UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

ESTUDIO DE LOS ESPACIOS COMPACTOS CON UNA FAMILIA DE RETRACCIONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CENOBIO YESCAS APARICIO

TUTOR:
DR. SALVADOR GARCÍA FERREIRA
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
DR. DANIEL JUAN PINEDA
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

MORELIA, MICHOACÁN. DICIEMBRE, 2020

Índice general

Resumen II

Agradecimientos III

Introducción IV

1. Preliminares 1

1.1. Notación, conceptos básicos y convenciones . . . 1

1.2. Espacios compactos de Valdivia y de Corson . . . 2

1.3. r-esqueletos . . . 5

1.3.1. Límites Inversos . . . 9

1.3.2. Funciones ω-monótonas . . . 14

1.3.3. c-esqueletos . . . 16

1.3.4. Árboles especiales con r-esqueleto . . . 17

1.3.5. Espacios linealmente ordenados . . . 19

2. Espacios cero dimensionales y r-esqueletos 22

3. El Duplicado de Alexandroff y los r-esqueletos 26

4. Subespacios compactos de $[0,1]^T$ con r-esqueletos 42

5. Familias de cerrados y r-esqueletos 54

6. Comentarios finales 64

Bibliografía 66

Resumen

Este trabajo de investigación tiene como tema central el estudio de los espacios compactos que admiten r-esqueleto. De manera general, podemos decir que un r-esqueleto sobre un espacio X es una familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ donde las retracciones satisfacen condiciones de conmutatividad, metrizabilidad, convergencia y densidad. Con la noción de r-esqueleto se obtuvieron resultados tales como:

• La caracterización de los espacios compactos con r-esqueleto cuyo Duplicado de Alexandroff admite un r-esqueleto. Del cual pudimos obtener nuevos ejemplos de espacios compactos con r-esqueleto, además, pudimos obtener condiciones de cuando un espacio compacto de Valdivia puede tener Duplicado de Alexandroff Valdivia, esto lo describimos con el lenguaje de r-esqueletos.

• Avances sobre el estudio centrado en la cardinalidad de las imágenes de las retracciones de un r-esqueleto sobre un espacio compacto, en particular, obtuvimos que si X es un espacio compacto cero dimensional que admite un r-esqueleto cuyas retracciones tienen imágenes numerables, entonces existe un subespacio denso en X consistente de puntos aislados de X.

• La introducción de la noción de π-*esqueleto* con la cual pudimos obtener una nueva descripción de los subespacios compactos de $[0,1]^T$ que admiten r-esqueleto, lo cual nos permite estudiar, de manera general, los espacios compactos que admiten un r-esqueleto dentro de un cubo, en analogía al Σ-producto, esto nos ofrece nuevas herramientas topológicas para el estudio de dichos espacios.

• La introducción del concepto de *c-esqueleto débil* con la cual se obtienen descripciones de los espacios compactos con r-esqueleto en términos de familias de subconjuntos cerrados y asignaciones de vecindades.

Palabras clave: r-esqueleto, compactos de Valdivia, π-esqueleto, c-esqueleto débil, Duplicado de Alexandroff.

Agradecimientos

Lo yishi nga chhayalalla wia xhkuelhnhu beni guklhen wazed chia nha lezklha nu bishi lwellaga len dabazichia.

Zolhowa wia xhkuenhenhu, beni guk xhana, beni blhidi nhada, beni guka lo nha, nzi, Salvador García, leguen guke blho ba chhachhiaga llin blanha. Dazan da bzeda len lege.

Na chhayalalla wia xhkuenhenhu, beni blho balhede yishi dan bziaga na bzua llinan benha, legake nhake: Fernando Hernández, Fidel Casarrubias, Reynaldo Rojas nha Ángel Tamariz. Xhkuentelhi ba benli lhataj bwialhi llin chia.

Lez klha wia xhkuelhenhu benin wlla lo yoo wazed nzi CCM-UNAM. Xhan yoo wazed lo xhopi yiz wlhalla nhi, nzi Daniel Xhua. Lezklha lhia Lid Kuzalh, leguen blanhe lo yoo yishi chhalhedchu. Lhia Morelia Alvarez, legue nhak zaklhban che lo yo wazed. Lez klha chhayalalla nia che lo yo wazed chhnhegake UMSNH, beni nzi Salomon Borjas ba guknhelhe kuz nha lezklha Catalina, na yoo wazed nhi benin lhataj wxhia mechhu che dan nzi CONACyT.

Ni gunha to llalagolh, nia che bi dabazichia. Xhopi yiz chhak ba blha nga, yell nzi Morelia. Lhada yiz ba guzua nga, ba ben biada lhe. Benchhu to washalag, bayunchhu to bezla, benchhu to waya, wyiachhu witaj, lo yia, lo nhis. Balhan ballagin chechhu, xhkuenli ba benli nhada txhen. Ni wdia lhalhi, zolhotia len dlha bi walhall Laa, dlha Sar len Riel nha Moni, ba ziate nyan yiz nulhabi billa nha zanha. Tkue nolhi nzigake: Lhia Lkantlh Biz, Sopia Beza, lhia gashido Yez, lhia Tian Xhidi, lhia San, lhia Sonia na lhi Pou. Yi tkue dabyu lhe nhakagbi: Chhop ton, dlha Ton xhilha nha Ton gazaj, dlha gabashu Lhoxh, Ariet nha Vitu. Youtelhi yolhi lo lhalldowa, ba benli nhada txhen.

Lezklha da golhi xhna lhia Xhe Palhiz, chhop billa: Luis nha Rodrigo. Lezklha Ton, na youte diallachia.

Le bdia lhalhi chhnaba lo xhanchhu, gak da llia da shagu chelhi, bi tez llindo wzalhi.

Youtelhe, Xhkuentelh!

Introducción

El concepto de compacidad es de las nociones fundamentales y más trascendentes en el área de la Topología y es de suma importancia en muchas áreas de las Matemáticas. Desde la aparición del concepto, ha sido de gran interés estudiar su interacción con otras ramas de la matemática. Por ello, en el quehacer académico, podemos notar que gran parte de los trabajos matemáticos contienen problemas y resultados derivados de considerar la compacidad de los espacios topológicos en cuestión. El área de Topología General tiene como uno de sus pilares al famoso *Teorema de Tychonoff*[1], un resultado esencial que todo estudioso o interesado en el área debe conocer, el teorema nos dice que *el producto topológico de espacios compactos es un espacio compacto*. El cual nos proporciona, entre otras muchas cosas, una amplia diversidad de espacios compactos. En particular, nuestros objetos principales de investigación tienen sentido y existen por este teorema. La variedad de áreas en donde tiene implicaciones la noción de compacidad es bastante amplia, por mencionar un ejemplo, tenemos que en Ecuaciones Diferenciales se recurre a los resultados derivados de compacidad para justificar la existencia de la solución de ecuaciones.

Otra área bastante ligada a los conceptos de compacidad es el Análisis, área en la que puede pensarse se dio el origen al concepto de compacidad (Los autores de [Eng89] y [HNV03] tienen notas sobre la historia referente a este hecho). Una de sus ramas derivadas es el Análisis Funcional, aquí la compacidad es clave y fundamental en la justificación y obtención de resultados relevantes. Recientemente, otra subárea del Análisis Funcional interesada en las nociones de compacidad y sus repercusiones en los espacios de Banach es el área que muchos denominan Análisis Funcional Abstracto, la cual podemos describir como sigue: es una rama de conocimiento que se inspira en conceptos de Análisis Funcional, realiza el vínculo e interpretación en el contexto de la Topología General y en esa traducción utiliza técnicas de Topología General, Teoría de Conjuntos y Teoría Descriptiva de Conjuntos para la resolución de problemas generados a partir de ellos.

En el Análisis Funcional Abstracto es recurrente estudiar familias de espacios compactos que comparten alguna propiedad particular. En este sentido, surge la teoría

[1]Para muchos el resultado más importante del área, S. Willard menciona diversas aplicaciones del Teorema de Tychonoff en otras áreas en su libro [Wil04].

de espacios compactos de Corson y la teoría de espacios compactos de Valdivia, cuyos origenes se remontan en el estudio de los espacios compactos de un espacio de Banach con la topología débil. En el contexto histórico, todo comienza en 1959, cuando H. H. Corson introdujo la noción de *los* Σ*-productos* en el artículo [Cor59]. Años más tarde, H. H. Corson y J. Lindenstrauss en [CL66] conjeturaron que *Todo conjunto débil compacto de un espacio de Banach es homeomorfo a un subespacio de* $c_0(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^\alpha : \forall\epsilon > 0(|\{\theta < \alpha : |x_\theta| > \epsilon\}| < \omega)\}$. Son D. Amir y J. Lindenstrauss, en su estudio de Σ-productos ([AL68]), quienes prueban la conjetura y nombran a esta clase de espacios compactos como espacios de Eberlein. Poco después, Y. Benyamini, M. E. Rudin y M. Wage en su trabajo [BRW77] muestran la existencia de un compacto en un Σ-producto que no es de Eberlein, con esto ilustraron que la familia de los subespacios compactos de un Σ-producto contiene propiamente a la clase de los espacios compactos de Eberlein. Después de ello, E. Michael y M. E. Rudin en [MR77] nombraron a esta clase de espacios como espacios *compactos de Corson*, a saber, los espacios compactos de Corson son aquellos subespacios compactos de un Σ-producto. Siguiendo esa línea de investigación, S. Argyros, S. Mercourakis y S. Negrepontis estudiando la familia de los espacios compactos de Corson en [AMN88] iniciaron con el estudio de aquellos compactos que tienen intersección densa con el Σ-producto. M. Valdivia estudió de forma importante esta clase de espacios, que posteriormente, R. Deville y G. Godefroy en [DG93] les asignaron en su honor el nombre de espacios *compactos de Valdivia*. A finales de los 90's, es O. Kalenda quien retoma fuertemente su estudio y empieza a obtener muchos resultados de estructura de los espacios compactos de Valdivia, de hecho, en [Kal00] tiene un compendio de ejemplos y resultados importantes de espacios compactos de Valdivia desde los puntos de vista de Topología General y la teoría de espacios Banach. En la investigación sobre los espacios compactos de Valdivia y de Corson también se ha visto involucrada la técnica de submodelos elementales. I. Bandlow utiliza la técnica para estudiar a los espacios compactos de Corson en [Ban91]. Igualmente, se empleó esta técnica en el análisis de espacios compactos de Valdivia, un claro ejemplo de ello se puede ver en [KM06], esto último fue muy importante para la obtención de una nueva descripción de los espacios compactos de Valdivia.

En la investigación sobre espacios compactos de Valdivia hecha en [KM06], W. Kubiś y H. Michalewski analizaron aquellos cuyo peso es menor o igual a ω_1, en su estudio hallaron una familia de retracciones con ciertas propiedades que caracteriza a los espacios compactos de Valdivia. Esta familia es la noción que hoy conocemos como r*-esqueleto*: En la literatura también se le llama al r-esqueleto como *esqueleto retraccional* ([Kub09]) o *esqueleto de retracciones* ([RH18]) y se le conoce a los espacios compactos con r-esqueleto como *espacios compactos de Valdivia no conmutativos* ([Cú14b]). De manera resumida tenemos que un r-esqueleto es una familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ indexada por un conjunto dirigido y σ-completo Γ sobre un espacio X que satisfacen condiciones de conmutatividad, convergencia, densidad y cosmicidad, formalmente está noción dada en la Definición 1.3.1 donde la explicaremos a detalle y con más calma.

Desde su aparición, los r-esqueletos han resultado bastante importantes en el estudio de los espacios compactos de Valdivia y de Corson, más aún, la familia de espacios compactos con r-esqueleto contiene propiamente a la familia de espacios compactos de Valdivia. Ahora, si consideramos un espacio compacto X podemos resumir las relaciones en el siguiente diagrama de implicaciones (donde los adjetivos *completo y conmutativo* los explicaremos en el capítulo de Preliminares):

$$\begin{tikzcd}
X \text{ es Corson} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & X \text{ admite } r\text{-esqueleto completo} \arrow[d] \\
X \text{ es Valdivia} \arrow[r, leftrightarrow] & X \text{ admite } r\text{-esqueleto conmutativo} \arrow[d] \\
& X \text{ admite } r\text{-esqueleto}
\end{tikzcd}$$

Tales caracterizaciones han servido como herramienta para la solución de problemas abiertos en la teoría de espacios compactos de Valdivia y de Corson, así como la obtención de nuevos ejemplos de espacios compactos de Valdivia, tal como lo hizo O. Kalenda en [Kal09] donde utilizó r-esqueletos para dar condiciones de cuando un espacio compacto de Valdiva tiene hiperespacio Valdivia. Ejemplos no usuales de espacios compactos de Valdivia también han sido obtenidos con el uso de r-esqueletos, tal como lo hizo J. Somaglia en [Som17] donde mostró que ciertos árboles no estándares son espacios compactos de Valdivia. Respecto, a las propiedades topológicas y de comportamiento bajo operaciones habituales, M. Cuth en [Cú14b] y [Cú14a]), M. Cuth y O. Kalenda en [CK15] y J. Somaglia en [Som16] y [Som17] han hecho varios aportes y avances.

El uso de las familias de retracciones como herramienta en el Análisis ha estado presente desde hace mucho tiempo, en [AL68] utilizan retracciones para trabajar con los espacios de Eberlein. También, O. Kalenda y M. Cuth en [CK15] mencionan que Gul'ko utiliza familias de retracciones en [Gul79] para hallar descripciones de los espacios compactos de Corson y la propiedad Lindelöf Σ en el espacio de funciones continuas. Sobre literatura que hace compilaciones relacionadas a este tópico podemos mencionar a [KKLP11], libro donde se dedica una sección extensa a una recopilación de resultados que describen a los espacios compactos generados por retracciones y su dinámica en el Análisis Funcional, otros textos como [Kub06] y [CK15] hacen investigación inspirada en familias de retracciones y espacios compactos. Por ello, enlazar la noción de r-esqueleto con el Análisis Funcional fue natural y no tardó en ser tema de interés para la investigación. Los autores de [AMN88] notan un fenómeno peculiar sobre los espacios compactos de Valdivia, el cual consiste en la existencia de una gran cantidad de retracciones, esto fue importante para inspirar a M. Valdivia a realizar su trabajo [Val90]. Ello reafirma que la existencia de una noción como el r-esqueleto sobre un espacio compacto de Valdivia es una propiedad inherente de estos espacios. La asosiación de los r-esqueletos con espacios de Banach resulta natural al notar que los r-esqueletos son familias suficientemente grandes y ricas topológicamente que permiten estudiar el espacio de funciones continuas de un espacio compacto desde el actuar de los r-esqueletos. Lo cual terminó relacionándose con las resoluciones proyeccionales de la identidad. El r-esqueleto es considerado el predecesor topológico del concepto en la teoría de espacios de Banach llamado *esqueletos proyeccionales*, concepto que se ha utilizado para poder atacar problemas relacionados a espacios de Banach separables ([Cú14b]). Un ejemplo del uso de esto se ve en [Cú14c], donde se hace un estudio de la existencia de esqueletos proyeccionales en espacios de Banach y se dan caracterizaciónes de los espacios Asplund.

Una noción reciente derivada del uso de las retracciones nace en [RH14], artículo donde son introducidos *los espacios monótonamente retraibles* para estudiar los D-espacios y el espacio de funciones continuas. Estos espacios pronto se ligaron a los espacios con r-esqueleto puesto que en [CSRH15] mostraron que un espacio compacto es de Corson si y solo si es monótonamente retraible. Y en [GFRH16] se utilizaron para dar una nueva descripción de los espacios compactos de Valdivia como aquellos espacios compactos que admiten un subespacio denso monótonamente retraible en X.

Acabado el preámbulo, procedamos ahora a describir el trabajo de investigación de esta tesis doctoral. Nuestra línea de investigación tuvo como tema y objeto central el estudio de los espacios compactos con r-esqueleto. La tesis tuvo dos objetivos principales, uno fue atacar el problema de encontrar una caracterización de los espacios con r-esqueleto cuyo Duplicado de Alexandroff admita un r-esqueleto. Y el segundo fue buscar una interpretación y/o descripción de los subespacios compactos de $[0,1]^T$ que admitan r-esqueleto. El análisis de estos problemas nos condujo al estudio de otros dos temas que fueron los espacios cero dimensionales y los c-esqueletos. Cada problema tiene asociado un capítulo de la tesis, en el cual explicaremos puntualmente su trasfondo, los avances y resultados que obtuvimos.

La tesis está dividida en cinco capítulos: consta de un capítulo introductorio, cuatro capítulos que contienen los resultados principales obtenidos del estudio de cada problema y un sexto capítulo de comentarios finales. Dicho así, procedamos a describir el contenido de cada capítulo, mencionando de forma sintetizada los principales resultados obtenidos:

El primer capítulo lo denominamos Preliminares y es el marco teórico necesario para poder establecer los resultados de nuestra investigación. Iniciamos el capítulo con un breve apartado en el cual indicamos la notación, nociones básicas y convenciones utilizadas a lo largo de la tesis. Recordamos conceptos de topología general y teoría de conjuntos que utilizamos recurrentemente. Después de dicho apartado, damos un repaso a la teoría de espacios compactos de Valdivia y de Corson, esto con el fin de entender la relación de estas nociones con el concepto de r-esqueleto. Posteriormente, pasamos a introducir formalmente la definición de r-esqueleto, enunciamos propiedades importantes de los espacios con r-esqueleto, así como su comportamiento con operaciones usuales. Finalmente, añadimos cinco apartados especiales, cada uno de los cuales trata un concepto topológico específico y su comportamiento con los r-esqueletos, los cinco conceptos son: los límites inversos, las funciones ω-monótonas, los c-esqueletos, árboles especiales y los espacios linealmente ordenados, presentaremos investigación ya existente en la literatura y algunos resultados propios obtenidos de observaciones realizadas en nuestra investigación.

El segundo capítulo lleva por nombre *Espacios cero dimensionales y los* r*-esqueletos.* Motivados por el estudio de la cardinalidad de las imágenes de las retracciones de un r-esqueleto, el segundo capítulo contiene los resultados obtenidos del análisis del comportamiento de un r-esqueleto cuando la imagen del espacio base tiene imagen de cardinalidad numerable para cualquier retracción en el r-esqueleto. Las conclusiones de este estudio son enunciados válidos sobre espacios compactos cero dimensionales y uno de los resultados obtenidos es la siguiente proposición la cual está contenida en el Corolario 2.0.5:

Sea X un espacio compacto cero dimensional. Si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X tal que $|r_s(X)| \leq \omega$ para cualquier $s \in \Gamma$, entonces X tiene un subconjunto denso cuyos puntos son aislados.

También, hacemos observaciones de los resultados obtenidos cuando los aplicamos a algunos ejemplos concretos, en especial en el Ejemplo 2.0.7 exhibimos un espacio compacto cero dimensional T para el cual damos condiciones con el fin de poder asegurar que cualquier r-esqueleto sobre T tiene una retracción con imagen no numerable, además, vemos bajo qué condiciones este espacio compacto cero dimensional T admite un subconjunto denso cuyo puntos son aislados pero no podemos asegurar si T contiene un r-esqueleto cuyas retracciones son de imagen numerable.

El tercer capítulo es titulado *El Duplicado de Alexandroff y los* r*-esqueletos.* Del título de este capítulo inferimos que nuestro objeto principal de estudio es el Duplicado de Alexandroff de un espacio compacto. En efecto, este apartado contiene los resultados obtenidos de atacar el problema de caracterizar a los espacios compactos con r-esqueleto que admitan Duplicado de Alexandroff con r-esqueleto. El fruto de este trabajo fue la obtención de condiciones que garantizan que el Duplicado de Alexandroff de un espacio compacto tenga r-esqueleto cuando el espacio base admita r-esqueleto, la caracterización es presentada propiamente en el Teorema 3.0.5 y expresa lo siguiente:

Sea X un espacio compacto. $AD(X)$ admite un r-esqueleto si y solo si existe un r-esqueleto $\{r_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma\}$ sobre X con espacio inducido Y tal que $\Gamma \subseteq [Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ es σ-completo y cofinal en $[Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$, y para cualquier $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

$(*)$ *$B^d \subseteq Y$, y*

$(***)$ *si $(A, B) \in \Gamma$, entonces $A \subseteq r_{(A,B)}(X)$ y $cl_X(B) \setminus B \subseteq r_{(A,B)}(X)$.*

Una consecuencia de esta caracterización es la obtención de ejemplos no usuales de espacios compactos con r-esqueleto. Así mismo, se obtienen resultados parciales para la pregunta en el lenguaje de espacios compactos de Valdivia y como ejemplo tenemos el Teorema 3.0.12. Cerramos el capítulo con un análisis de los duplicados de Alexandroff de los espacios linealmente ordenados compactos con r-esqueleto, en la Proposición 3.0.25 y el Teorema 3.0.29 damos condiciones para que un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia tenga Duplicado de Alexandroff con r-esqueleto.

Al cuarto capítulo lo titulamos *Subespacios compactos de* $[0,1]^T$ *con* r*-esqueletos* y es el producto de la búsqueda de algún concepto que sea una generalización del Σ-producto, en específico, atacamos el siguiente problema.

Problema. Encontrar una generalización del Σ-producto de $[0,1]^T$ de tal manera que si $X \subseteq [0,1]^T$ es compacto dicha generalización determina si X admite un r-esqueleto.

Para asimilar mejor el problema, recordemos que las nociones de compactos de Valdivia y de Corson son nociones directamente obtenidas del concepto de Σ-producto, sin embargo, el Σ-producto no tiene la fuerza para poder describir en su totalidad a los espacios compactos con r-esqueleto, ejemplo de ello tenemos que el espacio $[0,\omega_2]$ es un espacio compacto con r-esqueleto (Ejemplo 1.3.3), sabemos que $[0,\omega_2]$ puede ser encajado en un cubo $[0,1]^T$ pero el Σ-producto no alcanza a detectarlo. Por ello, la búsqueda de una noción que describa a los espacios compactos con r-esqueleto de un cubo $[0,1]^T$, es un problema bien fundamentado. En la búsqueda de esta generalización de Σ-producto, introducimos la noción de π*-esqueleto*, él cual es un objeto propio de un $[0,1]^T$ ligado a las proyecciones sobre caras numerables de este producto. Esto nos condujo a obtener una nueva descripción de los espacios con r-esqueleto y el cual es el resultado principal del capítulo. La descripción está puntualmente descrita y demostrada en el Teorema 4.0.9 y dice lo siguiente:

Sea X un espacio compacto. Entonces, X admite un r-esqueleto si y solo si X admite un π-esqueleto.

Finalizamos el capítulo con una aplicación del teorema obtenido, la cual es una nueva demostración de la productividad de los r-esqueletos. Dicha demostración es importante para ilustrar que la noción de π-esqueleto es una buena generalización del Σ-producto. Además, utilizamos nociones básicas de topología y teoría de conjuntos lo cual resulta más accesible que la demostración original que utiliza el método de submódelos elementales.

El quinto capítulo es nombrado *Familias de cerrados y* r*-esqueletos*. Inspirados en el estudio de las propiedades de las familias de cerrados inherentes en los espacios con r-esqueleto y basados en el antecedente mostrado en el trabajo realizado en el artículo [CSGFRH17], introducimos la noción de c*-esqueleto débil*. Como es de esperarse, para obtener el concepto de c-esqueleto débil hicimos un debilitamiento de la definición original de c-esqueleto, esto con el fin de encontrar descripciones de los espacios compactos con r-esqueleto y espacios compactos de Valdivia en términos del c-esqueleto débil. El resultado más importante que obtuvimos está contenido en los Teoremas 5.0.8 y 5.0.11, en los cuales damos condiciones para que un espacio con c-esqueleto débil admita r-esqueleto o sea un espacio compacto de Valdivia. El Teorema 5.0.11 nos dice lo siguiente:

Para un espacio compacto X los siguientes enunciados son equivalentes:

- *Existe un c-esqueleto débil $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ sobre X que cumple*

  ($\star\star$) *si $\langle s_n \rangle_{n<\omega}$ es una sucesión creciente en Γ con $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$, entonces para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}(\psi(s), x)$ existe $m < \omega$ tal que $\overline{U \cap F_s} \cap V \cap F_{s_n} \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq m$ y para toda $V \in \mathcal{N}(\psi(s_n), x)$; y*

  ($\star\star\star$) *para cada $s, t \in \Gamma$, $x \in X$ y $V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))$, existe $U_V \in \mathcal{N}(\psi(t), r_s(x))$ tal que $\emptyset \neq \overline{U_V} \cap F_t \cap F_s \subseteq \overline{V} \cap F_s$; y $\{\overline{U_V} \cap F_t \cap F_s : V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))\}$ tiene la propiedad de intersección finita.*

- *Existe un r-esqueleto conmutativo sobre X.*

En el apartado final, damos un repaso a los resultados principales obtenidos en la tesis, una discusión de su importancia y por último damos un panorama de factibles líneas de investigación posteriores a este trabajo doctoral.

Por último, los resultados propios de este proyecto doctoral se podrán identificar fácilmente y los resultados ya existentes en la literatura son referenciados adecuadamente. Es importante mencionar que los resultados principales de los Capítulos 2, 3 y 4 forman parte del mi artículo *Families of retractions and families of closed subsets on compact spaces*, el cual está aceptado para su publicación en la revista *Topology and its aplications.*

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Notación, conceptos básicos y convenciones

El propósito principal de este apartado es establecer la notación a utilizar durante el desarrollo de esta tesis doctoral. Suponemos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de Topología General y Teoría de Conjuntos, llegado el caso se puede consultar el clásico libro [Eng89] para conceptos de Topología General y para conceptos de Teoría de Conjuntos recurrir al libro [Her03] resulta bastante adecuado.

Para comenzar, los espacios topológicos a considerar serán siempre espacios de Tychonoff (es decir, espacios Hausdorff completamente regulares). Si la situación lo amerita, utilizaremos la notación (X, τ) para indicar que X es un espacio topológico con la topología τ. Ahora, si (X, τ) es un espacio topológico y $F \subseteq X$ es un conjunto distinto del conjunto vacío, la topología de subespacio heredada a F la denotaremos por $\tau \restriction_F$ y como sabemos resulta que $\tau \restriction_F = \{U \cap F : U \in \tau\}$.

Consideremos un espacio X y un subconjunto A de X. *La clausura o cerradura de* A en X la denotaremos por $cl_X(A)$ y cuando no exista confusión usaremos $\overline{A}$. *El conjunto derivado de* A en X será denotado por A^d y definido por el conjunto de puntos de $cl_X(A)$ que no son puntos aislados en X. Y diremos que A es *numerablemente cerrado* si para cada $B \subseteq A$ numerable tenemos que $\overline{B} \subseteq A$. Y $w(X)$ denotará el peso del espacio X y $d(X)$ la densidad del espacio X.

Respecto a funciones, si tenemos una función $f : X \to Y$ y $F \subseteq X$, $f \restriction_F$ denota la función f restringida a F. Decimos que una función continua $r : X \to X$ es una *retracción* si $r = r \circ r$. Y una función continua $f : X \to Y$ es un *encaje* si f es inyectiva y f resulta un homeomorfismo entre X y $f(X)$.

La notación $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ será para indicar una sucesión cuyos términos son x_n's. Si $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ es una sucesión en un espacio X y $x \in X$, entonces el símbolo $x_n \to x$ indicará que la sucesión converge a x, al igual que $\lim_{n<\omega} x_n = x$. Un espacio X es *Fréchet-Urysohn* si para cada conjunto $A \subseteq X$ y cada punto $x \in \overline{A}$ existe una sucesión $\langle x_n \rangle_{n<\omega} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.

Para una familia de espacios $\{X_t : t \in T\}$, el producto topológico será denotado por $\Pi_{t\in T} X_t$ y la proyección sobre la cara determinada por el conjunto $A \subseteq T$ es la función $\pi_A : \Pi_{t\in T} X_t \to \Pi_{t\in A} X_t$ definida por $\pi_A((x_t)_{t\in T}) = (x_t)_{t\in A}$. En particular, si $t \in T$, usaremos la notación π_t para representar a la proyección sobre la coordenada t. Un conjunto abierto subbásico del producto $\Pi_{t\in T} X_t$ lo denotaremos por $[t, V] := \pi_t^{-1}(V)$, donde $t \in T$ y V es un abierto no vacío de X_t.

Decimos que X es un espacio topológico *cero dimensional* si admite una base de conjuntos que son cerrados y abiertos a la vez. Recordemos que un espacio es llamado *cósmico* si tiene una red numerable. En el contexto de los espacios compactos sabemos que: un espacio compacto es cósmico si y solo si es un espacio metrizable y separable. Es importante mencionar que subespacios de espacios cósmicos son cósmicos.

La letra griega ω indicará el primer número ordinal infinito, se utilizará como número ordinal o cardinal según sea el caso. En el mismo sentido, ω_1 indicará el primer número ordinal no numerable, según sea necesario, trabajaremos con él como número ordinal o como número cardinal. Para un número ordinal infinito κ, la *cofinalidad de* κ será denotada por $cof(\kappa)$; por $[0, \kappa]$ denotaremos el espacio $\kappa + 1$ con la topología dada por el orden usual en los ordinales. Para un conjunto infinito X, con el símbolo $[X]^{\leq\omega}$ representaremos a la familia de todos los subconjuntos numerables de X y por $[X]^{<\omega}$ denotaremos a todos los subconjuntos finitos de X. Y por $\mathcal{P}(X)$ representaremos al conjunto potencia de X.

Consideremos un conjunto parcialmente ordenado Γ. Si $A \subseteq \Gamma$, por $\sup_\Gamma A$ denotaremos al *supremo* de A en Γ, cuando no exista confusión sobre el conjunto donde se considera el supremo escribiremos $\sup A$. Diremos que Γ es *dirigido*[1] si para cada par de elementos $s, s' \in \Gamma$, existe $t \in \Gamma$ tal que $s \leq t$ y $s' \leq t$. Y decimos que Γ es *σ-completo* si para cada sucesión creciente $\langle s_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$, se cumple que $\sup\{s_n : n < \omega\} \in \Gamma$. Si $\Gamma' \subseteq \Gamma$, decimos que Γ' es *cofinal* en Γ si para cada $s \in \Gamma$ existe $t \in \Gamma'$ tal que $s \leq t$.

1.2. Espacios compactos de Valdivia y de Corson

Para poder hablar y trabajar con el concepto de los r-esqueletos haremos un repaso a las nociones de espacios compactos de Valdivia y de Corson. Primero conviene recordar

[1] En general, la literatura distingue si el conjunto es dirigido hacia arriba (en inglés se enuncia como "up-directed") o hacia abajo, sin embargo en esta tesis solo trabajaremos con ordenes dirigidos hacia arriba y para aligerar la escritura haremos la convención de escribir solo dirigido

la noción precursora de esta teoría, el concepto de Σ-producto. Para ello establecemos el concepto de soporte.

