



Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas

Instituto de Física

Ondas transversalmente polarizadas en compuestos laminados  
magneto-electro-elásticos con contacto imperfecto en las interfaces.

# TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA

MSc. Joanka Hernández Cabanas

Directores de tesis:

**Dr. Guillermo Monsivais Galindo** (Instituto de Física, UNAM)

**Dr. José Antonio Otero Hernández** (Instituto Tecnológico de Monterrey. Campus Estado de México)

Otros miembros del Comité Tutor:

**Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent** (Instituto de Física, UNAM)

**Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach** (Facultad de Ciencias, UNAM)



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice

<b>Publicaciones de la autora en el tema</b>	<b>3</b>
<b>1 Antecedentes y objetivos de la tesis</b>	<b>5</b>
1.1 Introducción general . . . . .	5
1.2 Materiales compuestos . . . . .	6
1.3 Materiales Magneto-Electro-Elásticos . . . . .	7
1.4 Condiciones de contacto imperfecto en las interfaces . . . . .	8
1.5 Ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad Clásica . . . . .	9
1.6 Ondas Transversales Verticalmente Polarizadas (SV) . . . . .	10
1.7 Ecuaciones aplicables al caso de medios magneto-electro-elásticos . . . . .	12
1.8 Propagación de ondas en el plano $(x_1, x_3)$ . . . . .	14
1.9 Objetivos de la tesis . . . . .	16
<b>2 Ondas SV en laminados piezoeléctricos con contacto mecánico imperfecto.</b>	<b>19</b>
2.1 Introducción al capítulo . . . . .	19
2.2 Formulación del problema. . . . .	20
2.3 Ondas SV en materiales piezoeléctricos homogéneos. . . . .	21
2.4 Ondas SV en materiales elásticos. . . . .	23
2.5 Condiciones de contorno. . . . .	25
2.6 Curvas de dispersión de compuestos con condiciones de contacto de diferentes grados de imperfección . . . . .	26

2.7	Valores propios y zonas de crossover . . . . .	28
2.8	Casos límites . . . . .	30
2.9	Cosecuencias del desacople . . . . .	32
2.10	Comparacin con datos experimentales. . . . .	33
2.11	Conclusiones del Capítulo . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Influencia de imperfecciones eléctricas en piezocompuestos 2-2.</b>	<b>39</b>
3.1	Introducción al capítulo . . . . .	39
3.2	Laminado piezoeléctrico-polímero con condiciones de contacto imperfecto eléctrico. . .	39
3.3	Influencia de las imperfecciones eléctricas en las condiciones de contacto . . . . .	41
3.4	Laminados piezoeléctrico-piezoeléctrico . . . . .	42
3.5	Curvas de dispersión de compuestos piezoeléctrico-piezoeléctrico con diferentes condi- ciones de contacto eléctrico. . . . .	43
3.6	Conclusiones del Capítulo . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Ondas P-SV en laminados piezoeléctrico-piezomagnético</b>	<b>45</b>
4.1	Introducción al capítulo . . . . .	45
4.2	Solución de ondas SV en medios piezomagnéticos . . . . .	46
4.3	Solución en bilaminados periódicos piezoeléctrico/piezomagnético . . . . .	47
4.4	Influencia de condiciones de contacto imperfecto eléctrico y magnético en laminados piezoeléctrico/piezomagnético. . . . .	49
4.5	Cálculo de la constante de acoplamiento electromagnético haciendo uso del modelo dinámico. . . . .	51
4.6	Factor de acoplamiento magneto-eléctrico obtenido mediante el método de homogeneización asintótica a doble escala . . . . .	52
4.7	Conclusiones del Capítulo . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Publicaciones de la autora en el tema

## Publicaciones dentro del doctorado

1. **Cabanas, J. H.** Monsivais, G. and Otero, J. A. Magneto-electric coupling constants in piezo-electric/piezomagnetic layered composite Nova Scientia (Aceptado)
2. **Cabanas, J. H.** Otero, J. A., Monsivais, G., Ramos-Rodríguez, R. and Stern, C. Shear vertical waves in laminated coupled electro-mechanics materials with imperfect contact conditions at the interfaces. JoMMS.(Aceptado)

## Publicaciones previas al doctorado

1. Bravo-Castillero J, Rodríguez-Ramos, R., Guinovart Díaz R., Mechkour, H., Otero, J. A., **Cabanas, J. H.** Sabina, F. J. (2008). Effective properties of multilayered magneto-electro-elastic composite with coupled thermal effects. (pp. 25-28) Proceeding of X Pan American Congress of Applied Mechanics Volume 12, 25-28
2. Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart Díaz, R., Mechkour, H., Otero J. A., **Cabanas, J. H.** Sixto, L. M., Sabina F.J (2009). Effective properties of multilayered magneto-electro-elastic composite with coupled thermal effects. JoMMS.vol. 4 No. 5, 819-836
3. **Cabanas, J. H.** Otero, J. A., Bravo-Castillero, J., Ramos-Rodríguez, R. and Monsivais, G. (2010) Laminados magnetoelástico con variaciones en la dirección de polarización. Nova Scientia Vol. 2 (2) pp. 58-76
4. **Cabanas, J. H.** Otero, J. A., Bravo-Castillero, J., Ramos-Rodríguez, R. and Monsivais, G. Influence of polarizations on the effective properties of magneto-electro-elastic two-laminated composites. Proceeding XI Pan American Congress of Applied Mechanics.

5. Castillero, J. B., Ramos-Rodríguez, R., Guinovart Díaz, R., Mechkour, H., Otero, J. A., **Cabanas, J. H.** and Sabina, F. J. (2007) Effective properties of multilayered magneto-electro-elastic composite with coupled thermal effects. Reporte de investigación ICIMAF -439 ISSN 0138-8916
6. **Cabanas, J. H.** Otero, J. A., Bravo-Castillero, J. y Ramos-Rodríguez, R. (2007). Características globales de laminados bifásicos magnetoelásticos con fases de simetría 6mm. Reporte de investigación ICIMAF -440 ISSN 0138-8916
7. **Cabanas, J. H.** Otero, J. A., Bravo-Castillero, J. y Ramos-Rodríguez, R. (2007). Obtención de formas generales de los coeficientes efectivos de laminados magnetoelásticos con fases de materiales triclinicos. Reporte de investigación ICIMAF -441 ISSN 0138-8916
8. **Cabanas, J. H.** y Otero, J. A. (2009) Formas generales de los coeficientes efectivos de laminados magnetoelásticos. Memorias: Jornada Científica ICIMAF 2008.
9. **Cabanas, J. H.** y Otero, J. A. (2009). Constantes de acoplamiento globales en laminados trifásicos y bifásicos magneto-electro-elásticos. Reporte de investigación ICIMAF -549 ISSN 0138-8916
10. **Cabanas, J. H.** Otero, J. A, Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos, R y Monsivais, G. (2009) Magneto-electro-elastic laminated composites with changeable orientation of polarizations. Reporte de investigación ICIMAF -538 ISSN 0138-8916
11. **Cabanas, J. H.** y Otero, J. A. (2010) Cálculo de propiedades efectivas de laminados magneto-electro-elásticos con diferentes configuraciones. Memorias: Jornada Científica ICIMAF 2009.

# Capítulo 1

## Antecedentes y objetivos de la tesis

### 1.1 Introducción general

Un material compuesto se define como la unión de varios materiales de manera que puedan encontrarse en la mezcla varias fases. A uno de los constituyentes se le da el nombre de matriz, mientras los otros reciben el nombre de inclusiones, las cuales pueden adoptar diferentes formas geométricas, no tienen por qué guardar un orden, y pueden encontrarse en cualquier proporción. Aunque desde hace siglos el hombre ha usado compuestos en aras de lograr materiales más idóneos para una aplicación dada, no es hasta nuestros días que el uso de estos en la industria adquiere un auge vertiginoso. El desarrollo de la tecnología ha traído aparejado el aumento del estudio de los materiales heterogéneos, especialmente el relacionado con la dinámica de estos.

Dentro de las investigaciones de los materiales “inteligentes” se destacan las enfocadas a predecir el comportamiento dinámico de los compuestos magneto-electro-elásticos (MEE), muchos son los trabajos que en esta línea se han venido desarrollando en los últimos años [1]- [7]. Este tipo de materiales son muy cotizados en la industria por sus usos en sensores, transductores, actuadores, memorias, etc. Esta versatilidad es posible debido a que en estos materiales confluyen estímulos y respuestas de naturalezas mecánica, eléctrica y magnética. Al incidir una onda elástica en un material MEE obtendremos una respuesta mecánica, una eléctrica y otra magnética. Los compuestos se utilizan para poder obtener y graduar en lo posible estas respuestas. El estudio de ondas elásticas en compuesto MEE adquiere entonces una gran importancia ya sea como generadores, receptores o transmisores.

Las ondas elásticas de manera general pueden clasificarse en ondas primarias P (longitudinales) y ondas secundarias S (transversales). Las ondas S, a su vez, se clasifican en ondas SV (polarizadas verticalmente) y ondas SH (polarizadas horizontalmente), en presencia de una interfaz entre dos medios



la onda SH es aquella en que las oscilaciones del medio son perpendiculares al plano de incidencia, la componente que está en el plano de incidencia será la SV <sup>1</sup>. En la Figura 1.1 se muestra un esquema representando estas ondas en el caso que estudiaremos, es decir cuando las ondas se propagan en el plano  $(x_1, x_3)$ . Al incidir en una frontera las ondas P y SV intercambian energía entre sí, mientras que las ondas SH son independientes [8]. Desde el punto de vista matemático las ondas SV y P satisfacen las mismas ecuaciones. Por esta razón y por la interdependencia de estas ondas, en muchos artículos y textos se refieren a ellas como ondas SV-P. Estas ondas, debido a su complejidad han sido menos estudiadas que las SH y son precisamente las ondas que estudiaremos en este trabajo.

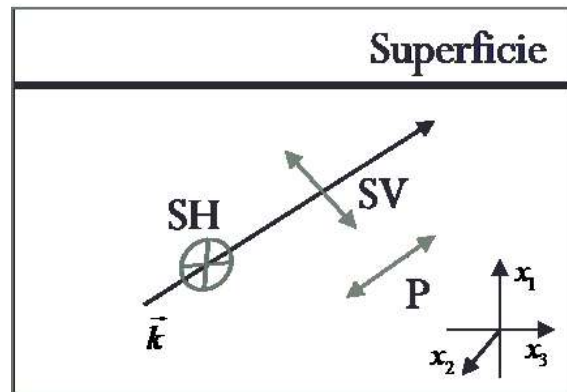


Figura 1.1: Esquema de Ondas Secundarias.

Los objetivos de esta tesis, delineados de manera más precisa en el epígrafe 1.7, están relacionados con el estudio de ondas SV-P en compuestos laminados magneto-electro-elásticos. Una de las novedades más importantes que incluiremos es la consideración de condiciones de contacto imperfecto de diferentes naturaleza en las interfaces de los compuestos. Esto sin duda es un paso importante a la hora de acercarnos con nuestra modelación matemática a la realidad física.

## 1.2 Materiales compuestos

A pesar de que en el epígrafe anterior hicimos referencia a los materiales compuestos en éste escribiremos su definición de manera más precisa, adoptando para ello la dada por Newnham en 1978 “los materiales compuestos se definen como la mezcla de dos o más materiales insolubles entre sí y unidos por medio de una mezcla, en la cual se mantiene íntegro cada componente, cuentan con un aglutinante como matriz y otro u otros como reforzantes, de diferentes formas” [9]. A pesar de que esta definición

<sup>1</sup>En el epígrafe 1.6 se hablará con más detenimiento de estas ondas.

es de apenas el siglo pasado, el uso de los compuestos se remonta a la antigüedad. Desde entonces el hombre los utiliza para mejorar las propiedades de los materiales usados en una determinada aplicación. Es el caso de los adobes: unión de arcilla y fibras de paja o el yeso reforzado con crines de caballo, etc. [10]. En el mundo actual no podemos imaginar desarrollo sin el uso de materiales compuestos. En su libro *Composite materials: design and applications*, Ronald F. Gibson hace una exposición de la utilización de compuestos en varias industrias destacando aeronáutica, electrónica y comunicaciones [11].

Para crear un material compuesto en la actualidad se recurre previamente a su fabricación a nivel experimental, partiendo de una guía teórica, es decir se acude a la simulación o a la modelación matemática del material. Dentro de este campo se enmarca nuestro trabajo de investigación.

Las propiedades de un compuesto van a depender necesariamente de los constituyentes y sus proporciones en la mezcla, así como de la geometría de las fases. La naturaleza de los constituyentes se elige en dependencia de las características que debe tener un material. Hay funciones de las propiedades de los materiales que ayudan a seleccionar los más adecuados para una aplicación determinada. El valor de estas propiedades puede mejorarse cambiando las formas y los componentes de las fases de los compuestos. Dentro de los componentes más usados se encuentran los piezoeléctricos y los piezomagnéticos. Los materiales con al menos una fase piezoeléctrica o piezomagnética se denominan piezocompuestos. Los piezocompuestos se han utilizado ampliamente en transductores ultrasónicos y en dispositivos acústicos usados en la medicina, en la industria naval, la aeronáutica, las telecomunicaciones, en la informática, etc. por lo que determinar sus propiedades se ha convertido en un reto para la comunidad científica desde hace varios años [12]-[24]. Por su naturaleza más general y sus potencialidades para aplicaciones tecnológicas los materiales que muestran acoplamientos entre efectos elásticos, eléctricos y magnéticos, los magneto-electro-elástico (MEE) han venido llamando la atención de los investigadores [25] y [26].

### 1.3 Materiales Magneto-Electro-Elásticos

Los medios magneto-electro-elásticos presentan propiedades piezoeléctricas y piezomagnéticas a la vez, es decir al aplicárseles un campo eléctrico y/o magnético se deforman, o al sufrir una deformación se origina en ellos un campo eléctrico y/o un campo magnético.

En los compuestos en que se alternan fases piezoeléctricas y piezomagnéticas se puede observar un acoplamiento entre los campos eléctrico y magnético, el denominado efecto magnetoeléctrico [27]. En estos tiempos existe un auge en el estudio de los materiales magnetoeléctricos [28]-[34] debido a que estos ofrecen toda una gama de nuevas aplicaciones que incluyen el nuevo campo de la espintrónica,

dispositivos para almacenamiento de datos y memorias de estados múltiples. En la referencia [35] se realiza un estudio de la aparición de una magnetización uniforme ante la acción de un campo eléctrico en un semiconductor dopado. Mostovoy *et al.* [36] realizan un análisis de la dependencia de la temperatura del efecto magnetoelectrico en el  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , trabajo que recibe una ampliación en la referencia [37]. Vaz *et al.* determinan el origen de este efecto en una estructura multiferroica [38]. Gareevaa & Zvezdina realizaron un estudio de las interacciones magnetoelectricas en las paredes de los dominios multiferroicos [39]. Tolédano *et al.* proponen un origen magnético para la polarización eléctrica del  $\text{MnWO}_4$  [40]. Un problema importante para la ciencia reside en el hecho de que se conocen muy pocos materiales homogéneos magnetoelectricos, en particular que se puedan obtener a no muy altas presiones [41]. Para que exista efecto magnetoelectrico en un compuesto no es necesario que este comportamiento esté presente en alguno de los componentes por separado, por lo que los compuestos se hacen grandes candidatos para solucionar esta dificultad.

Desde tiempos tan tempranos como la última década del siglo pasado Avellaneda & Harshé estudian este efecto en compuestos 2-2 con láminas piezoeléctricas y piezomagnéticas que no exhibían ninguna de las dos este comportamiento [42] y Benveniste estudia el efecto magnetoelectrico en compuestos fibrosos piezoeléctricos/piezomagnéticos [43].

## 1.4 Condiciones de contacto imperfecto en las interfaces

Una de las mayores dificultades a las que nos enfrentamos al modelar un material compuesto son las fronteras entre las fases, en muchos trabajos se modelan suponiendo un contacto ideal en las interfaces [44]-[46]. Sin embargo, es cada vez más notorio la preocupación de los científicos por ir incluyendo condiciones de contacto imperfecto en las intercaras a la hora de modelar compuestos [47]-[51].

En la actualidad existen varios modelos de condiciones imperfectas, como el modelo de membrana, el de interfaz y el modelo de resorte para condiciones de contacto imperfecto mecánico, que no es más que suponer saltos en los desplazamientos de ambos lados de una interfaz proporcional a los campos. Similarmente, existen condiciones de contacto imperfecto eléctrico y magnético que presuponen un salto en los potenciales proporcional a los campos eléctrico y magnético respectivamente. Estas condiciones de contacto imperfecto mecánico, eléctrico y magnético son los que se usarán en este trabajo. Haciendo uso del modelo resorte en la referencia [52] se hace un estudio de las ondas de Rayleigh generalizadas en un sistema con recubrimiento. En la referencia [53] se estudia la influencia de considerar condiciones de contacto imperfecto en un compuesto elástico al que se le han insertado fibras cilíndricas, las celdas de este compuesto son diagonales. Por su parte, en la referencia [54] trabajan la inhomogeneidad como una interfaz entre los medios de un compuesto elástico.

