UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA CONJETURA DE PISOT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

RENATA MONSIVAIS SALAS

DIRECTOR DE TESIS:
DOCTOR FELIPE GARCÍA RAMOS AGUILAR

CIUDAD DE MÉXICO. 2020

A mi padre, Mauro Monsivais G.

Índice general

Introducción

Una de las cualidades más sorprendentes de las matemáticas es la interacción entre sus diferentes áreas; uno de los ejemplos más conocidos son las cónicas, estudiadas por primera vez por los griegos quienes las clasificaron como objetos geométricos y posteriormente, por Fermat y Descartes haciendo uso de las ecuaciones cuadráticas para su clasificación. Fue en la década de 1800 cuando la conjetura de Pisot planteada por Rauzy y Host abre pauta para la propuesta de diversos plantamientos entre la relación de la dimámica asociada sobre las substituciones y las rotaciones en un grupo abeliano compacto por medio del uso de sistemas dinámicos, temas de teoría de grupos, teoría de la medida, análisis funcional, teoría de números e incluso fractales.
Una de las técnicas más importante para relacionar un sistema dinámico medible con una rotacion sobre un grupo abeliano compacto es empleando el Teorema de Representación de Halmos y von Newman, el cual asegura que si un sistema dinamico medible ergódico tiene espectro discreto, entonces es isomorfo a una rotación ergódica sobre un grupo abeliano compacto, en otras palabras, podemos asegurar que todos los sistemas dinámicos ergódicos con espectro discreto se ven como rotaciones en un grupo abeliano compacto. Más aún, el Teorema de Representación también nos asegura el converso, es decir, si un sistema dinámico medible ergódico es isomorfo a una rotación ergódica sobre un grupo abeliano compacto, entonces este tiene espectro discreto. Este teorema logró identificar las propiedades necesarias y suficientes para poder clasificar los sistemas dinámicos medibeles como rotaciones sobre un grupo abeliano compacto y simplifica el estudio del sistema.
En la presente tesis exponemos dos sistemas dinámicos medibles haciedo uso de las substituciones; una substitución es un morfismo denotado por ϕ sobre un conjunto de letras $\mathcal{A} = \{a_1, .., a_n\}$ donde $\phi(a_1)\phi(a_2)$ es la concatenación $\phi(a_1a_2)$. El primer sistema dinámico que se estudia es el asociado a la substitución de Fibonnaci, nombrado así por crecer conforme a la sucesión de Fibonacci, entre otras propiedades se demuestró que este sistema es isomorfo a una rotación sobre el círculo haciendo uso de los tiempos de retorno en una partición especial sobre el círculo y, por el Teorema de Representación, tiene espectro discreto. Por otra parte, el segundo sistema es el asociado a la substitución de Tribonacci, llamada así por tener las propiedades de la pasada con tres elementos, pero a diferencia del caso anteriror el sistema es isomorfo a una rotación sobre el toro donde la partición asociada es el Fractal de Rauzy.

Comparando los resultados obtenidos de estudiar los sistemas pasados, probar que un sistema dinámico tiene espectro discreto haciendo uso del Teorema de Representación puede complicarse ya que los isomorfismos pueden esconder la estructura algebráica de un sistemas. Es así como surge la conjetura de Pisot.
Todos estos resultados se construyeron asumiendo conocimientos básico de topología y teoría de la medida.
Es importante mencionar que el fractal de Rauzy, mostrado en la Figura 1, es un fractal que tesela el plano usando tres mosaicos con la misma forma, pero con distintos tamaños y, además de utilizarse para la prueba antes mencionada, fue usado recientemente por Kenyon [5] para construir difeomorfismos pseudo-Anosov y probar una conjetura de Fried, lo cual nos puede mostrar a grandes rasgos la importancia de esta construcción.

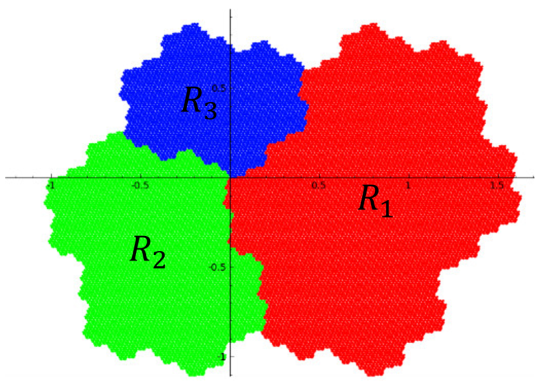

Figura 1: Fractal de Rauzy [9]

La tesis está compuesta de la forma siguiente:
En el primer capítulo se presentan definiciones esenciales de álgebra lineal, espacios medibles y de Hilbert, espectro de un operador y se muestran algunos resultados de la teoría de caracteres.
En el segundo capítulo, se presentan las nociones básicas de los sistemas dinámicos topológicos y de la relación con el operador inducido en $\mathcal{C}(X)$, el espacio de las funciones continuas de X con valores en los complejos.
En el capítulo tres estudiaremos los sistemas dinámicos medibles, la teoría espectral y el Teorema de Representación de Halmos y von Neumann.
El capítulo cuatro tiene como propósito responder a la pregunta: ¿Habrá sistemas dinámicos con espectro discreto y sin espectro topológico discreto? Para lo cual, se definen los sistemas dinámicos topológicos asociados a una substitución. Se estudia el espectro de los sistemas dinámicos asociados a la substituciones de Fibonacci y Tribonacci y, por último, se enuncia la conjetura de Pisot.
Finalmente, en el quinto capítulo se presenta el proceso de la construcción del fractal de Rauzy se demuestra que la substitución de Tribonacci tiene espectro discreto.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teorema de Perron-Frobenius

Definición 1.1. Una **permutación** del conjunto $P = \{1, \dots, n\}$ es una función biyectiva de este conjunto sobre sí mismo. Denotamos al conjunto de todas las permutaciones de P por S_n.

Ejemplo 1.1. La función $\psi : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ definida mediante la regla

$$\psi(1) = 2 \qquad \psi(2) = 3 \qquad \psi(3) = 1$$

es una permutación del conjunto $\{1, 2, 3\}$, es decir, $\psi \in S_3$.

Definición 1.2. Sea $\psi \in S_n$. Definimos la **matriz de permutación** P_ψ mediante la regla

$$P_\psi = [\delta_{\psi(i),j}]_{i,j=1}^{n}.$$

Ejemplo 1.2. A la permutación ψ definida en el Ejemplo 1.1 se le asocia la matriz

$$P_\psi = P_{2,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Definición 1.3. Una matriz M de orden $n \times n$ es **reducible** si:

1. M es la matriz cero de orden 1×1 o
2. si $n \geq 2$ y existe una matriz de permutación P tal que

$$PMP^T = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

donde B y D son matrices cuadradas de orden menor a n y mayor a 1 y 0 es la matriz cero.

Una matriz M es **irreducible** si no es reducible.

Definición 1.4. Decimos que una matriz M es **primitiva** si y solo si existe una $p > 0$ tal que M^p es estrictamente positiva, esto es, todas sus entradas son positivas.

Teorema 1.1. *(Teorema de Perron-Frobenius)*
Sea M una matriz cuadrada de $n \times n$ con entradas no negativas $(A \geq 0)$. Si M es irreducible entonces:

1. *Existe un eigenvalor $\lambda > 0$ tal que $Mv = \lambda v$, donde el eigenvector correspondiente es $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $v_i > 0$ para toda $i = \{1, \ldots, n\}$.*

2. *$\lambda \geq |\alpha|$ para cualquier otro eigenvalor α de M.*

3. *El eigenvalor λ tiene multiplicidad geométrica uno.*

4. *Cualquier eigenvector $w = (w_1, \ldots, w_n)$ no nulo de M con $w_i \geq 0$ para toda $i = \{1, \ldots, n\}$ es múltiplo de v.*

Más aun, si M es primitiva, entonces el eigenvalor λ domina estrictamente en módulo a los demás eigenvalores α, es decir

$$\lambda > |\alpha|.$$

1.2. Espacios medibles

Definición 1.5. Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

I. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

II. Si $U_1, U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

III. Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

El conjunto X es llamado el **espacio**, los elementos de X son llamados **puntos** y los subconjuntos de X que pertenecen a τ son llamados **abiertos** del espacio X; la familia τ de subconjuntos abiertos de X se le conoce como una **topología** en X.

Definición 1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. El **interior** de un conjuto $A \subset X$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A y lo denotamos por $\text{int}(A)$.

Por otra parte, el interior de A se define equivalentemente como el conjunto abierto más grande contenido en A.

Definición 1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ es llamada **base** de (X, τ) si todo abierto no vacío $A \subset X$ puede verse como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Por otra parte, decimos que una familia $\mathcal{P} \subset \tau$ es **subbase** de (X, τ) si la familia de todas las intersecciones finitas

$$U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k \text{ donde } U_i \in \mathcal{P} \text{ con } i = 1, \ldots, k$$

es una base para (X, τ).

Definición 1.8. Sea X un espacio topológico. Un **recubrimiento abierto** de un subconjunto $A \subset X$ es una familia de conjuntos abiertos $\{O_i\}_{i \in I}$ de X, tales que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Definición 1.9. Un espacio topológico X es **compacto** si, dado un recubrimiento abierto de X cualquiera, existe un subrecubrimiento finito del mismo. Así pues, decimos que X es **localmente compacto** si para todo punto $x \in X$ existe un abierto U con $x \in U$ tal que $\overline{U}$ es compacto.

Observación 1.1. Sean X, Y dos espacios topológicos, $U \subseteq X$ compacto , $V \subseteq Y$ abierto y $[U, V]$ la colección de funciones $f : X \to Y$ tales que $f(U) \subset V$. Entonces la colección de conjuntos $[U, V]$ es una subbase de la topología τ_K en $C(X, Y)$ nombrada **topología compacto-abierta**.

Definición 1.10. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X) = \{\text{subconjuntos de X}\}$. Decimos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ es una una **σ-álgebra** si:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$.

2. A $\in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$.

3. Para toda sucesión $A_n \in \mathcal{D}$,

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}.$$

Definición 1.11. Sea X un espacio topológico. La **σ-álgebra de Borel** (o de los borelianos) es la σ-álgebra generada por los abiertos de X y se denota por $\mathcal{B}(X)$.

Ejemplo 1.3. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$. Tenemos que

$$\mathcal{C} \subset \{A : A \text{ es abierto}\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, esto es, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{O}$ abierto de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que

$$\mathcal{O} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}, A \subset \mathcal{O}} A$$

donde cada $A \in \sigma(\mathcal{C})$ y como $\mathcal{C}$ es numerable, se tiene que $\bigcup_{A \in \mathcal{C}, A \subset \mathcal{O}} A$ es numerable, entonces $\mathcal{O} \in \sigma(\mathcal{C})$ y $\sigma(C)$ es una σ-álgebra que contiene a los abiertos. Por lo tanto contiene a los borelianos.

■

Observación 1.2. Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ una $\sigma-$álgebra.

a. $X \in \mathcal{D}$

b. Para toda sucesión $B_n \in \mathcal{D}$, $\bigcap_n B_n \in \mathcal{D}$.

Definición 1.12. Una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X es una **semiálgebra** si satisface las siguientes condiciones:

I. $\emptyset \in \mathcal{G}$.

II. Si $\{A, B\} \in \mathcal{G}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{G}$.

III. Si $A \in \mathcal{G}$, entonces $X/A = \bigcup_{j=1}^{n} E_i$ donde

$$E_i \in \mathcal{G} \text{ y } E_j \cap E_i = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{G}$ una semiálgebra de subconjuntos de X. La $\sigma-$álgebra $\sigma(\mathcal{G})$ generada por $\mathcal{G}$ consiste en los subconjuntos de X que pueden ser escritos de la forma*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

donde $A_i \in \mathcal{G}$ y $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos ajenos de X.

Ejemplo 1.4. Sea $k \geq 2 \in \mathbb{Z}^+$ fijo y $(p_0, \ldots, p_{k-1})$ un vector de probabilidad (i.e., $p_i \geq 0$ para toda i y $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$), $Y = \{1, \ldots, k-1\}$ y $X = \prod_{i=0}^{\infty} Y_i$, consideramos los rectángulos elementales A_j donde

$$A_j = \left\{\{x_i\}_{i=0}^{\infty} |\; x_i = a_i \text{ para } j \leq n\right\}.$$

Denotamos a este conjunto como $[a_0, \ldots, a_n]_n$ y lo llamamos el bloque con puntos finales 0 y n. La colección de estos conjuntos forman una semiálgebra que genera la $\sigma-$álgebra producto $\mathcal{B}$.

Definición 1.13. Sea $(X, \mathcal{D})$ un **espacio medible**, donde X es un conjunto arbitrario y $\mathcal{D}$ es una $\sigma-$álgebra. Una **medida positiva** sobre $(X, \mathcal{D})$ es una aplicación

$$\mu : \mathcal{D} \longrightarrow [0, +\infty] \quad \text{tal que}$$

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Para toda sucesión $A_n \in \mathcal{D}$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ con $m \neq n$, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \in [0, \infty].$$

Un **espacio de medida** está dado por la tercia $(X, \mathcal{D}, \mu)$ donde $\mathcal{D}$ es una $\sigma-$álgebra de X y μ una medida sobre $\mathcal{D}$.

Un espacio medible de interés en la tesis es el espacio L^2, el cual definiremos a continuación.

1.2.1. Espacio L^2

Sea $K = \mathbb{C}$ y $N_2(f) := \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$. Definimos el espacio

$$\mathcal{L}^2(X, \mathcal{D}, \mu) := \{f : X \longrightarrow K \mid N_2(f) < \infty\}.$$

Tenemos que $N_2(f)$ satisface que:

1. $N_2(f)(\alpha f) = |\alpha| N_2(f)$ para toda $\alpha \in \mathbb{C}$ y para toda f.

2. $N_2(f + g) \leq N_2(f) + N_2(g)$ por la desigualdad de Minkowski.

3. $N_2(fg) \geq N_2(f) N_2(g)$ por la desigualdad de Hölder.

Observación 1.3. $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{D}, \mu)$ es un subespacio vectorial de K^X y

$$N_2 : \mathcal{L}^2(X, \mathcal{D}, \mu) \longrightarrow [0, \infty]$$

es una seminorma ya que $N_2(f) = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ casi en todas partes.

Definición 1.14. Definimos el **espacio de las funciones cuadrado integrables** como $L^2(X, \mathcal{D}, \mu) = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{D}, \mu)/\sim$, donde $f \sim g$ si $f(x) = g(x)$ casi en todas partes (c.t.p.), entonces

$$|| \quad ||_2 : L^2(X, \mathcal{D}, \mu) \longrightarrow \infty \quad \text{con} \quad || \quad ||_2 = N_2$$

es una norma de $L^2(X, \mathcal{D}, \mu)$.

Teorema 1.3. *$L^2(X, \mathcal{D}, \mu)$ es completo.*

Para demostrar el teorema anterior, haremos uso del siguiente lema:

Lema 1.1. *Sea E un espacio normado. E es completo si y sólo si toda serie normalmente convergente es convergente.*

Demostración Teorema 1.3. Sea $f_n \in L^2(X, \mathcal{D}, \mu)$ tal que $\sum ||f_n||_2 < \infty$. Consideramos

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n| \right) d\mu = \left|\left| \sum_{n=1}^{N} |f_n| \right|\right|_2 \leq \sum_{n=1}^{N} ||f_n||_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_2 < \infty.$$

Usando el Teorema de convergencia monótona de Levi, obtenemos

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int |f_n(x)| \right) d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_2 < \infty$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_2 < \infty$ c.t.p. Por lo tanto

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x) \quad \text{es convergente en c.t.p.}$$

Sea $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Entonces $|f(x)| \leq g(x)$. Esto implica que

$$\int_X g^2 d\mu < \infty \quad \text{entonces } f \in L^2(X, \mathcal{D}, \mu).$$

Por tanto $\sum f_n$ converge a f en $L^2(X, \mathcal{D}, \mu)$. Usando esto y que

$$f - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$

obtenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right|^2 = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

Pero como

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right|^2 \leq g^2 \quad \text{para c.t.p.,}$$

entonces por convergencia

$$\int_X \left| f - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right|^2 d\mu(x) \longrightarrow 0,$$

es decir, $\sum f_n$ converge a f en $L^2(X, \mathcal{D}, \mu)$. ■

Definición 1.15. Sean $(X, \mathcal{D})$ y $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles. Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es **medibe** si para toda $B \in \mathcal{B}$ tenemos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{D}$.

Proposición 1.1. *Sea Y un espacio topológico con la σ-álgebra $\mathcal{B}(Y)$. Entonces*

I *) $f : (X, \mathcal{D}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ es medible si y sólo si para todo abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{D}$.*

II *) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces f es medible.*

Demostración I). Es evidente que si $U \subset Y$ es un abierto, entonces $U \in \mathcal{B}(Y)$ y por lo tanto $f^{-1}(U) \in \mathcal{D}$.

Sea $B_0 = \{B \in \mathcal{B}(Y) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{D}\}$. Entonces $B_0 \subset \mathcal{B}(Y)$. Podemos afirmar que $\mathcal{B}(Y) = B_0$ pues $\mathcal{B}(Y) \subset B_0$ por hipótesis. Tenemos que

- $\emptyset \in \mathcal{B}(Y)$ ya que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{D}$ por lo tanto, $\emptyset \in B_0$.
- Si $B \in B_0$ sabemos que $B \in B_0$ pero $f^{-1}(B^c) = (f^-1(B))^c \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, $B^c \in B_0$.
- Dada una sucesión en B_0, para todo $B_n \in \mathcal{B}(Y)$

$$\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}(Y),$$

entonces $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n),$ con $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{D}$ para toda n, esto implica que $\bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{D}$.

Por lo tanto, B_0 es una $\sigma-$álgebra que contiene a los abiertos, es decir, $\mathcal{B}(Y) \subset B_0$. ■

Demostración II). Si $f : X \to Y$ es continua, entonces para todo abierto $U \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto de X y por tanto un boreliano de X. ■

1.3. Espacios de Hilbert y espectro de un operador

1.3.1. Espacios de Hilbert

Definición 1.16. Sea K un campo y H un espacio vectorial sobre K. Definimos el **producto interno** como una función $\langle , \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisface las siguientes condiciones.

1. Lineal por la izquierda:
$$\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle.$$
2. Lineal conjugada por la derecha:
$$\langle x, ay + bz\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle + \overline{b}\langle x, z\rangle.$$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

4. Definida positiva: $\langle x, x\rangle \quad \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Donde $x, y, z \in H$ y $a, b \in K$.

Definición 1.17. Sea H un espacio vectorial y $\langle , \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ un producto interno. H es un **espacio de Hilbert** si la pareja $(H, || \quad ||)$ es un espacio completo, donde

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Teorema 1.4 (Riesz-Fischer)**.** *La pareja* $(L^2(X, \mathcal{D}, \mu), \langle , \rangle)$ *es un espacio de Hilbert, donde el producto interno* $\langle , \rangle : L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *está definido como:*

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu \quad \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Tenemos que $\langle , \rangle$ es un producto punto hermitiano, es decir

I) Lineal en la primer entrada:

$$\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \int_X (\alpha f + \beta g)\overline{h}d\mu = \alpha \int_X f\overline{g}d\mu + \beta \int_X g\overline{h}d\mu = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle.$$

II) Lineal conjugada en la segunda entrada:

$$\langle f, \alpha g + \beta h\rangle = \int_X f(\overline{\alpha g + \beta h})d\mu = \overline{\alpha} \int_X f\overline{g}d\mu + \overline{\beta} \int_X f\overline{h}d\mu = \overline{\alpha}\langle f, g\rangle + \overline{\beta}\langle f, h\rangle.$$

III) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$

$$\overline{\langle g, f\rangle} = \int_X \overline{g\overline{f}}d\mu = \int_X f\overline{g}d\mu = \langle f, g\rangle.$$

IV) $\langle f, f\rangle \quad \geq 0 \quad$ y $\quad \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

$$\langle f, f\rangle = \int_X f\overline{f}d\mu = \int_X f_1^2 + f_2^2 d\mu \geq 0.$$

Por otra parte, $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_X f\overline{f}d\mu = 0 \Leftrightarrow f\overline{f} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

Por otro lado, por el Teorema 1.4, $L^2(X, \mathcal{D}, \mu)$ es completo, es decir, $(L^2(X, \mathcal{D}, \mu), \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

∎

Definición 1.18. Sea H un espacio de Hilbert. Dos vectores $x, y \in H$ son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$ y se denota por $x \perp y$. Por otra parte, se llama **ortogonal de un conjunto** A al conjunto de todos los vectores ortogonales a los vectores de A denotado por $A^\perp$, es decir,

$$A^\perp = \{x \in H | x \perp y \quad \forall y \in A\}.$$

$A^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado.

Definición 1.19. Una sucesión (x_n) en un espacio de Hilbert H es una **base ortogonal de Hilbert** de H si (x_n) genera a H y es un sistema ortogonal, es decir

- Para todo $x \in H$ $x = \sum \alpha_n x_n$ con $\alpha_n \in \mathbb{K}$.
- Si $x_n \neq 0$ y $x_n \perp x_m$ para $n \neq m$.

Ejemplo 1.5. $\{e^{int} | n \in \mathbb{Z}\}$ en $L^2(\mathbb{T})$ es una base de Hilbert para $(L^2(X, \mathcal{D}, \mu), \langle , \rangle)$.

1.3.2. Espectro de un operador sobre un espacio de Hilbert

Definición 1.20. Un **operador** entre dos espacios de Hilbert H_1, H_2 es una función lineal $U : H_1 \longrightarrow H_2$. Si U es un operador lineal sobreyectivo tal que

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \text{ para toda } x, y \in H_1,$$

entonces U es un **isomorfismo**.

Decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **eigenvalor** de U si existe un vector $h_\lambda \in H$, llamado **eigenvector** de U, tal que

$$Uh_\lambda = \lambda h_\lambda.$$

Proposición 1.2. *Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal continuo. Entonces existe un único operador $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ lineal y continuo tal que*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \textit{para toda } x \in H_1, y \in H_2.$$

*El operador T^* recibe el nombre de **adjunto** de T.*

Definición 1.21. Sea H un espacio de Hilbert separable y $U : H \to H$ un operador. Decimos que U es un **operador unitario** si U es un operador lineal continuo invertible tal que

$$U^* = U^{-1}.$$

Observación 1.4. Sea U un operdador unitario, λ un eigenvalor de U y h_λ el eigenvector correspondiente. Entonces $|\lambda| = 1$

Demostración.

$$\begin{aligned} \lambda \langle h_\lambda, h_\lambda \rangle &= \langle Uh_\lambda, h_\lambda \rangle = \langle h_\lambda, U^* h_\lambda \rangle \\ &= \langle h_\lambda, U^{-1} h_\lambda \rangle = \overline{\langle U^{-1} h_\lambda, h_\lambda \rangle} \\ &= \overline{\lambda^{-1}} \langle h, h \rangle, \end{aligned}$$

esto implica que $\lambda \overline{\lambda^{-1}} = 1$. Por lo tanto $|\lambda| = 1$. ■

La familia de todos los eigenvalores $\Omega_d(U)$ del operador U se le conoce como el **espectro discreto de U**.

1.4. Teoría de caracteres

Definición 1.22. Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Denotamos por $\hat{G}$ al conjunto de todos los homeomorfismos de G al círculo unitario denotado por $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y decimos que los elementos de $\hat{G}$ son los **caracteres** de G.

Observación 1.5. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ dos caracteres. Si consideramos la operación producto

$$(\gamma_1 \times \gamma_2)(g) : G \to K \quad \text{donde} \quad (\gamma_1 \times \gamma_2)(g) = \gamma_1(g) \times \gamma_2(g),$$

entonces $(\hat{G}, \times)$ es un grupo abeliano compacto. Más aun, si equipamos a $\hat{G}$ con la topología compacto-abierta, entonces es un grupo abeliano localmente compacto.

Ejemplo 1.6. Considerando $G = K$ entonces todos los homeomorfismos en $\hat{K}$ son de la forma

$$\begin{aligned} \gamma_n : K &\to K \\ z &\to z^n \quad \text{para alguna } n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

entonces $\hat{K} \cong \mathbb{Z}$. Análogamente, el grupo de caracteres del n-toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ y todo $\gamma \in \hat{K}^n$ es de la forma

$$\gamma(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^{p_1}, \ldots, z_n^{p_n}) \quad \text{para algún } (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Proposición 1.3. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Tenemos los siguientes resultados:*

1. *G tiene una base topológica numerable si y sólo si $\hat{G}$ tiene una base topológica numerable.*

2. *G es compacto si y sólo si $\hat{G}$ es discreto.*

   Usando (1) y (2) tenemos que G es compacto y metrizable si y sólo si $\hat{G}$ es un grupo discreto.

3. *(Teorema de dualidad.) $(\hat{\hat{G}})$ es naturalmente isomorfo (como un grupo topológico) a G, donde el isomorfismo está dado por el mapeo*

   $$\alpha \to a \text{ donde } \alpha(\gamma) = \gamma(a) \text{ para toda } \gamma \in G.$$

4. *Sea H un subgrupo cerrado de G con $H \neq G$. Entonces existe $\gamma \in \hat{G}, \gamma \not\equiv 1$ tal que $\gamma(h) = 1$ para toda $h \in H$.*

5. *Sea G compacto. Entonces los elementos de $\hat{G}$ son mutuamente ortogonales en $L^2(m)$ donde m es la medida de Haar.*

Demostración. Basta demostrar que

$$\int_G \gamma(x)dm(x) = 0 \quad \text{si } \gamma \neq 1.$$

Sea $a \in G$. Dado que m es la medida de Haar se cumple que

$$\begin{aligned}\int \gamma(x)dm(x) &= \int \gamma(ax)dm(x) \\ &= \gamma(a) \int \gamma(x)dmx\end{aligned}$$

Escogiendo a tal que $\gamma(a) \neq 1$, entonces $\int \gamma(x)dm(x) = 0$.

