UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

COLEGIO DE FILOSOFÍA

LOS NÚMEROS DE CANTOR: UN ANÁLISIS DE SUS RECONSTRUCCIONES CONTEMPORÁNEAS Y SUS PROBLEMAS ONTOLÓGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

JOSUÉ RAZIEL DE LA ROSA PADIERNA

TUTOR: DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ (FFyL-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO. SEPTIEMBRE DE 2020

A mi familia (la elegida y la dada)

A Mel

A la Dra. Pallares

Agradecimientos

Pienso que hay buenas razones para pensar que las personas subestimamos el papel que la suerte (entiendo aquí por “suerte” hechos accidentales ya sea beneficiosos o no) y el trabajo de otros juegan, directa o indirectamente, en la obtención de metas que solemos considerar individuales. Es fácil caer en esta trampa del ego y adjudicarse méritos que no son propios, los presentes agradecimientos son un intento de retribuir a todos aquellos a quienes realmente se debe este trabajo.

Quiero agradecer en primer lugar a mi papá Margarito, sin duda trabajó más que nadie para que esta tesis fuese posible. Gracias por tu cariño, apoyo incondicional y todo lo que me has enseñado. Quiero agradecer también a mi mamá, Beda y a mis hermanos Rubí y Uriel por su enorme cariño y apoyo.

Agradezco también a todos mis amigos, especialmente a Mel y a Leo Gálvez. Mel, te doy las gracias por apoyarme y creer siempre en mí, gracias también por todo lo que compartes conmigo y por hacer buenos los malos momentos. Eres la persona más cálida que conozco y te admiro por eso. Gracias por ser mi mejor amiga y compañera. Leo, gracias por tu lealtad y apoyo, por las discusiones, con y sin sentido, por compartir tus proyectos y por procurar nuestra amistad. Los días de ensayos con la banda sin duda tienen un lugar especial en mi mente.

Agradezco enormemente a la Dra. Ivonne Pallares Vega, a quién además dedico esta tesis, por introducirme al mundo de las categorías. Gracias por sus clases, seminarios y todo lo que me ha enseñado. Gracias por mostrarme la increíble riqueza y flexibilidad de las matemáticas. Pero gracias ante todo por su increíble paciencia y dedicación. Sin duda es una de mis grandes influencias.

Agradezco también de forma especial al Dr. Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez. Cristian, eres una de las personas más dedicadas que conozco. Admiro el enorme compromiso que tienes hacia los otros y el cariño que impregnas a tu trabajo. Gracias por tu apoyo genuino y el tiempo dedicado a este trabajo. Agradezco también aquí al resto de miembros del grupo integrado de lógica, en especial a Salvador y a Jenny quiénes terminaron accidentalmente en esta travesía conmigo y me han ayudado a luchar contra el desorden.

Agradezco también a la Dra. Elsa Puente Vázquez por enseñarme teoría de conjuntos y por sus largas y amistosas charlas en la Facultad de Ciencias. Gracias por ayudarme a aclarar mi mente en momentos de confusión.

Agradezco también a todas las personas que brindaron su tiempo a la lectura de este trabajo, ya sea de manera oficial o no. Valoro el tiempo que invirtieron en ello y sus comentarios. Gracias por ayudar al mejoramiento de este trabajo.

Un fuerte abrazo y agradecimiento a Arturo de Jesús Berni y Ángel de Jesús Berni. A quienes agradezco todo lo vivido. La última vez que nos vimos prometimos que nos graduaríamos algún día. Lamentablemente la vida no nos dejó cumplir del todo esa promesa, pero quiero que sepan que ustedes siempre fueron una motivación para mí. Agradezco también por todo lo vivido a mi tío Miguel quien lamentablemente nos dejó este año.

Por último aprovecho el lugar para desearle una pronta recuperación a mi primo Rafael quién está pasando por un momento complicado.

Muchas personas estuvieron involucradas de alguna manera en la realización del trabajo por lo que seguramente la mayoría no estuvo presente de manera concreta en estos agradecimeintos, a todas esas personas: muchas gracias.

Este trabajo fue realizado con el apoyo de los proyectos PAPIIT IA 401717 "Pluralismo y normatividad en lógica y matemáticas” y PIFFyL 01 006 2019 “El lugar de la lógica en los estudios filosóficos”. Gracias a los involucrados.

Índice general

Introducción general

Esta tesis trata en general del concepto matemático de *conjunto*. En particular trata sobre dicho concepto en la obra temprana de Cantor, quien es considerado el fundador (o al menos uno de los fundadores) de la teoría de los conjuntos. Para ser más claro, esto significa que tomaré como eje central de mi investigación la obra de Cantor *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* del año 1883, e intentaré responder a la pregunta ¿Qué entiende Cantor por conjunto en dicha obra?

Es necesario aclarar varios puntos en relación a dicha pregunta. El primero de ellos es relativo a la elección de la obra. La obra de Cantor es enorme y variada, y hay buenas razones, esbozadas por los estudiosos de Cantor, para creer que su noción de conjunto varió a través de sus obras y de los años. Analizar cada una de esas concepciones escapa a mis capacidades y al tamaño de esta tesis. Por lo que he decidido acotar la pregunta a una de sus obras. La razón por la que he decidido tomar los Fundamentos de entre todas las obras de Cantor posibles para esta investigación es porque al ser esta una tesis de filosofía y ser dicha obra una que el autor mismo concibió como filosófica[1], parece ser el lugar adecuado para comenzar una investigación sobre los aspectos filosóficos del concepto de conjunto.

El segundo punto a aclarar es sobre la naturaleza de la pregunta principal de esta tesis. Es claro que se trata de una cuestión de carácter hermenéutico, y por tanto no pretendo defender que existe una respuesta única a la misma. Lo que intentaré aquí más bien es hacer un análisis comparado de diversas nociones de conjunto esperando que de la comparación de la mismas surjan nexos comunes o diferencias que nos ayuden a determinar los caracteres relevantes de los conjuntos cantorianos. Esto también expresa la metodología general de esta tesis: la determinación por comparación [2]. En concreto compararé la noción cantoriana de conjunto con las nociones de conjunto de ZFC y ETCS[3].

Un tercer punto es sobre el tipo de respuestas que sería admisible dar a la pregunta mencionada.

---

[1]El subtitulo del texto es *Una investigación matemático-filosófica en la teoría del infinito*.

[2]¡La comparación en general es una excelente vía para la obtención de conocimiento!

[3]ZFC es la conocida teoría de conjuntos constituida por los axiomas de Zermelo, Fraenkel y el axioma de Elección. Por su parte ETCS es la Teoría elemental de los conjuntos categórica, también llamada simplemente Teoría categórica de los conjuntos.

La teoría cantoriana de conjuntos no es una teoría formalizada, ni siquiera es claro que sea una teoría axiomatizada (Cantor por ejemplo consideró al axioma de elección una *ley del pensamiento* tan necesaria y evidente que no requería mayor justificación [4] . En tal sentido podía decirse que su teoría tenía algún axioma, sin embargo al leer a Cantor es claro que no consideraba a las teorías como un conjunto de teoremas que surgen de aplicar leyes lógicas a un conjunto de axiomas). Por tanto sus ideas generales sobre los conjuntos están expresadas en lenguaje natural, lo que no impidió a Cantor llegar a resultados bastante importantes (resultados que a su vez ayudaron a clarificar más las ideas en principio intuitivas sobre los conjuntos). En tal sentido el objeto de estudio de esta tesis no es un concepto determinado vía un sistema formal, sino un cúmulo de caracterizaciones intuitivas sobre *agregados de cosas*. Por tanto la respuesta que se espera dar a esta pregunta no se mueve en el ámbito formal, es decir no se espera una respuesta del tipo "Los conjuntos cantorianos son las cosas que cumplen con los axiomas que Cantor formuló", tampoco se pretende responder con una definición predicativa, es decir, con enunciado de la forma "los conjuntos de cantor son x cosa". Más bien se espera como respuesta una explicación, respaldada en el estudio comparado de dos sistemas formales, de los distintos adjetivos que Cantor uso para caracterizar de manera intuitiva a sus conjuntos, adjetivos como *abstractos*, *compuestos de puntos bien diferenciados*, *con elementos diferentes pero carentes de propiedades comunes*, etc. Como se trata además de un estudio comparado se espera que esto se explique mediante las diferencias y similitudes de los objetos comparados. Esto se corresponde con el punto anterior. La idea es generar un relato que dé sentido a estas nociones que pudieran parecer a primera vista oscuras sobre los conjuntos. Que una pregunta sea de carácter hermenéutico significa entre otras cosas que la respuesta esperada es una explicación que clarifique lo que un texto intenta decir y que por alguna razón es difícil comprender.

Un último punto es sobre la relevancia de la pregunta y del trabajo en general. Tras los trabajos de Cantor, el matemático y filósofo Zermelo llevó a cabo una empresa inmensa para formalizar las ideas intuitivas de Cantor, el resultado de esta labor fue ZFC. Pienso que sería inadecuado ver a ZFC sólo como el resultado de formalizar ciertas ideas intuitivas de Cantor, como sería inadecuado ver a Cantor mismo como el fundador exclusivo de la teoría de conjuntos. No creo que la historia sea el relato de unos pocos héroes concretos, ni tampoco creo que sea el relato de una línea de pensamiento continua prolongada desde el pasado[5], lo que no demerita el trabajo individual de personas como Zermelo o Cantor. ZFC sin duda tiene brillo propio, y aunque Zermelo ciertamente partió del trabajo previo de Cantor estaba motivado por intereses muy diferentes a los de este. Por tal motivo pienso que sería

[4]Georg Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos: una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito*, trad. José Ferreirós y Emilio Gómez (Madrid: Crítica, 2006), 91.

[5]Ciertamente no es aquí el lugar para discutir estas cuestiones así que no diré más al respecto.

más adecuado y fructífero para este trabajo ver a ZFC como la formalización de un grupo concreto de ideas intuitivas sobre conjuntos que no necesariamente se corresponde con las de Cantor. De la misma forma es posible ver a ETCS como una teoría formal que caracteriza ciertas ideas intuitivas sobre los conjuntos que no necesariamente se corresponden con las que formaliza ZFC o con las que pensaba Cantor. Como se dijo arriba el principal interés aquí es, más que dar respuestas definitivas, hacer evidente mediante el estudio comparado de teorías de conjuntos la diversidad de pensamiento existente en lo que respecta a las ideas básicas de las matemáticas. La idea es hacer ver cómo, incluso entre sistemas que en términos prácticos son equivalentes, pueden existir diferencias significativas al nivel de las ideas previas no formales. Pienso que estas ideas preformalizadas son tan importantes para las matemáticas como los sistemas formales mismos[6] Pienso que exponer estas diferencias puede ser significante para la pedagogía y epistemología de las matemáticas. Ser claro sobre nuestras preconcepciones formales de la matemática podría ayudarnos a generar explicaciones más naturales de conceptos complejos, de la misma manera nos podría ayudar a generar explicaciones sobre aquello que es fundamental cuando aprendemos matemáticas más allá de los aspectos formales.

Baste con lo dicho sobre la pregunta central de la tesis, su metodología y su relevancia. Quiero hablar ahora de su estructura. En el siguiente apartado explicaré el contexto general en que la ETCS y ZFC se desarrollaron, después explicaré brevemente de dónde surge el proyecto de intentar reinterpretar a Cantor a la luz de ETCS. En el siguiente capítulo hablaré de la filosofía de Cantor, y por supuesto de sus ideas relativas al concepto de conjunto, concluiré explicando la relación del concepto de conjunto en Cantor con el concepto de número. El capítulo siguiente es técnico y en él introduzco los axiomas de ETCS y conceptos relacionados. En el apartado posterior explicaré cómo se caracteriza el concepto de número natural en ZFC y en ETCS, así como sus diferencias. En el penúltimo apartado explico cómo se caracteriza a los números ordinales y cardinales en ZFC y en ETCS, respectivamente. En el último apartado daré mis conclusiones.

[6] Es usual encontrarse con personas que se desempeñan correctamente en contextos matemáticos operando sólo con ideas intuitivas, es decir personas sin conocimientos teórico conjuntistas que saben matemáticas.

Capítulo 1

Contexto general de la discusión

Resumen del capítulo: En este apartado se introducen los principales conceptos, así como el contexto en el que adquieren sentido, que serán usados en esta tesis. Se habla brevísimamente de la historia de la Teoría de conjuntos y de igual manera de la Teoría de topos.

1.1. Breve historia de la teoría de topos

Los axiomas de la teoría de conjuntos ETCS determinan a la categoría de los conjuntos y las funciones entre ellos como un tipo particular de categoría llamada topos elemental. En tal sentido su historia se corresponde con la de la Teoría de topos. Así que hablaré brevísimamente del origen de dicha teoría. La Teoría de Topos es una rama de la Teoría de Categorías, así que para entender qué es la Teoría de Topos hace falta hablar antes de qué es la Teoría de Categorías. La Teoría de Categorías es la rama de las matemáticas que se encarga, como su nombre lo índica, del estudio de cualesquiera cosas que cumplan con ser una categoría. Una *categoría* T se compone de la siguiente información:

- Una clase de objetos (cuyos miembros se llaman los *objetos* de T).
- Una clase de morfismos (cuyos miembros se llaman los *morfismos* de T).
- Para cada morfismo f, un objeto como *dominio* de f y un objeto como *codominio* de f.

  Si A es el dominio de f y B el codominio, denotamos este hecho como $f : A \to B$.
- Para cada objeto A un *morfismo identidad* , el cual tiene dominio A y codominio A. Se denota 1_A.
- Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ un *morfismo compuesto* $g \circ f : A \to C$.

La información anterior debe respetar además los siguientes axiomas:

- Leyes para la identidad: Si $f : A \to B$ entonces $1_B \circ f = f$ y $f \circ 1_A = f$.
- Ley asociativa: Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.[1]

La definición anterior es tal que es neutra respecto a qué son los objetos y los morfismos en una categoría T, no nos dice nada acerca de quiénes desempeñan este papel. Tampoco afirma la existencia de una categoría, sólo nos da las condiciones que una clase de objetos y otra de morfismos deben cumplir para ser considerados una categoría. Este hecho otorga a la Teoría de Categorías una gran flexibilidad, pues existe una gran variedad de entidades que pueden desempeñar el papel de los morfismos y los objetos en una categoría. Así, por ejemplo, un pre-orden particular $(A, \leq)$ puede verse como una categoría, donde los objetos son los elementos de A y los morfismos son pares ordenados de objetos (a, b) tales que $a \leq b$. A su vez podemos formar la categoría **Ord** en la que los objetos son pre-órdenes y los morfismos funciones monótonas (funciones que preservan el orden).

Las categorías fueron introducidas en 1945 por Eilenberg y Mac Lane en su artículo "General Theory of Natural Equivalences", en éste introducen también los conceptos de funtor, transformación natural, límites y colímites. Razón por la cual pasaría a ser considerado por muchos expertos en el área el artículo inaugural de la Teoría de Categorías[2].

En esta época no fue claro que el concepto de categoría pudiera extenderse más allá de las áreas relacionadas con la topología algebraica y álgebra homológica, áreas en las que la teoría había tenido su origen. Sin embargo, en 1958 Daniel Marinus Kan introduce en un artículo homónimo el concepto de funtor adjunto, concepto que sería central en la extensión de la Teoría de Categorías hacía otras ramas de las matemáticas, en particular a la lógica matemática.

En 1963, William Lawvere publica su tesis doctoral sobre teorías algebraicas en la que introduce el concepto de categoría algebraica y funtor algebraico. Estos conceptos serían la base de lo que posteriormente llamaría Lógica algebraica. Más tarde en 1966 nuestro autor generalizaría la noción al concepto de teoría elemental en su artículo "Functorial semantics of elementary theories", lo que daría paso en 1970 al artículo "Quantifies and sheaves", en el que se axiomatiza por primera vez el concepto de topos elemental, concepto en el que se conjuntan la geometría algebraica y la lógica. Este hecho permitió a Lawvere ver a la lógica matemática como una área de la geometría algebraica.[3]

[1] F. William Lawvere y Stephen H. Schanuel, *Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a categorías*, trad. Francisco Marmolejo (México: Siglo veintiuno editores, 2002), 22.

[2] Si bien es hasta el mencionado artículo que dichos conceptos aparecen de manera clara en un contexto categórico sus orígenes se pueden rastrear hasta 1942 en el artículo de S.Eilenberg y Mac Lane *Group extensions and homology*. También son relevantes en este sentido sus artículos *Natural isomorphisms in group theory* de 1942 y *Relations between homology and homotopy groups* de 1943.

[3] Para una lectura profunda de la historia de la teoría de categorías en general ver:

Un *topos elemental* es un tipo de categoría que cuenta con objeto terminal, objeto inicial, productos binarios, coproductos binarios, igualadores, coigualadores, exponenciales y clasificador de subobjetos. Para los fines de este apartado no es necesaria una explicación técnica de qué significa todo lo anterior[4], basta con saber que estas características otorgan a los objetos de un topos cierto comportamiento matemático similar al de los conjuntos. De hecho la categoría **Set** en la que los objetos son conjuntos y los morfismos funciones cumple con ser un topos elemental. Cuando afirmo lo anterior quiero decir que en un topos elemental los conceptos fundamentales de la matemática conjuntista pueden ser interpretados bajo un contexto categórico. Así los conceptos de elemento, parte, conjunto vacío, propiedad, función suprayectiva, función inyectiva, etc., pueden ser recuperados a través de morfismos entre objetos en un topos, con la diferencia de que, al ser definidos para cada topos, dichos conceptos pueden extrapolarse a categorías distintas de **Set**. En tal sentido cada topos puede verse como una suerte de universo matemático particular. En dichos universos las nociones conjuntistas pueden comportarse de forma bastante diferente a como lo hacen en la categoría de conjuntos.

Las nociones conjuntistas de partes, pertenencia, elemento, etc., generalizadas en un topos permiten determinar en cada topos un álgebra de las partes, también llamada álgebra de los sub-objetos. Dicha álgebra a su vez determina una lógica particular para cada topos, en el sentido de que es posible definir las funciones de verdad usando el clasificador de subobjetos, y la naturaleza de los subobjetos o partes de un objeto determinará si la lógica resultante es clásica o de otro tipo. Por ejemplo, el álgebra resultante en Set es booleana lo que implica que su lógica es clásica, en cambio el álgebra de S (la categoría de gráficas irreflexivas dirigidas) no lo es, así que su lógica es no-clásica.

El concepto de topos permitió a Lawvere iniciar un nuevo movimiento en torno a la filosofía de la lógica y los fundamentos de la matemática bajo un contexto categórico. Ya que, como he dicho, el concepto de topos permitió generar un marco conceptual dentro del cual los conceptos clásicos de la teoría de conjuntos podían ser formulados en términos de la teoría de categorías; así, la Teoría de Categorías se convirtió en una alternativa a la fundamentación matemática clásica conjuntista. Pero

- Andrei Rodin, *Axiomatic Method and Category Theory* (Russia: Springer, 2014).
- Ralf Krömer, *Tool and Object : A history and philosophy of Category Theory* (Germany: Birkhäuser, 2007).
- Jean-Pierre Marquis, *From a Geometrical Point of View* (Canada: Springer, 2009).

[4]Para una introducción general a la Teoría de Topos ver:

- Colin MacLarty, *Elementary Categories, Elementary Toposes* (Toronto: Oxford Clarendon press,1995).
- J.L. Bell, *Toposes and Local Set Theories: An Introduction* (New York: Oxford Clarendon press, 1988).
- Robert Goldblatt *Topoi: The Categorial Analysis of Logic* (Amsterdam: North Holland Publishing, 1984).

dicha teoría va más allá, pues no sólo por medio de la categoría **Set** se puede obtener una fundamentación. Dada la pluralidad de topos existentes y por el hecho de que cada topos tiene una lógica interna que determina una teoría local de conjuntos, se pueden ofrecer múltiples reconstrucciones de las matemáticas; en el sentido de que cada topos es un marco interpretativo. Por tanto, la alternativa como teoría fundacional no es única, pues es posible fundamentar la matemática en topos distintos a **Set**.

Además, como cada lógica en un topos está determinada por el álgebra de sus subobjetos, Lawvere pudo interpretar la lógica matemática como el estudio de las álgebras de subobjetos a través de sus propiedades invariantes en cada topos. Con esto el concepto de topos quedó circunscrito en el campo de la filosofía de las matemáticas por un lado, a través de la discusión sobre los fundamentos de la matemática (pues mostró que se podía reconstruir toda la matemática usual en un contexto meramente funcional donde la noción central no era la de pertenencia). Por otro lado, quedó circunscrito a la filosofía de la lógica, pues dio una respuesta alternativa a la pregunta ¿qué es la lógica?.

