



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMAS DE NO PELO EN TEORÍAS DE  
GRAVITACIÓN ESCALAR-TENSORIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ALEJANDRO AGUILAR NIETO

TUTOR



DR. YURI BONDER GRIMBERG  
CIUDAD DE MÉXICO 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Resumen

En 1915 Albert Einstein revolucionó nuestro entendimiento de la física al formular la teoría de Relatividad General, la cual es una teoría de gravitación para la cual se han probado exitosamente todas sus predicciones como lo son la deflexión de la luz en presencia de un campo gravitacional, la detección de ondas gravitacionales y la existencia de agujeros negros. Los agujeros negros son objetos que se distinguen por tener un horizonte de eventos, que es la frontera de una región del espacio-tiempo a partir de la cual la información no puede salir debido a su curvatura.

A pesar de ser una de las teorías físicas más exitosas, la Relatividad General presenta problemas al tratar de explicar fenómenos como la expansión acelerada del universo y el problema de la materia oscura para la formación de galaxias, además de que no existe una formulación cuántica exitosa de ésta. Debido a esto se han creado nuevas teorías con modificaciones a partir de distintos Lagrangianos. En particular, en esta tesis se presenta una modificación de la teoría mediante un acoplamiento no mínimo del término gravitacional a un campo de materia escalar dinámico.

Debido a que se busca que la teoría sea consistente con las observaciones se busca que pueda explicar los fenómenos ya probados con la teoría de Relatividad General.

En el caso de soluciones de agujeros negros estacionarios, se tiene una conjetura llamada de no-pelo, la cuál implica que un agujero negro solo se puede caracterizar por su carga, su masa, y su momento angular, esto quiere decir que si modificamos la teoría con un campo de materia, este no influye en la forma de la solución del agujero negro.

Jacob Bekenstein obtuvo una demostración de esta conjetura para el caso de un agujero negro estático con horizonte regular asintóticamente plano. La prueba

consiste en utilizar las ecuaciones de movimiento de dicho campo y mostrar que la única solución posible consistente con las ecuaciones de Einstein es que dicho campo sea constante.

En esta tesis se revisan algunas de las pruebas de la conjetura de no-pelo y se realiza una prueba análoga a la realizada por Bekenstein para una teoría de gravedad modificada tipo escalar-tensorial.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>1. Relatividad Especial y Tensores</b>	<b>1</b>
1.1. Álgebra Tensorial . . . . .	2
1.2. Relatividad Especial . . . . .	6
<b>2. Relatividad General</b>	<b>11</b>
2.1. Derivada Covariante y Geodésicas . . . . .	11
2.2. Curvatura . . . . .	15
2.3. Ecuaciones de Einstein . . . . .	17
2.4. Gravedad linealizada: Límite Newtoniano y Ondas Gravitacionales	20
2.5. Cosmología . . . . .	25
<b>3. Agujeros Negros</b>	<b>28</b>
3.1. Geometría de Schwarzschild . . . . .	28
3.2. Corrimiento al rojo gravitacional y trayectorias en el espacio-tiempo de Schwarzschild . . . . .	32
3.3. Extensión de Kruskal y estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild. . . . .	38
3.4. Otras soluciones de Agujeros Negros . . . . .	43
<b>4. Teoremas de No-Pelo</b>	<b>47</b>
4.1. Prueba de Bekenstein . . . . .	47
4.2. Prueba de Sudarsky . . . . .	50
4.3. Teorema de no-pelo en teorías de Brans-Dicke. . . . .	54
<b>5. Prueba del Teorema de no pelo con acoplamiento no mínimo</b>	<b>58</b>

<b>6. Conclusiones</b>	<b>66</b>
<b>A. Extension de la prueba de Sudarsky para el Teorema de no pelo en teorías escalar-tensorial</b>	<b>68</b>
<b>B. Formas diferenciales y teorema de Stokes</b>	<b>71</b>
<b>Referencias</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Relatividad Especial y Tensores

En 1905 Einstein revolucionó el mundo de la física con su teoría de la Relatividad Especial, que a diferencia de la teoría de mecánica Newtoniana sí resultó ser compatible con las ecuaciones de Maxwell de Electromagnetismo. Esto debido a que en la teoría Newtoniana se suponía que el tiempo era el mismo para distintos puntos en el espacio, mientras Einstein pensó que el espacio y el tiempo formaban parte de la misma estructura y no eran entes separados, sino un espacio-tiempo. Además de esto, supuso también los siguientes postulados como verdaderos:

- 1) Suponer que todo observador inercial experimenta la misma física sin importar el marco de referencia en el que se encuentre.
- 2) La velocidad de la luz tiene un valor fijo y finito para todos los observadores inerciales, el cuál está dado por  $c=300,000 \text{ km/s}$ .

Esto trajo muchas consecuencias observables que describiremos más adelante y cambiaron el mundo de la física e hicieron esta teoría muy aceptada hasta el día de hoy. En este capítulo se describirán brevemente los resultados físicos de la teoría de la Relatividad Especial así como las matemáticas necesarias para poder describir esta teoría.

## 1.1. Álgebra Tensorial

Einstein escribió su teoría de manera covariante, es decir con tensores, los cuales son entidades algebraicas tal que son lineales para todas sus entradas y cuya descripción es válida para cualquier sistema de referencia. Dichos objetos se definen sobre variedades diferenciales  $M$ , que son conjuntos  $n$ -dimensionales localmente euclidianos con topología Hausdorff y existen difeomorfismos llamadas cartas que mapean conjuntos abiertos de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  [5].

Sobre dichas variedades se pueden mapear curvas  $x^\alpha$ , que son funciones definidas de  $\mathbb{R}$  en  $M$ , si  $\lambda$  es el parámetro de la curva entonces podemos definir al vector tangente a la curva como  $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ . Esto se puede hacer para todas las curvas que pasen en cualquier punto de la variedad, entonces si la variedad es  $n$ -dimensional tendremos solo  $n$  direcciones linealmente independientes, por lo que podemos formar una base canónica de vectores dados por  $e_\alpha$ , además el conjunto de vectores tangentes en un punto  $\mathbb{P}$  en la variedad  $M$  se conoce como espacio tangente  $T_{\mathbb{P}}M$ , y es un espacio vectorial de dimensión  $n$ [5]. Así un vector  $V$  se puede escribir como

$$V = v^\alpha e_\alpha, \quad (1.1)$$

donde  $v^\alpha$  es la componente del vector en la dirección  $e_\alpha$ , además se está haciendo uso de la convención de la suma de Einstein, por lo cuál se hace una suma sobre los índices repetidos, es decir, se están sumando todas las componentes de  $V$  en las direcciones de la base  $e_\alpha$ , donde  $\alpha$  corre de 0 a  $n$ .

Un vector se sigue viendo igual aunque se haga un cambio de base, esto quiere decir que si pasamos de una base  $e_\alpha$  a una base  $e'_\beta$ , sabiendo que la forma en que transforma la base está dado por

$$e_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta e'_\beta \quad (1.2)$$



donde  $\Lambda_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$ . Entonces como

$$V = v^{\alpha} e_{\alpha} = v^{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\beta} e'_{\beta} = v'^{\beta} e'_{\beta}, \quad (1.3)$$

se tiene que las componentes del vector transformarán como

$$v'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} v^{\beta}. \quad (1.4)$$

Los vectores son un caso particular de tensor de rango (1,0) o vectores contra-variantes y se denotan sus componentes con índices arriba. Podemos utilizar el producto tensorial entre distintos vectores para construir tensores de un rango más alto, es decir, tensores de rango (n,0).

Ahora podemos definir un covector recordando que en cada punto  $\mathbb{P}$  en la variedad existe un espacio vectorial conocido como espacio tangente  $T_{\mathbb{P}}M$ , además se sabe que este espacio tendrá un dual asociado, denotado por  $T_{\mathbb{P}}^*M$ , en el cuál se definirán los covectores, o vectores duales. Estos objetos son funciones lineales que toman vectores como argumento y se obtiene un valor real. Este espacio dual también es un espacio vectorial, por lo tanto existirá una base  $dx^{\mu}$  de dimensión  $n$ , con la cuál se podrá escribir cualquier covector  $w$  como

$$w = w_{\mu} dx^{\mu}. \quad (1.5)$$

Además esta base será dual a la base  $e_{\mu}$ , esto quiere decir que se satisface

$$dx^{\nu}(e_{\mu}) = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (1.6)$$

donde a  $\delta_{\mu}^{\nu}$  se le conoce como delta de Kronecker y toma como valores 1 si  $\nu = \mu$  y 0 en otro caso.

Aplicar un vector  $V$  a un covector  $w$  da como resultado un escalar real, o tensor de rango (0,0) el cual es un invariante para cualquier sistema de coordenadas, esto se escribe como

$$w(V) = w_\nu v^\mu dx^\nu(e_\mu) = w_\mu v^\mu = w_{\mu'} v^{\mu'}, \quad (1.7)$$

de aquí es fácil ver que la regla de transformación para un covector es

$$w'_\mu = \Lambda^\nu_\mu w_\nu. \quad (1.8)$$

Los covectores, de manera análoga a los vectores, son otro tipo especial de tensor conocido como tensor de rango (0,1) y sus componentes se denotan con índices abajo. De igual forma se puede utilizar el producto tensorial entre estos para formar tensores de rango (0,n).

Teniendo esto ya podemos definir tensores de rango (n,l), estos tensores toman como argumento n covectores y l vectores, y se obtiene un valor real. La regla de transformación para las componentes de estos objetos está dada por [28]

$$T^{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_n}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \Lambda^{\mu'_2}_{\mu_2} \dots \Lambda^{\mu'_n}_{\mu_n} \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \Lambda^{\nu_l}_{\nu'_l} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}. \quad (1.9)$$

Existen 2 operaciones que se pueden usar para construir tensores, estas son la contracción y el producto externo. La contracción consiste en un mapeo de tensores de rango (n,l) a uno de rango (n-1,l-1), y se define contrayendo algún índice contravariante del tensor con un índice covariante. La otra operación llamada producto exterior consiste en mapear 2 tensores de rangos (n,l) y (k,j) a un tensor de rango (n+k,l+j).

Ahora, cualquier tensor de rango (0,2) puede dividirse en su parte simétrica denotado por ( ) y antisimétrica, denotado por [ ], esto es

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}, \quad (1.10)$$

donde la parte simétrica se escribe como

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad (1.11)$$

y la parte antisimétrica como

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (1.12)$$

Existe un tensor de rango (0,2) muy importante debido a que es el principal objeto de estudio en relatividad, éste se conoce como tensor métrico y define el producto punto de dos vectores, es decir

$$g(U, V) = u^\alpha v^\beta g(e_\alpha, e_\beta) = u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}, \quad (1.13)$$

por lo que la norma de un vector  $V$  se escribe como

$$|V|^2 = g(V, V) = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, \quad (1.14)$$

además, en un sistema de referencia de Lorentz, sus componentes se representan como

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta, \quad (1.15)$$

donde  $\eta_{\alpha\beta}$  es la métrica de Minkowski, característica del espacio-tiempo plano. En esta tesis se elegirá a la signatura de la métrica como  $(-, +, +, +)$ . Este tensor es totalmente simétrico, además, el tensor métrico nos proporciona un mapeo natural para transformar componentes contravariantes en covariantes, es decir, podemos usarlo para bajar los índices de los componentes de un tensor de la forma

$$g_{\mu\nu} V^\nu = V_\mu. \quad (1.16)$$

Debido a que los tensores se definen en algún punto específico de la variedad no existe una manera natural de compararlos en distintos puntos de la variedad, por lo que no existe una noción natural de la derivada de un tensor. Sin embargo dado un campo vectorial  $\xi$  definido en la variedad podemos definir un operador derivada  $\mathcal{L}_\xi$  llamado derivada de Lie el cual hace la comparación infinitesimal del campo tensorial sobre la curva integral dada por el campo vectorial, y se define para un tensor de rango (k,n) como [5]

$$\mathcal{L}_\xi T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \xi^\mu \partial_\mu \left( T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \right) - \sum_{i=1}^k T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \mu \dots \alpha_k} \partial_\mu \xi^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n T_{\beta_1 \dots \mu \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \partial_{\beta_i} \xi^\mu. \quad (1.17)$$

En una variedad pueden existir campos vectoriales  $\xi$  tal que dejan invariante a la métrica bajo transportes en las curvas integrales que describen, es decir, forman isometrías. Ahora bien, un campo vectorial que forma isometrías se conoce como campo de Killing, y satisface

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.18)$$

desarrollando la derivada de Lie se obtiene la ecuación que deben satisfacer los campos de Killing, la cuál está dada por

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (1.19)$$

La existencia de estos campos de Killing implican la existencia de una simetría en la variedad, además se pueden utilizar para encontrar algunas cantidades conservadas a lo largo de estos campos. En el caso de que la variedad de la que se trate sea curva, las derivadas parciales direccionales de la ecuación (1.17) cambiarán a ser derivadas covariantes, concepto que se explora en el siguiente capítulo.

## 1.2. Relatividad Especial

Utilizando las matemáticas presentadas anteriormente, con los principios de relatividad enunciados, se encontró que en esta teoría deja de existir una noción de simultaneidad absoluta. Al querer comparar coordenadas para 2 observadores inerciales  $O$  y  $O'$  con coordenadas cartesianas  $(t, x, y, z)$  y  $(t', x', y', z')$  respectivamente, tal que uno se mueve respecto al otro con velocidad constante  $v$  sobre el eje  $x$ , uno tiene que aplicar una transformación de Lorentz que relacione ambos sistemas, las cuáles están dadas por:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad (1.20)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1.21)$$

$$y' = y, \quad (1.22)$$

$$z' = z, \quad (1.23)$$

donde a  $\gamma$  se le conoce como factor de Lorentz, el cuál está dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}. \quad (1.24)$$

Si pensamos que un pulso de luz se mueve a la velocidad constante  $c$ , entonces, dado un intervalo diferencial de tiempo, habrá recorrido un intervalo diferencial de espacio, por lo que se tiene

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}}{dt} = c. \quad (1.25)$$

Elevando al cuadrado y acomodando se encuentra

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \quad (1.26)$$

y esto será invariante para todos los observadores. Esta cantidad invariante se conoce como métrica o elemento de línea, y en general está dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.27)$$

donde el signo de  $ds^2$  dependerá de si se usa para describir dos eventos relacionados de forma temporaloide ( $ds^2 < 0$ ), espacialoide ( $ds^2 > 0$ ), o tipo luz ( $ds^2 = 0$ ).

De aquí se pueden mostrar dos resultados importantes. Primero definamos el tiempo propio entre dos eventos como el tiempo medido por un reloj ideal que

se mueve a una velocidad constante  $v < c$ , tal que en su sistema de referencia ambos eventos suceden en el mismo lugar, es decir  $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ , lo cual implica que  $ds^2 = -d\tau^2$  donde  $d\tau$  denota el tiempo propio. Con esto se puede mostrar que el intervalo de tiempo  $dt$  entre dos eventos medido en un sistema inercial está relacionado con el tiempo propio entre esos eventos por

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \quad (1.28)$$

Este efecto se conoce como dilatación temporal. La dilatación temporal no es el único efecto que ocurrirá en este sistema de referencia. Supongamos que tenemos una barra cuya longitud en reposo es  $L$  (longitud propia). Si la barra se mueve con una velocidad  $v$ , entonces un observador en un sistema inercial medirá que la barra se contrae en la dirección de movimiento. La longitud  $L'$  observada en este sistema de referencia se relaciona con la longitud propia de la barra como

$$L' = \frac{L}{\gamma}. \quad (1.29)$$

Estos efectos, que se ilustran en la figura (1.2.1), no son los únicos que ocurrirán en esta teoría. Las fuentes de luz en movimiento también sufrirán un cambio en su frecuencia  $f$  respecto a la frecuencia medida  $f'$  por un observador inercial. Este cambio aparente en su frecuencia está dado por el efecto Doppler relativista, el cuál se ve como

$$f' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f. \quad (1.30)$$

Es decir, mientras más cercana sea la velocidad de la fuente a  $c$ , mayor será el corrimiento al rojo o al azul que percibirá el observador estático, dependiendo de la dirección de movimiento de la fuente.