Definición 1.2.1 (Folklore)**.** Consideremos un conjunto no vacío de índices T. Para un punto $x \in [0,1]^T$ y $A \subseteq [0,1]^T$, definimos el *soporte de* x como $supp(x) := \{t \in T : \pi_t(x) \neq 0\}$ y el *soporte de* A como $supp(A) := \bigcup_{y \in A} supp(y)$.

Con lo anterior:

Definición 1.2.2 ([Cor59])**.** Para un conjunto no vacío T, definimos al Σ*-producto* del espacio $[0,1]^T$ como sigue:

$$\Sigma[0,1]^T = \{x \in [0,1]^T : |supp(x)| \leq \omega\}.$$

Observación 1.2.3. Es importante mencionar que el concepto de Σ-producto puede ser más general, uno puede fijar un punto en un producto topológico, definir el soporte de cualquier punto del producto sobre el punto fijado y declarar al Σ-producto de manera similar a la definición que hemos dado. Con esto queremos decir, que en el espacio $[0,1]^T$ existen muchos Σ-productos, sin embargo en esta tesis nos interesa trabajar sobre el Σ-producto basado en el vector cero. En la literatura también se suele usar la notación Σ_0 para denotar al Σ-producto que dimos en la definición.

Expuesta ya la noción de Σ-producto podemos definir algunos conjuntos asociados.

Definición 1.2.4 (Folklore)**.** Sea X un espacio y $D \subseteq X$, decimos que D es un Σ-*conjunto* de X si existe un encaje $f : X \to [0,1]^T$ tal que $f^{-1}(\Sigma[0,1]^T) = D$.

Ahora, ya podemos enunciar los conceptos de compactos de Valdivia y de Corson.

Definición 1.2.5 ([MR77])**.** Sea X un espacio compacto. Decimos que X es un *espacio compacto de Corson* si es un Σ-conjunto de sí mismo.

Como ejemplos de espacios compactos de Corson tenemos:

Ejemplos 1.2.6 (Folklore)**.** Los espacios compactos metrizables son espacios compactos de Corson. Así, $[0,1]^T$ es un espacio compacto de Corson siempre que T sea numerable.

Una lectura que explica el contexto histórico de los espacios compactos de Corson y que sintetiza de forma excelente las propiedades y resultados concernientes a estos aparece en [HNV03].

Definición 1.2.7 ([DG93])**.** Sea X un espacio compacto. Decimos que X es un *espacio compacto de Valdivia* si X contiene un Σ-conjunto denso.

Ejemplos 1.2.8 (Folklore)**.** Es claro de la definición, que los espacios compactos de Corson son espacios compactos de Valdivia. El espacio $[0,1]^T$ es un espacio compacto de Valdivia para cualquier conjunto T no vacío, además, si T es no numerable, entonces $[0,1]^T$ es un espacio compacto de Valdivia que no es Corson. También El espacio $[0,\omega_1]$ es un espacio compacto de Valdivia no Corson.

Si el lector está interesado en conocer otros ejemplos de espacios compactos de Valdivia puede consultar [Kal09] y [Kal00].

Naturalmente, se ha estudiado el comportamiento de los espacios compactos de Corson y de Valdivia bajo operaciones topológicas usuales. En el caso de los espacios compactos de Corson, el comportamiento es positivo, los subespacios cerrados de espacios compactos de Corson siguen siendo espacios compactos de Corson, productos numerables e imágenes continuas de espacios compactos de Corson son espacios compactos de Corson. Para el caso de la familia de espacios compactos de Valdivia el comportamiento es distinto. Los subespacios cerrados e imágenes continuas de espacios compactos de Valdivia no siempre son espacios compactos de Valdivia. Sin embargo, el producto arbitrario de espacios compactos de Valdivia es un espacio compacto de Valdivia. Otras operaciones topólogicas como las uniones, sumas o hiperespacios también se han estudiado por ejemplo en [Kal00] y [Kal09].

Una operación topológica que se ha visto involucrada con los espacios compactos de Valdivia es el Duplicado de Alexandroff. Siendo esta operación de mucha importancia para nuestra investigación, enunciamos formalmente a continuación los resultados relacionados al Duplicado de Alexandroff y los espacios compactos de Valdivia, posteriormente recurriremos a ellos en la sección que hemos dedicado al Duplicado de Alexandroff y r-esqueletos.

Teorema 1.2.9 ([Kal09])**.** *Sea X un espacio compacto. Se cumplen los siguientes enunciados:*

- *X es un espacio compacto de Corson si y solo si el Duplicado de Alexandroff de X es un espacio compacto de Corson.*
- *Si el Duplicado de Alexandroff de X es un espacio compacto de Valdivia, entonces X es un espacio compacto de Valdivia.*

El siguiente enunciado es una condición para que un espacio compacto de Valdivia preserve la propiedad en su duplicado de Alexandroff.

Proposición 1.2.10 ([Kal09])**.** *Sea X un espacio compacto de Valdivia y Y un Σ-conjunto denso de X. Si $X \setminus Y$ es finito, entonces el Duplicado de Alexandroff de X es un espacio compacto de Valdivia.*

En una sección posterior a esta, hablaremos de la relación del Teorema 1.2.9 y la Proposición 1.2.10 con los r-esqueletos.

Para un Σ-conjunto denso de un espacio compacto de Valdivia tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 1.2.11 ([Kal00])**.** *Sea X un espacio compacto de Valdivia X. Si Y es un Σ-conjunto denso de X, entonces:*

- *Y es un subespacio numerablemente cerrado,*

- *Y es un espacio de Fréchet-Urysohn; y*
- *$\beta Y = X$.*

Por último, tenemos:

Proposición 1.2.12 ([Kal00]). *Si X es un espacio compacto de Valdivia y Y es un Σ-conjunto denso de X, entonces $w(X) = d(Y)$.*

1.3. r-esqueletos

Teniendo en mente las nociones de compactos de Valdivia y de Corson, sigue enunciar el concepto central de estudio en este trabajo de doctorado. En lo que resta del documento, Γ representará un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo, al menos que se especifique lo contrario.

Definición 1.3.1 ([KM06]). Decimos que una familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio X es un *r-esqueleto* si:

(i) Para cada $s \in \Gamma$, $r_s(X)$ es cósmico.

(ii) Si $s \leq t$, entonces $r_s = r_s \circ r_t = r_t \circ r_s$.

(iii) Para cada sucesión creciente $\langle s_n \rangle_{n<\omega}$ en Γ con $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$, tenemos que $r_s(x) = \lim_{n\to\infty} r_{s_n}(x)$ para toda $x \in X$.

(iv) Para todo $x \in X$, $x = \lim_{s\in\Gamma} r_s(x)$.

El *espacio inducido* por el r-esqueleto es el subespacio $\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$. Un r-esqueleto es llamado *conmutativo* si para cualesquiera $s, t \in \Gamma$ tenemos que $r_s \circ r_t = r_t \circ r_s$. Si el inducido de un r-esqueleto coincide con el espacio total, entonces diremos que el r-esqueleto es *completo*.

Al ser la Definición 1.3.1 el concepto central sobre el cual se obtienen la mayoría de los resultados de la tesis, es conveniente enlistar y detallar ejemplos que ilustren esta definición. Estos ejemplos serán utilizados posteriormente en los capítulos que restan del trabajo. A continuación tenemos el primer ejemplo.

Ejemplo 1.3.2 ([KM06]). Consideremos un conjunto T distinto del conjunto vacío. Probemos que $[0,1]^T$ tiene un r-esqueleto conmutativo. En efecto, sea $\Gamma = [T]^{\leq\omega}$ con el orden de la contención. Γ claramente es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo. Para $A \in \Gamma$, sea $P_A : [0,1]^T \to [0,1]^T$ la función definida por $\pi_t(P_A(x)) = 0$ si $t \notin A$ y $\pi_t(P_A(x)) = \pi_t(x)$ si $t \in A$, para cada $x \in [0,1]^T$. Es fácil ver que $\{P_A : A \in \Gamma\}$ es una familia de retracciones en $[0,1]^T$ que cumple las condiciones $(i) - (iv)$ de la Definición 1.3.1, es decir, $\{P_A : A \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre $[0,1]^T$. Además, el espacio inducido por el r-esqueleto es $\Sigma[0,1]^T$ y claramente el r-esqueleto es conmutativo. Si T es numerable entonces el r-esqueleto es completo.

Veamos en el siguiente ejemplo que existen espacios compactos que admiten r-esqueleto no conmutativo: La familia de espacios sobre los que se construye este ejemplo se conoce que no son espacios compactos de Valdivia (ver [Kal09]). Otro ejemplo no trivial de espacio compacto con r-esqueleto no conmutativo será presentado en la sección de Árboles especiales con r-esqueleto.

Ejemplo 1.3.3 ([KM06])**.** Sean $\alpha > \omega_1$ y $\mathbf{C}_\alpha$ la familia de todos los conjuntos numerables y cerrados $A \subseteq [0, \alpha]$ para los cuales $0 \in A$ y si $p \in A$ es un punto aislado en A, entonces p es un punto aislado en $[0, \alpha]$. Para cada $A \in \mathbf{C}_\alpha$ definimos la función $r_A : [0, \alpha] \to [0, \alpha]$ por la regla $r_A(x) = \max\{a \in A : a \leq x\}$. Los autores de [KM06] prueban que $\{r_A : A \in \mathbf{C}_\alpha\}$ es un r-esqueleto no conmutativo sobre $[0, \alpha]$.

De lo anterior se desprende nuestro siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.4. Consideremos el espacio $[0, \omega_1]$, sobre este espacio se pueden construir dos r-esqueletos.

- Con el mismo procedimiento podemos construir el r-esqueleto obtenido en el Ejemplo 1.3.3 sobre el espacio $[0, \omega_1]$. También, resulta ser que el r-esqueleto es no conmutativo.

- Un r-esqueleto conmutativo sobre $[0, \omega_1]$ se puede definir de la siguiente manera: Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos la retracción $r_\alpha : [0, \omega_1] \to [0, \omega_1]$ como sigue

$$r_\alpha(\beta) = \begin{cases} \beta & si \quad \beta \leq \alpha, \\ \alpha & si \quad \beta > \alpha, \end{cases}$$

  para cada $\beta < \omega_1$. No resulta difícil comprobar que $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre $[0, \omega_1]$.

Una técnica útil para probar que una familia de retracciones que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es un r-esqueleto sin tener que establecer explícitamente la condición (iv) es el siguiente resultado.

Proposición 1.3.5 ([CSGFRH17])**.** *Consideremos una familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio numerablemente compacto X tal que las cláusulas (i)-(iii) se cumplen. Si $Y = \bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$, entonces $x = \lim_{s\in\Gamma} r_s(x)$, para cada $x \in \overline{Y}$.*

Observación 1.3.6. Consideremos un r-esqueleto sobre un espacio compacto X. Es claro que la condición (iv) garantiza que el espacio inducido por el r-esqueleto es un subespacio denso de X. Ahora, para una familia de retracciónes $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio compacto X que satisface (i), (ii) y (iii), considerando la Proposición 1.3.5 podemos garantizar que si $\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$ es denso en X, entonces se cumple la propiedad (iv) y con ello $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X. En adelante, para una familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$, en ocasiones probaremos que $\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$ es denso en X para garantizar (iv).

Una vez que ya tenemos enunciada la definición de r-esqueleto y que hemos expuesto ejemplos ilustrativos de la noción, procedemos a presentar las relaciones con los espacios compactos de Valdivia y de Corson.

La primera caracterización corresponde a los espacios compactos de Valdivia dada por W. Kubiś y H. Michalewski en [KM06].

Teorema 1.3.7 ([KM06])**.** *Un espacio compacto X es un espacio compacto de Valdivia si y solo si X admite un r-esqueleto conmutativo.*

Observación 1.3.8. Del Teorema 1.3.7 es importante hacer notar que si X es un espacio compacto de Valdivia, entonces el espacio inducido por un r-esqueleto conmutativo sobre X resulta ser un Σ-conjunto denso de X.

Posteriormente M. Cúth obtuvo la caracterización de los espacios compactos de Corson con los r-esqueletos.

Teorema 1.3.9 ([Cú14b])**.** *Un espacio compacto X es un espacio compacto de Corson si y solo si X admite un r-esqueleto completo.*

Los Teoremas 1.3.7 y 1.3.9 son resultados cruciales en la teoría de espacios compactos de Valdivia, dichos teoremas son una gran herramienta para generar ejemplos de espacios compactos de Valdivia, espacios compactos de Corson y resolver problemas existentes en la teoría. Para ejemplificar este hecho, O. Kalenda en [Kal09] utilizando estas caracterizaciones obtiene lo siguiente:

Proposición 1.3.10 ([Kal09])**.** *Sea X un espacio compacto.*

- *Si X es un espacio compacto de Valdivia, entonces el hiperespacio asociado a X es un espacio compacto de Valdivia.*

- *X es un espacio compacto metrizable si y solo si el hiperespacio de K es un espacio compacto de Corson.*

De los Teoremas 1.3.7 y 1.3.9, naturalmente tenemos que los espacios compactos de Valdivia y de Corson son ejemplos inmediatos de espacios con r-esqueleto. Para ver que no son los únicos, recordemos que el Ejemplo 1.3.3 nos exhibe que el espacio $[0,\kappa]$ admite r-esqueleto. Dado que es conocido que el espacio $[0,\kappa]$ no es un espacio compacto de Valdivia para $\kappa > \omega_1$ (una prueba de esto se puede ver en [Kal00]), el Teorema 1.3.7 nos indica que cualquier r-esqueleto sobre $[0,\kappa]$ no es conmutativo cuando $\kappa > \omega_1$.

Las afirmaciones hechas anteriormente nos llevan a tener el siguiente diagrama de implicaciones.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Propiedad:} & \text{Corson} & \longrightarrow & \text{Valdivia} & \longrightarrow & r\text{-esqueleto} \\ & & \not\longleftarrow & & \not\longleftarrow & \\ \text{Contraejemplo:} & & [0,\omega_1] & & [0,\omega_2] & \end{array}$$

Con lo dicho, tenemos que la familia de espacios compactos con r-esqueleto contiene propiamente a los espacios compactos de Valdivia y de Corson. Lo cual resulta interesante ya que podemos estudiar su dinámica con propiedades y operaciones topólogicas ya estudiadas para espacios compactos de Valdivia y de Corson.

De la Observación 1.3.8, tenemos que para un espacio compacto de Valdivia X, el subespacio inducido Y por un r-esqueleto conmutativo sobre X es un Σ-conjunto denso de X. Con ello, para Y son ciertos los enunciados de la Proposición 1.2.11. La siguiente proposición establece que dichos enunciados de la Proposición 1.2.11 también son ciertos en espacios con r-esqueletos no necesariamente conmutativos.

Proposición 1.3.11 ([Kub09])**.** *Sea X un espacio compacto que admite un r-esqueleto con inducido Y. Los siguientes enunciados son ciertos:*

- *Y es un espacio numerablemente cerrado,*
- *Y es Fréchet-Urysohn, y*
- *$\beta Y = X$.*

Respecto al comportamiento con operaciones topológicas usuales tenemos que:

Proposición 1.3.12 ([Kub09])**.** *Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios compactos que admiten r-esqueleto, entonces $\Pi_{i\in I} X_i$ admite un r-esqueleto.*

Para el caso de subespacios cerrados de un espacio con r-esqueleto, cuando estos subespacios no se alejan del inducido del r-esqueleto podemos heredar el r-esqueleto sobre ellos.

Proposición 1.3.13 ([Cú14b])**.** *Si X es un espacio compacto con r-esqueleto con inducido Y y F es un subespacio cerrado de X tal que $F \cap Y$ es denso en F, entonces F admite un r-esqueleto.*

Observación 1.3.14. En la prueba de la Proposición 1.3.13 en [Cú14b], el autor describe el método para heredar un r-esqueleto sobre un espacio compacto a un subespacio cerrado de la siguiente manera: Consideremos un espacio compacto X que admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ con espacio inducido Y. Tomemos un subespacio cerrado F de X. Si $Y \cap F$ es un conjunto denso en F, entonces el conjunto $\Gamma' = \{s \in \Gamma : r_s(F) \subseteq F\}$ es parcialmente ordenado, dirigido, σ-completo y cofinal en Γ. Con ello, la familia de retracciones $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma'\}$ resulta ser un r-esqueleto sobre F.

Como una consecuencia del comportamiento de un subconjunto cofinal del conjunto de índices de un r-esqueleto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.15. *Sea X un espacio compacto que admite un r-esqueleto (conmutativo) $\{r_s : s \in \Gamma\}$ y $\Gamma' \subseteq \Gamma$ un conjunto parcialmente ordenado, dirigido, σ-completo con el orden de Γ y para cada sucesión creciente $\langle x_n \rangle_{n<\omega} \in \Gamma'$ tenemos que $\sup_\Gamma\{x_n : n < \omega\} \in \Gamma'$. Si Γ' es cofinal en Γ, entonces $\{r_s : s \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto (conmutativo) sobre X.*

Demostración. Las condiciones (i) y (ii) se cumplen por ser $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto. La condición (iv) se obtiene porque Γ' es cofinal en Γ. La cláusula (iii) se obtiene porque $\sup_\Gamma\{s_n : n < \omega\} = \sup_{\Gamma'}\{s_n : n < \omega\}$. □

Otro fenómeno similar al comportamiento de los Σ-conjuntos densos de un espacio compacto de Valdivia es el siguiente.

Proposición 1.3.16 ([Cú14b])**.** *Sea X un espacio compacto y consideremos A y B dos espacios inducidos por r-esqueletos sobre X. Si $M \subseteq X$ es tal que $A \cap B \cap M$ es denso en M, entonces $A \cap M = B \cap M$. En particular, $A = B$ si $A \cap B$ es denso en X.*

Los resultados anteriores dan razón a pensar a los espacios con r-esqueleto como la generalización de la familia de espacios compactos de Valdivia. Por tal motivo en la literatura a los espacios compactos con r-esqueleto también se les llama *espacios compactos de Valdivia no Conmutativos* ([Cú14b]).

Las secciones que restan en este capítulo son temas que han sido estudiados en la teoría de espacios compactos de Valdivia y de los cuales se han desprendido problemas interesantes. A dichos temas les dedicamos apartados especiales porque se relacionan y enriquecen la investigación hecha en esta tesis doctoral.

1.3.1. Límites Inversos

Este apartado tiene como finalidad presentar una caracterización para los espacios con r-esqueleto en el lenguaje de límites inversos, dicha caracterización será utilizada en capítulos posteriores. Esta técnica de límites inversos ya ha sido utilizada en la teoría de espacios compactos de Valdivia y de Corson. El antecedente principal para tomarla a consideración en nuestra investigación es el estudio realizado en [KM06], donde se exponen resultados relacionados a los r-esqueletos sobre espacios de peso a lo más ω_1. Igualmente, en [Chi08] se utilizan los límites inversos para estudiar a los grupos topológicos compactos de Valdivia. También, en [Kub09] y [Kub06] se utilizan los límites inversos para estudiar a los espacios compactos de Valdivia. Así, el uso de esta herramienta es ampliamente justificable.

En este trabajo consideramos sistemas inversos de espacios compactos cuyas funciones de enlace son sobreyectivas. A dichos sistemas inversos los denotaremos por $\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$, donde f_s^t representa la función de enlace, para $s \leq t$, y Γ es un conjunto parcialmente ordenado dirigido y σ-completo. Decimos que $\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$ es *σ-completo* si $X_t = \varprojlim\langle X_s, f_s^{s'}, \Gamma'\rangle$, para cada conjunto numerable y dirigido $\Gamma' \subseteq \Gamma$ y donde $t = \sup \Gamma'$.

Veamos ahora los resultados existentes sobre espacios compactos de Valdivia y espacios con r-esqueleto en el contexto de límites inversos.

El siguiente resultado nos muestra que no se necesita toda la fuerza de un r-esqueleto para garantizar la existencia de un límite inverso.

Proposición 1.3.17 ([KM06])**.** *Sea $\{r_s : s \in \Gamma\}$ una familia de retracciones sobre un espacio compacto X. Si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ satisface (ii) y (iv) de la definición de r-esqueleto, entonces X es homeomorfo a $\varprojlim\langle r_s(X), r_s^t, \Gamma\rangle$, donde $r_s^t = r_s \restriction_{r_t(X)}$.*

Y en el sentido inverso, se puede demostrar que bajo ciertas hipótesis el límite de un sistema inverso es un compacto con r-esqueleto.

Teorema 1.3.18 ([KM06])**.** *Supongamos que X es el límite de un sistema inverso de espacios cósmicos compactos $\langle X_s, r_s^t, \Gamma\rangle$, donde la función de enlace r_s^t es una retración para cada $s \leq t$. Entonces X es un espacio compacto con r-esqueleto.*

Observación 1.3.19. Un resultado bastante bonito y útil que es consecuencia del Teorema 1.3.18 y la Proposición 1.3.17, es que los autores de [KM06] deducen que para espacios compactos de peso a lo más ω_1, ser Valdivia y tener r-esqueleto es equivalente.

Ahora, tenemos dos lemas que resultaran importantes en posteriores secciones. El primer lema es un resultado implícito en el trabajo de los límites inversos y compactos de Valdivia en el artículo [KM06].

Lema 1.3.20. *Sea X un espacio compacto. Si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X, entonces $\varprojlim\langle r_s(X), r_s^t, \Gamma\rangle = \{(r_s(x))_{s\in\Gamma} : x \in X\}$, donde $r_s^t = r_s \restriction_{r_t(X)}$, para cada $t \geq s$.*

El resultado siguiente es la interpretación en términos de límites inversos de la propiedad (iii) de un r-esqueleto.

Lema 1.3.21 ([KM06])**.** *Sea X un espacio compacto. Si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X, entonces $X = \varprojlim\langle r_s(X), r_s^t, \Gamma\rangle$, donde $r_s^t = r_s \restriction_{r_t(X)}$, para cada $t \geq s$. En particular, si A es un subconjunto numerable y dirigido de Γ, entonces*

$$r_{\sup A}(X) = \varprojlim\langle r_s(X), r_s^t, A\rangle.$$

Nuestra aportación en este contexto es la obtención de una descripción de los espacios con r-esqueleto en el lenguaje de límites inversos, descripción de alguna manera más general a la ya existente en la literatura. En lo que sigue expondremos los resultados que detallan este estudio.

Comenzamos considerando un sistema inverso de espacios compactos $\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$. Para $s \in \Gamma$, etiquetamos las siguientes condiciones:

- $(l1)$ X_s es espacio cósmico,
- $(l2)$ existe un subespacio $X_s' \subseteq \varprojlim\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$ tal que $P_s := \pi_s \restriction_{X_s'} : X_s' \to X_s$ es un homeomorfismo, donde π_s es la proyección natural sobre el espacio X_s, y
- $(l3)$ si $t \in \Gamma$ y $t \geq s$, entonces $X_s' \subseteq X_t'$.

Observación 1.3.22. Supongamos que $\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$ es un sistema inverso σ-completo de espacios compactos que satisface las condiciones ($l1$), ($l2$) y ($l3$), y $X = \underleftarrow{lim}\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$. Para cada $s \in \Gamma$, definamos la función $r_s : X \to X$ como $r_s := P_s^{-1} \circ \pi_s$. Obtenemos que la familia $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es una familia de retracciones en X.

Considerando las condiciones ($l1$), ($l2$) y ($l3$) se establece el siguiente resultado.

Lema 1.3.23. *Sea $\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$ un sistema inverso σ-completo que cumple las propiedades ($l1$),($l2$) y ($l3$). Si consideramos la familia $\{r_s : s \in \Gamma\}$ descrita en la Observación 1.3.22, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *Para $t > s$, existe una función continua $g_s^t : X_t' \to X_s'$ que satisface $r_s = g_s^t \circ r_t$,*

2. *El sistema inverso $\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$ es σ-completo y cumple que*

$$\underleftarrow{lim}\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle = \{(r_s(x))_{s\in\Gamma} : x \in \underleftarrow{lim}\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle\},$$

   y

3. *$\underleftarrow{lim}\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$ es homeomorfo a $\underleftarrow{lim}\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$.*

Demostración. Sea $X = \underleftarrow{lim}\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$.
(1) Para dos elementos $s, t \in \Gamma$ con $s \le t$, definimos la función $g_s^t := P_s^{-1} \circ f_s^t \circ P_t$. Por su definición, g_s^t es una función continua que satisface

$$\begin{aligned} g_s^t \circ r_t &= P_s^{-1} \circ f_s^t \circ P_t \circ r_t \\ &= P_s^{-1} \circ f_s^t \circ P_t \circ P_t^{-1} \circ \pi_t \\ &= P_s^{-1} \circ f_s^t \circ \pi_t \\ &= P_s^{-1} \circ \pi_s \\ &= r_s. \end{aligned}$$

Con ello tenemos que g_s^t es nuestra función deseada.
(2) Para $s \le t \le t'$, tenemos que

$$\begin{aligned} g_s^t \circ g_t^{t'} &= P_s^{-1} \circ f_s^t \circ P_t \circ P_t^{-1} \circ f_t^{t'} \circ P_{t'} \\ &= P_s^{-1} \circ f_s^t \circ f_t^{t'} \circ P_{t'} \\ &= P_s^{-1} \circ f_s^{t'} \circ P_{t'} \\ &= g_s^{t'}. \end{aligned}$$

Esta igualdad nos asegura que las funciones g_s^t son funciones de enlace y así $\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$ es un sistema inverso. Dado que para cada $s \in \Gamma$, X_s' es homeomorfo a X_s y debido a la σ-completez de $\langle X_s, f_s^t, \Gamma\rangle$, deducimos la σ-completez de $\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$. No es difícil ver que la función $h : X \to \underleftarrow{lim}\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$ definida por $h((x_s)_{s\in\Gamma}) = (r_s(x))_{s\in\Gamma}$ es continua. Así,

$$h(X) = \{(r_s(x))_{s\in\Gamma} : x \in X\} \subseteq \underleftarrow{lim}\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle.$$

Probemos que $h(X)$ es denso en $\underleftarrow{lim}\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$. En efecto, sea $z \in \underleftarrow{lim}\langle X_s', g_s^t, \Gamma\rangle$ y $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}(U_i)$, donde $U_i \subseteq X_{t_i}$ es un subconjunto abierto tal que $\pi_{t_i}(z) \in U_i$, para

$1 \le i \le n$. Tomemos $t \in \Gamma$ tal que $t \ge t_i$ para todo $1 \le i \le n$, y $y \in X_t$ tal que $r_t(y) = \pi_t(z)$. Notemos que

$$\begin{aligned}\pi_{t_i}(z) &= g^t_{t_i}(\pi_t(z)) \\ &= g^t_{t_i}(r_t(y)) \\ &= g^t_{t_i} \circ r_t(y) \\ &= r_{t_i}(y),\end{aligned}$$

para todo $1 \le i \le n$. Con lo cual tenemos que $(r_s(y))_{s\in\Gamma} \in U$. Así, $h(X)$ es denso en $\varprojlim\langle X'_s, g^t_s, \Gamma\rangle$. Utilizando la compacidad de $h(X)$, deducimos que $h(X) = \varprojlim\langle X'_s, g^t_s, \Gamma\rangle$.

(3) Al ser h una función biyectiva entre espacios compactos, obtenemos que X es homeomorfo a $\varprojlim\langle X'_s, g^t_s, \Gamma\rangle$. □

Ahora, enunciamos el último lema técnico.

Lema 1.3.24. *Sea $\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$ un sistema inverso σ-completo que cumple $(l1)$, $(l2)$ y $(l3)$. Si $t' > s$ y $x \in \varprojlim\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$, entonces $\pi_s(r_{t'}(x)) = \pi_s(x)$.*

Demostración. La igualdad se sigue del siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}\pi_s(r_{t'}(x)) &= \pi_s(P^{-1}_{t'} \circ \pi_{t'}(x)) \\ &= f^{t'}_s \circ \pi_{t'} \circ P^{-1}_{t'} \circ \pi_{t'}(x) \\ &= f^{t'}_s \circ \pi_{t'}(x) \\ &= \pi_s(x).\end{aligned}$$

□

Con los Lemas 1.3.23 y 1.3.24 obtenemos que las condiciones $(l1)$, $(l2)$ y $(l3)$ son suficientes para que el límite de un sistema inverso admita r-esqueleto.

Teorema 1.3.25. *Si $\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$ es un sistema inverso σ-completo que cumple $(l1)$, $(l2)$ y $(l3)$, entonces $\varprojlim\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$ admite un r-esqueleto. Más aún, un r-esqueleto es la familia de retracciones mencionada en la Observación 1.3.22.*

Demostración. De acuerdo a la condición (3) del Lema 1.3.23, podemos identificar a X con $\varprojlim\langle X'_s, g^t_s, \Gamma\rangle$. Probemos que la familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ obtenida de la Observación 1.3.22 satisface las condiciones $(i) - (iv)$ de la Definición 1.3.1. La primera condición (i) se obtiene directamente de $(l1)$. Para probar las condiciones restantes, sea $s, t \in \Gamma$ con $s \le t$. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}r_s \circ r_t &= P^{-1}_s \circ \pi_s \circ P^{-1}_t \circ \pi_t \\ &= P^{-1}_s \circ f^t_s \circ \pi_t \circ P^{-1}_t \circ \pi_t \\ &= P^{-1}_s \circ f^t_s \circ \pi_t \\ &= P^{-1}_s \circ \pi_s = r_s.\end{aligned}$$

Por el otro lado, al ser $X'_s \subseteq X'_t$, deducimos que $r_s(x) \in X'_t$, para todo $x \in X$. Notemos que r_t fija puntos de X'_t, con ello tenemos que $r_t \circ r_s(x) = r_s(x)$ para todo $x \in X$. Así, $r_s = r_s \circ r_t = r_t \circ r_s$ y la condición (ii) es satisfecha. Para la condición (iii), tomemos una sucesión creciente $\langle s_n\rangle_{n<\omega}$ en Γ y sea $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$. Probemos que $r_s(x) = \lim_{n\to\infty} r_{s_n}(x)$, en el subespacio X'_s, para cada $x \in X$. Fijemos $x \in X$. Utilizando la σ-completez del sistema inverso tenemos que $X'_s = \varprojlim\langle X'_{s_n}, g^{s_m}_{s_n}, \langle s_n\rangle_{n<\omega}\rangle$. Tomemos un subconjunto abierto básico $U = \bigcap_{i=1}^{k} \pi^{-1}_{s_{n_i}}(U_i)$ en X'_s que contiene al punto $r_s(x)$, donde U_i es un subconjunto abierto en $X'_{s_{n_i}}$ para todo $1 \le i \le k$. Utilizando la condición (ii) y el hecho de que $s \in \Gamma$ es una cota superior de $\{s_{n_1}, ..., s_{n_k}\}$, tenemos que $\pi_{s_{n_i}}(r_s(x)) = r_{s_{n_i}}(r_s(x)) = r_{s_{n_i}}(x)$, para todo $1 \le i \le k$. Dado que $r_s(x) \in U$, tenemos que $r_{s_{n_i}}(x) \in U_i$, para todo i. Ahora, escogemos $n' < \omega$ tal que $s_{n'}$ es una cota superior de $\{s_{n_1}, ..., s_{n_k}\}$. Si $n \ge n'$, entonces obtenemos que $\pi_{s_{n_i}}(r_{s_n}(x)) = r_{s_{n_i}}(r_{s_n}(x)) = r_{s_{n_i}}(x) \in U_i$ para cada $1 \le i \le k$. Con ello, obtenemos que $r_{s_n}(x) \in U$ para todo $n \ge n'$. Por lo tanto, $r_s(x) = \lim_{n\to\infty} r_{s_n}(x)$, para todo $x \in X$. Para finalizar, debemos probar (iv); esto es, $x = \lim_{s\in\Gamma} r_s(x)$, para cualquier $x \in X$. Fijemos $x \in X$ y sea $U = \bigcap_{i=1}^{k} \pi^{-1}_{s_i}(U_i)$ un abierto básico tal que $x \in U$, donde U_i es un subconjunto abierto en X_{s_i} para cualquier $1 \le i \le k$. Observemos que $\pi_{s_i}(x) \in U_i$ para cada $1 \le i \le k$. Elijamos una cota superior $s' \in \Gamma$ para $\{s_1, ..., s_k\}$. Si $s > s'$, por el Lema 1.3.24, tenemos que $\pi_{s_i}(r_s(x)) = \pi_{s_i}(x) \in U_i$. Por lo tanto, $r_s(x) \in U$ para cada $s \ge s'$. Así, hemos demostrado que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X. □

El Teorema 1.3.25 generaliza de alguna manera el Teorema 1.3.18. Con ayuda del Teorema 1.3.25 y la Proposición 1.3.17 tenemos la caracterización de espacios con r-esqueleto utilizando la noción de límites inversos.