Bajo este contexto general Lawvere presenta su Teoría elemental de los conjuntos categórica en un artículo del mismo nombre publicado en 1964. ETCS no es más que una formulación axiomática de la Teoría de Conjuntos bajo un espíritu categórico. Sus axiomas serán presentados en el apartado cuatro, así que baste ahora con lo dicho. Ya que ETCS es en tal sentido una teoría de conjuntos vale la pena hablar sobre tales teorías.

1.2. Breve historia de la teoría de conjuntos

Una Teoría de Conjuntos (TC) es cualquier teoría matemática que, como índica su nombre, tiene como objeto de estudio la noción de conjunto. Vistas las cosas de esta manera es necesario aclarar que existe más de una teoría matemática que entra dentro de esta clasificación. Por lo anterior, sería más correcto hablar de las Teorías de Conjuntos y no de la Teoría de conjuntos. Sin embargo es usual en los libros de texto actuales y la literatura especializada el uso de dicha etiqueta para referirse a un sistema axiómatico particular, a saber ZFC. Es decir la Teoría de Conjuntos determina por los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el axioma de elección. Esto se debe a que ZFC se ha convertido en la axiomatización estándar al momento de estudiar el concepto de conjunto. En este trabajo será necesario hablar de al menos tres teorías de conjuntos, razón por la cual usaré la etiqueta de "teoría de conjuntos usual"para referirme a ZFC; por otro lado, cuando me refiera a la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor usaré la etiqueta "teoría cantoriana de conjuntos", por último usaré la etiqueta "teoría categórica de los conjuntos"para referirme a la teoría desarrollada por Lawvere, también llamada ETCS como se mencionó arriba.

Las teorías de conjuntos han sido de gran importancia histórica pues gracias a la noción de conjunto es posible definir otras nociones matemáticas más complejas. Por tanto estas teorías pueden ayudar a clarificar nociones oscuras o complicadas reduciendo sus conceptos centrales a conceptos de índole conjuntista, que suelen ser más simples de entender. Esta reducción conceptual de diversas disciplinas matemáticas a los términos conjuntistas se da de hecho por sentada en gran parte de la actividad matemática actual profesional. No resulta extraño definir a los números naturales, por ejemplo, como un conjunto. En particular suele asumirse una reducción a la teoría de conjuntos usual. Sin embargo lo anterior no siempre ha sido el caso y la aceptación de tal reducción ha sido más bien reciente en relación a la historía de las matemáticas así que ¿cómo es que se comenzó a hablar de la Teoría de conjuntos?[5]

En la segunda mitad del siglo XIX el matemático Georg Cantor introdujo el infinito actual en matemáticas como un concepto genuino y de interés, esto gracias a la noción técnica de conjunto[6]. Si bien la noción de clase llevaba ya un rato implantada en el lenguaje matemático (como se puede ver en Boole y Bolzano) fue Georg Cantor quien la refinó hasta la noción de conjunto así como definió varias de las nociones centrales de la teoría. Por lo anterior –y para fines prácticos de este estudio– podemos considerar a Cantor como el fundador de la Teoría de Conjuntos, es decir como el fundador de las teorías centradas en estudiar la noción de conjunto[7].

Las principales motivaciones de Cantor en el desarrollo de la teoría cantoriana de conjuntos provenían del análisis y la geometría del lado matemático y del lado filosófico de la discusión acerca del infinito actual y potencial –discusión cuyo origen suele atribuirse a Aristoteles. En algún momento o alrededor de 1870, Cantor, estudiando asuntos relacionados con dichos temas, notó que las colecciones en cierto sentido siempre estaban involucradas, así que decidió tomarlas como un objeto digno de estudio propio. Así desarrolló una teoría acerca del tamaño de las colecciones infinitas junto con una aritmética infinita que servía como una generalización de la aritmética común. En el camino generalizó su teoría de conjuntos de tal manera que incluyera la totalidad de las matemáticas. Sin embargo su

[5]Antes de abordar la pregunta anterior es necesario aclarar que históricamente la noción de conjunto ha estado ligada fuertemente a las nociones de agregado, colección y clase. De hecho hasta la segunda mitad del siglo XIX no existía una distinción clara de estos términos. En la actualidad existe una distinción matemática clara entre las nociones de conjunto y clase. Por su parte, el término colección rara vez se usa en la actualidad en sentido técnico, mientras que la noción de agregado ha caído en desuso.

[6]Cuando afirmo que Cantor introdujo el infinito actual no quiero decir que no se hablara antes del concepto de infinito en matemáticas, sino que Cantor fue el primero en generar una teoría matemática de amplia aceptación. En esta época la noción de infinito era trabajada por muchos matemáticos conocidos Dedekind,..., etc. Esta discusión se vinculaba directamente con los problemas de fundamentación del análisis

[7]Como ya dije en la introducción general no considero que esto sea del todo adecuado hablando históricamente

teoría tenía ciertos problemas técnicos que la hicieron presa de paradojas. A pesar de ello los trabajos de Cantor lograron dejar una profunda huella entre los matemáticos posteriores, gracias al legado conceptual al que dio paso. En un primer momento, la teoría de conjuntos tuvo como eje central la noción de conjunto bien ordenado, siendo en palabras de Cantor la cuestión central en su teoría. Esta noción fue lo suficientemente rica como para requerir del desarrollo previo de otros conceptos centrales en el estudio de los conjuntos. Sin embargo la teoría cantoriana de conjuntos no cumplía los criterios de rigor actuales, pues no se encontraba axiomatizada, lo que hacía de muchas de sus nociones asuntos vagos desde el punto de vista matemático.

Zermelo se propuso resolver los problemas de la teoría cantoriana de conjuntos, herendando la maquinaría conceptual de Cantor y haciendo una labor titánica por clarificarla y axiomatizarla (labor que como se aclaró en la introducción general no se reduce a eso). El resultado de ese trabajo fue el nacimiento de ZFC. Sin embargo, como se verá más adelante en el presente escrito, el concepto de conjunto que determina los axiomas de ZFC se aleja en algunos aspectos de la noción cantoriana de conjunto, sobretodo en lo relativo a las nociones de número cardinal y ordinal. Dichos conceptos pueden ser interpretados bajo una maquinaria categorista, brindando una nueva perspectiva de los conceptos clásicos cantorianos de la Teoría de Conjuntos.

1.3. Reinterpretando a Cantor

En 1994 el matemático Francis William Lawvere publica su artículo “Cohesive Toposes and Cantor’s ‘lauter Einsen’”. En dicho artículo nuestro autor propone una interpretación categorista de los conceptos cantorianos *Menge* y *Kardinale*. Esta interpretación difiere bastante de la interpretación estándar de la teoría de conjuntos que interpreta, incluso a las entidades más estructuradas, como conjuntos de puntos (por lo menos en un sentido ontológico). Según Lawvere los *Menge* de Cantor no son otra cosa que conjuntos cuyos puntos presentan algún tipo de cohesión[8]. Por otro lado los *Kardinale* no son más que lo que él llama conjuntos abstractos, conjuntos sin estructura (bolsas de puntos, como los llama él). Es decir, conjuntos en los que todos los elementos son distintos pero indistinguibles. Esos conjuntos se corresponden a los conjuntos de ETCS.

Esta reinterpretación de Cantor va además ligada a un cierto modo de hacer matemáticas, que al parecer de Lawvere se corresponde al modo de Cantor. Dicho modo enfatiza la estructura y no los objetos como el elemento de estudio central en las matemáticas. Para nuestro autor este estudio se lleva a cabo necesariamente en dos pasos, análogos a los dos momentos de abstracción que Cantor

[8]La cohesión es una propiedad topológico-algebraica que todavía se está estudiando en la actualidad y que no es comprendida en sus detalles todavía.

afirmó llevar a cabo en el desarrollo de su teoría de los *Kardinale*. El primer paso consiste en "agotar al objeto de todo su contenido". El resultado de este "agotamiento" puede pensarse metafóricamente desplazando al conjunto por una bolsa de puntos. Estos puntos difieren unos de otros sólo en el hecho de no ser los otros. Estas bolsas de puntos son los conjuntos abstractos. Los conjuntos abstractos son para Lawvere el ejemplo paradigmático de objetos sin estructura. Pues la única forma en la que son comparables es a través de la cantidad (número cardinal) de puntos. Estos objetos sin estructura se pueden "conectar" con otros objetos de la misma naturaleza vía mapeos adecuados específicos. Estas asignaciones reflejan el contenido complicado de un objeto matemático y constituyen su estructura. Es justo el acto de "conectar" objetos abstractos vía mapeos lo que constituye el segundo paso.

Lawvere piensa que estos procesos de abstracción subyacen a toda matemática. Por tanto entender el proceso de generación de estos *Kardinale*, es equivalente a entender los procesos generales esenciales que dan origen a todo el desarrollo de las matemáticas. Así en su libro del 2003 *Set for mathematics*, Lawvere expone su versión de un fundamento para la matemática. Para Lawvere un fundamento hace explícitas las características generales esenciales, los ingredientes y las operaciones de una ciencia, así como sus orígenes y leyes generales de desarrollo. (Es decir, es un fundamento en el sentido matemático del término.) Pero además responde a un propósito que llamaré ético: debe proporcionar una guía para el aprendizaje, el uso y el desarrollo posterior de la ciencia[9] . Para Lawvere un fundamento meramente "especulativo" (uno en su mero sentido matemático) que carezca de dicho propósito no tiene el derecho de llamarse así.

Dado el contexto anterior, la interpretación propuesta por Lawvere hace énfasis en los procesos de abstracción involucrados en la generación de los conceptos de cardinal y ordinal. No sólo tomando en cuenta los aspectos formales de las nociones conjuntistas sino sus aspectos epistemológicos[10]. Por tal motivo Lawvere considera qué aspectos que según él fueron considerados por Zermelo como desafortunados respecto a la teoría de conjuntos cantoriana, juegan en realidad un papel central en la comprensión de la noción de conjuntos de Cantor. En concreto el concepto abstracción y la idea de que los conjuntos no requieren propiedades que unifiquen a sus elementos más allá de la propiedad de formar ellos mismos parte del conjunto[11], son consideradas especialmente relevantes para Lawvere.

En los capítulos posteriores se profundizará más al respecto. Por ahora, lo dicho será suficiente

[9]Se trata de un propósito ético porque implica no solo el desarrollo de una pedagogía sino la aceptación de un compromiso con los otros por ayudar a hacer más accesible el conocimiento.

[10]Lawvere considera que es importante dar cuenta de los conjuntos mediante una máquinaria formal que se corresponda con los procesos cognitivos que tradicionalmente se asocian a la adquisición de conocimiento matemático. La naturaleza epistemológica de esta discusión corresponde a una visión en la que la maquinaria formal debe ser adecuada y estar relacionada directamente con la forma en la cual los matemáticos practicantes hacen matemáticas.

[11]La idea de que los conjuntos son bolsas de puntos.

para dar un contexto general de la discusión. En el siguiente capítulo explicaré las ideas relativas a la noción de conjunto de Cantor y su filosofía de las matemáticas.

1.4. Las ideas centrales a considerar

A modo de resumen considero pertinente enunciar las siguientes ideas que serán centrales en el resto de la tesis:

- Existen varias teorías de conjuntos como teorías matemáticas formales; ni sus axiomas, ni sus lenguajes son los mismos. Cada una de ellas busca recuperar las ideas de Cantor en sus trabajos fundacionales en el área (en mayor o menor medida), pero es claro que ninguna de ellas puede verse como una adaptación directa de la teoría cantoriana de conjuntos. Las dos teorías que serán objeto de estudio de esta tesis son ETCS y ZFC, cada una de ellas como representantes de una tradición que pretende recuperar el trabajo de Cantor desde perspectivas distintas.

- Puede parecer extraño hablar de diferentes teorías de conjuntos, en un sentido significativo, pues, después de todo, todas estas teorías tienen en común que su objeto de estudio central es la noción de conjunto. Sin embargo difieren en sus intuiciones preformales sobre lo que es un conjunto y esto tiene consecuencias importantes en el aparato formal.

- En esta tesis se trabajará con tres de estas teorías (la teoría cantoriana de conjuntos, la teoría categórica de conjuntos y ZFC).

- Aunque la teoría categórica de los conjuntos y ZFC surgieron en tradiciones diferentes, ambas tienen en cierto sentido un origen común: la teoría de conjuntos cantoriana. Por tanto es posible compararlas entre sí por medio de dicha teoría.

- Para compararlas será relevante tener en cuenta los puntos que cada teoría consideró centrales al momento de formalizar las ideas cantorianas. De acuerdo con Lawvere los puntos centrales a recuperar son el método de abstracción y la concepción de conjunto como "bolsa de puntos", algo que es recuperado en ETCS, pero que no tiene el mismo peso en ZFC.

Capítulo 2

La noción de conjunto en Cantor

Resumen del capítulo: En este capítulo se explican a grandes rasgos las motivaciones filosóficas de la teoría de conjuntos cantoriana. También se desarrolla su argumento contra el finitismo aristotélico, para proceder a explicar su teoría de los números transfinitos.

2.1. Introducción al capítulo

Como se dijo antes, se puede considerar a Cantor el padre de la teoría de conjuntos, en el sentido de ser el primero en tomar a los conjuntos como objeto de estudio por derecho propio. Sin embargo su teoría de conjuntos fue muy diferente a las teorías de conjuntos actuales, principalmente por el hecho de que no estaba axiomatizada –por el lado matemático. Por el lado filosófico, Cantor veía a su propia teoría no tanto como un posible fundamento para la matemática en general, sino como un cúmulo de verdades sobre hechos particulares del mundo. Veamos con mayor detalle el contexto filosófico de la obra de Cantor.

Por el lado matemático, la teoría de conjuntos cantoriana estuvo fuertemente motivada por el análisis y el estudio de las funciones analíticas (funciones cuya gráfica, consiste en colecciones de puntos, está determinada por una regla dada). Los estudios de Cantor sobre conjuntos formaban parte de un programa para liberar al análisis de su restricción a las funciones dadas por expresiones analíticas.[1] Por el lado más filosófico, la teoría de conjuntos cantoriana encontró su principal motivación en la clarificación del concepto de infinito en general, y del infinito matemático en particular. Cantor mismo vio su teoría de conjuntos como una respuesta al finitismo aristotélico. Esto se puede comprobar en su texto "Fundamentos para una teoría general de los conjuntos: una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito" de 1883. En esta obra Cantor expone sus principales ideas filosóficas so-

[1] Shaughan Lavine, *Comprendiendo el infinito*, trad. Esteban Torres (México: FCE, 2004), 92.

bre su teoría de conjuntos, así que centraré el análisis de su filosofía en ella. Veamos entonces en qué consiste el finitismo aristotélico y cómo es que Cantor lo rechaza.

2.2. Infinito actual y potencial

El finitismo aristotélico tiene su base conceptual en las nociones de infinito en acto e infinito en potencia introducidas por Aristóteles. No es mi intención aquí reconstruir fielmente la teoría del infinito de Aristóteles, ya que no es el tema de mi trabajo, ni tampoco resulta esencial para entenderlo, además, parece ser que la teoría contra la que arremete Cantor no es precisamente la de Aristóteles. Por ello me limitaré a decir algunas cosas relevantes sobre el infinito sostenidas por Aristóteles a lo largo de la *Física*[2] .

Lo primero que hay que aclarar sobre estas nociones es que, hasta los trabajos de Cantor, no existía una noción precisa del concepto de infinito matemático. Por tal motivo, infinito en acto e infinito en potencia, son más nociones que aluden a ciertas intuiciones, que conceptos matemáticos precisos.

El infinito en sentido potencial se debe entender como aquel que ocurre, por ejemplo, en una progresión que intuitivamente no puede llegar a un fin o culminación, por ejemplo: la progresión de los números pares. Una progresión en la que siempre es posible la existencia de un siguiente elemento[3] . Esto es claro en la *Física*, donde Aristóteles brinda algunas concepciones de lo infinito que se corresponden con esta idea, a saber: lo que es imposible recorrer, porque por su propia naturaleza no puede ser recorrido; lo que se puede recorrer, pero sin llegar a un término; lo que difícilmente puede ser recorrido; lo que naturalmente admite ser recorrido, pero no puede ser recorrido o no tiene límite[4] . Así el infinito potencial se hallaba fuertemente vinculado con la idea de numeración, conteo o recorrido. El concepto de infinito actual, por otro lado, solía caracterizarse sólo negativamente respecto al infinito potencial. Así, por infinito actual se entendía el fin de un conteo de cosas infinitas, un número mayor que cualquier otro, la mínima bisección de una magnitud dada. En cierto sentido el infinito actual implica la existencia en un momento concreto de una infinidad de partes. Implica que el todo de las partes que conforman lo infinito se dé en un sólo momento.

En la *Física* Aristóteles delimita el campo de uso correcto del concepto infinito. En concreto afir-

[2] Las principales ideas de Aristóteles sobre el infinito las encontramos en los capítulos 4 al 8 del libro III de la *Física*, también a lo largo del libro VI de la misma obra, aunque allí no es el tema central a discutir, a diferencia de los capítulos mencionados antes. El lector interesado en la teoría del infinito de este filósofo puede además recurrir a *Metafísica* 11 y 10 donde también se aborda el tema del infinito.

[3] En *Física* III, 207b 5-15 Aristóteles habla sobre la infinitud potencial de este tipo de progresiones.

[4] *Física* III, 204a 5-10.

ma que el infinito sólo es predicable de las siguientes cosas: la división de las magnitudes[5], el tiempo y el movimiento [6], la eternidad de las especies[7] y progresiones matemáticas como la mencionada arriba[8] . Esto es importante pues Aristóteles no cree que el concepto de infinito se predique exclusivamente de entidades matemáticas[9] . De hecho sus principales preocupaciones al respecto parecen ser metafísicas. Esto es claro en el siguiente fragmento:

> Puesto que la ciencia de la naturaleza estudia las magnitudes, el movimiento y el tiempo, y cada uno de éstos es por necesidad o infinito o finito [...] convendrá entonces que quien se ocupe de la naturaleza investigue si el infinito es o no es;y, si es, qué es.[10]

Aristóteles niega, precisamente por motivos metafísicos, que el infinito del tiempo y la eternidad de las especies sea actual[11] . Por su parte, niega la infinitud actual de las magnitudes porque al parecer de Aristóteles estas admiten ser recorridas[12] . También niega la infinitud actual de las progresiones numéricas porque a su parecer esto implica la existencia de un número más grande que cualquier otro separable del *proceso de bisección*[13], lo que, según él, es absurdo[14] . Así, aunque Aristóteles no

[5]*Física* III, 206a 15.

[6]*Física* III, 208a 20.

[7]En lo que respecta a este punto Aristóteles suele usar como principal ejemplo las generaciones de los hombres, como en *Física* III, 206a 25-30, lo que denota esta idea es la infinitud de las cosas sujetas a procesos interminables de destrucción y generación dentro de un contexto cronológico. No solo los hombres si no las sustancias sensibles vistas como especies están sujetas a este tipo de infinitud.

[8]Es decir progresiones como la de los números naturales o los números pares.

[9]De hecho Aristóteles no creía en las entidades matemáticas como objetos con existencia en sí, independiente de lo contado, justo en este punto radica gran parte de su rechazo del infinito actual, esto se puede constatar en *Metafísica* XI, 1061a 29.

[10]*Física* III 4, 202b 30-35.

[11]Existe en Aristóteles una dependencia entre tiempo y movimiento por la cual el tiempo no puede pensarse como algo separado, como se puede ver en *Física* IV 11 2020a 1, esto impide que el tiempo pueda darse de forma actual, sin embargo siempre se puede pensar en un movimiento x que sucede en el tiempo a algún moviento y, lo que explica en parte su naturaleza de infinito potencial. No planeo reconstruir aquí las ideas metafísicas de Aristóteles sobre el tiempo y el movimiento y los argumentos concretos por los cuales rechaza o acepta un tipo de naturaleza infita relativa a ellos, pues me interesan aquí sólo los aspectos que tienen que ver con el infinito matemático. Los lectores interesados en profundizar en el tema puede remitirse a los libros IV y V de la *Física* . En lo que respecta a la eternidad de las especies hay que notar que la totalidad de sus miembros no puede subsistir en un mismo momento.

[12]*Física* III, 206b 5-15.

[13]*Física* III, 207b 5-15.

[14]Para Aristóteles los números son fruto de la abstracción en tal sentido dependen de aquello que se cuenta y no poseen existencia en sí (no pretendo de ninguna manera hacer una reconstrucción de la filosofía de las matemáticas de Aristóteles por lo que me limito a dirigir al lector interesado en este punto a *Metafísica* XI, 1061a 29). Así la existencia de un número mayor que todos es una imposibilidad metafísica pues las colecciones de cosas son finitas. Sin embargo siempre podemos

negaba por completo el infinito[15] sí negaba el infinito actual[16].

