



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Una introducción a las regiones  
fundamentales de los grupos cíclicos  
loxodrómicos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Angel Andrew Ortíz Guerrero

TUTOR

Antonio Lascurain Orive



Ciudad Universitaria, CD. MX. 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

- **Apellido paterno:** Ortíz
- **Apellido materno:** Guerrero
- **Nombre(s):** Angel Andrew
- **Teléfono:** 5510571997
- **Universidad Nacional Autónoma de México**
- **Facultad de Ciencias**
- **Carrera:** Matemáticas
- **Número de cuenta:** 313207259

### 2. Datos del tutor

- **Grado:** Doctor
- **Nombre(s):** Antonio
- **Apellido paterno:** Lascurain
- **Apellido materno:** Orive

### 3. Datos del sinodal 1

- **Grado:** Doctor
- **Nombre(s):** Ernesto
- **Apellido paterno:** Rosales
- **Apellido materno:** González

### 4. Datos del sinodal 2

- **Grado:** Doctor
- **Nombre(s):** Jefferson Edwin
- **Apellido paterno:** King
- **Apellido materno:** Dávalos

### 5. Datos del sinodal 3

- **Grado:** Maestro en Ciencias
- **Nombre(s):** José Antonio
- **Apellido paterno:** Gómez
- **Apellido materno:** Ortega

### 6. Datos del sinodal 4

- **Grado:** Doctor
- **Nombre(s):** Raybel Andrés
- **Apellido paterno:** García
- **Apellido materno:** Ancona

### 7. Datos del trabajo escrito

- **Título:** Una introducción a las regiones fundamentales de los grupos cíclicos loxodrómicos
- **Número de paginas:** 64
- **Año:** 2020



# Agradecimientos, dedicatorias y sentimentalismos

[Inserte agradecimiento o dedicatoria aquí].

Lo anterior no es ningún error de compilación o un descuido del autor al momento de escribir esta parte de su trabajo. Pero a continuación, estimado lector, si es de su interés sabrá el por qué de ese primer párrafo.

Realmente no sé cómo empezar pero, aunado a que estoy improvisando esta escritura (más no las ideas que quiero transmitir), haré mi mejor esfuerzo para expresar algo de mi pe(n)sar. Es difícil enfatizar los agradecimientos a personas en concreto ya que de algún modo al ser agradecido con unas sería desagradecido con otras y el propósito de esta parte es agradecer, ¿No?. Con base en esto, hay muchísimas personas que hicieron posible este trabajo que es imposible nombrarlas aquí, ya sea porque su contribución aunque elemental me pasará desapercibida, o porque no me acuerdo. Sin embargo, es preciso hacer una distinción a dos grupos de personas que, a pesar de mi presunto nihilismo, quiero immortalizar aunque sea en este pequeño texto, pues siento desde lo más humano de mí que se lo merecen. Estos dos grupos de personas son ciertamente la misma clase, pero en contextos distintos. Me refiero a mi familia central y a la academia.

En primer lugar mi familia central. Este último adjetivo se debe a que hablaré de mis papás y mis hermanos únicamente. ¿Cómo empezar? Este grupo es muy peculiar, pues entre rencores, gritos, remordimientos, malos entendidos siempre ha habido un ideal en la familia: salir adelante de la forma más humilde posible. Mis papás, aunque contradictorios en muchos sentidos han plantado el germen de sus ideales y amor que ahora está dentro de mí y en adelante es mi responsabilidad seguir cultivando. Gracias a ellos tengo una idea de lo que quiero (y no quiero) de mi vida y no habrá forma alguna de regresarles siquiera algo del tiempo (el activo más valioso) que me dieron sin

esperar nada a cambio. En verdad agradezco todas las ideas, valores y moral que implantaron en mí. A mis hermanos, no sé qué decir. Muchas gracias por estar ahí. Sería una mentira decir que todos ellos estuvieron ahí cuando los necesité, pues ninguna persona es incondicional, por bondadosa y pura que sea. Empero, agradezco lo compartido conmigo, esos juegos, esas risas, esos enojos. Al final de todo, es lo que define las relaciones humanas.

El segundo grupo es la academia. Considero que ambos grupos son de la misma clase ya que considero a la facultad como una segunda casa donde podía distraerme de todas mis telarañas mentales y enredarme en otras; y a mis contados amigos, mis profesores, mis maestros, a todos ellos los considero como una segunda familia, de quienes aprendí tanto y ellos se ofrecieron de manera tan desinteresada para ayudarme a llegar aquí y ahora. Todos mis profesores están en mi memoria y agradezco a todos ellos. En particular, agradezco a Antonio Lascurain Orive.

A todos ellos (mis familias), les agradezco el creer en mí más de lo que yo he creído en mí mismo.

Finalmente, dedico este trabajo a usted lector. Creo que esto está demás pues todo texto debe estar dedicado a este personaje. Por sólo leer estas líneas, agradezco su tiempo y si usted siente que en este trabajo debe ser agradecido, siéntase en toda la libertad de insertar algún agradecimiento o dedicatoria. Ya sea por interés o por morbo, el sólo llegar hasta aquí merece un agradecimiento de mi parte.

# Introducción

El estudio de la topología de las variedades de dimensión tres, fue impactado de manera luminosa al encontrar Jørgensen y Thurston que casi todas las posibles estructuras de las 3 variedades son hiperbólicas (cf. [2]). La literatura en los últimos 40 años es vasta (cf. [5]). Estos trabajos también impactan otras áreas, por ejemplo, al existir notables y profundas relaciones con la teoría de números y la dinámica holomorfa (cf. [3] y [4]). En esta dirección las variedades hiperbólicas de dimensión 3 (posibles candidatos a *formas del universo*) se obtienen como el cociente de un grupo kleiniano sin torsión actuando en el espacio hiperbólico tridimensional

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\},$$

como isometrías hiperbólicas. Resulta muy ilustrativo entender cómo se deforma geométrica y algebraicamente una transformación loxodrómica para convertirse en una parabólica. Al iterar estas funciones loxodrómicas mueven los puntos en  $\mathbb{H}^3$  a través de espirales invariantes hacia los puntos fijos atractor (o repulsor). En estos movimientos hiperbólicos, las espirales rodean al eje (geodésica invariante) que une los puntos fijos.

En particular, estudiar variaciones de los poliedros fundamentales (o regiones en la esfera de Riemann) para grupos cíclicos loxodrómicos, al cambiar la traza del generador, es ciertamente muy ilustrativo. Es notable el hecho de que no hay cotas para el número de caras visibles de dichos poliedros en  $\mathbb{H}^3$  y en la esfera de Riemann solamente hay 2, 4 o 6 lados visibles.

En esta tesis se discuten algunos resultados probados por Jørgensen sobre regiones de Ford para grupos cíclicos loxodrómicos. También se prueban algunos resultados para regiones de Dirichlet. El trabajo es introductorio, la primera parte es tridimensional mostrando hechos para las regiones de Ford en  $\mathbb{H}^3$  y la última parte es bidimensional, concentrándose solamente en la esfera de Riemann.

En el primer capítulo se definen los conceptos básicos con los que se trabajará en el resto de la tesis, como la clasificación de los elementos del grupo  $PSL_2(\mathbb{C})$  por su traza  $\tau$ . Se deducen formalmente las extensiones de Poincaré. Se describe la geometría de las transformaciones loxodrómicas actuando en  $\mathbb{H}^3$ , y la existencia de espirales infinitas que rodean a la geodésica que una los puntos fijos. Se deduce una expresión (1.6) que permite encontrar un representante en  $PSL_2(\mathbb{C})$  adecuado para cada una de las clases de conjugación de una transformación loxodrómica dada y se obtiene uno de los valores propios en términos de cualquier traza.

En el segundo capítulo se define el poliedro de Dirichlet para la acción de un grupo actuando en  $\mathbb{H}^3$ . Se define también el correspondiente dominio en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y se encuentran los centros y radios de las superficies equidistantes (Lemas 2.1.1 y 2.1.2, respectivamente) que son frontera de este dominio. También se define el poliedro de Ford para la acción de un grupo de  $\mathbb{H}^3$ . Para el caso en que el grupo sea cíclico loxodrómico se muestra que el dominio de Ford puede ser pensado como *el límite del dominio de Dirichlet cuando su centro tiende a infinito* (Teorema 2.2.1). Por último se da una lista de notación y terminología que se usará a lo largo del trabajo.

En el capítulo 3 se analizan los poliedros de Ford y Dirichlet para un grupo cíclico loxodrómico y los correspondientes dominios en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se prueba que estos dominios son simétricos y qué caras visibles se aparean (Teorema 3.0.2, Teorema 3.0.4 y Proposición 3.0.5). Se analizan los casos de tangencias de los hemisferios (Proposición 3.0.9), lo cual será esencial para saber que al deformar la traza, nuevos lados en  $\widehat{\mathbb{C}}$  solamente pueden surgir de los vértices.

En el capítulo 4 se prueba que si la norma de la traza  $\tau$  es mayor que 2 todos los círculos isométricos (o esferas) son disjuntos (Teorema 4.1.2). Si  $|\tau| = 2$  los círculos isométricos de los generadores son tangentes en el punto  $\frac{1}{2}$  (Teorema 4.1.3). El caso  $|\tau| < 2$  es más complejo. Se prueba que los dominios de Ford son conexos y con un número finito de lados (Proposición 4.1.4 y Teorema 4.1.5). Usando la simetría y la deformación de los poliedros, un análisis combinatorio basado en los resultados previos establece que si  $|\tau| < 2$ , entonces las únicas posibles secuencias de lados son  $n, m, -n, -m$  o  $n, n + m, m, -n, -n - m, -m, n, m \in \mathbb{N}$  (Lemas 4.1.7 y 4.1.6). Es decir, los dominios de Ford en  $\widehat{\mathbb{C}}$  tienen 4 o 6 lados (Teorema 4.1.8). Este hecho tiene consecuencias aritméticas, a través de las sucesiones de Farey, lo cual induce bellas figuras en el plano de las trazas (cf. [6] y [7]).

También en esta última parte se exhiben algunos ejemplos de polígonos de 2, 4 y 6 lados para diferentes valores de la traza elaborados en GeoGebra.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Dominios fundamentales</b>	<b>21</b>
2.1. Dominios de Dirichlet . . . . .	21
2.2. Dominios de Ford . . . . .	28
2.3. Notación general y terminología . . . . .	30
<b>3. Geometría combinatoria de los dominios fundamentales</b>	<b>33</b>
<b>4. Dominios de Ford en <math>\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3</math></b>	<b>45</b>
4.1. Generadores loxodrómicos . . . . .	46
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

Las funciones de variable compleja de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  se les llama de Möbius. Estas funciones también están definidas en los puntos del plano complejo extendido  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de la siguiente manera:

- si  $c = 0$ , se define  $T(\infty) = \infty$ .
- si  $c \neq 0$ , se define  $T(\infty) = \frac{a}{c}$  y  $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ .

Si  $ad - bc = k$ , la transformación

$$z \mapsto \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}}$$

tiene la misma regla de correspondencia que la transformación original, pero

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1.$$

De este hecho se sigue que todas las transformaciones de Möbius pueden definirse por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

A este grupo de matrices se le denota por  $SL_2(\mathbb{C})$ , el centro de este grupo consiste de las matrices  $\pm Id$ . Al cociente de  $SL_2(\mathbb{C})$  sobre su centro se le llama su proyectivización y se le denota como  $PSL_2(\mathbb{C})$ .

Una primera clasificación de estas transformaciones se obtiene al considerar los puntos fijos de éstas en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Obsérvese que si  $T$  es de Möbius y no es la identidad, entonces  $T$  fija a lo más dos puntos.

**Definición 1.** *Sea  $T$  de Möbius tal que fija exactamente un punto en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces a  $T$  se le llama parabólica.*

No es difícil probar el siguiente resultado, su demostración puede consultarse en [9], p. 21-22.

**Proposición 1.0.1.** *Sea  $T$  de Möbius, entonces:*

1. *Si  $T$  es parabólica,  $T$  es conjugada en  $PSL_2(\mathbb{C})$  a una traslación.*
2. *Si  $T$  no es parabólica,  $T$  es conjugada en  $PSL_2(\mathbb{C})$  a una transformación de la forma  $z \rightarrow \alpha z$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .*

Se definen a continuación los multiplicadores de una transformación de Möbius.

**Definición 2.** *Sea  $T$  una transformación de Möbius distinta de la identidad.*

- *Si  $T$  es parabólica se define su multiplicador como 1.*
- *Si  $T$  es conjugada a una transformación de la forma  $z \rightarrow \alpha z$ ,  $\alpha \neq 0, 1$ , a los números  $\alpha$  y  $\frac{1}{\alpha}$  se les llaman los multiplicadores de  $T$ .*

**Definición 3.** *Sea  $A$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , una densidad en  $A$  es una función continua  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

Las densidades son útiles al momento de medir longitudes de curvas. Si  $\delta$  es una curva de clase  $C^1$  en  $A$ , se define la  $\lambda$ -longitud de  $\delta$ , denotada por  $l_\lambda(\delta)$ , como

$$l_\lambda(\delta) = \int_a^b \lambda(\delta(t)) |\delta'(t)| dt,$$

donde  $\delta : [a, b] \rightarrow A$ . Esta definición se extiende a curvas  $C^1$  por tramos. Esta medición permite definir la distancia entre dos puntos.

**Definición 4.** Sea  $\lambda$  una densidad en una región  $A$  y  $z_1, z_2 \in A$ , se define la  $\lambda$ -distancia de  $z_1$  a  $z_2$ , denotada por  $\rho_\lambda$  como

$$\rho_\lambda(z_1, z_2) = \inf_{\delta} l_\lambda(\delta),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas  $\delta \in C^1$  por tramos que unen  $z_1$  con  $z_2$ .

**Definición 5.** El plano superior  $\mathbb{H}^2$  provisto con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}$$

se le llama el plano hiperbólico y a esta métrica se le llama la métrica hiperbólica.

A fin de conocer el grupo de isometrías del plano hiperbólico se definirá el grupo general de Möbius actuando en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se denota  $w^*$  a  $\frac{w}{|w|^2}$ , donde  $w \in \mathbb{C}$  y por  $C(a, r)$  al círculo

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}.$$

**Definición 6.** Se define la reflexión en el círculo  $C(a, r)$  de la siguiente manera.

$$\varphi(z) = \begin{cases} a + r^2(z - a)^*, & \text{si } z \in \mathbb{C}, z \neq a, \\ \infty, & \text{si } z = a, \\ a, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Para definir las reflexiones en rectas se identifica  $\widehat{\mathbb{C}}$  con  $\widehat{\mathbb{R}}^2$  y se usa el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^2$ . Con este producto los puntos de una recta en  $\widehat{\mathbb{R}}^2$  están determinados por la siguiente expresión

$$R(a, t) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \cdot a = t, a \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}, t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Si el vector normal es unitario, entonces se puede definir la reflexión sobre esta recta como sigue.

**Definición 7.** Se define la reflexión en la recta  $R(a, t)$  como la función  $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^2$ , dada por

$$\varphi(z) = \begin{cases} z - 2(z \cdot a - t)a, & \text{si } z \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

donde  $|a| = 1$ .

Ahora se puede definir el grupo general de Möbius.

**Definición 8.** El grupo general de Möbius actuando en  $\widehat{\mathbb{R}^2}$ , denotado por  $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ , consiste en todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en círculos o rectas.

Estas definiciones se aplican también en  $\mathbb{R}^n$ . Se denota por  $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$  al subgrupo formado por las funciones que son composición de un número par de reflexiones. Se demuestra sin mucha dificultad los siguientes resultados (c.f. [9], p. 69-70).

**Lema 1.0.2.** La homotecia  $z \rightarrow kz$  es la composición de una reflexión en el círculo unitario, seguida de la reflexión en el círculo  $C(0, \sqrt{k})$ .

**Lema 1.0.3.** La traslación  $z \rightarrow z + b$  es la composición de la reflexión en la recta  $R(\frac{b}{|b|}, 0)$ , seguida de la reflexión en la recta  $R(\frac{b}{|b|}, \frac{|b|}{2})$ .

**Teorema 1.0.4.**  $PSL_2(\mathbb{C}) = M(\widehat{\mathbb{R}^2})$ .

Se denota por  $\hat{a}$  al punto en  $\mathbb{R}^3$ ,  $(a, 0)$ , donde  $a \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\varphi$  es la reflexión en el círculo  $C(a, r)$  (o en la recta  $R(a, t)$ ), se denota por  $\hat{\varphi}$  a la reflexión en la esfera  $S(\hat{a}, r)$  (o en el plano  $P(\hat{a}, t)$ ). A estas últimas transformaciones se les llama la extensión de Poincaré de  $\varphi$ .

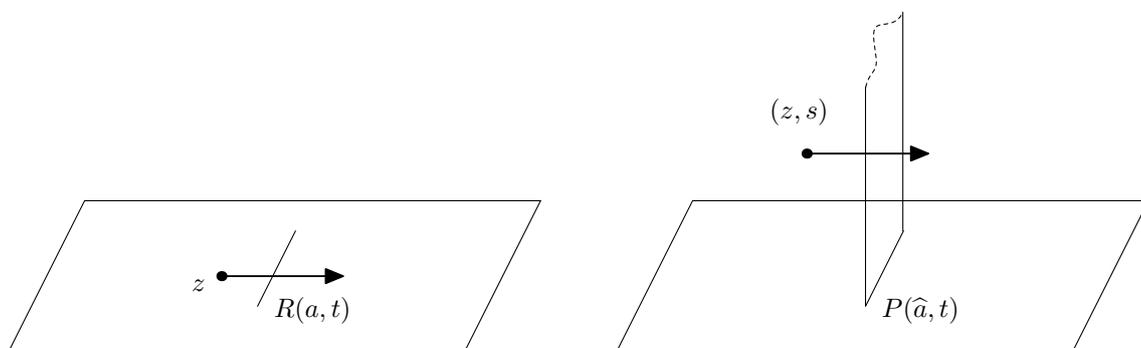


Figura 1.1: Extensión de Poincaré de una reflexión sobre la recta  $R(a, t)$

**Definición 9.** Dada  $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ ,  $\varphi = \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n$ , donde  $\varphi_j$  es la reflexión en un círculo o en una recta,  $j = 1, \dots, n$ , se define su extensión de Poincaré como

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2\dots\hat{\varphi}_n.$$

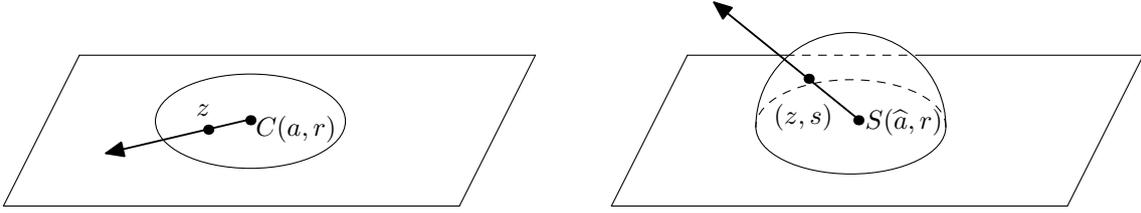


Figura 1.2: Extensión de Poincaré de una reflexión sobre el círculo  $C(a, r)$

Se sigue fácilmente (cf. [1] p. 31) que esta definición no depende de la descomposición de  $\varphi$ . Si se denota por  $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$  al subgrupo de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^3})$ , que consiste en las extensiones de Poincaré de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ , resulta que el grupo completo de isometrías del espacio hiperbólico es precisamente  $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$  (cf. [13] p. 129-130).

