



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN

DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y EVALUACIÓN
DE ESPEJOS CONCENTRADORES SOLARES
DE PLATO TIPO FRESNEL

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

MARTÍN JIMÉNEZ RODRÍGUEZ

TUTOR PRINCIPAL:

MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Ciudad de México, Octubre 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dra. Rosete Aguilar Martha

Secretario: Dr. Rendón Garrido Pablo Luis

1 er. Vocal: Dr. Avendaño Alejo Maximino

2 do Vocal: Dr. Granados Agustín Fermín Salomón

3 er Vocal: Dr. Rodríguez Herrera Oscar Gabriel

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT).

TUTOR DE TESIS:

Dr. Maximino Avendaño Alejo

FIRMA

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor, el Dr. Maximino Avendaño Alejo por guiarme desde mi inicio en la investigación, por sus enseñanzas en óptica, así como en la realización de este trabajo.

Agradezco a mi jurado por revisar mi tesis y hacerme las correcciones pertinentes para mejorar la calidad de mi trabajo de investigación.

Agradezco a mis compañeros de laboratorio en particular a mis amigos Gabriel Castillo y Jesús Del Olmo por ser de gran ayuda en el trasfondo físico y matemático cotidiano.

A todas las personas que ayudaron a que esta tesis se realizara con éxito, en especial a aquellos que me compartieron sus conocimientos.

Agradezco al Programa de Posgrado de Ingeniería Eléctrica opción Instrumentación por el apoyo y las oportunidades brindadas durante mis estudios de Maestría.

Agradezco al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología por permitirme trabajar en su laboratorio de Pruebas Ópticas donde realicé mi proyecto de tesis.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de Maestría.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica/Universidad Nacional Autónoma de México (PAPIIT/UNAM) bajo los proyectos con número IN116420 y IT100619, así como por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con el proyecto A1-S-44220.

Índice General

Índice General	vii
Índice de Figuras	ix
Índice de tablas	xi
1 Introducción	1
1.1 Energía solar y sus aplicaciones	1
1.1.1 Análisis termodinámico de la concentración solar	2
1.2 Planteamiento del problema	3
1.3 Objetivos	3
1.4 Desarrollo	4
2 Trazo exacto de rayos y formación de cáusticas para superficies tipo Fresnel	5
2.1 Diseño de un espejo tipo Fresnel	5
2.2 Seccionamiento por alturas equidistantes de un espejo y trazo exacto de rayos	10
2.3 Cálculo de la cáustica de un espejo tipo Fresnel	14
2.3.1 Pérdidas por reflexión en un espejo tipo Fresnel	19
2.3.2 Círculo de mínima confusión para un espejo tipo Fresnel	23
2.3.3 Reparametrización de la cáustica de un espejo tipo Fresnel	25
2.4 Cálculo de la distancia focal de un espejo tipo Fresnel	27
2.5 Cálculo de la cáustica de una lente reflectora tipo Fresnel	34
2.6 Cálculo de la cáustica para un espejo tipo Fresnel con fuente puntual	38
2.7 Cálculo de la cáustica para una lente reflectora Fresnel con fuente puntual	41
3 Diseño de pantallas nulas para espejos tipo Fresnel	47
3.1 Zonas de obstrucción en un espejo tipo Fresnel considerando una fuente puntual	47
3.1.1 Zonas de iluminación de un espejo tipo Fresnel sobre un colector cilíndrico	51
3.1.2 Cálculo de áreas y contornos mediante la función de proyección	55
3.1.3 Mapeo de un patrón de curvas cerradas	59
3.1.4 Construcción de pantallas nulas considerando un patrón de curvas cerradas	67

4	Resultados en pruebas preliminares de superficies tipo Fresnel	69
4.1	Resultados experimentales en la prueba de un espejo tipo Fresnel	69
4.2	Resultados experimentales en lentes de Fresnel	73
5	Conclusiones y trabajo a futuro	77
A	Convención de signos para el trazo de rayos en espejos esféricos	79
B	Conceptos de espacios métricos y de topología	81
B.1	Imágenes directas e inversas	81
B.2	Espacio métrico	81
B.3	Conjuntos abiertos y cerrados en un espacio métrico X	82
B.4	Espacio topológico	82
	Bibliografía	83

Índice de Figuras

2.1	Estudio previo de cáusticas por reflexión.	6
2.2	Diagrama para describir el seccionamiento de una curva paramétrica.	8
2.3	Diagrama para describir el seccionamiento por alturas iguales.	10
2.4	Parámetros utilizados en el trazo exacto de rayos en un espejo tipo Fresnel.	11
2.5	Trazo de rayos de un espejo tipo Fresnel I.	12
2.6	Trazo de rayos de un espejo tipo Fresnel II.	13
2.7	Ejemplos de cáusticas en espejos tipo Fresnel I.	17
2.8	Ejemplos de cáusticas en espejos tipo Fresnel II.	18
2.9	Ejemplos de cáusticas en espejos tipo Fresnel III.	18
2.10	Ejemplos de zonas iluminadas en espejos tipo Fresnel I.	19
2.11	Ejemplos de zonas iluminadas en espejos tipo Fresnel II.	21
2.12	Ejemplos de cálculo del CLC para espejos tipo Fresnel.	24
2.13	Ejemplos de cáusticas en espejos tipo Fresnel IV.	26
2.14	Ejemplos de cáusticas en espejos tipo Fresnel V.	27
2.15	Cáusticas de un espejo tipo Fresnel por parámetro ℓ	28
2.16	Gráficas de las componentes de la distancia focal.	29
2.17	Gráficas de distancias focales para espejos cónicos y esféricos.	30
2.18	Gráficas de distancias focales para espejos cónicos.	32
2.19	Comparación entre distancias focales.	33
2.20	Construcción de una lente reflectora tipo Fresnel.	34
2.21	Parámetros utilizados para el trazo exacto de rayos en una lente reflectora tipo Fresnel.	35
2.22	Ejemplos de trazos de rayos para lentes reflectoras tipo Fresnel.	37
2.23	Parámetros utilizados en el trazo de rayos para un espejo tipo Fresnel con fuente puntual.	38
2.24	Ejemplos de cáusticas para espejos tipo Fresnel considerando una fuente puntual.	40
2.25	Parámetros involucrados en el trazo de rayos de una lente reflectora tipo Fresnel considerando una fuente puntual.	41
2.26	Ejemplos de cáusticas para lentes reflectoras tipo Fresnel considerando una fuente puntual.	45

3.1	Diagrama de las aperturas angulares efectivas por surco.	48
3.2	Ejemplos de zonas iluminadas en espejos tipo Fresnel con fuente puntual I.	50
3.3	Ejemplos de zonas iluminadas en espejos tipo Fresnel con fuente puntual II.	51
3.4	Diagrama de la proyección de una pantalla en un colector cilíndrico.	52
3.5	Diagrama del dominio de la función de proyección para una n dada.	53
3.6	Diagrama de las proyecciones por cada sección del espejo tipo Fresnel.	56
3.7	Diagrama de los dominios por cada sección del espejo tipo Fresnel.	57
3.8	Diagrama de los anillos \mathcal{D}_n por cada sección del espejo tipo Fresnel.	58
3.9	Definición de las franjas en el plano de proyección.	60
3.10	Intersección entre franjas y anillos en el plano de proyección.	62
3.11	Diagrama de los contornos en el plano de proyección.	64
3.12	Parametrización de los contornos.	64
3.13	Mapeo de los contornos en la pantalla cilíndrica.	66
3.14	Construcción de los patrones no uniformes de pantallas nulas.	67
4.1	Diagrama y arreglo experimental para la prueba por pantallas nulas de un espejo tipo Fresnel.	70
4.2	Traza de rayos del espejo comercial tipo Fresnel.	70
4.3	Espejo tipo Fresnel del laboratorio.	71
4.4	Espejo tipo Fresnel del laboratorio.	72
4.5	Traza de rayos de un espejo de diseño del tipo Fresnel.	73
4.6	Diagrama y arreglo experimental para la prueba por pantallas nulas de una lente de Fresnel.	74
4.7	Resultados de la prueba por pantallas nulas de una lente de Fresnel I.	74
4.8	Resultados de la prueba por pantallas nulas de una lente de Fresnel.	75
A.1	Convención de signos para espejos cóncavos.	80
A.2	Convención de signos para espejos convexos.	80

Índice de tablas

2.1	Distancias f_1 para espejos cónicos, considerando la Ec. (2.60).	31
2.2	Distancias f_1 con $A_{2i} \neq 0$, considerando la Ec. (2.60) y los coeficientes polinomiales indicados en la Fig. 2.17.	31
A.1	Convención de signos para espejos esféricos.	79
A.2	Imágenes de objetos reales formadas por espejos esféricos.	80

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, en aplicaciones de energía solar térmica, los Colectores Parabólicos Compuestos (CPCs) han sido ampliamente estudiados e implementados en muchas áreas como degradación por fotocátalisis y producción de vapor. El diseño de concentradores solares por reflexión ha encontrado particular importancia en la industria de producción de energía solar, las superficies parabólicas han sido las de mayor implementación debido a que idealmente producen un punto focal, cuando un frente de onda plano incide sobre su superficie. En general, se consideran tubos colectores como absorbedores, colocados con su centro de simetría sobre la línea focal del canal parabólico en cuestión. En estos trabajos los gradientes de temperaturas sobre los receptores debido a la energía térmica solar han sido también caracterizados, estos dispositivos pueden alcanzar temperaturas debajo de los 400° C, para mejorar el tiempo de colección se utilizan seguidores solares.

Los sistemas de espejos tipo Fresnel lineales alcanzan factores de concentración y rangos de temperatura similares al del canal parabólico, la tecnología tipo Fresnel tiene un rendimiento aproximado del 70 % [1–3], con respecto al canal parabólico, sin embargo, hay una gran reducción en instalación, operación, costos de operación y mantenimiento, por los cuales es relevante desarrollar diseños en este campo. Sin embargo, contrario al CPC, el concentrador tipo Fresnel es una estructura a una distancia fija con los espejos planos que lo componen, en una posición específica que determina un arreglo de planos.

Debido a que los avances en la implementación de superficies arbitrarias en instrumentos ópticos, ha aumentado en proporción a la capacidad de construcción debido a los avances tecnológicos, sin embargo, persisten importantes problemas en la evaluación de estas superficies. En función de que se pueden construir tan buenas superficies como se puede medir su desempeño de acuerdo con el diseño original, en este trabajo se propone un avance en este método.

1.1 Energía solar y sus aplicaciones

La energía solar es la más abundante sobre la Tierra, sobrepasa por mucho la demanda energética mundial, de acuerdo con la Agencia Internacional de Energía, alrededor de 885 millones de terawatt-

hora (TWh) inciden sobre la superficie terrestre en un año lo cual equivale a 6,200 veces la energía comercial primaria consumida por la humanidad en el 2008 y de continuar el escenario actual de políticas de la IEA, equivaldría a 4,200 veces la energía que la humanidad habrá consumido hasta 2035. Es decir, le toma al sol una hora y 25 minutos enviar la energía suficiente para abastecer el consumo de un año. En tanto que las reservas de combustible fósil representan 46 años, de gas natural 58 años y casi 150 años de carbón, para su consumo a las tasas actuales. La energía proveniente del sol en un sólo año, si es completamente capturada y almacenada, podría representar más de 6,000 años de consumo total de energía [4].

Los rayos solares pueden distinguirse mediante sus longitudes de onda, las cuales determinan el espectro de luz visible, radiación infrarroja y ultravioleta. La luz visible constituye el 40% de la energía irradiada, 50% del infrarrojo y el 10% restante es el ultravioleta. El más básico de los beneficios que se obtienen del sol es la iluminación, la cual se puede aprovechar en instalaciones interiores para reducir los costos de iluminación durante el día.

Por otro lado, la radiación solar también puede ser vista como un flujo de fotones altamente energéticos que pueden producir fotoreacciones tales como fotosíntesis o generar flujo de electrones en semiconductores, convirtiéndose así en energía eléctrica fotovoltaica.

Finalmente está la energía solar fototérmica o termosolar, que consiste en el aprovechamiento de la radiación solar la cual se convierte en calor mediante la absorción por algún material y se puede utilizar en una gran variedad de procesos que demandan energía térmica.

1.1.1 Análisis termodinámico de la concentración solar

El Sol como fuente de calor tiene una temperatura en su fotosfera de aproximadamente 5800 K , en tanto la temperatura de la Tierra es en promedio de 300 K , considerando estos valores como fuentes a distintas temperaturas, por eficiencia de Carnot se tiene la capacidad de convertir el 95% de la energía solar en trabajo. Cada sistema concentrador tiene rangos de temperatura dependiendo de su razón de concentración C , que se define mediante la siguiente expresión

$$C = \frac{A_a}{A_r}, \quad (1.1)$$

donde A_a es el área de apertura del concentrador y A_r es el área del receptor, a C se le asignan unidades de *soles*. Existe un límite máximo termodinámico para poder concentrar la radiación solar en función del factor de configuración geométrica entre la fuente y el receptor. Con ello se define el máximo de concentración como

$$C_{max} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha_a}{2}\right)^2}, \quad (1.2)$$

donde α_a es ángulo sólido del cono solar, con valor en la Tierra de aproximadamente 4.7 mrad , para un concentrador ideal y un receptor de cuerpo negro este límite es de $C = 46767\text{ soles}$.

En el caso de un receptor ideal de cuerpo negro, sin pérdidas de energía por conducción o convección,

el cual emite toda la energía tan rápido como la recibe, alcanza una temperatura máxima que se le denominará temperatura de estancamiento, cuyos valores dependen para un colector solar completamente de la temperatura ambiente, la cual suele ser de 30°C por lo que la temperatura de estancamiento tendrá valores mayores a este, se calcula mediante la siguiente fórmula

$$T_{est} = \left(\frac{GC}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.3)$$

donde G es la radiación solar directa con valor de 1000 W/m^2 y $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\text{ W/m}^2\text{K}^4$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

1.2 Planteamiento del problema

En trabajos previos se han propuesto métodos de prueba de espejo tipo Fresnel, sin embargo estos procedimientos se han desarrollado basados en las pruebas para superficies continuas suaves, por lo que existen importantes problemas para implementar la teoría de pantallas nulas, ya que si se definen patrones nulos en términos de puntos evaluados sobre una superficie continua, hay información que se pierde debido a las discontinuidades en la superficie de un espejo tipo Fresnel.

1.3 Objetivos

Para este trabajo se han planteado los siguientes objetivos, que a continuación se mencionan en el orden en que se desarrollarán:

Obtener una representación paramétrica de superficies tipo Fresnel, que permite generalizar el trazo de rayos considerando frente de onda plano incidente y considerando una fuente colocada en el eje óptico, asumiendo exclusivamente rayos en un plano meridional, para estudiar el comportamiento de estas superficies.

Obtención de la superficie caústica de estas superficies tipo Fresnel, a partir de este cálculo definir parámetros medibles de este tipo de superficies para poder caracterizarlas.

Diseño de concentradores solares a partir de la teoría desarrollada previamente, para optimizar el rendimiento y determinar las condiciones para medir la forma de estas superficies.

Desarrollo de un método de pantallas nulas, que nos permita colocar el plano de detección dentro de la región de la caústica y que sea capaz de diferenciar entre los componentes provenientes de cada surco.

Implementación del método de pantallas nulas para superficies tipo Fresnel, y a partir de esto medir sus parámetros de diseño.

1.4 Desarrollo

En este trabajo se proponen sistemas concentradores mediante la implementación de superficies tipo Fresnel, con la finalidad de estudiar formas alternativas de concentración a través de sus superficies cóncavas, las cuales se pueden definir como las envolventes a todos los rayos reflejados por la superficie, es decir, cada rayo reflejado por la superficie es tangente a esta curva [5–12]. Con esto se buscan explorar nuevas aplicaciones posibles, ya sea que las superficies sean más fáciles de maquinar o que la concentración de energía tenga propiedades distintas a las vistas en trabajos previos [3, 13–15].

En el caso de lentes tipo Fresnel se les puede definir como un arreglo ordenado de microprismas adyacentes cada uno con una inclinación determinada para desviar la luz incidente sobre el área de la lente [16–22]. Los tipos más comunes de lentes consisten en series de surcos anulares replicados en plásticos de calidad óptica. Este tipo de lentes tienen importantes propiedades, si se considera una lente gruesa la cual se secciona y se colapsa se puede reducir entonces la cantidad de material necesario para su construcción [16]. Además en la literatura se dan ejemplos de espejos de segunda superficie, lo cual motiva la definición de un espejo tipo Fresnel como un arreglo equivalente calculado a partir de una primera superficie reflectora cóncava y compuesto por una aproximación de secciones planas asociadas a la superficie original de diseño.

Los avances en la implementación de superficies de forma arbitraria en los instrumentos ópticos han ido en crecimiento junto con la capacidad de construcción debida al avance tecnológico, sin embargo, un importante problema que persiste es la forma de evaluar las superficies bajo prueba [23–27], ya que es bien sabido que se pueden fabricar superficies tan buenas como se pueda medir su forma. En el caso del presente trabajo se plantea este problema para espejos tipo Fresnel.

Se proponen nuevos métodos basados en las pruebas por pantallas nulas, las cuales se clasifican en las pruebas geométricas que nos permiten medir la forma de una superficie sin tener contacto con ella. Se retomaron las pruebas desarrolladas en trabajos previos aplicadas a superficies esféricas, implementando pruebas por pantallas nulas tipo Ronchi-Hartmann [24, 26, 28–35].

En el presente trabajo se obtienen ecuaciones paramétricas para calcular una pantalla nula cilíndrica [23, 25], pero con la diferencia que se demuestran las condiciones necesarias para evaluar una superficie continua por regiones y se implementa este razonamiento en el desarrollo de pruebas cualitativas preliminares para un espejo tipo Fresnel.

Capítulo 2

Trazo exacto de rayos y formación de cáusticas para superficies tipo Fresnel

A lo largo de este capítulo se definirá la notación a seguir durante todo este trabajo, se desarrollará el procedimiento para el diseño de un espejo tipo Fresnel con representación paramétrica, a partir del cual se calculará el trazo exacto de rayos considerando una fuente puntual colocada en infinito, de manera análoga al método desarrollado para un espejo cóncavo, obteniendo con esto las expresiones de las múltiples cáusticas producidas por las secciones del espejo tipo Fresnel. Posteriormente se hará el mismo cálculo considerando una cubierta transparente cuasi plana sobre los surcos del espejo, formando con esto una lente reflectora de Fresnel. Finalmente, estos cálculos se generalizarán considerando la fuente puntual colocada a una distancia finita a lo largo del eje óptico.

2.1 Diseño de un espejo tipo Fresnel

Se considerará a lo largo de este trabajo que el eje \mathbf{Z} es paralelo al eje óptico, se define también a $\mathbf{Y-Z}$ como el plano de incidencia. En trabajos previos se han estudiado espejos con forma paramétrica dada \mathbf{S} , la cual es una sección meridional de una superficie reflejante con simetría de revolución alrededor del eje \mathbf{Z} y que está contenida en el plano de incidencia, definiendo el origen del sistema como \mathcal{O} , situado de modo que coincide con el vértice de una superficie madre. Se asume sin pérdida de generalidad un conjunto de rayos paralelos al eje óptico propagándose de izquierda a derecha, cada rayo está representado por la altura h respecto del eje \mathbf{Z} , formando un frente de onda plano que incide sobre una superficie curva y que es reflejado por esta superficie, con representación paramétrica dada de la siguiente forma

$$\mathbf{S}(\tau) = (\mathcal{F}(\tau), \mathcal{G}(\tau)), \quad (2.1)$$

definida en el espacio real euclidiano \mathbb{R}^2 , donde las funciones de las componentes de la Ec. (2.1) son del tipo n -diferenciables, si cumplen además que $\mathbf{S}'(\tau) \neq 0$, entonces se denominan a este tipo de

funciones curvas suaves, es decir, son tales que para cada punto las derivadas parciales de cualquier orden existen, son continuas y están valuadas biunívocamente. Sea $\pm H$ el semidiámetro de apertura del espejo, considerando que $\mathcal{G}(\tau)$ está relacionada directamente con el parámetro de altura de rayo incidente h , se deduce que está definida únicamente sobre el intervalo $\mathcal{G} \in [-H, H]$.

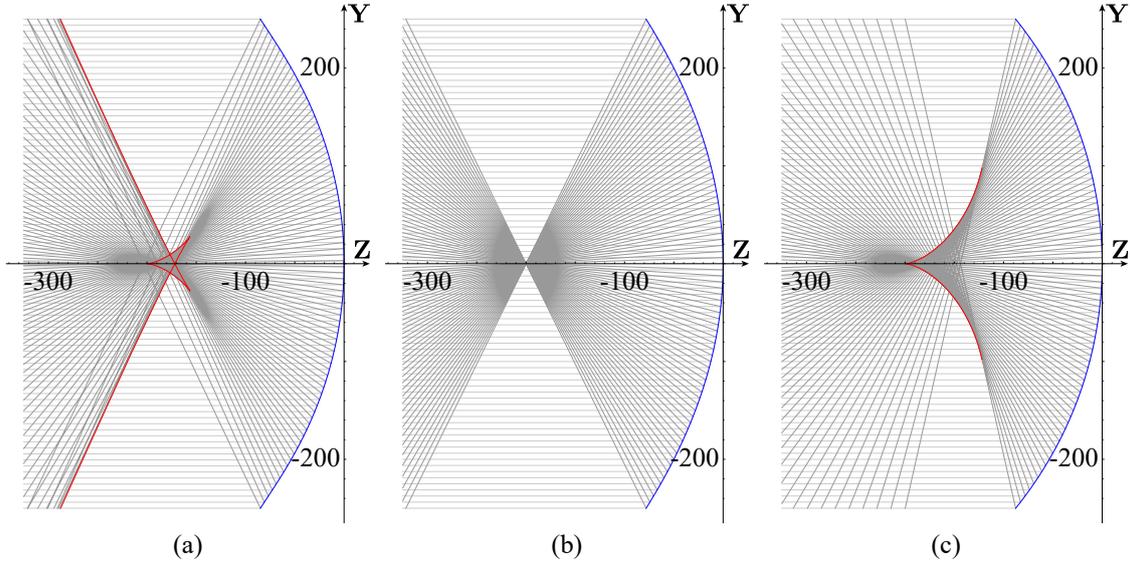


Fig. 2.1 Trazo exacto de rayos para espejos cóncavos con distancia focal $f = 200$ mm, semidiámetro $H = 250$ mm. (a) Espejo cicloidal con $a = 50$ mm y $b = 91.42$ mm. (b) Espejo parabólico $k = -1$ y $R = -400$ mm. (c) Espejo esférico $k = 0$ y $R = -400$ mm.

Considerando la Ec. (2.1) se calcula la cústica por reflexión en un espejo cóncavo como función de sus componentes, obteniendo la siguiente expresión

$$[z_c, y_c] = \left(\mathcal{F} + \frac{\mathcal{G}_\tau [\mathcal{F}_\tau^2 - \mathcal{G}_\tau^2]}{2(\mathcal{F}_\tau \mathcal{G}_{\tau\tau} - \mathcal{F}_{\tau\tau} \mathcal{G}_\tau)}, \mathcal{G} + \frac{\mathcal{F}_\tau \mathcal{G}_\tau^2}{\mathcal{F}_\tau \mathcal{G}_{\tau\tau} - \mathcal{F}_{\tau\tau} \mathcal{G}_\tau} \right), \quad (2.2)$$

donde \mathcal{F}_τ , \mathcal{G}_τ son las primeras derivadas y $\mathcal{F}_{\tau\tau}$, $\mathcal{G}_{\tau\tau}$ son las segundas derivadas de las componentes de la Ec. (2.1). En los ejemplos de la Fig. 2.1 se ilustran las cústicas representadas en la Ec. (2.2), producidas por distintos espejos cóncavos. Para el caso de la Fig. 2.1 (a) se ilustra una superficie cicloidal con parametrización dada por la siguiente función [36],

$$\mathbf{S}(\tau) = \left(-a(1 + \cos \tau), b \left(\tau - \pi - \left(\frac{a}{b} \right) \sin \tau \right) \right). \quad (2.3)$$

Por otro lado, en la Fig. 2.1 (b) se muestra un espejo parabólico, cuya cústica se reduce a un punto cuando la fuente es colocada en infinito, en la Fig. 2.1 (c) se observa la cústica producida por un espejo esférico, ambos ejemplos son casos particulares de espejos cónicos, cuya forma queda descrita

como función del parámetro h por la siguiente ecuación

$$\mathcal{S}(h) = \frac{c h^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2 h^2}} + \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i} h^{2i}, \quad (2.4)$$

donde $c = 1/R$, es la curvatura paraxial del espejo, $c < 0$ para espejos cóncavos, $c > 0$ para espejos convexos y k es la constante de conicidad, la convención de signos que se empleará a lo largo de este trabajo es la del libro de Óptica de Eugene Hecht [37] mostrada en el Apéndice A.

En la Fig. 2.1 (b) y (c) se especifican estos datos para los dos ejemplos mostrados, asumiendo que en general para las superficies cónicas se tendrá que $A_{2i} = 0$ para todo i , de lo contrario la Ec. (2.4) describe una superficie esférica, donde $A_4, A_6, A_8, \dots, A_{2\mathcal{M}}$ son los coeficientes de asfericidad, completando un polinomio finito con el \mathcal{M} -ésimo término de mayor orden, teniendo en la mayoría de los casos que $\mathcal{M} \leq 10$, estos coeficientes se utilizan normalmente para reducir aberración esférica en lentes esféricas [38–40], en este caso se utilizarán como una simple expresión polinomial para representar desde espejos cónicos a otro tipo de superficies con cáusticas semejantes a las que se muestran en la Fig. 2.1 (a). Por lo tanto, para dar la representación paramétrica de la superficie de un espejo esférico en el plano \mathbf{Y} - \mathbf{Z} , se obtiene a partir de la Ec. (2.1) la siguiente expresión

$$\mathbf{S}(h) = (\mathcal{S}(h), h), \quad (2.5)$$

donde se han sustituido $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{S}(h)$ y $\mathcal{G}(\tau) = h$ que es precisamente la altura de rayo, cabe destacar estas igualdades pues nos serán útiles al momento de diseñar espejos tipo Fresnel con ciertas características, inducidas a partir del uso de superficies esféricas como referencia.

Considérese un espejo tipo Fresnel con $N \in \mathbb{Z}$ número de secciones por semidiámetro, dada una superficie paramétrica de referencia o también denominada superficie madre como se muestra en la Fig. 2.2 (a), se pueden calcular las pendientes de las secciones del Fresnel definiendo un conjunto discreto y ordenado de puntos sobre la curva de referencia definida en la Ec. (2.5), generando una partición de la superficie madre denotada como $S_n = \mathbf{S}(\tau_n)$, para $n = 0, \dots, N$ con $n \in \mathbb{Z}$, donde S_0 representa el vértice de la superficie y S_N es el borde, a partir de estos elementos se devuelve una aproximación continua de la curva inicial pero formada por N segmentos de rectas secantes a la curva y que están definidos mediante la relación de correspondencia entre puntos de la partición, $S_{n-1} \rightarrow S_n$ para $n = 1, \dots, N$. Nótese que si se considera el límite cuando $N \rightarrow \infty$, los puntos contiguos de la partición estarán separados por distancias infinitesimales, es decir, los segmentos de recta $S_{n-1} \rightarrow S_n$ tenderán a ser tangentes a la superficie de referencia en un punto, por lo que la superficie aproximada estará compuesta por segmentos cuyas tangentes serán iguales a las de la superficie esférica continua, obteniendo las mismas propiedades de reflexión.

El conjunto S_n propuesto anteriormente está expresado como función de una sucesión de valores del parámetro utilizado en la Ec. (2.1), cuyo n -ésimo término es τ_n , para calcular los puntos de la partición

considérese el caso en que para cada uno de estos valores está bien definida la siguiente función

$$h_n = \mathcal{G}(\tau_n), \text{ donde } h_n \in [0, H] \subseteq \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

donde, la función \mathcal{G} está dada por la Ec. (2.1) y mapea los elementos $\tau_n \mapsto h_n$, asignando a cada valor del parámetro τ_n de la curva, una altura h_n dentro del semidiámetro del espejo, generando con esto el subintervalo de apertura de entrada $[h_{n-1}, h_n]$ para el n -ésimo segmento. Si se satisfacen estas condiciones, dadas las alturas de segmentos h_n se puede calcular a partir de la Ec. (2.6) la transformación inversa $\mathcal{G}^{-1}(h_n) = \tau_n$, y sustituyendo estos valores en la Ec. (2.1) se obtienen los elementos S_n de la aproximación de la superficie. Por otro lado, si se define la condición de partición $\tau_n = T[\mathcal{F}, \mathcal{G}]$ como una función que está en términos de las componentes de la curva, se sustituye esta expresión en la Ec. (2.6) directamente, esto ocurre por ejemplo cuando se define el seccionamiento de la curva de referencia por longitud de arco [36].

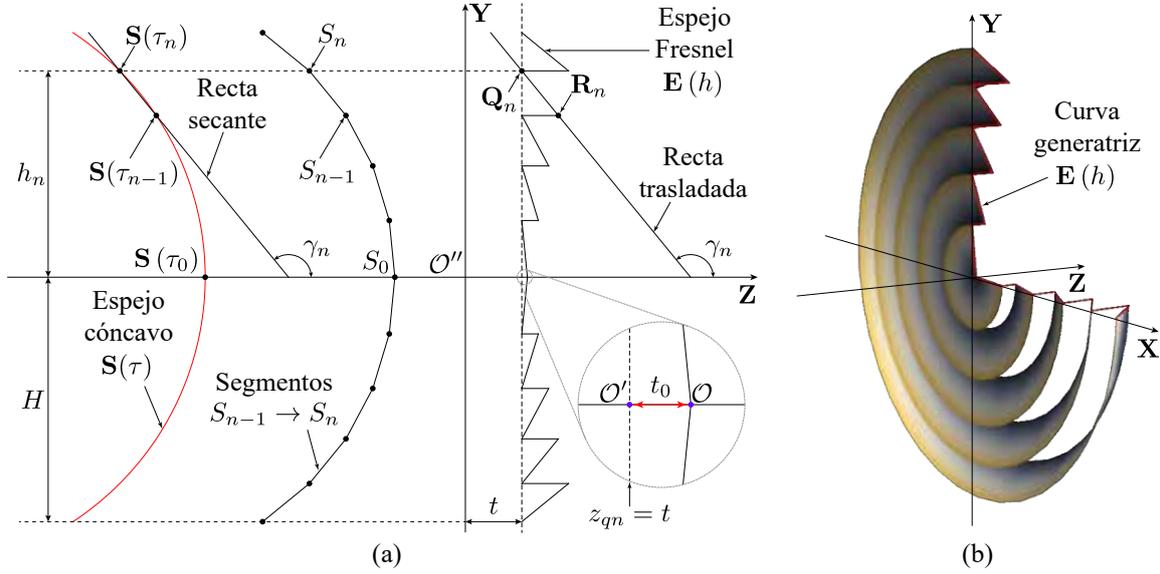


Fig. 2.2 (a) Cálculo de la partición τ_n de un espejo cóncavo seccionando el semidiámetro de apertura en alturas h_n . (b) Superficie de revolución obtenida a partir de la curva generatriz $E(h)$.

El cálculo presentado anteriormente permite obtener las expresiones para los puntos que delimitan el n -ésimo segmento $S_{n-1} \rightarrow S_n$ de la aproximación a trozos de la superficie madre. Para reducir esta superficie a un espejo tipo Fresnel se aplica una traslación en dirección del eje óptico, manteniendo invariante la pendiente de cada segmento y fijando cada uno a los que se denominarán puntos frontales del espejo $\mathbf{Q}_n = (z_{qn}, y_{qn})$, tales que para cada n se encontrarán colocados sobre la recta $z = t$ con respecto del eje \mathbf{Y} , por lo cual

$$z_{qn} = t, \quad y_{qn} = \mathcal{G}(\tau_n), \quad (2.7)$$

por otro lado, sus respectivos puntos posteriores $\mathbf{R}_n = (z_{rn}, y_{rn})$ deben ser trasladados de modo que la

recta compuesta por S_{n-1} y S_n sea paralela a la recta formada por \mathbf{R}_n y \mathbf{Q}_n , resultando las expresiones de sus coordenadas

$$z_{rn} = t + [\mathcal{F}(\tau_{n-1}) - \mathcal{F}(\tau_n)], \quad y_{rn} = \mathcal{G}(\tau_{n-1}), \quad (2.8)$$

estos términos cumplen que, $z_{qn} < z_{rn}$ y $y_{qn} > y_{rn}$, esto produce la condición para un espejo tipo Fresnel cóncavo, este método se puede extender para diseñar espejos tipo Fresnel a partir de superficies convexas. Nótese en la Fig. 2.2 (a), que después de la traslación de los segmentos del espejo tipo Fresnel, su vértice \mathcal{O} se encuentra desplazado una distancia $t + t_0$ del origen de coordenadas \mathcal{O}'' , y t_0 del punto \mathcal{O}' sobre el plano de los \mathbf{Q}_n , donde $t > 0$ y $t_0 = \mathcal{F}(\tau_0) - \mathcal{F}(\tau_1)$.

Por lo tanto, la n -ésima sección del espejo tipo Fresnel queda descrita mediante el segmento $\mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{Q}_n$ de la recta trasladada que se observa en la Fig. 2.2 (a), cuyo punto inicial corresponde a la zona interna del surco y el punto final a la cúspide del mismo, obteniendo a partir de la Ec. (2.1) la siguiente identidad para calcular sus pendientes

$$\tan \gamma_n = \left[\frac{\mathcal{G}(\tau_n) - \mathcal{G}(\tau_{n-1})}{\mathcal{F}(\tau_n) - \mathcal{F}(\tau_{n-1})} \right] = \left[\frac{y_{qn} - y_{rn}}{z_{qn} - z_{rn}} \right], \quad (2.9)$$

donde $\tan \gamma_n$ representa la pendiente de cada segmento que compone al espejo tipo Fresnel, en consecuencia, a partir de las expresiones para los puntos que fijan la traslación de las secciones rectas y sus inclinaciones, se obtiene una función continua a trozos que describe la forma espejo tipo Fresnel en el plano de incidencia como

$$\mathcal{E}_h(h) = z_{rn} + \frac{1}{\tan \gamma_n} (h - y_{rn}), \quad \text{para } h \in (h_{n-1}, h_n), \quad (2.10)$$

donde h es el parámetro de altura de rayo incidente sobre la superficie reflejante, la Ec. (2.10) es continua sobre las aperturas de entrada de cada surco, las cuales se han denotado como intervalos abiertos para asegurar que esta expresión cumple las propiedades de una función sobre el dominio $h \in [0, H]$, dejando las cúspides de los surcos como puntos de indeterminación en la función, pues no se puede definir una tangente al surco en estos puntos cuando se calcule el trazo de rayos.

Dado que la Ec. (2.10) describe la forma del espejo tipo Fresnel en un plano meridional y que es una superficie con simetría de revolución, la expresión para la curva generatriz queda parametrizada de la siguiente forma

$$\mathbf{E}(h) = (\mathcal{E}_h(h), h), \quad (2.11)$$

de modo que la superficie del espejo se puede idealizar como un arreglo de conos truncados que están dispuestos sobre un plano en común cuando se define $z_{qn} = t$ y de forma concéntrica alrededor del eje \mathbf{Z} como se muestra en la Fig. 2.2 (b).

2.2 Seccionamiento por alturas equidistantes de un espejo y trazo exacto de rayos

El método de diseño de un espejo tipo Fresnel a partir de una superficie de referencia que se desarrollará en este trabajo [36], será a través del seccionamiento que resulta al dividir el semidiámetro de apertura en alturas equidistantes h_n , como se ilustra en la Fig. 2.3. Considerando la parametrización de la superficie esférica que se muestra en la Ec. (2.5) la cual está expresada como función del parámetro h de altura de rayo incidente, se tiene que de acuerdo con la notación introducida en la Ec. (2.1), se identifica la expresión $\mathcal{G}(h) = h$.

De acuerdo con el proceso descrito en la Sección 2.1, a partir de esta igualdad se infiere de la Ec. (2.6), que para cada n está definida la expresión $\tau_n = h_n$, dado que la transformación T corresponde a la función identidad y depende únicamente de la segunda componente de la superficie, la cual está asociada directamente con la altura de rayo. Por lo tanto, la sucesión de partición de la superficie esférica queda definida directamente como $\tau_n = \varepsilon n$, para $n = 1, \dots, N$ donde $\varepsilon = H/N$ es la longitud de entrada de cada surco, la cual resulta de dividir el semidiámetro H del espejo, entre N el número total de secciones por mitad del espejo, las cuales formarán parte del espejo tipo Fresnel como se observa en la Fig. 2.3.