Esta tendencia a negar el infinito actual, se mantuvo hasta bien entrada la modernidad. En dicho periodo el surgimiento del cálculo hizo que se comenzará a hablar de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Esto no era bien visto ni por todos los matemáticos ni por todos los filósofos. Ya llegados a la época de Cantor las posturas que negaban el infinito actual seguían siendo las hegemónicas. Sin embargo era cada vez más común en el estudio de funciones analíticas, como el mismo Cantor lo hace notar, la asunción de un dominio infinito de carácter actual. También era cada vez más común el uso de conceptos como agregado, totalidad, conjunto, etc.

Bajo este contexto aparece en 1851 de forma póstuma el libro *Las paradojas del infinito* de Bernard Bolzano. En este libro Bolzano, como lo hizo Aristóteles en su momento, delimita el uso correcto del concepto infinito, pero esta vez lo circunscribe al ámbito de los agregados o conjunto y, como caso excepcional, a ciertas cuestiones teológicas. Partiendo de esta base expone un gran número de argumentos en favor del infinito actual. También se aproxima a algunos métodos de conteo que luego Cantor usaría.

Cantor seguiría a Bolzano y reservaría el uso del concepto de infinito para el habla exclusiva de conjuntos o agregados. También acuña el concepto de lo absoluto, para referirse al infinito en sentido teológico, delimitando así todavía más el uso del infinito al campo de las matemáticas. Es precisamente por esto que no es del todo adecuado afirmar que Cantor se oponía a las ideas de Aristóteles pues esto sería pecar de anacronismo y de descontextualización. Es por eso que he optado aquí por el término finitismo aristotélico para denotar aquella postura que tuvo origen en los conceptos de Aristóteles, según la cual un infinito actual en matemáticas no es posible. Esta es la postura contra la cuál se pronuncia Cantor. Veamos con más precisión esto.

2.3. ¿Qué tiene que hacer Cantor para resolverlo?

A pesar de lo dicho arriba, al menos en los *Fundamentos*, Cantor parece tomar como principal opositor a Aristóteles, sin embargo delimita claramente su proceder y sólo le recrimina la negación del infinito actual en matemáticas (aún así se le puede criticar con cierto derecho a Cantor hacer una interpretación escueta de Aristóteles).

---

partir de una cantidad dada y añadir con el pensamiento una mayor, de allí que Aristóteles admita la infinitud potencial de estas progresiones númericas. Por razones también metafísicas nuestro autor niega la posibilidad de un infinito geométrico actual. A su parecer la extensión del universo es finita, como se puede ver en *Física* III, 206a 5.

[15] *Física* III 206a 7-10.

[16] *Física* III, 208a 5-20.

Cantor comienza por introducir sus propias versiones de los conceptos de infinito actual e infinito potencial, a saber: el infinito propio e impropio. Cantor afirma lo siguiente sobre el infinito impropio:

> Por lo que respecta el infinito matemático [...] me parece que hasta ahora ha aparecido principalmente en el papel de una cantidad variable que, o bien crece más allá de todos los límites, o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita. A este infinito lo llamo infinito impropio.[17]

Es notable que Cantor use el predicado "impropio" para referirse a este tipo de infinito. El proceso de agrandar o disminuir una cantidad puede ser algo que se lleve a cabo de manera indeterminada, pero sigue siendo en el fondo un proceso discreto. Esta es la idea que Cantor parece resaltar con dicho predicado. Por el lado del infinito actual Cantor tiene el concepto de infinito propio:

> Pero en los últimos tiempos se ha desarrollado, tanto en geometría como particularmente en la teoría de funciones, otro tipo de concepto del infinito igualmente justificado. Por ejemplo, en la investigación de una función analítica de variable compleja se ha hecho necesario y habitual imaginar, en el plano que representa la variable compleja, un único punto situado en el infinito (esto es, un punto infinitamente distante pero definido) y examinar el comportamiento de la función en el entorno de ese punto, igual que en el entorno de otro punto cualquiera. Resulta así que en el entorno del punto infinitamente distante la función muestra exactamente los mismos comportamientos que en cualquier otro punto situado en la región finita, de modo que en este caso estamos plenamente justificados para pensar en el infinito como situado en un punto completamente determinado. Cuando el infinito aparece de esta forma definida lo llamo infinito propio.[18]

En efecto, asumir la existencia de un punto infinitamente distante, pero definido sólo es posible si de antemano el conjunto de todos los puntos de números complejos situados en la región finita se presupone como acabado en algún sentido. En otras palabras: las colecciones de puntos que determinan la gráfica de la función dada se deben presuponer para que este procedimiento pueda llevarse a cabo.

Armado con estos conceptos, Cantor se propone entonces examinar los argumentos esbozados por el finitismo aristotélico contra el infinito actual. El primer argumento que Cantor analiza es el que afirma que: "sólo existen números finitos, lo cual dedujo [Aristóteles] de que sólo conocía enumeraciones de conjuntos finitos".[19]

---

[17] Georg Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos: una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito*, trad. José Ferreirós y Emilio Gómez (Madrid: Crítica, 2006), 85.

[18] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 86.

[19] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 96.

A esta suposición, Cantor responde que siempre que se dé a los conjuntos una ley bajo la cual estos puedan ser bien ordenados, es posible llevar a cabo enumeraciones tanto de conjuntos finitos como infinitos. Añade a esto que sin dicho orden un conjunto no puede ser enumerado, pues es parte de la esencia del concepto de contar. Otro aspecto que resalta es que mientras que en los conjuntos finitos el resultado de contar, la enumeración, es independiente del orden, en los conjuntos infinitos esto no es así.

Un segundo argumento es el que afirma que: "Si el infinito existiera, entonces absorbería lo finito y lo destruiría"[20]. Cantor responde que las relaciones aritméticas que guardan sus nuevos números muestran que esto es falso.

A lo largo de los *Fundamentos* Cantor trata argumentos similares, como aquel que afirma que el infinito actual en matemáticas es imposible porque la mente humana no puede concebir una totalidad infinita[21] . Cantor responde que el humano sí puede lograr esto ya que él mismo lo ha hecho. En general sus argumentos se basan en que ha probado la existencia de entidades bien determinadas que son infinitas en acto. O como el mismo Cantor lo dice:

> Lo que yo afirmo haber probado en este trabajo, así como en mis escritos anteriores, es que tras lo finito hay un transfinito (que se podría llamar también suprafinito), esto es, una jerarquía ilimitada de modos determinados que según su naturaleza no son finitos sino infinitos, pero que, al igual que lo finito, pueden ser determinados por números bien definidos y distinguibles entre sí. Estoy convencido pues de que el dominio de las cantidades definibles no se agota en las cantidades finitas, y que los límites de nuestro conocer pueden por consiguiente ser extendidos, sin que con ello se ejerza ninguna violencia a nuestra naturaleza. Por lo tanto, en lugar de la proposición discutida en 4 propongo otra: Todas las cosas, ya finitas, ya infinitas, son definidas y, exceptuando a Dios, pueden ser determinadas por el intelecto.[22]

Así, la estrategia de Cantor contra el finitismo aristotélico es bastante directa: consiste en exhibir la existencia de un infinito actual a través de la construcción de una secuencia de números que vayan más allá de lo finito. En tal sentido, Cantor procede como el matemático que fue. Sin embargo queda algo que aclarar. En los sistemas formales este tipo de demostración suele permitirse porque se apoya sobre la base de axiomas asumidos previamente como verdaderos. Esto evita que la argumentación sea un acto *ad hoc*. Pero en este caso, ¿qué es lo que garantiza que los números expuestos por Cantor

[20] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 97.
[21] Argumento que se puede encontrar en *Física* III, 207a 25-30.
[22] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 99.

son reales y no meras ficciones del intelecto? Para responder a esta cuestión es necesario clarificar algunas cuestiones sobre la ontología y metafísica de Cantor.

2.4. ¿Qué significa que exista eso?

Veamos entonces qué significa para Cantor que una entidad matemática exista. En los *Fundamentos* podemos leer el siguiente fragmento:

> Podemos hablar de la realidad o existencia de los número enteros, tanto finitos como infinitos, en dos sentidos; aunque en rigor son las mismas relaciones en que puede ser considerada en general la realidad de cualquier concepto o idea. En primer lugar, podemos considerar los números enteros como existentes en tanto que, al ocupar un lugar completamente determinado en nuestro entendimiento, en virtud de las definiciones, quedan perfectamente diferenciados de todos los demás elementos de nuestro pensamiento, guardan con ellos relaciones determinadas y pueden por consiguiente modificar la sustancia de nuestra mente de una forma determinada; permítaseme llamar a esta clase de realidad de nuestros números su realidad intrasubjetiva o inmanente. Pero además, se puede atribuir también realidad a los números en tanto que deben ser tenidos por expresión o representación de eventos y relaciones del mundo exterior que se contrapone al intelecto, en tanto que además las diferentes clases numéricas (I), (II), (III), etc. son representaciones de potencias, que ocurren actualmente en la naturaleza corpórea o mental. A esta segunda clase de realidad la llamo realidad transubjetiva o transiente de los números enteros.[23]

He aquí el principal requisito para garantizar la existencia matemática de un concepto, el objeto debe estar determinado y bien definido. Dado el contexto de los *Fundamentos* esta postura se acerca por momentos a alguna especie de constructivismo, es decir existen sólo los conceptos matemáticos que podemos construir. Sin embargo el hecho de que Cantor hable de una realidad transiente nos aleja de él. Más aún, cuando Cantor afirma que “estas dos clases de realidad siempre se dan juntas”[24]. agregando además que “un concepto calificado como existente en sentido inmanente posee también en ciertos respectos e incluso en infinitos respectos, una realidad transiente, cuyo descubrimiento está con frecuencia entre las tareas más laboriosas y difíciles de la metafísica”[25].

[23]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 105.

[24]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 105.

[25]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 106.

Parece ser que aunque Cantor afirma que sólo las entidades bien definidas matemáticamente existen, cree también que lo bien definido tiene una suerte de relación con el mundo real precisamente por estar bien definido; esto se puede notar sobre todo cuando justifica en la unidad del todo, al cual pertenecemos otra de sus afirmaciones: “para el desarrollo de su material de ideas la matemática tiene que considerar única y exclusivamente la realidad inmanente de sus conceptos, y no tiene por tanto ninguna obligación de comprobar su realidad transiente”[26]. La conexión de la mente humana con la unidad del todo parece entonces ser garantía suficiente para asegurar también una conexión entre conceptos de la mente y la realidad externa.

Cabe destacar que Cantor identifica la unidad del todo con el absoluto, y el absoluto es un atributo de Dios. Sosteniéndose en estos conceptos Cantor da por supuesta la relación entre conceptos y objetos del mundo externo y relega la investigación de las relaciones particulares de este tipo a los metafísicos (entre los cuales incluye a los físicos matemáticos y a los mecánicos analíticos, por depender sus afirmaciones de investigaciones relativas al mundo externo) afirmando que la matemática tiene una particularidad que la distingue de otras ciencias: la de ser libre. La matemática libre lo es porque puede desentenderse en su proceder de su conexión con el mundo externo. Para hacer matemáticas, en efecto no se requiere de investigación empírica, o por lo menos no es claro – incluso en la actualidad – qué papel juega lo empírico en matemáticas, si es que juega algún papel.

Si bien Cantor se desatiende de la conexión que hay entre sus nuevos conceptos matemáticos y el mundo externo, nos brinda el suficiente material para hacer algunas anotaciones pertinentes. Lo primero que hay que decir es que Cantor estaba fuertemente influenciado por las ideas de Spinoza, allí encuentran su origen conceptos como los de la unidad del todo y absoluto. En particular estos conceptos guardan una relación profunda con ideas teológicas similares a las de Spinoza y el panteísmo. Dado este contexto, no cabe duda de por qué considera al absoluto no determinable, pues Dios siendo perfecto no podría estar negado en algún respecto. Cantor lo expresa así: “[. . .] el verdadero Infinito o Absoluto, que está en Dios, no admite determinación de ningún tipo. En lo tocante al último punto, estoy completamente de acuerdo con él, y no podría ser de otra manera, pues la proposición «omnis determinatio est negatio» es para mí enteramente incuestionable”[27].

Es de destacar que los conceptos de realidad transiente e inmanente tienen también su origen en Spinoza, como el mismo Cantor lo hace notar en una nota al pie del parágrafo 8 de los *Fundamentos*: “Lo que aquí llamo realidad intrasubjetiva o inmanente de conceptos o ideas podría concordar con la determinación adecuada, en el sentido en que Spinoza usa esta palabra cuando dice (Ética, parte II, def. IV) «Por idea adecuada entiendo la idea que, considerada en sí misma sin relación con el objeto,

[26]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 106.

[27]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 98.

tiene todas las propiedades o denominaciones intrínsecas de una verdadera idea»"[28].

No sólo eso sino que funda también en Spinoza (y en Platón) su creencia de que existe alguna suerte de correspondencia entre los objetos externos y las ideas. Esto lo hace en las anotaciones al parágrafo 8. En ellas Cantor afirma: "Esta convicción coincide esencialmente tanto con los principios del sistema platónico como con un rasgo esencial del sistema de Spinoza [...]"[29].

En seguida explica: "Sólo el saber conceptual da acceso (según Platón) a un verdadero conocimiento. Pero en tanto nuestras representaciones les corresponde la verdad [. . .] a su objeto igualmente debe corresponderle realidad y viceversa. Lo que se puede conocer, es: Lo que no se puede conocer, no es; y en la misma medida en que algo es, es también cognoscible". En lo que respecta a Spinoza, Cantor cita simplemente su afirmación "El orden y la conexión de las ideas es el mismo que el orden y la conexión de las cosas".

Dadas las asunciones anteriores es claro por qué Cantor piensa que los requerimientos formales son suficientes para asegurar la realidad transiente de los conceptos matemáticos. Existe una especie de correspondencia entre las cosas definibles y lo real. Nada real es indeterminable salvo Dios. Así la postura de Cantor no es exactamente aquella que afirma que las matemáticas son una suerte de construcción ficticia. Más bien parece asumir una especie de contenido lógico metafísico que permea la realidad, y al cual podemos acceder mediante el entendimiento gracias a la determinación conceptual y las leyes del pensamiento (como el principio del buen orden o la deducción lógica). Esto se puede corroborar en sus anotaciones a los parágrafos 8 y 9:

> A mi parecer, el proceso de formación correcta de conceptos es siempre el mismo: se pone un objeto carente de propiedades, que al principio no es otra cosa que un nombre o un signo A, y se le asignan ordenadamente varios predicados inteligibles, o incluso una cantidad infinita cuyo significado es conocido en base a ideas ya disponibles, y que no pueden contradecirse entre sí. De este modo quedan determinadas las relaciones de A con los conceptos ya disponibles, y particularmente con los que están emparentados con él. Una vez llevado esto hasta el final, se dan todas las condiciones para despertar el concepto A, que dormía en nuestro interior, y éste accede listo a la existencia, dotado de realidad intrasubjetiva [30].

La postura de Cantor a grandes rasgos consiste en lo siguiente: La realidad en tanto totalidad o unidad es en sí misma absoluta y por tanto comprensible. Pues todo acto de comprensión es determinación y toda determinación es negación. Conocer equivale entonces a negar algún aspecto del

[28] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 140.
[29] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 141.
[30] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 142.

uno mediante el entendimiento. Así se puede decir que conocemos la realidad fragmentándola con el pensamiento. Sin embargo, al ser nosotros parte del todo, en algún sentido todo lo que es definible radica ya en nuestro entendimiento. Existe una especie de correspondencia entre el mundo inmanente y el mundo transiente. La matemática además (y en esto Cantor sigue a los modernos tempranos), guarda un lugar privilegiado respecto a las demás ciencias pues no requiere de investigación empírica para consolidar sus verdades. Sólo requiere para la determinación de sus conceptos el seguimiento adecuado de ciertos principios formales. Eso último se puede constatar el siguiente fragmento:

> La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sólo está limitada por la consideración auto evidente de que sus conceptos sean consistentes en sí mismos, así como que estén en relaciones fijas, determinadas por definiciones, con los conceptos construidos antes, ya presentes y acreditados. En particular, para la introducción de nuevos números sólo está obligada [la matemática] a dar definiciones de ellos mediante las cuales se les conferirá tal determinación y, bajo ciertas circunstancias, tales relaciones con los antiguos números, que puedan ser distinguidos unos de otros con precisión en cada caso. En cuanto un número satisface todas estas condiciones, puede y debe ser considerado en matemáticas como existente y real. En esto veo yo la razón, indicada en 4, por la cual los números racionales, los irracionales y los complejos deben ser considerados como absolutamente existentes, tanto como los números enteros positivos finitos.[31]

Así parece que los criterios que Cantor pide para la existencia de objetos matemáticos son ante todos formales (no confundir con formalizados). Cantor agrega además, en el mismo parágrafo, que la libertad de las matemáticas no deja lugar para creaciones arbitrarias, pues los requisitos de consistencia son suficientes para evitar esto. Afirma algo todavía más interesante: que los conceptos matemáticos llevan desde su generación un "correctivo". El correctivo consiste en que si un concepto matemático resulta estéril este se abandonará. Así a los criterios de existencia matemática formales se suma uno pragmático. Sin embargo ya que este último criterio depende de la comunidad y el tiempo, el matemático puede concentrarse cuando trabaja en los criterios formales. Es notable que no es del todo claro cómo es que esta última afirmación puede ser consistente con la conexión entre conceptos bien definidos y realidad de la que habla Cantor. La posibilidad más evidente al respecto es que aquellos conceptos abandonados por estériles en realidad no estuvieran bien definidos y por tanto no existiera correspondencia alguna con lo real. Sin embargo Cantor, al menos en este escrito, no da información suficiente como para sostener con seguridad esta interpretación. Así que en general

[31]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 107.

podemos decir que su postura sobre el papel que juega la comunidad matemática y el tiempo en el desarrollo de la ciencia matemática no es del todo clara.

Regresando a la cuestión que nos atañe aquí podemos decir que la respuesta cantoriana al finitismo aristotélico es la construcción de "una secuencia infinita de números, los cuales están claramente diferenciados unos de otros, y mantienen relaciones aritméticas regulares tanto entre ellos como con los enteros finitos. Cuya realidad se funda en el hecho de su consistencia lógica y no presentar conflicto conceptual alguno con los viejos números. Estas relaciones no son tales que puedan ser reducidas esencialmente a las relaciones de los números finitos entre sí"[32]. Esto es, el argumento de Cantor contra el finitismo consiste en: 1) determinar quiénes jugarán el papel de los nuevos números; 2) establecer un orden dado y con ello 3) definir una aritmética.

La siguiente sección está destinada a explicar con mayor profundidad dicha construcción.

2.5. El concepto de número y su relación con el concepto de conjunto

La teoría de conjuntos transfinitos de Cantor es una suerte de generalización de los números enteros. Esto es, así como los números enteros finitos cuentan conjuntos finitos, los números transfinitos cuentan los conjuntos infinitos. Dicho conteo en la práctica supone la generación de una progresión de números transfinitos con un orden bien establecido y con relaciones aritméticas bien determinadas. Por lo anterior, el concepto de conjunto cantoriano se halla fuertemente vinculado a conceptos como número (los números para Cantor son de dos tipos, ordinales y cardinales) y conteo.

Por lo anterior, antes de entrar de lleno en la discusión sobre el concepto de conjunto, vendría a cuento hacer un paréntesis y decir algo sobre lo que se entiende en general por conteo. Al respecto las palabras de Benacerraf pueden ser útiles:

> Hay dos formas de contar, que corresponden a los usos transitivos e intransitivo del verbo "contar". En uno "contar" admite objeto directo, como en "contar las canicas"; en el otro no. El caso que tengo presente es el del paciente preoperatorio que está siendo preparado para el quirófano. La máscara de éter se le coloca en el rostro y se le dice que cuente hasta donde pueda. No se le dice que cuente nada en particular, sino simplemente que cuente. Una explicación verosímil consiste en decir que normalmente aprendemos los primeros números en conexión con conjuntos que tienen ese número de miembros –esto es, en términos del contar transitivo (por tanto aprendiendo el uso de los números)– y

[32]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 107.

> después aprendiendo cómo generar "el resto" de los números. En realidad, "el resto" siempre permanece como algo relativamente vago. La mayoría de nosotros aprendemos simplemente que no acabaríamos nunca, que nuestra notación se extendería tanto como necesitamos contar. Aprender estas palabras, y cómo repetirlas en el orden correcto, es aprender el contar intransitivo. Aprender a usarlas para medir conjuntos es aprender el contar transitivo. La cuestión de si aprendemos o no una forma de contar antes que la otra es irrelevante en lo tocante a los números iniciales. Lo que es cierto, y relevante, es que tendremos que aprender algún procedimiento recursivo para generar la notación en el orden apropiado antes de que hayamos aprendido a contar transitivamente, pues hacer lo último es, directa o indirectamente, correlacionar los elementos de la serie de los números con los miembros del conjunto que estamos contando. Parece, por tanto, que es posible para alguien aprender a contar instrasitivamente sin aprender a contar transitivamente. Pero no al revés. Creo que éste es un punto de alguna importancia[33].