Además de estas cantidades, existen cuadvectores de importancia, en particular podemos describir la 4-velocidad de un observador inercial como el cambio de su posición en el espacio-tiempo respecto a su tiempo propio. Es decir

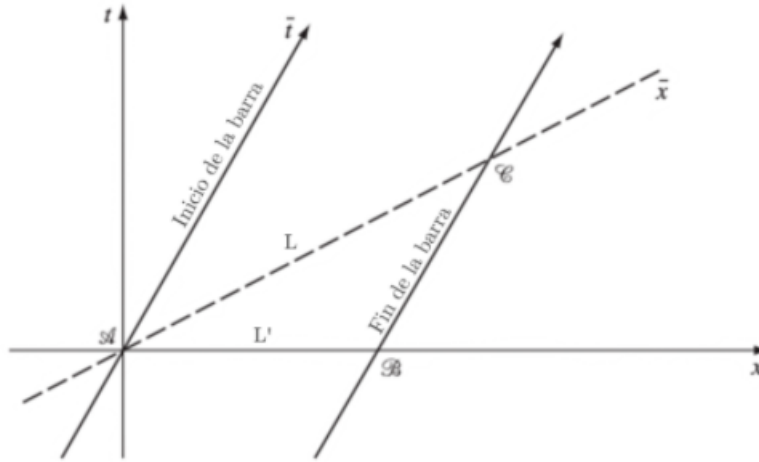


Fig. 1.2.1: Contracción de Lorentz de una barra de longitud propia  $L$ . [22]

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \tag{1.31}$$

donde el índice  $\mu$  corre de 0 a 3. Haciendo  $c = 1$ , podemos construir un escalar que será invariante utilizando este vector, y debido a que en un sistema de referencia en reposo la única componente de la 4-velocidad será su componente temporal, se tiene que este escalar toma el valor de

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1. \tag{1.32}$$

Se puede también construir el 4-momento haciendo uso de la 4-velocidad, este es

$$p^\mu = m u^\mu, \tag{1.33}$$

esto en un sistema de referencia arbitrario tendrá entradas

$$p = (E, \vec{p}), \tag{1.34}$$

donde  $E$  es la energía y  $\vec{p}$  el momento espacial de la partícula, por lo que entonces al construir un invariante de forma análoga a lo anterior se tiene que

$$-m^2 = -E^2 + \vec{p}^2, \quad (1.35)$$

de donde despejando la energía se tiene que

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \quad (1.36)$$

Lo cual en un sistema de referencia en reposo y utilizando unidades adopta la forma de la famosa ecuación de Einstein  $E = mc^2$ .[\[14\]](#)

Estos resultados escritos con la formulación covariante de la teoría y su reconciliación con el electromagnetismo fueron base para la teoría de la Relatividad General, en la cuál Einstein buscaba incorporar la gravedad. Esta teoría se explora brevemente en el siguiente capítulo.



# Capítulo 2

## Relatividad General

La teoría de la Relatividad General, postulada por Einstein en 1915, es la teoría de gravitación más exitosa hasta el momento. Esta teoría considera que la gravedad no es una fuerza, si no una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, por lo cual es una teoría geométrica. Einstein basó esta teoría en 3 ideas principales: El principio de covarianza, que afirma que las reglas de la física deben de ser igual para todos los observadores. El principio de equivalencia, el cuál dicta que todos los cuerpos son influenciados por la gravedad y de hecho en presencia de un campo gravitacional todos caen con la misma aceleración sin importar su masa, además un sistema en caída libre será equivalente a un sistema inercial en el espacio-tiempo de Minkowski, y un sistema acelerado será equivalente a un sistema en presencia de un campo gravitacional. Y por último, el principio de Mach, el cual establece que las propiedades inerciales locales de objetos físicos deben de estar determinadas por la distribución total de materia en el universo.[6]

### 2.1. Derivada Covariante y Geodésicas

Para poder describir a la teoría de Relatividad General necesitamos entender la noción de curvatura de una variedad, la cuál es intrínseca y para su existencia no se necesita que dicha variedad esté incrustada en una variedad de dimensión mayor. Para definir el concepto de curvatura necesitamos primero entender el concepto de derivada en espacios curvos. Este operador debe satisfacer siempre 3 propiedades: linealidad, regla de Leibniz, y conmutatividad con la contracción.

Recordando que en cualquier sistema de coordenadas un vector se ve como (1.1), por lo cuál, un operador derivada actuando sobre un vector se ve como [22]

$$\nabla V = \nabla_\alpha(v^\mu e_\mu) = \nabla_\alpha(v^\mu)e_\mu + v^\mu \nabla_\alpha(e_\mu), \quad (2.1)$$

de donde se define

$$\nabla_\alpha e_\mu = \Gamma_{\alpha\mu}^\nu e_\nu, \quad (2.2)$$

donde a  $\Gamma_{\alpha\mu}^\nu$  se le conoce como conexión, o símbolo de Christoffel, y este actua haciendo una corrección en la derivada al tomar en cuenta cómo cambian las componentes de los vectores base en un sistema de coordenadas curvilineas.

Por lo tanto, las componentes de la derivada covariante de un vector se verán como

$$\nabla_\alpha v^\mu = \partial_\alpha v^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu v^\nu. \quad (2.3)$$

También se satisface que la derivada covariante de un escalar es igual a la derivada parcial, esto porque un escalar es invariante bajo transformaciones en cualquier sistema de referencia, es decir

$$\nabla_\alpha c = \partial_\alpha c. \quad (2.4)$$

Con esto en cuenta podemos también conocer como es la derivada covariante de un covector. Simplemente se construye un escalar haciendo una contracción de índices y, como se satisface la regla de Leibniz en la derivada, se puede separar en 2 partes, es decir

$$\nabla_\alpha(v^\mu w_\mu) = v^\mu \nabla_\alpha w_\mu + w_\mu (\partial_\alpha v^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu v^\nu) = \partial_\alpha(v^\mu w_\mu) = w_\nu \partial_\alpha v^\nu + v^\nu \partial_\alpha w_\nu, \quad (2.5)$$

y como esto es válido para todo vector, se tiene que

$$\nabla_{\alpha} w_{\mu} = \partial_{\alpha} w_{\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} w_{\nu}. \quad (2.6)$$

En general, para un tensor de rango  $(n,k)$ , la derivada covariante actuará como [28]

$$\nabla_{\alpha} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \partial_{\alpha} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\lambda \dots \mu_n} + \dots + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \lambda} - \Gamma_{\alpha\nu_1}^{\lambda} T_{\lambda \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma_{\alpha\nu_k}^{\lambda} T_{\nu_1 \dots \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (2.7)$$

Teniendo ya el concepto de derivada covariante podemos definir el transporte paralelo. Este consiste en transportar a lo largo de una curva cualquier vector sin que cambie el ángulo que forma con esta y esto nos podrá dar una medida de la curvatura intrínseca en la variedad como veremos más adelante. Consideremos una curva en el espacio-tiempo cuyo vector tangente está dado por sus componentes  $u^{\alpha}$ , entonces, transportar paralelamente, cualquier vector  $v^{\mu}$  a través de esta curva debe satisfacer necesariamente la siguiente ecuación

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} v^{\mu} = 0, \quad (2.8)$$

además se pide que el producto punto de dos vectores  $V, W$  se preserve bajo el transporte paralelo, esto es

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} (g_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu}) = 0. \quad (2.9)$$

Y se puede mostrar que el único requerimiento para que esto suceda es que

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

que al desarrollar la derivada covariante queda como

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0. \quad (2.11)$$

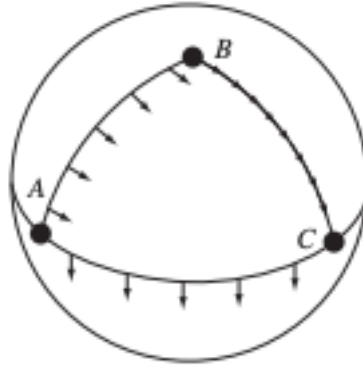


Fig. 2.1.1: Vector Transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada en una esfera, como ésta tiene una curvatura distinta de cero el vector regresa a su posición inicial con una dirección distinta [28].

Esta expresión se puede manipular para encontrar una manera explícita de la conexión. Esta conexión es llamada de Levi-Civita, y será siempre simétrica en sus índices inferiores, pues está dada por

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(\partial_{\alpha}g_{\lambda\mu} + \partial_{\mu}g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\mu}). \quad (2.12)$$

La noción de curvatura aparece al transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada, en un espacio-tiempo plano, el vector regresará sin modificaciones a su posición original, sin embargo, en un espacio-tiempo curvo, el vector regresará en una posición distinta. Esto se ejemplifica en la figura (2.1.1)

Otra consecuencia de la curvatura de una variedad se puede ver estudiando geodésicas. Una geodésica se define como la curva que extremiza la distancia entre dos puntos, y además transporta paralelamente a su propio vector tangente, es decir, satisface

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\mu} = 0 = u^{\alpha}\partial_{\alpha}(u^{\mu}) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}u^{\alpha}u^{\beta}. \quad (2.13)$$

Ahora, si la curva se describe con el parámetro  $\lambda$ , es decir,  $u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}$ , entonces la ecuación que satisface la geodésica se ve como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.14)$$

y esta ecuación es válida para cualquier parametrización afín, es decir  $\lambda(\tau) = a\tau + b$  con  $a$  y  $b$  constantes.

## 2.2. Curvatura

Con estos conceptos presentes ya podemos definir de forma detallada lo que será el tensor que nos da la información de la curvatura intrínseca de la variedad. Este tensor se conoce como tensor de curvatura de Riemann, y es un tensor de rango (1,3). Este se define a como

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)v^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu v^\nu, \quad (2.15)$$

para cualquier vector  $V$  arbitrario. Desarrollando las derivadas covariantes, las componentes del tensor de Riemann se ven como

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda. \quad (2.16)$$

Además este tensor está directamente relacionado con el cambio infinitesimal en las componentes de un vector  $V$  arbitrario al transportarlo paralelamente a lo largo de una curva cerrada de la forma

$$\delta v^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu dx^\alpha dx^\beta v^\nu. \quad (2.17)$$

Este tensor cuenta con 256 componentes si se hablan de 4 dimensiones, sin embargo por las simetrías que tiene el número de componentes independientes se puede reducir a 20, además, el tensor de Riemann satisface las siguientes propiedades [6]:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu}, \quad (2.18)$$

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} + R_{\nu\beta\mu}^{\alpha} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla_{\lambda} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + \nabla_{\nu} R_{\beta\lambda\mu}^{\alpha} + \nabla_{\mu} R_{\beta\nu\lambda}^{\alpha} = 0. \quad (2.20)$$

Esta última propiedad llamada identidad de Bianchi.

Ahora, si hacemos la contracción del primer y tercer índice de este tensor obtendremos otro tensor de rango (0,2) simétrico llamado tensor de Ricci

$$R_{\beta\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\beta\nu}. \quad (2.21)$$

Sacando la traza de este tensor utilizando la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  se obtiene un escalar, llamado escalar de curvatura o escalar de Ricci

$$g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = R. \quad (2.22)$$

Además, para variedades de dimensión  $n \geq 3$ , está definido otro tensor  $C_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ , llamado tensor de Weyl, el cuál satisface que todas sus trazas se anulan y es invariante bajo transformaciones conformes, que son transformaciones que reescalan al tensor métrico y no cambian a los conos de luz [28]. Con esto, el tensor de Riemann se puede escribir como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{n-2} \left( g_{\alpha[\mu} R_{\nu]\beta} - g_{\beta[\mu} R_{\nu]\alpha} \right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta}. \quad (2.23)$$

Tomando ahora la ecuación (2.20) y trazando los índices  $\alpha$  y  $\mu$  se obtiene

$$\nabla_{\lambda} R_{\beta\nu} - \nabla_{\nu} R_{\beta\lambda} + \nabla_{\alpha} R_{\beta\nu\lambda}^{\alpha} = 0. \quad (2.24)$$

Trazando ahora  $\beta$  y  $\lambda$ , y renombrando los índices mudos se obtiene

$$\nabla^{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (2.25)$$

de donde se define al tensor de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.26)$$

y por construcción se satisface que su divergencia es nula.

### 2.3. Ecuaciones de Einstein

Hemos visto que la métrica del espacio-tiempo contiene la información sobre estructura geométrica y da la estructura causal al espacio-tiempo, por lo que es la variable física que necesitaremos conocer para encontrar las ecuaciones que satisface la teoría de gravedad llamada Relatividad General. Para esto necesitamos construir una acción de la cuál se deriven las ecuaciones de movimiento. Dicha acción se llama acción de Einstein-Hilbert, y está dada por

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \kappa \mathcal{L}_m), \quad (2.27)$$

donde  $g$  es el determinante del tensor métrico,  $\Lambda$  es una constante llamada constante cosmológica, y  $\mathcal{L}_m$  es la densidad lagrangiana correspondiente a la materia que en principio puede depender de más variables además de la métrica, y  $\kappa$  la constante de acoplamiento de Einstein. Utilizando el principio de mínima acción y variando respecto a la métrica, y notando que [28]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

se tiene que la variación es

$$\delta S_g = 0 = \int dx^4 \left( \sqrt{-g} (\delta R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) \delta g^{\mu\nu}) + \delta(\sqrt{-g} \kappa \mathcal{L}_m) \right), \quad (2.29)$$

en donde

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \delta R = \int dx^4 \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}), \quad (2.30)$$

y vemos que la variación del tensor de Riemman está dada por

$$\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \partial_{\beta} \delta \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \partial_{\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \delta \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}. \quad (2.31)$$

Notando que la derivada covariante del tensor  $\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  está dada por

$$\nabla_{\beta} (\delta \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) = \partial_{\beta} (\delta \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}, \quad (2.32)$$

es fácil ver que la variación del tensor de Ricci está dada por la diferencia de 2 derivadas covariantes, es decir

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \nabla_{\alpha} (\delta \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}), \quad (2.33)$$

por lo que la variación respecto al escalar de curvatura toma la forma de

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \delta R = \int dx^4 \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\nu}_{\nu\mu})), \quad (2.34)$$

siendo el segundo término una derivada total, y al usar el teorema de Stokes, el cual se explica con detalle en el apéndice (B), se tiene que el último integrando de la expresión anterior no tiene contribución, por lo tanto la variación de la acción es

$$\delta S_g = 0 = \int dx^4 \left( (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}) + \kappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

De esta expresión se observa que el primer término es el tensor de Einstein, y definiendo al tensor de energía-momento como



$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.36)$$

se tiene que las ecuaciones de movimiento de la teoría de relatividad general con constante cosmológica son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Sin embargo muchas veces se supone que  $\Lambda = 0$ . Notemos que estas son 16 ecuaciones, de las cuales 10 son independientes debido a la simetría entre los índices. Además estas ecuaciones son ecuaciones parciales de segundo orden para  $g_{\mu\nu}$ . Por lo cuál es el término dinámico a resolver en estas ecuaciones. Además, para que la solución sea razonable se deben de satisfacer ciertas condiciones de energía dadas por

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (2.38)$$

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \frac{T}{2} \geq 0, \quad (2.39)$$

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (2.40)$$

Donde  $u^\mu$  son las componentes de cualquier vector temporaloide y  $k^\mu$  es un vector nulo. Estas condiciones de energía se conocen como condición de energía débil, que implica que la densidad de energía de la materia es no-negativa, condición de energía fuerte, que dice que la suma de la densidad de energía sumada con las presiones principales es no-negativa, y condición de energía nula, que dice que la suma de la densidad de energía con alguna de las presiones principales es no-negativa respectivamente. Cabe mencionar que dichas condiciones de energía no son leyes físicas, y presentan problemas al introducir campos cuánticos o campos escalares [6].