En este trabajo se usará el modelo del semiespacio superior:

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\},$$

provisto de la métrica definida por la densidad

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}.$$

Su frontera es la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La distancia hiperbólica  $\rho(x, y)$  entre dos puntos  $x, y \in \mathbb{H}^3$  está determinada por:

$$\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_3y_3}, \quad (1.1)$$

donde  $|\cdot|$  denota la norma euclidea en  $\mathbb{R}^3$ , véase [1] p. 130. El grupo de isometrías que preservan la orientación en  $\mathbb{H}^3$ , esto es las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius complejas (cf [1] p. 34), puede ser identificado con

$$PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C}) / \pm I$$

Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ , entonces la transformación asociada a su acción en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . De ahora en adelante se denotará tanto la matriz como a la transformación con el mismo símbolo. Si  $c \neq 0$ ,  $\gamma$  puede ser expresada como

$$\gamma(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{-1}{c(cz + d)} + \frac{a}{c}$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{-c^2 \left( z + \frac{d}{c} \right)} + \frac{a}{c}.$$

Es decir, dichas transformaciones pueden ser expresadas como composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Para conocer la extensión de Poincaré de cualquier transformación, esto es la acción en  $\mathbb{H}^3$ , se describirá la extensión de estas últimas transformaciones, ya que componiendo dichas extensiones se tendrá la extensión buscada.

Para conocer la extensión de Poincaré de la transformación  $z \mapsto \alpha z$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , usando el Lema 1.0.2, es conveniente pensarla como la composición de la reflexión en  $S(0, 1)$  seguida de la reflexión en  $S(0, \sqrt{\alpha})$ , cuyas reglas de correspondencia son

$$(z, t) \mapsto (z, t)^*$$

y

$$(z, t) \mapsto \alpha(z, t)^*,$$

respectivamente. Luego, la extensión buscada es

$$(z, t) \mapsto (\alpha z, \alpha t).$$

Para la transformación  $z \mapsto z + b$ , usando el Lema 1.0.3, se piensa como composición de las reflexiones en  $P(\frac{b}{|b|}, 0)$  y  $P(\frac{b}{|b|}, \frac{|b|}{2})$ , cuyas reglas de correspondencia como extensiones de Poincaré son

$$(z, t) \mapsto (z - 2(z \cdot b/|b|)b/|b|, t)$$

y

$$(z, t) \mapsto (z - 2(z \cdot b/|b| - 2)b/|b|, t),$$

respectivamente. Luego, la extensión buscada es

$$(z, t) \mapsto (z + b, t).$$

Para la transformación  $z \mapsto \frac{1}{z}$  es conveniente pensarla como composición de dos transformaciones, a saber  $z \mapsto \bar{z}$  y  $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ , cuyas extensiones de Poincaré son

$$(z, t) \mapsto (\bar{z}, t)$$

y

$$(z, t) \mapsto \left( \frac{z}{|z|^2 + t^2}, \frac{t}{|z|^2 + t^2} \right),$$

respectivamente. Luego, la extensión de Poincaré de  $z \mapsto \frac{1}{z}$  es

$$(z, t) \mapsto \left( \frac{\bar{z}}{|z|^2 + t^2}, \frac{t}{|z|^2 + t^2} \right).$$

Finalmente, si  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $c \neq 0$ , expresándola como composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación  $z \mapsto \frac{1}{z}$  se encuentra su extensión de Poincaré. En lo que sigue la transformación arriba de las flechas representa la extensión del tipo de transformación que se está aplicando:

$$(z, t) \xrightarrow{z \mapsto z + \frac{d}{c}} \left( z + \frac{d}{c}, t \right) \xrightarrow{z \mapsto -c^2 z} \left( -c^2 \left( z + \frac{d}{c} \right), |c|^2 t \right) = (-c(cz + d), |c|^2 t),$$

$$(-c(cz + d), |c|^2 t) \xrightarrow{z \mapsto \frac{1}{z}} \left( \frac{\overline{-c(cz + d)}}{|c|^2(|cz + d|^2 + |c|^2 t^2)}, \frac{|c|^2 t}{|c|^2(|cz + d|^2 + |c|^2 t^2)} \right)$$

$$= \left( \frac{\overline{-(cz + d)}}{c(|cz + d|^2 + |c|^2 t^2)}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \right)$$

$$\xrightarrow{z \mapsto z + \frac{a}{c}} \left( \frac{\overline{-(cz + d)}}{c(|cz + d|^2 + |c|^2 t^2)} + \frac{a}{c}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \right)$$

$$= \left( \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \right),$$

donde la última igualdad se obtiene observando que

$$\begin{aligned} \frac{-\overline{(cz+d)}}{c(|cz+d|^2+|c|^2t^2)} + \frac{a}{c} &= \frac{-\overline{(cz+d)} + a(|cz+d|^2+|c|^2t^2)}{c(|cz+d|^2+|c|^2t^2)} \\ &= \frac{\overline{(cz+d)}(a(cz+d)-1) + ac\bar{c}t^2}{c(|cz+d|^2+|c|^2t^2)} = \frac{\overline{(cz+d)}(az+b)c + ac\bar{c}t^2}{c(|cz+d|^2+|c|^2t^2)} \\ &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}t^2}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}, \end{aligned}$$

ya que  $a(cz+d)-1 = (az+b)c$  por la condición unimodular.

$$\therefore \gamma(z, t) = \left( \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}t^2}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}, \frac{t}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \right), \quad \text{si } c \neq 0. \quad (1.2)$$

De manera más sencilla se concluye también

$$\gamma(z, t) = \left( \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \left| \frac{a}{d} \right| t \right) \quad \text{si } c = 0.$$

son las extensiones buscadas.

Las transformaciones de Möbius complejas también se pueden pensar como funciones de  $\mathbb{C}^2$  en  $\mathbb{C}^2$  a las que se le llama *homogéneas*. Si  $z = \frac{z_1}{z_2}$  y  $w = \frac{w_1}{w_2}$ ,  $z_2, w_2 \neq 0$  (si  $z_2 = 0$  se toma  $z = \infty$ ), se tiene que si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

entonces  $T(z) = w$ , donde  $T$  es el elemento de  $PSL_2(\mathbb{C})$  asociado a la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Si  $z_2 \neq 0$  y  $w_2 \neq 0$ , esta afirmación se sigue de efectuar la multiplicación en (1.3), pues se tiene

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2},$$

por lo que

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{a\frac{z_1}{z_2} + b}{c\frac{z_1}{z_2} + d} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Si  $c \neq 0$  y  $z_2 = 0$ , entonces  $z = \infty$ , por lo que

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{az_1}{cz_1} = \frac{a}{c} = T(\infty).$$

Si  $c \neq 0$  y  $w_2 = 0$ , no puede ocurrir que  $z_2 = 0$ , ya que de otra manera  $\infty$  sería un punto fijo de  $T$ , por lo que de la ecuación  $cz_1 + dz_2 = 0$  se sigue que  $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{d}{c}$ . El caso cuando  $c = 0$  se sigue de manera análoga.

También es sencillo probar el siguiente resultado: Sea  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  con dos valores propios distintos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y vectores propios  $(u_1, u_2)$  y  $(v_1, v_2)$ , respectivamente. Entonces

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde  $S^{-1}$  es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de  $A$  (cf. [11] p. 4). En particular si  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  se observa que  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ . Por otra parte, los valores propios son invariantes bajo conjugación (cf. [8] p. 254), por lo que como cualquier transformación que fije 2 puntos es conjugada en  $PSL_2(\mathbb{C})$  a una de la forma  $z \mapsto \lambda z$ , se sigue que sus valores propios son  $\sqrt{\lambda}$  y  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , es decir, los multiplicadores  $\lambda$  y  $\frac{1}{\lambda}$  se obtienen como el cociente de los valores propios.

Se recuerda ahora la partición de las transformaciones en  $PSL_2(\mathbb{C})$ , que están clasificadas por su traza  $\tau(\gamma) = a + d$ , que son parabólicas, elípticas, hiperbólicas y loxodrómicas (véase Figura 1.9).

**Elementos parabólicos:** Sea  $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ . Se dice que  $\gamma$  es parabólica si  $\tau(\gamma) = \pm 2$ . Si  $\gamma$  es parabólica entonces es conjugada a la transformación  $T(z) = z + 1$ . Considérese la transformación  $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ . Entonces  $\varphi T \varphi^{-1}(z) = \varphi\left(\frac{1}{z} + 1\right) = \frac{z}{z+1}$ , transformación que está representada por

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como cualesquiera dos transformaciones parabólicas son conjugadas entre sí, se usará esta representación que fija a 0 en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Nótese que

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

**Elementos elípticos:** Sea  $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ . Se dice que  $\gamma$  es elíptica si  $\tau(\gamma) \in (-2, 2)$ . Una transformación elíptica tiene las siguientes propiedades:

1. Los valores propios asociados a la matriz de representación tiene valores propios complejos. En efecto, si  $\gamma$  es conjugada a la transformación  $T(z) = e^{2i\theta}z$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , sus valores propios son  $e^{i\theta}$  y  $e^{-i\theta}$ .
2. Fijan una geodésica puntualmente. Esta geodésica es la determinada por la intersección de los planos que define su extensión de Poincaré.
3. La acción geométrica es una rotación por un ángulo de  $2\theta$ , lo cual se ve como composición de 2 reflexiones en planos que se intersecan en un ángulo  $\theta$  en la geodésica que consiste en los puntos fijos, véase la Figura 1.3.

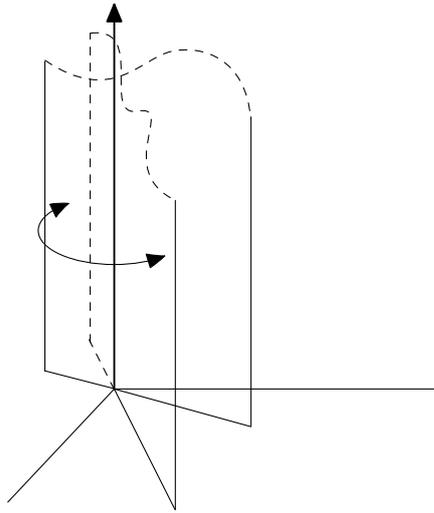


Figura 1.3: Acción geométrica de una transformación elíptica

Si  $S \in PSL_2(\mathbb{C})$  es elíptica, entonces es conjugada a  $T(z) = e^{2i\theta}z$ . Considérese  $\varphi(z) = \frac{z}{z+1}$ , entonces  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(\infty) = 1$ . Si  $\gamma = \varphi T \varphi^{-1}$  matricialmente se tiene:

$$\gamma = \varphi T \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Así, la transformación definida por  $\gamma = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$  será la representante de las transformaciones elípticas que fijan 0 y 1 en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Si  $\lambda = e^{i\theta}$  y  $\beta_1 = \lambda - \lambda^{-1}$ , entonces

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Se afirma que

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

donde  $\beta_n = \lambda^n - \lambda^{-n} = e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \operatorname{sen}(n\theta)$ .

Esta afirmación se prueba por inducción sobre  $n$ . El resultado es claro para  $n = 1$  Supóngase que

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix}.$$

Dado que componer dos transformaciones de Möbius corresponde con la multiplicación de las matrices que las representan, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma^{n+1} &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & 0 \\ \lambda\beta_n + \lambda^{-n}\beta_1 & \lambda^{-(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & 0 \\ \beta_{n+1} & \lambda^{-(n+1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene ya que

$$\begin{aligned} \lambda\beta_n + \lambda^{-n}\beta_1 &= \lambda(\lambda^n - \lambda^{-n}) + \lambda^{-n}(\lambda - \lambda^{-1}) \\ &= \lambda^{n+1} - \lambda^{-n+1} + \lambda^{-n+1} - \lambda^{-(n+1)} \\ &= \lambda^{n+1} - \lambda^{-(n+1)} = \beta_{n+1}. \end{aligned}$$

Si  $\gamma$  es elíptica, entonces  $\gamma$  rota los planos hiperbólicos perpendiculares a su geodésica fija en un ángulo de  $2\theta$ , por lo que sólo bastará estudiar estas transformaciones cuando  $\theta \in (0, \pi)$  (cf. [1]).

**Elementos loxodrómicos:** Un elemento  $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$  se llama loxodrómico si no es parabólico ni elíptico. Un elemento loxodrómico:

1. Tiene valores propios cuyas normas son distintas de 1.

Tomando  $\gamma$  conjugada a  $T(z) = \lambda^2 z$ , los valores propios de  $\gamma$  son  $\lambda$  y  $\frac{1}{\lambda}$  cuyas normas son distintas de 1.

2. Fijan una geodésica en  $\mathbb{H}^3$ , llamada *eje*, que une los puntos fijos.
3. Es llamada *hiperbólica* si su traza es real (y por tanto no hay rotación sobre su eje).

Como se mencionó las extensiones de Poincaré de  $PSL_2(\mathbb{C})$  son elementos del grupo general de Möbius actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ , por lo que son funciones continuas con la métrica cordal (cf [1] p. 33). Los puntos finales del eje, llámense  $a$  y  $b$  respectivamente, son puntos fijos de la acción de  $\gamma$ . Si  $S(z) = \lambda^2 z$ ,  $|\lambda| \neq 1$ , entonces su extensión de Poincaré es  $S(z, t) = (\lambda^2 z, |\lambda|^2 t)$ . Un cálculo sencillo muestra que  $S^n(z, t) = (\lambda^{2n} z, |\lambda|^{2n} t)$ . Como  $|\lambda| \neq 1$ , sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $|\lambda| > 1$ . Luego, dado  $z \in \mathbb{H}^3$  entonces usando la métrica cordal se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-n}(z) = 0.$$

Finalmente, si  $\gamma = \varphi S \varphi^{-1}$  entonces  $\gamma^n = \varphi S^n \varphi^{-1}$ , donde  $\varphi(z) = \frac{z}{z+1}$ . Como las extensiones de Poincaré son continuas, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi S^n \varphi^{-1}(z) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n \varphi^{-1}(z)\right) = \varphi(\infty) = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi S^{-n} \varphi^{-1}(z) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S^{-n} \varphi^{-1}(z)\right) = \varphi(0) = b.$$

A estos puntos se les llama *punto fijo atractor* y *punto fijo repulsor*, respectivamente. La continuidad de las funciones de Möbius en  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^3)$  determina entonces que si  $\gamma$  es loxodrómica con punto fijo atractor  $a$ , entonces para cualquier  $x \in \mathbb{H}^3$  se tiene  $d_c(\gamma^n x, a) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $d_c$  denota el límite tomado con la métrica cordal en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ .

Para ilustrar la acción geométrica de una transformación loxodrómica, se considera el caso cuando  $\gamma(z) = \lambda^2 z$ ,  $|\lambda| \neq 0, 1$ . Su extensión de Poincaré es

$$(z, t) \mapsto (\lambda^2 z, |\lambda|^2 t).$$

Es útil pensar a  $\gamma$  como composición de dos funciones, como una homotecia y una rotación

$$f_1(z, t) = (|\lambda|^2 z, |\lambda|^2 t) \quad \text{y} \\ f_2(z, t) = \left( \left( \frac{\lambda}{|\lambda|} \right)^2 z, t \right).$$

Al tomar  $|\lambda| > 1$  el  $\infty$  es el punto fijo atractor. Se pueden dibujar los hiperciclos alrededor de la geodésica fija en  $\mathbb{H}^3$ , aparecen como “palillos infinitos” que surgen del origen y corresponden con los círculos fijos de la transformación hiperbólica  $f_1$ , véase la Figura 1.4.

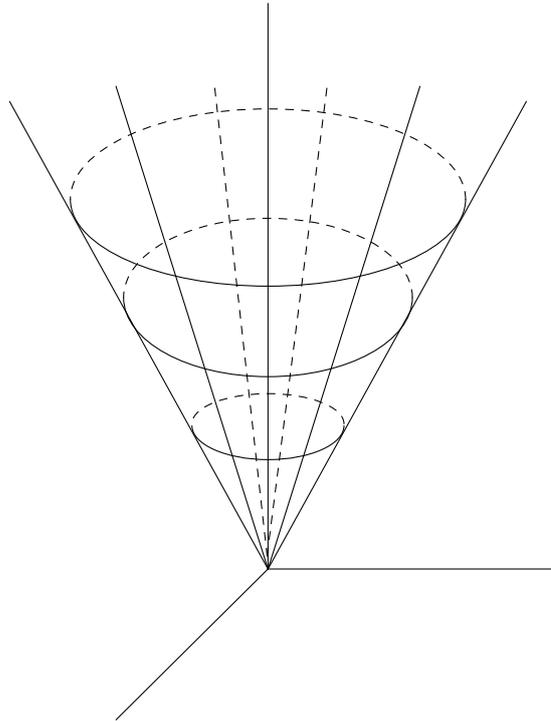


Figura 1.4: Vista parcial de los círculos fijos de una transformación hiperbólica (rectas que surgen del origen) y de una elíptica (círculos), con puntos fijos  $0$  y  $\infty$

Por otra parte, una rotación tipo  $f_2$  rota en los planos paralelos al plano  $\widehat{\mathbb{C}}$ , ortogonales a la geodésica fija, los cuales se llaman *horoesferas basadas en  $\infty$* . También se puede pensar como rotaciones en las semiesferas con centro en el origen, “foliadas” por círculos que se rotan siempre en el mismo ángulo alrededor del eje  $[0, \infty)$ . Tanto las horoesferas basadas en  $\infty$ , como las semiesferas centradas en el origen (que son planos hiperbólicos) son invariantes bajo estas rotaciones. A estas últimas se les llamará *Esferas de Apolonio*, en analogía con los círculos de Apolonio y su geometría bajo la acción de transformaciones loxodrómicas en  $\mathbb{H}^2$ .

En el caso general para una transformación hiperbólica, los “círculos fijos”

constituyen *un haz de semicírculos* en  $\mathbb{H}^3$ , que van de un punto fijo al otro, localmente se ve como un “plátano”, véase la Figura 1.5.

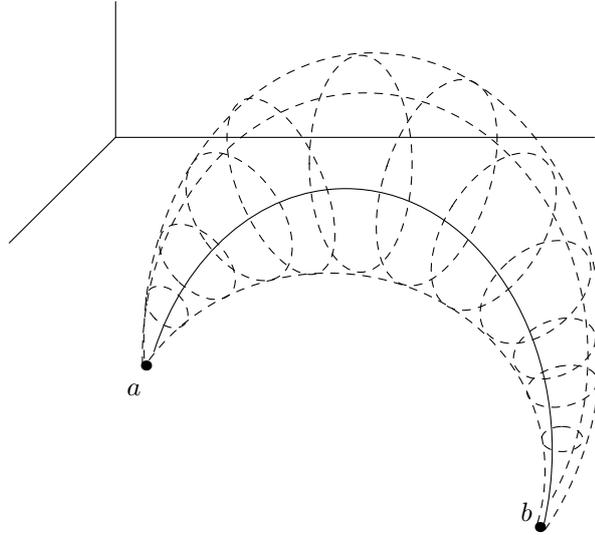


Figura 1.5: Vista local de los círculos invariantes de las transformaciones hiperbólicas y elípticas con puntos fijos  $a$  y  $b$

El caso general elíptico, los círculos fijos son círculos *ortogonales* al eje, la elíptica rota alrededor del eje siempre en el mismo ángulo. Ortogonales al eje, en el sentido de que *viven* en horoesferas o semiesferas (planos hiperbólicos) ortogonales al eje. Tanto las horoesferas basadas en algún punto fijo como las *semiesferas de Apolonio* son invariantes bajo funciones elípticas. (véase la Figura 1.6).