Lo que Benacerraf llama conteo intransitivo se corresponde de alguna forma con el papel que juegan los conteos vía ordenamiento, es decir, con el papel que juegan lo que usualmente llamamos números ordinales (aquellos que establecen el tipo de orden de una sucesión dada). A su vez, el concepto de potencia o número cardinal (aquel que establece la magnitud de un agregado de objetos dados) parece guardar relación con el concepto de conteo transitivo. Como Benacerraf lo hace ver "es necesario aprender algún procedimiento recursivo para generar la notación en el orden apropiado antes de que hayamos aprendido a contar transitivamente". Si esto es cierto, aplicando la cuestión a nuestro caso, tenemos que es necesario aprender a bien ordenar lo infinito antes de poder asignarle un número que determine su magnitud, esto es, un cardinal. En otras palabras existen dos maneras posibles de contar algo, y cada tipo de número representa a alguna de estas maneras.

Otro punto a resaltar es que Benacerraf afirma que es imposible para alguien aprender a contar intransitivamente sin aprender a contar transitivamente pero no al revés. En otras palabras: es necesario establecer un orden antes de proceder a determinar una magnitud. Se podría decir que, epistemológicamente hablando, la determinación de una magnitud supone la generación previa de un ordenamiento de cosas. Y podemos ver que en efecto un conjunto ordenado linealmente determina un conteo, pues nos da un primer elemento, un sucesor para cada elemento y un sucesor en la progresión.

Esta dependencia epistemológica de hecho se corresponde: 1) con la manera en que históricamente se introdujeron los números transfinitos (Pues Cantor introdujo primero los números ordinales y posteriormente logró determinar con claridad matemática la noción de cardinal); 2) con la manera en

[33] Benacerraf, "What numbers could not be",The Philosophical Review 74(1) (1965), 49-50.

que Cantor afirmará que llegamos a generar los conceptos de cardinal y ordinal (Pues como se verá, Cantor afirma que el número cardinal es una abstracción del número ordinal). Bajo este contexto para ser que, dado el objetivo de Cantor, obtener un método para contar lo infinito, un paso previo necesario, epistemológicamente hablando, fue la conceptualización de los números ordinales.

Es claro que Cantor era consciente de dicha dependencia epistemológica. Lo podemos corroborar en el hecho de que considera a los cardinales un producto de la conceptualización de los ordinales. También en el hecho de que considera al principio del buen orden no sólo una ley del pensamiento sino una la ley fundamental para la entera teoría de conjuntos[34]. Que todo conjunto bien determinado se pueda poner en forma de un conjunto bien ordenado resulta fundamental para la entera teoría de conjuntos por que de otra manera no es posible conceptualizar y generalizar la idea de conteo en general de alguna forma.

En este sentido la importancia del principio de buen orden y la dependencia que Cantor insiste en resaltar del concepto de cardinal respecto al de ordinal denota de alguna manera el proceder epistemológico mediante el cual se accedió en primer lugar al concepto de número cardinal. Expresa en lenguaje cantoriano la forma en que se determinó el concepto para despertarlo en nuestro interior. Veamos con más claridad qué entiende Cantor por número.

2.6. La noción de número

Básicamente por número Cantor entiende dos cosas: números ordinales y números cardinales. Como el mismo Cantor lo hace notar estos conceptos confluyen en lo finito, pero en lo infinito son claramente diferenciables. Así que ¿cuál es el estatus ontológico de estas entidades?

La respuesta de Cantor al respecto es un tanto ambigua. Cantor afirma reiteradamente que los números, tanto ordinales como cardinales, son conceptos, en específico conceptos que surgen como producto de la actividad mental, en particular de la abstracción, aplicada a un conjunto dado. Por otro lado llega afirmar también que estos números son en sí mismo conjuntos. Así que nuestro autor no hace una correspondencia directa con los números y los conjuntos en general, más bien parece ser que ciertos conjuntos frutos de la actividad mental son números, pero no que necesariamente los conjuntos en general lo son. En concreto los números son cierto concepto que corresponde a un tipo particular de conjunto bien ordenado, en el caso de los números ordinales, y cierto concepto que corresponde a la medida de un conjunto haciendo abstracción del orden en el que se presentan, en el caso de los cardinales.

Lo anterior se puede constatar en las Contribuciones donde Cantor afirma respecto a los números

[34] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 91.

cardinales que “Puesto que a partir de cada elemento particular m, si se prescinde de sus características, se tendrá una unidad, el número cardinal M es él mismo un conjunto determinado compuesto sólo de unidades, que tiene existencia en nuestra mente como imagen intelectual o proyección del conjunto M dado ”[35]. En la misma obra también afirma que los cardinales son el concepto general que surge cuando se abstrae de un conjunto las características particulares de sus elementos y el orden en que estos se dan.

En lo que respecta a los ordinales podemos leer lo siguiente en una carta a Kronecker: “Parto del concepto de un ‘conjunto bien ordenado’, y llamo conjuntos bien ordenados del mismo tipo a aquellos que es posible correlacionar entre sí unívoca y recíprocamente, respetando la jerarquía del rango por ambas partes; y ahora entiendo por número el signo o el concepto para un tipo concreto de conjunto bien ordenado”[36].

Así lo que estrictamente hablando afirma Cantor no es que los conjuntos en general sean números, sino que los números surgen como abstracciones de agrupaciones de objetos, y estos en sí mismos son también agrupaciones con ciertas características omitidas respecto al conjunto original. Así que por un lado tenemos los conceptos que permiten el conteo y por otro lado lo contado. Aunque esto pueda leerse un poco ingenuo es necesario hacerlo notar pues algunas interpretaciones conjuntistas de las teorías de conjuntos actuales equiparan los números con los conjuntos y Cantor parece diferenciarlos.

De hecho es en el punto del conteo en el que Cantor concentra toda la discusión. Lo constitutivo de los conjuntos en general es que admiten un conteo, no qué propiedad colecta a sus miembros. En otras palabras los elementos de un conjunto no requieren de una propiedad colectora, más allá de la ser miembros de un conjunto. Podemos decir en este sentido que un conjunto para Cantor es cualquier cosa que puede ser contada. Este énfasis en el conteo puede ser también la razón por la cual Cantor se desatendió de la cuestión de los principios colectores, pues el contar y la aritmética no parecen depender de cuáles fueron los elementos colectados. Y ya que lo fundamental de los números es que permiten contar cosas, ya sean granos de elote, ya sea los puntos en una línea, es irrelevante, en lo relativo a la constitución de los números, cómo se colectó lo contado, lo importante es la aritmética que determina la forma en que operan los números. Esto es todavía más evidente cuando hacemos notar que Cantor jamás cuestiona el estatus de conjunto respecto a las colecciones finitas, dado la aritmética finita es claro que dichos conjuntos admiten un conteo.

Esto contrasta con la visión errónea–a mí parecer–ampliamente difundida en los manuales de

[35]Cantor, *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos*,trad. J.Bares y J.Climent (Math. Annalen vol. 46, pags. 481-512,1895), https://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor95-97.pc.pdf (Consultado el 26-10-2020), 3.

[36]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 234.

teoría de conjuntos, aun en la actualidad, según la cual Cantor defendía una visión ingenua de los conjuntos. En el sentido de creer que estos estaban determinados por una propiedad que decidía en cada caso a los miembros del conjunto. Sin embargo lo que encontramos al leer la obra de Cantor no son referencias a la forma adecuada de colectar los miembros de un conjunto, tampoco se dice nada sobre leyes coleccionadoras de elementos.

En lugar de eso de lo que se habla en la obra de Cantor es de la ley del buen orden, de números, de progresiones transfinitas de números, análogas a las finitas, de enumeración, etc. El contar, medir, y enumerar son conceptos centrales en el pensamiento de Cantor, él mismo lo deja claro en el siguiente pasaje:

> También los conjuntos finitos pueden ser contados sólo si tenemos una sucesión determinada de los elementos enumerados; pero aquí encontramos una particular propiedad de los conjuntos finitos, a saber, que el resultado del contar –la enumeración– es independiente de la ordenación particular; mientras que para conjuros infinitos, como hemos visto, tal independencia en general no se mantiene. Por el contrario, la enumeración de un conjunto infinito es un entero infinito que está codeterminado por la ley según la que se cuenta; es precisamente aquí, y sólo aquí, donde se localiza la diferencia esencial entre lo finito y lo infinito, fundada en la naturaleza misma y que por tanto nunca será abolida[37].

Los intereses de Cantor eran relativos a la determinación del infinito y cómo colecciones infinitas dadas podían ser contadas. El problema central para Cantor no fue cómo fueron colectadas sino de qué manera podían ser contadas. Lo fundamental de los nuevos números transfinitos era precisamente su carácter de números.

Como conclusión de esta subsección podemos decir que en la obra de Cantor encontramos por lo menos tres tipos de conjuntos divididos por el grado de abstracción que presentan. En primer lugar están los conjuntos concretos de los que se abstraen las ideas de cardinal y ordinal, en segundo lugar los ordinales y en tercer lugar los cardinales. Lo relevante en lo que respecta a ordinales y cardinales no parece ser su estatus de conjunto, sino el de concepto, que es la palabra con la que Cantor los llama frecuentemente. Con esto quiero decir que lo relevante en ellos no es que colecten cosas sino que conceptualizan cierta idea de conteo relativa a agregados de objetos. Baste con esto por ahora sobre el concepto de número en general. En la siguiente subsección haré algunas anotaciones relevantes sobre el concepto de conjunto en general.

[37] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 97.

2.7. Observaciones sobre el concepto de conjunto en Cantor

En las *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos* de 1895, Cantor escribe, el que es tal vez, su fragmento más citado: Por un "conjunto" entendemos toda agrupación M en un todo de objetos bien determinados y bien diferenciados m, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento (que son llamados los "elementos" de M)[38].

Es importante aquí recordar lo que se dijo arriba sobre la metafísica cantoriana de los *Fundamentos*. La realidad inmanente de un concepto va siempre unida a la realidad transiente de un concepto. Así la objetividad del conocimiento relativo a conjuntos depende no de dónde se originaron o dónde radican en el mundo los conjuntos, sino de que las definiciones y principios matemáticos que determinan a los números con los que se cuentan estas variedades sean adecuados.

Recordemos también que ya se dijo arriba que un número, estrictamente hablando, no es un conjunto concreto sino el concepto de un tipo de orden o de potencia de conjunto dado. Por estas razones sería erróneo afirmar que Cantor sostenía una visión psicologista o mentalista de los números y de las matemáticas. Esto a pesar del lenguaje usado por Cantor. En primer, como ya se dijo, los números son conceptos y los conceptos matemáticos fundan su realidad inmanente en leyes del pensamiento, leyes que son compartidas por todos, leyes lógicas, y por tanto el conocimiento relativo a ellos es objetivo. Y en segundo lugar porque una cosa es el conocimiento matemático en sí, y otra cosa es aquello a lo que el conocimiento matemático refiere. Que los objetos que conforman una agrupación dada sean mentales, más todavía, que la agrupación dada de objetos sólo se pueda experimentar subjetivamente, no implica que el conocimiento sobre ellos sea también subjetivo. En cuanto a la expresión "determinados y bien diferenciados" esta se refiere a que los elementos de los conjuntos deben ser concretos (debemos saber a quiénes agrupamos) y distinguibles unos de otros. Lo anterior deberá ser suficiente para evitar algunos malentendidos respecto a los aspectos epistemológicos involucrados en el concepto de conjunto de Cantor.

También es importante hacer notar lo siguiente: Cantor no entiende por conjunto o variedad M, lo determinado por cierto tipos de axiomas, porque Cantor no axiomatizó nada. Tampoco entiende por variedad en general un número, pues los números tanto ordinales como cardinales son conceptos generales del tipo de orden y del tipo de magnitud respectivamente (O como Cantor dice: "Dado un conjunto C, llamo a aquel concepto general bajo el que cae C, y además sólo los conjuntos equivalentes con él, su número cardinal o también su potencia"[39]). Haciendo una lectura bastante literal de Cantor lo que estrictamente constituirá el conjunto M es una "agrupación en un todo de objetos de-

[38]Cantor, *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos tansfinitos*, 1.

[39]Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos*, 259.

terminados y bien diferenciado, de nuestra intuición o pensamiento"[40]). No hay ninguna restricción explícita respecto a que la naturaleza de estos objetos colectados sean números o incluso entidades matemáticas. Sólo se dice que un agregado es aquello de lo cual se abstraen los números.

Entre los pocos ejemplos concretos que da Cantor, se encuentran los conjuntos de puntos en una línea y la colección de todas las funciones analíticas de variable compleja. Esto denota que es muy probable que no existieran para Cantor criterios claros, más allá de lo que dictaba la tradición matemática y la lógica, de qué objetos podrían agruparse en un conjunto. Como ya se explicó, Cantor no parece estar preocupado en esta etapa de su obra sobre el cómo estas entidades se colectan. Pese a esto es claro, con los ejemplos enunciados, que lo colectado no era reducible a números, lo cual tampoco tendría sentido siendo uno de los objetivos de Cantor precisamente enumerar y medir lo infinito. Así la noción de conjunto de Cantor–el conjunto concreto del cual se abstraen los números–más que una noción formal parece tratarse de una idea intuitiva. La idea intuitiva de una colección mental de objetos diversos que admiten ser contados. La parte formal del concepto de conjunto parece estar constituida por las ideas de número ordinal y cardinal. Por tanto lo más factible dadas las presentes circunstancias es seguir caracterizando a los conjuntos de Cantor simplemente como aquello que admite un conteo.

Lo que sí es bastante claro es que las nociones de número cardinal y ordinal juegan un papel central en su teoría de conjuntos. También es claro que los cardinales son un caso límite en la escala de la abstracción. El caso límite donde los objetos colectados se reducen colecciones de objetos sin propiedades de alguna clase. En suma es claro que el concepto de número en general constituye el eje central de la teoría de conjuntos cantoriana. Con esto en mente un buen punto de partida para una comparación de otras concepciones de conjunto que nos permitan entender mejor la noción cantoriana será el concepto de *número*. Dado que los conceptos de número cardinal y ordinal son generalizaciones del concepto de número natural, sería bueno analizar cómo estas ideas son formalizadas en ETCS y ZFC y ver qué diferencias tienen. Ya que el mismo Cantor ponía en el centro de la teoría de los conjuntos a los ordinales y ya que los cardinales se pueden definir en función de estos la exposición de los siguientes capítulos se centrara también en los ordinales. Para llevar a cabo tal tarea será necesario introducir formalmente el sistema ETCS. Esa es la tarea central del siguiente apartado.

[40] Cantor, *Fundamentos para una teoría general de los conjunto*, 1.

Capítulo 3

Teoría elemental de los conjuntos categórica ETCS

Resumen del capítulo: En este capítulo se introducen los axiomas de la teoría de categorías, se brindan algunos ejemplos básicos de categorías concretas. Después se define la noción de topos elemental y se explica por qué la categoría de los conjuntos y las funciones es uno. Por último se exponen los axiomas de la Teoría elemental de los conjuntos categórica (ETCS).

3.1. Axiomas de la Teoría de Categorías y algunos ejemplos de categorías

En la matemática contemporánea es usual estudiar las propiedades de un objeto matemático recurriendo a las relaciones que dicho objeto guarda con otros. Estas relaciones suelen representarse en términos de funciones entre conjuntos. Sin embargo las relaciones funcionales no son el único medio por el cual los objetos matemáticos pueden relacionarse, y a su vez los conjuntos no son los únicos objetos matemáticos relacionados de algún modo. La perspectiva anterior supone que el universo de los objetos estudiados por la matemática no se compone de objetos reducibles a un mismo tipo de entidad más simple, sino de objetos variados que se relacionan de formas particulares con otros de su tipo o de alguna otra naturaleza. En este modo de ver las matemáticas lo relevante no es tanto quiénes son los objetos últimos que componen el vasto universo matemático, sino las formas en que los objetos del mundo interactúan entre sí. La Teoría de Categorías es una teoría matemática que sigue esta línea de pensamiento, y puede verse por tanto como la teoría que estudia las propiedades de los objetos matemáticos a través de su comportamiento relacional; en tal sentido puede verse como una especie de etología de las matemáticas.[1]

3.1.1. Axiomas

Dado que el énfasis en la Teoría de Categorías no está en la naturaleza de los objetos sino en la forma en que se relacionan, es importante hacer la observación de que los axiomas de la Teoría de Categorías no nos dicen nada acerca de qué es una categoría, simplemente nos brindan una lista de requisitos que una clase de objetos y otra de flechas deben cumplir para poder ser considerados una categoría. Con esto dicho veamos lo axiomas.

Una categoría tiene *objetos* A, B, C, ... y *flechas* o *morfismos* f, g, h ... Cada flecha va de un objeto a otro objeto. Para decir que g va de A hacia B escribimos $g : A \longrightarrow B$, o decimos que A es el *dominio* de g, y b el $codominio$. Podemos escribir también $Dom(g) = A$ y $Cod(g) = B$.

Dos flechas f y g con $Dom(f) = Cod(g)$ se llaman *componibles*. Si f y g lo son, entonces deben tener una *composición*, es decir, una flecha llamada $f \circ g$.

Para cada objeto A existe un *morfismo identidad*, el cual tiene dominio A y codominio A. Dicho morfismo se denota 1_A.

La anterior información está sujeta además a las siguientes reglas:

Leyes de identidad: Si $f : A \longrightarrow B$ entonces $1_B \circ f = f$ y $f \circ 1_A = f$.

Ley de asociatividad: Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Esta información también puede ser expresada a través de *diagramas conmutativos*.

Podemos representar la composición de dos morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$, mediante el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Las leyes de identidad por su parte quedan representadas así:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "1_B"] & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$1_B \circ f = f$

[1]Es de resaltar que hablo aquí de la perspectiva categorista. Un fisiólogo y un etólogo pueden compartir su objeto de estudio y no es claro que en tal caso uno hable con más o menos verdad que el otro, incluso en los puntos en que disientan. Sin duda habrá puntos en cada parte que sean invisibles desde el otro lado.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[u, "1_A"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$f \circ 1_A = f$

Por último la asociatividad quedaría representada como:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h\circ g"] \arrow[dr, "g"] & C \\ D \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g\circ f"'] & B \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Notemos que si tomamos a los conjuntos como objetos y las funciones totales entre conjuntos como las flechas, podemos definir la composición de morfismos como la composición de funciones entre conjuntos. A su vez, podemos definir el morfismo identidad como la función identidad para cada conjunto. Por tanto los conjuntos y las funciones totales entre conjuntos forman una categoría. Esta categoría se conoce como **Set** y aunque, como se indicó antes, no es la única categoría existente sí es la categoría en la que se centra este trabajo. La idea es estudiar a los conjuntos, no por sus elementos, sino por sus relaciones con otros conjuntos.

Algunos otros ejemplos de categorías son:

- **Ord.-** La categoría conjuntos pre-ordenados como objetos y funciones monótonas como morfismos.

- **Preordenes.-** Un preorden concreto puede verse también como una categoría. Basta con considerar a los miembros del conjunto preordenado como los objetos y a los morfismos como pares ordenados de objetos (c, d) tales que c antecede en el orden a d (Note que los morfismos no necesariamente deben ser funciones). La composición se puede definir como $(d, e) \circ (c, d) = (c, e)$. La identidad como $1_c = (c, c)$.

- **Bool.-** Esta categoría tiene como objetos a las álgebras booleanas y como flechas, mapeos que preservan dicha estructura.

- **Teorías formales** Suponga que T es una teoría formal. Podemos entonces tomar a las sentencias del lenguaje formal de T como los objetos de una categoría, y definir las flechas de nuestra categoría como derivaciones formales. Es decir $d : \alpha \to \beta$ si y sólo si $\alpha \vdash \beta$.

Como se puede ver el concepto de categoría es lo suficientemente general como para admitir una gran diversidad de instancias.

La categoría Set y el concepto de Topos Elemental

La categoría **Set** es una categoría bastante relevante dentro de la TC por varias razones. Una de ellas es que suele ser uno de los ejemplos básicos de categoría. Pero otra razón más importante es que se considera el paradigma de un tipo de categoría llamada topos. El concepto de topos está profundamente relacionado con discusiones relativas a la lógica, teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas. A través del concepto de topos se pueden generalizar ciertas construcciones relevantes en **Set** a otras categorías. A continuación veremos esas construcciones, pero antes introduciremos algunos conceptos que serán de utilidad para entenderlas, así como otros conceptos relacionados.

3.1.2. Algunos conceptos relevantes

Epimorfimo y monomorfismo

Una flecha $f : C \to D$ en una categoría φ es un *monomorfismo* si y sólo si es cancelable por la izquierda. Es decir: para cada par de morfismos $h, g : B \to C$, si $f \circ g = f \circ h$ entonces $h = g$.
Una flecha $f : C \to D$ en una categoría φ es un *epimorfismo* si y sólo si es cancelable por la derecha. Es decir: para cada par de morfismos $h, g : D \to E$, si $g \circ f = h \circ f$ entonces $h = g$.