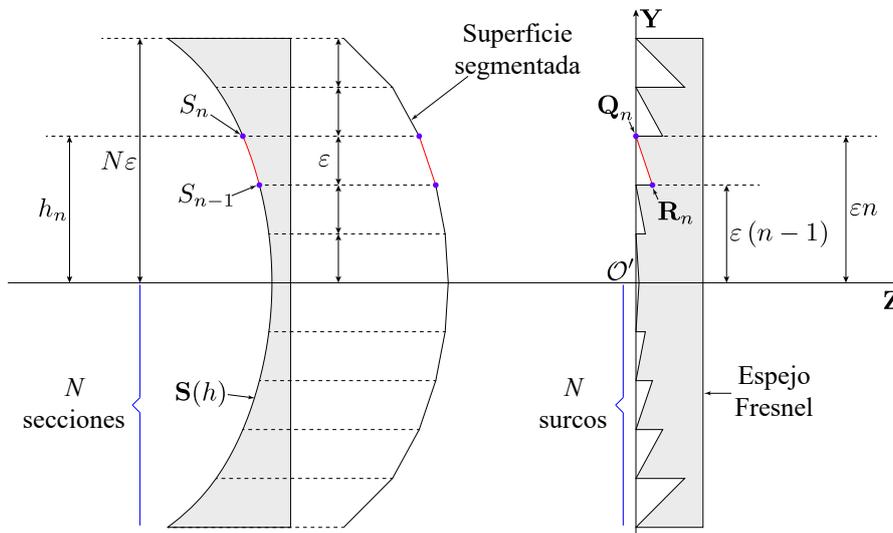


Fig. 2.3 Definición de la partición de un espejo cóncavo seccionando el semidiámetro de apertura en N intervalos equidistantes de longitud ε .

Con esto se obtiene la partición S_n de la superficie y como se indica en la Sección 2.1, la traslación de los segmentos $S_{n-1} \rightarrow S_n$, produce los puntos frontales y posteriores de los surcos del espejo. Sin pérdida de generalidad podemos sustituir $t = 0$ en la Ec. (2.7) y la Ec. (2.8), por lo que el nuevo origen de coordenadas corresponde a $\mathcal{O}' = \mathcal{O}''$, considerando el plano de los puntos frontales $z_{qn} = 0$ sobre

el eje \mathbf{Y} lo cual nos permitirá simplificar el álgebra, obteniendo las expresiones siguientes

$$\mathbf{Q}_n = (0, \varepsilon n), \quad \mathbf{R}_n = (\mathcal{S}(\varepsilon[n-1]) - \mathcal{S}(\varepsilon n), \varepsilon(n-1)), \quad (2.12)$$

de donde se deduce directamente $t_0 = -\mathcal{S}(\varepsilon)$, y que $y_{qn} - y_{rn} = \varepsilon$, sustituyendo las coordenadas de estas colecciones de puntos en la Ec. (2.9), se obtienen las pendientes de las secciones planas del espejo como función del número de surco n

$$\tan \gamma_n = \left[\frac{\varepsilon}{\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon[n-1])} \right], \quad (2.13)$$

sustituyendo este resultado y las coordenadas de los puntos extremos de los surcos en la Ec. (2.10), se obtiene

$$\mathcal{E}_h(h) = \left[\frac{\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon[n-1])}{\varepsilon} \right] (h - \varepsilon[n-1]) - (\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon[n-1])), \quad (2.14)$$

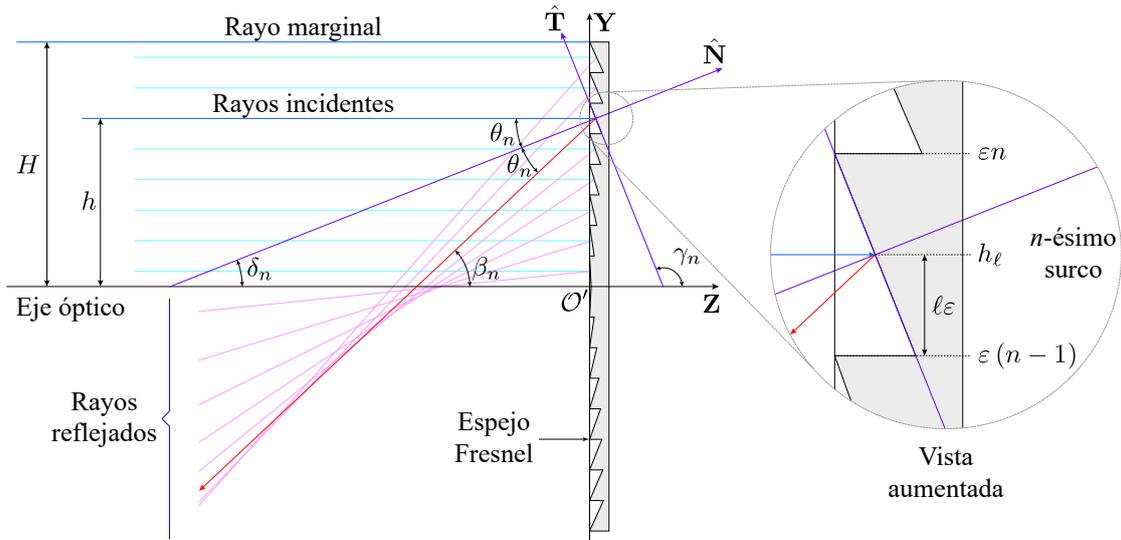


Fig. 2.4 Parámetros utilizados en el trazo exacto de rayos para un espejo tipo Fresnel, considerando una fuente de luz colocada en infinito.

de donde se deduce la expresión para el perfil de un espejo tipo Fresnel para el caso en que se divide el semidiámetro de entrada en alturas equidistantes

$$\mathcal{E}_h(h) = \left[\frac{\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon[n-1])}{\varepsilon} \right] (h - \varepsilon n), \quad \text{para } h \in (\varepsilon[n-1], \varepsilon n), \quad (2.15)$$

la cual es una función continua a trozos respecto del parámetro h . Por lo que, si se deriva la Ec. (2.15) respecto de h se obtiene la expresión $\mathcal{E}'_h(h) = 1/\tan \gamma_n$, que es una constante distinta para cada intervalo de alturas $h \in (\varepsilon[n-1], \varepsilon n)$, y representa la pendiente del vector tangente medida en el

plano de incidencia, entonces para cada sección plana del espejo está asociado un vector $\hat{\mathbf{T}}$, como se ilustra en la Fig. 2.4.

Sin embargo, para representar analíticamente los planos del espejo se necesita conocer $\hat{\mathbf{N}}$ el vector normal a cada superficie, por lo que se deducen las inclinaciones de las normales sobre el plano \mathbf{Y} - \mathbf{Z} , a partir de la siguiente identidad $\tan \gamma_n \cdot \tan \delta_n = -1$. Resultando que para el conjunto de rayos paralelos al eje óptico, que inciden a determinadas alturas pertenecientes al intervalo de apertura del n -ésimo segmento del espejo, como se observa en la Fig. 2.4. Se satisfacen las igualdades $\theta_n = \delta_n$, $\beta_n = 2\theta_n$, de donde se deduce que el ángulo de reflexión con respecto del eje \mathbf{Z} está dado como $\beta_n = 2\delta_n$, sustituyendo a partir de la Ec. (2.13) y simplificando adecuadamente se obtiene la expresión

$$\beta_n = -\arctan \left[\frac{2\varepsilon [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]}{\varepsilon^2 - [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]^2} \right], \quad (2.16)$$

por lo tanto, los conjuntos de rayos reflejados que provienen de cada segmento del espejo tipo Fresnel, se pueden representar como familias paramétricas de rectas que están definidas para cada uno de los intervalos de la función a trozos calculados en la Ec. (2.15), obteniendo la siguiente ecuación

$$y \cos \beta_n - z \sin \beta_n = h \cos \beta_n - \mathcal{E}_h(h) \sin \beta_n, \quad \text{para } h \in (\varepsilon [n-1], \varepsilon n], \quad (2.17)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, por lo que para cada conjunto de rayos cuyas alturas h se encuentren contenidas en el intervalo perteneciente al n -ésimo surco, se tendrá un conjunto de rayos reflejados que son paralelos entre sí y se propagan a un ángulo β_n con respecto del eje óptico.

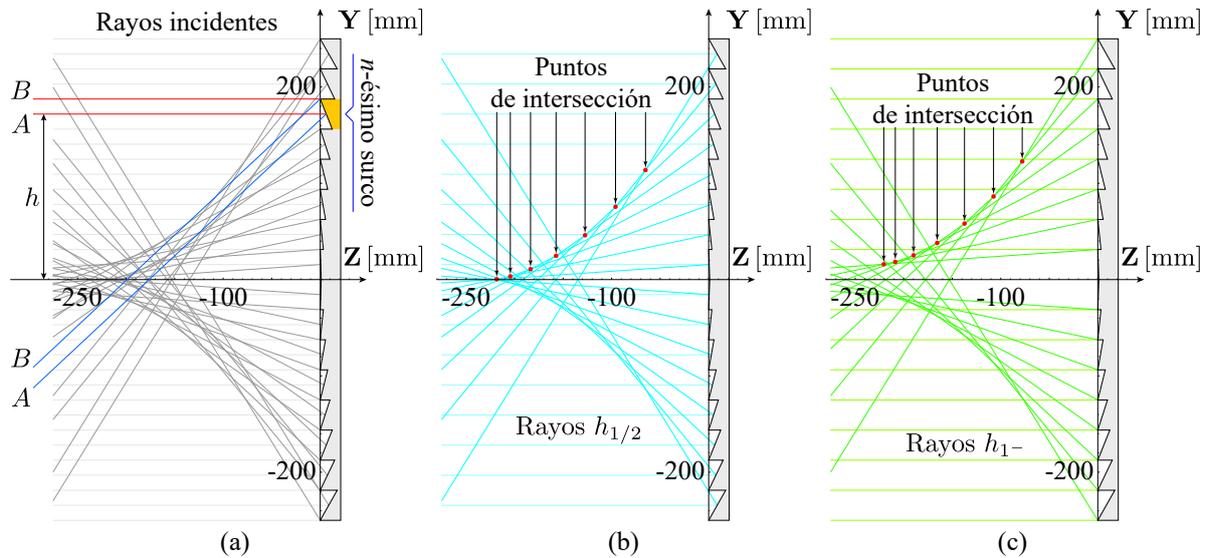


Fig. 2.5 (a) Trazo exacto de rayos para un espejo elíptico prolato $k = -0.5$, $N = 8$ surcos por mitad, $H = 250$ mm y $R = -450$ mm. (b) Considerando únicamente el conjunto de rayos $h_{1/2}$, tales que inciden a la mitad de cada surco. (c) Conjunto de rayos h_{1-} , que tienden a las cúspides de cada surco.

Como se ilustra en los trazos exactos de la Fig. 2.5 (a), considerando un espejo tipo Fresnel elíptico prolato y en la Fig. 2.6 (a), para un espejo hiperbólico, cuyas superficies están representadas por la Ec. (2.15) con sus correspondientes parámetros, considerando en ambos casos un conjunto de rayos paralelos incidentes, compuesto por dos subconjuntos de rayos que se encuentran distribuidos por alturas equidistantes sobre la apertura del espejo, el primer conjunto se define por los rayos de tipo A que inciden a las alturas $h = (2n - 1)\varepsilon/2$, para $n = 1, \dots, N$, los cuales corresponden a los rayos que inciden a la mitad de cada surco, y están intercalados con un conjunto especial de rayos tipo B que inciden a las alturas $h \rightarrow \varepsilon n^-$, para $n = 1, \dots, N$, los cuales corresponden a los rayos cuya altura tiende por la izquierda hacia el borde de cada surco donde el límite lateral existe y es la cúspide \mathbf{Q}_n del n -ésimo surco, si se aproxima por la derecha resulta el punto posterior del surco siguiente \mathbf{R}_{n+1} . Evaluando la Ec. (2.17) para calcular los rayos reflejados del conjunto descrito anteriormente por los rayos tipo A y B , se observa que el haz de rayos reflejados produce zonas en donde existe una mayor concentración de luz, de manera análoga a las cáusticas que fueron mostradas para superficies continuas y suaves en la Fig. 2.1.

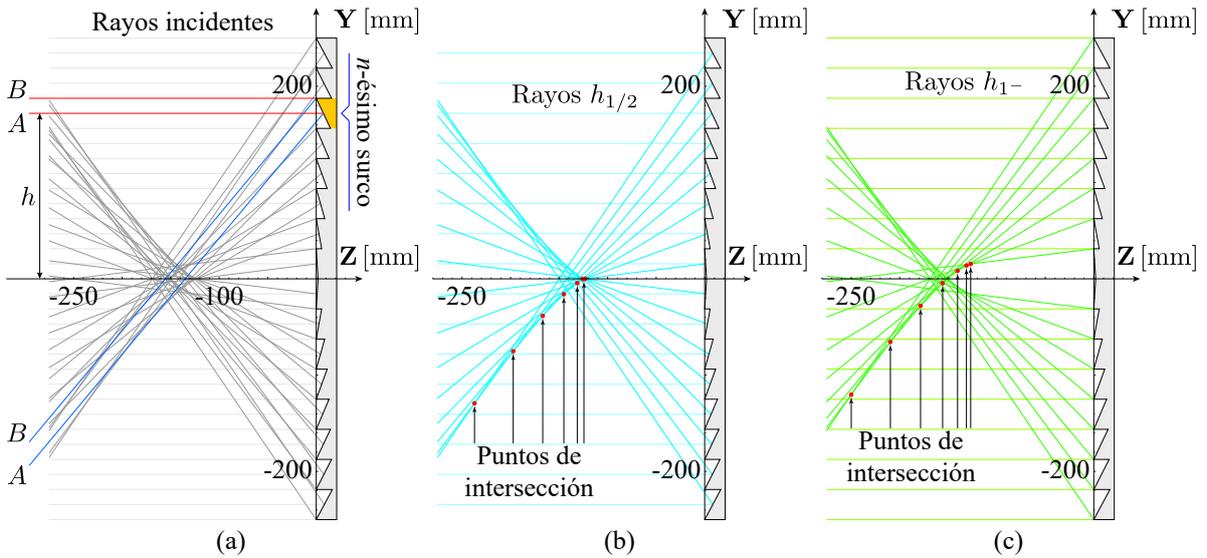


Fig. 2.6 (a) Trazo exacto de rayos para un espejo hiperbólico $k = -3.4$, $N = 8$ surcos por mitad, $H = 250$ mm y $R = -250$ mm. (b) Considerando únicamente el conjunto de rayos $h_{1/2}$, tales que inciden a la mitad de cada surco. (c) Conjunto de rayos h_{1-} , que tienden a las cúspides de cada surco.

Con el objetivo de ilustrar este fenómeno, se observa a partir de la vista aumentada de la Fig. 2.4, que para un rayo incidente sobre determinado surco del espejo, se puede dar una representación distinta del parámetro h como función del número de surco n y la altura relativa a la apertura del surco ε a la cual incide el rayo, obteniendo

$$h_\ell = \varepsilon [(n - 1) + \ell] \quad \text{para } \ell \in (0, 1), \quad (2.18)$$

donde ℓ denota la fracción de la apertura de entrada del n -ésimo surco a la cual incide el rayo h_ℓ , por

lo tanto, la Ec. (2.18) representa un subconjunto del haz incidente total, tal que contiene a todos los rayos que inciden a determinada fracción de surco para cada una de las facetas del espejo tipo Fresnel, asignando con esto únicamente un rayo por sección.

Entonces, retomando los trazos de las Figs. 2.5 y 2.6 (a), se observa que para cada par de rayos incidentes sobre un sólo surco, como los rayos A y B , no existe intersección entre sus correspondientes rayos reflejados ya que son paralelos. Para determinar las aparentes cáusticas del espejo tipo Fresnel, se tomarán por separado los subconjuntos de rayos incidentes anteriormente mencionados, los cuales se pueden distinguir más fácilmente mediante el parámetro ℓ definido en la Ec. (2.18), en las Figs. 2.5 y 2.6 (b) se ilustran los trazos considerando los rayos que inciden sobre la mitad del surco, para los cuales $\ell = 1/2$ y en las Figs. 2.5 y 2.6 (c) se muestran los trazos correspondientes a los rayos que tienden hacia las cúspides, tales que $\ell \rightarrow 1^-$. En estos casos en que se ha utilizado únicamente una familia de rayos h_ℓ determinada, se hacen evidentes las zonas de concentración de luz que podrían formar una cáustica, observando los puntos de intersección entre rayos contiguos dentro de cada conjunto h_ℓ se puede inferir que éstos forman parte de una superficie cáustica, sin embargo, estas intersecciones pertenecen a un conjunto discreto ya que sólo existen para cada $n \in \mathbb{Z}$, por lo cual no se puede determinar una cáustica a partir de estos puntos únicamente, para esto se harán otras consideraciones.

2.3 Cálculo de la cáustica de un espejo tipo Fresnel

Como se muestra en los trazos de las Figs. 2.5 y 2.6, y a partir de la discusión anterior, se sabe que si se relaciona un solo rayo incidente por cada surco del espejo, entonces las intersecciones entre rayos reflejados contiguos parecen describir una curva semejante a los perfiles de las superficies cáusticas mostradas en la Fig. 2.1, ampliamente estudiadas para superficies suaves con representación paramétrica dada [5, 9, 41], sin embargo, la Ec. (2.15) que describe un espejo tipo Fresnel no es una superficie suave ya que $\mathcal{E}_h'' = 0$, por lo cual, para calcular su superficie cáustica se propone una reparametrización del problema.

Considérese entonces un subconjunto del haz de rayos incidentes en el espejo, como fue definido en la Ec. (2.18), tal que para el n -ésimo surco se tendrá únicamente el rayo que incide a la altura h_ℓ , para una $\ell \in (0, 1)$ determinada. Pero la Ec. (2.15) es función de $h \in \mathbb{R}$ definida en intervalos donde $n \in \mathbb{Z}$, por lo que, extendiendo los elementos de la partición a $n \in \mathbb{R}$ se obtiene un dominio continuo de h_ℓ como función de n , sustituyendo apropiadamente para $h \rightarrow h_\ell$ en la Ec. (2.15), se obtiene

$$\mathcal{E}_h(n) = (\ell - 1) [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])], \quad (2.19)$$

la cual es función únicamente del número de surco y está definida para la sucesión progresiva dada por $n = 1, \dots, N$. Por otro lado, en la Ec. (2.17) se describe la familia de rayos reflejados como función

de h , por lo que aplicando el mismo cambio de variable a partir de la Ec. (2.18) se obtiene

$$y \cos \beta_n - z \operatorname{sen} \beta_n = \varepsilon (\ell + n - 1) \cos \beta_n - (\ell - 1) [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])] \operatorname{sen} \beta_n, \quad (2.20)$$

donde el valor predeterminado de ℓ indica la altura relativa del rayo reflejado que se está utilizando por cada sección, nótese que únicamente se está considerando a la parte superior del espejo tipo Fresnel, la parte inferior se obtiene a partir de una rotación de π alrededor del eje \mathbf{Z} de las coordenadas de los puntos \mathbf{Q}_n y \mathbf{R}_n . Sustituyendo directamente el término β_n de la Ec. (2.16), la Ec. (2.20) se transforma en una representación paramétrica de la familia de rayos reflejados como función de n . Se tiene además, que la Ec. (2.20) a diferencia de la Ec. (2.17) no es una función definida a trozos, por lo que la delimitación de los rayos incidentes sobre cada sección del espejo queda fijada directamente por el parámetro ℓ , en lugar de tener que definir cada intervalo de apertura de surco, por lo tanto, las Ec. (2.19) y Ec. (2.20) están definidas biunívocamente para cada subconjunto de rayos h_ℓ , dejando como único parámetro independiente al número de surco n , que si se toma ahora como una variable en \mathbb{R} , permite extender los puntos de intersección entre rayos de un conjunto discreto a una curva con dominio continuo. Entonces, para obtener la ecuación paramétrica de la cáustica se utilizará el método de las envolventes que es una generalización del cálculo de las intersecciones entre rayos reflejados contiguos, para esto se deriva la Ec. (2.20) respecto del parámetro n , agrupando los factores comunes se obtiene la siguiente expresión

$$y \operatorname{sen} \beta_n + z \cos \beta_n = (\ell - 1) [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])] \cos \beta_n + \varepsilon (\ell + n - 1) \operatorname{sen} \beta_n - \mathcal{W}, \quad (2.21)$$

donde se ha definido,

$$\mathcal{W} = \varepsilon \left[\frac{\cos \beta_n - (\ell - 1) [\mathcal{S}'(\varepsilon n) - \mathcal{S}'(\varepsilon [n - 1])] \operatorname{sen} \beta_n}{\partial \beta_n / \partial n} \right], \quad (2.22)$$

que está expresado en términos de la función $\mathcal{S}'(\varepsilon n)$, la cual representa la derivada de primer orden de la Ec. (2.4) con respecto del parámetro h y evaluada en la altura de cada surco, obteniendo

$$\mathcal{S}'(\varepsilon n) = \frac{c \varepsilon n}{\sqrt{1 - (k + 1)c^2 \varepsilon^2 n^2}} + \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} 2i A_{2i}(\varepsilon n)^{2i-1}, \quad (2.23)$$

por otro lado, las funciones trigonométricas involucradas en las Ec. (2.21) y Ec. (2.22), que dependen del término β_n , se pueden reducir a partir de la Ec. (2.16), considerando las siguientes identidades de composición de funciones

$$\operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (2.24)$$

sustituyendo la Ec. (2.16) en las identidades de la Ec. (2.24) y reduciendo las expresiones resultantes

se deducen las siguientes funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} \beta_n = \left[\frac{-2\varepsilon [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]}{\varepsilon^2 + [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]^2} \right], \quad \operatorname{cos} \beta_n = \left[\frac{\varepsilon^2 - [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]^2}{\varepsilon^2 + [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]^2} \right], \quad (2.25)$$

para hacer más compacta la notación, se denotarán los siguientes términos que están expresados en función de la Ec. (2.4), como

$$\Delta \mathcal{S}(n) = \mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1]), \quad \Delta \mathcal{S}^2(n) = [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]^2, \quad (2.26)$$

por lo que, las fórmulas presentadas en la Ec. (2.25) se transforman en las siguientes expresiones

$$\operatorname{sen} \beta_n = - \left[\frac{2\varepsilon \Delta \mathcal{S}(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right], \quad \operatorname{cos} \beta_n = \left[\frac{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right], \quad (2.27)$$

posteriormente, derivando la Ec. (2.16) respecto del parámetro n , se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial n} = - \left[\frac{2\varepsilon^2 (\mathcal{S}'(\varepsilon n) - \mathcal{S}'(\varepsilon [n-1]))}{\varepsilon^2 + [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n-1])]^2} \right], \quad (2.28)$$

donde el siguiente término que está en función de la Ec. (2.23), se puede denotar como

$$\Delta \mathcal{S}'(n) = [\mathcal{S}'(\varepsilon n) - \mathcal{S}'(\varepsilon [n-1])], \quad (2.29)$$

sustituyendo en la Ec. (2.28) los términos definidos en la notación de las Ec. (2.26) y Ec. (2.29), resulta la expresión

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial n} = - \left[\frac{2\varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}'(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right], \quad (2.30)$$

entonces, retomando las identidades que se obtuvieron en la Ec. (2.27) y la Ec. (2.30), sustituyendo posteriormente estos términos en la Ec. (2.22), la expresión se reduce a una forma más explícita como función de n , obteniendo

$$\mathcal{W} = - \left[\frac{[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)] + 2\varepsilon(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}'(n) \Delta \mathcal{S}(n)}{2\varepsilon \Delta \mathcal{S}'(n)} \right], \quad (2.31)$$

finalmente, formando un sistema lineal de dos ecuaciones considerando la Ec. (2.20) y la Ec. (2.21), se resuelve para las dos incógnitas z y y , reduciendo ambas expresiones resultan

$$z = (\ell - 1) \Delta \mathcal{S}(n) - \mathcal{W} \operatorname{cos} \beta_n, \quad (2.32)$$

$$y = \varepsilon(\ell + n - 1) - \mathcal{W} \operatorname{sen} \beta_n,$$

redefiniendo las componentes de esta función como $z \rightarrow \mathcal{Z}_c$ y $y \rightarrow \mathcal{Y}_c$, donde el subíndice c denota la cáustica de un espejo tipo Fresnel. Sustituyendo en la Ec. (2.32), las identidades de la Ec. (2.27) y el resultado mostrado en la Ec. (2.31), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_c(n) &= (\ell - 1) \Delta \mathcal{S}(n) + \\ &+ \left[\frac{[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)]^2 + 2\varepsilon(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}'(n) \Delta \mathcal{S}(n) [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)]}{2\varepsilon \Delta \mathcal{S}'(n) [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]} \right], \quad (2.33) \\ \mathcal{Y}_c(n) &= \varepsilon(\ell + n - 1) - \varepsilon \left[\frac{\Delta \mathcal{S}(n) \left\{ [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)] + 2\varepsilon(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}'(n) \Delta \mathcal{S}(n) \right\}}{\varepsilon \Delta \mathcal{S}'(n) [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]} \right], \end{aligned}$$

es importante resaltar que esta ecuación está en términos del orden del surco n , por lo que para graficar la cáustica sobre toda la apertura del espejo se hace sobre el intervalo $n \in [1, N] \subseteq \mathbb{R}$, donde el parámetro N representa el número total de surcos definidos en la parte superior del semidiámetro del espejo tipo Fresnel, recordando que $H = \varepsilon N$, a partir de este dominio se deduce también el hecho que para tener un espejo tipo Fresnel bien definido se requiere un mínimo de $N = 2$ surcos por semidiámetro, fijando a su vez el parámetro de fracción de la apertura de surco $\ell \in (0, 1)$.

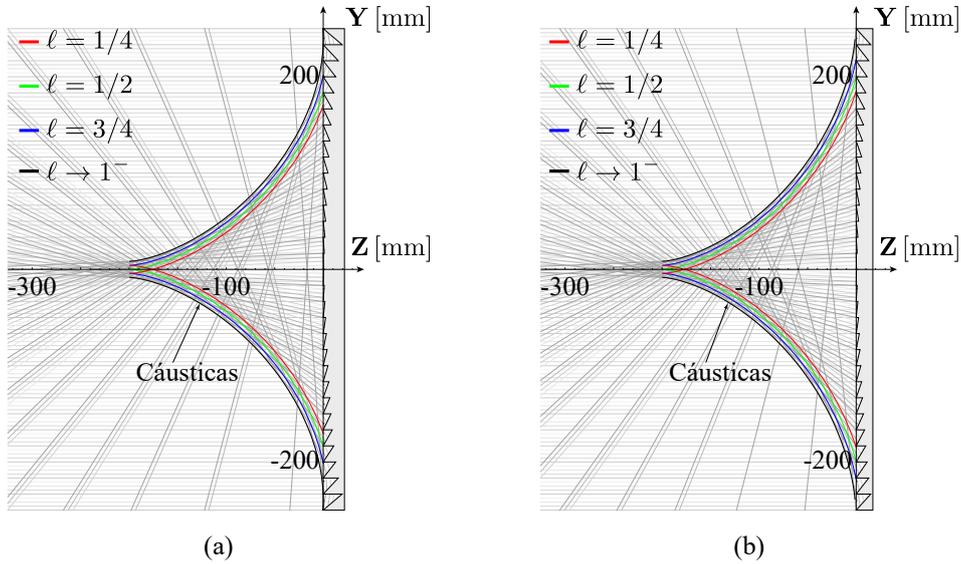


Fig. 2.7 Cáusticas para espejos cónicos, considerando $H = 250$ mm, $N = 15$ surcos por mitad y radio de curvatura paraxial $R = -400$ mm. (a) Espejo tipo Fresnel $k = 1$. (b) Fresnel elíptico oblató $k = 0.5$.

En las Figs. 2.7, 2.8 y 2.9, se muestran ejemplos de espejos cónicos tipo Fresnel, se comparan las formas de las cáusticas producidas por los subconjuntos de rayos $h_{1/4}$, $h_{1/2}$, $h_{3/4}$ y h_{1-} graficando la Ec. (2.33) para cada caso, fijando los parámetros de las superficies de referencia con semidiámetro

de apertura de entrada $H = 250$ mm y radio de curvatura paraxial $R = -400$ mm, resultando con esto un $F\# = R/H = 0.8$, para cada espejo. En estos trazos podemos ver claramente que variando los parámetros de diseño se puede modificar el tamaño de la cústica, lo que da como resultado un concentrador más eficiente conforme se reducen las dimensiones de las cústicas.

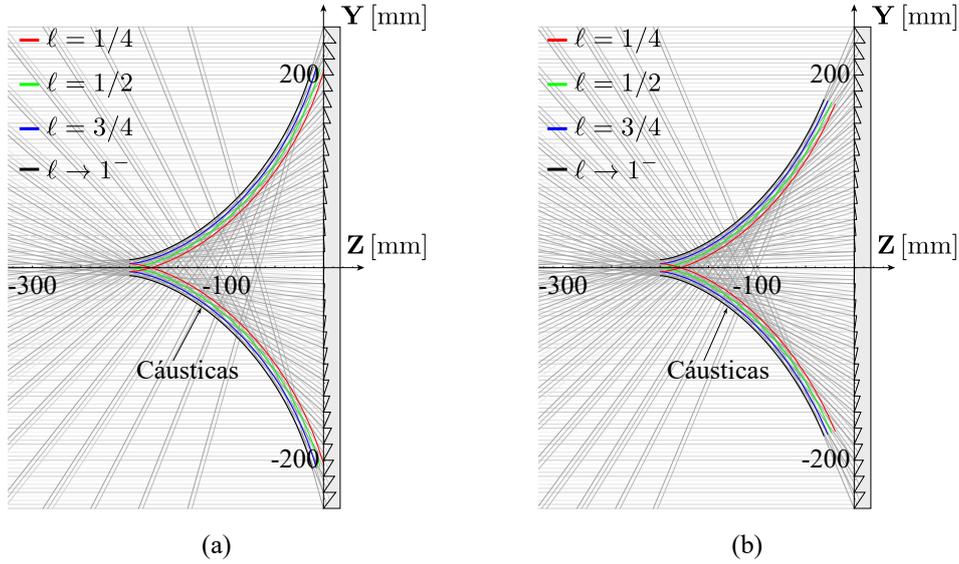


Fig. 2.8 Cústicas para espejos cónicos, considerando $H = 250$ mm, $N = 15$ surcos por mitad y radio de curvatura paraxial $R = -400$ mm. (a) Fresnel esférico $k = 0$. (b) Fresnel elíptico prolato $k = -0.5$.

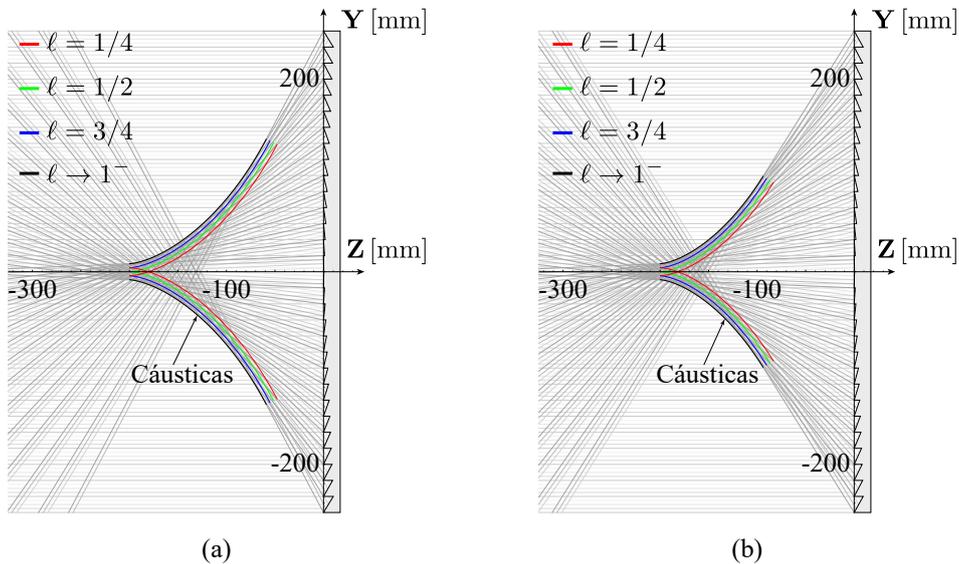


Fig. 2.9 Cústicas para espejos cónicos, considerando $H = 250$ mm, $N = 15$ surcos por mitad y radio de curvatura paraxial $R = -400$ mm. (a) Fresnel parabólico $k = -1$. (b) Fresnel hiperbólico $k = -1.5$.

En esta sección se ha obtenido la representación paramétrica de la cústica para cada familia de rayos h_ℓ , con $\ell \in (0, 1)$, sin embargo, como se observa en los trazos de rayos para distintos espejos, la

cáustica cuando $\ell \rightarrow 1^-$ es la envolvente de los rayos exteriores, por lo cual las demás familias de rayos pasan siempre por dentro de esta cáustica, además la Ec. (2.33) está definida para el caso límite cuando $\ell = 1$, en las siguientes secciones se estudiará esta cáustica para obtener algunas propiedades importantes de espejo tipo Fresnel, teniendo en cuenta que se trata de un caso límite.

2.3.1 Pérdidas por reflexión en un espejo tipo Fresnel

Nótese que en los trazos de rayos mostrados en las Figs. 2.7, 2.8 y 2.9, para ciertos subconjuntos h_ℓ sus correspondientes familias de rayos reflejados inciden en algunos casos sobre las barreras internas formadas por los surcos del espejo, dado que los conjuntos reflejados por cada sección del espejo están conformados por rayos paralelos entre sí, se deduce que para la n -ésima sección deberá existir una fracción de apertura crítica ℓ_{cn} a partir de la cual para los subconjuntos de rayos incidentes h_ℓ tales que $\ell \leq \ell_{cn}$, sus correspondientes rayos reflejados incidan sobre la barrera del surco de orden $n - 1$.

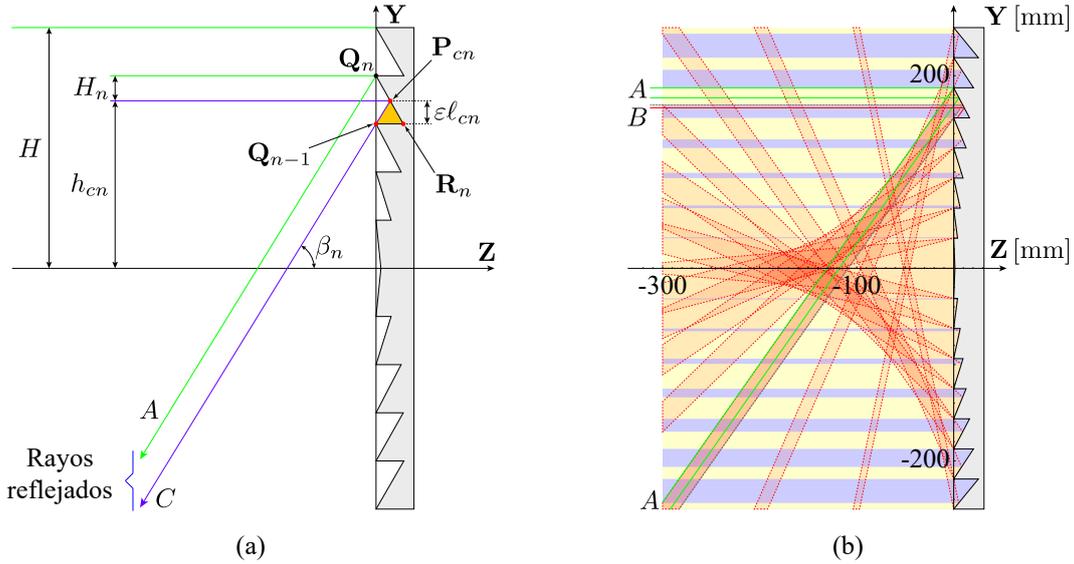


Fig. 2.10 (a) Diagrama para calcular la fracción de surco crítica ℓ_{cn} . (b) Ejemplo de zonas de obstrucción de luz para un espejo tipo Fresnel esférico $k = 0$, considerando $N = 8$ surcos por semidiámetro, $H = 250$ mm, $R = -372$ mm y $\eta_f = 0.6990$.