■

6. *Si G es compacto, entonces los elementos de $\hat{G}$ forman una base ortonormal de $L^2(m)$ donde m es la medida de Haar.*

Capítulo 2

Sistemas dinámicos topológicos

En este capítulo se exponen nociones y resultados básicos de la dinámica topológica.
Un **sistema dinámico topológico** es una pareja (X, T)donde X es un espacio métrico compacto (donde la métrica asociada se denotará por d o ρ) y $T : X \to X$ es una función continua.

Definición 2.1. Sean (X, T) y (Y, S) dos sistemas dinámicos topológicos. Decimos que (X, T) es **conjugado topológico** a (Y, S) si existe un homeomorfismo

$$\pi : X \to Y \quad \text{tal que} \quad \pi T = S\pi.$$

Donde el homeomorfismo π es llamado **conjugación topológica**.

Definición 2.2. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Decimos que (X, T) es **topológicamente transitivo** si para todo U, V abiertos no vacíos de X, existe $n \geq 1$ tal que

$$T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Proposición 2.1. *Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Entonces las siguientes son equivalentes*

1. *(X, T) es topológicamente transitivo.*
2. *Para todo subconjunto cerrado $E \subset X$ tal que $E \subset T^{-1}E$, entonces $E = X$ o E es denso en ninguna parte (equivalentemente, para todo $U \subset X$ abierto tal que $T^{-1}U \subset U$, entonces $U = \emptyset$ o U es denso).*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ Supongamos que $U, V \neq \emptyset$ son abietos. Si consideramos el conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U),$$

podemos asegurar que es $T-$invariante y denso, de otra manera existiría

$$W \subset X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U) \quad \text{tal que} \quad W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U) = \emptyset.$$

Entonces $E = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)$ es un conjunto cerrado con $E \neq X$ tal que $E \subset T^{-1}(E)$ y existe $W \subset E$ abierto. Lo cual contradice II), esto implica que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ es decir, existe } m \geq 0 \text{ tal que } T^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

$2 \Rightarrow 1$ Supongamos que $U, V \subset X$ son abiertos distintos del vacío. Entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U) \quad \text{es abierto y} \quad T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U).$$

Podemos concluir, por el inciso 2, que $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)$ es denso. Por lo tanto, para alguna $n \geq 1$ $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. ∎

Definición 2.3. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Decimos que (X, T) es **minimal** si para todo $x \in X$ el conjunto

$$\mathcal{O}_T(x) := \{T^n(x) | n \in \mathbb{N}\} \text{ es denso en } X.$$

El conjunto $\mathcal{O}_T(x)$es llamado la **T-órbita de** x.

Teorema 2.1. *Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo y X un espacio métrico compacto. Las siguientes son equivalentes.*

1. *(X, T) es minimal.*
2. *Si $E \subset X$ es cerrado y $T(E) = E$ entonces $E = \emptyset$ ó $E = X$.*
3. *Para todo $U \subset X$ distinto del vacío se tiene que $\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n(U) = X$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sea $E \subset X$ un conjunto cerrado no vacío tal que $T(E) = E$ y supongamos que (X, T) es minimal.

Como E es cerrado, si $x \in E$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x) \in E.$$

Esto implica que $\mathcal{O}_T(E) \subset E$, es decir, $X = \overline{\mathcal{O}_T(x)} \subset E$. Por lo tanto $E = X$.

$2 \Rightarrow 3$. Sea $U \subset X$ un abierto distinto del vacío. Entonces

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(U) \text{ es abierto.}$$

Considerando que

$$E = X \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(U),$$

entonces

$$T(E) = T(X \setminus \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n(U)) = T(X) \setminus T(\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n(U)) = X \setminus \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n(U) = E.$$

Esto implica que E es un conjunto cerrado distinto de X y $TE = E$. Por 2 se tiene que $E = \emptyset$. Por lo tanto $X = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(U)$.

$3 \Rightarrow 1$. Sea $x \in X$ y $U \subset X$ abierto distinto del vacío. Por el inciso 3

$$\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n(U) = X.$$

Entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in T^n(U)$. Así pues, $T^{-n}(x) \in U$ es decir,

$$T^{-n}(x) \cap U \neq \emptyset \quad \text{para alguna} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, para toda $x \in X$, $\mathcal{O}_T(x)$ es denso en X. ■

Dados dos sistemas dinámicos topológicos, es natural preguntarse en este punto si las propiedades de minimalidad y transitividad topológica, definidas anteriormente, se preservan bajo conjugación.

Proposición 2.2. *Sean $(X,T), (Y,S)$ dos sistemas dinámicos topológicos conjugados. Entonces*

1. *(X,T) es minimal si y sólo si (Y,S) es minimal.*
2. *(X,T) es topológicamente transitivo si y sólo si (Y,S) es topológicamente transitivo.*

Demostración 1. Supongamos que (X,T) es minimal. Sea $Z \subset Y$ un cerrado S-invariante no vacío. Entonces $\pi^{-1}(Z)$ es cerrado y

$$\begin{aligned} T(\pi^{-1}(Z)) &= \pi^{-1} \circ S \circ \pi(\pi^{-1}(Z)) \\ &= \pi^{-1} \circ S(Z) = \pi^{-1}(Z), \end{aligned}$$

es decir, $\pi^{-1}(Z)$ es un cerrado $T-$invariante de X donde $\emptyset \neq \pi^{-1}(Z) \neq X$. Lo cual contradice la minimalidad de (X,T). Por lo tanto, si (X,T) es minimal (Y,S) es minimal.

Análogamente, sea $V \subset X$ un cerrado $T-$invariante tal que $\emptyset \neq V \neq X$ y supongamos que (Y,S) es minimal. Entonces $\pi(V)$ es un cerrado en Y tal que

$$\begin{aligned} S(\pi(V)) &= \pi \circ T \circ \pi^{-1}(\pi(V)) \\ &= \pi \circ T(V) = \phi(V). \end{aligned}$$

Esto implica que $\phi(V)$ es un cerrado $S-$invariante con $\emptyset \neq \phi(V) \neq Y$, lo cual contradice que (Y,S) es minimal. Por lo tanto, si (Y,S) es minimal (X,T) es minimal. El si y sólo si se obtiene ya que la conjugación es simétrica. ■

Demostración 2. Sean $U, V \subset Y$ abiertos distintos del vacío y supongamos que (X, T) es topológicamente transitivo. Entonces $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V) \subset X$ son abiertos no vacíos y por ser (X, T) transitivo existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$T^n(\pi^{-1}(U)) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset, \text{ esto implica que}$$

$$\pi(T^n(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \pi \circ T^n(\pi^{-1}(U) \cap \pi \circ \pi^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $S^n(U) \cap V \neq \emptyset$, es decir, (Y, S) es topológicamente transitivo.

Análogamente, sean $W, Z \subset X$ abiertos distintos del vacío y supongamos que (Y, S) es topológicamente transitivo. Entonces $\pi(W), \pi(Z)$ son abiertos no vacíos en Y y por ser (Y, S) transitivo existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^m(\pi(W)) \cap \pi(Z) \neq \emptyset.$$

Esto implica que

$$\pi^{-1}(S^m(\pi(W)) \cap \pi(Z)) = \pi^{-1} \circ S^m(\pi(W)) \cap \pi^{-1} \circ \pi(Z) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $T^m(W) \cap Z \neq \emptyset$, es decir, (X, T) es topológicamente transitivo. ■

Proposición 2.3. *Sea (X, T) es un sistema dinámico topológico metrizable (con métrica ρ) y T un homeomorfismo topológicamente transitivo. Si existe una métrica equivalente a ρ en X tal que T es una isometría, entonces T es minimal.*

Demostración. Supongamos que d es una métrica en X tal que

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Veamos que $\overline{O_T(x)} = X$ para toda $x \in X$.

Sea $x_0 \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_T(x_0)} = X$, $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(x, T^m(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(y, T^n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} d(y, T^{n-m}(x)) &\leq d(y, T^n(x_0)) + d(T^n(x_0), T^{n-m}(x)) \\ &\leq d(y, T^n(x_0)) + d(T^m(x_0), x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues, $\overline{O_T(x)} = X$ para toda $x \in X$, es decir, T es minimal bajo la métrica d.

Dado que d y ρ son métricas equivalentes, se tiene que el sistema (X, T) equipado con la métrica ρ es conjugado al sistema (X, T) con la métrica d y por la Proposición 2.2 inciso 1, podemos concluir que (X, T) con métrica ρ es minimal. ■

Ejemplo 2.1. Rotación sobre el círculo

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donde $x \sim y$. Si $\quad x - y \in \mathbb{Z}$, entonces

$$[x] = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{T} = \{[x] : x \in \mathbb{R}\}.$$

Por otra parte, podemos deducir que $\mathbb{T} \cong S = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}$ considerando el homeomorfismo $\pi : \mathbb{R} \to S$ con $\pi(x) = e^{i\pi x}$ y usando la siguiente métrica en $\mathbb{T}$

$$d(x, y) = \text{mín}\ \{d_{\mathbb{R}}(x + n, y + m) : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Concluimos que $\mathbb{T}$ es un espacio métrico compacto.

Dada $\alpha \in \mathbb{T}$, definimos la rotación en S como

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ [x] &\to [x + \alpha]. \end{aligned}$$

Proposición 2.4. *R_α es un homeomorfismo con inversa $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$.*

Demostración. Para ver que es inyectiva, supongamos que $R_\alpha([x]) = R_\alpha([y])$, entonces $[x + \alpha] = [y + \alpha]$. Por lo tanto $x - y \in \mathbb{Z}$, es decir, $[x] = [y]$.

Por otra parte, $R_\alpha \circ R_{-\alpha}(x) = x - \alpha + \alpha = [x] = R_0(x)$. Análogamente

$$R_{-\alpha} \circ R_\alpha(x) = R_0(x).$$

Esto es, R_α es una biyección.

La continuidad de R_α y $R_{-\alpha}$ se satisface ya que para toda $\alpha \in \mathbb{T}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$, entonces

$$d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) = \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x + \alpha + n, y + \alpha + m) : n, m \in \mathbb{Z}\} = d(x, y) < \varepsilon.$$

Así pues, R_α es un homeomorfismo. ■

Por la Proposición 2,1 se puede concluir que la pareja $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ es un sistema dinámico topológico, donde la propiedad de ser minimal se cumple bajo ciertas condiciones.

Proposición 2.5. *Sea $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ una rotación en el círculo. Entonces R_α es minimal si y sólo si α es irracional.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$, es decir $\alpha = \frac{p}{q}$ con $\{p, q\} \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{T}$, entonces

$$R^q[x] = \left[x + \frac{p}{q}q\right] = [x].$$

Por lo tanto, $\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)$ es q-periódica para toda $x \in \mathbb{T}$. Más aun, $\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)$ tiene una cantidad finita de elementos, lo que implica que no es densa en $\mathbb{T}$. Así pues, si R_α es minimal entonces α es irracional.

Sea $\alpha \in \mathbb{I}$ y supongamos que existe $x \in \mathbb{T}$ tal que $\overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)} \neq X$. Entonces existe un abierto $J \in \mathbb{T}$ tal que $J \cap \mathcal{O}_{R_\alpha}(x) = \emptyset$. Vamos a probar que existe $J \subset \mathbb{T} \setminus \mathcal{O}_{R_\alpha}(x)$ de longitud máxima tal que

$$R_\alpha^n(J) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Supongamos que no existe, es decir que $R_\alpha^n(J) \cap J = \emptyset$. Entonces

1. $R^n(J) = J$, o
2. $R^n(J) \cup J$ es un intervalo.

Suponiendo que pasa 2, entonces $|R^n(J) \cup J| > |J|$, lo cual contradice el hecho de que J es el intervalo de mayor longitud.
Supongamos que sucede el caso 1 y que $J = (a, b)$. Así pues

$$R_\alpha^n(z) = z.$$

Entonces $z + n\alpha = z + m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice la hipótesis de que $\alpha \in \mathbb{I}$.
Así pues, los intervalos $R_\alpha^n \subset \mathbb{T}$ son ajenos dos a dos y dado que R_α^n es una isometría $|R_\alpha^n(J)| = |J| \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$|\bigcup_{-\infty}^{\infty} R_\alpha^n(J)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_\alpha^n(J)| = \infty.$$

Pero esto no es posible ya que la longitud de S es finita. Por lo tanto,

$$\overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)} = \mathbb{T}.$$

■

Proposición 2.6. *Toda rotación* $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ *es minimal si y sólo si es transitiva.*

Es inmediato que, si $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ es minimal, entonces $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ es transitiva. Por otra parte, por ser R_α un homeomorfimo y d una isometría, por la Proposición 2.3, si T es topológicamente transitivo entonces R_α es minimal.

2.0.1. Rotación sobre un grupo topológico compacto

Considerando la rotación sobre el círculo definida en el Ejemplo 2.1, se puede generalizar el resultado para rotaciones sobre grupos topológicos compactos.

Un **grupo topológico** es una terna $(G, \tau, *)$ donde:

1. (G, τ) es un espacio topológico.
2. $(G, *)$ es un grupo.
3. La función $* : G \times G \to G$ donde $(x, y) \to x * y$ es continua.

4. La función inversa $G \to G$ donde $x \to x^{-1}$, es continua.

Definimos la **rotación** R_α sobre un grupo topológico compacto como

$$\begin{aligned} R_\alpha : G \to G \quad & \text{donde} \\ R_\alpha(x) = \alpha x \quad & \text{con } \alpha, x \in G. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Haar, dado un grupo topológico compacto $(G, \tau.*)$, existe una medida de probabilidad m definida en $\mathcal{B}(G)$, los borelianos de G, tal que

I. $m(xE) = m(E)$ para toda $x \in G$ y $E \in \mathcal{B}(G)$.

II. m es regular, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ y $E \in \mathcal{B}(G)$ existe un compacto M y un abierto U tal que $M \subset E \subset U$ y $d(M, U) < \varepsilon$.

Más aun, existe una única medida de probabilidad μ regular e invariante bajo rotación en $(G, \mathbb{B}(G))$ llamada **medida de Haar**.

Así pues, si G es un grupo compacto metrizable podemos dar una medida μ invariante bajo rotación, esto es

$$\mu(gx, gy) = \mu(x, y) = \mu(xg, yg) \quad \forall g, x, y \in G.$$

Por ejemplo, dada cualquier medida d y m la medida de Haar podemos tomar

$$\mu(x, y) = \int \left(\int d(gxh, gyh) dm(g) \right) dm(h).$$

Entonces (G, R_α) es un sistema dinámico topológico ya que R_α es continua por ser invariante sobre la medida asociada μ.

Teorema 2.2. *Sea G un grupo topológico compacto y R_α una rotación. Entonces R_α es minimal si y sólo si $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en X.*

Demostración. Supongamos que R_α es minimal. Como $\mathcal{O}_{R_\alpha}(e)$ es denso en G y

$$R_\alpha(e) = \alpha, \quad R_\alpha^2(e) = \alpha^2, \ \ldots, R_\alpha^n(e) = \alpha^n,$$

entonces $\mathcal{O}_{R_\alpha}(e) = \{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es densa en X.

Sea $x, y \in G$. Como $yx^{-1} \in G$ y $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en G, se tiene que

$$\exists \ n_i \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad \mu(\alpha^{n_i}, yx^{-1}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu(R_\alpha^{n_i}(x), y) &= \mu(\alpha^{n_i} x, y) \\ &= \mu(\alpha^{n_i} x x^{-1}, y x^{-1}) = \mu(\alpha^{n_i}, y x^{-1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Se concluye que, para toda $x \in G$, $\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)$ es denso en X, es decir, R_α es minimal. ■

2.0.2. Sistemas dimámicos simbólicos

Como pudimos observar anteriormente, si (X, T) es un sistema dinámico topológico minimal, entonces (X, T) es topológicamente transitivo pero el converso no siempre se cumple. Como ejemplo se considerará el sistema dinámico topológico conformado por la pareja $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ donde $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un *espacio simbólico* y σ el *shift completo*, los cuales definiremos a continuación.

Definición 2.4. Decimos que un conjunto finito $\mathcal{A}$ es un **alfabeto** si tiene al menos dos símbolos. El espacio de todas las sucesiones biinfinitas de símbolos en $\mathcal{A}$ está denotada por

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{v = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}} | v_i \in \mathcal{A} \ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Al representar a v como una sucesión de elementos en el alfabeto usamos un punto para que el lector vea donde está la posición cero, es decir

$$v = \ldots v_{-2}v_{-1}.v_0v_1v_2\ldots.$$

Definición 2.5. Una **palabra** o **bloque** $V = v_1 \ldots v_n$ es una cadena finita de elementos en $\mathcal{A}$. Al conjunto de todas las palabras en $\mathcal{A}$ lo detonaremos $\mathcal{A}^*$.

La ***longitud*** de una palabra está determinada por la cantidad de letras que hay en la componente y la denotamos por $|V| = |v_1 \ldots v_n|$. En este caso se dice que V es una palabra de longitud n. Por otra parte, denotamos por $|V|_{v_i}$ al número de ocurrencias de $\{v_i\} \in \mathcal{A}$ en la palabra V.

Podemos obtener nuevas palabras concatenando dos elementos en $\mathcal{A}^*$, por ejemplo, si $V = v_1 \ldots v_2, W = w_1 \ldots w_s \in \mathcal{A}^*$ la concatenación está dada por

$$VW = v_1 \ldots v_n w_1 \ldots w_s.$$

Esta operación es asociativa y tiene como neutro a la palabra vacía.

Definición 2.6. Para una palabra $W = w_0 \ldots w_r$, el **cilindro** $[W]_k$ con $k \in \mathbb{Z}$ se define como

$$[W]_k = [W]_k^{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} = \{V \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} | v_k = w_0, \ldots, v_{k+|W|-1} = w_r\}.$$

Definición 2.7. Sean $u, v \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. La métrica asociada al espacio $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ está definida por

$$d(u,v) \begin{cases} 2^{-\max\{n\in\mathbb{N} | u_{[-n,n]} = v_{[-n,n]}\}} & si \quad u \neq v \\ \\ 0 & si \quad u = v. \end{cases} \tag{2.1}$$

Es importante notar que con la métrica definida anteriormente, la cercanía de dos sucesiones está determinada por las primeras letras que las conforman, es decir, dos sucesiones están cerca si las primeras letras son iguales.

Ejemplo 2.2. Sean $u, v \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ donde

$$u = \dots 000{,}111 \dots \quad \text{y} \quad v = \dots 100{,}110 \dots .$$

Entonces $d(u, v) = 2^{-2}$.

Decimos que $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ equipado con la métrica (2.1) definida anteriormente es un **espacio simbólico**, el cual es un espacio métrico compacto homeomorfo a un espacio de Cantor.

Ahora que se ha expuesto la métrica para el espacio simbólico podemos definir una base.

Proposición 2.7. *El cilindro* $[W]_k$ *es cerrado y abierto para toda* $W \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *y* $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. $[W]_k$ es abierto.
Observemos que para alguna $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$B_{2^{-n}}(V) = \{U \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} | u_{-n} = v_{-n}, \dots, u_n = v_n\} = [v_{-n} \dots v_n]_{-n}.$$

Sea $x \in [W]_k$. Por definición $[W]_k = \{V \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} |\ v_k = w_0, \dots, v_{k+r-1} = w_r\}$, consideramos $N = \text{máx}\{|k|, |k + |W| - 1|\}$, entonces

$$\begin{aligned} B_{2^{-N}}(x) &= [x_{-n} \dots x_n]_{-N} \\ &\subseteq \{U \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} | u_{[k,k+|W|-1]} = w_{[k,k+|W|-1]}\} = [W]_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[W]_k$ es abierto. Por otro lado, para demostrar que $[W]_k$ es cerrado veamos que $([W]_k)^c$ es abierto.

$$\begin{aligned} ([W]_k)^c &= \{V \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} | v_k \neq w_0, \dots, v_{k+|W|-1} \neq w_r\} \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{A}^n \setminus W} \{X \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} | x_{[-k,k+|W|-1]} = U\} \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{A}^n \setminus W} [U]_k, \end{aligned}$$

es decir, $([W]_k)^c$ es abierto. Por lo tanto $[W]_k$ es cerrado. ∎

Definición 2.8. Definimos la función **shift** $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \longrightarrow A^{\mathbb{Z}}$ donde

$$\sigma((u_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

la función inversa se define como $\sigma^{-1} : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde

$$\sigma^{-1}((u_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Decimos que X es un **espacio shift** si es un subconjunto del espacio simbólico $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, cerrado y shift-invatiante.

Proposición 2.8. *La función shift es biyectiva y continua.*

Demostración. Veamos primero que σ es biyectiva.
Sea $u = \ldots u_{-2}u_{-1}.u_0u_1\ldots \in X$. Consideramos $\tilde{u} = \ldots u_{-3}u_{-2}.u_{-1}u_0$, entonces $S(\tilde{u}) = u_1 \ldots u_{n+1} \ldots = u$. Esto es, σ es suprayectiva. Por otra parte, si $u \neq v$ con $v \in X$, entonces existe al menos una $j \in \mathbb{Z}$ tal que $u_j \neq v_j$, esto implica que

$$\sigma(u)_{j-1} \neq \sigma(v)_{j-1}.$$

Dado que hay al menos una coordenada donde $\sigma(u) \neq \sigma(v)$, concluimos que $\sigma(u) \neq \sigma(v)$, es decir, σ es inyectiva. Por lo tanto σ es biyectiva.

Demostremos ahora que σ es continua.
Sea $\varepsilon > 0$, $u, v \in X$ tal que $d(u,v) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces si

$$d(u,v) \leq \frac{1}{2^{N+1}} \quad \text{esto implica que} \quad d(\sigma(u),\sigma(v)) \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto σ es continua sobre X. ■

Análogamente, podemos ver la continuidad de σ^{-1}:

Como $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico compacto y σ un homeomorfisomo sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, la pareja $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ es un sistema dinámico topológico.

Proposición 2.9. *El sistema dinámico topológico* $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ *es topológicamente transitivo pero no es minimal.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} = \{a_0, \ldots, a_n\}$.

Veamos que σ es topológicamente transitivo. Para esto, basta exhibir un elemento $x_0 \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{O}_\sigma(x_0)$ es densa en $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Consideramos

$$x_0 = (\underbrace{a_0a_1\ldots a_n}_{\text{longitud 1}}\underbrace{a_0a_0a_0a_1\ldots a_na_n}_{\text{longitud 2}}\ldots),$$

la sucesión donde están todas las sucesiones de longitún $n \in \mathbb{N}$.
Sea $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considerando los primeros n elementos de y, por construccíon sabemos que, existe una sucesión de longitud n en x_0 tal que para alguna $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma^k(x_0)$ y y tienen los primeros n elementos iguales, esto implica que

$$d(\sigma^k(x_0), y) = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\mathcal{O}_\sigma(x_0)$ es densa en $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, es decir, el sistema dinámico topológico $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ es topológicamente transitivo.

Pero, dada $a_1 \in \mathcal{A}$ y considerando la sucesión

$$\overline{a_1} = (\ldots a_1a_1a_1\ldots),$$

es decir, la sucesión donde todos los elementos son a_1, entonces

$$\sigma^k(\overline{a_1}) = \overline{a_1} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{lo que implica que} \quad \overline{\mathcal{O}_\sigma(\overline{a_1})} = \overline{a_1}.$$

Por lo tanto el sistema dinámico topológico $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ no es minimal. ■

Ejemplo 2.3 (**Shift par**). Sea $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y X el conjunto de todas las sucesiones binarias tales que entre cada dos 1, hay un número par de ceros. Entonces la palabra

$$U = \ldots 100100100 \ldots \in X \quad \text{pero} \quad V = \ldots 100010001000 \ldots \notin X.$$

Así pues, $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{F}$ donde $\mathcal{F} = \{10^{2n+1} : n \geq 0\}$. Por otra parte, el sistema (X, σ) es transitivo pero no es minimal.

2.0.3. Dinámica topológica espectral

Hay casos donde demostrar directamente las propiedades de minimalidad y transitividad topológica suele complicarse, por lo tanto, otra forma de estudiar la familia de sistemas dinámicos topológicos transitivos y minimales es a través de un operador, el cual definiremos a continuación.

Definición 2.9. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico y $\mathcal{C}(X)$ el espacio de todas las funciones continuas con valores en los complejos. Definimos el operador

$$\begin{aligned} U_T : \mathcal{C}(X) &\to \mathcal{C}(X) \\ U_T(f) &= f \circ T. \end{aligned}$$

Observemos que U_T es lineal ya que

$$U_T(cf + g) = (cf + g) \circ T = cf \circ T + g \circ T = cU_T(f) + U_T(g)$$

y multiplicativo, esto es:

$$U_T(fg) = U_T(f)U_T(g).$$

Más aun, si T es suprayectivo, entonces U_T es una isometría y si T es un homeomorfismo, entonces U_T es un automorfismo.

Dada $f : X \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $f \not\equiv 0$, decimos que f es una **eigenfunción** de T si existe un **eigenvalor** $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$U_T(f) = \lambda f(x) \quad \forall x \in X.$$

Definición 2.10. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico y $f \in \mathcal{C}(X)$. Decimos que f es **invariante** bajo T si

$$f \circ T(x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Teorema 2.3. *Sea (X, T) un sistema dinámico topológico transitivo es decir, $U_T(f) = f$ y T un homeomorfismo. Entonces*

1. *T no tiene funciones continuas invariantes distintas de una constante.*

2. *Si $f \circ T = \lambda f$ donde $0 \not\equiv f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $|\lambda| = 1$ y $|f|$ es constante.*

3. *Si f, g son eigenfunciones de T con el mismo eigenvalor λ, entonces $f = cg$ con c una constante.*

Demostración. 1. Supongamos que $0 \not\equiv f \in \mathcal{C}(X)$ es una función T-invariante, entonces $f \circ T = f$. Así pues

$$f \circ T^n = f \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Esto implica que f es constante en las órbitas de los puntos, en especial para $x_0 \in X$ tal que $\overline{O_T(x_0)} = X$. Por lo tanto $f \equiv c$ con c una constante.