Teorema 1.3.26. *Sea X un espacio compacto. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $X = \varprojlim\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$, *donde* $\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$ *es un sistema inverso σ-completo que cumple* $(l1)$, $(l2)$ *y* $(l3)$.
2. *X admite un r-esqueleto.*

Demostración. Si suponemos que $X = \varprojlim\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$, donde $\langle X_s, f^t_s, \Gamma\rangle$ es un sistema inverso σ-completo que cumple $(l1)$, $(l2)$ y $(l3)$, entonces el Teorema 1.3.25 nos garantiza que X admite un r-esqueleto. Recíprocamente, si X admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$, entonces la Proposición 1.3.17 indica que $X = \varprojlim\langle X_s, R^t_s, \Gamma\rangle$, donde $\langle X_s, R^t_s, \Gamma\rangle$ es un sistema inverso σ-completo, $X_s = r_s(X)$ y $R^t_s := r_s \restriction_{X_t}$. Las condiciones $(l1)$, $(l2)$ y $(l3)$ son fáciles de verificar. □

La caracterización dada en el Teorema 1.3.25 será de gran utilidad en la obtención del resultado principal en la sección referente al estudio de los espacios compactos con r-esqueleto en $[0,1]^T$. Esto es, para hallar la descripción deseada que permita hallar la solución al problema que estudiamos en el cuarto capítulo, los límites inversos nos permitirán encajar espacios compactos en cubos de la forma $[0,1]^T$ de una manera muy práctica para nuestros propósitos.

1.3.2. Funciones ω-monótonas

En el estudio de propiedades que involucran retracciones y familias monótonas ha sido recurrente el uso las funciones ω-monótonas. Estas funciones han sido una herramienta muy útil en el estudio de espacios topológicos tales como los espacios Sokolov ([RHT14]) y los espacios ω-monolíticos ([Cú14a]). Cabe mencionar que fue en el artículo [GFRH16] donde aparece la primera caracterización de espacios compactos de Corson que involucra el uso de funciones ω-monótonas.

Definición 1.3.27. Dados dos conjuntos parcialmente ordenados dirigidos y σ-completos Γ y Γ', decimos que una función $\psi : \Gamma \to \Gamma'$ es *ω-monótona* si cumple que:

- $\psi(s) \leq \psi(t)$ siempre que $s \leq t$; y
- si $\langle s_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$ es una sucesión creciente, entonces $\psi(\sup\{s_n : n < \omega\}) = \sup\{\psi(s_n) : n < \omega\}$.

Observación 1.3.28. Naturalmente, se entiende que la función $\psi : \Gamma \to \Gamma'$ es *monótona* si $\psi(s) \leq \psi(t)$ para cada $s \leq t$.

Es importante mencionar que la composición tiene un comportamiento positivo con las funciones ω-monótonas.

Proposición 1.3.29. *Si $\psi : X \to Y$ y $\varphi : Y \to Z$ son dos funciones ω-monótonas, entonces $\varphi \circ \psi$ es una función ω-monótona.*

Un ejemplo ilustrativo de una función ω-monótona es el siguiente.

Ejemplo 1.3.30. Consideremos un conjunto T distinto del conjunto vacío. La función $\psi : [\Sigma[0,1]^T]^{\leq\omega} \to [T]^{\leq\omega}$ definida como $\psi(A) = supp(A)$ es una función ω-monótona.

En el trabajo con funciones ω-monótonas, dada una asignación arbitraria, resulta recurrente y práctico poder inducir funciones ω-monótonas a partir de la asignación y que respeten las propiedades intrísecas de la asignación. Para ello, el siguiente resultado nos indica bajo qué condiciones uno puede generar una función ω-monótona a un conjunto Γ.

Lema 1.3.31 ([GFRH16])**.** *Sea X un conjunto distinto del vacío y Γ un conjunto parcialmente ordenado dirigido y σ-completo. Si para cada $x \in X$ existe una asignación $s_x \in \Gamma$, entonces existe una función ω-monótona $\psi : [X]^{\leq\omega} \to \Gamma$ tal que $s_x \leq \psi(x)$, para toda $x \in X$.*

Una aplicación trascendental de las funciones ω-monótonas, es que su uso permite cambiar el conjunto de índices Γ de un r-esqueleto completo a un conjunto de subconjunto numerables del espacio inducido. Con respecto a esto, en [GFRH16], los autores utilizan el Lema 1.3.31 para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.3.32 ([GFRH16])**.** *Si X es un espacio compacto con r-esqueleto completo, entonces existe un r-esqueleto completo $\{r_A : A \in [X]^{\leq\omega}\}$ sobre X tal que $r_A(x) = x$ para cada $x \in A$ y $A \in [X]^{\leq\omega}$.*

Recurrentemente en este trabajo, dado un r-esqueleto indicado por un conjunto Γ y con espacio inducido Y, hacemos el reemplazamiento de un conjunto Γ por el conjunto $[Y]^{\leq\omega}$ en la demostración de varios resultados. Por ello, en el siguiente resultado establecemos la generalización de la Proposición 1.3.32 para tener ese cambio de índices mencionado. Es importante mencionar que la demostración es análoga a la demostración de la Proposición 1.3.32, la escribimos para que el lector note la importancia del uso de una función ω-monótona.

Teorema 1.3.33. *Sea X un espacio compacto y $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto sobre X con espacio inducido Y. Entonces existe un r-esqueleto $\{R_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ sobre X tal que*

- *$A \subseteq R_A(X)$, para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$, y*
- *$Y = \bigcup_{A\in[Y]^{\leq\omega}} R_A(X)$.*

Demostración. Para cada $x \in Y$, fijemos $s_x \in \Gamma$ tal que $r_{s_x}(x) = x$. Sea $\psi : [Y]^{\leq\omega} \to \Gamma$ la función ω-monótona dada por el Lema 1.3.31. Así, para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$ definimos $R_A : X \to X$ por $R_A := r_{\psi(A)}$. Sea $A \in [Y]^{\leq\omega}$, por el Lema 1.3.31, tenemos que $s_x \in \psi(A)$, para toda $x \in A$. Si $x \in A$, al ser $r_{s_x}(x) = x$ y $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto, entonces tenemos que $R_A(x) = r_{\psi(A)}(x) = r_{\psi(A)}(r_{s_x}(x)) = r_{s_x}(x) = x$. Así, $A \subseteq R_A(X)$. Justifiquemos ahora que la familia de retracciones $\{R_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ es un r-esqueleto sobre X. En efecto, al ser ψ una función ω-monótona, $s_x \leq \psi(x)$, para toda $x \in Y$, y $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto sobre X, obtenemos de forma inmediata que $\{R_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ cumple con las condiciones $(i) - (iii)$ de la definición de r-esqueleto. Queda probar que se cumple la condición (iv). Primero, al ser $A \subseteq R_A(X)$ para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$, tenemos que $Y = \bigcup_{A\in[Y]^{\leq\omega}} R_A(X)$. Así, recurriendo al Lema 1.3.5, tenemos que $x = \lim_{A\in[Y]^{\leq\omega}} R_A(x)$, para cada $x \in \overline{\bigcup_{A\in[Y]^{\leq\omega}} R_A(X)} = \overline{Y} = X$. Por lo tanto, $\{R_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ es un r-esqueleto sobre X. □

El resultado anterior será una herramienta útil en lo que resta del escrito, de alguna manera simplifica los cálculos que se realizan en la obtención de otros teoremas. Una aplicación es una demostración alternativa del siguiente resultado, él cual fue deducido en [Kub09] utilizando límites inversos,

Teorema 1.3.34 ([Kub09])**.** *Sea X un espacio compacto tal que $w(X) \leq \omega_1$. Si X es un espacio compacto de Valdivia, entonces X admite un r-esqueleto conmutativo de la forma $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.*

Demostración. Al ser X un espacio compacto de Valdivia fijemos un r-esqueleto conmutativo $\{r_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ sobre X con espacio inducido Y, además podemos suponer que $A \subseteq r_A(X)$, para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$. Notemos que es suficiente mostrar el caso $w(X) = \omega_1$, el otro caso es trivial. Por la Proposición 1.2.12, tenemos que $d(Y) = w(X) = \omega_1$. Sea $D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un conjunto denso en Y y para cada $\alpha < \omega_1$ sea $D_\alpha = \{d_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Si consideramos $r_\alpha := r_{D_\alpha}$ para cada $\alpha < \omega$, afirmamos que $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre X. En efecto, la condición (i) y (ii) son inmediatas por ser $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una subfamilia de $\{r_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ y de que $D_\alpha \subseteq D_\beta$ si $\alpha \leq \beta$. Para la condición (iii), sea $\langle \alpha_n \rangle_{n>\omega}$ una sucesión creciente en ω_1 con $\alpha = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$. Basta notar que $D_\alpha = \bigcup_{n<\omega} D_{\alpha_n}$ para tener (iii). Para lo condición (iv) tenemos que para cada $A \in [Y]^{\leq \omega}$ existe α tal que $A \subseteq \overline{D_\alpha} \subseteq r_\alpha(X)$. Así, $Y \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} r_\alpha(X)$, lo cual implica la condición (iv). Con lo cual, $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un r-esqueleto y resulta conmutativo por ser el r-esqueleto original conmutativo. $\square$

1.3.3. c-esqueletos

En [CSGFRH17], utilizan una familia de subconjuntos cerrados y la noción de función ω-monótona para caracterizar a los espacios compactos de Corson y estudiar algunas nociones en el espacio de funciones continuas de X. La noción que referimos es el c-esqueleto.

Conviene recordar lo siguiente: Si tenemos un conjunto X y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, diremos que $\mathcal{B}$ *genera una base para una topología* sobre el conjunto X si $\mathcal{B}$ es una cubierta de X y para cada $U, V \in \mathcal{B}$, si $x \in U \cap V$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. Con lo anterior ya podemos establecer el concepto de c-esqueleto.

Definición 1.3.35 ([CSGFRH17])**.** Consideremos un espacio topológico (X, τ) y una familia $\{(F_s, \mathcal{B}_s) : s \in \Gamma\}$ tal que $\{F_s : s \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X y $\{\mathcal{B}_s : s \in \Gamma\} \subseteq [\tau]^{\leq \omega}$. Decimos que la familia $\{(F_s, \mathcal{B}_s) : s \in \Gamma\}$ es un *c-esqueleto* si se satisfacen las siguientes condiciones:

$(c1)$ $F_s \subseteq F_t$, siempre que $s \leq t$;

$(c2)$ para cada $s \in \Gamma$, $\mathcal{B}_s$ es una base para una topología τ_s sobre X, existe un espacio de Tychonoff Z_s y una función continua $g_s : (X, \tau_s) \to Z_s$ que separa puntos de F_s, y

$(c3)$ la asignación $s \to \mathcal{B}_s$ determina una función ω-monótona.

Y si $X = \bigcup_{s \in \Gamma} F_s$, entonces decimos que el c-esqueleto es *completo*.

El siguiente ejemplo es dado por R. Rojas-Hernández.

Ejemplo 1.3.36 ([RH18])**.** Sea T un conjunto no vacío. El Σ-producto $\Sigma[0,1]^T$ admite un c-esqueleto completo. En efecto, para cada $A \in [T]^{\leq \omega}$, sea $F_A = [0,1]^A \times \{0\}^{T \setminus A}$. Fijemos una base $\mathcal{B}$ para $[0,1]^T$. Para cada $A \in [T]^{\leq \omega}$, sea $\mathcal{B}_A$ la familia que tiene por elementos a los conjuntos $\pi_F^{-1}(\Pi_{i\in F} U_i) \cap \Sigma[0,1]^T$ donde $F \in [A]^{<\omega}$ y $U_i \in \mathcal{B}$, para cada $i \in F$. Uno puede comprobar sin dificultad que $\{(F_A, \mathcal{B}_A) : A \in [T]^{\leq \omega}\}$ es un c-esqueleto completo sobre $\Sigma[0,1]^T$.

Observación 1.3.37. Se sabe que si X es un espacio que admite c-esqueleto (completo), entonces sus subespacios admiten c-esqueleto (completo). Con ello y del Ejemplo 1.3.36 uno puede deducir que los espacios compactos de Corson admiten c-esqueleto completo.

Así, la definición de c-esqueleto permitió encontrar la siguiente descripción para los espacios compactos de Corson.

Teorema 1.3.38 ([CSGFRH17])**.** *Sea X un espacio compacto. X es un espacio compacto de Corson si y solo si X admite un c-esqueleto completo.*

Como es usual, ya que se sabe que para un espacio compacto tener c-esqueleto completo es equivalente a ser Corson, lo natural es buscar espacios compactos que admita un c-esqueleto que no sea completo, más aún, un espacio compacto no Corson que admita c-esqueletos. Los números ordinales nos dan un resultado positivo a tal búsqueda.

Ejemplo 1.3.39. Afirmamos que el espacio ordinal $[0,\omega_1]$ admite un c-esqueleto no completo. En efecto, consideremos a $\Gamma=\omega_1$ y

$$L_{\omega_1} := \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ no es un punto aislado de } [0,\omega_1]\}.$$

Para cada $\alpha<\omega_1$, definamos

$$\mathcal{B}_\alpha := \{\{\gamma\} : \gamma \leq \alpha \text{ y } \gamma \notin L_{\omega_1}\} \cup \{(\gamma,\beta+1) : \gamma < \beta \leq \alpha \text{ y } \beta \in L_{\omega_1}\} \cup \{(\gamma,\omega_1] : \gamma < \alpha\}.$$

Para corroborar que la familia $\{([0,\alpha],\mathcal{B}_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es un c-esqueleto sobre $[0,\omega_1]$ es suficiente definir las funciones g_α's de la siguiente manera:

Para cada $\alpha<\omega_1$, sea $Z_\alpha=[0,\alpha]$ y consideremos la función $g_\alpha : ([0,\omega_1],\mathcal{B}_\alpha) \to Z_\alpha$ dada por

$$g_\alpha(\beta) := \begin{cases} \beta & \text{si } \beta < \alpha, \\ \alpha & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $\beta \leq \omega_1$. Claramente, podemos notar que la función g_α es continua e inyectiva, y la asignación $\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ define una función ω-monótona. Además, ya que $\omega_1 \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$, tenemos que el c-esqueleto no es completo.

1.3.4. Árboles especiales con r-esqueleto

En años recientes, J. Somaglia en [Som16] y [Som17] recurre a una topología especial sobre árboles para presentar nuevos ejemplos relacionados a los r-esqueletos y espacios compactos de Valdivia. Este apartado tiene la finalidad de presentar los principales resultados de J. Somaglia que posteriormente serán requeridos en nuestro capítulo que aborda el Duplicado de Alexandroff de un espacio.

Comenzamos recordando que un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $(T,\leq)$ tal que para todo $x\in T$ el conjunto $\{y\in T : y<x\}$ es bien ordenado. Recordemos que una raíz de T es un elemento mínimo de T, cuando T tiene raíces decimos que es un árbol es enraizado. Cadenas maximales en T son llamadas ramas. En esta tesis, sin perdida de generalidad, suponemos que los árboles tienen una única raíz[2]. La notación que utilizaremos para este tipo especial de árboles es la misma que utilizó P. Nyikos en [Nyi05] para estudiar topologías no usuales en árboles.

[2]los resultados son válidos para árboles con una cantidad finita de raíces puesto que un árbol compacto con una cantidad finita de raíces se puede ver como una suma directa de árboles de una sola raíz y la suma directa finita preserva estos resultados (ver [Som17])

La *altura* de un elemento $x \in T$, es denotada por $ht(x,T)$ y definida como el tipo de orden del conjunto de predecesores de x, $\{y \in T : y < x\}$. La *altura del árbol*, $ht(T)$, está definida como el mínimo número ordinal α para el cual no existe $x \in T$ con $ht(x,T) = \alpha$. Para $x \in T$, la *cofinalidad de* x es definida por $cof(x) = cof(ht(x,T))$, el conjunto de *sucesores inmediatos de* x es el conjunto $ims(x) = \{y \in T : x < y \text{ y } ht(y,T) = ht(x,T)+1\}$ y definimos a $D_T = \{x \in T : cof(x) \leq \omega\}$.

Para $x \in T$, definamos $V_x = \{y \in T : x \leq y\}$ y $\hat{x} = \{y \in T : y \leq x\}$. Sea τ_{cwt} la topología cuyas bases locales se describen de la siguiente manera: Consideremos $x \in T$. Si $ht(x,T)$ es un ordinal sucesor definimos $W_t^F = V_x \setminus \bigcup_{y\in F} V_y$ donde $F \in [ims(x)]^{<\omega}$, la familia $\{V_x^F : F \in [ims(x)]^{<\omega}\}$ es una base de vecindades para el punto x. Si $ht(x,T)$ es un ordinal límite definimos $W_{x,y}^F = V_y \setminus \bigcup_{z\in F} V_z$ donde $y < x$, $h(y,T)$ es un ordinal sucesor y $F \in [ims(x)]^{<\omega}$, la familia $\{V_{x,y}^F : y < x, h(x,t)$ es un ordinal sucesor y $F \in [ims(x)]^{<\omega}\}$ es una base de vecindades para el punto x.

Observación 1.3.40. En [Nyi05] se prueba que (T, τ_{cwt}) es un espacio compacto si y solo si el supremo de toda cadena de T se queda en T. Además, si (T, τ_{cwt}) es un espacio compacto, entonces (T, τ_{cwt}) es un espacio cero dimensional. En esta tesis, supondremos que el árbol (T, τ_{cwt}) es compacto, por ello, en lo que resta del capítulo cuando escribamos árbol T entenderemos que nos referimos al espacio compacto (T, τ_{cwt}).

J. Somaglia en [Som17] se ayuda de las siguientes nociones para construir r-esqueletos en el espacio (T, τ_{cwt}).

Proposición 1.3.41 ([Som17])**.** *Sea T un árbol tal que para cada $x \in T$ con $cof(x) \geq \omega_1$ tenemos que $|ims(x)| < \omega$. Entonces existe una familia $\mathcal{A}(T) \subseteq [T]^{\leq\omega}$ parcialmente ordenada, dirigida y σ-completa por el orden de la contención tal que se satisfacen:*

- *$\mathcal{A}(T)$ es cofinal en $[T]^{\leq\omega}$.*
- *Si $A \in \mathcal{A}(T)$, entonces $\overline{A} \cap D_T = \overline{A \cap D_T}$, el subespacio $\overline{A}$ es un espacio separable y la raíz de T está en A.*
- *Si $A \in \mathcal{A}(T)$ y $x \in \overline{A} \setminus A$, entonces $cof(x) = \omega$.*

Observación 1.3.42. Podemos recuperar de la demostración de la Proposición 1.3.41 dada en [Som17], que si $B \in [T \setminus D_T]^{\leq\omega}$, entonces $B^d \subseteq D_T$.

El siguiente resultado muestra como construir una retracción sobre T.

Proposición 1.3.43 ([Som17])**.** *Sea T un árbol tal que para cada $x \in T$ con $cof(x) \geq \omega_1$ tenemos que $|ims(x)| < \omega$. Si $A \in \mathcal{A}(T)$ y $r_A : T \to T$ es la función definida por $r_A(x) = \max(\hat{x} \cap \overline{A} \cap D_T)$, para cada $x \in T$, entonces r_A es una retracción y $r_A(T) = \overline{A} \cap D_T$.*

Con ello tenemos la siguiente caracterización de los árboles (T, τ_{cwt}) que admiten r-esqueleto.

Teorema 1.3.44 ([Som17])**.** *Un árbol T admite un r-esqueleto si y solo si para toda $x \in T$ con $cof(x) \geq \omega_1$ tenemos que $|ims(x)| < \omega$.*

Observación 1.3.45. Es importante mencionar que la condición: Para cada $x \in T$ con $cof(x) \geq \omega_1$ se tiene que $|ims(x)| < \omega$ en el Teorema 1.3.44 permite demostrar que la familia $\{r_A : A \in \mathcal{A}(T)\}$ es un r-esqueleto sobre T, donde las retracciones r_A son las retracciones definidas en la Proposición 1.3.43.

En la siguiente proposición indica que para los árboles que admiten r-esqueleto el espacio inducido es único.

Proposición 1.3.46 ([Som17])**.** *Si el árbol T admite un r-esqueleto, entonces el espacio inducido por el r-esqueleto es D_T.*

En el contexto de espacios compactos de Valdivia tenemos una condición para que un árbol sea compacto de Valdivia y una propiedad de los árboles que son compactos de Valdivia.

Teorema 1.3.47 ([Som17])**.** *Sea T un árbol. Entonces los siguientes enunciados son verdaderos:*

- *Si T es un espacio compacto de Valdivia, entonces $ht(T) < \omega_2 + 1$.*
- *Si $ht(T) \leq \omega_1 + 1$, entonces T es un espacio compacto de Valdivia.*

1.3.5. Espacios linealmente ordenados

W. Kubiś en su artículo [Kub06] obtiene resultados sobre espacios linealmente ordenados compactos utilizando implícitamente r-esqueletos, de hecho, uno de los tantos resultados que contiene su trabajo es la clasificación de aquellos espacios linealmente ordenados compactos y conexos que son Valdivia. Posteriormente, en [Kal09] O. Kalenda hace un compendio de ejemplos de espacios compactos de Valdivia. En dicho compendio se dedica una sección a los espacios linealmente ordenados compactos y se obtienen resultados descriptivos para los que son compactos de Valdivia y de Corson. En esa misma línea de investigación, conjeturas dejadas en [Kal09] son resueltas por O. Kalenda y W. Kubiś en [KK10]. Para finalizar, es adecuado mencionar la importancia de estos resultados sobre espacios linealmente ordenados ha trascendido a la teoría de espacios de Banach y ejemplo de ello se puede encontrar en [Kub07].

Por lo comentado anteriormente, en esta sección se exponen resultados de los espacios linealmente ordenados compactos de Valdivia que consideramos importantes y que serán considerados en un capítulo posterior y que tienen que ver con nuestra investigación que involucra el Duplicado de Alexandroff de un espacio.

Para un espacio linealmente ordenado L, denotemos por $G(L)$ al conjunto formado por todos los puntos aislados de L y aquellos puntos que son puntos límite de sucesiones no triviales en L.

Una de las primeras propiedades de estos espacios linealmente ordenados es la siguiente.

Proposición 1.3.48 ([Kal09])**.** *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto. Si L es un espacio compacto de Valdivia, entonces se cumple que:*

- *$G(L)$ es el único Σ-conjunto denso de L y*
- *$G(L)$ está formado por todos los puntos G_δ de L.*

En la siguiente proposición enlistaremos propiedades de los espacios linealmente ordenados que son compactos de Valdivia.

Proposición 1.3.49 ([Kal09]). *Consideremos un espacio linealmente ordenado compacto L y F un subconjunto cerrado de L. Si L es un espacio compacto de Valdivia, entonces se cumplen los siguientes enunciados*

- *F es un espacio compacto de Valdivia,*
- *$w(L) \leq \omega_1$ y*
- *si F es un espacio primero numerable, entonces F es metrizable.*

Y tenemos que L es un espacio compacto de Corson si y solo si L es metrizable.

Corolario 1.3.50. *Si L es un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia, entonces para cada $x \in L \setminus G(L)$ tenemos que x tiene que ser aislado por la derecha o ser aislado por la izquierda.*

Respecto a los espacios compactos con r-esqueleto, uno puede observar que la misma demostración hecha por O. Kalenda para probar la Proposición 1.3.48 y parte de la Proposición 1.3.49 funcionan para sus versiones con r-esqueleto.

Proposición 1.3.51. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto. Si L admite un r-esqueleto, entonces se cumple que*

- *$G(L)$ es el espacio inducido por el r-esqueleto y*
- *$G(L)$ está formado por todos los puntos G_δ de L.*

Proposición 1.3.52. *Consideremos un espacio linealmente ordenado compacto L. Si L admite un r-esqueleto y $F \subseteq L$ es un conjunto cerrado, entonces F admite un r-esqueleto.*

Existe trabajo realizado referente a la clasificación de los espacios compactos de Valdivia que son linealmente ordenados. Para el caso de los espacios conexos se tiene la siguiente: Primero, denotemos por $R+1$ a la línea larga, donde la línea larga es el espacio $\omega_1 \times [0,1)$ con la topología dada por el orden lexicográfico y por $(R+1)^{-1}$ a la línea larga con el orden inverso.

Proposición 1.3.53. *[Kub06] Sea L un espacio compacto linealmente ordenado de Valdivia. Si L es un espacio conexo, entonces L es uno de los siguientes espacios:*

1. *el espacio trivial,*
2. *el intervalo $[0,1]$,*

3. *$R+1$,*

4. *$(R+1)^{-1}$ o*

5. *el único espacio linealmente ordenado $[a,b]$ tal que si $c \in (a,b)$ entonces $[a,c)$ es homeomorfo a $(R+1)^{-1}$ y (c,b) es homeomorfo a $R+1$.*

Con resultados que se mostraran en la sección dedicada al Duplicado de Alexandroff y los r-esqueletos, se podrá ver fácilmente que los Duplicados de Alexandroff de los espacios enlistados en la Proposición 1.3.53 son espacios compactos de Valdivia.

CAPÍTULO 2

Espacios cero dimensionales y r-esqueletos

Sabemos que si tenemos un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio compacto X, la cláusula (i) de la definición de r-esqueleto nos indica que para cada $s \in \Gamma$ se cumple o bien que $|r_s(X)| \leq \omega$ o $|r_s(X)| = 2^\omega$. Existen espacios compactos con r-esqueleto tal que todas la retracciones tienen imagen numerable, ejemplo de ello es el espacio ordinal $[0, \kappa]$ con el r-esqueleto descrito en el Ejemplo 1.3.3. Así mismo, hay espacios compactos con r-esqueletos cuyas retracciones tienen imagen no numerable, uno de ellos es el espacio $[0, 1]^T$ con el r-esqueleto dado en el Ejemplo 1.3.2. Por ello resulta bastante natural tratar de resolver lo siguiente:

Pregunta 2.0.1. ¿Qué consecuencias tiene suponer que un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio compacto X satisface que $|r_s(X)| \leq \omega$ para cualquier $s \in \Gamma$?

En este capítulo se expone la respuesta a la pregunta para el caso de los espacios compactos cero dimensionales.

Antes de empezar a enunciar los resultados obtenidos, es conveniente recordar la siguiente termilogía usual asociada a árboles:
El espacio de Cantor será denotado por $\mathcal{C}$, el conjunto $\{0, 1\}^{<\omega}$ es el conjunto de todas las sucesiones finitas de $\{0, 1\}$; por $\sigma\hat{\ }\lambda$ denotaremos la concatenación usual para elementos $\sigma, \lambda \in \{0, 1\}^{<\omega}$, y un segmento inicial de $p \in \mathcal{C}$ de longitud n será denotado por $p \mid n$. Para terminología utilizada y no mencionada en los siguientes resultados de este capítulo el lector puede consultar el libro [Kec12].

Ahora, recordemos la siguiente definición.

Definición 2.0.2. Sea X un espacio. Una familia $\{U_\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{<\omega}\}$ de subconjuntos de X es un *esquema de Cantor* si para cada $\sigma \in \{0, 1\}^{<\omega}$ se cumple que:

- $U_{\sigma\hat{\ }0} \cap U_{\sigma\hat{\ }1} = \emptyset$ y
- $U_{\sigma\hat{\ }i} \subseteq U_\sigma$, para cada $i \in \{0, 1\}$.

Recordemos del folklore que utilizando esquemas de Cantor se demuestra que todo espacio polaco perfecto no vacío tiene encajada una copia del espacio $\mathcal{C}$. En el mismo sentido, el siguiente lema nos indica que este fenómeno también es observable en una familia particular de espacios que admiten r-esqueleto.

Lema 2.0.3. *Sea X un espacio compacto cero dimensional sin puntos aislados. Si la familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X, entonces existen un esquema de Cantor $\{U_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ y $\{x_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subset \bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$ tales que:*

1. *U_σ es un conjunto cerrado y abierto en X,*
2. *$x_\sigma \in U_\sigma$ y para cada $i \in \{0,1\}$, $x_\sigma \notin U_{\sigma\frown i}$, y*
3. *$\bigcap_{n<\omega} U_{p|n} \neq \emptyset$, para todo $p \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Denotemos por Y al espacio inducido por $\{r_s : s \in \Gamma\}$. Procederemos por inducción sobre la longitud de σ. Primero definimos $U_\emptyset := X$ y escogemos un punto $x_\emptyset \in Y$. Ahora, supongamos que para toda $\sigma \in \{0,1\}^{<\omega}$ de longitud n, U_σ y x_σ están definidos. Tomemos $\sigma \in \{0,1\}^{<\omega}$ cuya longitud es n. Al ser x_σ un punto no aislado, podemos escoger dos puntos $z, z' \in U_\sigma$ distintos a x_σ. También, podemos escoger dos conjuntos disjuntos U y V tal que $z \in U$, $z' \in V$, $x_\sigma \notin U$, $x_\sigma \notin V$ y tanto U como V son conjuntos cerrados y abiertos. Así, sea $U_{\sigma\frown 0} := U_\sigma \cap U$ y $U_{\sigma\frown 1} := U_\sigma \cap V$. Recurriendo a la densidad de Y, podemos escoger $x_{\sigma\frown 0} \in U_{\sigma\frown 0} \cap Y$ y $x_{\sigma\frown 1} \in U_{\sigma\frown 1} \cap Y$. Con ello, $\{U_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ y $\{x_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ son como esperábamos. Ahora, para cada $p \in \mathcal{C}$, por construcción la familia $\{U_{p|n} : n < \omega\}$ posee la propiedad de la intersección finita. De la compacidad de X se sigue que $\bigcap_{n<\omega} U_{p|n} \neq \emptyset$. $\square$

Con ayuda del lema anterior podemos establecer el resultado principal de este capítulo, él cual establece que bajo ciertas suposiciones, un r-esqueleto contiene una retracción con imagen no numerable.