Para determinar la fracción de surco crítica ℓ_{cn} , considérese el diagrama mostrado en la Fig. 2.10 (a), sea el rayo C que incide paralelo al eje óptico del sistema a una altura dada por

$$h_{cn} = \varepsilon (\ell_{cn} + n - 1), \quad (2.34)$$

el cual, de acuerdo con la Ec. (2.18) incide sobre el n -ésimo surco del espejo tipo Fresnel. Entonces, su correspondiente rayo reflejado se propaga formando un ángulo β_n con el eje Z , tal que interseca con el surco anterior de orden $n - 1$, exactamente en el punto frontal del segmento representado como $Q_{n-1} = (0, \varepsilon (n - 1))$. Por lo que, en la Ec. (2.20) de rayo reflejado para h_{cn} dado por la Ec. (2.34),

sustituyendo las coordenadas de \mathbf{Q}_{n-1} como el punto final del rayo reflejado, se tiene que $z = 0$ y $y = \varepsilon(n-1)$, de donde se obtiene la siguiente expresión

$$\varepsilon(n-1) \cos \beta_n = \varepsilon(\ell_{cn} + n - 1) \cos \beta_n - (\ell_{cn} - 1) [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon[n-1])] \operatorname{sen} \beta_n, \quad (2.35)$$

resolviendo para ℓ_{cn} y sustituyendo apropiadamente las expresiones dadas por la Ec. (2.27) para β_n , se deduce la fórmula

$$\ell_{cn} = \frac{2 \Delta \mathcal{S}^2(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)}, \quad (2.36)$$

que representa la fracción de surco a partir de la cual, los rayos h_ℓ que contribuyen a la concentración eficiente, son tales que $\ell \in (\ell_{cn}, 1)$. Sustituyendo este resultado en la Ec. (2.34) se obtiene

$$h_{cn} = \varepsilon \left[n - \frac{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right], \quad (2.37)$$

que representa el ínfimo de altura por surco, para la cual se tendrán rayos reflejados hacia afuera de la superficie del espejo tipo Fresnel, como función del número de surco n . Es decir, para los rayos incidentes tales que $h \in (h_{cn}, \varepsilon n)$, los rayos se reflejan sobrepasando las barreras del espejo.

Lo anterior se ilustra en la Fig. 2.10 (b), donde los intervalos de apertura de entrada de los surcos del espejo, denotados como $(h_{cn}, \varepsilon n)$, representan un haz de rayos paralelos tipo *A* dibujados en verde, los cuales se reflejan hacia la parte negativa del eje \mathbf{Z} , contrario a lo que sucede con los rayos tipo *B* en rojo, que inciden sobre las barreras del espejo en la parte positiva del eje \mathbf{Z} . A partir de esto se deducen las expresiones para calcular las aperturas de reflexión sin obstrucción, como

$$H_n = (\varepsilon n - h_{cn}) = \varepsilon \left[\frac{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right], \quad \text{para } n = 2, \dots, N, \quad (2.38)$$

nótese que las caras centrales del espejo no tienen obstrucción producida por las barreras, se tiene entonces para el caso $n = 1$, que $h_{cn} = 0$, por lo que la apertura útil del primer surco es $H_1 = \varepsilon$, es decir, la longitud total del surco. Considerando las aperturas calculadas en la Ec. (2.38) se puede calcular la apertura total del espejo que es eficientemente reflejada, obteniendo

$$H_e = \varepsilon \left(1 + \sum_{n=2}^N \left[\frac{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right] \right), \quad (2.39)$$

donde, H_e denota la apertura eficiente del espejo tipo Fresnel. Considerando esta expresión, se puede cuantificar el porcentaje que representa H_e respecto de la apertura total del espejo, definiendo la efi-

ciencia ideal del espejo como

$$\eta_f \equiv \frac{H_e}{H} = \frac{1}{N} \left(1 + \sum_{n=2}^N \left[\frac{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)}{\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right] \right), \quad (2.40)$$

donde $0 < \eta_f < 1$, denota el porcentaje de la apertura total de entrada de un espejo tipo Fresnel que se refleja libremente hacia el lado negativo del eje óptico.

Esta expresión es útil desde un punto de vista teórico, del hecho que está dada en términos de los parámetros de la superficie de referencia $\mathcal{S}(n)$, por otro lado, en la práctica es de mayor utilidad representar las alturas críticas en términos de los ángulos de inclinación de los surcos, dados por la Ec. (2.13), sustituyendo en la Ec. (2.37) se obtiene

$$h_{cn} = \varepsilon \left[n + \frac{1 - \tan^2 \gamma_n}{1 + \tan^2 \gamma_n} \right], \quad (2.41)$$

a partir de esta expresión se deduce una forma alternativa de la eficiencia dada en la Ec. (2.40), como

$$\eta_f = \frac{1}{N} \left(1 - \sum_{n=2}^N \left[\frac{1 - \tan^2 \gamma_n}{1 + \tan^2 \gamma_n} \right] \right), \quad (2.42)$$

esta expresión, al igual que la Ec. (2.40) es función explícitamente de los parámetros de diseño del espejo tipo Fresnel, en estas funciones se han considerado únicamente las pérdidas por reflexión sobre las barreras del espejo cuando incide un haz de rayos paralelos, dando como resultado la cota máxima de eficiencia para un espejo, despreciando pérdidas por otros fenómenos, tales como los coeficientes de Fresnel para los distintos estados de polarización, defectos de construcción, entre otros.

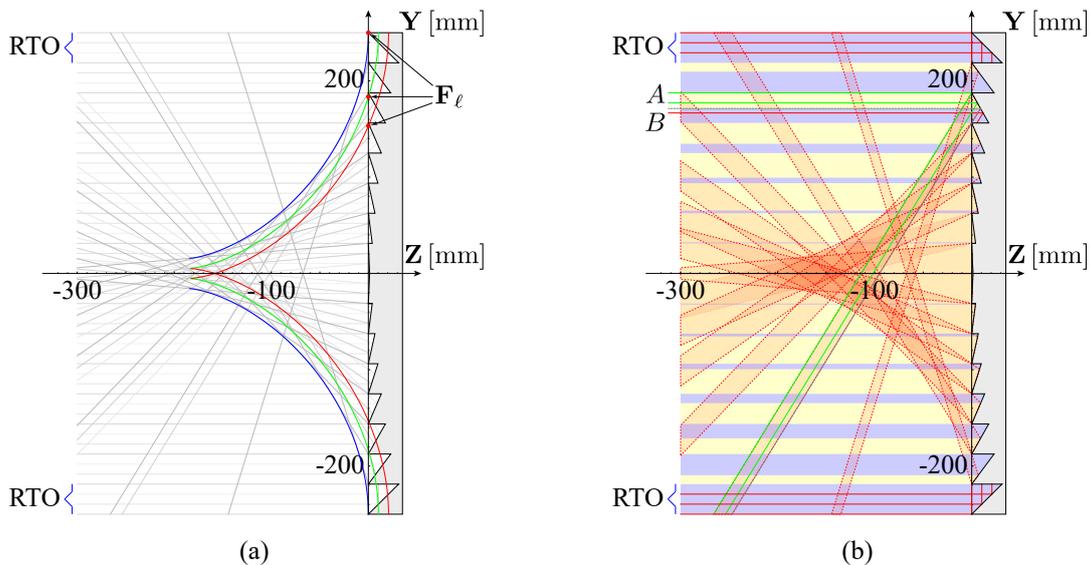


Fig. 2.11 Ejemplos de zonas de obstrucción de luz para espejos tipo Fresnel, considerando $N = 8$ surcos por semidiámetro. (a) Cáusticas para un Fresnel elíptico oblató $k = 0.5$, $H = 250$ mm y $R = -372$ mm. (b) Zonas de obstrucción del espejo, $\eta_f = 0.6495$.

En la Fig. 2.11 se ilustra el ejemplo de un espejo tipo Fresnel particularmente ineficiente, pues la fracción de pérdida por reflexión en el último surco es de $\ell_{cN} > 1$, es decir, el surco refleja totalmente la luz hacia la barrera, produciendo un surco con reflexión totalmente obstruida (RTO). En la expresión de h_ℓ dada en la Ec. (2.18), se definió el parámetro $\ell \in (0, 1)$, sin embargo, la Ec. (2.36) para calcular ℓ_{cn} no es una función acotada, por lo que se podrían producir soluciones sin sentido a la hora de calcular las alturas críticas como en el caso del espejo elíptico mostrado en este ejemplo.

Para acotar las soluciones de las alturas críticas en el intervalo $\ell_{cn} \in (0, 1)$, nótese que en el trazo de rayos mostrado en la Fig. 2.11 (a), las cústicas calculadas para los distintos subconjuntos h_ℓ intersectan con el eje \mathbf{Y} que coincide con los bordes externos de la superficie del espejo. De manera análoga a lo que sucede cuando la cústica por refracción intersecta con la superficie de una lente, la altura para la cual se produce esta intersección se denomina altura crítica, y a partir de dicha altura se tiene reflexión total interna (RTI) [40]. Un fenómeno equivalente se produce para un espejo tipo Fresnel, como se determinó anteriormente, si $\ell \leq \ell_{cn}$ entonces los rayos h_ℓ serán obstruidos por las barreras, cuando $\ell < 1$ es una condición suficiente para asegurar que para fracciones menores ℓ los rayos serán obstruidos, por lo que, la intersección de su correspondiente cústica con el eje \mathbf{Y} , determina el surco a partir del cual ya no habrá contribución del conjunto h_ℓ en el haz de rayos reflejados.

Sin embargo, cuando $\ell \rightarrow 1^-$, la condición se vuelve necesaria y suficiente, ya que no existen familias de rayos que incidan a fracciones de surco mayores, por lo que la intersección de la cústica correspondiente a los rayos h_{1^-} con el eje \mathbf{Y} determina el número de surco a partir del cual se tendrá RTO, entonces se deduce a partir de esta n la altura crítica de un espejo tipo Fresnel. Para calcular los puntos de intersección representados en la Fig. 2.11 (a) como \mathbf{F}_ℓ , considérese la Ec. (2.33) de la cústica, a partir de la cual se fija la condición $\mathcal{Z}_c(n) = 0$, obteniendo la siguiente expresión

$$\left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]^2 + 4\varepsilon (\ell - 1) \Delta \mathcal{S}'(n) \Delta \mathcal{S}(n) = 0, \quad (2.43)$$

la cual se resuelve para un valor $n \in \mathbb{R}$, obteniendo la relación $m - 1 \leq n \leq m$, para $m \in \mathbb{N}$. Es entonces a partir del m -ésimo surco que la familia de rayos h_ℓ se reflejará siempre sobre las barreras del espejo. Reduciendo la Ec. (2.43) para el caso límite en que $\ell = 1$, se obtiene la siguiente fórmula

$$[\mathcal{S}(n) - \mathcal{S}(n-1)]^2 = \varepsilon^2, \quad (2.44)$$

donde, de la Ec. (2.4) los términos relacionados a los coeficientes de asfericidad se pueden reescribir utilizando notación binomial como

$$\begin{aligned} W(n) &= \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i} (\varepsilon n)^{2i} - \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i} [\varepsilon (n-1)]^{2i} = \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i} \varepsilon^{2i} [n^{2i} - (n-1)^{2i}] = \\ &= \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i} \varepsilon^{2i} [n^{2i} - (n-1)^{2i}] = \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i} \varepsilon^{2i} \left[\sum_{p=1}^{2i} \frac{(2i)!}{p! (2i-p)!} (-1)^{p+1} n^{2i-p} \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

sustituyendo este término en la Ec. (2.44) se obtiene la siguiente expresión

$$\left[\frac{cn^2\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2(n\varepsilon)^2}} - \frac{c(n-1)^2\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2(n-1)^2\varepsilon^2}} + W(n) \right]^2 = \varepsilon^2, \quad (2.46)$$

resolviendo esta ecuación para n , se obtiene la altura crítica del espejo tipo Fresnel, dada por la fórmula $h_{ce} = \mathcal{Y}_c(n)$. Un caso especialmente sencillo de esta ecuación se da para un espejo parabólico con $k = -1$ y $A_{2i} = 0$, para el cual la solución se reduce a la expresión

$$n = \frac{c\varepsilon - 1}{2c\varepsilon} = \frac{\varepsilon - R}{2\varepsilon},$$

donde, R es el radio de curvatura paraxial y la parte entera de $n + 1$ denota el número de surco a partir del cual se tendrá RTO.

2.3.2 Círculo de mínima confusión para un espejo tipo Fresnel

En trabajos previos se establece el concepto de Círculo de Mínima Confusión, por su siglas en inglés CLC, Circle of Least Confusion [38], definido como el plano en donde se concentra la totalidad de los rayos reflejados o refractados por un elemento óptico y que tiene el diámetro mínimo, también es denominado este plano como el mejor foco. Tradicionalmente se hace intersectando el rayo marginal de la parte de abajo de la superficie, con la cáustica, sin embargo, en este trabajo se realizará este cálculo intersectando el rayo marginal inferior con un rayo arbitrario que proviene de la parte superior del espejo tipo Fresnel. Considerando entonces al rayo reflejado arbitrario que proviene de la parte positiva del espejo tipo Fresnel, de la Ec. (2.17) se deduce que su ecuación puede escribirse como

$$y = - \left[\frac{2\varepsilon \mathcal{S}(n)}{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)} \right] (z - (\ell - 1) \mathcal{S}(n)) + \varepsilon(n + \ell - 1), \quad (2.47)$$

por otro lado, para el rayo que incide desde abajo, el cual no necesariamente debe ser el marginal en el caso del espejo tipo Fresnel, se tiene para el n' -ésimo surco que

$$y = \left[\frac{2\varepsilon \mathcal{S}(n')}{\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n')} \right] (z - (\ell' - 1) \mathcal{S}(n')) - \varepsilon(n' + \ell' - 1), \quad (2.48)$$

para el rayo que incide a la fracción $\ell' \in (0, 1)$, resolviendo para z y y se obtienen las expresiones

$$\mathcal{Z}_{clc} = \frac{(\ell - 1) \Gamma_n^- \Gamma_n^+ + (\ell' - 1) \Gamma_n^- \Gamma_{n'}^+ + (n' + n) \Gamma_{n'}^- \Gamma_n^-}{2 \left[\Gamma_n^- \mathcal{S}(n') + \Gamma_{n'}^- \mathcal{S}(n) \right]}, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{Y}_{clc} = \frac{\varepsilon(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}(n') \Gamma_n^+ - \varepsilon(\ell' - 1) \Delta \mathcal{S}(n) \Gamma_{n'}^+ + \varepsilon \left[n \Delta \mathcal{S}(n') \Gamma_n^- - n' \Delta \mathcal{S}(n) \Gamma_{n'}^- \right]}{\Gamma_n^- \mathcal{S}(n') + \Gamma_{n'}^- \mathcal{S}(n)}, \quad (2.50)$$

donde se han definido los términos,

$$\Gamma_n^\pm = \left[\varepsilon^2 \pm \Delta \mathcal{S}^2(n) \right], \quad \Gamma_{n'}^\pm = \left[\varepsilon^2 \pm \Delta \mathcal{S}^2(n') \right], \quad (2.51)$$

sustituyendo, $z \rightarrow \mathcal{Z}_{clc}$ y $y \rightarrow \mathcal{Y}_{clc}$ como las coordenadas de la intersección entre rayos, donde \mathcal{Y}_{clc} es el radio del CLC y \mathcal{Z}_{clc} representa su ubicación sobre el eje óptico \mathbf{Z} . Sin embargo, se deduce que el CLC se calcula para el caso límite $\ell = 1$ cuando se consideran los rayos que provienen de la parte superior y $\ell' = \ell_{cn}$ la fracción de surco crítica para el rayo de la parte inferior, dado por la Ec. (2.36), por lo que estas ecuaciones se pueden reducir a las siguientes expresiones

$$\mathcal{Z}_{clc} = \frac{(\ell_{cn} - 1) \Gamma_n^- \Gamma_{n'}^+ + (n' + n) \Gamma_{n'}^- \Gamma_n^-}{2 \left[\Gamma_n^- \mathcal{S}(n') + \Gamma_{n'}^- \mathcal{S}(n) \right]}, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{Y}_{clc} = \frac{\varepsilon \left[n \Delta \mathcal{S}(n') \Gamma_n^- - n' \Delta \mathcal{S}(n) \Gamma_{n'}^- \right] - \varepsilon (\ell_{cn} - 1) \Delta \mathcal{S}(n) \Gamma_{n'}^+}{\Gamma_n^- \mathcal{S}(n') + \Gamma_{n'}^- \mathcal{S}(n)}, \quad (2.53)$$

finalmente, los términos $\mathcal{Y}_{clc}(n, n')$ se calculan para los valores $n, n' = 1, \dots, N$, entre los cuales se determina el máximo, para obtener el CLC como se muestra en los ejemplos de la Fig. 2.12.

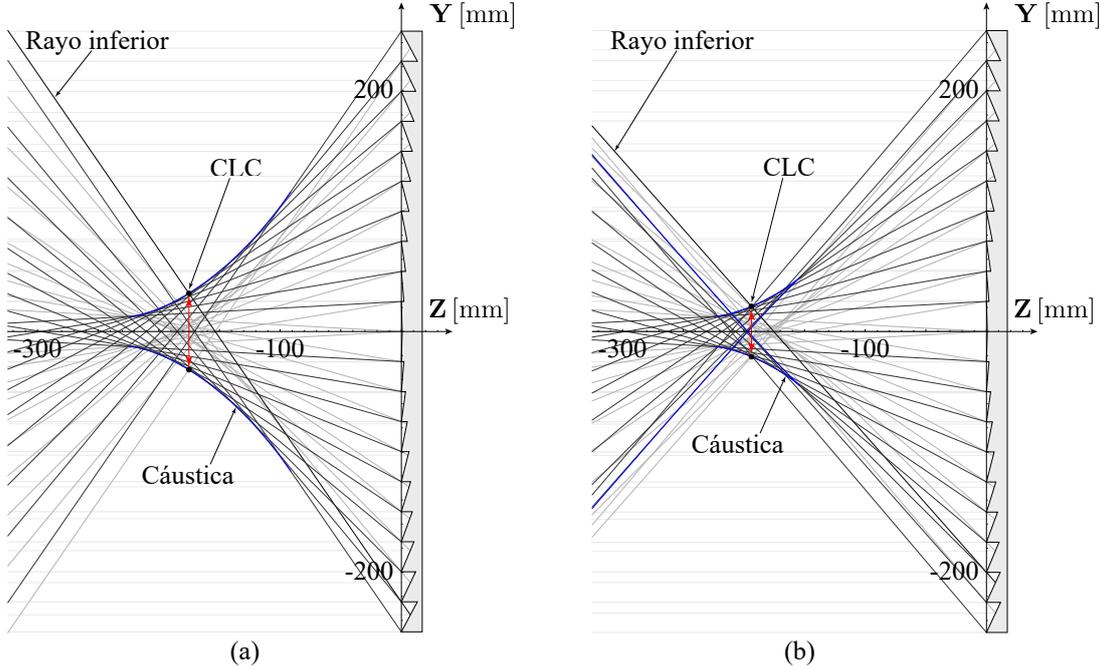


Fig. 2.12 Considerando $N = 10$ surcos, $H = 250$ mm y $R = -450$ mm. (a) CLC para un espejo parabólico tipo Fresnel $k = -1$. (b) CLC para un espejo con $k = -0.5$, $A_4 = 10^{-12}$, $A_6 = -0.5 \times 10^{-16}$ y $A_6 = 0.3 \times 10^{-18}$.

En el caso del espejo parabólico mostrado en la Fig. 2.12 (a), se obtiene que $\mathcal{Y}_{clc} = 31.72$ mm, $\mathcal{Z}_{clc} = -175.46$ mm, el máximo se alcanza cuando $n = 6$ y el rayo inferior que corresponde al caso $n' = N$, el cual funciona de manera análoga al del rayo marginal cuando se tienen superficies

continuas. Para el espejo de la Fig. 2.12 (b), $\mathcal{Y}_{clc} = 20.92$ mm, $\mathcal{Z}_{clc} = -193.70$ mm, se obtiene el máximo cuando $n = 4$ y el rayo inferior proviene del surco $n' = 9$, es decir, del penúltimo surco.

2.3.3 Reparametrización de la cáustica de un espejo tipo Fresnel

Como se muestra en la Ec. (2.19), la forma paramétrica de un espejo tipo Fresnel es proporcional a la función $\Delta\mathcal{S}(n)$ mediante una constante, por lo que sustituyendo en la Ec. (2.33) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_c(n) &= \mathcal{E}_h(n) + \\ &+ \left[\frac{[\varepsilon^2(\ell-1)^2 - \mathcal{E}_h^2(n)]^2 + 2(\ell-1)\mathcal{E}_h(n)\mathcal{E}'_h(n)[\varepsilon^2(\ell-1)^2 - \mathcal{E}_h^2(n)]}{2(\ell-1)\mathcal{E}'_h(n)[\varepsilon^2(\ell-1)^2 + \mathcal{E}_h^2(n)]} \right], \quad (2.54) \\ \mathcal{Y}_c(n) &= \varepsilon(\ell+n-1) - \varepsilon \left[\frac{\mathcal{E}_h(n) \left\{ [\varepsilon^2(\ell-1)^2 - \mathcal{E}_h^2(n)] + 2(\ell-1)^2 \mathcal{E}'_h(n)\mathcal{E}_h(n) \right\}}{(\ell-1)\mathcal{E}'_h(n)[\varepsilon^2(\ell-1)^2 + \mathcal{E}_h^2(n)]} \right], \end{aligned}$$

la cual es una representación de la cáustica expresada únicamente en términos de la Ec. (2.19) y su derivada de primer orden respecto de n , dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{E}'_h(n) = \varepsilon(\ell-1) [\mathcal{S}'(\varepsilon n) - \mathcal{S}'(\varepsilon[n-1])], \quad (2.55)$$

la Ec. (2.33) es equivalente a la Ec. (2.54), ambas están definidas sobre el dominio $n \in [1, N] \subseteq \mathbb{R}$, pero en el caso de la segunda expresión, al estar en términos de la representación del Fresnel como una función del número de surco, se tiene bien definido el comportamiento de un rayo que incide sobre cada sección plana, lo cual no sucede en los bordes del surco, ya que las cúspides no permiten determinar de manera única la tangente a la superficie y con esto predecir la reflexión del rayo. Por lo que, en la Ec. (2.54) se indetermina la función cuando se evalúa para el caso en que $\ell = 1$, es decir, nos brinda información de las limitaciones físicas para las cuales es válido nuestro modelo de cálculo de cáusticas, que contiene únicamente a las familias de rayos tales que $\ell \in (0, 1)$, mostrando con esto que la cáustica correspondiente al valor $\ell = 1$ es un caso límite que puede ser calculado mediante la Ec. (2.33), que nos ha sido útil para definir ciertas propiedades de los espejos tipo Fresnel. Para simplificar el razonamiento anterior se expresó a la variable de altura de rayo h como función del número de surco n , por lo que la Ec. (2.54) se puede reparametrizar mediante el cambio de variable definido anteriormente $h_\ell = \varepsilon(\ell+n-1)$, donde h_ℓ representa un subconjunto del parámetro de altura respecto el eje \mathbf{Y} , pero este subconjunto está determinado por los parámetros n y ℓ , así que por simplicidad se denotará como $h_\ell \rightarrow h$. Entonces, aplicando la reparametrización a la Ec. (2.19) se obtiene

$$\mathcal{E}_h(h) = (\ell-1) [\mathcal{S}(h - \varepsilon[\ell-1]) - \mathcal{S}(h - \varepsilon\ell)], \quad (2.56)$$

calculando la derivada de primer orden respecto del parámetro h , resulta la expresión

$$\mathcal{E}'_h(h) = (\ell - 1) [\mathcal{S}'(h - \varepsilon[\ell - 1]) - \mathcal{S}'(h - \varepsilon\ell)], \quad (2.57)$$

aplicando el cambio de variable en la Ec. (2.54), se transforma en una expresión que está en términos de las Ec. (2.56) y Ec. (2.57), simplificando la ecuación resultante se obtiene la siguiente función paramétrica

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_c(h) &= \mathcal{E}_h(h) + \\ &+ \left[\frac{[\varepsilon^2(\ell - 1)^2 - \mathcal{E}_h^2(h)]^2 + 2\varepsilon(\ell - 1)\mathcal{E}_h(h)\mathcal{E}'_h(h)[\varepsilon^2(\ell - 1)^2 - \mathcal{E}_h^2(h)]}{2\varepsilon(\ell - 1)\mathcal{E}'_h(h)[\varepsilon^2(\ell - 1)^2 + \mathcal{E}_h^2(h)]} \right], \quad (2.58) \\ \mathcal{Y}_c(h) &= h - \varepsilon \left[\frac{\mathcal{E}_h(h) \left\{ [\varepsilon^2(\ell - 1)^2 - \mathcal{E}_h^2(h)] + 2\varepsilon(\ell - 1)^2\mathcal{E}'_h(h)\mathcal{E}_h(h) \right\}}{\varepsilon(\ell - 1)\mathcal{E}'_h(h)[\varepsilon^2(\ell - 1)^2 + \mathcal{E}_h^2(h)]} \right], \end{aligned}$$

que está definida en el intervalo $h \in [\varepsilon\ell, H + \varepsilon(\ell - 1)] \subseteq \mathbb{R}$, mostrando con esto que derivar con respecto al orden del surco n , es equivalente a derivar respecto a la altura de rayo h , pero la primera simplifica el procedimiento al momento de definir los subconjuntos de rayos incidentes h_ℓ .

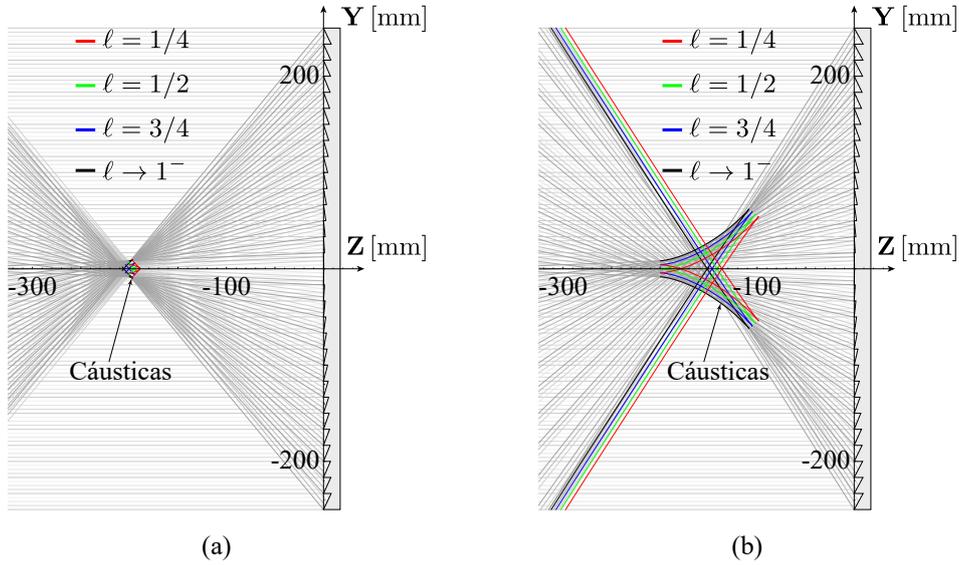


Fig. 2.13 Cúaticas para espejos tipo Fresnel, considerando $H = 250$ mm, $R = -400$ mm y $N = 15$ surcos por mitad. (a) Para un espejo hiperbólico $k = -2.75$. (b) Considerando un espejo con constante de conicidad $k = -0.5$ y coeficientes polinomiales $A_4 = -1 \times 10^{-12}$, $A_6 = -0.5 \times 10^{-16}$, $A_8 = 0.3 \times 10^{-18}$.

En esta sección se presentan ejemplos distintos de cúaticas para espejos con coeficientes $A_i \neq 0$, los

cuales tienen zonas de concentración de distintas formas a los espejos cónicos, en la Fig. 2.13 (a) se observa un espejo hiperbólico con reducción en su cáustica, en la Fig. 2.13 (b) es un espejo tipo Fresnel que simula la concentración de un espejo cicloidal como el de la Fig. 2.1 (c). En tanto, en la Fig. 2.14 se observan versiones de este tipo de cáusticas para espejos con diferentes dimensiones.

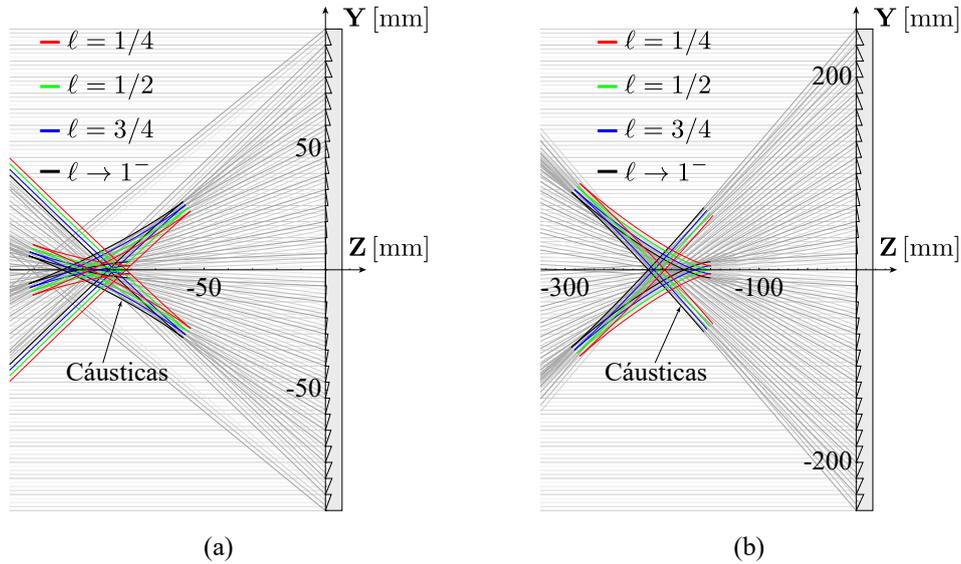


Fig. 2.14 Cáusticas para espejos con $N = 15$ surcos por mitad. (a) Considerando $H = 100$ mm, $R = -160$ mm, $k = -16$ y con coeficientes polinomiales $A_4 = -1.8 \times 10^{-8}$, $A_6 = -1.8 \times 10^{-11}$, $A_8 = 1.35 \times 10^{-15}$. (b) Considerando $H = 250$ mm, $R = -300$ mm, $k = -5$ y coeficientes polinomiales $A_8 = -0.1 \times 10^{-18}$.

2.4 Cálculo de la distancia focal de un espejo tipo Fresnel

Como se observa en los esquemas de la Fig. 2.15, para cada subconjunto de rayos h_ℓ existe un punto para el cual los rayos reflejados provenientes de la parte central del espejo convergen, en el estudio de óptica paraxial en espejos esféricos a este punto se le denomina foco paraxial del espejo, el cual se encuentra situado a una distancia $f = R/2$ del vértice del espejo, donde R es el radio de curvatura medido en el centro de la superficie, definido en la Ec. (2.4). Por otro lado, cuando se estudian espejos cuya forma está dada paramétricamente, se puede mostrar que la distancia focal corresponde a la cúspide de su superficie cáustica y es igual a la mitad del radio de curvatura medido en el centro del espejo.

Sin embargo, en el caso particular de los espejos tipo Fresnel, no se tiene definida la función paramétrica sobre el vértice del espejo, dado que los surcos centrales se contraponen y su intersección es un punto indefinido, por lo que no se puede calcular el radio de curvatura paraxial del espejo tipo Fresnel, pero la superficie de referencia sí tiene asociado un radio de curvatura paraxial, por lo que se deben hacer otras consideraciones para el cálculo de la distancia focal de un espejo tipo Fresnel. Como se puede observar en los trazos de rayos de la Fig. 2.15, la intersección entre el par de rayos reflejados provenientes

de los primeros dos surcos del espejo para cualquier subconjunto h_ℓ , coincide con la cúspide de su correspondiente cáustica descrita por la Ec. (2.33), por lo que se puede evaluar en el ínfimo del dominio de la cáustica, para calcular la distancia respecto al eje Z entre el borde frontal del espejo y la cúspide en cada caso ℓ , obteniendo la expresión $f_\ell = Z_c(n=1)$, entonces, sustituyendo apropiadamente y desarrollando el álgebra correspondiente se obtiene la siguiente expresión

$$f_\ell = \mathcal{A}(\varepsilon) + (\ell - 1) \mathcal{B}(\varepsilon), \quad \text{con } \mathcal{A} \equiv \frac{[\varepsilon^2 - \mathcal{S}^2(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon \mathcal{S}'(\varepsilon) [\varepsilon^2 + \mathcal{S}^2(\varepsilon)]}, \quad \mathcal{B} \equiv \frac{2\varepsilon^2 \mathcal{S}(\varepsilon)}{[\varepsilon^2 + \mathcal{S}^2(\varepsilon)]}, \quad (2.59)$$

donde ε es un término constante, ya que el tamaño de surco está determinado por la apertura de entrada H y por el número N de surcos por semidiámetro con el que se diseña el espejo. Las funciones \mathcal{A} y \mathcal{B} representan distancias sobre el eje óptico.

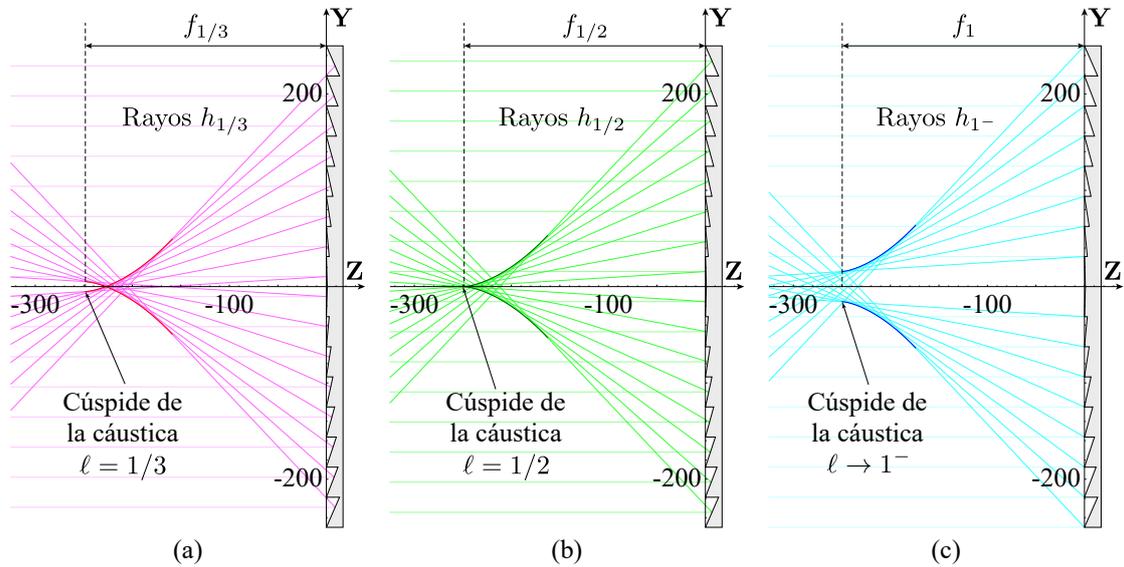


Fig. 2.15 Cáusticas para un espejo hiperbólico con $k = -1.75$, $N = 8$ surcos por mitad, $H = 250$ mm y $R = -500$ mm. (a) Para el conjunto de rayos paralelos que inciden a alturas $h_{1/3}$, a un tercio de la apertura de cada surco. (b) Para el conjunto de rayos $h_{1/2}$, exactamente a la mitad de cada surco. (c) Para el conjunto de rayos h_{1-} , que tienden hacia los bordes de cada surco.

Se deduce a partir de la Ec. (2.59), que para un espejo tipo Fresnel con todos sus parámetros dados, al ser ε una constante, entonces los términos \mathcal{A} , $\mathcal{B} < 0$ serán también constantes, por lo que, al calcular las distancias a las cúspides de las cáusticas para $\ell \in [0, 1]$, se tendrá una distribución de distancias lineal, cuyo máximo valor para $|f_\ell|$ se alcanza en el caso límite $\ell = 1$. Entonces, de la Ec. (2.59) se obtendrían múltiples distancias focales para un espejo en particular, pero para definir una única distancia para un espejo tipo Fresnel se observa primero la gráfica de la Fig. 2.16 (a), donde se hace variar el término $\varepsilon = H/N$, para distintos N número de surcos y considerando un semidiámetro fijo de $H = 225$ mm. Entonces, a partir de las gráficas de los términos \mathcal{A} y \mathcal{B} para espejos con constantes de conicidad $k = 1$

y $k = -5$ entre los cuales se encuentran los casos de espejos más utilizados, se deduce que $|\mathcal{B}| \ll |\mathcal{A}|$, además de que el término \mathcal{B} tiende rápidamente a cero conforme el número de surcos es $N > 10$, en tanto $\mathcal{A} \approx R/2$. Por otro lado, observando las gráficas de la Fig. 2.16 (b) se deduce que para el caso límite $\ell = 1$, la función f_ℓ converge más rápidamente al valor $f = R/2$ para espejos con $N < 10$ que en los otros casos, para un amplio intervalo de constantes de conicidad, como sucede en óptica paraxial para superficies continuas y suaves.