Otro estudio reciente es el realizado en [55], ellos modelan la interfaz como un medio adhesivo entre los planos de las fases. En la literatura encontramos también muchos trabajos que analizan condiciones de contacto imperfecto de diferentes naturalezas como hacemos en este trabajo [56]-[59], por solo citar algunos. En la referencia [60] se estudian la propagación de ondas elásticas transversales horizontalmente polarizadas (SH)<sup>2</sup> en medios semiinfinitos con fronteras piezoeléctrica/piezomagnética.

## 1.5 Ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad Clásica

El estudio de los cuerpos sólidos y sus deformaciones dentro de la mecánica de los medios continuos se ha venido efectuando durante años. Cauchy y Poisson en la década de 1820 formulan las ecuaciones fundamentales de la teoría que aún hoy son la base de la misma.

Al deformar un cuerpo, cada punto de este puede sufrir un desplazamiento de su posición inicial dada por el vector de desplazamiento  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  si se desea determinar la variación del diferencial de longitud para pequeñas deformaciones [61], antes y después de la deformación se tiene que

$$dl = dl' + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j, \quad (1.1)$$

donde los subíndices toman los valores  $i, j = 1, 2, 3$  y se hace uso del convenio de sumación de Einstein, convenio que se seguirá usando en el transcurso de este texto.

La expresión anterior también se puede escribir haciendo uso del tensor  $\mathbf{S}$  de deformaciones en la forma:

$$dl = dl' + 2S_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.2)$$

El tensor  $S_{ij}$  tiene la forma

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

En algunos textos como el de Landau [61] dan otras definiciones de este tensor, pero hemos preferido ésta, conocida también como relación de Cauchy y que es la utilizada en oscilaciones pequeñas.

Las deformaciones en los cuerpos ocurren al aplicar una fuerza sobre ellos, en teoría de elasticidad estas son caracterizadas por el tensor de los esfuerzos. En términos de la densidad de fuerza  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ , fuerza ejercida en un volumen, se puede escribir por componentes en la forma

---

<sup>2</sup>En el epígrafe 1.6 se hace una descripción de estas ondas.

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.4)$$

De manera que la Segunda Ley de Newton puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Ésta, junto a las ecuaciones de Maxwell (1.6) son las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los medios que estudiaremos.

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.6)$$

Para pequeñas deformaciones podemos aproximar la relación entre los tensores de esfuerzo y deformación mediante una relación lineal como expresa la Ley de Hooke-Lamé.

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}, \quad (1.7)$$

donde  $c_{ijkl}$  son las componentes del tensor de elasticidad [62]. En próximos epígrafes veremos como el efecto piezoeléctrico y piezomagnético hacen aparecer nuevos términos en esta ley constitutiva.

De las ecuaciones (1.7) en (2.2) se obtienen las ecuaciones de las ondas mecánicas para materiales netamente elásticos.

## 1.6 Ondas Transversales Verticalmente Polarizadas (SV)

Los primeros estudios de ondas mecánicas en medios continuos vienen de la geofísica, sismología y la geología, de estas ciencias heredaron los nombres los modos de vibración de las ondas mecánicas en medios infinitos. Las ondas Primarias, ondas P, por ser las que viajan a mayor velocidad y por ende las primeras en poderse detectar en un sismo y las ondas S u ondas Segundas o Secundarias. Las ondas P son ondas longitudinales, mientras las ondas S son ondas transversales. A la componente de la onda transversal en que las oscilaciones del medio son perpendiculares al plano de incidencia se le denomina ondas SH (ondas transversales polarizadas horizontalmente), mientras que a la componente no horizontal se le conoce como ondas transversales verticalmente polarizadas [63].

De una manera más rigurosa y siguiendo para ello el libro de Stein y Wysession [64], podemos ver que haciendo uso del Teorema de Helmholtz [65] podemos escribir el desplazamiento  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  en término de funciones potenciales [66] (1.8).

$$\vec{u}(x_1, x_3) = \nabla\phi(x_1, x_3) + \nabla \times \vec{\Gamma}(x_1, x_3). \quad (1.8)$$

A su vez el potencial vectorial  $\vec{\Gamma}$  puede descomponerse de igual manera en dos términos:

$$\vec{\Gamma}(x_1, x_3) = \nabla\Psi(x_1, x_3) + \nabla \times \vec{\Upsilon}(x_1, x_3). \quad (1.9)$$

Sustituyendo (1.9) en (1.8) se obtiene:

$$\vec{u}(x_1, x_3) = \nabla\phi(x_1, x_3) + \nabla \times \Psi(x_1, x_3) + \nabla \times \nabla \times \vec{\Upsilon}(x_1, x_3). \quad (1.10)$$

Al sustituir (1.10) en la ecuación de onda el primer término de la ecuación corresponde al desplazamiento de una onda longitudinal (P), el segundo al desplazamiento de una onda SV y el tercero al de una onda SH.

En muchos textos y artículos se refieren a las ondas SV como ondas P-SV, pues como veremos más adelante están estrechamente ligadas. Desde las tempranas épocas de la década del 80' del siglo pasado se ven trabajos pioneros en ondas P-SV, así lo reflejan el trabajo del francés Jean Vireiux [67], quien por el método de diferencia finita modela la propagación de ondas P-SV en medios heterogéneos y los trabajos de Auld [68]. Son de destacar en este sentido los trabajos realizados para estudiar sismos; [69]-[73], las dos últimas referencias corresponden a artículos que realizan un estudio del terremoto que afectó a México en 1985 la primera publicada en la revista Science y la otra en Nature, esta última realizada por un grupo de investigadores de la UNAM.

Existen varios métodos para estudiar reservorios ya sean de agua o combustibles fósiles, de ellos algunos de los más exitosos utilizan ondas elásticas en especial P y SV, para ello se hace importante el estudio de estas ondas en medios heterogéneos y en medios porosos. En este sentido en la referencia [74] se estudia un modelo de propagación de ondas elásticas a través de tres capas que simulan un reservorio de agua, gas o petróleo.

Desde hace varios años es de interés de la comunidad científica la propagación de ondas mecánicas en materiales heterogéneos. A pesar de que encontramos muchos más trabajos de propagación de ondas SH, existen muchos otros que se ocupan de estudiar las ondas SV. Particularmente en materiales con acoplamiento de campo. En la década de los años 90' aparecen varios trabajos de Zhang & Gheen [75]-[78], los autores de estos trabajos proponen un método de estudio de las ondas SV en bilaminados piezocompuestos con estructura periódica que radica en resolver el problema de propagación ondas transversales verticalmente polarizadas en cada una de las fases de manera independiente y posteriormente determinar las curvas de dispersión haciendo uso de las condiciones de contacto en las

interfaces del compuesto, estos autores hicieron uso de condiciones de contacto ideal entre las fases. Es precisamente este modelo el que sirve de inspiración a esta tesis.

La obtención de curvas de dispersión y el estudio en general de ondas elásticas en materiales heterogéneo es todavía un problema de la ciencia actual [79]-[83]. A partir de las curvas de dispersión se tiene información de los modos de vibración y se pueden determinar muchas otras de las características dinámica de la mayoría de los medios reales. Hace sólo unos años Lei Liu *et al.* presentaron un estudio de ondas SV-P en piezocompuestos laminados [84]. Este mismo grupo un año después publicó un estudio teórico de ondas elásticas, esta vez SH, en laminados piezomagnéticos periódicos [85]. En el presente año aparecieron trabajos donde se determinan las curvas de dispersión de ondas elásticas en cristales fonónicos [86] y [87].

## 1.7 Ecuaciones aplicables al caso de medios magneto-electro-elásticos

En este epígrafe llegaremos a las ecuaciones de las ondas elásticas de manera general en medios magneto-electro-elásticos homogéneos, para ello partiremos de las ecuaciones de Newton para la elasticidad (2.2) y de las de Maxwell (1.6) presentadas en el epígrafe 1.6 y de las ecuaciones constitutivas lineales, estas últimas las podemos escribir en la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{ijkn} \frac{\partial u_k(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_n} + e_{kij} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k} + q_{kij} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}, \\ D_i(x_1, x_2, x_3, t) &= e_{ikn} \frac{\partial u_k(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_n} - \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_j} - \lambda_{ij} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_j}, \\ B_i(x_1, x_2, x_3, t) &= q_{ikn} \frac{\partial u_k(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_n} - \lambda_{ij} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_j} - \mu_{ij} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_j}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

En estas expresiones se ha hecho uso de la aproximación cuasiestática de los campos:  $\nabla \vec{E} = -\varphi$  y  $\nabla \vec{H} = -\psi$ , donde  $\varphi$  y  $\psi$  son los potenciales electrostático y magnetostático respectivamente. Los tensores que relacionan los campos son el tensor elástico  $c_{ijkl}$ , el tensor piezoeléctrico  $e_{ijk}$ , el tensor piezomagnético  $q_{ijk}$ , el tensor permeabilidad magnética  $\mu_{ij}$ , el tensor permitividad eléctrica  $\varepsilon_{ij}$  y el tensor magneto-eléctrico  $\lambda_{ij}$ . En las expresiones (1.11) se han tenido en cuenta la relaciones de Cauchy para el tensor de deformaciones  $S$  y la aproximación cuasiestática del campo eléctrico y magnético.

Aunque los piezoeléctricos pueden tener varias simetrías trabajaremos con cerámicas piezo-eléctricas transversalmente isotrópicas. En esta simetría hay una dirección preferencial y hay isotropía en torno a ese eje. Como este sistema estrictamente es invariante ante cualquier rotación alrededor del eje

preferencial este eje es de simetría  $\infty$ , esta simetría usa los mismos tensores que la  $\delta mm$ , en donde a las simetrías generales que satisfacen los tensores que relacionan los campos,  $c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}$ ,  $e_{ijk} = e_{ikj}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , debe agregarse la igualdad entre aquellos coeficiente que se obtienen al cambiar todos los subíndices iguales a 1 por subíndices iguales a 2 y viceversa. Además en esta simetría se tiene que:  $c_{ijkl} = 0$  si  $i \neq j \neq k$ ,  $e_{ijk} = 0$  si  $i \neq j \neq k$  o bien ( $i \neq 3, j \neq 3, k \neq 3$ ) o bien ( $i = j = 3 \neq k$ ) y  $\varepsilon_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  [88]. En los medios piezoeléctricos, la dirección de polarización del piezoeléctrico es una dirección preferencial y suele tomarse en la dirección del eje  $x_3$ , esta tendencia es seguida en este trabajo. Atendiendo a la simetría de los tensores  $\sigma$  y  $S$  y por consiguiente de  $c$  e  $q$  también, usaremos a partir de este momento la notación reducida donde (11)  $\rightarrow$  1, (22)  $\rightarrow$  2, (33)  $\rightarrow$  3, (23)  $\rightarrow$  4, (13)  $\rightarrow$  5 y (12)  $\rightarrow$  6. Haciendo uso de las simetrías las ecuaciones (1.11) podemos desarrollarlas como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{11} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + c_{13} \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \\
&\quad + e_{31} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} + q_{31} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
\sigma_2(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{12} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + c_{23} \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \\
&\quad + e_{31} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} + q_{31} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
\sigma_3(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{13} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + c_{23} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + c_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \\
&\quad + e_{33} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} + q_{33} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
\sigma_4(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{55} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} \\
&\quad + q_{15} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} \tag{1.12} \\
\sigma_5(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{55} \left( \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
&\quad + q_{15} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2}, \\
\sigma_6(x_1, x_2, x_3, t) &= c_{66} \left( \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \right), \\
D_1(x_1, x_2, x_3, t) &= e_{15} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \\
&\quad - \lambda_{11} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
D_2(x_1, x_2, x_3, t) &= e_{15} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} \\
&\quad - \lambda_{11} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
D_3(x_1, x_2, x_3, t) &= e_{31} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + e_{31} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + e_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \\
&\quad - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} - \lambda_{33} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
B_1(x_1, x_2, x_3, t) &= q_{15} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \right) - \lambda_{11} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \\
&\quad - \mu_{11} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
B_2(x_1, x_2, x_3, t) &= q_{15} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \right) - \lambda_{11} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} \\
&\quad - \mu_{11} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
B_3(x_1, x_2, x_3, t) &= e_{31} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + e_{31} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + e_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \\
&\quad - \lambda_{33} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} - \mu_{33} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Es fácil notar que al sustituir las expresiones (1.12) para los campos en las ecuaciones de Newton (2.2) y Maxwell (1.6) se obtienen ecuaciones de onda para  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $\varphi$  y  $\psi$ . En lo que sigue justamente las soluciones de estas ecuaciones serán nuestro objeto de estudio. En el siguiente epígrafe estudiaremos el caso en que esas ondas se propaguen perpendicularmente a la dirección de polarización del piezoelectrico.

## 1.8 Propagación de ondas en el plano $(x_1, x_3)$

En este epígrafe se va a considerar que el campo de deformaciones y el potencial sólo dependan de las coordenadas  $x_1$  y  $x_3$ . Las ecuaciones (1.7) adoptan la forma (1.11)

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, x_3, t) &= c_{11} \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + q_{31} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
\sigma_2(x_1, x_3, t) &= c_{12} \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + c_{23} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + q_{31} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
\sigma_3(x_1, x_3, t) &= c_{13} \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + q_{33} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
\sigma_4(x_1, x_3, t) &= c_{55} \left( \frac{\partial u_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \right), \\
\sigma_5(x_1, x_3, t) &= c_{55} \left( \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + q_{15} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
\sigma_6(x_1, x_3, t) &= c_{66} \left( \frac{\partial u_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} \right), \\
D_1(x_1, x_3, t) &= e_{15} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} - \lambda_{11} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
D_2(x_1, x_3, t) &= e_{15} \left( \frac{\partial u_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \right), \\
D_3(x_1, x_3, t) &= e_{31} \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} - \lambda_{33} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3}, \\
B_1(x_1, x_3, t) &= q_{15} \left( \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \right) - \lambda_{11} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} - \mu_{11} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1}, \\
B_2(x_1, x_3, t) &= q_{15} \left( \frac{\partial u_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \right), \\
B_3(x_1, x_3, t) &= q_{31} \frac{\partial u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} + q_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} - \lambda_{33} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} - \mu_{33} \frac{\partial \psi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Para este caso las ecuaciones de Newton (2.2) y Maxwell (1.6) adoptan la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_5}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \sigma_6}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_4}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \sigma_5}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} &= 0, \\
\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Combinado las ecuaciones (1.13) y (1.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial \phi}{\partial x_1 \partial x_3} + (q_{31} + q_{15}) \frac{\partial \psi}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\
c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (c_{55} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial x_3^2} + q_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + q_{33} \frac{\partial \psi}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1.15) \\
e_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \lambda_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} &= 0, \\
q_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (q_{15} + q_{31}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + q_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \mu_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \lambda_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} - \mu_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Como la segunda ecuación depende sólo de  $u_2$  y las demás no dependen de  $u_2$ , el sistema queda desacoplado en un sistema más pequeño (1.16) y (1.17).

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial \phi}{\partial x_1 \partial x_3} + (q_{31} + q_{15}) \frac{\partial \psi}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (c_{55} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial x_3^2} + q_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + q_{33} \frac{\partial \psi}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1.16) \\
e_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \lambda_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} &= 0, \\
q_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (q_{15} + q_{31}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + q_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \mu_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \lambda_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} - \mu_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} &= 0.
\end{aligned}$$

$$c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \quad (1.17)$$

Las ondas descritas por el sistema (1.16) son ondas electroelásticas, mientras las ondas descritas por la ecuación (1.17) son ondas puramente elásticas, aparecen independientes del potencial.

## 1.9 Objetivos de la tesis

### Hipótesis

Las condiciones de contacto imperfecto influyen fuertemente en la propagación de las ondas SV en heteroestructuras magneto-electro-elásticas.

### Objetivos Generales

- Implementar un modelo para evaluar la influencia del contacto imperfecto en la propagación de las ondas SV en heteroestructuras magneto-electro-elásticas.

**Objetivos específicos.**

1. Presentar un modelo que considere contacto imperfecto mecánico y eléctrico en las interfaces de piezocompuestos laminados.
2. Comprobar que las condiciones de contacto imperfecto mecánico y eléctrico varían las propiedades de las ondas SV.
3. Corroborar que las propiedades dinámicas de los piezocompuestos con contacto imperfecto en las interfaces están acotadas por las de los compuestos con condiciones ideales de contacto y las de las fases independientes.
4. Determinar la fase más influyente en varias rama de las curvas de dispersión en piezocompuestos.
5. Extender el modelo presentado a compuestos bilaminados piezoeléctrico-piezomagnético.
6. Comparar las propiedades dinámicas de compuestos bilaminados magneto-electro-elásticos con contacto imperfecto eléctrico y magnético en las interfaces.