Teorema 2.0.4. *Sea X un espacio compacto cero dimensional sin puntos aislados. Si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X, entonces existe $s \in \Gamma$ tal que $r_s(X)$ es no numerable.*

Demostración. Denotemos por Y al espacio inducido por el r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ y sean $\{U_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ y $\{x_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subset \bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$ como en el Lema 2.0.3. Sea $F = \{x_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$. Dado que $F \in [Y]^{\leq\omega}$ y que Y es numerablemente cerrado, tenemos que $\overline{F} \subseteq Y$. Probemos que $\overline{F}$ es no numerable. Para cada $p \in \mathcal{C}$, sea $V_p = \bigcap_{n<\omega} U_{p|n}$ y escogemos $x_p \in \overline{\{x_{p|n} : n < \omega\}}$. Con ello detectamos que $x_p \notin \{x_{p|n} : n < \omega\}$. Al ser $\{x_{p|n} : n < \omega\} \in [Y]^{\leq\omega}$ y Y numerablemente cerrado, obtenemos que $x_p \in Y$ y es fácil ver que $x_p \in V_p$. Así, si $p, q \in \mathcal{C}$ son tales que $p \neq q$, de la igualdad $V_p \cap V_q = \emptyset$ deducimos que $x_p \neq x_q$. Como $\{x_p : p \in \mathcal{C}\} \subseteq \overline{F}$, concluimos que $\overline{F}$ es no numerable. Para finalizar, por ser $F \subseteq Y$, para cada $y \in F$ podemos escoger $s_y \in \Gamma$ tal que $r_{s_y(y)} = y$. Al ser Γ σ-completo tenemos que $\sup\{s_y : y \in F\} \in \Gamma$. Basta tomar $s = \sup\{s_y : y \in F\}$ para tener que $F \subseteq r_s(X)$ y con ello $r_s(X)$ es no numerable. $\square$

Al suponer que las imágenes de las retracciones de un r-esqueleto son numerables, el Teorema 2.0.4 nos garantiza la siguiente propiedad:

Corolario 2.0.5. *Sea X un espacio compacto cero dimensional. Si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X tal que $|r_s(X)| \leq \omega$ para cualquier $s \in \Gamma$, entonces X tiene un subconjunto denso cuyos puntos son aislados.*

Demostración. Sea Y el espacio inducido por un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre X. Supongamos que $U \subseteq X$ es subconjunto abierto sin puntos aislados. Tomemos un abierto no vacío $W \subseteq X$ tal que $\overline{W} \subseteq U$. Claramente, $Y \cap \overline{W}$ es un conjunto denso en $\overline{W}$. Del Teorema 2.0.4, $\overline{W}$ admite un r-esqueleto. Más aún, de la Observación 1.3.14, el r-esqueleto es una subfamilia de restricciones sobre $\overline{W}$ de la familia $\{r_s : s \in \Gamma\}$. Utilizando el Teorema 2.0.4 obtenemos una contradicción. □

En lo que sigue veremos algunos espacios que ejemplifican los resultados previamente obtenidos.

Ejemplo 2.0.6. Sea α un número cardinal tal que $\alpha \geq \omega_1$. El espacio $[0, \alpha]$ con el r-esqueleto dado en el Ejemplo 1.3.3, es un ejemplo que cumple las condiciones del Corolario 2.0.5. Por otro lado, J. Somaglia probó en [Som16] que el Duplicado de Alexandroff de $[0, \omega_2]$ también admite un r-esqueleto que cumple las mismas condiciones.

En la literatura no es trivial encontrar espacios compactos que admitan un r-esqueleto que contengan retracciones de imagen numerable y también retracciones con imagen no numerable. En el siguiente ejemplo vemos un espacio donde si es posible hallar un r-esqueleto con tales características, para lo cual conviene recordar la teoría sobre árboles mencionada en la Sección 1.3.4.

Ejemplo 2.0.7. Para un árbol compacto (T, τ_{cwt}) (por la Observación 1.3.40, (T, τ_{cwt}) es un espacio cero dimensional) que admite un r-esqueleto podemos notar los siguientes casos:

- Si para cada $t \in T$ con $cof(t) \leq \omega$ tenemos que $|ims(t)| = \omega$, entonces T es un espacio compacto cero dimensional sin puntos aislados. Así, por el Teorema 2.0.4, tenemos que cualquier r-esqueleto sobre T tiene una retracción tal que T tiene imagen no numerable bajo dicha retracción. En particular, si consideramos el r-esqueleto dado en la Observación 1.3.45, $\{r_A : A \in \mathcal{A}(T)\}$, tenemos que existe $A \in \mathcal{A}(T)$ tal que $r_A(T) = \overline{A}$ es no numerable. Por la Proposición 1.3.43 y de la construcción de la familia $\mathcal{A}(T)$ hecha en [Som17], podemos encontrar $A \in \mathcal{A}(T)$ tal que $r_A(T) = \overline{A}$ es numerable. Así, tenemos la existencia de un r-esqueleto que contiene retracciones cuyas imágenes pueden ser numerables o no numerables.

- Si para cada $t \in T$ con $cof(t) < \omega$ tenemos que $|ims(t)| < \omega$, entonces t es un punto aislado de T. No es díficil observar que $\{t \in T : cof(t) < \omega\}$ es un conjunto denso en T, lo cual muestra que T es un espacio compacto cero dimensional que admite un subconjunto denso cuyos puntos son aislados. En este caso, no se aseguró la existencia de r-esqueletos sobre T que tengan retracciones con imágenes numerables o no numerables. Lo cual deja abierta una pregunta interesante a futuro.

Ejemplo 2.0.8. En el artículo [GFRH16], los autores utilizan un r-esqueleto completo sobre un espacio compacto de Corson X para generar un r-esqueleto completo en su Duplicado de Alexandroff. De su construcción, si las retracciones del r-esqueleto obtenido en el Duplicado de Alexandroff se restrigen a la copia de X en su Duplicado de Alexandroff, entonces tenemos, en esencia, el r-esqueleto inicial en el espacio X. Dado que existen espacios compactos de Corson que admiten r-esqueletos cuyas retracciones tienen imagen no numerable, la construcción de los autores de [GFRH16], indicaría que hay Duplicados de Alexandroff que admiten r-esqueletos cuyas retracciones tienen imagen no numerable. Sin embargo, el Duplicado de Alexandroff de cualquier espacio siempre tiene un subconjunto denso formado por puntos aislados, esto ilustra que la condición dada en el Corolario 2.0.5 no es una condición suficiente.

Respecto al Corolario 2.0.5 formulamos la siguiente pregunta abierta.

Pregunta 2.0.9. ¿Qué espacios compactos con un subconjunto denso de puntos aislados admiten un r-esqueleto de tal manera que las retracciones tengan imágenes numerables?

J. Somaglia en [Som16] recurre al Ejemplo 1.3.3 y prueba que el Duplicado de Alexandroff del espacio $[0, \alpha]$ admite un r-esqueleto, para cada número ordinal $\alpha \geq \omega_1$. Más aún, el r-esqueleto obtenido por J. Somaglia es un r-esqueleto cuyas retracciones tienen imagen numerable. Así, siendo el Duplicado de Alexandroff del espacio $[0, \alpha]$ un espacio distinto a un subespacio ordinal, el Duplicado de Alexandroff de $[0, \alpha]$ es un ejemplo de la existencia de espacios distintos a un espacio ordinal que admite un r-esqueleto cuyas retracciones tengan imagen numerable.

Finalizamos este capítulo con dos preguntas abiertas que surgen al considerar el comportamiento de las imágenes de las retracciones de un r-esqueleto.

Pregunta 2.0.10. Consideremos un espacio compacto X que admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$. Si $r_s(X)$ es conexo para cada $s \in \Gamma$, ¿es X un espacio conexo?

Generalizando la Pregunta 2.0.10, tenemos lo siguiente:

Pregunta 2.0.11. Si X es un espacio compacto que admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ y $\mathbf{P}$ una propiedad topológica. Si $r_s(X)$ tiene la propiedad $\mathbf{P}$, para cada $s \in \Gamma$, ¿qué propiedad $\mathbf{Q}$ podría tener X en relación a la propiedad $\mathbf{P}$?

CAPÍTULO 3

El Duplicado de Alexandroff y los r-esqueletos

Como hemos dicho anteriormente, el comportamiento del Duplicado de Alexandroff con las propiedades de ser compacto de Valdivia ha sido objeto de estudio para diversos autores (por ejemplo ver [Kal09], [Som16] y [CSGFRH17]), dada la estrecha relación entre los r-esqueletos y los espacios compactos de Valdivia, es natural que se pretenda estudiar el comportamiento de los espacios compactos con r-esqueleto bajo la operación topológica del Duplicado de Alexandroff (ver [Som16]). De esta forma, en este capítulo respondemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 3.0.1. Si X es un espacio compacto con r-esqueleto, ¿cuándo el Duplicado de Alexandroff de X admite un r-esqueleto?

En concreto, establecemos condiciones para que un r-esqueleto sobre un espacio compacto X pueda inducir un r-esqueleto en el Duplicado de Alexandroff del espacio X y viceversa. Para ello, empezamos recordando que el *Duplicado de Alexandroff* de un espacio topológico X, denotado por $AD(X)$, es el espacio $X \times \{0,1\}$ cuya topología está dada de la siguiente manera: los puntos en $X \times \{1\}$ son declarados aislados, y para un punto de la forma $(x, 0)$, los conjuntos de la forma $(U \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\}$, donde U es un abierto para $x \in X$, forman una base de abiertos para $(x, 0)$. Para cada $i \in \{0,1\}$, denotaremos al subespacio $X \times \{i\}$ por X_i.

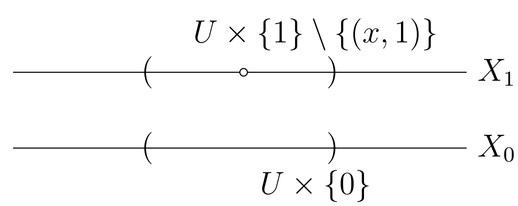

Figura 3.1: Si U es un conjunto abierto en X que contiene a x, un conjunto abierto básico para $(x,0)$ es $(U \times 2) \setminus \{(x,1)\}$.

Denotamos por π la proyección de $AD(X)$ sobre X, es decir, $\pi(x,i) = x$. Además, como es de esperar, el espacio X es homeomorfo al subespacio X_0, sabiendo esto, recurrentemente, identificaremos a X_0 con X, según sea necesario.

Volviendo a la Pregunta 3.0.1, resulta natural buscar la respuesta atacando el problema de manera directa, esto es: dado un r-esqueleto sobre un espacio compacto X, buscamos extender las retracciones del r-esqueleto a una familia de retracciones sobre el espacio $AD(X)$ cuyas propiedades garanticen ser un r-esqueleto. Un primer paso para poder entender el contexto de como construir r-esqueletos sobre Duplicados de Alexandroff, es recurrir a la táctica usual de estudiar el problema en un sentido inverso, es decir, para un espacio compacto X, consideramos un r-esqueleto sobre $AD(X)$ y estudiamos las propiedades que posea tal r-esqueleto y que no sean las canónicas de un r-esqueleto usual, esto es, aquellas propiedades ligadas a la estructura del espacio $AD(X)$. Así, en el siguiente lema tenemos nuestro primer resultado que exhibe propiedades de subconjuntos numerables del residuo de un inducido por un r-esqueleto sobre el Duplicado de Alexandroff, más adelante veremos que estas propiedades resultan ser una condición necesaria para poder extender r-esqueletos a un Duplicado de Alexandroff.

Lema 3.0.2. *Sea X un espacio compacto. Si $AD(X)$ admite un r-esqueleto con espacio inducido $\hat{Y}$ y $Y = \pi(\hat{Y} \cap X_0)$, entonces para cualquier $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ se cumple que*

($*$) *$B^d \subseteq Y$ y*

($**$) *$cl_X(B) \setminus B$ es un espacio cósmico.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.33, podemos considerar un r-esqueleto sobre $AD(X)$ de la forma $\{r_C : C \in [\hat{Y}]^{\leq\omega}\}$ tal que $C \subseteq r_C(AD(X))$. Fijemos $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$. Si B es un conjunto finito, entonces el resultado se sigue de manera inmediata. Así, supongamos que $|B| = \omega$ y $p \in B^d$. Notemos que $(p, 0) \in cl_{AD(X)}(B \times \{1\})$. Al ser $B \times \{1\} \subseteq \hat{Y}$ y $\hat{Y}$ un conjunto numerablemente cerrado, tenemos que $(p, 0) \in \hat{Y}$ y por tanto $p \in Y$. Con ello, $B^d \subseteq Y$ y podemos deducir que B es un subespacio discreto en $X \setminus Y$. Claramente $B^d \times \{0\} \subseteq cl_{AD(X)}(B \times \{1\})$. Dado que $B \times \{1\} \in [\hat{Y}]^{\leq\omega}$, obtenemos que $cl_{AD(X)}(B \times \{1\}) \subseteq r_{B\times\{1\}}(AD(X))$. Usando que $r_{B\times\{1\}}(AD(X))$ es un espacio cósmico, concluimos que $B^d = cl_X(B) \setminus B \subseteq Y$ es también un espacio cósmico. □

Observación 3.0.3. Notar que si $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ cumple la condición ($*$), tenemos que $B^d = cl_X(B) \setminus B$, es decir, B es un subespacio discreto de $X \setminus Y$.

Regresando a nuestra estrategía de atacar el problema de forma directa, consideremos un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio compacto X. Si queremos generar un r-esqueleto $\{R_s : s \in \Gamma'\}$ sobre $AD(X)$, tenemos que analizar por un lado, las propiedades individuales requeridas para cada retracción y por otro lado las propiedades que resultan de la interacción de los índices de las retracciones. Además, por lo visto en el Lema 3.0.2, buscar que las condiciones ($*$) y ($**$) sean satisfechas. Para el primer análisis, tenemos que si queremos extender una retracción r_s a una retracción R_s, tenemos que requerir lo siguiente:

- $R_s \restriction_{X_0}$ sea en escencia la retracción r_s, y
- $R_s(AD(X))$ sea un espacio cósmico.

El haber detectado las propiedades $(*)$ y $(**)$ nos permite obtener el siguiente lema, el cual es una técnica con la que podemos extender una retración de un espacio topológico a una retracción a su Duplicado de Alexandroff de tal manera que conserva las propiedades de la retracción que nos interesan.

Lema 3.0.4. *Sea X un espacio compacto que admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ con espacio inducido Y. Si $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ satisface la condición $(*)$ del Lema 3.0.2, entonces para cada $s \in \Gamma$ tal que $B^d \subseteq r_s(X)$ y para toda $A \in [r_s(X)]^{\leq\omega}$, la función $R_{(A,B,s)} : AD(X) \to AD(X)$ definida como sigue:*

$$R_{(A,B,s)}(x,i) := \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_s(x),0) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cualquier $(x,i) \in AD(X)$, es una retracción sobre $AD(X)$.

Demostración. Sean $A \in [r_s(X)]^{\leq\omega}$ y $B \in [X\setminus Y]^{\leq\omega}$ tal que $B^d \subseteq r_s(X)$. Primero, mostraremos que la función $R_{(A,B,s)}$ es una función continua. Tomemos una red $\langle (x_\lambda, i_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ y un punto $(x,i) \in AD(X)$ tal que $(x_\lambda, i_\lambda) \to (x,i)$. Primero, asumimos que $i = 1$. Al ser $(x,i) = (x,1)$ un punto aislado, deducimos que la red $\langle (x_\lambda, i_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ es eventualmente constante, de hecho, es eventualmente $(x,1)$. Así, claramente $\langle R_{(A,B)}(x_\lambda, i_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ es una red convergente a $R_{(A,B)}(x,1)$. Ahora, supongamos que $i = 0$ y que $\langle (x_\lambda, i_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ es una red no trivial. Con ello, $R_{(A,B,s)}(x,0) = (r_s(x),0)$ y todo se reduce a los siguientes casos:

- Que $\langle (x_\lambda, i_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_0$. Con ello tenemos que $R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) = (r_s(x_\lambda),0)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Al ser r_s una función continua, obtenemos que $r_s(x_\lambda) \to r_s(x)$. Así, $R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) = (r_s(x_\lambda),0) \to (r_s(x),0) = R_{(A,B,s)}(x,0)$.
- Asumir que $\langle (x_\lambda, i_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_1$. Bajo esta hipótesis, tenemos los siguientes dos casos:
  - Si $\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ contiene una subred que eventualmente queda contenida en $A\cup B$, entonces $x \in cl_X(A \cup B)$. Supongamos que $x_\lambda \in A \cup B$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Entonces, $R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) = (x_\lambda, 1)$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Si $x \in B$, entonces de la condición $(*)$ deducimos que la red $\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ eventualmente queda contenida en A. Dado que $A \subseteq r_s(X)$, obtenemos que $x \in r_s(X)$, lo cual es una contradicción a la igualdad $Y \cap B = \emptyset$. Con ello tenemos que $x \in cl_X(A) \cup \big(cl_X(B) \setminus B\big)$. Al ser $A \cup \big(cl_X(B) \setminus B\big) \subseteq r_s(X)$ tenemos que $r_s(x) = x$ y con ello
  $$R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) = (x_\lambda, 1) \to (x,0) = R_{(A,B,s)}(x,0).$$
  - si $\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X\setminus\big(A\cup B\big)$, entonces tenemos que $R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) = (r_s(x_\lambda),0)$. Utilizando la continuidad de r_s, tenemos que
  $$R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) = (r_s(x_\lambda),0) \to (r_s(x),0) = R_{(A,B,s)}(x,0).$$

En todos los casos tenemos que $R_{(A,B,s)}(x_\lambda, i_\lambda) \to R_{(A,B,s)}(x,i)$, con ello, $R_{(A,B,s)}$ es una función continua. Resta probar que $R_{(A,B,s)}$ es una retracción, fijemos $(x,i) \in AD(X)$, con lo cual:

$$\begin{aligned} R_{(A,B,s)} \circ R_{(A,B,s)}(x,i) &= \begin{cases} R_{(A,B,s)}(x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ R_{(A,B,s)}(r_s(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_s(r_s(x)),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_s(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= R_{(A,B,s)}(x,i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R_{(A,B,s)}$ es una retracción sobre $AD(X)$. $\square$

Ahora, teniendo el método para extender retracciones, procedemos a demostrar el resultado principal de este capítulo y que da respuesta a la Pregunta 3.0.1. anticipamos al lector que a partir de aquí utilizaremos conjuntos de índices Γ de $[Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ con el orden denotado por $\preceq$ y dado por $(A,B) \preceq (A',B')$ si $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$. Hacemos notar que si decimos que $\Gamma \subseteq [Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ es σ-completo, asumiremos que $\sup_\Gamma\{(A_n,B_n) : n < \omega\} = (\bigcup_{n<\omega} A_n, \bigcup_{n<\omega} B_n)$, para cada sucesión creciente $\langle (A_n,B_n)\rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$.

Teorema 3.0.5. *Sea X un espacio compacto. $AD(X)$ admite un r-esqueleto si y solo si existe un r-esqueleto $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ sobre X con espacio inducido Y tal que $\Gamma \subseteq [Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ es σ-completo y cofinal en $[Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$, y para cualquier $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

$(*)$ *$B^d \subseteq Y$, y*

$(***)$ *si $(A,B) \in \Gamma$, entonces $A \subseteq r_{(A,B)}(X)$ y $B^d \subseteq r_{(A,B)}(X)$.*

Demostración. Para la necesidad, supongamos que $AD(X)$ admite un r-esqueleto con espacio inducido $\hat{Y}$. Al ser $\hat{Y}$ denso en $AD(X)$, tenemos que $X_1 \subseteq \hat{Y}$. De acuerdo al Teorema 1.3.33, podemos asumir que el r-esqueleto sobre $AD(X)$ es de la forma $\{R_C : C \in [\hat{Y}]^{\leq\omega}\}$ con inducido $\hat{Y}$ y $C \subseteq R_C(AD(X))$, para cada $C \in [\hat{Y}]^{\leq\omega}$. Denotemos por $Y = \pi(\hat{Y} \cap X_0)$ y sea $\Gamma' = [Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$. Para cada $(A,B) \in \Gamma'$, definimos la función $R_{(A,B)} = R_{A \times \{0,1\} \cup B \times \{1\}}$. Probemos que la familia $\{R_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto sobre $AD(X)$ con espacio inducido $\hat{Y}$. En efecto, las condiciones (i), (ii) y (iii) son satisfechas porque $\{R_C : C \in [\hat{Y}]^{\leq\omega}\}$ es un r-esqueleto sobre $AD(X)$. Para mostrar que la condición (iv) se cumple, sea $(x,i) \in \hat{Y}$ y escojamos $(A,B) \in \Gamma'$ tal que $(x,i) \in A \times \{0,1\} \cup B \times \{1\}$. Se sigue que $(x,i) = R_{A \times \{0,1\} \cup B \times \{1\}}(x,i) = R_{(A,B)}(x,i)$ y con ello la condición (iv) es satisfecha. Así, la familia $\{R_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto sobre $AD(X)$ y no es difícil ver que su espacio inducido es $\hat{Y}$. Por la Observación 1.3.14, el conjunto $\Gamma = \{(A,B) \in \Gamma' : R_{(A,B)}(X_0) \subseteq X_0\}$ es σ-completo y cofinal en Γ' y $\{R_{(A,B)} \restriction_{X_0}: (A,B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X_0 con espacio inducido $\hat{Y} \cap X_0$. Ahora, para cada $(A,B) \in \Gamma$, definamos $r_{(A,B)} = \pi \circ R_{(A,B)} \restriction_{X_0}$. Con ello, $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X con espacio inducido Y. Además, el Lema 3.0.2 nos asegura que las condiciones $(*)$ y $(**)$ se cumplen. La condición $(***)$ es consecuencia de la construcción del r-esqueleto.

Ahora para la suficiencia. Sea $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ un r-esqueleto sobre X que satisface las condiciones $(*) - (***)$, donde $\Gamma \subseteq [Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ es σ-completo y cofinal en $[Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$ y Y es el espacio inducido por el r-esqueleto. Para cada $(A,B) \in \Gamma$, sea $R_{(A,B)} = R_{(A,B,(A,B))}$, donde $R_{(A,B,(A,B))}$ es como en el Lema 3.0.4. Al saber que $B^d \subseteq r_{(A,B)}(X)$ y $A \subseteq r_{(A,B)}(X)$, el Lema 3.0.4 nos asegura que $R_{(A,B)} = R_{(A,B,(A,B))}$ es una retracción. Ahora, mostremos que $\{R_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ satisface las condiciones $(i) - (iv)$ de la definición de r-esqueleto.

(i) Si $(A,B) \in \Gamma$, entonces $R_{(A,B)}(AD(X)) = (r_{(A,B)}(X) \times \{0\}) \cup ((A \cup B) \times \{1\})$ es un espacio cósmico.

(ii) Sean $(A,B), (A',B') \in \Gamma$ tales que $(A,B) \preceq (A',B')$. Fijemos $(x,i) \in AD(X)$. Con lo cual tenemos que

$$
\begin{aligned}
R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')}(x,i) &= \begin{cases} R_{(A,B)}(x,1) & \text{si } x \in A' \cup B' \text{ y } i = 1, \\ R_{(A,B)}(r_{(A',B')}(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_{(A,B)}(x),0) & \text{si } x \in (A' \cup B') \setminus (A \cup B) \text{ y } i = 1, \\ (r_{(A,B)}(r_{(A',B')}(x)),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_{(A,B)}(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= R_{(A,B)}(x,i).
\end{aligned}
$$

Y también tenemos que

$$
\begin{aligned}
R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}(x,i) &= \begin{cases} R_{(A',B')}(x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ R_{(A',B')}(r_{(A,B)}(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_{(A',B')}(r_{(A,B)}(x)),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in A \cup B \text{ y } i = 1, \\ (r_{(A,B)}(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= R_{(A,B)}(x,i).
\end{aligned}
$$

Con ello tenemos que $R_{(A,B)} = R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')} = R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}$ siempre que $(A,B) \preceq (A',B')$.

(*iii*) Para obtener la condición (*iii*), sea $\langle (A_n, B_n) \rangle_{n<\omega}$ una sucesión creciente en Γ. Para simplificar la notación pongamos $(A, B) = \sup\{(A_n, B_n) : n < \omega\}$. Fijemos $(x, i) \in AD(X)$. Probaremos que $R_{(A,B)}(x, i) = \lim_{n\to\infty} R_{(A_n,B_n)}(x, i)$. Hay dos casos, uno de ellos es si $i = 0$, entonces $R_{(A,B)}(x, 0) = (r_{(A,B)}(x), 0)$ y $R_{(A_n,B_n)}(x, 0) = (r_{(A_n,B_n)}(x), 0)$ para cada $n < \omega$. Al tener que $r_{(A,B)}(x) = \lim_{n\to\infty} r_{(A_n,B_n)}(x)$, podemos deducir que $R_{(A,B)}(x, 0) = \lim_{n\to\infty} R_{(A_n,B_n)}(x, 0)$. El otro caso es cuando $i = 1$. Si $x \in A\cup B$, entonces existe $n_0 < \omega$ tal que $x \in A_n\cup B_n$ para todo $n \geq n_0$. Así, $R_{(A,B)}(x, 1) = (x, 1) = R_{(A_n,B_n)}(x, 1)$, para cualquier $n \geq n_0$. De lo cual se sigue que $R_{(A,B)}(x, 1) = \lim_{n\to\infty} R_{(A_n,B_n)}(x, 1)$. Ahora, si $x \notin A\cup B$, entonces $R_{(A,B)}(x, 1) = (r_{(A,B)}(x), 0)$ y $R_{(A_n,B_n)}(x, 1) = (r_{(A_n,B_n)}(x), 0)$, para cada $n < \omega$. Como se cumple la igualdad $r_{(A,B)}(x) = \lim_{n\to\infty} r_{(A_n,B_n)}(x)$, tenemos que $R_{(A,B)}(x, 1) = \lim_{n\to\infty} R_{(A_n,B_n)}(x, 1)$. Para todos los casos obtenemos que $R_{(A,B)}(x, i) = \lim_{n\to\infty} R_{(A_n,B_n)}(x, i)$ y con ello la condición (*iii*) queda satisfecha.

(*iv*) Fijemos $(x, i) \in AD(X)$. Por un lado, supongamos que $i = 0$. Con ello notemos que la igualdad $x = \lim_{(A,B)\in\Gamma} r_{(A,B)}(x)$ implica que $(x, 0) = \lim_{(A,B)\in\Gamma} R_{(A,B)}(x, 0)$ y así (*iv*) se cumple para este caso. Por otro lado, supongamos que $i = 1$ y sea $x \in Y$. Dada la cofinalidad de Γ, existe $(A, B) \in \Gamma$ tal que $\{x\} \subseteq A$. Como $x \in A \cup B$, tenemos que $(x, 1) = R_{(A,B)}(x, 1)$. Para el caso en que $x \in X \setminus Y$. Usando de nuevo la cofinalidad de Γ, encontramos $(A, B) \in \Gamma$ tal que $\{x\} \subseteq B$. Se sigue que $(x, 1) = R_{(A,B)}(x, 1)$. Por lo tanto, $(x, i) = \lim_{(A,B)\in\Gamma} R_{(A,B)}(x, i)$, para cada $i \in \{0, 1\}$.

Por lo tanto, $\{R_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre $AD(X)$. $\square$

Observación 3.0.6. Al ser la propiedad de ser espacio cósmico una propiedad hereditaria, es importante notar que la propiedad $(***)$ implica la propiedad $(**)$.

Del desarrollo de la demostración del Teorema 3.0.5 podemos deducir lo siguiente.

Corolario 3.0.7. *Sea X un espacio compacto. Si $AD(X)$ admite un r-esqueleto conmutativo, entonces el r-esqueleto $\{r_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma\}$ sobre X obtenido en el Teorema 3.0.5 es conmutativo.*

Lo anterior, nos aporta una prueba distinta al resultado ya obtenido por O. Kalenda en [Kal09]: Si $AD(X)$ es un espacio compacto de Valdivia, entonces X es un espacio compacto de Valdivia.

Con el Teorema 3.0.5 y los trabajos existentes antes de nuestro resultado, las relaciones de los r-esqueletos se resumen en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X \text{ Corson} \arrow[d, leftrightarrow] & X \text{ Valdivia} & X \text{ admite } r\text{-esqueleto} + (*) + (***) \arrow[d, leftrightarrow] \\
AD(X) \text{ Corson} & AD(X) \text{ Valdivia} \arrow[u] & AD(X) \text{ admite } r\text{-esqueleto}
\end{tikzcd}$$

Sabemos que la flecha faltante no necesariamente se cumple. En el artículo [Kal09] se exhiben algunos ejemplos de espacios compactos de Valdivia cuyos Duplicados de Alexandroff no son Valdivia.

Evidentemente, queremos saber si el método para extender el r-esqueleto preserva la conmutatividad. Resulta que si un r-esqueleto conmutativo de la forma $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ sobre X satisface las condiciones del Teorema 3.0.5, no sabemos si este r-esqueleto puede inducir un r-esqueleto conmutativo sobre $AD(X)$. Sin embargo, podemos dar una condición para poder obtener la conmutatividad deseada.

Corolario 3.0.8. *Sea X un espacio compacto y $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ un r-esqueleto conmutativo sobre X(como en el Teorema 3.0.5) que satisface la siguiente condición*

$(***\,*)$ *Para cada $(A,B), (A',B') \in \Gamma$, $r_{(A,B)}(x) = r_{(A',B')}(r_{(A,B)}(x))$, para todo $x \in B' \setminus B$.*

Entonces $AD(X)$ admite un r-esqueleto conmutativo.