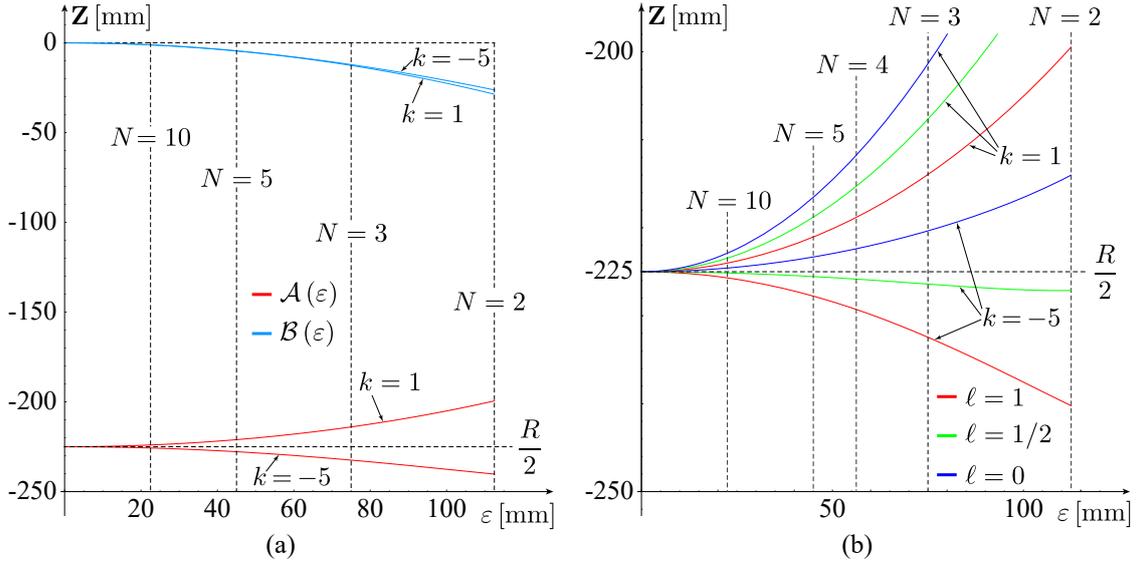


Fig. 2.16 Considerando espejos tipo Fresnel cónicos, con semidiámetro $H = 220$ mm y radio de curvatura paraxial $R = -450$ mm. (a) Gráfica de los términos $\mathcal{A}(\varepsilon)$ y $\mathcal{B}(\varepsilon)$, para cónicas con $k = 1$ y $k = -5$, como funciones del ancho de surco $\varepsilon = H/N$. (b) Gráficas de la función f_ℓ respecto el ancho de surco ε .

De la discusión anterior se infiere que, si se desea establecer una relación entre el funcionamiento de un espejo cóncavo y su análogo en Fresnel, entonces la definición más apropiada que induce a definir una distancia focal en un espejo tipo Fresnel se obtiene a partir de la Ec. (2.59) para el caso límite $\ell = 1$, con esto la expresión anterior se reduce únicamente a $f_1 = \mathcal{A}(\varepsilon)$. Por lo tanto, sustituyendo en esta expresión las Ec. (2.4) y Ec. (2.23) se obtiene la siguiente fórmula

$$f_1 = \frac{s(\varepsilon) \left[\varepsilon^2 (s(\varepsilon) + 1)^2 - (c\varepsilon^2 + (s(\varepsilon) + 1)U_i)^2 \right]^2}{2(s(\varepsilon) + 1)^2 (c\varepsilon^2 + V_i s(\varepsilon)) \left[\varepsilon^2 (s(\varepsilon) + 1)^2 + (c\varepsilon^2 + (s(\varepsilon) + 1)U_i)^2 \right]}, \quad (2.60)$$

$$\text{donde, } s(\varepsilon) = \sqrt{1 - (k+1)c^2\varepsilon^2}, \quad U_i = \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} A_{2i}\varepsilon^{2i}, \quad V_i = \sum_{i=2}^{\mathcal{M}} 2iA_{2i}\varepsilon^{2i},$$

hasta este punto no se ha realizado ninguna aproximación para determinar f_1 , del cálculo de la cáustica y fijando algunas inferencias se ha determinado que la Ec. (2.60) es la definición más apropiada para

definir una distancia focal para un espejo tipo Fresnel, la cual depende de los parámetros de diseño como son la curvatura paraxial, constante de conicidad y los coeficientes polinomiales agrupados en los términos U_i , V_i , la distancia focal es un concepto paraxial y en el caso de superficies esféricas continuas y suaves, los coeficientes A_{2i} no influyen en la distancia focal, contrario a los espejos tipo Fresnel que incluyen parámetros adicionales de la superficie madre esto se debe a que como se mostró en la sección de diseño, la pendiente de la recta secante a la curva de referencia dependerá de todos sus parámetros, contrario a lo que sucede con las superficies aféricas en las que los coeficientes A_{2i} no son relevantes numéricamente en la región paraxial.

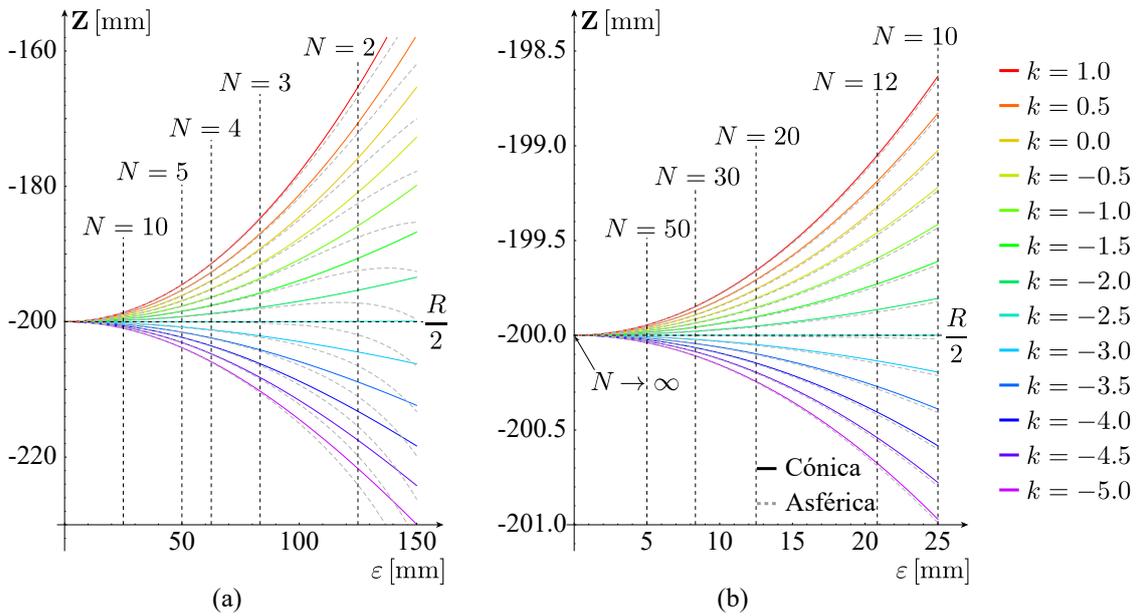


Fig. 2.17 Espejos tipo Fresnel con semidiámetro de apertura de $H = 250$ mm y con radio de curvatura paraxial $R = -400$ mm. (a) Se grafica la función f_1 de la Ec. (2.60) respecto del ancho de surco ϵ , variando el número N de surcos por semidiámetro. Para espejos cónicos con constantes de conicidad k determinada y agregando coeficientes polinomiales: $A_4 = 10^{-10}$, $A_6 = 10^{-14}$ y $A_8 = 10^{-18}$. (b) Vista aumentada de las gráficas del inciso (a) para espejos con $N \geq 10$, con curvas continuas para espejos cónicos y curvas punteadas considerando los coeficientes A_{2i} .

Sin embargo, se puede deducir un razonamiento análogo para espejos tipo Fresnel, comúnmente los coeficientes de asfericidad son del orden $A_{2i} \sim 10^{-(2i+2)}$ cuando el semidiámetro $H \sim 10^1$ mm [38, 40], considérese el caso de un espejo esférico con radio de curvatura $R = -400$ mm y semidiámetro de $H = 250$ mm, se observa que los coeficientes polinomiales como se ha mostrado en los trazos de rayos de las secciones anteriores, se encuentran entre los ordenes de magnitud de $A_{2i} \sim 10^{-2(2i+1)}$, por otro lado, el tamaño de surco para un espejo tipo Fresnel con $N = 2$, secciones por semidiámetro, será proporcional al orden de magnitud $\epsilon \sim 10^2$ mm, entonces los términos de las series U_i , V_i de la Ec. (2.60), tendrán dimensiones máximas del orden de $\sim 10^{-2}$ mm, esto es considerando el mínimo de surcos posible. En la práctica son más comunes los espejos con $N \geq 10$ secciones por semidiámetro,

para los cuales se tendrá que los términos asociados a los coeficientes de asfericidad U_i , V_i , son del orden de magnitud de $\sim 10^{-4}$ mm.

Tabla 2.1 Distancias f_1 para espejos cónicos, considerando la Ec. (2.60).

N	ε [mm]	$k = -5.0$	$k = -2.5$	$k = -1.5$	$k = -1.0$	$k = -0.5$	$k = 0.0$	$k = 0.5$
		Distancia f_1 [mm]						
2	125.00	-221.69	-199.95	-190.63	-185.82	-180.89	-175.83	-170.65
3	83.33	-210.25	-199.99	-195.74	-193.58	-191.40	-189.20	-186.97
5	50.00	-203.82	-199.99	-198.45	-197.67	-196.89	-196.10	-195.31
10	25.00	-200.97	-200.00	-199.61	-199.42	-199.22	-199.02	-198.83
50	5.00	-200.04	-200.00	-199.99	-199.98	-199.97	-199.96	-199.95

Tabla 2.2 Distancias f_1 con $A_{2i} \neq 0$, considerando la Ec. (2.60) y los coeficientes polinomiales indicados en la Fig. 2.17.

N	ε [mm]	$k = -5.0$	$k = -2.5$	$k = -1.5$	$k = -1.0$	$k = -0.5$	$k = 0.0$	$k = 0.5$
		Distancia f_1 [mm]						
2	125.00	-224.10	-201.93	-192.44	-187.54	-182.53	-177.39	-172.12
3	83.33	-210.49	-200.21	-195.95	-193.79	-191.60	-189.39	-187.16
5	50.00	-203.89	-200.06	-198.51	-197.73	-196.95	-196.16	-195.37
10	25.00	-200.99	-200.02	-199.63	-199.43	-199.24	-199.04	-198.85
50	5.00	-200.04	-200.00	-199.99	-199.99	-199.97	-199.96	-199.95

Comparando los datos presentados en Tabla 2.1 y Tabla 2.2 para las distancias f_1 de espejos cónicos con $N = 2$, se observa que el valor de f_1 para sus correspondientes espejos esféricos difiere apenas en un 1%, y estas diferencias entre los valores de f_1 para espejos cónicos y esféricos se reducen rápidamente conforme se incrementa el número de surcos, para espejos con $N \geq 10$ la diferencia es menor al 0.5%, por lo que los coeficientes de asfericidad son los parámetros que menos influyen en el cálculo de la distancia focal de manera análoga a la superficies continuas, entonces, considerando $U_i = V_i = 0$ en la Ec. (2.60) y reduciendo los términos restantes se obtiene la siguiente fórmula

$$f_1 = \frac{1}{2c} - \left[\frac{1 + k \left(1 + \sqrt{1 - (1 + k) c^2 \varepsilon^2} \right)}{2 \left(1 + \sqrt{1 - (1 + k) c^2 \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{2 \sqrt{1 - (1 + k) c^2 \varepsilon^2}}{c^2 \varepsilon^2 + \left(1 + \sqrt{1 - (1 + k) c^2 \varepsilon^2} \right)^2} \right] c \varepsilon^2, \quad (2.61)$$

nótese que esta expresión es una aproximación paraxial para un espejo esférico, pero en el caso de espejos cónicos donde $A_{2i} = 0$, esta expresión se deduce directamente de la Ec. (2.60) sin ninguna aproximación. A partir del análisis anterior se obtuvo una expresión reducida de la distancia f_1 , que se define del eje Y a la cúspide de la cáustica en el caso límite $\ell = 1$, sin embargo, para calcular la distancia focal del espejo se debe considerar a partir del vértice del espejo tipo Fresnel, de la Ec.

(2.12) para los puntos que definen los surcos del espejo, se tiene que el vértice del espejo está dado por $\mathbf{R}_1 = (-S(\varepsilon), 0)$, agregando esta distancia $S(\varepsilon) < 0$ a f_1 dado por la Ec. (2.61), se obtiene

$$f = \frac{1}{2c} - \left[\frac{k-1}{2(1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2\varepsilon^2})} + \frac{2\sqrt{1 - (1+k)c^2\varepsilon^2}}{c^2\varepsilon^2 + (1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2\varepsilon^2})^2} \right] c\varepsilon^2, \quad (2.62)$$

donde $c = 1/R$ es la curvatura paraxial y k la constante de conicidad, a partir de esta expresión y con base en el análisis anterior, estos parámetros de la superficie de referencia son los que influyen en el cálculo de la distancia focal f para un espejo tipo Fresnel. Considerando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, se tiene que $\varepsilon \rightarrow 0$, evaluando la Ec. (2.62) se reduce a $f = R/2$, como en el caso de un espejo cóncavo. Es decir, conforme se aumenta el número de surcos de un espejo tipo Fresnel, se describirá un comportamiento similar al de un espejo continuo.

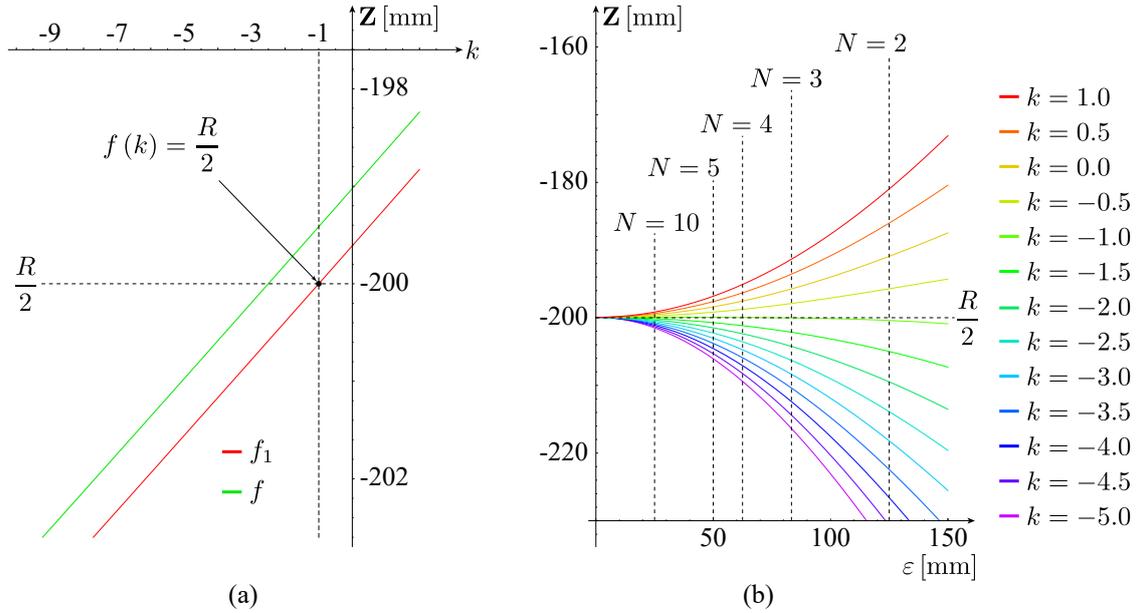


Fig. 2.18 Considerando un espejo tipo Fresnel con $H = 250$ mm y $R = -400$ mm. (a) Se grafican las funciones f_1 y f con respecto de la variable k , para $N = 10$ surcos. (b) Se grafica la función f de la Ec. (2.62) respecto del ancho de surco $\varepsilon = H/N$, variando el número N de surcos por semidiámetro.

Como se muestra en la Fig. 2.18 (a), la constante de conicidad k es un factor determinante en el cálculo de la distancia focal f , y existe un valor de k para el que se reduce a la expresión para óptica paraxial $f = R/2$, reduciendo la Ec. (2.62) para este caso se tiene que

$$\frac{c^2\varepsilon^2}{4} k^4 + \frac{3c^2\varepsilon^2}{2} k^3 + \left(\frac{17c^2\varepsilon^2}{4} - 1 \right) k^2 + (6c^2\varepsilon^2 - 4) k + (4c^2\varepsilon^2 - 3) = 0, \quad (2.63)$$

resolviendo este polinomio para el caso mostrado en la Fig. 2.18 (a), se tiene que $k = -0.9980$. A partir de la Ec. (2.63) se deduce que, conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene que $k \rightarrow -1$, es decir que para un espejo tipo Fresnel parabólico la función f se aproxima mejor al valor $R/2$, para distintos N , como se observa en la Fig. 2.18 (b).

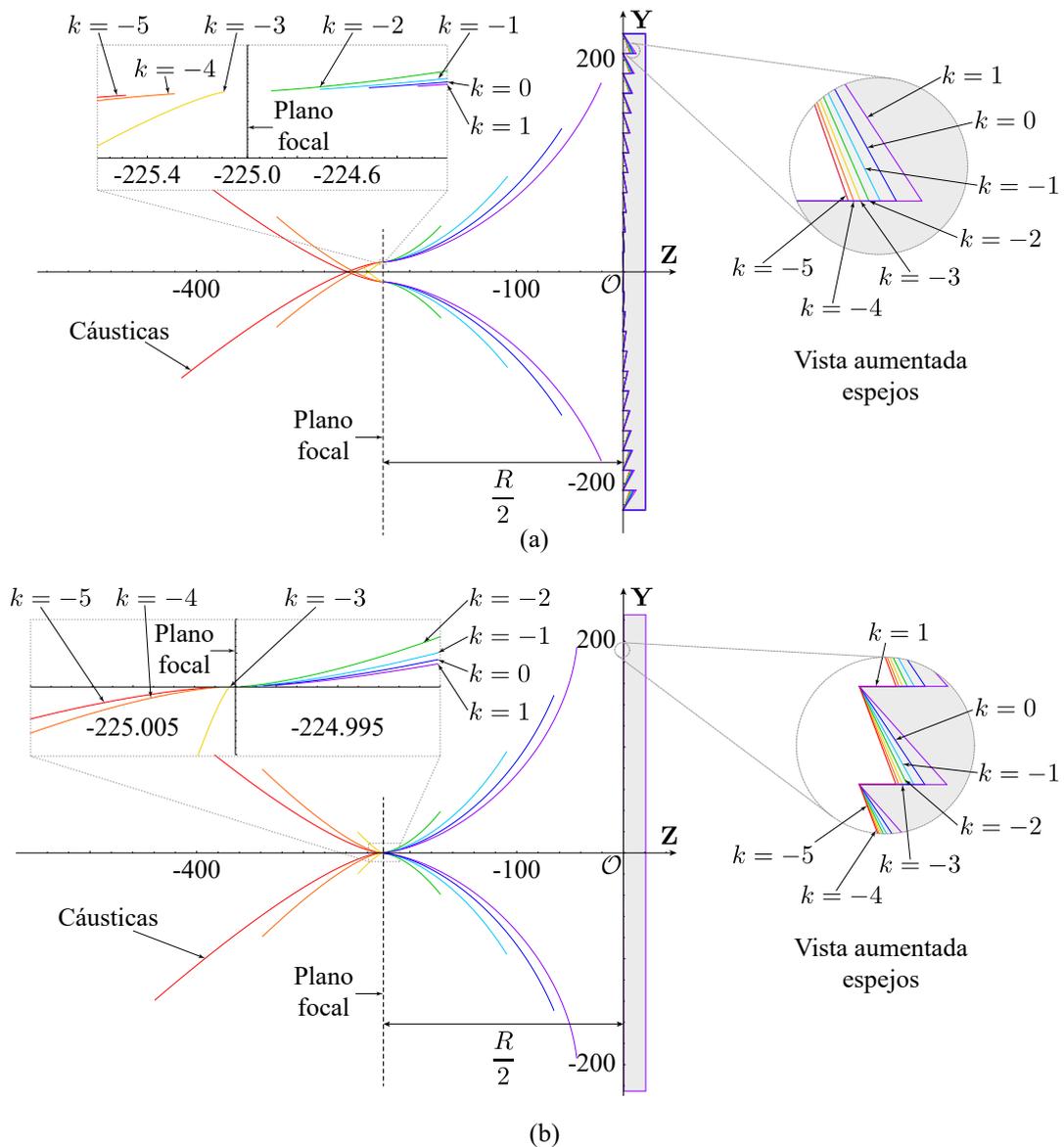


Fig. 2.19 Cúspides para espejos tipo Fresnel cónicos con distintas constantes de conicidad k , semidiámetro de $H = 225$ mm y radio de curvatura paraxial $R = 450$ mm. (a) Para $N = 12$ surcos. (b) Para $N = 250$ surcos.

En la Fig. 2.19 se observa cómo las cúspides de las cáusticas para distintas k , convergen hacia el plano $R/2$ conforme se incrementa el número de surcos del espejo tipo Fresnel.

2.5 Cálculo de la cústica de una lente reflectora tipo Fresnel

Considérese un espejo tipo Fresnel, definido a partir del método descrito en la Sección 2.2, cuya representación paramétrica está dada por la Ec. (2.19), con semidiámetro de apertura H , N número de surcos por mitad, radio de curvatura paraxial R , constante de conicidad k y coeficientes A_{2i} dados, la construcción de este espejo a partir de una superficie de referencia se ilustra en la Fig. 2.20, para formar lo que se conoce como una lente reflectora tipo Fresnel [42], el espejo se cementa en contacto íntimo con una placa transparente de índice de refracción n_i para una longitud de onda predefinida, que se encuentra inmersa en un medio con índice de refracción $n_a < n_i$.

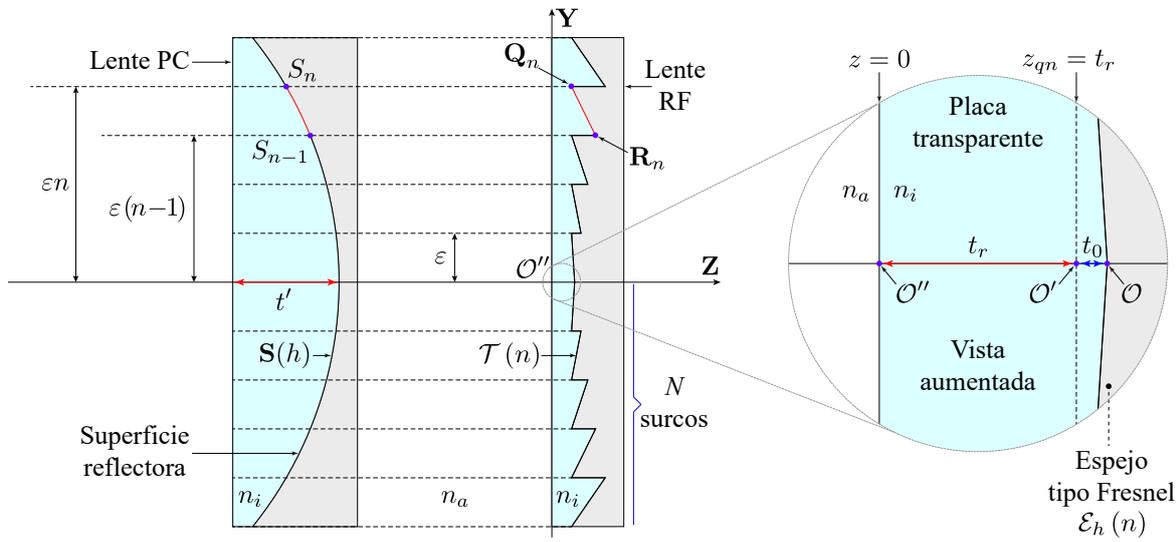


Fig. 2.20 Definición de la partición de la lente por alturas iguales, acoplada con un espejo de perfil complementario.

Esta placa es diseñada a partir de una lente plano-convexa como se muestra en la Fig. 2.20, considérese una lente con grosor t' cuya sagita está dada en términos de la Ec. (2.4) por la expresión $t' + S(h)$, implementando el método de seccionamiento de una superficie de referencia se obtiene la siguiente expresión para la forma de la placa

$$\mathcal{T}(n) = t_r + \mathcal{E}_h(n), \quad (2.64)$$

donde, t_r es el grosor mínimo de la placa medido sobre el eje óptico, contrario a lo que sucede con t' que denota el grosor máximo en el caso de una superficie continua y \mathcal{E}_h está dada por la Ec. (2.19), la cual es a su vez la representación del espejo con el que está en contacto, produciendo el equivalente a una lente plano-convexa pero con la segunda cara reflectiva, en este caso las coordenadas de los puntos que definen los surcos de la lente reflectora se deducen de la Ec. (2.7) y la Ec. (2.8), donde se sustituye $t = t_r$, fijando el plano de los puntos frontales en $z_{qn} = t_r$ y definiendo el origen de coordenadas en

\mathcal{O}'' , obteniendo la siguientes expresiones

$$\mathbf{Q}_n = (t_r, \varepsilon n), \quad \mathbf{R}_n = (t_r + [\mathcal{S}(\varepsilon[n-1]) - \mathcal{S}(\varepsilon n)], \varepsilon(n-1)), \quad (2.65)$$

es decir, que los surcos definidos en la Ec. (2.12) se han trasladado una distancia t_r , haciendo coincidir la cara plana de la lente reflectora tipo Fresnel con $z = 0$.

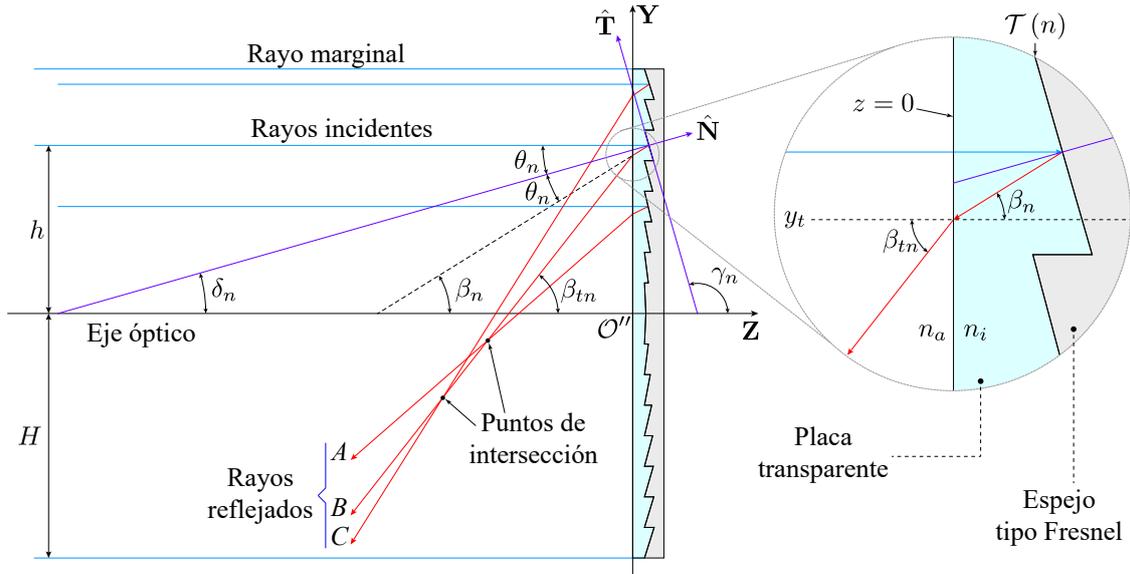


Fig. 2.21 Parámetros involucrados en el trazo de rayos y cálculo de las cáusticas, mediante las intersecciones del rayo B con A y C.

El procedimiento del cálculo de trazado de rayos para la lente reflectora es análogo al que fue presentado en la Sección 2.2 para el espejo tipo Fresnel, considerando la familia de rayos que inciden a las alturas $h_\ell = \varepsilon[(n-1) + \ell]$, para un $\ell \in (0, 1)$, propagándose de izquierda a derecha, paralelos al eje Z, al pasar por la cara plana $z = 0$ no se desviarán, por lo que inciden sobre la segunda cara de la placa dada por la Ec. (2.64) a la misma altura h_ℓ , donde los rayos se reflejan a un ángulo $\beta_n = 2\delta_n$ dado por la Ec. (2.16), obteniendo la ecuación paramétrica de rayo reflejado presentada en la Ec. (2.20).

El rayo reflejado por la superficie del espejo tipo Fresnel se propaga de vuelta hacia la cara plana dada por $z = 0$, intersectando a una altura y_t , sustituyendo estas condiciones en la Ec. (2.20) se obtiene la siguiente expresión

$$y_t(n) = \varepsilon(\ell + n - 1) + \left[\frac{2\varepsilon \Delta\mathcal{S}(n) [t_r + (\ell - 1) \Delta\mathcal{S}(n)]}{\varepsilon^2 - \Delta\mathcal{S}^2(n)} \right], \quad (2.66)$$

entonces el ángulo β_n es el de incidencia en la interfase plana, por lo que se deduce a partir de la ley de Snell que $n_i \sin \beta_n = n_a \sin \beta_{tn}$, por lo que a partir de la Ec. (2.16) se obtiene la expresión para β_{tn}

el ángulo de refracción del rayo saliendo de la placa como

$$\beta_{tn} = \arcsen \left[-\frac{2 \varepsilon n_i \Delta \mathcal{S}(n)}{n_a [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]} \right], \quad (2.67)$$

de donde se deduce la expresión para el rayo que se refracta fuera de la lente reflectora tipo Fresnel, con representación paramétrica

$$y \cos \beta_{tn} - z \sen \beta_{tn} = y_t \cos \beta_{tn}, \quad (2.68)$$

utilizando el método desarrollado en la Sección 2.3 para obtener la ecuación de la cústica, se deriva la Ec. (2.68) con respecto de n y reduciendo apropiadamente se obtiene la siguiente expresión

$$y \sen \beta_{tn} + z \cos \beta_{tn} = y_t \sen \beta_{tn} - \mathcal{W}_t, \quad (2.69)$$

donde se ha definido el término,

$$\mathcal{W}_t = \left[\frac{(\partial y_t / \partial n) \cos \beta_{tn}}{\partial \beta_{tn} / \partial n} \right], \quad (2.70)$$

a partir de la Ec. (2.67), se deducen las siguientes identidades

$$\sen \beta_{tn} = - \left[\frac{2 n_i \varepsilon \Delta \mathcal{S}(n)}{n_a [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]} \right], \quad \cos \beta_{tn} = \frac{\sqrt{n_a^2 [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]^2 - 4 n_i^2 \varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}^2(n)}}{n_a [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]}, \quad (2.71)$$

derivando la Ec. (2.67) y la Ec. (2.66) con respecto de n , se obtienen las expresiones

$$\frac{\partial \beta_{tn}}{\partial n} = \frac{2 \varepsilon^2 n_i \Delta \mathcal{S}'(n) [\Delta \mathcal{S}^2(n) - \varepsilon^2]}{[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] \sqrt{n_a^2 [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]^2 - 4 n_i^2 \varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}^2(n)}}, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial n} = \varepsilon + \frac{2 \varepsilon^2 [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}'(n)] \left\{ t_r [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] + \varepsilon^2 (\ell - 1) \Delta \mathcal{S}^2(n) \right\}}{[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)]^2},$$

sustituyendo estas relaciones en la Ec. (2.70), y reduciendo la expresión resultante en términos del

factor $\Delta S(n)$ dado por la Ec. (2.26) se obtiene

$$\mathcal{W}_t = \left[\frac{n_a^2 [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]^2 - 4n_i^2 \varepsilon^2 \Delta S^2(n)}{2\varepsilon n_a n_i S'(n) [\Delta S^2(n) - \varepsilon^2]^3} \right] \times \quad (2.73)$$

$$\times \left[[\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]^2 + 2\varepsilon S'(n) [t_r [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)] + \varepsilon^2 (\ell - 1) \Delta S(n)] \right],$$

finalmente, resolviendo para z y y del sistema formado por Ec. (2.68) y Ec. (2.69) se obtiene

$$\mathcal{Z}_{tc} = -\mathcal{W}_t \cos \beta_{tn}, \quad (2.74)$$

$$\mathcal{Y}_{tc} = y_t - \mathcal{W}_t \sin \beta_{tn},$$

se hace la sustitución $z \rightarrow \mathcal{Z}_{tc}$ y $y \rightarrow \mathcal{Y}_{tc}$, donde el subíndice tc denota la cáustica de una lente reflectora tipo Fresnel. Es importante resaltar el hecho que esta ecuación está en términos del orden del surco, por lo que para graficar la cáustica sobre toda la apertura del espejo se hace sobre el intervalo $n \in [1, N] \subseteq \mathbb{R}$.

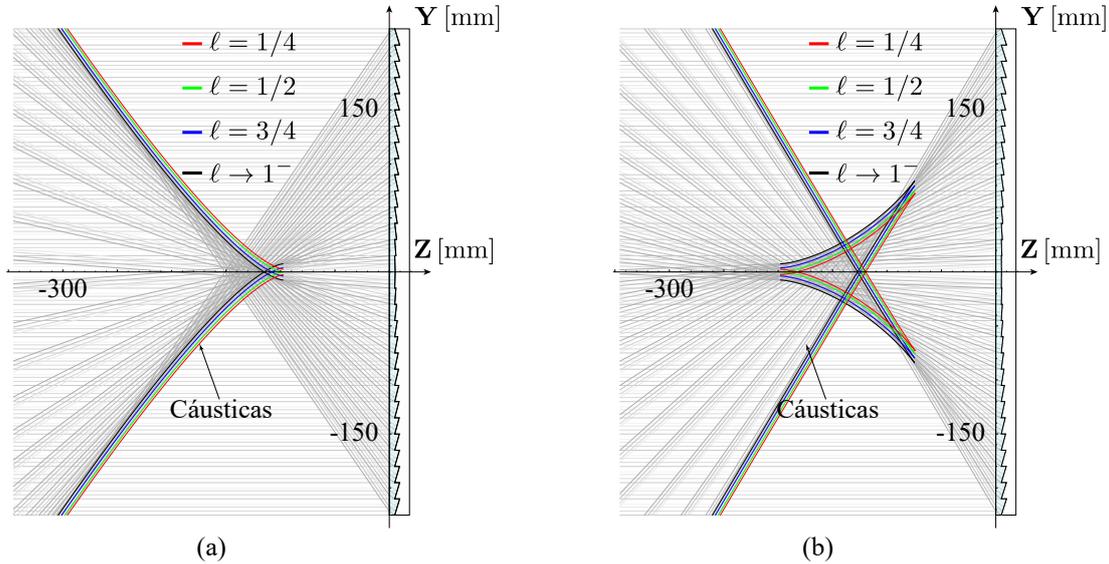


Fig. 2.22 Trazo de rayos y cáusticas para lentes reflectoras de Fresnel. (a) Lente reflectora hiperbólica tipo Fresnel con $k = -10$, $R = -300$ mm, $t_r = 5$ mm, $n_i = 1.49$ y $N = 15$. (b) Lente reflectora con $k = -0.5$, $A_4 = -1 \times 10^{-12}$, $A_6 = 0.5 \times 10^{-16}$, $A_8 = 0.3 \times 10^{-18}$, $R = -600$ mm, $t_r = 5$ mm, $n_i = 1.49$ y $N = 15$.

Calculando la pendiente del rayo refractado por la lente reflectora tipo Fresnel, a partir de la Ec. (2.67) se obtiene una forma alternativa para el ángulo de refracción

$$\beta_{tn} = \arctan \left[-\frac{2 \varepsilon n_i \Delta \mathcal{S}(n)}{\sqrt{n_a^2 (\varepsilon^4 + \Delta \mathcal{S}^4(n)) + 2 (n_a^2 - 2 n_i^2) \varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}^2(n)}} \right],$$

evaluando esta expresión para el caso en que $n_i = n_a$ se recupera la Ec. (2.16) y considerando adicionalmente $t_r = 0$ la Ec. (2.73) se reduce al término \mathcal{W} de la Ec. (2.21), es decir, cuando el material de la placa es el mismo que el del medio incidente se reducen las ecuaciones de la lente reflectora a las del espejo tipo Fresnel como se espera.