## Capítulo 2

# Ondas SV en laminados piezoeléctricos con contacto mecánico imperfecto.

### 2.1 Introducción al capítulo

En este capítulo se presenta un modelo dinámico para el estudio de compuestos piezoeléctricos con conectividad 2-2 teniendo en cuenta imperfecciones mecánicas en la unión de las fases del medio heterogéneo. Se estudia un laminado piezocompuesto por el que viajan ondas transversales verticalmente polarizadas (SV) y se observa el comportamiento del material considerando diferentes tipos y grados de condiciones de contacto imperfecto en las interfaces. Se han contemplado dos tipos de imperfecciones mecánicas, que las láminas puedan separarse y que puedan deslizarse en la dirección de polarización del piezoeléctrico. Ambos desplazamientos se han supuesto proporcionales a los esfuerzos en las intercaras orientados en la misma dirección del desplazamiento. Las relaciones de dispersión de diferentes compuestos laminados han sido obtenidas para materiales con distintos grados de imperfección, variando desde un caso de desacople total a contacto ideal en una de las direcciones, lo que ha permitido comprobar como el grado de imperfección influye en las propiedades del compuesto. En las curvas de dispersión se observan zonas de cruce evitado que han generado nuestro interés, al analizar el comportamiento de los desplazamientos del material en esas zonas se puede ver como en ellas ocurren cambios de modos de oscilación. Los desplazamientos mecánicos y la forma en que oscila el material han sido obtenidos a partir de las curvas de dispersión. Se llegó a los casos límites (contacto ideal y

láminas independientes), se comparó el caso de contacto ideal con los resultados arrojados por Zhang and Gheng [78] y por último se comparó el modelo con datos experimentales.

## 2.2 Formulación del problema.

En este capítulo consideramos un material piezoeléctrico heterogéneo formado por láminas alternas y paralelas de un material piezoeléctrico y un polímero. Este tipo de material laminado se le conoce como piezocompuesto de tipo 2-2. La fase del polímero se considera como un material homogéneo e isotrópico, mientras que la fase piezoeléctrica es anisotrópica. Para estudiar este compuesto hemos elegido un sistema de coordenadas cartesiano colocado en el centro de una de las láminas piezoeléctrica de modo que el eje  $x_1$  sea perpendicular a la interfaz cerámica-polímero, el eje  $x_3$  se ha escogido a lo largo de la dirección de polarización del medio piezoeléctrico y el eje  $x_2$  contenido en el plano de las placas (Figura (4.1)). Denotamos por  $d$  a la longitud de la celda periódica del compuesto (motivo que se repite para formar el compuesto) y le hemos exigido que sea mucho menor que las dimensiones del compuesto. Para muchos propósitos prácticos, es común considerar la dimensión del compuesto infinita. El hecho de que el compuesto sea infinito en la dirección  $x_2$  y esta no sea una dirección preferencial del mismo nos permite tratar el problema independiente a la coordenada  $x_2$ .

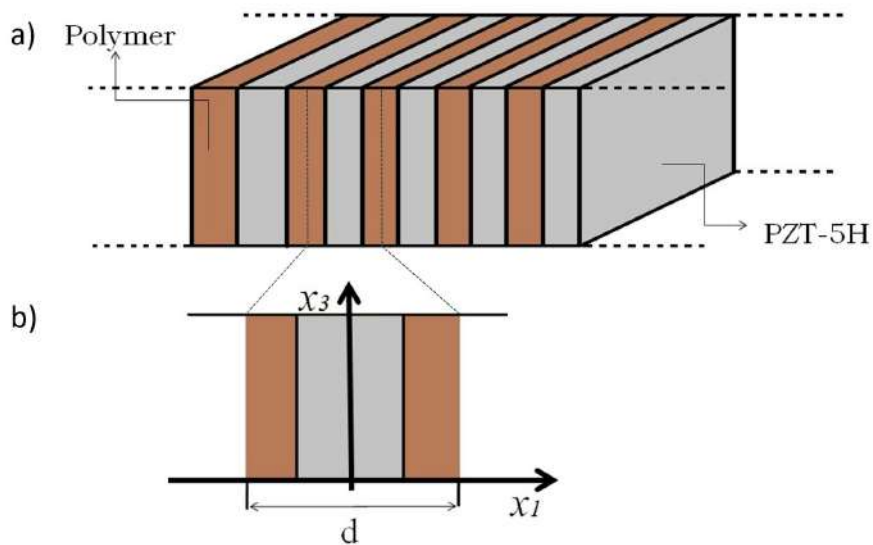


Figura 2.1: Esquema del material compuesto.

Para este sistema las ecuaciones de Newton pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_5}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \sigma_5}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $u = (u_1, u_2 = 0, u_3)$  y  $D = (D_1, D_2 = 0, D_3)$ .

Las ecuaciones constitutivas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31} E_3, \\
\sigma_3 &= c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{33} E_3, \\
\sigma_5 &= c_{55} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + e_{15} E_1, \\
D_1 &= e_{15} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11} E_1, \\
D_3 &= e_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \varepsilon_{33} E_3,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

### 2.3 Ondas SV en materiales piezoeléctricos homogéneos.

Al sustituir las expresiones (2.2) en (2.1) y haciendo uso de la aproximación cuasi-estática del campo eléctrico ( $E = -\nabla\varphi$ ) obtenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden que describen el comportamiento de los desplazamientos  $u_1$  y  $u_3$  y del potencial eléctrico  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} \\
+ (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_3, t)}{\partial t^2} \\
c_{55} \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + (c_{55} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} \\
+ e_{15} \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + e_{33} \frac{\partial \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_3, t)}{\partial t^2} \\
e_{15} \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_3, t)}{\partial x_3 \partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} \\
- \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$



El sistema (2.3) admite soluciones en forma de ondas viajeras, por lo que podemos escribir los desplazamientos y el potencial eléctrico como sigue:

$$\begin{aligned} u_1 &= A \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)), \\ u_3 &= B \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)), \\ \varphi &= C \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular  $k_1$  y  $k_3$  representan los componentes del vector de onda en las direcciones  $x_1$  y  $x_3$  respectivamente, y  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres constantes por determinar que nos darán las amplitudes de oscilación en cada caso.

Sustituyendo (2.4) en (2.3) se obtienen tres ecuaciones homogéneas de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Estas ecuaciones pueden ser escritas en forma matricial (2.5).

$$[M_{ij}] [A_i] = 0, \quad (2.5)$$

donde,

$$[A_i] = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T \quad \text{y}$$

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{11}k_1^2 + c_{55}k_3^2 - \rho\omega^2 & (c_{11} + c_{55})k_1k_3 & (e_{15} + e_{31})k_1k_3 \\ (c_{11} + c_{55})k_1k_3 & c_{33}k_3^2 + c_{55}k_1^2 - \rho\omega^2 & e_{15}k_1^2 + e_{33}k_3^2 \\ (e_{15} + e_{31})k_1k_3 & e_{15}k_1^2 + e_{33}k_3^2 & -\varepsilon_{11}k_1^2 - \varepsilon_{33}k_3^2 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema (2.5) tenga solución diferente de la trivial el determinante del sistema debe ser igual a cero.

$$|M| = 0, \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) es una ecuación cúbica de  $k_1^2$ . Es decir para cada par de valores  $(\omega, k_3)$  hay tres valores de  $k_1^2$ , que corresponden a una onda cuasi-electromagnética, una cuasi-longitudinal, y otra cuasi-transversal en el material piezocompuesto.

Los valores del coeficiente  $A$ ,  $B$  y  $C$  pueden ser determinados haciendo uso del sistema de ecuaciones (2.5) para cada una de los tres valores de  $k_1^2$ . El sistema (2.5) es un sistema indeterminado por lo que su solución va a estar indeterminada en al menos una constante, llamemos a esa constante  $D_i$  y digamos que  $C_i = D_i M e_{33}^i$ , donde el subíndice  $i$  corresponde a la solución obtenida para el valor  $i$ ésimo de

$k_1^2$  y  $Me_{jk}^i$  corresponde al cofactor de orden  $k, j$  de la matriz  $M$ , es decir al determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila  $j$  y la columna  $k$  de la matriz  $M$ . Tomando las consideraciones hasta aquí expuestas el sistema (2.5) se puede describir como se muestra en (2.7), donde se ha eliminado la última ecuación al ser linealmente dependiente de las demás.

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = -C_i \begin{pmatrix} M_{13} \\ M_{23} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Haciendo uso de la regla de Cramer para la solución de sistemas lineales podemos determinar los valores de  $A_i$  y  $B_i$ .

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\begin{vmatrix} -C_i M_{13}^i & M_{12}^i \\ -C_i M_{23}^i & M_{22}^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \end{vmatrix}} = C_i \frac{\begin{vmatrix} M_{12}^i & M_{13}^i \\ M_{22}^i & M_{23}^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \end{vmatrix}} = D_i M e_{31}^i \\ B_i &= \frac{\begin{vmatrix} M_{11}^i & -C_i M_{13}^i \\ M_{21}^i & -C_i M_{23}^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \end{vmatrix}} = -C_i \frac{\begin{vmatrix} M_{11}^i & M_{13}^i \\ M_{21}^i & M_{23}^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \end{vmatrix}} = D_i M e_{32}^i \end{aligned} \quad (2.8)$$

De esta manera las expresiones (2.4) en forma de uno de los modos de Lamb.

$$\begin{aligned} u_1^p &= \sum_{i=1}^3 D_i M e_{31}^i \sin(k_1^i x_1) \cos(k_3 x_3) \exp(-\omega t), \\ u_3^p &= \sum_{i=1}^3 D_i M e_{32}^i \cos(k_1^i x_1) \sin(k_3 x_3) \exp(-\omega t), \\ \varphi^p &= \sum_{i=1}^3 D_i M e_{33}^i \cos(k_1^i x_1) \sin(k_3 x_3) \exp(-\omega t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el supraíndice  $p$  representa una etiqueta de la fase piezoeléctrica. Sustituyendo (3.2) en (2.2) se han obtenido los valores de los esfuerzos y el desplazamiento eléctrico en un material piezoeléctrico.

## 2.4 Ondas SV en materiales elásticos.

Veamos ahora qué sucede en un material isotrópico como el polímero.

Primeramente en las expresiones (2.3) las constantes piezoeléctricas se anularían, por lo que al sustituir la propuesta de solución (2.4) en (2.3) se obtendría un sistema de ecuaciones lineales similar a (2.5) donde  $[M_{ij}]$  tendría el valor:

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{11}k_1^2 + c_{55}k_3^2 - \rho\omega^2 & (c_{11} + c_{55})k_1k_3 & 0 \\ (c_{11} + c_{55})k_1k_3 & c_{33}k_3^2 + c_{55}k_1^2 - \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{11}k_1^2 - \varepsilon_{33}k_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

A partir de (2.10) podemos separar el sistema de ecuaciones lineales para el polímero en dos tal como muestra (2.11) y (2.16).

$$[N_{ij}][S_i] = 0, \quad (2.11)$$

donde,

$$[S_i] = \begin{pmatrix} A, & B \end{pmatrix}^T \quad y$$

$$[N_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{11}k_1^2 + c_{55}k_3^2 - \rho\omega^2 & (c_{11} + c_{55})k_1k_3 \\ (c_{11} + c_{55})k_1k_3 & c_{33}k_3^2 + c_{55}k_1^2 - \rho\omega^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

y por otro lado

$$(-\varepsilon_{11}k_1^2 - \varepsilon_{33}k_3^2)C = 0. \quad (2.13)$$

Para que el sistema tenga solución no nula se debe satisfacer que

$$|N_{ij}| = 0 \quad (2.14)$$

o bien

$$(-\varepsilon_{11}k_1^2 - \varepsilon_{33}k_3^2) = 0. \quad (2.15)$$

En un material no piezoeléctrico las ondas mecánicas y eléctricas están desacopladas, la parte mecánica está descrita por (2.14) y la eléctrica por (2.15). De esta última ecuación y teniendo en cuenta la isotropía del material obtenemos que para una onda eléctrica.

$$k_1 = ik_3 \quad (2.16)$$

La ecuación (2.14) es una ecuación cuadrática de  $k_1^2$ , para cada uno de los valores de  $k_1^2$  se obtiene un valor  $A_i$  y otro de  $B_i$ , donde el subíndice  $i$  enumera las soluciones, por lo que va de 1 a 2. Similar a lo obtenido anteriormente para un medio piezoeléctrico para la fase isotrópica las expresiones (2.9) se reducen a la forma:

$$\begin{aligned} u_1^e &= \sum_{i=1}^2 E_i N_{12}^i \sin(k_1^i x_1) \cos(k_3 x_3) \exp(-i\omega t), \\ u_3^e &= \sum_{i=1}^2 E_i N_{11}^i \cos(k_1^i x_1) \sin(k_3 x_3) \exp(-i\omega t), \\ \varphi^e &= E_3 \cosh(k_3 x_1) \sin(k_3 x_3) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde el supraíndice  $e$  es una etiqueta para los valores dentro del polímero. Al igual que se hizo para el material piezoeléctrico a partir de (3.2) pueden determinarse los valores de los esfuerzos y el desplazamiento eléctrico.

## 2.5 Condiciones de contorno.

Una vez conocidas las soluciones en ambas fases debemos obtenerlas para el compuesto. Los valores de los desplazamientos y el potencial en cada fase están indeterminados en las constantes  $D_i$  y  $E_i$ , las condiciones de contorno nos permitirán hallar estas constantes y así obtener las soluciones en todo el compuesto. Para resolver el problema del compuesto se han de relacionar los campos en las fronteras de las fases. La forma de estas relaciones va a estar determinada por el tipo de contacto. El contacto imperfecto mecánico tipo resorte considera que los desplazamientos en la interfaz no son iguales en una y otra fase, sino que van a presentar una discontinuidad de salto proporcional a la componente normal de la tracción, es decir:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \left( u_1^p(x_1^f, x_3) - u_1^e(x_1^f, x_3) \right) &= \sigma_1^p(x_1^f, x_3) \\ \kappa_3 \left( u_3^p(x_1^f, x_3) - u_3^e(x_1^f, x_3) \right) &= \sigma_5^p(x_1^f, x_3), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$  son constantes de imperfección mecánica en las direcciones  $x_1$  y  $x_3$  respectivamente. La constante  $\kappa_1$  está relacionada con la separación entre las láminas y  $\kappa_3$  con el deslizamiento relativo de estas. El valor de  $x_1$  en la interfaz lo podemos poner en término de la fracción volumétrica del piezoeléctrico  $\nu$  y de la longitud de la celda periódica  $d$ :  $x_1^f = \frac{d}{2}\nu$ . Variando las constantes de imperfección podemos obtener diferentes grados de imperfección que van desde láminas desacopladas mecánicamente en la dirección  $x_i$  ( $\kappa_i = 0$ ) hasta contacto perfecto (igualdad de los desplazamiento), condición que se obtiene si  $\kappa_i \rightarrow \infty$ .

Además de las ecuaciones anteriores necesitamos 4 ecuaciones más para poder determinar las constantes  $E_i$  y  $D_i$ , estas vienen dadas por la continuidad del potencial eléctrico y el cumplimiento de las condiciones de continuidad clásicas de la teoría de la elasticidad y la electrodinámica.

$$\begin{aligned}
\varphi^p(x_1^f, x_3) &= \varphi^e(x_1^f, x_3) \\
\sigma_1^p(x_1^f, x_3) &= \sigma_1^e(x_1^f, x_3) \\
\sigma_5^p(x_1^f, x_3) &= \sigma_5^e(x_1^f, x_3) \\
D_1^p(x_1^f, x_3) &= D_1^e(x_1^f, x_3)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Al unir los sistemas (3.1) y (3.2) obtenemos un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de  $E_i$  y  $D_i$ . Para que este tenga solución diferente de la trivial se ha de exigir que el determinante de la matriz asociada al sistema sea nulo. Esta condición nos da una función implícita de las variables  $k_3$  y  $\omega$ . Esta relación nos permite obtener las curvas de dispersión del sistema, con los valores de estas curvas de dispersión se pueden determinar los desplazamientos, el potencial y los campos en cada punto del compuesto.

## 2.6 Curvas de dispersión de compuestos con condiciones de contacto de diferentes grados de imperfección

Se puede observar la influencia del grado de imperfección en la interfaz al comparar las curvas de dispersión obtenidas para compuestos con diferentes constantes de imperfección. Las figuras (2.2)-(2.4) muestran curvas de dispersión para medios compuesto por láminas paralelas de PZT-5H inmersas en un polímero formando laminados con diferentes fracciones volumétricas. Las propiedades de ambas fases fueron tomadas de Geng y Zhang (1997) [78]. Los compuestos se han modelado variando el grado de ambas imperfecciones mecánicas para lo cual se han establecido tres valores de  $\kappa_1$  y para cada uno de estos valores se grafican varias curvas con diferentes constantes de imperfección en la dirección  $x_3$

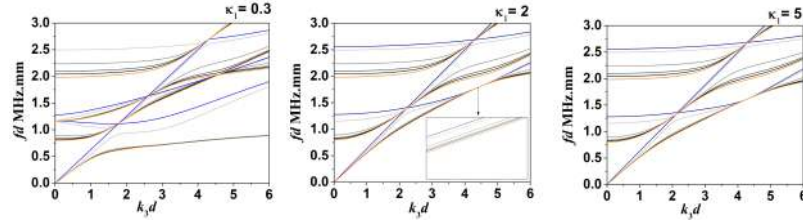


Figura 2.2: Curvas de dispersión de compuestos laminados con fracción volumétrica de la fase piezoeléctrica de 0.15 con diferentes parámetros de imperfección. (Valores de imperfección en la dirección  $x_3$  ( $\kappa_3$ : 0.3, 2, 5 and 10.)