Las transformaciones loxodrómicas son una composición de ambas, hiperbólica y elíptica (o al revés, ya que conmutan). La acción geométrica consiste en moverse en “los palillos” hacia el  $\infty$  (o el atractor) y rotar en la correspondiente *esfera de Apolonio*. La acción hiperbólica no se aplica directamente en los puntos fijos ya que estos no pertenecen a  $\mathbb{H}^3$ , pero se puede usar la métrica cordal y aplicar los argumentos bidimensionales (cf. [9] p. 7) en  $\hat{\mathbb{C}}$  a  $\hat{\mathbb{R}}^3$ , es decir, a la esfera tridimensional  $\mathbb{S}^3$  perteneciente a  $\mathbb{R}^4$ .

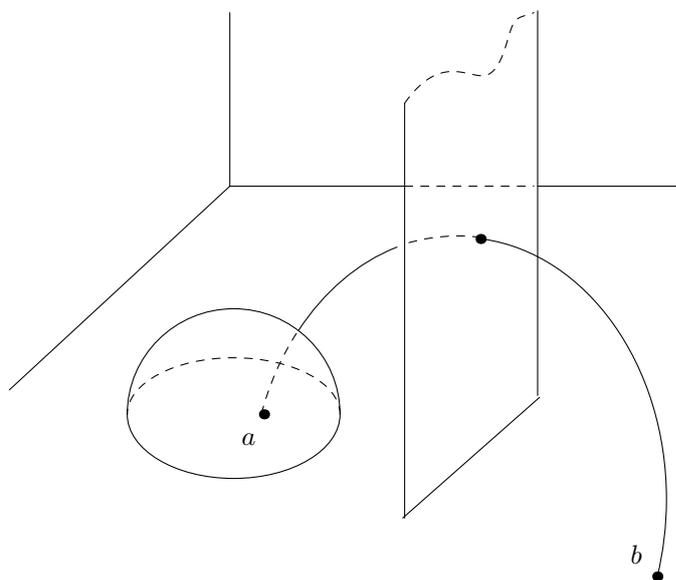


Figura 1.6: Planos invariantes bajo transformaciones elípticas, donde  $a$  y  $b$  son sus puntos fijos

Como en el caso bidimensional, existen espirales invariantes en  $\mathbb{H}^3$  que rodean al eje y cortan siempre con el mismo ángulo a una de las *esferas de Apolonio* y a alguna horoesfera.

En efecto, se prueba ese hecho en caso canónico y el caso general se sigue por conjugación y conformalidad. Tomando un punto fijo  $(z_0, t_0) \in \mathbb{H}^3$  y escribiendo  $\gamma(z) = \lambda^2 z$ ,  $\lambda^2 = e^{r+i\theta}$  en el contexto bidimensional. La acción en  $\mathbb{H}^3$  de  $\gamma^n$  es

$$(z_0, t_0) \mapsto (z_0 e^{n(r+i\theta)}, t_0 e^{nr}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo cual la espiral

$$(z_0, t_0) \mapsto (z_0 e^{x(r+i\theta)}, t_0 e^{xr}), \quad x \in \mathbb{R}$$

es invariante bajo  $\gamma$ . Más aún, como en el caso bidimensional en el que la espiral invariante en  $\widehat{\mathbb{C}}$  corta cada círculo de Apolonio exactamente en un punto y siempre con el mismo ángulo, esto mismo sucede con cada *esfera de Apolonio* en  $\mathbb{H}^3$ . De hecho esto mismo también sucede con la familia de horoesferas basadas en cualquiera de los puntos fijos. véase la Figura 1.7.

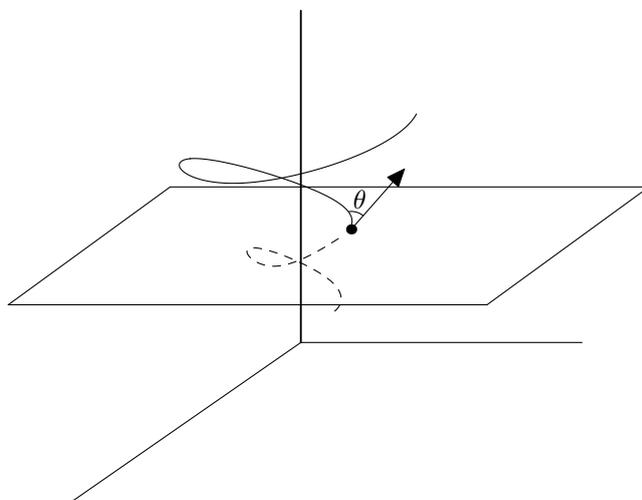


Figura 1.7: Espirales invariantes bajo transformaciones loxodrómicas. Cortan cada horoesfera basada en  $\infty$  (planos paralelos a  $\hat{\mathbb{C}}$ ) siempre en el mismo ángulo

El caso general se sigue por conjugación y conformalidad. En este caso, las espirales invariantes se *enrollan* en la geodésica fija, véase la Figura 1.8.

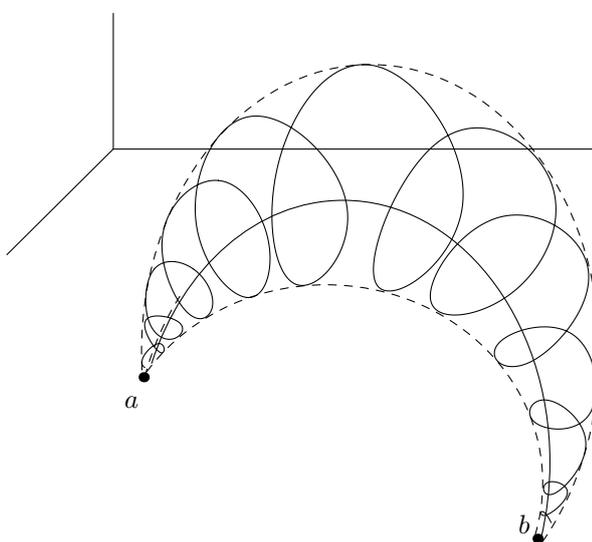


Figura 1.8: Espirales invariantes bajo transformaciones loxodrómicas donde  $a$  y  $b$  son puntos fijos

Para simplificar los cálculos se elegirá un representante de las clases de

conjugación de las transformaciones loxodrómicas cuyo punto fijo atractor sea el 1 y su punto fijo repulsor sea el 0, esto es conjugando  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $|\lambda| > 1$ , como en el caso elíptico, con  $z \mapsto \frac{z}{z+1}$  se obtiene la matriz requerida

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Con los mismos cálculos usados en el caso elíptico se tiene que para cualquier  $n$

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix},$$

donde, de nuevo,  $\beta_n = \lambda^n - \lambda^{-n}$ .

Sea  $\gamma$  elíptica o loxodrómica dada por  $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ . Este representante puede ser calculado usando la traza  $\tau = \lambda + \lambda^{-1}$  conforme (1.5). Escribiendo  $\lambda^2 - \lambda\tau + 1 = 0$  se tiene que  $\lambda$  está dada por

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2},$$

con el signo escogido de tal forma que  $|\lambda| > 1$ . Para esto usando la rama  $(0, 2\pi)$  del logaritmo complejo la función

$$\lambda(\tau) = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4}}{2} \quad (1.6)$$

es holomorfa en  $\mathbb{C} - \{(-\infty, -2] \cup [2, \infty)\}$ . Más aún, si  $|\lambda| = 1$ , entonces  $\lambda = e^{i\theta}$  y por lo tanto

$$2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \lambda + \lambda^{-1} = \tau,$$

es decir, si  $|\lambda| = 1$ , entonces  $\tau \in (-2, 2)$ .

Puesto que  $|\lambda(i)| = \left| \frac{i + \sqrt{5}i}{2} \right| > 1$ , por continuidad y conexidad se sigue que la función (1.6) define la  $\lambda$  de tal forma que  $|\lambda| > 1$  para todos los posibles valores de la traza de loxodrómicas, es decir, el punto fijo 1 es atractor. Esto es importante en esta tesis, ya que al variar la traza las estructuras geométricas cambian. Nótese que para cualquier  $n$  se tiene que  $\tau_n = \tau_{-n}$ , por lo que  $\lambda(\tau_n) = \lambda(\tau_{-n})$ , por lo que se puede restringir el dominio de  $\lambda$  al conjunto  $\mathbb{H}^2 \cup [-2, 2]$ .

Estos hechos son importantes ya que todos las posibles trazas se encuentran en  $\mathbb{H}^2$ , véase la Figura 1.9

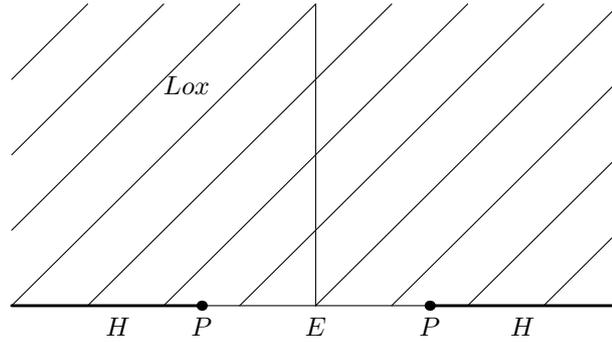


Figura 1.9: Semiplano de las trazas. Las letras corresponden al tipo de transformación conforme la traza

Finalmente, nótese que si  $\tau_n = \tau(\gamma^n)$ , usando (1.4) se tiene  $\tau_n = \lambda^n + \lambda^{-n}$  y

$$\beta_n = \sqrt{\tau_n - 4}.$$

Esto último ya que

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau_n - 4} &= \sqrt{\lambda^{2n} + 2 + \lambda^{-2n} - 4} = \sqrt{\lambda^{2n} - 2 + \lambda^{-2n}} \\ &= \sqrt{(\lambda^n - \lambda^{-n})^2} = \pm(\lambda^n - \lambda^{-n}) = \pm\beta_n, \end{aligned}$$

y la igualdad se da para alguna raíz.

Usando esta notación se tiene que si  $\gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$ , la isometría hiperbólica dada por (1.2), lleva el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{t}{2})$  al punto

$$\left( \frac{\lambda^n(\tau_n + \beta_n t^2)}{D_n}, \frac{2t}{D_n} \right),$$

donde  $D_n = |\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 t^2$ . Esto se sigue ya que

$$\begin{aligned}
\gamma^n\left(\frac{1}{2}, \frac{t}{2}\right) &= \left( \frac{\left(\frac{\lambda^n}{2}\right)\overline{\left(\frac{\beta_n}{2} + \lambda^{-n}\right)} + \frac{\lambda^n \bar{\beta}_n t^2}{4}}{\left|\frac{\beta_n}{2} + \lambda^{-n}\right|^2 + \frac{|\beta_n|^2 t^2}{4}}, \frac{\frac{t}{2}}{\left|\frac{\beta_n}{2} + \lambda^{-n}\right|^2 + \frac{|\beta_n|^2 t^2}{4}} \right) \\
&= \left( \frac{\left(\lambda^n\right)\overline{\left(\beta_n + 2\lambda^{-n}\right)} + \lambda^n \bar{\beta}_n t^2}{\left|\beta_n + 2\lambda^{-n}\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2}, \frac{2t}{\left|\beta_n + 2\lambda^{-n}\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2} \right) \\
&= \left( \frac{\lambda^n \overline{\left(\beta_n + 2\lambda^{-n}\right)} + \bar{\beta}_n t^2}{\left|\beta_n + 2\lambda^{-n}\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2}, \frac{2t}{\left|\beta_n + 2\lambda^{-n}\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2} \right) \\
&= \left( \frac{\lambda^n (\bar{\tau}_n + \bar{\beta}_n t^2)}{\left|\tau_n\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2}, \frac{2t}{\left|\tau_n\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2} \right) \\
&= \left( \frac{\lambda^n \overline{\left(\tau_n + \beta_n t^2\right)}}{\left|\tau_n\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2}, \frac{2t}{\left|\tau_n\right|^2 + |\beta_n|^2 t^2} \right). \\
\therefore \gamma^n\left(\frac{1}{2}, \frac{t}{2}\right) &= \left( \frac{\lambda^n \overline{\left(\tau_n + \beta_n t^2\right)}}{D_n}, \frac{2t}{D_n} \right). \tag{1.7}
\end{aligned}$$

La expresión (1.7) será utilizada más adelante para calcular los centros y radios de las superficies equidistantes para el cálculo de dominios de Dirichlet. En [6] donde se desarrolla con mayor profundidad los resultados para los dominios de Dirichlet, la expresión (1.7) es de gran utilidad.



# Capítulo 2

## Dominios fundamentales

Los dominios de Dirichlet y Ford en  $\mathbb{H}^3$ , definidos a continuación, son regiones fundamentales para la acción de un grupo  $\Gamma$  en  $\mathbb{H}^3$  acotados por semiesferas euclidianas. Se define el dominio de Dirichlet (o de Ford, respectivamente) en  $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$  como la intersección de la frontera cordal del dominio de Dirichlet (o de Ford) y  $\Omega_{\widehat{\mathbb{C}}}$ , donde  $\Omega_{\widehat{\mathbb{C}}}$  denota el dominio de discontinuidad de  $\Gamma$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

### 2.1. Dominios de Dirichlet

En general dado un grupo kleiniano  $G$  y  $x$  en  $\mathbb{H}^3$ , que no es fijo bajo ninguna transformación en  $G$  distinta de la identidad, se define el **poliedro de Dirichlet para la acción de  $G$  en  $\mathbb{H}^3$**  como el conjunto

$$\Delta_G^x = \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, x) < \rho(y, \gamma x) \forall \gamma \in G\}.$$

Se sabe (cf. [14] p. 53) que este poliedro es una región fundamental para la acción de  $G$  en  $\mathbb{H}^3$ . Nótese que  $\Delta_G^x$  está delimitado por planos hiperbólicos que son equidistantes entre  $x$  y sus imágenes  $\gamma x$ ,  $\gamma \in G$ ,  $\gamma \neq Id$ .

Más aún, estos poliedros son localmente finitos, es decir, dado un compacto  $K$  en  $\mathbb{H}^3$ , éste interseca un número finito de *teselas*. Este hecho implica que  $\widehat{\Delta}_G^x = \partial_c(\Delta_G^x) \cap \Omega_{\widehat{\mathbb{C}}}$  (donde  $\partial_c(\Delta_G^x)$  denota la frontera cordal en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ ) es un conjunto abierto y fundamental para la acción de  $G$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  (cf. [5] p. 116-117).

Para el caso particular de este trabajo se tiene que  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ , donde  $\gamma$  es loxodrómica de la forma (1.5) y se usará como centro el punto

$$x = (z, t) = \left( \frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right),$$

donde  $\rho$  es la distancia de este punto a la geodésica que une los puntos fijos.

Resulta que los planos hiperbólicos equidistantes son semiesferas euclidianas con centro en  $\partial\mathbb{H}^3$ . Esto se sigue al descomponer  $\gamma^n$  en una *rotación* seguida de una hiperbólica con atractor 1, ya que la acción de la parte elíptica de  $\gamma^n$  en  $x = \left( \frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right)$  es rotar en el plano  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$  y el correspondiente *círculo de Apolonio* en este plano tiene punto límite en  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ , lo que implica que  $x$  es el *polo norte* de este círculo y al rotar por la parte elíptica de  $\gamma^n$  se obtiene un punto cuya tercera coordenada es menor a la de  $x$ .

Se define a la superficie equidistante entre  $x$  y  $\gamma^n x$ , denotada por  $E_n$  como el conjunto

$$E_n = \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, x) = \rho(y, \gamma^n x)\}.$$

Nótese también que

$$\gamma^{-n}(E_n) = E_{-n}.$$

Esto se sigue al considerar el lugar de los puntos que equidistan de  $x$  y  $\gamma^n x$ , al aplicar  $\gamma^{-n}$ , como esta función es una isometría, esta imagen es el lugar de los puntos que equidistan de  $\gamma^{-n}x$  y  $\gamma^{-n}\gamma^n x = x$ . En particular, por biyectividad y conexidad  $\gamma^{-n}(\text{Int}(E_n)) = \text{Ext}(E_{-n})$ , véase la Figura 2.1.

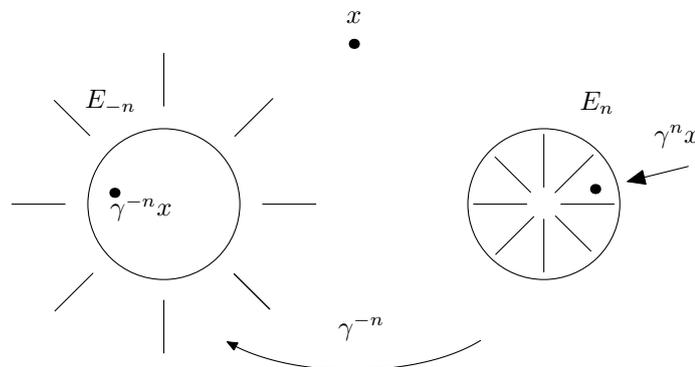


Figura 2.1: Acción de una iteración de  $\gamma$  en las superficies equidistantes

Uno de los objetivos es ilustrar en este contexto que las regiones de Ford son un caso límite de las regiones de Dirichlet, por lo que se encontrarán los centros y los radios de las superficies equidistantes entre dos puntos dados. Estos cálculos también se utilizan con mayor medida en [6] para probar varios resultados de las regiones de Dirichlet.

