



Universidad Nacional Autónoma de México

---

---

Facultad de Ciencias

Algunos aspectos cuaterniónicos de la  
Mecánica Clásica

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

José Miguel Raygoza Serment

TUTOR

Dr. Fermín Alberto Viniegra Heberlein



Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Marzo , 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicatoria ...*

Para mi madre, familia, amigos y todas las demás personas que me han apoyado y ayudado a convertirme en lo que hoy soy.

# Agradecimientos

Quiero agradecer a toda mi familia, en especial a mi madre, por haber cuidado y dedicado tanto tiempo a mi persona desde el día de mi nacimiento. Quiero agradecer a mis amigos por llenar de momentos alegres y divertidos a lo largo de mi vida. Agradezco también a mi asesor el Dr. Fermín Alberto Viniegra Heberlein por haber dirigido mi trabajo con la mejor disposición posible y por las enseñanzas y consejos durante la realización del mismo.

También estoy agradecido con la UNAM y la Facultad de Ciencias por haberme brindado todos los conocimientos para mi formación, darme un espacio para estudiar y aprender de este maravilloso campo, y sobretodo por todas las experiencias que tuve en sus instalaciones.

# Resumen

En esta tesis se hizo un estudio del Álgebra Geométrica y su aplicación en la rotación de un cuerpo rígido, así como una formulación de los principios básicos de la Mecánica Clásica inspirándose en las ideas del físico *David Orlin Hestenes* quien es el principal expositor de esta formulación geométrica, y su aplicación para dar un lenguaje unificado a la física, y en particular a la mecánica Newtoniana.

El trabajo comienza con una introducción al tema, para luego dar un resumen del Álgebra vectorial y la forma moderna de entenderlos. Luego en el capítulo 3 se hace una introducción al Álgebra geométrica y se hace una caracterización geométrica de los espacios Euclídeos a partir de los cuales se definen unos objetos llamados cuaterniones que describen escalares y vectores en conjunto así como las rotaciones que sufre un cuerpo. Después en el capítulo 4 se aborda el cuerpo rígido, y el pivoteo que sufre el mismo descrito mediante las matrices de rotación en 3 dimensiones. Partiendo de ello, se describe el pivoteo del mismo desde la perspectiva de los cuaterniones. Finalmente en el capítulo 5 se plantea una formulación a la mecánica con los cuaterniones, se enuncian las cantidades cinemáticas, las Leyes de Newton y la conservación de la energía con este nuevo lenguaje y se discuten los resultados obtenidos.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Vectores.</b>	<b>5</b>
<b>3. Álgebra Geométrica</b>	<b>13</b>
3.1. Los productos internos y externos .....	13
3.1.1. El producto externo y los N-vectores .....	13
3.1.2. El producto geométrico .....	18
3.2. Axiomas del Álgebra Geométrica .....	20
3.3. El álgebra de los espacios Euclídeos .....	25
3.3.1. Espacio Euclídeo 1D.....	25
3.3.2. Espacio Euclídeo 2D.....	26
3.3.3. Espacio Euclídeo 3D.....	32
<b>4. Rotación de un cuerpo rígido</b>	<b>43</b>
4.1. El cuerpo rígido. ....	43
4.2. Los ángulos de Euler.....	51
4.3. La fórmula de rotación de Olinde Rodrigues.....	58
4.4. El cuaternión de Pivoteo.....	63
4.5. Cinemática del cuerpo rígido .....	70
<b>5. Mecánica cuaterniónica</b>	<b>75</b>
5.1. Conceptos básicos de la Mecánica en términos cuaterniónicos .....	76
5.2. Leyes de Newton .....	77

5.2.1. Primera Ley de Newton .....	77
5.2.2. Segunda Ley de Newton.....	77
5.2.3. Tercera Ley de Newton .....	80
5.3. La Ley de Conservación de la Energía .....	86
5.3.1. Para un solo cuerpo.....	86
5.3.2. Para un sistema de partículas.....	91
<b>6. Conclusiones y Resultados</b>	<b>94</b>

# Índice de figuras

2.1. Vectores proyección, utilizados para definir al producto escalar. . . . .	6
2.2. Producto vectorial de dos vectores. . . . .	9
2.3. Comparación de los sistemas coordenados izquierdo y derecho. ....	11
3.1. Bivector como un plano dirigido. ....	14
3.2. Las dos orientaciones posibles de un bivector. ....	14
3.3. Trivector como un paralelepípedo orientado. ....	18
3.4. El bivector $i$ como unidad de área dirigida.....	28
3.5. Plano $i$ de vectores y la propiedad de $i$ como unidad de rotación. ....	29
3.6. Plano $i$ espinorial. ....	31
3.7. Elementos geométricos de $G_3$ .....	33
3.8. Comparación del producto vectorial y producto exterior.....	36
3.9. Orientación heredada por los bivectores y los cuaterniones. ....	39
4.1. Sistemas coordenados fijos en el espacio $(x, y, z)$ y en el cuerpo $(X, Y, Z)$ .....	44
4.2. Teorema de Chasles. ....	45
4.3. Teorema de Euler. ....	46
4.4. Rotación en un espacio Euclídeo $E^3$ .....	48
4.5. Las 3 rotaciones propuestas por Euler para corresponder el sistema fijo al cuerpo con el sistema fijo en el espacio.....	52
4.6. Primera rotación. ....	53
4.7. Segunda rotación.....	54
4.8. Tercera rotación.....	55



4.9. Esquema auxiliar para la construcción de la fórmula de Olinde Rodrigues .	58
4.10. Plano $O^tPP^t$ .....	59

# Capítulo 1

## Introducción

Desde su desarrollo moderno de manera independiente por J.W.Gibbs y O. Heavyside [1] , los escalares y vectores han sido ampliamente utilizados para describir un Espacio Euclídeo. Este espacio es el que ha sido utilizado en varias disciplinas de la física teórica, como en la mecánica clásica, electromagnetismo, mecánica de fluidos, relatividad, entre muchos otros campos de estudio. Entre las cantidades que se usan para hacer una descripción en este espacio se encuentran los escalares, aquellas a las que se les asigna un número tal que es medible, como lo es la masa, distancia, energía, rapidez, carga o la temperatura. También se encuentran los vectores, que son cantidades dirigidas, es decir tienen tamaño dirección y sentido las cuales también son cuantificables como la posición, momento, fuerza, campo eléctrico, entre otros.

Estas cantidades poseen algo en común y es que tienen un carácter universal, es decir que dados dos observadores existirá una regla de correspondencia que les permitirá comparar sus mediciones a pesar de que estos describan a estos objetos de formas completamente distintas. Sin embargo en estas formulaciones uno se encuentra en la necesidad de definir ciertas cantidades que se comportan como escalares y vectores pero no cumplen este carácter universal ya que se pueden comportar y medir diferente para dos observadores distintos, lo que les quita el carácter invariante. Como ejemplo de cantidades que se miden como escalares pero en realidad no lo son se encuentran el volumen, flujo magnético, helicidad o la densidad de masa. Y como ejemplo de

cantidades asignadas como vectores pero no tienen carácter universal son el momento angular, la torca, el campo magnético, la normal a una superficie o la velocidad angular.

En la práctica para trabajar con los vectores de forma más eficiente se utilizan los sistemas coordenados que consisten en formar una base de 3 vectores y describir a cualquier vector en términos de ésta. Sin embargo dos observadores no tienen porque tener el mismo sistema coordenado, entonces para comparar las mediciones de ambos sistemas, estos deben hacer una correspondencia entre sus sistemas de referencia mediante las transformaciones de coordenadas, como caso particular están las rotaciones, que permiten cambiar la dirección de los vectores base manteniendo la misma orientación, lo que se traduce en que ambos observadores utilizan la misma escala y orientación y los vectores observados solo difieren en la dirección relativa al sistema que mide cada uno. Sin embargo aquellas cantidades descritas por vectores y escalares que se transforman mediante una transformación afín y no preservan el carácter universal sufren un cambio de magnitud u orientación al cambiar de referencia, entre ellos los más relevantes son los pseudoescalares y pseudovectores que cambian de signo cuando la orientación de los 2 observadores no coincide. Es por ello que se ha hecho la convención de dar una orientación universal a los sistemas de referencia para evitar este cambio de signo al dar la compatibilidad de los mismos. Se trata de la convención de un sistema coordenado derecho.

Por otro lado, el álgebra geométrica surge como un lenguaje matemático que además de incluir escalares y vectores, expande estos conceptos a números dirigidos de dimensiones más altas, como los bivectores que se entienden como segmentos de plano dirigidos, así como los trivectores que son segmentos de paralelepípedos orientados y así se puede ir generalizando hasta llegar a un  $N$ -vector como un número dirigido de  $N$  dimensiones. Todos estos objetos poseen las mismas cualidades que los vectores, es decir, poseen magnitud, dirección y sentido. Así, esta álgebra geométrica engloba todos estos entes, y en consecuencia a sus elementos se les conoce como multivectores,

que consisten en la suma de una parte escalar, vectorial, bivectorial y así sucesivamente hasta una parte  $N$ -vectorial como un segmento orientado de un  $N$ -polígono. Para el caso de un espacio de 3 dimensiones Euclídeo, su álgebra geométrica estará descrita por escalares, vectores, bivectores y trivectores. Este es el utilizado en la descripción de la naturaleza, pues el mundo en que se vive es un mundo con estas características, al menos en la descripción clásica de la misma.

Con este lenguaje se da una explicación geométrica de por qué aparecen los pseudoescalares y pseudovectores en las descripciones de ciertas cantidades de la naturaleza, pues se verá que se debe a que en realidad los pseudoescalares son cantidades relacionadas con los trivectores, los cuales cambian de signo dependiendo de que orientación se les asigne, y los pseudovectores son en realidad vectores perpendiculares a bivectores tal como es el caso del producto vectorial que se define como un vector perpendicular a los vectores que lo forman. Dicho con el lenguaje del álgebra geométrica el vector formado por el producto vectorial, es perpendicular al bivector generado por los mismo vectores que forman el producto y su sentido, al igual que con los pseudoescalares depende de la orientación que tenga el sistema utilizado. Entonces que los pseudoescalares y pseudovectores aparezcan no es más que una manifestación geométrica del espacio tridimensional de los trivectores y bivectores. Y no fue más que pura coincidencia que con estas cantidades haya sido posible una descripción completa de la naturaleza, y una forma de más que evidenciar que el mundo en el que se vive es en efecto tridimensional.

Debido a esto, es posible reducir el número de elementos del álgebra geométrica para describir el espacio tridimensional. A lo largo de los años se ha hecho mediante escalares y vectores únicamente. Pero uno puede en su lugar utilizar escalares y bivectores, D. Hestenes en su libro [2] llamó a la suma de un escalar y un bivector, un espinor. Pues los bivectores no solo pueden considerarse como planos dirigidos, sino como los generadores de las rotaciones, con el eje de rotación perpendicular al mismo. En consecuencia un espinor es la descripción de una rotación, representada por su

parte bivectorial y una dilatación representada por su parte escalar en un espacio de 2 o 3 dimensiones. Por lo tanto los espinores permiten caracterizar una rotación en una forma que es compatible con las matrices de rotación, donde se necesitan 2 espinores para describir cualquier rotación en el espacio. Sir. Rowan Hamilton fue el primero en formular una rotación mediante estas entidades, a los cuales él llamo cuaterniones. Estos han resultado en una descripción completa y más sencilla de la rotación de un cuerpo en el espacio en comparación a las matrices de rotación, debido a ello son frecuentemente utilizados en cálculos con computadora.

Finalmente, dado que se puede estructurar al espacio como un continuo de planos, es posible utilizar los cuaterniones como descripción alternativa a la descripción con vectores y escalares de la mecánica y lleva, no solo a los mismos resultados que la formulación vectorial sino a un resultado completamente nuevo que involucra al "espín", una cantidad física que permaneció sin una explicación teórica clásica utilizando solo vectores. Los cuaterniones revelan porque aparece esta cantidad en la naturaleza, y con un enfoque puramente clásico.

Así que el objetivo de este trabajo será recopilar y entender el Álgebra Geométrica, para después explicar de forma alternativa la rotación de un cuerpo rígido y finalmente estructurar un modelo de la Mecánica Clásica con los cuaterniones.

# Capítulo 2

## Vectores.

Un *vector* es un número dirigido representado por una flecha que posee 3 propiedades fundamentales que son *magnitud*, *dirección* y *sentido*. Además, el vector debe poseer un carácter invariante ante cambios de sistemas de referencia con los cuales se describen, pues la descripción de este objeto no tiene porque ser la misma para dos observadores.

Los vectores satisfacen el siguiente conjunto de axiomas para la suma [3, 4, 5].

Dados tres vectores  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{O} = \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{O}. \quad (2.4)$$

Se consideran adicionalmente a *los escalares* como entes matemáticos que se les asigna un número solamente, el cual debe ser independiente del marco de referencia descrito. Añadiendo éstos se postula que los vectores cumplan las siguientes reglas.

Sean  $\alpha, \beta, \gamma$  escalares:

$$(1)\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad (2.5)$$

$$(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v}) = (\beta\alpha)\mathbf{v} = \beta(\alpha\mathbf{v}), \quad (2.6)$$

$$\gamma\mathbf{v} = (\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}, \quad (2.7)$$

$$\alpha\mathbf{z} = \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}. \quad (2.8)$$

Para dar significado geométrico a las propiedades fundamentales del vector se introduce al *producto escalar o producto interno* mediante el *vector proyección de  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$* , el cual es un vector que tiene la misma dirección que  $\mathbf{w}$  y cuyo tamaño se logra haciendo la proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ .

$$\text{Proy}_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}, \quad (2.9)$$

donde  $\lambda$  es un escalar que indica que este vector es paralelo a  $\mathbf{w}$ . De forma análoga se puede definir la proyección de  $\mathbf{w}$  en  $\mathbf{v}$ . Estos vectores proyección se muestran en la Figura 2.1.

$$\text{Proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = \mu\mathbf{v}. \quad (2.10)$$

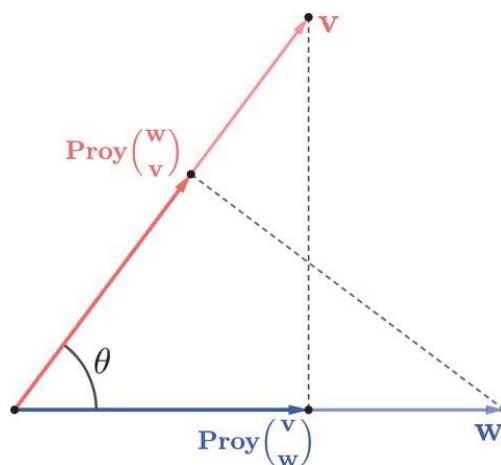


Figura 2.1. Vectores proyección, utilizados para definir al producto escalar.

En referencia a la figura se encuentra el valor de  $\lambda$  como:

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{w}\|} \cos(\theta), \quad (2.11)$$

y se define el producto escalar de forma que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \lambda \|\mathbf{w}\|^2. \quad (2.12)$$

Ocupando (2.11), esto puede reescribirse como:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos(\theta), \quad (2.13)$$

de manera que el vector proyección de  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  estará dado por:

$$\text{Proy}_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \hat{\mathbf{w}}. \quad (2.14)$$

donde la cantidad  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$  es un vector de magnitud  $\|\hat{\mathbf{w}}\| = 1$  llamado *vector unitario* o *versor*. Esta ecuación indica que, en efecto, el vector proyección de  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  es un vector en la dirección de  $\hat{\mathbf{w}}$  cuya magnitud depende del tamaño y la abertura de ambos vectores. Si en particular se toman los vectores iguales en el producto escalar (2.13) se obtiene:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2. \quad (2.15)$$

Si por otro lado se toman los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  como unitarios, se encuentra que el producto escalar de dos vectores unitarios será igual al coseno del ángulo entre ambos vectores:

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{w}} = \cos(\theta). \quad (2.16)$$

Por lo tanto se concluye que el producto escalar *da información de la orientación de dos vectores  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  como de la magnitud de los mismos*. Si en (2.16) se toma  $\theta = \pi/2$ , se tiene el criterio para decir cuando dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son ortogonales, en ese caso



el producto escalar da como resultado:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (2.17)$$

Con ayuda del producto escalar, los 3 conceptos fundamentales de un vector quedan bien establecidos y partiendo de lo anterior se define un *espacio Euclídeo* como aquel donde la norma de un vector  $\mathbf{v}$  está dada por  $\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$ . Al espacio Euclídeo de 3 dimensiones se le denota por  $E^3$ .

Otro producto que se estudia en un Espacio Euclídeo de tres dimensiones es el llamado *producto vectorial* o *producto cruz* entre dos vectores. El cual se define como aquel vector tal que cumple:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (2.18)$$

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}. \quad (2.20)$$

La definición del producto vectorial engloba las 3 características de un vector. La ecuación (2.18) define su dirección de manera que sea perpendicular a ambos vectores que entran en el producto, dado que el espacio es  $E^3$ , esta dirección está bien determinada, mientras que la ecuación (2.19) define su magnitud en términos de estos dos vectores y finalmente la ecuación (2.20) indica que el sentido de este vector cambia si el orden en que se multiplican se invierte. De acuerdo a esta definición, el sentido de este vector queda ambiguo al estar en términos de dos vectores. A este tipo de vectores, cuyo sentido depende del marco de referencia se les llama *vectores axiales* o *pseudovectores*. Este vector resultante se ilustra en la Figura 2.2.

Manipulando la ecuación (2.19) se puede verificar que la norma del producto

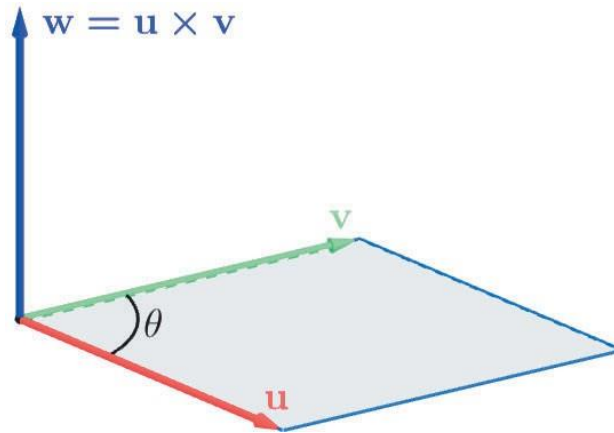


Figura 2.2. Producto vectorial de dos vectores.

vectorial puede escribirse como:

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| |\sin(\theta)|. \quad (2.21)$$

De las ecuaciones (2.19) y (2.21), se observa que la magnitud de este producto vectorial se anula si los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son paralelos y en consecuencia el producto vectorial se anula. En el caso de que no sean paralelos su magnitud será *geoméricamente igual al área del paralelogramo que forman ambos vectores*.

Se pueden combinar estos dos productos para formar dos tipos de triple producto. El primero es el triple producto escalar, que mide el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores. Se define ocupando las ecuaciones (2.13) y (2.21) como:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| |\cos(\theta)| |\sin(\varphi)|. \quad (2.22)$$

El triple producto escalar no es un auténtico escalar, ya que puede cambiar de signo dependiendo de como se describa. A las cantidades que cumplen esto se les llama *pseudoescalares*.

El segundo es el triple producto vectorial:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) := (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}. \quad (2.23)$$

Partiendo de estos conceptos es posible construir un sistema cartesiano partiendo de un solo vector unitario  $\boldsymbol{\sigma}_1$ . Para empezar, se define un segundo vector unitario  $\boldsymbol{\sigma}_2$  tal que  $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = 0$ . Luego se construye un tercer vector unitario como  $\boldsymbol{\sigma}_3 := \boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2$ . Por construcción, este conjunto de vectores es un conjunto ortonormal de vectores. Entonces los productos escalares dan como resultado  $\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_q = \delta_{pq}$ . Donde se define el símbolo  $\delta_{pq}$  llamada *la Delta de Kronecker* como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j, \end{cases} \quad (2.24)$$

y de acuerdo al álgebra lineal todo vector se puede escribir como [3, 4, 5]:

$$\mathbf{r} = x_1\boldsymbol{\sigma}_1 + x_2\boldsymbol{\sigma}_2 + x_3\boldsymbol{\sigma}_3, \quad (2.25)$$

donde sus componentes están dadas por:

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j = x_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.26)$$

sin embargo existen dos posibles orientaciones para el sistema de vectores. Nótese que por definición  $\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2$ . Si se hace producto cruz de  $\boldsymbol{\sigma}_3$  con  $\boldsymbol{\sigma}_1$  se verifica de inmediato:  $\boldsymbol{\sigma}_3 \times \boldsymbol{\sigma}_1 = \pm\boldsymbol{\sigma}_2$ . El símbolo  $\pm$  aparece porque a priori, el sentido de  $\boldsymbol{\sigma}_3$  no está bien indicado. Para resolver esto se utilizará la convención de definir el signo  $+$  de forma que corresponda a un Sistema Coordinado Derecho, donde el sentido del vector está determinado por la "regla de la mano derecha"[3, 4]. El signo  $-$  corresponderá a un sistema Coordinado Izquierdo, donde el sentido del mismo está dado por la "regla de la mano izquierda". Esto se describe en la Figura 2.3.