2. Tenemos que

$$|f(Tx)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|,$$

entonces

$$\sup_{x \in X}|f(Tx)| = |\lambda|\sup_{x \in X}|f(x)|.$$

Esto implica que $|\lambda| = 1$.

Por hipótesis se tiene que $|f(Tx)| = |f(x)|$ y como $|f(x)|$ es una función continua invariante bajo T, por 1 tenemos que $|f(x)| \equiv c$ con c una constante.

3. Sea f, g eigenfunciones de T con eigenvalor λ. Por 2 podemos afirmar que $|g(x)| > 0 \quad \forall x \in X$, esto implica que

$$\frac{f}{g}(T(x)) = \frac{\lambda}{\lambda}\frac{f}{g}(x) = \frac{f}{g}(x),$$

es decir, $\frac{f}{g}$ es $T-$invariante. Pero por 1 esto implica que $\frac{f}{g} \equiv c$ con c una constante. Por lo tanto $f = cg$. ∎

Definición 2.11. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico y T un homeomorfismo. Decimos que T tiene **espectro topológico discreto** si el subespacio cerrado más pequeño de $\mathcal{C}(X)$ que contiene a las eigenfunciones de T es $\mathcal{C}(X)$, es decir, el eigenespacio genera a $\mathcal{C}(X)$.

Teorema 2.4 (Halmos y von Neumann). *Sea (X, T) un sistema dinámico topológico y T un homeomorfismo. Las siguientes son equivalentes*

1. *T es topológicamente transitiva y es una isometría para alguna métrica en X.*

2. *T es topológicamente conjugada a una rotación minimal sobre un grupo abeliano compacto.*

3. *T es minimal y tiene espectro discreto.*

4. *T es topológicamente transitiva y tiene espectro discreto.*

Demostración. $\underline{1 \Rightarrow 2.}$ Sea d la métrica en X para la cual T es una isometría y $x_0 \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_T(x_0)} = X$. Definimos la operación multiplicación $*$ en $\mathcal{O}_T(x_0)$ como

$$T^n x_0 * T^m x_0 = T^{n+m} x_0,$$

Entonces $(\mathcal{O}_T(x_0), *)$ es un grupo.

- Por definición, si consideramos $T^s x_0, T^r x_0$ tenemos que

$$T^s x_0 * T^r x_0 = T^{s+r} x_0 \in \mathcal{O}_T(x_0).$$

- $$\begin{aligned} T^s x_0 * (T^r x_0 * T^m x_0) &= T^s x_0 * T^{r+m} x_0 * = T^{s+r+m} x_0 \\ &= (T^s x_0 * T^r x_0) * T^m x_0. \end{aligned}$$

- Considerando $T^m x_0$, entonces $T^0 x_0 * T^m x_0 = T^{0+m} x_0 = T^m x_0$.

- Por último si consideramos $T^{-m} x_0$, entonces

$$T^m x_0 * T^{-m} x_0 = T^{m-m} x_0 = T^0 x_0.$$

Ahora, la función $* : \mathcal{O}_T(x_0) \times \mathcal{O}_T(x_0) \to \mathcal{O}_T(x_0)$ es uniformemente continua, ya que

$$\begin{aligned} d(T^n x_0 * T^m x_0, T^p x_0 * T^q x_0) &= d(T^{n+m} x_0, T^{p+q} x_0) \\ &\leq d(T^{n+m} x_0, T^{p+m} x_0) + d(T^{p+m} x_0, T^{p+q} x_0) \\ &\leq d(T^n x_0, T^p x_0) + d(T^m x_0, T^q x_0). \end{aligned}$$

Dado que $\overline{\mathcal{O}_T(x_0)} = X$ es completo y $*$ es uniformemente continua, podemos extender de manera única la función $* : X \times X \to X$ en donde $*$ es continua. Análogamente, la función inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_T(x_0) &\to \mathcal{O}_T(x_0) \\ T^m x_0 &\to T^{-m} x_0 \end{aligned}$$

es uniformemente continua en $\mathcal{O}_T(x_0)$ dado que

$$d(T^{-n} x_0, T^{-m} x_0) = d(T^{m+n} T^{-n} x_0, T^{m+n} T^{-m} x_0) = d(T^m x_0, T^n x_0).$$

Por lo tanto, la podemos extender de manera única a X donde cumple ser continua por la completez de $\overline{\mathcal{O}_T(x_0)} = X$. Por lo tanto, X es un grupo topológico abeliano ya que el conjunto

$$\mathcal{O}_T(x_0) = \{T^n x_0 : n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subgrupo abeliano denso en X.

Por otra parte, como

$$T(T^n x_0) = T^{n+1} x_0 = T x_0 * T^n x_0,$$

se tiene que $Tx = Tx_0 * x$. Por lo tanto T es la rotación por Tx_0.

$2 \Rightarrow 3$. Sea $T = R_a$ una rotación minimal sobre un grupo abeliano compacto G. Entonces, dada $\gamma \in \hat{G}$ tenemos que

$$\gamma(R_a g) = \gamma(ag) = \gamma(a)\gamma(g).$$

Esto implica que γ es una eigenfunción con eigenvalor $\gamma(a)$. Sea A el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de caracteres, entonces A es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ que contiene a las constantes, cerrada bajo conjugación compleja y separa puntos. Por el teorema de Stone-Weierstrass podemos concluir que $\overline{A} = \mathcal{C}(X)$.

$3 \Rightarrow 4$. Dado que T es minimal entonces T es topológiamente transitivo y, por hipótesis, T tiene espectro discreto.

$4 \Rightarrow 1$. Considerando las eigenfunciones de T

$$\begin{aligned} &f_n : X \to K \quad n \geq 1 \\ &f_n(T) = \lambda_n f_n. \end{aligned}$$

Como T tiene espectro discreto, podemos afirmar que el conjunto de eigenfunciones $\{f_n\}$ es linealmente independiente y genera a $C(X)$, esto implica que $\{f_n\}$ separa los puntos de X. Por lo tanto

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}$$

define una métrica en X. Además, por el Teorema 2.5 sabemos que $|\lambda_n| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(Tx, Ty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(Tx) - f_n(Ty)|}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n f_n(x) - \lambda_n f_n(y)|}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n||f_n(x) - f_n(y)|}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n} \\ &= \rho(x, y). \end{aligned}$$

Sólo falta demostrar que ρ genera a la topología en X. Sea d la métrica original de X, $\varepsilon > 0$ y N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dado que f_n es continua con $n \leq N$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$, esto implica que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } 1 \leq n \leq N,$$

entonces si $d(x,y) < \delta$

$$\rho(x,y) < \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Como la función identidad del espacio métrico compacto (X,d) al espacio métrico (X,ρ) es continua y una función biyectiva continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es un homeomorfismo. Por lo tanto, ρ genera a la topología en X. $\blacksquare$

Capítulo 3

Sistemas dinámicos medibles

Definición 3.1. Un **espacio de probabilidad** es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde Ω es un conjunto arbitrario, $\mathcal{F}$ es una σ- álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida sobre $\mathcal{F}$ que satisface:

1. $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ si $A_i \cup A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.

Llamamos a P como **medida de probabilidad.**

Definición 3.2. Decimos que un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es **estándar** si es isomorfo casi en todas partes a $\mathbb{R}$ equipada con la medida de Lebesgue.

Definición 3.3. Sean $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1), (X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ dos espacios de probabilidad estándar y $T : X_1 \to X_2$ una transformación. Decimos que

1. T es **medible** si $T^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1 \quad \forall\ B_2 \in \mathcal{B}_2$.
2. T **preserva la medida** si T es medible y
$$m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2) \quad \forall B_2 \in \mathcal{B}_2.$$
3. T es una **transformación invertible que preserva la medida** si T preserva la medida, es biyectiva y T^{-1} preserva la medida.

Además, decimos que el conjunto $(X, \mathcal{B}, m, T)$ es un **sistema dinámico medible** si la terna $(X, \mathcal{B}, m_1)$ es un espacio de probablidiad estandar y $T : X \to X$ es una transfomación que preserva la medida.

Ejemplo 3.1. Shift de Bernoulli

Sea $k \geq 2 \in \mathbb{Z}^+$, $(p_0, \ldots, p_{k-1})$ un vector de probabilidad con entradas distintas de cero, $(Y, 2^Y, \mu)$ el espacio de medida $Y = \{1, \ldots, k-1\}$ y μ la medida dada por $\mu(i) = p_i$. Definimos el espacio de medida

$$(X, \mathcal{B}, \overline{\mu}) = \prod_{i=0}^{\infty}(Y, 2^Y, \mu).$$

Donde un elemento de la semiálgebra A (ver Definición 1.9) se ve la forma

$$A = [a_0, \ldots, a_n]_n \quad \text{con} \quad a_i \in (Y, 2^Y, \mu),$$

y la medida se define como

$$\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}([a_0, \ldots, a_n]_n) = \prod_{i=0}^{n} p_{a_i}.$$

Considerando la función shift

$$\sigma : X \to X$$
$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) \to (x_1, x_2, \ldots).$$

Entonces $(X, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es un sistema dinámico medible.

Es claro que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad por lo tanto, basta ver que σ es una transformación que preserva la medida.

Sea A un elemento de la semiágebra, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}(A)) &= \mu(T^{-1}(\{(x_i)_{i=0}^{\infty} | \ x_j = a_j \forall j \leq n\})) \\
&= \mu(\{(x_i)_{i=1}^{\infty} | \ x_j = a_j \forall j \leq n\})\}) \\
&= \prod_{i=0}^{n} p_{a_i} = \mu(A).
\end{aligned}$$

Como T preserva la medida sobre la semiálgebra entonces, por el Teorema 1,3, T preserva la medida en todo $B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $(X, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es un sistema dinámico medible.

Denotaremos por $(p_0, \ldots, p_{k-1})-$shift al shift de Bernoulli.

Definición 3.4. Sean $(X_1, \mu_1, \mathcal{B}_1, T_1)$,$(X_2, \mu_2, \mathcal{B}_2, T_2)$ dos sistemas dinámicos medibles. Decimos que son **isomorfos** si existen dos conjuntos $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $\mu_1(B_1) = 1 = \mu_2(B_2)$ tal que

I. $T_1(B_1) \subseteq B_1$, $T_2(B_2) \subseteq B_2$, y

II. existe una transformación ψ invertible que preserva la medida donde

$$\psi : B_1 \to B_2 \quad \text{con} \quad \psi T_1(x) = T_2 \psi(x) \quad \forall x \in B_2.$$

Si la función ψ solo es suprayectiva, decimos que $(X_2, T_2, \mu_2, \mathcal{B}_2)$ es **factor** de $(X_1, T_1, \mu_1, \mathcal{B}_1)$.

Ejemplo 3.2. Consideramos el sistema dinámico medible $([0,1), \mathcal{B}, \lambda, S)$, donde λ es la medida de Lebesgue y S la transformación dada por

$$\begin{aligned} S : [0,1) &\to [0,1) \\ x &\to 2x \text{ mod } 1. \end{aligned}$$

Es evidente que $([0,1), \mathcal{B}, \lambda, S)$ y $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ no son topológicamente conjuagados ya que un espacio Cantor no puede ser topológicamente conjugado a un intervalo. Sin embargo, estos sistemas dinámicos medibles si son isomorfos.

Proposición 3.1. *Sea $(X, \mathcal{D}, \mu, T)$ el $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - shift$. Entonces los sistemas dinámicos medibles $([0,1), \mathcal{B}, \lambda, S)$ y $(X, \mathcal{D}, \mu, T)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\Psi : X \to [0,1)$ donde

$$\Psi(a_1, a_2, a_3, \ldots) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots.$$

Entonces Ψ es suprayectiva ya que todo número tiene una expresión binaria y Ψ es inyectiva en $X \setminus D$, donde

$$D = \{(a_1, a_2, \ldots) |\ (a_1, a_2, \ldots) \text{ es eventualmete periódico}\}.$$

Veamos que $X \setminus D \subset X$ y $[0,1) \setminus C \subset [0,1)$ con C los números racionales diádicos. Por una parte tenemos que

$$T^{-1}(D) = D, \text{ entonces } T^{-1}(X \setminus D) = X \setminus D.$$

Análogamente, considerando C el conjunto de números racionales diádicos, tenemos que

$$S^{-1}(C) = C, \text{ entonces } S^{-1}([0,1) \setminus C) = [0,1) \setminus C.$$

Más aun, D y C tienen medida cero ya que se puede ver como la unión numerable de conjuntos de medida cero y para todo $x = (a_1, a_2, \ldots) \in X$ tenemos que

$$\Psi T(x) = \Psi(a_2, a_3, \ldots) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \ldots,$$

mientras que

$$\begin{aligned} S\Psi(x) &= S(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots) \\ &= (a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots) \text{mod } 1 \\ &= \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Psi T = S\Psi$ en los conjuntos de medida uno $X \setminus D$ y $[0,1) \setminus C$; así pues, $([0,1), \mathcal{B}, \lambda, S)$ es isomorfo a $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$. ∎

Definición 3.5. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Decimos que el sistema $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es **ergódico** si para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $T^{-1}(B) = B$, entonces

$$\mu(B) = 0 \quad \text{ó} \quad \mu(B) = 1.$$

Ejemplo 3.3. El $(p_0, \ldots, p_{k-1})-$shift es ergódico.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la $\sigma-$álgebra de todas las uniones finitas de cilindros medibles. Sea $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{A}$ tal que $m(E \triangle A) < \varepsilon$ y supongamos que $T^{-1}E = E$ con $E \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\begin{aligned} |m(E) - m(A)| &= |m(E \cap A) + m(E \setminus A) - m(A \cap E) - m(A \setminus E)| \\ &< m(E \setminus A) + m(A \setminus E) \\ &= m(E \triangle A) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea n_0 lo suficientemente grande y $B = T^{-n_0}A$ tal que

$$m(B \cap A) = m(B)m(A) = m(A)^2 \quad \text{por ser } T\text{−invariante},$$

entonces $m(E \triangle B) = m(T^{-n}E \triangle T^{-n}A) = m(E \triangle A) < \varepsilon$, esto implica que

$$E \triangle (A \cap B) \subset (E \triangle A) \cup (E \triangle B) \quad \text{i,e} \quad m(E \triangle (A \cap B)) < 2\varepsilon$$

Así pues, $|m(E) - m(A \triangle B)| < 2\varepsilon$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} &|m(E) - m(E)^2| \leq |m(E) - m(A \triangle B)| + |m(A \triangle B) - m(E)^2| \\ &< 2\varepsilon + |m(A)^2 - m(E)^2| \\ &\leq 2\varepsilon + m(A)|m(A) - m(E)| + m(E)|m(A) - m(E)| < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que ε es arbitraria, se tiene que $m(E) = m(E)^2$ lo que implica que

$$m(E) = 0 \quad \text{ó} \quad m(E) = 1.$$

Así pues, el $(p_0, \ldots, p_{k-1})-$shift es un sistema dinámico medible ergódico. ∎

Teorema 3.1. *Sea $(X, \mathcal{B}, m, T)$ un sistema dinámico medible. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *$(X, \mathcal{B}, m, T)$ es ergódico.*
2. *Los únicos elementos $B \in \mathcal{B}$ tal que $m(T^{-1}(B) \triangle B) = 0$ son aquellos que $m(B) = 0$ ó $m(B) = 1$.*
3. *Para toda $A \in \mathcal{B}$ con $m(A) > 0$ se tiene que*

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}A\right) = 1.$$

4. *Para toda $A, B \in \mathcal{B}$ con $m(A) > 0$ y $m(B) > 0$ existe $n > 0$ tal que $m(T^{-n}A \cap B) > 0$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sea $B \in \mathcal{B}$ tal que $m(T^{-n}B \triangle B) = 0$. Entonces para toda $n \geq 0$ $m(T^{-n}B \triangle B) = 0$ ya que

$$T^{-n}B \triangle B \subset \bigcup_{n=0}^{n-1} T^{i-1}B \triangle T^{-i}B = \bigcup_{n=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}B \triangle B).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} m(T^{-1}B \triangle B) &\leq m\left(\bigcup_{n=0}^{n-1} T^{i-1}B \triangle T^{-i}B\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} m\left(T^{i}(T^{-1}B \triangle B)\right) \\ &\leq nm(T^{-1}B \triangle B) = 0. \end{aligned}$$

Sea

$$B_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B.$$

Como $m(B \triangle \bigcup_{i=n}^{\infty}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} m(B \triangle T^{-i}B) = 0$,

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B \text{ es decreciente cuando } n \to \infty$$

y $m(B) = m(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B)$, entonces $m(B_\infty \triangle B) = 0$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} m(B_\infty) &= m\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B\right) = m(B) \end{aligned}$$

y

$$T^{-1}B_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-(i+1)}B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} T^{-i}B = B_\infty.$$

Así pues, B_∞ cumple que $T^{-1}B_\infty = \infty$ y $m(B_\infty \triangle B) = 0$, por ergodicidad esto implica que

$$m(B_\infty) = 0 \quad \text{o} \quad m(B_\infty) = 1.$$

Por lo tanto $m(B) = 1$ o $m(B) = 1$.

$2 \Rightarrow 3$. Sea $A \in \mathcal{B}$ con $m(A) > 0$. Consideramos

$$A_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A,$$

entonces

$$\begin{aligned} T^{-1}A_1 = T^{-1}\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A &\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-(n+1)}A \\ &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A \subset A_1 \end{aligned}$$

y, por ser T invariante, se cumple que $m(T^{-1}A_1) = m(A_1)$, entonces

$$m\left(T^{-1}A_1 \triangle A_1\right) = 0.$$

Por 2, esto implica que

$$m(A_1) = 1 \quad \text{ó} \quad m(A_1) = 0.$$

Pero $m(A_1) \neq 0$ pues $T^{-1}A \subset A_1$ y $m(T^{-1}A) = m(A) > 0$. Por lo tanto, $m(A_1) = 1$.

$3 \Rightarrow 4$ Sea $m(A) > 0$ y $m(B) > 0$. Por 3, se tiene que

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A\right) = 1.$$

Esto implica que

$$0 < m(B) = m\left(B \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A\right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B \cap T^{-n}A\right).$$

Por lo tanto $m(B \cap T^{-n}A) > 0$ para alguna $n > 0$.

$4 \Rightarrow 1$. Supongamos que $B \in \mathcal{B}$ y $T^{-1}B = B$. Si $0 < m(B) < 1$ entonces,

$$0 = m\left(B \cap (X \setminus B)\right) = m(T^{-n}B \cap (X \setminus B)) \quad \forall n > 1,$$

lo cual contradice 4. ■

3.0.1. Teoría ergódica espectral

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Podemos asociarle un operador U que actúa sobre el espacio de Hilbert $L^2(X, \mu)$ dado por:

$$\begin{aligned} U : L^2(X,\mu) &\longrightarrow L^2(X,\mu) \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

Llamamos a U como el **operador de Koopman**, tenemos las siguientes propiedades.

1. Los **eigenvalores** de $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ son los eigenvalores asociados al operador U, es decir; λ es eigenvalor de $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ si

$$U(h_\lambda) = \lambda h_\lambda.$$

2. Las **eigenfunciones** de (X, T, μ) son los eigenvectores de U.

3. El **espectro** de $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ denotado por $\mathcal{S}(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ es el conjunto de todos los eigenvalores de $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$.

Definición 3.6. Decimos que el sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ tiene **espectro discreto** si $L^2(X, \mu)$ admite una base de Hilbert de eigenfunciones, es decir, las eigenfunciones generan a $L^2(X, \mu)$.

Podemos notar que si $L^2(X, \mu)$ es separable entonces, hay a lo más una cantidad numerable de eigenvalores.

Observación 3.1. El operador U tiene siempre como eigenvalor al 1 donde la eigenfunción correspondiente es cualquier función constante c distinta de la función constante cero.

Demostración. Sea c la función constante, tal que $c(x) = c$ para toda x, con c distinta de cero. Entonces

$$\begin{aligned} U(c) &= (c \circ T)(x) \\ &= c(T(x)) = 1c. \end{aligned}$$

■

Por otro lado, al conjunto ortogonal de las constantes en $L^2(X, \mu)$ lo denotamos por $1^\perp$. Donde

$$1^\perp = \left\{ f \in L^2(X, \mu) \,\middle|\, \int_X f d\mu = 0 \right\}.$$

Ya que, considerando una función constante c distinta de cero, tenemos que

$$< c, f >= 0 \Leftrightarrow \overline{\int_X f\bar{c} d\mu} = 0 \Leftrightarrow \int f d\mu = 0.$$

Decimos que el sistema dinámico medible $(X, T, \mu, \mathcal{B})$ tiene **espectro continuo** si $\mathcal{S}(X, T, \mu) = \{1\}$.

Ejemplo 3.4 (**Espectro de la rotación sobre un grupo G**). .

1. Espectro de la rotación sobre el círculo unitario.

   Afirmación

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}, R_a, \mu) = \{e^{2\pi i n a} | n \in \mathbb{Z}\} = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

   donde $f_n(z) = e^{2\pi i n z} = z^n$ es una eigenfunción con eigenvalor

$$e^{2\pi i n a} = a^n.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n(R_a(z)) &= f_n(z+a) \\ &= e^{2\pi in(z+a)} \\ &= e^{2\pi ina}e^{2\pi inz} \\ &= e^{2\pi ina}f_n(z) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f_n es una eigenfunción con eigenvalor $e^{2\phi ina}$. ■

Si $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con p, q primos relativos entonces el espectro está dado por

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}, R_a, \mu) = \{e^{2\pi ina} | n = 0, 1, \ldots, q-1\},$$

y como $\mathcal{S}(\mathbb{T}, R_a, \mu)$ es finito, f_n no genera a $L^2(\mathbb{T}, R_a)$.
Por otra parte, si a es irracional el espectro está dado por

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}, R_a, \mu) = \{e^{2\pi ina} | n \in \mathbb{Z}\}.$$

En este caso $\mathcal{S}(\mathbb{T}, R_a, \mu)$ es infinito y por el teorema de Fourier, toda función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{T}, R_a, \mu)$ puede ser vista como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_n(x) \qquad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 f(x)\overline{f_n(x)}dx,$$

es decir, f_n genera a $L^2(\mathbb{T}, R_a)$.

2. Espectro de una rotaciós sobre $\mathbb{T}^n$.

   En general, podemos definir una rotación R_a con $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{T}^d$ sobre $\mathbb{T}^d$ dada por:

   $$\begin{aligned} R_a(x) : \mathbb{T}^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto ((x_1 + a_1)\text{mod}1, \ldots, (x_n + a_n)\text{mod}1). \end{aligned}$$

   De manera análoga, el espectro de R_a está dado por

   $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n, R_a, \mu) = \{e^{2\pi i \sum_j k_j a_j} | k_j \in \mathbb{Z}\} = \{(a_1^{k_1}, \ldots, a_n^{k_n}) | k_j \in \mathbb{Z} \text{ para toda } j \in 1, \ldots, n\}.$

   Donde las eigenfunciones son la de forma

   $$f_n(z_1, \ldots, z_n) = (z^{k_1}, \ldots, z^{k_n})$$

   y su eigenvalor asociado esta dado por $(a_1^{k_1}, \ldots, a_{k_n})$.

3. Espectro de una rotación R_a sobre un grupo abeliano compacto G.

   Analizando los ejemplos anteriores podemos deducir que el espectro de una rotación sobre un grupo abeliano compacto está dado por

   $$\mathcal{S}(G, R_a, \mu) = \{\gamma(a) : a \in G, \gamma \in \hat{G}\}.$$

   Donde las eigenfunciones $f(g) \in \{n\gamma(g) : \gamma \in \hat{G}, n \in \mathbb{Z}\}$, es decir, son múltiplos constantes de los caracteres de G.

Demostración. Sea $f(g) = n\gamma(g) \in \hat{G}, n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$nf(R_a g) = n\gamma(ag) = n\gamma(a)\gamma(g) = \gamma(a)f(g).$$

■

En especial los caracteres de G son eigenfunciones y por la Proposición 1.3 inciso 6 podemos concluir que $\hat{G}$ forma una base ortogonal de $L^2(m)$, es decir, G tiene espectro discreto.