**Lema 2.1.1.** Sean  $x = (z, t)$  y  $y = (w, s)$  puntos de  $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ . Supóngase también que  $t \neq s$ . El centro de la superficie equidistante  $E(x, y)$ , denotado por  $C^{eq}(x, y)$  está dado por

$$C^{eq}((z, t), (w, s)) = \frac{tw - sz}{t - s}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se puede suponer que existe un plano ortogonal a  $\mathbb{C}$  que contiene a los dos puntos. Se probará primero el caso en que los dos puntos están contenidos en el plano

$$P = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \text{Im}(z) = 0\}.$$

Se encontrará el centro del círculo equidistante de dos puntos en  $P$  que corresponde al centro de la superficie equidistante en  $\mathbb{H}^3$ . Se toma  $r \in \mathbb{R}$  tal que se cumpla la ecuación

$$(y + (x - y)r) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

es decir

$$[(w, s) + (z - w, t - s)r] \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

$$\text{por lo que } s + (t - s)r = 0$$

$$\text{y } r = \frac{-s}{t - s},$$

véase la Figura 2.2. Por lo que el centro de la superficie equidistante  $E(x, y)$  es

$$\begin{aligned} C^{eq}((z, t), (w, s)) &= (w, s) + \left( \frac{ws - zs}{t - s}, \frac{s^2 - ts}{t - s} \right) \\ &= \left( \frac{tw - sz}{t - s}, 0 \right) \end{aligned}$$

Se escribirá entonces

$$C^{eq}((z, t), (w, s)) = \frac{tw - sz}{t - s}.$$

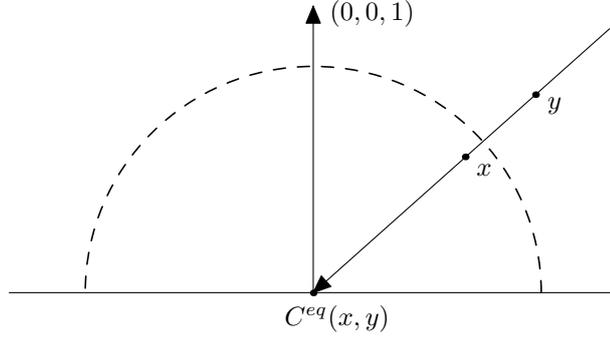


Figura 2.2: Centro de la superficie equidistante  $C^{eq}(x, y)$

El caso general se sigue fácilmente de este caso, pues rotando el plano que contiene a dos puntos cualesquiera y trasladándolo se tiene que si

$$x' = (e^{i\theta}z + \alpha, t) \quad y \quad y' = (e^{i\theta}w + \alpha, s), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

son puntos tales que  $\text{Im}(e^{i\theta}z + \alpha) = \text{Im}(e^{i\theta}w + \alpha) = 0$  se sigue de lo anterior que

$$C^{eq}(x', y') = \frac{t(e^{i\theta}w + \alpha) - s(e^{i\theta}z + \alpha)}{t - s} = e^{i\theta} \frac{tw - sz}{t - s} + \alpha.$$

Aplicando a este punto la traslación  $(z, t) \mapsto (z - \alpha, t)$  y la rotación  $(z, t) \mapsto (e^{-i\theta}z, t)$  se sigue el resultado.  $\square$

**Lema 2.1.2.** Sean  $x = (z, t)$  y  $y = (w, s)$  puntos de  $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ ,  $t \neq s$ . El radio de la superficie equidistante  $E(x, y)$ , denotado por  $R^{eq}(x, y)$  está dado por

$$R^{eq}((z, t), (w, s)) = \sqrt{ts \left( 1 + \frac{|z - w|^2}{(t - s)^2} \right)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se probará primero el caso cuando los dos puntos se encuentran en el plano

$$P = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \text{Im}(z) = 0\}.$$

Sea  $\hat{r} = (0, r)$  el punto donde la semiesfera equidistante corta al eje  $Z$ . Se tiene que

$$\rho(x, \hat{r}) = \rho(y, \hat{r}),$$

y usando la fórmula (1.1) se obtiene que

$$\frac{|x - \hat{r}|^2}{2tr} = \frac{|y - \hat{r}|^2}{2sr},$$

donde se sigue que

$$s|x - \hat{r}|^2 = t|y - \hat{r}|^2,$$

esto es

$$\begin{aligned} s(z^2 + (t - r)^2) &= t(w^2 + (s - r)^2), \\ sz^2 + st^2 + sr^2 &= tw^2 + ts^2 + tr^2. \end{aligned}$$

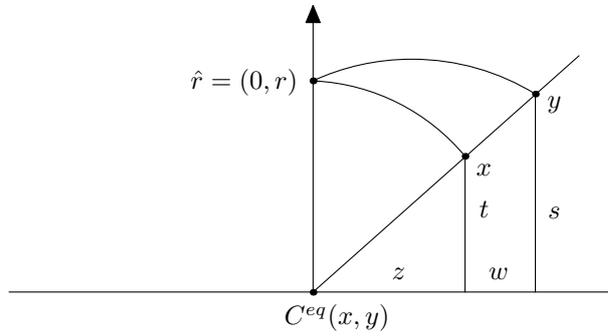


Figura 2.3: Radio de la superficie equidistante  $C^{eq}(x, y)$

Por lo que

$$\begin{aligned} r^2(t - s) &= sz^2 + st^2 - tw^2 - ts^2 \\ &= \frac{sz^2 + st^2 - tw^2 - ts^2}{(t - s)}(t - s) \\ &= \frac{stz^2 + st^3 - t^2w^2 - t^2s^2 - s^2z^2 - s^2t^2 + stw^2 + ts^3}{(t - s)} \\ &= \frac{ts}{(t - s)} \left( z^2 + t^2 - \frac{tw^2}{s} - 2ts - \frac{sz^2}{t} + w^2 + s^2 \right) \\ &= \frac{ts}{(t - s)} \left( (t - s)^2 + z^2 + w^2 - \left( \frac{tw^2}{s} + \frac{sz^2}{t} \right) \right). \end{aligned}$$

Es decir

$$r^2(t - s) = \frac{ts}{(t - s)} \left( (t - s)^2 + z^2 + w^2 - \left( \frac{tw^2}{s} + \frac{sz^2}{t} \right) \right). \quad (2.1)$$

Nótese por construcción que  $x$ ,  $y$  y  $C^{eq}(x, y)$  están sobre una recta euclídeana, por lo que se cumple

$$\frac{z}{t} = \frac{w}{s}, \text{ o equivalentemente}$$

$$zs = tw,$$

véase la Figura 2.3.

Luego, usando (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} r^2(t-s)^2 &= ts \left( (t-s)^2 + z^2 + w^2 - \left( \frac{tw^2}{s} + \frac{sz^2}{t} \right) \right) \\ &= ts \left( (t-s)^2 + z^2 + w^2 - \left( \frac{wzs}{s} + \frac{zwt}{t} \right) \right) \\ &= ts((t-s)^2 + z^2 + w^2 - 2zw) = ts((t-s)^2 + (z-w)^2) \\ &\therefore r^2 = ts \left( 1 + \frac{|z-w|^2}{(t-s)^2} \right). \end{aligned}$$

Por lo que el radio de la superficie equidistante  $R^{eq}(x, y)$  está dado por

$$R^{eq}((z, t), (w, t)) = \sqrt{ts \left( 1 + \frac{|z-w|^2}{(t-s)^2} \right)}.$$

El caso general se sigue fácilmente de este, ya que rotando y trasladando, si  $x' = (e^{i\theta}z + \alpha, t)$  y  $y' = (e^{i\theta}w + \alpha, s)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  son puntos tales que  $\text{Im}(e^{i\theta}z + \alpha) = \text{Im}(e^{i\theta}w + \alpha) = 0$  se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned} R^{eq}(x', y') &= \sqrt{ts \left( 1 + \frac{|e^{i\theta}z + \alpha - (e^{i\theta}w + \alpha)|^2}{(t-s)^2} \right)} \\ &= \sqrt{ts \left( 1 + \frac{|z-w|^2}{(t-s)^2} \right)} = R^{eq}(x, y). \end{aligned}$$

□

Para cualquier  $g \in PSL_2(\mathbb{C})$  nótese que

$$g(\Delta_\Gamma^x) = \Delta_{g\Gamma g^{-1}}^{gx}. \quad (2.2)$$

Esto ya que

$$\begin{aligned} z \in g(\Delta_\Gamma^x) &\iff \exists y \in \Delta_\Gamma^x \text{ tal que } gy = z \\ &\iff \rho(y, x) \leq \rho(y, \gamma x) \quad \forall \gamma \in \Gamma \\ &\iff \rho(z, gx) = \rho(gy, gx) \leq \rho(gy, g\gamma x) = \rho(z, g\gamma g^{-1}gx) \quad \forall \gamma \in \Gamma \\ &\iff z \in \Delta_{g\Gamma g^{-1}}^{gx}. \end{aligned}$$

Dichas transformaciones no cambian la configuración de las superficies equidistantes las cuales algunas de ellas constituyen la frontera del dominio de Dirichlet. Por lo que, usando (2.2), sólo será necesario estudiar el tipo de combinatoria geométrica para un grupo conjugado de  $\Gamma$ .

Para los grupos cíclicos  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$  que se estudiarán, se puede asumir que  $\gamma$  es de la forma (1.5). Para el análisis de los dominios de Dirichlet, se usará el punto base

$$x = (z, t) = \left( \frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right), \quad (2.3)$$

cuya distancia a la geodésica que une a 0 con 1 es  $\rho$ . En efecto, ya que tanto las traslaciones como la transformación  $z \mapsto 2z$  son isometrías hiperbólicas, se tiene que

$$\rho\left(\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{e^\rho}{2}\right)\right) = \rho\left((0, 1), (0, e^\rho)\right),$$

cuya distancia es  $\rho(1, e^\rho) = \log(e^\rho) = \rho$ , véase la Figura 2.4.

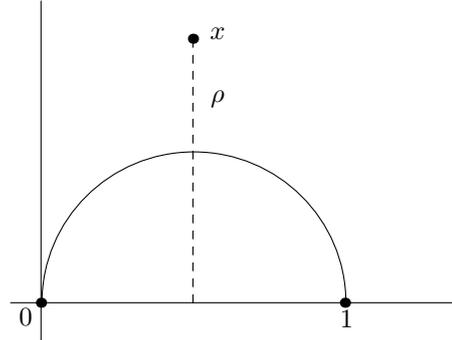


Figura 2.4: Si  $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2}\right)$ , su distancia a la geodésica fija es  $\rho$

Evaluando la fórmula (1.7) para la imagen de este punto bajo  $\gamma^n$  para obtener el radio y el centro de la superficie equidistante  $E_n = E(x, \gamma^n x)$  se tiene, usando el Lema 2.1.1, que

$$\begin{aligned} C_n^{eq} = C^{eq}(x, \gamma^n x) &= \frac{\frac{e^\rho}{2} \left( \frac{\lambda^n (\tau_n + \beta_n e^{2\rho})}{D_n} \right) - \left( \frac{2e^\rho}{D_n} \right) \frac{1}{2}}{\frac{e^\rho}{2} - \frac{2e^\rho}{D_n}} \\ &= \frac{\lambda^n (\tau_n + \beta_n e^{2\rho}) - 2}{D_n - 4}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

y usando el Lema 2.1.2, considerando que  $D_n \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
R_n^{eq} &= R^{eq}(x, \gamma^n x) = \sqrt{\left(\frac{e^\rho}{2}\right)\left(\frac{2e^\rho}{D_n}\right)\left(1 + \frac{|\frac{1}{2} - \frac{\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}})}{D_n}|^2}{\left(\frac{e^\rho}{2} - \frac{2e^\rho}{D_n}\right)^2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{e^{2\rho}}{D_n}\left(1 + \frac{|D_n - 2\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}})|^2}{(D_n e^\rho - 4e^\rho)^2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{e^{2\rho}}{D_n}\left(1 + \frac{|2\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - D_n|^2}{e^{2\rho}(D_n - 4)^2}\right)}, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

donde, en ambos casos,

$$D_n = |\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 e^{2\rho}.$$

Por consiguiente se ha probado el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.3.** *El centro y el radio de las superficies equidistantes para el grupo generado por  $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  con punto base (2.3) están dados, respectivamente, por las siguientes expresiones*

$$C_n^{eq} = \frac{\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - 2}{D_n - 4}, \quad y$$

$$R_n^{eq} = \sqrt{\frac{e^{2\rho}}{D_n}\left(1 + \frac{|2\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - D_n|^2}{e^{2\rho}(D_n - 4)^2}\right)},$$

donde

$$D_n = |\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 e^{2\rho}.$$

Se escribirá  $\widehat{E}_n$  para referirse a la frontera euclideana de la superficie equidistante  $E_n$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ ; éste es un círculo con centro  $C_n^{eq}$  y radio  $R_n^{eq}$ .

## 2.2. Dominios de Ford

Dado un elemento  $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$  que no fije  $\infty$ , existe un único hemisferio llamado *isométrico* centrado en  $\partial\mathbb{H}^3$ , en donde  $\gamma$  actúa como una isometría

euclídeana, a este hemisferio se le denota por  $I_{\gamma^{-1}}$ . Las fronteras de los hemisferios isométricos se denominan *círculos isométricos* y se denotan por  $\widehat{I}_{\gamma^{\pm 1}}$ :  $\gamma$  transforma  $\widehat{I}_{\gamma^{-1}}$  en  $\widehat{I}_{\gamma}$  como isometría euclídeana. También  $\gamma^{-1}$  transforma a  $\widehat{I}_{\gamma}$  en  $\widehat{I}_{\gamma^{-1}}$  como isometría euclídeana. Estos círculos o hemisferios constituyen aquellos puntos donde la norma de la derivada es 1, o donde el factor de conformalidad tiene determinante 1. Calculando, para un elemento arbitrario  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , el centro y el radio del círculo isométrico de  $\gamma^{-1}$ , es decir  $I_{\gamma}$ , están dados por

$$C^{iso}(\gamma^{-1}) = \frac{a}{c} \quad \text{y}$$

$$R^{iso}(\gamma^{-1}) = \frac{1}{|c|},$$

este centro pensado en  $\mathbb{R}^3$  también es el centro del correspondiente hemisferio isométrico en  $\mathbb{H}^3$ . Más aún, se sigue de la regla de la cadena que  $\gamma(Ext(I_{\gamma^{-1}})) = Int(I_{\gamma})$ . Cabe señalar que esta notación no es la convención estándar en la literatura; sin embargo se usará esta notación con el fin de empatar y trabajar de manera conjunta los dominios de Ford y Dirichlet; así como también evidenciar la situación límite de los dominios de Dirichlet (Teorema 2.2.1).

Notése que si  $\gamma$  define una transformación loxodrómica tal que  $|\tau(\gamma)| > 2$ , entonces  $I_{\gamma}$  y  $I_{\gamma^{-1}}$  son disjuntos. En efecto, pues para que esto suceda es suficiente y necesario que se cumpla la desigualdad estricta

$$|C^{iso}(\gamma^{-1}) - C^{iso}(\gamma)| > R^{iso}(\gamma) + R^{iso}(\gamma^{-1}),$$

misma que se cumple si y sólo si

$$\left| \frac{a}{c} - \frac{d}{-c} \right| > \frac{2}{|c|}.$$

Más específicamente, para elementos dados como (1.4) los centros y radios de los círculos de las potencias de  $\gamma$  están dadas por

$$C^{iso}(\gamma^{-n}) = \frac{\lambda^n}{\beta_n} \quad \text{y} \tag{2.6}$$

$$R^{iso}(\gamma^{-n}) = \frac{1}{|\beta_n|}. \tag{2.7}$$

Si  $\Gamma$  es un grupo discontinuo y  $\infty$  pertenece al dominio de discontinuidad, se define el **dominio de Ford**  $\Delta_{\Gamma}^{\infty}$  **para la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{H}^3$**  como la

intersección de los exteriores de los hemisferios isométricos de los elementos distintos de la identidad de  $\Gamma$ . También se llamará a la intersección de los exteriores de los círculos isométricos de los elementos  $\gamma \in \Gamma$  que no son la identidad el **dominio de Ford**  $\widehat{\Delta}_\Gamma^\infty$  para la acción de  $\Gamma$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se puede probar que  $\Delta_\Gamma^\infty$  es una región fundamental para la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{H}^3$  adaptando las técnicas de [12], p. 45-52, para la acción tridimensional.

**Teorema 2.2.1.** Si  $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2}\right)$ , donde  $\rho > 0$ , entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_\Gamma^x = \Delta_\Gamma^\infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Nótese que usando los Lemas 2.1.1 y 2.1.2 se tiene

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} C_n^{eq} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n (\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - 2}{|\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 e^{2\rho} - 4} = \frac{\lambda^n \bar{\beta}_n}{|\beta_n|^2} = \frac{\lambda^n}{\beta_n} = C^{iso}(\gamma^{-n}), \quad y$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} R_n^{eq} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{e^{2\rho}}{D_n} + \frac{e^{2\rho} |2\lambda^n (\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - D_n|^2}{D_n e^{2\rho} (D_n - 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{e^{2\rho}}{D_n}} = \sqrt{\frac{1}{|\beta_n|^2}} = \frac{1}{|\beta_n|} = R^{iso}(\gamma^{-n}).$$

Así, los dominios de Ford pueden interpretarse como *el límite de los dominios de Dirichlet cuando el centro tiende a  $\infty$*  y eso motiva la notación  $\Delta_\Gamma^\infty$ .  $\square$

## 2.3. Notación general y terminología

Se usará la siguiente notación. A los objetos en la frontera del poliedro (caras, lados, vértices) se llamarán *visibles*:

- $\mathbb{H}^+$  es el semiplano superior complejo.
- $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ , donde  $\gamma$  no es elíptica de orden infinito.
- $\Delta$  es el poliedro de Dirichlet o Ford para la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{H}^3$ .
- $\widehat{\Delta}$  es el correspondiente dominio fundamental en  $\Omega_{\widehat{\mathbb{C}}}$ .
- $X_n$  es el hemisferio equidistante entre  $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2}\right)$  y  $\gamma^n x$ , o el hemisferio isométrico de  $\gamma^{-n}$  en  $\mathbb{H}^3$ .

- $\widehat{X}_n$  son los correspondientes objetos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , es decir son círculos definidos por las superficies equidistantes o los círculos isométricos.
- El *interior* (respectivamente, el *exterior*) de  $X_n$  es la componente acotada (respectivamente, no acotada) de  $\mathbb{H}^3 \setminus X_n$ , y de igual forma para  $\widehat{X}_n$ .
- $\overline{\Delta}$  denotará la unión del poliedro de Dirichlet junto con su dominio fundamental en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , o la unión del poliedro de Ford y el dominio de Ford en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , es decir,  $\Delta \cup \widehat{\Delta}$ .
- $\overline{X}_n$  denotará  $X_n \cup \widehat{X}_n$ .
- $X_n^\partial$  denotará  $X_n \cap \partial\Delta$ , donde la frontera se toma en  $\mathbb{H}^3$ .
- También se escribirá  $\widehat{X}_n^\partial = \widehat{X}_n \cap \partial\widehat{\Delta}$  y  $\overline{X}_n^\partial = X_n^\partial \cup \widehat{X}_n^\partial$ .
- Una *cara*  $F_n$  es un subconjunto no vacío, conexo, maximal de dimensión 2 de  $X_n^\partial$ , es decir, es un polígono visible en  $\mathbb{H}^3$ .
- Una *arista*  $E_{i,j}$  es la intersección no vacía y conexa de dimensión 1 de las caras  $F_i$  y  $F_j$ . Es un objeto visible en  $\mathbb{H}^3$ .
- Un *vértice*  $V$  es la intersección no vacía de dimensión 0 de tres o más caras. Como las caras pertenecen a  $\mathbb{H}^3$ , los vértices también.
- Un *lado*  $S_n$  es un subconjunto no vacío, conexo, maximal y de dimensión 1 de  $\widehat{X}_n^\partial$ , es decir, es un segmento de círculo visible en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Es un objeto visible en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- Una *esquina*  $C$  es la intersección no vacía de dimensión 0 de al menos dos lados. Es un objeto visible en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Cabe señalar que esta terminología es la utilizada en [6]. Jørgensen distingue entre caras que intersecan a  $\widehat{\mathbb{C}}$  y aquellas cuya cerradura se encuentra en  $\mathbb{H}^3$ .