## 2.4. Gravedad linealizada: Límite Newtoniano y Ondas Gravitacionales

El primer paso para probar que esta teoría es una teoría viable es recuperar la teoría Newtoniana, que es bastante efectiva para calcular la dinámica del sistema solar entre muchas otras cosas. Para esto se toma el límite de campo débil.

Si suponemos que la solución de la métrica está dada por la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  más una pequeña perturbación  $h_{\mu\nu}$  con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Es decir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

por definición la métrica satisface que

$$g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta^{\alpha\beta}, \quad (2.42)$$

por lo que se tiene que que la métrica inversa es

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

mientras que la traza de  $h_{\mu\nu}$  es denotada por

$$h = h_{\mu}^{\mu}. \quad (2.44)$$

Utilizando la ecuación (2.16) con esta métrica encontramos que el tensor de Riemann a primer orden está dado por

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\beta\mu} h_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha\nu} h_{\beta\mu} - \partial_{\beta\nu} h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha\mu} h_{\beta\nu}). \quad (2.45)$$

Ahora, si hacemos una transformación local de coordenadas  $x^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta})$  con  $\xi^{\alpha}$  una transformación pequeña tal que  $|\partial_{\mu} \xi^{\alpha}| \ll 1$  se tiene que la regla de transformación para un tensor está dada por (1.9), donde en este caso  $\Lambda_{\mu}^{\alpha} = (\delta_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu} \xi^{\alpha})$ . Así la métrica se transforma como

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta} = (\delta_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu} \zeta^{\alpha})(\delta_{\nu}^{\beta} - \partial_{\nu} \zeta^{\beta}) g_{\alpha\beta}, \quad (2.46)$$

por lo que a primer orden esta transformacion toma la forma de

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \zeta_{\nu} - \partial_{\nu} \zeta_{\mu}. \quad (2.47)$$

Esta transformación deja invariante al tensor de Riemann. Este tipo de transformaciones se conoce como transformación de norma, sin embargo aún se tienen más libertades.

Definiendo el tensor llamado "traza inversa" de  $h_{\mu\nu}$  como

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h, \quad (2.48)$$

que cumple que  $\bar{h} = -h$ , por lo que

$$h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \bar{h}. \quad (2.49)$$

El tensor de Einstein a primer orden en la perturbación está dado por

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left( \square \bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial^{\mu} \partial^{\nu} \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^{\mu} \partial_{\beta} \bar{h}_{\alpha\mu} - \partial^{\mu} \partial_{\alpha} \bar{h}_{\beta\mu} \right), \quad (2.50)$$

donde  $\square = g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$ . Ahora, recordando que tenemos libertad de norma en nuestra transformación de coordenadas, podemos encontrar un  $\zeta^{\mu}$  que satisfaga que

$$\partial^{\mu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.51)$$

Por lo que al aplicar una transformación al tensor de traza inversa, éste se ve como

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(nuevo)} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(viejo)} - \partial_{\nu} \zeta_{\mu} - \partial_{\mu} \zeta_{\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \zeta^{\alpha}, \quad (2.52)$$

y como se quiere que  $\partial_{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{(nuevo)} = 0$ , entonces existe  $\zeta^{\mu}$  tal que

$$\square \zeta^{\mu} = \partial_{\nu} \bar{h}^{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

con lo cuál las ecuaciones de Einstein se simplifican a

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Recordemos que la teoría de Relatividad General busca también reconciliarse con las observaciones y predicciones hechas por la teoría de gravedad Newtoniana, por lo que se deben de recuperar las ecuaciones que describen dicha teoría. Para esto se usa el llamado límite Newtoniano, en donde se tiene que las velocidades de las fuentes son bajas respecto a la velocidad de la luz, por lo que solo el Laplaciano tendrá una contribución al D'Alembertiano. Además debido a que no hay esfuerzos, el único término que contribuye a las ecuaciones de movimiento será  $T_{00} = \rho$ , donde  $\rho$  es la densidad de energía [22]. Por lo que la ecuación a resolver es

$$\nabla^2\bar{h}_{00} = -2\kappa\rho. \quad (2.55)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación para gravedad Newtoniana que está dada por

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho, \quad (2.56)$$

podemos deducir que  $\kappa = 8\pi$  y  $\bar{h}_{00} = -4\phi$ . De aquí la traza valdrá  $\bar{h} = 4\phi$ , por lo que regresando a la métrica perturbada en primer orden se tiene que la solución es

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)dx^2 + (1 - 2\phi)dy^2 + (1 - 2\phi)dz^2. \quad (2.57)$$

El movimiento de un objeto en el espacio-tiempo está dado por la ecuación geodésica (2.14), y debido a las aproximaciones de límite Newtoniano esta se ve como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma_{00}^\mu = 0, \quad (2.58)$$

en donde  $\Gamma_{00}^\mu = \eta^{\mu i}\partial_i\phi$ , por lo que la ecuación geodésica toma la forma de

$$\vec{a} = -\nabla\phi \quad (2.59)$$

donde  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$  es la aceleración del objeto respecto a las coordenadas globalmente inerciales de  $\eta_{\mu\nu}$  [28]. Se observa que esta ecuación es la misma ecuación de movimiento en gravedad Newtoniana, y con esto vemos que efectivamente Relatividad General recupera las predicciones hechas por la teoría Newtoniana, sin embargo tienen distintas interpretaciones. En la teoría Newtoniana la materia crea un campo gravitacional que afecta al objeto mediante una fuerza, mientras que en Relatividad General la materia deforma la curvatura del espacio-tiempo y el objeto se mueve a lo largo de la geodésica sin experimentar alguna fuerza.

Otra consecuencia importante de utilizar la aproximación de campo débil es la existencia de ondas gravitacionales. Para esto se impone que haya vacío, es decir  $T_{\mu\nu} = 0$ , por lo que las ecuaciones de Einstein a resolver serán

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.60)$$

cuya solución más simple son ondas planas de la forma

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha), \quad (2.61)$$

donde  $A_{\mu\nu}$  es el tensor de amplitud y  $k^\alpha$  el vector de onda. Al sustituir esto en la ecuación de onda se tiene que

$$\eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0, \quad (2.62)$$

es decir el vector de onda es nulo, esto es otra forma de decir que las ondas se propagan a la velocidad de la luz. Además, de satisfacer la norma de Lorentz se tiene que

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0, \quad (2.63)$$

es decir, el tensor de amplitud es ortogonal al vector de onda, y debido a la libertad

de norma que se tiene podemos imponer nuevas condiciones tal que el tensor de amplitud satisfaga

$$A_{\mu}^{\mu} = 0, \quad A_{\mu\nu}u^{\nu} = 0, \quad (2.64)$$

estas condiciones de la norma impuesta hacen que el tensor sea sin traza (es decir, en esta norma  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ ) y transverso (es puramente espacial y ortogonal a su dirección de propagación). Si suponemos que la dirección de propagación es en dirección del eje z, entonces con estas condiciones  $A_{\mu\nu}$  tiene la forma de

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{+} & A^{\times} & 0 \\ 0 & A^{\times} & -A^{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

donde  $A^{+}$  y  $A^{\times}$  son las únicas dos componentes independientes, que son las dos polarizaciones distintas que tendrán estas ondas, lo cual implica que dichas ondas solo pueden ser producidos por un cuadrupolo. Es decir, estos objetos solo pueden ser producidos en colisiones estelares y colisiones de agujeros negros.

La primera evidencia de la existencia de las ondas gravitacionales se encontró en 1982 después de medir variaciones en las pulsos de radio emitidos por el pulsar del sistema binario de Hulse y Taylor, el cuál fue atribuido a las ondas gravitacionales y por este estudio se otorgó un premio Nobel en 1993.[26] En 2015 las ondas gravitacionales fueron detectadas por primera vez por el detector LIGO, las cuales se originaron a partir de una colisión de agujeros negros, posteriormente se hicieron otras 4 detecciones de ondas gravitacionales, 3 debidas a colisiones de agujeros negros y una debido a una colision de estrellas de neutrones [4, 1, 2, 3].

Las detecciones de este nuevo fenómeno que no ocurría en la teoría de gravedad Newtoniana ha terminado de cimentar la validez de la teoría de la Relatividad General.

## 2.5. Cosmología

El éxito de la Relatividad General llevó a esta teoría a ser la principal herramienta en la cosmología, que es el estudio de la historia, evolución, y dinámica del universo. Para esto se asume que el universo es isotrópico y homogéneo a gran escala, y las ecuaciones de Einstein tienen como solución la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, la cuál está dada en coordenadas polares por

$$ds^2 = -dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.66)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ ,  $a(t)$  es el factor de escala y  $k$  es la constante de curvatura 3-dimensional del universo, la cuál puede valer -1 para universos abiertos, 0 para universos planos, y 1 para universos cerrados. Al insertar esta métrica en las ecuaciones de Einstein para un tensor de energía-momento de fluido perfecto de la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p\eta_{\mu\nu}, \quad (2.67)$$

con  $p$  y  $\rho$  la presión y densidad del fluido, se obtienen las ecuaciones de Friedmann las cuales son

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.68)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p), \quad (2.69)$$

donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  la cual se conoce como parámetro de Hubble. Manipulando estas ecuaciones se obtiene la ecuación de conservación dada por

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (2.70)$$

Para poder resolver estas ecuaciones se necesita conocer la ecuación de estado de los fluidos distintos que componen el universo. Si se asume que la ecuación de

estado que mejor describe a las componentes de materia en el universo está dada por

$$p = w\rho, \quad (2.71)$$

con  $w$  una constante que vale 0 si el fluido está compuesto de materia bariónica, que es toda la materia compuesta por átomos,  $\frac{1}{3}$  para radiación y partículas relativistas, y -1 para una constante cosmológica  $\Lambda$ . Este último fluido fue propuesto para explicar la expansión acelerada del universo, lo cuál se conoce como energía oscura, sin embargo existen otros candidatos distintos a la constante cosmológica que puedan explicar éste fenómeno. La densidad de los fluidos del universo determinan la curvatura del universo. Definimos la densidad crítica como la densidad necesaria para que el universo tenga curvatura plana, es decir

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}, \quad (2.72)$$

y definimos el parámetro de densidad como

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.73)$$

el cuál depende del fluido del que se trate. Ahora, el parámetro de densidad total del universo  $\Omega_t$  está dado por la suma de los parámetros de densidad de cada fluido, y si el universo es plano se tiene entonces que  $\Omega_t = 1$ . Estos parámetros de densidad pueden ser medidos por experimentos como WMAP[8] y PLANCK [20]. Dichas mediciones apuntan a que el universo tiene curvatura cero y los valores de los parámetros de densidad son 0.73 para energía oscura, 0.27 para materia, y  $8 \times 10^{-5}$  para radiación [20].

Sin embargo estas observaciones generan nuevos cuestionamientos en la teoría, ya que se ha encontrado que la materia bariónica, que observamos en el universo no coincide con la observada en estos experimentos, además no se hubiera podido dar la formación de galaxias, así como la existencia de fenómenos de lentes gravitacionales al observar otras galaxias [17, 19]. Una manera de explicar estos



fenómenos es introduciendo el concepto de materia oscura, este nuevo tipo de materia, así como la energía oscura (utilizada para explicar la expansión acelerada del universo) aún no han sido detectadas directamente por lo que aún no se conocen sus orígenes y su composición.

En este capítulo hemos visto que la Relatividad General recupera exitosamente las predicciones hechas por la teoría Newtoniana, además genera nuevos fenómenos que ya han sido observados y validan la teoría, sin embargo los fenómenos observados en el estudio de la cosmología aún no están bien entendidos, y existe la posibilidad de que estén equivocados y una solución a esto podría ser la modificación de la teoría de Relatividad General, ya sea en los términos de curvatura, o en el tensor de energía-momento. Una manera sencilla de hacer esto es modificar la acción de Einstein-Hilbert y añadir nuevos términos que puedan depender de la métrica o bien de nuevos campos tensoriales de materia. De igual forma se sabe que la Relatividad General no es compatible con la mecánica cuántica (puesto que no es posible renormalizar la teoría entre otras cosas), por lo que una principal motivación de modificar la teoría es encontrar una teoría cuantizada de la gravedad. Sin embargo dicha teoría tendrá que recuperar las predicciones hechas por Relatividad General así como ésta lo hizo con la teoría Newtoniana. Una de estas predicciones importantes es la existencia de agujeros negros, los cuales se exploran en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Agujeros Negros

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo donde la gravedad es tan fuerte tales que ni la materia ni la radiación pueden escapar de este. En el universo estos se forman cuando una estrella lo suficientemente masiva pierde el combustible necesario para generar reacciones termonucleares y así mantener su equilibrio, por lo que sufre un colapso gravitacional a través de su llamado radio gravitacional ó horizonte de eventos, que es la frontera de esta región de la cuál ya ninguna información puede salir [18]. En este capítulo se estudian estos objetos.

### 3.1. Geometría de Schwarzschild

La primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein fue propuesta por Karl Schwarzschild en 1916, un año después de que Einstein publicara su teoría [23]. Dicha solución describe el campo gravitacional alrededor de un cuerpo esférico, y para obtenerla se asumen las siguientes hipótesis:

- 1) El espacio-tiempo tiene simetría esférica, es decir la métrica es invariante ante rotaciones.
- 2) El espacio-tiempo es estacionario, esto es, existe un campo de Killing  $\xi$  tal que  $\xi^\alpha \xi_\alpha < 0$ , es decir es temporal, es decir, la métrica no tiene dependencia de la coordenada temporal.
- 3) El espacio-tiempo es estático, es decir, existe un vector de Killing temporal que es irrotacional, y además la métrica es invariante ante reflexiones temporales.
- 4) El espacio-tiempo es asintóticamente plano, es decir, lejos de la masa, la métrica

que describe al espacio-tiempo es la métrica de Minkowski.

5) La solución es en vacío, es decir:  $T_{\mu\nu} = 0$ .

De esta última hipótesis la ecuación a resolver es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (3.1)$$

sin embargo estas ecuaciones se pueden simplificar aún más. Sacando la traza en estas ecuaciones se tiene

$$R = 0, \quad (3.2)$$

por lo tanto las ecuaciones a resolver son

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Ahora, bajo las simetrías antes mencionadas, en una cierta elección de coordenadas la métrica más general que las satisface es de la forma [6, 28]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.4)$$

Las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  se conocen como coordenadas de Schwarzschild, y  $r$  se define como

$$r = \left( \frac{A}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

donde  $A$  es el área de una 2-esfera, mientras que  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos usuales de coordenadas esféricas. Al insertar esta métrica en (3.3), es fácil observar que solo existen 3 ecuaciones independientes debido a las simetrías utilizadas. Estas son  $R_{tt}$ ,  $R_{rr}$ , y  $R_{\theta\theta}$ . Estas ecuaciones se ven como

$$R_{tt} = \frac{1}{2}(fh)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} \left( (fh)^{-\frac{1}{2}} f' \right) + \frac{f'}{rhf} = 0, \quad (3.6)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}(fh)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} \left( (fh)^{-\frac{1}{2}} f' \right) + \frac{h'}{rh^2} = 0, \quad (3.7)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \frac{f'}{rhf} + \frac{1}{2} \frac{h'}{rh^2} + \frac{1-h^{-1}}{r^2} = 0. \quad (3.8)$$

Donde  $f' = \frac{df}{dr}$  y  $h' = \frac{dh}{dr}$ .

Sumando las ecuaciones para  $R_{tt}$  y  $R_{rr}$ , se tiene que:

$$\frac{1}{rh} \left( \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) = 0, \quad (3.9)$$

y esta ecuación implica que:

$$f(r) \propto h^{-1}(r). \quad (3.10)$$

De aquí podemos reescalar la coordenada temporal tal que  $f(r) = h^{-1}(r)$ . Sustituyendo esto en la ecuación para  $R_{\theta\theta}$ , se tiene que

$$1 - f - rf' = 1 - \frac{d}{dr}(rf) = 0, \quad (3.11)$$

lo cuál tiene como solución

$$f = 1 + \frac{C}{r}, \quad (3.12)$$

donde  $C$  es constante y la elegimos como  $C = -2M$  donde  $M$  es la masa del objeto que genera el campo gravitacional y debido a la conjetura de la censura cósmica debe de ser positiva para que no exista una singularidad desnuda. Este valor se encuentra de comparar esta métrica con la dada por el límite Newtoniano (2.57), la cuál corresponde a valores de  $r$  grandes, y tomando el potencial Newtoniano  $\phi = -\frac{M}{r}$ . Por lo que entonces la métrica queda con la forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.13)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ .

