
98 real , parameter :: dhhe=9.64775, ehhe=1.11401e-9, fhhe=-2.66528
99 real , parameter :: ghhe=6.91908e-21, hhhe=-0.571255, ihhe=2.45596e-27
100 real , parameter :: jhhe=0.49521
101 real           :: temperature , T, numer_cool_hhe , denom_cool_hhe
102 real           :: lambdaT0 , lambdaT1 , T0, T1, pend
103 real           :: cooling_hhe
104
105 ! (equation 6)
106 T0=1.e4
107 T1=2.e4
108 lambdaT0=1.e-23
109 T=temperature
110 numer_cool_hhe=ahhe*T**bhhe+(chhe*T)**dhhe*(ehhe*T**fhhe+ghhe*T**hhhe)
111 denom_cool_hhe=1+(chhe*T)**dhhe
112
113 cooling_hhe=numer_cool_hhe/denom_cool_hhe
114
115 if (T.lt.T1) then

```

```

116 numer_cool_hhe=ahhe*T1**bhhe+(chhe*T1)**dhhe*(ehhe*T1**fhhe+ghhe*T1**
    hhhe)
117 denom_cool_hhe=1+(chhe*T1)**dhhe
118 lambdaT1=numer_cool_hhe/denom_cool_hhe+ihhe*T1**jhhe
119 if (lambdaT1.le.lambdaT0)lambdaT1=lambdaT0
120 pend=(lambdaT1-lambdaT0)/(T1-T0)
121 cooling_hhe=pend*(T-T0)+lambdaT0
122 end if
123
124 return
125 end function cooling_hhe
126
127 function cooling_i_hhe(temperature,density,metallicity,lambda0)
128 implicit none
129 real,parameter::ahhe=2.84738,bhhe=3.62655e13
130 real,parameter::g1hhe=0.0245446,g2hhe=-0.0225974,g3hhe=4.8323e-3
131 real,parameter::g4hhe=-3.185e-4,aahhe=-0.000847633,bbhhe=0.0127998
132 real,parameter::cchhe=45209.3,ddhhe=2.92145e8
133 real::temperature,T,met_cool,den_cool,ghh,nh,
134 real::Z,coolingi,lambda0,density,metallicity
135 real::T1,den_cool1,met_cool1,T0,den_cool0,met_cool0,pend
136 real::cooling_i_hhe
137
138 T1=2.e4
139 T0=1.e0
140 T=temperature
141 nh=density
142 Z=metallicity
143 ghh=g4hhe*(log10(nh))**4+g3hhe*(log10(nh))**3+g2hhe*(log10(nh))**2+g1hhe
    *log10(nh)+1
144
145 den_cool=(T**ahhe+bhhe*ghh)/(T**ahhe+bhhe)
146 met_cool=(Z-1)*(aahhe*log(nh)+bbhhe)*exp(-(T-cchhe)**2/ddhhe)+1
147

```

```

148  if (T .lt. 2.e4) then
149      den_cool1=((T1**ahhe+bhhe*ghh)/(T1**ahhe+bhhe))
150      met_cool1=(Z-1)*(aahhe*log10(nh)+bbhhe)*exp(-(T1-cchhe)**2/ddhhe)+1.
151      den_cool0=((T0**ahhe+bhhe*ghh)/(T0**ahhe+bhhe))
152      met_cool0=(Z-1)*(aahhe*log10(nh)+bbhhe)*exp(-(T0-cchhe)**2/ddhhe)+1.
153      pend=(den_cool1-den_cool0)/(T1-T0)
154      den_cool=pend*(T-T0)+den_cool0
155      pend=(met_cool1-met_cool0)/(T1-T0)
156      met_cool=pend*(T-T0)+met_cool0
157  end if
158
159  cooling_i_hhe=den_cool*met_cool*lambda0
160  return
161 end function cooling_i_hhe
162
163 !-----
164 !               * Metals *
165 !-----
166 function Lambda_Met (temperature , density , metallicity)
167  implicit none
168  real          :: temperature , density , metallicity , coolingi
169  real          :: LambdaMetT , LambdaMet , LambdaMetZsun , LambdaMetDen0Zsun
170  real          :: DMet , MMet
171  real , parameter :: Zsun=1.0 , dens0= 1.0
172  real          :: Lambda_Met
173
174  ! (solving equations 9, 10 and 11)
175  LambdaMetT=cooling_Met (temperature)
176  LambdaMet=cooling_i_Met (temperature , density , metallicity , LambdaMetT)
177  LambdaMetZsun=cooling_i_Met (temperature , density , Zsun , LambdaMetT)
178  LambdaMetDen0Zsun=cooling_i_Met (temperature , dens0 , Zsun , LambdaMetT)
179
180  ! (solving equations 3, 4 and 5)
181  MMet=metal_depend (LambdaMetZsun , LambdaMet)

```