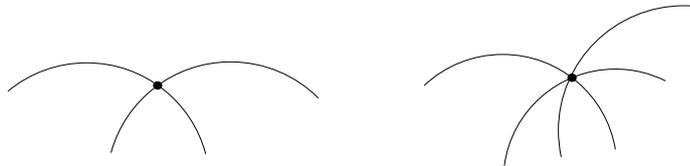


Figura 2.5: Posibles casos en que se pueden presentar las esquinas en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de un dominio fundamental



## Capítulo 3

# Geometría combinatoria de los dominios fundamentales

En adelante se usará la notación definida al final del capítulo 2. Se hablará de algunas propiedades de la geometría combinatoria de los dominios de Ford y Dirichlet de un grupo cíclico. Es fundamental que en ambos casos  $\gamma^n$  manda  $\overline{X}_{-n}$  a  $\overline{X}_n$ , llevando el exterior de  $X_{-n}$  al interior de  $X_n$ . En el caso de los dominios de Dirichlet esto se obtiene por convexidad y biyectividad. Nótese también que  $X_n$  es el bisector perpendicular de la geodésica que une el centro  $x$  y su imagen  $\gamma^n x$ . La prueba bidimensional en [9] p. 136 se aplica también en dimensión 3. Para el caso de los dominios de Ford estas afirmaciones son consecuencia de la regla de la cadena. Este hecho implica que  $\gamma^n$  identifica puntos sobre  $\partial\overline{\Delta}$  si y sólo si están en  $\overline{X}_{\pm n}$ .

**Proposición 3.0.1.** *Si  $\gamma^n p = q$  para  $p, q \in \partial\overline{\Delta}$ , entonces  $p \in \overline{X}_{-n}$  y  $q \in \overline{X}_n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $p$  fuera punto exterior de  $X_{-n}$  entonces  $\gamma^n p = q$  sería un punto interno de  $X_n$ , contradiciendo la hipótesis. Luego  $p \in \text{Int}(X_{-n}) \cup X_{-n}$  y por lo tanto  $q \in \text{Ext}(X_n) \cup X_n$ .

Si  $q$  fuera punto exterior de  $X_n$ , entonces  $\gamma^{-n} q = p$  sería punto interior de  $X_{-n}$ , contradiciendo la hipótesis. Luego  $q \in X_n$  y  $p = \gamma^{-n} q \in X_{-n}$ . El mismo razonamiento se aplica también en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , llevando así al resultado.  $\square$

En el contexto de la Proposición 3.0.1 el siguiente resultado es de alguna forma su inverso. Esencialmente, éste describe los apareamientos de los lados.

**Teorema 3.0.2.** *Para cualquier  $n \neq 0$ ,  $\gamma^{-n} \overline{X}_n^\partial = \overline{X}_{-n}^\partial$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se mostrará primero el resultado para dominios de Dirichlet. Sea  $x \in \mathbb{H}^3$  punto base de  $\Delta$ . Obsérvese que se sigue de la definición

de dominio de Dirichlet que  $X_n^\partial$  se puede escribir

$$\{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, x) = \rho(y, \gamma^n x) \leq \rho(y, \gamma^m x) \forall m\}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \gamma^{-n} X_n^\partial &= \{z \in \mathbb{H}^3 \mid \gamma^n z = y, y \in X_n^\partial\} \\ &= \{z \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(\gamma^n z, x) = \rho(\gamma^n z, \gamma^n x) \leq \rho(\gamma^n z, \gamma^m x) \forall m\} \\ &= \{z \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(z, \gamma^{-n} x) = \rho(z, x) \leq \rho(z, \gamma^{m-n} x) \forall m\} \\ &= \{z \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(z, x) = \rho(z, \gamma^{-n} x) \leq \rho(z, \gamma^k x) \forall k\} = X_{-n}^\partial. \end{aligned}$$

Por continuidad, al tomar las cerraduras en  $\Omega_{\widehat{\mathbb{C}}}$  se tiene que  $\gamma^{-n} \widehat{X}_n^\partial = \widehat{X}_{-n}^\partial$ , y por lo tanto

$$\gamma^{-n}(\overline{X}_n^\partial) = \gamma^{-n}(\widehat{X}_n^\partial \cup X_n^\partial) = \gamma^{-n}(\widehat{X}_n^\partial) \cup \gamma^{-n}(X_n^\partial) = \widehat{X}_{-n}^\partial \cup X_{-n}^\partial = \overline{X}_{-n}^\partial.$$

Para el caso de los dominios de Ford son necesarios algunos resultados más, por lo que la demostración para este caso se mostrará más adelante.  $\square$

Existe una simetría especial para los dominios de Ford y Dirichlet de grupos cíclicos generados por elementos elípticos o loxodrómicos. Sea  $\phi$  la transformación de Möbius dada por:

$$\phi : (z, t) \mapsto (1 - z, t).$$

Se observa que  $\phi$  es la extensión de Poincaré de

$$\phi = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Nótese que  $\phi$  es una rotación de  $\pi$  radianes alrededor de la geodésica que une  $\frac{1}{2}$  e  $\infty$ , por lo que  $\phi = \phi^{-1}$  y además preserva la orientación. Si  $\gamma$  fija 0 y 1, entonces  $\gamma$  es de la forma (1.5). Calculando, como  $\beta_1 = \lambda - \lambda^{-1}$

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \circ \gamma \circ \phi &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\lambda & -i\lambda \\ i\beta_1 & -i\beta_1 - i\lambda^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda + \beta_1 & \lambda - \beta_1 - \lambda^{-1} \\ \beta_1 & -\beta_1 - \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda^{-1} & 0 \\ \beta_1 & -\lambda \end{pmatrix} = \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\phi \circ \gamma^n \circ \phi = \gamma^{-n}$ .

Para la demostración de la siguiente Proposición, en el caso del dominio de Ford son necesarios algunos resultados.

**Lema 3.0.3.** Sean  $A$  y  $B$  dos transformaciones en  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Si sus círculos isométricos  $I_A, I_B$  respectivamente, se intersecan en un punto  $z$ , los círculos isométricos de las transformaciones  $A^{-1}$  y  $BA^{-1}$  también se intersecan en  $Az$ .

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$\begin{aligned} B'(z) &= (((BA^{-1})A))'(z) = (BA^{-1})'(A(z))A'(z) \\ \Rightarrow (BA^{-1})'(A(z)) &= \frac{B'(z)}{A'(z)} \end{aligned}$$

Si  $z \in I_A \cap I_B$ , entonces se cumple que  $|B'(z)| = |A'(z)| = 1$ , por lo que  $|(BA^{-1})'(A(z))| = 1$ , es decir,  $A(z) \in I_{BA^{-1}}$ .

Nótese que usando los factores de conformalidad este mismo lema se aplica también en los hemisferios isométricos en  $\mathbb{H}^3$   $\square$

Se entenderá por *lado visible* a la parte de  $X_n$  que es parte de la frontera del poliedro o polígono. El lema tiene como corolario el siguiente resultado.

**Teorema 3.0.4.** Sea  $G$  subgrupo de  $PSL_2(\mathbb{C})$  tal que  $\infty \in \Omega_{\hat{\mathbb{C}}}$ . Sea  $\sigma$  un subconjunto de algún hemisferio  $X_n$ . Si  $A(\sigma) \subset I_A$  es visible en el poliedro de Ford, entonces  $\sigma \subset I_{A^{-1}}$  también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que no es así. Entonces existe  $F \in G$  tal que  $I_F$  cubre una parte de  $\sigma$  en  $I_{A^{-1}}$ , por lo que, necesariamente  $I_F$  interseca a  $I_{A^{-1}}$  en un punto  $z \in \sigma$ . Si  $F = BA^{-1}$ , por el Lema 3.0.3, los hemisferios  $I_A$  e  $I_B$  también se intersecan en un punto  $w$  de la forma  $A^{-1}(z)$  y  $A(\sigma)$  no sería visible, véase la Figura 3.1.  $\square$

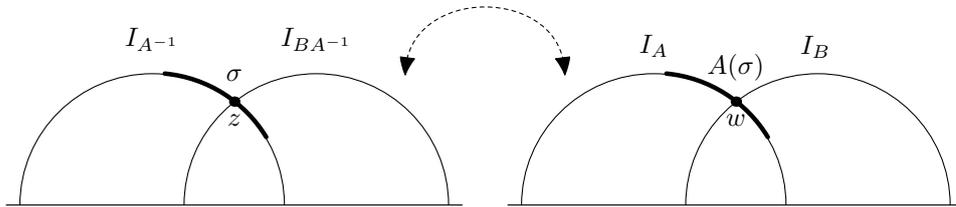


Figura 3.1: Demostración del Teorema 3.0.4

En virtud del Teorema 3.0.4 se sigue la demostración del Teorema 3.0.2 para los poliedros de Ford. También estos últimos resultados se usan para la siguiente Proposición.

**Proposición 3.0.5.** Si  $\gamma$  es una transformación de Möbius que fija 0 y 1, entonces  $\phi^{-1} \circ \gamma \circ \phi = \gamma^{-1}$ . Por lo tanto si  $\Delta$  es un dominio de Ford o Dirichlet para  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ , entonces  $\phi$  preserva  $\Delta$  y de hecho intercambia caras  $F_{\pm n}$ , aristas  $E_{i,j}$  y  $E_{-i,-j}$ , etcétera, así como también lo hace en  $\Omega_{\mathbb{C}}$ .

DEMOSTRACIÓN. Los cálculos hechos anteriormente y la unicidad de las extensiones de Poincaré muestran la primera afirmación.

Considérese

$$x = \left( \frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right)$$

el punto base para el dominio de Dirichlet para la acción de  $\Gamma$ . Al ser  $\phi$  elíptica de orden 2 que fija  $\frac{1}{2}$  e  $\infty$ , se tiene que  $\phi$  fija la geodésica que une dichos puntos, en particular  $\phi(x) = x$ , véase la Figura 3.2. Por la primera parte

$$\begin{aligned} \phi \circ \gamma^n &= \gamma^{-n} \circ \phi, \\ \phi(\gamma^n x) &= \phi \circ \gamma^n(x) = \gamma^{-n} \circ \phi(x) = \gamma^{-n}(x) \end{aligned}$$

Por lo que  $\phi(\gamma^n x) = \gamma^{-n} x$ . Es decir,  $\phi$  manda el punto  $\gamma^n x$  al punto  $\gamma^{-n} x \forall n$ . Por ser isometría se tiene que  $\phi(X_{-n}) = X_n$  y por lo tanto intercambia la cara  $F_n$  con la cara  $F_{-n}$ .

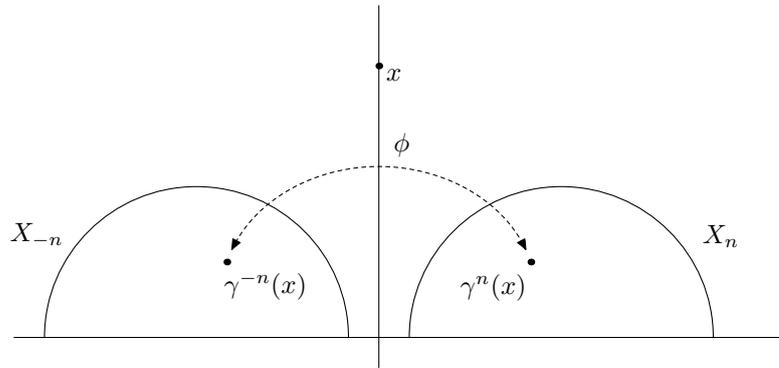


Figura 3.2:  $\phi$  manda  $\gamma^n x$  a  $\gamma^{-n} x$

Para el caso de los dominios de Ford, observése que  $\phi$  actúa como isometría euclídeana en  $\mathbb{H}^3$ , mientras que  $\gamma^n$  actúa euclídeamente en  $I_{\gamma^{-n}}$ .

Como  $\phi \circ \gamma^n = \gamma^{-n} \circ \phi$ , entonces la transformación del lado izquierdo actúa euclideanamente en  $I_{\gamma^{-n}}$ , mientras que la transformación del lado derecho actúa euclideanamente en  $\phi(I_{\gamma^n})$ . Por lo que se concluye que

$$I_{\gamma^{-n}} = \phi(I_{\gamma^n}) \text{ y también} \\ \phi(I_{\gamma^{-n}}) = I_{\gamma^n}.$$

Nuevamente,  $\phi$  intercambia los hemisferios isométricos  $X_n$  y  $X_{-n}$  y por el Teorema 3.0.4 se tiene que también intercambia caras. Finalmente,  $\phi$  preserva  $\Delta$  para el caso de Dirichlet ya que  $\phi$  fija el centro de éste  $(\frac{1}{2}, \frac{e^p}{2})$ . Para el caso del dominio de Ford, como  $\phi$  rota los hemisferios  $X_n$  es claro que los interiores de éstos se preservan. Las afirmaciones en  $\Omega_{\widehat{\mathbb{C}}}$  se siguen por continuidad.  $\square$

En el Teorema 3.0.2 y la Proposición 3.0.5 se observa que tanto  $\phi$  como  $\gamma^n$  llevan la cara  $F_{-n}$  a su inversa  $F_n$ ; sin embargo,  $\phi$  preserva la orientación mientras que  $\gamma^n$  la invierte. Aquí se les da a los hemisferios  $X_{\pm n}$  la orientación normal exterior lo cual induce una orientación a sus subconjuntos  $F_{\pm n}$ . Entonces, puesto que  $\gamma^n$  lleva el interior de  $X_{-n}$  al exterior de  $X_n$  esta transformación invierte la orientación, mientras que  $\phi$  no, ya que es una rotación sobre una línea vertical. Cabe señalar también que la Proposición 3.0.5 muestra que tanto el dominio de Dirichlet como de Ford son simétricos con respecto a la recta que une el punto  $\frac{1}{2}$  con  $\infty$ .

En lo que sigue se centrará el estudio a los objetos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Para un análisis en  $\mathbb{H}^3$  véase [6] y también [7]. Primero se aplicarán los resultados anteriores al caso cuando dos hemisferios  $\overline{X}_n$  y  $\overline{X}_m$  se intersecan en  $\partial\overline{\Delta}$  en un único punto  $p$  y este es el único punto visible de ambos hemisferios, es decir,  $\overline{X}_n^\partial$  y  $\overline{X}_m^\partial$  consisten ambos de un punto.

Por el Teorema 3.0.2,  $\overline{X}_{-n}$  interseca a  $\partial\overline{\Delta}$  en un único punto  $\gamma^{-n}p$  y  $\overline{X}_{-m}$  interseca a  $\partial\overline{\Delta}$  en el punto  $\gamma^{-m}p$ . Sin embargo, usando la Proposición 3.0.5 se tiene que

$$\{\gamma^{-n}p\} = \gamma^{-n}\overline{X}_n^\partial = \gamma^{-n}\phi(\overline{X}_{-n}^\partial) = \phi\gamma^n\overline{X}_{-n}^\partial = \phi(\overline{X}_n^\partial) = \phi(\{p\}) = \{\phi(p)\},$$

es decir,  $\gamma^{-n}p = \phi(p)$ . El mismo análisis para  $\gamma^{-m}$  muestra que  $\phi(p) = \gamma^{-m}p$  llevando a que  $\gamma^{-n}p = \gamma^{-m}p$ , por lo cual  $\gamma^{m-n}p = p$ .

Sin embargo los puntos fijos de las transformaciones loxodrómicas no pueden estar en  $\partial\overline{\Delta}$ . En este contexto, ésto se sigue de la Proposición 3.0.8.

Las anteriores observaciones demuestran el siguiente resultado.

**Proposición 3.0.6.** *Sea  $\gamma$  loxodrómica. Si  $\overline{X}_n^\partial$  y  $\overline{X}_m^\partial$  son tangentes en un punto y la cardinalidad de ambos conjuntos es uno, entonces  $n = m$ .*

También resulta que si  $\overline{X}_n$  y  $\overline{X}_m$  se intersecan en un vértice, arista o esquina, entonces  $\overline{X}_{(n-m)}$  también interseca a la frontera del dominio fundamental. Se recuerda que el superíndice  $\partial$  denota visibilidad.

**Proposición 3.0.7.** *Si  $\overline{X} = \overline{X}_n^\partial \cap \overline{X}_m^\partial \neq \emptyset$  para  $n \neq m$ , entonces  $\emptyset \neq \gamma^{-m}\overline{X} \subset \overline{X}_{(n-m)}^\partial$  y  $\emptyset \neq \gamma^{-n}\overline{X} \subset \overline{X}_{(m-n)}^\partial$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.0.2 se tiene que

$$\gamma^{-n}\overline{X} = \gamma^{-n}(\overline{X}_n^\partial \cap \overline{X}_m^\partial) = \gamma^{-n}(\overline{X}_n^\partial) \cap \gamma^{-n}(\overline{X}_m^\partial) \subseteq \gamma^{-n}(\overline{X}_n^\partial) = \overline{X}_{-n}^\partial \subseteq \partial\overline{\Delta},$$

y el mismo análisis para  $\gamma^{-m}$  muestra que tanto  $\gamma^{-n}\overline{X}$ , como  $\gamma^{-m}\overline{X}$  son subconjuntos no vacíos de la frontera  $\partial\overline{\Delta}$ , es decir,  $\gamma^{-n}\overline{X}$  es un conjunto visible.

Nótese que  $\gamma^{n-m}(\gamma^{-n}\overline{X}) = \gamma^{-m}\overline{X}$ . Entonces se cumple que para todo  $p \in \overline{X}$  existe  $q \in \overline{X}$  tal que

$$\gamma^{n-m}(\gamma^{-n}p) = \gamma^{-m}q.$$

Por la Proposición 3.0.1 se tiene que  $\gamma^{-n}p \in \overline{X}_{(m-n)}^\partial$  y  $\gamma^{-m}q \in \overline{X}_{(n-m)}^\partial$ , probando el resultado.  $\square$

Obsérvese que  $\overline{X}_n^\partial \cap \overline{X}_m^\partial$  puede ser una arista, un vértice, una esquina o el conjunto vacío.

Ahora se centrará la atención a las tangencias de los objetos  $X_n$ . Esto será crucial cuando el grupo sea generado por un elemento  $\gamma$  loxodrómico. Puesto que todo  $\overline{X}_n$  está centrado en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , cualquier punto de tangencia también estará en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Así, sólo centraremos la atención a  $\widehat{X}_n$  y a  $\widehat{\Delta}$ , objetos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Por las convenciones hechas con anterioridad acerca de  $\gamma$ , se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.0.8.**  *$1 \in \text{Int}(\overline{X}_n)$  y  $0 \in \text{Int}(\overline{X}_{-n})$  para toda  $n > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se probará primero el caso de los dominios de Dirichlet.

Se tienen 3 casos conforme a que  $\overline{X}_n$  y  $\overline{X}_{-n}$  sean ajenos, tangentes o que se intersequen, véase la Figura 3.3.