Esta métrica se conoce como métrica de Schwarzschild, y dicha solución, como se verá más adelante describe objetos llamados agujeros negros. Además, como lo prueba el teorema de Birkhoff[18, 22], la métrica de Schwarzschild también es solución para espacio-tiempos con simetría esférica fuera de cualquier fuente de materia, pues en estos casos la región de vacío se encuentra en  $r > 2M$ , es decir, esta métrica puede ser solución para el campo gravitacional exterior producido por una estrella o planeta que satisfaga las condiciones mencionadas.

Notamos que esta métrica tiene 2 regiones con singularidades, en  $r = 0$  y  $r = 2M$ , sin embargo, de estas singularidades solo  $r = 0$  es una singularidad física. La singularidad en  $r = 2M$  aparece debido a que se está usando un sistema de coordenadas que no es adecuado. La región  $r_S = 2M$  se conoce como radio de Schwarzschild  $r_S$  y coincide con el horizonte de eventos del agujero negro, el cuál marca la frontera de la región de no retorno para geodésicas nulas o temporales, como se verá más adelante.

Para estudiar la naturaleza de estas singularidades basta con calcular un escalar de curvatura llamado escalar de Kretschmann y analizar su comportamiento al evaluarlo en dicha región. Es fácil ver que tanto el escalar de Ricci  $R$ , como el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  son cero, sin embargo existen componentes del tensor de Riemann distintas de cero, estas son:

$$R^t{}_{rrt} = 2R^\theta{}_{r\theta r} = 2R^\phi{}_{r\phi r} = \frac{2M}{r^2(2M-r)}, \quad (3.14)$$

$$2R^t{}_{\theta\theta t} = 2R^r{}_{\theta\theta r} = R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = \frac{2M}{r}, \quad (3.15)$$

$$2R^t{}_{\phi\phi t} = 2R^r{}_{\phi\phi r} = -R^\theta{}_{\phi\phi\theta} = \frac{2M \sin^2(\theta)}{r}, \quad (3.16)$$

$$R^r{}_{trt} = -2R^\theta{}_{t\theta t} = -2R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{2M(2M-r)}{r^4}. \quad (3.17)$$

Con esto podemos construir un nuevo escalar de curvatura, llamado escalar de Kretschmann, el cuál está dado por

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (3.18)$$

y observamos que al ser un invariante es válido en cualquier sistema de coordenadas. Es claro que para  $r = 0$  este escalar diverge al infinito, lo que implica que el campo gravitacional es singular en esa región, mientras que para  $r = 2M$  está bien definido. Esto es una indicación de que esta singularidad se debe a las coordenadas utilizadas.

## 3.2. Corrimiento al rojo gravitacional y trayectorias en el espacio-tiempo de Schwarzschild

En la geometría de Schwarzschild existen 4 campos de Killing, uno temporaloide e irrotacional y 3 espacialoides. Como se había dicho anteriormente, los campos de Killing se pueden utilizar para encontrar cantidades conservadas sobre geodésicas, las cuáles estarán dadas por el producto del vector de Killing  $\xi$  con una 4-velocidad  $u$ , pues se satisface que

$$u^\alpha \nabla_\alpha (\xi_\mu u^\mu) = u^\alpha u^\mu \nabla_\alpha \xi_\mu + \xi_\mu u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = 0, \quad (3.19)$$

de donde la primera parte se anula por satisfacer la ecuación de Killing y la segunda por satisfacer la ecuación geodésica.

En particular en la geometría de Schwarzschild, dos de ellos,  $\xi$  y  $\eta$  están dados por

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \eta = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (3.20)$$

donde  $\xi$  refleja que el espacio-tiempo es estacionario, y  $\eta$  refleja una conservación en la dirección angular por la simetría esférica. Es fácil ver que estos campos

vectoriales satisfacen la ecuación de Killing. Usando esto podemos calcular el corrimiento al rojo gravitacional en la geometría de Schwarzschild.

Consideremos 2 observadores estáticos a distintos radios  $r_1$  y  $r_2$ , cada uno con 4-velocidades  $u_1^\mu$  y  $u_2^\mu$  respectivamente, ahora, al ser observadores únicamente moviéndose en el tiempo se tiene que sus 4-velocidades serán proporcionales al vector de Killing  $\xi$ , es decir

$$u_i^\mu = a_i \xi^\mu, \quad (3.21)$$

con  $a_i$  una constante, y donde el índice  $i$  toma los valores 1 y 2, mientras que el índice  $\mu$  toma los valores usuales entre 0 y 3. Recordando que la magnitud de la 4-velocidad de todo observador es -1, se tiene que

$$u^{\mu i} u_{\mu i} = -1 = a_i^2 g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = a_i^2 g_{tti}. \quad (3.22)$$

Despejando esta ecuación para  $a_i$  se obtiene

$$a_i = \left(1 - \frac{2M}{r_i}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

ahora, si el observador en  $r_1$  emite un haz de luz con dirección hacia al otro observador en  $r_2$ , cada uno medirá que la frecuencia  $\omega_i$  de luz estará dada por [28]

$$\omega_i = -u^\mu k_\mu = -a_i \xi^\mu k_\mu, \quad (3.24)$$

donde  $k^\mu$  es el 4-vector de onda de la luz, es decir, es el vector análogo a una 4-velocidad pero ahora es un vector nulo, por lo que se tiene que  $\xi^\mu k_\mu$  será constante sobre la geodésica. Entonces el cociente de frecuencias que medirán los dos observadores estará dado por

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a_1 \xi^\mu k_\mu}{a_2 \xi^\mu k_\mu} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_2}}{1 - \frac{2M}{r_1}}}. \quad (3.25)$$

De aquí vemos que si  $M=0$  no hay efecto de corrimiento al rojo, lo que indica que

es únicamente gravitacional. Si  $r_2 > r_1$  es decir, el emisor está más cerca del centro del atractor gravitacional que el receptor, entonces se tiene que  $\omega_2 < \omega_1$ , es decir, la luz llega con una frecuencia menor ("se corre al rojo") que con la que fue emitida al salir de una fuente gravitacional. Sabemos de mecánica cuántica que la energía de un fotón es proporcional a su frecuencia,  $E = \hbar\omega$ , por lo que tiene sentido que la luz pierda energía al salir de un potencial gravitacional.

De manera análoga, si  $2M < r_2 < r_1$  entonces se tiene que  $\omega_1 < \omega_2$ , es decir, la luz aumenta su frecuencia ("se corre al azul") al acercarse a la fuente gravitacional. Ahora, si  $r_1 = 2M$  y  $r_1 < r_2$ , se tiene que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

es decir, la luz no será detectada por el observador en  $r_2$ . Como se verá más adelante al estudiar lo que sucede en el horizonte de eventos, esto será porque la luz no podrá salir de esta región, es por esto que a estos objetos se les conoce como agujeros negros.

Otras cantidades conservadas sobre geodésicas que podemos construir se obtienen de hacer el producto punto del 4-momento  $p^\mu$ , con los vectores de Killing, y se tiene que estas son

$$E = -g_{\mu\nu}p^\mu\xi^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) m \frac{dt}{d\tau'}, \quad (3.27)$$

y

$$L = g_{\mu\nu}p^\mu\eta^\nu = mr^2\sin^2(\theta)\frac{d\phi}{d\tau}. \quad (3.28)$$

Despejando y dividiendo entre m, se tiene

$$\dot{t} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (3.29)$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{l}{r^2\sin^2(\theta)}, \quad (3.30)$$



donde  $l = \frac{L}{m}$ ,  $e = \frac{E}{m}$ ,  $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ , y  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau}$ .

Podemos asociar a  $e$  con la energía por unidad de masa y a  $l$  como el momento angular por unidad de masa. La conservación de este último implica entonces que el movimiento estará restringido a un plano, esto se puede ver fácilmente si elegimos como condiciones iniciales  $\dot{\phi} = 0$  y  $\phi = 0$ . Esto implica que  $l = 0$  en todo tiempo por lo que entonces  $\dot{\phi} = 0$  en todos los puntos de la geodésica, y por lo tanto la partícula permanece en el plano  $\phi = 0$ . Así podemos hacer una rotación de coordenadas y tomar dicho plano en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  con componente de 4-velocidad  $u^\theta = 0$ .

De la ecuación de la magnitud de la 4-velocidad para una partícula masiva se tiene que

$$-1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\dot{\phi}^2, \quad (3.31)$$

y sustituyendo las ecuaciones anteriores se obtiene

$$-1 = -\frac{e^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{l^2}{r^2}. \quad (3.32)$$

Reordenando los términos y renombrando se llega a

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}, \quad (3.33)$$

donde

$$\epsilon = \frac{1}{2}(e^2 - 1), \quad (3.34)$$

y

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right]. \quad (3.35)$$

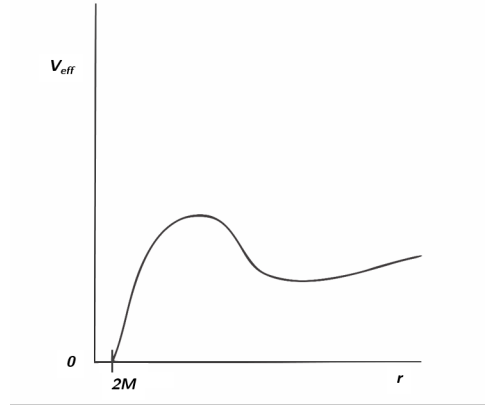


Fig. 3.2.1: Potencial efectivo para partículas masivas

Observamos que este potencial efectivo presenta una corrección al potencial Newtoniano, dado por el término con  $-\frac{Ml}{r^3}$ , y este potencial efectivo nos indica como serán las geodésicas que seguirá una partícula masiva cerca de un agujero negro de Schwarzschild. Dicho potencial se ilustra en la figura (3.2.1).

Analizando las derivadas de este potencial para ver las órbitas circulares, i.e. donde  $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$ , se tienen dos regiones, dadas por

$$r_{\pm} = \frac{l^2}{2M} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{l^2}} \right), \quad (3.36)$$

y de aquí vemos que la órbita circular más cercana y estable (ISCO por sus siglas en inglés) que se puede tener en un espacio-tiempo de Schwarzschild sucede cuando  $\frac{l}{M} = \sqrt{12}$ , es decir  $r_{ISCO} = 6M$ . Si queremos saber la forma precisa de las órbitas necesitamos resolver la ecuación

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \left( e^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( 1 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.37)$$

cuya solución está dada en términos de funciones elípticas[14]. Un resultado importante que fue de las primeras pruebas que confirmaron la teoría es que las órbitas precesan, el ángulo de precesión por órbita está dado por

$$\delta\phi_{prec} = \Delta\phi - 2\pi, \quad (3.38)$$

donde

$$\Delta\phi = \int_{r-1}^{r_2} \frac{2l}{r^2} \left( e^2 - \left(1 - \frac{2M}{3}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (3.39)$$

Dicho resultado se puede encontrar en [22]. Este ángulo de precesión fue calculado para la órbita de Mercurio, y fue de 43 segundos de arco por siglo, lo cuál es consistente con las observaciones y fue una de las evidencias más importantes para la teoría de Relatividad General [10].

Para analizar las geodésicas nulas se hace un desarrollo similar, utilizando que  $k_\mu k^\mu = 0$ , y reordenando y renombrando términos se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\dot{r}^2}{l^2} + W_{eff}, \quad (3.40)$$

donde a  $b$  se le conoce como parámetro de impacto y se define como  $b = \frac{l}{e}$ , y el potencial efectivo se escribe como

$$W_{eff} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (3.41)$$

Este potencial se muestra en la figura (3.2.2).

Así como los movimientos de precesión que sufren las órbitas de partículas masivas, la luz sufrirá una deflexión en su trayectoria debido a la gravedad, y esto es el funcionamiento base de las lentes gravitacionales. Dicha deflexión está dada por

$$\Delta\phi = \int_{r_1}^{\infty} \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (3.42)$$

Dicho cálculo se puede consultar en [22]. Este resultado también fue importante para la Relatividad General, pues en 1919 Arthur Eddington midió la deflexión de la luz de una estrella debido al campo gravitacional del sol en un eclipse solar total [11], el cuál fue de 1.7 segundos de arco, lo cuál coincidía con los cálculos realizados.

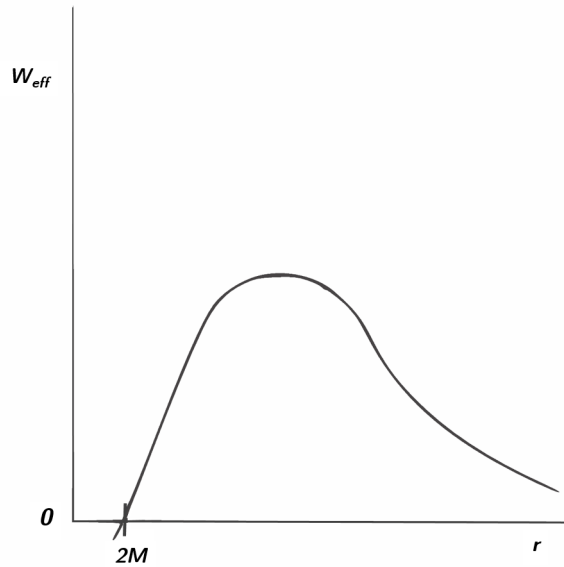


Fig. 3.2.2: Potencial efectivo para fotones.

### 3.3. Extensión de Kruskal y estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild.

Ahora analicemos el comportamiento de los conos de luz cerca de  $r = 2M$ . Para esto se necesita hacer un cambio de coordenadas, pues como se vio anteriormente, las coordenadas de Schwarzschild presentan problemas cerca de esta región, y para esto usaremos primero las llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Si se define un nuevo radio,  $r^*$  llamado radio de Regge-Wheeler o radio tortuga como

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{1}{2M} - 1 \right|, \quad (3.43)$$

se puede entonces definir una nueva coordenada  $V$  como

$$V = t + r^* = t + r + 2M \ln \left| \frac{1}{2M} - 1 \right|, \quad (3.44)$$

cuyo diferencial es

$$dV = dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (3.45)$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo términos en la métrica de Schwarzschild esta toma la forma de

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2dVdr + r^2 d\Omega^2, \quad (3.46)$$

que es la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. De esta métrica vemos que  $r = 2M$  no es singular, y analizando las geodésicas nulas radiales, esto es  $ds^2 = 0$  se tiene que

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2dVdr, \quad (3.47)$$

cuyas soluciones son:

$$V = cte, \quad (3.48)$$

$$V = cte + 2 \left( r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right). \quad (3.49)$$

El diagrama del espacio-tiempo se observa en la figura (3.3.1).