Definición 3.7. Sean $(X_1, \mathcal{B}_1, T_1, m_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2, T_2, m_2)$ dos sistemas dinámicos medibles. Decimos que son **espectralmente isomorfos** si existe un operador lineal $W : L^2(X_1, \mu_1) \longrightarrow L^2(X_2, \mu_2)$ tal que:

I. W es invertible.

II. $< Wf, Wf >=< f, g >$ para toda $f, g \in L^2(X_2, \mu_2)$.

III. $U_{T_1} W = W U_{T_2}$.

Teorema 3.2 (**Teorema de isomorfismo de von Neumann**). *Consideremos* $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1, T_1)$, $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2, T_2)$ *dos sistemas dinámicos medibles ergódicos con espectro discreto. Entonces* T_1, T_2 *son espectralmente isomorfas si y sólo si* T_1, T_2 *tienen los mismos eigenvalores.*

Demostración. Supongamos que T_1 y T_2 son espectralmente isomorfos. Entonces

$$U_{T_1} \circ W = W \circ U_{T_2} \quad \text{con } W \text{ invertible.}$$

Sea λ un eigenvalor de U_{T_1} y f_λ la eigenfución asociada a λ, entonces

$$\begin{aligned} U_{T_2}(W^{-1} \circ f_\lambda) &= W \circ U_{T_1} \circ W(W^{-1} \circ f_\lambda) \\ &= W^{-1} \circ U_{T_1} \circ (f_\lambda) = W^{-1}(\lambda f_\lambda) \\ &= \lambda(W^{-1} \circ f_\lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto, λ es eigenvalor de T_2 donde la eigenfunción asociada es $W^{-1} \circ f_\lambda$. Supongamos que T_1 y T_2 tienen los mismos eigenvalores, entonces para el eigenvalor λ, sea $f_\lambda \in L(m_1), g_\lambda \in L(m_2)$ tal que

$$U_{T_1} f_\lambda = \lambda f, \quad U_{T_2} g_\lambda = \lambda g \quad \text{y} \quad |f_\lambda| = |g_\lambda| = 1.$$

Definimos

$$\begin{aligned} W : L^2(m_2) &\longrightarrow L^2(m_1) \\ W(g_\lambda) &= f_\lambda \end{aligned}$$

y lo extendemos a $L(m_i), i \in \{1, 2\}$ por linealidad. Entonces W es una isometría biyectiva donde

$$\begin{aligned} W \circ U_{T_2}(g_\lambda) &= W \circ (\lambda g_\lambda) = \lambda f_\lambda \quad \text{pero} \\ U_{T_1} \circ W(g_\lambda) &= U_{T_1} \circ f_\lambda = \lambda f_\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto T_1, T_2 son espectralmente isomorfos. ■

Teorema 3.3. *Sea $(X, \mathcal{B}, m, T)$ un sistema dinámico medible y supongamos que T es ergódica. Tenemos las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $U_T f = f, f \in L^2(m), f \neq 0$, entonces f es constante casi en todas partes.*
2. *Si $U_T f = \lambda f, f \in L^2(m), f \neq 0$, entonces $|\lambda| = 1$ y $|f|$ es una cosntante casi en todas partes.*
3. *Si f, g son eigenfunciones con diferentes eigenvalores, entonces son ortogonales.*
4. *Si f, g son eigenfunciones con eingenvalores λ, entonces $f = cg$ casi en todas partes para alguna c constante.*
5. *Los eigenvalores de T forman un subgrupo del círculo unitario S.*

Demostración. 1. Supongamos que f no es constante casi en todas partes. Entonces existen $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y $\mathrm{Im}(f) = A \cup B$, donde

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(T^{-1} \circ (f^{-1}(A)) > 0, \quad \mu(f^{-1}(B)) = \mu(T^{-1} \circ (f^{-1}(B)) > 0.$$

Lo cual contradice la ergodicidad del sistema. Por lo tanto, f es constante casi en todas partes.

2. Sabemos que

$$||U_T F|| = ||\lambda f|| = |\lambda| ||f|| \quad \text{así que} \quad ||f|| = |\lambda| ||f||$$

y como $||f|| \neq 0$, entonces $|\lambda| = 1$. Por otra parte

$$|U_T f(x)| = |\lambda||f(x)| = |f(x)|.$$

Como T es ergódico y $|f|$ una función $T-$invariante esto implica que $|f|$ es una constante.

3. Supongamos que $\lambda \neq \mu$ son tales que

$$U_T f = \lambda f \quad \text{y} \quad U_T g = \mu g.$$

Entonces

$$< f, g >=< U_T f, U_T g >=< \lambda f, \mu g >= \lambda \overline{\mu} < f, g > .$$

Como $\lambda \overline{\mu} \neq 1$ se tiene que $< f, g >= 0$.

4. Como $g(x) \neq 0$ en $L^2(m)$ y $|g|$ es constante casi en todas partes por 1, entonces $g(x) \neq 0$ casi en todas partes. Considerando $\frac{f}{g}$ tenemos que

$$\frac{f}{g} T = \frac{f}{g}.$$

Por tener los mismos eigenvalores, esto implica que $\frac{f}{g}$ es $T-$invariante. Por lo tanto $\frac{f}{g} = c$ casi en todas partes, es decir, $f = cg$ casi en todas partes.

5. Sean λ, μ dos eigenvalores de T. Entonces

$$f \circ T = \lambda f \quad \text{y} \quad g \circ T = \mu g \quad \text{para algunas } f, g \neq 0 \in L^2(m).$$

Tomando la conjugación compleja tenemos que $\overline{g} \circ T = \overline{\mu g}$ y por lo tanto

$$(f\overline{g}) \circ T = \lambda\overline{\mu}(f\overline{g}).$$

Esto implica que $(\lambda\mu)^{-1} = \lambda\overline{\mu}$ es un eigenvalor de T y los eigenvalores forman un subgrupo sobre S. ■

Proposición 3.2. *El sistema dinámico $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es ergódico si y sólo si el eigenvalor 1 asociado a U es simple, es decir, todas las eigenfunciones asociadas a 1 son constantes casi en todas partes.*

Demostración. Supongamos que T no es ergódica, por el inciso II) del Teorema 3.1, esto implica que existe un conjunto E tal que $T^{-1}E = E$ donde la medida de E es no trivial y

$$\begin{aligned} U(\mathcal{X}_E) &= \mathcal{X}_E \circ T \\ &= 1(\mathcal{X}_E). \end{aligned}$$

Esto es, $1|_E$ es una función no constante T-invariante asociada al eigenvalor 1.

Supongamos que $T^{-1}E = E$ con $E \in \mathbb{B}$. Entonces

$$\mathcal{X}_E \in L^2(m) \quad \text{y} \quad (\mathcal{X}_E \circ T)(x) = \mathcal{X}_E \quad \forall x \in X,$$

por hipótesis, esto implica que $\mathcal{X}_E$ es constante casi en todas partes. Entonces $\mathcal{X}_E = 0$ o $\mathcal{X}_E = 1$ casi en todas partes. Pero

$$m(E) = \int \mathcal{X}_E dm, \text{ es decir,} \quad m(E) = 0 \text{ o } m(E) = 1.$$

Por lo tanto, $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es ergódico. ■

Proposición 3.3. *La rotación $T(z) = az$ sobre el círculo unitario $\mathbb{T}$ equipada con la medida de Haar es ergódica si y sólo si a no es raíz de la unidad.*

Demostración. Supongamos que a es una raíz de la unidad, entonces

$$a^p = 1 \quad \text{para alguna } p \neq 0.$$

Sea $f(z) = z^p$. Entonces

$$f \circ T = f(az) = a^p z^p = z^p = f$$

pero f no es una función constante casi en todas partes. Por lo tanto T no es ergódica.
Análogamente, supongamos que a no es una raíz de la unidad y

$$f \circ T = f \quad \text{con} \quad f \in L^2(m).$$

Sea $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n$ la serie de Fourier. Entonces

$$f(az) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n a^n z^n,$$

como $f \circ T = f$, esto implica que $f(az) = z$, es decir,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n a^n z^n = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n \quad \text{entonces} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} b_n a^n z^n - b_n z^n = 0.$$

Esto implica que $b_n a^n z^n - b_n z^n = b_n z^n (a^n - 1) = 0$, entonces

$$b_n(a^n - 1) = 0 \quad \forall n \neq 0, \text{ es decir, } b_n = 0.$$

Así pues, f es consante casi en todas partes. Por lo tanto T es ergódica. ■

Teorema 3.4. *Sea G un grupo compacto equipado con la medida de Haar, $T(x) = ax$ una rotación sobre G y $\mathcal{O}(a)$ la T-órbita de a. Entonces el sistema dinámico $(G, \mathcal{B}, m, T)$ es ergódico si y sólo si $\mathcal{O}(a)$ es denso en G.*

Demostración. Sea H la cerradura del subgrupo $\mathcal{O}(a) = \{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de G y supongamos que el sistema $(G, \mathcal{B}, m, T)$ es ergódico. Si $H \neq G$ entonces, por el inciso 4 de la Proposición 1.5 existe $\gamma \in \hat{G}$ con $\gamma \not\equiv 1$ y $\gamma(h) = 1$ para toda $h \in H$. Entonces

$$\gamma(Tx) = \gamma(ax) = \gamma(a)\gamma(x) = \gamma(x),$$

pero esto contradice la ergodicidad de T. Por lo tanto, $H = G$.
Análogamente, si suponemos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es densa en G, entonces G es abeliano. Sea $f \in L^2(m)$ y $f \circ T = f$, por el inciso 6 de la Proposición 1.4 f puede expresarse como la serie de Fourier

$$f(z) = \sum_i b_i \gamma_i \quad \text{donde } \gamma_i \in \hat{G}.$$

Entonces

$$\sum_i b_i \gamma_i(a) \gamma_i(x) = \sum_i b_i \gamma_i(x),$$

si $b_i \neq 0$, entonces $\gamma_i(a) = 1$ y como $\gamma_i(a^n) = (\gamma_i(a))^n = 1$ esto implica que $\gamma_i \equiv 1$. Por lo tanto solo las constantes de la serie de Fourier pueden ser distintas de cero, es decir, f es constante casi en todas partes y por el Teorema 3.4 se tiene que $(G, \mathbb{B}, m, T)$ es ergódico. ■

3.0.2. Rotaciones sobre un grupo

Uno de los ejemplos más comunes de sistemas dinámicos medibles con espectro discreto son las rotaciones sobre un grupo.
Como se expuso anteriormente, si consideramos la rotación R_a sobre el círculo unitario K equipado con la medida de Haar. Entonces el sistema dinámico medible $(K, \mathcal{B}, m, R_a)$ es ergódico si a no es unidad de la raíz, donde las eigenfunciones asociadas al sistema son de la forma

$$f_n(z) = z^n \quad n \in \mathbb{Z} \text{ y sus eigenvalores son } \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Como $\{f_n\}$ forman una base de $L^2(m)$, entonces $(K, \mathcal{B}, m, R_a)$ es ergódico y tiene espectro discreto.
Siguendo esta idea, podemos demostrar un resultado equivalente en las rotaciones ergódicas sobre todo grupo abeliano compacto equipado con la medida de Haar.

Proposición 3.4. *Sea R_a una rotación sobre un grupo abeliano compacto G definida como*

$$\begin{aligned} R_a : G &\to G \\ g &\to ag. \end{aligned}$$

Entonces si el sistema dinámico medible $(G, \mathcal{B}, m, R_a)$ es ergódico, $(G, \mathcal{B}, m, R_a)$ tiene espectro discreto.

Demostración. Como vimos anteriormente, las eigenfunciones de R_a son múltiplos constantes de los caracteres de G y los eigenvalores son

$$\{\gamma(a) | \gamma \in \hat{G}\}.$$

Más aun, el sistema $(G, \mathcal{B}, m, R_a)$ tiene espectro discreto, ya que los caracteres de G son una base ortonormal de $L^2(m)$.
Ahora, por el inciso (v) de la Proposición 3.3, si existe algún otro eigenvalor s que no está en el conjunto $\{\gamma(a) | \gamma \in \hat{G}\}$, entonces la eigenfunción tiene que ser ortonomal a todos lo elementos en $\{\gamma(a) | \gamma \in \hat{G}\}$, así pues $s = 0$.

Por lo tanto, $\{\gamma(a) | \gamma \in \hat{G}\}$ es el grupo de todos los eigenvalores de T.

Por otra parte, por el inciso (iv) del Teorema 3.3, si f es una eigenfunción de $(G, \mathcal{B}, m, R_a)$, entonces f es múltiplos constantes de lo caracteres de G. ∎

Teorema 3.5 (**Teorema de Representación de Halmos y von Neumann**). *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico ergódico. Entonces $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ tiene espectro discreto si y sólo si es isomorfo a una rotación ergódica sobre un grupo abeliano compacto, equipada con la medida de Haar.*

Demostración. Sea Λ el grupo de todos los eigenvalores de T equipada con la topología discreta y $G = \hat{\Lambda}$ el grupo de caracteres de Λ. Entonces Λ es un subgrupo algebraico de K con topología discreta y G es abeliano y compacto. Por el Teorema 1.3.3 $\hat{G} = \hat{\hat{\Lambda}}$ es un isomorfismo natural a Λ y para $\lambda \in \Lambda$ denotaremos por $\check{\lambda}$ al elemento correspondiente de $\hat{G}$, es decir

$$\check{\lambda}(g) = g(\lambda) \quad \forall g \in G = \hat{\Lambda}.$$

Donde el mapeo

$$\begin{aligned} a &: \lambda \to K \\ a(\lambda) &= \lambda \end{aligned}$$

es un homeomorfismo del grupo discreto Λ a K y por lo tanto $a \in \hat{\Lambda} = G$. Entonces $\check{\lambda}(a) = a(\lambda) = \lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$.

Definimos

$$\begin{aligned} S &: G \to G \\ S(g) &= ag \quad a \in G. \end{aligned}$$

Por lo demostrado anteriormente, S es ergódica. Sea μ la medida de Haar sobre G y supongamos que $f \circ S = f$ con $f \in L^2(\mu)$. Entonces f tiene una serie de Fourier

$$f = \sum_j b_j \check{\lambda}_j, \quad \lambda_j \in \Lambda.$$

Para $f \circ S = f$ tenemos que

$$f = \sum_j b_j \check{\lambda}_j(a)\check{\lambda}_j(g) = \sum_j b_j \check{\lambda}_j(g) \quad \text{lo que implica que} \quad b_j\lambda_j = b_j.$$

Como $\check{\lambda}_j(a) = \lambda_j$ se tiene que $b_j\lambda_j = b_j$. Si $b_j \neq 0$, entonces $\lambda_j = 1$ lo que implica que $\check{\lambda}_j \equiv 1$. Así pues, el único término que no desaparece en la serie de Fourier es el término constante y por lo tanto f es constante casi en todas partes.

Por el Ejemplo 3.5 sabemos que S tiene espectro discreto y por la Proposición 3,3 tiene espectro discreto. Por lo tanto, el sistema $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ tiene espectro discreto.

Por otra parte, por la proposición 3.3, el grupo de eigenvalores de S es

$$\{\gamma(a) : \gamma \in \hat{G}\} = \{a(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} = \{\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

Entonces S y T tienen los mismos eigenvalores y ambos tienen espectro discreto, por el Teorema 3.2, concluimos que S y T son isomorfos.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Sistemas dinámicos asociados a una substitución

Gracias a los resultados obtenidos de von Neumann y el Teorema de Representación, surge la pregunta: ¿Habrá sistemas dinámcos con espectro discreto y sin espectro topológico discreto?.
En este capítulo construiremos un sistema dinámico simbólico basado en substituciones. Posteriormente estudiaremos las propiedades de minimalidad, transitividad topológica y ergodicidad con el fin de generalizar las condiciones necesarias y suficientes sobre la substitución para que cumplan las propiedades. Finalmete enunciaremos la conjetura de Pisot y daremos referencias con resultados desarrollados.

4.1. Substituciones

Definición 4.1. Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto, $\mathcal{A}^*$ el conjunto de palabras formadas por $\mathcal{A}$ y ε la palabra vacía. Una **substitución** es una aplicación $\phi : A \to A^*$ y usando la concatenación, se extiende a un morfismo

$$\phi : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*, \quad \text{donde:}$$

1. $\phi(VW) = \phi(V)\phi(W)$.
2. $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$.

Ejemplo 4.1. Consideramos el alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$.

1. La substitución de Morse denotada por ϕ_1 está dada por

$$\phi_1(a) = ab \quad y \quad \phi_1(b) = ba. \tag{4.1}$$

Para entender mejor el mapeo, tomando la palabra $U = ab$, entonces

$$\phi_1(U) = abba \quad y \quad \phi_1^2(U) = abbabaab.$$

Observación 4.1. Tomando en cuenta la definición anterior, podemos dar una substitución $\phi : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ donde

$$\phi(x) = \phi(x_0)\phi(x_1)\dots \quad \text{si} \quad x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}.$$

La función ϕ es continua ya que, si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\geq 0} = u \quad \text{para alguna} \quad u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \phi((x_n)_{n\geq 0}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \phi(x_1)\dots\phi(x_n) = \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\dots = \phi(u).$$

Definición 4.2. Sea $u = u_0u_1u_2\dots$ una sucesión y $v_1\dots v_n$ una palabra. Decimos que $v_1\dots v_n$ es un **factor** de u si existe una m tal que

$$u_m = v_1, \dots, u_{m+r-1} = v_r.$$

El **lenguaje de longitud** n de una sucesión $u = u_0u_1u_2\dots$ está definido como

$$\mathcal{L}_n(u) = \{s \in \mathcal{A}^* |\ s \text{ es factor de } u \text{ y } |s| = n\},$$

mientras que el **lenguaje de** u está dado por

$$\mathcal{L}(u) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(u).$$

Definición 4.3. Una sucesión $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **minimal** si cada palabra que ocurre en u ocurre en una infinidad de posiciones con distacia finita, es decir, si para todo factor W, existe una s tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, W es factor de $u_n \dots u_{n+s-1}$.

Definición 4.4. El **lenguaje** de una substitución $\phi\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ es el subconjunto $\mathcal{L}_\phi \subseteq \mathcal{A}^*$ que consiste de todas las subpalabras de palabras de la forma $\phi^k(i), i \in \mathcal{A}$ y $k \in \mathbb{N}$, esto es

$$\mathcal{L}_\phi = \{\text{factores de } \phi^n(a)\colon n \geq 0, a \in \mathcal{A}\}.$$

Los elementos de $\mathcal{L}_\phi$ son llamados **palabras admisibles** de ϕ.

Definición 4.5. Un **punto periódico** de $(\mathcal{L}_\phi, \phi)$ es una sucesión infinita v donde $\phi^k(v) = v$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Si $\phi(v) = v$ entonces v es un **punto fijo**.

Denotamos por $\mathcal{O}(v)$ a la órbita de v, es decir

$$\mathcal{O}(v) = \{\phi^n(v) | n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 4.1. *Sea ϕ una substitución en $\mathcal{A}^*$ tal que,*

$$\lim_{n \longleftarrow \infty} |\phi^n(a)| = \infty \quad \forall\ a \in \mathcal{A}.$$

Entonces, ϕ tiene al menos un punto periódico.

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es un conjunto finito, podemos encontrar una $k \geq 1$ y una $a \in \mathcal{A}$ tal que la palabra $\phi^k(a)$ empieza con a. Para una secuencia arbritaria $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ con $x_0 = a$, la palabra $\phi^{kn}(x)$ empieza con $\phi^{kn}(a)$ entonces $\phi^{kn}(x)$ y $\phi^{kn+kp}(x)$ empiezan con la misma palabra $\phi^{kn}(a)$, mientras la longitud crece conforme n tiende a ∞.
Podemos afirmar que $(\phi^{kn}(x))_{n\geq 1}$ converge a una sucesión u tal que

$$u = \phi^k(u) \quad y \quad u_0 = a,$$

ya que $(\phi^{kn}(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio compacto $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, entonces la sucesión $(\phi^{kn}(x))_{n\geq 1}$ converge a una sucesión u donde

$$\begin{aligned} \phi^k(u) &= \phi^k(\lim_{n \longrightarrow \infty} (\phi^{kn}(x))_{n\geq 1}) \qquad \text{por continuidad de } \phi \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \phi^{k+kn}(x) = u. \end{aligned}$$

Por otra parte, $u_0 = x_0 = a$. Por lo tanto, ϕ tiene al menos un punto periódico. ■

Ejemplo 4.2. El punto fijo asociado a la substitución de Morse está dado por

$$u = abbabaabbaababbabaababbabaab\dots.$$

A u se le conoce como la sucesión de Morse y esta sucesión se obtiene del

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_1^n(a).$$

Definición 4.6. Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto y ϕ una substitución. Decimos que ϕ es **primitiva** si existe una $k \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $a, b \in \mathcal{A}$, la letra a aparece en $\phi^k(b)$.

Podemos observar que si ϕ es primitiva, entonces para $a \in \mathcal{A}$, todas las letras de $\mathcal{A}$ aparecen en la letra $\phi^k(a)$. Esto implica que

$$|\phi^{km}(a)| \geq (\mathrm{Card}\mathcal{A})^m,$$

es decir, $|\phi^n(a)|$ y $|\phi^{km}(a)|$ tienden a infinito.

Ejemplo 4.3. La substitución ϕ_1 definida en (4.1) es primitiva ya que a, b aparecen en $\phi_1(a) = ab$ y $\phi_1(b) = ba$.

Proposición 4.2. *Si ϕ es una substitución primitiva, entonces todos sus puntos periódicos son sucesiones minimales.*

Demostración. Por la Proposición 4.1 sabemos que ϕ tiene al menos un punto periódico v, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^n(v) = v$. Entonces

$$v = (\phi^n)^k(v) = (\phi^n)^k(v_0)(\phi^n)^k(v_1)\ldots \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como ϕ es primitiva para toda $a, b \in \mathcal{A}$, se satisface que a ocurre en $(\phi^n)^k(b)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces a ocurre una infinidad de veces en u.
Esto implica que todo $(\phi^n)^s(a)$ ocurre en $u = (\phi^n)^s(u)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, toda palabra ocurre en u, es decir, u es minimal. ■

Definición 4.7. Sea ϕ una substitución definida sobre el alfabeto $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_d\}$ de cardinalidad d. Definimos la **matriz de incidencia** $\mathbf{M}_\phi$, como la matriz de $d \times d$ donde la entrada (i, j) está dada por $|\phi(a_j)|_{a_i}$, es decir, el número de ocurrencias de a_i en $\phi(a_j)$.
Notemos que para toda $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, d\}^2$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $|\phi^n(a_j)|_{a_i}$ es igual al valor de la entrada (i, j) de la matriz $\mathbf{M}_\phi^n$.

Ejemplo 4.4. La matriz de incidencia de ϕ_1 está dada por

$$\mathbf{M}_{\phi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Proposición 4.3. *Sea ϕ una substitución y M_ϕ su matriz de incidencia. La substitución ϕ es primitiva si y sólo si M_ϕ es primitiva.*

Demostración. Sea ϕ una substitución primitiva. Entonces para toda $a, b \in \mathcal{A}$ existe una s_j tal que la letra a aparece en $\phi^{s_j}(b)$, es decir,

$$|\phi^{s_j}(b)|_a \geq 1, \text{ considerando } k = \max\{s_j\}$$

se tiene que la matriz M_ϕ^k tiene todas las entradas positivas. Por lo tanto M_ϕ^k es primitiva.
Si existe una $k \in \mathbb{N}$ tal que M_ϕ^k tiene todas sus entradas positivas, entonces

$$|\phi^s(b)|_a \geq 1 \quad \text{para toda } a, b \in \mathcal{A},$$

es decir, la letra a aparece en $\phi(b)^k$. Por lo tanto ϕ es primitiva. ■

4.2. Sistema dinámico (X_ϕ, σ)

Considerando ϕ una substitución primitiva y u un punto periódico de ϕ, donde ϕ satisface que

I $\lim_{n \longrightarrow \infty} |\phi^n(a)| = \infty$ para toda $a \in \mathcal{A}$ y

II Existe una letra $a_0 \in A$ tal que $\phi(a_0)$ empieza con a_0,

podemos definir dos sistemas dinámicos topológicos:

1. El sistema obtenido de restringir la función shift a
$$X_\phi = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}_\phi\}.$$
X_ϕ es un conjunto cerrado, shift-invariante. Llamamos por sistema dinámico simbólico asociado a ϕ a dicho sistema y lo denotamos por (X_ϕ, σ).

2. El sistema obtienido de restringir la función shift a
$$\overline{\mathcal{O}(u)} = \overline{\{\sigma^n(u) | n \geq 0\}}.$$
Observemos que $\overline{\mathcal{O}(u)} \subset X_\phi$. Denotamos a este sistema por $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$.

Veremos a continuación que si ϕ es una substitución primitiva, los sistemas son idénticos y únicamente ergódicos.

Proposición 4.4. *Sea ϕ una substitución primitiva. Si u es cualquier punto fijo de ϕ, entonces (X_ϕ, σ) y $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$ son idénticos. En particular, el sistema no depende del punto fijo.*

Demostración. Por una parte, es claro que $\overline{\mathcal{O}(u)} \subset X_\phi$.

Sea $x \in X_\phi$. Entonces todo factor de x ocurre en alguna palabra $\phi^n(a)$ con $n \geq 0$ y $a \in A$, pero a aparece en u. Análogamente, $\phi^n(a)$ aparece en $\phi^n(u)$, entonces
$$u = \phi^n(u)$$
Lo que implica que $X_\phi \subset \overline{\mathcal{O}(u)}$ y el sistema no depende del punto fijo. ■

Dada la proposición anterior, a partir de ahora denotaremos por (X_ϕ, σ) al sistema dinámico topológico asociado a la substitución primitiva ϕ.

Definición 4.8. La medida asociada al sistema (X_ϕ, σ) está dada por
$$\mu([B]) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card}\left\{n < N \mid u_{[n,n+|B|-1]} = B\right\} \qquad \text{para todo } B \in \mathcal{L}_\phi.$$

Por lo tanto, el conjunto $(X_\phi, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es un sistema dinámico medible.

Definición 4.9. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Decimos que T es **únicamente ergódico** si sólo existe una medida de probabilidad de Borel T invariante en X.
Se puede probar que la única medida de probabilidad invariante μ en X_σ es $\mu([B])$ para toda $B \in \mathcal{L}_\phi$. Más aun, P. Michel [7] demostró que si ϕ es una substitución primitiva entonces el sistema dinámico medible $(X_\phi, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es únicamente ergódico.