Demostración. Si $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto que satisface $(*)$ y $(***)$, entonces el Teorema 3.0.5 garantiza que existe un r-esqueleto $\{R_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ sobre $AD(X)$, donde $R_{(A,B)} = R_{(A,B,(A,B))}$. Veamos que $\{R_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es conmutativo. Consideremos $(A,B), (A',B') \in \Gamma$, queremos ver que $R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')} = R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}$. Sea $x \in X$. Para $(x,0)$,

$$\begin{aligned} R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')}(x,0) &= (r_{(A,B)} \circ r_{(A',B')}(x), 0) \\ &= (r_{(A',B')} \circ r_{(A,B)}(x), 0) \\ &= R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}(x,0). \end{aligned}$$

Para $(x,1)$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')}(x,1) &= \begin{cases} R_{(A,B)}(x,1) & \text{si } x \in A' \cup B', \\ R_{(A,B)}(r_{(A',B')}(x), 0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in (A \cap A') \cup (B \cap B'), \\ (r_{(A,B)}(x), 0) & \text{si } x \in (A' \cup B') \setminus (A \cup B), \\ (r_{(A,B)} \circ r_{(A',B')}(x), 0) & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}(x,1) = \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in (A \cap A') \cup (B \cap B'), \\ (r_{(A',B')}(x), 0) & \text{si } x \in (A \cup B) \setminus (A' \cup B'), \\ (r_{(A',B')} \circ r_{(A,B)}(x), 0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para tener que $R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')}(x,1) = R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}(x,1)$, por los cálculos anteriores y la conmutatividad de las retracciones $r_{(A,B))}$ y $r_{(A',B')}$, resta comprobar que $r_{(A,B)}(x) =$

$r_{(A',B')} \circ r_{(A,B)}(x)$ para $x \in (A' \cup B') \setminus (A \cup B)$ y $r_{(A',B')}(x) = r_{(A,B)} \circ r_{(A',B')}(x)$ para $x \in (A \cup B) \setminus (A' \cup B')$. Es suficiente verificar la primera de las igualdades, la segunda resulta ser un caso análogo, procedamos a ello, sea $x \in (A' \cup B') \setminus (A \cup B)$. Si $x \in A' \setminus A$, entonces utilizando la conmutatividad de $r_{(A,B)}$ y $r_{(A',B')}$ y que $r_{(A',B')}$ fija los elementos de A', tenemos que

$$r_{(A',B')} \circ r_{(A,B)}(x) = r_{(A,B)} \circ r_{(A',B')}(x) = r_{(A,B)}(x),$$

es decir, la igualdad deseada se cumple. Cuando $x \in B' \setminus B$, la condición $(* * **)$ garantiza la igualdad. Así, nuestra igualdad deseada se cumple para todos los casos. Con ello, tenemos que $R_{(A,B)} \circ R_{(A',B')}(x, 1) = R_{(A',B')} \circ R_{(A,B)}(x, 1)$. Por lo tanto, $\{R_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre $AD(X)$. $\square$

Otro fenómeno que ocurre en los Duplicados con Alexandroff que admiten r-esqueleto y que es consecuencia directa de la condición $(*)$ es el siguiente.

Corolario 3.0.9. *Sea X un espacio compacto. Si $AD(X)$ admite un r-esqueleto, entonces el espacio inducido $Y = \pi(\hat{Y} \cap X_0)$ de X es único. Es decir, si Y' es el espacio inducido por un r-esqueleto sobre X, entonces $Y' = Y$.*

Demostración. Sea Y' un subconjunto de X inducido por un r-esqueleto sobre X. Supongamos que $Y \neq Y'$. Por la Proposición 1.3.16, tenemos que $Y \cap Y'$ no puede ser denso en X. Así, existe un subconjunto abierto no vacío V no discreto de X tal que $V \cap (Y \cap Y') = \emptyset$. Escojamos un subconjunto abierto no vacío W no discreto tal que $cl_X(W) \subseteq V$. Utilizando la densidad de Y', existe un subconjunto infinito numerable $B \subseteq W \cap Y'$ tal que $B^d \neq \emptyset$. Al ser Y' numerablemente cerrado, tenemos que

$$cl_X(B) \subseteq cl_X(W) \cap Y' \subseteq V \cap Y'.$$

Sin embargo, el Lema 3.0.2 implica que $B^d = cl_X(B) \setminus B \subseteq Y$, lo cual no es posible puesto que $V \cap (Y \cap Y') = \emptyset$. Por lo tanto, $Y = Y'$. $\square$

Como consecuencia del resultado previo, si para un espacio compacto X tenemos que $AD(X)$ no es un espacio compacto de Corson y admite un r-esqueleto, entonces X no es un espacio súper Valdivia[1]. Esto en particular implica que $AD([0, 1]^\kappa)$ no admite un r-esqueleto, para toda $\kappa \geq \omega_1$. Así, todo conduce a considerar a la familia de espacios compactos que admitan r-esqueleto donde el espacio inducido sea único, ejemplos conocidos son los espacios de ordinales o espacios construidos a partir de ellos (los árboles considerados por J. Somaglia en [Som17]).

La unicidad del espacio inducido dada por el Corolario 3.0.9, nos lleva al siguiente problema abierto.

Pregunta 3.0.10. ¿Existe una caracterización para los espacios compactos que admitan r-esqueleto donde el espacio inducido sea único?

[1]Decimos que un espacio compacto X es *súper Valdivia* si para cualquier $x \in X$ existe un Σ-conjunto denso Y de X tal que $x \in Y$ (ver [Kal00]).

En el siguiente enunciado, vemos que con el uso de las funciones ω-monótonas bajo ciertas condiciones podemos extender un r-esqueleto sobre un espacio a su Duplicado de Alexandroff.

Proposición 3.0.11. *Sea X un espacio compacto con un r-esqueleto $\{r_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ y espacio inducido Y. Si la cláusula $(*)$ se cumple y existe una función ω-monótona $\psi : [X \setminus Y]^{\leq\omega} \to [Y]^{\leq\omega}$ tal que para toda $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$, $B^d \subseteq r_{\psi(B)}(X)$, entonces $AD(X)$ admite un r-esqueleto.*

Demostración. Sea $\Gamma' = [Y]^{\leq\omega} \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$. Para cada $(A, B) \in \Gamma'$, denotemos por $r_{(A,B)} : X \to X$ la función definida por la igualdad $r_{(A,B)} = r_{A\cup\psi(B)}$. La familia $\{r_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto sobre X que satisface las condiciones $(*)$ y $(***)$. Por lo tanto, utilizando el Teorema 3.0.5, $AD(X)$ admite un r-esqueleto. $\square$

Con respecto a la Proposición 3.0.11, no sabemos si la ω-monotonía de una función es suficiente para preservar la conmutatividad de un r-esqueleto.

Las ideas de la demostración del Teorema 3.0.5 nos permiten determinar bajo qué condiciones ciertos espacios compactos de Valdivia poseen Duplicado de Alexandroff Valdivia.

Proposición 3.0.12. *Sea X un espacio compacto de Valdivia y Y un Σ-conjunto denso de X. Si $X\setminus Y$ es numerable y se satisfacen las condiciones $(*)$ y $(**)$, entonces $AD(X)$ es un compacto de Valdivia.*

Demostración. Consideremos un r-esqueleto conmutativo $\{r_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ cuyo inducido sea Y y para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$ tenemos que $A \subseteq r_A(X)$. Como $X \setminus Y$ es numerable y se cumplen las condiciones $(*)$ y $(**)$, podemos considerar

$$\Gamma = \{A \in [Y]^{\leq\omega} : (X \setminus Y)^d \subseteq r_A(X)\}.$$

Γ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo (si $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$ es una sucesión creciente, entonces $\sup_\Gamma\{A_n : n < \omega\} = \bigcup_{n<\omega} A_n$). Además, Γ es cofinal en $[Y]^{\leq\omega}$. Para cada $A \in \Gamma$, definimos la función $R_A : AD(X) \to AD(X)$ definida como sigue

$$R_A(x, i) := \begin{cases} (x, 1) & \text{si } i = 1 \text{ y } x \in A \cup X \setminus Y\ , \\ (r_A(x), 0) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cualquier $(x, i) \in AD(X)$. Con argumentos similares a la prueba del Teorema 3.0.5 podemos comprobar que la familia $\{R_A : A \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre $AD(X)$. Queda ver que es un r-esqueleto conmutativo. Sean $A, A' \in \Gamma$, veamos que $R_A \circ R_{A'} = R_{A'} \circ R_A$. Para cualquier $x \in X$, es fácil mostrar la conmutatividad en el punto $(x, 0)$. Veamos el caso para el punto $(x, 1)$. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} R_A \circ R_{A'}(x, 1) &= \begin{cases} R_A(x, 1) & \text{si } x \in A' \cup X \setminus Y, \\ R_A(r_{A'}(x), 0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x, 1) & \text{si } x \in (A \cap A') \cup X \setminus Y, \\ (r_A(x), 0) & \text{si } x \in A \setminus A', \\ (r_A \circ r_{A'}(x), 0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Y por el otro lado tenemos que

$$R_{A'} \circ R_A(x,1) = \begin{cases} (x,1) & \text{si } x \in (A \cap A') \cup X \setminus Y, \\ (r_{A'}(x),0) & \text{si } x \in A' \setminus A, \\ (r_{A'} \circ r_A(x),0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De lo cual tenemos que $R_A \circ R_{A'}(x,1) = R_{A'} \circ R_A(x,1)$ si y solo si $r_{A'}(x) = r_A \circ r_{A'}(x)$ cuando $x \in A \setminus A'$ y $r_A(x) = r_{A'} \circ r_A(x)$ cuando $x \in A' \setminus A$. Veamos que la primera de las condiciones siempre ocurre, la segunda condición es análoga. Utilizando la conmutatividad del r-esqueleto sobre X y que $r_A(x) = x$ para $x \in A \setminus A'$ deducimos que $r_A \circ r_{A'}(x) = r_{A'} \circ r_A(x) = r_{A'}(x)$. Así, $R_A \circ R_{A'}(x,1) = R_{A'} \circ R_A(x,1)$ siempre ocurre. Con lo cual tenemos que $\{R_A : A \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre $AD(X)$. □

Observación 3.0.13. De la proposición anterior, tenemos que para un espacio compacto de Valdivia X y Σ-conjunto denso Y de X, si $X \setminus Y$ es finito, entonces las cláusulas $(*)$ y $(**)$ se satisfacen trivialmente y así $AD(X)$ es un espacio compacto de Valdivia. Ejemplo inmediato de esto es el espacio $[0,\omega_1]$, donde el único Σ-conjunto denso es $[0,\omega_1)$ y así, $AD([0,\omega_1])$ es un espacio compacto de Valdivia.

La siguiente proposicicón resulta útil en el resto del capítulo.

Proposición 3.0.14. *Sea X un espacio compacto que admite r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ con inducido Y. Si $F \subseteq Y$ es cósmico, entonces existe $s \in \Gamma$ tal que $F \subseteq r_s(X)$.*

Demostración. Como F es cósmico existe $D \in [Y]^{\leq\omega}$ tal que $cl_F(D) = F$. Para cada $d \in D$ elegimos $s_d \in \Gamma$ tal que $r_{s_d}(d) = d$. Tomando $s = \sup\{s_d : d \in D\}$ tenemos que $D = r_s(D)$. Así, $F = cl_F(D) \subseteq r_s(X)$. □

Corolario 3.0.15. *Sea X un espacio compacto que admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$ con inducido Y. Si se satisfacen las condiciones $(*)$ y $(**)$, entonces el conjunto $\{(s,B) \in \Gamma \times [X \setminus Y]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_s(X)\}$ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y cofinal en $\Gamma \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Para facilitar los cálculos denotemos por $\Gamma' = \{(s,B) \in \Gamma \times [X \setminus Y]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_s(X)\}$, claramente podemos observar que el conjunto Γ' es parcialmente ordenado con el orden $\leq_{\Gamma'}$, donde $(s,B) \leq_{\Gamma'} (s',B')$ si $s \leq s'$ y $B \subseteq B'$. Veamos ahora que Γ' es cofinal en $\Gamma \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$. Sea $(s,B) \in \Gamma \times [X \setminus Y]^{\leq\omega}$, por hipótesis se cumplen $(*)$ y $(**)$, con ello tenemos que $B^d \subseteq Y$ es un espacio cósmico. Por la Proposición 3.0.14, existe $s' \in \Gamma$ tal que $B^d \subseteq r_s(X)$. Al ser Γ un conjunto dirigido, podemos pedir que $s \leq s'$. Con ello tenemos que $(s',B) \in \Gamma'$ y $(s,B) \leq_{\Gamma'} (s',B)$). Para ver que Γ' es dirigido, tomemos $(s,B),(s',B') \in \Gamma'$. Por ser Γ dirigido, consideremos una cota superior $t \in \Gamma$ de $\{s,s'\}$; además por la Proposición 3.0.14, podemos suponer a t tal que $(B \cup B')^d \subseteq r_t(X)$. Así, $(t, B \cup B')$ testifica que el conjunto Γ' sea dirigido. □

En lo que resta, expondremos ejemplos de aplicaciones del Teorema 3.0.5 y Proposición 3.0.12.

Para nuestro primer ejemplo, veamos que los árboles trabajados por J. Somaglia en [Som17] tienen Duplicado de Alexandroff con r-esqueleto.

Ejemplo 3.0.16. Para este ejemplo, consideremos un árbol T bajo la topología τ_{cwt} (topología introducida en la subsección 1.3.4) y supongamos que (T, τ_{cwt}) es compacto. De la Observación 1.3.45, la familia $\{r_A : A \in \mathcal{A}(T)\}$ es un r-esqueleto sobre T cuyo espacio inducido es $D = \{x \in T : cof(x) \leq \omega\}$ (Proposición 1.3.46). Después de este breve recordatorio, veamos que $AD(T)$ admite un r-esqueleto. Primero comprobemos que las condiciones $(*)$ y $(**)$ se cumplen, para ello fijemos $B \in [T \setminus D]^{\leq\omega}$. Utilizando la Proposición 1.3.41 podemos tomar $A_B \in \mathcal{A}(T)$ tal que $B \subseteq A_B$. De la Observación 1.3.42, tenemos que $B^d \subseteq D$ y por ello la condición $(*)$ es satisfecha. Ahora, de la Proposición 1.3.43 tenemos que $r_{A_B}(T) = \overline{A_B} \cap D$, con ello, $\overline{A_B} \cap D$ es metrizable y separable. Así, al ser $\overline{B} \cap D = \overline{B} \setminus B = B^d$ un compacto en $r_{A_B}(T)$, tenemos que $\overline{B} \setminus B$ es cósmico y $(**)$ se cumple. Ahora, construyamos un r-esqueleto que cumpla con $(***)$, sea $\Gamma = \{(A, B) \in [D]^{\leq\omega} \times [T \setminus D]^{\leq\omega} : A \cup B \in \mathcal{A}(T)\}$. Tenemos que Γ con el orden $\preceq$ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo, en este caso si $\langle (A_n, B_n) \rangle_{n<\omega}$ es una sucesión creciente en Γ, entonces $\sup\{(A_n, B_n) : n < \omega\} = (\bigcup_{n<\omega} A_n, \bigcup_{n<\omega} B_n)$. Además, Γ es cofinal en $[D]^{\leq\omega} \times [T \setminus D]^{\leq\omega}$. En efecto, tomemos $(A, B) \in [D]^{\leq\omega} \times [T \setminus D]^{\leq\omega}$. De la Proposición 1.3.41 tenemos que existe $C \in \mathcal{A}(T)$ tal que $A \cup B \subseteq C$. Así, $(C \cap D, C \cap (T \setminus D)) \in \Gamma$ y $(A, B) \preceq (C \cap D, C \cap (T \setminus D))$. Ahora, definamos $r_{(A,B)} := r_{A \cup B}$ para cada $(A, B) \in \Gamma$. Al ser $\{A \cup B : (A, B) \in \Gamma\} = \mathcal{A}(T)$, garantizamos que $\{r_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre T. Por último, tomemos $(A, B) \in \Gamma$, de la Proposición 1.3.41, tenemos que $\overline{(A \cup B) \cap D} = \overline{(A \cup B)} \cap D$. Dado que $r_{(A,B)}(T) = r_{A\cup B}(T) = \overline{(A \cup B)} \cap D$, se sigue que $A \cup (\overline{B} \setminus B) \subseteq r_{(A,B)}(T)$, lo cual muestra que se satisface la condición $(***)$. Como se cumplen las condiciones $(*), (**)$ y $(***)$, por el Teorema 3.0.5 podemos concluir que el espacio $AD(T)$ admite un r-esqueleto.

Pregunta 3.0.17. Si el árbol (T, τ_{cwt}) es un espacio compacto de Valdivia, ¿$AD(T)$ es Valdivia?

En el siguiente ejemplo hacemos uso de una función ω-monótona para dar otra prueba de que $AD([0, \kappa])$ admite r-esqueleto.

Ejemplo 3.0.18. Sea κ un número cardinal no numerable y $X = [0, \kappa]$. Tomemos el r-esqueleto $\{r'_A : A \in \mathbf{C}_\kappa\}$ dado en el Ejemplo 1.3.3. El espacio inducido por este r-esqueleto es $Y = \bigcup_{A \in \mathbf{C}_\kappa} A$. Por las propiedades del espacio ordinal $[0, \kappa]$ se deduce que $(*)$ y $(**)$ son satisfechas. Por el Teorema 1.3.33, de $\{r'_A : A \in \mathbf{C}_\kappa\}$ podemos obtener un r-esqueleto de la forma $\{r_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ cuyo espacio inducido es Y, $A \subseteq r_A(X)$, para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$, y que además satisface las cláusulas $(*)$ y $(**)$. Ahora, si consideramos a $\psi : [X \setminus Y]^{\leq\omega} \to [Y]^{\leq\omega}$ como la función determinada por la igualdad $\psi(B) = \{\beta + 1 : \beta \in B\}$, para cualquier $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$, entonces ψ es una función ω-monótona. Notemos que para $B \in [X \setminus Y]^{\leq\omega}$,

$$cl_X(B) \setminus B \subseteq cl_X(\psi(B)) \subseteq r_{\psi(B)}(X).$$

Así, como consecuencia de la Proposición 3.0.11, concluimos que $AD([0,\kappa])$ admite un r-esqueleto.

En lo que queda del capítulo, hacemos un estudio de los Duplicados de Alexandroff de espacios linealmente ordenados compactos, para ello establecemos la Pregunta 2.14 del artículo [Kal09] en el lenguaje de r-esqueletos.

Pregunta 3.0.19. Si X es espacio linealmente ordenado compacto que admite un r-esqueleto, ¿admitirá X un r-esqueleto que cumpla con las condiciones del Teorema 3.0.5?

A continuación, exponemos avances y resultados orientados a una solución de la Pregunta 3.0.19.

Conviene recordar la notación para espacios linealmente ordenados enunciados en el capítulo de Preliminares. Consideremos un espacio linealmente ordenado compacto L. Recordemos que $G(L)$ es el subespacio de L consistente de todos los puntos G_δ de L, o bien, los puntos aislados de L o aquellos puntos de L que son el límite de alguna sucesión no trivial en L.

Observación 3.0.20. Con lo anterior, si L es un espacio linealmente ordenado compacto que admite un r-esqueleto, sabemos que hay un único espacio inducido por los r-esqueletos sobre L, más aún, $G(L)$ es dicho espacio. Por lo cual no se puede negar que el Duplicado de Alexandroff de estos espacios pueda admitir un r-esqueleto.

Para el caso de los espacios linealmente ordenados que son conexos tenemos lo siguiente.

Proposición 3.0.21. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia. Si L es conexo, entonces $AD(L)$ es un espacio compacto de Valdivia.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.53, únicamente ocurren los siguientes cinco casos:

- L es el espacio trivial. Así, L es un espacio compacto de Corson, por la Proposición 1.2.9, $AD(L)$ es un compacto de Valdivia.
- $L = [0,1]$. Así, L es un espacio compacto de Corson, por la Proposición 1.2.9, $AD(L)$ es un compacto de Valdivia.
- $L = R + 1$. Al ser el $\sup L$ el único punto de L fuera de $G(L)$, tenemos que $L \setminus G(L)$ es finito y así las cláusulas $(*)$ y $(**)$ se cumplen trivialmente. Por la Proposición 3.0.12, $AD(L)$ es espacio compacto de Valdivia.
- $L = (R+1)^{-1}$, la justificación de que $AD(L)$ es un espacio compacto de Valdivia es análoga al inciso anterior.

- Si L es el único espacio linealmente ordenado $[a, b]$ tal que si $c \in (a, b)$ entonces $[a, c)$ es homeomorfo a $(R+1)^{-1}$ y (c, b) es homeomorfo a $R+1$. Tenemos que los puntos extremos de L son los únicos puntos L fuera de $G(L)$, con ello $L \setminus G(L)$ es finito y las condiciones $(*)$ y $(**)$ se cumplen trivialmente. Usando Proposición 3.0.12 tenemos que $AD(L)$ es un espacio compacto de Valdivia.

$\square$

En la proposición anterior hemos visto que las condiciones $(*)$ y $(**)$ se cumplen trivialmente para cierto tipo de espacios, veamos que en general, para un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia las condiciones $(*)$ y $(**)$ siempre ocurren.

Proposición 3.0.22. *Si L es un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia, entonces para cada $B \in [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$ tenemos que se cumplen las condiciones $(*)$ y $(**)$.*

Demostración. Tomemos $B \in [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$ y $p \in B^d$. Supongamos que $p \in L \setminus G(L)$, por el Corolario 1.3.50, tenemos que p debe ser aislado ya sea por la izquierda o la derecha. Podemos suponer que es aislado por la derecha, es decir, que $(\leftarrow, p]$ es un conjunto abierto. El ser B un conjunto numerable y $p \in B^d$, nos permite deducir que existe una sucesión no trivial convergente a p, luego $p \in G(L)$. Así, tenemos que $B^d = \overline{B} \setminus B \subseteq G(L)$ y con ello tenemos que la condición $(*)$ se cumple. Veamos que $\overline{B} \setminus B$ es primero numerable, consideremos $p \in \overline{B} \setminus B$. Como $p \in G(L)$, p es el punto límite de una sucesión no trivial. Tenemos los siguientes casos.

- Si p es aislado del lado derecho, entonces existe una sucesión creciente $\langle p_n \rangle_{n<\omega} \subseteq G(L)$ convergente a p y $\{(p_n, p] : n < \omega\}$ es una base local para p.
- Si p es aislado del lado izquierdo, entonces existe una sucesión decreciente $\langle p_n \rangle_{n<\omega} \subseteq G(L)$ convergente a p y $\{[p, p_n) : n < \omega\}$ es una base local para p.
- Si p no es aislado por ambos lados, entonces existen una sucesión creciente $\langle p_n \rangle_{n<\omega} \subseteq G(L)$ convergente a p y una sucesión decreciente $\langle p'_n \rangle_{n<\omega} \subseteq G(L)$ convergente a p tal que $\{(p_n, p'_n) : n < \omega\}$ es una base local para p.

En todos los casos, hay una base local numerable para p, así, $\overline{B} \setminus B$ es primero numerable. Con ello, por ser $\overline{B} \setminus B$ un conjunto cerrado primero numerable, la Proposición 1.3.49 garantiza que $\overline{B} \setminus B$ sea metrizable y con ello un espacio cósmico. Por ello, la condición $(**)$ se satisface. $\square$

Con lo anterior, si L es un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia L, para que $AD(L)$ admita un r-esqueleto basta mostrar que $(***)$ se cumple. Ejemplo de ello es el siguiente corolario.

Corolario 3.0.23. *Si L es un espacio linealmente ordenado compacto Valdivia tal que $L \setminus G(L)$ es numerable, entonces $AD(L)$ es un espacio compacto de Valdivia.*

Demostración. De la Proposición 3.0.22 se cumplen $(*)$ y $(**)$. Al ser $L \setminus G(L)$ numerable, de la Proposición 3.0.12, tenemos que $AD(L)$ es un espacio compacto de Valdivia. $\square$

De la Proposición 3.0.22 tenemos que la solución a la Pregunta 3.0.19, en el contexto de espacios compactos de Valdivia[2], se reduce a comprobar si los espacios linealmente ordenados compactos de Valdivia cumplen con la condición $(***)$ para saber si su Duplicado de Alexandroff es Valdivia. En esta dirección, los resultados que siguen son para dar condiciones para que un r-esqueleto conmutativo sobre un espacio linealmente ordenado L cumpla con $(***)$ y así poder tener un r-esqueleto en $AD(L)$.

Lema 3.0.24. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto que admite un r-esqueleto conmutativo $\{r_A : A \in [G(L)]^{\leq\omega}\}$. Entonces el conjunto $\{(A,B) \in [G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_A(L)\}$ es parcialmente ordenado, dirigido y cofinal en $[G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.0.22, se satisfacen $(*)$ y $(**)$. Así, utilizando el Corolario 3.0.15, tenemos que $\{(A,B) \in [G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_A(L)\}$ satisface las condiciones requeridas. □

Lo anterior nos permite establecer una condición para que espacios linealmente ordenados compactos con r-esqueletos tengan un Duplicado de Alexandroff con r-esqueleto.

Proposición 3.0.25. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto que admite un r-esqueleto conmutativo $\{r_A : A \in [G(L)]^{\leq\omega}\}$. Si para cada sucesión creciente*

$$\langle (A_n, B_n) \rangle_{n<\omega} \subseteq \{(A,B) \in [G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_A(L)\}$$

tenemos que $(\bigcup_{n<\omega} A_n, \bigcup_{n<\omega} B_n) \in \Gamma$, entonces $AD(L)$ admite un r-esqueleto

Demostración. Por la Proposición 3.0.22 tenemos que las cláusulas $(*)$ y $(**)$ se cumplen. Sea $\Gamma = \{(A,B) \in [G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_A(L)\}$ y para cada $(A,B) \in \Gamma$, definamos $r_{(A,B)} := r_A$. Veamos que la familia $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre L que satisface $(***)$. Las condiciones (i) y (ii) se satisfacen trivialmente de la definición de $r_{(A,B)}$. La hipótesis sobre las sucesiones crecientes en Γ y que $\{r_A : A \in [G(L)]^{\leq\omega}\}$ sea un r-esqueleto garantizan la condición (iii). La cofinalidad de Γ justificada en el Lema 3.0.24 implica la condición (iv). Así, $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto. La definición de Γ implica la condición $(***)$. De lo cual, por Teorema 3.0.5, $AD(L)$ admite un r-esqueleto. □

Por los trabajos de O. Kalenda y W. Kubiś, sabemos que los espacios linealmente ordenados compactos L que son Valdivia si y solo si tienen peso a lo más ω_1 (Observación 1.3.19), además, todo r-esqueleto conmutativo sobre L induce un r-esqueleto conmutativo de la forma $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ (Teorema 1.3.34).

Lema 3.0.26. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto con un r-esqueleto conmutativo $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Entonces $\Gamma = \{(\alpha, B) \in \omega_1 \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_\alpha(L)\}$ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido, σ-completo y cofinal en $\omega_1 \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$.*

[2]pregunta original de O. Kalenda en [Kal09]

Demostración. Para comenzar, tenemos que de la combinación de la Proposición 3.0.22 y el Corolario 3.0.15 el conjunto Γ es parcialmente ordenado, dirigido y cofinal en $\omega_1 \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$. Resta mostrar que Γ es σ-completo. Para ello tomemos una sucesión creciente $\langle(\alpha_n, B_n)\rangle_{n<\omega}$. Definiendo

$$\alpha_{\langle(\alpha_n,B_n)\rangle_{n<\omega}} := \text{mín}\{\alpha < \omega_1 : (\bigcup_{n<\omega} B_n)^d \subseteq r_\alpha(L) \text{ y } \sup_{\omega_1}\{\alpha_n : n < \omega\} \leq \alpha\}$$

uno puede comprobar fácilmente que

$$\sup_\Gamma\{(\alpha_n, B_n) : n < \omega\} = (\alpha_{\langle(\alpha_n,B_n)\rangle_{n<\omega}}, \bigcup_{n<\omega} B_n).$$

□

Lema 3.0.27. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto y $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un r-esqueleto conmutativo sobre L. Entonces existe una función ω-monótona $\psi : [G(L)]^{\leq\omega} \to \omega_1$ tal que el conjunto conjunto $\Gamma = \{(A, B) \in [G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega} : B^d \subseteq r_{\psi(A)}(L)\}$ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido, σ-completo y cofinal en $[G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Al ser $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un r-esqueleto sobre L, por el Teorema 1.3.33, existe una función ω-monótona $\psi : [G(L)]^{\leq\omega} \to \omega_1$ tal que $A \subseteq r_{\psi(A)}(L)$ para cada $A \in [G(L)]^{\leq\omega}$. Ahora, de la Proposición 3.0.22 y el Corolario 3.0.14 tenemos que Γ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y cofinal en $[G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$. Resta mostrar que Γ es σ-completo, consideremos una sucesión creciente $\langle(A_n, B_n)\rangle_{n<\omega}$ en Γ y sean $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ y $B = \bigcup_{n<\omega} B_n$. Por la cofinalidad de Γ es claro que existe $\alpha = \text{mín}\{\psi(C) : B^d \subseteq r_{\psi(C)}(L) \text{ y } A \subseteq C\}$. Definiendo $C_{(A,B)} = \bigcap\{C \in [G(L)]^{\leq\omega} : A \subseteq C \text{ y } \psi(C) = \alpha\}$, tenemos que $\sup\{(A_n, B_n) : n < \omega\} = (C_{(A,B)}, B) \in \Gamma$ y por tanto Γ es σ-completo. □

Proposición 3.0.28. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto y $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un r-esqueleto conmutativo sobre L. Entonces existe una familia de retracciones conmutativa $\{r_{(A,B} : (A, B) \in \Gamma\}$ sobre L que satisface (i),(ii) y (iv) tal que para cada $(A, B) \in \Gamma$ tenemos que $B^d \subseteq r_{(A,B)}(L)$.*

Demostración. Tomamos ψ y Γ como en el Lema 3.0.27 y para cada $(A, B) \in \Gamma$ sea $r_{(A,B)} = r_{\psi(A)}$. Verifiquemos que es cierta la conclusión de nuestro enunciado. Las condiciones (i) y (ii) se tienen inmediatamente por ser $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un r-esqueleto sobre L y ψ una función ω-monótona. La condición (iv) se obtiene de que Γ es cofinal en $[G(L)]^{\leq\omega} \times [L \setminus G(L)]^{\leq\omega}$. La conmutatividad se obtiene de que $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia conmutativa. Y por la elección de Γ, cumple que $B^d \subseteq r_{(A,B)}(L)$, para cada $(A, B) \in \Gamma$. □

De la proposición anterior, podemos ver que si la condición (iii) se satisface, entonces la familia de retracciones mencionada resulta ser un r-esqueleto.

Teorema 3.0.29. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto y $\{r_{(A,B)} : (A, B) \in \Gamma\}$ es la familia de retracciones de la Proposición 3.0.28. Si se satisface la condición (iii) de la definición de r-esqueleto, entonces $AD(L)$ admite un r-esqueleto.*

Demostración. Si se satisface (iii), entonces por la Proposición 3.0.28, tenemos que $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre L tal que para cada $(A,B) \in \Gamma$ tenemos que $B^d \subseteq r_{(A,B)}(L)$, esto es, se cumple la condición $(***)$. Sabemos por la Proposición 3.0.22 que se satisface $(*)$ y $(**)$, así, por el Teorema 3.0.5, tenemos que $AD(L)$ admite un r-esqueleto. □

Con lo anterior, tenemos que basta que se cumpla una condición para que un r-esqueleto conmutativo sobre un espacio linealmente ordenado compacto L induzca un r-esqueleto sobre $AD(L)$. Sin embargo, tal condición aún no garantiza la conmutatividad del r-esqueleto.