```

182 DMet=density_depend (LambdaMetDen0Zsun , LambdaMet)
183
184 Lambda_Met=MMet*DMet*LambdaMetDen0Zsun
185
186 return
187 end function Lambda_Met
188
189 function cooling_met (temperature)
190 implicit none
191 real , parameter :: amet= 6.88502e30 , bmet= -1.90262 , cmet=2.48881e17
192 real , parameter :: dmet= 0.771176 , emet=3.00028e-28 , fmet=0.472682
193 real :: temperature , T
194 real :: cooling_met
195 ! (equation 9)
196 T=temperature
197 cooling_met=(amet*T**bmet+cmet*T**dmet)**(-1)+emet*T**fmet
198
199 return
200 end Function cooling_met
201
202 function cooling_i_met (temperature , density , metallicity , lambda0)
203 implicit none
204 real , parameter :: amet= 3.29383 , bmet= 8.82636e14
205 real , parameter :: g1met=0.0524811 , g2met=-0.0353337 , g3met=0.00221438
206 real :: temperature , T , met_cool , den_cool , gm , nh , Z , lambda0
207 real :: density , metallicity , cooling_i_met
208
209 T=temperature
210 nh=density
211 Z=metallicity
212 gm=g3met*(log10 (nh))**3+g2met*(log10 (nh))**2+g1met*log10 (nh) !
213 den_cool=(T**amet+bmet*gm)/(T**amet+bmet)
214 met_cool=Z
215

```

```

216 cooling_i_met=den_cool*met_cool*lambda0
217 return
218 end function cooling_i_met
219
220 !-----
221 !               * Breemstrahlung *
222 !-----
223 function Lambda_ee(temperature , density , metallicity)
224 implicit none
225 real ,parameter :: Zsun=1.0, dens0= 1.0
226 real :: Lambda_ee
227 real :: LambdaeeT ,Lambdaee0 ,LambdaeeZsun ,LambdaeeDensZsun
228 real :: temperature , density , metallicity
229 real :: Dee , Mee
230
231 ! (solving equations 9 and 10)
232 LambdaeeT=cooling_ee(temperature)
233 Lambdaee0=cooling_i_ee(temperature , density , metallicity ,LambdaeeT)
234 LambdaeeZsun=cooling_i_ee(temperature , density , Zsun ,LambdaeeT)
235 LambdaeeDensZsun=cooling_i_ee(temperature , dens0 , Zsun ,LambdaeeT)
236
237 ! (solving equations 3 and 4)
238 Mee=metal_depend(Lambdaee0 ,LambdaeeZsun)
239 Dee=density_depend(Lambdaee0 ,LambdaeeDensZsun)
240
241 Lambda_ee=Mee*Dee*LambdaeeDensZsun
242
243 return
244 end function Lambda_ee
245
246 function cooling_ee(temperature)
247 implicit none
248 real ,parameter :: a=1.05244e-38,b=1.708064
249 real :: temperature ,T

```

```

250  real                :: cooling_ee
251
252  T=temperature
253  cooling_ee=a*T**b
254
255  return
256 end function cooling_ee
257
258 function cooling_i_ee(temperature , density , metallicity , lambda0)
259  implicit none
260  real , parameter :: Zsun=1.0, dens0=1.0
261  real , parameter :: a=0.00769985, b=24683.1, c=0.805234
262  real :: temperature , density , metallicity , T, Z, n
263  real :: lambda0, LambdaeeT
264  real :: met_cool , den_cool
265  real :: cooling_i_ee
266
267  T=temperature
268  n=density
269  Z=metallicity
270
271  den_cool=1
272  met_cool=((a*Z-a+1)*(T**c)+b)/((T**c)+b)
273
274  cooling_i_ee=den_cool*met_cool*lambda0
275
276  return
277 end function cooling_i_ee
278
279 !-----
280 ! These are some general functions to solve the equation (3); these
    functions can solve for H-He, metals and bremsstrahlung.
281
282 function metal_depend(LambdaZsun , Lambdai)

```