2.6 Cálculo de la cústica para un espejo tipo Fresnel con fuente puntual

Considerando la superficie de un espejo tipo Fresnel descrita por la Ec. (2.19), se desarrolla ahora el caso para una fuente puntual de luz colocada a una distancia $s'_o = s_o + t_0$ del vértice \mathcal{O} del espejo, a lo largo del eje \mathbf{Z} . Para cada rayo incidente sobre el espejo se asigna un ángulo

$$\alpha = \arctan \left[\frac{\varepsilon (n + \ell - 1)}{s_o} \right], \quad (2.75)$$

donde, s_o es la distancia de la fuente al origen de coordenadas \mathcal{O}' y sustituyendo la Ec. (2.18) para h_ℓ la altura de rayo con respecto al eje \mathbf{Y} , se calculan a partir de estos ángulos, los subconjuntos de rayos que inciden sobre determinada fracción del surco, como se muestra en la Fig. 2.23.

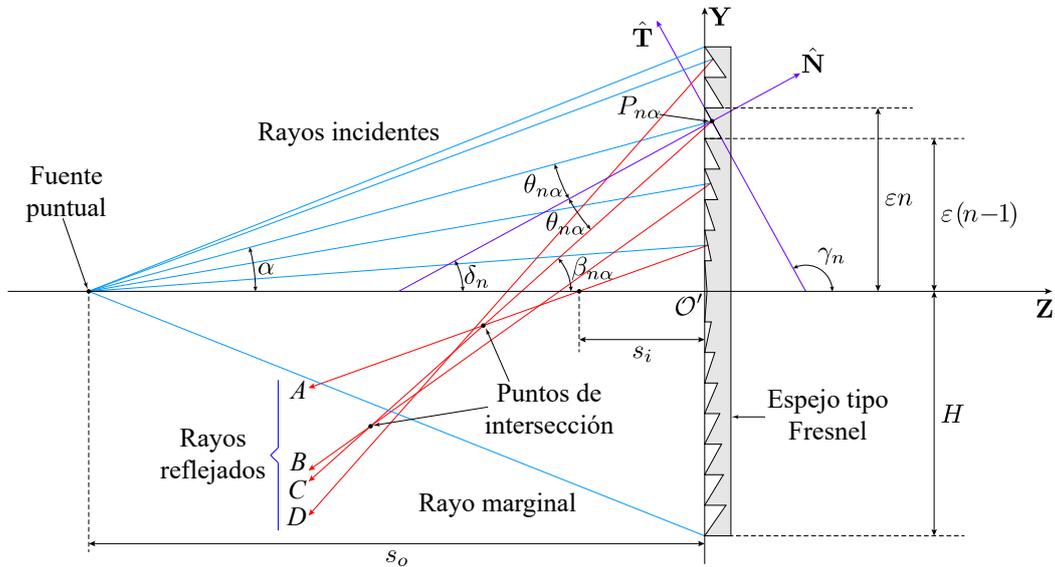


Fig. 2.23 Parámetros involucrados en el trazo de rayos para un espejo tipo Fresnel considerando una fuente puntual y cálculo de las cústicas, mediante las intersecciones del rayo A con B y C .

Calculando entonces la intersección del rayo incidente con el perfil del espejo tipo Fresnel, denotado

como $P_{n\alpha} = (z_+, y_+)$ se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned} z_+(n) &= s_o (\ell - 1) \left[\frac{[\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])]}{s_o - (\ell + n - 1) [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])]} \right], \\ y_+(n) &= \varepsilon (\ell + n - 1) \left[\frac{s_o - n [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])]}{s_o - (\ell + n - 1) [\mathcal{S}(\varepsilon n) - \mathcal{S}(\varepsilon [n - 1])]} \right], \end{aligned} \quad (2.76)$$

a partir del diagrama mostrado en la Fig. 2.23 se deducen las siguientes igualdades $\delta_n = \theta_{\alpha n} + \alpha$, $\beta_{\alpha n} = \delta_n + \theta_n$, de donde se obtiene el ángulo de reflexión con respecto del eje \mathbf{Z} , $\beta_{\alpha n} = 2\delta_n + \alpha$, sustituyendo adecuadamente la Ec. (2.75) se obtiene su expresión como función del número n de surco como

$$\beta_{\alpha n} = \arctan \left[\frac{2 s_o \varepsilon \Delta \mathcal{S}(n) - \varepsilon (\ell + n - 1) [\Delta \mathcal{S}^2(n) - \varepsilon^2]}{s_o [\Delta \mathcal{S}^2(n) - \varepsilon^2] + 2 \varepsilon^2 (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n)} \right], \quad (2.77)$$

donde, si se calcula el límite cuando $s_o \rightarrow \infty$ se reduce a la Ec. (2.16). Considerando la Ec. (2.77), se obtiene la siguiente representación paramétrica de la familia de rayos reflejados por el espejo tipo Fresnel

$$y \cos \beta_{\alpha n} - z \operatorname{sen} \beta_{\alpha n} = y_+(n) \cos \beta_{\alpha n} - z_+(n) \operatorname{sen} \beta_{\alpha n}, \quad (2.78)$$

derivando la Ec. (2.20) con respecto del parámetro n y reduciendo apropiadamente se obtiene

$$z \cos \beta_{\alpha n} + y \operatorname{sen} \beta_{\alpha n} = z_+(n) \cos \beta_{\alpha n} + y_+(n) \operatorname{sen} \beta_{\alpha n} - \mathcal{W}_\alpha, \quad (2.79)$$

donde se ha definido,

$$\mathcal{W}_\alpha = \frac{(\partial y_+ / \partial n) \cos \beta_{\alpha n} - (\partial z_+ / \partial n) \operatorname{sen} \beta_{\alpha n}}{(\partial \beta_{\alpha n} / \partial n)}$$

a partir de la Ec. (2.77), se obtienen las siguientes identidades y su derivada con respecto de n

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta_{\alpha n} &= -\varepsilon \left[\frac{2 s_o \Delta \mathcal{S}(n) + (\ell + n - 1) [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)]}{[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] \sqrt{s_o^2 + \varepsilon^2 (\ell + n - 1)^2}} \right], \\ \cos \beta_{\alpha n} &= \left[\frac{s_o (\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)) - 2 \varepsilon^2 (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n)}{[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] \sqrt{s_o^2 + \varepsilon^2 (\ell + n - 1)^2}} \right], \\ \frac{\partial \beta_{\alpha n}}{\partial n} &= -\varepsilon \left[\frac{s_o (\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)) + 2 \varepsilon (s_o^2 + \varepsilon^2 (\ell + n - 1)^2) \Delta \mathcal{S}'(n)}{[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] (s_o^2 + \varepsilon^2 (\ell + n - 1)^2)} \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

por otro lado, derivando la Ec. (2.76) y reduciendo adecuadamente resultan las siguientes expresiones

$$\frac{\partial z_+}{\partial n} = \left[\frac{s_o(\ell - 1) (s_o \varepsilon \Delta \mathcal{S}'(n) + \Delta \mathcal{S}^2(n))}{(s_o - (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n))^2} \right], \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial y_+}{\partial n} = \varepsilon \left[\frac{s_o^2 - s_o(\ell + 2n - 1) \Delta \mathcal{S}(n) + s_o \varepsilon \Delta \mathcal{S}'(n) + (\ell + n - 1)^2 \Delta \mathcal{S}^2(n)}{(s_o - (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n))^2} \right],$$

finalmente, resolviendo para z , y de las Ec. (2.78) y Ec. (2.79) y reduciendo apropiadamente se pueden expresar como

$$\mathcal{Z}_{ac}(n) = z_+(n) - \mathcal{W}_\alpha \cos \beta_{\alpha n}, \quad (2.82)$$

$$\mathcal{Y}_{ac}(n) = y_+(n) - \mathcal{W}_\alpha \sin \beta_{\alpha n},$$

denotando $z \rightarrow \mathcal{Z}_{ac}$ y $y \rightarrow \mathcal{Y}_{ac}$. Donde el subíndice ac denota la cúatica de un espejo de Fresnel considerando una fuente puntual colocada a una distancia s_o . Es importante resaltar el hecho que esta ecuación está en términos del orden del surco, por lo que para graficar la cúatica sobre toda la apertura del espejo se hace sobre el intervalo $n \in [1, N] \subseteq \mathbb{R}$.

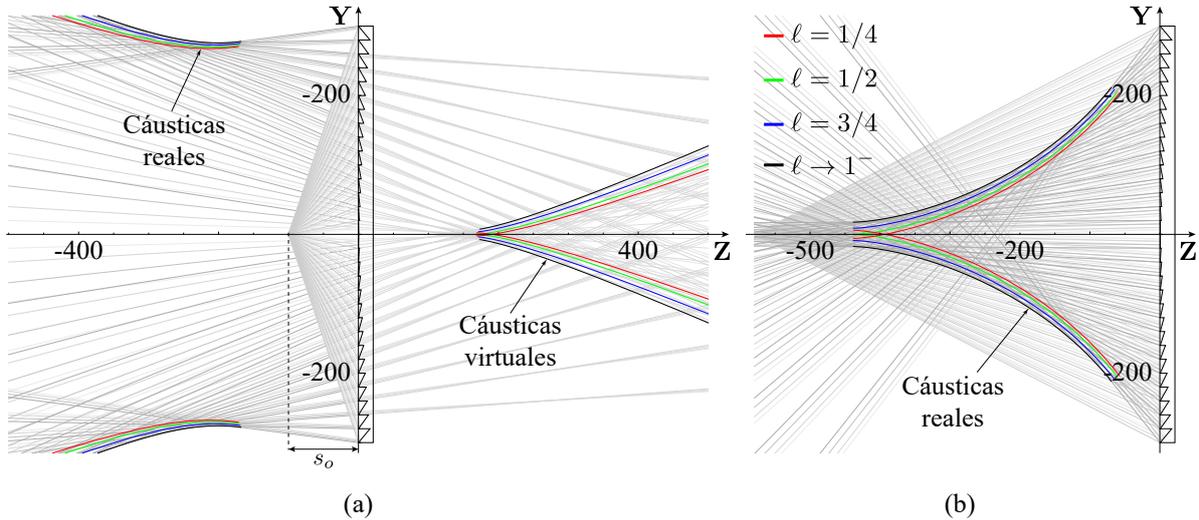


Fig. 2.24 Trazo de rayos y cúaticas para un espejo tipo Fresnel elíptico oblató con: $k = 0.5$, $R = -500$ mm, semidiámetro $H = 300$ mm y $N = 15$ surcos. (a) Considerando una distancia a la fuente puntual de $s_o = 100$ mm. (b) Con una distancia a la fuente de $s_o = 580$ mm.

2.7 Cálculo de la cáustica para una lente reflectora Fresnel con fuente puntual

Considerando una lente reflectora de Fresnel como fue descrita en la Fig. 2.20, con la interfase lente-espejo representada por la Ec. (2.64), se estudia ahora el caso para una fuente puntual colocada a lo largo del eje óptico Z , a una distancia $s'_o = s_o + t_r + t_0$ del vértice de la superficie de contacto entre el recubrimiento transparente y el espejo tipo Fresnel, donde t_r es el grosor mínimo de la placa de índice de refracción n_i y t_0 la distancia del vértice del espejo al punto O' .

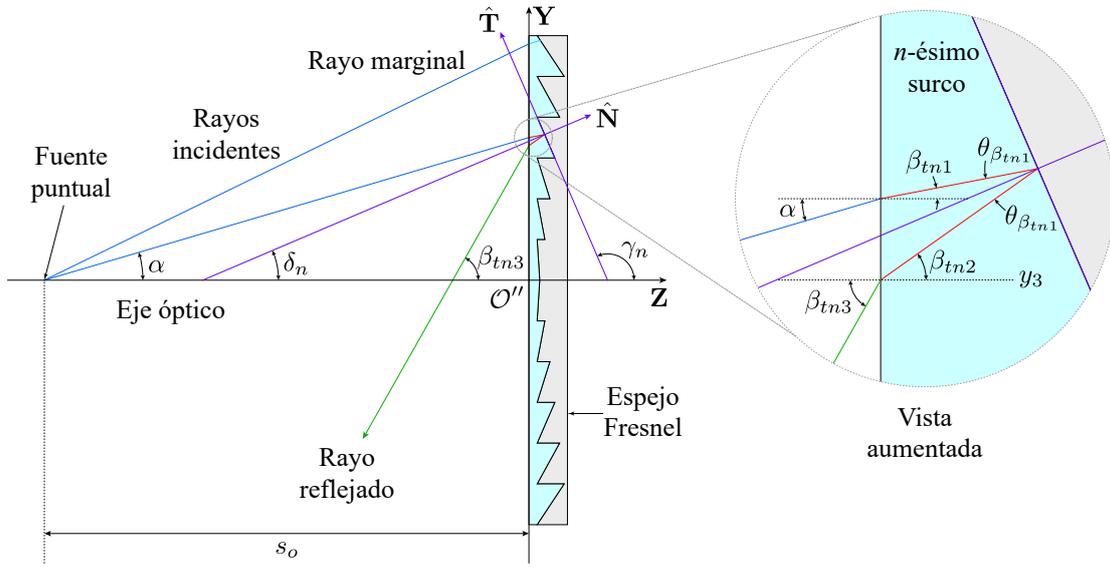


Fig. 2.25 Parámetros involucrados en el trazo de rayos para una lente reflectora tipo Fresnel considerando una fuente puntual.

A cada rayo incidente en la lente reflectora se le asigna un ángulo α dado por la Ec. (2.75). La altura de rayo $h = \varepsilon(n + \ell - 1)$, respecto al eje Y se mide sobre la primera superficie de la lente, por lo que el punto incidente sobre la cara plana de la cubierta de plástico tendrá las coordenadas $z_1 = 0, y_1 = h$. En este punto, el rayo incidente se refracta hacia la cara reflectora, por lo que el ángulo de la primera refracción se calcula mediante la ley de Snell obteniendo la siguiente expresión

$$\beta_{tn1} = \arcsen \left[\left(\frac{n_a}{n_i} \right) \sen \left(\arctan \left[\frac{\varepsilon(\ell + n - 1)}{s_o} \right] \right) \right], \quad (2.83)$$

implementando las identidades de la Ec. (2.24), y calculando la pendiente del rayo refractado por la primera superficie, la Ec. (2.83) se puede expresar como

$$\beta_{tn1} = \arctan \left[\frac{n_a \varepsilon (\ell + n - 1)}{\sqrt{n_i^2 s_o^2 + (n_i^2 - n_a^2) \varepsilon^2 (\ell + n - 1)^2}} \right], \quad (2.84)$$

para hacer más compactas las ecuaciones siguientes, se denotará el término del denominador como

$$\sigma(n) = \sqrt{n_i^2 s_o^2 + (n_i^2 - n_a^2) \varepsilon^2 (\ell + n - 1)^2}, \quad (2.85)$$

el rayo producido por la refracción se extiende hasta la interfase lente-espejo, calculando el punto de incidencia sobre el espejo mediante las siguientes expresiones

$$z_2(n) = t_r - \frac{[n_a t_r (\ell + n - 1) + (\ell - 1) \sigma(n)] \Delta \mathcal{S}(n)}{n_a (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n) - \sigma(n)}, \quad (2.86)$$

$$y_2(n) = \frac{\varepsilon (\ell + n - 1) [n_a (n \Delta \mathcal{S}(n) - t_r) - \sigma(n)]}{n_a (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n) - \sigma(n)}, \quad (2.87)$$

denotan los puntos sobre la superficie del espejo de Fresnel donde inciden los rayos provenientes de la primera superficie de la cubierta de plástico que inciden a un ángulo α , se satisfacen las siguientes igualdades $\delta_n = \beta_{tn1} + \theta_{\beta_{tn1}}$ y $\beta_{tn2} = 2\delta_n - \beta_{tn1}$, sustituyendo adecuadamente se obtiene esta expresión como función del número de surco como

$$\beta_{tn2} = -\arctan \left[\frac{2\varepsilon \sigma(n) \Delta \mathcal{S}(n) + n_a \varepsilon (\ell + n - 1) [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)]}{\sigma(n) [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)] - 2n_a \varepsilon^2 (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n)} \right], \quad (2.88)$$

derivando esta expresión respecto de n , se obtiene

$$\frac{\partial \beta_{tn2}}{\partial n} = - \left[\frac{2\varepsilon^2 [s_o^2 + h_\ell^2] \sigma(n) \Delta \mathcal{S}'(n) + \varepsilon n_a s_o^2 [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]}{[s_o^2 + h_\ell^2] \sigma(n) [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)]} \right], \quad (2.89)$$

por otro lado, de la Ec. (2.88) se deduce la derivada de $\tan \beta_{tn2}$, reduciendo se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial n} [\tan \beta_{tn2}] = \left[\frac{-\varepsilon n_i^2 [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] (2\varepsilon [s_o^2 + h_\ell^2] \sigma(n) \Delta \mathcal{S}'(n) + n_a s_o^2 [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)])}{\sigma(n) [\sigma(n) [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)] - 2n_a \varepsilon^2 (\ell + n - 1) \Delta \mathcal{S}(n)]^2} \right], \quad (2.90)$$

por otro lado, derivando las Ec. (2.86) y Ec. (2.87) se obtienen las expresiones siguientes

$$\frac{\partial z_2}{\partial n} = \left[\frac{n_a n_i^2 s_o^2 \Delta \mathcal{S}(n) [(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}(n) + t_r] + \varepsilon \sigma^2(n) [n_a t_r h_\ell + \varepsilon (\ell - 1) \sigma(n)] \Delta \mathcal{S}'(n)}{\sigma(n) [n_a h_\ell \Delta \mathcal{S}(n) - \varepsilon \sigma(n)]^2} \right], \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_2}{\partial n} = & \left[\frac{\sigma(n) \left[\varepsilon^2 \sigma^2(n) + n_a^2 h_\ell^2 \left[\Delta \mathcal{S}^2(n) + \varepsilon t_r \Delta \mathcal{S}'(n) \right] \right]}{\sigma(n) \left[n_a h_\ell \Delta \mathcal{S}(n) - \varepsilon \sigma(n) \right]^2} \right] + \\ & + \frac{\varepsilon n_a \left[h_\ell \sigma^2(n) \left[(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}'(n) - 2 \Delta \mathcal{S}(n) \right] + \varepsilon n_i^2 s_o^2 \left[(\ell - 1) \Delta \mathcal{S}(n) + t_r \right] \right]}{\sigma(n) \left[n_a h_\ell \Delta \mathcal{S}(n) - \varepsilon \sigma(n) \right]^2}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

El rayo que es reflejado por la interfase lente-espejo se propaga de nuevo hacia la cara plana de la cubierta transparente, incidiendo a un ángulo β_{tn2} respecto de la normal, de nuevo el punto de intersección se encuentra sobre el plano $z_3 = 0$, por lo que la altura respecto el eje **Y** se calcula mediante la siguiente expresión

$$y_3(n) = y_2(n) - [z_2(n)] \tan \beta_{tn2}, \quad (2.93)$$

derivando esta expresión respecto de n , se obtiene la siguiente fórmula

$$\frac{\partial y_3}{\partial n} = \frac{\partial y_2}{\partial n} - \left[\left(\frac{\partial z_2}{\partial n} \right) \tan \beta_{tn2} + \frac{\partial}{\partial n} [\tan \beta_{tn2}] z_2(n) \right], \quad (2.94)$$

donde, los términos que incluyen derivadas están dados por la Ec. (2.92), Ec. (2.91) y la Ec. (2.90). Entonces, la superficie plana de la cubierta de plástico refracta hacia el exterior el rayo reflejado, por lo que se utiliza la ley de Snell para calcular el ángulo de rayo refractado por segunda vez, obteniendo la siguiente expresión

$$\beta_{tn3} = \arcsen \left[\left(\frac{n_i}{n_a} \right) \sen \beta_{tn2} \right], \quad (2.95)$$

reduciendo mediante las identidades de la Ec. (2.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \tan \beta_{tn3} = & \\ & - \left[\frac{2\varepsilon \sigma(n) \Delta \mathcal{S}(n) + n_a h_\ell \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]}{\sqrt{n_a^2 \left[h_\ell^2 + s_o^2 \right] \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]^2 - \left[2\varepsilon \sigma(n) \Delta \mathcal{S}(n) + n_a h_\ell \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] \right]^2}} \right], \end{aligned} \quad (2.96)$$

a partir de esta expresión, se deducen las siguientes identidades trigonométricas

$$\sen \beta_{tn3} = - \left[\frac{2\varepsilon \sigma(n) \Delta \mathcal{S}(n) + n_a h_\ell \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]}{\sqrt{n_a^2 \left[h_\ell^2 + s_o^2 \right] \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]^2}} \right], \quad (2.97)$$

$$\cos \beta_{tn3} = \sqrt{\frac{n_a^2 [h_\ell^2 + s_o^2] [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]^2 - [2\varepsilon\sigma(n) \Delta S(n) + n_a h_\ell [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]]^2}{n_a^2 [h_\ell^2 + s_o^2] [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]^2}}, \quad (2.98)$$

derivando la Ec. (2.96) respecto del parámetro n , se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{tn3}}{\partial n} &= \left(\frac{\varepsilon [2\varepsilon n_a h_\ell \Delta S(n) - \sigma(n) [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]]}{[h_\ell^2 + s_o^2]^2 \sigma(n)} \right) \times \\ &\times \left[\frac{n_a s_o^2 [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)] + 2\varepsilon\sigma(n) [h_\ell^2 + s_o^2] \Delta S'(n)}{\sqrt{n_a^2 [h_\ell^2 + s_o^2] [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]^2 - [2\varepsilon\sigma(n) \Delta S(n) + n_a h_\ell [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]]^2}} \right], \end{aligned} \quad (2.99)$$

a partir de la cual se calcula la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \tan \beta_{tn3} &= \left(\frac{\varepsilon n_a^2 [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)] [2\varepsilon n_a h_\ell \Delta S(n) - \sigma(n) [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]]}{\sigma(n)} \right) \times \\ &\left[\frac{n_a s_o^2 [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)] + 2\varepsilon\sigma(n) [h_\ell^2 + s_o^2] \Delta S'(n)}{\left(\sqrt{n_a^2 [h_\ell^2 + s_o^2] [\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]^2 - [2\varepsilon\sigma(n) \Delta S(n) + n_a h_\ell [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]]^2} \right)^3} \right], \end{aligned} \quad (2.100)$$

a partir de las Ec. (2.97) y Ec. (2.98) se determina la siguiente ecuación paramétrica de la familia de rayos reflejados por la lente reflectora tipo Fresnel

$$y \cos \beta_{tn3} - z \operatorname{sen} \beta_{tn3} = y_3(n) \cos \beta_{tn3}, \quad (2.101)$$

derivando la Eq. (2.101) respecto de n y reduciendo apropiadamente se obtiene

$$z \cos \beta_{tn3} + y \operatorname{sen} \beta_{tn3} = y_3(n) \operatorname{sen} \beta_{tn3} - \mathcal{W}_{t\alpha}, \quad (2.102)$$

donde se ha definido

$$\mathcal{W}_{t\alpha} = \cos \beta_{tn3} \left[\frac{\partial y_3(n) / \partial n}{\partial \beta_{tn3}(n) / \partial n} \right], \quad (2.103)$$

finalmente, resolviendo para z , y de las Ec. (2.101) y Ec. (2.102) y reduciendo apropiadamente se pueden expresar como

$$\mathcal{Z}_{tac}(n) = -\mathcal{W}_{t\alpha} \cos \beta_{tn3}, \quad (2.104)$$

$$\mathcal{Y}_{tac}(n) = y_3(n) - \mathcal{W}_{t\alpha} \sin \beta_{tn3},$$

denotando $z \rightarrow \mathcal{Z}_{tac}$ y $y \rightarrow \mathcal{Y}_{tac}$. Donde el subíndice tac denota la cáustica de una lente reflectora de Fresnel considerando una fuente puntual colocada a una distancia s'_o . Es importante resaltar el hecho que esta ecuación está en términos del orden del surco, por lo que para graficar la cáustica sobre toda la apertura del espejo se hace sobre el intervalo $n \in [1, N] \subseteq \mathbb{R}$.

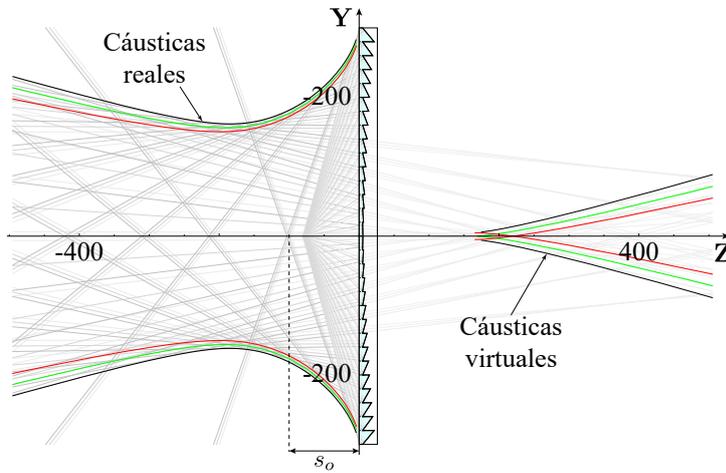


Fig. 2.26 Trazo de rayos y cáusticas para un espejo tipo Fresnel elíptico oblato con: $k = 0.5$, $R = -500$ mm, semidiámetro $H = 300$ mm, $t_r = 5$ mm, $n_i = 1.5$ y $N = 15$ surcos. Considerando una distancia a la fuente puntual de $s_o = 100$ mm.

Capítulo 3

Diseño de pantallas nulas para espejos tipo Fresnel

A lo largo de este capítulo se desarrollará un método de prueba por pantallas nulas para un espejo tipo Fresnel, implementando el formalismo mostrado en la sección anterior, a partir de las ecuaciones obtenidas para representar paraméricamente un espejo tipo Fresnel y el trazo de rayos considerando una fuente puntual, se calcularán los patrones nulos conformados por los contornos que delimitan las regiones de soluciones por cada surco, obteniendo la representación de los contornos de estas áreas de forma paramétrica.

3.1 Zonas de obstrucción en un espejo tipo Fresnel considerando una fuente puntual

En el capítulo anterior se calculó la eficiencia por reflexión en un espejo tipo Fresnel, considerando una fuente puntual colocada en infinito. En esta sección se procederá de manera análoga, calculando en este caso las zonas de obstrucción producidas por una fuente puntual colocada a una distancia $s'_o = t_0 + s_o$, medida a partir del vértice \mathcal{O} de un espejo tipo Fresnel a lo largo del eje óptico, donde t_0 es el desplazamiento del vértice del espejo con respecto al origen y s_o es la distancia de la fuente al origen de coordenadas \mathcal{O}' como se muestra en la Fig. 3.1. Considerando este arreglo, se observa una apertura angular para la cual se tiene un haz de rayos reflejados libremente, delimitados entre los rayos A y B , donde el rayo A representa el rayo marginal del n -ésimo surco y el rayo B representa el límite inferior de la apertura angular para la cual los rayos son reflejados libremente hacia afuera del espejo. Para determinar el ángulo crítico al que incide el correspondiente rayo B , para cada surco como función de n , se considera la Ec. (2.75) que representa el ángulo de emisión, donde se define la fracción de apertura de surco $\ell_{\alpha n}$ para la cual se tendrá que el rayo que es emitido al ángulo α_{cn} proveniente de la fuente puntual, es tal que incide dentro de la apertura del n -ésimo surco, de modo que su correspondiente rayo reflejado intersecta con la cúspide del surco anterior, representada por el punto \mathbf{Q}_{n-1} ,

como se ilustra en el diagrama de la Fig. 3.1.

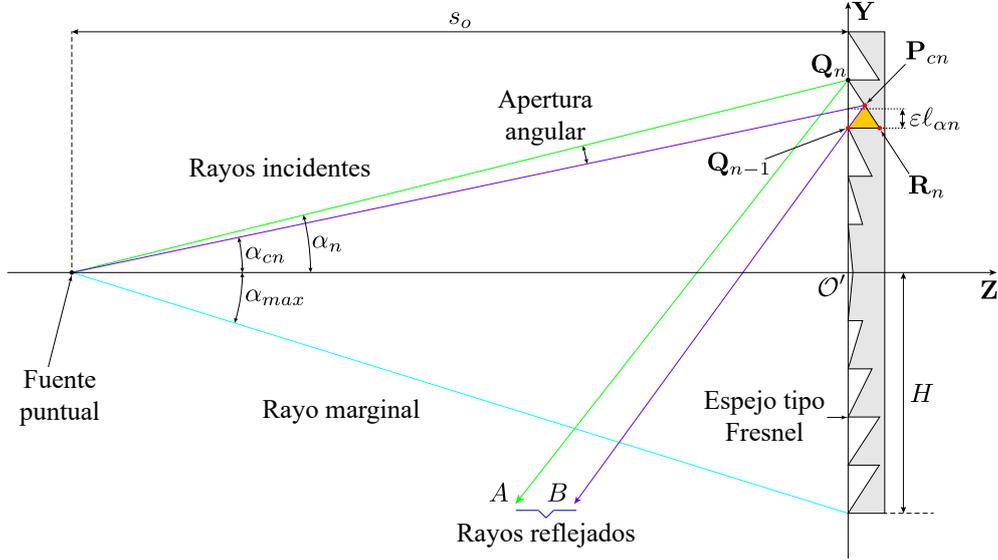


Fig. 3.1 Cálculo de los ángulos críticos α_{cn} por cada surco del espejo, para determinar la apertura angular de reflexión efectiva hacia afuera del espejo tipo Fresnel.

Por lo tanto, a partir de la Ec. (2.78) de rayo reflejado implementada en el caso correspondiente al rayo B , que incide al ángulo α_{cn} , se sustituyen las coordenadas del punto Q_{n-1} , que está contenido en el rayo reflejado, tal que $z = 0$, $y = \varepsilon(n-1)$, sustituyendo en la ecuación de rayo reflejado se obtiene la siguiente expresión

$$\varepsilon(n-1) = y_+(n) - z_+(n) \tan \beta_{\alpha n}, \quad (3.1)$$

donde, las expresiones para $\beta_{\alpha n}$, $y_+(n)$ y $z_+(n)$, están dadas por las Ec. (2.77) y Ec. (2.76), sustituyendo en la Ec. (3.1) y simplificando, se deduce la expresión

$$\begin{aligned} \varepsilon(n-1) [s_o - (\ell_{\alpha n} + n - 1) \Delta S(n)] = & \varepsilon(\ell_{\alpha n} + n - 1) [s_o - n \Delta S(n)] + \\ & + \frac{s_o(\ell_{\alpha n} - 1) \Delta S(n) [2s_o \varepsilon \Delta S(n) + \varepsilon(\ell_{\alpha n} + n - 1) [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]]}{s_o [\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)] - 2\varepsilon^2(\ell_{\alpha n} + n - 1) \Delta S(n)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

reduciendo esta expresión a su forma polinomial en términos de $\ell_{\alpha n}$, se obtiene una ecuación cuadrática de la forma,

$$A(n) \ell_{\alpha n}^2 + B(n) \ell_{\alpha n} + C(n) = 0, \quad (3.3)$$

con sus coeficientes dados por las siguientes expresiones,

$$A(n) = 2\varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}^2(n) - s_o \Delta \mathcal{S}(n) \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right], \quad (3.4)$$

$$B(n) = 4\varepsilon^2 (n-1) \Delta \mathcal{S}^2(n) + s_o \left[[s_o - (n-1) \Delta \mathcal{S}(n)] \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] - 2 \Delta \mathcal{S}(n) \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] \right], \quad (3.5)$$

$$C(n) = 2 \Delta \mathcal{S}^2(n) \left[\varepsilon^2 (n-1)^2 - s_o^2 \right] - 2 s_o (n-1) \Delta \mathcal{S}(n) \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right], \quad (3.6)$$

resolviendo la Ec. (3.3) para $\ell_{\alpha n}$, se obtiene la siguiente expresión

$$\ell_{\alpha n} = \frac{-B(n) + \sqrt{B^2(n) - 4A(n)C(n)}}{2A(n)}, \quad (3.7)$$

a partir de las Ec. (3.2), Ec. (3.5) y Ec. (3.6), se puede representar el discriminante de la ecuación anterior como sigue

$$\sqrt{B^2(n) - 4A(n)C(n)} = s_o \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] \left| s_o - (n+1) \Delta \mathcal{S}(n) \right|, \quad (3.8)$$

sin embargo, de la definición dada en la Ec. (2.26) se tiene que el término $\Delta \mathcal{S}(n) < 0$, por lo cual la expresión que está dentro del valor absoluto es siempre positiva, sustituyendo este resultado apropiadamente en la Ec. (3.7), se deduce la siguiente expresión

$$\ell_{\alpha n} = \frac{2 \left[\varepsilon^2 (n-1) + s_o \Delta \mathcal{S}(n) \right] \Delta \mathcal{S}(n)}{s_o \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] - 2 \varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}(n)}, \quad (3.9)$$

que representa la fracción de surco a partir de la cual los rayos provenientes de una fuente puntual colocada a una distancia s_o que son reflejados por el n -ésimo surco, tales que $\ell_{\alpha n} < \ell$, se propagan libremente hacia afuera del espejo. Por lo tanto, por definición del parámetro ℓ se deduce que los rayos incidentes sobre el n -ésimo surco, tales que se encuentran en el intervalo de apertura angular $\alpha \in (\alpha_{cn}, \alpha_n)$, donde los límites están dados por las siguientes expresiones,

$$\alpha_n = \arctan \left[\frac{\varepsilon n}{s_o} \right], \quad \alpha_{cn} = \arctan \left[\frac{\varepsilon \left(2 \Delta \mathcal{S}^2(n) + (n-1) \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] \right)}{s_o \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] - 2 \varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}(n)} \right], \quad (3.10)$$

son los conjuntos de rayos que se reflejan hacia afuera del espejo tipo Fresnel sin ser obstruidos por las barreras entre los surcos. Calculando el límite de la Ec. (3.9) cuando $s_o \rightarrow \infty$, la expresión se reduce a la Ec. (2.36), que representa la altura crítica para una fuente colocada en infinito.

De manera análoga al capítulo anterior, se pueden cuantificar la pérdidas de iluminación para una fuente puntual que emite en todas direcciones y es colocada sobre el eje óptico a una distancia s_o del espejo tipo Fresnel. Sustituyendo el resultado de la Ec. (3.9) en la Ec. (2.34) para la altura crítica del n -ésimo surco, se obtiene

$$h_{\alpha n} = \varepsilon \left[n - \frac{2n\varepsilon^2\Delta S(n) - s_o[\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]}{2\varepsilon^2\Delta S(n) - s_o[\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]} \right], \text{ para } n = 2, \dots, N, \quad (3.11)$$

donde, $h_{\alpha n}$ denota la ordenada del punto P_{cn} que corresponde a la intersección entre el rayo crítico y la superficie del espejo tipo Fresnel, ilustrado en la Fig. 3.1. A partir de esto, se deducen las expresiones para las aperturas de reflexión sin obstrucción para cada surco, obteniendo

$$H_{\alpha n} = (\varepsilon n - h_{\alpha n}) = \varepsilon \left[\frac{2n\varepsilon^2\Delta S(n) - s_o[\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]}{2\varepsilon^2\Delta S(n) - s_o[\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]} \right], \text{ para } n = 2, \dots, N, \quad (3.12)$$

nótese que en las caras centrales del espejo no existe barrera, por lo que para el caso $n = 1$, se tiene que $h_{\alpha 1} = 0$, entonces la apertura de reflexión sin obstrucción en el primer surco es de $H_{\alpha 1} = \varepsilon$.

