UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“LA DOCTRINA DE SER” DE G.W.F. HEGEL: CATEGORÍAS EN FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

SALVADOR DANIEL HERNÁNDEZ FLORES

DIRECTOR DE TESIS:
MTRO. GALO DAVID RUIZ SOTO

CIUDAD DE MÉXICO 2020

1. Datos del alumno
Hernández
Flores
Salvador Daniel
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
415053330

2. Datos del Tutor
Mtro. en Alta Dirección
Ruiz
Soto
Galo David

3. Datos del Sinodal 1
Dr.
Marmolejo
Rivas
Francisco

4. Datos del Sinodal 2
M. en C.
García
López
Alma Violeta

5. Datos del Sinodal 3
Dr.
Garciadiego
Dantan
Alejandro Ricardo

6. Datos del Sinodal 4
Dr.
Torres
Alcaraz
Carlos

7. Datos del trabajo escrito

“La Doctrina de Ser” de G.W.F. Hegel: Categorías en Filosofía y Matemáticas

68 p.

2020

Para Adriana, María José y Ana Sofía.

Índice general

Pienso que en la siguiente década y en el siguiente siglo los avances técnicos forjados por quienes trabajan en teoría de categorías serán valiosos para la filosofía dialéctica, dando forma precisa a antiguas distinciones filosóficas a través de modelos matemáticos disputables [...]. Por otro lado, será necesario que los matemáticos presten atención explícitamente a dichas preguntas filosóficas para lograr el objetivo de hacer a las matemáticas (y por lo tanto a otras ciencias) más fáciles de aprender y utilizar. *Esto por supuesto requerirá que los filósofos aprendan matemáticas y que los matemáticos aprendan filosofía* [1]

William Lawvere

[1]([Lawvere 1992, 16] [énfasis añadido]. Todas las traducciones al español son del autor a excepción de donde sea indicado explícitamente)

Prefacio

El libro *La Ciencia de la Lógica* [Wissenschaft der Logik] tiene una relación de interés con la historia de las matemáticas, la historia de la filosofía y con el vínculo entre estas dos. Publicado en los inicios del siglo XIX, el texto establece los fundamentos del sistema filosófico de Georg Wilhelm Friedrich Hegel. Producto de su era, el trabajo pertenece a la corriente filosófica conocida como idealismo alemán, cuyos principales exponentes fueron Immanuel Kant, Johann Fichte, Friedrich Joseph Schelling y el mismo Hegel. Kant, cuyo trabajo sentó las bases para la corriente filosófica, tenía como objetivo el esclarecimiento de los límites a los que necesariamente serían sujetos los sistemas de pensamiento, desarrollando una filosofía crítica que entre muchas otras cosas juzgaría duramente aquellos intentos por demostrar la existencia de un dios. Aunque esencialmente distintas, las respuestas románticas de Fichte, Schelling y Hegel (los tres con fuertes raíces cristianas) a la filosofía Kantiana supusieron la creación de una filosofía con gran contenido metafísico especulativo y de naturaleza religiosa. Este estilo filosófico dejaría de ser la manera dominante de realizar filosofía en Occidente a finales del siglo XIX y sería reemplazado por la filosofía analítica en los albores del siglo XX.

El trabajo de *La Ciencia de la Lógica* lidia con la lógica y la metafísica. El proyecto filosófico de Hegel requería de categorías de pensamiento (lógicas) que correspondieran a la 'realidad' metafísica (ontológicas). Previo a Hegel, las categorías habían sido expuestas como pertenecientes a lo que hay (*i.e.* metafísicas) o como propias de las formas de pensamiento (lógicas), sin embargo es con el trabajo del alemán que ambas perspectivas son presentadas como idénticas.

Con el advenimiento del siglo XX, la filosofía de naturaleza especulativa sería reemplazada por la filosofía analítica, que sería fuertemente influenciada por los métodos rigurosos propios de la lógica (y que llegarían a ser identificados con el método matemático) y un análisis estricto del lenguaje, herramientas que fueron adoptadas con el propósito explícito de evitar repetir los fracasos filosóficos que caracterizaron (al parecer de los filósofos del siglo XX) a la filosofía menguante que representaba la escuela de Hegel. El idealismo alemán que siguió a Kant fue pues, instrumental en el desarrollo de la filosofía analítica y resultó en una matematización de la filosofía que apuntaba a eliminar las debilidades de la filosofía continental, a saber sus sistemas generales de filosofía, su naturaleza ofuscante y en ocasiones mística y por momentos sus choques con las ciencias duras; cualidades que ciertamente se encuentran en el trabajo de Hegel, razón por la cual se volvió el objetivo de múltiples críticas y burlas.

Esta animosidad entre las escuelas de pensamiento fue ejemplificada en los escritos de Bertrand Russell, figura prominente de la filosofía analítica y del desarrollo de la lógica matemática, que en *La Historia de la Filosofía Occidental* comentó:

> “Mientras sea el objetivo principal de los filósofos mostrar que nada puede ser aprendido mediante paciencia y pensamiento detallado, sino que debemos idolatrar los prejuicios de los ignorantes bajo el nombre de la ‘razón’ si somos Hegelianos [...], los filósofos se mantendrán ignorantes de lo que los matemáticos han hecho para remover los errores con los cuales Hegel se beneficiaba” [Russell 1945, 804].

Una gran cantidad de críticas similares se encuentran en los escritos de Russell, simultáneamente demostrando la influencia del filósofo alemán sobre su pensamiento, y la medida en la que subestimó secciones importantes del pensamiento de este.[Véase: Pinkard 1981]

El trabajo principal de Bertrand Russell (escrito en colaboración con el matemático y filósofo Alfred N. Whitehead) *Principia Mathematica* (junto con el trabajo previo de Frege) supuso un novedoso enfoque matemático de la lógica, que previamente había sido una rama de estudio propia de la filosofía. Este trabajo a su vez desempeñó un papel histórico fundamental en la filosofía de las matemáticas, pues fue vital para la popularización del logicismo, ideología que afirma que las matemáticas pueden ser reducidas a la lógica. Esta idea había comenzado a gestarse en el pensamiento de Leibniz más de cien años antes y se había vuelto posible recientemente tras el trabajo de Gottlob Frege.

Mientras que la posición filosófica de logicismo fue descartada por Hilbert, el desarrollo de las herramientas formales de lógica que lograron Russell y Whitehead le permitieron un marco en el cual realizar su trabajo sobre los fundamentos de las matemáticas. El trabajo de Hilbert a su vez permitió la introducción del formalismo, corriente que al hacer virtualmente ningún compromiso ontológico se puede considerar una ideología radicalmente opuesta a la mantenida por Hegel; que por su parte inspiraría a la filosofía que Lawvere defiende desde finales del siglo XX.

Tras los resultados presentados por Kurt Gödel en 1931, fue necesario reconsiderar el papel del método axiomático que en una versión u otra habían existido en las matemáticas desde la antigua Grecia, y que formaban parte esencial del proyecto matemático general. La incompletitud suponía una falla que para muchos sugería que buscar diferentes axiomatizaciones era un proyecto sin utilidad alguna.

Fue hasta los esfuerzos de William Lawvere a finales del siglo XX, y de Vladimir Voevodsky de manera independiente en el siglo XXI que el proyecto de nuevos métodos axiomáticos volvieron a ser sujetos de investigación. La motivación detrás del proyecto axiomático de Voevodsky, nombrado *Fundaciones Univalentes de Matemáticas* era el comenzar una transición de las matemáticas hacia un lenguaje que fuera fácilmente computable, con el propósito final de verificar o incluso realizar pruebas matemáticas de forma computacional y así eliminar los errores asociados con la estructura social que, siendo una actividad realizada en instituciones, inevitablemente aquejan a las matemáticas. Por otro lado, el proyecto de Lawvere relevante para el método axiomático e inspirado en la dialéctica y en la distinción de la lógica 'objetiva' y 'subjetiva' que Hegel expone en *La Ciencia de la Lógica*[2] puede intepretarse como: "i) un trabajo de dialéctica Hegeliana matematizado en el contexto de teoría de categorías y ii) como un trabajo de matemáticas inspirado y guiado por la dialéctica Hegeliana- y la intención [...] de sintetizar ambos aspectos en uno solo" [Rodin 2013, 142].

[2]Véase capítulo 3

Cabe mencionar que ambos proyectos se ven unificados en el contexto de teoría superior de categorías, en la que la teoría homotópica de tipos, la lógica modal y las categorías y topos forman una sola teoría en desarrollo, cuyos posibles alcances suponen logros importantes en lógica matemática, filosofía, ciencias computacionales, geometría y física.

De esta manera, el ciclo histórico que comenzó con la publicación de *La Ciencia de la Lógica* y la muerte de Hegel en la primera mitad del siglo XIX y que continúa con el desarrollo de la teoría de categorías y el método axiomático, tiene como pieza esencial la lógica Hegeliana (en la perspectiva aquí expuesta desarrollada por Lawvere, Rodin, Schreiber, Corfield y más).[3]

Es importante mencionar que el trabajo presentado a continuación no apunta a reinterpretar de forma revisionista y anacrónica el trabajo de Hegel ni a promover la matematización de la filosofía. El propósito general es mostrar el génesis de matemáticas novedosas inspiradas por un trabajo filosófico (también incluído aquí) y las consecuencias fructíferas que tienen la relación entre las matemáticas y la filosofía y la perspectiva holística que defendía Georg Wilhelm Friedrich Hegel.

[3]Una fuente de información particularmente profunda es la enciclopedia en línea https://ncatlab.org, cuyos editores incluyen a Urs Schreiber y David Corfield y que funge como repositorio de ideas a desarrollar en la frontera del conocimiento de teoría de categorías y al que este trabajo le tiene una particular deuda intelectual.