Las coordenadas de Edington-Finkelstein se comportan mejor que las coordenadas de Schwarzschild en regiones cercanas al radio de Schwarzschild, sin embargo aún presentan un problema, este es, que la simetría temporal de las geodésicas ha desaparecido, esto es, las geodésicas entrantes se comportan de manera distintas a las salientes. Esto se puede arreglar haciendo otro cambio de coordenadas, pues esto nos permitirá analizar la estructura causal de este espacio-tiempo. Si ahora definimos una nueva coordenada  $U$  como

$$U = t - r^* = t - r - 2M \ln \left| \frac{1}{2M} - 1 \right|, \quad (3.50)$$

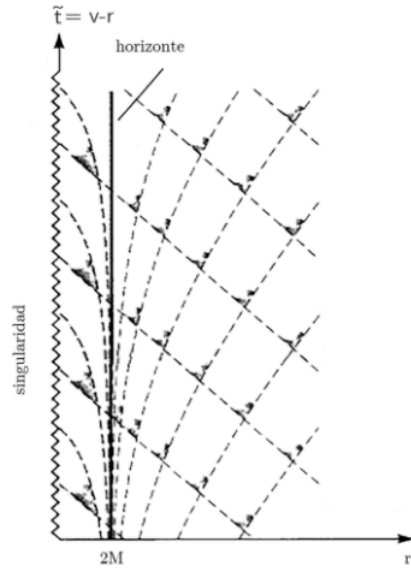


Fig. 3.3.1: Diagrama del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Notamos que los conos de luz cambian de orientación al cruzar el horizonte de eventos.

podemos escribir la métrica de Schwarzschild recuperando la simetría temporal, y la métrica toma la forma siguiente

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dUdV + r^2 d\Omega^2. \quad (3.51)$$

Esta forma de la métrica vuelve a tener problemas en  $r = 2M$ , pero esto se puede resolver definiendo unas nuevas coordenadas  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  como

$$\bar{u} = -e^{-\frac{U}{4M}}, \quad (3.52)$$

$$\bar{v} = e^{\frac{V}{4M}}, \quad (3.53)$$

al obtener el diferencial de estas coordenadas, elevando al cuadrado, y sustituyendo en la métrica de Schwarzschild esta toma la forma de

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{\bar{r}}{2M}} d\bar{u}d\bar{v} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.54)$$

Notemos que esta expresión es regular para  $r > 0$ , pero ahora como función de

$\bar{u}$  y  $\bar{v}$ . Sin embargo como estas coordenadas son nulas, podemos utilizarlas para construir unas nuevas coordenadas temporales y espaciales al definir

$$\bar{V} = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{2}, \quad (3.55)$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{v} + \bar{u}}{2}. \quad (3.56)$$

Estas coordenadas se conocen como coordenadas de Kruskal Szekeres. Haciendo el proceso análogo a lo que se hizo con las coordenadas de Eddington-Finkelstein, diferenciando y sustituyendo en la métrica esta toma la forma

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (-d\bar{V}^2 + d\bar{U}^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.57)$$

que es la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szkeres. Notemos que ahora que la singularidad en  $r = 2M$  ha desaparecido, mientras que la singularidad en  $r = 0$  se mantiene. Las coordenadas de Kruskal-Szekeres se relacionan con las coordenadas de Schwarzschild mediante las ecuaciones

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} = \bar{U}^2 - \bar{V}^2, \quad (3.58)$$

y

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{\bar{V}}{\bar{U}}, \quad (3.59)$$

Con  $r > 0$ . Fijándonos en las geodésicas radiales nulas,  $ds^2 = 0$ , se tiene que

$$0 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (-d\bar{V}^2 + d\bar{U}^2) \implies -d\bar{V}^2 + d\bar{U}^2 = 0, \quad (3.60)$$

lo cual tiene como solución

$$\bar{V} = \pm \bar{U} + c. \quad (3.61)$$

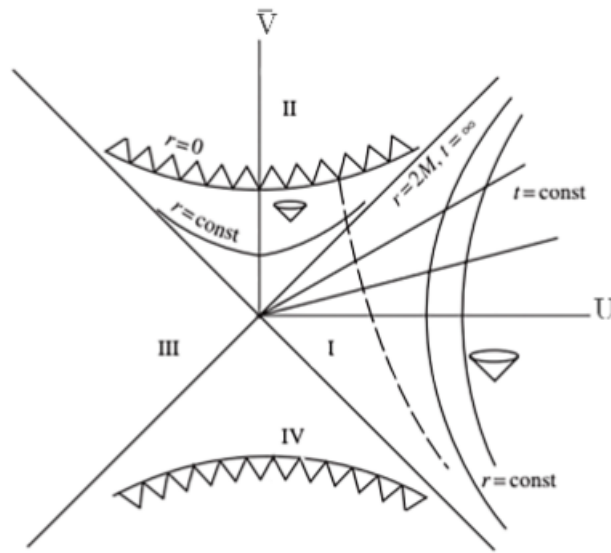


Fig. 3.3.2: Diagrama del agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal.

Es decir, los conos de luz son líneas rectas a 45 grados en un diagrama de espacio-tiempo, al igual que en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto tiene sentido, pues esta métrica es conforme, es decir, es la métrica de Minkowski multiplicada por una función escalar que depende de las coordenadas. El diagrama del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal se muestra en la figura (3.3.2). Hay varios puntos importantes que podemos notar del diagrama de Kruskal y las relaciones entre estas coordenadas y las de Schwarzschild. Primero notemos que una curva de  $r$  constante corresponde a una hipérbola en el diagrama, horizontal para  $r > 2M$  y vertical para  $r < 2M$ , esto significa que una vez que un observador cruza por  $r = 2M$  de la región I a la región II ya no se podrá mantener en un radio constante y caerá en un tiempo coordenado finito hacia la singularidad  $r = 0$ , además cualquier señal de luz que envíe dentro de esta región permanecerá en esta región y además esta también caerá a la singularidad. Por esta razón, a la región II se le conoce como agujero negro, mientras que a su frontera en  $r = 2M$  se le conoce como el horizonte de eventos del agujero negro [28].



Notemos además que existen otras 2 regiones, III y IV, donde la región IV es equivalente a la II, pero invertida en el tiempo. A esta región se le conoce como agujero blanco, pues todo lo que esté dentro de ésta tendrá que escapar en un tiempo coordenado finito, mientras que la región III es análoga a la región I pero están causalmente desconectadas, es decir, no existe una curva temporal por la que estén unidas. Estas regiones son soluciones válidas a las ecuaciones de Einstein, sin embargo se consideran como soluciones no físicas, pues los agujeros negros se forman cuando una estrella lo suficientemente masiva colapsa gravitacionalmente, y estas regiones estarían dentro de la estrella, donde  $T_{\mu\nu} \neq 0$ , por lo que la solución de Schwarzschild ya no será válida en dicha región.

### 3.4. Otras soluciones de Agujeros Negros

Además de la solución de Schwarzschild existen más soluciones de agujeros negros en relatividad general, estas se obtienen si imponemos por ejemplo distintas simetrías. En el caso particular en el que añadimos un campo electromagnético (teoría de Einstein-Maxwell) y se mantiene la simetría esférica y la estaticidad, la solución estará dada por la métrica de Reissner-Nordstrom [21], que tiene la siguiente forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{4\pi r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{4\pi r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.62)$$

donde  $Q$  es la carga eléctrica del agujero negro. Vemos que si  $Q = 0$ , entonces la solución se reduce al espacio-tiempo de Schwarzschild. Este tipo de agujeros negros se caracterizan por tener 2 horizontes, dados por

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 2M \pm \sqrt{(2M)^2 - 4\left(\frac{Q^2}{4\pi}\right)} \right), \quad (3.63)$$

donde por la conjetura de la censura cósmica es necesario que  $Q < M$ , pues si no fuera así se tendría una singularidad desnuda. Además de esto, a diferencia

del horizonte de eventos en Schwarzschild, al cruzarlo, la componente  $g_{rr}$  de la métrica vuelve a cambiar de signo, por lo que  $r$  vuelve a ser una coordenada espacial. Esto sugiere que la singularidad  $r = 0$  es temporaloide en lugar de ser espacialoide como en el caso de Schwarzschild. Sin embargo estas soluciones no son realistas para un agujero negro astrofísico, pues observaciones cosmológicas encuentran que vivimos en un universo eléctricamente neutro, y de formarse alguno de estos agujeros, atraería carga opuesta y se neutralizaría rápidamente. Otra solución de agujero negro se encuentra si se elimina la simetría esférica y se impone simetría axial, dicha solución a las ecuaciones de Einstein estará dada por la métrica de Kerr, y esta describe un espacio-tiempo estacionario con un agujero negro rotante. Dicha solución fue encontrada en 1963 por Roy Kerr [16], y está dada por

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) c^2 dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} c dt d\phi, \quad (3.64)$$

donde

$$a = \frac{J}{Mc}, \quad (3.65)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.66)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (3.67)$$

Con  $J$  el momento angular del agujero negro y  $a$  se le conoce como parámetro de Kerr. Vemos que si  $J = 0$ , entonces la solución se reduce a la solución de Schwarzschild. Al igual que el agujero negro de Reissner-Nordstrom, el agujero negro de Kerr presenta dos horizontes dados por

$$r_{H\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (3.68)$$

de donde se tiene la restricción de que  $a \leq M$ , pues de lo contrario se tendría

una singularidad desnuda, lo cual puede violar la estructura causal del espacio-tiempo. Además de esto, se tiene otra región importante llamada ergosfera, la cual está delimitada por el horizonte de eventos exterior y un horizonte de Killing donde el vector de Killing asociado a la coordenada temporal se anula, por lo que la componente temporal de la métrica también se anula, esto es cuando

$$r_{erg\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}. \quad (3.69)$$

Un observador en esta región no podrá permanecer estático, pues el agujero lo obligará a rotar en su dirección. Sin embargo, es posible salir de esta región debido a que se encuentra fuera del horizonte de eventos, y esto es importante pues se puede usar para extraerle energía rotacional al agujero negro mediante el llamado proceso de Penrose [14]. A diferencia de los espacio-tiempos anteriores, el descrito por la métrica de Kerr no es estático debido a la rotación intrínseca del agujero negro.

Existe una solución de agujero negro dada por la métrica de Kerr-Newman, y esta describe el espacio-tiempo de un agujero negro rotante y cargado. Sin embargo, al igual que el agujero negro de Reissner-Nordstrom, no es una solución tan realista astrofísicamente. Se cree que físicamente el espacio-tiempo que mejor describe un agujero negro real es el espacio-tiempo de Kerr. La existencia de los agujeros negros ha sido confirmada por observaciones indirectas en el movimiento de estrellas en la Vía Láctea, así como por la detección de discos de acreción que se forman al momento en que la materia cae en el agujero negro, como es el caso del agujero negro supermasivo Sagitario A que está en el centro de la Vía Láctea. En 2015 se realizaron detecciones de ondas gravitacionales por el interferómetro LIGO [1, 2, 4], cuyo origen sabemos, proviene de la colisión de dos agujeros negros. Además de estas detecciones, en 2019 el telescopio “Event Horizon” tomó la primera imagen directa de un agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la galaxia Messier 87 [12], y dicha imagen es consistente con lo que se esperaría de la sombra producida por un agujero negro de Kerr debido a su campo gravitacional. La confirmación de estos objetos en el universo es un fenómeno

---

más que se obtiene de estudiar la teoría de la Relatividad General, sin embargo, aún quedan preguntas abiertas acerca de su naturaleza. En particular, aún no está bien entendida la termodinámica de estos objetos, así como los problemas con la paradoja de la pérdida de información y otros fenómenos cuánticos. Este último está relacionado con la llamada conjetura de no-pelo, de la cuál trata el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

## Teoremas de No-Pelo

En relatividad general y en la teoría Einstein-Maxwell, existen teoremas de unicidad de agujeros negros que dictan que la única solución admisible de un espacio-tiempo estacionario y en vacío será descrito por la métrica de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, Kerr, o Kerr-Newman[9]. Es decir, el agujero negro estará determinado únicamente por su masa  $M$ , su carga  $Q$ , y su momento angular  $J$ .

Se ha conjeturado que no existen más cantidades físicas que caracterizen al agujero negro, a esto se le llama conjetura de no-pelo, y esta fue por primera vez conjeturada por Jacob Bekenstein en 1968 luego de que Israel Werner probara que dentro de la teoría de Relatividad General, todo agujero negro, estático, asintóticamente plano, con horizonte de eventos regular, será descrito por un espacio-tiempo de Schwarzschild o un espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom si hay un campo electromagnético. [15] Aunque esta conjetura ha sido probada para muchos casos, existen contraejemplos. En 1999 se descubrió que en teorías tipo Einstein-Yang-Mills, el agujero negro permite pelo dado por campos escalares y campos vectoriales no abelianos [27]. Posteriormente se hicieron más estudios de esta conjetura para distintos casos de materia.

### 4.1. Prueba de Bekenstein

Jacob Bekenstein [7] probó que una estrella que colapsa esféricamente en un agujero negro estático no puede tener campos clásicos escalares masivos o vectoriales

en el exterior. En particular, para el caso del campo escalar masivo, utilizó un acoplamiento mínimo de la gravedad a un campo escalar, dado por la acción

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ R - \kappa \left( \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + V(\phi) \right) \right], \quad (4.1)$$

donde  $\kappa = 16\pi G$  es la constante de acoplamiento,  $\phi$  el campo escalar, y  $V(\phi)$  el potencial escalar.

Notamos que la acción de esta teoría tiene dos términos dinámicos, que son  $g_{\mu\nu}$  y  $\phi$ , por lo cuál al utilizar el principio de mínima acción se tienen que hacer 2 variaciones distintas, una respecto al campo y otra respecto al tensor métrico e igualar a cero para obtener las ecuaciones de movimiento, sin embargo, para la prueba del teorema de no-pelo formulada por Bekenstein solo es necesario obtener las ecuaciones de movimiento para el campo  $\phi$ .

Haciendo la variación con respecto al campo escalar se obtiene

$$\delta S_\phi = 0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( -\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \right), \quad (4.2)$$

de donde haciendo integración por partes en el primer término se tiene

$$0 = - \int dx^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi \delta\phi) + \int dx^4 \sqrt{-g} \left( \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi) \delta\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \right), \quad (4.3)$$

y observando que el primer término de (4.3) es una derivada total se puede aplicar el teorema de Stokes, por lo que se produce un término de frontera que se anula en infinito, entonces la variación queda como

$$0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta\phi \left( \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad (4.4)$$

por lo que la ecuación de movimiento para el campo es

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.5)$$

Si suponemos que el espacio-tiempo corresponde a un agujero negro con simetría esférica, asintóticamente plano, globalmente hiperbólico, estático, y existe un horizonte de Killing que coincide con el horizonte de eventos y además es regular, es decir, una frontera entre regiones del espacio-tiempo donde el vector de Killing se anula, y además esta superficie será de bifurcación. Como el espacio-tiempo es estático y globalmente hiperbólico, existen hipersuperficies  $\Sigma$  espacialoides llamadas superficies de Cauchy. Entonces, si asociamos a  $t$  con el parámetro de Killing y lo usamos como coordenada temporal estas hipersuperficies estarán en  $t = cte$ . Si multiplicamos (4.5) por  $\phi$  e integramos en un volumen en una región de espacio-tiempo cuya frontera está dada por el horizonte de Killing de bifurcación, 2 hipersuperficies espacialoides  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , y la región asintótica como se observa en la figura(4.1.1), se tiene que

$$\int \sqrt{-g} \left( \phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi \right) = 0. \quad (4.6)$$

Notamos que podemos integrar por partes el primer término de (4.6), lo cual queda como

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\mu (\phi \nabla^\mu \phi) - \int \sqrt{-g} (\nabla_\mu \phi (\nabla^\mu \phi)), \quad (4.7)$$

de donde el primer término de (4.7) se anula en las fronteras de la región de integración, esto porque el horizonte de Killing es de medida cero comparado con el resto de la región, y como el espacio-tiempo se asume asintóticamente plano, se tiene que asintóticamente  $\phi \rightarrow 0$ , por lo que se anula en esta frontera, mientras que los vectores normales de las hipersuperficies espaciales son antiparalelos por lo cual la suma de esas contribuciones se cancela teniendo signos opuestos.