La siguiente afirmación es consecuencia inmediata de la construcción de las retracciones $r_{(A,B)}$'s.

Corolario 3.0.30. *Sea L un espacio linealmente ordenado compacto de Valdivia y $\{r_{(A,B)} : (A,B) \in \Gamma\}$ es la familia de retracciones de la Proposición 3.0.28 tal que satisface la condición (iii) de la Definición de r-esqueleto. Si cada par de elementos en Γ son comparables, entonces $AD(L)$ es un espacio compacto de Valdivia.*

Demostración. El Teorema 3.0.29 garantiza un esqueleto sobre $AD(L)$ y el Corolario 3.0.8 garantiza que sean conmutativos. □

CAPÍTULO 4

Subespacios compactos de $[0,1]^T$ con r-esqueletos

Como dijimos en el capítulo introductorio de la tesis, aquí se tiene como objetivo obtener una solución al siguiente problema:

Problema. Encontrar una generalización del Σ-producto de $[0,1]^T$ de tal manera que si $X \subseteq [0,1]^T$ es compacto dicha generalización determina si X admite un r-esqueleto.

Para contextualizar esto, recordemos que en la práctica, entendemos a los espacios compactos de Valdivia como los espacios compactos X de un cubo $[0,1]^T$ cuya intersección con el Σ-producto de $[0,1]^T$ es densa en X. Esto es, la noción de Σ-producto nos detecta a todos los subespacios compactos de una potencia del espacio $[0,1]$ que son compactos de Valdivia y consecuentemente a los que son espacios compactos de Corson. Por ello, al considerar a los espacios compactos con r-esqueleto como una generalización natural de lo compactos de Valdivia, nos resultaría útil tener un objeto que desempeñe una función similar para los espacios compactos con r-esqueleto a las que funciones que realiza el Σ-producto para los espacios compactos de Valdivia. Analizando tal problema, nos dispusimos a estudiar a los espacios compactos con r-esqueleto vistos en un producto $[0,1]^T$, de tal análisis extrajimos la siguiente noción.

Definición 4.0.1. Sea $X \subseteq [0,1]^T$ un espacio compacto. Un par $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \varphi : \Gamma \to [T]^{\leq\omega})$ es un π-*esqueleto* sobre X si $\{F_s : s \in \Gamma\}$ es una familia de subespacios cósmicos de X, φ es una función ω-monótona y las siguientes condiciones se cumplen:

(a) $F_s \subseteq F_t$ siempre que $s \leq t$,

(b) $\bigcup_{s\in\Gamma} F_s$ es un subconjunto denso de X, y

(c) $\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s}$ es un encaje tal que $\pi_{\varphi(s)}(X) = \pi_{\varphi(s)}(F_s)$, para cualquier $s \in \Gamma$.

El conjunto $\bigcup_{s\in\Gamma} F_s$ será llamado *el espacio inducido* por el π-esqueleto. Y si $X = \bigcup_{s\in\Gamma} F_s$, entonces diremos que el π-esqueleto es *completo*.

Observación 4.0.2. Notemos que la condición (c) implica que los conjuntos F_s sean subespacios cerrados.

Observación 4.0.3. A partir de aquí, al decir que el espacio compacto X admite un π-esqueleto, asumimos la existencia de un encaje $g : X \to [0,1]^T$ tal que $g(X)$ admite un π-esqueleto.

Después de enunciar la definición de π-esqueleto, siguiendo la práctica usual luego de introducir un nuevo concepto, debemos exponer algunos espacios que admiten π-esqueletos. Para ello tenemos los siguientes ejemplos.

El primero que toca enunciar, es una familia de espacios recurrente en la teoría de espacios compactos de Valdivia y de Corson, que también resulta que espacios en dicha familia admiten π-esqueleto.

Ejemplo 4.0.4. Si α es un número cardinal infinito, entonces existe un encaje $h : [0,\alpha] \to [0,1]^{\alpha+1}$ tal que $h([0,\alpha])$ admite un π-esqueleto. En efecto, consideremos la función $h : [0,\alpha] \to [0,1]^{\alpha+1}$ dada por la siguiente regla, para cada $\beta \leq \alpha$ sea

$$\pi_\theta(h(\beta)) = \begin{cases} 0 & si \quad \theta < \beta \\ 1 & si \quad \theta \geq \beta, \end{cases}$$

para cualquier $\theta \leq \alpha$. No es difícil comprobar que h es un encaje. Trabajemos ahora sobre el espacio $X = h([0,\alpha])$, empezamos denotando por L_α al conjunto de puntos límite del espacio ordinal $[0,\alpha]$ y $\Gamma = \{A \in [[0,\alpha] \setminus L_\alpha]^{\leq\omega} : 0 \in A\}$. También, para cada $A \in \Gamma$ sea

$$F_A := \overline{h(A \cup A+1)},$$

donde $A+1 = \{\theta+1 : \theta \in A\}$, y

$$\varphi(A) := A \cup \{\theta \leq \alpha : \theta+1 \in A \text{ y } cof(\theta) \leq \omega\}.$$

Es claro que la función $\varphi : \Gamma \to [\alpha+1]^{\leq\omega}$ es una función ω-monótona y que junto a la familia de subespacios cósmicos $\{F_A : A \in [Y]^{\leq\omega}\}$ se satisface (a) y (b). Para probar la última condición de la definición de π-esqueleto, fijemos $A \in \Gamma$. Primero, probaremos que $\pi_{\varphi(A)}(F_A) = \pi_{\varphi(A)}(X)$. En efecto, sea $x \in X \setminus F_A$ y escojamos $\beta \leq \alpha$ tal que $x = h(\beta)$. Notemos que $\sup \varphi(A) = \sup A$ y $\beta \notin h^{-1}(F_A) = \overline{A \cup A+1}$. Así, definamos $\beta_0 := \sup\{\theta \in \varphi(A) : \theta < \beta\}$.

Afirmación 1: Si $\beta_0 \in \varphi(A)$, entonces $\beta_0 + 1 < \beta$.

Demostración de la afirmación: De la elección de β_0 es claro que $\beta_0 < \beta$. Supongamos que $\beta = \beta_0 + 1$. De ser $\beta_0 \in \varphi(A)$, obtenemos que o $\beta_0 \in A$ o $\beta_0 + 1 \in A$. Con ello, $\beta = \beta_0 + 1 \in A \cup A+1 \subseteq h^{-1}(F_A)$, lo cual es una contradicción pues elegimos $\beta \notin \overline{A \cup A+1}$. Así, debemos tener que $\beta_0 + 1 < \beta$. ∎

Continuando con la prueba, hay dos casos a considerar para β_0:

- Para el primer caso, suponemos que $\beta_0 \in L_\alpha$ y con ello tenemos que $\beta_0 \in \overline{\varphi(A)} \subseteq \overline{A \cup A+1}$. Dado que $\beta \notin \overline{A \cup A+1}$, se sigue que $\beta_0 < \beta$ y $(\beta_0, \beta) \cap \varphi(A) = \emptyset$. Veamos que también se cumple que $\beta_0 \notin \varphi(A)$, en efecto, si suponemos que $\beta_0 \in \varphi(A)$, la elección $\beta_0 \in L_\alpha$, implica que $\beta_0 + 1 \in A \subseteq \varphi(A)$. Sin embargo, la Afirmación 1 nos indica que $\beta_0 + 1 < \beta$, lo cual contradice la igualdad $\beta_0 = \sup\{\theta \in \varphi(A) : \theta < \beta\}$. Así, si $\theta \in \varphi(A)$, entonces o bien $\theta < \beta_0$ o $\theta \geq \beta$. Para $\theta \in \varphi(A)$ con $\theta < \beta_0$, se cumple que $\pi_\theta(h(\beta_0)) = 0 = \pi_\theta(h(\beta))$. Y, para $\theta \in \varphi(A)$ con $\theta \geq \beta$, $\pi_\theta(h(\beta_0)) = 1 = \pi_\theta(h(\beta))$. Esto es, $\pi_{\varphi(A)}(h(\beta)) = \pi_{\varphi(A)}(h(\beta_0))$ y $h(\beta_0) \in F_A$.

- El segundo caso es suponer que $\beta_0 \notin L_\alpha$. Para tal caso, tenemos que $\beta_0 \in \varphi(A)$ y $\beta_0 < \beta$. De la Afirmación 1, deducimos que $\beta_0 \in A$. Para $\theta \in \varphi(A)$ tal que $\theta \leq \beta_0$, se cumple que $\pi_\theta(h(\beta_0+1)) = 0 = \pi_\theta(h(\beta))$. Y, cuando $\theta \in \varphi(A)$ es tal que $\theta \geq \beta$, se obtiene que $\pi_\theta(h(\beta_0+1)) = 1 = \pi_\theta(h(\beta))$. En consecuencia, $\pi_{\varphi(A)}(h(\beta)) = \pi_{\varphi(A)}(h(\beta_0+1))$ y $h(\beta_0+1) \in F_A$.

Para ambos casos, obtenemos que $\pi_{\varphi(A)}(h(\beta)) \in \pi_{\varphi(A)}(F_A)$. Con ello, tenemos $\pi_{\varphi(A)}(F_A) = \pi_{\varphi(A)}(X)$, de lo cual ya tenemos demostrada una parte de la condición (c). Resta probar que $\pi_{\varphi(A)}(F_A)$ es un espacio homeomorfo a F_A. Para lo cual es suficiente probar que la función $\pi_{\varphi(A)} \restriction_{F_A}$ es inyectiva. Para ello tomemos $x, y \in F_A$ distintos y sean $\theta, \beta \in h^{-1}(F_A)$ tales que $h(\theta) = x$ y $h(\beta) = y$. Sin perder generalidad, asumimos $\theta < \beta$. Notemos que $\pi_{\beta'}(x) \neq \pi_{\beta'}(y)$ para cada $\beta' \in [\theta, \beta)$. Si β es un punto aislado, entonces existe $\beta' < \alpha$ tal que $\beta = \beta' + 1$. Con ello, obtenemos que $\beta \in A \cup A+1$. Si $\beta \in A$, entonces $\beta' \in \varphi(A)$. Y si $\beta \in A+1$, entonces $\beta' \in A \subseteq \varphi(A)$. Cuando β es un punto no aislado, por argumentos de densidad tenemos que $A \cap (\theta, \beta+1) \neq \emptyset$ y con ello existe $\beta' \in A \cap [\theta, \beta) \subset \varphi(A)$. En todos los casos, $\varphi(A) \cap [\theta, \beta) \neq \emptyset$. Así, tenemos que $\pi_{\varphi(A)}(x) \neq \pi_{\varphi(A)}(y)$; dada la arbitrariedad de y y x, determinamos que $\pi_{\varphi(A)}$ es una función inyectiva cuando es restringida al subespacio F_A. Esto muestra que $\pi_{\varphi(A)}(F_A)$ es un espacio homeomorfo a F_A y con lo cual (c) se satisface. Por lo tanto, $(\{F_A : A \in \Gamma\}, \varphi)$ es un π-esqueleto sobre X.

Resulta que los espacios compactos de Valdivia admiten estructura de π-esqueleto, para detallar un π-esqueleto sobre un espacio compacto de Valdivia necesitaremos probar primero un lema técnico bastante útil. Por ello, recordemos que para un producto $[0,1]^T$ y un punto $x \in [0,1]^T$, el soporte de x es $supp(x) = \{t \in T : \pi_t(x) \neq 0\}$, y si $A \subseteq [0,1]^T$, entonces $supp(A) = \bigcup_{x \in A} supp(x)$.

Lema 4.0.5. *Sea $Y \subseteq [0,1]^T$. Si $A \in [Y]^{\leq\omega}$, entonces $\pi_{supp(A)} \restriction_{\overline{A}}$ es una función inyectiva.*

Demostración. Primero probaremos que $supp(x) \subseteq supp(A)$ siempre que $A \in [Y]^{\leq\omega}$ y $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, entonces claramente $supp(x) \subseteq supp(A)$. Supongamos que $x \in \overline{A} \setminus A$ es tal que $supp(x) \setminus supp(A) \neq \emptyset$. Fijemos $t \in supp(x) \setminus supp(A)$. Tenemos que existe un conjunto abierto $U \subseteq [0,1]$ tal que $x \in \pi_t^{-1}(U)$ y $0 \notin U$. Así, se cumple la igualdad $A \cap \pi_t^{-1}(U) = \emptyset$, lo cual contradice que $x \in \overline{A}$. Con ello, para cualquier $x \in \overline{A}$ se cumple que $supp(x) \subseteq supp(A)$. Ahora, escojamos $x, y \in \overline{A}$ con $x \neq y$. De esta manera, existe

$t \in supp(x) \cup supp(y)$ tal que $\pi_t(x) \neq \pi_t(y)$. Al ser $supp(x) \cup supp(y) \subseteq supp(A)$, se sigue que $\pi_{supp(A)}(x) \neq \pi_{supp(A)}(y)$. Lo cual prueba que la función $\pi_{supp(A)} \restriction_{\overline{A}}$ es inyectiva. □

Con el lema anterior podemos probar que los espacios compactos de Valdivia también poseen un π-esqueleto, lo cual justifica la introducción de la noción.

Proposición 4.0.6. *Si X es un espacio compacto de Valdivia, entonces X admite un π-esqueleto.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio compacto de $[0,1]^T$ y que $Y = X \cap \Sigma[0,1]^T$ es denso en X. Probaremos que X admite un π-esqueleto. Para lo cual, primero demostraremos dos afirmaciones.

Afirmación 1: El conjunto $\Gamma = \{A \in [Y]^{\leq\omega} : \pi_{supp(A)}(X) = \pi_{supp(A)}(\overline{A})\}$ es cofinal en $[Y]^{\leq\omega}$.

Demostración de la afirmación: Fijemos $A \in [Y]^{\leq\omega}$. Construyamos inductivamente una sucesión creciente $\langle D_n\rangle_{n<\omega} \subseteq [Y]^{\leq\omega}$ tal que $\pi_{supp(D_n)}(X) = \overline{\pi_{supp(D_n)}(D_{n+1})}$, para cada $n < \omega$. Sabemos que $\pi_{supp(A)}(X)$ es un espacio separable, entonces hacemos $D_0 = A$ y fijamos $D' \in [Y]^{\leq\omega}$ de tal forma que $\pi_{supp(A)}(D')$ es denso en $\pi_{supp(A)}(X)$. Sea $D_1 = D' \cup A$. Con ello $\pi_{supp(D_0)}(X) = \overline{\pi_{supp(D_0)}(D_1)}$. Ahora, supongamos que para $n < \omega$ con $n > 1$ hemos establecido el conjunto D_n tal que $\pi_{supp(D_n)}(X) = \overline{\pi_{supp(D_n)}(D_{n+1})}$. Escojamos $D'_{n+1} \in [Y]^{\leq\omega}$ tal que $\pi_{supp(D_{n+1})}(D'_{n+1})$ es denso en $\pi_{supp(D_{n+1})}(X)$. Pongamos $D_{n+2} = D'_{n+1} \cup D_{n+1}$ para así tener $\pi_{supp(D_{n+1})}(X) = \overline{\pi_{supp(D_{n+1})}(D_{n+2})}$. Con ello hemos construido un sucesión creciente de conjuntos $\langle D_n\rangle_{n<\omega} \subseteq [Y]^{\leq\omega}$. Sea $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$, probaremos que $\pi_{supp(D)}(D)$ es denso sobre $\pi_{supp(D)}(X)$. Fijemos $x \in X$, $t \in supp(D)$ y un conjunto abierto U de $[0,1]$ tal que $\pi_t(x) \in U$. Para tener que $\pi_{supp(D)}(X) = \overline{\pi_{supp(D)}(D)}$ basta mostrar que existe $d \in D$ tal que $\pi_t(d) \in U$. En efecto, dado que $t \in supp(D)$ y $supp(D) = \bigcup_{n<\omega} supp(D_n)$, existe $n < \omega$ tal que $t \in supp(D_n)$. Al ser $\pi_{supp(D_n)}(D_{n+1})$ denso en $\pi_{supp(D_n)}(X)$, existe $d \in D_{n+1} \subseteq D$ con $\pi_t(d) \in U$. Así, $\pi_{supp(D)}(D)$ es denso en $\pi_{supp(D)}(X)$. Ahora, del Lema 4.0.5, se sigue que $\pi_{supp(D)} \restriction_{\overline{D}}$ es un homeomorfismo y por tanto $\pi_{supp(D)}(\overline{D}) = \pi_{supp(D)}(X)$, es decir, $D \in \Gamma$. Por construcción, $A \subseteq D$ y con esto concluimos que Γ es cofinal en $[Y]^{\leq\omega}$. ■

Afirmación 2: El conjunto Γ bajo el orden dado por la contención es un conjunto parcialmente ordenado dirigido y σ-completo.

Demostración de la afirmación: Es claro que Γ es un conjunto parcialmente ordenado y dirigido. Queda mostrar que Γ es σ-completo. Para ello, consideremos una sucesión creciente $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$ en Γ, sea $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ y fijemos un punto $x \in X$. Para cada $n < \omega$, utilizando que $A_n \in \Gamma$, escogemos $a_n \in \overline{A_n}$ tal que $\pi_{supp(A_n)}(x) = \pi_{supp(A_n)}(a_n)$. Sin perdida de generalidad, dado que Y es Fréchet-Urysohn, supongamos que $a =$

$\lim_{n\to\infty} a_n$. Debido a que $\langle a_n\rangle_{n<\omega} \subseteq \overline{\bigcup_{n<\omega} A_n} = \overline{A}$, tenemos que $a \in \overline{A}$. Por la elección de $\langle a_n\rangle_{n<\omega}$ y la continuidad de $\pi_{supp(A)}$, se cumple que

$$\pi_{supp(A)}(x) = \lim_{n\to\infty} \pi_{supp(A)}(a_n) = \pi_{supp(A)}(\lim_{n\to\infty} a_n) = \pi_{supp(A)}(a).$$

Esto es, $A \in \Gamma$ y por ello Γ es σ-completo. ■

Finalmente, para cada $A \in \Gamma$ definamos $F_A := \overline{A}$. La familia de cerrados cósmicos $\{F_A : A \in \Gamma\}$ cumple (a) y (b). Ahora, sea $\varphi : \Gamma \to [T]^{\leq\omega}$ la función definida por $\varphi(A) = supp(A)$, para cada $A \in \Gamma$. Por el Ejemplo 1.3.30 sabemos que φ es una función ω-monótona. Del Lema 4.0.5 deducimos que el par $(\{F_A : A \in \Gamma\}, \varphi)$ satisface la cláusula (c). Por lo tanto, el par $(\{F_A : A \in \Gamma\}, \varphi)$ es un π-esqueleto sobre X. □

Observación 4.0.7. Consideremos una familia de espacios cósmicos $\{F_s : s \in \Gamma\}$ sobre un espacio compacto $X \subseteq [0,1]^T$ que cumple con las condiciones (a) y (b) , y que además para cada $s \in \Gamma$, $F_s \subseteq \Sigma[0,1]^T$. Entonces X es un espacio compacto de Valdivia. Con lo cual, usando la Proposición 4.0.6, podemos concluir que para un espacio compacto X el siguiente enunciado es cierto: X es un compacto de Valdivia si y solo si X admite un π-esqueleto $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \varphi)$ tal que $F_s \subseteq \Sigma[0,1]^T$, para toda $s \in \Gamma$.

Antes de enunciar y probar el resultado más importante de este capítulo, requerimos de un lema técnico. Dicho lema nos indica que un π-esqueleto puede ser pensado sobre un subespacio compacto de un producto de espacios compactos cósmicos.

Lema 4.0.8. *Consideremos un subespacio compacto X de un producto de espacios compactos cósmicos $\Pi_{t\in T} Z_t$. Supongamos que existe un par $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi : \Gamma \to [T]^{\leq\omega})$ donde $\{F_s : s \in \Gamma\}$ es una familia que satisface (a) y (b), ψ es una función ω-monótona y para cada $s \in \Gamma$ tenemos que $\pi_{\psi(s)} \restriction_{F_s}$ es un homeomorfismo tal que $\pi_{\psi(s)}(X) = \pi_{\psi(s)}(F_s)$. Entonces existe un encaje $g : X \to [0,1]^{T'}$ tal que $g(X)$ admite un π-esqueleto.*

Demostración. Para cada $t \in T$, fijemos un conjunto numerable T_t y un encaje $g_t : Z_t \to [0,1]^{T_t}$. Sea $g : \Pi_{t\in T} Z_t \to \Pi_{t\in T}[0,1]^{T_t}$ la función dada por la igualdad $g((x_t)_{t\in T}) = (g_t(x_t))_{t\in T}$, para cada $x \in \Pi_{t\in T} Z_t$. No es difícil convencerse que g es un encaje y que podemos suponer que $T_t \cap T_{t'} = \emptyset$, para $t, t' \in T$ distintos. Sea $T' = \bigcup_{t\in T} T_t$ y $\phi : [T]^{\leq\omega} \to [T']^{\leq\omega}$ la función definida por $\phi(A) = \bigcup_{t\in A} T_t$, para cada $A \in [T]^{\leq\omega}$. De su definición, es inmediato notar que ϕ es una función ω-monótona. Ahora, afirmamos que el par $(\{g(F_s) : s \in \Gamma\}, \phi \circ \psi)$ es un π-esqueleto sobre $g(X)$. En efecto, claramente $\{g(F_s) : s \in \Gamma\}$ es una familia de espacios cósmicos sobre $g(X)$ que cumple con las condiciones (a) y (b). Por la Proposición 1.3.29 sabemos que la composición de funciones ω-monónotona una función ω-monótona y por ello $\phi \circ \psi$ es una función ω-monótona. Con ello solo resta justificar que se cumple la condición (c). Primero probaremos que $\pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(X)) = \pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(F_s))$, para cada $s \in \Gamma$. Para ello fijemos $s \in \Gamma$ y $x \in X$. Por hipótesis existe $y \in F_s$ tal que $\pi_{\psi(s)}(x) = \pi_{\psi(s)}(y)$. Así, $\pi_t(x) = \pi_t(y)$ y $g_t(\pi_t(x)) = g_t(\pi_t(y))$, para cada $t \in \psi(s)$. Con lo cual,

$$\pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(x)) = \pi_{\phi\circ\psi}(g_t(\pi_t(x))_{t\in T}) = (g_t(\pi_t(x)))_{t\in\psi(s)} = (g_t(\pi_t(y)))_{t\in\psi(s)} = \pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(y)).$$

Se sigue que $\pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(X)) = \pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(F_s))$. Para tener la condición (c) resta probar que $\pi_{\phi\circ\psi(s)} \restriction_{g(F_s)}$ es un homeomorfismo. Para ello es suficiente mostrar que $\pi_{\phi\circ\psi(s)} \restriction_{g(F_s)}$ es una función inyectiva. Por eso, fijemos $x, y \in F_s$ con $x \neq y$. Utilizando que $\pi_{\psi(s)} \restriction_{F_s}$ es un homeomorfismo, podemos escoger $t \in \psi(s)$ tal que $\pi_t(x) \neq \pi_t(y)$. Dado que g_t es un encaje, se tiene que $g_t(\pi_t(x)) \neq g_t(\pi_t(y))$ y con ello deducimos que

$$\pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(x)) = (g_t(\pi_t(x)))_{t\in\psi(s)} \neq (g_t(\pi_t(y)))_{t\in\psi(s)} = \pi_{\phi\circ\psi(s)}(g(y)).$$

Como consecuencia de la inyectividad de $\pi_{\phi(\psi(s))} \restriction_{g(F_s)}$, obtenemos que $\pi_{\phi(\psi(s))} \restriction_{g(F_s)}$ es un homeomorfismo y así la condición (c). Por lo tanto, $(\{g(F_s) : s \in \Gamma\}, \phi \circ \psi)$ es un π-esqueleto sobre $g(X)$. $\square$

Inmediatamente, podemos notar que el recíproco del Lema 4.0.8 es verdadero. Con esto, para probar que un espacio compacto arbitrario X admite un π-esqueleto es suficiente encajar al espacio X en un producto de espacios cósmicos y probar la existencia de un par que cumpla con las hipótesis del Lema 4.0.8 para la copia del espacio X en dicho producto.

El siguiente enunciado es el resultado principal de este capítulo. Para su demostración ocuparemos el Lema 4.0.8 y algunos resultados sobre límites inversos descritos en el capítulo de Preliminares.

Teorema 4.0.9. *Sea X un espacio compacto. Entonces, X admite un r-esqueleto si y solo si X admite un π-esqueleto.*

Demostración. Primero, mostraremos la necesidad. Sea $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto sobre X, por los Lemas 1.3.20 y 1.3.21, podemos suponer que

$$X = \varprojlim \langle r_s(X), r_s^t, \Gamma \rangle = \{(r_s(x))_{s\in\Gamma} : x \in X\},$$

donde $r_s^t = r_s \restriction_{r_t(X)}$, para cada $t \geq s$. Probaremos que X admite un π-esqueleto, en el entendido que X es un límite inverso consideramos a $X \subseteq \Pi_{s\in\Gamma} r_s(X)$. Iniciamos estableciendo como Γ' a la familia de todos los subconjuntos dirigidos de Γ que son numerables. Es claro que Γ' es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo bajo el orden de la contención. Para $A \in \Gamma'$, sea $F_A := r_{\sup A}(X)$; definamos $\varphi : \Gamma' \to [\Gamma]^{\leq\omega}$ por la igualdad $\varphi(A) = A$, para cualquier $A \in \Gamma'$. De manera inmediata, podemos notar que la función φ es una función ω-monótona y que la familia de espacios cósmicos $\{F_A : A \in \Gamma'\}$ cumple la condición (a). Además, el conjunto $\bigcup_{A\in\Gamma'} r_{\sup A}(X)$ es el espacio inducido por el r-esqueleto sobre X porque se cumple que $\{\{s\} : s \in \Gamma\} \subseteq \Gamma'$, de ello deducimos que $\{F_A : A \in \Gamma'\}$ satisface la propiedad (b). Fijemos $A \in \Gamma'$. Utilizando la propiedad (ii) del r-esqueleto, obtenemos que

$$\pi_A(F_A) = \{(r_s(r_{\sup A}(x)))_{s\in A} : x \in X\} = \{(r_s(x))_{s\in A} : x \in X\} = \pi_A(X).$$

Así, $\pi_A(X) = \pi_A(F_A)$. Ahora, por los Lemas 1.3.20 y Lema 1.3.21, sabemos que

$$F_A = r_{\sup A}(X) = \varprojlim \langle r_s(X), r_s^t, A \rangle = \{(r_s(x))_{s\in A} : x \in F_A\},$$

se sigue que $\pi_A \restriction_{F_A}$ es una función inyectiva. Así, podemos concluir que $\pi_A \restriction_{F_A}$ induce un homeomorfismo entre F_A y $\pi_A(X)$ y así se satisface la condición (c). Por lo tanto, el par $(\{F_A : A \in \Gamma'\}, \varphi)$ cumple con las hipótesis del Lema 4.0.8 y esto quiere decir que X admite un π-esqueleto.

Sigue demostrar la suficiencia. Para ello supongamos que $X \subseteq [0,1]^T$ y $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \varphi)$ es un π-esqueleto sobre X con espacio inducido Y. Para cada $s \in \Gamma$, sea $r_s : X \to F_s$ la función definida por $r_s := (\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1} \circ \pi_{\varphi(s)} \restriction_X$. Al ser el espacio $\pi_{\varphi(s)}(F_s)$ homeomorfo a F_s y $\pi_{\varphi(s)}(X) \subseteq \pi_{\varphi(s)}(F_s)$, tenemos que la función r_s es una retracción. Mostraremos que la familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X, es decir, verificaremos que se satisfacen las condiciones $(i) - (iv)$. La condición (i) se cumple puesto que $r_s(X) = F_s$ es un espacio homeomorfo a $\pi_{\varphi(s)}(F_s)$ y $\pi_{\varphi(s)}(F_s)$ es claramente un espacio cósmico. Para poder mostrar las condiciones (ii) y (iii), consideraremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1: Si $s \in \Gamma$, entonces $\pi_{\varphi(s)}(r_s(x)) = \pi_{\varphi(s)}(x)$ para cualquier $x \in X$.

Demostración de la afirmación: Fijemos $s \in \Gamma$. Dada la definición de la retracción r_s, para cada $x \in X$, se cumple que

$$\pi_{\varphi(s)}(r_s(x)) = \pi_{\varphi(s)}((\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1}(\pi_{\varphi(s)}(x))) = (\pi_{\varphi(s)} \circ (\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1}) \circ \pi_{\varphi(s)}(x) = \pi_{\varphi(s)}(x).$$

■

Para mostrar la condición (ii), fijemos $s, t \in \Gamma$ tales que $s \leq t$ y un punto $x \in X$. Usando que $r_s(x) \in F_s \subseteq F_t$ y que la restricción de r_t sobre F_t es la función identidad, obtenemos que $r_t(r_s(x)) = r_s(x)$. Queda probar que $r_s(x) = r_s(r_t(x))$. De la Afirmación 1, tenemos que

$$\pi_{\varphi(t)}(x) = \pi_{\varphi(t)}(r_t(x))$$

y

$$\pi_{\varphi(s)}(r_s(r_t(x))) = \pi_{\varphi(s)}(r_t(x)),$$

para cada $x \in X$. Al ser $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$, deducimos que

$$\pi_{\varphi(s)}(r_s(r_t(x))) = \pi_{\varphi(s)}(r_t(x)) = \pi_{\varphi(s)}(x).$$

Por otro lado, de acuerdo a la Afirmación 1, tenemos que $\pi_{\varphi(s)}(r_s(x)) = \pi_{\varphi(s)}(x)$. Así, $\pi_{\varphi(s)}(r_s(r_t(x))) = \pi_{\varphi(s)}(r_s(x))$. Recurriendo a la inyectividad de $\pi_{\varphi(s)}$ sobre F_s, garantizamos $r_s(x) = r_s(r_t(x))$. Con ello, $r_s = r_s \circ r_t = r_t \circ r_s$, es decir, hemos justificado que se cumple la condición (ii). Para probar la condición (iii) necesitaremos del siguiente enunciado. Para ello, antes de enunciar la afirmación, convendremos que en lo que sigue que $\mathcal{B}$ es una base numerable de $[0,1]$.

Afirmación 2: Si $s \in \Gamma$, entonces

$$\{(\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1}(\bigcap_{i\in G}[i, V_i] \cap \pi_{\varphi(s)}(F_s)) : G \in [\varphi(s)]^{<\omega} \text{ y } V_i \in \mathcal{B}\}$$

es base para F_s.