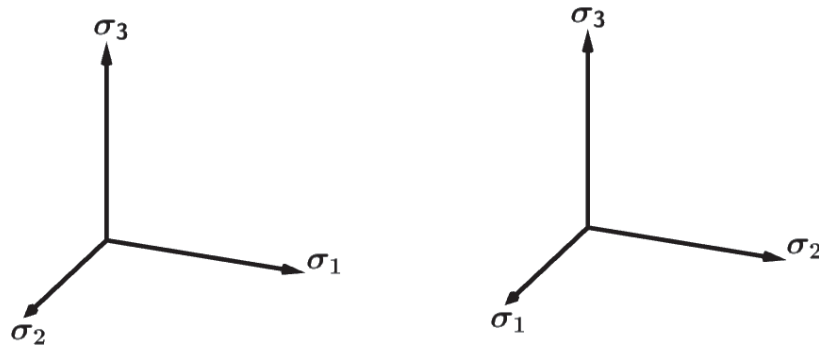


Figura 2.3. Comparación de los sistemas coordenados izquierdo y derecho.

Para evitar ambigüedad en el sentido del vector, se utiliza la convención de la "regla de la mano derecha", donde los vectores unitarios tienen las expresiones:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \times \sigma_3, \quad (2.27)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 \times \sigma_1, \quad (2.28)$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 \times \sigma_2, \quad (2.29)$$

y además se cumple:

$$\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \times \sigma_3) = \sigma_2 \cdot (\sigma_3 \times \sigma_1) = \sigma_3 \cdot (\sigma_1 \times \sigma_2) = 1. \quad (2.30)$$

Esto quiere decir que el volumen formado por estos 3 vectores unitarios es igual a 1. Este resultado se resume en el llamado *Símbolo de Levi-Civita* definido por:

$$E_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si al menos dos índices se repiten,} \\ 1 & \text{si } (i, j, k) = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = \{(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}, \end{cases} \quad (2.31)$$

el cual permite escribir de forma compacta el triple producto escalar de los vectores

unitarios, así como el producto vectorial:

$$\boldsymbol{\sigma}_p \cdot (\boldsymbol{\sigma}_q \times \boldsymbol{\sigma}_r) = E_{pqr}, \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p \times \boldsymbol{\sigma}_q = \sum_{r=1}^3 E_{pqr} \boldsymbol{\sigma}_r. \quad (2.33)$$

# Capítulo 3

## Álgebra Geométrica

### 3.1. Los productos internos y externos

#### 3.1.1. El producto externo y los N-vectores

En esta sección se generaliza el concepto de un escalar y vector partiendo de que el primero es un número sin dirección alguna y el segundo es un número dirigido en una dirección, lo siguiente que se pregunta uno es ¿Se puede formar un número dirigido en dos, tres, cuatro y así sucesivamente hasta llegar a N direcciones arbitrarias? Esto es lo que da lugar al concepto de un multivector del Álgebra Geométrica.

En el capítulo 1 se vio que el producto interno *permite describir las direcciones relativas entre vectores*, y *aparecen de forma natural los conceptos de ángulo y tamaño de un vector*. Sin embargo el producto interno falla en que *no describe el hecho geométrico que un par de líneas no paralelas determinan un plano geométrico*. Es de ahí que se tiene la necesidad de formar un nuevo producto que describa al plano que forman dos vectores. A este producto se le llama *producto externo o producto cuña*.

#### **Bivectores**

Así como un vector se puede interpretar como un número dirigido paralelo a una línea recta, un *bivector* es un número dirigido en dos dimensiones formado por los

lados de un paralelogramo descritos por un par de vectores (Figura 3.1).

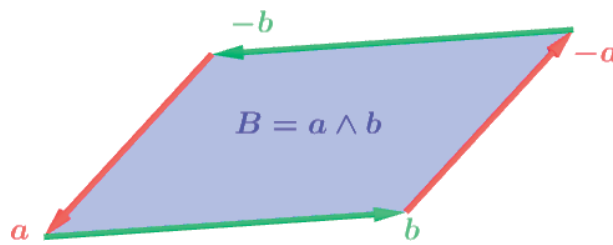


Figura 3.1. Bivector como un plano dirigido.

Así, como un vector posee magnitud, dirección y sentido. Un bivector también posee estas cualidades, su dirección es la del plano dirigido, heredado de la dirección de los dos vectores no paralelos. La orientación del bivector se asigna al sentido en el que se recorre el paralelogramo formado, esta puede ser antihoraria, u horaria que se toman por positiva y negativa respectivamente. Ver Figura 3.2.

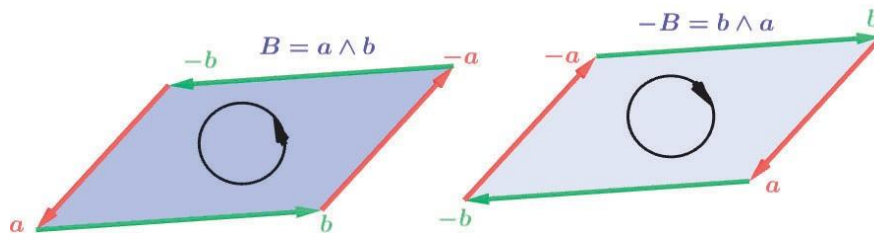


Figura 3.2. Las dos orientaciones posibles de un bivector.

Todas las propiedades de un bivector se describen por el *producto externo o producto cuña* de vectores. En esta sección los vectores se denotan siempre por letras minúsculas y los bivectores por letras mayúsculas:

$$\mathbf{B} := \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \tag{3.1}$$

Así un bivector se define como el producto externo de dos vectores no paralelos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que significa "barrer  $\mathbf{b}$  a lo largo de  $\mathbf{a}$ ", este difiere solo en la orientación al barrer  $\mathbf{a}$  a lo largo de  $\mathbf{b}$ " lo cual puede visualizarse de la Figura 3.2 y se expresa:

$$-\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \tag{3.2}$$

Entonces al revertir el orden de vectores que entra en el producto, se cambia la orientación del bivector resultante lo cual se expresa con un cambio en el signo. Esto dice a su vez que el producto externo es anticonmutativo.

Este producto también cumple la regla de asociatividad por un escalar  $\lambda$ , lo cual se hereda de dicha propiedad de los vectores:

$$(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (3.3)$$

y el resultado de este es un bivector paralelo al mismo mediante:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Esto indica que cambiarle el tamaño a uno de los vectores que forman al paralelogramo resulta en cambiarle estas mismas propiedades al bivector formado en cuestión. Los bivectores que cumplen (3.4) se dice que son *codireccionales*

La *magnitud* del bivector  $\mathbf{B}$  se define como el área del paralelogramo en cuestión:

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\sin(\theta)|. \quad (3.5)$$

Dos bivectores pueden sumarse como sigue, si  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  entonces:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}, \quad (3.6)$$

o bien:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{B}_k = \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{b}$  con  $k = 1, 2$ . Utilizando la propiedad anticonmutativa es sencillo verificar que este producto es también lineal por la derecha, lo cual indica que el bivector resultante de añadir dos bivectores se obtiene del producto exterior de la suma de los vectores.

Así, los axiomas (2.1)-(2.8) que se dieron en el capítulo 2 para vectores son here-



dados de forma natural a los bivectores mediante el producto externo. Se hace notar que si  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ , entonces el ángulo que forman es  $\theta = 0$  y en consecuencia el área del paralelogramo es nula como dice la ecuación (3.5) por lo cual se sigue:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

por lo cual se forma un bivector nulo. Esto es de esperarse pues barrera un vector a lo largo de sí mismo no produce ningún paralelogramo. Por lo tanto dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son colineales sí y solo sí:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Esto culmina la utilidad del producto externo, pues resulta en una interpretación complementaria al producto interno en el sentido que ambos miden la dirección relativa entre vectores pero en una forma distinta, mientras el primero resulta en la proyección de un vector en otro lo cual facilitó la forma de expresar que dos vectores son perpendiculares, y el segundo resultó en un paralelogramo orientado que forman ambos vectores en el producto y por lo tanto de una condición sencilla de decir cuando dos vectores son paralelos.

### Trivectores

De la misma manera se puede formar un trivector con el producto externo de un bivector y un vector que no este contenido en el mismo, i.e que no sea combinación lineal de los vectores que forman al bivector.

$$\mathbf{T} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{c}. \quad (3.10)$$

Es claro que al igual que un bivector heredó los 8 axiomas para un vector, un trivector hereda también dichas propiedades. Como un bivector es formado por dos vectores, un trivector se puede formar por el producto externo de tres vectores:

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \quad (3.11)$$

que da lugar a resultados similares a aquellos de los bivectores. El resultado nuevo que aparece es que el producto externo debe ser asociativo, esto es:

$$T = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}). \quad (3.12)$$

Por lo tanto el mismo trivector es formado por el bivector  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  y el vector  $\mathbf{c}$  que por el vector  $\mathbf{a}$  y el bivector  $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ . En consecuencia se cumple:

$$-T = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}), \quad (3.13)$$

es decir que el trivector resultante cambia de signo al cambiar el orden de dos de los vectores que generan al mismo. Por lo tanto se cumplen dos veces la regla:

$$T = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b}, \quad (3.14)$$

así, la regla asociativa da varias formas equivalentes de construir un paralelepípedo dirigido el cual es el significado geométrico del trivector. En concreto esto expresa que el producto externo de un vector y un bivector conmutan:

$$T = \mathbf{B} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.15)$$

Si  $\mathbf{c}$  cae en el plano generado  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , barrer este plano a lo largo de este vector no produce ningún paralelepípedo lo cual queda expresado por la ecuación:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

Esta ecuación provee una forma simple de expresar cuando tres vectores están en el mismo plano. Al igual que un vector y un bivector, el trivector posee magnitud, dirección y sentido. Su magnitud está dada como el volumen del paralelepípedo generado:

$$\|T\| = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| |\sin(\theta)| |\cos(\varphi)|. \quad (3.17)$$

Su dirección se hereda de los 3 vectores que lo conforman y su orientación depende del orden de los factores. Este puede tener dos orientaciones. Primero, la orientación derecha regida por la regla de la mano derecha, la cual se toma como positiva, y segundo, una orientación izquierda regida por la regla de la mano izquierda que se toma negativa. Todo lo anterior se resume en las Figura 3.3.

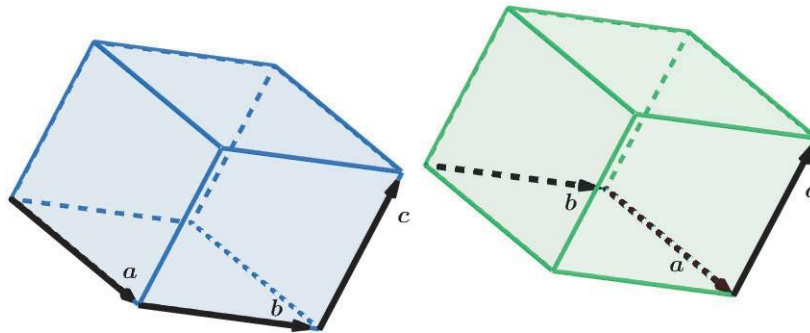


Figura 3.3. Trivector como un paralelepípedo orientado.

Se puede generalizar el concepto a un  $N$ -vector, formado por  $N$ -vectores no colineales:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_N := \prod_{j=1}^N \mathbf{a}_j, \quad (3.18)$$

que forma respectivamente una figura geométrica  $N$ -dimensional orientada en un espacio de  $M$  dimensiones euclídeo  $E^M$  tal que  $M \geq N$ . Esto es intuitivo puesto que por ejemplo un trivector en un espacio bidimensional carece de significado geométrico.

### 3.1.2. El producto geométrico

El matemático alemán H.G. Grassman fue el primero en describir la geometría en la forma que se está tratando en este capítulo. Él definió la multiplicación mediante la especificación de un conjunto de axiomas algebraicos llamado *producto geométrico* que engloba al producto interno y externo:

$$\mathbf{ab} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (3.19)$$

El producto geométrico de dos vectores es la suma de un escalar y un bivector como puede ser apreciado aquí. Utilizando la conmutatividad  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  y la anticonmutatividad  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  se obtiene:

$$\mathbf{ba} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad (3.20)$$

lo cual muestra que en general  $\mathbf{ba} \neq \mathbf{ab}$ , sin embargo si  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$  se obtiene:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \quad (3.21)$$

lo cual ocurre si y solo si los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son paralelos. Análogamente para el caso  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  se concluye:

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}, \quad (3.22)$$

que solo es válido si los vectores son perpendiculares entre sí.

Por lo tanto el producto geométrico contiene información tanto del paralelismo como de la perpendicularidad de dos vectores a través de una regla conmutativa o anticonmutativa. Así, el producto geométrico hereda la interpretación geométrica de ambos productos indicando la dirección relativa entre dos vectores.

Por construcción el producto geométrico tiene las siguientes propiedades ya que son heredadas del producto interno y externo:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \quad (3.23)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \quad (3.24)$$

$$\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}). \quad (3.25)$$

Obsérvese que se pueden expresar los productos interno y externo en términos de este

nuevo producto como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}). \quad (3.27)$$

Esto permite hacer un razonamiento inverso, es decir postular al producto geométrico y definir tanto el producto interno como el producto externo en términos de este producto, lo cual reduce ambos a un solo producto. De esta forma surge la conmutatividad y anticonmutatividad de ambos productos de una forma natural.

Una propiedad pedida para este producto geométrico es que satisfaga la siguiente regla asociativa:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{a(bc)} = (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \quad (3.28)$$

## 3.2. Axiomas del Álgebra Geométrica

El *álgebra geométrica* tiene el papel de expresar con una estructura algebraica el espacio geométrico a considerar con sus elementos constituidos por los escalares (0-vectores), vectores (1-vectores), bivectores (2-vectores) y sucesivamente a ( $N$ -vectores), que se les llama los *elementos graduados del álgebra*.

Un elemento de esta álgebra tiene la estructura siguiente:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \quad (3.29)$$

A  $A$  se le conoce como *multivector* y se escribe como suma de  $k$ -vectores, siendo  $A_k$  la parte  $k$ -vectorial del multivector. El número de  $k$ -vectores depende del espacio en el cual se esté trabajando.

Se postula que los multivectores satisfacen los siguientes axiomas: [2, 6]

$$A + B = B + A, \quad (3.30)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (3.31)$$

$$(AB)C = A(BC), \quad (3.32)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (3.33)$$

$$(B + C)A = BA + CA, \quad (3.34)$$

$$A + 0 = A, \quad (3.35)$$

$$1A = A1 = A, \quad (3.36)$$

$$A + (-A) = 0, \quad (3.37)$$

además de ser un álgebra cerrada ante la suma y el producto de cualesquiera dos multivectores en la misma.

Como esta álgebra engloba también escalares, se toma que estos conmutan con cualquier multivector. Si  $\lambda$  es un escalar y  $A$  un multivector:

$$A\lambda = \lambda A. \quad (3.38)$$

Si se toma un vector  $\mathbf{a}$  y un  $k$ -vector  $A_k$  se definen los productos interno y externo por las expresiones:

$$\mathbf{a} \cdot A_k := \frac{1}{2} (\mathbf{a} A_k - (-1)^k A_k \mathbf{a}) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{a} \wedge A_{k'} := \frac{1}{2} (\mathbf{a} A_{k'} + (-1)^k A_{k'} \mathbf{a}) . \quad (3.40)$$

donde se postula que el producto interno entre un vector y un  $k$ -vector tiene siempre el papel de bajar un grado al  $k$ -vector operado mientras que el producto externo lo sube un grado:

- $\mathbf{a} \cdot A_k$  es un  $(k - 1)$ -vector,

- $\mathbf{a} \wedge A_k$  es un  $(k + 1)$ -vector,

añadiendo estas dos ecuaciones se obtiene la definición del producto geométrico entre un vector y un  $k$ -vector por:

$$\mathbf{a}A_k = \mathbf{a} \cdot A_k + \mathbf{a} \wedge A_k. \quad (3.41)$$

Si un multivector tiene multiplicativo inverso, se define su respectiva inversa por  $A^{-1}$  o  $1/A$  tal que cumple la siguiente ecuación:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1. \quad (3.42)$$

Esto permite definir dos tipos de división entre dos multivectores:

$$A^{-1}B = (1/A)B, \quad (3.43)$$

$$BA^{-1} = B(1/A) = B/A. \quad (3.44)$$

Estas dos definiciones no son equivalentes a menos que los multivectores conmuten.

Como caso particular, se tiene que la inversa de un vector está dada por:

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} = \frac{\hat{\mathbf{a}}}{\|\mathbf{a}\|}. \quad (3.45)$$

Es decir se trata del vector unitario en la dirección de  $\mathbf{a}$  dividido entre su norma, este resultado se sigue al aplicar la definición del producto geométrico de un vector en sí mismo.

Si un multivector es tal que  $A = A_r$  se dice que es *homogéneo* de grado  $r$ , esto es que es un  $r$ -vector. Un multivector se dice que es par (impar) si  $A_r = 0$  si para todo  $0 < r < N$ ,  $r$  es impar (par), con esto en mente se puede separar todo multivector en sus partes par e impar:

$$A = (A)_+ + (A)_-, \quad (3.46)$$

donde:

$$(A)_+ := (A)_0 + (A)_2 + \dots, \quad (3.47)$$

$$(A)_- := (A)_1 + (A)_3 + \dots \quad (3.48)$$

Esta distinción cobra notoreidad cuando se tratan por separado estos conjuntos de multivectores. Pues *los multivectores pares sí forman un álgebra ya que sus productos siempre producen multivectores pares, mientras que los multivectores impares no lo hacen* ya que al carecer de la parte escalar, no son cerrados bajo la multiplicación.

Una fórmula muy útil del álgebra geométrica es la fórmula de reducción para el producto interno de un vector  $\mathbf{a}$  y un multivector  $C_r$ . Si se escribe  $C_r = (\mathbf{c}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_r)$  se puede demostrar que el producto interno está dado por la expresión [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_r) &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_k) (\mathbf{c}_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{c}}_k \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_r) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_1) (\mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_r) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_2) (\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_r) + \\ &+ \dots + (-1)^{r+1} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_r) (\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_{r-1}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

El término  $(\mathbf{c}_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{c}}_k \wedge \dots \wedge \mathbf{c}_r)$ , indica que se está suprimiendo el término  $\mathbf{c}_k$  del producto exterior. A esto se le conoce como *La fórmula de expansión de Laplace*.

Para generalizar lo anterior, de la discusión que se hizo del producto externo, se tiene que el producto externo de un  $r$ -vector y un  $S$ -vector produce un  $(r+S)$ -vector:

$$A_r \wedge B_S = (A_r B_S)_{r+S}. \quad (3.50)$$

Y se define el producto interno entre un  $r$ -vector y un  $S$ -vector como un  $k$ -vector de grado  $|r - S|$ :

$$A_r \cdot B_S = (A_r B_S)_{|r-S|} \quad (3.51)$$



entonces si lo que se quiere es calcular el producto interno entre dos  $k$ -vectores de diferente grado se puede emplear que cualquier  $k$ -vector se puede expresar como el producto externo de  $k$  vectores y luego aplicar [2]:

$$(A_r \cdot B_s) = (C_{r-1} \wedge \mathbf{b}) \cdot B_s := C_{r-1} \cdot (\mathbf{b} \cdot B_s), \quad (3.52)$$

donde se ha hecho  $A_r = C_{r-1} \wedge \mathbf{b}$ . Esto es válido siempre que  $0 < r < s$ , si ocurre  $s < r$ , simplemente se descompone  $B_s$  y se aplica lo mismo pero por la derecha.

Se introduce además la operación de *reversión* o *conjugado* que se define por:

$$A^\dagger := \mathbf{a}_r \dots \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1. \quad (3.53)$$

Es sencillo verificar que satisface las propiedades siguientes:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (3.54)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \quad (3.55)$$

$$(A)_k^\dagger = (A^\dagger)_k \quad \text{con } 1 \leq k \leq r, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a} \quad \text{si } \mathbf{a} = (\mathbf{a})_1. \quad (3.57)$$

Por ejemplo si se consideran un bivector  $\mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  o un trivector  $T = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$  sus reversiones son:

$$\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^\dagger = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{B}, \quad (3.58)$$

$$T^\dagger = \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -T. \quad (3.59)$$

Para finalizar esta sección, se define la magnitud de un multivector como la parte escalar de la ecuación  $A^\dagger A$ :

$$|A| := (A^\dagger A)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.60)$$

Esta es una ecuación que se consigue evaluando únicamente la parte escalar de es-

te producto multivectorial. Puede probarse, utilizando esta definición, que para un bivector y un trivector sus magnitudes tienen la forma (3.5) y (3.17).

### 3.3. El álgebra de los espacios Euclídeos

En esta sección se describen las álgebra geométricas para los Espacios Euclídeos de una, dos y tres dimensiones. Se empieza describiendo el espacio euclídeo unidimensional de forma breve.