Con esto, la integral obtiene la forma

$$\int \sqrt{-g} \left( -\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi \right) = 0, \quad (4.8)$$

y si suponemos que el potencial tiene la forma de

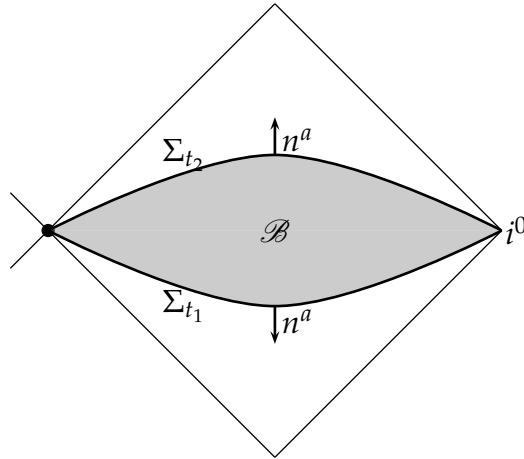


Fig. 4.1.1: Región de Integración en el espacio-tiempo

$$V = \sum_{i=1}^n a_i \phi^{2i}, \quad (4.9)$$

con  $a_i > 0$ , entonces (4.8) se escribe como

$$\int \sqrt{-g} \left( -\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \sum_{i=1}^n 2i a_i \phi^{2i} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Ahora, debido a que se tiene simetría esférica  $\phi = \phi(r)$  i.e. al campo escalar depende únicamente de la coordenada radial, y por la estaticidad, el término  $(\nabla\phi)^2$  será estrictamente positivo pues  $\nabla\phi$  será un vector espacialoide, por lo que (4.10) es estrictamente negativo, y solo se satisface si  $\phi = 0$ . Esto significa que dicho campo no puede existir en el exterior del agujero negro, por lo tanto la métrica que describe este espacio-tiempo será la métrica de Schwarzschild caracterizado únicamente por su masa.

## 4.2. Prueba de Sudarsky

Sudarsky [25] realizó una prueba más general para esta teoría aplicable para cualquier potencial no negativo donde son necesarias las ecuaciones de movimiento de la métrica. Haciendo la variación sobre la métrica de la acción (4.1) se tiene que



$$\delta S_g = 0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( G_{\mu\nu} - \kappa \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \kappa \frac{1}{4} (\nabla \phi)^2 + \kappa \frac{1}{2} V(\phi) \right), \quad (4.11)$$

por lo que entonces las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left( \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} V(\phi) \right). \quad (4.12)$$

La métrica más general de agujero negro con horizonte de eventos regular, es decir el horizonte de eventos no es una singularidad física, que satisface las simetrías de esta teoría (asintóticamente plana, esférica, y estática), se puede escribir como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) e^{-\delta(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2), \quad (4.13)$$

con  $m$ ,  $\delta$ , y  $\phi$  funciones dependientes únicamente de  $r$ . Además, como el horizonte debe ser regular en  $r = r_H$ , estas funciones deben de satisfacer las condiciones

$$m(r_H) = \frac{r_H}{2}, \quad (4.14)$$

$$m(r) < \frac{r}{2} \quad \forall r > r_H, \quad (4.15)$$

$$\delta(r_H) = \text{valor finito}. \quad (4.16)$$

Con esta métrica, y utilizando las simetrías, las ecuaciones de Einstein se reducen a las siguientes ecuaciones:

$$\delta' = -\frac{\kappa r}{2} \phi'^2, \quad (4.17)$$

y

$$m' = \frac{\kappa r^2}{4} \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \phi'^2 + V(\phi) \right], \quad (4.18)$$

donde la prima significa  $\frac{d}{dr}$ . Ahora, las condiciones para una métrica asintóticamente plana requieren que  $m(r)$  y  $\delta(r)$  convergan a un límite finito cuando  $r \rightarrow \infty$ , esto para que se recupere la métrica de Minkowski en dicha región. Esto implica que  $\delta'$  y  $m'$  se tendrían que anular en dicha región, por lo que que (para un potencial  $V$  no negativo)  $(\phi')^2 = O(r^{-(3+\epsilon)})$  y que  $V = O(r^{-(3+\epsilon)})$  para valores muy grandes de  $r$ .

Ahora, con esta métrica la ecuación de movimiento para el campo (4.5) se ve como

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \phi'' + \left(\frac{2m(r)}{r^2} - \frac{2m'(r)}{r}\right) \phi' + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \left(\frac{2}{r} - \frac{\delta'(r)}{2}\right) = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (4.19)$$

Procederemos haciendo un equivalente al teorema de trabajo-energía, multiplicando (4.19) por  $\phi'$  se tiene que

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \left(\phi''\phi' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\delta'(r)}{2}\right)\phi'\right) + \left(\frac{2m(r)}{r^2} - \frac{2m'(r)}{r}\right) \phi'^2 = \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi'. \quad (4.20)$$

Podemos definir una “energía”  $E$  del sistema como

$$E = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \phi'^2 - V(\phi), \quad (4.21)$$

y vemos que parece un término usual de energía, con la diferencia de que ahora su masa será  $\mu = 1 - \frac{2m(r)}{r}$ . La derivada de este término está dada por

$$E' = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \phi''\phi' + \left(\frac{m(r)}{r^2} - \frac{m'(r)}{r}\right) \phi'^2 - \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi', \quad (4.22)$$

y asociando (4.20) con la derivada de esta energía se tiene que

$$E' = -\frac{1}{2} \left(\frac{2m(r)}{r^2} - \frac{2m'(r)}{r}\right) \phi'^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \left(\frac{2}{r} - \frac{\delta'(r)}{2}\right) \phi'^2 = -b\phi'^2, \quad (4.23)$$

con

$$b = \frac{1}{2} \left( \frac{2m(r)}{r^2} - \frac{2m'(r)}{r} \right) + \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \left( \frac{2}{r} - \frac{\delta'(r)}{2} \right). \quad (4.24)$$

Sustituyendo  $m'$  y  $\delta'$  de (4.18) y (4.17) en  $b$  obtenemos

$$b = \frac{\kappa r}{4} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \phi'^2 - V(\phi) \right] + \frac{2}{r} - \frac{3m}{r^2}, \quad (4.25)$$

que podemos escribir como

$$b = -\frac{\kappa r E}{4} + \frac{2}{r} \left( 1 - \frac{3m(r)}{2r} \right). \quad (4.26)$$

Por lo que entonces la derivada de la energía se escribe como

$$E' = \left( \frac{\kappa r E}{4} - \frac{2}{r} \left( 1 - \frac{3m(r)}{2r} \right) \right) \phi'^2 \quad (4.27)$$

Multiplicando por un factor integrante dado por  $e^{-\frac{\delta}{2}}$ , se tiene que

$$\frac{d}{dr} (Ee^{-\frac{\delta}{2}}) = \left( E' - E \frac{\delta'}{2} \right) e^{-\frac{\delta}{2}} = -\frac{2}{r} \left( 1 - \frac{3m(r)}{2r} \right) \phi'^2 e^{-\frac{\delta(r)}{2}}, \quad (4.28)$$

de aquí observamos que  $\frac{d}{dr} (Ee^{-\frac{\delta}{2}})$  es una función negativa para todo  $r > r_H$ , por lo que podemos enunciar el teorema de la siguiente manera:

**Teorema:** Un espacio-tiempo de agujero negro que sea estático, esféricamente simétrico, asintóticamente plano, y con horizonte regular que satisfaga las ecuaciones de Einstein con campos de materia arbitrarios dados por campos escalares (de clase  $\mathcal{C}^2$  en el horizonte) sometidos a un potencial no negativo, que están mínimamente acoplados a la gravedad y satisfacen la ecuación del movimiento para el campo, es necesariamente trivial, esto quiere decir que el espacio-tiempo es de Schwarzschild y los campos escalares son constantes y corresponden al cero del potencial.

**Prueba:** Notamos que la energía del sistema en el horizonte es  $E(r_H) = -V(\phi(r_H)) \leq 0$  para un potencial no negativo, entonces se satisface que  $E(r_H)e^{-\frac{\delta(r_H)}{2}} \leq 0$  y como el lado derecho de (4.28) es semidefinido negativo para  $r > r_H$ , pues  $m(r) < \frac{r}{2}$

por la regularidad del horizonte, entonces  $E(r)e^{-\frac{\delta(r)}{2}}$  es una función decreciente, es decir cada vez es más negativa que  $E(r_H)e^{-\frac{\delta(r_H)}{2}}$ , Pero como el espacio-tiempo es asintóticamente plano, entonces  $E(r)e^{-\frac{\delta(r)}{2}}$  debe tender a 0 cuando  $r \rightarrow \infty$  de la forma  $O(r^{-(3+\epsilon)})$ , y como por construcción esto se satisface, de las ecuaciones de movimiento solo queda que  $V = 0$  y  $\phi = cte$ . Por lo que queda concluida la prueba.

### 4.3. Teorema de no-pelo en teorías de Brans-Dicke.

En teorías de gravedad escalar-tensorial no mínimamente acopladas también existe una formulación del teorema de no-pelo[24], que ha sido probada para teorías tipo Brans-Dicke con una acción general dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (4.29)$$

donde  $\phi$  es el escalar de Brans-Dicke, cuyo papel físico es cambiar el valor de la constante de gravitación en distintos lugares, y  $\omega(\phi)$  es la función de acoplamiento de Brans-Dicke que también cambia para distintas regiones, y  $V$  el potencial del campo. Ahora, haciendo una transformación conforme de la métrica de la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

donde  $\Omega$  es el factor conforme, el cuál es un mapeo suave que mapea el espacio-tiempo en el marco de Jordan  $M$  en un espacio-tiempo conforme en el marco de Einstein  $\bar{M}$ . Redefiniendo de manera no lineal el término escalar de Brans-Dicke como

$$\Phi = \int \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{16\pi}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad (4.31)$$

la acción pasa a la forma de

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left( \frac{\bar{R}}{16\pi} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \Phi \bar{\nabla}_\nu \Phi - U(\Phi) \right), \quad (4.32)$$

donde la tilde denota las cantidades asociadas con la métrica reescalada  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , y

$$U(\Phi) = \frac{V(\phi(\Phi))}{\phi^2(\Phi)}. \quad (4.33)$$

Es decir, ahora esta acción es la acción de un campo con acoplamiento mínimo a la gravedad, y se pueden usar los pasos realizados anteriormente para teorías de este tipo para probar la conjetura de no-pelo tal como se muestra en [13, 24].

Existe también una forma de probar el teorema de no-pelo para estas teorías tipo Brans-Dicke sin tener que recurrir al cambio entre marcos de Jordan y Einstein, esto fue mostrado en [13]. Si hacemos las variaciones respecto a la métrica y al campo de Brans-Dicke de la acción (4.29), entonces se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$G_{\mu\nu} = \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - g_{\mu\nu} \frac{V(\phi)}{2\phi}, \quad (4.34)$$

para la variación de la métrica y

$$(2\omega + 3)\square\phi = -\frac{d\omega}{d\phi} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V, \quad (4.35)$$

para el campo escalar. Podemos escribir la solución más general para un espacio-tiempo de agujero negro estático con simetría esférica como

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + B^2(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.36)$$

Con esta métrica la ecuación (4.35) toma la forma de

$$(2\omega + 3) \left[ \phi'' + \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) \phi' \right] = -\frac{d\omega}{d\phi} \phi'^2 + B^2 \left( \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right), \quad (4.37)$$

donde la prima denota  $\frac{\partial}{\partial r}$ . Ahora, el horizonte de eventos  $r_H$  está dado por la raíz positiva de  $g^{rr} = 0$ , es decir, se obtiene cuando  $B \rightarrow \infty$ , y notemos que si el horizonte es regular lo que implica que  $\phi$  y  $\phi'$  están definidos ahí y son finitos, entonces

$$\nabla_\mu \phi(r_H) \nabla^\mu \phi(r_H) = \frac{\phi'^2(r_H)}{B^2(r_H)} = 0. \quad (4.38)$$

Ahora, si suponemos que  $V(\phi) = m^2 \phi^2$  (es decir, que el campo está sometido a un potencial tipo Klein-Gordon) o es idénticamente cero, el último término de (4.37) desaparece, por lo que entonces se puede reescribir como

$$\frac{\phi''}{\phi'} + \frac{d\omega}{d\phi} \left( \frac{\phi'}{2\omega + 3} \right) + \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} = 0, \quad (4.39)$$

notando que

$$\frac{\phi''}{\phi'} + \frac{d\omega}{d\phi} \left( \frac{\phi'}{2\omega + 3} \right) + \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} = \left[ \ln \left( \frac{Ar^2 \phi'}{B} \sqrt{2\omega + 3} \right) \right]', \quad (4.40)$$

lo cual se puede integrar como

$$\frac{\phi'}{B} = \frac{C_0}{Ar^2 \sqrt{2\omega + 3}}, \quad (4.41)$$

con  $C_0$  una constante de integración. Ahora, por la condición (4.38), se tiene que entonces al evaluar (4.41) en el horizonte

$$\frac{C_0}{A(r_H) r_H^2 \sqrt{2\omega(\phi(r_H)) + 3}} = 0, \quad (4.42)$$

lo que implica que  $C_0 = 0$ . Sin embargo, por (4.41), esto significa que  $\phi'(r) = 0$  para todo  $r \geq r_H$ , y por lo tanto  $\phi = cte$ , con lo que queda concluida la prueba

---

y por lo cual el agujero negro se reduce a un agujero negro de Relatividad General.

Las pruebas del teorema de no-pelo son importantes, pues sugieren que los agujeros negros son indistinguibles en Relatividad General y teorías modificadas. En particular, en esta sección nos hemos fijado en el caso particular de campos escalares, pues además de ser el caso más sencillo, muchas teorías alternativas a Relatividad General incluyen este tipo de campos, y las pruebas presentadas aquí pueden ser extendidas a otro tipo de teorías. En el siguiente capítulo haremos la extensión de la prueba de Bekenstein para una teoría escalar-tensorial.

## Capítulo 5

### Prueba del Teorema de no pelo con acoplamiento no mínimo

En este capítulo se hará una prueba análoga a la de Bekenstein para teorías con un acoplamiento no mínimo a un campo escalar. La motivación para esto es extender la prueba para teorías en el que el acoplamiento no mínimo es tensorial y del tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \alpha(\phi R + R_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + C_{\alpha\beta\mu\nu} K^{\alpha\beta\mu\nu}) - \kappa \left( \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \nabla_\mu H_{\alpha\beta} \nabla^\mu H^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_\sigma K_{\alpha\beta\mu\nu} \nabla^\sigma K^{\alpha\beta\mu\nu} + V(\phi, H^2, K^2) \right) \right], \quad (5.1)$$

donde  $H_{\mu\nu}$  tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann y  $K_{\mu\nu\alpha\beta}$  las mismas simetrías que el tensor de Weyl, y dichos términos pueden llevar a violaciones espontáneas de Lorentz.

A pesar de que ya existen pruebas para teorías con acoplamiento no mínimo a un campo escalar como las que se ven en la sección (4.3), éstas requieren hacer una transformación conforme al marco de Einstein, lo cuál no desacoplaría el término acoplado al tensor de Weyl, pues este es invariante ante transformaciones conformes, mientras que la otra utiliza las ecuaciones de movimiento utilizando una métrica general, lo cuál se puede hacer bastante más complicada en teorías con acoplamientos tensoriales, pues estas se vuelven altamente no lineales.

Una teoría con acoplamiento no mínimo a un campo escalar está dada por la acción



$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ F(\phi)R - \kappa \left( \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + V(\phi) \right) \right], \quad (5.2)$$

donde  $F(\phi)$  es la función del campo escalar que se acopla con la gravedad.

Haciendo la variación respecto al campo se obtiene

$$\delta S_\phi = 0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( R \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi - \kappa (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi) \right), \quad (5.3)$$

de donde, haciendo integración por partes, se tiene

$$0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( R \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi + \kappa (\nabla_\mu (\nabla^\mu \phi) \delta \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi) \right) + \int dx^4 \sqrt{-g} \kappa \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi \delta \phi). \quad (5.4)$$

Observando que el segundo término es una derivada total, aplicando el teorema de la divergencia y viendo que el término de frontera se anula de forma análoga a la teoría con acoplamiento mínimo, se tiene que

$$0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta \phi \left( R \frac{\partial F}{\partial \phi} + \kappa \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad (5.5)$$

por lo que la ecuación de movimiento para el campo es

$$R \frac{\partial F}{\partial \phi} + \kappa \nabla^\mu \nabla_\mu \phi - \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (5.6)$$

Notemos que, a diferencia del caso mínimamente acoplado, aparece el escalar de curvatura, por lo que necesitaremos las ecuaciones de Einstein para obtenerlo.