Nota a Propósito del Lenguaje

Los términos utilizados por Hegel son presentados en el texto en el alemán original. La traducción de estos términos es poco útil y las palabras que más se acercan en significado son poco sugerentes a diferencia de sus equivalentes en el idioma original. En particular, las palabras *sein, werden, dasein* y *aufhebung* son especialmente conflictivas (*aufhebung* por su parte no tiene traducción posible). Por lo tanto se presenta a continuación una tabla de referencia para la terminología en alemán y sus traducciones más comúnmente utilizadas en inglés y español.

sein	-	*being*	-	*ser*
nichts	-	*nothing*	-	*nada*
werden	-	*becoming*	-	*convertirse en*
dasein	-	*determinate being*	-	*ser determinado*
etwas	-	*something*	-	*algo*
anderes	-	*other*	-	*otro*
ansichsein	-	*being-in-itself*	-	*ser-en-sí*
sein-für-anderes	-	*being-for-other*	-	*ser-por-otro*
endlichkeit	-	*finitude*	-	*lo finito*
unendlichkeit	-	*infinitude*	-	*infinidad*
schranke	-	*limitation*	-	*limitación*
sollen	-	*ought*	-	*debería*
ideelle	-	*idealized*	-	*lo ideal*
das eins	-	*The one*	-	*El único*
das leere	-	*the void*	-	*el vacío*
viel	-	*many*	-	*muchos*
sein-für-eines	-	*being-for-one*	-	*ser-por-uno*
fürsichsein	-	*being-for-itself*	-	*ser-por-sí-mismo*
aufhebung	-	*sublate*	-	

Introducción

La tesis aquí presentada tiene como objetivo principal exponer de manera sucinta las herramientas conceptuales del trabajo de Hegel *La Ciencia de la Lógica* (y más particularmente de *La Doctrina de Ser*) *aufhebung*, *unidad e identidad de opuestos* con las que Hegel desarrolló su sistema ontológico-lógico, así como los conceptos principales de dicho sistema: *sein*, *nichts*, *werden*, *dasein*, *repulsion und attraktion*, *qualität*, *quantität*, *kontinuität*, *diskretion*, *sein-für-eines*, *fürsichsein*, *realität und idealität* de las siguientes maneras: (1) en su contexto filosófico original, dentro del marco del idealismo alemán y (2) en su expresión matemática introducida por Lawvere en el contexto de la teoría de categorías y topos.

La primera sección del trabajo presentará el contenido filosófico del libro *La Ciencia de la Lógica*. Para esto primero se expondrá el contexto histórico filosófico del trabajo (*i.e.* las principales escuelas de pensamiento occidentales que influyeron a Hegel y a las cuales responde cuando crea su propio sistema de pensamiento). Principalmente se discutirán el pensamiento de los filósofos griegos Parménides y Aristóteles, el de Baruch Spinoza y el de los filósofos alemanes Immanuel Kant y Johann Fichte, trazando de manera genealógica la evolución de las herramientas filosóficas de categorías (en el sentido filosófico) y dialéctica, y las tradiciones lógicas y metafísicas que desempeñarían un rol fundamental en el trabajo de Hegel.

Tras el contexto filosófico histórico, se presentará una visión breve del sistema completo de Hegel, ubicando su trabajo lógico dentro de su proyecto filosófico general para mostrar la relación entre ambos, con la intención de situar al lector en una posición óptima para comprender *La Ciencia de la Lógica* y los conceptos que serán esenciales para el proyecto de Lawvere que será el sujeto de la segunda sección.

Después se expondrán los conceptos relevantes de *La Doctrina de Ser* mencionados previamente, para permitir que la exposición del trabajo matemático se pueda entender propiamente como una extensión o extrapolación apropiada del pensamiento Hegeliano.

En la segunda mitad del trabajo se expondrán las interpretaciones relevantes categóricas de adjunciones, mónadas y co-mónadas, topos y subtopos esenciales que forman el marco en el que tiene lugar la sugerida *formalización* de los conceptos arriba mencionados, habiendo concluido esto, se presentarán las matemáticas desarrolladas originalmente por William Lawvere inspiradas por las ideas filosóficas de Hegel, a saber: *adjunción modal*, *niveles de topos*, *categorías de ser* y la relación de *aufhebung* en este contexto; también se expondrá la relación lógico-geométrica explotada en la teoría de topos y el trabajo de Lawvere, en forma de las adjunciones modales presentes en ciertos tipos de topos, a saber: cohesivos, elásticos, y sólidos. Esta sección del trabajo supone un conocimiento básico de teoría de categorías, los conceptos requeridos pueden ser consultados en "Categories for the Working Mathematician" de Saunders Mac Lane o en la sección introductoria de "Sheaves in Geometry and Logic: a First Introduction to Topos Theory" de Mac Lane y Moerdijk.

Capítulo 1

Contexto filosófico

Hegel afirma en la introducción a sus *Conferencias sobre la Historia de la Filosofía* [*Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*]:

> Los actos de pensamiento se nos presentan en primera instancia como sujeto de la historia, y por lo tanto, elementos del pasado y externos a nuestra existencia actual. En realidad somos lo que somos a través de la historia: o de manera más precisa, como en la historia del Pensamiento [sic], lo que se encuentra en el pasado es simplemente un lado, mientras que en el presente lo que tenemos como una posesión permanente está conectada de manera esencial con nuestro lugar en la historia [Hegel 1840 / 1892-6, Introducción, para. 4].

El filósofo alemán absorbió ciertos elementos de la escatología cristiana que lo llevan a presentar su trabajo como el paralelo filosófico a la llegada del Mesías y, por tanto, a su sistema filosófico como el Juicio de las escuelas de pensamiento que le anteceden, creyéndolo la expresión absoluta y definitiva de la filosofía.

Resulta de vital importancia pues, trazar genealógicamente las principales influencias de su pensamiento, con el fin de penetrar de manera más completa en el pensamiento de *La Ciencia de la Lógica* (de ahora en adelante abreviado como *WdL* por su título en alemán). En esta sección se abordarán las principales deudas intelectuales que debe Hegel a Parménides, Aristóteles, Spinoza, Kant y Fichte.

Para las exposiciones de los siguientes filósofos recurriremos frecuentemente al análisis que Hegel mismo hizo sobre sus trabajos. Es importante mencionar que aunque en su tiempo fue un referente de la filosofía occidental y de la historia de esta, Hegel es a veces culpable de hacer énfasis especial en aquellas características que unían genéticamente su trabajo con el de sus antecesores, sin embargo, siendo que el propósito de esta primera parte del trabajo es entender el contexto de *WdL*, lo esencial es justamente adoptar una posición Hegeliana durante el análisis que sigue.

1.1. Parménides

"Parménides comenzó la filosofía propiamente" [Hegel 1840 / 1892-6, 1.C.2].

El pensamiento del filósofo pre-Socrático Parménides consta el punto de partida necesario para comprender la parte metafísica del programa que Hegel expone en *WdL*.

La filosofía de Parménides fue un punto seminal para la filosofía griega, pues el argumento que sostiene en lo que probablemente fue su único trabajo escrito (un poema metafísico conocido como *Sobre la Naturaleza*), marca un punto de inflexión entre los pensamientos cosmogónicos de sus antecedentes y las teorías físicas más elaboradas que tomarían un papel central en la filosofía griega a partir de este momento. El argumento de dicho poema ha sido interpretado de diversas maneras, sin embargo la interpretación más útil es aquella ofrecida por Hegel mismo.

En el poema de Parménides, una diosa no identificada le presenta el conocimiento de aquello que 'es' (la noción de 'ser' despeñará un papel fundamental en *WdL*). La diosa afirma respecto de lo que 'es' que:

> siendo inengendrado es también indestructible,/ íntegro, único y también inmóvil y además perfecto./ Ni fue alguna vez ni será, puesto que ahora es a la vez todo,/ uno, continuo; pues, ¿cuál nacimiento buscaríasle [sic]?/ ¿cómo, desde dónde habría crecido? Y no permito que digas ni pienses/ que de "lo que no debe ser", pues ni decible ni inteligible/ es cómo no es. ¿Y qué necesidad lo haría surgir/ más tarde

> o más temprano, desde la nada naciendo, para ser? [Zubiría y Moral 2016, frag. 8.3-10].

Por lo anterior, Hegel propone que el pensamiento de Parménides es un monismo estático (identificando el concepto de *ser* de Parménides con la 'sustancia absoluta' de Spinoza que prohíbe el cambio y el movimiento (movimiento que para Hegel resulta necesario para distinguir lo que 'es' de lo negativo y por ende finito), y que falla en su entendimiento de aquello que no 'es'. Parménides presenta aquello que 'es' como la única y absoluta verdad y se refiere a su negación de la siguiente forma: "sólo ser es, y la nada absolutamente no es" [Hegel 1832 / 2010, 60].

1.2. Aristóteles

"Aristóteles tiene el mérito inmortal de haber reconocido las actividades del pensamiento abstracto, de reconocer y determinar las formas que el pensamiento toma dentro de nosotros" [Hegel 1802-6 / 1972, 602].

A propósito de la lógica (entendida en esta sección como aquella que Hegel denomina lógica subjetiva), uno debe comenzar una historia con el primer gran filósofo cuyo pensamiento nos sigue incluso hasta el día de hoy: Aristóteles. Aunque ya en el siglo V a.e.c. los Sofistas y poco más tarde, Platón, indagaban en la naturaleza de la verdad, la estructura de las oraciones y las falacias, es hasta Aristóteles que las investigaciones previas son formalizadas en un sistema deductivo. Los volúmenes compilados bajo el título de *Organon* desempeñan un papel tan fundamental en el pensamiento occidental que Kant afirmó que todo aquello que debiera de ser descubierto en el área de la lógica, lo había sido ya por Aristóteles.

El concepto del silogismo como base fundamental del pensamiento deductivo aparece en los *Primeros Analíticos* de la siguiente manera: "Una deducción es una oración (logos) en la cual, habiendo supuesto ciertas cosas, algo diferente de aquellas suposiciones resulta por necesidad por haber sido los anteriores supuestos" [Aristóteles c. 350 a.e.c, 1989, 1.2, 24b18-20].

Aquí las cosas supuestas son premisas de las cuales se deriva una conclusión por necesidad. Esto es equivalente a la noción contemporánea de la lógica matemática en la cual C se concluye necesariamente de A y B cuando es imposible que C sea falso cuando tanto A como B sean verdaderos. Para Aristóteles todo argumento puede ser reducido a una serie de silogismos.