#### 3.3.1. Espacio Euclídeo 1D

Debido a que todo vector  $\mathbf{a}$  determina una *línea orientada*, entonces cualquier vector  $\mathbf{x}$  en  $E^1$  puede ser escrito con la ecuación:

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a}. \quad (3.61)$$

Que corresponde a la ecuación paramétrica de la recta, donde  $\alpha$  determina la magnitud del vector y  $\mathbf{a}$  indica la dirección del mismo. Como todo vector en un espacio unidimensional es paralelo a  $\mathbf{a}$ , se concluye que:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{O}. \quad (3.62)$$

Que es una ecuación *no paramétrica* para la recta con dirección dada por el vector  $\mathbf{a}$ . Entonces el producto geométrico de cualquier vector  $\mathbf{x}$  en este espacio está simplemente dado por:

$$\mathbf{x}\mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a}\mathbf{a}. \quad (3.63)$$

Esto permite determinar el escalar  $\alpha$  multiplicando (3.63) por  $\mathbf{a}^{-1}$  dada por (3.45):

$$\alpha = \mathbf{x}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) / \|\mathbf{a}\|^2. \quad (3.64)$$

Por lo tanto ya se tiene caracterizada un álgebra para el espacio Euclídeo  $E^1$

únicamente de conocer al vector  $\mathbf{a}$  y al escalar  $\sigma$ .

Para simplificar lo anterior, lo que se puede hacer es tomar al vector unitario paralelo a  $\mathbf{a}$ , esto es  $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ . En este caso  $\hat{\mathbf{a}}^{-1} = \hat{\mathbf{a}}$  por lo cual la expresión anterior toma simplemente lo anterior a:

$$\sigma = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}}. \quad (3.65)$$

Entonces el vector unitario  $\hat{\mathbf{a}}$  refuerza el concepto de dirección paralela a  $\mathbf{a}$  ya que el escalar es simplemente el producto interno de algún vector  $\mathbf{x}$  por este mismo.

### 3.3.2. Espacio Euclídeo 2D

Para hacer la descripción geométrica del plano Euclídeo, se define de manera conveniente un *bivector unitario* no nulo  $\mathbf{i}$  tal que para todo vector  $\mathbf{x}$  en  $E^2$  se cumple:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{i} = 0. \quad (3.66)$$

El bivector unitario  $\mathbf{i}$  es suficiente para determinar al plano en el que se trabaja, ya que cualquier bivector múltiplo de este determina al mismo plano. A este bivector se le llama el *pseudoescalar del plano*.

Lo siguiente es construir un par de vectores unitarios ortonormales  $\sigma_1, \sigma_2$  tales que el bivector puede escribirse como:

$$\mathbf{i} = \sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1, \quad (3.67)$$

donde en las últimas dos igualdades se ha ocupado la ortogonalidad de los vectores unitarios. Se considerará que este par de vectores forman un sistema Cartesiano.

El producto geométrico de un vector  $\mathbf{x}$  con este bivector  $\mathbf{i}$  es:

$$\mathbf{x}\mathbf{i} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}. \quad (3.68)$$

Calculando explícitamente el producto ocupando (3.49) se tiene:

$$\mathbf{x}\mathbf{i} = \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \boldsymbol{\sigma}_2) = (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{\sigma}_2 - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{\sigma}_1. \quad (3.69)$$

Nótese que la multiplicación del bivector por los vectores unitarios da los siguientes resultados:

$$\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{i}, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{i}, \quad (3.71)$$

donde se ha ocupado que el producto geométrico anticonmuta y es asociativo.

De (3.69) y el par de ecuaciones (3.70) y (3.71) se puede ver que el bivector tiene 2 propiedades fundamentales. La primera es generar al plano que contiene a los vectores unitarios  $\boldsymbol{\sigma}_1$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , y la segunda es que genera una rotación de estos vectores en  $\pi/2$  radianes si se multiplica por la derecha y  $-\pi/2$  si se multiplica a la izquierda, por lo tanto el bivector es el generador de las rotaciones en el plano. Si ahora se multiplica esta cantidad por  $\mathbf{i}^\dagger$ , y se ocupa (3.60) y las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\mathbf{x}\mathbf{i}\mathbf{i}^\dagger = \mathbf{x} = x_1\boldsymbol{\sigma}_1 + x_2\boldsymbol{\sigma}_2, \quad (3.72)$$

donde  $x_k = (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k)$ , con  $k = 1, 2$  son las proyecciones del vector  $\mathbf{x}$  en este plano de vectores unitarios. Así, se tiene una ecuación paramétrica del plano  $\mathbf{i}$  en términos de sus componentes  $x_k$  respecto a la base  $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2\}$ . Esto se observa en la Figura 3.4.

Pero como se vio, al multiplicar el vector  $\mathbf{x}$  por la derecha, se obtiene retomando las componentes en la ecuación (3.69) como:

$$\mathbf{x}^f = \mathbf{x}\mathbf{i} = x_1\boldsymbol{\sigma}_2 - x_2\boldsymbol{\sigma}_1. \quad (3.73)$$

El cual es un vector rotado a  $\pi/2$  radianes en sentido antihorario al vector original, el

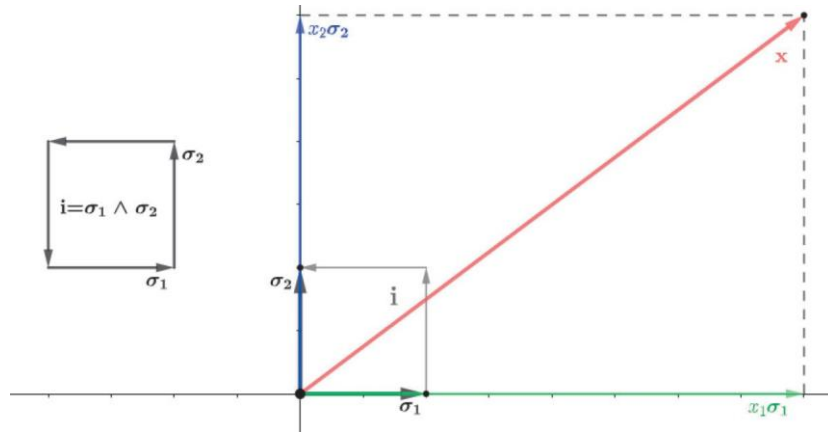


Figura 3.4. El bivector  $i$  como unidad de área dirigida.

cual es perpendicular al vector original. Si se multiplica por la izquierda se obtiene:

$$x\mathbf{i} = x_2\sigma_1 - x_1\sigma_2 = -x^l. \tag{3.74}$$

De este análisis se observa que se satisface la identidad siguiente:

$$\mathbf{i}^2 = -1, \tag{3.75}$$

es decir que el efecto de multiplicar el bivector unitario dos veces por sí mismo es menos uno. Este es un resultado sorprendente por las implicaciones geométricas del bivector. Primero, como el bivector unitario es el generador del plano dirigido formado por vectores unitarios ortogonales, el hecho de que se cumple la ecuación (3.75) se debe a que el producto externo es anticonmutativo y está formado por un par de vectores ortonormales.

Y en segundo lugar, se debe a su interpretación como un generador de rotaciones, pues indica que dos rotaciones sucesivas da lugar a una rotación de  $\pi$  radianes que se traduce en la reversión en la dirección del vector. Esto se ilustra en la Figura 3.5.

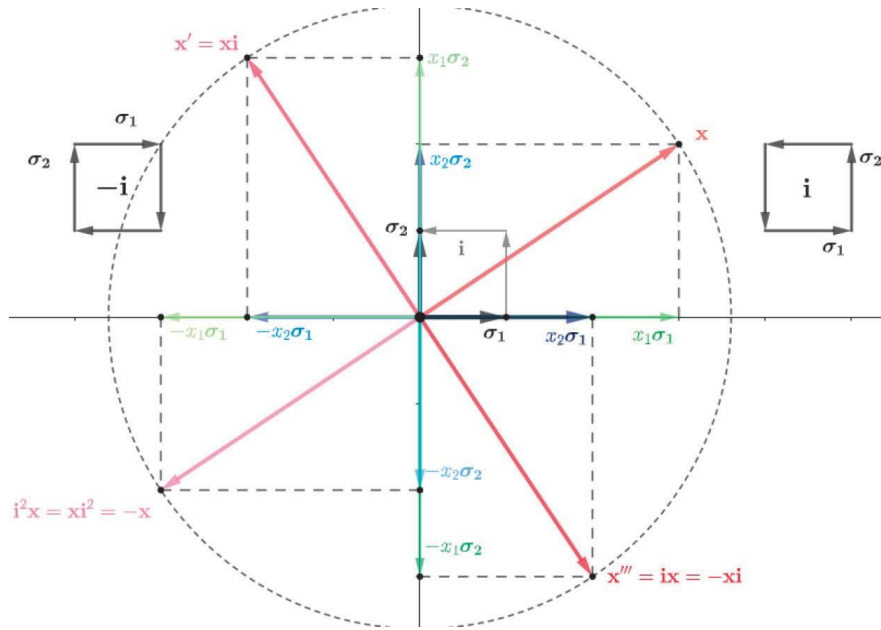


Figura 3.5. Plano  $i$  de vectores y la propiedad de  $i$  como unidad de rotación.

### Espinores Euclídeos planos

El álgebra geométrica bidimensional también permite reproducir al álgebra compleja de forma natural, lo cual se hace mediante unos nuevos objetos matemáticos llamados *espinores planos*.

Se define un *espinor* como el producto geométrico de dos vectores en el plano. Al multiplicar el vector  $x$  por la izquierda con un vector unitario, por ejemplo  $\sigma_1$  se tiene:

$$z = \sigma_1 x = \sigma_1 [x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2] = x_1 (\sigma_1)^2 + x_2 (\sigma_1 \sigma_2) = x_1 + i x_2,$$

por lo cual este espinor tiene la forma:

$$z = x_1 + i x_2. \tag{3.76}$$

A las cantidades de esta forma se les llama comúnmente *números complejos*, donde el bivector  $i$  juega el papel de la unidad imaginaria tradicional. Por lo tanto se observa que los números complejos son en realidad el caso bidimensional Euclídeo de los espinores.

Como puede verse de la ecuación (3.76) un espinor es la suma de una parte escalar y una parte bivectorial, esto es equivalente al hecho que en el álgebra compleja todo número es la suma de una parte real y una parte imaginaria.

Note que la reversión de un espinor corresponde al conjugado, pues al multiplicar el vector  $\mathbf{x}$  por  $\sigma_1$  a la derecha se obtiene:

$$z^\dagger = \mathbf{x}\sigma_1 = [x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2]\sigma_1 = x_1 - ix_2,$$

por lo cual:

$$z^\dagger = \mathbf{x}\sigma_1 = x_1 - ix_2. \quad (3.77)$$

De esta descripción es claro que:

$$|z|^2 = z^\dagger z = z z^\dagger = \mathbf{x}^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2. \quad (3.78)$$

Es decir que el módulo del espinor  $z$  corresponde al módulo del vector  $\mathbf{x}$ , lo cual es de esperarse ya que describen un plano pero de forma distinta. Al plano conformado por los espinores se le llama *plano espinorial*, donde el escalar lleva su propio eje llamado eje escalar, mientras que el bivector tiene asignado el eje pseudoescalar.

Nótese que la multiplicación por  $\sigma_2$  no es necesario analizarla, ya que basta utilizar las ecuaciones (3.76) y (3.77) para darle significado geométrico a este producto:

$$w = \sigma_2 \mathbf{x} = -\mathbf{i}(\sigma_1 \mathbf{x}) = -\mathbf{i}z, \quad (3.79)$$

$$w^\dagger = \mathbf{x}\sigma_2 = \mathbf{x}\sigma_1 \mathbf{i} = z^\dagger \mathbf{i}. \quad (3.80)$$

En la Figura 3.6 se describe al plano espinorial y el significado de las diferentes formas de multiplicar un vector  $\mathbf{x}$  por cada uno de los vectores unitarios.

De forma recíproca, todo espinor permite caracterizar un vector por la ecuación:

$$\mathbf{x} = \sigma_1 z = z^\dagger \sigma_1. \quad (3.81)$$

La ecuación anterior especifica que un espinor transforma un vector unitario  $\sigma_1$  en  $\mathbf{x}$ ,

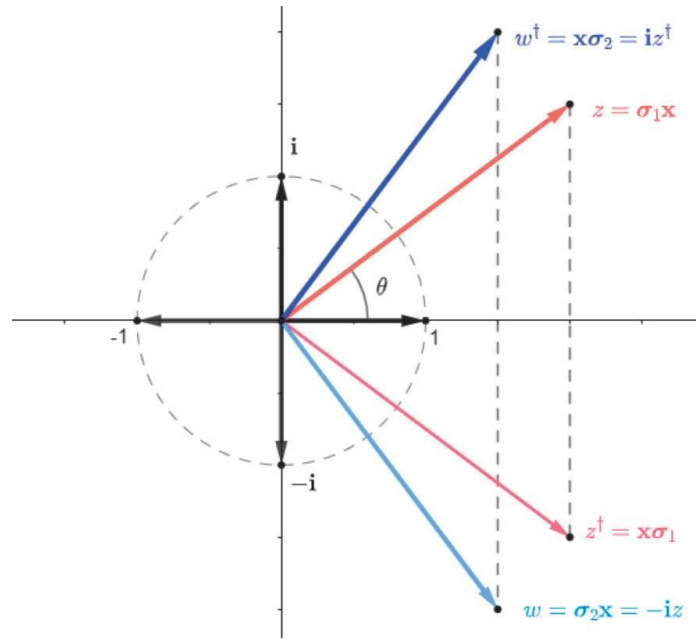


Figura 3.6. Plano  $i$  espinorial.

y esta transformación corresponde a una *rotación-dilatación*, en el caso de que  $z$  solo tenga componente escalar le corresponde solamente a una dilatación, y en el caso de que  $z$  sea el pseudoescalar  $i$  le corresponde únicamente una rotación.

### El álgebra del plano Euclídeo

El álgebra del espacio Euclídeo  $E^2$  ha sido caracterizada por los elementos  $\{1, \sigma_1, \sigma_2, i\}$ . Es conveniente darle un símbolo a esto y se le denotará por:

$$G_2 := \{1, \sigma_1, \sigma_2, i\}. \tag{3.82}$$

Al álgebra geométrica del plano, la cual consta de una parte escalar, una vectorial y una bivectorial (o pseudoescalar). Por lo tanto todo multivector  $A \in G_2$  puede escribirse en la forma:

$$A = a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 i. \tag{3.83}$$

La cual puede reescribirse como la suma de un vector y un espinor en la forma:

$$A = \mathbf{a} + \mathbf{a}, \tag{3.84}$$



siendo  $a$  su parte vectorial, que es la parte impar de esta álgebra y  $\sigma$  es su parte espinorial, como la suma de un escalar y un bivector que describe las rotaciones-dilataciones en el plano.

De acuerdo a (3.46), el álgebra del plano se descompone en sus partes par e impar:

$$\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_2^+ + \mathbb{G}_2^-, \quad (3.85)$$

donde  $\mathbb{G}_2^-$  es el espacio de vectores en dos dimensiones y  $\mathbb{G}_2^+$  el espacio de espinores bidimensionales, de acuerdo a la discusión ya hecha, solamente  $\mathbb{G}_2^+$  forma un álgebra, el álgebra de espinores, debido a que es cerrada bajo el producto geométrico. Por lo tanto los espinores forman en sí un álgebra la cual es *isomorfa al álgebra de los números complejos*  $\mathbb{C}$ .

### 3.3.3. Espacio Euclídeo 3D

Al igual que en los dos casos anteriores, la formulación del álgebra geométrica en 3 dimensiones, viene de definir un trivector unitario  $i$ , tal que todos los vectores  $\mathbf{x}$  del espacio  $E^3$  satisfacen la relación fundamental:

$$\mathbf{x} \wedge i = 0. \quad (3.86)$$

Al trivector unitario  $i$  se le suele llamar *el pseudoescalar* del espacio, ya que el volumen de un paralelepípedo está determinado por un pseudoescalar.

El trivector unitario se considerará que se compone del producto externo de los vectores unitarios ortonormales *siguiendo la regla de la mano derecha* (Figura 3.7):

$$i = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (3.87)$$

Tales que forman un sistema ortonormal derecho de vectores. Que se describe, de acuerdo a (3.22) por:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_i \wedge \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \quad i = j. \quad (3.88)$$

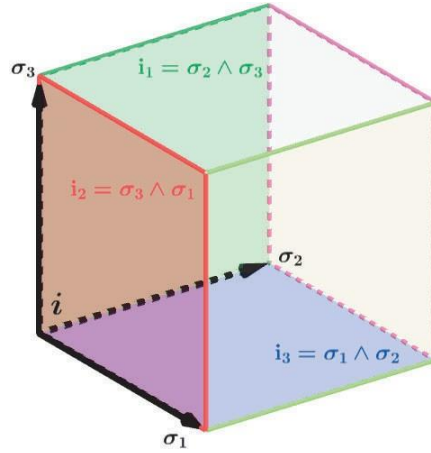


Figura 3.7. Elementos geométricos de  $G_3$ .

De acuerdo a la figura y a la convención de la mano derecha, a  $i$  se le suele llamar también el pseudoescalar unitario derecho, al cambiarle el signo a esta cantidad se tiene el pseudoescalar unitario izquierdo que corresponde al conjugado del mismo  $i^\dagger$  y cumple:

$$i^\dagger = \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_2 = -i. \quad (3.89)$$

Se ha escrito la segunda igualdad para hacer énfasis que  $i^\dagger$  describe el sistema izquierdo como se ha dicho.

Para conocer al vector  $\mathbf{x}$  en términos de los vectores unitarios ortogonales se procede de la misma forma que el plano, utilizando (3.49):

$$\mathbf{x}i = (\mathbf{x} \cdot \sigma_1)[\sigma_2 \wedge \sigma_3] - (\mathbf{x} \cdot \sigma_2)[\sigma_1 \wedge \sigma_3] + (\mathbf{x} \cdot \sigma_3)[\sigma_2 \wedge \sigma_1]. \quad (3.90)$$

Al multiplicar ahora por  $i^\dagger$  a la derecha y con un procedimiento similar se obtiene:

$$\mathbf{x}i i^\dagger = (\mathbf{x} \cdot \sigma_1)\sigma_1 + (\mathbf{x} \cdot \sigma_2)\sigma_2 + (\mathbf{x} \cdot \sigma_3)\sigma_3 = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3, \quad (3.91)$$

que es un resultado análogo al caso planar y expresa al vector  $\mathbf{x}$  como combinación lineal de los 3 vectores unitarios. Debido a que  $i^\dagger = -i$  se concluye que el pseudoescalar

cumple la ecuación:

$$i^2 = -1. \quad (3.92)$$

Nuevamente aparece la identidad  $i^2 = -1$  como en el caso bidimensional, por lo cual el trivector unitario describe una rotación en 3 dimensiones entendido por la regla de la mano derecha.

En el espacio Euclídeo  $E^3$  se definen los 3 bivectores unitarios, que representan a los 3 planos orientados de área 1 por las ecuaciones:

$$\mathbf{i}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 = i\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1 i, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{i}_2 = \boldsymbol{\sigma}_3 \wedge \boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_1 = i\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2 i, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_3 i. \quad (3.95)$$

Englobando lo anterior, se concluye que se cumple:

$$i\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_k i = \mathbf{i}_k, \quad (3.96)$$

$$i\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k i = -\boldsymbol{\sigma}_k. \quad (3.97)$$

Observe que, por las definiciones (3.93)-(3.95), se satisface  $\mathbf{i}_k^2 = -1$  como en el caso plano, con  $k = 1, 2, 3$ .

Esto quiere decir que el producto del pseudoescalar por un vector y un bivector respectivamente es conmutativo, además de que la multiplicación por un vector de la base da como resultado el bivector correspondiente al plano ortogonal de dicho vector, y de forma recíproca con el bivector.

Continuando con los bivectores, es claro que todo bivector en  $G_3$  se puede expandir en términos de los 3 bivectores unitarios de la forma:

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3. \quad (3.98)$$

De acuerdo a (3.96), el bivector puede escribirse como:

$$\mathbf{B} = iB_1\sigma_1 + iB_2\sigma_2 + iB_3\sigma_3, \quad (3.99)$$

por lo que escribiendo un vector de la forma  $\mathbf{b} = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3$ , se tiene la relación entre este vector y el bivector anterior por:

$$\mathbf{B} = i\mathbf{b}. \quad (3.100)$$

Se dice entonces que *el bivector en cuestión es el dual de un vector*. Lo que indica esta ecuación, es que el vector generado es normal al bivector en cuestión, siendo el pseudoescalar  $i$  el indicador que el sistema coordinado se rige por las rotaciones respecto a la mano derecha. Similarmente un pseudoescalar es el dual a un escalar usual ya que se relacionan por una ecuación similar:

$$\alpha_0 = i\alpha_3. \quad (3.101)$$

Englobando las ecuaciones que se han visto, observe que el sistema de vectores satisface:

$$\sigma_p\sigma_q = \delta_{pq} + \sum_{r=1}^3 \epsilon_{pqr}i_r = \delta_{pq} + i \sum_{r=1}^3 \epsilon_{pqr}\sigma_r, \quad p, q = 1, 2, 3, \quad (3.102)$$

mientras que el sistema de bivectores satisface:

$$i_p i_q = -\delta_{pq} - \sum_{r=1}^3 \epsilon_{pqr}i_r = -\delta_{pq} - i \sum_{r=1}^3 \epsilon_{pqr}\sigma_r, \quad p, q = 1, 2, 3, \quad (3.103)$$

además de que la multiplicación entre ellos tiene la propiedad fundamental:

$$i_p\sigma_q = \sigma_q i_p = i\delta_{pq} - \sum_{r=1}^3 \epsilon_{jkr}\sigma_r, \quad p, q = 1, 2, 3. \quad (3.104)$$

Esto engloba lo siguiente. El producto de dos vectores o bivectores forma la suma

de un escalar y un bivector y el producto entre un vector y un bivector forma un pseudoescalar y un vector.