Proposición 4.5. *Sea ϕ una substitución primitiva, (X_ϕ, σ) el sistema asociado a la substitución y u el punto fijo asociado. El sistema (X_ϕ, σ) es minimal si y sólo si, para toda $a \in \mathcal{A}$ existe una $k \geq 0$ tal que la primer letra del punto fijo u denotada por a_0 ocurre en $\phi^k(a)$.*

Demostración. Sea $u = \phi(u)$ y $a_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(a_0)$ empieza con a_0 y supongamos que (X_ϕ, σ) es minimal.
Dado que ϕ es minimal, en especial toda letra a aparece en $u = \phi(u)$ con distancia finita, esto implica que $\phi^k(a)$ es un factor de u para toda $a \in \mathcal{A}$ y para toda $k \geq 1$. Por otra parte

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} |\phi^k(a)| = \infty.$$

Esto implica que, para k lo suficientemente grande $\phi^k(a)$ contiene a la letra a_0 para calquier a, es decir, (X_ϕ, σ) es minimal.
Supongamos que a_0 ocurre en $\phi^k(a)$ para toda $a \in \mathcal{A}$ y alguna $k \geq 0$. Entonces $\phi^{k+1}(a)$ contiene a $\phi(a_0)$ y por tanto contiene a a_0. Definimos el conjunto

$$K = \sup_{a\in\mathcal{A}} \inf_{k\geq 1} \left\{ k | \phi^k(a) \text{ contienen a } a_0 \right\}, \tag{4.3}$$

entonces, por definición de K, $\phi^K(a)$ contiene a a_0 para toda $a \in \mathcal{A}$ y como $u = \phi^K(u)$, esto implica que u es la unión de palabra de la forma $\phi^K(a)$ donde todas contiene a a_0.
Así pues, a_0 aprarece en u con distancia finita, es decir, toda palabra $\phi^n(a_0)$ con $n \geq 1$ aparece en u con distancia finita. Entonces si B es un factor de u, $B \subset \phi^n(a_0)$ para alguna n lo suficientemente grande. Por lo tanto ϕ es minimal. ■

Teorema 4.1. *Sea ϕ una substitución. El sistema (X_ϕ, σ) es minimal si y sólo si ϕ es una substitución primitiva.*

Demostración. Supongamos que (X_ϕ, σ) es minimal donde ϕ satisface las condiciones I) y II) y a_0 es tal que $\phi(a_0)$ comienza con a_0. Por la proposición 4.7 si ϕ es minimal, entonces para toda $a \in \mathcal{A}$ existe una $k \geq 0$ tal que a_0 aparece en $\phi^k(a)$. Sea K como (4.3).
Como $\phi^K(a)$ contiene a a_0 y existe una $M > 0$ tal que $\phi^M(a_0)$ contiene a todas las letras de $\mathcal{A}$, esto implica que $\phi^{M+K}(a)$ contine a $\phi^M(a_0)$ como un factor para toda a. Por lo tanto ϕ es primitiva.
Supongamos que ϕ es primitiva, entonces para toda $a, b \in \mathcal{A}$ existe una $k \geq 0$ tal que a aparece en $\phi^k(b)$. En especial se cumple que para toda $a \in \mathcal{A}$ existe una $k \geq 0$ tal que a_0 aparece en $\phi^k(a)$. Por la Proposición 4.7 esto implica que ϕ es minimal. ■

4.2.1. Substitución de Fibonacci

Con los teoremas anteriores, hemos encontrado las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema dinámico topológico asociado a una substitucion sea únicamente ergódico y minimal. Pero visto como sistema dinámico medible falta dar las condiciones para que este sistema tenga espectro discreto. Por lo tanto, comenzaremos estudiando unos de los ejemplos más comunes en el universo de los sistemas dinámicos asociados a una substitución.

Definición 4.10. Sea Q una partición de X en dos segmentos Q_1 y Q_2. Para todo punto $x \in X$ definimos el **Q- nombre o itinerario respecto a Q** como la sucesión $Q(w)$ tal que

$$Q(w)_n = i \text{ siempre que } \sigma^n(w) \in Q_i, n \geq 0.$$

Por ejemplo, si

$$Q_1 = F_{0,1}, \quad Q_0 = F_{0,0},$$

entonces por definición

$$Q(w)_n = i \text{ siempre que } w_n = i \quad \text{y} \quad Q(w) = w \text{ para toda } w.$$

Definición 4.11. Sea T una transformación sobre X, $A \subset X$ y $x \in A$. Nombramos por el **primer tiempo de retorno de** $x \in A$ al menor entero $m > 0$ tal que

$$T^m(x) \in A \text{ y lo denotamos por } n_A(x).$$

Por otra parte, el **mapeo inducido** por T en A es el mapeo $T^{n_A(x)}$ definido en

$$A \cap \{x; n_A(x) < \infty\}.$$

La transformación importante en esta sección es la rotación sobre el círculo por el ángulo $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ definida como

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ x &\to [x + \alpha] \end{aligned}$$

y puede verse en el intervalo $[0, 1)$ como

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \text{ si } x \in [0, 1 - \alpha), \tag{4.4}$$
$$R_\alpha(x) = x + \alpha - 1 \text{ si } x \in [1 - \alpha, 1). \tag{4.5}$$

Sea $P_0 = [0, 1 - \alpha)$ y $P_1 = [1 - \alpha, 1)$ y v el P-nombre del punto α en R_α.

Proposición 4.6. *Considerando la substitución $\phi_0 : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por*

$$\phi_0(0) = 10 \ , \ \phi_0(1) = 0 \tag{4.6}$$

y $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ la substitución dada por.

$$\phi(0) = 001 \ , \ \phi(1) = 01. \tag{4.7}$$

Entonces la sucesión v es la imagen por $\sigma\phi_0$ del punto fijo asociado a la substitución ϕ.

Demostración. Observemos que $v = \sigma(v'')$ donde

$$v''_n = 0 \text{ si } R^n_\alpha(0) \in [1 - \alpha, 1),$$
$$v''_n = 1 \text{ si } R^n_\alpha(0) \in [0, 1 - \alpha).$$

Pues si $R_\alpha^n(0) \in [1-\alpha, 1)$ esto implica que

$$0 \leq R_\alpha^{n+1}(0) < \alpha, \text{ o bien, } 0 \leq R_\alpha^n(\alpha) < \alpha,$$

pero si $R_\alpha^n(0) \in [0, 1-\alpha)$, entonces

$$\alpha \leq R_\alpha^{n+1}(0) < 1, \text{ o bien,} \alpha \leq R_\alpha^n(\alpha) < 1.$$

De lo anterior podemos ver que $R_\alpha^n(0)$ y $R_\alpha^n(\alpha)$ están intercalado y $R_\alpha(\alpha)$ empieza en el tiempo $R_\alpha^2(0)$. Por lo tanto $v = \sigma(v'')$.
Sea R'_α el mapeo inducido de R_α en $I = [0, \alpha)$ y $n(x)$ el primer tiempo de retorno de x en I, si $x \in [0, 1-\alpha)$ entonces

$$\begin{aligned} \alpha \leq R_\alpha(x) < 1 \quad &\text{y} \quad R_\alpha(x) \in [1-\alpha, 1) \\ 2\alpha - 1 \leq R_\alpha(x) < \alpha \quad &\text{y} \quad R_\alpha^2(x) \in [0, 1-\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto $n(x) = 2$. Por otra parte, si $x \in [1-\alpha, 1)$, entonces

$$0 \leq R_\alpha(x) < \alpha \quad \text{y} \quad R_\alpha(x) \in [0, 1-\alpha)$$

y por tanto $n(x) = 1$. Esto implica que

$$\begin{aligned} R'_\alpha(x) &= x + 2\alpha - 1 \quad \text{si } x \in [0, 1-\alpha) \\ R'_\alpha(x) &= x + \alpha - 1 \quad \text{si } x \in [1-\alpha, \alpha). \end{aligned}$$

Sea v' la sucesión definida como

$$\begin{aligned} v'_n &= 0 \quad \text{si } R'^n_\alpha(0) \in [0, 1-\alpha) \\ v'_n &= 1 \quad \text{si } R'^n_\alpha(0) \in [1-\alpha, \alpha). \end{aligned}$$

Comparemos v' con v''. Si $n(x)$ es el primer tiempo de retorno de x en I vamos a verificar que $n_2(x) = n(x) + n(R'_\alpha(x))$. Si $x \in [0, 1-\alpha)$, entonces $n(x) = 2$, $n(R'_\alpha(x)) = 1$ y $n_2(x) = 3$. Por otra parte, si $x \in (1-\alpha, 1]$ entonces $n(x) = 1$, $n(R'_\alpha(x)) = 2$ y $n_2(x) = 3$. Usando inducción obtenemos que

$$n_i(x) = n_{i-1}(x) + n(R'^{i-1}_\alpha(x)) \tag{4.8}$$

es el i-ésimo tiempo de retorno de $x \in I$.
Teniendo los resultados anteriores, supongamos que $v'_i = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} R'^i_\alpha(0) = R_\alpha^{n_i(0)}(0) &\in [0, 1-\alpha) \\ R_\alpha^{n_i(0)+1}(0) &\in [\alpha, 1] \subset [1-\alpha, 1) \text{ y} \\ R_\alpha^{n_i(0)+2}(0) &\in [2\alpha - 1, \alpha] \subset [0, \alpha). \end{aligned}$$

Así pues, $n_{i+1} = n_i(0) + n(R'_\alpha(0)) = n_i(0) + 2$ y por tanto

$$n_{i+1}(0) - n_i(0) = 2 \text{ y } \quad v''_{n_i}(0) = 1, \quad v''_{n_i(0)+1}(0) = 0.$$

Por otro lado, supongamos que $v'_i = 1$. Entonces $R_\alpha^{n_i(0)} = R'^i_\alpha(0) \in [1-\alpha, \alpha)$ y

$$0 \leq R_\alpha^{n_i(0)+1}(0) < \alpha \text{ y } \quad R_\alpha^{n_i(0)+1}(0) \in [0, \alpha).$$

Así pues, $n_{i+1}(0) = n_i(0) + n(R'^i_\alpha) = n_i(0) + 1$ y

$$n_{i+1}(0) - n_i(0) = 0 \text{ y } \quad v''_{n_i(0)} = 0.$$

Dados estos resultados, conociento v' podemos determinar a v'' entre dos espacios consecutivos $n_i(0)$ y $n_{i+1}(0)$. Por tanto,

$$v'' = \phi_0(v').$$

Por lo tanto $v = \sigma(\phi_0(v')) = \sigma(v'')$.
Ahora, si multiplicamos por $\frac{1}{\alpha}$ la relación que tenemos de R'_α, R'_α se convierte en una rotación por $2 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \alpha$ en el intervalo $[0, 1)$ y

$$v'_n = 1 \text{ si } R'^n_\alpha(0) \in [\alpha, 1), \quad v'_n = 0 \text{ si } R'^n_\alpha(0) \in [0, \alpha).$$

Sea Q el mapeo inducido de R' en $[0, \alpha)$ y $m(x)$ el primer tiempo de retorno, entonces

$$\begin{aligned} &\text{si } x \in [0, 2\alpha - 1), \quad m(x) = 1, \quad Q(x) = x + 1 - \alpha \text{ y} \\ &\text{si } x \in [2\alpha - 1, \alpha), \quad m(x) = 2, \quad Q(x) = x + 1 - 2\alpha. \end{aligned}$$

Sea w la sucesión definida por

$$\begin{aligned} w_n &= 0 \text{ si } Q^n(0) \in [0, 2\alpha - 1), \\ w_n &= 1 \text{ si } Q^n(0) \in [2\alpha - 1, \alpha). \end{aligned}$$

Utilizando el método anterior podemos verificar que $v' = \phi_1(w)$ donde

$$\phi_1(0) = 0 \text{ y } \phi_1(1) = 01.$$

Dividiendo entre α el mapeo inducido Q, se obtiene que Q es la rotación R_α y

$$\begin{aligned} w_n &= 1 \text{ si } \quad R_\alpha^n(0) \in [1 - \alpha, 1), \\ w_n &= 0 \text{ si } \quad R_\alpha^n(0) \in [0, 1 - \alpha). \end{aligned}$$

Así pues, $w = \phi_2(v')$, donde $\phi_2(0) = 01, \phi_2(1) = 1$ y $v' = \phi(v')$, es decir $\phi = \phi_1\phi_2$ y $v = \sigma\phi_0(v')$. ■

La substitución de Fibonacci, denotada por ϕ_F está definida como

$$\phi_F(0) = 01 \quad y \quad \phi_F(1) = 0 \tag{4.9}$$

En este caso, si $u = 01$, entonces

$$\phi_F(u) = 010 \quad y \quad \phi_F^2(u) = 01001$$

Por otro parte, el punto fijo asociado a la substitucíon ϕ_F dada en (4.9) está generado por el

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \phi_F^n(0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \phi_F^{n+1}(1)$$

A esta sucesión se le conoce como la **sucesión de Fibonacci** y esta se escribe de la forma

$$u = 01001010010010100101\ldots.$$

Mientras que la matriz de incidencia M_{ϕ_F} se ve de la forma

$$M_{\phi_F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Proposición 4.7. *La sucesión de Fibonacci es el límite de la sucesión de palabras U_n donde $U_0 = 0, U_1 = 01$, y $n \geq 0$, $U_{n+2} = U_{n+1}U_n$.*

Demostración. Demostremos que $U_{n+1} = \phi_F^n(0) = \phi_F^n(U_0)$. Es suficiente demostrar por inducción que para toda n se tiene que $U_{n+1} = \phi_F(U_n)$.
Para $n = 0$

$$U_1 = 01 = \phi_F(0) = \phi_F(U_0).$$

Para $n = 1$

$$U_2 = U_1U_0 = 010 = \phi_F(10) = \phi_F(U_1).$$

Supongamos que $U_{k+1} = \phi_F(U_k)$ para toda $k \leq n$ y para alguna $n \geq 1$.
Entonces

$$U_{n+2} = U_{n+1}U_n = \phi_F(U_n)\phi_F(U_{n-1}) \quad \text{por hipótesis de inducción}$$

Concluimos usando que

$$\phi_F(U_n)\phi_F(U_{n-1}) = \phi_F(U_nU_{n-1}) = \phi_F(U_{n+1})$$

■

Observación 4.2. La longitúd de la sucesión de Fibonacci crece conforme a la serie de Fibonacci, es decir, $|\phi_F^n(0)| = |\phi_F^{n-2}(0)| + |\phi_F^{n-1}(0)|$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_F^0(0) &= 0 & |\phi_F^0(0)| &= 1 \\ \phi_F(0) &= 01 & |\phi_F(0)| &= 2 \\ \phi_F^2(0) &= 010 & |\phi_F^2(0)| &= 3 = |\phi_F^0(0)| + |\phi_F^1(0)|. \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple $|\phi_F^n(0)| = |\phi_F^{n-2}(0)| + |\phi_F^{n-1}(0)|$, entonces

$$\phi_F^n + 1(0) = \phi_F^n(\phi(0))$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} |\phi_F^{n+1}(0)| &= |\phi_F^n(\phi(0))| = |\phi_F^{n-2}(\phi_F(0))| + |\phi_F^{n-1}(\phi_F(0))| \\ &= |\phi_F^{n-1}(0)| + |\phi_F^n(0)|. \end{aligned}$$

Proposición 4.8. *Sea u el punto fijo de ϕ_F y R_α la rotación por el ángulo α. Entonces*

$$u_n = 0 \text{ si } R_\alpha^n(\alpha) \in [1-\alpha, 1),$$
$$u_n = 1 \text{ si } R_\alpha^n(\alpha) \in [0, 1-\alpha).$$

Demostración. Sean ϕ_0 y ϕ como en (4.6) y (4.7) respectivamente. Basta identificar la sucesión u con la sucesiones v definida en la Proposición 4.8. Como

$$\phi_0\phi(0) = 10100 = 1\phi_F^3(0), \quad \phi_0\phi(1) = 100$$

podemos ver que $\phi_0\phi(0)$ está conformado por un 1 seguido de $\phi_F^3(0)$ y $\phi_0\phi(1)$ está conformado por las 3 últimas letras de $\phi_0\phi(1)$. Ahora, haciendo iducción sobre n y suponiendo que $\phi_0\phi^n(0)$ está conformado por un 1 seguido de $\phi_F^{2n+1}(0)$ y $\phi_0\phi^n(1)$ está conformado por las $2n+1$ últimas letras de $\phi_0\phi^n(0)$. Usando que $\phi_F^n(0) = \phi_F^{n-1}(0)\phi_F^{2n-2}(0)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_0\phi^{n+1}(0) &= \phi_0\phi^n(\phi(0)) = 1\phi_F^{2n+1}(\phi(0)) \\
&= 1\phi_F^{2n+1}(001) = 1\phi_F^{2n+1}(0)\phi_F^{2n+1}(0)\phi_F^{2n+1}(1) \\
&= 1\phi_F^{2n+2}(1)\phi_F^{2n+2}(1)\phi_F^{2n+1}(1) \\
&= 1\phi_F^{2n+2}(1)\phi_F^{2n+3}(1) = 1\phi_F^{2n+3}(0)\phi_F^{2n+3}(1) \\
&= 1\phi_F^{2n+3}(01) = 1\phi_F^{2n+4}(0).
\end{aligned}$$

Entonces v comienza con $\phi_F^{2n+1}(0)$ y $v = u$. ∎

Teorema 4.2. *Sea $(X_{\phi_F}, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ el sistema dinámico medible asociado a la substitución de Fibonacci y sea $(K, \mathbb{B}, \nu, R_\alpha)$ la rotación en el círculo unitario equipada con la medida de Haar, donde*

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces $(X_{\phi_F}, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es isomorfo a $(K, \mathbb{B}, \nu, R_\alpha)$.

Demostración. Sea P la partición dada por

$$P_1 = [0, 1-\alpha), \quad P_0 = [1-\alpha, 1)$$

y $P(x) : (\mathbb{T}, \mathbb{B}, \nu, R_\alpha) \to (X_{\phi_F}, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ el P-nombre de x. Entonces, por la Proposición 4.8

$$P(\alpha) = u \text{ y } P(R_\alpha^n(\alpha)) = \sigma^n(u),$$

y si

$$R_\alpha^{n_k}(\alpha) \to x \quad \text{entonces} \quad P(R_\alpha^{n_k}(\alpha)) \to P(x)$$

excepto si x es la órbita de α pues P_1, P_2 son intervalos semicerrados y

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma^{n_k}(u)$$

es un punto en $\overline{\mathcal{O}(u)} = X_{\phi_F}$. Como α es irracional, se tiene que R_α es minimal y por tanto el conjunto $D = \{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0,1)$. Así pues, el conjunto

$$P([0,1) \setminus D) \subset X_{\phi_F} \text{ donde } D \text{ es numerable.}$$

Ahora, dos puntos con el mismo $P-$nombre no pueden ser separados por un intervalo arbitrariamente pequeño, por lo tanto son el mismo. Después de eliminar el conjunto numerable D, todo punto en X_{ϕ_F} puede escribirse como $\lim \sigma^{n_k}(u)$, considerando una subsucesión n'_k de tal forma que $R_\alpha^{n'_k}(\alpha)$ converja y por tanto

$$P(R_\alpha^{n'_k}) = (\lim \sigma^{n_k}(u)) = u.$$

Así pues, $P(x)$ es una biyección bicontinua, excepto en un conjunto numerable D. Dado $x \in [0,1)$ sabemos que $x = \lim R_\alpha^{n_k}(\alpha)$ y

$$\begin{aligned} P \circ R_\alpha(x) &= P(R_\alpha(\lim R_\alpha^{n_k}(\alpha))) = \sigma^{n_k+1}(u), \\ \sigma \circ P(\lim R_\alpha^{n_k}(\alpha)) &= \sigma(\sigma^{n_k}(u)) = \sigma^{n_k+1}(u). \end{aligned}$$

por lo tanto $(X_{\phi_f}, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es isomorfo a $(K, \mathbb{B}, \nu, R_\alpha)$.

■

Corolario 4.1. *El sistema dinámico medible $(X_{\phi_F}, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ tiene espectro discreto.*

Demostración. Por el Teorema de Representación sabemos que $(X_{\phi_F}, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es ergódico y tiene espectro discreto por ser isomorfo a una rotación ergódica sobre un grupo abeliano compacto equipado con la medida de Haar.

■

4.2.2. Substitución de Tribonacci

Consideramos ahora un alfabeto con 3 elementos $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ y $\mathcal{U}^*$ el conjunto de todas las palabras en $\mathcal{U}$. Definimos de manera análoga la **substitución de Tribonnaci** como $\phi_t : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}^*$ donde

$$\phi_t(1) = 12 \qquad \phi_t(2) = 13 \qquad \phi_t(3) = 1.$$

La matriz de incidencia está dada por

$$\mathbf{M}_{\phi_t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

y sus eingenvalores

$$\lambda \simeq 1.84 \qquad \alpha \simeq \text{-0.42+0.61}i \qquad \overline{\alpha} \simeq \text{-0.42-0.61}i.$$

Donde el eigenvector asociado a λ está dado por $\zeta = (\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3})$ y por la proposición 4.5 si consideramos $V \in \mathcal{U}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V|} r(\phi_t^n(V)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} \\ \frac{1}{\lambda^3} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

donde $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} = 1$.
En este caso, para poder encontrar el isomorfismo a una rotación en un grupo abeliano compacto vamos a considerar una rotación sobre el toro $\mathbb{T}^2$ y crearemos una partición en $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ tal que el tiempo de retorno $P(x)$ asociado a R_α genere el alfabeto asociado al punto fijo u de σ_t.

Definición 4.12. Definimos el subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{T}^2$ como

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_{k_i} \alpha^i \mid \forall i \geq 3 \ , \ \varepsilon_{k_i} \in \{0,1\} \text{ y } \varepsilon_{k_i} + \varepsilon_{k_{i+1}} + \varepsilon_{k_{i+2}} = 0 \right\}. \tag{4.13}$$

Llamamos al conjunto $\mathcal{R}$ como el **fractal de Rauzy**. Donde la partición de $\mathcal{R} \subset \mathbb{T}^2$ buscada está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{x \in \mathcal{R} \mid \varepsilon_0 = 0\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{x \in \mathcal{R} \mid \varepsilon_0\varepsilon_1 = 10\} \text{ y} \\ \mathcal{R}_3 &= \{x \in \mathcal{R} \mid \varepsilon_0\varepsilon_1 = 11\}. \end{aligned}$$

En el Capítulo 5.1 se demostrará por construcción que $\mathcal{R}$ es una patrición de $\mathbb{T}^2$.

Definición 4.13. Sea R_α la rotación sobre $\mathcal{R}$ definida por $R_\alpha(z) = z + \alpha^2 \bmod \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.

Proposición 4.9. *El sistema dinámico medible $(X_{\phi_t}, \mu, \sigma)$ es isomorfo a $(\mathbb{T}^2, \lambda, R_\alpha)$ donde λ es la medida de Haar en $\mathbb{T}^2$.*
Este resultado se probará posteriormente en el Teorema 5.3, donde el isomorfismo entre los sistemas $(X_{\phi_t}, \mu, \sigma)$ y $(\mathbb{T}^2, R_\alpha, \lambda)$ está dado por $p \circ f$ con p la proyección de $\mathcal{R}$ en $\mathbb{T}^2$ y

$$\begin{aligned} f : X_{\phi_t} &\to \mathcal{R} \\ x &\to \left(\sum_{i=3}^{N} \varepsilon_{k_i} \alpha^i \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(X_{\phi_t}, \mu, \sigma)$ es isomorfo a $(\mathbb{T}^2, R_\alpha, \lambda)$.

Corolario 4.2. *$(X_{\Phi_t}, \mu, \sigma)$ tiene espectro discreto.*

4.3. La conjetura de Pisot

Por lo visto anteriormente, podemos concluir que hacer isomorfismos de un sistema dinámico asociado a una substitución a un grupo abeliano compacto se complica conforme el abecedario va creciendo. Por ello, no resulta práctico utilizar el Teorema de Representación para identificar sistemas dinámicos ergódicos asociados a una substitución con espectro discreto.
Analizando ambas substituciones podemos observar que las propiedades que tienen en común las substituciones de Fibonnaci y Tribonnaci son las siguientes.

Observación 4.3. Si ϕ es una substitución primitiva, por el teorema de Perron-Frobenius M_ϕ tiene un eigenvalor positivo $\lambda > 0$ tal que:

1. $M_\phi v = \lambda v$, donde el vector propio correspondiente es $v > 0$.
2. El valor propio λ tiene multiplicidad geométrica uno.
3. $\lambda > |\nu|$ para cualquier otro valor propio ν de M_ϕ.

Decimos que λ es la raíz de **Perron-Frobenius** de M_ϕ.

Definición 4.14. Sea ϕ una substitución. Decimos que ϕ es **irreducible** si el polinomio característico de $\mathbf{M}_\phi$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$

Ejemplo 4.5. El polinomio característico asociado a $\mathbf{M}_{\phi_1}$, la matriz de incidencia de la substitución de Morse, es

$$\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Por lo tanto ϕ_1 no es irreducible.

Definición 4.15. Sea ϕ una substitución. Decimos que ϕ es una **substitución de Pisot** si la raíz α de Perron-Frobenius en M_ϕ es un número de Pisot, es decir, α es un entero algebraico tal que $\alpha > 1$ y todos sus conjugados algebraicos $\lambda \neq \alpha$ satisfacen que $|\lambda| < 1$.

Definición 4.16. Decimos que una substitución es **unimodular** si el determiante de su matriz de incidencia es ± 1.

Ejemplo 4.6. La substitición de Morse definida en el ejemplo (4.1) es unimodular ya que

$$\det \mathbf{M}_{\phi_2} = 1.$$

Proposición 4.10. *Sean ϕ_F, ϕ_t la substitución de Fibonacci y Tribonacci respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas*

1. *ϕ_F y ϕ_t son primitivas.*
2. *ϕ_F y ϕ_t son irreducibles.*
3. *ϕ_F y ϕ_t son de Pisot.*

Demostración. 1. Por una parte, la matriz de incidencia de ϕ_F está dada por

$$\mathbf{M}_{\phi_t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{M}_{\phi_F}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Como $M_{\phi_F}^2 > 0$ esto implica que ϕ_F es primitiva.

Mientras que la matriz de incidencia asociada a ϕ_t está dada por

$$\mathbf{M}_{\phi_t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{M}_{\phi_t}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Dado que $\mathbf{M}_{\phi_t}^3 > 0$, podemos afirmar que la substitución ϕ_t es primitiva.

2. El polinomio característico asociado a $\mathbf{M}_{\phi_F}$ está dado por

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}).$$

Donde ninguna de las raices está en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto ϕ_F es irreducible.
Análogamente, el polinomio característico de $\mathbf{M}_{\phi_t}$ está dado por

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 1.$$

Con eingenvalores

$$\lambda = 1.84 \qquad \alpha = \text{-0.42+0.61}i \qquad \overline{\alpha} = \text{-0.42-0.61}i.$$

Comos $p(x)$ es un polinomio primitivo, haciendo uso del Lema de Gauss, si $p(x)$ es reducible sobre $\mathbb{Q}$, entonces también es reducible sobre $\mathbb{Z}$, lo cual no se satisface. Esto implica que ϕ_t es irreducible.