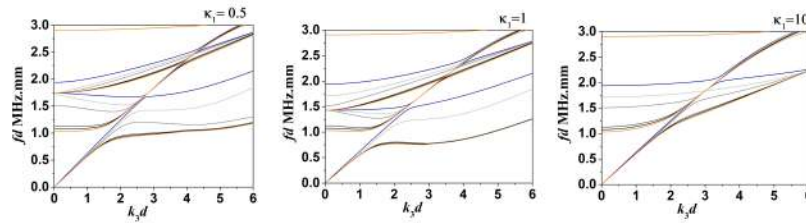


Figura 2.3: Curvas de dispersión de compuestos laminados con fracción volumétrica de la fase piezoeléctrica de 0.44 con diferentes parámetros de imperfección. (Valores de imperfección en la dirección  $x_3$   $\kappa_3$ : 0.5, 1, 5 and 10.)

( $\kappa_3$ ), estos van desde el contacto perfecto en la dirección  $x_3$  (líneas naranjas, ( $\kappa_3 \rightarrow \infty$ ) hasta un desacoplamiento total en esa dirección (línea azul,  $\kappa_3 = 0$ ). Las líneas en negro y tonos de grises representan valores intermedios de  $\kappa_3$ , cuanto más clara sea la línea menor será el valor de  $\kappa_3$  (los valores tomados para  $\kappa_3$  están indicados en cada pie de la figura). Los cálculos numéricos se han realizado para compuestos con diferentes fracciones volumétricas de los constituyentes.

Al observar los tres gráficos de las figuras (2.2), (2.3) y (2.4) puede verse la gran influencia que tiene en el material el hecho de considerar separaciones entre las láminas en las propiedades del material. Como se ve en las figuras (2.2)-(2.4) para obtener un mismo valor del número de onda en la dirección  $x_3$  se debe aumentar los valores de frecuencia a medida que aumenta el grado de imperfección dado por  $\kappa_3$ . Es más común graficar la frecuencia en el eje de las abscisas ya que es físicamente la variable independiente, pero en nuestro trabajo hemos preferido mantener la forma escogida por Geng y Zhang (1997) [78]. En estas figuras también hay áreas de cruces donde las curvas no llegan a cortarse, nos interesa estudiar lo que sucede en estas zonas de corte evitado. En estas zonas las curvas están influenciadas por otras cercanas, lo que provoca cambios de modo en una misma curva.

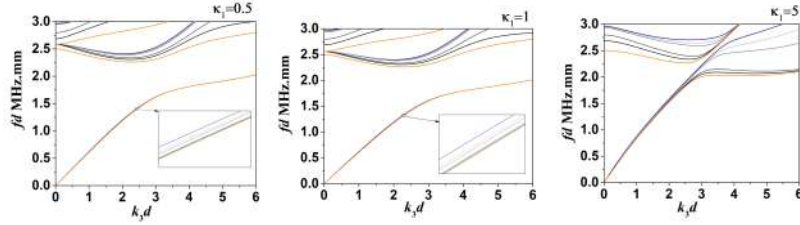


Figura 2.4: Curvas de dispersión de compuestos laminados con fracción volumétrica de la fase piezoeléctrica de 0.80 con diferentes parámetros de imperfección. (Valores de imperfección en la dirección  $x_3$   $\kappa_3$ : 0.5, 1, 5 and 10.)

## 2.7 Valores propios y zonas de crossover

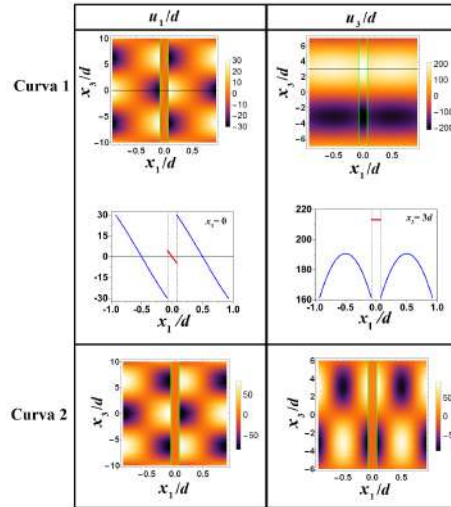


Figura 2.5: Comportamiento del desplazamiento en ambas direcciones de las curvas 1 y 2 en el punto  $\kappa_3 d = 0.5$

Un estudio más detallado de lo que ocurre en el material en las regiones cercanas a los cruces se ha realizado mediante el análisis del comportamiento de los desplazamientos en las direcciones  $x_3$  y  $x_1$  en esas regiones, esto nos va a permitir ver la forma en que oscila el compuesto. Se ha elegido a modo de ejemplo un compuesto con ambos parámetros de imperfección igual a 0.3 y con una fracción volumétrica del piezoeléctrico de  $\nu = 0.15$ . Las figuras (2.5) y (2.6) muestran las oscilaciones del medio antes y después del primer cruce. Las curvas se han enumerado de abajo hacia arriba, de modo que la curva 1 es la más cercana al eje de las abscisas. En estas figuras la fase piezoeléctrica se representa en

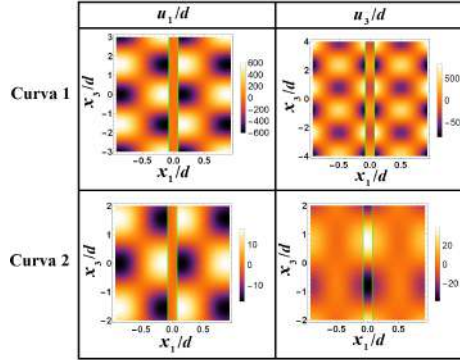


Figura 2.6: Comportamiento del desplazamiento en ambas direcciones de las curvas 1 y 2 en el punto  $\kappa_3 d = 2$

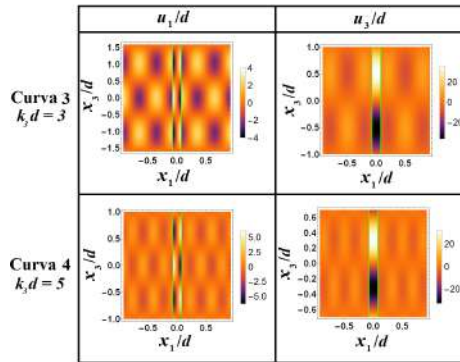


Figura 2.7: Comportamiento del desplazamiento en ambas direcciones de las curvas 3 y 4 en el punto  $\kappa_3 d = 3$  and  $\kappa_3 d = 5$

el centro del gráfico, entre dos líneas verdes. A ambos lados de esta se han graficado las oscilaciones de sendas láminas de póimero. En todas se nota el salto de los desplazamientos obtenidos al considerar contacto imperfecto tipo resorte en las interfaces.

En un inicio la curva 2 muestra un modo que está determinado por el epoxi, mientras que la curva 1 muestra un modo cuasilongitudinal gobernado por la fase piezoeléctrica (Fig.(2.5)). Después del cruce ambas curvan intercambian el modo de oscilación (Fig.(2.6)), la curva 1 muestra un modo similar al de la curva 2 antes del cruce y viceversa. El modo longitudinal gobernado por la fase piezoeléctrica que exhibía la curva 1 antes del cruce pasa a la curva 2 después del cruce ( $\beta = 2$ ). Este comportamiento es heredado por las curvas 3 y 4 (Fig. (2.7)) después de sucesivos cruces.

Se realizó un análisis más refinado de estas áreas de cruce tomando para ello el cruce evitado de las



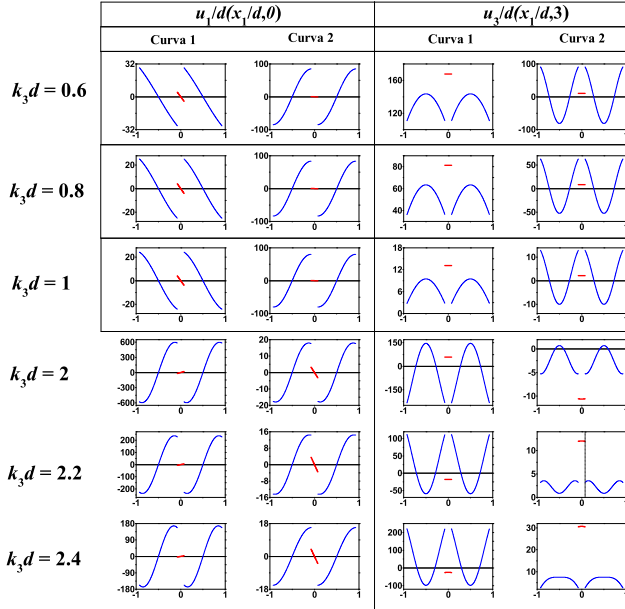


Figura 2.8: Cambios de modo de oscilación de las curvas 1 y 2

curvas 1 y 2. Con este objetivo se eligieron tres valores de  $k_3d$  antes y tres después de la primera zona de corte, ya dentro de esta zona (Fig.(2.8)) fijando uno de los desplazamientos y viendo el comportamiento del otro. Los puntos tomados son  $k_3d = 0.6, 0.8, 1.0, 2.0, 2.2$  y  $2.4$ .

Al observar los valores de ambos desplazamientos en la curva 1, vemos cómo predomina el movimiento longitudinal en los primeros 3 puntos, lo que se observa al comparar los valores de ambos desplazamientos. También se puede ver como aumentan los valores del desplazamiento de la fase polimérica en el cruce. Esto se debe al hecho de que esta curva está cambiando su modo al modo que se presentaba inicialmente en la curva 2. La curva 2 comienza en el modo heredado por la curva 1 después del cruce evitado y luego ingresa en un modo longitudinal. Debido a los altos valores de  $u_3$  en la fase piezoeléctrica, se puede inferir que esta es la responsable de este modo.

## 2.8 Casos límites

Al analizar el comportamiento de los modos de vibración de las láminas independientes es posible completar el estudio de estos al ver que material tiene la mayor influencia en cada sección de las

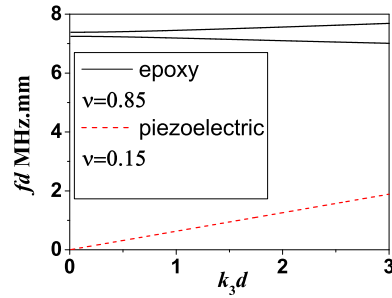


Figura 2.9: Modos de oscilación de láminas de polímero y piezoeléctrico independientes

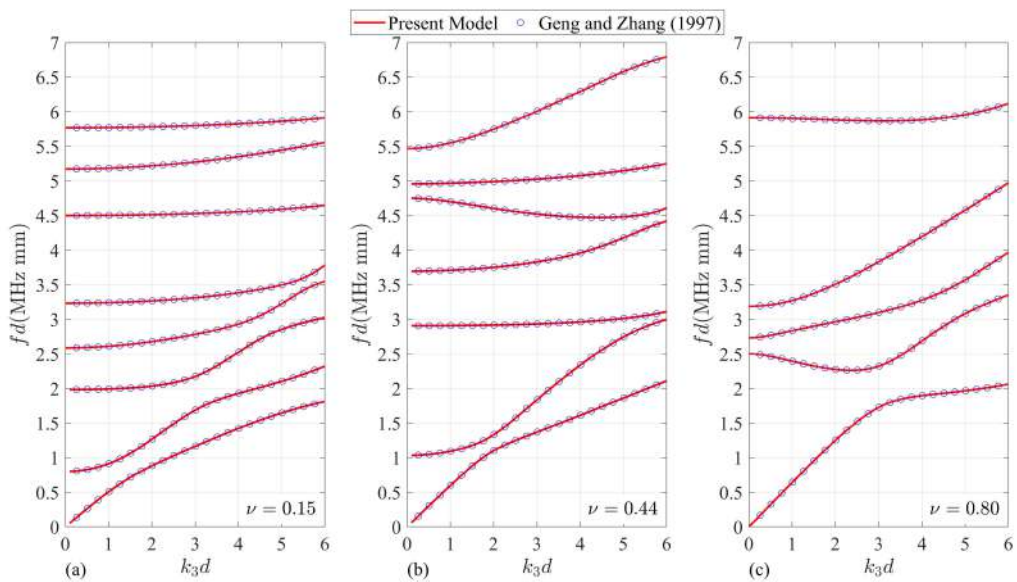


Figura 2.10: Casos límites, curvas de dispersión de materiales con contacto perfecto en la interfaz

curvas de dispersión. La figura (Fig.(2.9)) muestra el comportamiento de las láminas piezoeléctrica y epóxica independientemente, estas serían similares a las láminas que se usarían para formar un compuesto con una fracción de volumen de PZT-5H igual a 0.15. Como observamos en (Fig.(2.8)) la forma en que se inicia la curva 1 es un modo gobernado por la fase piezoeléctrica, esto se reafirma en (Fig.(2.9)) donde la línea roja discontinua representa el modo de oscilación del piezoeléctrico. Cuando vemos que este modo es heredado por las curvas 2, 3 y así sucesivamente es porque estas, en las áreas de cruce, se ven influenciadas por este modo longitudinal del piezoeléctrico. Por último la (Fig.(2.10)) muestra curvas de dispersión similares de compuesto laminado con condiciones de contacto ideal en las interfaces. Si comparamos estas gráficas con las obtenidas en las figuras (2.2)-(2.4).

## 2.9 Cosecuencias del desacople

En las figuras de las curvas de dispersión mixtrada uno de los resultados que más llama la atención además de las zonas de cruces evitables discutidas ampliamente anteriormente es la existencia de una onda que aparece en la figura 2.2 para una constante de imperfección  $\kappa_1 = 0.3$ . Este modo no se ve en las demás curvas de dispersión presentadas para otros valores de constante de imperfección (2.2 b y c) por lo que nos dimos a la tarea de estudiar este modo y a qué fase estaba ligado. En la figura 2.2(a) se observa que si organizamos las ondas de menor a mayor frecuencia aparecen un segundo y tercer modo muy unido, lo que no sucede al contrastar esta figura con 2.2 (b y c). Para conocer cuál era el modo que no aparecía para los valores mayores de la constante de imperfección en el eje  $x_1$  hicimos un estudio de los campos y los modos de oscilación para  $\kappa_1 = 2$  y los comparamos con los valores de campo obtenidos en epígrafos anteriores para  $\kappa_1 = 0.3$ , lo que nos permitió conocer que es el segundo modo el que no aparece cuando hay un mayor acople. Las figuras 2.11 y 2.12 se muestran las deformaciones  $u_1$  y  $u_3$ .

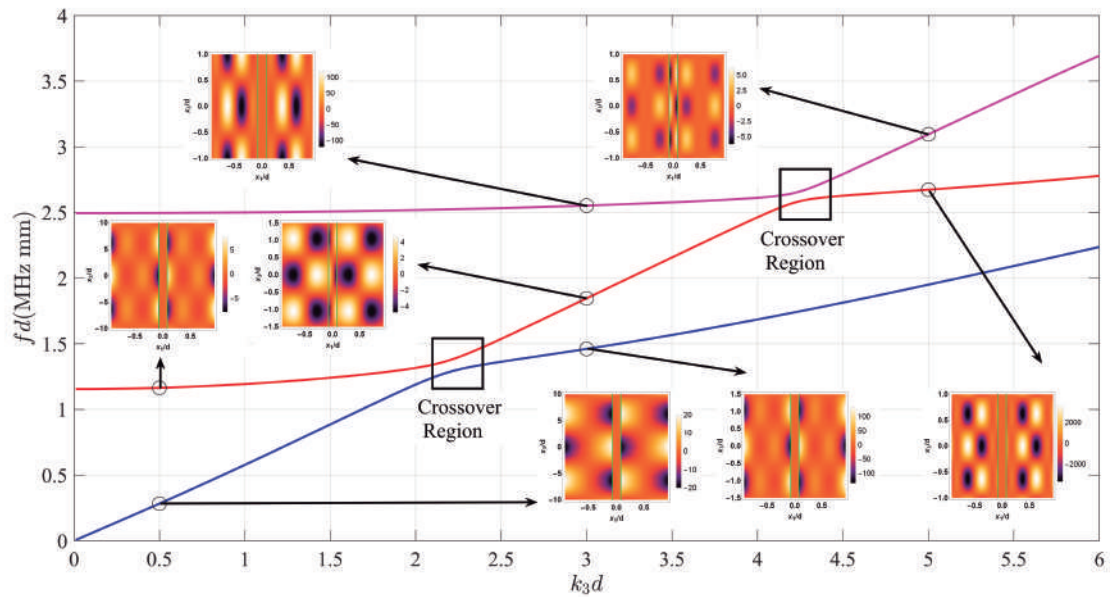


Figura 2.11: Comportamiento del campo de deformaciones  $u_1$  en un compuesto con constante de imperfección  $\kappa_3 = 0.3$ .