Inversos

Dada una flecha $f : C \to D$ en una categoría φ,

$g : D \to C$ es un **inverso derecho** de f si y sólo si $f \circ g = 1_D$.
$g : D \to C$ es un **inverso izquierdo** de f si y sólo si $g \circ f = 1_C$.
$g : D \to C$ es un **inverso** de f si y sólo si es tanto un inverso derecho como izquierdo de f.

Isomorfismo

Un *isomorfismo* en una categoría φ es un morfismo que tiene un inverso.

Objetos isomorfos.- Si existe un isomorfismo $f : C \to D$ en φ entonces se dice que los objetos C y D son **isomorfos** en φ, y se denota $C \cong D$.

En **Set** los monomorfismos son las funciones inyectivas, y los epimorfismos las suprayectivas. Como es de esperar los isomorfismos son las funciones biyectivas.

Producto fibrado

Un *Producto fibrado* de dos flechas con codominios iguales, digamos $f : A \to C$ y $g : B \to C$, consiste de un objeto P y dos flechas $P_1 : P \to A$ y $P_2 : P \to B$ con la siguiente propiedad, $f \circ P_1 = g \circ P_2$ y, para cada T y $h : T \to A$ y $k : T \to B$, si $f \circ h = g \circ K$, existe una unica u con $p_1 \circ u = h$ y $p_2 \circ u = k$.

Elementos generalizados

Un *elemento generalizado* o *sombra* S de X en φ es un morfismo $e : S \to X$.

3.1.3. Construcciones relevantes en Set

Objetos iniciales

Un *objeto inicial* en una categoría C es un C-objeto tal que, para cada C-objeto A, existe una y sólo una C-flecha de 0 a A.

En **Set** tenemos que el objeto inicial es el conjunto vacío $\emptyset$.

Objetos terminales

Un *objeto terminal* en una categoría C es un C-objeto 1 tal que, dado cualquier otro C-objeto A, existe una y sólo una C-flecha de A hacia 1.

En **Set** el objeto terminal es cualquier conjunto unitario $\{*\}$, ya que dado cualquier otro elemento $A \in$ **Set** existe una y sólo una flecha $A \to \{*\}$.

Elemento de un objeto

Con lo anterior podemos definir la noción de *elemento*.

Dada una categoría C, con objeto terminal 1, un *elemento* de un C-objeto B es una C-flecha $x : 1 \to B$.

Productos

En una categoría C, un producto (binario) $[O, p_1, p_2]$ de C-objetos X y Y es un C-objeto O junto con flechas proyección $p_1 : O \to X$, $p_2 : O \to Y$, tal que, para cada objeto S y flechas $f_1 : S \to X$ y

$f_2 : S \to Y$ existe siempre una única flecha $u : S \to O$ tal que, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & O \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "p_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

En **Set** el producto binario existe y es el producto usual de conjuntos no vacíos junto con sus proyecciones canónicas.

En efecto, sean A y B conjuntos no vacíos, $A \times B$ su producto cartesiano y p_1, p_2 las proyecciones canónicas requeridas. Probaremos que $A \times B$ satisface la propiedad universal requerida.

Sea X un conjunto y sean $f_1 : X \to A$ y $f_2 : X \to B$ funciones. Definimos la función $g : X \to A \times B$ por medio de la regla $g(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para cada $x \in X$. Vemos que:

$(p_1 \circ g)(x) = p_1(g(x)) = p_1(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x)$ y

$(p_2 \circ g)(x) = p_2(g(x)) = p_2(f_1(x), f_2(x)) = f_2(x)$.

Veamos ahora que g es única. Supongamos que $h : X \to A \times B$ es otra función con $p_1 \circ h = f_1$ y $p_1 \circ h = f_2$. Sea $x \in X$, entonces $h(x)$ es un elemento (a, b) $A \times B$, para algún $a \in A$ y $b \in B$. Entonces:

$f_1(x) = (p_1 \circ h)(x) = p_1(h(x)) = p_1((a, b)) = a$, y

$f_2(x) = (p_2 \circ h)(x) = p_2(h(x)) = p_2((a, b)) = b$.

Así $h(x) = (a, b) = (f_1(x), f_2(x)) = g(x)$ para cada x en X, y $h = g$.

Coproductos

En una categoría C, un co-producto (binario) $[O, t_1, t_2]$ de C-objetos X y Y es un C-objeto O junto con flechas inyección $t_1 : X \to O$, $t_2 : Y \to O$, tal que, para cada objeto S y flechas $f_1 : X \to S$ y $f_2 : Y \to S$ existe siempre una única flecha $u : O \to S$ tal que, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & S & \\ X \arrow[ur, "f_1"'] \arrow[r, "t_1"'] & O \arrow[u, dashed, "u"'] & Y \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "t_2"'] \end{tikzcd}$$

En **Set** el co-producto existe y se trata de la unión disyunta $X \sqcup Y = \{(x, j) \in (X \cup Y) \times \{0, 1\} | x \in X \Leftrightarrow j = 0, x \in Y \Leftrightarrow j = 1\}$ de conjuntos no vacíos.

En efecto, sean X y Y conjuntos no vacíos, $X \sqcup Y$ su unión disjunta y t_X, t_Y funciones definidas por:

$t_X : X \to X \sqcup Y$
$x \mapsto (x, 0)$

$t_Y : Y \to X \sqcup Y$
$y \mapsto (y, 1).$

Probaremos que $X \sqcup Y$ satisface la propiedad requerida.

Sea S un conjunto y sean $f_1 : X \to S$, $f_2 : X \to S$ funciones.Definimos $u : X \sqcup Y \to S$ por medio de la regla:

$$u(x, j) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad j = 0 \\ f_2(x) & si \quad j = 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que, si existe $h : X \sqcup Y \to S$ con $h \circ t_X = f_1$ y $h \circ t_2 = f_2$, entonces para cada $(x, j) \in X \sqcup Y$, tenemos que $h(x, j) = u(x, j)$.

Igualadores

Una flecha $e : E \to A$ en C es un *igualador* de un par paralelo de C-flechas $f, g : A \to B$ si y sólo si:

- $f \circ e = g \circ e$, y
- Si $h : T \to A$ tal que $f \circ h = g \circ h$ en C existe exactamente una C-flecha $u : T \to E$ tal que $e \circ u = h$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

En **Set**, dadas funciones $f, g : A \to B$, su ecualizador es la inclusión en A:

$e : \{x \in A | f(x) = g(x)\} = E \hookrightarrow A.$

Sea $x \in E$, así $f(x) = g(x)$ vemos que:

$(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$, y

$(g \circ e)(x) = g(e(x)) = g(x)$.

Por tanto $(f \circ e)(x) = (g \circ e)(x)$.

Por otro lado. Sea $h : T \to A$ una función tal que $g \circ h = f \circ h$.

Veamos que existe $u : T \to E$ tal que $e \circ u = h$. Notemos que por hipótesis:

$(g \circ h)(t) = (f \circ h)(t)$

Por tanto:

$g(h(t)) = f(h(t))$, así cada $h(t) \in A$ es un elemento de E. Y por tanto podemos definir $u : T \to E$ simplemente como $u(x) = h(t)$. Así vemos que:

$(e \circ u)(x) = e(u(x)) = u(x) = h(x)$.

Coigualador

Sea C una categoría y $f : X \to Y$, $g : X \longrightarrow Y$ un par de flechas paralelas en C. Entonces el objeto C y la flecha $c : Y \to S$ forma un *coigualador* en C de dichas flechas si y sólo si, $c \circ f = c \circ g$, y para cada flecha $k : Y \to S$ con $k \circ f = k \circ g$, existe una única flecha $u : C \to S$ tal que $u \circ c = k$. Es decir, existe un flecha que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & S \\
X \arrow[r, "g", "f"'] & Y \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "c"'] & C \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

En **Set** podemos construir el coigualador de un par paralelo de flechas f, g con codominio B mediante el conjunto cociente de las particiones generadas por la relación de equivalencia $f(x) = g(s)$ para cada x en el dominio de f y g. En tal situación la proyección canónica $c : B \to B/R$ definida por la regla $f(x) = [x]$, es un coigualador en **Set** de f y g.

Exponencial

Dados objetos A y B, un *exponencial de* B por A consiste de un objeto I y una flecha $e : I \times A \to B$ con la siguiente propiedad. Para un objeto C y una flecha $g : C \times A \to B$ existe una única flecha

$z : C \to I$ que hace al siguiente triangulo conmutar:

$$\begin{tikzcd} I & I \times A \arrow[r, "e"'] & B \\ C \arrow[u, "z"'] & C \times A \arrow[u, "z\times A"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

En **Set** la función evaluación $eval : C^B \times B \to C$ definida por $eval(g,b) = g(b)$, cumple el papel del exponencial.

Clasificador de subobjetos

Un *clasificador de sub-objetos* en una categoría G es un objeto ω y un *elemento global* $t : 1 \to \omega$ tal que para cada flecha mono $s : S \rightarrowtail A$ existe una única flecha $X_A : A \to \omega$ tal que el siguiente diagrama es un pullback:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r] & \omega \end{tikzcd}$$

La flecha X_S es llamada la *flecha clasificadora* o *caracter* de s.

En *Set* el objeto ω es el conjunto 2.

3.1.4. Topos

Las anteriores construcciones son típicas aunque no exclusivas, de la cateogría de conjuntos. Una categoría en la que éstas se presenten se llama *topos elemental*. Es decir, un *topos* es una categoría con:

- Objeto terminal,
- Objeto inicial,
- Productos binarios,
- Coproductos binarios,
- Igualadores,
- Coigualadores,
- Exponenciales,
- Clasificador de subobjetos.

Las anotaciones del apartado anterior evidencian que **Set** es un topos.

3.2. Axiomas de ETCS

La Teoría elemental de los conjuntos categórica (ETCS) es una teoría de conjuntos alternativa a ZFC, desarrollada por William Lawvere. Esta teoría pretende rescatar los conceptos clásicos de la Teoría de Conjuntos en un contexto categórico. Para esto es necesario tomar el hecho de que los conjuntos y las funciones entre ellos forman una categoría como un axioma, también es necesario asumir como axioma que tal categoría es un topos.

Esto nos da como resultado no sólo un mero mecanismo técnico de traducción entre teorías, sino que tiene implicaciones relevantes en la manera en que se entenderán dichos conceptos clásicos en cada teoría. Una de las diferencias más relevantes será la relativa a la relación de pertenencia, $\in$, en ZFC dicha relación es primitiva y global. Es decir, dados dos conjuntos arbitrarios tiene sentido preguntarse si un conjunto, en general, es miembro de otro. En cambio en ETCS la relación no es ni primitiva ni global. Es posible definir el concepto de la siguiente manera:

Definición.- El elemento (generalizado) a de A es un miembro de una parte i de A (Es decir, i es un monomorfismo con codominio A), denotado $a \in_A i$, si y sólo si, existe un morfismo b, tal que $a = i \circ b$.

Como puede verse claramente en la definición la pertenencia sólo tiene sentido en relación a un conjunto previo A y una parte del mismo. Es decir, la relación de pertenencia sólo tiene sentido bajo el contexto de un universo de discurso local A. De manera análoga la relación de inclusión, $\subseteq$, se define sólo de manera local para partes de un universo de discurso A.

Definición.- La parte i de A está incluida en la parte j de A, denotado $i \subseteq_A j$, si y sólo si, existe un morfismo b, tal que $i = j \circ k$.

Así en ETCS la pertenencia y los conceptos relacionados con ella tienen sentido sólo en contextos locales determinados por conjuntos dados de antemano. El mismo carácter contextual se puede encontrar, dentro ETCS, en el resto de conceptos conjuntistas que guardan alguna clase de relación con el concepto de pertenencia (la unión, por ejemplo, se define para partes de un conjunto dado A como el producto fibrado de las mismas). En tal sentido la diferencia entre relaciones de pertenencia entre ETCS Y ZFC se traduce a un marcado compromiso con el contexto por parte de la primera teoría. Esta diferencia aparentemente insignificante tendrá consecuencias serias en la forma en que se comprenden los conceptos básicos de la matemática en cada teoría. Más adelante se profundizará en algunas diferencias entre la ETCS y ZFC, por ahora baste con lo dicho al respecto.

Regresando a los aspectos formales de ETCS hemos dicho que tal teoría tiene como axioma que los conjuntos y las funciones son una categoría y que tal categoría es un topos. Sin embargo estos axiomas no son suficientes para caracterizar nuestras nociones intuitivas sobre los conjuntos, piense por ejemplo en el axioma de elección. Es necesario por tanto agregar a los axiomas mencionados los siguientes:

- **Axioma de no degeneración.-** No es el caso que $0 \cong 1$ (0 no es un objeto isomorfo a 1);
- **Axioma de buena puntuación.-** 1 es un separador. Es decir, si $f_1, f_2 : X \to Y$ entonces, $f_1 x = f_2 x \Rightarrow f_1 = f_2$ para todo $x : 1 \to X$;
- **Axioma de elección.-** Si $f : A \to B$ es epimorfismo, entonces existe una $g : B \to A$ para la cual $f \circ g = 1_B$;
- **Axioma del objeto de números naturales.-** La categoría de los conjuntos y las funciones tiene un objeto de números naturales.

En la siguiente sección se definirá exactamente lo que es un objeto de números naturales, pues este juega un lugar central en la misma.

Recapitulando: hemos visto el concepto general de categoría; posteriormente definimos la noción de Topos Elemental; con ello caracterizamos la categoría **Set** como un Topos Elemental; entonces presentamos los axiomas de ETCS y hablamos sobre algunas pequeñas diferencias entre ETCS Y ZFC en lo que respecta a la relación de pertenencia; por último concluimos que los axiomas de ETCS simplemente afirman que los conjuntos y las funciones entre ellos forman una topos bien punteado, no degenerado, con elección y objeto de números naturales.

En el siguiente capítulo se presentarán los tratamientos que ETCS y ZFC hacen de los números naturales y algunas reflexiones filosóficas al respecto.

Capítulo 4

El concepto de número natural en ZFC y ETCS

Resumen del capítulo: En este capítulo se explica cómo se introducen formalmente los números naturales en ZFC, y cómo esta construcción identifica a cada número natural con un conjunto concreto. Posteriormente se explica el problema filosófico que esta identificación genera (existen múltiples objetos idénticos que pueden cumplir el papel de número natural, es decir que son indiferenciables en cuanto a sus propiedades aritméticas, y a la vez son diferentes ontológicamente hablando). Por último se introduce el concepto de objeto de números naturales y se explica cómo gracias a dicho concepto la ETCS puede solucionar el problema.

4.1. Sistemas de Peano

El sistema axiomático de los números naturales de Peano es una de las formalizaciones más comunes de dichos números, y como toda reconstrucción axiomática se centra en caracterizar la noción de número natural no por medio de definiciones predicativas sino por medio de las *reglas del juego* que determinan el comportamiento de dichos números. Es decir, en las visiones axiomáticas lo central no es explicar la naturaleza de los objetos matemáticos que forman parte de la teoría, sino dejar en claro las propiedades y relaciones relevantes fundamentales de los objetos a estudiar.

En concreto los Axiomas de Peano no tienen nada que decir respecto a la pregunta *¿qué son los números naturales?*, más bien parten del supuesto de que estos objetos existen o son relevantes en alguna forma para la matemática, y pretende encontrar un sistema simple de reglas que los caractericen y de las cuales se pueden deducir todas sus propiedades relevantes, usando sólo las reglas del sistema y de la lógica.[1] Esto es análogo a lo que ocurre en ZFC en dónde no se define explicablemente qué es un conjunto, más bien se deja en claro qué reglas los gobiernan. Es importante notar que aunque esto ocurre en dicha teoría respecto del concepto de conjunto, no ocurre así con el concepto de número natural.[2] Como se verá en el siguiente apartado en ZFC es posible definir explícitamente objetos que cumplan el rol de los números naturales. Estos números, por supuesto, deben ser capaces de recuperar las propiedades características de los números que la axiomática de Peano propone. Veamos entonces qué reglas en concreto caracterizan a los números según la axiomática de Peano.

Axiomas

Nota: se usaran los términos *número natural*, *cero* y *sucesor*, como primitivos [3] .

- 0 es un número natural.
- El sucesor de un número natural n es un número natural $s(n)$.
- 0 no es el sucesor de algún número.
- Dos números naturales diferentes no tienen nunca el mismo sucesor. En otras palabras si $s(n) = s(k)$ entonces $n = k$.
- Si P es una propiedad tal que: 0 tiene la propiedad P; Siempre que un número n tiene la propiedad P implica que su sucesor $s(n)$ también tiene la propiedad P; entonces todo número natural tiene la propiedad P. [4]

[1] Parte de lo que se hará es dar una caracterización de la "estructura" de los números naturales como omega secuencias.

[2] Sin embargo ZFC admite muchos modelos para los conjuntos y no hay acuerdo respecto a la existencia de uno que sea "el modelo" de la Teoría de Conjuntos. Además objetos de gran relevancia como los ordinales o cardinales pueden ser igualmente reconstruidos de múltiples formas.

[3] Estos cinco axiomas son una reconstrucción contemporánea de los nueve axiomas que originalmente planteó Peano. El motivo de su uso es facilitar la exposición.

[4] Nótese que se recurre a la noción de propiedad P, que puede llegar a ser un tanto ambigua. No es claro qué cosas deberían contar como propiedades para los números naturales. Normalmente esta ambigüedad desaparece cuando se recurre a la noción de definición formal. En dicha noción se usan fórmulas con variables abiertas que definirían conjuntos de objetos o colecciones. Se pondrá entonces en primer plano de relevancia el lenguaje que se usará. Si se usa lógica de primer orden, entonces se puede definir a una propiedad como o a partir de una fórmula de lenguaje de la aritmética expresada en primer orden con x como una variable libre, la cual definiría a la colección de los objetos que satisfacen dicha fórmula. El problema con recurrir a la lógica de primer orden es que ninguna teoría expresada en su lenguaje es categórica, no caracteriza a ninguna estructura en particular, además de que limita la noción de propiedad a aquellas que son definibles en el lenguaje de la aritmética de primer orden. Una posible solución es recurrir a la lógica de segundo

De estos axiomas es posible deducir la aritmética de los naturales conocida (la operación de suma se introduce como una definición). Sin embargo, como se dijo arriba, no se dice nada aquí sobre una colección a la cual pertenezcan estos números. Así que en teoría cualquier colección que satisfaga estos axiomas puede servir como un representante de los naturales. Con algunas modificaciones sencillas es fácil adaptar los axiomas anteriores al lenguaje conjuntista de la siguiente manera:

Definimos un sistema de Peano como una terna $\langle N, \sigma, 0\rangle$, donde N es un conjunto, 0 un elemento distinguido de N, y σ una función, tal que:

- σ es inyectiva.
- 0 no pertenece al recorrido de σ.
- Si un subconjunto $S \subseteq N$ satisface: $0 \in S$; para cada $n \in N$, si $n \in S$ entonces $\sigma(n) \in S$; entonces $S = N$. [5]

Un conjunto que cumpla estos requisitos será un modelo adecuado de los números naturales, y tras definir las operaciones básicas, podrá expresarse la aritmética básica de los naturales sobre tal conjunto sin mayor problema. Sin embargo la existencia de un conjunto tal en ZFC requiere de un axioma, conocido como el axioma del infinito. Veamos esto con mayor detalle.

4.2. Los números naturales en ZFC

En este apartado elaboraré un esbozo general de cómo los conceptos de *número natural* y conjunto de números naturales N son recuperados dentro de la axiomática de ZFC. Pero antes esbozaremos algunas ideas intuitivas sobre los números naturales.

Recordando que en ZFC el conjunto que predica el axioma de existencia es único, se le llama conjunto vacío y suele denotarse como $\emptyset$, podemos usarlo como la base de una construcción que recupere a los números naturales. La construcción procede de la siguiente manera: definiremos al número 0 como el conjunto vacío, es decir $0 = \emptyset$. Podríamos entonces definir el resto de los números de la siguiente forma:

$1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$,$3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, etc.

A partir de esta construcción podemos extraer algunas propiedades generales que nos sirvan para dar una definición formal de número natural. Si ponemos atención en cómo se definió el número cuatro podemos notar que los números 1,2,3 son elementos de su conjunto potencia a la vez que

orden, pero el costo consiste en aceptar un sistema que no tiene teorema de compleción.

[5] No hay problema respecto a la categoricidad porque se usara no sólo lógica sino conjuntos.

suyos. Cuando un conjunto posee este propiedad se le llama conjunto transitivo. Más claramente tenemos lo siguiente:

Definición.- Un conjunto x es *transitivo* si para todo $y \in x$, $y \subseteq x$.

Podemos también ver en nuestro esbozo que un número natural n es en algún sentido el conjunto de todos los números más pequeños que n. En otras palabras, m es más pequeño que n si y sólo si $m \in n$, así la relación $\in_n = \{(a,b) | a \in n, b \in n, a \in b\}$, conocida como la pertenencia restringida al conjunto n, debería ser un orden lineal estricto en x.