Como consecuencia de (3.100) y del hecho que los productos vectorial (2.20) y externo (3.1) cumplen propiedades similares, tales como el hecho de que tienen la misma magnitud y la propiedad anticonmutativa, permite relacionar al producto externo y al producto vectorial en el espacio Euclídeo  $E^3$  mediante:

$$\mathbf{C} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = ic. \quad (3.105)$$

Por lo tanto en el espacio  $E^3$ , descrito por su álgebra  $G_3$ , el producto vectorial es el dual del producto externo, así que describen lo mismo pero con un enfoque matemático distinto, ya que en el primero se describe con la normal al plano, y en el segundo con el mismo plano orientado. En la Figura 3.8 se comparan ambos productos y sus descripciones geométricas.

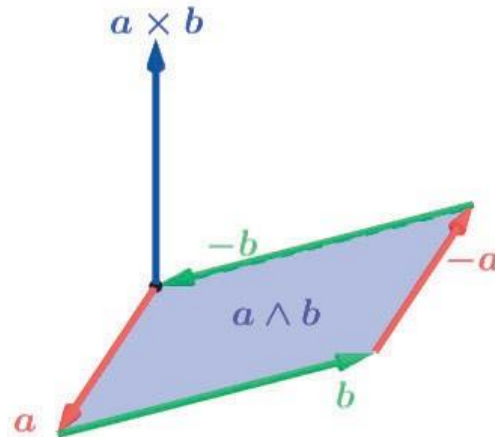


Figura 3.8. Comparación del producto vectorial y producto exterior.

Entonces el producto geométrico puede reescribirse en la forma:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (3.106)$$

Esto lleva a que el producto escalar y el producto vectorial son, comparando con los números complejos, las partes real e imaginaria del producto geométrico.

### El álgebra geométrica del espacio Euclídeo

En el espacio Euclídeo  $E^3$ , todo multivector se escribe de la forma

$$A = \sigma_0 + \mathbf{a} + \mathbf{B} + i\sigma_1, \quad (3.107)$$

donde  $\sigma_0$  es su parte escalar,  $\mathbf{a}$  su parte vectorial,  $\mathbf{B}$  su parte bivectorial y  $\sigma_1$  su parte trivectorial o pseudoescalar. Ocupando las ecuaciones (3.100) y (3.101), se puede reescribir así:

$$A = \sigma_0 + i\sigma_1 + \mathbf{a} + i\mathbf{b}. \quad (3.108)$$

Esta ecuación se retomará más adelante. El dual de un multivector se define como:

$$iA = i\sigma_0 - \sigma_1 + i\mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad (3.109)$$

que como se observa transforma escalares en pseudoescalares y vectores en bivectores y viceversa.

En resumen se ha construido el álgebra  $G_3$  constituida por los elementos:

$$G_3 = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, i\}. \quad (3.110)$$

Constituida por una parte escalar, los 3 vectores unitarios para representar la base que forma un sistema cartesiano ortonormal, los 3 bivectores unitarios para generar un sistema de planos cartesianos ortonormales y un trivector unitario que genera un cubo cuyo volumen es la unidad.  $G_3$  también se separa en sus respectivos subespacios par e impar. El subespacio impar está formado por vectores y trivectores mientras que el subespacio par por escalares y bivectores al igual que el caso planar.

### Espinores en el espacio Euclídeo

En esta sección se estudia el subespacio  $G_3^+$  cuyos elementos se llaman *espinores del espacio Euclídeo*  $E^3$ . Estos se constituyen por los elementos:

$$G_3^+ = \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \}. \quad (3.111)$$

Por lo tanto un multivector en esta subálgebra tiene la forma:

$$(A)_+ = \alpha + \mathbf{B} = \alpha + i\mathbf{b}. \quad (3.112)$$

Es decir, es la suma de una rotación-dilatación. Se observa que se requieren no una, sino 3 unidades imaginarias independientes para representar las rotaciones en un espacio de 3 dimensiones, en este caso el papel *lo juegan los 3 bivectores unitarios*. El álgebra de espinores  $G_3$  se puede identificar con el álgebra de cuaterniones  $H$  que fue considerado primero por W.R. Hamilton en 1843 para describir las rotaciones en un espacio tridimensional [1, 2]. Este isomorfismo se consigue identificando los cuaterniones con los espinores mediante [2, 6, 7]:

$$\mathbf{i}_1 = -i, \quad (3.113)$$

$$\mathbf{i}_2 = -j, \quad (3.114)$$

$$\mathbf{i}_3 = -k, \quad (3.115)$$

de forma que, por estas ecuaciones y (3.103), los cuaterniones cumplen, asignando  $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k$  para la expresión siguiente:

$$i_p i_q = -\delta_{pq} + \sum_{r=1}^3 E_{pqr} i_r, \quad p, q = 1, 2, 3. \quad (3.116)$$

Además mientras los bivectores satisfacen la identidad:

$$\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 = 1, \quad (3.117)$$

los cuaterniones satisfacen una identidad similar pero con signo opuesto:

$$ijk = -1, \quad (3.118)$$

y debido a (3.96) y (3.97) los cuaterniones se pueden asociar a los vectores unitarios mediante las ecuaciones:

$$i_k = -i\sigma_k = -\sigma_k i, \quad (3.119)$$

$$i_k \sigma_k = -i = i^\dagger. \quad (3.120)$$

De estas consideraciones se concluye que mientras los bivectores forman un sistema coordenado derecho, los cuaterniones forman un sistema coordenado izquierdo. Como se muestra en la Figura 3.9.

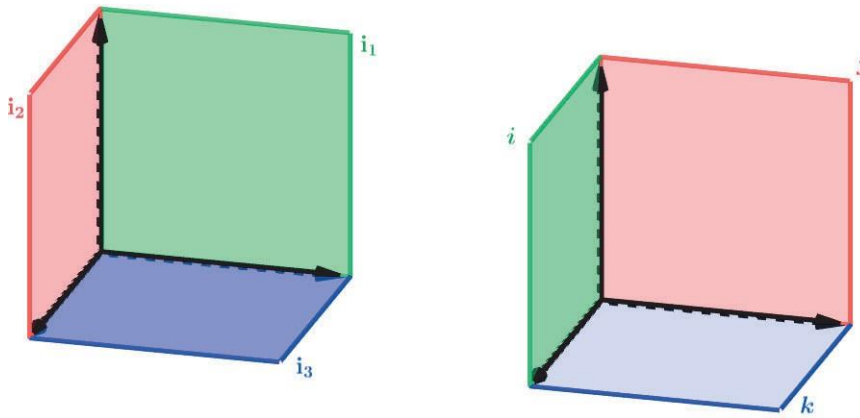


Figura 3.9. Orientación heredada por los bivectores y los cuaterniones.

Luego, un espinor (o cuaternión) se puede escribir desde ambos sistemas por:

$$z = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k, \quad (3.121)$$

donde  $a_0 = \beta_0$ ,  $a_k = -\beta_k$ , con  $k = 1, 2, 3$ . Se tiene en conclusión un claro isomorfismo entre los espinores y los cuaterniones de coeficientes reales con las relaciones dadas. A los espinores se les referirá de ahora en adelante como cuaterniones mientras que a los



cuaterniones en las forma que los definió Hamilton se les dirá *cuaterniones izquierdos*.

Para finalizar esta parte se describirán una forma de representar a esta álgebra mediante matrices  $2 \times 2$ . En primer lugar, considere las matrices [8]:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.123)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.124)$$

a las cuales se les conoce como *las matrices de Pauli*. De acuerdo a (3.96) los bivectores tienen la representación:

$$\mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.125)$$

$$\mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.126)$$

$$\mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (3.127)$$

Los escalares y pseudoescalares se representan con la matriz identidad  $\vec{I}_d$ , al multiplicarse por 1 e  $i$  respectivamente. Por lo cual un multivector en el álgebra  $G_3$  puede ser escrita como:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + i\beta_0 + a_3 + i\beta_3 & a_1 + i\beta_1 - ia_2 + \beta_2 \\ a_1 + i\beta_1 + ia_2 - \beta_2 & a_0 + i\beta_0 - a_3 - i\beta_3 \end{pmatrix}, \quad (3.128)$$

donde  $a_0$  representa la parte escalar,  $\beta_0$  la parte pseudoescalar,  $a_k$  y  $\beta_k$  las partes vectorial y bivectorial respectivamente, con  $k = 1, 2, 3$ .

Reescribiendo los coeficientes  $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$  la matriz anterior puede también expresarse por:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \gamma_3 & \gamma_1 - i\gamma_2 \\ \gamma_1 + i\gamma_2 & \gamma_0 - \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.129)$$

Por lo tanto un multivector de  $G_3$  se puede representar como una matriz  $2 \times 2$  de entradas complejas denotada por  $C(2)$ . Por otro lado los cuaterniones  $z$  del subálgebra par pueden representarse, sustituyendo las representaciones matriciales del escalar y los bivectores por:

$$z = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\beta_3 & i\beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_0 - i\beta_3 \end{pmatrix}. \quad (3.130)$$

### Álgebra de cuaterniones

En esta parte se resumen algunas reglas algebraicas para los cuaterniones,tales como su suma y producto. Este puede considerarse como un caso particular de la sección 3.2. pero será importante para el desarrollo de los siguientes capítulos.

Considere un cuaternión  $A$  que tiene la forma:

$$A = a_0 + \mathbf{A}, \quad (3.131)$$

donde  $a_0$  es su parte escalar y  $\mathbf{A}$  su parte bivectorial. Por la propiedad dual (3.100), la parte bivectorial se puede reescribir como  $\mathbf{A} = i\mathbf{a}$ , en consecuencia:

$$A = a_0 + i\mathbf{a}, \quad (3.132)$$

que es la forma en la que se escribirá un cuaternión en adelante. Si  $B$  es un cuaternión de la forma  $B = b_0 + i\mathbf{b}$ , la suma de estos da como resultado:

$$A + B = (a_0 + b_0) + i(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad (3.133)$$

y el producto de estos se expresa como:

$$AB = (a_0 + i\mathbf{a})(b_0 + i\mathbf{b}) = a_0b_0 - \mathbf{a}\mathbf{b} + i(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a}). \quad (3.134)$$

Descomponiendo el producto geométrico  $\mathbf{a}\mathbf{b}$  mediante la ecuación (3.19):

$$AB = (a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (3.135)$$

Nótese que cuando  $a_0 = b_0 = 0$ , se tiene simplemente  $AB = -\mathbf{a}\mathbf{b}$ . Es decir el producto de dos cuaterniones coincide salvo en el signo con el producto geométrico de dos vectores, así que este producto también da información de la dirección relativa entre sus partes vectoriales.

Se define al *anticommutador* como el producto simétrico:

$$(A, B) := \frac{AB + BA}{2} = (a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a}), \quad (3.136)$$

mientras que el *conmutador* se define como el producto antisimétrico:

$$[A, B] := \frac{AB - BA}{2} = -i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (3.137)$$

El conjugado de un cuaternión se escribe como:

$$A^\dagger = a_0 - i\mathbf{a}, \quad (3.138)$$

de forma que se cumple:

$$AA^\dagger = A^\dagger A = (a_0)^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_0)^2 + \|\mathbf{a}\|^2 = |A|^2. \quad (3.139)$$

Mediante esta ecuación se define el inverso de  $A$  como:

$$A^{-1} = \frac{A^\dagger}{|A|^2}. \quad (3.140)$$

# Capítulo 4

## Rotación de un cuerpo rígido

En este capítulo se estudia la rotación de un cuerpo rígido, donde se parte de la descripción con las dos formulaciones para la rotación más utilizadas en el estudio del mismo que son mediante los ángulos de Euler y la fórmula de rotación de Olinde Rodrigues.

Partiendo de la fórmula de Olinde Rodrigues se construirá un espinor de módulo 1 que permite describir la rotación de un cuerpo rígido de manera compacta, y finalmente se estudia brevemente la cinemática de un cuerpo rígido desde la perspectiva cuaterniónica .

### 4.1. El cuerpo rígido.

Cuando en un sistema de partículas, la distancia entre cada una de ellas se mantiene constante:

$$|\mathbf{r}|_{ij} = C_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

donde  $|\mathbf{r}|_{ij}$  expresa la distancia entre la partícula  $i$  y la partícula  $j$  del sistema, y  $C_{ij}$  expresa que son constantes, se dice que se trabaja con un cuerpo rígido de partículas. Se puede demostrar que para un cuerpo rígido solo son 6 coordenadas las requeridas para hacer su descripción. [9, 10] sin importar el número de partículas que

confinan el cuerpo, incluso en el límite de un cuerpo continuo.

La descripción de un cuerpo rígido puede hacerse de varias maneras. Una de ellas es mediante *un par de sistemas de coordenadas ortonormales, uno fijo en el espacio denotado por coordenadas  $(x, y, z)$  y otro fijo en el cuerpo denotado por las coordenadas  $(X, Y, Z)$* . Como se ve en la Figura 4.1.

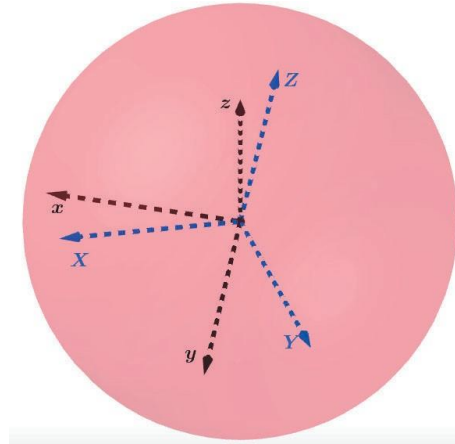


Figura 4.1. Sistemas coordenados fijos en el espacio  $(x, y, z)$  y en el cuerpo  $(X, Y, Z)$ .

Se mencionan de manera breve las definiciones y teoremas importantes sobre el movimiento de un cuerpo rígido. El número de grados de libertad es 6, 3 correspondiente a traslaciones, 2 a un pivoteo y 1 grado de libertad en la rotación.

- La *traslación* es aquel movimiento donde ningún punto del cuerpo rígido permanece fijo.
- El *pivoteo* es aquel donde un solo punto permanece fijo, el punto puede ubicarse dentro o fuera del cuerpo.
- La *rotación* es el movimiento donde una y solo una recta permanece fija a la cual se le conoce como *eje de rotación*.

**Teorema de Chasles:** “Un desplazamiento arbitrario de un cuerpo rígido en un espacio tridimensional se puede descomponer siempre en una traslación seguida de un pivoteo.” [9, 10]

Aunque en este trabajo no se demostrará de forma rigurosa este teorema se menciona que la prueba de este resultado consiste en primero trasladar el cuerpo de forma paralela a sí mismo de  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}'$  y después se realiza un pivoteo hasta que su orientación coincida con la de  $\mathbf{A}$  como se ve en la Figura 4.2.

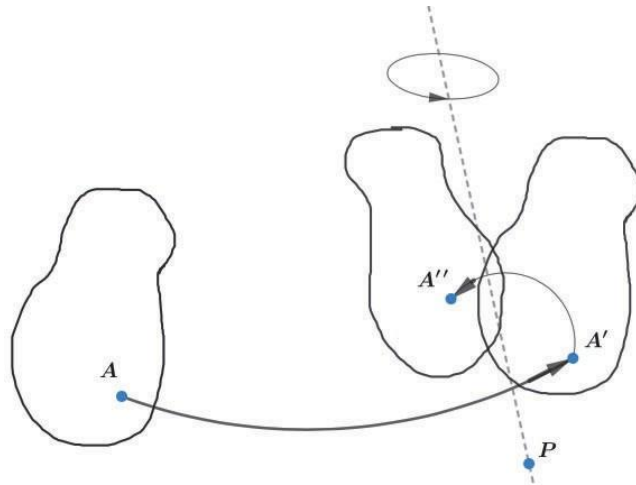


Figura 4.2. Teorema de Chasles.

**Teorema de Euler:** "Todo pivoteo es equivalente a una rotación en un espacio Euclídeo  $E^3$  tridimensional" [9, 10] (Figura 4.3).

La prueba de este teorema se puede hacer de forma gráfica si se toma una esfera con un radio arbitrario y tres puntos distintos  $A, B, C$  sobre la misma, en general no colineales, los cuales se unen por arcos de circunferencia dentro de la esfera. Si se denota el centro de la esfera por  $O$  y se realiza un pivoteo alrededor de este punto de forma que los puntos  $A, B$  se trasladan a sus nuevas posiciones  $A', B'$  y el punto  $C$  permanece fijo ( $C = C'$ ), entonces los segmentos que unen  $\overline{AB}$  y  $\overline{A'B'}$  serán iguales y en consecuencia la línea  $OC$  será el eje de giro instantáneo, ya que los puntos giraron los mismos ángulos, de esto se concluye que el pivoteo alrededor del punto  $O$  y la rotación alrededor del eje  $OC$  son representados el mismo giro como se muestra en la Figura 4.3, lo cual argumenta el Teorema de Euler.

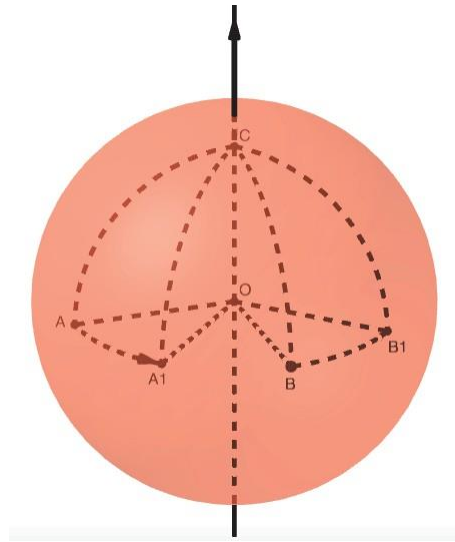


Figura 4.3. Teorema de Euler.

### Rotaciones

Con estos conceptos es natural querer hacer una correspondencia entre los sistemas fijo al cuerpo y fijo a espacio, se puede asumir que ambos sistemas tienen la misma orientación la cual es derecha, entonces se requieren de las *matrices de rotación* para cambiar de un sistema a otro.

Partiendo de un sistema cartesiano ortonormal. Una rotación es una transformación que preserva *los ángulos, las longitudes de los vectores y la orientación del sistema*. De forma que el sistema rotado será también un sistema ortonormal.

Como ambos sistemas forman una base, se puede escribir al sistema rotado en términos del primero en la forma:

$$\sigma = \sum_{j=1}^3 a_j^k \sigma_j, \quad (4.2)$$

donde al utilizar el hecho que ambos sistemas son ortonormales se verifica que los coeficientes  $a_j^k$  son los *cosenos directores* que forman los vectores:  $\sigma_j, \sigma_k$ .

$$a_j^k = \cos(\theta_{j k}), \quad (4.3)$$

donde el subíndice con comilla hace referencia al vector de la base rotada, y el subíndice sin comilla al vector de la base original. De forma que se puede reescribir la ecuación anterior en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{1 \ 1}) & \cos(\theta_{1 \ 2}) & \cos(\theta_{1 \ 3}) \\ \cos(\theta_{2 \ 1}) & \cos(\theta_{2 \ 2}) & \cos(\theta_{2 \ 3}) \\ \cos(\theta_{3 \ 1}) & \cos(\theta_{3 \ 2}) & \cos(\theta_{3 \ 3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

o de forma compacta:

$$\sigma = \vec{R} \cdot \sigma, \quad (4.5)$$

donde  $\vec{R}$  es la *matriz de rotación* con coeficientes  $\cos(\theta_{j \ k})$ . Siguiendo un procedimiento similar, al describir los vectores originales en términos de los rotados se encuentra que estos están dados por:

$$\sigma = \vec{R}^T \cdot \sigma, \quad (4.6)$$

donde  $\vec{R}^T$ , es la matriz transpuesta. De acuerdo a (4.5) y (4.6) se obtiene que:

$$\vec{R} \cdot \vec{R}^T = I_d. \quad (4.7)$$

Por lo tanto la matriz transpuesta será la matriz inversa de la rotación ( $\vec{R}^T = \vec{R}^{-1}$ ), esto es consecuencia de que las rotaciones preservan la ortonormalidad de los vectores. De esto se concluye que el determinante de  $[R]$  es tal que  $\det[\vec{R}] = \pm 1$ . Para hallar el signo de este determinante, hay que tomar en cuenta que la orientación se preserva, entonces al evaluar el triple producto escalar ambas bases:

$$\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \times \sigma_3) = 1, \quad (4.8)$$

$$\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \times \sigma_3) = 1, \quad (4.9)$$

y utilizando (4.2) se halla que los coeficientes  $a_{j \ k}$  tienen la forma de un determinante cuyo resultado es 1, por (4.5) y (4.6). En consecuencia el determinante de las rotaciones es siempre igual a 1.



$$\det[\vec{R}] = 1. \quad (4.10)$$

Esta rotación se ilustra en la Figura 4.4.