Respecto al sistema deductivo desarrollado por Aristóteles presentado aquí de manera extremadamente introductoria, Hegel menciona en el prefacio de *WdL*: "[...] debe ser considerado como un progreso infinito que las formas del pensamiento han sido liberadas del material en el cual están sumergidas"[Hegel 1832 / 2010, p. 13]. De igual manera, en sus *Conferencias sobre la Historia de la Filosofía* afirma su admiración por el progreso logrado en la abstracción de pensamientos a las formas lógicas que les dan forma.

Sin embargo, menciona también:

> Lo que hemos indicado que constituye el principio de la ciencia y que hemos reconocido que es de gran valor tanto por su propia cuenta como también por ser la condición del conocimiento verdadero – a saber, el manejo de conceptos y de los momentos del concepto en general, de las determinaciones de pensamiento como formas que en un principio difieren de lo material y solamente estan ligadas a ello – este es un trabajo que rápidamente se muestra inadecuado de manera inherente para la obtención de la verdad lo cual es el objeto y el propósito de la lógica. Pues como meras formas, distinguidas del contenido, tales conceptos y sus momentos son tomados en una determinación que los califica como finitos y esto los hace no aptos para contener la verdad, que es infinita [Hegel 1832 / 2010, 17-18].

Es entonces claro que para Hegel el desarrollo de la lógica debido principalmente a Aristóteles era un primer paso importante en el desarrollo de una ciencia que él afirmó incompleta, y que él se dedicaría a completar. Ciertamente para Hegel la incompletitud del sistema deductivo de Aristóteles era conocida por este último pues observa en sus ya mencionadas *Conferencias sobre la Historia de la Filosofía* que el filósofo griego no se limitó a su lógica, pues de haber sido así, el tipo de argumentos que resultan por necesidad de las premisas supuestas en conclusiones nuevas habría sido incapaz de dar lugar a la metafísica aristoteliana. Aquí se comienza a apreciar la afinidad de Hegel por la parte especulativa de la filosofía, y conceptos como el espíritu y la ontología comienzan a dominar a la lógica tradicional.

Otro concepto que forma parte de la herencia filosófica de la que dispone Hegel (y tal vez en cierto sentido la más importante) es el uso de la dialéctica, herramienta que fue a su vez heredada de Sócrates a través de Platón. Hegel critica la concepción griega de la dialéctica y afirma que para los griegos es una herramienta de engaño, diseñada para subvertir argumentos de manera obsesiva, y en Aristóteles mismo se encuentran instancias donde este último sugiere que la dialéctica no forma parte del conocimiento universal.

Por último, Aristóteles concibió un sistema metafísico (que podría denominarse realista) que consistía en una lista de *categorías* cuyo propósito sería describir las clases más generales a las que tendría que pertenecer cualquier entidad (del mundo real). Las categorías que Aristóteles describe son las siguientes:[1]

- Sustancia
- Cantidad
- Calidad
- Relación
- Lugar
- Tiempo
- Postura
- Estado
- Acción
- Pasividad

1.3. Spinoza

“Spinoza constituye un punto tan crucial para la filosofía moderna que se podría decir que la decisión debe ser tomada entre ser un Spinozista o no ser filósofo en lo absoluto”[Hegel 1802-6, 1972, 3.1.A.2].

La principal idea que Hegel adopta y modifica del filósofo neerlandés Spinoza es aquella de [*omnis determinatio est negatio*] toda determinación es negación.

[1] Véase [Aristóteles c.350 a.e.c / 1963].

Para comprender este principio, es necesario abordar brevemente la metafísica modal de Spinoza, particularmente su monismo. Spinoza argumenta que cualquier sustancia existente, existe por necesidad (de aquí el calificativo de 'modal'), y sólo hay una sustancia que existe (Dios) y es esta la única sustancia que pudo haber existido, por tanto Dios concebido como la sustancia absoluta, existe necesariamente.

Entendido esto podemos exponer de manera satisfactoria el concepto detrás de la frase: toda determinación es negación. Aunque dicha frase no aparece de manera literal en el trabajo de Spinoza, el concepto detrás de ella aparece en su forma más elaborada en una carta a Jarig Jelles en 1674:

> Con respecto a la afirmación que la forma es una negación y no algo positivo, es obvio que la materia en su totalidad, considerada sin limitación [indefinitè consideratam], no puede tener una forma, y que la forma aplica solamente a aquello con cuerpos finitos y determinados. Para aquel que dice que comprende una forma, lo que quiere decir es simplemente que comprende una cosa determinada y la manera en la que esta se determina. Esta determinación por lo tanto no le pertenece a la cosa en relación a su existencia; por lo contrario, es a su no-existencia. Por lo tanto, dado que la forma no es nada más que determinación y la determinación es negación, la forma no puede ser otra cosa que negación, como ha sido afirmado [Spinoza 1674/1925, 240].

Para Spinoza entonces, la negación es el proceso por el cual se logra la separación de una forma particular de la materia universal, que logra así su determinación. Dado que su existencia es debida a la materia infinita de la cual ahora se ve separada, su determinación está ligada a su característica de no-existencia.

Hegel atribuiría esta idea a Spinoza y comentaría sobre su importancia en tanto *WdL* como también en su *Enciclopedia de la Lógica*, nuevamente con el propósito de conectar de forma artificial aquellas ideas en las que encontró inspiración, moldeando un árbol genealógico de la filosofía que lo tendría a él en la cumbre.

1.4. Kant

Al presentar las influencias de la filosofía de Immanuel Kant sobre aquella de Hegel, un debate natural surge en torno a la relación de ambas. Es seguro afirmar que los dos sistemas de pensamiento están inexorablemente unidos tan sólo por estar tan cerca en tanto tiempo como espacio, y por pertenecer ambos al idealismo alemán. La incertidumbre comienza al analizar su compatibilidad. Con el propósito de esclarecer dicha comptabilidad analizaremos las principales ideas de Kant en su *magnum opus* la *Crítica de la Razón Pura*.

Con este trabajo monumental del siglo XVIII, Kant apuntaba a lidiar con la crisis intelectual que tuvo lugar con el advenimiento de la Ilustración. En esta época, los valores tradicionales morales y religiosos estaban en una posición vulnerable, tras los descubrimientos de Newton y demás científicos prominentes, que sugerían un mundo regido por leyes mecánicas y que parecían significar que un cambio radical de paradigma sería necesario. La investigación filosófica que Kant llevaría a cabo tenía entonces como objetivo determinar de una manera estructurada si la metafísica sería posible. El significado particular de metafísica en Kant es "las cogniciones tras las cuales la razón apunta independientemente de toda experiencia" [Kant 1787 / 1998, Axii]. Dicho de otra forma, Kant tenía como propósito precisar la posibilidad del conocimiento *a priori* dentro del razonamiento humano. El idealismo trascendental que Kant propone en la *Critica de la Razón Pura* se puede reducir a la afirmación que los objetos que percibimos en el tiempo y el espacio son simplemente 'impresiones' de los objetos-en-sí, las cuales no existen independientemente de nuestros pensamientos. De la sustancia que constituye dichos objetos, Kant aseguró, no podemos saber nada.

De particular interés para proveer contexto es la sección titulada 'Lógica Trascendental'. En ella Kant sugiere una división de la lógica (como también lo haría Hegel) en tres partes. La primera división de la lógica es la 'lógica general', que define como aquella que "contiene las reglas de pensamiento absolutamente necesarias, sin las cuales el entendimiento no podría ser logrado" [Kant 1787 / 1998, A52/B76]. La lógica general está dividida a su vez en dos versiones: 'lógica general aplicada', en la que conceptos psicológicos como duda y convicción son de suma importancia, y lógica general 'pura' que es descrita como aquella que no tiene fuente en la experiencia, por lo tanto está constituída de elementos *a priori*. La segunda división, la 'lógica especial' es por otro lado aquella que "contiene las reglas para pensar de manera correcta sobre cierto tipo de objetos" [Kant 1787 / 1998, A52/B76] es decir es una herramienta subordinada a alguna ciencia particular, por lo que contienen principios sustanciales sobre aquella ciencia.

La última división de la lógica es la que da título a la sección, es decir la 'lógica trascendental'. En el marco de la estética (el estudio de la belleza) Kant determinó que existen intuiciones *a priori*, lo que sugería la posible existencia de conceptos o pensamientos de objetos *a priori*, el hecho de que dicha lógica trascendería dichos conceptos le otorga su nombre. La *lógica trascendental* lidiaría con el origen de nuestra concepción de los objetos. Para Kant la cuestión de cómo se da lugar a nuestra cognición está unido a las reglas que gobiernan dichas concepciones, por lo que esto representa una herramienta necesaria en su proyecto de lógica para soportar su tesis de idealismo trascendental.

La dialéctica como herramienta filosófica también fue desarrollada en el pensamiento de Kant. Hegel afirma en *WdL*:

> Kant tenía a la dialéctica en más alta estima- y esto constituye uno de sus más grandes logros- pues removió de ella la semblanza de arbitrariedad que tiene en el pensamiento ordinario y la presentó como una *operación necesaria del razonamiento*, [...] la idea general a la que dio justificación y crédito es la *objetividad del brillo reflectivo* y la *necesidad de la contradicción* que pertenece a la *naturaleza* de las determinaciones del pensamiento. [Hegel 1832 / 2010, 35].

En el mismo sentido que la dialéctica, Kant desarrolló las categorías de Aristóteles, nuevamente haciendo una aportación significativa que entraría al pensamiento Hegeliano en *WdL*. La principal diferencia entre ambos sistemas de categorías radica en que para Kant las categorías eran conceptuales, es decir, se referían nuestro aparato cognitivo y no a las entidades 'reales'. Las categorías que presentaría Kant en su *Critica de la Razón Pura* sin mucho desarrollo son las siguientes doce (divididas en cuatro grupos de tres):

- Cantidad: Unidad, Pluralidad y Totalidad
- Calidad: Realidad, Negación y Limitación
- Relación: Inherencia y Subsistencia, Causalidad y Dependencia y Comunidad
- Modalidad: Posibilidad, Existencia y Necesidad

Las categorías de Kant ayudan a definir el "mínimo que uno debe de poder decir de un objeto (*Gegenstand*) si dicho objeto quiere ser suficientemente reconocido *como objeto* cuando sea presentado a los sentidos"[Hegel 1832 / 2010, XXVIII].