Por último podemos notar que el orden lineal mencionado posee la propiedad siguiente: Si Y es un subconjunto no vacío de n, intuitivamente podríamos tomar uno a uno los elementos de n y verificar si también son elementos de Y, de esta manera podríamos hallar el máximo y mínimo de X. En otras palabras, para todo subcojunto no vacío de números naturales existe un mínimo y un máximo. Recordemos que:

Sea $\leq$ un orden en A, y sea $B \subseteq A$.

$b \in B$ es el *elemento mínimo* de B en el orden $\leq$, si para todo $x \in B$, $b \leq x$.

$b \in B$ es el *elemento máximo* B en el orden $\leq$, si para todo $x \in B$, $x \leq b$.

Recapitulado estas observaciones podemos definir la noción de *número natural*:

Definición.- Un conjunto x es un *número natural* si: (1) x es transitivo; (2) $\in_x$ es un orden lineal estricto en x; (3) todo subconjunto no vacío de x tiene elemento mínimo y máximo en el orden $\in_x$. [6]

Notemos que el conjunto vacío cumple vacuamente con ser un natural.

Aunque esta definición caracteriza en términos generales lo que es un número natural x no nos permite por sí misma generar un conjunto que colecte a todos los números que son naturales. Si queremos caracterizar al conjunto N debemos de encontrar la forma de reunir a todos los números que cumplen con ser un natural en un sólo conjunto. Para lograr esto se requiere del *axioma del infinito* y del concepto de *conjunto inductivo*.

Definición.- Definimos al conjunto *sucesor* de x como el conjunto $x \cup \{x\}$, lo denotamos como $s(x)$.

Definición.- Un conjunto A es *inductivo* si y sólo si $\emptyset \in A$ y siempre que $x \in A$, se tiene que $s(x) \in A$.

Ahora cobra sentido el axioma del infinito.

Axioma.-Existe un conjunto inductivo.

Regresando a nuestra imagen intuitiva es claro que reiterando la operación sucesor sobre el 0 podemos obtener cualquier número natural. En otras palabras, si un conjunto A contiene al conjunto

[6]Una primera crítica que se le podría hacer a esta caracterización es que no es del todo claro qué papel jugaría el hecho de la transitividad de los números naturales respecto a la aritmética, no parece aportar algo en este sentido. Esto podría implicar que esta reconstrucción supone ciertas propiedades superfluas en los números naturales.

0 y al sucesor de cada uno de sus elementos, entonces dicho conjunto contiene a todos los naturales. Esta imagen intuitiva es de hecho cierta. En ZFC es posible demostrar el siguiente teorema:

Teorema.- Todo conjunto inductivo contiene a todos los números naturales.

Este resultado implica que si pudiéramos separar de un conjunto inductivo dado aquellos elementos que cumplen con ser natural podríamos recuperar el conjunto N. Afortunadamente esto es posible en ZFC gracias a su esquema axiomático de separación. La idea intuitiva de dicho esquema es que dado cualquier conjunto, es posible tomar de éste sólo los elementos que cumplan con una propiedad dada y construir un nuevo conjunto con ellos. Así podemos tomar el conjunto inductivo proporcionado por el axioma del infinito I, y aplicarle el esquema de separación con la propiedad *ser natural* y así definir N como:

$N = \{x | x \text{ es un número natural }\} = \{x \in I | x \text{ es un número natural }\}$.

Queda así determinado el conjunto de los números naturales. Además, bajo la definición de número natural que hemos dado, es un teorema en ZFC que: 0 es un natural; el sucesor $s(n)$ de un número natural n es un natural; la función $s(n) : N \to N$ que toma un número natural y lo manda a su sucesor es inyectiva. Aunado a esto se cumple el siguiente teorema:

Teorema de Inducción.- Sea $P(x)$ una propiedad. Si $P(0)$ y $P(n) \Rightarrow P(s(n))$ para cada $n \in N$, entonces $P(n)$ para todo número natural n.

Con estos resultados es claro que el conjunto N construido cumple los axiomas de Peano. Es decir el conjunto N, su elemento $0 \in N$ y la función sucesor $s(n) : N \to N$ son un sistema de Peano. Por tanto la aritmética usual podrá reconstruirse sobre el conjunto N, para ello simplemente hay que definir las operaciones usuales. Esto se hace mediante el siguiente teorema de ZFC:

Teorema de recursión Para cualquier conjunto A, cualquier $a \in A$, y cualquier función $g : A \times N \to A$. existe una única función $f : N \to A$ tal que:

- $f(0) = a$,
- $f(S(n)) = g(f(n), n)$, para cada $n \in N$.

Gracias al anterior teorema es posible construir una única operación binaria *adición* $+ : N \times N \to N$ que cumple con lo siguiente: (a) $0 + m = m$ para cada $m \in N$; (b) $s(m) + n = s(m + n)$ para cada $m, n \in N$. Esto de la siguiente forma:

Sea un elemento distinguido $n \in N$. Definimos la función $g : N \times N \to N$ por la regla $g(x, y) = s(y)$. Entonces por el teorema de recursión, existe una función $f_n : N \to N$ tal que $f_n(0) = n$ y $f_n(s(m)) = g(m, f_n(m)) = s(f_n(m))$. Ahora podemos definir $f : N \times N \to N$ por la regla $f(m, n) = f_n(m)$, que cumple con lo requerido y además se puede probar que es única. La multiplicación se construye de manera análoga.

Cabe hacer notar aquí que tal como hemos definido al 0 ($0 = \emptyset$), y al sucesor $x \cup \{x\}$, la secuencia de números naturales se conforma por los siguientes conjuntos:

$\emptyset$,$\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$, ...

En tal sentido hay una respuesta concreta a la pregunta *¿Qué conjunto es el número 3?* (la respuesta sería $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$). En otras palabras, existe una definición explícita de cada uno de los números naturales en ZFC, que identifica a los números con objetos matemáticos concretos (aquellos listados arriba). Sin embargo nada impide la existencia un conjunto que, acompañado de una función sucesor adecuada y un elemento distinguido, conforme también un sistema de Peano. Así pudimos haber definido el sucesor de un número natural simplemente como el conjunto unitario de dicho número, entonces tendríamos la siguiente secuencia:

$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, ...

Dicha función sucesor definida en N con $0 \in N$ como elemento distinguido conformaría también un sistema de Peano. Ya que el sistema en ZFC $\langle N, 0, \sigma \rangle$ es isomorfo a cualquier otro sistema de Peano dado, es decir, ya que existe una biyección entre el sistema de Peano $\langle N, 0, \sigma \rangle$ y cualquier otro sistema de Peano, tenemos la garantía de que los números del nuevo sistema se comportaran como los naturales. Sin embargo dicho isomorfismo sólo establece que los objetos que cumplen el papel de los naturales en el sistema son análogos respecto a sus propiedades aritméticas. Es decir, la mencionada biyección nos asegura igualdad en términos de propiedades meramente aritméticas, no así en ontología.

En la primera secuencia que formamos definimos el tres como $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, en la segunda como $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Sin embargo $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \neq \{\{\emptyset\}\} = 3$, en términos ontológicos nos topamos con la existencia de dos objetos que son el número 3. Notamos además que estos conjuntos poseen propiedades distintas, por ejemplo, bajo la primera secuencia el número $0 \in 3$, bajo la segunda secuencia el único elemento del 3 es $\{\emptyset\}$.

Por otro lado estos números ontológicamente distintos no son diferenciables en términos de su comportamiento meramente aritmético: Supongamos que tenemos un sistemas de Peano $Z = \langle U, *, \rho \rangle$ isomorfo a $E = \langle N, 0, \sigma \rangle$ mediante la biyeccíón f. Es teorema de la aritmética en E que $\sigma(n) \neq n$ para cada $n \in N$, la biyección nos asegura que Z comparte esta propiedad. Sea $x \in U$, notamos que

$f(x) \in N$ y $\sigma(f(x)) \neq f(x)$, así $f^{-1}(\sigma(f(x))) \neq f^{-1}(f(x))$. Por tanto $\rho(x) \neq x$. Es decir, es teorema de la aritmética en Z que $\rho(x) \neq x$ para cada $x \in U$. Este es un ejemplo particular de cómo la biyección entre sistemas de Peano garantiza que las propiedades aritméticas se preserven entre ellos.

Ya que dichas propiedades aritméticas se preservan no hay diferencia en términos prácticos, meramente matemáticos, para preferir alguna de las dos secuencias posibles presentadas, o alguna otra análoga como el referente de nuestros números naturales. En otras palabras la respuesta a la pregunta *¿qué objeto es el número 3?* en ZFC admite varias respuestas concretas y no hay razones meramente matemáticas para preferir una respuesta sobre otra. En tal sentido identificar a los números con conjuntos concretos puede ser problemático desde el punto de vista filosófico. El problema de fondo aquí es que tenemos infinitas explicaciones (tantas como secuencias se puedan dar) del significado de los términos numéricos, cada una de las cuales es necesaria y suficiente para dar una explicación correcta desde el punto de vista matemáticos sobre la cuestión *¿qué es un número?*. Y las diferencias accidentales no afectan la corrección de tales explicaciones, como aquella relativa a si el 0 es elemento o no del 3.

Este problema de naturaleza filosófica fue hecho explícito por Benacerraf en su artículo de 1965 *Qué no podrían ser los números*. Hablaremos con más detalle de esto en el siguiente apartado.

4.3. El problema de la ontología de los números

En su artículo de 1965 *Qué no podrían ser los números*, Benacerraf explica que si se pretende dar una respuesta ontológica respecto a la naturaleza de los números, es decir si se pretende responder a la pregunta *¿Qué son los números?* fijando un referente de los términos numéricos[7] como se hace en ZFC, nos topamos ante un dilema:

a) O bien cualquier interpretación de los números como secuencias del tipo ejemplificado arriba es correcta.

b) O bien, en conjunto las explicaciones no son correctas. Es decir, “al menos una explicación contiene condiciones que no son necesarias y posiblemente no lograba abarcar condiciones adicionales que, tomadas junto con las restantes, constituirían un conjunto de condiciones suficientes”.[8]

[7]Por supuesto esto sólo es un problema si se asume la tradición fregeana que busca fijar referentes únicos a nombres propios y que asume que los numerales son nombres propios. Asunción que no es poco común en muchas tradiciones filosóficas. Sin embargo, si todo lo que se dice en la tesis es correcto, esto debería ser un indicativo de que hay que abanonar la discusión en estos términos y centrarse más en la práctica matemática.

[8]Benacerraf, *What numbers could not be*, 56.

Así, si descartamos el caso a) que identifica cada número con múltiples referentes con propiedades no relevantes diferentes entre sí, tenemos que al menos una de las explicaciones (o todas) es incorrecta, al contener condiciones que no son necesarias para caracterizar a los números. Benacerraf afirma entonces que de nuevo tenemos un dilema: o bien todas las condiciones que comparten las posibles explicaciones son necesarias para una completa y correcta explicación de los números, o bien algunas no lo son. Si asumimos lo primero, es decir si asumimos que las condiciones que comparten todas las explicaciones son necesarias, entonces la parte superflua se debe encontrar en aquello que no comparten. Así tenemos que "o bien una de las explicaciones que satisface las condiciones que hemos asumido como necesarias, pero que asigna un conjunto definido a cada número es la correcta, o ninguna lo es". En otras palabras: si existe de hecho una explicación correcta, esa explicación debería de ser capaz de decirnos qué conjuntos constituyen *de hecho* los números.

Es claro que si seguimos a Benacerraf y notamos el hecho que aquello que comparten todas las explicaciones posibles sobre la ontología de los números son las propiedades que los caracterizan como sistemas de Peano, es decir todas las propiedades matemáticas relevantes para establecer sobre tales secuencias una aritmética, entonces *lo superfluo* radica justo en los objetos que se han identificado como los naturales. Y cómo decidir sobre una u otra secuencia para representar a los números es irrelevante para la corrección matemática de la teoría, la decisión sobre la elección de una u otra secuencia como los objetos que *de hecho* son los naturales, no es una decisión decidible bajo argumentos estrictamente matemáticos.

Por tanto el asunto se reduce a: o bien dar argumentos extramatemáticos que justifiquen la elección de una secuencia particular sobre otra como los números, o bien aceptar que todas las explicaciones que equiparan números con conjuntos concretos, del tipo descrito arriba, están equivocadas. Por supuesto adoptar este último camino supone dar una explicación alternativa de la naturaleza de los números. No me interesa ni me ocuparé aquí de la primera salida, me centraré por completo en la segunda.

4.4. Los números naturales en ETCS

La respuesta al problema planteado arriba que planeo abordar es la dada por Colin McLarty en su artículo *Numbers Can Be Just What They Have To*. Como se adelantó en el apartado anterior McLarty niega que sea correcto identificar los números con conjuntos concretos y brinda una explicación alternativa de su naturaleza. Pero antes de pasar a explicar su respuesta es necesario definir algunas cuestiones técnicas.

Objeto de números naturales

En algunos topos, entre ellos **Set**, es posible dar una reconstrucción categórica del concepto de número natural. Esto mediante el concepto de *objeto de números naturales*. Antes de introducirlo formalmente será pertinente hacer algunas anotaciones.

Dado un conjunto X, un elemento distinguido a de X y un endomorfismo $f : X \to X$ (un endomorfismo es simplemente un morfismo con el mismo dominio y codominio), es posible generar una sucesión mediante múltiples aplicaciones de f a a, más en concreto es posible generar sucesiones de la forma:

$a, f(a), ff(a), fff(a), ffff(a)...$

Este tipo de secuencias pueden ser definidas en términos generales de la teoría de categorías mediante la siguiente definición.

Definición.- Si C es una categoría con objeto terminal, entonces $[X, i, f]$ es un *objeto secuencia* en C si X es un C-objeto, e $i : 1 \to X$ y $f : X \to X$ son C-flechas.

La anterior definición nos permite generar un nuevo tipo de categoría.

Cseq

Si C es una categoría con un objeto terminal, entonces la categoría derivada $Cseq$ tiene como objetos todos los objetos secuencia de C,$[X, i, f]$, y como flechas todas C-flechas u que hacen que el siguiente diagrama conmute en C:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "i"'] \arrow[dr, "j"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "u"'] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Notemos que, pensando que el anterior diagrama conmuta en **Set** tenemos que la mencionada u envía secuencias de la forma $f^n(i)$ a secuencias de la forma $g^n(j)$. Y dado que u es una función, elementos diferentes de la secuencia g provendrán de elementos diferentes de la secuencia f.

Pensemos ahora en el objeto inicial de la categoría derivada $Cseq$, este objeto se conoce como *objeto de números naturales*.

Si C es una categoría con un objeto terminal, entonces un *objeto de números naturales* en C es un objeto inicial de la categoría derivada $Cseq$. Más explícitamente un objeto de números naturales $[N, 0, s]$ comprende un objeto N y dos flechas $0 : 1 \to N$ y $s : N \to N$ tal que para cada objeto Y y flechas $j : 1 \to Y$ y $g : Y \to Y$ existe una única flecha u que hace al siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"'] \arrow[dr, "j"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"'] & N \arrow[d, "u"'] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Notemos que en **Set** basta con tomar el conjunto de los números naturales, la función sucesor y el conjunto 0. Bajo este panorama u sería simplemente una secuencia en el sentido usual conjuntista. Es decir, un mapeo con dominio en N. Sin embargo debe quedar claro que la caracterización que esta construcción hace de N no depende en nada de las propiedades del conjunto N de la teoría de los conjuntos.[9] Es posible postular la anterior construcción (el objeto de números naturales) como un axioma. Dicho axioma sería una especie de contraparte categórica de lo que en ZFC se conoce como el axioma del infinito. La construcción del objeto de números naturaleza caracteriza al conjunto N no por sus elementos sino por la propiedad universal de ser capaz de generar sucesiones que se comporten como los números deberían hacerlo.[10]

La propiedad universal de objeto de números naturales nos garantiza que los números naturales *admitan definiciones recursivas*. Así que la adicción y la multiplicación se pueden definir sin problemas por recursión, de manera análoga a ZFC. Es decir, mediante datos de recursión parametrizados $0 + m = m$, $s(n) + m = s(n + m)$ para la adición, y $0 \times m = 0$,$s(n) \times m = (n \times m) + m$, para la multiplicación.

Aunado a lo anterior McLarty nos hace notar que:

> [...] existe una función $f : N \longrightarrow 1 + 1$ definida por $f(0) = i_1$ y $f(s(n)) = i_2$. Ya que $i_1 \neq i_2$ [...] tenemos que 0 no es igual a $s(n)$ para cada n. Un poco de manipulación muestra que existe una función predecesor inmediata $h : N \to N$, definida por $h(0) = 0$ y $h(s(n)) = n$, y así [concluimos] que s es uno a uno [...] Incluso se muestra que cada subconjunto de N que incluya al 0 cerrado bajo sucesor es todo N. [11]

Es decir, nos hace notar que los axiomas de Peano se verifican para el objeto de números naturales. Así las sucesiones que dicho objeto determina son representantes adecuados de dichos números.

A diferencia de la construcción estandarizada en ZFC de los números, en la que estos se identifican con conjuntos, en la versión categórica los números no son conjuntos, son los elementos de N. Es decir, los números son cada una de las flechas que resultan de componer s con elemento distinguido 0 de N ciertas veces. En tal sentido el objeto de números naturales no representa a N mediante un objeto

[9] En este sentido determina a los números naturales como objetos meramente funcionales (estructurales).

[10] De ser esto correcto la reconstrucción categorista no soluciona en términos de referencias concretas.

[11] La prueba completa de inducción se puede encontrar en el texto original de McLarty

único, como sí lo hace ZFC, sino que admite a cualquier otro objeto que satisfaga la misma propiedad universal. Es fácil demostrar que el objeto de números naturales es único salvo isomorfismo, así que más que caracterizar a los números como entidades concretas los caracteriza en términos de aquello que los números hacen bien (admitir definiciones recursivas). Por tanto sólo tiene sentido hablar de los números naturales bajo los términos de esta estructura. Aunque podemos dar casos concretos de objetos que la cumplen, estos objetos sin embargo serán secuencias completamente determinadas por el objeto de números naturales. Es decir, están determinados por completo por sus relaciones funcionales con otras secuencias y no poseen estructura interna.[12] En otras palabras no poseen propiedades *superfluas* no relacionadas con la aritmética. Además el isomorfismo entre objetos de números naturales nos asegura que todas las instancias concretas de objetos de números naturales tienen exactamente las mismas propiedades. MaClarty lo explica como sigue:

> La teoría de conjuntos categóricos incluye progresiones, modelos de axiomas de Peano de segundo orden, generalmente llamados "objetos de números naturales". El plural se usa deliberadamente, ya que es probable que haya infinitos de ellos, todos isomorfos entre sí. El sorprendente contraste con ZFC es que todos estos objetos de números naturales tienen exactamente las mismas propiedades. No solo tienen las mismas propiedades demostrables, sino que, para cualquier propiedad en la teoría, se puede demostrar que si uno de ellos la tiene, todas las tienen. Cada una de estas progresiones tiene solo la estructura que todos tienen en común. De modo que la teoría de conjuntos categórica satisface las demandas que Benacerraf plantea a una explicación estructuralista de las matemáticas.[13]

Esta es la diferencia sustancial entre ZFC y la teoría de conjuntos categórica respecto a los números naturales. En **Set** los números se definen por medio de una propiedad universal entre conjuntos abstractos, así que no necesitan referir a ninguna clase de propiedad interna de los objetos involucrados para caracterizar a los números. De hecho el término de *conjunto abstracto* suele usarse en la teoría categórica de los conjuntos para denotar que los objetos a estudiar no poseen más propiedades *internas* que aquellas de ser elementos de un mismo conjunto[14], se podría decir que son como bolsas de puntos. A diferencia de ZFC en donde los conjuntos pueden tener como elementos a otros conjuntos (como hemos visto el conjunto N se puede caracterizar por medio de sus elementos como

[12]El isomorfismo asegura que las estructuras preservan lo relevante, pero no es claro que el isomorfismo asegure en sí identidad. Esto dependerá de una interpretación filosófica de qué significa que dos cosas sean equivalentes. Pero por ahora no es necesario ahondar en esto.

[13]McLarty, "Numbers Can Be Just What They Have To", 488.

[14]Es decir, dado un conjunto A sus elementos no poseen ninguna propiedad que no esté descrita en términos de las relaciones que A guarda con otros conjuntos salvo las de elementos de A.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$) en **Set** los elementos se definen como las funciones que van del objeto final al conjunto dado. En efecto, el *elemento* se define como la *función*, no como el conjunto unitario del que partiría en el caso de **Set**. Es importante resaltar eso, pues aunque el término *conjunto unitario* pueda hacer parecer que la definición de *elemento* está recurriendo en algún sentido a la naturaleza de los posibles miembros del conjunto unitario, esto es en realidad falso pues el objeto final se define en términos de una propiedad universal y dicha definición no hace alguna clase de referencia a algún tipo de miembro del objeto inicial. Por tanto el o los posibles miembros del conjunto unitario realmente no son relevantes para la caracterización del concepto de objeto final y de elemento.