Al estudiar ambas fases por separado como se hizo en el epígrafe anterior notamos en la 2.9 que este es un modo que aparece en una lámina de epoxi que oscila libremente, por lo que es un modo que aporta esta fase. En la 2.2(a) se ve como este modo se obtiene para valores de  $\kappa_3$  que van desde contacto ideal en esta dirección hasta contacto completamente imperfecto por lo que podemos pensar que la

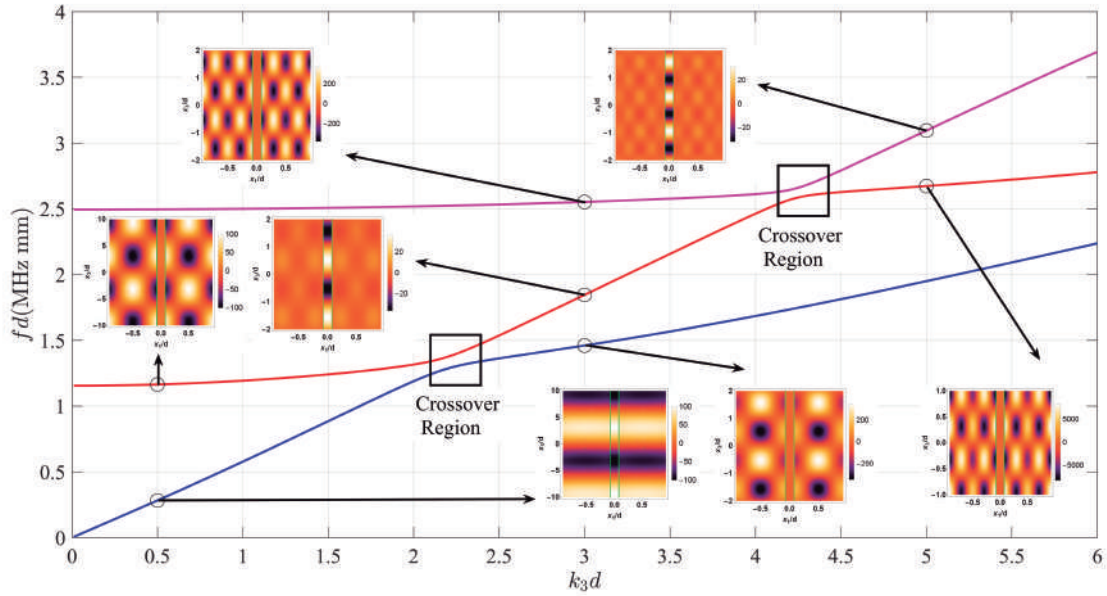


Figura 2.12: Comportamiento del campo de deformaciones  $u_3$  en un compuesto con constante de imperfección  $\kappa_3 = 2$ .

aparición o no de este modo no depende de la imperfección en esta dirección. Para estudiar este modo fijamos valores de  $\kappa_3$  y fuimos moviendo el valor de  $\kappa_1$ . El primer resultado relevante que obtuvimos es que este modo a medida que aumenta el acople entre las fases en la dirección de la discontinuidad va siendo menos energético dejándose de observar en el entorno de  $\kappa_1$ .<sup>24</sup>, momento en que desaparece debido al acoplamiento. En la figura 2.13 se ve cómo varía este modo. Además se puede comprobar que efectivamente es un modo principalmente transversal de la fase polimérica.

La posibilidad de que al considerar condiciones de contacto imperfecto en las interfaces aparezcan modos que se suprimen en el compuesto con contacto ideal es uno de los resultados más inesperados que hemos obtenido en nuestro trabajo.

## 2.10 Comparación con datos experimentales.

El coeficiente de acoplamiento electromecánico  $k_t$  es la razón entre la energía piezoeléctrica y la media geométrica de las energías eléctrica y elástica. En [88] se demuestra que el coeficiente de acoplamiento electromecánico puede relacionarse con las velocidades a intensidad de campo  $E$  constante ( $v^E$ ) y a desplazamiento del campo eléctrico  $D$  constante ( $v^D$ ) según la relación:  $\left(\frac{v^E}{v^D}\right)^2 = (1 - k_t^2)$ . En [78] se demuestra que la velocidad  $v^D$  se puede determinar de la primera curva de dispersión haciendo

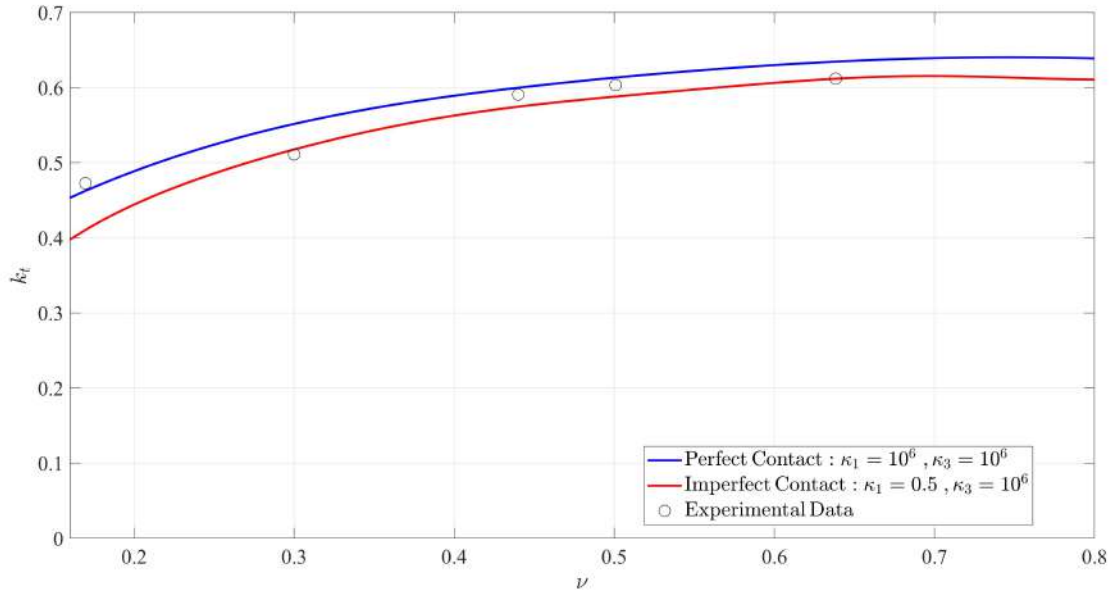


Figura 2.14: Comparación de  $k_t$  entre modelo con diferentes grado de imperfección y valores experimentales.

tender  $\kappa_3$  a cero, de la pendiente de esta curva se obtiene  $v^D$ . De manera análoga se puede obtener  $v^E$  para un compuesto con propiedades netamente elásticas. A partir de curvas de dispersión similares a las mostradas en pígrafos anteriores se puede determinar el coeficiente  $k_t$ . Este coeficiente es posible de medir y ha sido reportado para los compuestos que estamos estudiando [75]. En la figura 2.14 a continuación se muestran curvas de  $k_t$  con varios valores de imperfección de  $\kappa_1$  y se compara con los valores experimentales. La curva mostrada para el caso ideal se ha obtenido para valores de  $10^6$  de las constantes de imperfección, estos valores son suficientes para considerarlas infinito. La curva ideal mostrada coincide con la reportada en [75].

más energéticas, es decir se obtienen para valores de frecuencias más altos a medida que aumenta la imperfección por deslizamiento ( $\kappa_3$ ).

## 2.11 Conclusiones del Capítulo

- Se propuso y desarrolló un modelo que considera contacto imperfecto mecánico en las interfaces de piezocompuestos laminados .
- Se obtuvieron curvas de dispersión para piezocompuestos laminados con diferentes fracciones volumétricas.
- Para diferentes fracciones volumétricas se tomaron varios valores de  $\kappa_1$  y fijando estos valores obtuvieron curvas de dispersión para diferentes valores de  $\kappa_3$ .
- Al fijar la fracción volumétrica y la constante de imperfección  $\kappa_1$  se observó que las ondas son
- Se determinó a partir de qué valores de las constantes de imperfección empiezan a verse cambios notables en las propiedades de los compuestos.
- Se obtuvieron las curvas de dispersión para el caso ideal haciendo un paso al límite en nuestro modelo.
- Las curvas obtenidas para el caso ideal coinciden con las reportadas en [78].
- Se obtuvo el caso límite de láminas de piezoeléctrico y polímero independiente haciendo cero las constantes de imperfección  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$ .
- Las curvas de dispersión obtenidas para el caso límite de materiales deacoplados coinciden con las calculadas para láminas independientes. La propagación de ondas SV en láminas del

piezoeléctrico fue descrita en [77] y nuestros resultados coinciden con reportados por estos autores.

- A partir de los valores de las curvas de dispersión se calcularon los valores de desplazamientos  $u_1$  y  $u_3$  en toda la celda periódica.
- Analizando los desplazamiento se pudo determinar el modo de onda predominante en varios puntos de la curvas de dispersión.
- Comparando los desplazamientos en ambas fases se pudo determinar cuál es la fase que más contribuye en diferentes puntos de la curva de dispersión.
- En las curvas de dispersión se obtuvieron zonas de corte evitable en curvas de dispersión de un mismo piezocompuesto.
- Se obtuvo la forma de la onda en puntos cercanos a la región de cruce, en tres puntos antes y tres después del cruce, observando que las características de una onda eran transmitida a la otra y viceversa durante el cruce.
- Se observó como la primera onda (la que se obtiene a menor frecuencia) es una onda principalmente longitudinal y es el piezoeléctrico el responsable de ella.
- Se estudió como el primer modo pasa en las regiones de corte de la primera a la segunda curva y de esta a la tercera y así hasta llegar a la quinta curva, manteniendo siempre sus características.
- En compuestos con altas fracciones volumétricas del polímero se obtuvo una onda producto del desacople por la imperfección que no aparece en el compuesto con contacto ideal. Este modo que sí se observa en el caso límite de una lámina de polímero independiente va apareciendo a frecuencias más bajas a medida que aumenta  $\kappa_1$ .
- Se estudió la forma del modo que no aparece en el compuesto ideal comprobando que efectivamente era una onda que se origina en el epoxi.

- Haciendo uso de las curvas de dispersión se determinó una curva de  $k_t$  en función de la fracción volumétrica del piezoeléctrico.
- Se comparó la curva de  $k_t$  obtenidas para diferentes valores de imperfección con puntos experimentales dados en [75].
- Se validó el modelo con datos experimentales notándose como el hecho de considerar contacto imperfecto en las interfaces permite un mayor acercamiento a la realidad física.





## Capítulo 3

# Influencia de imperfecciones eléctricas en piezocompuestos 2-2.

### 3.1 Introducción al capítulo

Si el estudio de condiciones de contacto con imperfecciones mecánicas es algo bastante nuevo, considerar imperfecciones eléctricas en las condiciones de empalme lo es aún más, este capítulo está enfocado en el estudio de estas condiciones. Al igual que en el caso de las mecánicas hay varios tipos de contacto imperfecto eléctrico. En este trabajo hemos considerado que el potencial en las interfases presenta un salto y que este salto ha de ser proporcional al valor del desplazamiento del campo eléctrico en la dirección normal a la interfaz. Haciendo uso del modelo presentado en el capítulo anterior se estudia la posible influencia de condiciones de contacto eléctrico imperfecta en laminados similares a los estudiados en la sección anterior. Luego este modelo es extendido a bilaminados con ambas fases piezoeléctricas para poder comparar la influencia de considerar condiciones de contacto imperfectas eléctricas en diferentes piezocompuestos laminados.

### 3.2 Laminado piezoeléctrico-polímero con condiciones de contacto imperfecto eléctrico.

En este epígrafe continuaremos con el estudio del mismo tipo de laminados que ya se han venido estudiando desde el capítulo 2, laminados fases piezoeléctricas intercaladas con otras de un material

isotrópico, por los que viajan ondas SV y se hará uso del mismo modelo mecánico desarrollado en el capítulo anterior. En el epígrafe se estudia el comportamiento de ondas SV en un medio piezoeléctrico, llegando a las ecuaciones correspondientes a los desplazamientos y el potencial ecuaciones . De manera análoga en el epígrafe se obtienen las expresiones de ondas SV en medios isotrópicos (ecuaciones ). Las condiciones de contorno en la frontera de las fases  $(x_1^f = \frac{d}{2}\nu)$  relacionan las soluciones en ambos medios y conforman un sistema de ecuaciones de las variables  $D_i$  y  $E_i$ .

Teniendo en cuenta que la unión de las fases no tiene porqué ser ideal, entendiéndose por ello que el potencial sea continuo en las fronteras de las fases, se han modelado las condiciones de contacto de manera que el potencial presente un salto en las interfaces. Este salto lo consideraremos proporcional a el desplazamiento del campo en las fronteras de las fases y perpendicular a estas, es decir:

$$\kappa_e \left( \varphi^p \left( x_1^f, x_3 \right) - \varphi^e \left( x_1^f, x_3 \right) \right) = D_1^p \left( x_1^f, x_3 \right) \quad (3.1)$$

El parámetro  $\kappa_e$  es el parámetro de imperfección eléctrica si este valor tendiera a infinito se obtendría una expresión similar a la primera condición de . Mientras menor sea este parámetro mayor será la diferencia del potencial entre ambas fases en la frontera de las mismas.

El resto de las magnitudes se considerarán continuas en la frontera, es decir:

$$\begin{aligned} u_1^p \left( x_1^f, x_3 \right) &= u_1^e \left( x_1^f, x_3 \right), \\ u_3^p \left( x_1^f, x_3 \right) &= u_3^e \left( x_1^f, x_3 \right), \\ \sigma_1^p \left( x_1^f, x_3 \right) &= \sigma_1^e \left( x_1^f, x_3 \right), \\ \sigma_5^p \left( x_1^f, x_3 \right) &= \sigma_5^e \left( x_1^f, x_3 \right), \\ D_1^p \left( x_1^f, x_3 \right) &= D_1^e \left( x_1^f, x_3 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las dos primeras expresiones se obtienen de hacer tender respectivamente  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$  a infinito en las expresiones .

El sistema formado por las condiciones de contacto nos permite obtener una relación entre la componente del vector de onda  $k_3$  y la frecuencia  $\omega$ . Para que existan las ondas, sus amplitudes deben ser diferente de cero, por lo que este sistema homogéneo debe tener solución distinta de la trivial, es decir su determinante debe ser distinto de cero. De esta condición se obtienen las relaciones de dispersión.

### 3.3 Influencia de las imperfecciones eléctricas en las condiciones de contacto

En el epígrafe anterior se obtuvo la relación de dispersión que relaciona la componente  $\kappa_3$  del vector de onda y la frecuencia  $\omega$  en esta vamos a graficar la función obtenida en un compuesto prueba de polímero y PZT-H5, similares a los estudiados en el 2 considerando en este caso contacto imperfecto en la interfaz. Al observar la condición ?? se observa que para obtener una condición similar a la ideal (continuidad en el potencial) debe cumplirse que  $\kappa_e \rightarrow \infty$ , mientras mayor sea este parámetro menos ideal será el contacto eléctrico, siendo cero el valor extremo de mayor imperfección. En las figuras 3.1 y 3.2 se ve del lado derecho las curvas de dispersión para  $\kappa_e \rightarrow \infty$ , mientras que del lado izquierdo se presentan las curvas obtenidas para el caso  $\kappa_e = 0$ .

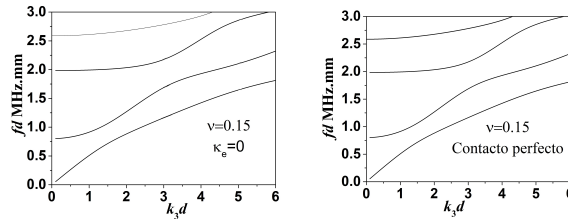


Figura 3.1: Casos límites, curvas de dispersión de materiales con contacto perfecto en la interfaz

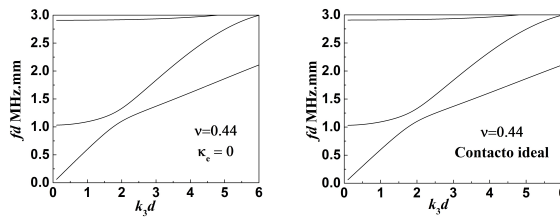


Figura 3.2: Casos límites, curvas de dispersión de materiales con contacto perfecto en la interfaz

Las figuras de la derecha repiten las ya obtenidas en fig.(2.10). La diferencia radica en que las gráficas de la figura fig.(2.10) son obtenidas a partir de hacer tender a infinito los parámetros de imperfección mecánica en las condiciones de contacto del epígrafe 2.5.

El resultado más interesante lo muestran las gráficas de la izquierda, como se observa las curvas de dispersión obtenidas para la condición de imperfección extrema no presentan diferencias observables con las curvas obtenidas bajo la condición de contacto perfecto en las interfaces, lo que nos permite afirmar

que en este caso las imperfecciones consideradas no influyen significativamente en las propiedades del compuesto. Faltaría determinar a partir de los valores de la curva de dispersión el campo eléctrico para saber si hay alguna influencia en las amplitudes del campo. En la fig. ?? se ha tomado una fracción volumétrica de PZT-5H igual a 0.44 y se muestran las diferencias entre el campo eléctrico con  $\kappa_e = 0$  y con contacto ideal. Se muestra  $D$  para un mismo valor de la componente  $k_3$  del vector de onda en las primeras dos curvas. Se ha calculado el campo en diferentes puntos de la curva de dispersión sin observarse practicamente diferencias entre el valor del campo en compuestos con contacto perfecto en las interfases y en compuestos con láminas desacopladas eléctricamente.