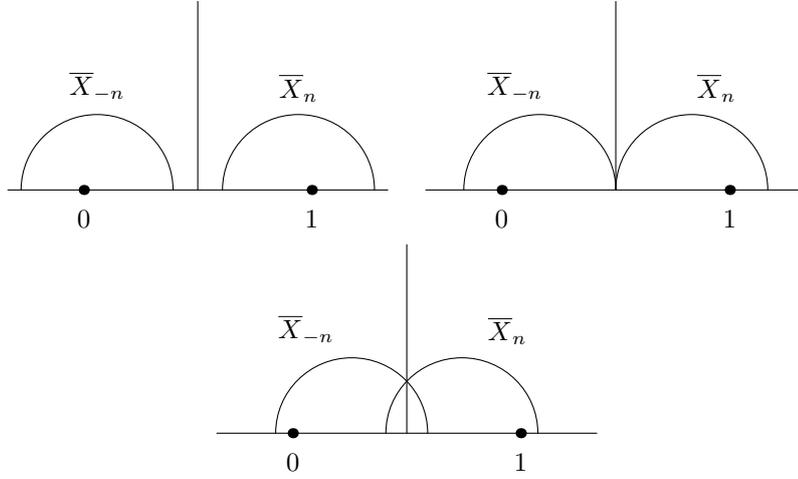


Figura 3.3: Posibles casos en cómo se presentan los objetos  $\overline{X}_{-n}$  y  $\overline{X}_n$

Sea  $x$  el centro del dominio de Dirichlet. Como  $\gamma^n X_{-n} = X_n$ , por convexidad y biyectividad se tiene

$$\gamma^n(\text{Ext}(X_{-n})) = \text{Int}(X_n), \quad (3.1)$$

$$\gamma^n(\text{Int}(X_{-n})) = \text{Ext}(X_n). \quad (3.2)$$

En consecuencia, en el caso 1 ( $\overline{X}_n$  y  $\overline{X}_{-n}$ , ajenos), como el 0 y el 1 son puntos fijos, necesariamente están en  $\text{Int}(X_n) \cup \text{Int}(X_{-n})$ . Esto también sucede en el caso 2 ( $\overline{X}_n$  y  $\overline{X}_{-n}$ , externamente tangentes).

En el caso 3 ( $\text{Int}(\overline{X}_n)$  y  $\text{Int}(\overline{X}_{-n})$ , se intersecan), las igualdades (3.1) y (3.2) implican que la situación de que ambos puntos estén en la intersección de los interiores no sucede, ya que son puntos fijos. Por lo que cada uno de estos puntos están en el interior de  $X_n$  (o  $X_{-n}$ ) y en el exterior de  $X_{-n}$  (o  $X_n$ ).

Finalmente, si se escribe  $\gamma^n = g_n f_n$ , donde  $f_n$  es una rotación en el plano  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$  y  $g_n$  es la hiperbólica con atractor 1, es claro que

$$\gamma^n x \in \left\{ (z, t) \mid \text{Re } z > \frac{1}{2} \right\} \quad \text{y}$$

$$\gamma^{-n} x \in \left\{ (z, t) \mid \text{Re } z < \frac{1}{2} \right\},$$

por lo que  $1 \in \text{Int}(X_n)$  y  $0 \in \text{Int}(X_{-n})$ ,  $\forall n > 0$ .

Para el caso de Ford, se recuerda que las igualdades (3.1) y (3.2) son consecuencia de la regla de la cadena. Para que  $0 \in \text{Int}(X_{-n})$ ,  $n > 0$  es necesario que

$$|C^{iso}(\gamma^{-n})| < R^{iso}(\gamma^{-n}), \quad \text{es decir,}$$

$$\left| \frac{\lambda^{-n}}{\beta_{-n}} \right| < \frac{1}{|\beta_{-n}|},$$

desigualdad que se cumple ya que  $|\lambda^{-n}| < 1$ . Aplicando  $\phi$  a esta configuración se llega a que  $1 \in \text{Int}(X_n)$ .  $\square$

Por la Proposición 3.0.8, si  $\widehat{X}_n$  y  $\widehat{X}_m$  son externamente tangentes, entonces  $n$  y  $m$  deben tener signos opuestos. Si  $\widehat{X}_n$  es internamente tangente a  $\widehat{X}_m$ , entonces  $n$  y  $m$  tienen el mismo signo y  $|n| > |m|$ , véase la Figura 3.4. Esto ya que 1 es el punto atractor y 0 el repulsor.

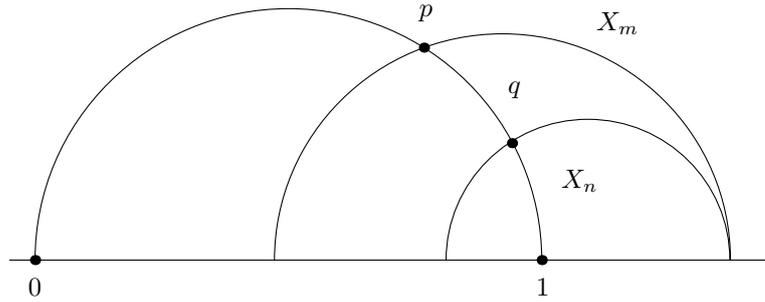


Figura 3.4: Si  $n > m > 0$  y  $X_n$  es internamente tangente a  $X_m$  entonces  $X_n \subset \text{Int}(X_m)$

**Definición 10.** Un punto  $p \in \partial\widehat{\Delta}$  es un punto liso de la frontera si  $p$  se encuentra en el interior de un lado.

Es posible para un punto liso  $p$  de la frontera que se encuentre en el interior de dos lados  $S_n$  y  $S_m$  que son externamente tangentes en  $p$ . También es posible que algún  $\widehat{X}_m$  sea internamente tangente a un lado  $S_n$  en un punto liso  $p$  (véase la Figura 3.5).

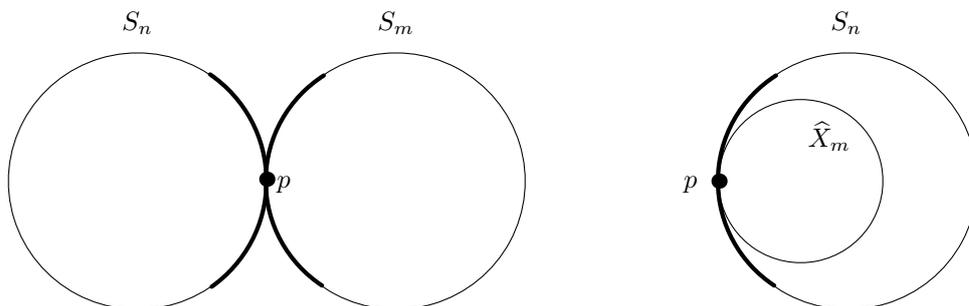


Figura 3.5: Posibles casos de tangencia entre distintos lados

**Proposición 3.0.9.** *Sea  $\gamma$  de Möbius loxodrómica.*

- a) *Si  $\widehat{X}_m$  es internamente tangente a  $S_n$  en un punto liso  $p$  y  $m > n > 0$ , entonces  $m = 2n$ .*
- b) *Si  $S_k$  es externamente tangente a  $S_n$  en un punto  $q$ , entonces  $k = -n$  y  $q = \frac{1}{2} \in \widehat{\mathbb{C}}$ .*

*Más aún, si alguno de los dos casos ocurre, entonces el otro también y  $\gamma^{-n}p = q$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase  $m > n > 0$  y  $\widehat{X}_m$  internamente tangente al lado  $S_n$  en el punto liso  $p$ .

Por la Proposición 3.0.5,  $\widehat{X}_{-m}$  es internamente tangente al lado  $S_{-n}$  en un punto  $t$ . Esto se logra observando que  $\phi(\widehat{X}_m) = \widehat{X}_{-m}$  y también  $\phi(S_n) = S_{-n}$ . Puesto que  $\phi$  preserva  $\partial\widehat{\Delta}$ . Por el Teorema 3.0.2 se tiene que

$$\gamma^{-m}\widehat{X}_m^\partial = \widehat{X}_{-m}^\partial = \{t\},$$

es decir  $t = \gamma^{-m}p$ . Además  $q = \gamma^{-n}p$  es un punto liso de  $S_{-n}$ , ya que  $\gamma^{-n}$  manda  $S_n$  a  $S_{-n}$  (véase la Figura 3.6). Luego  $\gamma^n q = p$  y por tanto  $t = \gamma^{n-m}q$ . Por la Proposición 3.0.1 se tiene que

$$t \in \widehat{X}_{n-m} \quad \text{y} \quad q \in \widehat{X}_{m-n}.$$

$\widehat{X}_{n-m}$  no puede ser externamente tangente a  $S_{-n}$ , ya que  $n - m < 0$  y  $-n < 0$ , es decir, tienen el mismo signo; ni tampoco puede ser que haya puntos de  $S_{-n}$  en el interior y exterior de  $\widehat{X}_{m-n}$ , ya que  $S_{-n}$  es visible (véase Figura 3.7). Por lo que  $\widehat{X}_{n-m}$  está contenido en  $\widehat{X}_{-n}$  o es internamente tangente a  $\widehat{X}_{-n}$ .

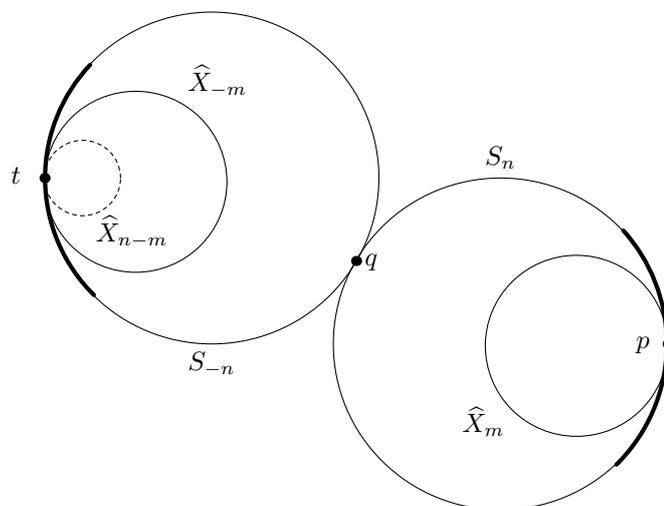


Figura 3.6: Parte (a) de la Proposición 3.0.9

El segundo caso es imposible, ya que si  $\widehat{X}_{-m} = \widehat{X}_{n-m}$ , entonces  $n$  sería 0, o de otra manera como  $\widehat{X}_{-m}$  y  $\widehat{X}_{n-m}$  son tangentes en un único punto  $t$  por la Proposición 3.0.6 se tendría que  $-m = n - m$ ; ambos casos llevan a la misma contradicción. Por lo cual  $S_{-n} \subseteq \widehat{X}_{n-m}$  y entonces  $\widehat{X}_{n-m} = \widehat{X}_{-n}$ , llevando a que  $n - m = -n$ , es decir,  $2n = m$  probando (a).

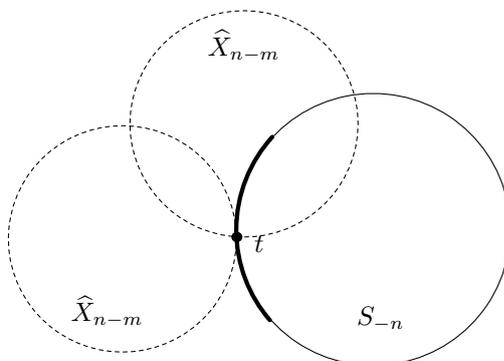


Figura 3.7: Casos imposibles en la demostración del inciso (a) de la Proposición 3.0.9

Como  $2n = m$  se tiene que  $\widehat{X}_{m-n} = \widehat{X}_n$ . También  $q = \gamma^{m-n}t$  y por la Proposición 3.0.1  $q \in \widehat{X}_{m-n}$ . Así  $q$  es un punto liso de  $S_{-n}$  y está sobre  $\widehat{X}_n$ .  $\widehat{X}_n$  y  $\widehat{X}_{n-m}$  no pueden intersectarse en dos puntos, ya que  $q$  es punto liso, pero se intersectan, por lo que son tangentes. Por simetría este punto de tangencia es  $\frac{1}{2}$ , llevando a la configuración de la parte (b).

Supóngase que  $S_k$  es externamente tangente a  $S_n$  en un punto liso  $q$ . Se sabe que  $k$  y  $n$  deben tener signos opuestos, por lo que se puede suponer que  $k < 0 < n$ . Por la Proposición 3.0.5,  $q' = \phi(q)$  debe ser punto liso, donde  $S_{-k}$  y  $S_{-n}$  son externamente tangentes. Sea  $p = \gamma^n q'$  y  $t = \gamma^k q'$ . Se tiene que  $p$  es punto liso de  $S_n$ ,  $t$  es punto liso de  $S_k$  y  $\gamma^{n-k} t = p$ . Por la Proposición 3.0.1 estas igualdades implican que  $p \in \widehat{X}_{n-k}$  y  $t \in \widehat{X}_{k-n}$ .

Por otro lado, como  $p$  es punto liso de  $S_n$ , esto implica que  $\widehat{X}_{n-k}$  es internamente tangente a  $S_n$  en  $p$ , pues  $n - k > n$ . Por (a) se tiene que  $n - k = 2n$ , llevando a  $n = -k$ . Como

$$\{q'\} = S_{-n} \cap S_{-k} = S_k \cap S_n = \{q\},$$

esto implica que  $q' = q = \frac{1}{2}$ , ya que éste es el único punto fijo de  $\phi$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Posteriormente se verá que esta situación sólo puede ocurrir cuando  $m = 2$  y  $n = 1$ .



# Capítulo 4

## Dominios de Ford en $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Los tipos de combinación de los dominios de Ford en  $\widehat{\mathbb{C}}$  para grupos cíclicos en  $PSL_2(\mathbb{C})$  fueron originalmente clasificados por Jørgensen (cf. [7]).

Se probará que para un elemento  $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$  loxodrómico que no fija  $\infty$ , el dominio de Ford en  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  de  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$  tiene dos, cuatro o seis lados. No es difícil mostrar que para los grupos cíclicos parabólicos el dominio de Ford tiene dos lados (o dos caras) tangentes en un punto.

Un ejemplo simple de poliedros de Dirichlet se obtiene al considerar como punto base

$$x = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

es decir, el centro de estos dominios de Dirichlet está sobre la geodésica que une los puntos fijos. No es difícil observar que para cualquier valor de la traza  $\tau$  dichos dominios consisten de dos lados. Nótese que el poliedro siempre consiste en la región comprendida entre 2 semiesferas ajenas. Un ejemplo de estos dominios se puede ver en la Figura 4.1 para  $\tau = \frac{1}{2}i$ . Un análisis detallado de poliedros (o polígonos) de Dirichlet con centro en puntos de la forma

$$x = \left( \frac{1}{2}, \frac{e^{\rho}}{2} \right),$$

donde  $\rho$  es la distancia de este punto a la geodésica fija, aparece en [6].

En este capítulo se usarán las propiedades de la combinatoria estudiadas en el capítulo anterior para examinar en detalle los dominios de Ford. En

adelante se escribirá simplemente  $C_n$  y  $R_n$  para referirse a los objetos  $C^{iso}(\gamma^n)$  y  $R^{iso}(\gamma^n)$ , respectivamente.

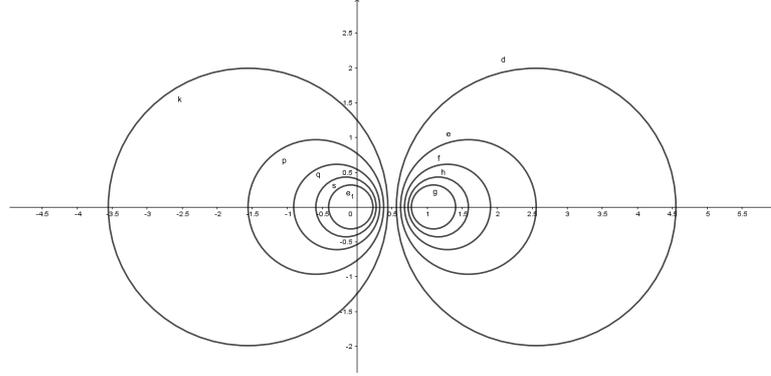


Figura 4.1: Poliedro (polígono) de Dirichlet con traza  $\tau = \frac{1}{2}i$  y centro  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

## 4.1. Generadores loxodrómicos

El método que se empleará para las transformaciones  $\gamma$  loxodrómicas será ver cómo el tipo de combinatoria geométrica del dominio fundamental  $\hat{\Delta}$  cambia con deformaciones continuas de la traza. Para esta aproximación es crucial la continuidad de los centros y radios de los círculos isométricos como funciones de la traza  $\tau$ .

**Lema 4.1.1.** *Sea*

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix},$$

donde  $\tau_n = \tau(\gamma^n) = \lambda^n + \lambda^{-n}$  y  $\beta_n = \lambda^n - \lambda^{-n}$ . Entonces:

a)  $\tau_{-n} = \tau_n$  y  $\beta_{-n} = -\beta_n$ .

b) Para todo  $n \geq 1$  se tiene

$$\beta_{n+1} = -\beta_{n-1} + \tau\beta_n,$$

donde  $\beta_0 = 0$ .

DEMOSTRACIÓN.

a) Por definición

$$\begin{aligned}\tau_{-n} &= \lambda^{-n} + \lambda^{-(-n)} = \lambda^{-n} + \lambda^n = \tau_n \quad \text{y} \\ \beta_{-n} &= \lambda^{-n} - \lambda^{-(-n)} = -(\lambda^n - \lambda^{-n}) = -\beta_n.\end{aligned}$$

b) Si  $n=1$  entonces

$$-\beta_0 + \tau\beta_1 = \tau\beta_1 = (\lambda + \lambda^{-1})(\lambda - \lambda^{-1}) = (\lambda^2 - \lambda^{-2}) = \beta_2.$$

Se supone el resultado para  $k$  y calculando

$$\begin{aligned}-\beta_k + \tau\beta_{k+1} &= -(\lambda^k - \lambda^{-k}) + (\lambda + \lambda^{-1})(\lambda^{k+1} - \lambda^{-k-1}) \\ &= -\lambda^k + \lambda^{-k} + \lambda^{k+2} - \lambda^{-k} + \lambda^k - \lambda^{-k-2} = \beta_{k+2},\end{aligned}$$

por lo cual se sigue el resultado por inducción.