1.5. Fichte

"Es el profundo y duradero mérito de la filosofía de Fichte el habernos recordado que las *determinaciones de pensamiento* deben ser exhibidas en su *necesidad*, y que es esencial que estas deben de ser deducidas" [Hegel 1830 / 1991, 84].

La filosofía de Fichte es una de oposición a la doctrina de Kant. El deber de la filosofía según Fichte es describir un punto de partida auto-evidente del cuál la filosofía teórica y práctica podrían ser derivadas, haciendo evidente de esta manera, la unidad inherente de la razón, unidad que para Fichte, Kant no pudo elucidar de manera convincente. Esta es la razón principal que lo lleva a iniciar su propia investigación filosófica que llamaría *Wissenschaftslehre*. Dicho término proviene del hecho que (para Fichte) la filosofía estaba hecha para determinar la posibilidad de cualquier ciencia (*Wissenschaft* en alemán), por lo que *Wissenschaftslehre* (o Teoría de la Ciencia) servía como un nombre más adecuado por su capacidad de remarcar la cualidad principal de la reflección filosófica.

En dicho programa, Fichte sugiere que, al contrario de Kant quien sostuvo la división de los objetos-en-sí (objetividad) y de la experiencia (subjetividad), sólo uno de estos aspectos podría fungir como la fundación de un proyecto filosófico.

Fichte selecciona la subjetividad pura como la base de su filosofía. Además, Fichte crítica la presentación de las categorías en el pensamiento de Kant, pues aunque mantiene que éste último puede asegurar que las categorías y las leyes que rigen el pensamiento surgen del intelecto, afirma que no hay un desarrollo convincente por el cual estas son derivadas. Fichte sugiere corregir este error comenzando con la premisa de la *acción del intelecto*, y usando dicha premisa y ninguna otra para mostrar el "rango entero de nuestras representaciones [apareciendo] gradualmente frente a los ojos del lector" [Fichte 1787-1800, 26].

De igual manera, Fichte establece una versión de la dialéctica de Kant que sería similar a la que Hegel usaría en todo su programa filosófico. Mientras que Kant elevó a la dialéctica a una operación necesaria del pensamiento, también mantuvo que las contradicciones que a las que a veces daba lugar el pensamiento dialéctico no podían contar como conocimiento. Fichte (nuevamente en oposición directa a Kant) argumentó que el razonamiento analítico o de antítesis involucraba sacar a relucir una oposición entre elementos que son comparados el uno con el otro, y que a diferencia del argumento tradicional de *reductio ad absurdum* que llevaría a rechazar cualquier conclusión a partir de dicha contradicción, era necesario establecer un tercer concepto que unificara los elementos de manera sintética.

Frecuentemente esta presentación de la dialéctica en términos de la triada de tesis, antítesis y síntesis es atribuida de manera errónea a Hegel, cuando Hegel mismo criticaba dicha terminología en el trabajo de Kant, y cuando fue Fichte quien desarrolló de manera completa dicho sistema.

En el capítulo siguiente será evidente la deuda enorme que Hegel debe al pensamiento de Johann Fichte, pues es indudablemente una constante fuente de inspiración para el pensamiento desarrollado en su trabajo *La Ciencia de la Lógica.*

Capítulo 2

System der Wissenschaft

Dado que la filosofía de Hegel fue desarrollada con el propósito de abarcar todas las áreas pertinentes a la filosofía, una presentación general del sistema resulta una desviación fructífera.

El libro *Fenomenología del Espíritu* [*Phänomenologie des Geistes*] funge como una introducción a la filosofía en sí. En este trabajo Hegel realiza una examinación de la consciencia y cómo esta aparece para sí misma y presenta la evolución de la mente o espíritu (*geist*) de manera histórica, la cual culmina con el 'conocimiento absoluto', concepto que Hegel presenta como el punto de vista necesario para poder comenzar a hacer filosofía. En cierto sentido, el texto que comprende *Fenomenología del Espíritu* tiene la intención de proveer al lector de las herramientas necesarias (*i.e.* espirituales) para emprender el entendimiento de la filosofía, en palabras de Hegel mismo, el libro: "examina la *preparación* para la ciencia desde un punto de vista a través del cual constituye una nueva e interesante filosofía y una 'primera ciencia' para la filosofía. Comprende dentro de sí mismo las variadas *formas del espíritu* como estaciones en el camino por el cual se convierte en conocimiento puro, es decir, espíritu absoluto" [Hegel 1832 / 2018, 468].

Como menciona Kaufmann, Hegel propone con su sistema entero y con *Fenomenología del Espíritu* en particular, que: "un filósofo no debe confinarse a opiniones que han sido previamente mantenidas sino penetrar detrás de ellas a la realidad humana que reflejan. No es suficiente considerar proposiciones, o el contenido de la consciencia siquiera; vale la pena preguntar en toda instancia qué tipo de espíritu podría considerar tales proposiciones, mantener tales opiniones, y poseer tal consciencia. En otras palabras, todo panorama, debe ser estudiado no solo como una posibilidad académica, sino como una realidad existencial" [Kaufmann 1978, 115].

El siguiente paso en el sistema de Hegel es *WdL*. Habiendo sentado las bases espirituales para comenzar la filosofía, Hegel fundamenta el sistema estableciendo bases lógicas y metafísicas (siendo estas dos ramas idénticas para Hegel), exponiendo las categorías de las cuales está comprendido el espíritu y con las cuales este último puede entenderse a sí mismo. El capítulo 3 presenta a mayor detalle la naturaleza de este trabajo.

En el segundo nivel se encuentra *Filosofía de la Naturaleza* [*Die Wissenschaft der Natur*]. Después de que el espíritu se comience a comprender a sí mismo, se entiende incompleto y fragmentado, por lo que se externaliza a la naturaleza, por lo que el trabajo funge como una guía para el entendimiento de las reglas (establecidas por el raciocinio) que sigue la materia (orgánica e inorgánica). Este texto tiene tres divisiones que son: Matemáticas/Mecánica, Física inorgánica (Física) y Física orgánica (Biología).

El punto culminante del sistema Hegeliano es *Filosofía del Espíritu* [*Die Wissenschaft des Geistes*]. Este trabajo lidia con el reconocimiento del espíritu y su encarnación en las ciencias sociales propias de una civilización desarrollada. Manteniendo la organización tríadica que caracteriza la mayoría de sus obras, la 'Filosofía del Espíritu' está dividida como sigue:

- Espíritu Subjetivo
  - Antropología
  - Fenomenología
  - Psicología
- Espíritu Objetivo
  - Ley
  - Moral
  - Ética
- Espíritu Absoluto
  - Arte
  - Religión
  - Filosofía

El espíritu subjetivo lidia con la humanidad, cuya existencia es el reflejo de la razón inherente a la naturaleza, es decir, una consciencia que puede verse reflejada en sí misma. Por otra parte, el espíritu objetivo expone las instituciones y organizaciones que se requieren para la disposición de la libertad de los humanos. El pináculo del edificio filosófico de Hegel es el espíritu absoluto que se expresa a sí mismo en: a) objetos diseñados con la expresión como único propósito (el arte); b) por medio de la fe y sus metáforas e imágenes (religión) y c) a través de conceptos puros (filosofía). De esta manera, el ápice del uso de razón y del entendimiento del espíritu es la filosofía.

Con un sistema que cubre (o intenta cubrir) todas las áreas de pensamiento, es fácil encontrar fallas en casi todas las investigaciones de Hegel, pues a pesar de la nobleza inherente a la tarea, el edificio filosófico construido con tanta dedicación inevitablemente colapsa bajo su propio peso. Hegel mismo reconoce que la exposición de su sistema tiene fallas incorregibles, preguntándose en "WdL": "¿Cómo sería posible pretender que el método que sigo en este sistema de lógica, o mejor dicho el método que este sistema mismo sigue dentro de sí, no podría admitir un mayor grado de perfección, de mayor desarrollo y detalles?"; concluyendo "Sin embargo, estoy convencido que este es el único método correcto" [Hegel 1832 / 2010, 33].

Capítulo 3

La Ciencia de la Lógica

La Ciencia de la Lógica fue publicada a comienzos del siglo XIX (1812-1816). El trabajo esta dividido en tres tomos: *La Doctrina de Ser* (1812), *La Doctrina de la Esencia* (1813) estos forman el primer volúmen: Lógica Objetiva y *La Doctrina del Concepto* (1816) que forma el segundo volúmen: Lógica Subjetiva.

Como fue mencionado previamente, el propósito de Hegel en este y sus demás trabajos era desarrollar un sistema filosófico completo, que corrigiera las deficiencias de aquellos que le antecedían. Con respecto a la lógica, Hegel se disponía a rectificar el error persistente en las filosofías que le antecedían de separar las formas de nuestra cognición del contenido mismo de la realidad. Durante los años previos a la realización de *WdL*, Hegel estudió de manera profunda los *Elementos* de Euclides, obra que ciertamente inspiró la metodología sistemática (y que podría llamarse proto-axiomática), en la que Hegel hace uso de la dialéctica como la principal herramienta (que toma la forma de los mencionados 'aufhebung' y 'unidad e identidad de opuestos'). Estas herramientas le permite generar de manera fundamentada y sin suposiciones[1] las categorías ontológico-lógicas que proveeran el marco conceptual de su sistema de pensamiento.

El texto apunta principalmente a desarrollar de manera completa la visión de Hegel respecto de la lógica. *WdL* presenta la siguiente división de esta:

[1] Provisto de que el lector se encuentre en la posición de *conocimiento absoluto* descrita en *Fenomenología del Espíritu*

- La lógica subjetiva (que se puede interpretar como la lógica tradicional desarrollada por Aristóteles). Hegel la define como sigue: "[...] es la lógica del *concepto*- de la esencia que ha asimilado su referencia a un ser o a su brillo reflectivo, y en su propia determinación ya no es externa sino algo subjetivo, libremente auto-subsistente, auto-determinante, o el *sujeto* en sí".[Hegel 1832 / 2010, 42].