Ahora, haciendo la variación respecto al tensor métrico se tiene

$$\delta S_g = 0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \delta g^{\mu\nu} \left[ -\frac{\alpha}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( FR - \kappa \left( \frac{1}{2} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi + V \right) \right) \right] + FR_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + F g_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} \right\}. \quad (5.7)$$

Al integrar por partes el último término de esta expresión este queda como

$$\int dx^4 \sqrt{-g} F g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu (F V^\mu) - \int dx^4 \sqrt{-g} V^\mu \nabla_\mu F, \quad (5.8)$$

donde

$$V^\mu = -\nabla_\alpha \delta g^{\alpha\mu} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \nabla_\nu (\delta g^{\alpha\beta}), \quad (5.9)$$

y vemos que como el primer término de (5.8) es la integral de un derivada total, y por lo tanto, se anula en las fronteras por el teorema de Stokes, es decir, no tiene contribución a la variación, usando (5.9), el segundo término de 5.8) se escribe como

$$\begin{aligned} \int dx^4 \sqrt{-g} V^\mu \nabla_\mu F &= \int dx^4 \sqrt{-g} \nabla_\alpha (\delta g^{\alpha\mu}) \nabla_\mu F \\ &\quad - \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha (\delta^{\mu\nu}) \nabla_\beta F. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Integrando por partes una vez, y anulando los términos de frontera al usar el teorema de Stokes en la integral de la derivada total resultante, tenemos que

$$\int dx^4 \sqrt{-g} V^\mu \nabla_\mu F = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[ g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta F - \nabla_\mu \nabla_\nu F \right]. \quad (5.11)$$

Por lo que, juntando estos resultados previos en la variación de la acción, esta queda como

$$\begin{aligned} 0 &= \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[ F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F R + g_{\mu\nu} \square F - \nabla_\mu \nabla_\nu F \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left( -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V \right) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento para la métrica son

$$F(\phi) G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square F(\phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu F(\phi) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.13)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (5.14)$$

Necesitamos ahora encontrar una expresión para el escalar de curvatura en términos del campo escalar para sustituirla en la ecuación de movimiento que obtuvimos para el campo. Para esto sacamos la traza de las ecuaciones (5.13), de donde se obtiene

$$-F(\phi)R + 3\Box F(\phi) = \kappa \left( -\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - 2V(\phi) \right). \quad (5.15)$$

Si tomamos a  $F(\phi) = 1 + \alpha\phi$  con  $\alpha$  una constante, y además como condición extra pedimos que  $1 + \alpha\phi > 0$  para que sea bien comportada y el acoplamiento no mínimo sea a primer orden en el campo y en la curvatura, entonces la ecuación de movimiento que satisface el campo se escribe como

$$\alpha R + \kappa \Box \phi - \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (5.16)$$

y el escalar de curvatura toma la siguiente forma

$$R = \frac{1}{1 + \alpha\phi} \left( 3\alpha \Box \phi + \frac{\kappa}{2} (\nabla\phi)^2 + 2\kappa V \right), \quad (5.17)$$

donde

$$(\nabla\phi)^2 \equiv \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi. \quad (5.18)$$

Si asumimos que el espacio-tiempo corresponde a un agujero negro estático, asintóticamente plano, con simetría esférica, y con horizonte de Killing bifurcado y regular, y análogamente al caso mínimamente acoplado tomamos la ecuación de movimiento para el campo (5.16), la multiplicamos por  $\phi(r)$  e integramos en una región del espacio-tiempo cuyas fronteras están dadas por el horizonte de Killing, dos hipersuperficies espacialoides  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  con  $t = cte$ , y la región asintótica, se tiene entonces que

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi - \alpha \phi R - \kappa \phi \square \phi \right). \quad (5.19)$$

Integrando por partes el tercer término de (5.19) se tiene

$$- \int d^4x \sqrt{-g} (\kappa \phi \square \phi) = - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\alpha (\kappa \phi \nabla^\alpha \phi)) + \int d^4x \sqrt{-g} (\kappa (\nabla_\alpha (\phi) \nabla^\alpha \phi)), \quad (5.20)$$

y análogamente al caso mínimamente acoplado, el primer término del lado derecho de (5.20) se anula en las fronteras de la región de integración, esto porque en el horizonte de Killing es de medida cero comparando con el resto de la región, y como la teoría es asintóticamente plana entonces  $\phi \rightarrow 0$ , y en las hipersuperficies espaciales los vectores normales son antiparalelos siempre, teniendo signos opuestos en cada hipersuperficie restante, por lo cuál la suma se anula.

Así, la ecuación (5.19) es

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi - \alpha \phi R + \kappa (\nabla \phi)^2 \right), \quad (5.21)$$

y sustituyendo el escalar de curvatura se tiene que

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi + \kappa (\nabla \phi)^2 - \frac{3\alpha^2 \phi \square \phi}{1 + \alpha \phi} - \frac{\kappa \alpha \phi (\nabla \phi)^2}{2(1 + \alpha \phi)} - \frac{2\kappa \alpha \phi V}{1 + \alpha \phi} \right). \quad (5.22)$$

De igual forma integramos por partes el término proporcional a  $\square \phi$ , el cuál queda como

$$- \int d^4x \sqrt{-g} \frac{3\alpha^2 \phi \square \phi}{1 + \alpha \phi} = - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \left( \frac{3\alpha^2 \phi \nabla^\nu \phi}{1 + \alpha \phi} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{3\alpha^2 \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi}{1 + \alpha \phi} - \frac{3\alpha^3 \phi \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi}{(1 + \alpha \phi)^2} \right). \quad (5.23)$$

Aplicando el teorema de Stokes al primer término del lado derecho de (5.23) implica que este se anula en las fronteras por los mismos argumentos dados anteriormente, por lo que la ecuación toma la forma

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi - \frac{2\kappa\alpha\phi V}{1 + \alpha\phi} + \kappa(\nabla\phi)^2 + \frac{3\alpha^2(\nabla\phi)^2}{1 + \alpha\phi} - \frac{3\alpha^3\phi(\nabla\phi)^2}{(1 + \alpha\phi)^2} - \frac{\kappa\alpha\phi(\nabla\phi)^2}{2(1 + \alpha\phi)} \right), \quad (5.24)$$

y agrupando términos, la ecuación (5.24) se escribe como

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \left( \kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi - \frac{2\kappa\alpha\phi V}{1 + \alpha\phi} \right) + \frac{(\nabla\phi)^2}{(1 + \alpha\phi)^2} \left( \left( \frac{\sqrt{k}\alpha\phi}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{k} \right)^2 + \frac{\alpha\kappa\phi}{2} + 3\alpha^2 + \frac{\kappa}{2} \right) \right]. \quad (5.25)$$

Ahora, si suponemos que el potencial está dado por  $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$ , con  $m^2$  una constante positiva, es decir, un potencial del tipo masa, entonces su derivada es  $m^2\phi$ , por lo que la parte de la ecuación (5.25) que depende del potencial se escribe como

$$\kappa \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi - \frac{2\kappa\alpha\phi V}{1 + \alpha\phi} = \frac{\kappa m^2}{1 + \alpha\phi} \phi^2, \quad (5.26)$$

y claramente es no negativa, si  $1 + \alpha\phi > 0$  por lo que solo hace falta fijarse en el resto de los términos de (5.25), los cuáles están dados por

$$\frac{(\nabla\phi)^2}{(1 + \alpha\phi)^2} \left( \left( \frac{\sqrt{k}\alpha\phi}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{k} \right)^2 + \frac{\alpha\kappa\phi}{2} + 3\alpha^2 + \frac{\kappa}{2} \right). \quad (5.27)$$

Vemos que el factor  $\frac{(\nabla\phi)^2}{(1 + \alpha\phi)^2}$  que multiplica el resto de los términos es estrictamente positivo, esto porque como  $\phi = \phi(r)$ , entonces  $(\nabla\phi)$  será un vector espacial, cuya norma es positiva. Ahora, dado que habíamos puesto la condición de que  $1 +$

$\alpha\phi > 0$  vemos que el dominio de  $\phi$  está en  $(-\frac{1}{\alpha}, \infty)$ .

Observamos que el término  $\left(\frac{\sqrt{k}\alpha\phi}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{k}\right)^2$  es positivo definido, por lo que solo basta evaluar el segundo término de la función (5.27) en  $\phi = \epsilon - \frac{1}{\alpha}$  con  $\epsilon$  positivo y lo suficientemente pequeño para que este valor de  $\phi$  sea parte del dominio de la función, se tiene que

$$\left(\frac{\alpha\kappa\phi}{2} + 3\alpha^2 + \frac{\kappa}{2}\right) \Big|_{\epsilon - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha\kappa\epsilon}{2} + 3\alpha^2, \quad (5.28)$$

La expresión (5.28) es estrictamente positiva. Si ahora se obtiene la derivada de la función en (5.28) con respecto a  $\phi$ , se tiene que esta es

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\alpha\kappa\phi}{2} + 3\alpha^2 + \frac{\kappa}{2}\right) = \frac{\alpha\kappa}{2}, \quad (5.29)$$

y observamos que (5.29) es positivo para todo  $\phi$  en el intervalo  $(-\frac{1}{\alpha}, \infty)$ , lo cual implica que la función (5.28) es creciente. Ahora, es fácil ver que para  $\phi > 0$ , la función (5.27) es no negativa, y por tanto la función

$$\frac{(\nabla\phi)^2}{(1 + \alpha\phi)^2} \left( \left(\frac{\sqrt{k}\alpha\phi}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{k}\right)^2 + \frac{\alpha\kappa\phi}{2} + 3\alpha^2 + \frac{\kappa}{2} \right) + \frac{\kappa m^2}{1 + \alpha\phi} \phi^2, \quad (5.30)$$

es positiva en todo el intervalo de  $\phi$ . Entonces, se tiene que (5.25) es no negativa, lo que implica que la única opción posible para que se satisfaga esta ecuación es que  $\phi = 0$  en toda la región.

Con esto queda demostrado el teorema de no pelo utilizando simetría esférica y estática, una métrica asintóticamente plana y con potencial masivo para la teoría con un campo escalar no mínimamente acoplado utilizando un procedimiento similar a la prueba utilizada por Bekenstein. Sin embargo, la prueba necesitó de una condición extra, siendo esta que el dominio de  $\phi$  esté en  $(-\frac{1}{\alpha}, \infty)$ , y no existe una razón física por la cuál el campo deba estar restringido a esos valores (note que el intervalo específico se usó para un acoplamiento no mínimo muy particular) y

es posible que esta restricción cambie para distintos acoplamientos con el campo escalar. Este y otros problemas se discutirán en el siguiente capítulo.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se logró demostrar existosamente la conjetura de no pelo para una teoría tipo Brans-Dicke sin tener que recurrir al cambio de marcos conformes de Jordan y Einstein, mostrando que realizar esta transformación conforme no es necesaria para realizar este tipo de demostraciones. Sin embargo, este camino tiene limitaciones, pues únicamente se puede utilizar cuando el potencial del campo escalar es del tipo  $V = c\phi^2$  o nulo idénticamente. Dicha limitación surge únicamente por la complejidad que pueden tener las ecuaciones. Además de esto, también está la restricción que se hizo sobre los valores posibles del campo  $\phi$ , pues físicamente no existe un mecanismo que restrinja al campo a tener esos valores.

El posible trabajo a futuro puede consistir en realizar una prueba análoga a la realizada en esta tesis o usando el formalismo de [13] para una teoría acoplada no mínimamente con campos tensoriales, y con base en esto encontrar el camino para una teoría más compleja con acoples no mínimos con una acción similar a (5.1). Sin embargo, las ecuaciones de dicha teoría serán bastante más complicadas debido a que se tienen términos de orden superior. Además se debe remover el acoplamiento del campo tensorial que se acopla con el tensor de Weyl, pues al escribir a este en términos del campo y buscar que el campo sea constante, se entra en conflicto con la estructura del espacio-tiempo que queremos, pues de probarse el teorema desaparecería la curvatura ya que el tensor de Riemman se podría escribir en términos de los campos de materia que quisieramos que se anulen. Se trató también de extender el formalismo utilizado por Sudarsky para una teoría



no mínimamente acoplada, sin embargo no se llegó al resultado deseado por problemas que se explican en el apéndice A, y de resolverse esos problemas se puede llegar a una prueba exitosa que incluya potenciales más generales que los usados en las pruebas aquí realizadas.

Otra aplicación que se le puede dar a estos teoremas sería quitando la estaticidad del espacio-tiempo y dejando únicamente la condición de estacionariedad, pues se cree que la mayoría de agujeros negros en el universo se comportan como agujeros negros de Kerr. Además de esto, habría que analizar el caso donde hay pequeñas perturbacion, pues la mayoría de agujeros negros tienen discos de acreción, lo cuál se puede manejar como una perturbaciones. Dicho resultado se asemejaría más a la realidad, y los nuevos avances en tecnología para la detección de agujeros negros como lo hace LIGO y el telescopio "Event Horizon", pueden ayudarnos a tener restricciones en el tipo de teorías que utilizamos.

Además de esto, también se puede buscar cambiar la condición de que el espacio sea asintóticamente plano, pues usualmente se buscan teorías de gravedad modificada para explicar fenómenos cosmológicos como la materia y energía oscura, tal como lo hacen la teoría de Horndeski o Gauss-Bonnet, y se puede analizar el caso donde la teoría es asintóticamente FLRW, de-Sitter, o anti de-Sitter.

## Apéndice A

### Extension de la prueba de Sudarsky para el Teorema de no pelo en teorías escalar-tensorial

En este apéndice se intenta seguir el formalismo de Sudarsky para realizar la prueba del teorema de no pelo en teorías con campo escalar no mínimamente acoplado y se mencionan las complicaciones encontradas que no permitieron realizar la prueba, recordemos que la acción de dicha teoría está dada por

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} [(1 + \beta\phi)R - \alpha(\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi + V(\phi))]. \quad (\text{A.1})$$

Recordando que la métrica más general de agujero negro estático con horizonte de eventos regular y con simetría esférica, y asintóticamente plano se puede escribir como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) e^{-\delta(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2). \quad (\text{A.2})$$

Analizando las ecuaciones de movimiento de la métrica, tenemos

$$\delta' = -\frac{\alpha r}{2 + 2\beta\phi + r\beta\phi'}\phi'^2 - \frac{2\beta r}{2 + 2\beta\phi + r\beta\phi'}\phi'', \quad (\text{A.3})$$

y

$$m' = \frac{2\alpha r^2}{\gamma} V(\phi) + \frac{8\beta r}{\gamma} \phi' - \frac{12\beta m r^2}{\gamma} \phi' + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{\alpha r}{\gamma} \phi'^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{4\beta r^2}{\gamma} \phi'', \quad (\text{A.4})$$

donde  $\gamma = 8 + 8\beta\phi + 4r\beta\phi'$ .