□

Para empezar nótese que si  $|\tau| \geq 2$ , entonces la segunda parte del Lema 4.1.1 resulta en la desigualdad

$$|\beta_n| - |\beta_{n-1}| \leq |\beta_{n+1}| - |\beta_n|. \quad (4.1)$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}\tau\beta_n &= \beta_{n+1} + \beta_{n-1}. \\ \Rightarrow |\tau\beta_n| &= |\beta_{n+1} + \beta_{n-1}| \leq |\beta_{n+1}| + |\beta_{n-1}|.\end{aligned}$$

Como  $|\tau| \geq 2$ , entonces  $|\tau\beta_n| \geq 2|\beta_n|$ .

$$\begin{aligned}\therefore 2|\beta_n| &\leq |\beta_{n+1}| + |\beta_{n-1}| \quad \text{y} \\ |\beta_n| - |\beta_{n-1}| &\leq |\beta_{n+1}| - |\beta_n|.\end{aligned}$$

Además, para toda  $n \geq 1$  se tiene que  $R_n > R_{n+1}$ . Esto se obtiene observando que para toda  $n \geq 1$ , se da la desigualdad

$$|\beta_{n+1}| > |\beta_n|.$$

Esta última afirmación se demuestra por inducción fuerte sobre  $n$ . Si  $n = 1$  entonces usando la desigualdad (4.1)

$$|\beta_1| < |\beta_2| - |\beta_1| < |\beta_2|.$$

Supóngase que  $\forall 1 \leq i \leq n$  se tiene que  $|\beta_i| < |\beta_{i+1}|$ . En particular

$$|\beta_{n-1}| < |\beta_n|. \quad (4.2)$$

Usando nuevamente la desigualdad (4.1) para  $n$  y  $n + 1$  se obtienen

$$|\beta_n| - |\beta_{n-1}| < |\beta_{n+1}| - |\beta_n| \quad (4.3)$$

y

$$|\beta_{n+1}| - |\beta_n| < |\beta_{n+2}| - |\beta_{n+1}|. \quad (4.4)$$

Sumando (4.2), (4.3) y (4.4) se llega a que  $|\beta_{n+1}| < |\beta_{n+2}|$ .

**Teorema 4.1.2.** *Si  $|\tau| > 2$ , todos los círculos isométricos  $\widehat{X}_i$  son disjuntos y anidados.*

DEMOSTRACIÓN. Para que esto suceda es suficiente y necesario que

$$|C_n - C_{n+1}| + R_{n+1} < R_n \quad \forall n,$$

véase la Figura 4.2.

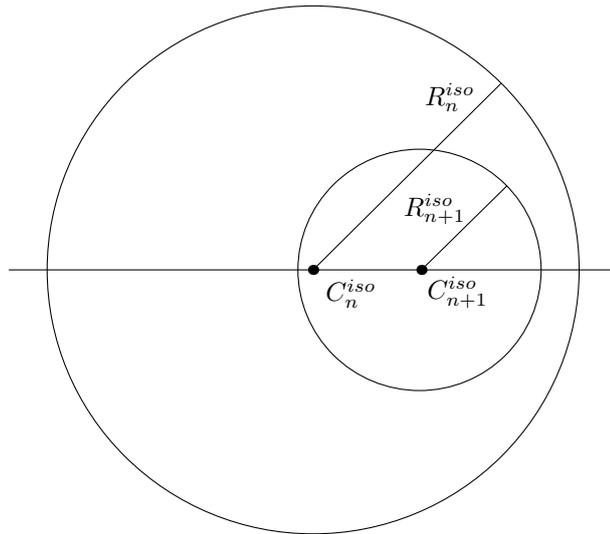


Figura 4.2: Condición suficiente y necesaria para que los  $\widehat{X}_n$  sean anidados

Tomando  $n > 0$ , esto ocurre si y sólo si

$$\left| \frac{\lambda^n}{\beta_n} - \frac{\lambda^{n+1}}{\beta_{n+1}} \right| < \frac{1}{|\beta_n|} - \frac{1}{|\beta_{n+1}|} \iff |\lambda^n \beta_{n+1} - \lambda^{n+1} \beta_n| < |\beta_{n+1}| - |\beta_n|$$

$$\iff |\lambda^n(\lambda^{n+1} - \lambda^{-(n+1)}) - \lambda^{n+1}(\lambda^n - \lambda^{-n})| < |\beta_{n+1}| - |\beta_n|$$

$$\iff |\lambda^{2n+1} - \lambda^{-1} - \lambda^{2n+1} + \lambda| < |\beta_{n+1}| - |\beta_n|$$

$$\iff |\beta_1| < |\beta_{n+1}| - |\beta_n|,$$

desigualdad que se cumple aplicando un número finito de veces la desigualdad (4.1). Aplicando  $\phi$  a esta configuración de  $\widehat{X}_i$  se llega a que todos estos objetos son disjuntos para toda  $n$  y además dichos dominios son simétricos. Se concluye entonces que  $\widehat{\Delta}$  está acotado por los lados  $S_1 = \widehat{X}_1$  y  $S_{-1} = \widehat{X}_{-1}$ , los cuales no se intersecan.  $\square$

Si ahora se varia  $\tau$ , el primer cambio en la combinatoria geométrica de  $\widehat{\Delta}$  sólo puede ocurrir cuando algún  $\widehat{X}_{\pm m}$  se vuelve internamente tangente a  $\widehat{X}_{\pm 1}$  o cuando  $\widehat{X}_{-1}$  se vuelve externamente tangente a  $\widehat{X}_1$  en algún punto  $q$ . Por la Proposición 3.0.9 los dos casos son los mismos y si  $\widehat{X}_m$  es internamente tangente a  $\widehat{X}_1$  y  $m > 1$ , entonces  $m = 2$ . Así, es suficiente ver para cuáles valores de la traza  $\tau$  los objetos  $\widehat{X}_1$  y  $\widehat{X}_{-1}$  son externamente tangentes.

Para que esto ocurra se debe de dar la igualdad

$$|C_{-1} - C_1| = R_1 + R_{-1}, \quad \text{es decir,}$$

$$\left| \frac{\lambda^{-1}}{\beta_{-1}} - \frac{\lambda}{\beta_1} \right| = \frac{1}{|\beta_1|} + \frac{1}{|\beta_{-1}|}.$$

Usando la primera parte del Lema 4.1.1, esta igualdad se puede reescribir como

$$\left| \frac{\lambda^{-1}}{-\beta_1} - \frac{\lambda}{\beta_1} \right| = \left| \frac{\lambda^{-1} + \lambda}{\beta_1} \right| = \frac{2}{|\beta_1|}.$$

**Teorema 4.1.3.**  $\widehat{X}_1$  y  $\widehat{X}_{-1}$  son externamente tangentes si y sólo si  $|\tau| = 2$ , el punto de intersección es  $\frac{1}{2}$ .

Se denota al conjunto donde esto sucede como

$$\Sigma_\infty = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| = 2\}.$$

La frontera del poliedro en  $\mathbb{H}^3$  consiste de dos semiesferas isométricas tangentes que se aparean, véase la Figura 4.3.

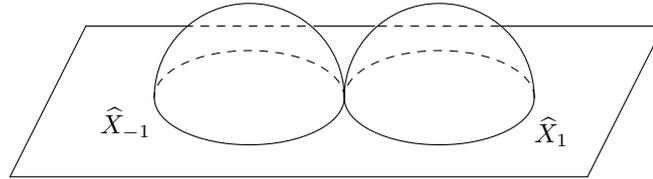


Figura 4.3: Frontera en  $\mathbb{H}^3$  del poliedro de Ford para  $|\tau| = 2$

Luego, el dominio fundamental de Ford tiene a  $\widehat{X}_{\pm 1}$  como sus dos lados disjuntos si  $\tau$  está en el exterior de  $\Sigma_\infty$ . Esto también es válido en  $\mathbb{H}^3$ . La frontera del poliedro de Ford en  $\mathbb{H}^3$  consiste de dos semiesferas isométricas ajenas que se aparean.

Se escribirá  $B_\infty$  para denotar al interior de  $\Sigma_\infty$  intersecado con el semiplano superior. Sea  $\tau = i \in B_\infty$ . Se tiene que el complemento del dominio de Ford para ese valor es conexo. En efecto, basta ver que  $Int(\widehat{X}_1)$  y  $Int(\widehat{X}_{-1})$  se intersecan. Eso se sigue ya que como todos los  $\widehat{X}_n$  contienen en su interior al 1 (si  $n > 0$ ) o al 0 (si  $n < 0$ ), dado cualquier  $z$  en el complemento de  $\widehat{\Delta}$ , se tiene que  $z \in Int(\widehat{X}_n)$ , para alguna  $n$ , si  $n < 0$ , se puede trazar una trayectoria de este punto al 0, dentro de  $\widehat{X}_n$ . También se puede encontrar una trayectoria que une  $z$  con  $z_0 \in Int(\widehat{X}_1) \cap Int(\widehat{X}_{-1})$ . La misma construcción se puede hacer para cualquier  $w \in \widehat{\Delta}^c$ ,  $w \in Int(\widehat{X}_m)$ ,  $m > 0$ , lo cual muestra la conexidad de  $\widehat{\Delta}^c$ , véase la Figura 4.4.

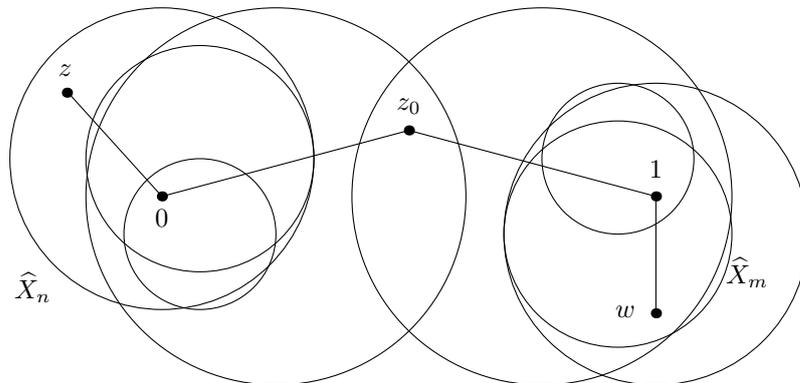


Figura 4.4:  $\widehat{\Delta}^c$  es conexo por trayectorias y por tanto conexo

Para ver que existe  $z_0 \in \text{Int}(\widehat{X}_1) \cap \text{Int}(\widehat{X}_{-1})$ , debe ocurrir que

$$|C_1 - C_{-1}| < R_{-1} + R_1 = \frac{1}{|\beta_1|} + \frac{1}{|\beta_{-1}|} = \frac{2}{|\beta_1|},$$

véase la Figura 4.5.

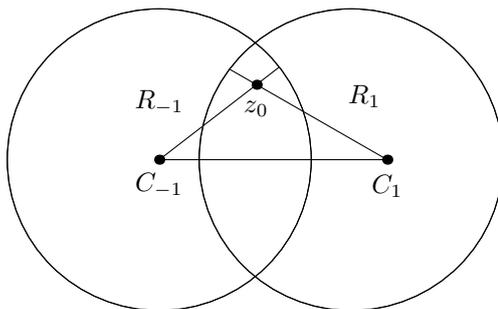


Figura 4.5: Condición suficiente y necesaria para que  $\widehat{X}_1$  y  $\widehat{X}_{-1}$  se intersequen en dos puntos,  $|C_1 - C_{-1}| < R_1 + R_{-1}$

Si  $\tau = i$ , esto se cumple pues  $\left| \frac{\lambda}{\beta_1} - \frac{\lambda^{-1}}{\beta_{-1}} \right| = \left| \frac{\tau}{\beta_1} \right| = \frac{1}{|\beta_1|}$ .

Se tiene que  $R_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (cf. [12] p. 46 y [10]). En consecuencia  $C_n \rightarrow 1$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  ya que  $1 \in \widehat{X}_n, \forall n > 0$ .

En virtud de la observación anterior, nótese que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|1 - C_1| < R_1 - \epsilon$ . Por lo que si  $n$  es suficientemente grande,  $\forall x \in \widehat{X}_n$ , se puede tomar  $\delta > 0$  tal que  $|x - 1| < \delta < \epsilon$ , por lo que

$$|x - C_1| \leq |x - 1| + |1 - C_1| < \delta + R_1 - \epsilon < R_1.$$

Como  $1 \in \text{Int}(\widehat{X}_n), \forall n > 0$ , se sigue de esta observación que a partir de cierto momento los  $\widehat{X}_n, n > 0$  se quedan completamente contenidos en  $\widehat{X}_1$ , por lo que no contribuyen a los lados del poliedro en  $\widehat{C}$ . Se ha probado el siguiente resultado.

**Proposición 4.1.4.**  $\widehat{\Delta}$  tiene un número finito de lados.

Tomando  $\tau^*$  en  $B_\infty$ , la continuidad de  $C_n$  y  $R_n$  como funciones de la traza implican que para  $\tau^*$  el complemento de  $\widehat{\Delta}$  también es conexo, ya que se puede trazar una trayectoria desde  $\tau = i$  hasta  $\tau^*$  dentro de  $B_\infty$  (véase la Figura 4.6), a lo largo de esta trayectoria la única manera de que  $\widehat{\Delta}$  o su frontera se vuelvan inconexos es cuando dos lados se vuelvan externamente tangentes, lo cual sólo sucede en  $\Sigma_\infty$ . Se tiene el siguiente resultado.

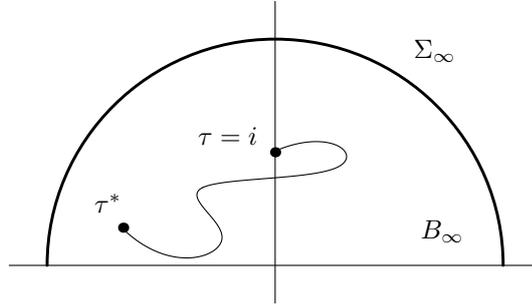


Figura 4.6: Para  $\tau \in B_\infty$ , tanto  $\widehat{\Delta}$  como su complemento son conexos

**Teorema 4.1.5.** *Para  $\tau \in B_\infty$ , el dominio fundamental  $\widehat{\Delta}$ , su complemento y su frontera son conexos.*

Se puede describir a  $\partial\widehat{\Delta}$  de manera única como una permutación cíclica, como una secuencia de los componentes de los lados en dirección contraria a las manecillas del reloj

$$S_{n_0}, \dots, S_{n_{k-1}},$$

tal que cada par de lados adyacentes se intersecan en una esquina, incluyendo  $S_{n_{k-1}}$  y  $S_{n_0}$ . Puede suceder que  $k = 6$ ; en tal caso existe una relación entre los índices de los lados que aparecen.

**Lema 4.1.6.** *Si  $\widehat{\Delta}$  es un dominio conexo de seis lados, entonces la secuencia de lados de  $\widehat{\Delta}$  es*

$$S_n, S_{n+m}, S_m, S_{-n}, S_{-m-n}, S_{-m}. \quad (4.5)$$

Puede suceder que los 6 lados estén contenidos en 4 círculos isométricos, es decir,  $n = m$  véase la Figura 4.12.

DEMOSTRACIÓN. Se empieza escribiendo los lados de  $\widehat{\Delta}$  como

$$S_{n_0}, S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}, S_{n_5}.$$

Sea  $S_{n_i}$  un lado. Por la Proposición 3.0.5 se tiene que  $\phi(S_{n_i}) = S_{-n_i}$ . Como  $\phi$  es rotación, necesariamente  $-n_i = n_{i+3}$ , ya que si  $-n_i = n_{i+1}$ , entonces  $\widehat{\Delta}$  tendría 2 lados y si  $-n_i = n_{i+2}$  se tendrían 4 lados (o si  $-n_i = n_{i+4}$  el poliedro tendría 8 lados), véase la Figura 4.7. Así

$$n_i = -n_{i+3}. \quad (4.6)$$

Por lo que resta de la prueba, la aritmética con el subíndice  $i$  será tomada módulo 6. Se enumeran las esquinas de  $\widehat{\Delta}$  como

$$c_i = S_{n_i} \cap S_{n_{i+1}},$$

Por el Teorema 3.0.2 se tiene que  $\gamma^{-n_i} c_i \in S_{-n_i}$  y como  $\gamma^{-n_i}$  invierte la orientación se concluye que  $\gamma^{-n_i} c_i = c_{i+2}$  (véase la Figura 4.7).

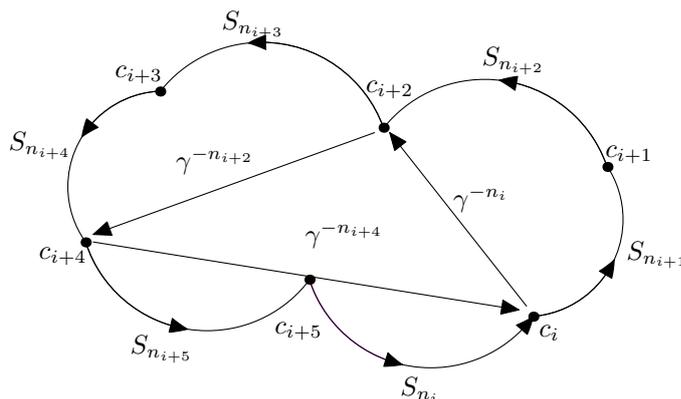


Figura 4.7: Demostración del Lema 4.1.6

Por consiguiente, el mismo razonamiento implica

$$\begin{aligned} \gamma^{-n_{i+2}} c_{i+2} &= c_{i+4} \quad \text{y} \\ \gamma^{-n_{i+4}} c_{i+4} &= c_i. \end{aligned}$$

Por lo que

$$c_i = \gamma^{-n_{i+4}} c_{i+4} = \gamma^{-n_{i+4}-n_{i+2}} c_{i+2} = \gamma^{-n_{i+4}-n_{i+2}-n_i} c_i.$$

Puesto que  $c_i$  no puede ser punto fijo se debe tener que

$$-n_{i+4} - n_{i+2} = n_i. \tag{4.7}$$

Finalmente, escribiendo  $n = n_0$  y  $m = n_2$ , usando (4.6) y (4.7) se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} n_1 &= -n_5 - n_3 = n_2 + n_0 = m + n, \\ n_3 &= -n_0 = -n, \\ n_4 &= -n_1 = -m - n \quad \text{y} \\ n_5 &= -n_2 = -m, \end{aligned}$$

llevando a la expresión (4.5)

□

La prueba se aplica también si  $n = m$ . Como un ejemplo de un poliedro de 6 lados, véase la Figura 4.12 para  $\tau = i$ .

**Lema 4.1.7.** Si  $\widehat{\Delta}$  tiene 4 lados, entonces la secuencia de lados de  $\widehat{\Delta}$  es

$$S_n, S_m, S_{-n}, S_{-m}. \quad (4.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Representando a  $\widehat{\Delta}$  como secuencia de sus lados

$$S_{n_0}, S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}.$$

Sea  $S_{n_i}$  un lado. Aplicando  $\phi$  se tiene  $\phi(S_{n_i}) = S_{-n_i}$ , por los mismos argumentos aplicados en el Lema 4.1.6 se tiene la siguiente igualdad

$$-n_i = n_{i+2}, \quad (4.9)$$

véase la Figura 4.8.