```
283 implicit none
284 real    :: Lambdai , LambdaZsun
285 real    :: metal_depend
286
287 metal_depend=Lambdai/LambdaZsun
288
289 return
290 end function metal_depend
291
292 function density_depend (LambdaZsun , LambdaDen0Zsun)
293 implicit none
294 real    :: LambdaDen0Zsun , LambdaZsun
295 real    :: density_depend
296
297 density_depend=LambdaZsun/LambdaDen0Zsun
298
299 return
300 end function density_depend
301
302 function fracden (temperature)
303 implicit none
304 real :: fracden , temperature
305
306 fracden=2.1792-exp(3966.27/temperature)
307
308 return
309 end function fracden
310
311 end module cooling_funct
312
```

Bibliografía

- Bertout, C. (1989). T tauri stars: Wild as dust. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 27(1):351–395.
- Bodenheimer, P. (2011). *Principles of star formation*. Springer Science & Business Media.
- Calvet, N. (1996). *Discos y vientos en objetos jóvenes visibles*, pages 281–330. Fondo de Cultura Económica. Edición a cargo de Luis Felipe Rodríguez.
- Cantó, J., Raga, A. C., and D’Alessio, P. (2000). Analytic solutions to the problem of jets with time-dependent injection velocities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 313(4):656–662.
- Clarke, C., Carswell, B., Carswell, R., et al. (2007). *Principles of astrophysical fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Dalgarno, A. and McCray, R. (1972). Heating and ionization of hi regions. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 10:375.
- Dere, K., Landi, E., Young, P., Del Zanna, G., Landini, M., and Mason, H. (2009). Chianti—an atomic database for emission lines-ix. ionization rates, recombination rates, ionization equilibria for the elements hydrogen through zinc and updated atomic data. *Astronomy & Astrophysics*, 498(3):915–929.

- Downes, T. and Ray, T. (1999). On the transfer of momentum from stellar jets to molecular outflows. *arXiv preprint astro-ph/9902244*.
- Esquivel, A. (2020). *Lecture notes in Numerical Astrophysics Hydrodynamics*. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.
- Godunov, S. K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3):271–306.
- Herbig, G. H. (1974). Draft Catalog of Herbig-Haro Objects. *Lick Observatory Bulletin*, 658:1.
- Lax, P. D. (1954). Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on pure and applied mathematics*, 7(1):159–193.
- Lim, A., Raga, A., Rawlings, J., and Williams, D. (2002). The acceleration of molecular hydrogen to high velocities in time-dependent fast j-shocks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 335(3):817–824.
- Raga, A. (1988). Intensity maps predicted from nonadiabatic stellar jet models. *The Astrophysical Journal*, 335:820–828.
- Raga, A., Cantó, J., and Rodríguez-González, A. (2020). *The physics of the interstellar medium*. UNAM.
- Raga, A. C. and Cantó, J. (1998). The Density Jump Across Internal Working Surfaces in HH Jets. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 34:73–78.
- Raga, A. C., Canto, J., Binette, L., and Calvet, N. (1990). Stellar Jets with Intrinsically Variable Sources. *Astrophysical Journal*, 364:601.
- Raga, A. C. and Kofman, L. (1992). Knots in Stellar Jets from Time-dependent Sources. *Astrophysical Journal*, 386:222.

- Raga, A. C., Navarro-González, R., and Villagrán-Muniz, M. (2000). A New, 3D Adaptive Grid Code for Astrophysical and Geophysical Gasdynamics. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 36:67.
- Raymond, J. C., Cox, D. P., and Smith, B. W. (1976). Radiative cooling of a low-density plasma. *ApJ*, 204:290–292.
- Stahler, S. W. and Palla, F. (2008). *The formation of stars*. John Wiley & Sons.
- Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.
- von Neumann, John & Richtmyer, R. D. (1950). A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of applied physics*, 21(3):232–237.
- Wang, Y., Ferland, G. J., Lykins, M., Porter, R., van Hoof, P. A., and Williams, R. (2014). Radiative cooling ii: effects of density and metallicity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(4):3100–3112.