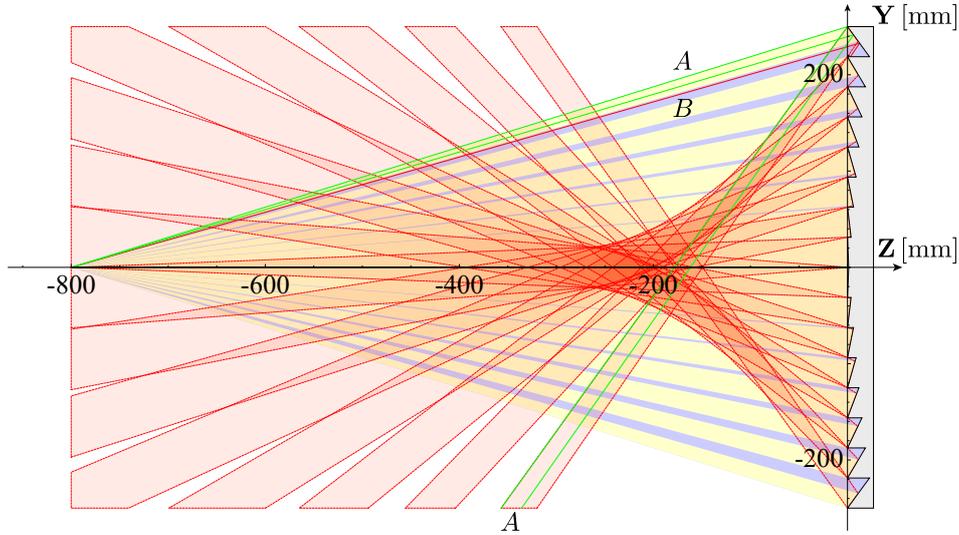


Fig. 3.2 Ejemplo de zonas de obstrucción de luz para un espejo esférico tipo Fresnel, con $k = 0$, radio de curvatura $R = -400$ mm, considerando $N = 8$ surcos por semidiámetro de $H = 250$ mm, con una eficiencia de $\eta_{\alpha f} = 0.8477$, para una fuente colocada a $s_o = 800$ mm.

Para calcular el porcentaje de apertura eficiente de un espejo tipo Fresnel, se compara la apertura total de entrada de la superficie, con la suma de las aperturas dadas por la Ec. (3.12), obteniendo

$$\eta_{\alpha f} \equiv \frac{1}{N} \left(1 + \sum_{n=2}^N \left[\frac{2n\varepsilon^2\Delta S(n) - s_o[\varepsilon^2 - \Delta S^2(n)]}{2\varepsilon^2\Delta S(n) - s_o[\varepsilon^2 + \Delta S^2(n)]} \right] \right), \quad (3.13)$$

donde $0 < \eta_{\alpha f} < 1$, de manera análoga al resultado mostrado en la sección anterior, este coeficiente denota la eficiencia del espejo tipo Fresnel considerando el caso de una fuente puntual colocada a una distancia s_o sobre el eje óptico. En las Figs. 3.2 y 3.3, se muestran ejemplos para espejos cónicos tipo Fresnel, donde se calcula la eficiencia en cada caso. En la siguiente sección, se calcula el trazo inverso de este sistema, de donde se pueden concluir resultados más fuertes y mediante este procedimiento proponer una prueba para espejos tipo Fresnel.

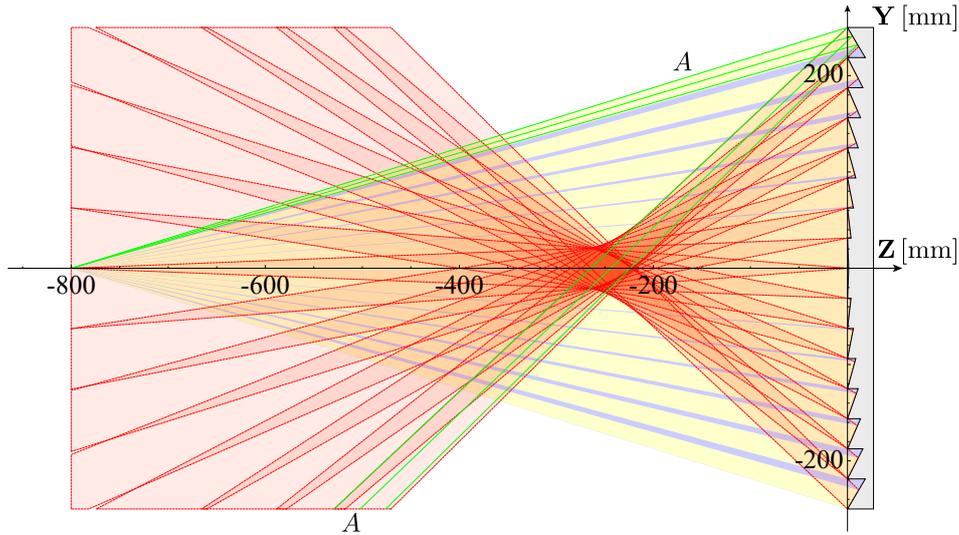


Fig. 3.3 Ejemplo de zonas de obstrucción de luz para un espejo parabólico tipo Fresnel, con $k = -1$, radio de curvatura $R = -400$ mm, considerando $N = 8$ surcos por semidiámetro de $H = 250$ mm, con una eficiencia de $\eta_{\alpha f} = 0.8872$, para una fuente colocada a $s_o = 800$ mm.

3.1.1 Zonas de iluminación de un espejo tipo Fresnel sobre un colector cilíndrico

Considérese el arreglo propuesto anteriormente en la Fig. 2.23, para una fuente puntual situada a una distancia s'_o del vértice de un espejo tipo Fresnel, pero ahora se coloca un colector de luz cilíndrico de modo que su eje de simetría coincide con el eje óptico, con radio de grosor r_{cil} y longitud total L_{cil} . En secciones anteriores se calcularon las ecuaciones para el trazo de rayos en este tipo de sistemas ópticos, a partir de este desarrollo se plantearán las expresiones que permitan mapear puntos que están en un plano y que pasan a través de la fuente puntual, fijando una correspondencia con los rayos que se emiten de este punto y son reflejados por el espejo hacia el cilindro. En la Fig. 3.4 se muestra un plano meridional del sistema, donde se han prolongado los rayos emitidos de la fuente puntual hacia un plano de longitud l y que se encuentra colocado a una distancia a del punto O , entonces, para el rayo que se propaga a un ángulo α , se calcula la altura de intersección con la pantalla respecto al eje Y , como

$$\rho(\alpha) = a \tan \alpha, \quad (3.14)$$

donde, $\tan \alpha = h_\ell / s_o$ está dado por la Ec. (2.75), y determina la altura h_ℓ a la cual incide el rayo dentro

de la apertura del espejo. Entonces, para proyectar una circunferencia de diámetro l que está inscrita en el plano de la pantalla, sobre la superficie total del espejo, se debe fijar la distancia $s_o = b$, por lo tanto, sustituyendo b en la Ec. (2.75) y evaluando la Ec. (3.14) para el rayo marginal $\rho(\alpha_{max}) = l/2$, se deduce la expresión de este parámetro en términos de la distancia a , obteniendo

$$b = \frac{2H}{l}a, \quad (3.15)$$

donde, b denota la distancia del borde del espejo tipo Fresnel a la fuente puntual y H es el semidiámetro de apertura de entrada.

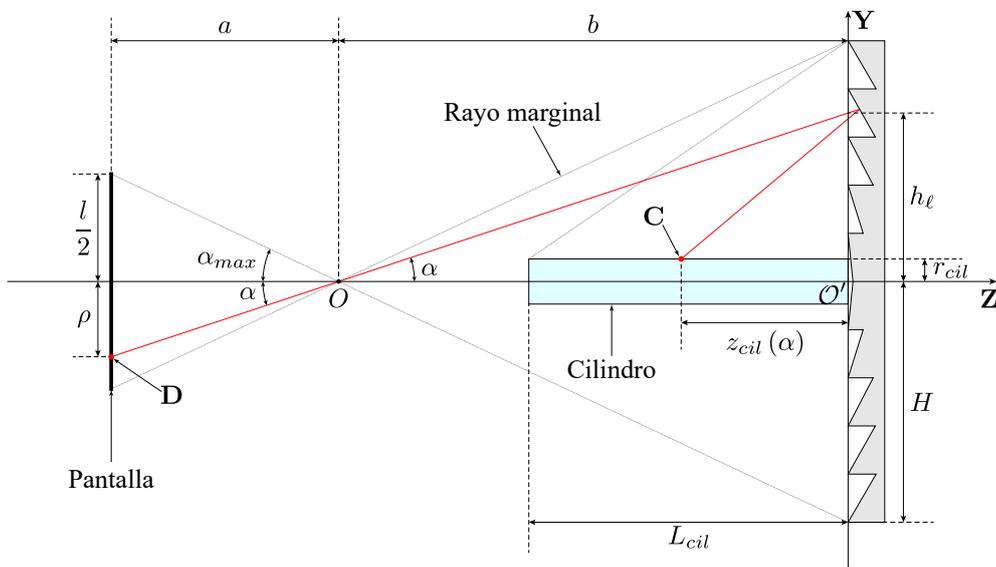


Fig. 3.4 Diagrama de los parámetros involucrados en la proyección de un punto a través de una apertura puntual, posteriormente reflejado mediante un espejo tipo Fresnel, el cual incide desde una pantalla plana en un colector de luz cilíndrico.

Retomando la Ec. (3.14), a partir de esta expresión se relaciona a un punto arbitrario D de la pantalla, con un rayo que se propaga a un ángulo α , resolviendo para el ángulo de emisión se obtiene

$$\alpha(\rho) = \arctan \left[\frac{\rho}{a} \right], \quad (3.16)$$

que es la forma funcional de α , y es equivalente a la definición dada en la Ec. (2.75), por lo que, para calcular el punto C en el colector cilíndrico que corresponde a D , se compone esta función con las ecuaciones paramétricas del trazo de rayos deducidas anteriormente.

Como se observa en la Fig. 3.4, la superficie del cilindro queda representada en un plano meridional mediante la recta $y = r_{cil}$, para calcular el alcance del punto C sobre el cilindro, se considera la Ec. (2.78) de rayo reflejado, donde se sustituye $y = r_{cil}$ constante, resolviendo entonces para z de modo que los rayos provenientes del espejo incidan sobre la superficie del cilindro, se obtiene la siguiente

expresión

$$z_{cil}(\alpha) = z_+(\alpha) + \frac{1}{\tan \beta_{\alpha n}} (r_{cil} - y_+(\alpha)), \quad (3.17)$$

redefiniendo $z \rightarrow z_{cil}(\alpha)$, donde los términos $z_+(\alpha)$ y $y_+(\alpha)$, están dados por la Ec. (2.76), y $\beta_{\alpha n}$ está dado por la Ec. (2.16). Sustituyendo las expresiones adecuadamente se obtiene

$$z_{cil}(\alpha) = \left[\frac{2\varepsilon \Delta \mathcal{S}(n) \tan \alpha - [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)]}{2\varepsilon \Delta \mathcal{S}(n) + [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)] \tan \alpha} \right] r_{cil} + \quad (3.18)$$

$$- \left[\frac{2\varepsilon n \Delta \mathcal{S}(n) (\varepsilon \tan \alpha + \Delta \mathcal{S}(n)) - s_o [\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n)] \tan \alpha}{2\varepsilon \Delta \mathcal{S}(n) + [\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n)] \tan \alpha} \right],$$

en donde α se calcula a partir de la Ec. (3.16), por lo tanto, la relación que mapea $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{C}$, puede escribirse en notación de composición de funciones como

$$\mathbf{C} = \mathcal{P}_n(\mathbf{D}) = \left\{ r_{cil}, (\alpha \circ z_{cil})(\rho) \right\}, \quad (3.19)$$

sin embargo, como se mostró en la sección anterior, existen ángulos de emisión para los cuales su correspondiente rayo reflejado es obstruido por las barreras internas de los surcos del espejo tipo Fresnel, a partir de este análisis se determinarán los dominios en donde está bien definida esta función.

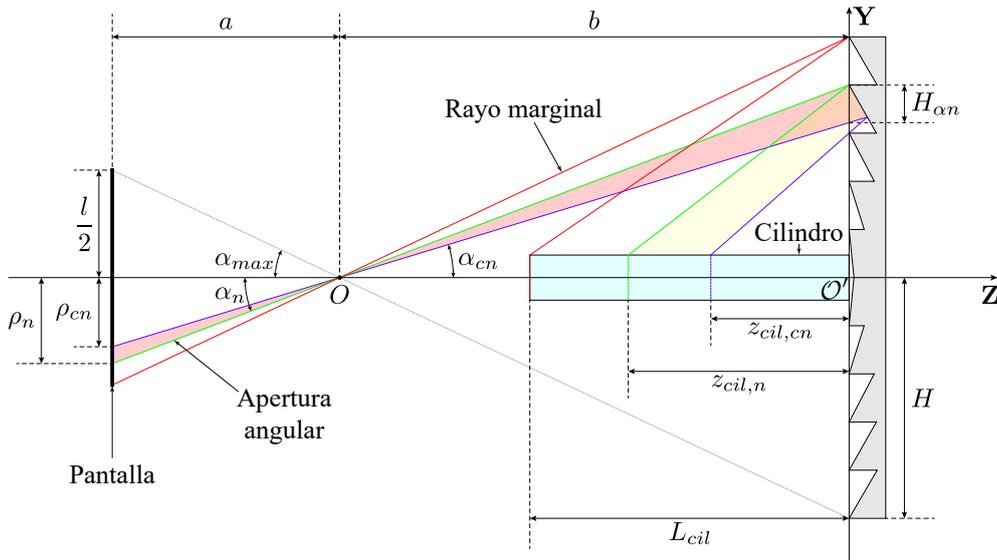


Fig. 3.5 Apertura angular $\alpha \in (\alpha_{cn}, \alpha_n)$ de rayos incidentes sobre el n -ésimo surco, graficada como el área color rojo, con su correspondiente haz de rayos reflejados sobre el cilindro iluminando el área del cilindro delimitada por el intervalo de alturas $z \in (z_{cil,n}, z_{cil,cn})$, representada por el área color amarillo.

En la Fig. 3.5 se muestra un plano meridional del sistema, donde se tiene que para el n -ésimo surco del espejo tipo Fresnel corresponde una apertura angular para los rayos que son reflejados libremente, denotada como $\alpha \in (\alpha_{cn}, \alpha_n)$, cuyos valores extremos están dados por la Ec. (3.10), evaluando la Ec. (3.14) en estos ángulos, se obtienen las expresiones para los límites del intervalo de alturas sobre la pantalla de proyección $\rho \in (\rho(\alpha_{cn}), \rho(\alpha_n))$, resultando

$$\rho_n = a \left[\frac{\varepsilon n}{s_o} \right], \quad \rho_{cn} = a \left[\frac{\varepsilon \left(2 \Delta \mathcal{S}^2(n) + (n-1) \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] \right)}{s_o \left[\varepsilon^2 + \Delta \mathcal{S}^2(n) \right] - 2 \varepsilon^2 \Delta \mathcal{S}(n)} \right], \quad (3.20)$$

donde, $\rho(\alpha_{cn}) \rightarrow \rho_{cn}$ es el mínimo del n -ésimo intervalo del plano de proyección para el cual la función \mathcal{P} está definida y $\rho(\alpha_n) \rightarrow \rho_n$ es el máximo del intervalo, como se observa en la Fig. 3.5.

Entonces, cada uno de los intervalos de alturas definidos por la Ec. (3.20), corresponden para una n fija, a la apertura H_{α_n} calculada en la Ec. (3.12), sobre la cual los rayos incidentes son reflejados libremente hacia el colector cilíndrico en el caso ilustrado en la Fig. 3.5, esto genera una sección específica del cilindro que es iluminada por este haz de rayos reflejados, formado por los elementos provenientes de la pantalla, tales que $\rho \in (\rho_{cn}, \rho_n)$.

En consecuencia, para la misma apertura angular generada por esta sección de la pantalla, se obtiene un área delimitada del cilindro que es iluminada por el n -ésimo surco del espejo y que corresponde al segmento que está acotado por el intervalo $z \in (z_{cil}(\alpha_n), z_{cil}(\alpha_{cn}))$, nótese que en este intervalo las distancias sobre el eje \mathbf{Z} , que están asociadas al rayo crítico y al del borde del surco se invierten en orden con respecto a su apertura angular, esto es porque la función $z_{cil}(\alpha)$, es monótona decreciente en el intervalo $\alpha \in (\alpha_{cn}, \alpha_n)$, por lo que dada una n fija, se cumple la desigualdad $z_{cil}(\alpha_n) < z_{cil}(\alpha_{cn})$, es decir, el alcance sobre el cilindro del rayo reflejado por el borde del surco, siempre será mayor que el correspondiente al ángulo de incidencia crítica. Entonces, para obtener la expresión correspondiente al mínimo del intervalo en el cilindro, se evalúa la Ec. (3.18) para el ángulo α_n , sustituyendo mediante la Ec. (3.10) y reduciendo apropiadamente se obtiene

$$z_{cil,n} = \left[\frac{2 \varepsilon^2 n \Delta \mathcal{S}(n) - s_o \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]}{2 \varepsilon s_o \Delta \mathcal{S}(n) + \varepsilon n \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]} \right] (r_{cil} - \varepsilon n), \quad (3.21)$$

por otro lado, para calcular la ecuación correspondiente al máximo del intervalo, se evalúa la Ec. (3.18) en el ángulo α_{cn} , obteniendo

$$z_{cil,cn} = \left[\frac{2 \varepsilon^2 n \Delta \mathcal{S}(n) - s_o \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]}{2 \varepsilon \left[s_o - \Delta \mathcal{S}(n) \right] \Delta \mathcal{S}(n) + \varepsilon (n-1) \left[\varepsilon^2 - \Delta \mathcal{S}^2(n) \right]} \right] (r_{cil} - \varepsilon (n-1)), \quad (3.22)$$

donde, se han redefinido los términos $z_{cil}(\alpha_n) \rightarrow z_{cil,n}$, $z_{cil}(\alpha_{cn}) \rightarrow z_{cil,cn}$, que denotan el alcance con respecto a la longitud total del cilindro de los rayos reflejados, que corresponden a los extremos del intervalo de apertura angular del n -ésimo surco, relacionando con esto cada zona de iluminación

del cilindro con su correspondiente sección del espejo tipo Fresnel. A partir de la Ec. (3.21), se puede calcular la sucesión de valores $|z_{cil,n}|$, para $n = 1, \dots, N$, los cuales representan la magnitud del alcance máximo de cada área iluminada del cilindro, por lo que, para obtener la longitud del cilindro necesaria para coleccionar completamente la luz reflejada por el espejo tipo Fresnel, se deduce la siguiente expresión

$$L_{cil} = \max \{|z_{cil,n}|\}, \quad (3.23)$$

que es válida en general para espejos tipo Fresnel, en el ejemplo ilustrado en la Fig. 3.5, este valor corresponde al rayo marginal, por lo que $L_{cil} = |z_{cil,N}|$.

En conclusión, considerando un plano meridional del espejo tipo Fresnel, si se proyectan los elementos \mathbf{D} desde el plano de una pantalla, sobre la apertura total del n -ésimo surco del espejo, de modo que para cada uno de estos elementos existe su correspondiente sobre la superficie del colector cilíndrico, se tendrá entonces que la función dada por la Ec. (3.19) queda bien definida, para una n fija, sobre los intervalos,

$$\mathcal{P}_n : (\rho_{cn}, \rho_n) \rightarrow (z_{cil,n}, z_{cil,cn}), \quad (3.24)$$

donde, la función \mathcal{P}_n es biyectiva para cada surco, por lo que es invertible. En la siguiente sección serán de utilidad las propiedades de esta función para calcular la imagen de patrones definidos en el plano de proyección.

3.1.2 Cálculo de áreas y contornos mediante la función de proyección

En la sección anterior se calcularon los dominios y codominios de las funciones \mathcal{P}_n , para un plano meridional de un espejo tipo Fresnel. Considerando que se trata de un sistema con simetría de revolución, en esta sección se extenderá la definición de estas funciones para mapear áreas delimitadas por dos circunferencias de un plano, sobre áreas limitadas por dos alturas en un cilindro.

Considérese el arreglo de la Fig. 3.6, dado que el sistema del espejo tipo Fresnel tiene simetría de revolución, en la vista frontal del plano de proyección se observa que el intervalo de alturas correspondientes al n -ésimo surco (ρ_{cn}, ρ_n) , que fue calculado anteriormente en el plano de incidencia $\mathbf{Y-Z}$, delimita una región anular sobre el plano, la cual se puede denotar como el siguiente conjunto

$$\mathcal{D}_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_{1,n}^2 < x^2 + y^2 < \rho_{2,n}^2 \right\}, \quad (3.25)$$

que en la Fig. 3.6 representa el área sobre el plano $\mathbf{X-Y}$, la cual está limitada por las características del plano de detección, en particular consideramos un sensor CCD, y que está encerrada entre las dos circunferencias de los radios calculados en la Ec. (3.20), redefinidos como $\rho_{cn} \rightarrow \rho_{1,n}$ y $\rho_n \rightarrow \rho_{2,n}$, excepto para un surco en específico para el que el radio mínimo $\rho_{1,n}$ no necesariamente vale ρ_{cn} . Nótese el caso de la Fig. 3.6, donde están graficadas únicamente las áreas \mathcal{D}_n , para $n = 3, \dots, N$, esto

se debe a que la zona central, que corresponde al caso $n = 1$ del espejo, se encuentra obstruida por el cilindro colector y en el caso $n = 2$, el valor mínimo del intervalo está dado por ρ_{min} que se calcula a partir de la proyección del radio r_{cil} del cilindro sobre la pantalla, se deduce de la Ec. (3.14) que

$$\rho_{min} = \frac{a r_{cil}}{L_{cil} - s_o}, \quad (3.26)$$

en general, para un espejo tipo Fresnel en la configuración de la Fig. 3.6, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que los surcos del espejo cuya $m \leq n$, satisfacen siempre la siguiente desigualdad $\alpha_{min} \leq \alpha_n$, donde $\alpha_{min} = \arctan(\rho_{min}/a)$. Es decir, que para estos valores de n existe un conjunto $\mathcal{D}_n \neq \emptyset$, sin embargo, para el caso $n = m$ se debe calcular \mathcal{D}_n , de modo que no contenga elementos de la pantalla que estén dentro de la zona obstruida por el cilindro, entonces, para calcular el radio mínimo de los conjuntos definidos en la Ec. (3.25) se tiene que

$$\rho_{1,n} = \begin{cases} \max\{\rho_{min}, \rho_{cn}\} & \text{para } n = m, \\ \rho_{cn} & \text{para } n > m, \end{cases} \quad (3.27)$$

por lo tanto, las dimensiones del arreglo determinan la existencia de dominios para una sucesión de funciones \mathcal{P}_n , para $n = m, m + 1, \dots, N$, que en conjunto determinan el total de surcos de un espejo tipo Fresnel para los cuales corresponden elementos sobre la superficie del cilindro.

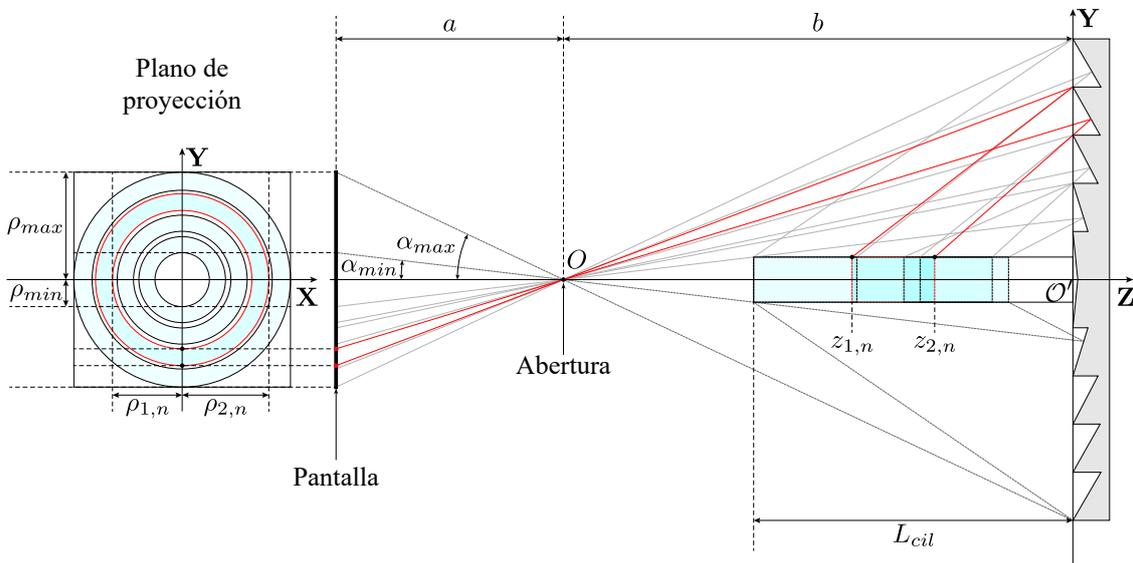


Fig. 3.6 Diagrama del plano de proyección, mapeado a través de una abertura puntual sobre el espejo tipo Fresnel y reflejado sobre un cilindro.

En la Fig. 3.6 se observan los cortes meridionales de las secciones del cilindro que son imagen de los conjuntos descritos por la Ec. (3.25), aplicando a cada dominio \mathcal{D}_n su correspondiente función \mathcal{P}_n ,

descrita en la Ec. (3.24), se obtiene la expresión para los codominios en la superficie del cilindro

$$\mathcal{C}_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r_{cil}^2, z_{2,n} < z < z_{1,n}\}, \quad (3.28)$$

donde se redefini6 $z_{cil,n} \rightarrow z_{2,n}$ está dado por la Ec. (3.21) y $z_{1,n}$ se calcula a partir de la Ec. (3.19), evaluando para los radios $\rho_{1,n}$ dados por la Ec. (3.27), obteniendo la ecuación

$$z_{1,n} = \begin{cases} \min \{z_{cil,cn}, (\alpha \circ z_{cil})(\rho_{min})\} & \text{para } n = m, \\ z_{cil,cn} & \text{para } n > m, \end{cases} \quad (3.29)$$

donde, $(\alpha \circ z_{cil})$ es la composición de las funciones definidas en las Ec. (3.16) y Ec. (3.18), que están evaluadas en el mínimo de cada intervalo.

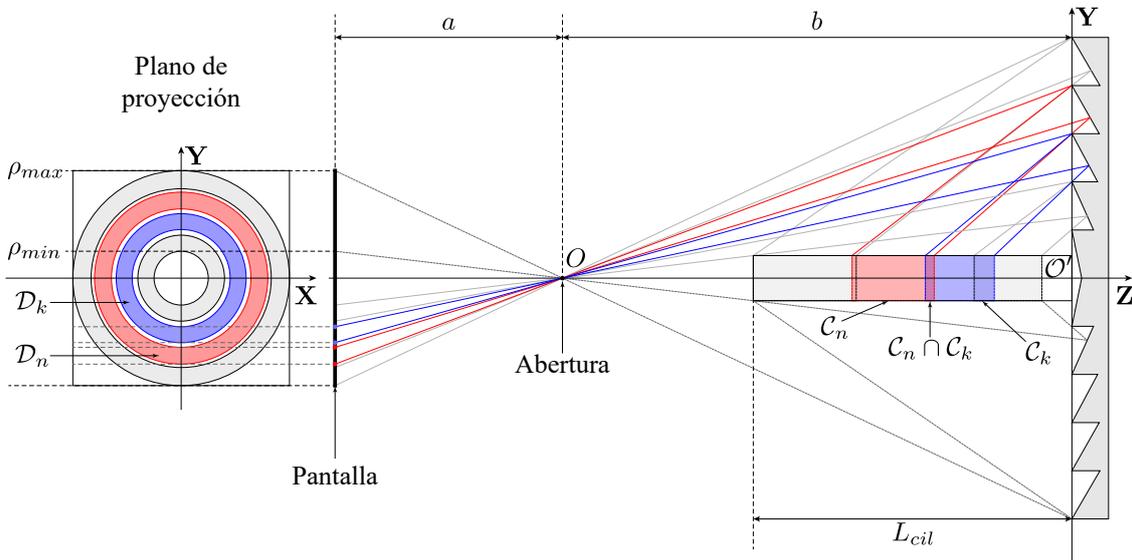


Fig. 3.7 Diagrama del plano de proyección y los dominios sobre el cilindro que se intersectan.

De la Ec. (3.25) se deduce que, en general los conjuntos \mathcal{D}_n , para $n = m, m + 1, \dots, N$, satisfacen la siguiente propiedad

$$\mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_k = \emptyset, \text{ si } n \neq k, \quad (3.30)$$

por lo tanto, definiendo los siguientes conjuntos

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=m}^N \mathcal{D}_n, \quad \mathcal{C} = \bigcup_{n=m}^N \mathcal{C}_n, \quad (3.31)$$

se deduce que \mathcal{D} es un dominio apropiado para la función $\mathcal{P} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, que mapea todos los puntos del plano de proyección para los que existe su imagen en \mathcal{C} mediante \mathcal{P}_n , preservando las propiedades de

función como consecuencia de la Ec. (3.30), sin embargo, a diferencia de \mathcal{P}_n no es biyectiva, ya que en general existen $n, k \in \mathbb{N}$, para los cuales

$$\mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_k \neq \emptyset, \quad (3.32)$$

como se observa en la Fig. 3.7, donde se superponen las zonas de iluminación sobre el cilindro, provenientes de distintos surcos.

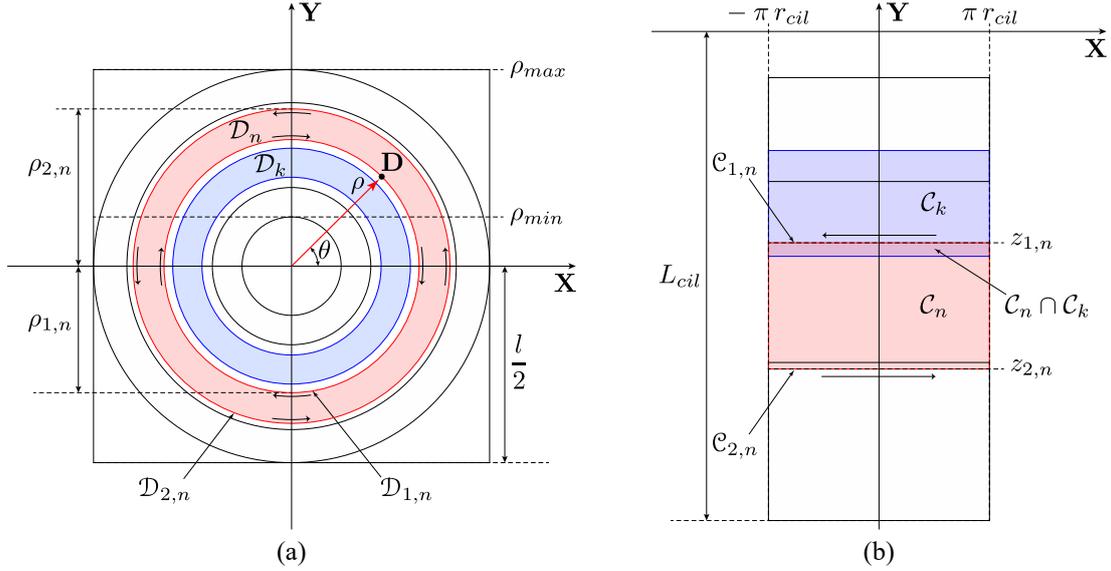


Fig. 3.8 (a) Gráficas de los anillos \mathcal{D}_n sobre el plano de proyección, que definen los dominios de \mathcal{P}_n . (b) Codominios de las funciones \mathcal{P}_n .

Considérese la Fig. 3.8 (a), en donde se muestran las gráficas de los anillos del conjunto \mathcal{D} calculado en la Ec. (3.31), para cada uno de los conjuntos \mathcal{D}_n , la frontera se puede representar como una curva cerrada parametrizada en términos de

$$\theta = \arctan \left[\frac{y}{x} \right], \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.33)$$

obteniendo la siguiente expresión,

$$\partial \mathcal{D}_n = \bigcup_{p=1}^2 \mathcal{D}_{p,n} = \bigcup_{p=1}^2 \left\{ f_{p,n}(\theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}, \quad (3.34)$$

donde, las funciones parametrizadas $f_{p,n}(\theta)$, para $p = 1, 2$, representan a las circunferencias que limitan el área del anillo, dadas por las expresiones

$$f_{p,n}(\theta) = \rho_{p,n} \left(\cos \theta, (-1)^p \sin \theta \right), \quad (3.35)$$

por lo tanto, el conjunto $\partial \mathcal{D}_n$, cumple con la definición de frontera de un conjunto y se pueden ordenar

sus elementos en subconjuntos, para $p = 1$ representa la circunferencia interna $\mathcal{D}_{1,n}$ de radio $\rho_{1,n}$ dado por la Ec. (3.27), que recorre en sentido horario la frontera del anillo y continúa con $p = 2$ para la circunferencia externa del anillo denotada como $\mathcal{D}_{2,n}$, de radio $\rho_{2,n}$ dado por la Ec. (3.20), que se recorre en sentido antihorario y cierra la trayectoria en la parte positiva del eje \mathbf{X} .

Por otro lado, la superficie en \mathbb{R}^3 del cilindro colector de la Fig. 3.7, se muestra en la Fig. 3.8 (b) como el plano extendido de su superficie en \mathbb{R}^2 , descrito mediante la transformación

$$(x, y, z) \mapsto (r_{cil} \theta, z), \quad (3.36)$$

donde, θ está dado por la Ec. (3.33), y $\rho = r_{cil}$ es constante como en la Ec. (3.25). Esta transformación identifica los puntos sobre el cilindro con su superficie cuando es desenrollada y se extiende como un plano. Entonces, considérese $\mathbf{D} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ un elemento de \mathcal{D}_n , evaluando la Ec. (3.19) de la función \mathcal{P}_n en este punto, se obtiene

$$\mathbf{C} = \mathcal{P}_n(\mathbf{D}) = \left(-r_{cil}(\pi - \theta), (\alpha \circ z_{cil})(\rho) \right), \quad (3.37)$$

aplicando la transformación definida en la Ec. (3.36), los anillos del conjunto \mathcal{C} , se transforman en rectángulos sobre el plano graficado en la Fig. 3.8 (b), definidos por

$$\mathcal{C}_n = \left\{ (r_{cil} \theta, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq \theta \leq \pi, z_{2,n} < z < z_{1,n} \right\}, \quad (3.38)$$

además, mapeando mediante la Ec. (3.37) los contornos $\partial \mathcal{D}_n$ definidos en la Ec. (3.34), resultan los conjuntos

$$\partial \mathcal{C}_n \equiv \mathcal{P}_n(\partial \mathcal{D}_n) = \bigcup_{p=1}^2 \mathcal{C}_{p,n} = \bigcup_{p=1}^2 \left\{ h_{p,n}(\theta) \mid -\pi \leq \theta \leq \pi \right\}, \quad (3.39)$$

donde, las funciones parametrizadas $h_{p,n}(\theta)$, para $p = 1, 2$, representan a las rectas horizontales que limitan el área del rectángulo, dadas por las expresiones

$$h_{p,n}(\theta) = \left((-1)^{p+1} r_{cil}(\pi - \theta), z_{p,n} \right), \quad (3.40)$$

que en efecto, $\partial \mathcal{C}_n$ es la frontera de los conjuntos de la Ec. (3.38), pues $\mathcal{C}_{2,n}$ representa el lado inferior del rectángulo, como un segmento de la recta horizontal $y = z_{2,n}$ dada por la Ec. (3.21), que se recorre del lado negativo al positivo del eje \mathbf{X} y continúa por el lado superior $\mathcal{C}_{1,n}$ que es un segmento de la recta $y = z_{1,n}$ dado por la Ec. (3.29), que se recorre en sentido contrario y cierra la trayectoria del lado negativo del eje \mathbf{X} , como se ilustra en la Fig. 3.8 (b).

3.1.3 Mapeo de un patrón de curvas cerradas

En esta sección se estudiará la transformación de distintos subconjuntos de los dominios \mathcal{D}_n , representados como un patrón de curvas en el plano de proyección, utilizando la función \mathcal{P} , obtenida en la

Ec. (3.37) para calcular los patrones resultantes sobre el colector cilíndrico y su representación de las fronteras de estos subconjuntos mediante curvas cerradas representadas paramétricamente.

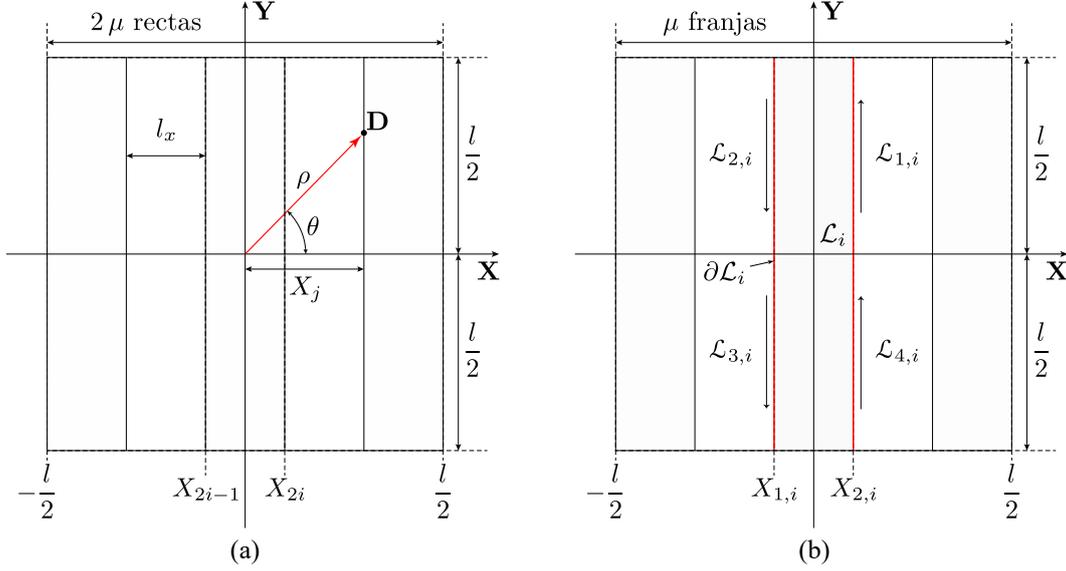


Fig. 3.9 (a) Diagrama del trazo de franjas sobre el plano de proyección. (b) Definición del contorno de cada franja \mathcal{L}_i , recorriendo cada una en sentido antihorario.