En lo que resta de la prueba la aritmética de los subíndices será tomada módulo 4. Si  $n = n_0$  y  $m = n_1$ , usando la igualdad 4.9, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} n_2 &= -n_0 = -n \quad \text{y} \\ n_3 &= -n_1 = -m, \end{aligned}$$

llevando a la expresión (4.8). □

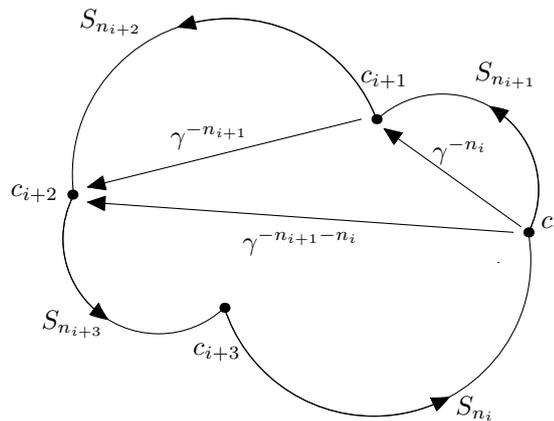


Figura 4.8: Demostración del Lema 4.1.7

En este último caso, si  $c_0$  es la esquina formada por los lados  $S_n$  y  $S_m$ ,  $c_1$  es la esquina formada por  $S_m$  y  $S_{-n}$ ,  $c_2$  la esquina formada por  $S_{-n}$  y  $S_{-m}$  y  $c_3$  la formada por  $S_{-m}$  y  $S_n$ , por el Teorema 3.0.2 se tiene que

$$\gamma^{-n}c_0 = c_1, \quad (4.10)$$

$$\gamma^{-m}c_1 = c_2 \quad \text{y} \quad (4.11)$$

$$\gamma^m c_3 = c_0. \quad (4.12)$$

Usando (4.10) y (4.11) se llega a  $\gamma^{-n-m}c_0 = c_2$ , y usando la Proposición 3.0.1 se tiene que

$$c_0 \in \widehat{X}_{n+m} \quad \text{y} \quad c_2 \in \widehat{X}_{-n-m}.$$

Además, usando (4.10) y (4.12) se tiene que  $\gamma^{m-n}c_3 = c_1$ , y usando la Proposición 3.0.1 se tiene que

$$c_1 \in \widehat{X}_{m-n} \quad \text{y} \quad c_3 \in \widehat{X}_{n-m}.$$

Por la Proposición 3.0.6, estos son los únicos hemisferios que son internamente tangentes a las esquinas de un dominio de 4 lados, véase la Figura 4.9 Esta observación será de utilidad más adelante.

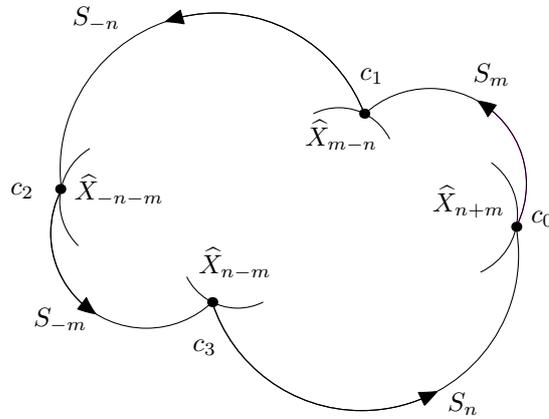


Figura 4.9:  $\widehat{X}_k$  incidentes a las esquinas de un polígono de 4 lados

Como ejemplos de dominios de Ford, se tiene un dominio de 2 lados tangentes para  $\tau = \sqrt{3} + i$  (véase la Figura 4.10); un dominio de 4 lados para  $\tau = 1 + i$  (véase la Figura 4.11); y un dominio de 6 lados para  $\tau = i$  (véase la Figura 4.12).

Ahora se tienen herramientas suficientes para demostrar el resultado central del trabajo.

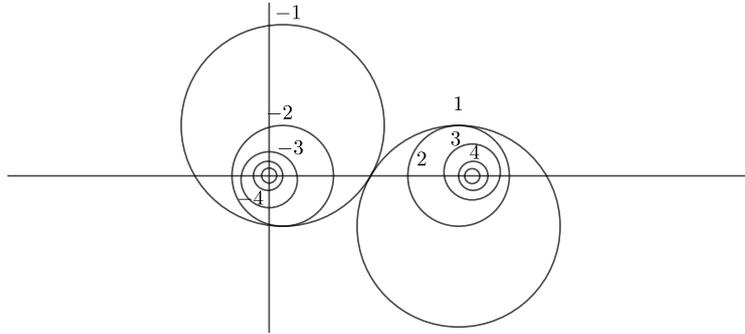


Figura 4.10: Dominio de Ford para  $\tau = \sqrt{3} + i$

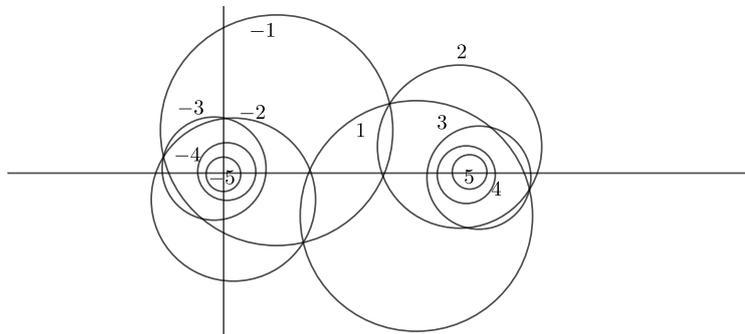


Figura 4.11: Dominio de Ford para  $\tau = 1 + i$

**Teorema 4.1.8.** *Para todo  $\tau \in B_\infty$ ,  $\partial\widehat{\Delta}$  tiene 4 o 6 lados.*

DEMOSTRACIÓN. Lo que resta probar es que, para un dominio  $\widehat{\Delta}$  de 4 o 6 lados, si se varía  $\tau$  continuamente en  $B_\infty$ , entonces  $\widehat{\Delta}$  para la nueva  $\tau$  puede tener sólo 4 o 6 lados (ya que para que tenga 2 lados debe tener los lados  $S_{\pm 1}$  externamente tangentes y eso sólo ocurre en  $\Sigma_\infty$ ).

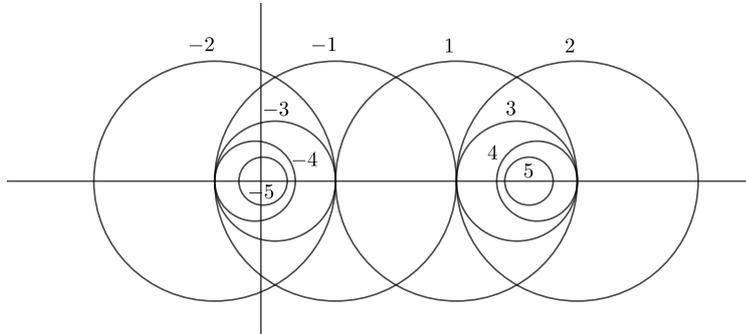


Figura 4.12: Dominio de Ford para  $\tau = i$

Observése que la Proposición 3.0.9 es una caracterización de cuándo hay  $\widehat{X}_k$  internamente tangentes en puntos suaves de los lados, y esto ocurre si y sólo si el punto  $\frac{1}{2}$  es un punto visible. Este punto no es visible para  $\tau \in B_\infty$ , ya que

$$\left| \frac{1}{2} - C_1 \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\beta_1} \right| = \frac{|\tau|}{2|\beta_1|} < \frac{1}{|\beta_1|} \iff |\tau| < 2,$$

véase la Figura 4.13.

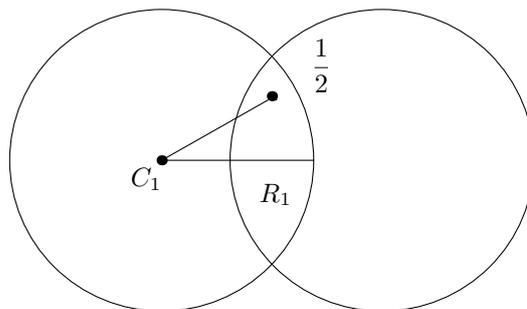


Figura 4.13:  $\frac{1}{2}$  no es punto visible para  $\tau \in B_\infty$

Así, si  $\tau \in B_\infty$ , entonces  $\frac{1}{2}$  no es un punto visible y no hay tangencias internas de algún  $\widehat{X}_k$  en un punto suave de un lado  $S_n$ . Luego, sólo se centrará la atención en las esquinas de los dominios fundamentales, ya que ahí pueden aparecer nuevos lados.

- **Caso 1**  $\widehat{\Delta}_\tau$  tiene 4 lados.

En la observación después del Lema 4.1.7 se encontraron los  $\widehat{X}_k$  que son incidentes en las esquinas de  $\widehat{\Delta}_\tau$ . Con un cambio suficientemente pequeño en  $\tau$  para pasar de  $\widehat{\Delta}_\tau$  a  $\widehat{\Delta}_\sigma$  y por la simetría de  $\widehat{\Delta}_\tau$ , los siguientes son los únicos casos posibles:

- $\widehat{\Delta}_\sigma$  continua con 4 lados, donde  $\sigma$  es cercana a  $\tau$ .
- Dos de las cuatro curvas  $\widehat{X}_{\pm n \pm m}$  pasan a través de las esquinas y contribuyen a nuevos lados de  $\widehat{\Delta}_\sigma$ .
- Las cuatro curvas contribuyen a los lados de  $\widehat{\Delta}_\sigma$ .

Este último caso es el que se debe excluir.

Supóngase que se da el tercer caso, entonces la secuencia de los lados sería

$$S_n, S_{n+m}, S_m, S_{m-n}, S_{-n}, S_{-n-m}, S_{-m}, S_{n-m},$$

véase la Figura 4.14.

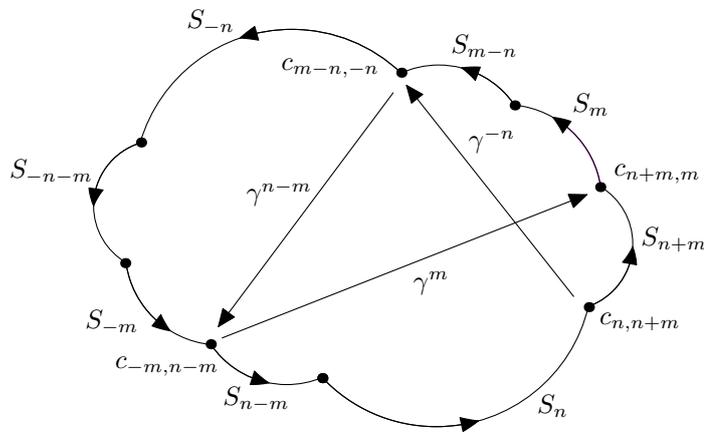


Figura 4.14: Las curvas  $\widehat{X}_{\pm n \pm m}$  no pueden contribuir a los lados de  $\widehat{\Delta}$

Si se escribe  $c_{i,j}$  para denotar la esquina formada por los lados  $S_i$  y  $S_j$ , entonces

$$\begin{aligned} \gamma^{-n} c_{n,n+m} &= c_{m-n,-n}, \\ \gamma^{n-m} c_{m-n,-n} &= c_{-m,n-m} \quad \text{y} \\ \gamma^m c_{-m,n-m} &= c_{n+m,m}, \end{aligned}$$

luego,

$$c_{n,n+m} = \gamma^n c_{m-n,-n} = \gamma^m c_{-m,n-m} = c_{n+m,m}.$$

Claramente  $c_{n,n+m} \neq c_{n+m,m}$ , dejando fuera este caso.

- **Caso 2**  $\widehat{\Delta}_\tau$  tiene 6 lados, quizá dos pares de ellos se encuentran sobre dos círculos isométricos.

Se debe probar que en este caso ningún  $\widehat{X}_k$  puede ser incidente a ninguna esquina de  $\widehat{\Delta}_\tau$ , para que los dominios con la misma configuración de  $\widehat{\Delta}_\tau$  correspondan a un conjunto abierto de trazas en  $B_\infty$ . Así, pequeñas deformaciones de  $\tau$  en este conjunto no incrementan el número de lados.

Supóngase lo contrario, que  $\widehat{X}_k$ , para alguna  $k$ , es incidente a la esquina  $c_{n,n+m}$ , donde se nombran las esquinas como en el caso anterior, véase la Figura 4.15. Renombrando si es necesario, cualquier esquina de esta forma escribiendo  $n+m = u$ , etcétera. Por la simetría de  $\widehat{\Delta}_\tau$ ,  $\widehat{X}_{-k}$  debe ser incidente a  $c_{-n,-n-m}$ . Se tiene que  $\gamma^n c_{-n,-n-m} = c_{-m,n}$ , con lo cual

$$\begin{aligned} \gamma^{n-k} c_{n,n+m} &= \gamma^n (\gamma^{-k} c_{n,n+m}) = \gamma^n c_{-n,-n-m} = c_{-m,n} \\ \therefore \gamma^{n-k} c_{n,n+m} &= c_{-m,n}. \end{aligned}$$

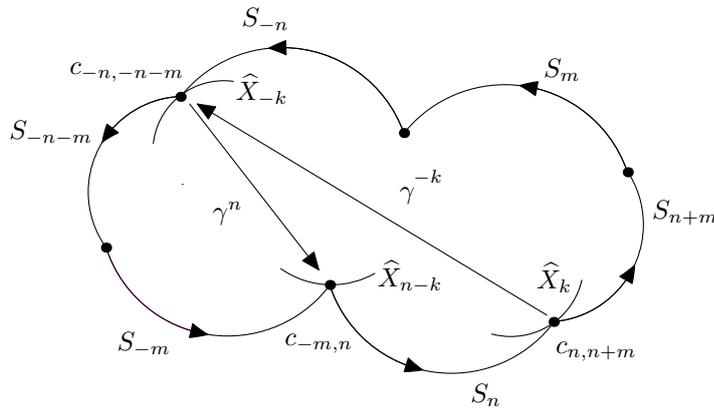


Figura 4.15: Caso 2 del Teorema 4.1.8

Por la Proposición 3.0.1 se tiene que  $c_{n,n+m} \in \widehat{X}_{k-n}$ . Sin embargo, si  $\widehat{X}_{k-n}^\partial = c_{n,n+m}$  la Proposición 3.0.6 diría que  $\widehat{X}_k = \widehat{X}_{k-n}$ , es decir,  $n = 0$ , lo cual no es posible. Luego, los únicos casos posibles serían  $\widehat{X}_{k-n} = \widehat{X}_n$  o  $\widehat{X}_{k-n} = \widehat{X}_{n+m}$ .

- Subcaso a):  $\widehat{X}_{k-n} = \widehat{X}_n$ .

Se tiene que  $k = 2n$  y

$$\gamma^{m-n} c_{n,n+m} = \gamma^{m+n} \gamma^{-2n} c_{n,n+m} = \gamma^{m+n} c_{-n,-n-m} = c_{n+m,m},$$

véase la Figura 4.16.

Por la Proposición 3.0.1 se tiene que  $c_{n,n+m} \in \widehat{X}_{n-m}$ , y por la Proposición 3.0.6 se tiene que  $n - m = k = 2n$ . Pero entonces se tendría que  $\widehat{\Delta}_\tau$  tendría dos lados.

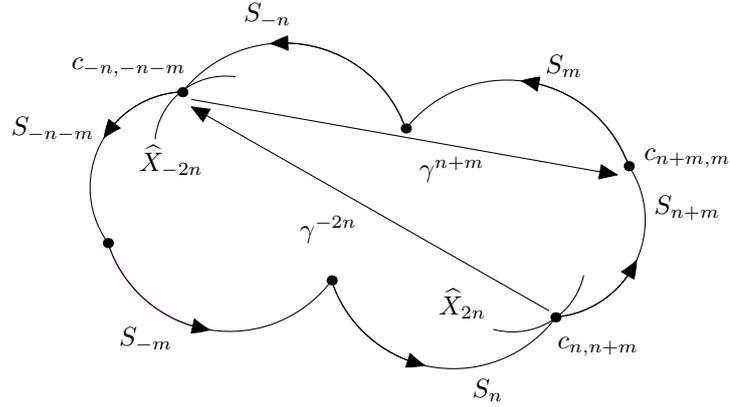


Figura 4.16: Subcaso a) del caso 2 del Teorema 4.1.8, cuando  $k = 2n$

- Subcaso b):  $\widehat{X}_{k-n} = \widehat{X}_{n+m}$ .

Se tiene que  $k = 2n + m$  y entonces (véase la Figura 4.17)

$$\begin{aligned} c_{m,-n} &= \gamma^{n+m} \gamma^{-2n-m} \gamma^n c_{m,-n} \\ &= \gamma^{n+m} \gamma^{-2n-m} c_{n,n+m} \\ &= \gamma^{n+m} c_{-n,-n-m} = c_{n+m,m}, \end{aligned}$$

□

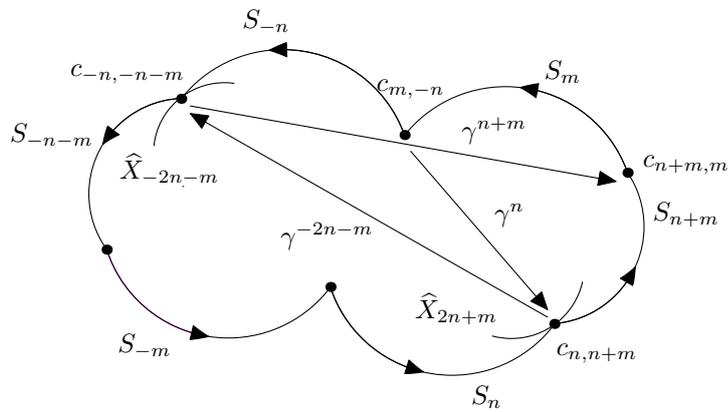


Figura 4.17: Subcaso b) del caso 2 del Teorema 4.1.8, cuando  $k = 2n + m$

Resulta que los valores de la traza para los que el polígono tiene 4 lados es un conjunto cerrado en  $\mathbb{H}^3$  y los valores para los cuales tiene 6 lados es un conjunto abierto. Esto se relaciona con las sucesiones de Farey (cf. [6]).



# Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [2] GROMOV, M, Hyperbolic manifolds (according to Thurston and Jørgensen), *Bourbaki Seminar* 1979-80.
- [3] MACLACHLAN, C. AND REID, A. W., *The arithmetic of Hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 219, Springer Verlag, 2003.
- [4] MC MULLEN, C., Rational Maps and Kleinian Groups, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, Japan 1990.
- [5] MARDEN, A., *Outer circles, An introduction to hyperbolic 3-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.
- [6] DRUMM, TODD, PORITZ, A., Ford and Dirichlet domains for cyclic subgroups of  $PSL_2(\mathbb{C})$  acting on  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  and  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ , *Conformal geometry and dynamics, vol. 3 (1999)*.
- [7] JØRGENSEN, T., On cyclic groups of Möbius transformations, *Math. Scand.* 33, 250-260, 1973.
- [8] LANG, S., *Linear Algebra*, Addison Wesley, 1972.
- [9] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, 2da edición, Las prensas de ciencias, UNAM, 2015.
- [10] LEHNER, J., *Discontinuous Groups and Automorphic Function*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1964.
- [11] MOLINA, H. R., *Algunos aspectos del grupo clásico modular*, Tesis de licenciatura, 2009.
- [12] PÉREZ, J. S., *Polígonos fundamentales convexos y regiones de Ford en  $\widehat{\mathbb{C}}$* , Tesis de licenciatura, 2010.

- [13] RATCLIFFE, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, 1995.
- [14] ZAMORANO, R. I., *Una introducción a los polígonos y poliedros de Dirichlet*, Tesis de licenciatura, 2012.