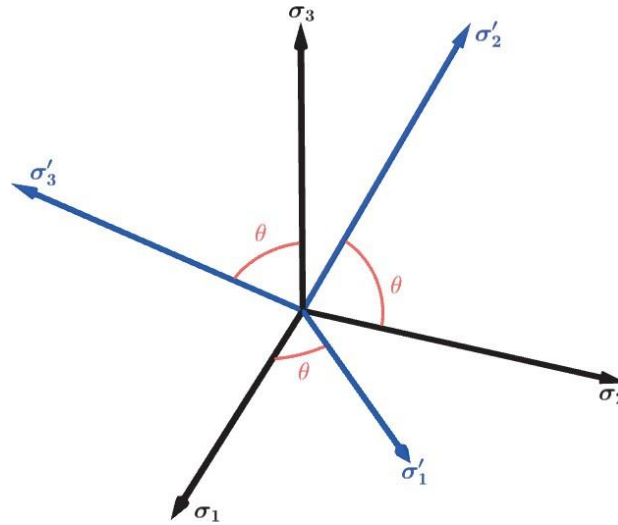


Figura 4.4. Rotación en un espacio Euclídeo  $E^3$ .

Los casos más sencillos son aquellos donde algún vector de la base permanece igual ante dicha rotación, es decir  $\sigma_j' = \sigma_j$ . Para estos casos las matrices de rotación adquieren la forma:

$$[R]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Esta matriz describe la rotación alrededor del eje de giro  $\sigma_3$ . De forma análoga se describen las rotaciones con los otros dos vectores como eje de giro:

$$[R]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$[R]_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Como consecuencia de que la rotación preserva la ortonormalidad y la orientación del sistema, se tiene que todo vector se transforma de acuerdo a (4.5) y (4.6). Es decir si  $\mathbf{a}^l$  es un vector descrito en el sistema fijo al cuerpo y  $\mathbf{a}$  es el mismo vector descrito en el sistema fijo al espacio se tiene:

$$\mathbf{a}^l = \vec{R} \cdot \mathbf{a}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{a} = \vec{R}^T \cdot \mathbf{a}^l. \quad (4.15)$$

Además el producto interno entre dos vectores cualesquiera se preserva tras una rotación por (4.14) y (4.15), esto quiere decir que se preservan las distancias y los ángulos:

$$\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{b}^l = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.16)$$

Es sencillo darse cuenta que la composición de dos rotaciones sucesivas  $\vec{R}_1$  y  $\vec{R}_2$  es nuevamente una rotación, pues si:

$$\mathbf{r}^l = \vec{R}_1 \cdot \mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}^{ll} = \vec{R}_2 \cdot \mathbf{r}^l.$$

Sustituyendo se encuentra:

$$\mathbf{r}^{ll} = \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1 \cdot \mathbf{r} = \vec{R}_3 \cdot \mathbf{r}, \quad (4.17)$$

donde  $\vec{R}_3 = \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1$ . De manera inversa:

$$\mathbf{r} = \overset{\leftarrow T}{R}_1 \cdot \overset{\leftarrow T}{R}_2 \cdot \mathbf{r}^{ll} = (\overset{\leftarrow T}{R}_2 \cdot \overset{\leftarrow T}{R}_1) \mathbf{r} = \overset{\leftarrow T}{R}_3 \cdot \mathbf{r}, \quad (4.18)$$

y debido a la regla multiplicativa de los determinantes, el determinante de  $\vec{R}_3$  es tam-

bién igual a 1. [4, 5, 9].

De este análisis se encuentra que las rotaciones forman un grupo bajo la operación de producto el cual se denota por  $SO(3, \mathbb{R})$  ya que los coeficientes de las matrices son números reales y se escribe:

$$SO(3, \mathbb{R}) := \{R \in M_{3 \times 3} \mid R^T = R^{-1}, R \cdot R^T = I_d \mid \det[R] = 1\}, \quad (4.19)$$

donde  $M_{3 \times 3}$  denota al conjunto de las matrices cuadradas de 3 dimensiones y  $R^T$  es el conjugado de la matriz, la igualdad expresa que todas las entradas de la matriz son reales.

La dimensión del grupo de rotaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente es:

$$\dim(SO(2)) = 1, \quad (4.20)$$

$$\dim(SO(3)) = 3. \quad (4.21)$$

Es decir que en el plano solo puede existir una dirección para la rotación que es en el mismo plano y en 3 dimensiones hay 3 parámetros posibles para describir una rotación.

La última propiedad del grupo  $SO(3)$  es que es continuo. Considere una transformación ortogonal que cambia al vector  $\mathbf{r}$  a un nuevo vector  $\mathbf{r}_1$  por:

$$\mathbf{r}_1 = \left( I_d + \frac{1}{N} \boldsymbol{\omega} \right) \mathbf{r}, \quad (4.22)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es una transformación infinitesimal. Su efecto es rotar de forma infinitesimal el vector  $\mathbf{r}$  a una nueva posición  $\mathbf{r}_1$ . Como la transformación es ortogonal se debe cumplir:

$$\left( I_d + \frac{1}{N} \boldsymbol{\omega} \right)^T \cdot \left( I_d + \frac{1}{N} \boldsymbol{\omega} \right) = I_d + \frac{1}{N} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{N} \boldsymbol{\omega}^T + \frac{1}{N^2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T = I_d.$$

Debido a que  $[E]$  es infinitesimal. Se puede despreciar el último término y se llega a la ecuación:

$$\vec{E}^T = -\vec{E}. \quad (4.23)$$

Por lo tanto esta transformación es antisimétrica. Siguiendo  $N$  pasos idénticos se llega a una posición  $\mathbf{r}_N$  dada por la expresión:

$$\mathbf{r}_N = \left( I_d + \frac{1}{N} \vec{E} \right)^N \cdot \mathbf{r}. \quad (4.24)$$

En el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  se obtiene finalmente:

$$\mathbf{r}_f = \exp(\vec{E}) \cdot \mathbf{r}_i. \quad (4.25)$$

Esta ecuación expresa que toda transformación ortogonal se puede expresar como la exponencial de la matriz infinitesimal y al mismo tiempo indica que este grupo de transformaciones es un grupo continuo (debido a la existencia de la matriz  $[E]$ ). En consecuencia, toda rotación se puede escribir como:

$$\vec{R} = \exp(\vec{E}). \quad (4.26)$$

## 4.2. Los ángulos de Euler.

Al describir la rotación de un cuerpo rígido con los dos sistemas coordenados Cartesianos descritos, Euler demostró que es suficiente tomar 3 rotaciones sucesivas para lograr que ambos sistemas de coordenadas coincidan, cuyos ángulos que representan dichas rotaciones se conocen como *ángulos de Euler*.

Denotando por  $(Ox, Oy, Oz)$  a los ejes fijos en el espacio y por  $(OX, OY, OZ)$  a los ejes fijos al cuerpo y  $O$  al origen de ambos sistemas de coordenadas, se tiene que la rotación general se descompone en 3, primero:

1. Una **Precesión** alrededor de cierto eje, el cual se tomará como el eje  $z$  en este caso para hacer la descripción.

2. Una **Nutación o Cabeceo** que corresponde al eje de las cotas o eje nodal que se define como la recta tal que los planos  $xOy$  del sistema fijo en el espacio y  $XOY$  del sistema fijo al cuerpo coincidan.

3. Una **Rotación** que es el eje de giro alrededor de un eje instantáneo en el cuerpo

De forma que el *pivoteo* se puede descomponer en una precesión seguida de una nutación seguida de una rotación.

Se comienza ilustrando ambos sistemas coordenados, los ángulos que indican las tres rotaciones y la línea nodal con el fin de facilitar de forma visual la descripción de las tres rotaciones (Figura 4.5):

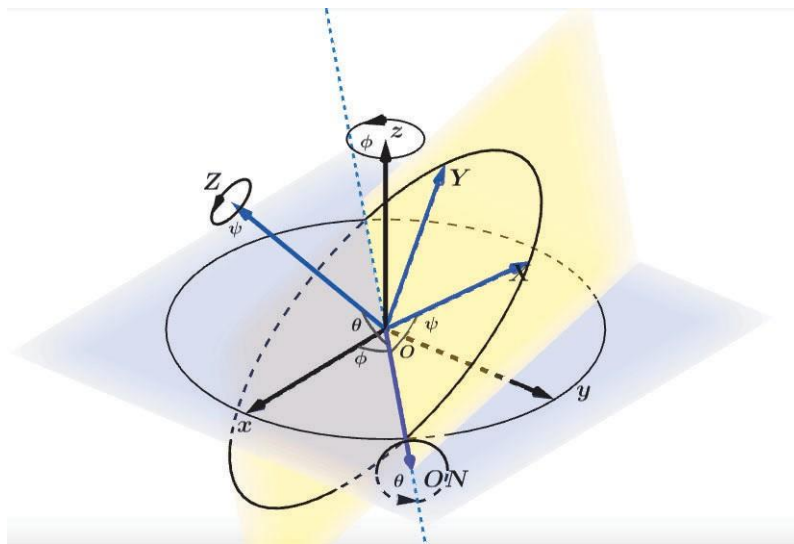


Figura 4.5. Las 3 rotaciones propuestas por Euler para corresponder el sistema fijo al cuerpo con el sistema fijo en el espacio.

De la figura, queda más clara la definición de la línea nodal  $ON$  como aquella donde los planos  $xOy$  y  $XOY$  coinciden.

**Primera rotación (Precesión):** Se rota un ángulo  $\varphi$  *alrededor del eje*  $Oz$  que lleva el eje  $Ox$  a coincidir con la línea nodal  $ON$ . Esta se ilustra en la Figura 4.6

Con esta rotación el eje  $x$ , que ahora coincide con la línea nodal  $ON$  se ubicará por

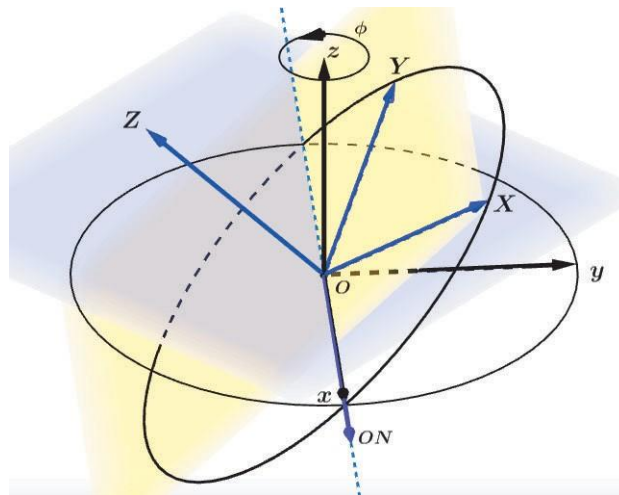


Figura 4.6. Primera rotación.

definición en el plano  $XOY$ . Como el eje  $Oz$  permanece invariante ante esta rotación, la matriz que representa esta rotación *respecto al sistema fijo*  $(Ox, Oy, Oz)$  es:

$$\vec{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Si  $\mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N)$  es la posición después de rotar el vector posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  respecto al sistema inercial un ángulo  $\varphi$ , entonces:

$$\mathbf{r}_N = \vec{R}_\varphi \cdot \mathbf{r}, \quad (4.28)$$

lo cual da el sistema de ecuaciones que relacionan las componentes:

$$x_N = x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi), \quad (4.29)$$

$$y_N = -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi), \quad (4.30)$$

$$z_N = z. \quad (4.31)$$

**Segunda rotación (Nutación):** Se rota un ángulo  $\theta$  *alrededor del eje nodal*  $ON$  hasta que los ejes  $Oz$  y  $OZ$  coincidan. Esta se muestra en la Figura 4.7, donde se agrandó ligeramente el eje  $OZ$  para distinguirlo de  $Oz$ .

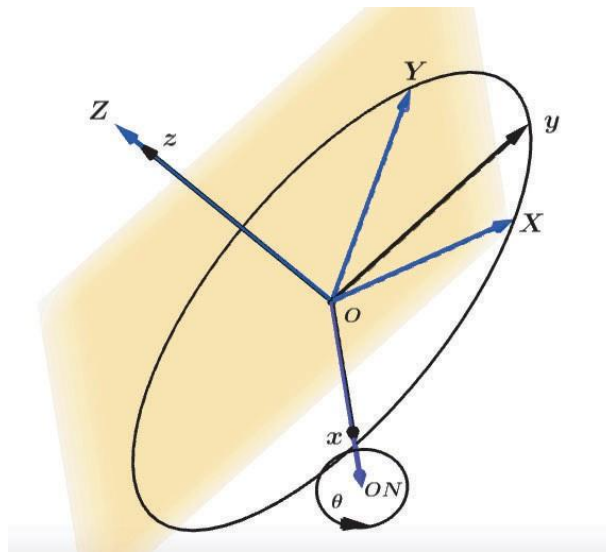


Figura 4.7. Segunda rotación.

La matriz que representa esta rotación *medida desde el sistema obtenido en la primera rotación* con  $Ox = ON$  es:

$$\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Denotando por  $\mathbf{r}_{\text{Nut}} = (x_{\text{Nut}}, y_{\text{Nut}}, z_{\text{Nut}})$  a la nueva posición del vector posición tras rotar el vector posición  $\mathbf{r}_N$  después de rotar el primer ángulo:

$$\mathbf{r}_{\text{Nut}} = \vec{R}_\theta \cdot \mathbf{r}_N, \quad (4.33)$$

o en términos de sus coordenadas:

$$x_{\text{Nut}} = x_N, \quad (4.34)$$

$$y_{\text{Nut}} = y_N \cos(\theta) + z_N \sin(\theta), \quad (4.35)$$

$$z_{\text{Nut}} = -y_N \sin(\theta) + z_N \cos(\theta). \quad (4.36)$$

Si se quiere representar desde el sistema de coordenadas fijo se sustituye con (4.33) y

(4.28) respectivamente:

$$\mathbf{r}_{\text{Nut}} = \vec{R}_\theta \cdot \vec{R}_\varphi \cdot \mathbf{r}, \quad (4.37)$$

que corresponde al producto de las matrices multiplicadas por las componentes del vector posición respecto al sistema fijo:

$$\vec{R}_\theta \cdot \vec{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & -\cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Utilizando (4.37) y (4.38) se tienen las coordenadas  $(x_{\text{Nut}}, y_{\text{Nut}}, z_{\text{Nut}})$  en términos de  $(x, y, z)$ .

$$x_{\text{Nut}} = x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi), \quad (4.39)$$

$$y_{\text{Nut}} = -x\sin(\varphi)\cos(\theta) + y\cos(\varphi)\cos(\theta) + z\sin(\theta), \quad (4.40)$$

$$z_{\text{Nut}} = x\sin(\varphi)\sin(\theta) + y\cos(\varphi)\sin(\theta) + z\cos(\theta). \quad (4.41)$$

**Tercera rotación (Rotación):** Se gira un ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $Oz$  hasta que la línea nodal  $ON$  coincida con  $OX$ . Esta se ilustra en la Figura 4.8, en donde se agrandaron ligeramente los ejes fijos al cuerpo para distinguirlos de los ejes fijos en el espacio.

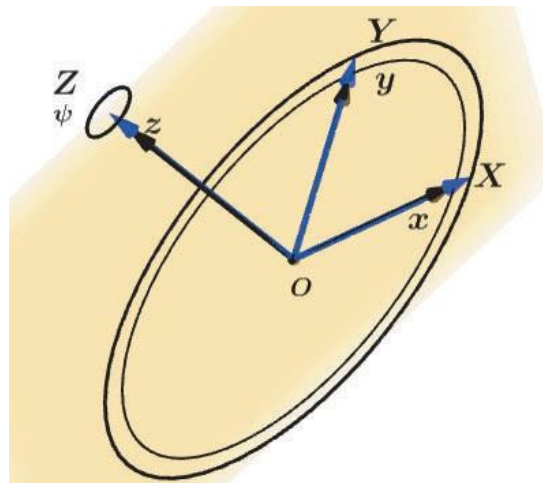


Figura 4.8. Tercera rotación.



Por lo tanto con estas 3 rotaciones sucesivas se logra que los ejes fijos al cuerpo rígido coincidan con los ejes al sistema inercial cartesiano espacial.

La matriz que representa esta rotación respecto al sistema definido por las dos rotaciones precedentes es:

$$\vec{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Denotando por  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  a las coordenadas del *vector posición* respecto al sistema fijo al cuerpo, que se obtiene al rotar un ángulo  $\psi$  el vector posición  $\mathbf{r}_{N_{ut}}$  después de las primeras notaciones es:

$$\mathbf{R} = \vec{R}_\psi \cdot \mathbf{r}_{N_{ut}}. \quad (4.43)$$

Se tiene entonces que las componentes se relacionan por:

$$X = x_{N_{ut}} \cos(\psi) + y_{N_{ut}} \sin(\psi), \quad (4.44)$$

$$Y = -x_{N_{ut}} \sin(\psi) + y_{N_{ut}} \cos(\psi), \quad (4.45)$$

$$Z = z_{N_{ut}}. \quad (4.46)$$

Si se quiere respecto al vector  $\mathbf{r}_N$  se sustituye con (4.37):

$$\mathbf{R} = \vec{R}_\psi \cdot \vec{R}_\theta \cdot \mathbf{r}_N. \quad (4.47)$$

O en términos de las componentes:

$$X = x_N \cos(\psi) + y_N \cos(\theta) \sin(\psi) + z_N \sin(\theta) \sin(\psi), \quad (4.48)$$

$$Y = -x_N \sin(\psi) + y_N \cos(\theta) \cos(\psi) + z_N \sin(\theta) \cos(\psi), \quad (4.49)$$

$$Z = y_N \sin(\theta) + z_N \cos(\theta). \quad (4.50)$$

Y finalmente el vector posición  $\mathbf{R}$  con coordenadas respecto al cuerpo en términos

del vector posición  $\mathbf{r}$  respecto al espacio, se utiliza la primera rotación:

$$\mathbf{R} = \vec{R} \cdot \mathbf{r}, \quad (4.51)$$

donde se ha hecho:

$$\vec{R} = \vec{R}_\psi \cdot \vec{R}_\theta \cdot \vec{R}_\varphi. \quad (4.52)$$

Esta matriz de rotación tiene la forma:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\cos(\varphi) \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\varphi) \sin(\psi) + \cos(\varphi) \cos(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & -\cos(\varphi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

que da lugar a la siguiente relación entre las coordenadas  $(X, Y, Z)$  y  $(x, y, z)$ :

$$X = x[\cos(\varphi) \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cos(\theta) \sin(\psi)] + y[\sin(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cos(\theta) \sin(\psi)] + z \sin(\theta) \sin(\psi), \quad (4.54)$$

$$Y = x[-\cos(\varphi) \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cos(\theta) \cos(\psi)] + y[-\sin(\varphi) \sin(\psi) + \cos(\varphi) \cos(\theta) \cos(\psi)] + z \sin(\theta) \cos(\psi), \quad (4.55)$$

$$Z = x \sin(\varphi) \sin(\theta) - y \cos(\varphi) \cos(\theta) + z \cos(\theta). \quad (4.56)$$

Como  $\vec{R}$  es ortogonal su inversa está dada por:

$$\vec{R}^{-1} = \vec{R}^T = \vec{R}_\varphi^T \cdot \vec{R}_\theta^T \cdot \vec{R}_\psi^T, \quad (4.57)$$

y es tal que:

$$\mathbf{r} = \vec{R}^T \cdot \mathbf{R}. \quad (4.58)$$

En conclusión, la matriz de rotación transpuesta *cambia el sistema fijo al cuerpo al sistema inercial fijo en el espacio*. Hay que recordar que un sistema inercial es aquel donde el observador está libre de las influencias causadas por fuerzas externas [9].

### 4.3. La fórmula de rotación de Olinde Rodrigues

Otro punto de vista para describir las rotaciones que es mediante la *fórmula de Olinde Rodrigues* que tiene la ventaja de que en ningún momento se utiliza un sistema coordenado, a diferencia de los ángulos de Euler, para hacer una descripción de la rotación. En esta construcción solo requiere del eje y un ángulo de rotación.

Para construir la fórmula de Olinde Rodrigues, considere un origen  $O$  del cual se construye un vector a un punto  $P$  denotado por  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  y otro vector a un punto  $P^t$  denotado por  $\mathbf{r}^t = \overrightarrow{OP^t}$ . Se construye una recta que pasa por el punto  $O$  y se ubica un punto  $O^t$  de manera que el plano  $O^tPP^t$  es perpendicular a la recta. Los puntos  $P$  y  $P^t$  están separados por un ángulo  $\theta$  en el plano  $O^tPP^t$ . La recta que pasa por  $O$  y  $O^t$  servirá como el eje instantáneo de giro como se observa en la Figura 4.9.