Considérese el plano de proyección de la Fig. 3.9 (a), delimitado por un cuadrado de lado l , asociado al área activa del sensor CCD, tradicionalmente el área activa de un sensor CCD tiene una forma rectangular, se considera el área definida por el lado menor del rectángulo, el área total de este plano se divide en un número $\mu \in \mathbb{N}$ de franjas verticales, todas del mismo grosor e igualmente espaciadas por una distancia l_x . Para generar estas franjas, se divide la longitud total l del plano sobre el eje X , en segmentos igualmente espaciados por

$$l_x = \frac{l}{2\mu - 1}, \quad (3.41)$$

esta longitud genera una partición del plano en distancias sobre el eje X , dadas por la siguiente expresión

$$X_j = l_x(j - 1) - \frac{l}{2}, \quad \text{para } j = 1, \dots, 2\mu, \quad (3.42)$$

entonces, trazando las rectas verticales $x = X_j$, se observa en la Fig. 3.9 (a), que la i -ésima franja es el área definida como el conjunto

$$\mathcal{L}_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid X_{1,i} \leq x \leq X_{2,i}, \quad -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2} \right\}, \quad (3.43)$$

donde, se han redefinido $X_{2i-1} \rightarrow X_{1,i}$, $X_{2i} \rightarrow X_{2,i}$, las distancias de la Ec. (3.42), para $i = 1, \dots, \mu$. Considérese la ecuación en coordenadas polares de las rectas verticales definidas por los términos de

la Ec. (3.42), dadas por

$$X_j = \rho \cos \theta, \quad (3.44)$$

donde, θ , ρ se calculan como se indica en la Ec. (3.33). Por lo tanto, la frontera de las franjas \mathcal{L}_i se deduce a partir de la Ec. (3.43), obteniendo

$$\partial \mathcal{L}_i = \bigcup_{r=1}^4 \mathcal{L}_{r,i} \quad (3.45)$$

donde, los términos de esta unión de conjuntos están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,i} &= \left\{ g_{2,i}^{(1)}(\theta) \mid \theta_{02,i} \leq \theta \leq \theta_{2,i} \right\}, & \mathcal{L}_{3,i} &= \left\{ g_{1,i}^{(3)}(\theta) \mid \theta_{01,i} \leq 2\pi - \theta \leq \theta_{1,i} \right\}, \\ \mathcal{L}_{2,i} &= \left\{ g_{1,i}^{(2)}(\theta) \mid \theta_{01,i} \leq \theta \leq \theta_{1,i} \right\}, & \mathcal{L}_{4,i} &= \left\{ g_{2,i}^{(4)}(\theta) \mid \theta_{02,i} \leq 2\pi - \theta \leq \theta_{2,i} \right\}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

las funciones parametrizadas $g_{q,i}^{(r)}(\theta)$, para $q = 1, 2$, representan a las rectas que limitan el área de la franja mediante la Ec. (3.44), de donde obtienen las siguientes expresiones

$$g_{q,i}^{(r)}(\theta) = X_{q,i} \left(1, (-1)^q \tan \theta \right), \quad \theta_{0q,i} = \arccos \left[\frac{X_{q,i}}{|X_{q,i}|} \right], \quad \theta_{q,i} = \arctan \left[\frac{l}{2X_{q,i}} \right], \quad (3.47)$$

donde, $\theta_{0q,i}$, $\theta_{q,i}$, denotan los ángulos que limitan el intervalo de las rectas al cuadrado del plano, expresados en función de los términos $X_{q,i}$ calculados en la Ec. (3.42), donde el subíndice i indica el número de franja, q el lado de la franja que se está recorriendo y el superíndice r el segmento orientado al que pertenece.

Entonces, el conjunto $\partial \mathcal{L}_i$ representa la frontera de las franjas descritas en la Ec. (3.43), por un lado se asocian al subíndice $q = 2$, los segmentos $\mathcal{L}_{4,i}$, $\mathcal{L}_{1,i}$, que representan el lado derecho de la i -ésima franja que se recorre del lado negativo al positivo del eje \mathbf{Y} , terminando en el borde superior del plano y continúa por el lado izquierdo con $q = 1$, a través de $\mathcal{L}_{2,i}$, $\mathcal{L}_{3,i}$, que recorren la longitud total del plano y termina del lado negativo del eje \mathbf{Y} , como se muestra en la Fig. 3.9 (b) donde el contorno de cada franja puede ser recorrido en sentido antihorario. El patrón formado por las franjas \mathcal{L}_i definidas en la Ec. (3.43), al ser subconjunto del plano de proyección debería tener definida su imagen sobre el colector cilíndrico mediante las funciones \mathcal{P}_n de la Ec. (3.37), sin embargo, los anillos \mathcal{D}_n de dominio de estas funciones son desconexos como se mostró en la Ec. (3.30), por lo que, el área total de cualquier franja contiene elementos que están fuera del dominio de los surcos del espejo tipo Fresnel, sin embargo la solución de este problema está en términos del desarrollo anterior. Considérense los conjuntos descritos en la Ec. (3.25) y Ec. (3.43), para calcular las zonas de las franjas sobre las que

está definida la función de proyección, se calculan los siguientes conjuntos

$$\mathcal{K}_{n,i} = \mathcal{D}_n \cap \mathcal{L}_i, \quad (3.48)$$

donde, el subíndice n indica el orden del surco del cual esta área se encuentra en su dominio y el subíndice i indica el número de franja, aunque esto depende del diseño predefinido para elaborar las pantallas nulas, las cuales pueden ser líneas rectas paralelas o circunferencias concéntricas en ambos casos igualmente espaciadas.

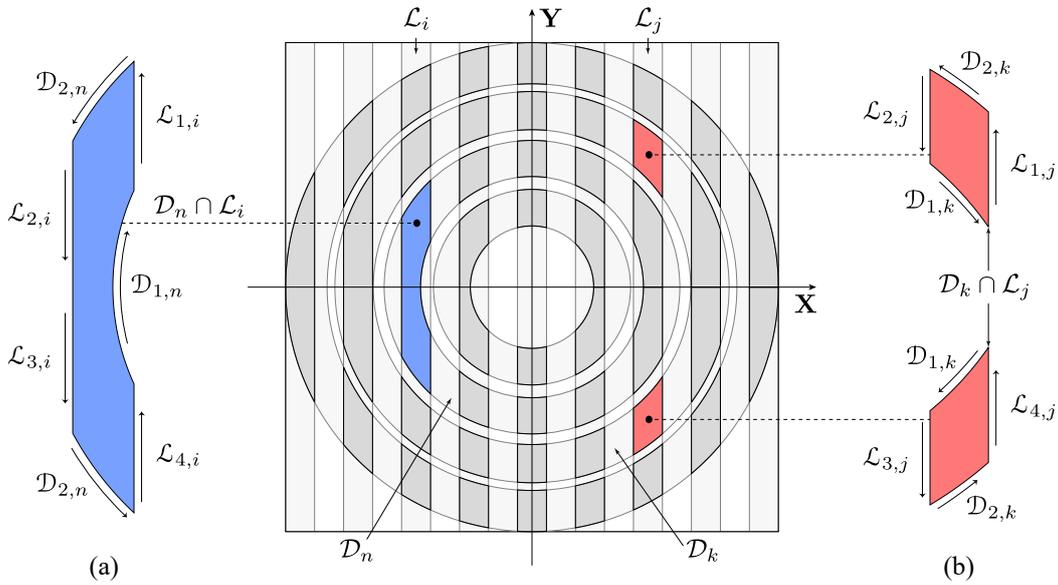


Fig. 3.10 Superposición entre anillos \mathcal{D}_n y franjas \mathcal{L}_i . (a) Área perteneciente al lado izquierdo del patrón, que atraviesa el eje \mathbf{X} . (b) Intersecciones del lado derecho del patrón que se dividen en dos áreas separadas.

En la Fig. 3.10 se pueden observar las áreas de intersección $\mathcal{K}_{n,i}$, superponiendo ambas áreas se observa que el conjunto $\partial\mathcal{K}_{n,i}$, se puede describir como una curva cerrada. Para obtener una expresión paramétrica de las intersecciones entre patrones se deben considerar las fronteras orientadas como se calcularon en la Ec. (3.34) para $\partial\mathcal{D}_n$ y en la Ec. (3.45) para $\partial\mathcal{L}_i$, por lo que el problema se puede plantear mediante la siguiente expresión

$$\partial\mathcal{K}_{n,i} = \partial\mathcal{D}_n \cap \partial\mathcal{L}_i, \quad (3.49)$$

donde, los conjuntos $\partial\mathcal{D}_n$, para $n = m, m + 1, \dots, N$ están formados por las circunferencias $\mathcal{D}_{p,n}$, parametrizadas por las funciones $f_{p,n}$ con $p = 1, 2$, que recorren la frontera de los anillos, por otro lado, se tienen las fronteras de las franjas $\partial\mathcal{L}_i$, para $i = 1, \dots, \mu$ en el plano de proyección, que están formadas por las secciones de rectas verticales $\mathcal{L}_{r,i}$ con $r = 1, \dots, 4$, y cada uno depende de las curvas paramétricas $g_{q,i}^{(r)}$ con $q = 1, 2$. Las curvas descritas anteriormente están parametrizadas con respecto al ángulo θ , entonces, las intersecciones entre fronteras se pueden identificar mediante

valores del parámetro $\theta \in [0, 2\pi]$, nótese también que los conjuntos $\partial\mathcal{D}_n$, $\partial\mathcal{L}_i$, están definidos cada uno por uniones de curvas paralelas, por lo que no tienen autointersecciones en ningún caso. Se deduce entonces que solamente pueden existir soluciones de θ para las combinaciones $\mathcal{D}_{p,n} \cap \mathcal{L}_{r,i}$, por lo tanto, evaluando la Ec. (3.44) para los radios $\rho_{p,n}$, se obtiene la siguiente expresión

$$\theta_{i,q,r}^{n,p} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{X_{q,i}}{\rho_{p,n}}\right) & \text{si } f_{p,n} \cap g_{q,i}^{(r)} \neq \emptyset, \\ \theta_{0q,i} & \text{si } f_{p,n} \cap g_{q,i}^{(r)} = \emptyset, \end{cases} \quad (3.50)$$

donde, $\theta_{0q,i}$ está dado por la Ec. (3.47), en esta función indica que si no se intersectan la circunferencia $f_{p,n}$ con la recta $g_{q,i}^{(r)}$, entonces permite a la curva continuar hasta tocar el eje \mathbf{X} , eliminando indeterminaciones. En función de los índices de los ángulos descritos en la Ec. (3.50), para n, i fijos, denotan la intersección entre la i -ésima franja con el n -ésimo anillo, si se tiene para dos ángulos distintos que p es constante, entonces

$$\mathcal{K}_i^{n,p} = \left\{ f_{p,n}(\theta) \mid \theta_{i,s,t}^{n,p} \leq \theta \leq \theta_{i,u,v}^{n,p} \right\} \quad (3.51)$$

donde, $f_{p,n}$ es como en la Ec. (3.35), es decir, esta combinación de ángulos siempre describe un trozo de circunferencia, por otro lado, si se tiene para dos ángulos que q, r son constantes, entonces

$$\mathcal{K}_{i,q,r}^n = \left\{ g_{q,i}^{(r)}(\theta) \mid \theta_{i,q,r}^{n,u} \leq \theta \leq \theta_{i,q,r}^{n,v} \right\} \quad (3.52)$$

donde, $g_{q,i}^{(r)}$ es como en la Ec. (3.47), por lo que se tendrá una sección de recta del contorno de las franjas. Como se observa en la Fig. 3.10 para cada intersección entre una franja con un anillo, se generan dos áreas que son simétricas respecto del eje \mathbf{X} , para las áreas que se encuentran del lado positivo del eje \mathbf{Y} se define la trayectoria que las delimita como

$$\partial\mathcal{K}_{n,i}^{(+)} = \mathcal{K}_i^{n,1} \cup \mathcal{K}_{i,2,1}^n \cup \mathcal{K}_i^{n,2} \cup \mathcal{K}_{i,1,2}^n, \quad (3.53)$$

por otro lado, las trayectorias de las áreas del lado negativo de \mathbf{Y} , se definen como

$$\partial\mathcal{K}_{n,i}^{(-)} = \mathcal{K}_{i,1,3}^n \cup \mathcal{K}_i^{n,2} \cup \mathcal{K}_{i,2,4}^n \cup \mathcal{K}_i^{n,1}, \quad (3.54)$$

en donde, los segmentos de curva están calculados mediante las Ec. (3.51) y la Ec. (3.52). Por simetría en el patrón de franjas y a partir de la Ec. (3.50), se deducen las siguientes propiedades de los ángulos que delimitan los segmentos de curvas

$$\theta_{i,q,1}^{n,p} = 2\pi - \theta_{i,q,4}^{n,p}, \quad \theta_{i,q,2}^{n,p} = 2\pi - \theta_{i,q,3}^{n,p}, \quad (3.55)$$

por lo que, si un ángulo $\theta_{i,q,r}^{n,p} = \pi$ entonces su simétrico vale lo mismo y puede unirse un área de los cuadrantes positivos con su correspondiente de los cuadrantes del lado negativo.

una de otra, incluso cuando parecen tocarse del lado positivo del eje \mathbf{X} , siguen siendo áreas separadas pues en ese caso $\theta_{i,1,2}^{n,1} = 0$ y su ángulo simétrico vale 2π por lo que se encuentran en los extremos opuestos del intervalo de θ , sin embargo, cuando $\theta_{i,1,2}^{n,1} = \pi$ el pegado puede continuar de forma directa en ambos lados del eje \mathbf{Y} , y por el sentido en que se definió el recorrido de los conjuntos $\partial\mathcal{K}_{n,i}^{(+)}$ y $\partial\mathcal{K}_{n,i}^{(-)}$, su unión $\partial\mathcal{K}_{n,i}$ es una curva cerrada sin dobleces ni autointersecciones.

Finalmente, por el desarrollo obtenido anteriormente, se sabe que los conjuntos $\partial\mathcal{K}_{n,i} \subseteq \mathcal{D}_n$, por lo que se puede aplicar a estos contornos la función \mathcal{P}_n definida en la Ec. (3.37), a partir de la ecuación en coordenadas polares de las rectas verticales dadas en Ec. (3.44) y sustituyendo la forma funcional de $\alpha(\rho)$ de la Ec. (3.16), se obtiene

$$\alpha(\rho_\theta) = \arctan \left[\frac{X_{q,i}}{a \cos \theta} \right] \quad (3.57)$$

que son los ángulos α mediante los cuales se proyectan los elementos de los trozos $\mathcal{K}_{i,q,r}^n$ de rectas en el plano de proyección, sobre los surcos del espejo tipo Fresnel y tienen imagen sobre el plano del cilindro, evaluando la Ec. (3.18) para los ángulos descritos por la Ec. (3.57) se obtiene,

$$\begin{aligned} (\alpha \circ z_{zil})(\rho_\theta) = & \left[\frac{2\varepsilon r_{cil} \Delta\mathcal{S}(n) + s_o [\varepsilon^2 + \Delta\mathcal{S}^2(n)] - 2\varepsilon^2 n \Delta\mathcal{S}(n)}{2a\varepsilon \Delta\mathcal{S}(n) \cos \theta + X_{q,i} [\varepsilon^2 - \Delta\mathcal{S}^2(n)]} \right] X_{q,i} + \\ & - \left[\frac{2\varepsilon n \Delta\mathcal{S}^2(n) + r_{cil} [\varepsilon^2 - \Delta\mathcal{S}^2(n)]}{X_{q,i} [\varepsilon^2 - \Delta\mathcal{S}^2(n)] + 2\varepsilon a \Delta\mathcal{S}(n) \cos \theta} \right] a \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.58)$$

de donde, se deduce que la imagen del trozo de recta $\mathcal{K}_{i,q,r}^n$ calculado en la Ec. (3.52), está dado por la expresión

$$\mathcal{J}_{i,q,r}^n = \mathcal{P}_n [\mathcal{K}_{i,q,r}^n] = \left\{ h_{i,q}^{(n)}(\theta) \mid \theta_{i,q,r}^{n,u} \leq \theta \leq \theta_{i,q,r}^{n,v} \right\} \quad (3.59)$$

donde, la curva parametrizada por el ángulo θ , está dada en términos de la Ec. (3.58) y la Ec. (3.37), resultando

$$h_{i,q}^{(n)}(\theta) = \left((-1)^{q+1} r_{cil} (\pi - \theta), (\alpha \circ z_{zil})(\rho_\theta) \right) \quad (3.60)$$

de la Ec. (3.39) se sabe que la imagen de los conjuntos $\mathcal{K}_{n,i}$ debe estar acotada en las áreas rectangulares sobre el plano del cilindro. Por lo que, transformando los trozos de curvas de la Ec. (3.51) se obtienen las rectas de la Ec. (3.40), representadas como

$$\mathcal{J}_i^{n,p} = \mathcal{P}_n [\mathcal{K}_i^{n,p}] = \left\{ h_{p,n}(\theta) \mid \theta_{i,s,t}^{n,p} \leq \theta \leq \theta_{i,u,v}^{n,p} \right\} \quad (3.61)$$

por lo tanto, el pegado de las curvas transformadas sobre la superficie del cilindro se deduce siguiendo

las mismas secuencias de las Ec. (3.53) y Ec. (3.54), obteniendo los siguientes contornos en el plano que envuelve el cilindro

$$\partial \mathcal{J}_{n,i} = \begin{cases} \mathcal{P}_n [\partial \mathcal{K}_{n,i}^{(+)}], \mathcal{P}_n [\partial \mathcal{K}_{n,i}^{(-)}] & \text{si } \theta_{i,1,2}^{p,1} \neq \pi, \\ \mathcal{P}_n [\partial \mathcal{K}_{n,i}^{(+)}] \cup \mathcal{P}_n [\partial \mathcal{K}_{n,i}^{(-)}] & \text{si } \theta_{i,1,2}^{p,1} = \pi, \end{cases} \quad (3.62)$$

los conjuntos descritos en esta ecuación describen el contorno de los conjuntos $\mathcal{J}_{n,i}$, que se observan en la Fig. 3.13, y de manera análoga a la discusión de la Ec. (3.32), se deduce que en general las intersecciones entre estos conjuntos existen y son distintos de \emptyset . En esta sección lo único que se ha obtenido es la función que mapea curvas cerradas que forman un patrón ordenado de franjas en el plano de proyección, sobre el cilindro colector, mediante las ecuaciones de reflexión para un espejo tipo Fresnel. A partir de estas ecuaciones se pueden construir patrones en el plano del cilindro para calcular pantallas nulas.

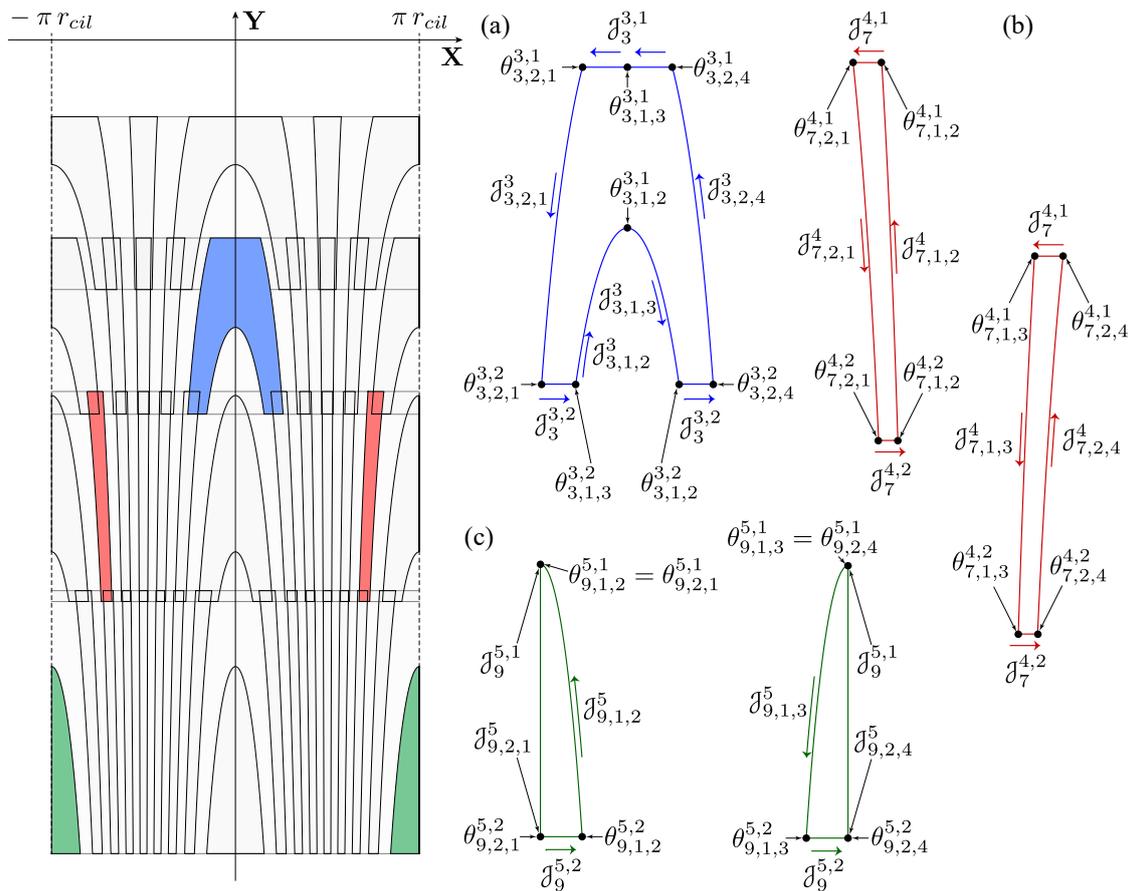


Fig. 3.13 Recorrido de las transformaciones de los contornos obtenidos en la Fig. 3.11. (a) Trayectoria que delimita a la franja que se fusiona en una sola. (b) Contorno para la franja separada en dos áreas. (c) Contorno de la franja dividida.

3.1.4 Construcción de pantallas nulas considerando un patrón de curvas cerradas

A partir de los conjuntos descritos en la Ec. (3.62), se generan las áreas mostradas en la Fig. 3.13, sin embargo, cuando se implementan estos patrones como prueba por pantallas nulas, es decir, cuando se calcula el inverso de las funciones \mathcal{P}_n definidas en la Ec. (3.19), que transforman los conjuntos de una pantalla cilíndrica sobre un plano de detección, se observa que para determinada sección asociada al n -ésimo surco, existen elementos que pueden interferir con la forma del conjunto $\mathcal{J}_{n,i}$ que se desea mapear sobre el plano de detección en este caso. En esta sección se discriminará entre estas áreas para minimizar el patrón sobre la pantalla cilíndrica tal que el patrón mapeado mediante las transformaciones inversas por surco, esté contenido en el patrón original.

En la Ec. (3.27) se demostró que únicamente para los surcos de los ordenes $n = m, m + 1, \dots, N$, corresponden áreas en el cilindro en donde pueden existir subconjuntos del patrón de franjas. Por otro lado, se tiene de las intersecciones descritas en la Ec. (3.48), que para la i -ésima franja del patrón existirán intersecciones a lo más, para estos surcos.

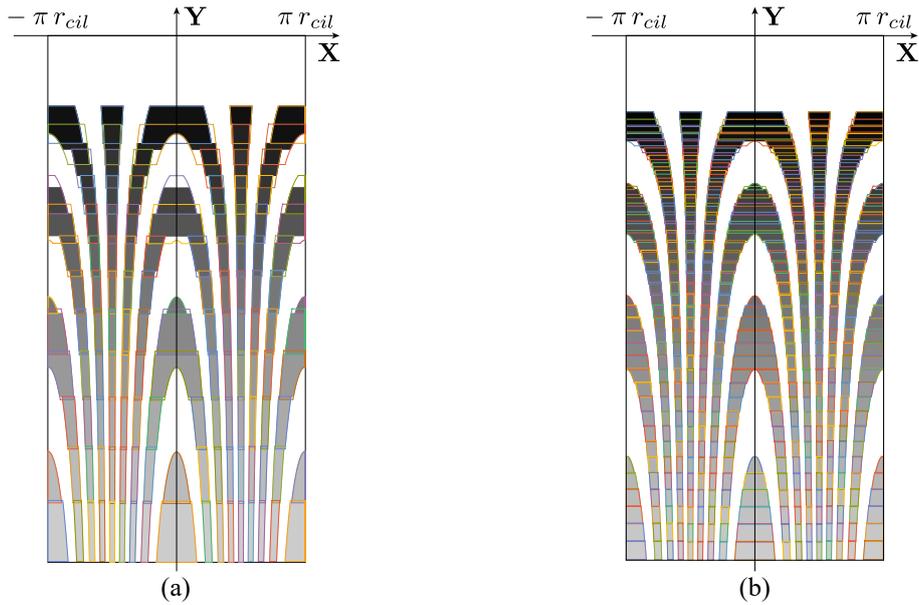


Fig. 3.14 Diagrama del plano de proyección, mapeado a través de una abertura puntual sobre el espejo tipo Fresnel y reflejado sobre un cilindro.

Por lo que, si se considera una franja arbitraria, se tiene la siguiente colección de intersecciones

$$\mathcal{J}_i = \{ \emptyset, \dots, \emptyset, \mathcal{J}_{w,i}, \mathcal{J}_{w+1,i}, \dots, \mathcal{J}_{N,i} \}, \quad (3.63)$$

que están asociados a los codominios \mathcal{C}_n , para $n = w, w + 1, \dots, N$, dados por la Ec. (3.38) para las funciones \mathcal{P}_n , entonces se elimina la información del área $\mathcal{J}_{k,i}$ que comparte con los codominios \mathcal{C}_n

para $n \neq k$, obteniendo la expresión

$$\mathcal{J}'_{k,i} = \mathcal{J}_{k,i} \setminus \bigcup_{\substack{n \neq k \\ n=m}}^N \mathcal{C}_n, \quad (3.64)$$

a continuación, a este conjunto se le agregan las áreas en donde comparte soluciones con los otros dominios, mostrados en el conjunto \mathcal{J}_i , con esto se asegura que si el elemento $\mathcal{J}_{k,i}$ tiene secciones que interfieren con otros surcos, entonces esta información también es eliminada, resultando

$$\mathcal{J}_{k,i}^{(min)} = \mathcal{J}'_{k,i} \cup \left\{ \bigcup_{n \neq k} \mathcal{J}_{n,i} \cap \mathcal{J}_{k,i} \right\}, \quad (3.65)$$

con esto, los conjuntos $\mathcal{J}_{k,i}^{(min)}$ denotan el área máxima de $\mathcal{J}_{k,i}$ que se puede considerar en una pantalla nula, pues se han eliminado los elementos que interfieren en las regiones rectangulares que corresponden a cada surco del espejo tipo Fresnel, con esto si se considera ahora el trazo del cilindro al plano de detección, se tendrá entonces un subconjunto del patrón construido en la Ec. (3.56).

Capítulo 4

Resultados en pruebas preliminares de superficies tipo Fresnel

En el Capítulo 2 se desarrollaron los métodos de construcción para un espejo tipo Fresnel y para una lente reflectora tipo Fresnel, a partir de superficies de referencia. Posteriormente se calcularon los trazos exactos de rayos para este tipo de superficies considerando un frente de onda plano incidente y una fuente puntual colocada a una distancia s'_o respectivamente, a partir de esto se propusieron los cálculos de las cáusticas para dichas superficies. Con base en estos resultados se desarrolló un método de construcción de pantallas nulas en el Capítulo 3, utilizando herramientas de topología para calcular el mapeo de cuerpos predefinidos en el plano de observación sobre una pantalla cilíndrica para la prueba de un espejo tipo Fresnel con simetría de revolución. A lo largo de este capítulo se presentan perspectivas del formalismo propuesto y algunos resultados experimentales obtenidos para distintas superficies de tipo Fresnel.

4.1 Resultados experimentales en la prueba de un espejo tipo Fresnel

En trabajos anteriores [36, 43] se presentó una prueba por pantallas nulas para un espejo tipo Fresnel considerando una pantalla cilíndrica colocada a lo largo del eje óptico y montando una cámara CCD a una distancia predefinida, de modo que el diámetro total del espejo bajo prueba pudiera ser observado completamente en el sensor CCD como un círculo inscrito en el lado menor del sensor. Tradicionalmente las pantallas nulas son formadas por arreglos no uniformes de puntos los cuales después del proceso de reflexión inciden sobre la superficie bajo prueba y se convierten en un arreglo uniforme de puntos en el plano de detección, únicamente si la superficie bajo prueba está libre de deformaciones y el arreglo está bien alineado.

Como se ilustra en la Fig. 4.1 (a) el diagrama del arreglo experimental que fue descrito anteriormente corresponde al que fue desarrollado en la Sección 3.1.1, por lo que las dimensiones a y b del arreglo pueden ser determinadas mediante de la Ec. (3.15) con la diferencia sustancial de que en este trabajo se

calculan los patrones no uniformes de la pantalla nula utilizando mapeos continuos de curvas cerradas y en la prueba mencionada se emplean conjuntos discretos de puntos.

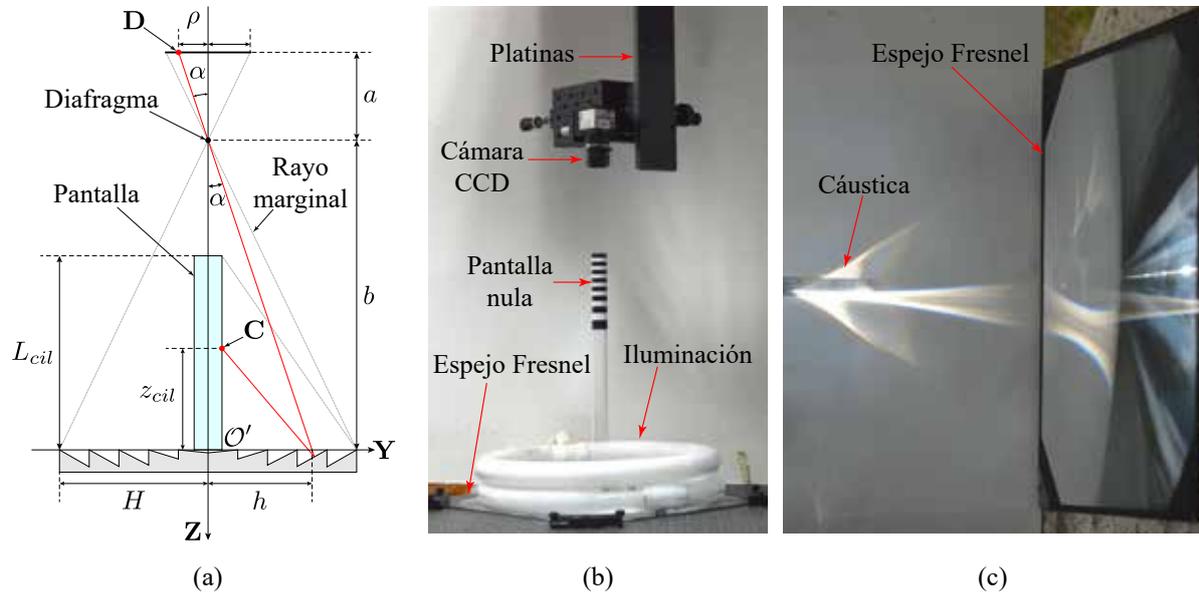


Fig. 4.1 (a) Diagrama del arreglo experimental. (b) Implementación de la prueba en el laboratorio de pruebas ópticas. (c) Imagen tomada de un corte de la superficie cáustica del espejo tipo Fresnel en el exterior.

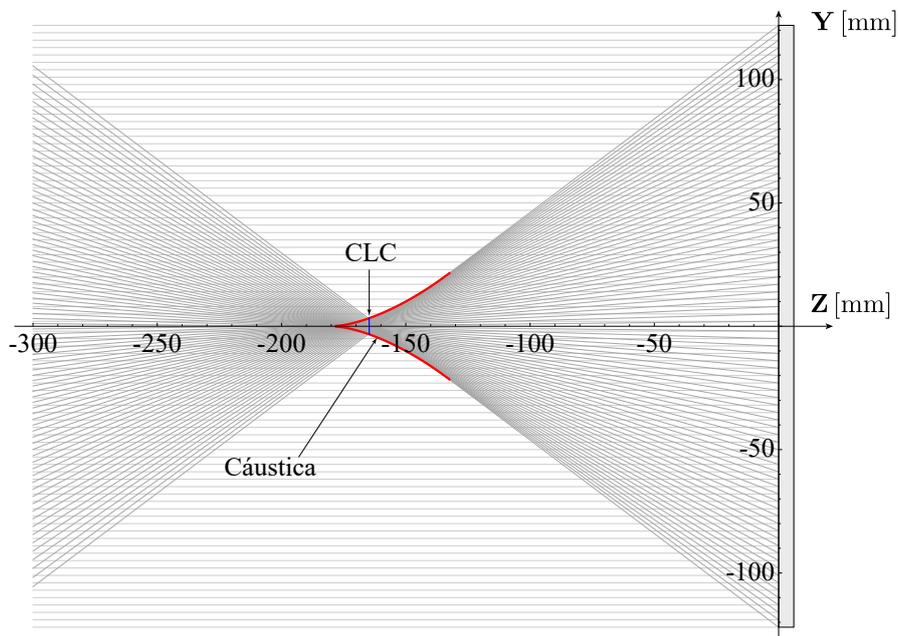


Fig. 4.2 Trazo exacto de rayos del espejo tipo Fresnel bajo prueba, con la cáustica resultante y el CLC.

En la Fig. 4.1 (b) se observa el arreglo experimental que fue implementado en un espejo comercial tipo Fresnel. Considérese el espejo utilizado en estas pruebas para el cual se muestra el trazo exacto

de rayos en la Fig. 4.2, que se puede modelar como un espejo cónico con constante de conicidad $k = -1.3$, y que está inmerso en aire, el diámetro del espejo considerado es de $D = 244.0$ mm, con un foco paraxial de $f = 178.0$ mm que fue medido en el exterior utilizando iluminación solar como se muestra en la Fig. 4.1 (c), por lo que se calcula un radio de curvatura de $R = -356.0$ mm (espejo cóncavo). Considerando una apertura de entrada de $H = \pm 122$ mm, y un total de $N = 732$ surcos sobre el diámetro del espejo, es decir, con una frecuencia de 3 surcos por mm, resultando un ancho de surco de $\varepsilon = 0.33$ mm.

A partir de los datos anteriores, se calcula para el espejo de la Fig. 4.2 que la eficiencia ideal dada por la Ec. (2.40) respecto del total de apertura de entrada es del $\eta_f = 92.81\%$, implementando las expresiones para calcular el círculo de mínima confusión de la Ec. (2.50), se determina que el radio del CLC está dado por $\mathcal{Y}_{clc} = 3.28$ mm, por lo tanto, para obtener el mejor factor de concentración, se debe fijar el colector a una distancia de $\mathcal{Z}_{clc} = -164.71$ mm obtenida de la Ec. (2.49) con lo cual resulta un factor de concentración geométrica de 37.16 veces la amplificación de radiación solar captada por unidad de área.