3. Por 2 podemos ver que las raices de la matriz M_{ϕ_F} son

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donde $\alpha > 1$ y $|\lambda| < 1$. Por lo tanto ϕ_F es de Pisot.
Por otro lado, en la substitución de Tribonacci ϕ_t podemos ver por 2 que $p(x)$ es irreducible y se cumple que

$$\lambda > 1 \text{ y } |\alpha_k| < 1 \text{ para } k \in \{1, 2\},$$

entonces ϕ_t es una substitución de Pisot con número de Pisot λ. ■

Obteniendo el resultado anterior, con el fin de clasificar los sistemas dinámicos asociados a una substitución con espectro discreto, surge la conjetura de Pisot.

Conjetura 4.1 (Conjetura de Pisot). *Sea ϕ una substitución irreducible de Pisot. Entonces el sistema dinámico medible $(X_\phi, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ tiene espectro discreto.*

Si bien la conjetura no ha sido demostrada, en el artículo [12] se demostró que para que un sistema dinámico unidimensional asociado a una substitución tenga espectro discreto es necesario que la substitución sea de Pisot. Posteriormente, en el artículo [11] se enfocan en responder la pregunta: ¿Que propiedades se deben agregar a una substitución de Pisot para que el sistema dimámico asociado tenga espectro discreto?. En este artículo se exponen teoremas como el siguiente:

Teorema 4.3. *Sea ϕ una substitución primitiva de Pisot unimodular e irreducible. Entonces el sistema dinámico (X_ϕ, σ) tiene espectro discreto si y solo si el grado m de la partición asociada a ϕ es 1.*

Capítulo 5

Demostración del isomorfismo entre $(X_{\phi_t}, \mu, \sigma)$ y $(\mathbb{T}^2, \lambda, R_\alpha)$

La demostración que se desarrollará en este capítulo tiene generalizaciones en inglés. Sin embargo, la prueba de este caso en particular sólo se encuentra en el artículo francés "Nombres algébriques et substitutions" escrito por G. Rauzy [9].

Proposición 5.1. *Sea M una matriz primitiva, $\lambda > 0$ el valor propio maximal y P_λ el eigenvector asociado a λ. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} M^n = P_\lambda.$$

Demostración. Sabemos que P_λ es la proyección sobre el eigenespacio $\mathrm{Ker}(M - \lambda I)$, si consideramos al operador N que satisface que $NP_\lambda = P_\lambda N = 0$. Entonces podemos descomponer a M como

$$M = \lambda P_\lambda + N.$$

Esto implica que $M^n = \lambda^n P_\lambda + N^n$ (Teorema 1.1), si

$$\tau := \max\{|\alpha_i|, \alpha_i \text{ es eigenvalor de } N\}.$$

Entonces $\tau < 1 < \lambda$ y podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} M^n = \lambda^n P_\lambda$. Es decir, existe una $c > 0$ tal que

$$||M^n - \lambda^n P_\lambda||_\infty = ||N^n||_\infty \leq c\tau. \tag{5.1}$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{\lambda^n} = P_\lambda$. ∎

Definición 5.1. Decimos que $P = (w_1, w_2, w_3)$ es una partición de $\mathbb{R}^2$ mod $\mathbb{Z}^2$ si:

I) w_k con $k \in \{1, 2, 3\}$ son conjuntos abiertos, conexos y acotados;

II) los conjuntos $w_k + \mathbb{Z}^2$ (es decir, el conjunto $x + y$ con $x \in w_k$ y $y \in \mathbb{Z}^2$) son mutuamente ajenos;

III) $(w_1 + \mathbb{Z}^2) \cup (w_2 + \mathbb{Z}^2) \cup (w_3 + \mathbb{Z}^2)$ es denso en $\mathbb{R}^2$;

IV) $\forall g \in \mathbb{Z}^2$ y $g \neq 0$ se tiene que $w_k \cap (g + w_k) = \emptyset$ con $k \in \{1, 2, 3\}$.

5.1. Construcción del fractal de Rauzy

Definición 5.2. Sea $V \in \mathcal{L}_{\phi_t} = \{$ factores de $\phi_t^n(u) : n \geq 0, u$ punto fijo de $\phi_t\}$

$$\zeta = (\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}), \quad \Delta_k(V) = \zeta^k|V| - |V|_k \text{ y } k \in \{1, 2, 3\}. \tag{5.2}$$

Tenemos que $\sum_{k\in\mathcal{L}_{\phi_t}} \Delta_k(V) = 0$, pues

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathcal{L}_{\phi_t}} \Delta_k(V) &= \frac{1}{\lambda}|V| - |V|_1 + \frac{1}{\lambda^2}|V| - |V|_2 + \frac{1}{\lambda^3}|V| - |V|_3 \\ &= |V|(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3}) - (|V|_1 + |V|_2 + |V|_3) \\ &= |V| - |V| = 0.\end{aligned}$$

Por la obsrevación anterior, si sabemos los valores de $\Delta_1(V), \Delta_2(V)$ es inmediato obtener el valor $\Delta_3(V)$. Por lo tanto nos limitaremos a estudiar los vectores columna $\Delta(V)$ de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $\Delta_1(V), \Delta_2(V)$.

Proposición 5.2. *Sea $\xi = \frac{1}{\lambda}$. Entonces*

$$\forall V \in \mathcal{L}_{\phi_t}, \quad \Delta(\phi_t(V)) = B\Delta(V), \tag{5.3}$$

donde B es la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} -\xi & -\xi \\ 1 - \xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Demostración. Sabemos que $\xi + \xi^2 + \xi^3 = 1$ y $|V| = |V|_1 + |V|_2 + |V|_3$, ahora

$$|\phi_t(V)| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |V|_1 \\ |V|_2 \\ |V|_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |V|_1 + |V|_2 + |V|_3 \\ |V|_1 \\ |V|_2 \end{pmatrix}$$

esto implica que

$$|\phi_t(V)|_1 = |V|_1 + |V|_2 + |V|_3 \quad \text{y} \quad |\phi_t(V)|_2 = |V|_1.$$

Por otra parte, podemos deducir de (5.1) que

$$|\phi_t(V)| = |\phi_t(V)|_1 + |\phi_t(V)|_2 + |\phi_t(V)|_3 = 2|V|_1 + 2|V|_2 + |V|_3.$$

Usando que $\xi + \xi^2 + \xi^3 = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\phi_t(V)) &= \xi|\phi_t(V)| - |\phi_t(V)|_1 \\
&= \xi(2|V|_1 + 2|V|_2 + |V|_3) - |V|_1 - |V|_2 - |V|_3 \\
&= (2\xi - 1)|V|_1 + (2\xi - 1)|V|_2 + (\xi - 1)|V|_3 \\
&= (\xi - \xi^2 - \xi^3)|V|_1 + (\xi - \xi^2 - \xi^3)|V|_2 + (-\xi^2 - \xi^3)|V|_3 \\
&= -\xi^2(|V|_1 + |V|_2 + |V|_3) - \xi^3(|V|_1 + |V|_2 + |V|_3) + \xi|V|_1 + \xi|V|_2.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\Delta_1(\phi_t(V)) = \begin{pmatrix} -\xi & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi|V| - |V|_1 \\ \xi^2|V| - |V|_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1(V) \\ \Delta_2(V) \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\phi_t(V)) &= \xi^2(|\phi_t(V)|) - |\phi_t(V)|_2 \\
&= \xi^2(2|V|_1 + 2|V|_2 + |V|_3) - |V|_1 \\
&= (2\xi^2 - 1)|V|_1 + 2\xi^2|V|_2 + \xi^2|V|_3.
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{pmatrix} 1-\xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1(V) \\ \Delta_2(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi|V| - |V|_1 \\ \xi^2|V| - |V|_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&\xi|V| - \xi^3|V| - |V|_1 + \xi^2|V|_1 - \xi^4|V| + \xi^2|V|_2 \\
=&\xi(|V|_1 + |V|_2 + |V|_3) - \xi^3(|V|_1 + |V|_2 + |V|_3) - |V|_1 + \xi^2|V|_1 - \xi^4(|V|_1 + |V|_2 + |V|_3) + \xi^2|V|_2 \\
=&|V|_1(\xi - \xi^3 - 1 + \xi^2 - \xi^4) + |V|_2(\xi - \xi^3 - \xi^4 + \xi^2) + |V|_3(\xi - \xi^3 - \xi^4) \\
=&(2\xi^2 - 1)|V|_1 + 2\xi^2|V|_2 + \xi^2|V|_3.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\Delta_2(\phi_t(V)) = \begin{pmatrix} 1-\xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1(V) \\ \Delta_2(V) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

De (5.5) y (5.6), obtenemos que

$$\Delta(\phi_t(V)) = \begin{pmatrix} -\xi & -\xi \\ 1-\xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1(V) \\ \Delta_2(V) \end{pmatrix} = B\Delta(V).$$

■

Por la propiedad del siguiente lema a la substitución ϕ_t la nombraremos **substitución de Tribonacci**.

Lema 5.1. *Sea ϕ_t la substitución de Tribonacci. Entonces*

$$|\phi_t^n(x)| = |\phi_t^{n-3}(x)| + |\phi_t^{n-2}(x)| + |\phi_t^{n-1}(x)|, \tag{5.7}$$

es decir, la sucesión aumenta en relación a la suma de las tres longitudes anteriores.

Demostración. Dada $V \in U^*$ denotaremos por $r(V) = (|V|_1, |V|_2, |V|_3)$. Entonces es inmediato que

$$\forall V \in U^* \qquad r(\phi_t(V)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} r(V) \quad \text{y por tanto} \quad r(\phi_t^n(V)) = \mathrm{M}_{\phi_t}^n r(V).$$

Dados v_0, v_1, v_2, podemos demostrar por inducción que

$$\begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 1$ es directo que

$$\begin{pmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = M_{\phi_t} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Suponiendo cierto para n, para $n+1$ tenemos que

$$M_{\phi_t}^{n+1} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} = M_{\phi_t} M_{\phi_t}^n \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} = M_{\phi_t}^n \begin{pmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+3} \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

De esto podemos deducir que

$$\begin{pmatrix} v_{n+3} \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M_{\phi_t} M_{\phi_t}^n \begin{pmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Esto implica que

$$v_{n+3} = v_{n+2} + v_{n+1} + v_n, \tag{5.8}$$

es decir

$$|\phi_t^n(x)| = |\phi_t^{n-3}(x)| + |\phi_t^{n-2}(x)| + |\phi_t^{n-1}(x)|$$

∎

Observación 5.1. Dado que ϕ_t es primitiva, por la Proposición 4.2 podemos afirmar que existe un punto fijo. Más aun $u = \lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_t^n(1)$, es decir,

$$u = 12131211213121\ldots.$$

Denotaremos por U_0 la palabra vacía y por U_N la palabra en U^* formada de los primeros N términos de u, entonces

$$U_N = u_0 \dots u_{N-1}.$$

Sea $g(n) := |\phi_t^n(1)|$. Entonces por la relación (5.7), sabemos que

$$g(n+3) = g(n+2) + g(n+1) + g(n).$$

Por ejemplo:

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 2, \quad g(2) = 4, \quad g(3) = 7.$$

Proposición 5.3. *Sea $\delta(N) = \Delta(U_n)$. Entonces*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta(g(n)) = B^n \delta(1). \tag{5.9}$$

Demostración.

$$\delta(N) = \Delta(U_N) \begin{pmatrix} \xi|U_N| - |U_N|_1 \\ \xi^2|U_N| - |U_N|_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\xi - |U_N|_1 \\ N\xi^2 - |U_N|_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |U_N|_1 \\ |U_N|_2 \end{pmatrix}.$$

Como $U_1 = 12$, entonces

$$\delta(1) = \begin{pmatrix} \xi - 1 \\ \xi^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, dado que la sucesión u comienza con $\phi_t^n(1)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $U_{g(n)} = \phi_t^n(1)$, de (5.3)

$$\delta(g(n)) = \Delta(\phi_t^n(1)) = B^n \Delta(U_1) = B^n \delta(1).$$

∎

Más aun, el polinomio característico de B es el polinomio:

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}).$$

Diagonalizando la matriz B, podemos afirmar que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta(g(n)) = \begin{pmatrix} a\alpha^n + \overline{a\alpha^n} \\ b\alpha^n + \overline{b\alpha^n} \end{pmatrix}.$$

Es decir, existe una función Ψ lineal biyectiva y continua de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ tal que

$$\Psi(B^n z) = \alpha^{n+3}. \tag{5.10}$$

Lema 5.2. *Sea $n, N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$g(n) \leq N < g(n+1).$$

Entonces

$$U_N = \phi_t^n(1) U_{N-g(n)}.$$

Demostración. Haremos esta prueba por inducción sobre n.
Para $n=0$ se tiene que

$$g(0)=1 \quad \text{y} \quad g(1)=2 \quad \text{entonces} \quad g(0)\leq N<g(1).$$

Esto implica que $1\leq N<2$ y para $N=1$

$$U_1=12=\phi_t(1)=\phi_t(1)U_0.$$

Para $n=1$ tenemos que

$$g(1)=2, \quad g(2)=4 \quad \text{y} \quad 2\leq N<4$$

Esto implica que $N\in\{2,3\}$. Si $N=2$ tenemos que

$$U_2=12=\phi_t(1)=\phi_t(1)U_0.$$

Mientras que si $N=3$ tenemos que

$$U_3=121=\phi_t(1)1=\phi_t(1)U_1.$$

Supongamos válido para n, veamos que se cumple para $n+1$. Sea $N\in\mathbb{N}$ tal que $g(n+1)\leq N<g(n+2)$, entonces

$$U_N=\phi_t^{n+1}(1)U_{N-g(n+1)}.$$

Dado que u comienza con $\phi_t^n(1)$ y que $g(n)<N$ esto implica que

$$|\phi_t^n(1)|\leq U_N.$$

Además, por hipótesis de inducción

$$U_N=\phi_t(1)^nV,$$

donde V es una palabra de longitud $N-g(n)$. Por otro lado, u comienza con ϕ_t^{n+1} y

$$|\phi_t^{n+1}|=g(n+1).$$

Esto implica que $N<|\phi_t^{n+1}|$ y, como $\phi_t^n(1)$ comienza con U_N, entonces $\phi_t^{n+1}(1)$ comienza con U_N. Pero

$$\phi_t^{n+1}(1)=\phi_t^n(\Phi(1))=\phi_t^n(12)=\phi_t^n(1)\phi_t^n(2).$$

Entonces $\phi_t^n(2)$ comienza con V y

$$\phi_t^n(2)=\phi_t^{n-1}(13)=\phi_t^{n-2}(121)=\phi_t^{n-2}(1)\phi_t^{n-2}(2)\phi_t^{n-2}(1) \quad \text{y}$$

$$\phi_t^n(1)=\phi_t^{n-1}(12)=\phi_t^{n-2}(1213)=\phi_t^{n-2}(1)\phi_t^{n-2}(2)\phi_t^{n-2}(1)\phi_t^{n-2}(3).$$

Por lo tanto $\phi_t^n(1)$ comienza con $\phi_t^n(2)$. En conclusión $\phi_t^n(1)$ comienza con V y

$$U_N=\phi_t^n(1)\phi_t(1)U_{N-g(n+1)}$$

∎

Observación 5.2. Comparando la longitud de $\phi_t^n(2)$ con $\phi_t^n(1)$ podemos deducir que $\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n+1) \leq 2g(n)$.

Lema 5.3. *Sea N un entero positivo. Entonces existe una $s \in \mathbb{N}$ y una $s+1$ tupla $(n_0, \dots, n_s)$ de enteros tal que:*

I) $0 \leq n_0 < n_1 \dots < n_s$.

II) Para ninguna $k \in \{0, \dots, s-2\}$ se cumple que $n_{k+2} = n_k + 2$.

III) $U_N = \phi_t^{n_s}(1) \dots \phi_t^{n_0}(1)$.

Demostración. Supongamos que $g(n) \leq N < g(n+1)$ y demostremos por inducción sobre n. Para $n = 0$ tenemos que $g(0) \leq N < g(1)$, entonces $N = 1$. Consideramos $s = 0$ y $n_0 = 0$, entonces:

I)$0 \leq n_0$.

II) Para $k = 0, \quad n_2 \neq n_0 + 2$.

III)$U_1 = 1 = \phi_t^0(1)$.

Supongamos que el resultado es válido para n y demostremos que si $g(n+1) \leq N < g(n+2)$ existe una $s \in \mathbb{N}$ y una $s+1$ tupla $(n_0, \dots, n_s)$ de enteros que satisfacen $I), II)$ y $III)$.
Por el Lema 5.2, $U_N = \phi_t^n(1)U_{N-g(n)}$ donde

$$g(n) \leq N < g(n+1).$$

Lo que implica que $0 \leq N - g(n) < g(n+1) - g(n)$ y por tanto $N - g(n) < g(n)$. Usando la hipótesis de inducción para $N - g(n)$ se tiene que

$$U_{N-g(n)} = \phi_t^{n_s}(1) \dots \phi_t^{n_0}(1),$$

con $(n_0 \dots n_s)$ satisfaciendo las condiciones $I)$ y $II)$. Por lo tanto

$$U_N = \phi_t^n(1)\phi_t^{n_s}(1) \dots \phi_t^{n_0}(1).$$

Veamos que $(n_0, \dots, n_s, n)$ satisfacen las condiciones $I)$ y $II)$. Como

$$|U_{N-g(n)}| = N - g(s)$$

Esto implica que $|\phi_t^{n_s}(1)| = g(n_s) \leq N - g(s)$ y dado que $N - g(n) < g(n)$ entonces $n_s < n$, que establece la propiedad $I)$.
Para verificar $II)$, es suficiente demostrar que no es posible que

$$n = n_{s-1} + 2 \quad \text{si} \quad n_{s-1} = n-2, \quad n_s = n-1.$$

Si esto no se cumple tendríamos que

$$\begin{aligned}
\phi_t^n(1)\phi_t^{n_s}(1)\phi_t^{n_{s-1}}(1) =& \phi_t^{n-2}(\phi_t^2(1))\phi_t^{n-2}(\phi_t(1))\phi_t^{n-2}(1) \\
=& \phi_t^{n-2}(1213121) = \phi_t^{n-2}(\phi_t^3(1)) \\
=& \phi_t^{n+1}(1).
\end{aligned}$$

Entonces U_N comienza con $\phi_t^{n+1}(1)$ y por tanto $N \geq g(n+1)$, lo cual contradice la hipótesis. ∎

Observación 5.3. Por el Lema 4.4 inciso $III)$ sabemos que $U_N = \phi_t^{n_s}(1)\dots\phi_t^{n_0}(1)$. Esto implica que

$$u = \phi_t^{n_s}(1)\dots\phi_t^{n_0}(1)\sigma^n(u).$$

Lema 5.4. *Sea N un entero positivo. Entonces existe una única $s \in \mathbb{N}$ y una única $s+1$-tupla $(n_0, \dots, n_s)$ que satisfacen las condiciones $I)$ y $II)$ del Lema 5.3. Se deduce que si $(n_0, \dots, n_s)$ es una s+1-tupla que satisace estas condiciones. Además, si N es el entero definido por:*

$$N = \sum_{j=0}^{s} g(n_j),$$

se tiene que $U_N = \phi_t^{n_s}(1)\dots\phi_t^{n_0}(1)$.

Demostración. Primero demostraremos por inducción sobre s que si $(n_0, \dots, n_s)$ es una $s+1$-tupla que satisface $I)$ y $II)$, entonces

$$\sum_{j=0}^{s} g(n_j) < g(n_s + 1).$$

Para $s = 0$ se tiene que $g(n_0) < g(n_0 + 1)$, pues g es una función estrictamente creciente.
Sea $(n_0, \dots, n_{n+1})$ una $s+2$-tupla que satisface $I)$ y $II)$ y supongamos válido para la $s+1$-tupla. Entonces $(n_0, \dots, n_s)$ satisfacen ambas condiciones. Si

$$n_{s+1} > 1 + n_s$$

entonces, por hipótesis de inducción

$$\sum_{j=0}^{s+1} g(n_j) < g(n_s + 1) + g(n_{s+1}) \leq g(n_{s+1} - 1) + g(n_{s+1}).$$

Dado que g satisface (5.7)

$$g(n_{s+1} + 1) = g(n_{s+1}) + g(n_{s+1} - 1) + g(n_{s+1} - 2),$$

entonces

$$\sum_{j=0}^{s+1} g(n_j) < g(n_{s+1} + 1).$$

Ahora, supongamos que $n_{s+1} = 1 + n_s$.
Demostremos que si $n_{s+1} = 1 + n_s$ y $(n_0, \dots, n_{s-1})$ es una s-tupla que satisface $I)$ y $II)$, entonces

$$\sum_{j=0}^{s-1} g(n_j) < g(n_{s-1} + 1).$$

Para $s = 0$ se tiene que $n_1 = 1 = n_0$. Usando (5.7) obtenemos

$$g(n_0 + 1) = g(n_0) + g(n_0 - 1) + g(n_0 - 2).$$

Lo que implica que

$$g(n_0) < g(n_0 + 1) = g(n_1).$$

Supongamos válido para s que si $(n_0, \ldots, n_{s-1})$ es una s-tupla que satisface $I)$ y $II)$, entonces

$$\sum_{j=0}^{s-1} g(n_j) < g(n_{s-1} + 1).$$

Pero, en este caso, se tiene que:

$$n_{s-1} + 1 = n_s.$$

Entonces la $n + 2$-tupla $(n_0, \ldots, n_{s+1})$ no satisface la condición $II)$ pero la desigualdad se preserva pues

$$\sum_{j=0}^{s+1} g(n_j) < g(n_s-1)+g(n_s)+g(n_{s+1}) \leq g(n_s+1)+g(n_s)+g(n_s+1) = g(n_{s+1}+1).$$

Así pues, si $(n_0, \ldots, n_s)$ es una s-tupla que satisface las condiciones $I)$ y $II)$ y si N es tal que:

$$N = \sum_{j=0}^{s} g(n_j),$$

del anáisis anterior, podemos deducir que n_s es necesariamente el entero positivo n tal que

$$g(n) \leq N < g(n + 1).$$

Esto implica que existe una única $s \in \mathbb{N}$ y una única $s + 1$-tupla $(n_0, \ldots, n_s)$ que satisfacen $I)$ y $II)$. ■

Definición 5.3. Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de sucesiones con términos en $\{0, 1\}$ donde no se adimite la palabra 111 y donde todos los términos son nulos después de cierto rango. Sean $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ definidos como:

$$\mathcal{N}_1 = \{\varepsilon \in \mathcal{N} | \quad \varepsilon_0 = 0\}, \tag{5.11}$$
$$\mathcal{N}_2 = \{\varepsilon \in \mathcal{N} | \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = 0\}, \tag{5.12}$$
$$\mathcal{N}_3 = \{\varepsilon \in \mathcal{N} | \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = 1\}. \tag{5.13}$$

El conjuto $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3)$ es una partición de $\mathcal{N}$.
Dada la definición anetrior, podemos concluir que para toda $N \in \mathbb{N}$, existe un único conjunto $\varepsilon(N) \in \mathcal{N}$ tal que N tiene un **desarrollo** de la forma:

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n), \tag{5.14}$$

con $\varepsilon_n(N)$ es una sucesión de 0 y 1 tal que a partir de cierto rango k, $\varepsilon_m(N) = 0$ para toda $m > k$. Así pues, podemos deducir que la suma es finita y está bien definida pues si la palabra 111 se admitiera $N \geq g(n+1)$, lo cual contradice el Lema 5.4.
En general, no es facil expresar a N como en (5.16). Pero hay un caso donde las sumas se expresan fácilmente.