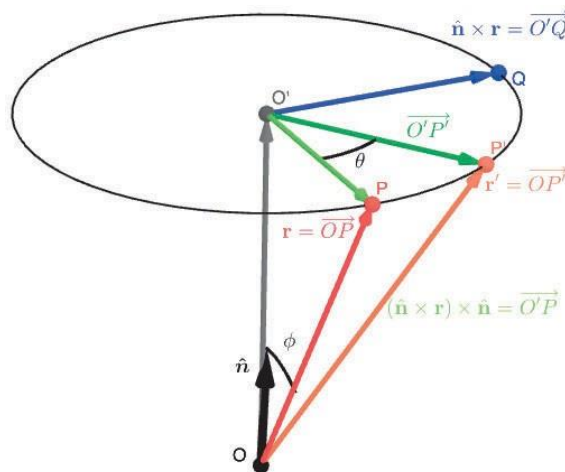


Figura 4.9. Esquema auxiliar para la construcción de la fórmula de Olinde Rodrigues

En la figura se han construido además dos vectores auxiliares  $\overrightarrow{O^tP}$  y  $\overrightarrow{O^tP^t}$  y al vector unitario paralelo al eje de giro se le ha denotado por  $\hat{\mathbf{n}}$ . Se ubica un punto  $Q$  y se construye un vector como  $O^tQ = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$ . Nótese que el punto  $Q$  se ubica en el plano  $O^tPP^t$  por construcción de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  y el plano  $O^tPP^t$ . Se observa que los vectores  $\overrightarrow{O^tP}$  y  $\overrightarrow{O^tQ}$  son ortogonales y se encuentran en la misma circunferencia, debido a que  $\overrightarrow{O^tP^t}$  se encuentra en este mismo plano, esta se relaciona

a las dos primeras cantidades por:

$$\overrightarrow{O^t P^t} = \overrightarrow{O^t P} \cos(\theta) + \overrightarrow{O^t Q} \sin(\theta). \quad (4.59)$$

Como se ilustra en la Figura 4.10:

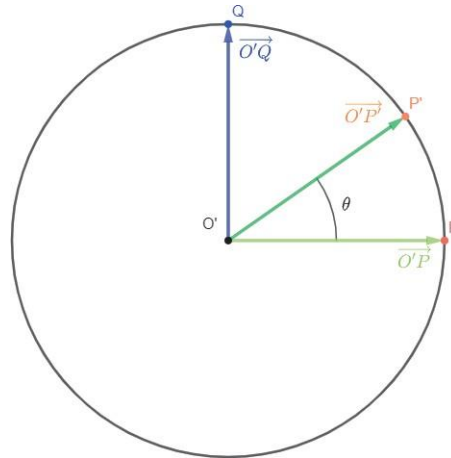


Figura 4.10. Plano  $O^t P P^t$ .

Debido a la regla del paralelogramo se tiene por otra parte:

$$\overrightarrow{P P^t} = \overrightarrow{O^t P^t} - \overrightarrow{O^t P} = \overrightarrow{O^t P} [\cos(\theta) - 1] + \overrightarrow{O^t Q} \sin(\theta). \quad (4.60)$$

Reescribiendo la ecuación en términos de los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}^t$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  se obtiene:

$$\mathbf{r}^t - \mathbf{r} = [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] \cdot [1 - \cos(\theta)] + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \sin(\theta). \quad (4.61)$$

donde se ha ocupado la antisimetría del producto vectorial.

A la fórmula (4.61) se le conoce como *La fórmula de Olinde Rodrigues para las rotaciones* y establece una correspondencia entre el vector posición  $\mathbf{r}$  y el vector desplazado  $\mathbf{r}^t$  alrededor de un cierto eje de giro instantáneo definido por el vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Desarrollando el triple producto vectorial y ocupando que el vector  $\hat{\mathbf{n}}$  es unitario:

$$\mathbf{r}^t - \mathbf{r} = [1 - \cos(\theta)][\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}] + \sin(\theta)[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}]. \quad (4.62)$$

Desarrollando esta fórmula y utilizando la matriz identidad se tiene:

$$\mathbf{r}^t = [\cos(\theta)\vec{I}_d + (1 - \cos(\theta))\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \cdot + \sin(\theta)(\hat{\mathbf{n}} \times \cdot)]\mathbf{r}, \quad (4.63)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$  es el producto tensorial del vector  $\hat{\mathbf{n}}$  con sí mismo. La fórmula anterior es de la forma  $\mathbf{r}^t = \vec{A} \cdot \mathbf{r}$  con  $\vec{A}$  el operador que genera la rotación:

$$\vec{A} = [\cos(\theta)\vec{I}_d + (1 - \cos(\theta))\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \cdot + \sin(\theta)(\hat{\mathbf{n}} \times \cdot)]. \quad (4.64)$$

Este operador depende fundamentalmente del eje de giro dado por el vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  y el ángulo  $\theta$  en el cual cambia el vector  $\mathbf{r}$ . Como el vector  $\hat{\mathbf{n}}$  es unitario, sus componentes  $(n_x, n_y, n_z)$  cumplen con la condición:

$$(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2 = 1. \quad (4.65)$$

Entonces  $\vec{A}$  solo depende de 3 parámetros independientes. Utilizando las identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2), \quad (4.66)$$

$$\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2), \quad (4.67)$$

se puede reescribir  $\vec{A}$  como sigue:

$$\vec{A} = [\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)]\vec{I}_d + 2\sin^2(\theta/2)\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \cdot + 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\mathbf{n}} \times \cdot. \quad (4.68)$$

Ahora, se definen los cuatro parámetros:

$$q_0 = \cos(\theta/2), \quad (4.69)$$

$$q_1 = \sin(\theta/2)n_x, \quad (4.70)$$

$$q_2 = \sin(\theta/2)n_y, \quad (4.71)$$

$$q_3 = \sin(\theta/2)n_z, \quad (4.72)$$

y un vector de componentes  $\mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ . Es claro que se tiene la identidad:

$$\mathbf{q} = \sin(\theta/2)\hat{\mathbf{n}}. \quad (4.73)$$

Estos cuatro parámetros que se han definido no son independientes ya que:

$$(q_0)^2 + (q_1)^2 + (q_2)^2 + (q_3)^2 = (q_0)^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 1. \quad (4.74)$$

Por lo tanto, la fórmula de Olinde-Rodrigues se puede escribir en términos de estos 4 parámetros en la forma

$$\vec{\mathbf{A}} = \{[(q_0)^2 - \|\mathbf{q}\|^2]\vec{\mathbf{I}}_d + 2\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + 2q_0\mathbf{q} \times\}. \quad (4.75)$$

Este operador puede escribirse como una matriz de  $3 \times 3$ , expandiendo la matriz identidad y el diádico  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}$  en la forma:

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} ((q_0)^2 - \|\mathbf{q}\|^2) + 2q_1q_1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & ((q_0)^2 - \|\mathbf{q}\|^2) + 2q_2q_2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & ((q_0)^2 - \|\mathbf{q}\|^2) + 2q_3q_3 \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Rearreglando términos:

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} (q_0)^2 + (q_1)^2 - (q_2)^2 - (q_3)^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & (q_0)^2 - (q_1)^2 + (q_2)^2 - (q_3)^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & (q_0)^2 - (q_1)^2 - (q_2)^2 + (q_3)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Este es un resultado general siempre que se conozca el eje de giro y su orientación

en el espacio  $E^3$ , si se elige un sistema coordenado cuyo origen sea un punto del eje de giro, entonces será la inclinación respecto a este sistema de coordenadas lo único requerido para conocer la rotación del objeto.

El siguiente paso será comparar al operador de la fórmula de Olinde Rodrigues (4.75) para la rotación y la fórmula de rotación de Euler (4.53). Es decir, se quieren relacionar los ángulos de Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$  y los parámetros de Rodrigues  $(q_0, \mathbf{q})$ .

En términos de *los ángulos de Euler* se propuso la existencia de un sistema coordenado fijo al cuerpo cuyo eje de giro es supuesto sin dar explicación a cual es éste.

En términos de *los parámetros de Olinde Rodrigues* se ubica desde un inicio el eje de giro del cuerpo, mas se ignoran los ángulos relativos entre el sistema fijo al cuerpo y el sistema fijo al espacio.

Por lo tanto deben coincidir el operador de Olinde-Rodrigues y la matriz de rotación de Euler ( $\vec{A} = \vec{R}$ ). Esto ocurre si y solo si cada una de las entradas de las matrices coinciden, dando a un sistema de cuatro ecuaciones, en donde se escriben solo las que están en la diagonal de la misma y se reescribe la ecuación (4.74):

$$(q_0)^2 + (q_1)^2 - (q_2)^2 - (q_3)^2 = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \cos(\theta)\sin(\varphi)\sin(\psi), \quad (4.78)$$

$$(q_0)^2 - (q_1)^2 + (q_2)^2 - (q_3)^2 = -\sin(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\theta)\cos(\varphi)\cos(\psi), \quad (4.79)$$

$$(q_0)^2 - (q_1)^2 - (q_2)^2 + (q_3)^2 = \cos(\theta), \quad (4.80)$$

$$(q_0)^2 + (q_1)^2 + (q_2)^2 + (q_3)^2 = 1. \quad (4.81)$$

Como se vio, la última ecuación se satisface automáticamente por construcción. Resolviendo

este sistema de ecuaciones se encuentra:

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad (4.82)$$

$$q_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad (4.83)$$

$$q_2 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad (4.84)$$

$$q_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}. \quad (4.85)$$

Para no confundir  $\theta$  de (4.82)-(4.85), que se refiere al ángulo de nutación de Euler, con  $\theta$  de los parámetros de Rodrigues (4.69)-(4.72) se cambiará de variable  $\theta \rightarrow \alpha$  en (4.69)-(4.72). De forma que se relacionan directamente los ángulos mediante:

$$\cos(\alpha) = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad (4.86)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\varphi + \psi}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\varphi + \psi}{2}}. \quad (4.87)$$

#### 4.4. El cuaternión de Pivoteo.

En esta sección se abordará una forma alternativa de tratar el pivoteo de un cuerpo rígido en 3 dimensiones, que es por medio de los cuaterniones. Primero, se regresa al caso correspondiente al plano, es decir si se elige en la fórmula de Olinde Rodrigues al vector normal  $\hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}_3$ , y el vector posición inicial  $\mathbf{r}$  está en el plano  $xOy$  de forma que  $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  se tiene:

$$\mathbf{r}^t = \cos(\theta)\mathbf{r} + \sin(\theta)(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}), \quad (4.88)$$

o en términos de los parámetros de Olinde Rodrigues  $q_0 = \cos(\theta)$  y  $\mathbf{q} = \sin(\theta)\boldsymbol{\sigma}_3$ . Si las componentes del vector son  $\mathbf{r} = x_1\boldsymbol{\sigma}_1 + x_2\boldsymbol{\sigma}_2$ , ya que es perpendicular a  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$ , entonces las componentes del vector posición rotado  $\mathbf{r}^t$  como se describe en este caso



particular está dada por  $\mathbf{r}^t = y_1\boldsymbol{\sigma}_1 + y_2\boldsymbol{\sigma}_2$ . Y las componentes se relacionan por:

$$y_1 = x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta), \quad (4.89)$$

$$y_2 = x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta), \quad (4.90)$$

$$y_3 = x_3. \quad (4.91)$$

Esta misma rotación en el plano  $xOy$  se puede visualizar desde el enfoque de los espinores planos con el bivector unitario  $\mathbf{i}$ :

$$z = x_1 + \mathbf{i}x_2, \quad (4.92)$$

$$z^t = y_1 + \mathbf{i}y_2. \quad (4.93)$$

Estas componentes se relacionan mediante:

$$z^t = y_1 + \mathbf{i}y_2 = [\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)][x_1 + \mathbf{i}x_2]. \quad (4.94)$$

Utilizando la relación de Euler se llega a la descripción compleja para las rotaciones:

$$z^t = e^{\mathbf{i}\theta}z := e^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}ze^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}. \quad (4.95)$$

Por lo tanto la rotación en el plano  $E^2$  o un plano de  $E^3$ , que en este caso se dio como el plano  $xOY$ , está caracterizada por un solo parámetro que es el ángulo  $\theta$ .

Para una rotación general donde el vector que indica el eje de giro  $\hat{\mathbf{n}}$  se encuentra en una dirección general en  $E^3$  en la fórmula de Olinde Rodrigues. En este caso, como se vio con los ángulos de Euler, es necesario tener 3 parámetros de giro para cambiar la orientación a fin de que coincida con los ejes cartesianos ortogonales. Sin embargo, se observó en el capítulo 3 que los cuaterniones en  $E^3$  también permiten describir una rotación general. Hamilton fue el primero en llegar a esta idea [2], éste propuso que

todo pivoteo puede escribirse como :

$$\mathbf{r}^t = Q^\dagger \mathbf{r} Q, \quad (4.96)$$

donde  $Q$  es un cuaternión de la forma:

$$Q = q_0 + i\mathbf{q} = \cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)\hat{\mathbf{n}} = e^{i(\frac{\theta}{2})\hat{\mathbf{n}}}. \quad (4.97)$$

el cual se define como *el cuaternión de pivoteo*. Nótese que en la última igualdad se hace uso de la identidad de Euler para cuaterniones. Esta expresión resulta en una forma generalizada de (4.95) para el caso de  $E^3$ . Por construcción, este cuaternión cumple la identidad:

$$QQ^\dagger = Q^\dagger Q = 1. \quad (4.98)$$

Además se define al cuaternión de posición por:

$$R = i\mathbf{r}. \quad (4.99)$$

La multiplicación de ambos da como resultado, utilizando el producto (3.134):

$$RQ = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} + i(q_0\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{q}) = t_0 + it. \quad (4.100)$$

y multiplicando este cuaternión por el dual del cuaternión de pivoteo  $Q^\dagger$  por la izquierda resulta en:

$$Q^\dagger RQ = q_0 t_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} + i[q_0 \mathbf{t} - t_0 \mathbf{q} + (\mathbf{q} \times \mathbf{t})]. \quad (4.101)$$

Sustituyendo con  $t_0$  y  $\mathbf{t}$  de la ecuación (4.100) y desarrollando se obtiene de la parte escalar:

$$q_0 t_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} = q_0(-\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) + (q_0\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (4.102)$$

y de la parte bivectorial:

$$q_0 \mathbf{t} - t_0 \mathbf{q} + (\mathbf{q} \times \mathbf{t}) = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2) \mathbf{r} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}). \quad (4.103)$$

Por lo tanto:

$$Q^\dagger R Q = \tilde{r} [(q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2) \mathbf{r} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r})]. \quad (4.104)$$

Se observa entonces que la parte escalar del cuaternión se anula, y la parte bivectorial del mismo reproduce la fórmula de Olinde Rodrigues que se obtuvo con una formulación puramente vectorial.

La parte bivectorial del producto anterior representa un operador que actúa sobre un punto material de un cuerpo rígido que pivotea alrededor de un punto fijo. Entonces si se escribe  $R' = 0 + i\mathbf{r}'$  al cuaternión del punto material tras dicho pivoteo, se tiene:

$$R' = Q^\dagger R Q, \quad (4.105)$$

e inversamente:

$$R = Q R' Q^\dagger, \quad (4.106)$$

donde se ocupó la igualdad (4.98). Si se toma ahora como punto de partida la posición  $\mathbf{r}'$  del punto material a un nuevo punto  $\mathbf{r}''$  causado por un pivoteo. Considerando desde la misma perspectiva el problema con un cuaternión de pivoteo  $P$ :

$$R'' = P^\dagger R' P, \quad (4.107)$$

y en términos de la posición original:

$$R'' = P^\dagger Q^\dagger R Q P = (QP)^\dagger R (QP). \quad (4.108)$$

Ahora, definiendo  $T = QP$  se reescribe la ecuación anterior como:

$$R^{II} = T^{\dagger}RT. \quad (4.109)$$

Por lo tanto  $T$  es también un cuaternión de pivoteo cuyo módulo es la unidad que es producto de la aplicación sucesiva de dos cuaterniones de pivoteo.

### Rotación de un cuerpo rígido mediante matrices de Pauli

Dado que se ha representado la rotación de un cuerpo rígido mediante cuaterniones, y estos a su vez pueden representarse por medio de las ecuaciones (3.125)-(3.127).

Es posible escribir al espinor de pivoteo  $Q$  en la forma (3.130), es decir:

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & iq_1 + q_2 \\ iq_1 - q_2 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix}. \quad (4.110)$$

O en forma alternativa mediante los parámetros propuestos por Arthur Cayley y Felix Klein, conocidos como *los parámetros de Cayley-Klein* en la forma:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (4.111)$$

La relación de estos parámetros con los de Olinde Rodrigues es:

$$\alpha = q_0 + iq_3, \quad (4.112)$$

$$\beta = q_2 + iq_1, \quad (4.113)$$

$$\gamma = -q_2 + iq_1, \quad (4.114)$$

$$\delta = q_0 - iq_3. \quad (4.115)$$

Nótese que  $\alpha^* = \delta$  y  $\beta = -\gamma^*$ , por lo cual únicamente dos de los parámetros son independientes. Así que puede reescribirse como:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

El conjugado del cuaternión de pivoteo  $Q^\dagger$  tiene la forma:

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Haciendo la multiplicación de las matrices  $Q$  con  $Q^\dagger$  se obtiene:

$$q^\dagger q = I_d. \quad (4.118)$$

Debido a que el cuaternión de pivoteo tiene módulo 1, por la ecuación (4.98) se concluye que esta multiplicación da como resultado la matriz identidad:

$$Q^\dagger = Q^{-1}, \quad (4.119)$$

y dado que el cuaternión de pivoteo preserva la orientación, se cumple que su determinante tiene signo positivo:

$$\det[Q] = 1. \quad (4.120)$$

En consecuencia el cuaternión de pivoteo descrito mediante matrices  $2 \times 2$  de entradas complejas, satisface (4.7) y (4.10) como las matrices de rotación.

Para finalizar se relacionan los parámetros de Cayley-Klein con los ángulos de Euler para las rotaciones, lo cual se puede hacer mediante los parámetros de Olinde-Rodrigues que fueron los que dieron al paso de escribir las rotaciones con cuaterniones.

Esto se hace mediante las ecuaciones (4.82)-(4.85). Se tiene:

$$\alpha = \mathfrak{q} + i\mathfrak{q}_3 = \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\varphi+\psi}{2})}, \quad (4.121)$$

$$\beta = \mathfrak{q} + i\mathfrak{q}_1 = i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\varphi-\psi}{2})}, \quad (4.122)$$

donde se ha ocupado la identidad de Euler en las 2 ecuaciones anteriores para simplificar la expresión. Por lo tanto el cuaternión de pivoteo se escribe como:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\varphi+\psi}{2})} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\varphi-\psi}{2})} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\varphi+\psi}{2})} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\varphi-\psi}{2})} \end{pmatrix}. \quad (4.123)$$

Se observa que  $\det[Q] = \cos^2(\theta/2) - i^2 \sin^2(\theta/2) = 1$  en acorde a lo construido. Nótese que el cuaternión de pivoteo se puede descomponer en:

$$Q = Q_\psi Q_\theta Q_\varphi. \quad (4.124)$$

donde estos están dados por

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} = e^{i(\frac{\psi}{2})\hat{\sigma}_3}, \quad (4.125)$$

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{i(\frac{\theta}{2})\hat{\sigma}_1} \quad (4.126)$$

$$Q_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = e^{i(\frac{\varphi}{2})\hat{\sigma}_3}. \quad (4.127)$$

Estas matrices también son matrices de pivoteo ya que cumplen (4.119) y (4.120). La forma de la derecha indica que es la exponencial de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ .

Así la matriz de pivoteo general  $\vec{R}$  escrita en la términos del grupo de rotaciones de  $E^3$  describe el mismo pivoteo desde el punto de vista del cuaternión de pivoteo  $Q$ .

$$Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi \sim \vec{R} = \vec{R}_\psi \vec{R}_\theta \vec{R}_\phi. \quad (4.128)$$

Debido a que las matrices de rotación forman un grupo, y los cuaterniones de pivoteo describen lo mismo que éstas. Se concluye que éstos exhiben las características de un grupo, a este grupo se le llama el *Grupo especial unitario de dimensión 2* y se denota por  $SU(2)$ :

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & \beta \\ -\beta^* & a^* \end{pmatrix} \mid a, \beta \in \mathbb{C} \text{ con } |a|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}. \quad (4.129)$$

Por lo tanto los grupos  $SU(2)$  y  $SO(3)$  son isomorfos, es decir:

$$SU(2) \sim SO(3). \quad (4.130)$$

En conclusión, los cuaterniones proveen una descripción alternativa y más simple de un pivoteo de un cuerpo rígido, regida por la ecuación (4.96).

## 4.5. Cinemática del cuerpo rígido

Para describir la cinemática del cuerpo rígido, se partirá de la ecuación (4.96).