- Por otro lado, Hegel define a la lógica objetiva como aquella que "toma el lugar de aquello otrora conocido como *metafísica* que se suponía la edificación científica del mundo, construída únicamente por *pensamientos*". (Hegel, 1832 / 2010, p. 42). En particular Hegel afirma que la lógica objetiva reemplaza a la ontología, es decir "la parte de la metafísica cuya intención es investigar la naturaleza de *ens* en general"[2] [Hegel 1832 / 2010, 42], pero que también abarca el resto de la metafísica con la cual se "buscara comprender con las formas puras del pensamiento substratos particulares como aquellos que fueron originalmente sacados de la imaginación [vorstellen] como el alma, el mundo y Dios" [Hegel 1832 / 2010, 42].

Las dos lógicas que presenta Hegel son trabajadas en volúmenes diferentes, pues las categorías de la lógica objetiva, siendo que describen tanto metafísica como lógica (que para Hegel son aspectos idénticos), son los fundamentos que se requieren para cualquier discurso, incluído la lógica tradicional.

No es adecuado sugerir que Hegel fue autor de aportaciones notables a la lógica tradicional, pues el contenido del segundo volúmen de *WdL* es simplemente un resumen estructural de la lógica aristoteliana, sin cambios importantes o notables. Por el otro lado, el logro absoluto de *WdL* es la construcción de las categorías, sobre lo cual Di Giovanni menciona que para Hegel "Kant y Fichte habían comenzado asumiendo demasiado- Kant, al introducir un esquema de categorías ya hechas que no desarrollaría y cuya existiencia no había deducido; y Fichte, al promover libertad como una causa supuestamente extra-conceptual" [Hegel 1832 / 2010, XXXIV].

[2]La palabra *ens* abarca los conceptos de *ser* y *esencia*

El contenido que será de interés para la formalización presentada en la segunda sección de esta tesis consta de las primeras dos secciones de la *Doctrina de Ser*.

3.1. *La Doctrina de Ser*

El primer volumen del libro lidia con el desarrollo de las categorías de pensamiento y realidad de Hegel. Para evitar el error de Kant, la estrategia de Hegel es establecer lo que para él sería el único posible punto de partida para la filosofía y sin otras suposiciones deducir las categorías. Por otro lado, mientras que Fichte intentó resolver la arbitrariedad de la presentación Kantiana de las categorías fundamentando su proyecto filosófico en el 'yo' (pues ningún otro concepto es mejor y más inmediatamente conocido que uno mismo), Hegel afirma que el 'yo' es sin duda alguna el concepto más concreto de todos, y que al purificarlo de tal propiedad se vuelve un 'yo' abstracto el cual no puede ser comprendido fácilmente, identificando dicha comprensión con "la elevación al punto de vista de conocimiento puro en el que la distinción entre sujeto y objeto ha desaparecido" [Hegel 1832 / 2010, 53], por lo que concluye que el subjetivismo absoluto de Fichte no es un punto de partido adecuado para la ciencia. Refiriéndose a dicho punto de partida, Hegel escribe: "no puede tener ningún contenido, pues cualquier contenido implicaría una distinción y la referencia de momentos distintos uno del otro, y por tanto una mediación". (Hegel 1832 / 2010, 48) y concluye "aquello que constituye el principio, el principio en sí mismo, debe ser tomado como algo que no puede ser analizado, tomado en su simple *inmediación vacía**, y por lo tanto como *ser*, como vacuidad absoluta" [Hegel 1832 / 2010, 52].[3].

Sein, Nichts, Werden

Sein es definido por Hegel de la siguiente manera: "*Ser, puramente ser* - sin ninguna otra determinación. En su inmediación indeterminada es igual no sólo a sí mismo y también indistiguible con respecto a otro, no tiene diferencia interna

[3](énfasis añadido)

ni externa. [...] Es indeterminación pura y vacuidad. - No hay *nada* que puede ser intuído a partir de él [...] Ser, la indeterminación inmediata es de hecho *nada*, y ni más ni menos que nada" [Hegel 1832 / 2010, 59].

El concepto de *sein* es *absolutamente inmediato*. Carece de todas las posibles determinaciones e inmediaciones, pues cualquiera de estas serían negaciones. En palabras de Hegel: "Si un contenido determinado, un ser determinado, es *presupuesto*, este ser, puesto que está *determinado*, se posiciona en referencia múltiple a otro contenido" [Hegel 1832 / 2010, 62]. Esto es similar a la *sustancia* de Spinoza, y como ella, el *sein* de Hegel no admite determinaciones pues niegan su cualidad absoluta, inmediata.

Siendo que *sein* constituye el inicio del sistema filosofo-científico de Hegel, éste hace referencia a múltiples instancias similares de conceptos similares en otros sistemas de pensamiento, de particular interés son el concepto de 'ser' de Parménides, el concepto de 'espacio' del filósofo alemán Friedrich Jacobi y el concepto de 'Brahma' de la filosofía religiosa hindú.

La siguiente descripción heurística de Jacobi (que concierne al 'espacio') es particularmente útil para elucidar el concepto de *sein* :

> Durante un tiempo debo intentar limpiamente de olvidar que en algún momento he visto cualquier cosa, escuchado, tocado o movido cualquier cosa, yo mismo explícitamente no exento de esto. Limpiamente, limpiamente, limpiamente debo olvidar todo movimiento, y permitir precisamente que este *olvido* sea mi preocupación más urgente, pues es la más difícil. Así como he usado el pensamiento para desvanecer las cosas, también debo perfectamente *deshacerme* de todas ellas, reteniendo nada excepto la intuición, que *violentamente* mantiene su lugar del infinito e *inmutable* espacio. No debo, por lo tanto, ni siquiera *pensarme* a mí mismo nuevamente *dentro* de él, como algo distinguido y sin embargo ligado en la misma medida a él, no puedo siquiera permitirme verme *rodeado* e *impregnado* por él, debo más bien *entregarme* completamente, volverme uno con él, transformarme en él, no debo permitir que quede ningún remanente de mí mismo excepto *ésta, mi intuición* misma, con el propósito de advertirlo como una representación verdaderamente auto-subsistente, independiente, individual y única [Jacobi en Hegel 1832 / 2010, 72].

La falta de determinaciones sobre el concepto puro de *sein* resultan en que este concepto inicial se desvanezca lógicamente al concepto de *nichts*, pues *nichts* es aquello absolutamente vacío que carece de determinaciones. Esta es la primera *unidad de opuestos* que presenta "WdL", que funge como la primera mitad del motor dialéctico con el que se producirán las categorías subsequentes. Hegel menciona: "por más que no existe posible distinción entre ellos; *no son idénticos* [...] su verdad es el *movimiento* del desvanecimiento inmediato del uno en el otro" [Hegel 1832 / 2010, 60]. A este movimiento Hegel lo llama: *werden*.

Werden consiste de lo siguiente: Al pensar a *sein* como aquello absolutamente inmediato, que no puede ser determinado, lógicamente uno recae en el concepto de *nichts*. Por otro lado, el considerar a *nichts* como un concepto, le otorgamos la característica de *ser* (*sein*). Es imposible entonces, considerar a cualquiera de los conceptos por separado.

Claramente este movimiento dialéctico se encuentra presente en el concepto de *sein* mismo, por lo que tiene sentido asegurar que la filosofía que Hegel presenta no requiere de un sujeto (*i.e.* es objetiva) y es ontológica. Una manera interesante de describir este proceso que Hegel llama lógico es la siguiente, ofrecida por Walter Kaufmann: "no [es] lógico en el sentido ordinario, sino en el sentido en el que [...] capullo, flor y fruta se suceden el uno al otro" [Kaufmann 1978, 132]. A esto Kaufmann lo llama una 'necesidad orgánica', y Hegel se refiere a ella (en el contexto de *WdL*) como *aufhebung*.

Aufhebung

"*Aufheben* y *Aufgehobene* constituyen uno de los conceptos más importantes de la filosofía [...] algo que es aufgehobenes es algo [al contrario de la nada] *mediado*; es algo no existente más que como un resultado que ha procedido de un ser; por lo tanto mantiene *dentro de sí* la *determinación* de la cual deriva" [Hegel 1832 / 2010, 83]

La palabra *aufhebung*[4] que utiliza Hegel para este concepto es una palabra particular que significa tanto '*mantener*' y 'preservar' como 'cesar' y '*causar el fin de*" [Hegel 1832 / 2010, 81-82].

Utilizando esta palabra Hegel mantiene que: "Algo es aufgehoben solo cuando haya entrado en una unidad con su opuesto; en esta determinación más particular, como algo reflejado, es conveniente llamarla un *momento*" [Hegel 1832 / 2010, 81-82].

Aufhebung funciona como el motor lógico, que resulta en la realización de nuevas categorías, a partir de las contradicciones (u oposiciones) encontradas de forma latente dentro de los conceptos que le anteceden. Es este tipo de cualidades de la filosofía Hegeliana que expresan de manera perfecta la obsesión del filósofo alemán con el espíritu, pues *aufhebung* no es una herramienta utilizada por un ser consciente y no es un fenómeno externo a las categorías, sino que es la realización de la unidad de opuestos entre un sólo concepto y su natural complemento, absolutamente distintos e igualmente inseparables.

Rosen [2013, 139] lo describe como: "el principio por el cual niveles elementales lógicos se diferencian y acumulan para formar niveles complejos superiores" y observa que: "Para poder entender cualquier momento lógico, debemos primero considerarlo por sí solo, después en oposición a su complemento, y finalmente como se encuentra preservado en el complemento en relación a la identidad dentro de la diferencia" [Rosen 2013, 139].

En el caso de *sein* y *nichts*, el movimiento, es decir su *unidad de opuestos* es *werden*, la realización de su inseparabilidad descrita en la subsección anterior, mientras que su *aufhebung* es *dasein*, en el cual *sein* y *nichts* se encuentran preservados como *momentos*

Dasein, Qualität

Dasein es aquello existente. Es *sein* que está determinado, donde ésta determinación es *qualität*. Dicho de otra manera, el concepto de *dasein* es entendido mejor

[4] Es interesante observar que la palabra *sublate* que se usa en inglés para este concepto fue introducida en la literatura anglosajona con el propósito explícito de funcionar como una traducción artificial y acertada de *aufhebung*.

como una negación de *sein* (en sintonía con Spinoza). Es importante resaltar que la negación 'no-ser' que caracteriza a *dasein* es expresamente distinto de *nichts*, que por su lado es vacuidad absoluta y por lo tanto no es una negación de *algo*. Al respecto de *dasein*, Houlgate [2005, 303] escribe que: "[dasein] *es*, pero en la medida que es, es *no*-ser".