Lema 5.5. *Sean $M, N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n(M) + \varepsilon_n(N)$ pertenece a $\mathcal{N}$, entonces:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_n(M+N) = \varepsilon_n(M) + \varepsilon_n(N).$$

Demostración. Por una parte, tenemos que

$$N + M = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N+M) g(n).$$

Pero, por definición

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(M) g(n) = N + M.$$

Como la expresión $\varepsilon_n(N+M)$ es única y $\varepsilon_n(M) + \varepsilon_n(N) \in \mathcal{N}$ esto implica que

$$\varepsilon_n(M+N) = \varepsilon_n(M) + \varepsilon_n(N).$$

■

Teorema 5.1. *Sea $z = \delta(1)$ y $N \in \mathbb{N}$ con desarrollo*

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n).$$

Entonces

$$\delta(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z.$$

Demostración. Por (5.16) sabemos que $\delta(g(n)) = B^n \delta(1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta(N) =& \delta\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) \delta(g(n)) \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n \delta(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z. \end{aligned}$$

■

Lema 5.6. *Sea $v(N)$ el único elemento de $\mathcal{U}$ tal que el desarrollo de N pertenece a $\mathcal{N}_{v(N)}$. Entonces*

$$(v(N))_{N \in \mathbb{N}} = u.$$

Demostración. Tenemos que $v(0) = 1$, pues

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n),$$

donde $\varepsilon_n(0)$ es la sucesión 0. Por tanto $\varepsilon_n(0) \in \mathcal{N}_1$.
Sea $N > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$g(n) \leq N < g(n+1).$$

Por el Lema 5.2, tenemos que

$$U_N = \phi_t^n(1) U_{N-g(n)},$$

donde la última letra de U_N es u_{n-1}, la cual coincide con la última letra de $U_{N-g(n)}$ la cual llamaremos $u_{N-g(n)-1}$.
Supongamos que $n \geq 2$; vimos que $\phi_t^n(2)$ es el comienzo de u, donde la propiedad anterior también es válida para $N = g(n+1)$, entonces

$$U_{g(n+1)} = \phi_t^{n+1}(1) U_0 = \phi_t^{n+1}(1) = \phi_t^n(1) \phi_t^n(2).$$

Reemplazando $N - 1$ por N:

$$\forall n \geq 2, \quad \forall N \quad \text{tal que } g(n) \leq N < g(n+1).$$

$$u_N = u_{n-g(n)}.$$

Entonces los desarrollos de N y $N - g(N)$ coinciden hasta en el rango $n - 1$. Tambien tenemos que

$$\forall n \geq 2, \quad \forall N \quad \text{tal que } g(n) \leq N < g(n+1)$$

$$v(N) = v(N - g(n)).$$

Más aun, por el Lema 5.2, los desarrollos de N y de $N - g(n)$ coinciden hasta la posición $n - 1$. Entonces

$$\forall n \geq 2, \quad \forall N \quad \text{tal que } g(n) \leq N < g(n+1).$$

$$v(N) = v(N - g(n)).$$

Ahora, falta demostrar que $(v(N))_{N \in \mathbb{N}}$ y u coinciden hasta la posición $g(2) - 1 + 3$. Para $N = 1$ se tiene que cumplir que

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(N)_n g(n)$$

y como $g(n) > 0$ para toda $n > 0$ necesitamos que $\varepsilon_n(0) = 0$ para toda n. Esto implica que $\varepsilon(0) \in \mathcal{N}_1$. Así pues

$$v(0) = 1.$$

Por otra parte, para $N = 1$ se debe cumplir que

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(N)_n g(n),$$

pero $g(0) = 1$ y $g(n) > 0$ para toda n, es decir, necesitamos que $\varepsilon_0(1) = 1$ y para toda $n > 0$ $\varepsilon_n(1) = 0$. Entonces $\varepsilon_n(1) \in \mathcal{N}_2$ y

$$v(1) = 2.$$

Finalmente, para $N = 2$ se tiene que satisfacer que

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(N)_n g(n),$$

pero $g(1) = 2$ y $g(n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ por lo tanto, necesitamos que $\varepsilon_n(2) = 1$ para $n = 1$ y $\varepsilon_n(n) = 0$ para toda $n \neq 1$. Entonces $\varepsilon \in \mathcal{N}_1$ y

$$v(2) = 1.$$

Esto implica que $(v(N))_{N=0}^{2} = 121 = U_3$, es decir, $(v(N))_{N\in\mathbb{N}}$ y u coinciden hasta la posición $g(2) - 1 = 3$. ■

Definición 5.4. Denotamos por E al conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ de la forma $\delta(N)$ con $N \in \mathbb{N}$ y a $\Omega = \overline{E}$.
Como $N = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n)$ y por la ecuación (4.32) podemos deducir que

$$\begin{aligned}\delta(N) &= \delta(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) \delta(g(n)) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n(N) \alpha^n.\end{aligned}$$

Es decir, E es la imágen de la función lineal $S : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, donde los elementos del dominio son de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) \alpha^n$ con (ε_n) en el conjunto acotado $\mathcal{N}$.

Definición 5.5. Considerando las matríces

$$B = \begin{pmatrix} -\xi & -\xi \\ 1 - \xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} + \xi & \xi \\ -(\alpha + \xi) & -\xi \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Definimos la norma en $\mathbb{R}^2$ adaptada a la matriz B como

$$||Bx|| = |\alpha| ||x|| = \sqrt{\xi} ||x|| \tag{5.16}$$

donde $||x||$ es la norma asociada a un vector Mx, definida de la siguiente manera:

$$||x|| = |(\alpha + \xi) x_1 + \xi x_2|.$$

La cual está bien definida, ya que

$$\begin{aligned} MB &= \begin{pmatrix} \overline{\alpha}+\xi & \xi \\ -(\alpha+\xi) & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi & -\xi \\ 1-\xi^2 & -\xi^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha}+\xi & \xi \\ -(\alpha+\xi) & -\xi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$MB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} M.$$

Esto implica que

$$||Bx|| = |MBx| = |\alpha||Mx| = |\alpha|||x||.$$

Por lo tanto (5.16) está bien definida.

Observación 5.4. Considerando una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n z$, con (c_n) acotada. Usando (5.16) y que $|\alpha| < 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} ||\sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n z|| \leq |c_n| \sum_{n=0}^{\infty} ||B^n z|| &\leq M \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n |z| \\ &\leq M \sum_{n=0}^{S} |\alpha|^n |z| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces $(\sum_{n=0}^{k} c_n B^n z)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y creciente, por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n z$$

es convergente. En particular, el conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto si lo equipamos con la topología producto asociada a la topología discreta de $\{0,1\}$. Lo que implica que todos los elementos en E son de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z,$$

donde la sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{N}}$.

Lema 5.7. *Sea $\overline{E}$ la cerradura del conjunto E. Entonces*

$$\overline{E} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 | \text{máx}(|x_1|, |x_2|) < 1\}.$$

Demostración. Sea $x \in \overline{E}$, entonces

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z.$$

Dado que $x \in \overline{E}$ no existe una n tal que

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = 1.$$

Definimos a y_n con los siguientes casos:

1. Si $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n+1} = 0, \varepsilon_{n+2} = 0$ esto implica que
$$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = 0 \quad \text{y } y_n = 0.$$
2. Si $\varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n+1} = 0, \varepsilon_{n+2} = 0$, entonces
$$x_n = B^n z, \quad x_{n+1} = x_{n+2} = 0 \quad \text{y } y_n = z.$$
3. Si $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n+1} = 1, \varepsilon_{n+2} = 0$, entonces
$$x_n = x_{n+2} = 0, \quad x_{n+1} = B^{n+1} z \quad \text{y } y_n = Bz.$$
4. Si $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n+1} = 0, \varepsilon_{n+2} = 1$, entonces
$$x_n = x_{n+1} = 0, x_{n+2} = B^{n+2} z \quad \text{y } y_n = B^2 z.$$
5. Si $\varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n+1} = 1, \varepsilon_{n+2} = 0$, entonces
$$x_n = B^n z, x_{n+1} = B^{n+1} z, x_{n+2} = 0 \quad \text{y } y_n = z + Bz.$$
6. Si $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n+1} = 1, \varepsilon_{n+2} = 1$, entonces
$$x_n = 0, x_{n+1} = B^{n+1} z, x_{n+2} = B^{n+2} z \quad \text{y } y_n = Bz + B^2 z.$$
7. Si $\varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n+1} = 0, \varepsilon_{n+2} = 1$, entonces
$$x_n = B^n z, x_{n+1} = 0, x_{n+2} = B^{n+2} z \quad \text{y } y_n = z + B^2 z.$$

Por lo tanto, podemos escribir a x de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z = \sum_{n=0}^{\infty} B^{3n} y_n,$$

donde $y_n \in F = \{0, z, Bz, B^2 z, z + Bz, z + B^2 z, Bz + B^2 z\}$. Entonces

$$\begin{aligned} ||x|| = ||\sum_{n=0}^{\infty} B^{3n} y_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||B^{3n} y_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||B^{3n}|| \; ||y_n|| \\ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{3n} ||y_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{3n} \sup_{y \in F} ||y_n||, \end{aligned}$$

$\sup_{y \in F} ||y_n|| = ||z|| = \zeta$. Por lo tanto

$$||x|| \leq \frac{\zeta^2}{1 - |\alpha|^3} < \frac{1}{2}.$$

Así pues, $\overline{E} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 | \text{máx}(|x_1|, |x_2|) < 1\}$. Lo cual demuestra el primer punto que cumple una partición en $\mathbb{T}^2$.

■

Veamos ahora que si $x \in \mathbb{Z}$, con $x \neq \emptyset$ entonces, $x \notin \overline{E}$.

Lema 5.8. *Sea $\eta = (\zeta, \zeta^2)$. Si existe un número estrictamente positivo c tal que $\forall\ N \in \mathbb{N}, \forall\ g \in \mathbb{Z}^2$ se cumple que*

$$||N\eta - g|| < c, \quad \textit{entonce} \quad \sigma(N) = N\eta - g. \tag{5.17}$$

Demostración. Por el Lema 5.7 si existe una $c > 0$ tal que si

$$\forall g \in \mathbb{Z}^2 \text{ se tiene que } \inf_{x \in \overline{E}} ||g - x|| < c$$

entonces $g = 0$.

■

Corolario 5.1. *Sea $\Omega = int(\overline{E})$. Entonces $\overline{0} = (0, 0) \in \omega$.*

Demostración. Como ζ, ζ^2, ζ^3 son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes, el conjunto $(N\eta)_{N \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, en particular es denso en el conjunto de las x tal que $||x|| < c$ para c suficientemente pequeña.

Sea c tal que $||N\eta - 0|| < c$. Entonces, por el Lema 5.8,

$$\sigma(N) = N\eta.$$

Es decir, $\sigma(N)_{n \in \mathbb{B}} \subset \overline{E}$ es denso. Por lo tanto, $\overline{0} \in \Omega$.
Considerando a c como en el Lema 5.8 podemos deducir que $(\delta(N))_{N \in \mathbb{N}}$ es denso en $\Omega \subset \overline{E}$. ■

Observación 5.5. Por otra parte, todo punto de $\overline{E}$ se representa de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z \quad \text{con } (\varepsilon_n) \in \mathcal{N}.$$

Recíprocamente, todo punto de esta forma es un punto de $\overline{E}$ ya que es el límite de los puntos de la forma

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n B^n z \in E.$$

Ahora, si $\mathcal{N}$ no contiene a la palabra 111, entonces $\sigma(\mathcal{N})$ no la va a contener, es decir $\sigma(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$. Por lo tanto

$$\sigma(\overline{\mathcal{N}}) \subset \overline{\sigma(\mathcal{N})} \subset \overline{\mathcal{N}}.$$

Lo que implica que el conjunto $\mathcal{N}$ es invariante bajo la función shift σ. En particular, para toda $N \in \mathbb{N}$ en conjunto $N^n\overline{E}$ está en $\overline{E}$ ya que

$$B^n \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k B^k z = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k B^{k+n} z = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{j-n} B^j z = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^{-n}(\varepsilon_j) B^j z \quad \text{con } \sigma^{-n}(\varepsilon_j) \in \mathcal{N}.$$

Así pues,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma^{-n}(\varepsilon_j) B^j z \in \overline{E},$$

es decir,

$$B\overline{E} \subset \overline{E}. \tag{5.18}$$

Observación 5.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Si $\varepsilon_n(N) = 0$ para toda $n > m$, entonces

$$\delta(N) + B^{m+2}\overline{E} \in\subset \overline{E}. \tag{5.19}$$

Dadas las siguientes observaciones, podemos dar la partición de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ buscada.

Definición 5.6. Sea $k \in \{1, 2, 3\}$. Definimos a los conjuntos E_k como el conjunto de las $\delta(N)$ con $N \in \mathcal{N}_k$ y por $\Omega_k = \operatorname{int} \overline{E_k}$.

Lema 5.9. *Sean $\overline{E_1}, \overline{E_2}, \overline{E_3}$ definidas como en la Definición 5.6. Entonces*

$$\overline{E} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}.$$

Demostración. Veamos primero que $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3} \subset \overline{E}$.

1. Sea $N \in \mathcal{N}_1$. Entonces

$$\delta(N) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z = B \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\varepsilon_k(N)) B^k z.$$

Por lo tanto,

$$\overline{E_1} = B\overline{E} \subset \overline{E}. \tag{5.20}$$

2. Sea $N \in \mathcal{N}_2$. Entonces

$$\delta(N) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z = z + B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^2(\varepsilon_k(N)) B^k z.$$

Por lo tanto,

$$\overline{E}_2 = z + B^2\overline{E} \subset \overline{E}. \tag{5.21}$$

3. Sea $N \in \mathcal{N}_3$. Entonces

$$\delta(N) = z + Bz + 0 + \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z = z + Bz + B^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^3(\varepsilon_k(N)) B^k z.$$

Por lo tanto,

$$\overline{E_3} = z + Bz + B^3\overline{E} \subset \overline{E}. \tag{5.22}$$

Así pues, $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3} \subset \overline{E}$.

Ahora, si $x \in \overline{E}$, entonces

$$x = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon_n(N)B^n z \text{ con } \varepsilon_n(N) \in \mathcal{N},$$

donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$. Entonces $\varepsilon_n(N) \in \mathcal{N}_1$ o $\varepsilon_n(N) \in \mathcal{N}_2$ o $\varepsilon_n(N) \in \mathcal{N}_3$ esto implica que

$$x \in \overline{E}_1 \quad \text{o} \quad x \in \overline{E}_2 \quad \text{o} \quad x \in \overline{E}_3.$$

Por lo tanto $\overline{E} \subset \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}$, es decir, $\overline{E} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}$.

■

Lema 5.10. *Los conjuntos* $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ *son mutuamente ajenos.*

Demostración. Como $\overline{E}$ es compacto, $\overline{E}$ es medible respecto a la medida de Lebesgue $\mu(\overline{E})$, la cual es finita y no nula ya que $\overline{0} \in \text{int}(\overline{E})$. Entonces

$$\mu(\overline{E}) = \mu(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \cup \overline{E}_3) \leq \mu(\overline{E}_1) + \mu(\overline{E}_2) + \mu(\overline{E}_3).$$

Donde solo se da la igualdad si para toda $i, j \in \{1, 2, 3\}$ se cumple que

$$\mu(\overline{E_i} \cap \overline{E_j}) = 0.$$

Ahora, como la matriz B está determinada por ξ, tenemos que

$$\det(B) = \xi^3 + \xi(1 - \xi^2) = \xi^3 + \xi + \xi^3 = \xi.$$

Entonces

$$\mu(\overline{E}_1) = \mu(B\overline{E}) = \xi\mu(\overline{E}) \tag{5.23}$$

$$\mu(\overline{E}_2) = \mu(z + B^2\overline{E}) = \mu(z) + \mu(B^2\overline{E}) = \xi^2\mu(\overline{E}) \tag{5.24}$$

$$\mu(\overline{E}_3) = \mu(z + Bz + B^3\overline{E}) = \mu(z) + \mu(Bz) + \mu(B^3\overline{E}) = \xi^3\mu(\overline{E}). \tag{5.25}$$

Como $\xi + \xi^2 + \xi^3 = 1$ y por las ecuaciones (5.23), (5.24), (5.25) se tiene que

$$\mu(\overline{E}_1) + \mu(\overline{E}_2) + \mu(\overline{E}_3) = \xi\mu(\overline{E}) = \xi^2(\overline{E}) + \xi^3(\overline{E}) = \mu(\overline{E}).$$

Entonces, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$

$$\xi(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0.$$

Por lo tanto, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ son ajenos ya que Ω_i es abierto para toda $i \in \{1, 2, 3\}$.

■

Lema 5.11. *Existe un número estrictamente positivo c tal que si $\forall N \in \mathbb{N}, \forall g \in \mathbb{Z}^2$ y $\forall m \in \mathbb{N}$ se tiene que $||N\xi - g|| < c\xi^{\frac{m}{2}}$, entonces*

$$\varepsilon_n(N) = 0 \quad \forall\ n < m.$$

Demostración. Usando el Lema 5.8, consideramos a c lo suficientemente pequeña tal que $||x|| < c$ y por lo tanto $x \in \Omega$. Como $x \in \Omega$, entonces

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} B^n z.$$

Esto implica que

$$||x|| = ||\sum_{n=0}^{\infty} B^n z|| < c\xi^{\frac{m}{2}}.$$

Esto es, $x \in B^n\Omega$. Por otro lado,

$$||N\xi - g|| < c \text{ donde } \delta(N) = N\xi - g.$$

Entonces $\delta \in B^m\Omega$, es decir, $\varepsilon_n(N) = 0 \quad \forall n < m$. ■

Definición 5.7. Para todo conjunto $k_i \in \{1,2,3\}$ con $i \in \{1,\ldots,m\}$. Definimos el conjunto $\Omega(k_1,\ldots,k_m)$ por inducción sobre m de la siguiente manera

Para $m = 1 \quad \Omega(v) = \Omega_v \quad$ con $v \in \{1,2,3\}$ y

$$\begin{aligned}
\Omega(k_1,\ldots,k_m,1) &= B\Omega(k_1,\ldots,k_m),\\
\Omega(k_1,\ldots,k_m,2) &= z + B^2\Omega(k_1,\ldots,k_m),\\
\Omega(k_1,\ldots,k_m,3) &= z + Bz + B^3\Omega(k_1,\ldots,k_m,3).
\end{aligned}$$

Lema 5.12. *Sea $i \in \{1,2,3\}$. Entonces los conjuntos $\Omega(k_1,\ldots,k_{m-1},i)$ son mutuamente ajenos.*

Demostración. Haremos esta prueba por inducción sobre m.

Para $m = 1$, por definición $\Omega(1) = \Omega_1, \Omega(2) = \Omega_2$ y $\Omega(3) = \Omega_3$, los cuales son ajenos por el lema (4,11).

Así pues, por inducción sobre m tenemos que los conjuntos $\Omega(k_1,\ldots,k_{m-1},i)$ son ajenos para toda $i \in \{1,2,3\}$. Entonces se cumple que

$$\mu(\sum_{i=1}^{3} \overline{\Omega(k_1,\ldots,k_{m-1},i)}) = \sum_{i=1}^{3} \mu(\overline{\Omega(k_1,\ldots,k_{m-1},i)}).$$

■

Lema 5.13. *Sea $N \in \mathbb{Z}$ tal que existe $n < m$ con $\varepsilon_n(N) = 1$. Entonces $\delta(N) \in \Omega(k_1,\ldots,k_m)$ donde no todos los k_j son 1.*

Demostración. Haremos esta pruba por inducción sobre m.

Si $m = 1$, entonces $n = 0$ y si $\varepsilon_0(N) = 1$ se tiene que

$$\delta(N) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z.$$

Por otra parte, como $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ es una partición de E tenemos que $\delta(N) \in \Omega_i$ para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$. Pero $\delta(N) \notin \Omega_1$ pues $\Omega_1 = BE$ y $\delta(N)$ comienza con z. Por lo tanto, $\delta(N) \in \Omega_2$ ó $\delta(N) \in \Omega_3$ con $k_1 \neq 1$.
Supongamos que el resultado es válido para m y demostremos que para $N \in \mathbb{Z}$ si existe una $n < m + 1$ con $\varepsilon_n(N) = 1$ entonces $\delta(N) \in \Omega(k_1, \ldots, k_{m+1})$ con $k_j \neq 1$ para alguna $j \in \{1, \ldots, m + 1\}$.

Si $n = m$, entonces $\varepsilon_m(N) = 1$, donde

$$\delta(N) = \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i(N) B^i z + B^m z + \sum_{m+1}^{\infty} \varepsilon_i(N) B^i z.$$

Si suponemos que $\varepsilon_n(N) = 0$ para toda $n \leq m-1$ entoces $\delta(N) \in \Omega(1, \ldots, 1, 1)$, es decir,

$$\delta(N) \in B\Omega \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n},$$

lo cual contradice la hipótesis de inducción. Por lo tanto, existe $k_j \neq 1$.
Por otra parte, si $n < m$ y suponemos que $k_i = 1$ para toda $i > n$, entonces

$$\delta(N) \in B^{m-n} \Omega(k_1, \ldots, k_n),$$

donde, por hipótesis de inducción, existe una $k_j \neq 1$ tal que $\delta(N) \in B^{m-n}\Omega(k_1, \ldots, k_n)$.
Por lo tanto

$$\delta(N) \in \Omega(k_1, \ldots, k_{m+1}) \quad \text{con } k_j \neq 1.$$

■

Corolario 5.2. *Sea $\delta(N) \in B^m\Omega$. Entonces, para toda $n < m$ $\varepsilon_n(N) = 0$.*

Demostración. Es claro que

$$B^m\Omega = \Omega \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n}.$$

■

Lema 5.14. *Sea $x, y \in \Omega$ tal que $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Entonces $x = y$.*

Demostración. Supongamos que $x - y = g$ con $g \in \mathbb{Z}^2$. Como Ω es abierto, podemos elejir una $M \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(N)$ sea lo suficientemente cercano a x de tal forma que $\delta(M) + g \in \Omega$.

Como $y - x = g$ entonces $y = x + g$.

Sea m tal que para toda $n > m$, $\varepsilon_n(M) = 0$ y sea $N \in \mathbb{Z}$ tal que

$$||\delta(N) - (\delta(M) + g)|| < c\xi^{\frac{m+2}{2}}.$$

Entonces existe una $h \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$(N - M)\xi - h = \delta(N) - (\delta(M) + g).$$

Por el Lema 5.11 tenemos que para toda $n < m + 2$

$$\varepsilon_n(N - M) = 0,$$

y por el Lema 5.5 podemos deducir que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon(N) = \varepsilon(M) + \varepsilon(N - M).$$

Esto implica que

$$\delta(N) = \delta(M) + \delta(N - M), \text{ entonces } \delta(N - M) = (N - M)\xi - h.$$

Por lo tanto

$$||g|| = ||\delta(N - M)|| < c\xi^{\frac{m+2}{2}}.$$

Como m es lo suficientemente grande $g = 0$, es decir $x = y$.
De las demostraciones anteriores, podemos deducir que los elementos del conjunto

$$\Omega = \{\Omega(1), \Omega(2), \Omega(3)\}$$

son ajenos dos a dos y que los conjuntos $\Omega_k + \mathbb{Z}^2, k \in \{1, 2, 3\}$ son mutuamente ajenos. Lo cual cubre los incisos (II) y (III) para que $\{E_1, E_2, E_3\}$ sea una partición de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. ∎

Observación 5.7. Las demostraciónes siguientes son válidas si $x \in \overline{E}$. Ya que, toda clase de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tiene un representante en $\overline{E}$ por la densidad de $(N\xi)$ en $\mathbb{Z}^2$ y ya que cualquier punto de la frontera de $\overline{E}$ está asociado con un punto $y \neq 0 \in \mathbb{Z}^2$.
Veamos ahora que la partición dada es simplemente conexa.

Proposición 5.4. *Sea $\{E_1, E_2, E_3\}$ la partición definida anteriormente. Entonces el punto w con*

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} B^n z \in \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}.$$

Demostración. Dado que B tiene como polinomio característico a $(x+\alpha)(x-\overline{\alpha})$ el cual divide al polinomio $x^3 - x^2 - x - 1$ y $B^n + B^{n+1} + B^{n+2} = B^{n+3}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ por la proposición (4.12). Entonces

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} B^{3n} z = B^3 \sum_{n=1}^{\infty} B^n z \quad \text{por lo tanto } w \in \overline{E_1}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} B^{3n} z = z + B^2 z + \sum_{n=3}^{\infty} B^{3n} z \\ &= z + B^2 z + \sum_{k=1}^{\infty} B^{3k+2} z = z + B^2 z + B^3 \sum_{k=1}^{\infty} B^{k+2} z, \end{aligned}$$

por lo tanto $w \in \overline{E_3}$.

Por último,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} B^{3n} z = z + \sum_{n=2}^{\infty} B^{3n} z \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} B^{3k+1} z = z + B^3 \sum_{n=1}^{\infty} B^{k+1} z, \end{aligned}$$

por lo tanto $w \in \overline{E_2}$.

Entonces $w \in \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$.

■

Lema 5.15. $\overline{E}$ *es conexo.*

Demostración. Como $\overline{E}$ es compacto, basta ver que el conjunto está bien conectado. Para todo $(k_1, \ldots, k_m), k_i \in \{1, 2, 3\}$ denotamos por $\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$ la cerradura del conjunto $\Omega(k_1, \ldots, k_m)$. Entonces

$$\begin{aligned} &\overline{E}(k_1, \ldots, k_m, 1) = B\overline{E}(k_1, \ldots, k_m), \\ &\overline{E}(k_1, \ldots, k_m, 2) = z + B^2\overline{E}(k_1, \ldots, k_m) \text{ y} \\ &\overline{E}(k_1, \ldots, k_m, 3) = z + B^2 z + B^3\overline{E}(k_1, \ldots, k_m). \end{aligned}$$

Donde el diámetro de $\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$ es $\xi^{k_1 + \ldots + k_m/2}$ y

$$\lim_{n \to \infty} \xi^{k_1 + \ldots + k_m/2} = 0.$$

Si suponemos que $w(1) = w(2) = w(3)$ y definimos por

$$\begin{aligned} &w(k_1, \ldots, k_m, 1) = Bw(k_1, \ldots, k_m), \\ &w(k_1, \ldots, k_m, 2) = z + B^2 w(k_1, \ldots, k_m) \text{ y} \\ &w(k_1, \ldots, k_m, 3) = z + Bz + B^3 w(k_1, \ldots, k_m). \end{aligned}$$

Veamos por inducción sobre m que $w(k_1, \ldots, k_m) \in \overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$.

Para $m = 1$, por la Proposición 5.2, $w \in \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}$.

Supongamos válido para m que $w(k_1, \ldots, k_m) \in \overline{E}$. Si $k_{m+1} = 1$ entonces

$$w(k_1, \ldots, k_m, 1) = Bw(k_1, \ldots, k_m),$$

donde $w(k_1, \ldots, k_m) \in \overline{E}$, por hipótesis de inducción. Entonces

$$w(k_1, ..k_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z.$$

Por lo tanto,

$$w(k_1, \ldots, k_m, 1) = B \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z \in \overline{E_1}.$$

Si $k_{m+1} = 2$, entonces

$$\begin{aligned} w(k_1, \ldots, k_m, 2) &= z + Bz + B^2 w(k_1, \ldots, k_m) \\ &= z + B^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z = z + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^2(\varepsilon_n(N)) B^k z. \end{aligned}$$

Entonces $w(k_1, \ldots, k_m, 2) \in \overline{E_2}$.

Si $k_{m+1} = 3$, entonces

$$\begin{aligned} w(k_1, \ldots, k_m, 3) &= z + Bz + B^3 w(k_1, \ldots, k_m) \\ &= z + Bz + B^3 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z. \end{aligned}$$

Por lo tanto $w(k_1, \ldots, k_n, 3) \in \overline{E_3}$.