Se define el operador "derivada temporal" de un cuaternión como:

$$\frac{dQ(t)}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}. \quad (4.131)$$

Se puede demostrar que este operador tiene las mismas propiedades que la derivada usual de funciones escalares y vectoriales, es decir, es lineal, cumple la regla de Leibniz y cumple la regla de la cadena [2, 11]. A este operador también se le denota por

$D_t Q = \dot{Q}$ . Derivando la identidad  $QQ^\dagger = 1$  se obtiene:

$$\dot{Q}Q^\dagger = -Q\dot{Q}^\dagger. \quad (4.132)$$

Puede demostrarse además que  $D_t(Q^\dagger) = (D_t Q)^\dagger$ , es decir que las operaciones de derivar y conjugar son intercambiables. Por lo cual si se define un cuaternión  $\Omega$  como:

$$\Omega = -2\dot{Q}Q^\dagger. \quad (4.133)$$

Por la identidad (4.133) tiene la propiedad:

$$\Omega = -\Omega^\dagger. \quad (4.134)$$

Comparando con (3.58), se concluye que el cuaternión  $\Omega$  es un bivector, es decir que su parte escalar es nula. Por lo tanto este cuaternión tiene la forma:

$$\Omega = 0 + i\boldsymbol{\omega}. \quad (4.135)$$

Para hallar al vector  $\boldsymbol{\omega}$  se debe sustituir (4.135) de forma explícita con (4.97), pero antes se menciona brevemente que la derivada de un cuaternión es la suma de la derivada de su parte escalar y su parte bivectorial [11]:

$$\dot{Q}Q^\dagger = (\dot{q}_0 + i\dot{\mathbf{q}})(q_0 - i\mathbf{q}) = (\dot{q}_0 q_0 + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}) + i(q_0 \dot{\mathbf{q}} - \dot{q}_0 \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q}). \quad (4.136)$$

La parte escalar se anula debido a que este cuaternión tiene módulo uno:

$$q\dot{q}'_0 + \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} q^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Q|^2 = 0. \quad (4.137)$$

Por otro lado, la parte vectorial da la forma explícita del vector  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = 2[\dot{q}_0 \mathbf{q} - q_0 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q}]. \quad (4.138)$$

A este vector se le conoce como la velocidad angular y describe la rotación de un plano, lo cual se traduce en que es el dual del bivector de rotación  $\Omega$ . Nótese que con



esta cantidad, la derivada del cuaternión de pivoteo puede escribirse como:

$$\dot{Q} = -\frac{1}{2}\Omega Q. \quad (4.139)$$

Al derivar la ecuación (4.105), se obtiene:

$$\dot{R}^t = \dot{Q}^t R Q + Q^t \dot{R} Q + Q^t R \dot{Q}. \quad (4.140)$$

Utilizando (4.140) y (4.135) resulta en:

$$\dot{R}^t = \frac{1}{2}Q^t \Omega R Q + Q^t \dot{R} Q - \frac{1}{2}Q^t R \Omega Q, \quad (4.141)$$

que puede reescribirse así:

$$\dot{R}^t = Q^t \overset{\curvearrowright}{\dot{R}} + \frac{1}{2}(\Omega R - R \Omega) Q. \quad (4.142)$$

El primer término del lado derecho de la igualdad debe reconocerse como el cuaternión posición tras la rotación  $\dot{R} = \dot{\mathbf{r}}$  en la cual se sustituye (4.105) mientras que el segundo término, dado que es un producto antisimétrico de bivectores se puede reescribir como:

$$\dot{R}^t = Q^t(\dot{R} + \Omega \cdot R)Q, \quad (4.143)$$

o, utilizando que un bivector es el dual de un vector, este puede reescribirse como el producto vectorial de dos vectores de los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{r}$ . Por lo tanto, en términos vectoriales la anterior ecuación se reescribe como:

$$\dot{\mathbf{r}}^t = Q^t(\dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})Q. \quad (4.144)$$

En el caso de que el sistema de referencia esté montado en el sistema que gira, la posición tras la rotación es la misma, es decir  $\dot{R} = 0$  y en consecuencia.

$$\dot{R} = -\Omega \cdot R = R \cdot \Omega. \quad (4.145)$$

O alternativamente, en la notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4.146)$$

Esta ecuación indica que el cambio en la posición del punto tras el pivoteo está medido por la velocidad angular del mismo, es decir cuan rápido haya sido el giro.

Si se quiere conocer el segundo cambio en el giro de un cuerpo rígido, se requiere conocer  $\dot{\Omega}$ , para ello se puede derivar dos veces (4.98) y darse cuenta que se satisface la identidad:

$$\dot{Q}\dot{Q}^\dagger = -\frac{\ddot{Q}Q^\dagger + Q\ddot{Q}^\dagger}{2}. \quad (4.147)$$

Al derivar (4.134), y sustituir con (4.146) se obtiene:

$$\dot{\Omega} = -2(\ddot{Q}Q^\dagger + 2\dot{Q}\dot{Q}^\dagger) = Q\ddot{Q}^\dagger - \ddot{Q}Q^\dagger. \quad (4.148)$$

En forma vectorial la expresión (4.148) se reescribe como:

$$\dot{\Omega} = i\dot{\boldsymbol{\omega}} = 2i(\ddot{q}_0\mathbf{q} - q_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}}). \quad (4.149)$$

Si se deriva la expresión (4.144) se llega a:

$$\ddot{R} = \dot{Q}^\dagger(\dot{R} + \Omega \cdot R)Q + Q^\dagger(\ddot{R} + \dot{\Omega} \cdot R + \Omega \cdot \dot{R})Q + Q^\dagger(\dot{R} + \Omega \cdot R)\dot{Q}, \quad (4.150)$$

sustituyendo con (4.139) y utilizando (4.143) para tener una expresión en términos de  $\dot{R}$  y  $\Omega \cdot R$  da como resultado:

$$\ddot{R} = Q^\dagger[\ddot{R} + 2\Omega \cdot \dot{R} + A \cdot R + \Omega \cdot (\Omega \cdot R)]Q, \quad (4.151)$$

donde  $A = \dot{\Omega}$  se le llamará la "aceleración angular". Como estos cuaterniones son bivectores, también se puede escribir como  $i\boldsymbol{\alpha} = i\dot{\boldsymbol{\omega}}$ . En la notación vectorial esto se

expresa como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^+[\ddot{\mathbf{r}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\mathbf{Q}. \quad (4.152)$$

Si se toma el caso en que se cumple (4.146), esto se reduce a:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.153)$$

O utilizando la notación vectorial:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.154)$$

Este resultado indica que en el caso de que el punto  $\mathbf{r}$  permanezca inmóvil aún pueden presentarse aceleraciones regidas por la misma rotación del cuerpo y una aceleración en la velocidad del mismo.

Se observa que desde el punto de vista de los cuaterniones, se reproduce de forma exitosa la rotación y la cinemática de un cuerpo rígido en una forma completamente compatible con la representación vectorial usual.

# Capítulo 5

## Mecánica cuaterniónica

En esta sección se estructura la mecánica clásica a través de una estructura cuaterniónica. Pues se observó como el álgebra geométrica permite una descripción más natural y completa del espacio físico clásico concebido, que es descrito como un espacio Euclídeo  $E^3$ . Sin embargo es suficiente trabajar con la estructura par de la misma, es decir la parte cuaterniónica de la misma. Esto es debido a que el espacio es tridimensional y en consecuencia se puede al trivector y al bivector como la parte dual del escalar y vector respectivamente.

Se verá como con este lenguaje cuaterniónico se reproducen todos los conceptos de la misma de forma natural si se compara con la formulación puramente vectorial. Algo novedoso de la descripción cuaterniónica aparecen los conmutadores y anticonmutadores al describir cantidades físicas tales como el momento angular, la torca, o la energía cinética.

Además de reproducir los mismos resultados que aparecen con el desarrollo vectorial de la mecánica clásica, se verá que aparece de forma natural con esta formulación el "espín" como consecuencia de la parte vectorial en la expresión cuaterniónica de la ley de conservación de energía, tanto para el caso de una sola partícula, como de un sistema de ellas.

## 5.1. Conceptos básicos de la Mecánica en términos cuaterniónicos

Ahora se desarrollarán los conceptos fundamentales de la mecánica mediante cuaterniones. Se asumirá que los mismos siguen la convención de la orientación derecha (3.103), (3.117) para que su descripción sea puramente tensorial y se puede utilizar como camino alternativo para desarrollar la mecánica.

Lo primero que se hará será definir las cantidades cinemáticas más fundamentales de la mecánica. Se empieza por el cuaternión de posición de un cuerpo respecto a un sistema coordenado:

$$R := r_0 + i\mathbf{r}. \quad (5.1)$$

Se define al cuaternión velocidad como la derivada del cuaternión de posición, y la aceleración como la derivada del cuaternión velocidad:

$$V = D_t R = \dot{R} = \dot{r}_0 + i\dot{\mathbf{r}}, \quad (5.2)$$

$$A = D_t V = D_t^2 R = \ddot{R} = \ddot{r}_0 + i\ddot{\mathbf{r}}. \quad (5.3)$$

El cuaternión de masa se formula como un escalar:

$$M = m + i\mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Y por último se define al cuaternión de momento lineal:

$$P = MV = p_0 + i\mathbf{p} = m\dot{r}_0 + i(m\dot{\mathbf{r}}). \quad (5.5)$$

Para dar significado físico a las partes escalares de los cuaterniones de posición, velocidad, aceleración y momento, como solo se necesita de un número real para medirse, el cual debe ser igual para dos sistemas de referencias arbitrarios, estas partes se pueden interpretar como la posición, velocidad y momento lineal intrínsecos

al cuerpo. Pues debido a su naturaleza escalar, estas cantidades son intrínsecas de la partícula y no dependen de un sistema de referencia particular. Nótese que todas estas cantidades se reducen a su forma vectorial haciendo estas partes escalares nulas.

## 5.2. Leyes de Newton

En esta sección se enuncian las 3 Leyes de Newton a través de esta formulación cuaterniónica

### 5.2.1. Primera Ley de Newton

La primera Ley de movimiento de Newton enuncia y establece un *Sistema inercial* como un Sistema de referencia patrón para un observador, que es aquel libre de interacciones y en consecuencia presenta el movimiento más simple. El movimiento rectilíneo uniforme. Establece:

*Desde un marco de referencia inercial, todo cuerpo libre de interacciones externas se observará en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme [9]*

El llamado reposo es un caso particular de velocidad constante y es  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Este es el primer postulado que se toma de la mecánica, donde se considera que al describir el movimiento de un cuerpo, se trabaja en un Sistema de referencia inercial.

### 5.2.2. Segunda Ley de Newton

Si desde un marco de referencia inercial se observa que el objeto sigue un movimiento que no es rectilíneo uniforme entonces significa que este siente una interacción provocada por algún agente físico al que Newton llamó *Fuerza* que causa que acelere y se desvíe de dicho movimiento. Esta dice:

*Cualquier tipo de interacción que experimenta un cuerpo es una fuerza que lo urge*

a cambiar su estado de movimiento [9]

De acuerdo a lo anterior, la Fuerza será la causante de un cambio en el estado de movimiento del cuerpo, o mejor dicho el cambio de la cantidad de movimiento. Por lo cual la segunda Ley se expresa en términos cuaterniónicos como:

$$F = D_t P = \dot{P}. \quad (5.6)$$

O expandiendo ambos lados:

$$f_0 + if = \dot{p}_0 + ip. \quad (5.7)$$

Nótese que si  $F = 0$  entonces de acuerdo a (5.6) la cantidad de movimiento será constante, y si la masa del cuerpo es también constante se llega a la conclusión de que el cuerpo tiene un movimiento rectilíneo uniforme que es lo establecido en la primera ley *cuya forma matemática de la primera ley es  $P = P_0$ , con  $P_0$  constante.* Esto ha llevado a que se le considere a la primera ley como una consecuencia directa de la segunda, pero eso es incorrecto ya que esta ley solo es válida para un marco de referencia inercial.

Si la masa es constante, la segunda Ley adquiere la forma:

$$F = MA = M\ddot{R}. \quad (5.8)$$

El vector posición  $r$  en un movimiento unidimensional permite establecer toda la cinemática de la partícula, pues como se vio en la Sección 3.3.1, todo vector será paralelo a este y en consecuencia el movimiento de esta partícula será en la misma dirección que el vector posición.

En un movimiento bidimensional, es suficiente conocer al vector posición y al vector momento  $p$  de la partícula. Se han elegido estos dos vectores, ya que al describir un corpúsculo lo primero que se quiere conocer es la posición y el momento del mismo para realizar una descripción completa de su movimiento cuando está sujeto

a interacciones, las cuales se describen mediante (5.6). Por los resultados de la sección 3.3.2, cualquier otro vector estará contenido en el plano de estos vectores, en particular las Fuerzas que provocan el movimiento de la partícula. El bivector formado por estos vectores se puede escribir como:

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = [P, R], \quad (5.9)$$

donde se ha utilizado el conmutador, definido en (3.136) y la relación (3.105). Este contiene toda la información para hacer la descripción bidimensional. Derivando esta ecuación se tiene:

$$D_t(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

De lo discutido, se observa que un movimiento sea bidimensional es equivalente a que el bivector  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$  sea constante, es decir que mantiene su magnitud, dirección y sentido.

Para un movimiento en tres dimensiones, conocer  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  no es suficiente para conocer completamente el movimiento de la partícula. En consecuencia la segunda Ley no provee información suficiente para conocer completamente la trayectoria que seguirá ésta. Es por ello que se requiere un vector perpendicular al plano de los vectores posición y momento para resolver esta cuestión, que en el lenguaje utilizado se traduce al bivector  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ , que debe recordarse es dual a un vector definido como el momento angular:

$$L = \mathbf{i} := \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{i}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = [P, R]. \quad (5.11)$$

Debido a que un bivector también describe rotaciones, el momento angular describe una rotación en el plano  $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p})$ . En la descripción tridimensional es suficiente conocer el paralelepípedo generado por estos tres vectores:

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{l}. \quad (5.12)$$



Derivando (5.12) y por la segunda Ley es posible definir la torca ejercida en un cuerpo:

$$N = \dot{\mathbf{L}} := \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} = [F, R] = \dot{L}. \quad (5.13)$$

Cuyo efecto es variar el plano generado por los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , el cual puede ser un cambio en su magnitud o su dirección. Es decir, se tuerce el plano de movimiento de la partícula. Con ayuda de esta cantidad y la segunda ley es posible determinar el movimiento de una partícula en el espacio.

### 5.2.3. Tercera Ley de Newton

La tercera ley concierne en primera instancia a un sistema de partículas que interactúan entre sí, en las que su descripción se hace desde un marco de referencia inercial. Enuncia:

*A toda reacción, corresponde una reacción igual y en sentido contrario. [9]*

En el lenguaje cuaterniónico, si  $F_{12}$  es la fuerza ejercida del primer cuerpo al segundo y  $F_{21}$  es la fuerza ejercida del segundo cuerpo al primero. La tercera Ley se escribe:

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (5.14)$$

O bien, expandiendo esta ecuación:

$$f_{12}^{(0)} + if_{12} = -f_{21}^{(0)} - if_{21}. \quad (5.15)$$

Así, si estas dos partículas se encuentran completamente aisladas, i.e libre de interacciones lo que postula esta ley es que la única interacción que sentirán será cuando estos dos lo hagan uno con el otro. Si el sistema inercial está completamente aislado entonces la cantidad de movimiento total es constante:

$$P_{\text{total}} = P_0, \quad (5.16)$$

donde  $P_0$  es una constante. La expresión anterior se puede escribir en términos de los momentos de cada una de las partículas:

$$P_{\text{total}} = P_1 + P_2. \quad (5.17)$$

Derivando respecto al tiempo se encuentra:

$$\dot{P}_1 = -\dot{P}_2. \quad (5.18)$$

Por la segunda ley de la mecánica la fuerza que produjo este cambio en el estado de movimiento de cada uno de los cuerpos se obtiene la tercera ley de Newton como "consecuencia" de las primeras dos leyes. En esta "demostración", que condujo a la tercera ley, se postuló que la cantidad de movimiento total del sistema es la suma de los momentos lineales de cada cuerpo.

Esta ley se puede generalizar a un sistema de  $N$  cuerpos donde ya no es posible "demostrar" esta ley. Esto es:

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N), \quad i \neq j. \quad (5.19)$$

La ecuación anterior es la forma general de la tercera Ley para  $N$  cuerpos, al igual que el caso de dos cuerpos, si estos están aislados entonces las únicas fuerzas que aparecen son aquellas que hacen que los cuerpos interactúen los unos con los otros, a estos sistemas se les dice que están *en equilibrio* ya que la fuerza total del sistema es cero, esto es:

$$F_{\text{tot}} = \sum_{i,j=1}^N F_{ij} \delta_{ij} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

donde se define el símbolo  $\delta_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ . Este símbolo tiene un efecto opuesto a la Delta de Kronecker, pues resulta en 0 si los índices coinciden, y 1 si son diferentes. Esta suma da cero dado que los índices  $i, j$  se cancelan en pares de acuerdo a (5.19).

Ahora se analizan las torcas en un sistema de partículas, si se genera el bivector formado por los vectores  $\mathbf{r}_j$  y  $\mathbf{f}_{ij}$  se obtiene la torca como el vector dual a dicho bivector. En términos de cuaterniones:

$$N_{ij} := [F_{ij}, R_j]. \quad (5.21)$$

De forma similar si se forma el bivector mediante los vectores  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{f}_{ji}$  se tiene:

$$N_{ji} := [F_{ji}, R_i]. \quad (5.22)$$

Sumando estas ecuaciones y ocupando la Tercera Ley de Newton se puede reescribir la torca total ejercida sobre el par de partículas como:

$$N_{ij} + N_{ji} = [F_{ij}, R_{ij}], \quad (5.23)$$

donde se ha definido  $R_{ij} = R_j - R_i$  como el cuaternión de posición relativa de la partícula  $j$  respecto a la partícula  $i$ .

Se observa que la torca sobre este par de partículas tiene la misma estructura que su expresión para una partícula, donde únicamente aparecen índices para referirse a la posición relativa entre dos partículas y la fuerza que ejerce una sobre la otra.

A diferencia de la tercera ley, esta cantidad no tiene porque anularse ya que en general la posición relativa  $R_{ij}$  no es paralela a la fuerza que ejerce una partícula sobre otra  $F_{ij}$ .

En el caso particular donde sí sean paralelos, es decir que se cumpla  $R_{ij}F_{ij} = F_{ij}R_{ij}$  se cumple:

$$N_{ij} = -N_{ji}. \quad (5.24)$$

Que es la *ley fuerte de acción y reacción*, ya que tiene una expresión idéntica a la tercera Ley salvo que ahora es para la torca que ejerce una partícula sobre otra. Es por ello que a la tercera Ley de Newton también se le conoce como *La ley débil de*

acción y reacción. Si se suman todas las torcas se obtiene:

$$N_{\text{Total}} = \sum_{i,j=1}^N N_{ij} \delta_{ij} = \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

Se obtiene que la torca total sobre el sistema de partículas es nula, lo que es equivalente a que el momento angular del sistema  $L_{\text{Total}}$  sea constante y en consecuencia el sistema no tenga tendencia a girar, y se dice que está en un *equilibrio rotacional*. Si se satisface que tanto la fuerza total interna como la torca total interna en un sistema de partículas se anula, entonces el sistema se encuentra en un *equilibrio mecánico*.

Partiendo de estos resultados se estudia la dinámica para un sistema de partículas, todas ellas de *masa constante*. Supóngase que se aplica una fuerza externa  $F^{(\text{Ext})}$  a una partícula  $i$  de este conjunto, como estas partículas interactúan entre sí mediante las fuerzas internas  $F_{ji}$ , de acuerdo a la segunda Ley de Newton, se llega a que el cambio en la cantidad de movimiento de la partícula  $i$  es:

$$\sum_{j=1}^N F_{ji} + F_i^{(\text{Ext})} = \dot{P}_i = M_i \ddot{R}_i. \quad (5.26)_i$$

Sumando sobre todas las partículas se tiene:

$$\sum_{i,j=1}^N F_{ji} \delta_{ji} + \sum_{i=1}^N F_i^{(\text{Ext})} = \sum_{i=1}^N M_i \ddot{R}_i. \quad (5.27)$$

El primer término es idénticamente nulo debido a (5.21), es decir que la contribución de las interacciones de todas las partículas es nula para el cambio del movimiento de todas las partículas. De forma que esta ecuación se expresa simplemente por:

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(\text{Ext})} = \sum_{i=1}^N M_i \ddot{R}_i. \quad (5.28)$$

Para que la expresión anterior tome una forma idéntica a la segunda Ley para el caso de una partícula se define un cuaternión  $R_{CM}$ , conocido como el "centro de masa del

sistema" tal que mide la posición promedio de este sistema de partículas:

$$R_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i R_i}{\sum_{i=1}^N M_i} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i R_i}{M_{Tot}}. \quad (5.29)$$

Así (5.29) adquiere la forma:

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(Ext)} = M \ddot{R}. \quad (5.30)$$

Esto dice que la fuerza total ejercida sobre el sistema de partículas, donde solo actúa la fuerza externa, es el cambio de una cantidad de movimiento definida por:

$$P_{CM} := M_{Tot} \dot{R}_{CM} = \sum_{i=1}^N M_i \dot{R}_i. \quad (5.31)$$

Esta cantidad de movimiento es la *cantidad de movimiento total o momento total* del conjunto de partículas, la cual es equivalente a la cantidad de movimiento del centro de masa del cúmulo. En consecuencia si la fuerza externa total  $\mathbf{F}^{(EXT)}$  es nula, la cantidad de movimiento total estará conservada.