Demostración de la afirmación: Podemos notar claramente que la familia

$$\{\bigcap_{i\in G}[i, V_i] : G \in [\varphi(s)]^{<\omega} \text{ y } V_i \in \mathcal{B}\}$$

es una base para el espacio $[0,1]^{\varphi(s)}$ y, por ello la familia

$$\{\bigcap_{i\in G}[i, V_i] \cap \pi_{\varphi(s)}(F_s) : G \in [\varphi(s)]^{<\omega} \text{ y } V_i \in \mathcal{B}\}$$

es una base para el espacio $\pi_{\varphi(s)}(F_s)$. Dado que $\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s}$ es un homeomorfismo, deducimos que la colección

$$\{(\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1}(\bigcap_{i\in G}[i, V_i] \cap \pi_{\varphi(s)}(F_s)) : G \in [\varphi(s)]^{<\omega} \text{ y } V_i \in \mathcal{B}\}$$

es una base para F_s. ■

Probemos entonces la cláusula (iii), para esto consideremos una sucesión creciente $\langle s_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$. Sea $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$ y fijemos $x \in X$. De acuerdo a la Afirmación 2, podemos escoger $G \in [\varphi(s)]^{<\omega}$ y $\{V_i : i \in G\} \subseteq \mathcal{B}$ tales que

$$r_s(x) \in (\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1}(\bigcap_{i\in G}[i, V_i] \cap \pi_{\varphi(s)}(F_s)).$$

Utiizando que $\varphi(s) = \bigcup_{n<\omega} \varphi(s_n)$, escojamos $n_0 < \omega$ tal que $G \subseteq \varphi(s_n)$, para cada $n \geq n_0$. Por la Afirmación 1, sabemos que $\pi_{\varphi(s)}(r_s(x)) = \pi_{\varphi(s)}(x)$ y que $\pi_{\varphi(s_n)}(r_{s_n}(x)) = \pi_{\varphi(s_n)}(x)$, para cada $n \geq n_0$. En particular, al tener

$$G \subseteq \varphi(s_n) \subseteq \varphi(s),$$

se deduce que

$$\pi_G(r_s(x)) = \pi_G(x) = \pi_G(r_{s_n}(x)),$$

para cualquier $n \geq n_0$. Y dado que

$$r_s(x) \in (\pi_{\varphi(s)} \restriction_{F_s})^{-1}(\bigcap_{i\in G}[i, V_i] \cap \pi_{\varphi(s)}(F_s)),$$

se sigue que $\pi_i(r_s(x)) \in V_i$, para toda $i \in G$. Así, usando la igualdad

$$\pi_G(r_s(x)) = \pi_G(x) = \pi_G(r_{s_n}(x)),$$

obtenemos que $\pi_t(r_{s_n}(x)) \in V_i$, para cada $i \in G$. Con ello, para toda $n \geq n_0$, $r_{s_n}(x) \in \bigcap_{i\in G}[i, V_i]$, lo cual prueba que $r_{s_n}(x)$ converge a $r_s(x)$ y con ello la condición (iii) se satisface.

Por último, queda establecer que la condición (iv) se cumple, para ello, es suficiente notar que $r_s(X) = F_s$ y que

$$\overline{\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)} = \overline{\bigcup_{s\in\Gamma} F_s} = X$$

lo cual implica la condición (iv). Por lo tanto, la familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X. $\square$

Observación 4.0.10. Consecuente de la demostración del Teorema 3.0.5, tenemos que si X tiene r-esqueleto cuyo espacio inducido es Y, entonces el espacio inducido por el π-esqueleto obtenido de tal r-esqueleto es Y. Igualmente, si X es un π-esqueleto cuyo espacio inducido es Y, el espacio inducido por el r-esqueleto construido de dicho π-esqueleto resulta ser Y.

La siguiente equivalencia es consecuencia del teorema previo.

Corolario 4.0.11. *Sea X un espacio compacto. X es un espacio compacto de Corson si y solo si X admite un π-esqueleto completo.*

Demostración. Recordando el Teorema 1.3.9 tenemos que X es un espacio compacto de Corson si y solo si X admite un r-esqueleto completo. De la Afirmación 4.0.10 deducimos que X admite un r-esqueleto completo si y solo si X admite un π-esqueleto completo. $\square$

Con la anterior equivalencia tenemos que el comportamiento de los espacios con π-esqueleto bajo operaciones topológicas usuales, es el mismo comportamiento que se observa con los espacios compactos con r-esqueletos. Una de las operaciones topológicas que típicamente se estudian es la productividad de la propiedad, dicho así, en el siguiente resultado probamos que tener π-esqueletos se preserva bajo cualquier producto arbitrario. Es importante hacer notar que para la demostración no utilizamos la herramienta de submodelos elementales, técnica que fue utilizada por W. Kubiś en [Kub09] para probar la productividad de lo espacios con r-esqueletos.

Teorema 4.0.12. *El producto de espacios compactos con π-esqueleto admite un π-esqueleto.*

Demostración. Consideremos una familia de espacios compactos $\{X_i : i \in I\}$ los cuales admiten π-esqueletos. Para cada $i \in I$, sea T_i un conjunto tal que $X_i \subseteq [0,1]^{T_i}$, $\mathcal{F}_i = \{F^i_s : s \in \Gamma_i\}$ una familia de subespacios cósmicos cerrados de X_i y $\varphi_i : \Gamma_i \to [T_i]^{\leq\omega}$ una función ω-monótona de tal manera que $(\mathcal{F}_i, \varphi_i)$ es un π-esqueleto sobre X_i con espacio inducido Y_i. Sin perder generalidad, podemos suponer que los conjuntos T_i's son disjuntos a pares. Para cada $i \in I$, denotemos por $\leq_i$ al orden dado sobre Γ_i y, para cualquier $A \subseteq I$ y $S_1, S_2 \in \Pi_{i\in A}\Gamma_i$, la notación $S_1 \leq_A S_2$ la entenderemos como $\pi_i(S_1) \leq_i \pi_i(S_2)$, para toda $i \in A$.

Probemos entonces que $\Pi_{i\in I}X_i$ admite un π-esqueleto, para ello fijemos un punto $y \in \Pi_{i\in I}Y_i$, el cual nos ayudará en el desarrollo de la prueba. Comenzaremos por establecer nuestro conjunto de índices, para lo cual definimos

$$\Gamma := \{(A, S) : A \in [I]^{\leq\omega} \text{ y } S \in \Pi_{i\in A}\Gamma_i\}.$$

Para $(A_1, S_1), (A_2, S_2) \in \Gamma$, diremos que $(A_1, S_1) \leq_p (A_2, S_2)$ siempre que $A_1 \subseteq A_2$, $S_1 \leq_{A_1} \pi_{A_1}(S_2)$ y $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S_2)}$, para cada $i \in A_2 \setminus A_1$.

Probemos que $(\Gamma, \leq_p)$ es un conjunto parcialmente ordenado dirigido y σ-completo. Las condiciones de reflexividad y antisimetría están dadas porque los conjuntos Γ_i son conjuntos parcialmente ordenados. Para probar la transitividad de $\leq_p$, consideremos $(A_1, S_1), (A_2, S_2), (A_3, S_3) \in \Gamma$ tales que $(A_1, S_1) \leq_p (A_2, S_2)$ y $(A_2, S_2) \leq_p (A_3, S_3)$. De la definición de $\leq_p$, tenemos que $S_1 \leq_{A_1} \pi_{A_1}(S_2)$ y $S_2 \leq_{A_2} \pi_{A_2}(S_3)$. Utilizando que $A_1 \subseteq A_3$, $\pi_{A_1}(S_2) \leq_{A_1} \pi_{A_1}(S_3)$ y la transitividad de los ordenes sobre Γ_i, para cada $i \in A_1$, obtenemos que $S_1 \leq_{A_1} \pi_{A_1}(S_3)$. Ahora, para $i \in A_3 \setminus A_1$, si $i \in A_3 \setminus A_2$, entonces usando que $(A_2, S_2) \leq_p (A_3, S_3)$ tenemos que $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S_3)}$. Y si $i \in A_2 \setminus A_1$, entonces $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S_2)}$. Dado que $\pi_i(S_2) \leq_i \pi_i(S_3)$ y que $\mathcal{F}_i$ cumple (a), deducimos que $F^i_{\pi_i(S_2)} \subseteq F^i_{\pi_i(S_3)}$ y $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S_3)}$. Con ello, para cada $i \in A_3 \setminus A_1$ se cumple que $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S_3)}$. Así, $(A_1, S_1) \leq_p (A_3, S_3)$, lo cual prueba la transitividad del orden $\leq_p$. Sigue mostrar que Γ es un conjunto dirigido. Tomemos $(A_1, S_1), (A_2, S_2) \in \Gamma$. Para cada $i \in A_1 \cap A_2$, al ser Γ_i dirigido, podemos escoger $s_i \in \Gamma_i$ tal que $s_i \geq_i \pi_i(S_1)$ y $s_i \geq_i \pi_i(S_2)$. Para $i \in A_2 \setminus A_1$, sea s_i tal que $s_i \geq_i \pi_i(S_2)$ y $\pi_i(y) \in F^i_{s_i}$. Y para $i \in A_1 \setminus A_2$, elegimos s_i tal que $s_i \geq_i \pi_i(S_1)$ y $\pi_i(y) \in F^i_{s_i}$. Sea $S \in \Pi_{i\in A_1\cup A_2}\Gamma_i$ de tal manera que $\pi_i(S) = s_i$, para cada $i \in A_1 \cup A_2$. Tenemos que $(A_1 \cup A_2, S) \in \Gamma$ y por su construcción claramente tenemos que $(A_1, S_1) \leq_p (A_1 \cup A_2, S)$ y $(A_2, S_2) \leq_p (A_1 \cup A_2, S)$. Queda demostrar la σ-completez, consideremos una sucesión creciente $\langle (A_n, S_n)\rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$ y denotemos por $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$. Para cada $i \in A$, sea $n_i = \min\{n < \omega : i \in A_n\}$, $s_i = \sup\{\pi_i(S_n) : n \geq n_i\}$; y definamos a $S \in \Pi_{i\in A}\Gamma_i$ por $\pi_i(S) = s_i$, para cada $i \in A$. Tenemos que $(A, S) \in \Gamma$ y afirmamos que $(A, S) = \sup\{(A_n, S_n) : n < \omega\}$. En efecto, probemos primero que $(A_n, S_n) \leq_p (A, S)$, para cualquier $n < \omega$. Fijemos $n < \omega$. De la definición de A, es fácil ver que $A_n \subseteq A$. De la elección de S, claramente $S_n \leq_{A_n} \pi_{A_n}(S)$. Ahora, para $i \in A \setminus A_n$, existe $n' \geq n$ para el cual $i \in A_{n'}$. Utilizando que $(A_n, S_n) \leq_p (A_{n'}, S_{n'})$, deducimos que $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S_{n'})}$. Al tener que $\mathcal{F}_i$ cumple la condición (a) y $\pi_i(S_{n'}) \leq_i \pi_i(S)$, obtenemos $F^i_{\pi_i(S_{n'})} \subseteq F^i_{\pi_i(S)}$. Lo cual implica que $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S)}$ y $(A_n, S_n) \leq_p (A, S)$. Queda ver que (A, S) es el supremo de la sucesión $\langle (A_n, S_n)\rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$, para ello sea $(A', S') \in \Gamma$ una cota superior de la sucesión $\langle (A_n, S_n)\rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$. Mostremos que $(A, S) \leq_p (A', S')$. En efecto, la contención $A_n \subseteq A'$, para cada $n < \omega$, implica que $A \subseteq A'$. Para cada $i \in A$, tenemos que $\pi_i(S) = \sup\{\pi_i(S_n) : n \geq n_i\}$ y $\pi_i(S_n) \leq_i \pi_i(S')$, para toda $n \geq n_i$. De lo cual se sigue que $\pi_i(S) \leq_i \pi_i(S')$ y $S \leq_A \pi_A(S')$. Y para $i \in A' \setminus A$, no es difícil notar que $\pi_i(y) \in F^i_{\pi_i(S')}$. Así, concluimos que $(A, S) \leq_p (A', S')$, lo que significa que $(A, S) = \sup\{(A_n, S_n) : n < \omega\}$ y que el orden dado a Γ sea σ-completo.

Ya que Γ es un conjunto de índices adecuado, construyamos la familia de cerrados cósmicos como sigue: para un elemento $(A,S) \in \Gamma$, definimos

$$F_{(A,S)} := \Pi_{i\in A} F^i_{\pi_i(S)} \times \Pi_{i\in I\setminus A}\{\pi_i(y)\}.$$

La familia obtenida $\mathcal{F} = \{F_{(A,S)} : (A,S) \in \Gamma\}$ claramente consiste de subespacios cerrados cósmicos de $\Pi_{i\in I} X_i$ y además satisface la condición (a). De la densidad de los espacios inducidos Y_i en X_i, para cada $i \in I$, obtenemos que $\bigcup_{(A,S)\in\Gamma} F_{(A,S)}$ es un conjunto denso en $\Pi_{i\in I} X_i$ y así tenemos que se cumple la condición (b). Nos falta definir la función ω-monótona para tener los elementos que constituirán el π-esqueleto, para ello definamos por $\varphi : \Gamma \to [\bigsqcup_{i\in I} T_i]^{\leq\omega}$ la función dada por $\varphi(A,S) = \bigcup_{i\in A} \varphi_i(\pi_i(S))$, para cada $(A,S) \in \Gamma$. Veamos que φ es una función ω-monótona. Para ello fijemos $(A_1,S_1),(A_2,S_2) \in \Gamma$ tales que $(A_1,S_1) \leq_p (A_2,S_2)$. Es claro que $\pi_{A_1}(S_1) \leq_p \pi_{A_1}(S_2)$. De lo cual tenemos que

$$\varphi(A_1,S_1) = \bigcup_{i\in A_1} \varphi_i(\pi_i(S_1)) \subseteq \bigcup_{i\in A_2} \varphi_i(\pi_i(S_2)) = \varphi(A_2,S_2),$$

es decir, la función φ es monótona. Ahora, fijemos una función creciente $\langle (A_n,S_n)\rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$ y sea $(A,S) = \sup\{(A_n,S_n) : n < \omega\}$. Es inmediato ver que $\varphi(A_n,S_n) \subseteq \varphi(A,S)$, para cualquier $n<\omega$, por lo cual se sigue que $\bigcup_{n<\omega} \varphi(A_n,S_n) \subseteq \varphi(A,S)$. Sean $i \in A$ y $n_i = \text{mín}\{n < \omega : i \in A_n\}$, sabemos que $\pi_i(S) = \sup\{\pi_i(S_n) : n \geq n_i\}$. Utilizando que φ_i es una función ω-monótona, obtenemos que

$$\varphi_i(\pi_i(S)) = \bigcup_{n\geq n_i} \varphi_i(\pi_i(S_n)) \subseteq \bigcup_{n\geq n_i} \varphi(A_n,S_n).$$

Y dado que $\varphi(A,S) = \bigcup_{i\in A} \varphi_i(\pi_i(S))$, deducimos que $\varphi(A,S) \subseteq \bigcup_{n<\omega} \varphi(A_n,S_n)$. Con ello, $\varphi(A,S) = \bigcup_{n<\omega} \varphi(A_n,S_n)$; esto es, φ es una función ω-monótona. Por último, mostremos que la condición (c) es cierta para el par $(\{F_{(A,S)} : (A,S) \in \Gamma\}, \varphi)$. Esto es, probaremos que $\pi_{\varphi(A,S)} \restriction_{F_{(A,S)}}$ es un homeomorfismo. Para ello observemos que

$$\pi_{\varphi(A,S)}(X) = \Pi_{i\in A} \pi_{\varphi_i(\pi_i(S))}(X_i) = \Pi_{i\in A} \pi_{\varphi_i(\pi_i(S))}(F^i_{\pi_i(S)}) = \pi_{\varphi(A,S)}(F_{(A,S)}).$$

Y al ser $\pi_{\varphi_i(\pi_i(S))} \restriction_{F^i_{\pi_i(S)}}$ un homeomorfismo, es claro que $\pi_{\varphi(A,S)} \restriction_{F_{(A,S)}}$ un homeomorfismo. Por lo tanto, $(\{F_{(A,S)} : (A,S) \in \Gamma\}, \varphi)$ es un π-esqueleto sobre $\Pi_{i\in I} X_i$. $\square$

El resultado anterior nos proporciona una prueba alternativa al enunciado que fue establecido en [Kub09].

Corolario 4.0.13 ([Kub09])**.** *El producto arbitrario de espacios compactos con r-esqueleto admite un r-esqueleto.*

Demostración. Consecuencia de los Teoremas 4.0.9 y 4.0.12. $\square$

Para el recíproco del Teorema 4.0.12 tenemos la siguiente pregunta.

Pregunta 4.0.14. Si X_1 y X_2 son espacios compactos cuyo producto $X_1 \times X_2$ admite un π-esqueleto, ¿los espacios X_1 y X_2 admiten π-esqueletos?

En el caso particular de que los espacios X_1 y X_2 sean compactos de Valdivia, la pregunta es sugerida en [Kal09, Q. 2.3]. Además, en dicho artículo se dan algunas respuestas parciales para tal caso.

Como comentario final a este capítulo, puntualizamos que la noción de π-esqueleto de alguna forma se asemeja a la definición de espacios compactos de Valdivia usando el concepto de Σ-producto.

CAPÍTULO 5

Familias de cerrados y r-esqueletos

En el estudio de las propiedades topológicas internas que posee un r-esqueleto sobre un espacio compacto X, es inevitable notar la existencia de una familia monótona de subconjuntos cerrados cósmicos cuya unión es densa en el espacio X. En el artículo [CSGFRH17], los autores notan este fenómeno y con ayuda de la técnica de funciones ω-monótonas, conceptualizan el fenómeno bajo el nombre de c-esqueletos (Definición 1.3.35), como hemos mencionado con anterioridad, bajo este concepto es posible caracterizar a los espacios compactos de Corson (Teorema 1.3.38). Siguiendo esta línea de investigación, en este capítulo introducimos una noción menos fuerte que la de c-esqueleto, con el objetivo de caracterizar a los espacios compactos con r-esqueleto.

En este capítulo consideramos una familia de subespacios cerrados $\{F_s : s \in \Gamma\}$ de un espacio compacto (X, τ). Recordaremos para su uso las condiciones (a) y (b) enunciadas en la definición de π-esqueleto (Definición 4.0.1):

(a) $F_s \subseteq F_t$, siempre que $s \leq t$.

(b) $\bigcup_{s\in\Gamma} F_s$ es un conjunto denso en X.

Notemos que si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre un espacio compacto X, entonces $\{r_s(X) : s \in \Gamma\}$ es una familia de subespacios cerrados cósmicos que satisface (a) y (b).

Antes de introducir la noción principal de este capítulo, tenemos que recurrir a la siguiente notación: Si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X y $x \in X$, entonces usamos notación $\mathcal{N}(\mathcal{B}, x) := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Además, haremos uso de la siguiente definición que está inspirada en la condición $(c2)$ de la Definición 1.3.35:

Definición 5.0.1. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{F_s : s \in \Gamma\}$ una familia de subespacios cerrados de X. Decimos que un función $\psi : \Gamma \to [\tau]^{\leq\omega}$ es una *asignación de bases para* $\{F_s : s \in \Gamma\}$ si $\psi(s)$ es una base para una topología sobre X, $\psi(s) \restriction_{F_s} := \{U \cap F_s : U \in \psi(s)\}$ es una base para el subespacio F_s y $\emptyset \notin \psi(s) \restriction_{F_s}$.

Con ello, estamos listos para enunciar la noción medular de este capítulo.

Definición 5.0.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un *c-esqueleto débil* sobre X es una pareja $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ que cumple las siguientes condiciones se cumplen:

1. La familia $\{F_s : s \in \Gamma\}$ consiste de subespacios cósmicos de X que satisfacen (a) y (b),

2. $\psi : \Gamma \to [\tau]^{\leq\omega}$ es una asignación de bases para $\{F_s : s \in \Gamma\}$ y

3. si $x \in X$ y $z \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(s),x)} \overline{U \cap F_s}$, entonces para cada $V \in \mathcal{N}(\psi(s), z)$ existe $U \in \mathcal{N}(\psi(s), x)$ tal que $\overline{U \cap F_s} \subseteq V$.

El *espacio inducido* de un c-esqueleto débil es $\bigcup_{s\in\Gamma} F_s$ y un c-esqueleto débil sobre X se llamará *completo* si su espacio inducido es X.

Naturalmente, el ejemplo canónico de un c-esqueleto débil es un c-esqueleto.

Proposición 5.0.3. *Si X es un espacio compacto con c-esqueleto, entonces X admite un c-esqueleto débil.*

Demostración. Consideremos un c-esqueleto $\{(F_s, \mathcal{B}_s) : s \in \Gamma\}$ sobre X (recordar la Definición 1.3.35). Estableciendo $\psi(s) = \mathcal{B}_s$ para cada $s \in \Gamma$, es evidente que ψ es una asignación de bases para $\{F_s : s \in \Gamma\}$. Las condiciones (1) y (2) de la definición de c-esqueleto débil son fáciles de verificar. La existencia de un espacio de Tychonoff Z_s y una función continua $g_s : (X, \psi(s)) \to Z_s$ que separa puntos de F_s garantiza el cumplimiento de la condición (3), para cada $s \in \Gamma$. □

Recordemos que nuestro propósito es utilizar la Definición 5.0.2 para caracterizar los espacios compactos con r-esqueleto. Para ello, resulta indispensable construir retracciones a partir de los objetos inherentes de un c-esqueleto débil. En este sentido, el siguiente lema técnico nos indica que un subespacio cerrado de un espacio compacto es un retracto siempre que exista una base que cumpla con la condición (3).

Lema 5.0.4. *Sea (X, τ) un espacio compacto y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado y cósmico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *Existe una base $\mathcal{B} \in [\tau]^{\leq\omega}$ para una topología sobre X tal que $\mathcal{B} \restriction_F$ es una base para F, $U \cap F \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{B}$ además de que F y $\mathcal{B}$ satisfacen la condición (3) de la definición de c-esqueleto débil.*

- *Existe una retracción $r : X \to F$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B} \in [\tau]^{\leq\omega}$ es una base para una topología sobre X tal que $\mathcal{B} \restriction_F$ es una base del subespacio F, $U \cap F \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{B}$ y el par F y $\mathcal{B}$ satisface la condición (3) de la definición de c-esqueleto débil. Fijemos $x \in X$. Primero probemos que $\bigcap_{V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{V \cap F} \neq \emptyset$. Al ser $\mathcal{B}$ una base para una topología sobre X, tenemos que $\mathcal{N}(\mathcal{B},x) \neq \emptyset$. Dado que $U \cap F \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)$, deducimos que $\{\overline{U \cap F} : U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)\}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados no vacíos. Afirmamos que $\{\overline{U \cap F} : U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)\}$ posee la propiedad de la intersección finita. En efecto, tomemos $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)$. Utilizamos que $\mathcal{B}$ sea una base para una topología sobre X, para escoger $U_3 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)$ tal que $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Con ello, $\emptyset \neq \overline{U_3 \cap F} \subseteq \overline{U_1 \cap U_2 \cap F}$. Así, al tener la familia $\{\overline{U \cap F} : U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)\}$ la propiedad de la intersección finita, de la compacidad de X, obtenemos que $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F} \neq \emptyset$. Ahora, mostraremos que $|\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F}| = 1$. Para ello escojamos dos puntos distintos $y_0, y_1 \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F}$. Por ser F un espacio de Hausdorff y $\mathcal{B} \restriction_F$ base para F, podemos escoger $W_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},y_0)$ y $W_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},y_1)$ de tal manera que $W_0 \cap W_1 \cap F = \emptyset$. Que se cumpla la condición (3) de la Definición 5.0.2, nos permite escoger $V_0, V_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)$ tales que $\overline{V_0 \cap F} \subseteq W_0$ y $\overline{V_1 \cap F} \subseteq W_1$. Sin embargo, tenemos que $\emptyset \neq \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F} \subseteq \overline{V_0 \cap F} \cap \overline{V_1 \cap F} \subseteq W_0 \cap W_1 \cap F$, lo cual contradice que W_0 y W_1 sean disjuntos en F. Por ello, $|\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{F},x)} \overline{U \cap F}| = 1$. Lo anterior nos permite considerar la función $r : X \to F$ tal que $r(x)$ es el único punto en $\bigcap_{V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{V \cap F}$, para cada $x \in X$. De la definición de r, se sigue que si $x \in F$ y $V \in \mathcal{B}$, entonces $r(x) = x$ y $r(V) \subseteq \overline{V \cap F}$. Ahora, probemos que r es una función continua. Para ello, fijemos $U \in \mathcal{B}$. Recordemos que $\mathcal{B} \restriction_F$ es base para el subespacio F. Afirmamos que $r^{-1}(U \cap F)$ es un subconjunto abierto de X. En efecto, fijemos $x \in X$ tal que $r(x) \in U \cap F$. Utilizando la condición (3) de la Definición 5.0.2, escojamos $V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)$ con $\overline{V \cap F} \subseteq U$. Dado que $r(V) \subseteq \overline{V \cap F}$, se cumple que $V \subseteq r^{-1}(\overline{V \cap F}) \subseteq r^{-1}(U \cap F)$. Esto es, r es una función continua. Por último, r es una retracción porque $r \restriction_F$ es la función identidad.

Sigue asumir que tenemos una retracción $r : X \to F$. Sea $\mathcal{B}'$ una base numerable para el espacio F y $\mathcal{B} := \{r^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}'\}$. Notemos que $\mathcal{B} \in [\tau]^{\leq\omega}$ es base para una topología sobre X, $\mathcal{B} \restriction_F$ es una base para F y que $U \cap F \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{B}$. Queda demostrar que se cumple la condición (3) de la Definición 5.0.2. Para esto, fijemos $x \in X$. Primero, probemos que $r(x) \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{V \cap F}$. Para ello, escojamos $V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)$ y $U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},r(x))$. Comprobemos que $U \cap V \cap F \neq \emptyset$. Es claro que podemos encontrar $V', U' \in \mathcal{B}'$ tal que $V = r^{-1}(V')$ y $U = r^{-1}(U')$. Con ello, tenemos que $r(x) \in V'$ y debido a que r es una retración, $r(x) \in U'$. Así, $r(x) \in U' \cap V'$. Por ser $\mathcal{B}'$ una base para F, existe W' tal que $r(x) \in W' \subseteq U' \cap V'$. Por ello, $x \in r^{-1}(W') \subseteq r^{-1}(U' \cap V') = U \cap V$. Y dado que $r^{-1}(W') \in \mathcal{B}$, deducimos que $\emptyset \neq r^{-1}(W') \cap F \subseteq U \cap V \cap F$. Se sigue entonces que $r(x) \in \overline{V} \cap F$ y por tanto $r(x) \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{V \cap F}$. Continuando con la demostración, veremos que $|\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F}| = 1$. Supongamos que la igualdad no es cierta, es decir tomemos $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F}$ con $y \neq r(x)$. Dado que F es Hausdorff y $\mathcal{B} \restriction_F$ una base para F, tomemos $W_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},y)$ y $W_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{B},r(x))$ que satisfacen $W_0 \cap W_1 \cap F = \emptyset$. Utilizando que r es una retracción, obtenemos que $r(x) \in r(W_1) = W_1'$. Así, $x \in r^{-1}(W_1') = W_1 \in \mathcal{B}$. Y por ser $y \in \overline{W_1} \cap F$, tenemos que $W_0 \cap W_1 \cap F \neq \emptyset$, esto último contradice la elección de W_0 y W_1. Por tanto, $|\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{U \cap F}| = 1$ y $\{r(x)\} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{V \cap F}$. Finalmente, para probar la condición (3), consideremos

$r^{-1}(W) \in \mathcal{N}(\mathcal{B}, r(x))$ donde $W \in \mathcal{B}$. Por ser r una retracción, $r(x) = r(r(x)) \in W$. Elijamos $W' \in \mathcal{B}$ con $r(x) \in W' \subseteq \overline{W'} \subseteq W$. Se sigue que $x \in r^{-1}(W') \subseteq r^{-1}(\overline{W'}) \subseteq r^{-1}(W)$, es decir, $\overline{r^{-1}(W') \cap F} \subseteq r^{-1}(W)$ y por lo tanto la condición (3) se cumple. □

Observación 5.0.5. Analizando la prueba del Lema 5.0.4, notamos la existencia de la igualdad $\{r(x)\} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\mathcal{B},x)} \overline{V} \cap F$, donde $r : X \to F$ es la retracción obtenida en el lema referido. Dicha igualdad la utilizaremos de manera recurrente en el desarrollo de las demostraciones en nuestros siguientes resultados

Nuestro siguiente resultado expresa que la existencia de un r-esqueleto implica la existencia de un c-esqueleto débil, de lo cual tenemos que la familia de espacios compactos con c-esqueleto débil al menos contiene a la clase de espacios compactos con r-esqueleto. Esto es una razón para que la noción de c-esqueleto sea considerada como objeto de estudio.

Teorema 5.0.6. *Si X es un espacio compacto que admite un r-esqueleto $\{r_s : s \in \Gamma\}$, entonces X admite un c-esqueleto débil $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ tal que $\{r_s(x)\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(s),x)} \overline{U} \cap F$, para cada $x \in X$ y cada $s \in \Gamma$.*

Demostración. Para cada $s \in \Gamma$, sea $F_s = r_s(X)$; escojamos una base numerable $\mathcal{B}_s$ de F_s y definamos $\psi(s) := r_s^{-1}(\mathcal{B}_s)$, lo cual nos proporciona una función $\psi : \Gamma \to [\tau]^{\leq\omega}$. Al ser la familia $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto, la cláusulas (i), (ii) y (iv) de la definición de r-esqueleto implican que $\{F_s : s \in \Gamma\}$ es una familia de espacios cósmicos que cumplen (a) y (b), es decir, se cumple la condición (1). Y por ser $\{r_s : s \in \Gamma\}$ una familia de retracciones, del Lema 5.0.4 tenemos que $\psi : \Gamma \to [\tau]^{\leq\omega}$ satisface las condiciones (2) y (3). Por lo tanto, $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil. □

Con el Teorema 5.0.6 tenemos una gran cantidad de ejemplos de espacios compactos con c-esqueleto débil, en particular los espacios compactos de Valdivia y de Corson son espacios con un c-esqueleto débil. Naturalmente, podemos preguntarnos acerca del recíproco del Teorema 5.0.6, es decir, si un espacio compacto admite un c-esqueleto débil, ¿el espacio admitirá un r-esqueleto? El siguiente ejemplo da respuesta negativa. En este ejemplo exhibimos un espacio compacto que admite un c-esqueleto débil pero que no admite un r-esqueleto. Este espacio es un ejemplo de espacio compacto que no es un espacio compacto de Valdivia dado por O. Kalenda en [Kal00] para ilustrar que las imágenes continuas de espacios compactos de Valdivia no son necesariamente espacios compactos de Valdivia.