En cuanto al concepto de *qualität*, existe una diferencia importante entre el significado que toma en la lógica especulativa de Hegel y su significado en cualquier otro contexto. *Qualität* para Hegel es la determinación que *es*, es decir la afirmación de su *no-ser*; no es la cualidad de algo (pues en este punto de la lógica no existe siquiera ese concepto) es decir no se debe entender como un predicado. *Qualität* es además casi indistinguible como concepto a *dasein* excepto que en *qualität*, la calidad negativa es la que toma precedencia (a diferencia de *dasein* cuyos aspectos positivos y negativos se encuentran en balance).

Dentro del concepto de *qualität* (y de *dasein*) se encuentran presentes como *momentos* tanto *sein* como *nichts*; haciendo énfasis en el primero de estos, *qualität* toma la forma de *realität*, o lo que es lo mismo: *realität* es la realización de *sein* dentro de *qualität*. Por otro lado *nichts* se vuelve el límite de la determinación de *qualität*, una *negation* general (es por esto que *qualität* es lo que *dasein* es y no es).

El desarrollo interior del concepto de *qualität* introduce entonces una nueva dupla mediada, a saber *realität* y *negation*, que como fue el caso con *sein* y *nichts* resultan ser idénticos y opuestos en el siguiente sentido: *dasein* consiste al mismo tiempo de ser real de forma negativa y ser negativo de forma real (no existe una concepción de uno de los dos que no esté vinculada de manera inherente al otro). A través del proceso de *aufhebung* que resuelve este movimiento dialéctico, se ven unificados como *momentos* de lo que Hegel llama *etwas*.

Etwas und Anderes

"*Etwas* es la *primera negación de una negación*, como una simple y existente auto-referencia" [Hegel 1832 / 2010, 89]. Hegel distingue entre las negaciones que resultan en *etwas* y comenta que la primera negación (encontrada en *qualität*) es una negación general, mientras que la segunda es concreta y absoluta (que proviene del *aufhebung*). De esta manera, ambas negaciones le permiten a *etwas* el poseer una referencia a sí mismo que no depende de lo que no *es*, a este proceso Hegel lo llama la 'mediación de sí mismo dentro de sí'. *Etwas* contiene dentro de sí los conceptos que le anteceden en *WdL*, por un lado el aspecto positivo (que se ha visto desarrollado en *sein* y *realität* Hegel afirma que es un *existente*, mientras que el aspecto negativo (que proviene de *nichts* y *negation*) se diferencia de *etwas*, resultando en *anderes*.

Como se ha hecho previamente, *etwas* contiene dos *momentos* dentro de sí: por un lado *ansichsein* es *etwas* en *oposición* a *anderes* (que corresponde a la realización del *momento sein*, y por el otro lado *sein-für-anderes* es *etwas* en *relación* a *anderes* (que a su vez es la realización de *nichts* dentro de *etwas*); estas cualidades se llaman determinación y constitución respectivamente.

Etwas deja de ser en el lugar de su límite, el cual comparte con *anderes*, pues *anderes* es un *etwas* en si en el lado opuesto del límite, por lo tanto tanto *etwas* como *anderes* están relacionados a través de su límite compartido. Este límite entonces determina las cualidades que *son* de *etwas* y las relaciona de manera inseparable con lo que no *es*, esta negación llevada al extremo (que se puede apreciar como el *momento* de *dejar-de-ser*) determina a *etwas* como algo finito.

Die Endlichkeit

"[Para lo finito] la hora de su nacimiento es la hora de su muerte" [Hegel 1832 / 2010, 101]. Hegel diferencia aquello que tiene limite de lo finito de la siguiente manera: lo limitado es negado por algo más, mientras que lo finito carga aquella limitación dentro de su propio ser; dicho de otra forma, "Lo finito para Hegel no es una relación entre una cosa y otra; es una relación entre el ser y el no-ser de una sola cosa" [Houlgate 2005, 372]. Esta propiedad de negación inherente en *sein* es contraria a las nociones de Spinoza y Parménides de *ser*, en particular la negación sugerida por Spinoza proviene de una acción externa y no de las cosas en sí. Esta noción es particularmente importante pues sugiere una nueva instancia del límite mencionado previamente, a saber, el límite entre *etwas* y *anderes* es compartido por ambos, es decir el límite de algo existe solamente en relación a otra cosa, mientras que *die schranke* es el límite inherente al *sein* de algo finito. La *schranke* o limitación de algo finito entonces presenta una negación de la naturaleza de ese algo, de lo que Hegel deduce que existe entonces la parte no realizada de la naturaleza de lo finito, lo que este *debería* de ser: *sollen*. *Sollen* es la cualidad de algo extendida virtualmente más allá de lo determinado por su limitación. *Schranke* y *sollen* son momentos idénticos y opuestos que a través de un nuevo proceso de *aufhebung* darán como resultado: lo infinito.

Die Unendlichkeit

Hegel distingue tres etapas del infinito: El infinito espurio, el progreso al infinito y el infinito verdadero. El primero es el resultado natural del proceso de *aufhebung* de lo finito, donde algo trasciende su limitación o restricción, revelando su naturaleza intrínseca de ser *unendliche*. En este sentido, lo infinito es meramente la negación de la cualidad de lo finito, por lo que es *etwas* cuyo *anderes* es lo finito, y por lo tanto tiene un límite peculiar y no es infinito en el sentido verdadero que Hegel busca. Esto tiene como resultado un movimiento eterno similar a *werden* que Hegel denomina el progreso al infinito, en el que lo infinito inmediatamente se reduce a ser finito nuevamente. Este proceso sin embargo, es sujeto a mutaciones con cada iteración pues "el infinito espurio deja de gozar de una identidad establecida e inicia un proceso de auto-trascendencia y auto-negación" [Houlgate 2005, 410]. Finalmente, es necesario una nueva instancia de *aufhebung* para que ambas etapas existan como momentos del verdadero infinito. Hegel menciona además que "El infinito verdadero [...] es *realidad* en un sentido superior del anterior" [Hegel 1832 / 2010, 119]. Esta *realität* superior Hegel la denomina: *das Ideelle*.

Das Fürsichsein

Fürsichsein es simplemente el regreso a *sein* desde el punto de vista de lo infinito, donde ahora esta cualidad es inmediata. La cualidad inmediata del infinito presente en *sein* es de suma importancia, pues significa que la determinación de *sein* ya no es dependendiente (siendo *etwas*) de su relación con *anderes*, sino que es determinación absoluta, es decir en *fürsichsein*, algo no está en relación determinante con otra cosa, sino que ambas cosas son simplemente *momentos* de *sein*. De esta manera *sein-für-anderes* de lo finito se vuelve *sein-für-eines*.

El límite abstracto de *fürsichsein* es *das eins*, similar a *sein* al comienzo del desarrollo categórico, con la particularidad que al estar diferenciado como un único, se posiciona en relación negativa a todo lo que le antecede, por esta razón, *das leere* es la cualidad de *das Eins* en su inmediación (que corresponde a su vez con *nichts*). Siendo este el caso, *das eins* no se relaciona con *anderes* como lo hacía siendo *etwas*, por lo que su auto-diferenciación supone la estipulación de un otro idéntico a sí mismo, por lo que a este movimiento (similar a *werden*) Hegel lo llama la *repulsion* de los *viele eins*. Esta *repulsion* conlleva a su vez su opuesto que es *attraktion* (en un proceso lógico similar a *etwas und anderes*), en donde *das Eins* vuelve a cobrar su carácter único. El *aufhebung* de y *repulsion und attraktion* es *quantität*.

Quantität

La cantidad pura entonces tiene la calidad de ser *eins*, pero a su vez está conformada de *viele eins*, que al haber sido sujetos a *repulsion und attraktion* (en ese orden) se encuentran no diferenciados y unidos en *quantität*. Los *momentos* de *repulsion und attraktion* se manifiestan en *quantität* como la propiedad de *diskretion* y *kontinuität* respectivamente.[5]

El resto de *La Doctrina de Ser* lidia con la versión particular (y cabe decirse en ocasiones anticuada) de filosofía de las matemáticas de Hegel, con el desarrollo de conceptos como: número, proporción, y el infinito numérico. Por esta razón no será de mucha utilidad presentarlas aquí.

[5]Esta noción particular se puede interpretar de manera similar a como Lawvere interpreta a Cantor en *Cohesive Toposes and Cantor's 'lauter Einsen'*, sugiriendo que incluso cuando no hace referencia explícita a Hegel, su proyecto matemático-filosófico esta profundamente influenciado por *WdL*.

Capítulo 4

El *Núcleo Racional*

> "Aunque fue propuesto hace casi 200 años, el método Hegeliano de análisis ha sido extensamente infrautilizado desde entonces; afirmaciones ideológicas 'conflictivas' que aseguran su inconsistencia o que lo descartan por ser demasiado maravillosamente fluido para ser matematizado han conspirado para prevenir que sea extensamente enseñado" [Lawvere, 1989, 52].

4.1. Adjunciones

"Para Lawvere [la conexión entre funtores adjuntos y contradicciones dialécticas] era profundamente significativa y permeaba totalmente la estructura y el desarrollo de las matemáticas"[Lambek 1981, 2].

El primer concepto que presentaremos será el de adjunción. William Lawvere sugirió que el concepto de adjunción funcionaba como una objetificación de la contradicción dialéctica Hegeliana por primera vez en su conferencia "Cuantificadores y Gavillas" en Francia en 1970 señalando que "[...] los principales pares de tendencias opuestas en matemáticas toman la forma de funtores adjuntos"[Lawvere 1970, 329].