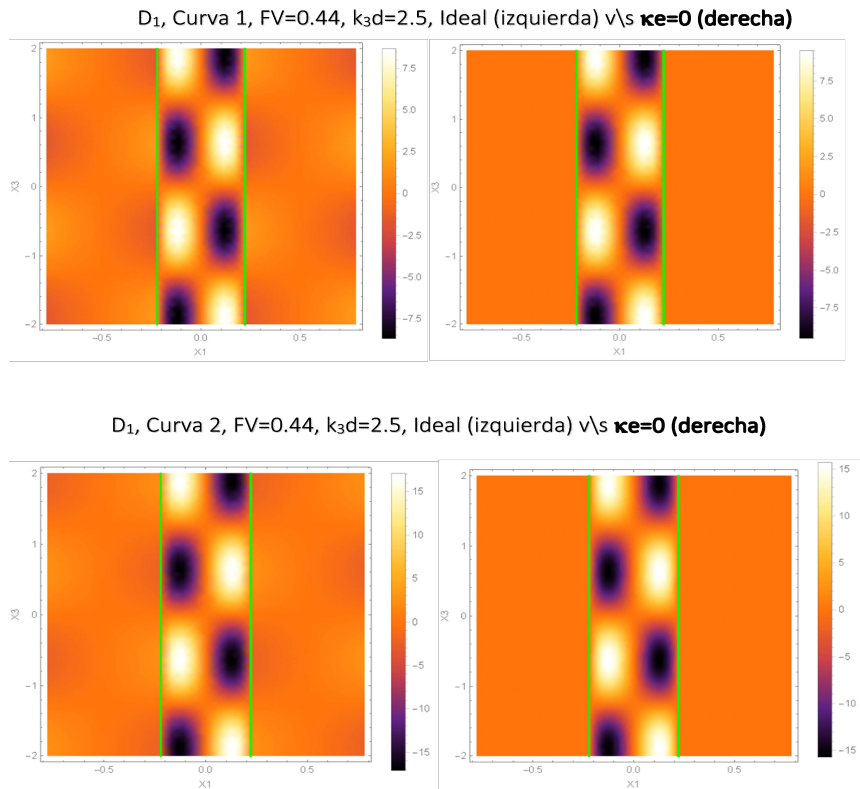


Figura 3.3: Desplazamiento adimensionalizado del campo eléctrico en diferentes puntos de las

La alta diferencia entre los valores de las constantes eléctrica entre el polímero y el piezoeléctrico es la causante de este resultado. En el caso del contacto perfecto la reacción de cada fase ante el tipo de ondas estudiadas presenta varias contribuciones, una debida a la respuesta directa, a la variación de los campos por sus propias constantes y otras debido a la respuesta originada en la fase vecina, respuesta indirecta, esta se introduce matemáticamente a la hora de la resolución del problema mediante las condiciones de contacto. Las constantes eléctricas del piezoeléctrico son mucho más altas que la del

poímero por lo que su respuesta directa es mayor, al ser la respuesta de la fase isotrópica tan baja en comparación a la de la fase piezoeléctrica la respuesta de esta última al campo generado en su vecina es muy leve, al igual que la respuesta indirecta del polímero debido al bajo valor de sus propias constantes eléctricas. Además esa diferencia entre los campos producidos en una y otra fase hace que en la interfaz el valor de  $D$  tenga valores mucho menor que en el interior del piezoeléctrico.

### 3.4 Laminados piezoeléctrico-piezoeléctrico

En esta sección vamos a desarrollar el modelo de un nuevo tipo de compuesto, bilaminados periódicos con ambas fases piezoeléctricas, es decir sustituiremos la fase puramente elástica por otra piezoeléctrica, creando un compuesto piezoeléctrico-piezoeléctrico. En este tipo de compuesto debe aclararse cómo estarán orientadas las fases polarizadas, nosotros hemos considerado orientación en paralelo, es decir ambas direcciones de polarización coinciden y están orientadas en la dirección positiva del eje  $x_3$ , siendo perpendiculares a la dirección de discontinuidad.

En ambas fases de estos nuevos compuestos se cumplen las ecuaciones obtenidas en el epígrafe 3.2 cuando se desarrolló el modelo de ondas SV en materiales piezoeléctricos.

Es de nuestro interés estudiar la influencia de las condiciones de contacto de imperfección eléctrica en estos compuestos. Para lo cual haremos uso de las condiciones de contorno presentadas en 3.2,

$$\begin{aligned}
 u_1^1(x_1^f, x_3) &= u_1^2(x_1^f, x_3), \\
 u_3^1(x_1^f, x_3) &= u_3^2(x_1^f, x_3), \\
 \kappa_1(\varphi^p(x_1^f, x_3) - \varphi^2(x_1^f, x_3)) &= D_1^1(x_1^f, x_3), \\
 \sigma_1^1(x_1^f, x_3) &= \sigma_1^2(x_1^f, x_3), \\
 \sigma_5^1(x_1^f, x_3) &= \sigma_5^2(x_1^f, x_3), \\
 D_1^1(x_1^f, x_3) &= D_1^2(x_1^f, x_3).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde las etiquetas 1 y 2 se utilizan para diferenciar cada una de las fases piezoeléctricas.

La condición sobre el determinante del sistema para que este tenga solución diferente de la trivial nos aporta una relación de dispersión entre  $k_3$  y  $\omega$ .

### 3.5 Curvas de dispersión de compuestos piezoeléctrico-piezoeléctrico con diferentes condiciones de contacto eléctrico.

En este epígrafe ilustraremos los resultados obtenidos en el anterior con un ejemplo numérico. Los compuestos considerados mantienen la fase de PZT-H5 y se ha cambiado la fases de polímero por fases de  $BaTiO_3$ , que es otro piezoeléctrico. Se han graficado curvas de dispersión para el caso de condiciones de contacto perfecto ( $\kappa_e \rightarrow \infty$ ), para  $\kappa_e = 0$  y valores intermedios. Las gráficas a continuación muestran las curvas de dispersión calculadas.

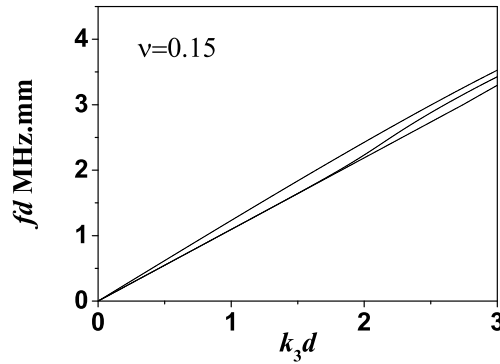


Figura 3.4: Casos límites, curvas de dispersión de materiales con contacto perfecto en la interfaz

En estas figuras se ha graficado un solo modo, ya que el segundo modo en todos los casos se obtiene para valores de frecuencia mucho más altos que no permitirían ver el comportamiento del primer modo. La gráfica inferior corresponde al modo ideal, la superior a  $\kappa_e = 0$  y el del medio a un valor intermedio ( $\kappa_e = 1000$ ) para el caso de fracción volumétrica de  $PZT - 5H = 0.15$ .

Aquí sí obtenemos que el valor de  $\kappa_e$ , es decir el grado de imperfección influye en el compuesto lo que corrobora la tesis planteada en epígrafos anteriores.

### 3.6 Conclusiones del Capítulo

- Se realizó y desarrolló un modelo para piezocompuestos laminados con contacto imperfecto eléctrico en las interfases.
- Se obtuvieron curvas de dispersión para casos límites de las constantes de imperfección en lam-

inados de fases intercaladas piezoeléctrico-polímero.

- Se observó que para compuestos laminados piezoeléctrico-polímero las condiciones de contacto imperfecto eléctrico planteadas no influyen significativamente en las propiedades del compuesto, al menos para ondas de bajas frecuencias.
- Se extendió el modelo a laminados piezoeléctrico-piezoeléctrico
- Se obtuvieron curvas de dispersión para casos límites de las constantes de imperfección en laminados de fases intercaladas piezoeléctrico-piezoeléctrico.
- Se observa que las condiciones de contacto imperfecto eléctrico sí influyen en los compuestos con ambas fases piezoeléctrica observándose cambios en las curvas de dispersión.





## Capítulo 4

# Ondas P-SV en laminados piezoeléctrico-piezomagnético

### 4.1 Introducción al capítulo

Al igual que los piezoeléctricos, los materiales piezomagnéticos son ampliamente utilizados en la elaboración de compuestos por sus propiedades. En particular son muy estudiado y utilizados los compuestos con fases piezoeléctricas y piezomagnéticas por la amplia gama de respuesta que ofrecen ante campos de diferentes naturaleza. En este capítulo aplicaremos el modelo dinámico desarrollado en el capítulo 3 a compuestos laminados piezoeléctrico-piezomagnético. Se trabajará el caso en que las direcciones de polarización de las fases activas sea perpendicular a la dirección de discontinuidad del compuesto y ambas sean paralelas entre sí. El plano de incidencia de la onda será perpendicular a las interfaces del compuesto. Para darle solución a este problema se resolverán de manera independiente el sistema de ondas SV para medios piezoeléctricos y piezomagnéticos y posteriormenete haciendo uso de las condiciones de contacto en las interfaces se obtendrán las curvas de dispersión del laminado. Para modelar el contacto imperfecto usaremos las mismas condiciones de contacto que usamos en el capítulo anterior y añadiremos una condición de contacto imperfecto para el potencial magnético similar a la usada para el eléctrico.

## 4.2 Solución de ondas SV en medios piezomagnéticos

En este epígrafe desarrollaremos las ondas SV en un medio piezomagnético homogéneo, pero considerando la interacción del material con el campo eléctrico, ya que se quiere estudiar un compuesto piezoeléctrico-piezomagnético. Con las condiciones solicitadas las ecuaciones de los campos las podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (q_{31} + q_{15}) \frac{\partial \psi}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (c_{55} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + q_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + q_{33} \frac{\partial \psi}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
-\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} &= 0, \\
q_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (q_{15} + q_{31}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + q_{33} \frac{\partial u_3(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} - \mu_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \mu_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Nótese que las ecuaciones 1, 2 y 4 (ecuaciones de Newton y ecuación de Gauss) forman un sistema de ecuaciones cuya solución son ondas SV en medios piezomagnético. Las ondas planas forman un conjunto completo de soluciones de este sistemas.

$$u_3 = A \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)) \tag{4.2}$$

$$u_1 = B \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t))$$

$$\varphi = C \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t))$$

$$\psi = D \exp(i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t))$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes.

Al sustituir las soluciones en la forma (4.2) en el sistema se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Una condición necesaria y suficiente para que este sistema tenga solución diferente de la trivial es que su determinante asociado sea nulo. Además en el material piezomagnético se tiene que  $\forall_{ij} q_{ij} = 0$ , pues estos son los coeficientes referidos a las propiedades piezoeléctricas.

$$\begin{vmatrix}
c_{11}k_1^2 + c_{44}k_3^2 - \rho\omega^2 & (c_{13} + c_{44})k_1k_3 & 0 & (q_{15} + q_{31})k_1k_3 \\
(c_{13} + c_{44})k_1k_3 & c_{33}k_3^2 + c_{44}k_1^2 - \rho\omega^2 & 0 & q_{15}k_1^2 + q_{33}k_3^2 \\
0 & 0 & -(\varepsilon_{11}k_1^2 + \varepsilon_{33}k_3^2) & 0 \\
(q_{15} + q_{31})k_1k_3 & q_{15}k_1^2 + q_{33}k_3^2 & 0 & -(\mu_{11}k_1^2 + \mu_{33}k_3^2)
\end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

Este sistema se puede separar en dos en

$$\begin{vmatrix} c_{11}k_1^2 + c_{44}k_3^2 - \rho\omega^2 & (c_{13} + c_{44})k_1k_3 & (q_{15} + q_{31})k_1k_3 \\ (c_{13} + c_{44})k_1k_3 & c_{33}k_3^2 + c_{44}k_1^2 - \rho\omega^2 & q_{15}k_1^2 + q_{33}k_3^2 \\ (q_{15} + q_{31})k_1k_3 & q_{15}k_1^2 + q_{33}k_3^2 & -(\mu_{11}k_1^2 + \mu_{33}k_3^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

y la ecuación similar a (2.15) correspondiente a la parte eléctrica.

Para el caso del material piezoeléctrico en presencia de campo magnético además de obtener la ecuación (??) se obtiene la ecuación para la parte magnética

$$(\mu_{11}k_1^2 + \mu_{33}k_3^2) = 0. \quad (4.5)$$

La expresión (4.5) es una función implícita de  $\omega$ ,  $k_1$  y  $k_3$ , para cada par  $(k_3; \omega)$  se obtienen tres valores, los correspondientes a las ondas cuasi-longitudinal, cuasi-transversal y cuasi-piezomagnética y el valor  $k_1 = \iota\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}}k_3$ .

Si consideramos uno de los dos posibles modos de simetría que nos da el sistema (4.1), teniendo en cuenta que el otro es similar y es presentado en el capítulo anterior podemos escribir una solución para un medio piezomagnético homogéneo en la forma.

$$\begin{aligned} u_3 &= \sum_{i=1}^3 R_i^m \cos(k_1^i x_1) \sin(k_3 x_3) \\ u_1 &= \sum_{i=1}^3 f_i^m R_i^m \sin(k_1^i x_1) \cos(k_3 x_3) \\ \varphi &= R_4^m \cosh(k_3 x_3) \sin(k_3 x_3) \\ \psi &= \sum_{i=1}^3 g_i^m R_i^m \cos(k_1^i x_1) \sin(k_3 x_3) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde el subíndice  $i$  suma por los valores posible de  $k_1$ ,  $f_i$  y  $g_i$  que se obtienen de la relación que guardan  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tal como se hizo en (3.2) y las  $R_i^e$  son constantes producto de la indeterminación del sistema (4.3). El supra índice  $m$  es referido al medio piezomagnético.

### 4.3 Solución en bilaminados periódicos piezoeléctrico/piezomagnético

Consideremos un material heterogéneo piezoeléctrico/piezomagnético (Figura 4.1), hecho de alternar placas de materiales piezoeléctricos y piezomagnético, similar al que modelamos en el capítulo (1)

anterior pero cambiando las láminas de polímero por un material piezomagnético. De manera similar a como se hizo en el capítulo 3 el sistema de coordenadas se elige de manera que el eje  $X_3$  está a lo largo de la dirección de polarización del piezoeléctrico y el del piezomagnético, el eje  $X_1$  es perpendicular a las interfaces y el eje está  $X_2$  en el plano de las placas. Las dimensiones del compuesto en cualquier dirección las tomaremos mucho mayores que el período. En el tratamiento matemático pueden ser considerados como infinita sin tener mucho error en los resultados. Al igual que en el caso anterior, el problema es independiente de la coordenada  $x_2$ .

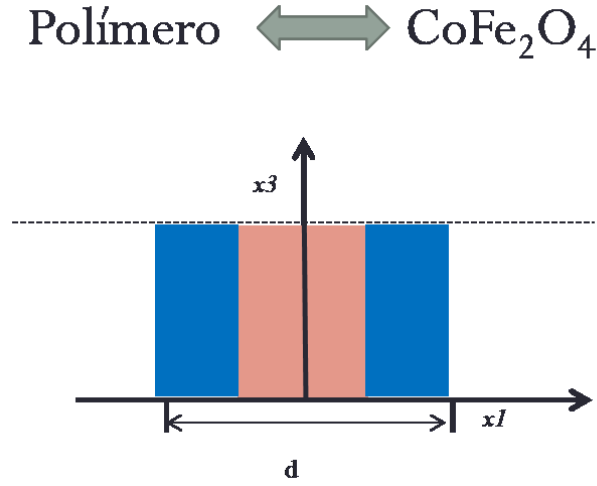


Figura 4.1: Esquema de laminado piezoeléctrico.

En el epígrafe anterior obtuvimos las soluciones para medios homogéneos piezoeléctrico y piezomagnético para obtener las soluciones en el compuesto, al igual que se hizo en el caso de un piezocompuesto piezoeléctrico polímero debemos hacer uso de las condiciones de contacto en las interfaces. Al añadir la propiedad de piezomagnetismo al material, se introducen dos nuevas condiciones de frontera, en la Tabla 4.1 se muestran las nuevas condiciones de contacto imperfecto estas sumadas a (3.3) nos ayudarán a encontrar las curvas de dispersión.

Contacto Ideal	Contacto Imperfecto
$B_1^e(f_v d/2) = B_1^m(f_v d/2)$	$B_1^e(f_v d/2) = B_1^m(f_v d/2)$
$\psi^e(f_v d/2) - \psi^m(f_v d/2) = 0$	$K_M(\psi^e(f_v d/2) - \psi^m(f_v d/2)) = B_1^e(f_v d/2)$

Tabla 4.1: Condiciones magnéticas de contacto en las interfaces

Al sustituir (??) y (4.6) en las condiciones de contorno (3.3) y (4.1), ya sean ideales o con contacto

imperfecto encontramos un sistema de 8 ecuaciones lineales y homogéneas para las constantes  $R_i^e$  y  $R_i^m$ . Para que este sistema tenga una solución distinta de la solución trivial, debe ser un sistema indeterminado, es decir el determinante asociado al sistema debe ser igual a cero. Esta condición nos ofrece otra función implícita de la frecuencia y las coordenadas del vector de onda. Sustituyendo la función  $k_1(k_3; \omega)$  obtenida en 4.2 en la nueva función implícita recién obtenida obtenemos una función  $F(k_3, \omega)$ , con la constante  $K_M$  como parámetro, que nos permitirá determinar las curvas de dispersión.

#### 4.4 Influencia de condiciones de contacto imperfecto eléctrico y magnético en laminados piezoeléctrico/piezomagnético.