Ahora, por inducción sobre m podemos ver que

$$w(1, k_2, \ldots, k_m) = w(2, k_2, \ldots, k_m) = w(3, k_2, \ldots, k_m).$$

Para $m = 1$, por definición tenemos que

$$w(1) = w(2) = w(3).$$

Supongamos que

$$w(1, k_2, \ldots, k_m) = w(2, k_2, \ldots, k_m) = w(3, k_2, \ldots, k_m).$$

Entonces, si $k_{m+1} = 1$

$$w(1, \ldots, k_m, 1) = Bw(1, \ldots, k_m) = Bw(2, \ldots, k_m) = w(2, \ldots, k_m, 1).$$

Análogamente

$$w(1, \ldots, k_m, 1) = Bw(1, \ldots, k_m) = Bw(3, \ldots, k_m) = w(3, \ldots, k_m, 1).$$

Por lo tanto

$$w(1, \ldots, k_m, 1) = w(2, \ldots, k_m, 1) = w(3, \ldots, k_m, 1).$$

Si $k_{m+1} = 2$, entonces

$$w(1, \ldots, k_m, 2) = z + Bw(1, \ldots, k_m) = z + Bw(2, \ldots, k_m) = w(2, \ldots, k_m, 2).$$

Por otro lado,

$$w(3, \ldots, k_m, 2) = z + Bw(3, \ldots, k_m) = z + Bw(3, \ldots, k_m) = w(3, \ldots, k_m, 2).$$

Así pues,

$$w(1, \ldots, k_m, 2) = w(2, \ldots, k_m, 2) = w(3, \ldots, k_m, 2).$$

Finalmente, si $k_{m+1} = 3$, entonces

$$w(1, \ldots, k_m, 3) = z+Bz+B^3(1, \ldots, k_m) = z+Bz+B^3(2, \ldots, k_m) = w(2, \ldots, k_m, 3).$$

Esto implica que,

$$w(1, \ldots, k_m, 3) = z+Bz+B^3(1, \ldots, k_m) = z+Bz+B^3(3, \ldots, k_m) = w(3, \ldots, k_m, 3).$$

Por lo tanto

$$w(1, \ldots, k_m, 3) = w(2, \ldots, k_m, 3) = w(3, \ldots, k_m, 3).$$

Esto es

$$w(k_1, \ldots, k_m) \in \bigcap_{j \in \{1,2,3\}} \overline{E}(j, k_2, \ldots, k_m).$$

Por otra parte, sea $x, y \in \overline{E}$. Demostremos por inducción sobre m que existe una cadena $(x_1, \ldots, x_N)$ de elementos en $\overline{E}$ tal que

I) $x_1 = x, x_N = y$,

II) Para toda $j = 1, \ldots, N-1$ existe $(k_1, \ldots, k_m)$ con $x_j, x_{j+1} \in \overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$.

Veamos que es válido para $m = 1$.
Consideramos $x, y \in \overline{E}$. Entonces la cadena (x, y) es tal que

$$x = x_1, y = x_2 \in \overline{E}.$$

Supongamos válido para m y demostremos para $m+1$. Sea $(k_1, \ldots, k_N)$ con las propiedades $I), II)$ y $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. Entonces

$$x_j, x_{j+1} \text{ pertenece al mismo conjunto } \overline{E}(k_1, \ldots, k_m).$$

Pero

$$\overline{E}(k_1, \ldots, k_m) = \bigcup_{k \in \{1,2,3\}} \overline{E}(k, k_1, \ldots, k_m),$$

donde el punto $w(k, k_1, \ldots, k_m)$ es un punto en común en $\bigcup_{k \in \{1,2,3\}} \overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$.
Por lo tanto dos puntos cualesquiera de $\overline{E}$ están juntos por una cadena $(x_1, \ldots, x_N)$ tal que:

$$\forall j = 1, \ldots, N-1, \quad ||x_{j+1} - x_j|| < \xi^{\frac{m}{2}} \operatorname{diam}(\overline{E}).$$

Esto implica que $\overline{E}$ es conexo.

■

Teorema 5.2 (Curva de Jordan)**.** *Toda curva simple del plano divide en dos componentes convexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada y la otra no está acotada y se llama exterior.*

Lema 5.16. Ω *es simplemente conexa.*

Demostración. Sea Γ una curva de Jordan simple contenida en Ω. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ tiene dos componentes conexas, D el componente acotado (interior de Γ) y D' el exterior. Basta demostrar que $D \subset \Omega$.
Por otra parte, la imágen $B\Gamma$ por la matriz B está contenido en

$$B\Omega = \Omega_1.$$

Como Γ es compacto, entonces hay un número real $r > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \inf_{y \in B\Gamma} ||x - y|| < r.$$

Entonces $x \in \Omega_1$.
Sea BD y BD' las imágenes de D y D' por la matriz B. Entonces BD y BD' son las componentes conexas de $\mathrm{R}^2 \setminus B\Gamma$.
Sea $x_0 \in BD \cap \overline{E}$ y veamos que $BD \cap \overline{E} \subset B\overline{E}$. Entonces $x_0 \in \{E_1, E_2, E_3\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 \in E_1$, entonces $\overline{E_2}$ ó $\overline{E_3}$ tiene un punto en BD, sea $\overline{E}_k$ este conjunto. Entonces $\overline{E}_k$ es conexo como imágen continua de $\overline{E}$, el cual es conexo. Por otro lado, $\overline{E}_k$ no tiene ningún punto en común con Ω_1 de lo contrario $\Omega_k \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. En particular $\overline{E}_k$ no tiene ningún punto de las x que satisfacien que

$$\inf_{y \in B\Gamma} ||x - y|| < r.$$

Esto implica que $\overline{E}_k$ está totalmente contenido en BD. Pero w es un punto común en $\overline{E_1}, \overline{E_2}, \overline{E_3}$, entonces $x \in BD$. Por lo tanto $\overline{E_2}, \overline{E_3}$ tienen un punto en BD, lo que implica que $\overline{E_2}$ y $\overline{E_3}$ están contenidos en BD. Así pues,

$$BD' \cap \overline{E} \subset B\overline{E}.$$

Sea $x_1 \in \overline{E}$ tal que:

$$||x_1|| = \sup_{x \in \overline{E}} ||x||$$

y $x_1 \in BD'$, entonces x_1 debería estar en $B\overline{E}$. El punto $B^{-1}x_1 \in \overline{E}$ lo cual es imposible pues:

$$||B^{-1}x_1|| = \xi^{\frac{-1}{2}} ||x_1|| > ||x_1||.$$

Entonces tenemos que $BD \cap \overline{E} \subset B\overline{E}$, lo que implicaria que

$$BD \cap \overline{E} = B\overline{E}.$$

Reemplazando Γ por la curva $B^{n-1}\Gamma$ la cual es una curva de Jordan simple contenida en Ω. Veamos que $\forall n \geq 1$

$$B^n D \cap \overline{E} = B^n D \cap B\overline{E}.$$

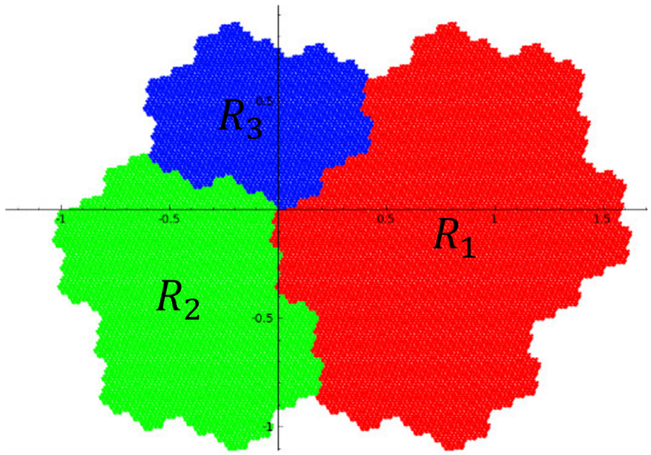

Figura 5.1: Fractal de Rauzy

Es claro para $n = 0$, y suponiendo válido para n entonces:

$$\begin{aligned} B^{n+1}D \cap \overline{E} &= B^{n+1}D \cap B\overline{E} \\ &= B(B^n D \cap B^n \overline{E}) = B^{n+1}D \cap B^{n+1}\overline{E}. \end{aligned}$$

Supongamos que existe $x \in D$ que no está en $\overline{E}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} B^n x = 0,$$

y como $\overline{0} \in \overline{E}$, existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $B^n x \in B^n \overline{E}$, esto es, $x \in B^n \cap \overline{E}$. Es decir, $x \in \overline{E}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $D \subset \overline{E}$.
Pero ningún punto de la frontera de $\overline{E}$ puede estar en D ya que D es abierto y existirían puntos de D que no están en $\overline{E}$. Por lo tanto

$$D \subset \Omega.$$

Esto implica que el conjunto $\{E_1, E_2, E_3\}$ es una partición de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ como se muestra en la Figura 5.1. ■

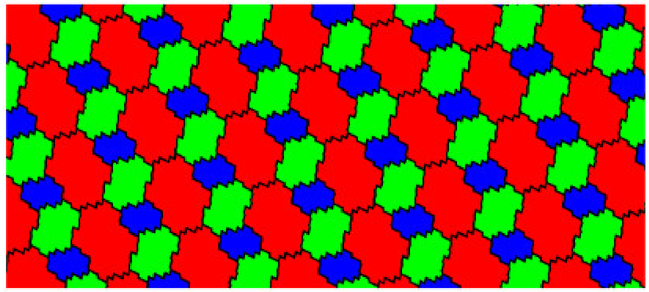

Figura 5.2: $\mathcal{R}$ mod $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$

5.2. Isomorfismo

Consideramos el **fractal de Rauzy** definido como

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \forall i \geq 3, \varepsilon_i \in \{0,1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0 \right\}. \tag{5.26}$$

Teorema 5.3. *El conjunto $\mathcal{R}$ es una partición de $\mathbb{C}$ mod $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.*

Demostración. Sabemos que E es partición disjunta de $\mathbb{R}^2$ mod $\mathbb{Z}^2$ y $\mathcal{R}$ es la imágen de E por la función S dada en la Definición 4.19. Por lo tanto, es suficiente demostrar que $S(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Pero

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = B^{-2} z = S^{-1}(\alpha) \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-3} z = S^{-1}(1).$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es partición de $\mathbb{C}$ mod $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, como se muestra en la Figura 5.2 ■

Definición 5.8. Sabemos que para toda $x \in X_{\phi_t}$, $x = \phi_t^n(u)$. Entonces existe un número complejo de la forma

$$n = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i g(i) \text{ ó } n = \sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i \alpha^i.$$

Sea $f : X_{\phi_t} \to \mathcal{R}$ donde

$$x \to \left(n_i = \sum_{k=3}^{N} \varepsilon_{k_i} \alpha^k \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

y (n_i) es una sucesión de enteros tal que $\sigma^{n_i}(u)$ converge a x cuando i tiende a infinito.
Es importante observar que $f(\sigma_i^n(u))$ converge a $\mathcal{R}$ por la contrucción del conjunto y, por la misma razón, es continua.

Proposición 5.5. *Para toda $x \in X_{\phi_t}$ se tiene que $f(\Phi(x)) = \alpha f(x)$ y*

$$f(\sigma(x)) = \begin{cases} f(x) + \alpha^3 & si\ x \in [1] \\ f(x) + \alpha + \alpha^2 & si\ x \in [2] \\ f(x) + \alpha^2 & si\ x \in [3] \end{cases} \tag{5.27}$$

Demostración. Dado que f es continua en X_{ϕ_t} entonces f es densa en X_{ϕ_t} y por tanto es suficiente demostrar para un punto en la órbita de u. Por la Observación 4.7 sabemos que $u = \phi_t^{n_k}(1)\dots\phi_t^{n_1}(1)\sigma^n(u)$ con $n = \sum_{i=3}^{k} \varepsilon_i \alpha^i$. Pero

$$\phi_t(u) = u = \phi_t^{n_k+1}(1)\dots\phi_t^{n_1+1}(1)\phi_t(\sigma^n(u)).$$

Por lo tanto $f(\phi_t(\sigma^n(u))) = \alpha f(\sigma^n(u))$. Por otra parte, podemos expresar a

$$f(\sigma^n(u)) = \sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i g(N) = n\alpha^2 + (p_n + q_n)\alpha + p_n.$$

Donde

$$n = \sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i g(i), \quad p_n + \sum_{i=3}^{N} \varepsilon g(i-1) \text{ y } q_n = \sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i g(i-2).$$

Analizaremos los 3 casos posibles

1. Si $\sigma^n(u) \in [1]$, entonces $n = \sum_{i=4}^{N} \varepsilon_i g(i)$. Donde $n+1 = g(0) + \sum_{i=4}^{N} \varepsilon_i g(i)$.
   - Si $\varepsilon_4\varepsilon_5 = 0$, entonces $p_{n=1} = p_n + 1$ y $q_{n+1} = q_n$.
   - Si $\varepsilon_4\varepsilon_5 = 1$, entonces exite un entero $k \geq 2$ tal que

     $$n = \sum_{i=2}^{k} \varepsilon_i \left(g(3i-2) + g(3i-1)\right) + \sum_{i=3k+1}^{N} \varepsilon_i g(i) \quad \text{con} \quad \varepsilon_{3k+1}\varepsilon_{3k+2} = 0.$$

     Donde $n+1 = g(3k) + \sum_{i=3k+1}^{n} \varepsilon_i g(i)$ y $p_{n+1} = p_n$, $q_{n+1} = q_n$. Por lo tanto $f(\sigma^{n+1}(u)) = f(\sigma^n(u)) + \alpha^3$.
2. Si $\sigma^n(u) \in [2]$, entonces $p_{n+1} = p_n$ y $q_{n+1} = q_n + 1$ y por tanto

   $$f(\sigma^{n+1}(u)) = f(\sigma^n(u)) + \alpha + \alpha^2.$$
3. Si $\sigma^n(u) \in [3]$, entonces $p_{n+1} = p_n$ y $q_{n+1} = q_n$. Por consecuencia

   $$f(\sigma^{n+1}(u)) = f(\sigma^n(u)) + \alpha^2.$$

■

Definición 5.9. Sea R_α la rotación sobre $\mathcal{R}$ definida por $R_\alpha(z) = z + \alpha^2 \bmod (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha)$. Entonces

$$R_\alpha(z) = \begin{cases} z + \alpha^3 & \text{si } z \in \text{int}(\mathcal{R}_1) \\ z + \alpha + \alpha^2 & \text{si } z \in \text{int}(\mathcal{R}_2) \\ z + \alpha^2 & \text{si } z \in \text{int}(\mathcal{R}_3) \end{cases} \tag{5.28}$$

Observación 5.8. Para todo $x \in X_{\phi_t}$, tal que $f(x) \in \bigcup_{i=1,2,3} \mathcal{R}_i$, se tiene que

$$f(\sigma(x)) = R_\alpha \circ f(x).$$

La función f no puede ser inyectiva, de lo contrario f sería un isomorfismo topológico. Lo cual es imposible pues X_{ϕ_t} es un conjunto compacto totalmente disconexo y $\mathcal{R}$ es conexo (Lema 5.15). Veamos en qué conjunto cumple la inyectividad.

Observación 5.9. El punto fijo $u = u_1 \dots u_n \dots$ satisface que para toda $n \in \mathbb{Z}$ y toda palabra $V \in \mathcal{L}_n(u)$ esta puede prolongarse hacia la derecha de manera única excepto en una sola palabra que es 3-prolongable a la derecha.

Lema 5.17. *[6] Sea $u_1 \dots u_n$ un elemento de $\mathcal{L}_n(u)$ 3-prolongable hacia la derecha. Entonces existe $w_1 \dots w_s \in \mathcal{L}_s(u)$ 3-prolongable a la derecha tal que*

$$[u_1, \dots, u_n i] = G_{v_1}([w_1 \dots w_s x_i])$$

donde $G_0 = \phi_t$, $G_1 = \sigma(\phi_t^2)$ y $G_2 = \sigma\phi_t\sigma\phi_t^2$ con $i \in \{1,2,3\}$ y las x_i son 3 elementos distintos de $\{1,2,3\}$.
Ahora, considerando las funciones de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha z \\ f_2 &= \alpha^3 + \alpha^2 z \\ f_3 &= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z, \end{aligned}$$

se tiene que $f_i(\mathcal{R}) = f([i]) \quad \forall i \in \{1,2,3\}$. En general, usando la Proposición 4.15 y el Lema 4.18 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.3. *Sea $v_1 \dots v_n$ un elemento de $\mathcal{L}_n(u)$. Entonces existen $i_1, \dots, i_r$ elementos de $\{1,2,3\}$ con $r < n$ tal que*

$$f([v_1 \dots v_n]) f_{i_1} \circ \dots f_{i_r}(\mathcal{R}).$$

Si, además, el conjunto es 3-prolonglable a la derecha, entonces para toda $j \in \{1,2,3\}$

$$f([v_1 \dots v_n]) = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_r} \circ f_{n_j}(\mathcal{R}),$$

donde $n_j \in \{1,2,3\}$ y $n_j \neq n_i$ si $i \neq j$.

Definición 5.10. Sea z un número complejo. Decimos que z es un $\alpha-$desarrollo de $\mathcal{R}$ si existe una sucesión $(a_i)_{i \geq 3} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Observación 5.10. Si denotamos a $\mathcal{D}$ como el conjunto de todo los puntos que pertenecen a $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j$ con $i \neq j$ el cual tiene medida cero. Los puntos que se encuentren en $\mathcal{D} \cap \operatorname{int}(\mathcal{R})$ tienen a lo mas dos $\alpha-$desarrollos distintos en $\mathcal{R}$ mientras que los elementos que se encuentren en $Fr(\mathcal{R})$ no necesariamente tienen dos $\alpha-$desarrollos distintos en $\mathcal{R}$. Por ejemplo, si consideramos a w definido en la Proposición 4.13 se tiene que

$$w \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3.$$

Proposición 5.6. *La función f es inyectiva excepto en la imágen recíproca de los números complejos que tienen al menos dos $\alpha-$desarrollos en $\mathcal{R}$.*

Demostración. Sea V, W elementos de X_{ϕ_t} tal que $f(V) = f(W)$ y S el prefijo más grande que tiene en común Vy W. Entonces se tiene que

$$f(V) \in f([Sa]) \cap f([Sb])$$

donde $a, b \in \{1, 2, 3\}$ y $a \neq b$. Así pues, por el Corolario 4.6, $f(V)$ tiene al menos dos $\alpha-$desarrollos hacia la derecha distintos en $\mathcal{R}$.
De manera análoga, si z es un complejo que tiene al menos 2 $\alpha-$desarrollos en $\mathcal{R}$, entonces existe $i_1, \ldots, i_r$, n_1 y $n_2 \in \{1, 2, 3\}$ con $n_1 \neq n_2$ tales que

$$z \in f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_r} \cap f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{n_2}(\mathcal{R}),$$

o incluso

$$z \in f(G_{i_1} \circ \ldots \circ G_{i_r} \circ G_{n_1}(X_{\phi_t})) \cap f(G_{i_1} \circ \ldots \circ G_{i_r} \circ G_{n_2}(\phi_t)),$$

donde las G_i son las tres aplicaciones definifas en el Lema 4.18. Esto implica que existen V, W dos elementos distintos de X_{ϕ_t} tales que

$$f(V) = f(W) = z.$$

■

Proposición 5.7. *La imágen de $\mathcal{D}$ por f es de medida cero.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $\mu(f^{-1}(\mathcal{D} \cap \mathcal{R})) = 0$ donde m es la medida invariante definida en X_{ϕ_t}.
Veamos que para toda $B \subset \mathcal{R}$ existe una $k > 0$ tal que

$$\mu(f^{-1}(\mathcal{D} \cap \mathcal{R})) = k\lambda(B),$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$. Para ello, por el Teorema 1.3 basta demostrar sobre los cilindros $[1], [2], [3]$ que forman una semiálgebra. Dado que ϕ_t es primitiva el vector

$$\begin{pmatrix} \mu([1]) \\ \mu([2]) \\ \mu([3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

Como el valor propio dominante asociado a la matriz M_{ϕ_t} es λ, entonces

$$\mu([i]) = \frac{1}{\lambda}^{i+1} \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Pero, $\frac{1}{\xi} = |\alpha^2|$ y para toda $i \in \{1, 2, 3\}$ $f([i]) = \mathcal{R}_i$. Por lo tanto,

$$\lambda(f([i])) = k\mu([i]) \text{ donde } k = \lambda(\mathcal{R}).$$

Demostremos ahora, por inducción sobre n que para toda palabra $v_1 \dots v_n \in \mathcal{L}_n(u)$,

$$\lambda(f[v_1 \dots v_n]) = k\mu([v_1 \dots v_n]).$$

Supongamos válido para n y que $[v_1 \dots v_{n+1}] \neq [v_1 \dots v_n]$. Por el Lema 4.18, tenemos 3 casos a estudiar.

Si $[v_1 \dots v_{n+1}] = \phi_t([w_1..w_s])$. Entonces

$$\mu([v_1 \dots v_{n+1}]) = \frac{1}{\xi}\mu([w_1 \dots w_s]),$$

de donde $\mu([v_1 \dots v_{n+1}]) = \frac{|\alpha^2|}{k}\lambda(f[w_1 \dots w_s]) = \frac{1}{k}\lambda(f([v_1 \dots v_{n+1}]))$.
De manera análoga, para los casos

$$[v_1 \dots v_{n+1}] = G_{v_1}([w_1 \dots w_s]),\ G_{v_1} = \sigma\phi_t^2 \text{ o } \sigma\phi_t\sigma\phi_t^2.$$

■

Denotaremos por p a la proyección de $\mathcal{R}$ en $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \equiv \mathbb{T}^2$ y a R_α a la rotación por el vector α en el toro $\mathbb{T}^2$.

Teorema 5.4. *La función $p \circ f$ es un isomorfismo métrico entre el sistema dinámico medible $(X_{\phi_t}, \mu, \sigma)$ y $(\mathbb{T}^2, R_\alpha, \lambda)$.*

Demostración. Dado que

$$\mu(X_{\phi_t} \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) = 1 = \lambda(\mathcal{R} \setminus \mathcal{D})$$

Entonces $p \circ f$ es una transformación invertible que preserva la medida y por la Observación 4.12

$$p \circ f \circ \sigma(x) = R_\alpha \circ p \circ \alpha(x).$$

■

Corolario 5.4. $(X_{\phi_t}, \mu, \sigma)$ *y* $(\mathbb{T}^2, R_\alpha, \lambda)$ *son isomorfos.*

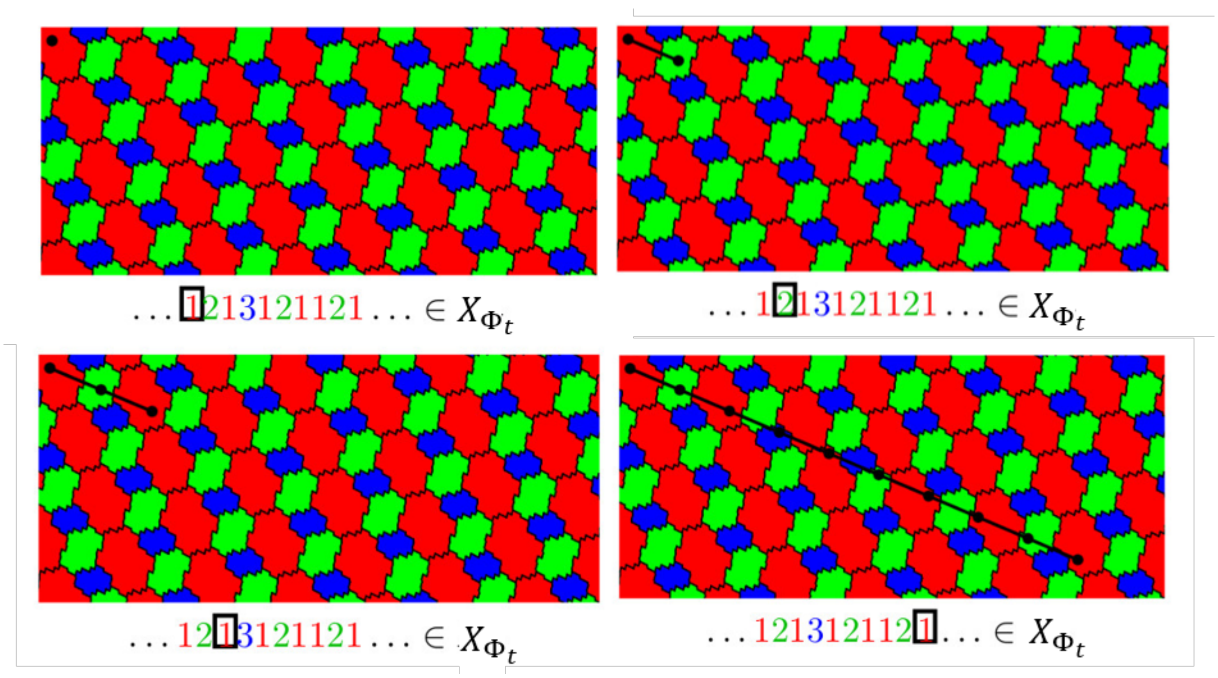

Figura 5.3: Rotación R_α en $\mathcal{R}$

Bibliografía

[1] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[2] Fogg, N., Berthé, V., Ferenczi, S., Mauduit, C., and Siegel, A. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[3] Folland, G. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1994.

[4] Grabinsky, G. *Teoría de la medida*. Temas selectos de matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2014.

[5] Kenyon, R. Pseudo-anosov mappings and toral automorphisms, arxiv: 2005.13038.

[6] Messaoudi, A. Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de rauzy. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 10*, 1 (1998), 135–162.

[7] Michel, P. Stricte ergodicite d'ensembles minimaux de substitution. *Théorie Ergodique. Lecture Notes in Mathematics 532*, 1 (1976), 189–201.

[8] Queffélec, M. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[9] Rauzy, G. Nombres algébriques et substitutions. *Bulletin de la Société Mathématique de France 110* (1982), 147–178.

[10] Rincon, L. *Introducción a la probabilidad*. Temas selectos de matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2014.

[11] S., A., M., B., Berthé V., L. J., and A, S. On the pisot substitution conjecture. *Mathematics of Aperiodic Order.Progress in Mathematics 309* (2015), 33–72.

[12] SOLOMYAK, B. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory and Dynamical Systems 17*, 3 (1997), 695–738.

[13] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.