Se define el momento angular de esta partícula como aquel vector normal al plano formado por los posición y momento de la partícula:

$$L_i = [P_i, R_i]. \quad (5.32)$$

La suma de los momentos angulares de cada partícula da lugar al momento angular total del sistema de partículas:

$$L_{Total} = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N [P_i, R_i]. \quad (5.33)$$

La torca se define como la derivada del momento angular:

$$N_i = \dot{L}_i = [\dot{P}_i, R_i]. \quad (5.34)$$

Sumando sobre todas las partículas se tiene:

$$N_{\text{Total}} = \dot{L}_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^N N_i^{\text{Ext}} + \sum_{i,j=1}^N [F_{ij} R_{ij} - R_i F_{ij}] \delta_{ij}, \quad (5.35)$$

donde  $N_i^{\text{Ext}}$  indica la torca externa que siente la partícula  $i$ . Entonces la torca  $N_i$  total está expresada por:

$$N_i = N_i^{\text{Ext}} + \sum_{j<i}^N [F_{ij}, R_{ij}] - R_{ij} F_{ij} = N_i^{\text{Ext}} + \sum_{j=1}^N N_{ji} \quad (5.36)$$

donde se ha ocupado la tercera Ley de Newton en el segundo miembro y se han eliminado las sumas que contienen a una misma partícula, entonces la torca  $N_i$  está descrita por la torca externa que siente la partícula junto con la suma de las torcas internas que ejercen las demás partículas sobre esta misma.

Al sumar las torcas sobre todas las partículas en (5.36), si se cumple (5.25) se obtiene:

$$\dot{L}_{\text{Total}} = N_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^N N_i^{\text{Ext}}. \quad (5.37)$$

Es decir que el momento angular total se conserva si la torca externa aplicada sobre todo el sistema de partículas es nula.

Es posible simplificar algunas de las expresiones anteriores, si se define la posición relativa del centro de masa  $R_{CM}$  a la posición de la partícula  $R_i$  como:

$$R_i := R_{CM} - R_i. \quad (5.38)$$

Es claro que la velocidad de la posición relativa está dada por:

$$\dot{R}_i = \dot{R}_{CM} - \dot{R}_i. \quad (5.39)$$

Utilizando estas definiciones, se puede reescribir la ecuación (5.33) como:

$$L_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^N M_i \{ [R_{CM} + R_i, \dot{R}_{CM} + \dot{R}_i] \}. \quad (5.40)$$

Desarrollando este término y ocupando (5.38) y (5.29), se puede simplificar la expresión anterior a:

$$L_{\text{Total}} = \mathbf{f} [P_{CM}, R_{CM}] + \sum_{i=1}^N [P_i, R_i] = L_{CM} + \sum_{i=1}^N L_i. \quad (5.41)$$

Esta ecuación expresa que el momento angular total de la partícula es la contribución resultante del momento angular del centro de masa y la suma de los momentos angulares alrededor del centro de masa. En cierta forma depende de la elección del origen del sistema de coordenadas y los giros de todas las partículas alrededor de este. Si se elige convenientemente el centro de masa como el origen del sistema coordenado entonces el momento angular  $L_{CM}$  es nulo y la ecuación anterior expresa que en este marco de referencia el momento angular total es la contribución de todos los momentos angulares alrededor del centro de masa del sistema.

## 5.3. La Ley de Conservación de la Energía

### 5.3.1. Para un solo cuerpo

En esta sección, se estudia la Ley de conservación de la energía en términos de cuaterniones.

El trabajo desarrollado por una fuerza  $F$  para hacer que el corpúsculo recorra cierta trayectoria de un punto  $R_1$  a un punto  $R_2$  se puede formular con este desarrollo cuaterniónico mediante:

$$W(1, 2) = - \int_{r_1}^{r_2} F dR, \quad (5.42)$$

donde  $dR = dr_0 + idr$  es el cuaternión de desplazamiento infinitesimal a lo largo

de la trayectoria de la partícula. El producto de los cuaterniones de fuerza y de desplazamiento infinitesimal se desarrolla como sigue:

$$FdR = (f_0 + i\mathbf{f})(dr_0 + idr) = (f_0dr_0 - \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}) + i(f_0dr + dr_0\mathbf{f} - \mathbf{f} \times d\mathbf{r}). \quad (5.43)$$

Entonces el trabajo tiene la forma:

$$W(1,2) = - \int_{R_1}^{R_2} (f_0dr_0 - \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}) - i \int_{R_1}^{R_2} (f_0dr + dr_0\mathbf{f} - \mathbf{f} \times d\mathbf{r}). \quad (5.44)$$

En el caso de que exista un cuaternión de la forma:

$$U = u_0 + i\mathbf{u}. \quad (5.45)$$

Tal que satisfaga la condición:

$$FdR = dU. \quad (5.46)$$

Esto significa que se cumplen el par de ecuaciones:

$$f_0dr_0 - \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = du_0, \quad (5.47)$$

$$f_0dr + dr_0\mathbf{f} - \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = d\mathbf{u}. \quad (5.48)$$

Entonces se cumplirá:

$$W(1,2) = - \int_{R_1}^{R_2} dU = U(1) - U(2). \quad (5.49)$$

Evaluando el producto  $FdR$  se obtiene en la parte escalar:

$$f_0dr_0 - \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = (m\ddot{r}_0\dot{r}_0 - m_0\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})dt,$$

donde se ocupó  $dR = \dot{R}dt$ , que se puede escribir como una diferencial exacta. Utili-



zando la linealidad de la derivada se llega a la expresión:

$$f_0 dr_0 - \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{r}_0^2}{2} - \frac{m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2} \right) dt. \quad (5.50)$$

Con un procedimiento similar se llega a que la parte vectorial se escribe como:

$$f_0 d\mathbf{r} + \mathbf{f} dr_0 - \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} [[m\dot{r}_0 \dot{\mathbf{r}}] dt - m(\ddot{\mathbf{r}} \times d\mathbf{r}). \quad (5.51)$$

Esta cantidad es la diferencial exacta de una entidad vectorial exacta más una cantidad extra que no se escribe como la diferencial exacta de una función que corresponde al producto vectorial de  $\mathbf{f} \times d\mathbf{r}$ . Sin embargo, de acuerdo a la definición de la torca, obsérvese que se satisface la siguiente identidad:

$$m\ddot{\mathbf{r}} \times d\mathbf{r} = \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = -d\mathbf{n} = -d\mathbf{l}. \quad (5.52)$$

Así que el trabajo desarrollado por dicha fuerza está dado por:

$$W(1,2) = \int_{R_1}^{R_2} F dR = m \left( \frac{\dot{r}_0^2}{2} - \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2} \right) + i \left( m\dot{r}_0 \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{l} \right). \quad (5.53)$$

Esto prueba que el trabajo desarrollado por la partícula está dada por la diferencia de una cantidad. Para hallarla conviene descomponer  $FdR$  en términos del conmutador y anticonmutador como:

$$FdR = \{(F, dR) + [F, dR]\}. \quad (5.54)$$

El anticonmutador corresponde a la diferencial del “cuaternión de energía cinética”:

$$(F, dR) = d \left( \frac{m\dot{r}_0^2}{2} - \frac{m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2} \right) + id(m\dot{r}_0 \dot{\mathbf{r}}) = -dT. \quad (5.55)$$

Cuya forma explícita es:

$$T = \left( \frac{m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2} - \frac{m\dot{r}_0^2}{2} \right) - i(m\dot{r}_0 \dot{\mathbf{r}}). \quad (5.56)$$

Así mismo, el conmutador corresponde a la diferencial del cuaternión de torca:

$$[F, dR] = i(d\mathbf{r} \times \mathbf{f}) = id\mathbf{n} = dN = d\dot{L}. \quad (5.57)$$

De forma que el trabajo desarrollado por el cuerpo se puede escribir como:

$$W(1, 2) = [T(1) - T(2)] + [\dot{L}(2) - \dot{L}(1)] := -\Delta T + \Delta \dot{L}. \quad (5.58)$$

Comparando (5.49) y (5.58) se concluye que existe un cuaternión conservado, denominado el "Cuaternión de energía total"  $E = E + i\dot{s}$  tal que:

$$u_0 + \frac{m}{2} (\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \dot{r}_0^2) = E, \quad (5.59)$$

$$\mathbf{u} - m\dot{r}_0\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{s}}, \quad (5.60)$$

que puede reescribirse de forma más compacta:

$$T + U - \dot{L} = E. \quad (5.61)$$

En esta formulación cuaterniónica se llega a dos leyes de conservación, la primera para la parte escalar es la reconocida ley de conservación de la energía donde se debe añadir una cierta energía intrínseca  $E_0$  al cuerpo de forma que se puede reescribir la primera ecuación como:

$$u_0 + \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = E + E_0 = E_T. \quad (5.62)$$

De aquí se da un significado físico al término  $r_0$ , pues su derivada respecto al tiempo, es decir la velocidad intrínseca permite determinar una energía intrínseca del sistema que indica que aún cuando la partícula esté inmóvil existirá una energía propia del sistema que junto con la energía mecánica determina la energía total del cuerpo.

La segunda expresión da lugar a una ley de conservación totalmente nueva que

involucra torcas y giros, expresa que la cantidad  $\mathbf{u}$  es un campo vectorial externo al cuerpo resultado de un momento angular  $\mathbf{I}$  más un estado de giro intrínseco de la partícula  $\mathbf{s}$  que están acoplados y una pérdida de momento angular medida por el producto  $\dot{r}_0\mathbf{p}$ , que a su vez está determinada por la energía intrínseca. Al giro intrínseco del corpúsculo  $\mathbf{s}$  se le denominará como *su espín*, el cual es una cantidad conservada al igual que la energía y determina un giro propio de la misma.

Si se toma  $r_0 = 0$ , es decir se toma al cuaternión de posición como vector se llega a:

$$u_0 + \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = E, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{l}} + \dot{\mathbf{s}}. \quad (5.64)$$

De forma que la conservación de la energía se reduce a su expresión con la formulación vectorial. Mientras que en la conservación de giro sigue apareciendo la cantidad conservada  $\dot{\mathbf{s}}$ . Debido al análisis para llegar a este resultado se observa que la parte vectorial del cuaternión potencial está relacionada a la torca ejercida en la partícula  $d\mathbf{u} = d\mathbf{n}$  por lo que se puede reescribir como:

$$\mathbf{n} = \dot{\mathbf{l}} + \dot{\mathbf{s}}. \quad (5.65)$$

Es decir que el vector potencial y la torca difieren únicamente por la constante de integración  $\dot{\mathbf{s}}$ . Ya se puede observar entonces el significado físico del espín, si se toma la torca como nula  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  como es el caso de las fuerzas centrales, entonces el momento angular y el espín se relacionan directamente por:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\mathbf{s} + \mathbf{s}_0, \quad (5.66)$$

donde  $\mathbf{s}_0$  es una constante de integración. Se tiene entonces un estado de movimiento (de giro) que progresa sin afectar en ningún momento la dinámica de la partícula ni las trayectorias que recorre esta.

Se observa que el espín descrito mediante cuaterniones es una cantidad puramente clásica, ya que no es necesario que tome valores semi-enteros de la constante de Planck

ñ como ocurre con el caso de la mecánica cuántica, donde fue descrito por primera vez, sino que puede toma valores continuos como ocurre en la mecánica clásica.

### 5.3.2. Para un sistema de partículas

Para llegar a la Ley de conservación de la energía, se procede de forma muy similar al caso de una sola partícula. Tomando en cuenta la fuerza total que actúa sobre una partícula  $F_i$  y multiplicando por una distancia infinitesimal que recorre la misma  $dR_i$ , se tiene:

$$F_i dR_i = (f_i^{(0)} dr_i^{(0)} - \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}_i) + i(f_i^{(0)} d\mathbf{r}_i + dr_i^{(0)} \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_i \times d\mathbf{r}_i). \quad (5.67)$$

Se observa que esta expresión es idéntica al caso de una partícula, entonces se puede escribir esta expresión como:

$$F_i dR_i = d\dot{L}_i - dT_i, \quad (5.68)$$

donde  $dL_i$  es el cuaternión de momento angular diferencial sobre la partícula y  $dT_i$  el cuaternión de energía cinética diferencial de la misma. De forma que el trabajo desarrollado por esta partícula se escribe como:

$$W_i(1, 2) = \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} F_i dR_i = \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} (d\dot{L}_i - dT_i) = \dot{\Delta L}_i - \Delta T_i. \quad (5.69)$$

Sustituyendo con (5.26). se tiene que:

$$\sum_{j=1}^N (F_{ji} dR_i) \delta_{ij} + F_i^{\text{Ext}} dR_i = F_i dR_i. \quad (5.70)$$

Entonces al integrar esta ecuación se llega a:

$$\sum_{j=1}^N W_{ji} \delta_{ij} + W_i^{\text{Ext}} = W_i, \quad (5.71)$$

donde  $W_{ji}$  es el trabajo que desarrolla la partícula a causa de la fuerza interna provocada por la partícula  $i$ , mientras que  $W_i^{\text{Ext}}$  es el trabajo desarrollado por la fuerza externa sobre las partículas. Están dadas explícitamente por las expresiones:

$$W_{ji}(1, 2) = \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} F_{ji} dR_i, \quad (5.72)$$

$$W_i^{\text{Ext}}(1, 2) = \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} F_i^{\text{Ext}} dR_i \quad (5.73)$$

Sumando sobre todas las partículas  $i$ , se tiene que el trabajo total desarrollado es:

$$W^{\text{Total}} = W^{\text{Ext}} + W^{\text{Int}} = \sum_{i,j=1}^N W_{ij} = \Delta \dot{L} - \Delta T, \quad (5.74)$$

donde  $W^{\text{Ext}}$  es el trabajo total externo desarrollado por todas las partículas del sistema mientras que  $W^{\text{Int}}$  es el trabajo debido a las fuerzas de interacción entre las partículas y  $\Delta L$  y  $\Delta T$  son los momentos angulares y la energía cinética total del sistema.

Si, como en el caso de una partícula, se puede encontrar un cuaternión tal que:

$$F_i^{\text{Ext}} dR_i = dU_i^{\text{Ext}}. \quad (5.75)$$

Entonces el trabajo desarrollado por la fuerza externa sobre todas las partículas es:

$$W^{\text{Ext}}(1, 2) = \sum_{i=1}^N \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} F_i dR_i = \sum_{i=1}^N [U_i^{\text{Ext}}(2) - U_i^{\text{Ext}}(1)]. \quad (5.76)$$

Similarmente, si las fuerzas internas son también conservadoras y se puede encontrar un cuaternión tal que:

$$F_{ji} dR_i = dU_{ij}. \quad (5.77)$$

De forma que se satisfaga la Tercera Ley de Newton:

$$dU_{ij} = F_{ji} dR_i = -F_{ij} dR_j = dU_{ji}. \quad (5.78)$$

Entonces el trabajo desarrollado por las fuerzas internas es, de acuerdo a (5.72):

$$W^{\text{Int}}(1, 2) = \int_{j < i} \begin{matrix} R_{2i} \\ \rightarrow \\ R_{1i} \end{matrix} dU_{ji} = \int_{j < i} U_{ji}(2) - U_{ji}(1). \quad (5.79)$$

Si se cumple esto y se hace:

$$U = \int_i U_i^{\text{Ext}} + \int_{j < i} U_{ji}. \quad (5.80)$$

Se concluye que al igual que en el caso de una partícula, la energía total para el sistema de partículas se conserva. Es decir:

$$T + U - \dot{L} = E. \quad (5.81)$$

donde  $E = E + \dot{\mathbf{i}}\mathbf{s}$  es el cuaternión de energía total para el sistema de partículas. La parte escalar representa la energía total del cuerpo debido a las energías cinética y potencial del sistema y la vectorial corresponde al espín del sistema de partículas resultado de la energía intrínseca y la torca total del sistema.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Resultados

En este trabajo se estudió el álgebra geométrica, la cual dio lugar a nuevos conceptos geométricos en los  $N$ -vectores, con los cuales fue posible construir un álgebra para los diferentes espacios Euclídeos, cuyo caso más explorado fue el espacio de 3 dimensiones en el cual se tiene un mundo de objetos geométricos como escalares para representar cantidades asignadas a un número, los vectores para líneas dirigidas, bivectores para planos dirigidos y trivectores como la unidad fundamental del volumen, los cuales permiten cuantificar los diferentes objetos y fenómenos de este Espacio Físico Euclídeo.

Como primera aplicación de esto, se dio una forma alternativa de describir un cuerpo en rotación construido a partir de la fórmula de Olinde Rodrigues que dio pie a los cuaterniones, los cuales presentó Hamilton para establecer una formulación alternativa a la rotación de un cuerpo rígido donde se requiere un cuaternión de módulo 1 y su conjugado para conocer la posición de un cuerpo tras una rotación, este hecho hace que se necesiten 2 cuaterniones de módulo 1 para identificarlos con las matrices de rotación lo que significa un homomorfismo 2 a 1 con las matrices de rotación con las cuales se describió una rotación general mediante los ángulos de Euler.

Luego se describió la cinemática de un cuerpo rígido, es decir la velocidad y aceleración descritas desde un sistema de referencia que se encuentra girando y resultó en una descripción compatible con la formulación mediante las matrices de rotación.

Hamilton se había dado cuenta que se podía formular la mecánica desde una pers-

pectiva cuaterniónica, la cual es una descripción alternativa de los principios básicos de la misma. Desde este enfoque se estudió en el capítulo 5, primero los conceptos básicos, las 3 Leyes de Newton, la torca ejercida sobre un cuerpo, la mecánica de un sistema de partículas y la Ley de conservación de la energía para una partícula y un sistema de partículas. Se llegó a los mismos resultados que con la formulación vectorial de la misma y a un resultado nuevo que concierne a la conservación de la Energía donde apareció un estado de giro intrínseco del sistema al cual se le denominó "espín de la partícula" como la parte bivectorial del cuaternión de energía total. Esto provee de una forma nueva de entender al espín como aquel estado de giro intrínseco del sistema que se acopla al giro provocado por fuerzas conservativas, que al igual que el momento angular está involucrado con la torca ejercida por esta fuerza conservadora en el sistema.

Como se observa el espacio físico y los agentes que lo constituyen son de naturaleza cuaterniónica y en consecuencia estos tienen aplicaciones que no se discutieron. Por ejemplo se puede describir al cuerpo rígido, sin necesidad de anular la parte escalar del cuaternión de posición y ver a que resultados se llegan, como es un escalar, al transformarse por una rotación, la parte escalar del cuaternión resultante tras dicho pivoteo debe ser la misma que el original.

Además se puede estudiar un cálculo cuaterniónico para dar una estructura formal a la mecánica con los mismos. Ver por ejemplo, que implicaciones tiene la caída de los cuerpos, el movimiento de los planetas, un péndulo, movimientos en marcos de referencia acelerados entre otros desde este enfoque. Además de ver que estructura tendrían principios de la mecánica analítica como el Lagrangiano y Hamiltoniano de un sistema así como un principio de acción estacionaria mediante cuaterniones.

Y por último y más importante formular otras ramas de la física como la óptica, el electromagnetismo, la termodinámica o la mecánica de fluidos desde un enfoque cuaterniónico y ver que nuevos resultados se podrían obtener con esta perspectiva y como cambiarían la visión que tiene la humanidad de la naturaleza misma.



# Bibliografía

- [1] Crowe, M., (1985), *A History of Vector Analysis*, U.S.A., Dover Publications Inc. 1, 38
- [2] Hestenes, D., (2002), *New Foundations for Classical Mechanics.*, U.S.A., Kluwer Academic Publishers. 3, 21, 23, 24, 38, 64, 70
- [3] Young, E.,(1993),*Tensor Analysis*, Tallahassee, U.S.A, Marcel Dekker, Inc. 5, 10
- [4] Malvern, L., (1969), *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, U.S.A, Prentice-Hall, Inc. 5, 10, 50
- [5] Sokolnikoff, I., (1990), *Tensor Analysis-Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Krieger Pub Co. 5, 10, 50
- [6] De Sabbata V., Kumar B., (2006), *Geometric Algebra and applications to physics*, U.S.A., Taylor & Francis Group. 21, 38
- [7] Girard P., (2007), *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics.*, Basel, U.S.A, Birkhäuser 38
- [8] Ablamowicz R., Sobezyk G., (2004), *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*, New York, U.S.A, Springer Science+Business Media, LLC. 40
- [9] Viniegra, F, (2007), *Mecánica Libro 1*, Ciudad de México, México, Facultad de Ciencias, UNAM. 43, 44, 45, 50, 57, 77, 78, 80
- [10] Goldstein,H., & Poole,C. & Safko, J. (2000), *Classical Mechanics.*, Columbia, U.S.A, Addison Wesley. 43, 44, 45

- [11] Hestenes, D., (1984), *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics.*, U.S:A., Kluwer Academic Publishers 70, 71