La diferencia en este respecto con ZFC se extiende a toda la teoría categórica: al igual que con la noción de *elemento*, la noción categórica de parte, recordemos que una parte de A es cualquier mapeo con codominio A que sea un monomorfismo, no requiere en ningún momento de alguna clase de referencia a la naturaleza de los miembros internos de un conjunto dado, simplemente caracteriza a la parte de un conjunto dado como un morfismo de cierto tipo. Esto sucede también con el objeto de números naturales, no se hace ninguna clase de referencia a las propiedades que pudiesen tener los miembros de N (como la de ser conjuntos transitivos, o aún más, la propiedad, si lo es en algún sentido, de ser conjuntos) es irrelevante, pues el objeto de números naturales queda complemente determinado por su propiedad universal.

El contraste con ZFC es todavía más fuerte cuando recordamos su axioma de extensionalidad.[15] Este axioma determina a los conjuntos por medio de sus elementos. Dos conjuntos son iguales si comparten los mismos elementos. Esto hace imposible que dos conjuntos cuyos elementos son los de secuencias adecuadas para representar a los naturales distintas, digamos N y N' puedan ser indiscernibles a pesar de poseer las mismas propiedades relevantes para la aritmética. En **Set** se carece de un criterio de igualdad en este sentido. Internamente los elementos de los conjuntos abstractos no son diferenciables (aunque sí distinguibles)[16], a lo más se puede hablar de un isomorfismo respecto al

[15] La teoría de conjuntos tiene una visión fuertemente ontológica. La teoría de categorías, en cambio, tiene una visión más orientada a lo estructural, el isomorfismo hace superfluo un axioma como el de extensión. También hay que hacer notar que se están recuperando las intuiciones de Dedekind, en el sentido de que Dedekind buscaba caracterizar una omega secuencia, por lo que usó segundo orden. En este punto Dedekind es bastante cercano a ETCS pues se acercaba bastante a una reconstrucción estructural de los números que se puede defender apoyado en dicho sistema. No es este el lugar para una reconstrucción del pensamiento de Dedekind pero el lector interesado pude comenzar por leer su texto *What are numbers, and whatis their meaning?* de 1888.

[16] Piense por ejemplo en la primera secuencia de números naturales que describimos en el apartado anterior, los **elementos** de N son diferenciables en relación a sus propiedades, el 2 se diferencia del 3 en que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es elemento de 3 y no de 2. Cuando hablamos de conjuntos abstractos, por ejemplo A, no sabemos nada de las propiedades de sus elementos, que no esté descrito en términos de relaciones funcionales de A con otros conjuntos, así que no es posible diferenciar a sus miembros entre sí vía propiedades internas como en el ejemplo anterior del 2 y 3, sin embargo si es posible distinguirlos,

número de elementos, o equivalencia entre partes de un conjunto dado. Si bien tenemos como axioma en ETCS que el 1 separa, y esto es en algún sentido un axioma de extencionalidad, este axioma distingue entre puntos a través de funciones, por tanto las propiedades internas siguen sin ser relevantes para determinar la igualdad entre conjuntos en esta teoría.

Así que, retomando el tema del objeto de números naturales, los números en esta caracterización serán simples elementos de N, es decir **funciones** de 1 a N, note que: $0 : 1 \to N$, $s(0) : 1 \to N$, $s(s(0)) : 1 \to N$, ..., etc. Y estos elementos no poseeran más propiedades que las dadas por la propiedad universal del objeto de números naturales. Por ello el isomorfismo entre objetos de números naturales nos garantiza que cualesquiera objetos de números naturales tendrán exactamente las mismas propiedades (No hay más propiedades que aquellas determinadas por las relaciones funcionales). Así, al eliminar las referencias internas y al caracterizar el objeto de números naturales por medio de una propiedad universal, el problema de ontología que aquejaba a la teoría de conjuntos no representa ningún peligro para la reconstrucción categórica de los números naturales. El error de ZFC es equiparar conjuntos con números, pues lo relevante de los números no es qué cosas juegan en rol de números sino la manera en que ciertos objetos se relacionan por medio de una propiedad universal.

Recapitulado: se comenzó el capítulo explicando cómo se introducen los números naturales en ZFC; se explicó que en tal sistema es posible ofrecer diferentes caracterizaciones de los números naturales que identifican a cada número con un conjunto concreto; se hizo notar que aunque estas caracterizaciones son isomorfas difieren en propiedades superfluas; se explicó, siguiendo a Benacerraf, que no parece haber un criterio objetivo para decidir sobre una u otra caracterización; se dijo que esto representaba un problemas filosófico pues parece denotar que no es correcto equiparar números con conjuntos; se dijo también que una posible solución sería negar tal equiparación; se explicó entonces la manera en que se introducen los números naturales en ETCS y cómo en este sistema los números no son conjuntos (brindando una posible solución al problema de Benacerraf); por último se habló sobre cómo los elementos de los conjuntos caracterizados por ETCS no poseen estructura interna.

saber que un punto no **es** el otro.

Capítulo 5

Los números cardinales y ordinales en ZFC y ETCS

Resumen del capítulo: En este capítulo presentaré la reconstrucción de los números ordinales tal como se hace en ZFC. Después, ofreceré la reconstrucción de los ordinales en ETCS. Finalmente, se ofrecerá una reflexión sobre ambas construcciones, para ello se extrapolará el argumento de Benacerraf presentado en el capítulo anterior.

5.1. Los números ordinales en ZFC

Los números ordinales son en un sentido una generalización del concepto de número natural. Los números naturales se introducen con el fin de formalizar la idea de conteo de un conjunto finito. Dicho conteo supone ordenar a los elementos de ese conjunto. Los números ordinales pretenden generalizar esta idea caracterizando a ciertos *tipos de orden*, es decir pretenden extender la formalización de ordenar conjuntos finitos al caso infinito, extendiendo el concepto de conteo a los conjuntos en general. De tal forma que cada conjunto ya sea finito o infinito pueda ser contado por un ordinal. Por supuesto esto intuitivamente nos dice dos cosas: 1) sería buena idea considerar a los números naturales un caso particular de números ordinales, los ordinales que cuentan conjuntos finitos (De hecho el concepto de número finito depende por completo del concepto de número natural); 2) si cada ordinal contará a un conjunto ya sea finito ya sea infinito se requiere que todo conjunto sea ordenable, este principio se conoce como el axioma de elección.[1]

[1]Así, los ordinales (y después los cardinales) se convertirán en la norma de medida para los conjuntos infinitos. En el caso de los ordinales para comparar todos los buenos órdenes; en el caso de los cardinales, comparando conjuntos infinitos en términos de cardinalidad. Esto se logrará con ayuda del axioma de elección que es equivalente al principio del buen orden. Este teorema permite presentar a cada conjunto de tal forma en que sea comparable con algún ordinal y algún

Tomémonos por un momento en serio la primera intuición y asumamos que los naturales son ordinales, recordemos además que todo natural es el conjunto de los anteriores a él. Si esta idea fuese generalizable a la totalidad de los ordinales tendríamos que todo ordinal es el conjunto de los ordinales anteriores a él. Siguiendo esta idea tendríamos que el siguiente ordinal tras todos los naturales es el conjunto de todos ellos, denotémoslo ω para denotar que lo estamos pensando como un ordinal. Generalizando la idea del sucesor, podemos pensar que el ordinal tras ω es el ordinal $\omega \cup \{\omega\}$ que podríamos denotar convenientemente como $\omega + 1$, podríamos continuar entonces con $\omega + 1 \cup \{\omega + 1\}$ y denotarlo convenientemente como $\omega + 2$, y continuar este proceso de forma reiterada. Podríamos entonces caracterizar al ordinal que sigue a todos los de la forma $\omega + n$ donde $n \in \omega$, como el conjunto $\omega \cup \{\omega + n; n \in \omega\}$ de todos los anteriores. Podríamos denotarlo como $\omega + \omega$ y construir su sucesores como antes lo hicimos, a los que podríamos denotar $\omega + \omega + n$ con $n \in \omega$. Si siguiéramos esta línea de pensamiento podríamos llegar a construir $\omega + \omega + \omega + ... + \omega$ donde ω aparece n veces y denotarlo como $\omega \cdot n$. Continuando el proceso a partir de aquí podríamos tener $\omega \cdot \omega$, y análogamente al caso anterior $\omega^{\omega} = \omega \cdot \omega \cdot \omega ....$ Uno pensaría que esto nos permitiría construir todos los ordinales, sin embargo, esto es un error. El punto central es que todos los ordinales construidos hasta este momento son todos de la misma cardinalidad, es decir, son biyectables con ω. Para poder construir ordinales más grandes se debe considerar el conjunto de todos los ordinales que tienen la misma cardinalidad que ω y observar que formaría un conjunto bien ordenado (y en realidad cumpliría todas las condiciones para ser un ordinal), lo que daría como resultado un ordinal que es más grande que ω, al que llamaremos ω_1. Este proceso se puede repetir infinitas veces dando como resultado una cantidad enorme de ordinales infinitos de diferentes tamaños.

$0, 1, 2, \ldots\ \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\ \omega + \omega, \ldots\ \omega \times \omega, \ldots\ \omega^{\omega}, \ldots\ \omega_1, \ldots\ \omega_2, \ldots\ \omega_{\omega} \ldots$

Al igual que en el caso de los números naturales, la anterior intuición nos sugiere que cada ordinal es conjunto transitivo de ordinales, es decir: los elementos de sus elementos son anteriores a sus elementos y al conjunto mismo que los tiene como miembros, por tanto serán también elementos de dicho conjunto. Vemos también que en esta imagen todo ordinal pertenece y al mismo tiempo es subconjunto propio del siguiente. Por lo que la relación de pertenencia es un buen candidato para un orden lineal entre los ordinales. En otras palabras, la idea es que:

$\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$, y $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

Bajo esta imagen intuitiva es de esperar que ciertos resultados que teníamos sobre el conjunto N se puedan generalizar para la clase de los ordinales. A continuación veremos lo que es formalmente un número ordinal en ZFC y cómo las expectativas que aquí hemos planteado intuitivamente de hecho se cumplen. Comencemos por dar una definición de *número ordinal*.

---

cardinal.

Definición.- Un *número ordinal* es un conjunto transitivo bien ordenado[2] por la relación de pertenencia. La clase que los contiene se denota Ord y cada uno de ellos es usualmente representado a través de letras griegas α, β, γ...

Es posible probar, tal como han sido definidos los ordinales, que la relación de pertenencia en ellos es antireflexiva, transitiva y que dados α y β ordinales se cumple que $\alpha \notin \beta$ y $\beta \notin \alpha$. Esto nos sugiere una manera de definir la relación anteceder estrictamente entre ordinales:

Definición.- $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$.

Otra cosa que se desprende de nuestra definición es que cada uno de los naturales es un número ordinal, pues no son más que conjuntos transitivos bien ordenados por la pertenencia. $\omega = N$ mismo es un conjunto transitivo y además $(\omega, \in)$ es un buen orden, por tanto ω es un ordinal. Notemos, además, que ω mismo no es un natural[3]. Así que aunque todo número natural es un ordinal no todo ordinal es un natural.

Es también posible mostrar que todo elemento de un conjunto ordinal es un ordinal, de este hecho y la definición anterior se sigue que cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que le preceden. Un resultado igual de relevante es que la relación de pertenencia entre ordinales además antirreflexiva y transitiva es tricotómica. Con lo que es posible definir la relación de anteceder $\leqslant$ en los ordinales como:

$\alpha \leqslant \beta$ si y sólo si $\alpha \subseteq \beta$.

Con esto tenemos que la clase de los ordinales está ordenada linealmente por la pertenencia. Si pensamos en la clase Ord como una generalización del conjunto N nos gustaría que estuviera además bien ordenada. Resulta que de hecho este es el caso pues es un teorema que toda clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo. Con esto parece que podremos recuperar todas las propiedades interesantes de N en la clase Ord, sin embargo si realmente queremos que los elementos de nuestra clase cumplan con un papel análogo al de los números naturales (contar conjuntos), deberíamos garantizar que estos son buenos representantes de los tipos de orden. Es decir, deberíamos poder garantizar que a cada conjunto le corresponde un sólo tipo de orden. Esta propiedad es un hecho y se conoce como el teorema de enumeración. Lo que afirma en términos más precisos es que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal. Así el tipo de orden de un conjunto bien ordenado dado se puede definir simplemente como el único ordinal al que es isomorfo. Los elementos de Ord parecen hasta ahora ser buena generalización de los números, pero esta generalización perdería su sentido si existiera un conjunto que se escapara al conteo ordinal. Afortunadamente el axioma de elección nos

[2]Recordemos que un orden lineal $<$ (también llamado total) sobre un conjunto P es un buen orden si cada subconjunto no vacío de P tiene un elemento mínimo.

[3]No tiene un $\in$-máximo.

asegura que esto no ocurrirá, pues uno de sus equivalencias afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado. Así la clase Ord puede ser tomada con seguridad como una clase de números, ya que sus elementos realmente pueden cumplir el papel de norma de medida para conjuntos infinitos.

Sin embargo hay un límite para la analogía entre ω y *Ord*. Hasta ahora me he referido a Ord como una clase y no como un conjunto, esto se debe al siguiente resultado:

Teorema.- La clase de los ordinales no es un conjunto.

En efecto, si suponemos que la clase *Ord* es un conjunto, tenemos que *Ord* sería transitivo, pues los elementos de un ordinal son ordinales. Y ya que Ord es una clase no vacía de ordinales, por lo dicho arriba, tenemos que $\in$ lo bien ordena. Por tanto Ord sería un ordinal. Pero esto significa que $Ord \in Ord$. Contradiciendo la propiedad antirreflexiva de $\in$ respecto ordinales. Así que *Ord* no puede ser un conjunto.

A pesar de este hecho no hay algún impedimento para seguir con la construcción de secuencias de ordinales por lo que, muy en el espíritu de lo hecho antes con los elementos de N, definimos lo siguiente:

Definición.- Un ordinal α se llama sucesor si y sólo si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

Tal definición a su vez nos permite introducir la siguiente:

Definición.- Un ordinal α se llama límite si y sólo si $\alpha \neq 0$ y α no es sucesor.

Ya que $\emptyset \neq \beta \cup \{\beta\}$ para cada conjunto β, tenemos que 0, no es sucesor. Esto significa que existen tres tipos excluyentes entre sí de ordinales: el cero, los sucesores y los límites. Bajo la definición anterior se puede probar que: 1) α es límite si y sólo si α es un ordinal tal que $\alpha \neq 0$ y $\bigcup \alpha = \alpha$; 2) α es límite si y sólo si α es un ordinal inductivo. De estos hechos se sigue que ω es el mínimo ordinal límite, pues es un ordinal inductivo y es el mínimo respecto a la inclusión.

Las similitudes de la clase *Ord* con el conjunto de los números naturales tienen otra consecuencia importante, el teorema de inducción transfinita. Este teorema, como su nombre lo indica, es una especie de generalización del teorema de inducción para los números naturales. La idea es generalizar el principio de inducción para que también incluya ordinales límites. Es decir (dada una clase de ordinales): si 0 está en la clase de los ordinales, para cada ordinal su sucesor lo está también y para cada ordinal límite si sus predecesores en el orden lo están el ordinal límite mismo lo está, entonces esa clase es la clase Ord. La introducción de los ordinales límite es lo que hace que este teorema se llame "transfinito". Pensemos un momento en el mínimo ordinal límite ω, intuitivamente dicho ordinal es el primer paso más allá de lo infinito, pues se trata de un conjunto que rebasa cualquier sucesor. Más formalmente el teorema enuncia lo siguiente:

Teorema de inducción transfinita.- Sea C una clase de ordinales, si se tiene que: (1) $0 \in C$; (2) Si $\alpha \in C$, entonces $\alpha + 1 \in C$; (3) Si α es un ordinal límite y $\beta \in C$ para cada $\beta < \alpha$, entonces $\alpha \in C$;

entonces C es la clase de todos los ordinales.

Siguiendo con las similitudes entre la clase *Ord* y el conjunto de los números naturales podemos recordar que una función con dominio N se conoce como una secuencia infinita. Podemos entonces definir de manera análoga un *secuencia transfinita* como una función con dominio ordinal. Dicha secuencia se pude denotar como $\langle \alpha_\gamma : \gamma < \alpha \rangle$, donde α es el dominio de la función.

Recordemos ahora que el teorema de recursión para los números naturales asegura la existencia de una secuencia infinita que lista a los elementos de un endomorfismo sobre un conjunto A dado. Esta lista se logra tomando como punto de partida a un elemento distinguido de A y determinando a cada sucesor n, en la lista, a través de la regla del endomorfismo aplicada al predecesor. Por tanto para generalizar el concepto de recursión a su versión transfinita se requiere de una noción de sucesión transfinita, la que se acaba de definir, y una forma de denotar que la regla determinada por un endomorfismo entre clases dado aplica sólo a los predecesores de un ordinal α dado. Afortunadamente la manera en que definimos el orden $<$ sobre la clase de los ordinales hace fácil esta tarea. Notemos que si F es un morfismo con dominio en Ord, el morfismo restringido a α se define como:

$F \upharpoonright \alpha = \{\langle \beta, F(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\} = \{\langle \beta, F(\beta) \rangle : \beta < \alpha\}$

Con esta observación podemos introducir el Teorema de recursión transfinita:

Teorema de recursión transfinita.- Sean G_1, G_2, G_3 funcionales definidos del universo al universo entonces, existe un único funcional, F al *Ord* al universo tal que:

1) $F(0) = G_1(0)$;

2) $F(\alpha + 1) = G_2(F(\alpha))$ para cada $\alpha \in Ord$;

3) Si α es un ordinal límite, entonces $F(\alpha) = G_3(F \upharpoonright \alpha)$.

Gracias a este teorema podremos definir una aritmética para los ordinales, por su puesto contemplando el caso de los ordinales límite. Así para cualquier β se define una función $\beta+$. Así:

- $\beta + 0 = \beta$.
- $\beta + (\alpha + 1) = (\beta + \alpha) + 1$ para todo α.
- $\beta + \alpha = sup\{\beta + \gamma : \gamma < \alpha\}$ para cada ordinal límite α.

Análogamente obtenemos la multiplicación:

- $\beta \times 0 = \beta$.
- $\beta \times (\alpha + 1) = (\beta \times \alpha) + \beta$ para todo α.

- $\beta \times \alpha = sup\{\beta \times \gamma : \gamma < \alpha\}$ para cada ordinal límite α.

Cabe hacer notar que así como la secuencia infinita que el teorema de recursión para naturales establece, lista a los elementos de un conjunto usando a la manera de los naturales. El teorema de recursión transfinita establece la existencia de una secuencia que lista objetos del universo a la manera de los ordinales. Es decir, una enumeración correspondiente al rango de dicha secuencia. Estas secuencias podrían jugar el papel de los números ordinales, de la misma manera que las sucesiones formadas por elecciones distintas de la función sucesor en el caso de los números naturales. Así el problema de las secuencias indistinguibles en términos aritméticos pero diferenciables en términos ontológicos se traslada al nivel transfinito.

Números cardinales

Una vez que hemos caracterizado la norma de medida que nos permite comparar todos los buenos ordenes (los números ordinales), es posible caracterizar la norma de medida de su número de elementos, o su tipo de cardinalidad. Como se dijo al final de la discusión de las nociones cantorianas esta tesis no se centrará en ellos. Sin embargo es buena idea introducir el concepto para que sea clara su dependencia de los ordinales. Introducimos para ello la siguiente definición:

Un ordinal α es llamado *inicial* si y sólo si no existe un ordinal $\beta < \alpha$ con el que sea biyectable.

Con tal concepto es posible introducir la noción de número cardinal:

Definición.- Si X es un conjunto bien ordenado, entonces el cardinal de X, $|X|$, es el único ordinal inicial con el que es biyectable.

Al igual que con los números ordinales es posible establecer una secuencia transfinita de tipos de cardinalidad y una aritmética para ella de una forma bastante similar a la de los ordinales. Sin embargo no profundizaré en este trabajo en ello, así que me limito a exponer el concepto.

5.2. Los números ordinales en ETCS

En esta sección introduciremos una versión categórica de los números ordinales en ETCS. La idea general es rescatar la noción de tipo de orden tomando a al esqueleto de la categoría de buenos ordenes. Con ello tendremos que el representante del tipo de orden de un conjunto dado es único. Y podremos definir los ordinales como los objetos de la categoría esqueleto de los buenos ordenes. Esta reconstrucción sigue a la de Max Jhonson en su texto *ETCS, Ordinals, and Choice*.