Con esta métrica la ecuación de movimiento para el campo se ve como

$$0 = \beta R + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \phi'' + \left(\frac{2m(r)}{r^2} - \frac{2m'(r)}{r}\right) \phi' + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \left(\frac{2}{r} - \frac{\delta'(r)}{2}\right) - \frac{\partial V}{\partial \phi'} \quad (\text{A.5})$$

de dónde R se puede obtener de la traza de las ecuaciones de Einstein. Haciendo esto con la métrica dada se tiene

$$R = \frac{1}{1 + \beta\phi} \left[ 2\alpha V + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \phi'^2 + \beta\phi' \frac{6}{r} \left(1 - m' - \frac{m}{r}\right) - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \beta\phi' \delta' + 3\beta \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \phi'' \right]. \quad (\text{A.6})$$

El siguiente paso consiste en construir una “energía”, y lo podemos hacer con la ecuación

$$E = (6T_{eff\mu\nu} - 2T_{eff}g_{\mu\nu}) \frac{\xi^\mu \xi^\nu}{|\xi|^2}, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\xi$  es el vector de Killing temporal y

$$T_{eff\mu\nu} = \frac{1}{1 + \beta\phi} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha} \{g_{\mu\nu} \square(1 + \beta\phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu (1 + \beta\phi)\} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Haciendo esto obtenemos

$$E = \frac{1}{1 + \beta\phi} \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \phi'^2 - V(\phi) \right], \quad (\text{A.9})$$

y calculando la derivada de dicha función se tiene que

$$E' = \frac{-\beta\phi'}{(1+\beta\phi)^2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \phi'^2 - V(\phi) \right] + \frac{1}{1+\beta\phi} \left[ \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \phi'\phi'' + \left( \frac{m(r)}{r^2} - \frac{m'(r)}{r} \right) \phi'^2 - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \phi' \right]. \quad (\text{A.10})$$

El siguiente paso sería multiplicar la ecuación (A.10) por  $\frac{\phi'}{1+\beta\phi}$  y relacionarla con (A.5) tratando de hacer algo análogo al caso anterior y sustituir  $m'$  y  $\delta'$  obtenidas de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, ahora aparece el escalar de curvatura  $R$ , y además está la complicación de que los valores de  $m'$  y  $\delta'$  no son tan triviales como en el caso anterior, además al manipular las ecuaciones aparecen términos que incluyen a  $m''$  y  $\delta''$ , por lo que hacer esto resulta complicado, además de que probablemente cambie el factor de integración, por lo que se deja abierta la posibilidad de imponer ciertas condiciones no triviales para obtener el resultado esperado.

# Apéndice B

## Formas diferenciales y teorema de Stokes

En este apéndice se estudia el formalismo de las formas diferenciales, los cuales son objetos muy importantes en el cálculo tensorial, y son la base de los teoremas de integración en variedades diferenciales. Este apéndice se basa en el apéndice B de [28].

Sea  $M$  una variedad diferencial  $n$ -dimensional. Una  $k$ -forma se define como un tensor de rango  $(0,k)$  el cual es totalmente antisimétrico de la forma

$$\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \omega_{[\alpha_1 \dots \alpha_k]}, \quad (\text{B.1})$$

y denotamos el espacio de  $k$ -formas por  $\Lambda^k$ . Podemos construir un mapeo  $\wedge : \Lambda^k \times \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{k+p}$ , es decir, si tenemos una  $k$ -forma  $\omega$  y una  $p$ -forma  $\mu$ , el tensor resultante del producto  $\wedge$  será una  $k+p$ -forma

$$\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \wedge \mu_{\beta_1 \dots \beta_p} = \frac{(k+p)!}{k!p!} \omega_{[\alpha_1 \dots \alpha_k} \mu_{\beta_1 \dots \beta_p]}, \quad (\text{B.2})$$

y por construcción este producto no es conmutativo, pues se tiene que  $\omega \wedge \mu = (-1)^{kp} \mu \wedge \omega$ . Además, si tenemos 2 operadores derivada covariante  $\bar{\nabla}_\alpha$  y  $\nabla_\alpha$ , podemos definir un mapeo suave de una  $k$ -forma a una  $k+1$ -forma de la forma

$$\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \rightarrow (k+1) \nabla_{[\beta} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k]}, \quad (\text{B.3})$$

y se hace lo análogo para el otro operador de derivada covariante. Ahora si restamos un mapeo del otro se tiene que

$$\nabla_{[\beta}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k]} - \bar{\nabla}_{[\beta}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k]} = \sum_{i=1}^k C_{[\beta\alpha_i}^{\delta}\omega_{\alpha_1\dots|\delta|\dots\alpha_k]} = 0, \quad (\text{B.4})$$

Es decir, el mapeo (B.3) es independiente del operador derivada y es único, lo denotamos como  $d$  llamado diferencial exterior, si se aplica a una  $k$ -forma  $\omega$ , denotamos a la  $(k+1)$  forma resultante como  $d\omega$ . Y una propiedad importante que satisface este operador es que  $d^2 = d \circ d = 0$ .

Sea  $M$  una variedad diferencial  $n$ -dimensional. En cada punto en la variedad el espacio vectorial de  $n$ -formas será unidimensional, además, si es posible encontrar una  $n$ -forma  $\epsilon = \epsilon_{[\alpha_1\dots\alpha_n]}$  en  $M$ , entonces se dice que  $M$  es orientable, y la orientabilidad estará dada por  $\epsilon$ , y cada variedad orientable tendrá 2 orientaciones distintas, llamadas derecha, e izquierda. Consideremos una región abierta  $U$  en  $M$  cubierta por el sistema de coordenadas  $\psi$ . Si expandimos  $\epsilon$  en la base de  $\psi$  se tiene

$$\epsilon = h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (\text{B.5})$$

donde  $h$  nunca se anula y además su signo determina la orientación de  $\psi$  respecto a  $\epsilon$ , i.e. derecha si  $h > 0$  e izquierda si  $h < 0$ . Sea  $\alpha$  una  $n$ -forma en  $U$ , si la expandemos en la base de  $\psi$  esta queda como

$$\alpha = a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (\text{B.6})$$

Si  $\psi$  es derecha, entonces definimos la integral  $\alpha$  sobre la región  $U$  como

$$\int_U \alpha = \int_{\psi[U]} a dx^1 \dots dx^n, \quad (\text{B.7})$$

donde el lado derecho es la integral de Riemann usual de  $\mathbb{R}^n$ , si  $\psi$  es izquierda entonces la definición tendrá un signo menos en el lado derecho de la ecuación, y esta definición es independiente de coordenadas.

Para definir la integral de  $\alpha$  sobre todo  $M$  utilizamos que  $M$  puede ser cubierto

por una colección contable  $\{O_i\}$  de vecindades finitas tal que cada  $O_i$  es compacto. Además existe una partición unitaria  $\{f_i\}$  subordinada a esta cubierta. Si se satisface que  $\sum_i \int_{\psi[O_i]} f_i! |a_i| dx^1 \dots dx^n < \infty$ , entonces decimos que  $\alpha$  es integrable y se define como

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{O_i} f_i \alpha. \quad (\text{B.8})$$

Se puede demostrar que esta definición es independiente de la elección de cubiertas  $\{O_i\}$  y particiones  $\{f_i\}$ . Podemos usar la definición anterior de integración en variedades para definir la integral de una k-forma en  $M$  sobre una superficie orientable k-dimensional bien comportada. Si la dimensión de dicha superficie es (n-1), entonces se le llama hipersuperficie. Existe un caso particular de esto, si dicha hipersuperficie denotada por  $\dot{N}$  es la frontera de una región cerrada  $N$  contenida en  $M$ , es decir,  $N$  es una variedad n-dimensional orientable, y  $\alpha$  es una (n-1)-forma en  $M$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces se tiene que

$$\int_N d\alpha = \int_{\dot{N}} \alpha. \quad (\text{B.9})$$

Dicho resultado se conoce como teorema de Stokes. La integración de funciones en una variedad diferencial es posible si se tiene un elemento de volúmen, esto es, si se tiene una n-forma  $\epsilon$  que sea continua y distinta de cero. La integral de una función  $f$  sobre  $M$  se define como

$$\int_M f = \int_m f \epsilon, \quad (\text{B.10})$$

donde la integral de  $f\epsilon$  se definió anteriormente. Si  $M$  tiene una métrica  $g_{\mu\nu}$  definida, entonces existe una forma natural de  $\epsilon$  dada por la condición

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = (-1)^s n!, \quad (\text{B.11})$$

donde  $s$  es la signatura de la métrica. ( $s = 0$  para métricas Riemannianas y  $s = 1$

para métricas Lorentzianas.) Si le aplicamos la derivada covariante a esta condición se tiene

$$2\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \nabla_{\beta} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0, \quad (\text{B.12})$$

lo cuál a su vez implica que

$$\nabla_{\beta} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0, \quad (\text{B.13})$$

y como se tiene que  $\nabla_{\beta} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  es totalmente antisimétrica en sus últimos  $n$  índices y  $\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  es distinto de cero, entonces se satisface que

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} = (-1)^s n! \delta_{\beta_1}^{[\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots \delta_{\beta_n}^{\alpha_n]}, \quad (\text{B.14})$$

donde  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  es el mapeo identidad en el espacio tangente. La contracción de los primeros  $j$  índices de la ecuación (B.14) tiene como resultado

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_n} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_j \beta_{j+1} \dots \beta_n} = (-1)^s (n-j)! j! \delta_{\beta_{j+1}}^{[\alpha_{j+1}} \dots \delta_{\beta_n}^{\alpha_n]}, \quad (\text{B.15})$$

mientras que la ecuación (B.11) implica que las componentes de  $\epsilon$  en una base ortonormal derecha son

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} (-1)^P, & \text{si todos los } \mu_i \text{ son distintos} \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

donde  $P$  es la signatura de las permutaciones. En una base coordenada las componentes de  $\epsilon$  satisfacen que

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = (-1)^s n!, \quad (\text{B.17})$$

pero el lado izquierdo de esta expresión es  $(n!)(\epsilon_{12 \dots n}^2)$  multiplicado por el determinante de la matriz  $g^{\mu\nu}$ , y  $\det(g^{\mu\nu} = \frac{1}{\det(g_{\mu\nu})})$ . Eligiendo el signo correcto para una sistema de coordenadas derecho, se tiene que



$$\epsilon_{12\dots n} = [(-1)^s \det(g_{\mu\nu})]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|g|}, \quad (\text{B.18})$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Por lo que entonces en una base coordenada, se tiene que el elemento de volúmen natural está definido por (B.11) y toma la forma de

$$\epsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (\text{B.19})$$

Usando este elemento de volúmen natural podemos convertir el teorema de Stokes (B.9) en una forma del tipo "Ley de Gauss". Sea  $N$  una variedad compacta, orientable,  $n$ -dimensional con frontera. Sea  $g_{\alpha\beta}$  la métrica en  $N$  asociada al elemento de volúmen  $\epsilon$ . Dado un campo vectorial  $v^\alpha$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , podemos obtener una  $(n-1)$ -forma  $\omega$  de la forma

$$\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} = \epsilon_{\beta\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} v^\beta, \quad (\text{B.20})$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} (d\omega)_{\sigma\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} &= n \nabla_{[\sigma} (\epsilon_{|\beta|\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} v^\beta) \\ &= n \epsilon_{\beta[\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} \nabla_{\sigma]} v^\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Por otro lado, un tensor de rango  $(0,n)$  totalmente antisimétrico debe de ser proporcional a  $\epsilon$ , por lo que

$$\epsilon_{\beta[\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} \nabla_{\sigma]} v^\beta = h \epsilon_{\sigma\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}. \quad (\text{B.22})$$

De donde la función  $h$  se puede usar contrayendo  $\epsilon^{\sigma\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}$ , por lo que se obtiene

$$\nabla_\beta v^\beta = nh, \quad (\text{B.23})$$

por lo que entonces

$$d\omega = (\nabla_\alpha v^\alpha) \epsilon, \quad (\text{B.24})$$

por lo que el teorema de Stokes toma la forma de

$$\int_N \nabla_\alpha v^\alpha = \int_{\dot{N}} \epsilon_{\beta\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} v^\beta. \quad (\text{B.25})$$

El lado derecho de (B.25) puede expresarse de la siguiente manera. Como la métrica  $g_{\mu\nu}$  en  $N$  induce un campo tensorial  $h_{\mu\nu}$  en  $\dot{N}$ . Si  $h_{\mu\nu}$  es no degenerado, el cuál será el caso si  $\dot{N}$  no es una superficie nula, podemos usarlo para definir el elemento de volúmen  $\bar{\epsilon}$  en  $\dot{N}$ . Se puede mostrar que

$$\frac{1}{n} \epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n} = n_{[\alpha_1} \bar{\epsilon}_{\alpha_2\dots\alpha_n]}, \quad (\text{B.26})$$

donde  $n^\beta$  es el vector normal a  $\dot{N}$ , y se escoge saliente si la superficie es espacialoide y entrante si es temporaloide. Contrayendo  $v^\alpha$  en ambos lados de la ecuación y restringiendo las (n-1)-formas resultantes a vectores tangentes a  $\dot{N}$  se tiene

$$\epsilon_{\beta\alpha_1\dots\alpha_n} v^\beta = n_\beta v^\beta \bar{\epsilon}_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}, \quad (\text{B.27})$$

donde vemos ambos lados de la ecuación como formas en  $\dot{N}$ . Por lo que si  $\dot{N}$  no es nulo, entonces podemos expresar el teorema de Stokes como

$$\int_N \nabla_\alpha v^\alpha = \int_{\dot{N}} n_\alpha v^\alpha. \quad (\text{B.28})$$

Esta es la forma más conocida del teorema de Stokes, y esta es muy importante en la física, pues su uso es esencial en el Electromagnetismo y en el formalismo lagrangiano.

## Referencias

- [1] B. P. Abbott y col. «GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence». En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (24 jun. de 2016), pág. 241103.
- [2] B. P. Abbott y col. «GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2». En: *Phys. Rev. Lett.* 118 (22 jun. de 2017), pág. 221101.
- [3] B. P. Abbott y col. «GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral». En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (16 oct. de 2017), pág. 161101.
- [4] B. P. Abbott y col. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (6 feb. de 2016), pág. 061102.
- [5] Eduardo Nahmad Achar. *Differentia Topology and Geometry with Applications to Physics*. IOP Publishing, 2018.
- [6] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford, 2006.
- [7] Jacob Bekenstein. «Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes». En: *Phys. Rev. D* 5 (mar. de 1972). DOI: 10.1103/PhysRevD.5.1239.
- [8] C. L. Bennett y col. «The Microwave Anisotropy Probe Mission». En: 583.1 (ene. de 2003), págs. 1-23. DOI: 10.1086/345346. arXiv: astro-ph/0301158 [astro-ph].
- [9] Piotr T. Chruściel, João Lopes Costa y Markus Heusler. «Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond». En: *Living Reviews in Relativity* 15.1 (mayo de 2012).
- [10] G. M. Clemence. «The Relativity Effect in Planetary Motions». En: *Reviews of Modern Physics* 19.4 (oct. de 1947), págs. 361-364.

- 
- [11] F. W. Dyson, A. S. Eddington y C. Davidson. «A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 220 (ene. de 1920), págs. 291-333.
- [12] Event Horizon Telescope Collaboration y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: 875.1, L1 (abr. de 2019).
- [13] Valerio Faraoni. «Jordan frame no-hair for spherical scalar-tensor black holes». En: *Physical Review D* 95.12 (jun. de 2017).
- [14] James B. Hartle. *An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education, 2003.
- [15] Werner Israel. «Event Horizons in Static Vacuum Space-Times». En: *Phys. Rev.* 164 (5 dic. de 1967), págs. 1776-1779.
- [16] Roy P. Kerr. «Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics». En: *Phys. Rev. Lett.* 11 (5 sep. de 1963), págs. 237-238.
- [17] Edward W Kolb y Michael Stanley Turner. *The early universe*. Frontiers in Physics. Boulder, CO: Westview Press, 1990.
- [18] Charles Misner, Kip Thorne y John Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman y Company, 1973.
- [19] Houjun Mo, Frank C. van den Bosch y Simon White. *Galaxy Formation and Evolution*. 2010.
- [20] Planck Collaboration y col. «Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results». En: 571 (nov. de 2014).
- [21] H. Reissner. «Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie». En: *Annalen der Physik* 355.9 (ene. de 1916), págs. 106-120.
- [22] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.

- 
- [23] K. Schwarzschild. «On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory». En: *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907* 1916 (ene. de 1916), págs. 189-196.
- [24] Thomas P Sotiriou. «Black holes and scalar fields». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.21 (oct. de 2015), pág. 214002.
- [25] Daniel Sudarsky. «A simple proof of a no-hair theorem in Einstein-Higgs theory». En: *Classical and Quantum Gravity* 12.2 (feb. de 1995), págs. 579-584.
- [26] J. H. Taylor y J. M. Weisberg. «A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16». En: 253 (feb. de 1982), págs. 908-920.
- [27] Mikhail S. Volkov y Dmitri V. Galtsov. «Gravitating non-Abelian solitons and black holes with YangMills fields». En: *Physics Reports* 319.1-2 (oct. de 1999), págs. 1-83.
- [28] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.