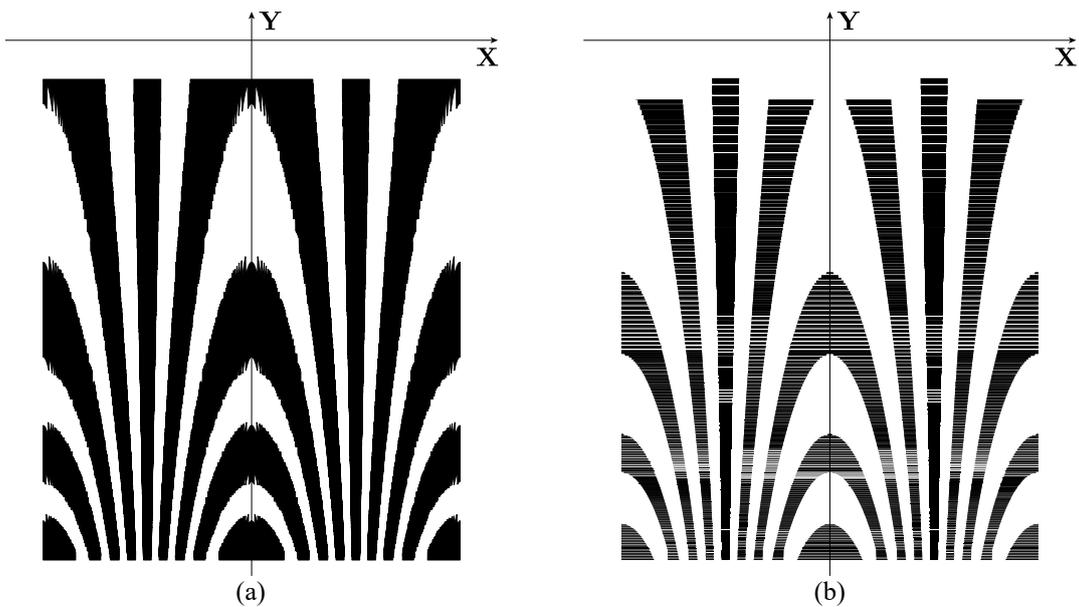


Fig. 4.3 (a) Pantalla nula calculada por mapeo de puntos. (b) Pantalla calculada con el método actual de curvas.

Considerando el arreglo de la Fig. 4.1 (a) para una longitud del lado menor del sensor rectangular de $l = 4.762$ mm, y con una cámara CCD de distancia focal de $a = 8$ mm, para inscribir el diámetro total del espejo tipo Fresnel en el sensor, se calcula la distancia del borde del espejo al diafragma de la cámara como $b = 409.9$ mm. Con estos datos se calculó la pantalla mostrada en la Fig. 4.3 (a) a partir del método de mapeo de puntos, los cuales son definidos en el plano de detección como una colección discreta de puntos que están ordenados por cada franja, después de calcular sus imágenes bajo la función \mathcal{P} de la Ec. (3.19) se unen resultando estos polígonos cortados. Por otro lado, se muestra en la Fig. 4.3 (b) la pantalla que resulta con el método de mapeo continuo de contornos después de

eliminar la información redundante con el algoritmo presentado en la Ec. (3.65), de ahí que existan secciones en donde se cortan los patrones.

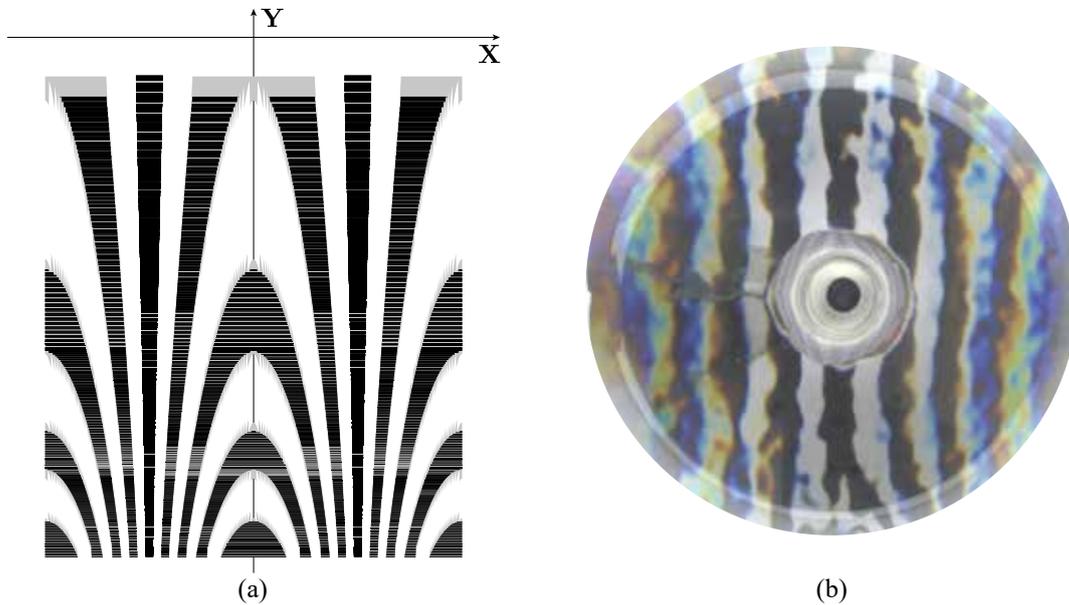


Fig. 4.4 (a) Comparación entre pantallas calculadas con distintos métodos. (b) Resultados experimentales para la pantalla de la Fig. 4.3 (a).

Se muestra en la Fig. 4.4 (a), la superposición de las pantallas de la Fig. 4.3 donde se observa que la pantalla (a) del método de puntos contiene a la pantalla (b), por lo que el método propuesto en el Capítulo 3, en efecto elimina información que se determinó mediante álgebra de conjuntos que era redundante en el sentido de que el mapeo inverso del patrón no uniforme en la pantalla de detección no estuviera definido. En otras palabras, se presenta este método como una solución al algoritmo de pegado de curvas en la pantalla nula para un espejo tipo Fresnel, pues los picos de la pantalla (a) resultan del hecho que se pierde información en los elementos que no se consideran si se utiliza un conjunto discreto, además, como se mostró anteriormente la familia completa de surcos del espejo no representa una deformación continua como lo haría una superficie suave, por lo que se debe definir una topología por cada surco del espejo para poder obtener este mapeo continuo que resulta en (b). Por otro lado, en la Fig. 4.4 (b) se presentan los resultados experimentales de la pantalla mostrada en la Fig. 4.3 (a), donde se observan diferencias importantes de grosor entre las franjas negras y las blancas, más allá de que la superficie presenta deformaciones se infiere que esta diferencia de grosores proviene de los errores en el pegado de curvas considerando el conjunto discreto de la pantalla (a).

En la Fig. 4.5 se muestra el trazo de rayos para un espejo ideal, en el que se ha reducido el radio del círculo de mínima confusión, fijando la condición $\mathcal{V}_{clc} = \varepsilon/2$, es decir, que el radio del CLC sea de la mitad del ancho de surco, el cual representa un valor límite, pues al reflejarse un haz de rayos paralelos por cada surco, no se puede reducir la zona de mayor concentración debajo de este orden de magnitud. Fijando los datos del espejo anterior $D = 244.0$ mm, $R = -356.0$ mm, $\varepsilon = 0.33$ mm, se calcula

númericamente una constante de conicidad $k = -2.87$. Con estos datos se obtiene una distancia del borde del espejo al colector de $Z_{clc} = -177.75$ mm, la eficiencia ideal es del $\eta_f = 93.45\%$ y el factor de concentración geométrica es de 642.10 veces la radiación solar captada por área. En general, este espejo representa una optimización del espejo comercial tipo Fresnel mostrado en la Fig. 4.2 considerando las mismas dimensiones.

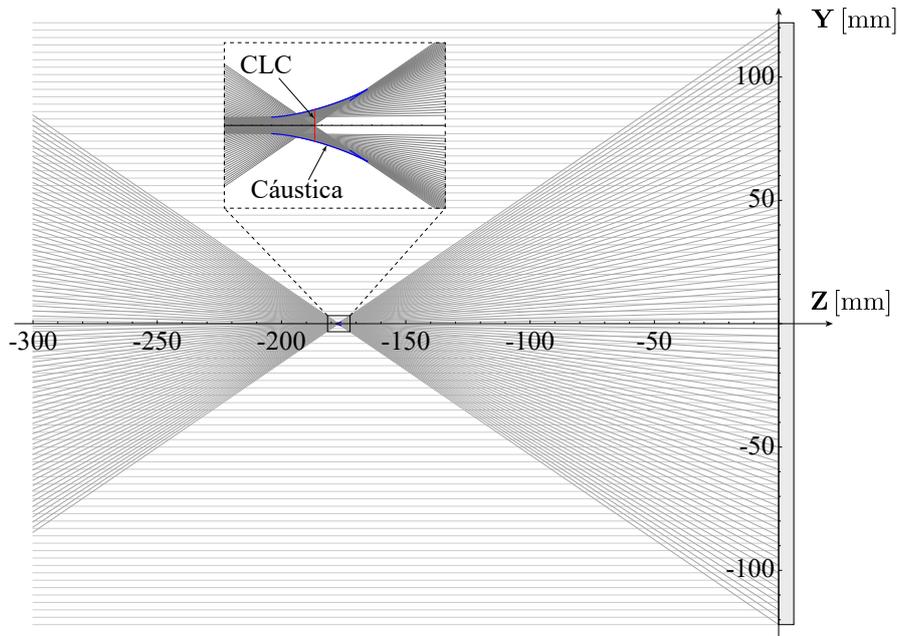


Fig. 4.5 Trazo exacto de rayos de un espejo tipo Fresnel que se diseña bajo la condición $\mathcal{Y}_{clc} = \varepsilon$, con la cáustica resultante y el CLC.

4.2 Resultados experimentales en lentes de Fresnel

En la Sección 4.1 se infirió que el método de mapeo de contornos presentado en este trabajo es una solución al problema de definir un mapeo continuo de una superficie de Fresnel, para calcular pantallas nulas cilíndricas, esto proviene de los resultados que se muestran en esta sección, siguiendo la misma metodología se definen los contornos de la Sección 3.1.3 para el plano de detección en el arreglo experimental de una lente de Fresnel, para este caso se calcula de manera análoga que para el espejo pero por refracción el mapeo de contornos cerrados en un plano que se encuentra antes de la lente de Fresnel y que tiene su misma apertura de entrada.

En la Fig. 4.6 se muestra el arreglo experimental para la prueba por pantallas nulas de una lente de Fresnel, conformado por un láser He-Ne ($\lambda = 633$ nm), dos polarizadores que se colocan cerca de la salida del haz del láser para controlar la cantidad de irradiancia que incide en el sensor CCD, se ha implementado una lente colimadora con distancia focal grande para reducir la concentración de luz en el centro del sensor CCD con $l = 4.76$ mm, se ha definido un patrón de 13 franjas para calcular la

pantalla nula que es impresa en una hoja de acetato y es colocada en la pupila de entrada, el sensor CCD se colocada a una distancia z_0 con respecto al eje óptico del borde de la lente bajo prueba, de modo que la apertura de la lente coincide con el lado menor del sensor CCD.

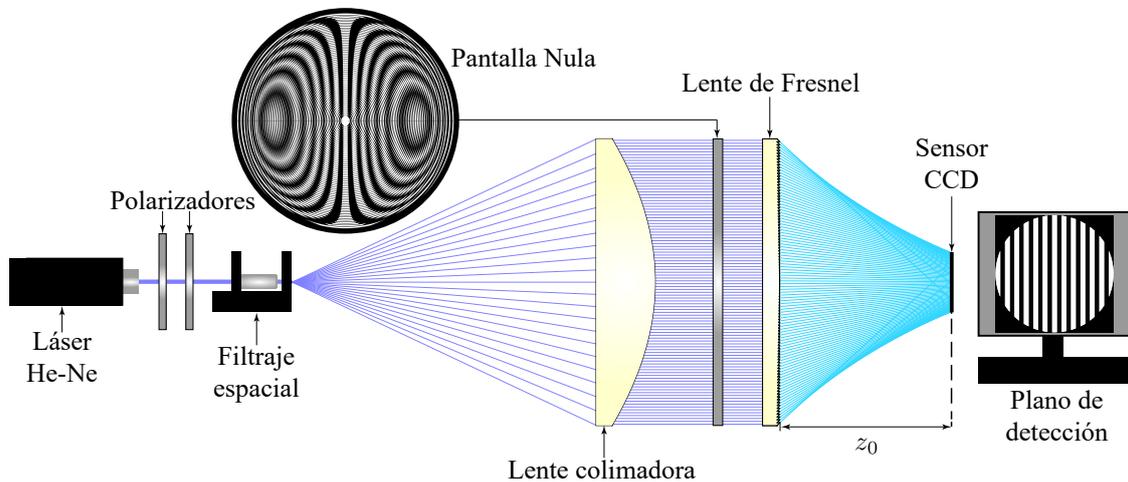


Fig. 4.6 (a) Diagrama del arreglo experimental para la prueba por pantallas nulas para una lente de Fresnel.

Implementando esta prueba por pantallas nulas para una lente tipo Fresnel de catálogo Thorlabs FRP125, con $D = 25.4$ mm, $f = 25.4$ mm, $t = 1.5$ mm, $R = 12.25$ mm, $k = -1.29$, $n_i = 1.5$, se obtienen los siguientes resultados.

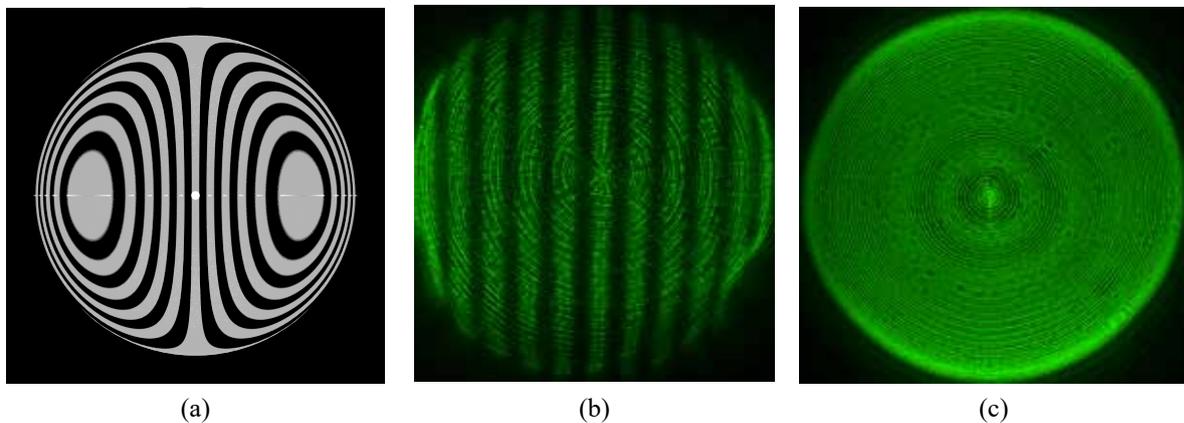


Fig. 4.7 (a) Pantalla nula tipo Fresnel. (b) Resultado experimental en z_0 . (c) Lente sin máscara.

En la Fig. 4.7 (a) se muestra la pantalla nula calculada con el método de mapeo de contornos para un patrón de 13 franjas blancas, en la Fig. 4.7 (b) se observa el resultado experimental en la posición de diseño, que si bien no es un resultado completamente satisfactorio se observa cómo las franjas tienen secciones bien formadas, principalmente en el centro de la lente pero como se observa en la Fig. 4.7 (c), cuando se quita la pantalla de la pupila de entrada se observan las deformaciones y algunos granos dentro de los surcos, que podrían estar afectando al patrón.

Implementando la prueba por pantallas nulas para una lente tipo Fresnel de catálogo, con $D = 50.8$ mm, $f = 20.54$ mm, $t = 1.5$ mm, $R = 24.99$ mm, $k = -0.98$, $n_i = 1.49$, con $z_0 = 37$ mm se obtienen los siguientes resultados.

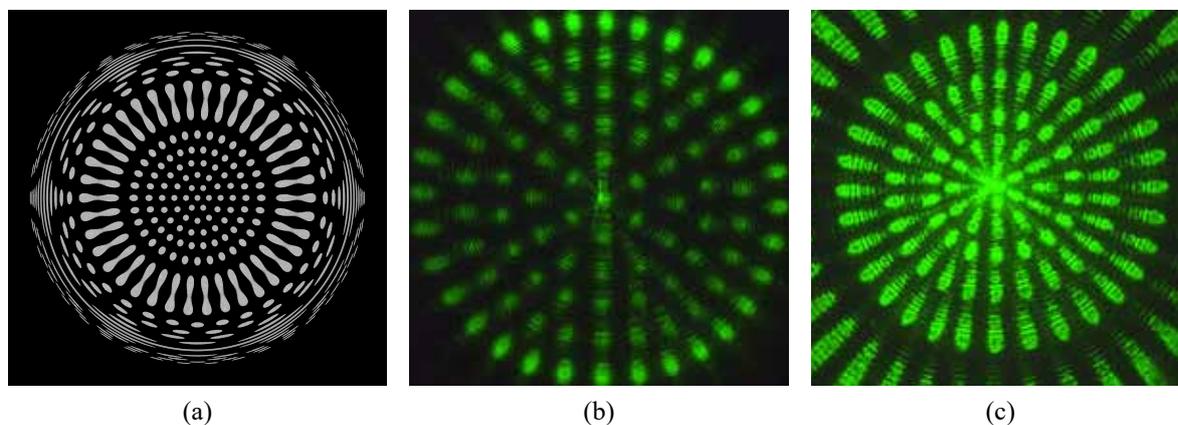


Fig. 4.8 (a) Pantalla nula tipo Fresnel. (b) Resultado experimental en z_0 . (c) Patrón deformado fuera de la posición de diseño.

En la Fig. 4.8 (a) se muestra la pantalla nula calculada con el método de mapeo de contornos para un patrón de 13 manchas sobre el eje vertical, en la Fig. 4.8 (b) se observa el resultado experimental en la posición de diseño el cual se ajusta muy bien al patrón esperado, esta prueba fue más reciente y para este resultado se ajustaron los parámetros de la lente midiendo experimentalmente el CLC, por lo que la prueba es demasiado sensible, finalmente la Fig. 4.7 (c) muestra cómo se deforma el patrón cuando se sale de la posición de diseño z_0 . Aunque cabe mencionar que esta superficie al ser del doble de tamaño que la anterior presentó menos defectos de fabricación.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

Las representaciones paramétricas dadas en este trabajo para superficies tipo Fresnel han permitido desarrollar un método de cálculo de trazo de rayos simplificado, considerando parametrizaciones con respecto del número de surco, y a partir de estos resultados, se obtuvieron ecuaciones para inducir una definición de la distancia focal de un espejo tipo Fresnel, un parámetro paraxial. Por otro lado, se obtuvieron expresiones sencillas para calcular el círculo de mínima confusión, representar la eficiencia de un espejo tipo Fresnel y mediante este formalismo obtener un nuevo método de prueba de superficies tipo Fresnel.

El método propuesto en este trabajo tiene la ventaja de poder definir con detalle el funcionamiento de cada surco de superficies tipo Fresnel, mediante la definición de topologías para cada surco en donde se puede calcular la deformación continua de un patrón predefinido de contornos en el plano de detección para poder determinar sus imágenes bajo el mapeo y poder obtener los patrones no uniformes de la pantalla cilíndrica que se transforma en un patrón nulo cuando se eliminan los componentes que no tienen imagen en el plano de detección bajo el mapeo inverso. Como se observa en los resultados experimentales presentados para una lente tipo Fresnel, este método prueba ser efectivo si se tienen bien definidos los parámetros de la superficie bajo prueba, pues el método es muy sensible.

En el futuro se espera obtener resultados experimentales cuantitativos de este método para poder hacer la reconstrucción de la superficie y eventualmente poder construir prototipos de estas superficies tipo Fresnel.

Apéndice A

Convención de signos para el trazo de rayos en espejos esféricos

En este apéndice se definirá la convención signos utilizada a lo largo de este trabajo, tomada del libro de Óptica de Eugene Hecht [37]. La aproximación paraxial es una ecuación que relaciona los puntos conjugados objeto s_o e imagen s_i , en la fórmula de los espejos

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{R}{2} = \frac{1}{f},$$

que es igualmente aplicable para espejos cóncavos ($R < 0$) y convexos ($R > 0$). El radio de las dimensiones transversales de la imagen final formada por el espejo para las dimensiones de un objeto fijo se define como amplificación transversal

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o}.$$

A continuación se muestra la convención de signos en función de las cantidades que aquí se han definido.

Tabla A.1 Convención de signos para espejos esféricos.

Cantidad	Signo	
	+	-
s_o	A la izquierda de V , objeto real	A la derecha de V , objeto virtual
s_i	A la izquierda de V , imagen real	A la derecha de V , imagen virtual
f	Espejo cóncavo	Espejo convexo
R	C a la derecha de V , convexo	C a la izquierda de V , cóncavo
y_o	Arriba del eje, objeto derecho	Debajo del eje, objeto invertido
y_i	Arriba del eje, imagen derecha	Debajo del eje, imagen invertida

En las Figs. A.1 A.2 se ilustra la convención de signos de la Tabla A.1 y a partir de lo anterior en la Tabla A.2 se estudia la naturaleza de las imágenes formadas por espejos esféricos.

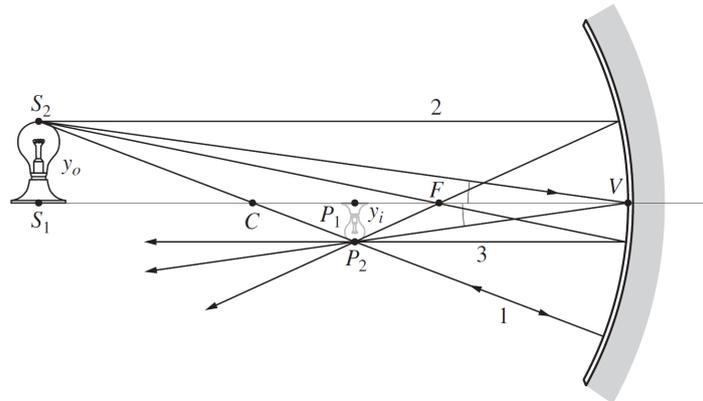


Fig. A.1 Formación de imagen para espejos esféricos cóncavos [37].

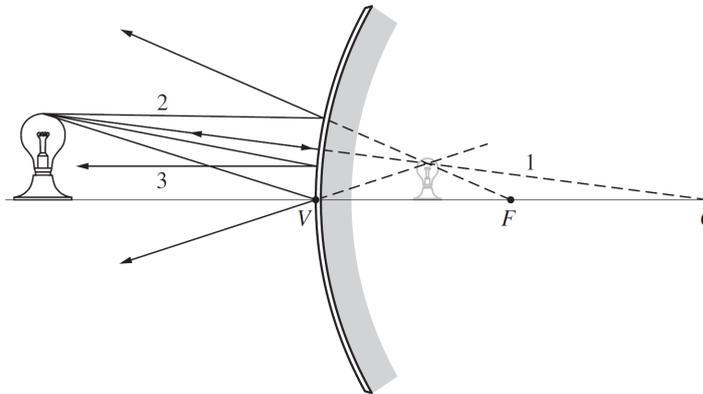


Fig. A.2 Formación de imagen para espejos esféricos convexos [37].

Tabla A.2 Imágenes de objetos reales formadas por espejos esféricos.

Cóncavo				
Objeto	Imagen			
Localización	Tipo	Localización	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertido	Reducido
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertido	Igual
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertido	Aumentado
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecho	Aumentado
Convexo				
Objeto	Imagen			
Localización	Tipo	Localización	Orientación	Tamaño relativo
Cualquiera	Virtual	$ s_i < f $	Derecho	Reducido
		$s_o > s_i $		

Apéndice B

Conceptos de espacios métricos y de topología

En este apéndice se hará énfasis en algunos conceptos que fueron útiles en el cálculo de pantallas nulas de espacios métricos y de topología [44–47].

B.1 Imágenes directas e inversas

Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo, y sean A, C subconjuntos de X, Y respectivamente.

Definición B.1 La imagen directa $f(A)$ de A bajo f es el subconjunto de Y dado por

$$\{y \in Y \mid y = f(a) \text{ para } a \in A\}.$$

Definición B.2 La imagen inversa $f^{-1}(C)$ de C bajo f es el subconjunto de X dado por

$$\{x \in X \mid f(x) \in C\}.$$

Proposición B.1 Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es invertible si y sólo si es biyectivo.

B.2 Espacio métrico

Definición B.3 Un espacio métrico consiste de un conjunto X y una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$; y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Para todo $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición B.4 Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$, y $r > 0$ un número real. La bola abierta en X de radio r centrada en x_0 es el conjunto

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

B.3 Conjuntos abiertos y cerrados en un espacio métrico X

Definición B.5 Sea (X, d) un espacio métrico y $U \subseteq X$. Se dice que U es abierto si X para cada $x \in U$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(x) \subseteq U$.

Definición B.6 Un subconjunto V de un espacio métrico X es cerrado en X si $X \setminus V$ es abierto en el espacio X .

Definición B.7 La intersección de una familia cualquiera de conjuntos donde cada uno es cerrado en X es también cerrado en X .

Proposición B.2 Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo. Entonces f es continuo si y sólo si $f^{-1}(V)$ es cerrado en X cuando V es cerrado en Y .

Definición B.8 Suponga que A es un subconjunto de un espacio métrico X , y $x \in X$. Se dice que x es un punto de cerradura de A en X si dado $\epsilon > 0$ se tiene $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. La cerradura \bar{A} de A en X es el conjunto de todos los puntos de cerradura de A en X .

Ejemplo B.1 La cerradura de $B_1((0, 0))$ en \mathbb{R}^2 es $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x, 0) \leq 1\}$.

Definición B.9 El interior $\overset{\circ}{A}$ de un subconjunto A en un espacio métrico X es el conjunto de puntos $a \in A$ tales que $B_\epsilon(a) \subseteq A$ para algún $\epsilon > 0$.

Definición B.10 La frontera ∂A de un subconjunto A en un espacio métrico X es el conjunto $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Ejemplo B.2 La frontera de $B_1((0, 0))$ en \mathbb{R}^2 es $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x, 0) = 1\}$.

B.4 Espacio topológico

Definición B.11 Un espacio topológico $T = (X, \mathcal{T})$ consiste de un conjunto X no vacío junto con una familia determinada \mathcal{T} de subconjuntos de X que satisfacen:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. La intersección de cualquiera dos conjuntos en \mathcal{T} está en \mathcal{T} .
3. La unión de cualquier colección de conjuntos en \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Definición B.12 Se dice que un mapeo $f : X \rightarrow Y$ de espacios topológicos (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) es continuo si $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$. Es decir, se dice que f es $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$ -continua.

Bibliografía

- [1] R. Almanza, A. Lentz, and G. Jiménez, “Receiver behavior in direct steam generation with parabolic troughs,” **61**, 275–278 (1998).
- [2] V. Flores and R. Almanza, “Direct steam generation in parabolic trough concentrators with bimetallic receivers,” **29**, 645–651 (2004).
- [3] R. Almanza, G. Jiménez, A. Lentz, A. Valdés, and A. Soria, “DSG Under Two-Phase and Stratified Flow in a Steel Receiver of a Parabolic Trough Collector,” **124** (2002).
- [4] *Solar Energy Perspectives* (International Energy Agency, 2011).
- [5] M. Avendaño-Alejo, “Caustic and wavefronts produced by arbitrary reflecting surfaces,” in *Frontiers in Optics 2016*, p. JTh2A.28 (Optical Society of America, 2016). URL <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=FiO-2016-JTh2A.28>.
- [6] O. N. Stavroudis, *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics, The K-function and its Ramifications* (Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006).
- [7] D. L. Shealy and J. A. Hoffnagle, “Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface,” *J. Opt. Soc. Am. A* **25**(9), 2370–2382 (2008).
- [8] J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, “Refracting the k-function: Stavroudis’s solution to the eikonal equation for multielement optical systems,” *J. Opt. Soc. Am. A* **28**(6), 1312–1321 (2011).
- [9] S. Maca-García, M. Avendaño-Alejo, and L. Castañeda, “Caustics in a meridional plane produced by concave conic mirrors,” *J. Opt. Soc. Am. A* **29**(9), 1977–1985 (2012). URL <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-29-9-1977>.
- [10] M. Avendaño-Alejo, D. González-Utrera, and L. Castañeda, “Caustics in a meridional plane produced by plano-convex conic lenses,” *J. Opt. Soc. Am. A* **28**(12), 2619–2628 (2011).
- [11] J. Castro-Ramos, M. Marciano-Melchor, M. Marcelino-Aranda, E. Román-Hernández, J. G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza, R. Suárez-Xique, and J. M. Zárate-Paz, “Wavefronts, caustics, and ronchigrams of a spherical wave reflected by a spherical mirror,” *J. Opt. Soc. Am. A* **30**(2), 177–188 (2013).
- [12] M. Avendaño-Alejo, “Caustics in a meridional plane produced by plano-convex aspheric lenses,” *J. Opt. Soc. Am. A* **30**(3), 501–508 (2013).
- [13] R. Pederson and E. K. May, “Flow instability during direct steam generation in a line-focus solar-collector system,” **83**, 20,404 (1982).
- [14] O. Goebel and K. Hennecke, “Investigation of Thermohydraulic in Parabolic Trough Absorber Tube with Direct Steam Generation (DSG),” in *Solar Thermal Concentrating Technologies*, M. Becker and M. Böhmer, eds., vol. 2, pp. 787–813 (8th International Symposium, 1997).

- [15] O. Goebel, "Modelling of Two Phase Stratified and Annular Flow in Heated Horizontal Tubes," pp. 303–310, International Engineering Foundation 3rd Conference (Taylor and Francis, 1997).
- [16] M. Avendaño-Alejo, "Design of Fresnel Lenses by Using Arbitrary Surfaces," in *Latin America Optics and Photonics Conference*, p. LTh3C.1 (Optical Society of America, 2016). URL <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=LAOP-2016-LTh3C.1>.
- [17] D. F. Vanderwerf, "Approximating the Fresnel lens," *Electro-optical Systems Design* **14**, 47–51 (1982).
- [18] D. F. Vanderwerf, "Ghost-image analysis of Fresnel lens doublet," (1990). URL <https://doi.org/10.1117/12.22674>.
- [19] Y. A. Dudnikov, "The design of a large-diameter Fresnel condenser from Fresnel lenses," *Sov. J. Opt. Technol.* **45**(5), 451–454 (1975).
- [20] S. Shanmugam, "Design of a linear Fresnel lens system for solar photovoltaic electrical power source," (2001). URL <https://doi.org/10.1117/12.444226>.
- [21] E. Lorenzo and A. Luque, "Fresnel lens analysis for solar energy applications," *Appl. Opt.* **20**(17), 2941–2945 (1981).
- [22] R. Leutz, A. Suzuki, A. Akisawa, and T. Kashiwagi, "Design of a nonimaging Fresnel lens for solar concentrators," **65**, 379–387 (1999).
- [23] M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe, "Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen," *Appl. Opt.* **47**(6), 849–859 (2008). URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-47-6-849>.
- [24] M. Campos-García, R. Díaz-Uribe, and F. Granados-Agustín, "Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources," *Appl. Opt.* **43**(34), 6255–6264 (2004). URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-43-34-6255>.
- [25] R. Díaz-Uribe, R. Bolado-Gómez, M. Campos-García, and M. Avendaño-Alejo, "Medium precision optical testing of a fast concave elliptical mirror by a cylindrical null screen," (2006). URL <https://doi.org/10.1117/12.668118>.
- [26] R. Díaz-Uribe, "Medium-precision null-screen testing of off-axis parabolic mirrors for segmented primary telescope optics: the Large Millimeter Telescope," *Appl. Opt.* **39**(16), 2790–2804 (2000).
- [27] M. Avendaño-Alejo and R. Díaz-Uribe, "Testing a fast off-axis parabolic mirror by using tilted null screens," *Appl. Opt.* **45**(12), 2607–2614 (2006).
- [28] D. Malacara and A. Cornejo, "Null Ronchi Test for Aspherical Surfaces," *Appl. Opt.* **13**(8), 1778–1780 (1974).
- [29] D. M.-H. Juan Manuel Lopez-Ramirez, Daniel Malacara-Doblado, "New simple geometrical test for aspheric lenses and mirrors," *Optical Engineering* **39**, 39 – 39 – 6 (2000).
- [30] M. Avendaño-Alejo, V. I. Moreno-Oliva, M. Campos-García, and R. Díaz-Uribe, "Quantitative evaluation of an off-axis parabolic mirror by using a tilted null screen," *Appl. Opt.* **48**(5), 1008–1015 (2009).
- [31] M. Avendaño-Alejo, G. Santiago-Castillo, M. Campos-García, I. Moreno-Oliva, and R. Díaz-Uribe, "Null Ronchi-Hartmann test for an aspheric concave mirror," (2013).

- [32] A. Cordero-Davila, A. Cornejo-Rodriguez, and O. Cardona-Nunez, “Null Hartmann and Ronchi-Hartmann tests,” *Appl. Opt.* **29**(31), 4618–4621 (1990).
- [33] A. Cornejo-Rodriguez, H. J. Caulfield, and W. Friday, “Testing of optical surfaces: a bibliography,” *Appl. Opt.* **20**(24), 4148–4148 (1981).
- [34] G. Castillo-Santiago, D. Castán-Ricaño, M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and R. Díaz-Uribe, “Design of Hartmann type null screens for testing a plano-convex aspheric lens with a CCD sensor inside the caustic,” *Opt. Express* **24**(17), 19,405–19,416 (2016).
- [35] D. Castán-Ricaño, F. S. Granados-Agustín, E. Percino-Zacarías, and A. Cornejo-Rodríguez, “Evaluation of a plano-convex aspherical lens using a point diffraction interferometer.” in *Optical Design and Fabrication 2017 (Freeform, IODC, OFT)*, p. JTU5A.30 (Optical Society of America, 2017).
- [36] M. Jiménez-Rodríguez, M. Avendaño-Alejo, L. E. Verduzco-Grajeda, A. I. Martínez-Enríquez, R. García-Díaz, and R. Díaz-Uribe, “Design of a solar concentrator considering arbitrary surfaces,” in *Optifab 2017*, J. L. Bentley and S. Stoebenau, eds., vol. 10448, pp. 535 – 541, International Society for Optics and Photonics (SPIE, 2017). URL <https://doi.org/10.1117/12.2279876>.
- [37] E. Hecht, *Optics, Global Edition* (Pearson Education Limited, 2016). URL <https://books.google.com.mx/books?id=kv4yDQAAQBAJ>.
- [38] M. Avendaño-Alejo, “Caustics in a meridional plane produced by plano-convex aspheric lenses,” *J. Opt. Soc. Am. A* **30**(3), 501–508 (2013). URL <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-30-3-501>.
- [39] M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and I. Moreno, “Properties of caustics produced by a positive lens: meridional rays,” *J. Opt. Soc. Am. A* **27**(10), 2252–2260 (2010). URL <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-27-10-2252>.
- [40] G. Castillo-Santiago, D. Castán-Ricaño, M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and R. Díaz-Uribe, “Design of Hartmann type null screens for testing a plano-convex aspheric lens with a CCD sensor inside the caustic,” *Opt. Express* **24**(17), 19,405–19,416 (2016). URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-17-19405>.
- [41] M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and I. Moreno, “Exact wavefronts and caustic surfaces produced by planar ripple lenses,” *Opt. Express* **23**(17), 21,637–21,649 (2015). URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-23-17-21637>.
- [42] D. Vanderwerf, *Applied Prismatic and Reflective Optics*, SPIE Press monograph (SPIE Press, 2010). URL <https://books.google.com.mx/books?id=XZGuSQAACAAJ>.
- [43] M. Jiménez-Rodríguez, M. Avendaño-Alejo, M. C. López-Bautista, G. Castillo-Santiago, F. M. Arriaga, R. Almanza-Salgado, and F. Gutiérrez-Martínez, “Design and testing of a Fresnel mirror for solar energy,” in *Nonimaging Optics: Efficient Design for Illumination and Solar Concentration XVI*, R. Winston and E. Yablonovitch, eds., vol. 11120, pp. 149 – 156, International Society for Optics and Photonics (SPIE, 2019). URL <https://doi.org/10.1117/12.2529514>.
- [44] W. Sutherland and W. Sutherland, *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Open university set book (Clarendon Press, 1975). URL <https://books.google.com.mx/books?id=xbL11KfgiEAC>.
- [45] M. Reid and B. Szendrői, *Geometry and Topology* (Cambridge University Press, 2005). URL <https://books.google.com.mx/books?id=6TjrjQEACAAJ>.

- [46] J. Marsden and A. Tromba, *Vector Calculus*, v. 1 (W.H. Freeman, 1996). URL <https://books.google.com.mx/books?id=3m64QgAACAAJ>.
- [47] J. Munkres, *Topology*, Cram 101 (Academic Internet Pub Incorporated, 2009). URL <https://books.google.com.mx/books?id=moOBwgEACAAJ>.