Sean dos categorías $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ y dos funtores entre ellas $\mathbf{F} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{G} : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$. $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son funtores adjuntos (con $\mathbf{F}$ adjunto izquierdo y $\mathbf{G}$ adjunto derecho) en símbolos $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$ si $\forall X \in Obj(\mathbf{C})$, $Y \in Obj(\mathbf{D})$ (donde $Obj(\_)$ denota los objetos de la categoría indicada entre paréntesis) se tiene que la siguiente biyección es natural en X y en Y:

$$Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathbf{G}(Y)) \cong Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}(X), Y)$$

$$(X \xrightarrow{f} \mathbf{G}Y) \overset{\theta}{\longmapsto} (\mathbf{F}X \xrightarrow{g} Y) \tag{4.1}$$

($Hom_{\mathbf{C}}(W, Z)$ denota el conjunto de los morfismos con dominio W y codominio Z en la categoría indicada por el subíndice).

En este caso la naturalidad significa que para cualesquiera morfismos $\xi : X' \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$ y $\psi : Y \longrightarrow Y'$ en $\mathbf{D}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}(X), Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "Hom(\mathbf{F}\xi,\psi)"] & Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathbf{G}(Y)) \arrow[d, "Hom(\xi,\mathbf{G}\psi)"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}(X'), Y') \arrow[r, "\cong"] & Hom_{\mathbf{C}}(X', \mathbf{G}(Y'))
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama anterior se reduce a la siguiente ecuación:

$$\theta^{-1}(\psi \circ g \circ \mathbf{F}\xi) = \mathbf{G}\psi \circ \theta^{-1}(g) \circ \xi \tag{4.2}$$

Una adjunción lleva asociados un par de familias de morfismos llamados *unidad* y *counidad*. Dada una biyección θ como en (4.1) y un objeto $X \in Obj(\mathbf{C})$ y sustituyendo $Y = \mathbf{F}X$ obtenemos un mapeo único:

$$\eta = \eta_X : X \longrightarrow \mathbf{GF}X$$

tal que $\theta(\eta_X) = id_{\mathbf{F}_X}$. Al morfismo η_X lo llamamos la *unidad* en X. Haciendo ahora $\xi = id_X$, $Y = \mathbf{F}X$, $f = \eta$, $\psi = g$ en los siguientes diagramas de composición:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & \mathbf{G}Y \arrow[d, "\mathbf{G}\psi"] & & \mathbf{F}X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X' \arrow[u, "\xi"] & \mathbf{G}Y' & \overset{\theta}{\cong} & \mathbf{F}X' \arrow[u, "\mathbf{F}\xi"] & Y' \end{tikzcd}$$

El diagrama izquierdo se vuelve la composición $X \xrightarrow{\eta_X} \mathbf{GF}X \xrightarrow{\mathbf{G}g} \mathbf{G}Y$, por lo que η_X determina la adjunción pues $\theta(g) = \mathbf{G}g \circ \eta_X$ lo que significa que cada f determina de manera única una g que hace al triángulo del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{GF}X \arrow[d, dashed, "\mathbf{G}g"] & & \mathbf{F}X \arrow[d, dashed, "g"] \\ & \mathbf{G}Y & & Y \end{tikzcd}$$

Esta condición se denomina la *universalidad* de η_X entre las flechas $X \longrightarrow \mathbf{G}Y$ Esto implica que dado un funtor $\mathbf{G}$ su adjunto izquierdo (en el caso de que exista) es único (sin contar isomorfos naturales).

Por otro lado, la condición de naturalidad expresada previamente implica que η_X para objetos X variables de la categoría $\mathbf{C}$ constituyen una transformación natural $\mathbf{Id_C} \xrightarrow{\eta} \mathbf{GF}$.

El concepto dual al de *unidad* en una adjunción es la *counidad*. Sustituyendo en (1.1) $X = \mathbf{G}Y$ y siguiendo un proceso análogo al expuesto en el caso de la *unidad* obtenemos:

$$\epsilon = \epsilon_Y : \mathbf{FG}Y \longrightarrow Y$$

Esto define una transformación natural (de manera análoga a lo anterior) $\mathbf{FG} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Id_D}$. La propiedad universal de ϵ es que para todo morfismo $\mathbf{F}X \xrightarrow{g} Y$ existe una f única que hace al triángulo del siguiente diagrama conmutar:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "f"] \\
\mathbf{G}Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}X \arrow[d, dashed, "\mathbf{F}f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbf{FG}Y \arrow[r, "\epsilon"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Realizando las sustituciones $Y = \mathbf{F}X$ y $g = id_{\mathbf{F}X}$ en el diagrama anterior (y las sustituciones análogas en el diagrama correspondiente de la *unidad*) obtenemos las llamadas *identidades triangulares*: [1]

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[d, "\mathbf{F}\eta"'] \arrow[dr, "id"] & \\
\mathbf{FGF} \arrow[r, "\epsilon\mathbf{F}"] & \mathbf{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \arrow[r, "\eta\mathbf{G}"] \arrow[dr, "id"'] & \mathbf{GFG} \arrow[d, "\mathbf{G}\eta"] \\
& \mathbf{G}
\end{tikzcd}
$$

Algunos ejemplos de adjunciones como objetificaciones del proceso contradictorio de la dialéctica son:

- Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ pre-órdenes de fórmulas de cálculo proposicional interpretando $\leqslant$ como $\vdash$. Dada cualquier fórmula p, definimos $\mathscr{F} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $\mathscr{G} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ como sigue:
$$\mathscr{F}(a) = p \wedge a, \mathscr{G}(b) = p \implies b$$
Estos son funtores adjuntos pues $a \vdash p \implies b$ si y sólo si $p \wedge a \vdash b$ y bajo el marco conceptual de Lawvere, esta adjunción procede desde el funtor $\mathscr{F}$ y la noción de conjunción al funtor $\mathscr{G}$ y la noción *opuesta* de implicación que se encontraba implícita ya en la primera noción.

- El funtor $\Omega : Top \longrightarrow Loc$ que manda a un espacio topológico X al local de sus abiertos tiene como adjunto derecho el funtor $pt : Loc \longrightarrow Top$ que envía a un local al espacio topológico de sus puntos. La adjunción $\Omega \dashv pt$ exhibe la oposición de la topología *con puntos* y la topología *sin puntos*.[2]

Otra definición que será necesaria próximamente será la de mónada.

[1] Véase [Mac Lane, Moerdijk 1994, 19].

[2] Para más detalles sobre ésta conexión entre la categoría de espacios topológicos y la categoría de locales véase [Johnstone 1983].

Para una categoría $\mathbf{C}$ una mónada es un endofuntor $\mathbf{T} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ junto con transformaciones naturales $\mathbf{Id_C} \xrightarrow{\eta} \mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbf{T}$ que cumplen las siguientes características.

- $\mu \circ \mathbf{T}\mu = \mu \circ \mu\mathbf{T}$

- $\mu \circ \mathbf{T}\eta = \mu \circ \eta\mathbf{T} = \mathbf{Id_T}$

En forma de diagramas esto es:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}^3 \arrow[r, "\mathbf{T}\mu"] \arrow[d, "\mu\mathbf{T}"] & \mathbf{T}^2 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbf{T}^2 \arrow[r, "\mu"] & \mathbf{T}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{T} \arrow[r, "\eta\mathbf{T}"] \arrow[d, "\mathbf{T}\eta"] \arrow[dr, equal] & \mathbf{T}^2 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbf{T}^2 \arrow[r, "\mu"] & \mathbf{T}
\end{tikzcd}$$

Las mónadas son una categorificación del concepto de monoide, por lo que el primer diagrama puede ser interpretado como la asociatividad de la operación binaria (μ), mientras que el segundo diagrama nos indica la existencia de un elemento neutro o *unidad* (en este caso η).

Dualmente, la co-mónada es una mónada en $\mathbf{C}^{op}$ por lo que revirtiendo la orientación de las flechas obtenemos la definición de co-unidad y co-multiplicación.

Toda adjunción $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}, \eta, \epsilon \rangle$ entre categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ induce una mónada en $\mathbf{C}$, a saber el endofuntor $\mathbf{T} = \mathbf{GF}$ cuya unidad será la unidad de la adjunción y cuya multiplicación se define como sigue: $\mu = \mathbf{G}\epsilon\mathbf{F} : \mathbf{GFGF} \longrightarrow \mathbf{GF}$. [3]

Dado el hecho anterior, una forma de pensar las mónadas es como una adjunción vista desde la categoría $\mathbf{C}$ (dualmente una co-mónada es la adjunción desde la perspectiva de $\mathbf{D}$)

[3] Para una demostración veáse Saunders MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, pág 145.

4.2. *Unidad e Identidad de Opuestos*

El concepto de *unidad e identidad de opuestos* fue formalizado en el lenguaje categórico por Lawvere en el artículo “Display of Graphics and their Applications, as exemplified by 2-categories and the Hegelian “taco”” a través del concepto de *adjunción modal* (originalmente bajo el nombre de unidad e identidad de opuestos y más tarde como cilindro adjunto).

Sean dos categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. Consideremos la situación de una adjunción triple: $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G} \dashv \mathbf{H}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[d, shift right=6, "\mathbf{F}"'] \arrow[d, shift left=6, "\mathbf{H}"] \\ \mathbf{D} \arrow[u, "\mathbf{G}" description] \end{tikzcd}$$

donde $\mathbf{F}, \mathbf{H}$ son funtores fieles y plenos, es decir $\forall\ X, Y \in Obj(\mathbf{C})$ la función $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \mapsto Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}X, \mathbf{F}Y)$ es biyectiva.

Proposición 4.2.1. *La mónada* $\mathbf{HG}$ *determinada por la adjunción* $\mathbf{G} \dashv \mathbf{H}$ *donde* $\mathbf{H}$ *es fiel y pleno es idempotente, es decir la multiplicación asociada* $\mu : \mathbf{HGHG} \longrightarrow \mathbf{HG}$ *es un isomorfismo.*

Demostración.