Al igual que realizaremos en el caso del compuesto laminado piezoeléctrico/polímero realizaremos experimentos numéricos para visualizar los resultados hasta aquí obtenidos. Para lo cual utilizaremos  $PZT - H5$  como material piezoeléctrico y  $CoFe_2O_4$  como piezomagnético. Inicialmente se va a considerar que el contacto en las interfases de los laminados es ideal, es decir que existe continuidad en los desplazamientos mecánicos y en los potenciales, tanto el eléctrico como magnético, además de las continuidades en los campos  $\sigma$ ,  $D$  y  $B$ , las cuales se consideran en todo el trabajo. Al igual que hemos realizado anteriormente en otros casos de la condición para que el sistema 4.7 tenga solución diferente de la trivial, (lo que equivale a una condición física de existencia de las ondas, ya que se está pidiendo que las amplitudes de las ondas, iguales o principales a  $R_i^{e/m}$  sean diferente de cero) obtenemos

$$\begin{aligned}
 u_1^e \left( f_v d/2 \right) &= u_1^m \left( f_v d/2 \right) \\
 u_3^e \left( f_v d/2 \right) &= u_3^m \left( f_v d/2 \right) \\
 \varphi^e \left( f_v d/2 \right) &= \varphi^m \left( f_v d/2 \right) \\
 \psi^e \left( f_v d/2 \right) &= \psi^m \left( f_v d/2 \right) \\
 \sigma_1^e \left( f_v d/2 \right) &= \sigma_1^m \left( f_v d/2 \right) \\
 \sigma_5^e \left( f_v d/2 \right) &= \sigma_5^m \left( f_v d/2 \right) \\
 D_1^e \left( f_v d/2 \right) &= D_1^m \left( f_v d/2 \right) \\
 B_1^e \left( f_v d/2 \right) &= B_1^m \left( f_v d/2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

La figura 4.2 muestra las curvas de dispersión determinadas para el caso de contacto ideal en las interfases. Como se ve en la figura en los modos representados las curvas de dispersión no varían grandemente con la fracción volumétrica de los constituyentes, a diferencia de lo que sucede en el

caso de los bilaminados polímeros/piezoeléctricos. Esto es debido a que las constantes de la fase piezoeléctrica y la piezomagnética poseen valores cercanos, no así las constantes del polímero y el piezoeléctrico.

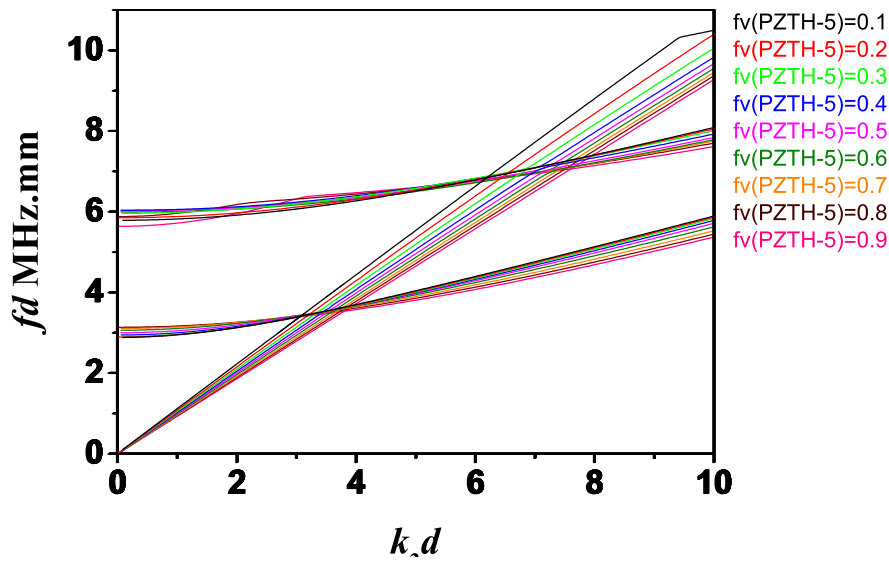


Figura 4.2: Esquema de laminado piezoeléctrico.

Los compuestos estudiados presentan una fase activa piezoeléctrica y otra piezomagnética por lo que es de nuestro interés estudiar la influencia en las propiedades del compuesto de las imperfecciones eléctricas y magnéticas en las interfaces de este. Las funciones de dispersión en este caso van a ser obtenidas cambiando las ecuaciones de los potenciales en 4.7 por sus respectivas condiciones de imperfección.

La figura 4.3) muestra las primeras curvas de dispersión para una fracción volumétrica del piezoeléctrico de 0.2 y 0.8 respectivamente.

Las curvas de dispersión donde hemos considerado contacto imperfecto eléctrico y contacto imperfecto magnético se superponen con las curvas de dispersión con contacto ideal. Las constantes de imperfección representan la mayor imperfección posible ( $\kappa_{e/m} = 0$ ). No se observan tampoco diferencias entre estas curvas solamente se ha tomado uno de los dos tipos de contacto imperfecto. Para las frecuencias estudiadas vemos que se corrobora el resultado del capítulo anterior, para que las condiciones de imperfección influyan visiblemente en las propiedades del compuesto los constituyentes deben ser activos, es decir como la ferrita no es piezoeléctrica no influyen visiblemente las imperfecciones

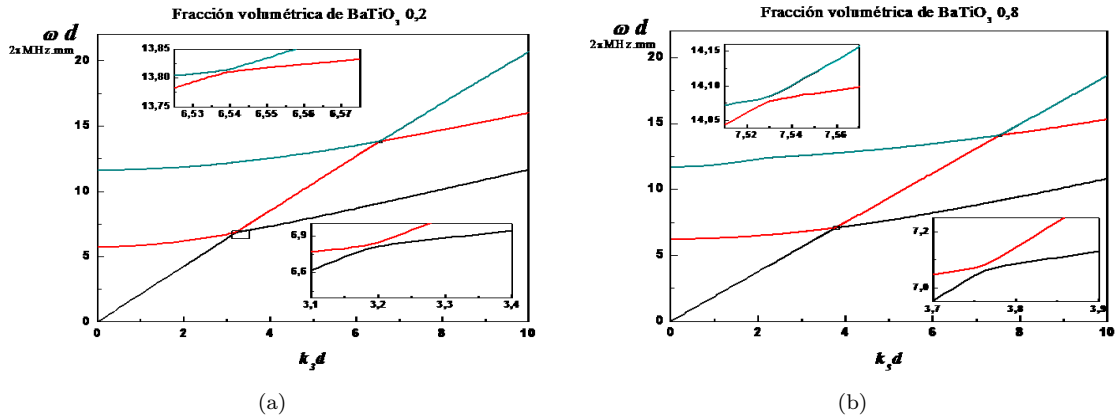


Figura 4.3: Curvas de dispersión para el caso ideal y completamente desacoplado magnética y mecánicamente laminados piezoeléctrico/piezomagnético con diferente fracciones volumétricas. (a)  $fv = 0.2$  del piezoeléctrico (b)  $fv = 0.8$  del piezoeléctrico.

eléctricas, ni las magnéticas ya que la fase piezoeléctrica no es piezomagnética.

## 4.5 Cálculo de la constante de acoplamiento electromagnético haciendo uso del modelo dinámico.

El factor o coeficiente de acoplamiento magnetoeléctrico  $O_t$  da una medida de la energía eléctrica que se transforma en magnética y viceversa en un material donde magnetoeléctricos, como es el caso de los compuestos piezoeléctrico-piezomagnético. Este factor puede ser determinado por diferentes formas, en particular haciendo uso de relaciones entre las velocidades de las ondas en el material si fijamos los campos. Las cuales podemos determinar haciendo uso del modelo desarrollado previamente. La definición de este factor en términos de la velocidad a  $E$  y  $H$  constantes ( $v^{EH}$ ) y de la velocidad de la onda a  $D$  y  $B$  constantes ( $v^{DB}$ ) es la siguiente:

$$\left(\frac{v^{EH}}{v^{DB}}\right)^2 = (1 - O_t^2) \quad (4.8)$$

Para un material homogéneo estas velocidades pueden ser obtenidas directamente de la curva de dispersión del primer modo. para el caso de los materiales que nos ocupan debemos hacer tender la componente  $k_3$  del vector de onda a cero como se discute en [75]. De igual manera  $v_{DB}$  es obtenida por el mismo procedimiento teniendo en cuenta sólo las interacciones netamente mecánicas entre las fases del compuesto. En el próximo epígrafe se mostrarán ejemplos de cálculo del factor de acoplamiento magnetoeléctrico para diferentes compuestos laminados de  $CoFe_2O_4$  y  $PZT - 5H$  por este



método. Donde se ha hecho uso de las curvas de dispersión calculadas en epígrafes anteriores para determinar la velocidad  $v^{EH}$  y se ha obtenido  $v^{DB}$  haciendo un proceso análogo, pero más sencillo en el que se ha considerado solamente las relaciones mecánicas entre las fases. Estos cálculos son comparados posteriormente con cálculos similares obtenidos por un método de homogeneización.

## 4.6 Factor de acoplamiento magneto-eléctrico obtenido mediante el método de homogeneización asintótica a doble escala

En este epígrafe haciendo uso del método de Homogeneización asintótica a doble escala (MHA) se calculará el factor de acoplamiento entre los campos eléctrico y magnético. El MHA utiliza dos coordenadas cartesianas, coordenadas globales  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$  en la que se da la posición del cuerpo y  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$  las coordenadas locales, de las cuales dependen las constantes del material. Se propone un desarrollo asintótico en torno al parámetro  $\alpha \ll 1$  para los desplazamientos y los potenciales.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_1^0(\mathbf{X}) + u_1^1(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \dots \\
 u_3 &= u_3^0(\mathbf{X}) + u_3^1(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \dots \\
 \phi &= \phi^0(\mathbf{X}) + \phi^1(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \dots \\
 \psi &= \psi^0(\mathbf{X}) + \psi^1(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Al hacer este desarrollo se obtienen los coeficientes efectivos y de aquí se determinó el coeficiente de acoplamiento en términos de la ración volumétrica [89]

En la siguiente figura se ve la comparación entre ambos métodos.

## 4.7 Conclusiones del Capítulo

- Se realizó y desarrolló un modelo para laminados magneto-electro-elástico con contacto imperfecto eléctrico y mecánico en las interfaces.
- Se obtuvieron curvas de dispersión para casos límites de las constantes de imperfección en laminados piezoeléctrico-piezomagnético.
- Se observó que para compuestos laminados piezoeléctrico-piezomagnético las condiciones de contacto imperfecto eléctrico y magnético no cambian las curvas de dispersión.

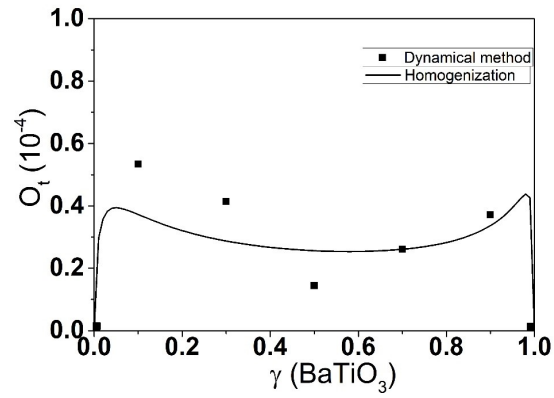


Figura 4.4: Coeficiente de acoplamiento .

- Se obtuvieron curvas de dispersión para diferentes fracciones volumétricas en laminados piezoeléctrico-piezomagnético, notándose que a medida que aumentaba la fase del piezoeléctrico se obtenían las curvas de dispersión a mayor frecuencia.
- A partir de la curva de dispersión se determinó el factor de acoplamiento magnetoeléctrico.
- El factor de acoplamiento electromecánico se comparó por uno calculado por el método de homogeneización asintótica.



## Capítulo 5

# Conclusiones

Los resultados de cada capítulo son presentados al final de cada uno. En este capítulo solo haremos énfasis en las conclusiones generales más importantes y le daremos respuesta a los objetivos del trabajo y a la hipótesis realizada.

1. Se propuso y desarrolló un modelo que considera contacto imperfecto de diferentes tipos (mecánico, eléctrico y magnético) en las interfases de compuestos laminados .
2. Se obtuvieron curvas de dispersión para piezocompuestos laminados con diferentes fracciones volumétricas y diferentes valores de las constantes de imperfección  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$ .
3. Al fijar la fracción volumétrica y la constante de imperfección  $\kappa_1$  se observó que las ondas son más energéticas, es decir se obtienen para valores de frecuencias más altos a medida que aumenta la imperfección por deslizamiento ( $\kappa_3$ ).
4. Se obtuvieron las curvas de dispersión para el caso ideal haciendo un paso al límite en nuestro modelo.
5. Las curvas obtenidas para el caso ideal coinciden con las reportadas en [78].
6. Se obtuvo el caso límite de láminas de piezoeléctrico y polímero independiente haciendo cero las

constantes de imperfección  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$ .

7. Las curvas de dispersión obtenidas para el caso límite de materiales deacoplados coinciden con las calculadas para láminas independientes. La propagación de ondas SV en láminas del piezoeléctrico fue descrita en [77] y nuestros resultados coinciden con reportados por estos autores.
8. A partir de los valores de las curvas de dispersión se calcularon los valores de desplazamientos  $u_1$  y  $u_3$  en toda la celda periódica.
9. Analizando los desplazamiento se pudo determinar el modo de onda predominante en varios puntos de la curvas de dispersión.
10. Comparando los desplazamientos en ambas fases se pudo determinar cuál es la fase que más contribuye en diferentes puntos de la curva de dispersión.
11. En las curvas de dispersión se obtuvieron zonas de corte evitable en las curvas de dispersión y se observó que las características de una onda eran transmitida a la otra y viceversa durante el cruce.
12. Se observó como la primera onda (la que se obtiene a menor frecuencia) es una onda principalmente longitudinal y es el piezoeléctrico el responsable de ella.
13. En compuestos con altas fracciones volumétricas del polímero se obtuvo una onda producto del desacople por la imperfección que no aparece en el compuesto con contacto ideal. Este modo que sí se observa en el caso límite de una lámina de polímero independiente va apareciendo a frecuencias más bajas a medida que aumenta  $\kappa_1$ .
14. Se estudió la forma del modo que no aparece en el compuesto ideal comprobando que efectivamente era una onda que se origina en el epoxi.

15. Haciendo uso de las curvas de dispersión se determinó una curva de  $k_t$  en función de la fracción volumétrica del piezoeléctrico.
16. Se comparó la curva de  $k_t$  obtenidas para diferentes valores de imperfección con puntos experimentales dados en [75].
17. Se validó el modelo con datos experimentales notándose como el hecho de considerar contacto imperfecto en las interfases permite un mayor acercamiento a la realidad física.
18. Se obtuvieron curvas de dispersión para casos límites de las constantes de imperfección en laminados de fases intercaladas piezoeléctrico-polímero.
19. Se observó que para compuestos laminados piezoeléctrico-polímero las condiciones de contacto imperfecto eléctrico planteadas no influyen significativamente en las propiedades del compuesto.
20. Se obtuvieron curvas de dispersión para casos límites de las constantes de imperfección en laminados de fases intercaladas piezoeléctrico-piezoeléctrico.
21. Se observa que las condiciones de contacto imperfecto eléctrico influyen visiblemente en los compuestos con ambas fases piezoeléctricas.
22. Se obtuvieron curvas de dispersión para casos límites de las constantes de imperfección en laminados piezoeléctrico-piezomagnético.
23. Se observó que para compuestos laminados piezoeléctrico-piezomagnético las condiciones de contacto imperfecto eléctrico y magnético planteadas no influyen en las curvas de dispersión del compuesto.
24. Se obtuvieron curvas de dispersión para diferentes fracciones volumétricas en laminados piezoeléctrico-piezomagnético, notándose que a medida que aumentaba la fase del piezoeléctrico se obtenían las curvas de dispersión a mayor frecuencia.

25. A partir de la curva de dispersión se determinó el factor de acoplamiento magnetoeléctrico.
  
26. El factor de acoplamiento electromecánico se comparó por uno calculado por el método de homogeneización asintótica.

# Bibliografía

- [1] C. Miehe, D. Vallicotti, and S. Teichtmeister, “Homogenization and multiscale stability analysis in finite magneto-electro-elasticity. Application to soft matter EE, {ME} and {MEE} composites,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 300, pp. 294–346, 2016.
- [2] S. Razavi and A. Shooshtari, “Nonlinear free vibration of magneto-electro-elastic rectangular plates,” *Composite Structures*, vol. 119, pp. 377 – 384, 2015.
- [3] L. Xin and Z. Hu, “Free vibration of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates,” *Composite Structures*, vol. 121, pp. 344 – 350, 2015.
- [4] M. Vinyas, “Vibration control of skew magneto-electro-elastic plates using active constrained layer damping,” *Composite Structures*, vol. 208, pp. 600 – 617, 2019.
- [5] M. Li, M. Liu, and L. Zhou, “The static behaviors study of magneto-electro-elastic materials under hygrothermal environment with multi-physical cell-based smoothed finite element method,” *Composites Science and Technology*, vol. 193, p. 108130, 2020.
- [6] L. Zhou, S. Ren, C. Liu, and Z. Ma, “A valid inhomogeneous cell-based smoothed finite element model for the transient characteristics of functionally graded magneto-electro-elastic structures,” *Composite Structures*, vol. 208, pp. 298 – 313, 2019.
- [7] B. Huang, H. S. Kim, J. Wang, and J. Du, “Free edge stress prediction for magneto-electro-elastic laminates using a stress function based equivalent single layer theory,” *Composites Science and Technology*, vol. 123, pp. 205 – 211, 2016.
- [8] V. Z. Parton, *Mathematical methods of the theory of elasticity*. MIR, 1984.
- [9] R. E. Newnham, P. Skinner, and L. E. Cross, “Conenctivity and piezoelectric-pyroelectric composites,” *Materials Res. Bull.*, vol. 13, pp. 525–536, 1978.
- [10] D. Escudero, “Materiales compuestos. aplicaciones,” *Consejero-Director de Materiales Avanzados Ingeniería y Aplicaciones(MAJA). Informe de construcción*, vol. 42, 2001.