Comencemos por notar que podemos tomar a los objetos de un conjunto A como los objetos de una categoría y los morfismos serán flechas con la forma $a \to b$ para cada $a, b \in A$. Notemos que por la existencia de la identidad en esta categoría para cada objeto $a \in A$ existe una flecha $a \to a$. Además por la composición de morfismos si tenemos flechas tales que $a \to b$, $b \to c$, existe una flecha $a \to c$. Así un conjunto visto como una categoría de esta forma constituiría un preorden. Es posible ahora tomar un preorden y pedir que para cada par de objetos $a, b \in A$ exista a lo más un morfismo tal que $a \to b$. Con ello nuestra categoría de los objetos de A sería un orden parcial.

Podemos hacer dos restricciones más a las flechas de nuestra categoría: 1) podemos pedir que para cada par de objetos $a, b \in A$ ocurra que,$a \to b$ o $b \to a$, donde el conectivo no es exclusivo;2) podemos pedir también que para cada subcategoría A' de A (en este caso una subcategoría tendería a los objetos de un subconjunto de A como morfismos y como flechas las flechas de A) exista un objeto inicial al que llamaremos el mínimo elemento de A. La restricción 1) nos asegura que nuestra categoría tiene las características de un orden lineal, la restricción 2) que tiene las características de un buen orden.

Podemos ahora tomar a las categorías como las hemos descrito arriba como los objetos de otra categoría y tomar como los morfismos funtores [4] que preservan el orden. Es decir flechas que van de una categoría bien ordenada a otra $F : A \to B$, tales que para cada par de objetos de $a, b \in A$ tenemos que si $a \to b$, $F(a) \to F(b)$. Un funtor que además de lo anterior cumpla con que para cada $x \to F(y)$ existe un $z \in Cod(F)$ tal que $F(z) = x$, entonces lo llamamos una *incrustación o encaje de segmento inicial*. Es posible demostrar que si pensamos a dichos encajes como morfismos en la categoría de conjuntos bien ordenados, estos serían los monomorfismos. Introducimos ahora el concepto de *esqueleto*. Para ello es necesario hacer notar que podemos obtener subcategorías de una categoría dada poniendo restricciones sobre la clase de flechas que se permiten. Así, por ejemplo, un conjunto parcialmente ordenado visto como categoría es una subcategoría del mismo conjunto equipado con un preorden visto como categoría. También es necesario mencionar que una subcategoría G de H se llama *completa* si incluye todos los morfismos entre objetos de G que H incluía.

Definición.- La categoría G es un *esqueleto* de la categoría H si G es una subcategoría completa de H la cual contiene exactamente un objeto para cada clase de objetos isomorfos de H. Una categoría *esqueletal* es un *esqueleto* de alguna categoría.

Podemos notar, como ejemplo, que si G es un preorden visto como una categoría, entonces cada esqueleto de G pude verse como un conjunto parcialmente ordenado visto como una categoría.

Con estas nociones podemos ahora introducir una versión categórica de la clase Ord. Es decir podemos dar una versión categórica de la noción de *tipos de conjuntos bien ordenados*. Consideremos a la categoría de los conjuntos bien ordenados con los encajes de segmento inicial como morfismos. Tomemos ahora sólo su esqueleto y denotémoslo Ω. Es posible demostrar el teorema del buen orden

[4] Es decir morfismos entre categorías.

en su versión categórica [5]. Dicho teorema afirma que existe para cada conjunto S, un conjunto bien ordenado como los mismos objetos que S (recuerde que aquí los objetos son elementos de S). Esto implica que Ω es un esqueleto de **Set**, " [...] en el que para cada objeto X, existe un ordinal α tal que α sin su orden es isomorfo a X". Así las flechas en Ω serán los ordinales en esta reconstrucción, pues representaran clases de isomorfismo de conjuntos bien ordenados. Además también es posible mostrar que Ω no es un conjunto, por lo que es realmente análogo a la clase Ord.

Puede ser útil pensar en los diagramas internos de ciertos tipos ordinales en esta versión como ayuda visual. El diagrama del orden de tipo tres se vería de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \end{tikzcd}$$

Donde cada circulo representa un elemento del conjunto bien ordenado.

El de orden tipo cuatro se vería así:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \end{tikzcd}$$

El de tipo cinco se vería así se vería así:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \end{tikzcd}$$

Es claro que podríamos seguir así para un número mayor:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, "\leq"'] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \arrow[r, dotted, no head] & \bullet \arrow[loop above, "\leq"] \end{tikzcd}$$

Lo que quiero resaltar aquí es que los objetos de un conjunto bien ordenado dado en esta presentación se corresponden a los elementos del conjunto dado, por tanto no difieren de los elementos de los conjuntos de Set, que pueden ser distinguidos por flechas con dominio unitario.

Enunciamos por ahora el Principio de Inducción transfinita.

Principio de Inducción Transfinita.- Sea W un conjunto bien ordenado y sea P una propiedad tal que si Py es verdadera para todo $y \to x$, con $y \neq x$, entonces Px. Si sabemos que $P0$ cumple la propiedad (Donde 0 es el inicial de W)entonces para todo $x \in W$ sabemos que Px la cumple.

También es posible enunciar el Principio de recursión transfinita. Para ello es conveniente definir lo siguiente:

Definición.- Si W es un conjunto totalmente (linealmente) ordenado en $y \in W$, denotamos por $y^{<}$ el conjunto $\{x \in W | x \to y, y \neq x\}$. Ahora podemos enunciar el principio de recursión transfinita categórico.

Definición.- Principio de recursión. Si tenemos un mapeo $\bigcup_{w \in W} X^{w^{<}} \to X$ entonces existe una

[5]Johonson, *ETCS, ordinals, and choice*, https://math.uchicago.edu/ may/REU2018/REUPapers/Johnson.pdf (Consultado el 26-11-2020), 9.

única función $f : W \to X$ con $f(w) = F(f\restriction_{w^<})$ para cada $w \in W$.

También es útil introducir las siguientes definiciones:

Definición.- Un morfismo con $\alpha \to \beta$ en Ω es un *encaje estricto* si no es un isomorfismo.

Definición.- Un ordinal α es un *ordinal limite* si satisface $\alpha = \bigcup_{f:\beta\to\alpha} f\beta$. Donde f es un encaje estricto. El es un *ordinal sucesor* si para algún ordinal β tenemos que $f : \beta \to \alpha$ y hay un único elemento de α que no está en la imagen de $f\beta$.

Sobre esta base es posible demostrar los hechos básicos conocidos de los ordinales. Como que cada conjunto de objetos de Ω tiene un mínimo elemento o que cada $\alpha \in \omega$ es o bien un sucesor o bien un ordinal límite[6,7].

Cardinales en ETCS

Recordemos que en **Set** dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si existe un isomorfismo entre ellos. Así que bastaría generar una categoría a partir de **Set** que comparta sus objetos pero tenga sólo como morfismos a las identidades para cada objeto. Algo más fuerte se podría conseguir conservando los morfismos y las flechas de Set y conservando sólo su esqueleto.

5.3. ¿Se ha dado solución al problema de Benacerraf?

Como hicimos notar los elementos de los objetos en la categoría Ω son completamente análogos a los elementos de los objetos en la categoría Set, no hay diferencias, ontológicamente hablando, respecto del tipo de cosas que dichos elementos son. Se trata de simples puntos sin propiedades particulares cuya existencia independiente del conjunto al que pertenecen no tiene alguna clase de sentido. Al no poseer los elementos ninguna clase de estructura interna las propiedades de los ordinales en esta construcción son sólo aquellas que surgen de las relaciones funcionales entre buenos ordenes. De manera totalmente análoga a lo que ocurría en los naturales. Por tanto escapan al problema de ontología que mencionamos en el capítulo anterior.

Por otro lado los ordinales en ZFC dependen, de manera totalmente análoga a lo que ocurría en el caso de los números naturales, de la relación de pertenencia global. Con ello se introducen de nuevo las condiciones de ser un conjunto transitivo, y se caracteriza a los ordinales como una secuencia concreta que puede tener las mismas propiedades aritméticas que otras con diferencias de tipo ontológico.

[6]Notemos que aunque la reconstrucción pasada conjuntista pedía en la definición de ordinal límite que este fuera diferente del vacío en realidad cumple vacuamente con serlo.

[7]Jhonson, *ETCS,ordinals, and choice*, 7-8.

Por lo anterior podemos concluir que la solución categórica al problema de la ontología en los números naturales puede extenderse sin mayor problema a las secuencias transfinitas.

Sin embargo, como nota técnica, es necesario notar que la caracterización en ETCS dependió de la introducción del concepto de esqueleto de una categoría. Esto supone que si se pretende seguir un programa de estilo fregeano que no se contente con equivalencias entre categorías y busqué pensar la identidad a través de isomorfismos, uno debería aceptar una especie de generalización del *axioma de elección* para categorías. Es decir debería aceptar las siguientes cosas: cada categoría tiene un esqueleto; una categoría es equivalente a cada uno de sus esqueletos; cualesquiera dos esqueletos de una categoría dada son isomorfos. Sin embargo no hay una forma canónica de elegir entre esqueletos, así que aunque aceptar las condiciones anteriores sería útil, para algún programa de la mencionada naturaleza, una elección algo artificial, en el sentido de que para algunos la teoría de categorías tiene que ver con los patrones que naturalmente se presentan en matemáticas y no con los que se eligen en función de un programa fundacionalista. Sin embargo esta discusión se aleja del tema central de la tesis así que me limito a mencionarla por sus similitudes con el problema central.

Recapitulado: Se introdujeron las nociones de número ordinal en ETCS y ZFC, se mencionó brevísimamente la noción de cardinal también. Se dijo que el problema de la ontología de los números naturales se trasladaba a las secuencias transfinitas en ZFC y también que la ETCS parece ofrecernos una solución a este nivel. Por último, se apuntó que la noción de esqueleto podría traer ciertos problemas a programas fundacionalistas.

Conclusiones

Podemos agrupar las conclusiones por grupos relativos a cada sección importante de la tesis: a) los números en cantor; b) los números en ZFC ; c) los números en ETCS.

Los números en Cantor.- En el capítulo dedicado a Cantor se concluyó que el concepto de conjunto cantoriano está directamente relacionado con su concepto de número. Se dijo que existen al menos tres clases de conjuntos que se diferencian por su nivel de abstracción respecto el conjunto de partida. Tales tipos son los *menge*, los *kardinale* y los ordinales. Los *kardinale* y los ordinales son el tipo de medida y buen orden de un menge o conjunto concreto, respectivamente. Son una especie de generalización de naturaleza ideal platónica (en el sentido de que todos los *menge* participan de las ideas generales de ordinal y *kardinale* y se puede acceder a los últimos conceptos mediante la abstracción). Ya que toda enumeración depende del orden, se tienen que los cardinales y ordinales se corresponden a los números (que son eso con lo que se cuenta cada cosa). También se caracterizó a estas clases de conjuntos por su nivel de abstracción siendo los *kardinale* lo más abstracto y los *menge* lo más concreto. También se dejó claro que los conjuntos cantorianos no requieren de alguna propiedad colectora que los caracterice como conjuntos.

Los números en ZFC.- En general sobre los números en ZFC se dijo que su construcción formal los caracterizaba como entidades concretas. Sin embargo estas entidades en tanto concretas poseen estructura interna (tanto en el caso particular de los naturales como, en el general, de los ordinales), esto hacía posible la existencia de entidades diferentes entre sí a este nivel que fueran indistinguibles en sus propiedades aritméticas. También debemos concluir que los ordinales y cardinales son, al igual que en Cantor, una generalización de los números naturales. Sin embargo se diferencian en que el tipo de abstracción que parece operar es distinto. En Cantor estaba presente una abstracción de caracter sustractivo, en la que lo más abstracto era lo menos complejo en términos de sus componentes y lo menos abstracto era lo más complejo. En ZFC tenemos que los ordinales son al menos tan complejos como los naturales, pues parecen construcciones que involucran propiedades internas análogas para sus elementos.

Los números en ETCS.- En lo que respecta a ETCS se concluyó que los números ordinales tanto fininitos como transfinitos no difieren en su naturaleza más que en la manera que se relacionan entre sí, bajo ciertas restricciones contextuales determinadas por una categoría dada. En otras palabras, los elementos de los conjuntos en ambos casos no tienen estructura interna y los elementos mismos no tienen ninguna suerte de existencia fuera del contexto de un conjunto concreto dado. Es este hecho el que parece librar a la ETCS de los problemas filosóficos presentes en ZFC. Esta idea de conjunto parece empatar muy bien con ciertas ideas de Cantor, en concreto empata bien con sus ideas de que los conjuntos no requieren propiedades colectoras y de que los números son una suerte de abstracción de cierto tipo de conjuntos más complejos. Ciertamente las relaciones funcionales del esqueleto de la categoría de buenos ordenes son menos abstractas que las de **Set** en el sentido sustractivo de la abstracción (en general cualquier categoría con los objetos de **Set** y con morfismos tales que son restricciones de los de **Set** lo serán en este sentido). Por otro lado tenemos que las propiedades de los conjuntos en esta versión al definirse sólo relacionalmente omiten la necesidad de propiedades colectoras relativas al caracter interno de los conjuntos (de hecho, en ETCS es posible dar una caracterización concreta de lo que es una propiedad en términos de flechas gracias al objeto de valores de verdad). Por tanto la ETCS puede ofrecernos una manera de interpretar las nociones de abstracción y de conjuntos cuyos elementos carecen de propiedades. El ascenso y descenso en el nivel de abstracción puede interpretarse mediante la regla que caracteriza a un funtor dado entre categorías dadas. Abstraer significa en algún sentido establecer funtores entre una categoría compleja y una simple. Siendo el paradigma de lo simple la categoría de conjuntos. Abstraer en sentido matemático sería algo así como establecer relaciones funtoriales que nos permitan subir o bajar entre niveles de complejidad relacional. Por otro lado si son las relaciones las que determinan las propiedades de los objetos entonces la estructura interna debe ser irrelevante en cada caso. No importa tanto la naturaleza de lo colectado si no la manera en que se relacionan las colecciones.

Comparación final (conclusiones generales).- Con lo dicho hasta ahora podemos caracterizar a los conjuntos de Cantor como colecciones más o menos estructuradas cuya naturaleza particular de sus elementos no es fundamental en su determinación como conjuntos. Y cuya principal característica es que o bien cuentan cosas o bien son cosas contadas, según su naturaleza más o menos abstracta. La ETCS parece darnos una forma de interpretar la idea de olvidar las características concretas de los objetos que componen un conjunto, lo que se olvida es cualquier propiedad interna de los conjuntos, cualquier propiedad de los elementos. Por otro lado parece darnos una forma de interpretar la abstracción, abstraer es establecer relaciones funtoriales entre categorías más o menos complejas en lo que respecta a la forma en que se relacionan los objetos. Por otro lado, el carácter ideal que Cantor parece otorgar a sus números parece empatar con la idea de sucesiones isomorfas respecto a sus propiedad aritméticas. Los números de cantor son el ideal de un tipo de tamaño y de orden dado. En sus palabras son algo muy parecido a las ideas platónicas, aquello que es subyacente y constante a una cosa cambiante. En tal sentido podría pensarse que Cantor creía en la existencia de *el* número. Lo cambiante es la naturaleza de las cosas que pueden jugar el papel de los números en un contexto relacional dado (cosas como una posible naturaleza interna de los objetos involucrados). Lo constante son las propiedades relacionales que presentan los objetos. En tal sentido los isomorfismos representan una suerte de naturaleza invariante subyacente a lo aparentemente cambiante. Así que en este sentido, la ETCS también nos da una manera de interpretar algún posible significado concreto de la idea de un número como idealización. Quiero hacer notar que todas estas similitudes de ETCS con la teoría cantoriana de conjuntos se obtuvieron como resultado de comparar la ETCS con ZFC, conceptos como propiedades internas se entienden sólo en referencia a los elementos de un conjunto dado en ZFC. Por lo que, ZFC es tan importante como ETCS en esta comparación. Quiero hacer notar también que en lo que respecta al último punto mencionado también es posible hacerlo empatar con una interpretación más fregeana. Se podría interpretar la idea de un número ideal con la idea de objetos concretos que son los números. Sin embargo hemos visto cómo esto falla. Así que la visión que nos da ETCS parece ser más adecuada para entender lo que Cantor pudo estar conceptualizando como un conjunto.

Me parece importante mencionar en este punto que aquí he visto sólo estas teorías en relación al trabajo de Cantor, pero cada una de ellas se gestó en tradiciones con motivaciones distintas por lo que quiero aclarar que no pienso que se deba optar por aceptar o rechazar una u otra teoría sólo porque se parece más o menos en algún respecto al trabajo de Cantor. Las teorías presentadas aquí tienen su mérito individual, y sólo intenté dar una posible interpretación de las ideas de Cantor. A su vez esta interpretación debe acotarse sólo a los conceptos y obras que traté, no debería tomarse como una interpreatación general de la teoría de conjuntos de Cantor, pues en ella confluyen muchos aspectos extramatemáticos, como el religioso, por lo que cualquier interpretación que se centre principalmente en los aspectos formales es necesariamente escueta[8] .

[8]Esto tiene consecuencias concernientes a la manera en que se llevan a cabo ciertos análisis conceptuales en filosofía de las matemáticas. Como se pudo ver a lo largo de la tesis los aspectos no propiamente matemáticos modelaron radicalmente la noción de conjunto de Cantor. Un estudio serio y filosófico de un concepto matemático debería incluir no sólo un análisis detallado de lo que se entiende por dicho concepto en un contexto formal, debería incluir también un estudio detallado de las motivaciones que llevaron a la introducción del concepto y de las ideas intuitivas que se intentan formalizar. Es de esperar que en un estudio tal se encuentren más motivaciones de las esperadas y más intuiciones de las que se creían estar involucradas. Me parece que estudios como el que aquí presenté son una buena muestra de cómo distintas tradiciones pueden confluir en la accidentada genealogía de una idea. Ni el pensamiento más formal se salva de esto. Me gustaría también anotar que desearía que este estudio sirviera como ejemplo, o al menos como intento que se puede mejorar, de una forma de usar herramientas formales contemporáneas con fines hermenéuticos. Un recorrido dialéctico entre el pasado y el presente puede resultar a veces en anacronismo e ideas fuera de contexto, pero también pienso que llevado a cabo con

Lo importante aquí es mencionar que hay al menos tres maneras de entender a los conjuntos: la cantoriana que los caracteriza como conceptos ideales de los que participan cantidades concretas dadas y que son determinaciones de lo uno; la teoría de conjuntos ZFC que los interpreta como colecciones que pueden poseer estructura interna y se relacionan mediante una noción de pertenencia global; ETCS que interpreta a los conjuntos como colecciones de puntos sin propiedades internas en un contexto relacional dado y cuya relación de pertenencia es de carácter local.

precaución puede arrojar algo de luz sobre cuestiones antiguas o nuevas.

Bibliografía

Aristóteles. Física. Traducido por Guillermo R. de Echandía. Madrid: Gredos,1995.

Andrei Rodin. 2014. Axiomatic Method and Category Theory. Russia: Springer.

Benacerraf, P. 1965. What numbers could not be. The Philosophical Review, 74(1): 47-73.

Cantor,Georg. Fundamentos para una teoría general de los conjuntos. Traducido por José Ferreirós y Emilio Gómez-Caminero. Barcelona: Crítica, 2006.

Cantor,Georg. Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos. Traducido por J.Bares y J.Climent, https://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor95-97.pc.pdf (Consultado el 27-11-2020)

Enderton, H. B. 1977. Elements of set theory. London:Academic press.

Jean-Pierre Marquis.2009. From a Geometrical Point of View. Canada: Springer.

Jech, T. 2013. Set theory. Berlin:Springer Science & Business Media.

Johnson, M. ETCS, ordinals, and choice, http://math.uchicago.edu/ may/REU2018/REUPapers/Johnson.pdf (Consultado el 27-11-2020)

Lawvere, F.W. 1970. Quantifiers and Sheaves. Actes, Congres intern. math., Tome 1 : 329-334.

Lawvere, F. W. 1994. Cohesive toposes and Cantor's' lauter Einsen'. Philosophia Mathematica, 2(1): 5-15.

Lawvere, F.W. y Stephen H. Schanuel. 2000. Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge: Cambrige University Press. Versión en español: 2002.Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a categorías, traducido por Francisco Marmolejo. México: Siglo veintiuno editores.

Lawvere, F.W y Robert Rosebrugh. 2003. Set For Mathematics. New York: Oxford Clarendon Press.

Lawvere, F.W. 2007. Axiomatic Cohesion. Theory and Applications of Categories, vol. 19. No.3: 41-49.

McLarty, C. 1993. Numbers can be just what they have to. Noûs, 27(4): 487-498.

McLarty, C. 1995. Elementary Categories, Elementary Toposes. Toronto: Oxford Clarendon Press.

Ralf Krömer. 2007. Tool and Object : A history and philosophy of Category Theory. Germany: Birkhäuser.