Ejemplo 5.0.7. Consideremos el espacio compacto X obtenido de $[0, \omega_1] \times \{0, 1\}$ identificando los puntos $(\omega_1, 0)$ y $(\omega_1, 1)$, y denotemos por τ_X a la topología cociente sobre X. Primero probemos que X admite un c-esqueleto débil. Fijemos una base $\mathcal{B}$ para el espacio $[0, \omega_1]$. El conjunto $\Gamma := \omega_1 \times \omega_1$ es un conjunto parcialmente ordenado dirigido y σ-completo con el orden dado por $(\alpha, \beta) \leq_\Gamma (\alpha', \beta')$ si $\alpha \leq \alpha'$ y $\beta \leq \beta'$. Para cada $\alpha < \omega_1$, fijemos un subconjunto $\mathcal{B}_\alpha \in [\mathcal{B}]^{\leq\omega}$ tal que $\{U \cap [0, \alpha] : U \in \mathcal{B}_\alpha\}$ es una base para el subespacio $[0, \alpha]$ y si $\alpha \notin U \in \mathcal{B}_\alpha$, entonces $U \subseteq [0, \alpha)$. Para $\alpha < \omega_1$

y $i \in \{0,1\}$, sea $\mathcal{B}_\alpha \times \{i\} := \{U \times \{i\} : U \in \mathcal{B}_\alpha\}$. Para cada $(\alpha, \beta) \in \Gamma$, definamos $F_{(\alpha,\beta)} := ([0,\alpha] \times \{0\}) \cup ([0,\beta] \times \{1\})$ y

$$\psi(\alpha,\beta) := (\mathcal{B}_\alpha \times \{0\}) \cup (\mathcal{B}_\beta \times \{1\}) \cup \{\big((U \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}\big) \cup \big((W \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\}\big) :$$

$$U \in \mathcal{B}_\alpha, \alpha \in U, W \in \mathcal{B}_\beta \text{ y } \beta \in W\}.$$

Afirmamos que $(\{F_{(\alpha,\beta)} : (\alpha,\beta) \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil sobre X. No es difícil notar que $\{F_{(\alpha,\beta)} : (\alpha,\beta) \in \Gamma\}$ cumple la condición (1). Veamos que ψ satisface la condición (2). Para ello, fijemos $(\alpha,\beta) \in \Gamma$. Por la elección de los conjuntos $\mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{B}_\beta$, tenemos que $\psi(\alpha,\beta) \restriction_{F_{(\alpha,\beta)}}$ es una base para el espacio $F_{(\alpha,\beta)}$ y $\emptyset \notin \psi(\alpha,\beta) \restriction_{F_{(\alpha,\beta)}}$. Queda probar que $\psi(\alpha,\beta)$ es una base para una topología sobre X. En efecto, por hipótesis, $\psi(\alpha,\beta)$ es una cubierta para X. Tomemos $U, U' \in \mathcal{B}_\alpha$ y $W, W' \in \mathcal{B}_\beta$. Para determinar que $\psi(\alpha,\beta)$ es base tenemos que considerar los siguientes tres casos:

- Si $x \in (U \times \{0\}) \cap (U' \times \{0\})$ y $\alpha \notin U \cap U'$, dado que $\mathcal{B}_\alpha$ es base para $[0,\alpha]$, entonces existe $V \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que $x \in (V \times \{0\}) \subseteq (U \times \{0\}) \cap (U' \times \{0\})$ y $V \times \{0\} \in \psi(\alpha,\beta)$.

- Cuando $x \in (W \times \{1\}) \cap (W' \times \{1\})$ y $\beta \notin W \cap W'$ procedemos de la misma forma que en el caso anterior.

- Supongamos que $x \in (((U \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}) \cup ((W \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\})) \cap (((U' \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}) \cup ((W' \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\}))$. Al ser $\mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{B}_\beta$ bases para los espacios $[0,\alpha]$ y $[0,\beta]$, respectivamente, podemos escoger $V \in \mathcal{B}_\alpha$ y $V' \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que o bien

  $$x \in (V \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\} \subseteq ((U \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}) \cap ((U' \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\})$$

  o

  $$x \in (V' \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\} \subseteq ((W \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\}) \cap ((W' \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\}).$$

  Así, $x \in ((V \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}) \cup ((V' \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\}) \subseteq (((U \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}) \cup ((W \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\})) \cap (((U' \cup (\alpha,\omega_1]) \times \{0\}) \cup ((W' \cup (\beta,\omega_1]) \times \{1\}))$.

Los tres casos anteriores justifican que $\psi(\alpha,\beta)$ sea una base para una topología sobre X y con ello que la condición (2) se cumpla. Ahora, solo resta probar que la condición (3) se satisface. Por lo cual, fijemos $(\alpha,\beta) \in \Gamma$ y $x \in X$. Primero, supongamos que $x \in F_{(\alpha,\beta)}$. Claramente tenemos que $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(\alpha,\beta),x)} \overline{U \cap F_{(\alpha,\beta)}} = \{x\}$, y por ello la condición (3) se sigue trivialmente. Ahora, supongamos que $x \notin F_{(\alpha,\beta)}$. Tenemos que $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(\alpha,\beta),x)} \overline{U \cap F_{(\alpha,\beta)}} = \{(\alpha,0),(\beta,1)\}$. Además, notemos que si $z \in \{(\alpha,0),(\beta,1)\}$ y $U \in \mathcal{N}(\psi(\alpha,\beta),z)$, entonces $U \in \mathcal{N}(\psi(\alpha,\beta),x)$ y con ello la condición (3) se cumple. Por lo tanto, $(\{F_{(\alpha,\beta)} : (\alpha,\beta) \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil sobre X. Por otro lado, sabemos que X no es un espacio compacto de Valdivia y que no admite un r-esqueleto; esto es a consecuencia de que en todo espacio compacto de peso ω_1, tener un r-esqueleto es equivalente a ser un compacto de Valdivia (ver Observación 1.3.19).

En el siguiente teorema, damos condiciones sobre un c-esqueleto débil para poder generar un r-esqueleto. Es decir, obtenemos una caracterización para los espacios compactos con r-esqueleto en términos de un c-esqueleto débil más algunas cláusulas adicionales.

Teorema 5.0.8. *Para un espacio compacto X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *Existe un c-esqueleto débil $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ sobre X que cumple*
  - ($\star$) *Para todo $s \leq t$, $x \in X$, $z \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(t),x)} \overline{U \cap F_t}$ y $V \in \mathcal{N}(\psi(s), x)$, existe $W \in \mathcal{N}(\psi(s), z)$ tal que $\overline{W \cap F_s} \subseteq \overline{V \cap F_s}$; y*
  - ($\star\star$) *si $\langle s_n \rangle_{n<\omega}$ es una sucesión creciente en Γ con $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$, entonces para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}(\psi(s), x)$ existe $m < \omega$ tal que $\overline{U \cap F_s} \cap V \cap F_{s_n} \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq m$ y para cualquier $V \in \mathcal{N}(\psi(s_n), x)$.*
- *Existe un r-esqueleto sobre X.*

Demostración. Consideremos un c-esqueleto débil $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ que cumple ($\star$) y ($\star\star$). Para cada $s \in \Gamma$, tomemos la retracción r_s dada en el Lema 5.0.4. Probaremos que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X. Para comenzar, la condición (i) se cumple porque $r_s(X) = F_s$ y F_s es un espacio cósmico, para cualquier $s \in \Gamma$. Para la condición (ii), fijemos $s, t \in \Gamma$ con $s \leq t$. Por un lado, sabemos que $r_s(X) = F_s \subseteq F_t = r_t(X)$ y que r_t es la función identidad sobre F_t, de lo cual deducimos que $r_t \circ r_s = r_s$. Por otro lado, fijamos $x \in X$. Usando la condición ($\star$), para cada $V \in \mathcal{N}(\psi(s), x)$ escojamos $W_V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))$ de tal manera que $\overline{W_V \cap F_s} \subseteq \overline{V \cap F_s}$. Se sigue que

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}(\psi(s),x)} \overline{W_V \cap F_s} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\psi(s),x)} \overline{V \cap F_s}.$$

Con lo cual

$$\bigcap_{W \in \mathcal{N}(\psi(s),r_t(x))} \overline{W \cap F_s} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\psi(s),x)} \overline{W_V \cap F_s}$$

y esto implica la siguiente relación:

$$\{r_s(r_t(x))\} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(\psi(s),r_t(x))} \overline{W \cap F_s} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\psi(s),x)} \overline{V \cap F_s} = \{r_s(x)\}.$$

Conjuntando ambos casos, tenemos que $r_s \circ r_t = r_s$ y así la condición (ii) es cierta. Sigue probar que la condición (iii) se satisface. Consideremos una sucesión creciente $\langle s_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$ y denotemos por $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$. Fijemos $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}(\psi(s), r_s(x))$, y escojamos $V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_s(x))$ de tal manera que $\overline{V \cap F_s} \subseteq U \cap F_s$. Utilizando la condición ($\star\star$), tomemos $m < \omega$ tal que para toda $n \geq m$ tengamos $\overline{V \cap F_s} \cap W \cap F_{s_n} \neq \emptyset$, para cualquier $W \in \mathcal{N}(\psi(s_n), r_s(x))$. Así, fijemos $n \geq m$. De la propiedad ($\star\star$), es inmediato ver que

$$\{\overline{V \cap F_s} \cap W \cap F_{s_n} : W \in \mathcal{N}(\psi(s_n), r_s(x))\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita, por ello

$$\{\overline{V \cap F_s} \cap \overline{W \cap F_{s_n}} : W \in \mathcal{N}(\psi(s_n), r_s(x))\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita. Dada la compacidad de F_s, se cumple que

$$\overline{V \cap F_s} \cap \Big(\bigcap_{W \in \mathcal{N}(\psi(s_n), r_s(x))} \overline{W \cap F_{s_n}} \Big) \neq \emptyset.$$

Y al tener las igualdades

$$\{r_{s_n}(x)\} = \{r_{s_n}(r_s(x))\} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(\psi(s_n), r_s(x))} \overline{W \cap F_{s_n}},$$

obtenemos que $r_{s_n}(x) \in \overline{V \cap F_s} \subseteq U$. Con lo cual, para cada $n \geq m$, $r_{s_n}(x) \in U$; esto es, $r_{s_n}(x) \to r_s(x)$ en F_s. Así, $r_{s_n}(x) \to r_s(x)$ en X y (iii) se cumple. Por último, la condición (iv) se sigue del hecho de que la familia $\{F_s : s \in \Gamma\}$ satisface la condición (b). Con ello, hemos probado que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X.

Ahora, asumamos que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre X y Y es su espacio inducido. Para cada $s \in \Gamma$, sea $F_s := r_s(X)$, y escojamos una base numerable $\mathcal{B}_s$ de F_s y definimos $\psi(s) := r_s^{-1}(\mathcal{B}_s)$. De la demostración del Teorema 5.0.6 sabemos que $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil sobre X con espacio inducido Y. Para establecer la propiedad $(\star)$, fijemos $s \leq t$, $x \in X$ y $W \in \mathcal{B}_s$ tal que $x \in r_s^{-1}(W)$. Por el Teorema 5.0.6, sabemos que

$$\{r_t(x)\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(t), x)} \overline{U \cap F_t}.$$

Utilizando que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto, deducimos que $r_s(r_t(x)) = r_s(x) \in W$. Así, $r_t(x) \in r_s^{-1}(W)$ y $(\star)$ se sigue inmediatamente. Para la propiedad $(\star\star)$, consideremos una sucesión creciente $\langle s_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \Gamma$ y denotemos por $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$, fijemos $x \in X$ y $W \in \mathcal{B}_s$ para los cuales $x \in r_s^{-1}(W)$. Como $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto, se cumple que $r_{s_n}(x) \to r_s(x)$. Y dado que $r_s(x) \in W$, podemos escoger $m < \omega$, tal que para cada $n \geq m$, $r_{s_n}(x) \in W$. Sean $n \geq m$ y $r_{s_n}^{-1}(W') \in \mathcal{N}(\psi(s_n), x)$, donde $W' \in \mathcal{B}_{s_n}$. Dada la igualdad

$$\{r_{s_n}(x)\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(\psi(s_n), x)} \overline{U \cap F_{s_n}},$$

obtenemos que $r_{s_n}(x) \in \overline{r_{s_n}^{-1}(W') \cap F_{s_n}}$. Y al ser $r_s(r_{s_n}(x)) = r_{s_n}(x)$ y $r_{s_n}(x) \in W$, se cumple que $r_{s_n}(x) \in r_s^{-1}(W)$. Utilizando que $r_{s_n}(x) \in \overline{r_{s_n}^{-1}(W') \cap F_{s_n}}$, notamos que

$$r_s^{-1}(W) \cap r_{s_n}^{-1}(W') \cap F'_{s_n} \neq \emptyset.$$

Dado que

$$r_s^{-1}(W) \cap r_{s_n}^{-1}(W') \cap F_{s_n} = r_s^{-1}(W) \cap F_s \cap r_{s_n}^{-1}(W') \cap F_{s_n},$$

podemos concluir que

$$\overline{r_s^{-1}(W) \cap F_s} \cap r_{s_n}^{-1}(W') \cap F_s \neq \emptyset,$$

lo cual implica que se cumple $(\star\star)$. Por lo tanto, $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil sobre X que satisface $(\star)$ y $(\star\star)$. $\square$

Observando la demostración del Teorema 5.0.6 tenemos que el espacio inducido del r-esqueleto era el mismo espacio inducido del c-esqueleto débil construido, y viceversa, el espacio inducido del c-esqueleto débil era el mismo que el espacio inducido del r-esqueleto construido. Por ello tenemos la siguiente caracterización para contexto de espacios de compactos de Corson.

Corolario 5.0.9. *Sea X un espacio compacto. Son equivalentes:*

- *Existe un c-esqueleto débil completo sobre X que satisface las condiciones $(\star)$ y $(\star\star)$.*
- *X es un espacio compacto de Corson.*

Observación 5.0.10. El corolario anterior y el Teorema 1.3.38 nos aseguran que la existencia de un c-esqueleto completo es equivalente a la existencia de c-esqueleto débil completo que satisface las propiedades $(\star)$ y $(\star\star)$.

El comentario de la Observación 5.0.10 motivó la obtención del siguiente resultado, el cual es una caracterización de un espacio compacto de Valdivia en términos de un c-esqueleto débil especial.

Teorema 5.0.11. *Para un espacio compacto X los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *Existe un c-esqueleto débil $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ sobre X que cumple*

  $(\star\star)$ *si $\langle s_n \rangle_{n<\omega}$ es una sucesión creciente en Γ con $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$, entonces para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}(\psi(s), x)$ existe $m < \omega$ tal que $\overline{U \cap F_s} \cap V \cap F_{s_n} \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq m$ y para toda $V \in \mathcal{N}(\psi(s_n), x)$; y*

  $(\star\star\star)$ *para cada $s, t \in \Gamma$, $x \in X$ y $V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))$, existe $U_V \in \mathcal{N}(\psi(t), r_s(x))$ tal que $\emptyset \neq \overline{U_V \cap F_t \cap F_s} \subseteq \overline{V \cap F_s}$; y $\{\overline{U_V \cap F_t \cap F_s} : V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))\}$ tiene la propiedad de intersección finita.*

- *Existe un r-esqueleto conmutativo sobre X.*

Demostración. Asumamos que $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil sobre X que satisface $(\star\star)$ y $(\star\star\star)$. Recurriendo a la demostración del Teorema 5.0.8, notamos que $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ induce una familia de retracciones $\{r_s : s \in \Gamma\}$ sobre X que cumple la cláusulas (i) y (iv) de la definición de r-esqueleto,

$$\{r_s(x)\} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}(\psi(s), x)} \overline{V \cap F_s}$$

para cada $s \in \Gamma$ y cada $x \in X$; y además $r_s = r_t \circ r_s$ siempre que $s \leq t$. Resta probar que las condiciones (ii) y (iii) se cumplen. Primero, probemos que esta familia de retracciones es conmutativa, lo cual también implicará que la propiedad (ii) se satisface. Fijemos $s, t \in \Gamma$. De la condición $(\star\star\star)$ tenemos que para cada $V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))$ podemos encontrar $U_V \in \mathcal{N}(\psi(t), r_s(x))$ tal que

$$\overline{U_V \cap F_t \cap F_s} \subseteq \overline{V \cap F_s}.$$

Como la familia $\{\overline{U_V \cap F_t \cap F_s} : V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y

$$\bigcap_{V\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U_V \cap F_t \cap F_s} \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{V \cap F_s},$$

deducimos que

$$\bigcap_{V\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U_V \cap F_t \cap F_s} = \{r_t(r_s(x))\}.$$

Ahora, la igualdad

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}(\psi(s),r_t(x))} \overline{U \cap F_s} = \bigcap_{V\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U_V \cap F_t \cap F_s}$$

implica que

$$\{r_s(r_t(x))\} = \bigcap_{V\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U_V \cap F_t \cap F_s}.$$

Así, $r_s(r_t(x)) = r_t(r_s(x))$. Lo cual indica que las retracciones conmutan sin necesidad que sean comparables, lo cual también implica que la condición (ii) se cumple debido a que $r_s = r_t \circ r_s$ siempre que $s \leq t$. De las condiciones (ii) y $(\star\star)$, con un desarrollo similar a las ideas de la prueba del Teorema 5.0.8, obtenemos sin dificultad que la condición (iii) se satisface. Por lo tanto, $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre X.

Ahora, supongamos que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo con espacio inducido Y. Para cada $s \in \Gamma$ definamos $F_s := r_s(X)$, escojamos una base numerable $\mathcal{B}_s$ para F_s y definamos $\psi(s) := r_s^{-1}(\mathcal{B}_s)$. De la prueba del Teorema 5.0.8 tenemos que $(\{F_s : s \in \Gamma\}, \psi)$ es un c-esqueleto débil sobre X con espacio inducido Y que cumple con las condiciones $(\star)$ y $(\star\star)$. Resta probar que se cumple la propiedad $(\star\star\star)$. Fijemos $s, t \in \Gamma$ y $x \in X$. Elijamos $r_s^{-1}(W), r_s^{-1}(V) \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))$ tal que

$$r_t(x) \in r_s^{-1}(W) \subseteq \overline{r_s^{-1}(W))} \subseteq r_s^{-1}(V).$$

Es claro que $r_s(r_t(x)) \in W$. Al ser r_s una retracción y $W \subseteq F_s$, deducimos que $r_s(r_s(r_t(x))) \in W$. Con ello, $r_s(r_t(x)) \in r_s^{-1}(W)$. Utilizando la conmutatividad del r-esqueleto, obtenemos que

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U \cap F_t} = \{r_t(r_s(x))\} = \{r_s(r_t(x))\} = \bigcap_{W'\in\mathcal{N}(\psi(s),r_t(x))} \overline{W' \cap F_s} \subseteq r_s^{-1}(W) \cap F_s.$$

Esto es,

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U \cap F_t} \subseteq r_s^{-1}(W) \cap F_s.$$

Y dado que $r_t(r_s(x)) = r_s(r_t(x))$, obtenemos que

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U \cap F_t \cap F_s} = \bigcap_{U\in\mathcal{N}(\psi(t),r_s(x))} \overline{U \cap F_t} \subseteq r_s^{-1}(W) \cap F_s.$$

Por la compacidad de X, podemos elegir $k < \omega$ y

$$\{U_0, ..., U_k\} \subseteq \mathcal{N}(\psi(t), r_s(x))$$

de tal manera que

$$\bigcap_{i=0}^{k} \overline{U_i \cap F_t \cap F_s} \subseteq r_s^{-1}(W) \cap F_s.$$

Usando que $\psi(t)$ es una base para X, elegimos $U_V \in \mathcal{N}(\psi(t), r_s(x))$ que cumpla que

$$\overline{U_V \cap F_t \cap F_s} \subseteq \bigcap_{i=0}^{k} \overline{U_i \cap F_t \cap F_s}.$$

Con ello, $\overline{U_V \cap F_t \cap F_s} \subseteq r_s^{-1}(W) \cap F_s$, y con ello una parte de $(\star\star\star)$ se cumple. Para finalizar, notemos que el hecho que se cumpla la igualdad

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}(\psi(t), r_s(x))} \overline{U_V \cap F_t \cap F_s} = \{r_s(r_t(x))\},$$

implica que

$$\{\overline{U_V \cap F_t \cap F_s} : V \in \mathcal{N}(\psi(s), r_t(x))\}$$

cumple la propiedad de la intersección finita y así la condición $(\star\star\star)$ se satisface. $\square$

En el artículo [CSGFRH17], los autores prueban que si un espacio compacto X tiene un c-esqueleto (completo), entonces $C_p(X)$ admite un q-esqueleto (completo). Y, si X tiene un q-esqueleto, entonces $C_p(X)$ admite un c-esqueleto (completo). En este sentido, planteamos el siguiente problema.

Pregunta 5.0.12. Sea X un espacio compacto. ¿Se puede debilitar la noción de q-esqueleto sobre $C_p(X)$ para obtener una noción que se relacione con el concepto de c-esqueleto débil sobre X?

CAPÍTULO 6

Comentarios finales

En esta tesis doctoral se lograron los siguientes avances significativos en la teoría de espacios compactos con r-esqueleto.

- *Duplicado de Alexandroff*: Se obtuvo la caracterización de los espacios compactos con r-esqueleto cuyo Duplicado de Alexandroff admiten r-esqueleto y es expuesto en el Teorema 3.0.5, lo cual resuelve nuestro problema planteado al inicio del Capítulo 3.

- *El π-esqueleto* (Definición 4.0.1): esta noción resultó ser equivalente al r-esqueleto, es decir, la existencia de un r-esqueleto es equivalente a la existencia de un π-esqueleto. La interpretación que obtenemos está totalmente determinada por una familia subespacios cerrados y las proyecciones numerables de un cubo $[0,1]^T$. Así, uno puede saber si un subespacio compacto de $[0,1]^T$ admite un r-esqueleto si comprueba la existencia de una familia de subespacios cósmicos y una función ω-monótona que satisfacen (a), (b) y (c) de la Definición 4.0.1.

- *El c-esqueleto débil* (Definición 5.0.2): con este concepto dimos una descripción interna de los espacios con r-esqueleto. El c-esqueleto débil es una pareja formada por una familia de cerrados cósmicos y una asignación de bases para la familia de cerrados que satisfacen (1), (2) y (3) de la Definición 5.0.2. Esta noción junto con las condiciones $(\star)$ y $(\star\star)$ del Teorema 5.0.8 describen a los espacios compactos con r-esqueleto de una manera totalmente interna. Además, tenemos que la existencia de un r-esqueleto implica la existencia de un c-esqueleto débil, sin embargo, el Ejemplo 5.0.7 testifica la existencia de un compacto con c-esqueleto débil que no admite r-esqueletos. Con ello, garantizamos una nueva clase de espacios compactos que contiene propiamente a los espacios con r-esqueleto.

Resumimos en los siguientes diagramas las relaciones entre las nociones de π-esqueleto, c-esqueleto débil y r-esqueleto con los espacios compactos de Valdivia y de Corson.

Para el caso general, tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
c\text{-esqueleto} \arrow[d] & \text{Corson} \arrow[l] \arrow[d] \\
c\text{-esqueleto débil} & \text{Valdivia} \arrow[l] \arrow[d] \\
r\text{-esqueleto} \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \pi\text{-esqueleto}
\end{tikzcd}
$$

Naturalmente se definieron el espacio inducido por un π-esqueleto y el espacio inducido por un c-esqueleto débil. También, se indicó cuando decimos que un π-esqueleto o un c-esqueleto débil es completo. Con ello tenemos el siguiente diagrama, en donde todas las propiedades son equivalentes:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Corson} \arrow[r, leftrightarrow] & c\text{-esqueleto completo} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & c\text{-esqueleto débil completo} \arrow[d, leftrightarrow] \\
 & r\text{-esqueleto completo} \arrow[r, leftrightarrow] & \pi\text{-esqueleto completo}
\end{tikzcd}
$$

En los Capítulos 2, 3 y 4 notamos la importancia que tienen los subconjuntos numerables del inducido de un r-esqueleto y su complemento. De los subconjuntos numerables del espacio inducido se sabe bastante y lo que se sabe es muy útil en la investigación. Caso contrario sucede con los conjuntos numerables del complemento del inducido, de hecho, casi no existen resultados que refieran a ello. Lo cual nos lleva a realizar el siguiente problema general.

Problema 6.0.1. Si X es un espacio compacto que admite r-esqueleto con inducido Y, ¿qué podemos decir de $X \setminus Y$?

Ahora bien, para el caso de los espacios compactos de Valdivia, existe la noción relacionada llamada espacios compactos súper Valdivia, que son aquellos compactos de Valdivia tales que para cada punto existe un Σ-conjunto denso que lo contiene. Esto indica que los espacios súper Valdivia no Corson contienen una gran cantidad de Σ-conjuntos densos distintos. Lo anterior inspira a plantear el siguiente problema:

Problema 6.0.2. Consideremos un espacio compacto X y Y un conjunto denso en X. Si Y es el único espacio inducido por cualquier r-esqueleto sobre X, ¿qué propiedades tiene $X \setminus Y$?

El problema anterior está muy ligado con nuestra caracterización de los Duplicados de Alexandroff que admitan r-esqueleto, puesto nuestro resultado establece condiciones importantes sobre residuo del inducido por un r-esqueleto.

Bibliografía

[AL68] D. Amir and J. Lindenstrauss. The structure of weakly compact sets in Banach spaces. *Annals of Mathematics. Second Series*, 88, 07 1968. v, vi

[AMN88] S. Argyros, S. Mercourakis, and S. Negrepontis. Functional analytic properties of Corson compact spaces. *Studia Mathematica*, 89, 01 1988. v, vi

[Ban91] I. Bandlow. A characterization of Corson-compact spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 32(3):545–550, 1991. v

[BRW77] Y. Benyamini, M. Rudin, and M. Wage. Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces. *Pacific J. Math.*, 70, 06 1977. v

[Chi08] A. Chigogidze. Valdivia compact groups are products. *Topology and its Applications*, 155(6):605 – 609, 2008. 9

[CK15] M. Cúth and O. F.K. Kalenda. Monotone retractability and retractional skeletons. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 423(1):18 – 31, 2015. vi, vi, vi

[CL66] H. Corson and J. Lindenstrauss. On weakly compact subsets of Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17, 02 1966. v

[Cor59] H. H. Corson. Normality in subsets of product spaces. *American Journal of Mathematics*, 81(3):785–796, 1959. v, 3

[CSGFRH17] F. Casarrubias-Segura, S. García-Ferreira, and R. Rojas-Hernández. Characterizing Corson and Valdivia compact spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 451(2):1154 – 1164, 2017. ix, 6, 16, 17, 26, 54, 63

[CSRH15] F. Casarrubias-Segura and R. Rojas-Hernández. On some monotone properties. *Topology and its Applications*, 182:36 – 52, 2015. VII

[Cú14a] M. Cúth. Characterization of compact monotonically (ω-)monolithic spaces using system of retractions. *Topology and its Applications*, 171:87 – 90, 2014. VI, 14

[Cú14b] M. Cúth. Noncommutative Valdivia compacta. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 55(1):53–72, 2014. V, VI, VII, 7, 8, 9

[Cú14c] M. Cúth. Simultaneous projectional skeletons. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 411(1):19 – 29, 2014. VII

[DG93] R. Deville and G. Godefroy. Some applications of projective resolutions of identity. *Proc. London Math. Soc.*, 67, 07 1993. V, 3

[Eng89] R. Engelking. *General topology*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1989. IV, 1

[GFRH16] S. García-Ferreira and R. Rojas-Hernández. Families of continuous retractions and function spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 441(1):330 – 348, 2016. VII, 14, 25

[Gul79] S P Gul'ko. On the structure of spaces of continuous functions and their complete paracompactness. *Russian Mathematical Surveys*, 34(6):36–44, dec 1979. VI

[Her03] F.H. Hernández. *Teoría de conjuntos: una introducción*. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2003. 1

[HNV03] K.P. Hart, J. Nagata, and J.E. Vaughan. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2003. IV, 3

[Kal00] O. F. K. Kalenda. Valdivia compact spaces in topology and Banach space theory. *Extracta Mathematicae*, 15(1):1–85, 2000. V, 4, 5, 7, 33, 57

[Kal09] O. F.K. Kalenda. Natural examples of Valdivia compact spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 350(2):464 – 484, 2009. The Interplay Between Measure Theory, Topology and Functional Analysis. VI, 4, 6, 7, 19, 20, 26, 31, 32, 37, 39, 53

[Kec12] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. 22

[KK10] O. F.K. Kalenda and W. Kubiś. The structure of Valdivia compact lines. *Topology and its Applications*, 157(7):1142 – 1151, 2010. 19

[KKLP11] J. Kąkol, W. Kubiś, and M. López-Pellicer. *Descriptive Topology in Selected Topics of Functional Analysis*. Developments in Mathematics. Springer US, 2011. vi

[KM06] W. Kubiś and H. Michalewski. Small Valdivia compact spaces. *Topology and its Applications*, 153(14):2560 – 2573, 2006. v, v, 5, 6, 7, 9, 10

[Kub06] W. Kubiś. Compact spaces generated by retractions. *Topology and its Applications*, 153(18):3383 – 3396, 2006. vi, 9, 19, 20

[Kub07] W. Kubiś. Linearly ordered compacta and Banach spaces with a projectional resolution of the identity. *Topology and its Applications*, 154(3):749 – 757, 2007. 19

[Kub09] W. Kubiś. Banach spaces with projectional skeletons. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 350(2):758 – 776, 2009. The Interplay Between Measure Theory, Topology and Functional Analysis. v, 8, 9, 15, 50, 52

[MR77] E. Michael and M. Rudin. A note on Eberlein compacts. *Pacific Journal of Mathematics - PAC J MATH*, 72, 10 1977. v, 3

[Nyi05] P. Nyikos. Various topologies on trees. *Proceedings of the Tennessee Topology Conference*, 01 2005. 17, 18

[RH14] R. Rojas-Hernández. Function spaces and D-property. *Topology Proceedings*, 43, 01 2014. vii

[RH18] R. Rojas-Hernández. *Sobre la estructura de los compactos de Corson*. Topología y sus Aplicaciones 6. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018. v, 16

[RHT14] R. Rojas-Hernández and V.V. Tkachuk. A monotone version of the Sokolov property and monotone retractability in function spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412(1):125 – 137, 2014. 14

[Som16] J. Somaglia. On the class of continuous images of non-commutative Valdivia compacta. *Topology and its Applications*, 210:147 – 167, 2016. vi, 17, 24, 25, 26

[Som17] J. Somaglia. New examples of non-commutative Valdivia compact spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 243, 03 2017. vi, vi, 17, 18, 19, 24, 33, 36

[Val90] M. Valdivia. Projective resolution of identity in C(k) spaces. *Archiv der Mathematik*, 54:493–498, 05 1990. vi

[Wil04] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 2004. iv