- [11] R. F. Gibson, *Principles of Composite Material Mechanics*. CRC Press, third ed., 2011.
- [12] J. Bravo-Castillero, J. A. Otero, R. Rodríguez-Ramos, and A. Bourgeat, “Asymptotic homogenization of laminated piezocomposite materials,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 35, pp. 527–541, 1998.
- [13] F. J. Sabina, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, and R. Guinovart-Díaz, “Closed-form expressions for the effective coefficients of a fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. II: Piezoelectric and hexagonal symmetry,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, no. 7, pp. 1463 – 1479, 2001.
- [14] L. G. Fel, “Piezoelectricity and piezomagnetism: Duality in two-dimensional checkerboards,” *J. Math. Phys.*, vol. 43, p. 10.1063, 2002.
- [15] P. Pan and R. Heyliger, “Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 40, pp. 6859–6876, 2003.
- [16] J. Y. Li, “Uniqueness and reciprocity theorems for linear thermo-electro-magnetoelasticity,” *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, no. 56, pp. 35–43, 2003.
- [17] Perín, “Bounds and asymptotic results for the effective electromagnetic properties of a locally periodic distribution of conducting inclusions in a conducting matrix,” *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 34, pp. 139–157, 2004.
- [18] J. Y. Li and N. Rao, “Micromechanics of ferroelectric polymer-based electrostrictive composites,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, pp. 591–615, 2004.
- [19] Soh and Liu, “On the constitutive equations of magneto-electro-elastic solids,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, pp. 597–602, 2005.
- [20] S. Dong, F. Zhai, J. Bai, F. Li, and D. Viehland, “Magnetostrictive and magnetoelectric behavior of Fe-20 at. Ga/Pb(Zr, Ti) laminates,” *J. Appl. Phys.*, vol. 97, 2005.
- [21] X. Wang, X. Han, M. Lim, N. Singh, C. L. Gan, M. Jan, and P. S. Lee, “Nickel cobalt oxide-single wall carbon nanotube composite material for superior cycling stability and high-performance supercapacitor application,” *The Journal of Chemical Physics C*, pp. 12448–12454, 2012.
- [22] S. Dong, F. Zhai, J. Bai, F. Li, and D. Viehland, “Near-ideal magnetoelectricity in high-permeability magnetostrictive/piezofiber laminates with (2-1) connectivity,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 89, pp. 1063–1066, 2006.

- [23] A. M. León-Mecías, J. Bravo-Castillero, A. Mesejo-Chiong, L. D. Pérez-Fernández, and F. J. Sabina, “Improved bounds for the effective energy of nonlinear 3D conducting composites,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 53, pp. 164–170, 2007.
- [24] A. M. León-Mecías, L. D. Pérez-Fernández, J. Bravo-Castillero, and F. J. Sabina, “Tight bounds for three-dimensional non-linear incompressible elastic composites,” *International Journal of Engineering Sciences*, vol. 46, pp. 1087–1097, 2008.
- [25] F. Dinzart and H. Sabar, “Magneto-electro-elastic coated inclusion problem and its application to magnetic-piezoelectric composite materials,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 16, pp. 2393 – 2401, 2011.
- [26] A. A. Bsheer, “Advances in the smart materials applications in the aerospace industries,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, pp. 1029–1035, 2020.
- [27] R. E. Newnham, *Properties of material anisotropy, symmetry structure*. Pennsylvania University, 2005.
- [28] H. Kuo, C. Shih, and E. Pan, “Enhancing magnetoelectric effect in magneto-electro-elastic laminated composites via interface modulus and stress,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 195, pp. 66 – 73, 2020.
- [29] M. Bamdad, M. Mohammadimehr, and K. Alambeigi, “Analysis of sandwich timoshenko porous beam with temperature-dependent material properties: Magneto-electro-elastic vibration and buckling solution,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 25, no. 23-24, pp. 2875–2893, 2019.
- [30] M. Saadatfar, M. Zarandi, and M. Babaelahi, “Effects of porosity, profile of thickness, and angular acceleration on the magneto-electro-elastic behavior of a porous fgme rotating disc placed in a constant magnetic field,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 0, no. 0, p. 0954406220938409, 0.
- [31] H. Zhang, W. Wang, Y. Liu, and Z. Zhao, “Semi-analytic modelling of transversely isotropic magneto-electro-elastic materials under frictional sliding contact,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 75, pp. 116 – 140, 2019.
- [32] E. Arshid, A. Kiani, and S. Amir, “Magneto-electro-elastic vibration of moderately thick fg annular plates subjected to multi physical loads in thermal environment using gdq method by considering neutral surface,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, vol. 233, no. 10, pp. 2140–2159, 2019.

- [33] M. Vinyas, A. Sandeep, T. Nguyen-Thoi, F. Ebrahimi, and D. Duc, “A finite elementbased assessment of free vibration behaviour of circular and annular magneto-electro-elastic plates using higher order shear deformation theory,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 30, no. 16, pp. 2478–2501, 2019.
- [34] M.Vinyas, “Computational analysis of smart magneto-electro-elastic materials and structures: Review and classification,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2020.
- [35] O. Vafek, “Piezo-Magneto-Electric Effects in p-Doped Semiconductors,” in *APS Meeting Abstracts*, Mar. 2005.
- [36] Mostovoy, Scaramucci, Delaney, and Spaldin, “Microscopic theory of temperature-dependent magnetoelectric effect in  $Cr_2O_3$ ,” *Physics Review B*, 2010.
- [37] S. Mu, A. L. Wysocki, and K. D. Belashchenko, “First-principles microscopic model of exchange-driven magnetoelectric response with application to  $Cr_2O_3$ ,” *Phys. Rev. B*, vol. 89, p. 174413, May 2014.
- [38] C. A. F. Vaz, J. Hoffman, Y. Segal, J. W. Reiner, R. D. Grober, Z. Zhang, C. H. Ahn, and F. J. Walker, “Origin of the magnetoelectric coupling effect in  $Pb(Zr_{0.2}Ti_{0.8})O_3/La_{0.8}Sr_{0.2}MnO_3$  multiferroic heterostructures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 127202, Mar 2010.
- [39] Z. V. Gareeva and A. K. Zvezdin, “Effect of magnetoelectrical interactions on the multiferroic domain walls,” *Physics of the Solid State*, vol. 52, no. 8, pp. 1714–1721, 2010.
- [40] P. Tolédano, B. Mettout, W. Schranz, and G. Krexner, “Directional magnetoelectric effects in  $MnWO_4$ : magnetic sources of the electric polarization,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 22, no. 6, p. 065901, 2010.
- [41] E. Vila, “Nuevos materiales con potenciales propiedades magnetoeléctricas,” in *X Congreso Nacional de Materiales*, Donostia San Sebastián, 2008.
- [42] M. Avellaneda and G. Harshé, “Magnetoelectric effect in piezoelectric/magnetostrictive multi-layer (2-2) composites,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 5, no. 4, pp. 501–513, 1994.
- [43] Y. Benveniste, “Magnetoelectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases,” *Phys. Rev. B*, vol. 51, pp. 16424–16427, Jun 1995.
- [44] J. Aboudi, “Micromechanical prediction of the effective coefficients of thermo-piezoelectric multiphase composites,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 9, pp. 713–722, 1998.

- [45] Bravo-Castillero, Rodríguez-Ramos, Guinovart-Díaz, Mechkour, Otero, Cabanas, and Sabina, “Effective properties of multilayered magneto-electro-elastic composite with coupled thermal effects,” *Proceeding Then Pan American Congress of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. 25–28, 2008.
- [46] L. Li and M. L. Dunn, “Micromechanics of magneto-electro-elastic composite materials: Average fields and effective behaviour,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 9, pp. 404–416, 1998.
- [47] A. Balvantin and A. B. J. Y. Kim, “A study of helical lamb wave propagation on two hollow cylinders with imperfect contact conditions,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1511, no. 1, 2013.
- [48] J. A. Otero, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Daz, F. J. Sabina, and G. Monsivais, “Semi-analytical method for computing effective properties in elastic composite under imperfect contact,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, no. 34, pp. 609 – 622, 2013.
- [49] Y. Espinosa-Almeyda, H. Camacho-Montes, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Daz, J. Lpez-Realpozo, J. Bravo-Castillero, and F. Sabina, “Influence of imperfect interface and fiber distribution on the antiplane effective magneto-electro-elastic properties for fiber reinforced composites,” *International Journal of Solids and Structures*, pp. –, 2017.
- [50] A. Manapova, “Differentiation of the functional in an optimization problem for diffusion and convective transfer coefficients of elliptic imperfect contact interface problems,” *AIP Conference Proceedings*, 2016.
- [51] X.-Q. Fang, H.-X. Jin, J.-X. Liu, and M.-J. Huang, “Imperfect bonding effect on dynamic response of a non-circular lined tunnel subjected to shear waves,” *Tunnelling and Underground Space Technology*, vol. 56, pp. 226 – 231, 2016.
- [52] S. D. Akbarov, M. Negin, and C. Ipek, “Effect of imperfect contact on the dispersion of generalized rayleigh waves in a system consisting of a prestressed layer and a prestressed half-plane,” *Mechanics of Composite Materials*, vol. 51, no. 3, pp. 397–404, 2015.
- [53] J. C. López-Realpozo, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, J. Otero, F. J. Sabina, F. Lebon, S. Dumont, and I. Sevostianov, “Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 6, pp. 1253 – 1262, 2014.
- [54] R. Rizzoni and F. Lebon, “Imperfect interfaces as asymptotic models of thin curved elastic adhesive interphases,” *Mechanics Research Communications*, vol. 51, pp. 39 – 50, 2013.

- [55] S. Dumont, F. Lebon, R. Rizzoni, and M. Serpilli, *Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials. Advanced Structured Materials*, vol. 132, ch. Derivation of Imperfect Interface Laws for Multi-Physic Composites by a Multiscale Approach: Theoretical and Numerical Studies., pp. 323–340. Springer, Cham, 2020.
- [56] L. Castro, D. Kapanadze, and E. Pesetskaya, “Effective conductivity of a composite material with stiff imperfect contact conditions,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 38, no. 18, pp. 4638–4649, 2015. mma.3423.
- [57] R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. López-Realpozo, J. Bravo-Castillero, J. Otero, F. Sabina, and F. Lebon, “Effective properties of periodic fibrous electro-elastic composites with mechanic imperfect contact condition,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 73, pp. 1 – 13, 2013.
- [58] A. Balvantn, J. D.-D. la Pea, P. Limon-Leyva, and E. Hernández-Rodríguez, “Study of guided wave propagation on a plate between two solid bodies with imperfect contact conditions,” *Ultrasonics*, vol. 83, pp. 137 – 145, 2018. Ultrasonic advances applied to materials science.
- [59] H.-Y. Kuo and C.-Y. Chen, “Decoupling transformation for piezoelectricpiezomagnetic fibrous composites with imperfect interfaces,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 54, pp. 111 – 120, 2015.
- [60] J. A. Otero, R. Rodríguez-Ramos, G. Monsivais, C. Stern, and F. Lebon, “Interfacial waves between piezoelectric and piezomagnetic half-spaces with magneto-electro-mechanical imperfect interface,” *Philosophical Magazine Letters*, vol. 93, no. 7, pp. 413–421, 2013.
- [61] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoría de la elasticidad*, vol. 7. Reverté, 1969.
- [62] R. J. Atkin and N. Fox, *An Introduction to the Theory of Elasticity*. Dover, 1980.
- [63] B. A. Auld, *Acoustic fields and waves in solids*. Krieger Pub Co; 2 Sub edition, 1990.
- [64] Stein and Wysession, *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*. Blackwell Publishing, 2003.
- [65] H. J. Weber and G. B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists, 6th Edition*. Academic Press, 6th ed., 2005.
- [66] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, vol. 1 of *International Series in Pure and Applied Physics*. McGraw-Hill Book Company, 1953.

- [67] J. Virieux, “P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method,” *Geophysics*, 1986.
- [68] B. A. Auld, “Elastic wave propagation in three-dimensional periodic composite materials,” *J. Physique*, vol. 45, pp. C5–159–C5–163, 1984.
- [69] A. V. Hidalgo, *Sismicidad y tectónica en el límite de placas del Caribe: noreste de Venezuela e Hispaniola*. PhD thesis, Institut de Ciències de la Terra “Jaume Almera”. CSIC, Barcelona, 1995.
- [70] E. Buforn, “Métodos para la determinación del mecanismo focal de los terremotos,” *Revistas Científicas Complutenses, Física de la Tierra*, 1994.
- [71] S. A. Rubio, “El efecto local sobre el movimiento sísmico del suelo: Fenomenología y resultados recientes,” 1996.
- [72] J. G. Anderson, P. Bodini, J. N. Brune, J. Prince, S. K. Singh, R. Quaas, and M. Onate, “Strong ground motion from the michoacan, mexico, earthquake,” *Science*, vol. 233, no. 4768, pp. 1043–1049, 1986.
- [73] J. Flores, O. Novaro, and T. H. Seligman, “Possible resonance effect in the distribution of earthquake damage in Mexico City,” *Nature*, vol. 236, pp. 783–785, 1987.
- [74] I. P. Tello-Guerrero, H. González-Alvarez, and A. E. Calle-Ochoa, “Modelado de propagación de ondas en medios porosos saturados con fluidos,” *Mecánica Computacional*, vol. 28, no. 27, 2009.
- [75] Q. M. Zhang and X. Geng, “Dynamic modeling of piezoceramic polymer composite with 2-2 connectivity,” *Journal of Applied Physics*, pp. 6014–6016, 1994.
- [76] X. Geng and Q. M. Zhang, “Dynamic behavior of periodic piezoceramic-polymer composite plates,” *Applied Physics Letter*, pp. 3093–3095, 1995.
- [77] Q. M. Zhang and X. Geng, “Acoustic properties of the interface of a uniform medium-2-2 piezocomposite and the field distributions in the composite,” *Japanese Journal of Applied Physics*, 1997.
- [78] X. Geng and Q. M. Zhang, “Evaluation of piezocomposites for ultrasonic transducer applications influence of the unit cell dimensions and the properties of constituents on the performance of 2-2 piezocomposites,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 44, no. 4, pp. 857–872, 1997.

- [79] S. Santra, “Reflection of P-wave and SV-wave in a generalized two temperature thermoelastic half-space,” *Internacoinal Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 19, no. 4, pp. 735–754, 2014.
- [80] V. Gieev, M. D. Trifunac, and N. Orbovia, “Two-dimensional translation, rocking and waves in a building during soil-structure interaction excited by a planeear thquake SV-wave pulse,” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2016.
- [81] A. ling Wang and F. ping Liu, “The shift time of SV-wave on the free surface of stratum,” *Applied Mechanics and Materials*, vol. 488-489, pp. 530–533, 2014.
- [82] Q. Min, P. Chaoquan, L. Yu, Z. Wangming, X. Mili, and F. Xinpeng, “Application of P-P and P-SV wave pre-stack joint inversion based on 3D3C seismic in tight sandstone gas reservoirs,” *Society of Exploration Geophysicists*, 2015.
- [83] W. Kang and J. Cheng, “Propagating pure wave modes in 3d general anisotropic media: PART IISV and SH Wave,” *Society of Exploration Geophysicists*, 2012.
- [84] L. Liu, Y.-D. Pan, and Z. Zhong, “The study of P-SV wave prpagation in the periodic piezoelectric layered material,” *Symposium on Piezoelectricity, Acoustic wave, and Device Applications*, 2013.
- [85] L. Liu, J. Zhao, Y. Pan, B. Bonello, and Z. Zhong, “Theoretical study of SH-wave propagation in periodically-layered piezomagnetic structure,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 85, 2014.
- [86] X. Guo and P. Wei, “Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses,” *Ultrasonics*, vol. 66, pp. 72–85, 2016.
- [87] X. Guo, P. Wei, M. Lan, and L. Li, “Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with functionally graded interlayers,” *Ultrasonics*, vol. 70, pp. 158–171, 2016.
- [88] Berlincourt, Curran, and J. H., *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. In Physical Acoustics: Principles and Methods*, vol. 1. Academic Press: New York, 1964.
- [89] J. H. Cabanas, J. A. Otero, J. B. Castellero, R. Rodríguez-Ramos, and G. M. Galindo, “Magneto-electro-elastic layered composite with variations in the magnetization orientation,” *Nova Scientia*, vol. 2010, no. 4, pp. 58–76, 2010.