Lema 4.2.2. $\mathbf{H}$ *es fiel y pleno* $\iff$ *la counidad* ϵ *de la adjunción* $\mathbf{G} \dashv \mathbf{H}$ *es un isomorfismo natural.*

Demostración. Sean $a \in Obj(\mathbf{D}), b \in Obj(\mathbf{C})$, $\theta : Hom_{\mathbf{C}}(\mathbf{G}a, b) \longrightarrow Hom_{\mathbf{D}}(a, \mathbf{H}b)$ el isomorfismo natural dado por la adjunción y sean $f : a \longrightarrow \mathbf{H}b$, $g : b \longrightarrow b'$ morfismos en $\mathbf{D}$ y $\mathbf{C}$ respectivamente. Gracias a la naturalidad de θ tenemos que $\theta(\mathbf{H}g \circ f) = g \circ \theta f$. Por otro lado tenemos $\epsilon_b = \theta(id_{\mathbf{H}b}) \implies \theta(\mathbf{H}g) = g\epsilon_b$ Por lo que el morfismo de composición

$$Hom_{\mathbf{C}}(b,b') \cong Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{H}b,\mathbf{H}b') \cong Hom_{\mathbf{C}}(\mathbf{GH}b,b')$$

dado explícitamente por $g \mapsto g\epsilon_b$ es un isomorfismo dado que $\mathbf{H}$ es pleno y fiel (y por la biyección dada por la adjunción). Por lo tanto concluimos que ϵ es un isomorfismo. □

Puesto que ϵ es un isomorfismo, tenemos también que la multiplicación de la mónada $\mathbf{H}\epsilon\mathbf{G}$ es un isomorfismo, es decir la mónada $\mathbf{HG}$ es idempotente.

□

Cabe observar que la co-mónada $\mathbf{FG}$ y mónada $\mathbf{HG}$ idempotentes (alternamente podemos considerar la mónada $\mathbf{GF}$ y la co-mónada $\mathbf{GH}$) resultantes de la adjunción triple son adjuntas, por lo que:

Definición 4.2.3. *Una adjunción modal es una co-mónada adjunta a mónada (o viceversa) inducidas por una adjunción triple* $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G} \dashv \mathbf{H}$ *donde* $\mathbf{F}, \mathbf{H}$ *son funtores fieles y plenos. Denotamos una adjunción modal (tipo co-mónada* $\dashv$ *mónada) de la siguiente manera:*

$$\Box \dashv \bigcirc$$ [4]

co-mónada - mónada

O alternamente

$$\bigcirc \dashv \Box$$

mónada - co-mónada

Decimos además que la composición de la co-unidad de la co-mónada y la unidad de la mónada exhiben la "unidad" de los opuestos:

$$UX : \Box(X) \longrightarrow X \longrightarrow \bigcirc(X)$$

[4]La notación hace referencia a la lógica modal, donde $\Box$ denota el operador modal *necesidad* y $\bigcirc$ denota el operador *posibilidad* puesto que en el contexto de una categoría con "suficiente" estructura, mónadas y co-mónadas idempotentes son modalidades en la teoría de tipos (i.e la lógica interna de la categoría). Para más sobre esta conexión véase el trabajo realizado por The Univalent Foundations Program (IAS), titulado *Homotopy Type Theory.*

Para Lawvere “En general [la modalidad izquierda] es el “no”-atributo de la [categoría] del cual [la modalidad derecha] es la forma pura” [Lawvere 1989, 66].

Los siguientes ejemplos funcionan como una presentación básica del concepto de adjunción modal:

Consideremos al conjunto de los números enteros con el pre-orden canónico $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. Desde el punto de vista categórico, dicho pre-orden es una categoría cuyos objetos son los números enteros y donde dados dos objetos x, $y \in \mathbb{Z}$ existe un morfismo $f : x \longrightarrow y$ si y sólo si $x \leqslant y$.

Ahora consideremos las inclusiones de las siguientes subcategorías plenas:

- $(\mathbb{Z}, \leqslant) \overset{par}{\hookrightarrow} (\mathbb{Z}, \leqslant)$
  $n \mapsto 2n$
- $(\mathbb{Z}, \leqslant) \overset{impar}{\hookrightarrow} (\mathbb{Z}, \leqslant)$
  $n \mapsto 2n + 1$

Consideremos además el funtor

$$(\mathbb{Z}, \leqslant) \xrightarrow{\lfloor -/2 \rfloor} (\mathbb{Z}, \leqslant)$$

$$n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$$

(El funtor que manda un número entero al número entero más grande que sea menor o igual al número racional $\frac{n}{2}$)

Estos funtores describen una adjunción triple:

$$par \dashv \lfloor -/2 \rfloor \dashv impar$$

que a su vez (dado que tanto *par* como *impar* son claramente fieles y plenos) inducen una modalidad adjunta:

$$Par \dashv Impar$$

en $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ donde

Par $:= 2\lfloor -/2 \rfloor$ (Es decir Par es la mónada $par \circ \lfloor -/2 \rfloor$)
Impar $:= 2\lfloor -/2 \rfloor + 1$ (Es decir, la co-mónada adjunta de Par: $impar \circ \lfloor -/2 \rfloor$)

Demostración. Para probar esta modalidad adjunta primero es importante hacer dos observaciones.
Observación 1: Dada la clasificación de los morfismos en categorías de pre-orden notemos que $\forall x, y \in (\mathbb{Z}, \leqslant)$ $Hom(x, y) = \{*\} \vee Hom(x, y) = 0$, es decir $x \leqslant y \vee x \nleqslant y$
Observación 2: La condición de adjunción entre dos funtores (covariantes en este caso) $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ es que $\forall c \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{D}$ $Hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}c, d) \cong Hom_{\mathcal{D}}(c, \mathcal{G}d)$ que en el caso que nos interesa de $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ y los funtores par, $\lfloor -/2 \rfloor$ e $impar$ se reduce a probar lo siguiente:

$par(n) \leqslant k \iff n \leqslant \lfloor k/2 \rfloor$ para probar la adjunción $par \dashv \lfloor -/2 \rfloor$
y $\lfloor n/2 \rfloor \leqslant k \iff n \leqslant 2k + 1$ para probar la adjunción $\lfloor -/2 \rfloor \dashv impar$

Ambas desigualdades son inmediatas a partir de la propiedad universal de la función piso. $\square$

Lo que esta modalidad adjunta captura es las nociones opuestas de *par* e *impar* en su sentido aritmético, que se ve unificada en la biyección entre ambos conjuntos en el contexto de una categoría que las subsume.

Otro ejemplo de similar naturaleza pero de la forma $\bigcirc \dashv \Box$ es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, \leqslant) \arrow[d, shift right=6, "\lceil - \rceil"'] \arrow[d, shift left=6, "\lfloor - \rfloor"] \\
(\mathbb{Z}, \leqslant) \arrow[u, hook, "i"]
\end{tikzcd}$$

Donde $(\mathbb{R}, \leqslant)$ y $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ son considerados órdenes lineales, i es la inclusión y su adjunto izquierdo es el funtor *techo* y su adjunto derecho es el funtor *piso*. Esta adjunción triple induce la modalidad adjunta:

$$Techo \dashv Piso$$

$Techo$ es la mónada idempotente $i \circ techo$

$Piso$ es la co-mónada adjunta idempotente $i \circ piso$

Esta modalidad adjunta hace aparente las instancias opuestas enteras de cualquier número real dada por el hecho que cualquier número entero se encuentra entre su *piso* y su *techo*, esta oposición es resuelta por $id_{\mathbb{Z}}$ vista como biyección entre la función techo y la función piso con dominio en los reales.

La diferencia entre las interpretaciones dadas (bajo el marco conceptual establecido por Lawvere) a las modalidades adjuntas del estilo $\square \dashv \bigcirc$ y $\bigcirc \dashv \square$ está en que las primeras constan de dos *momentos puros* opuestos y diferentes, que se inyectan a la categoría que los subsume de manera diferente, mientras que en las modalidades del segundo tipo existe un *único momento* que se proyecta de maneras opuestas desde la categoría que lo subsume.[5]

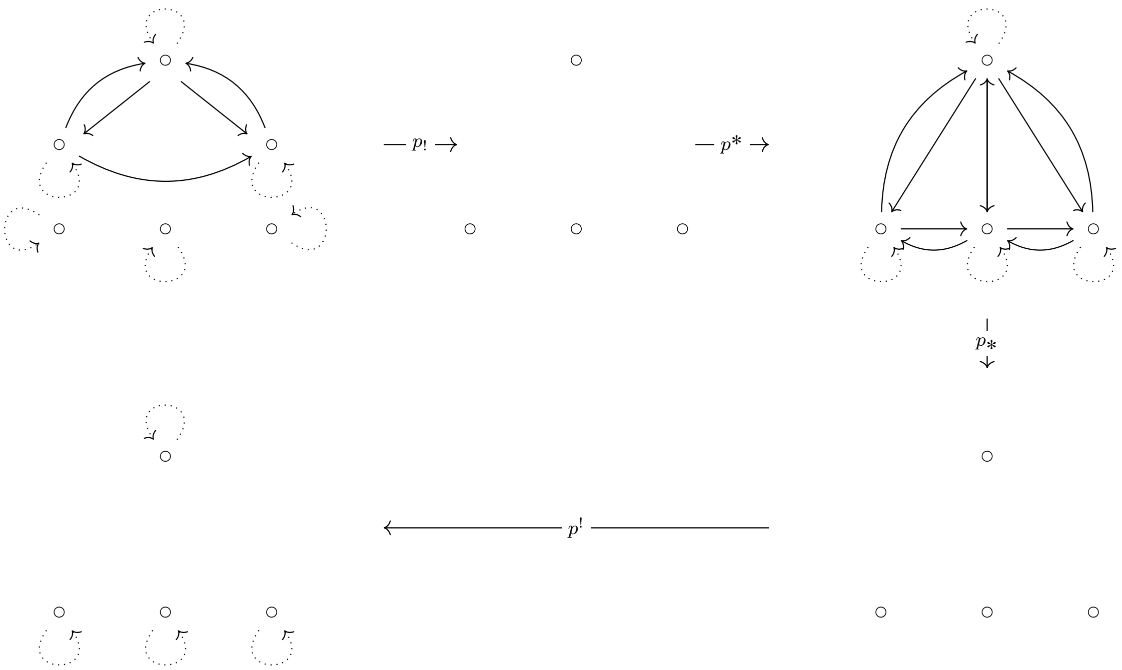
La categoría de gráficas reflexivas nos provee de un ejemplo visual para hablar de la unidad e identidad de opuestos. Una gráfica reflexiva es una gráfica donde cada nodo cuenta con un lazo distinguido (que funge como el morfismo identidad). Si tomamos ahora la categoría de todas las gráficas reflexivas (denotada por **GrafR**) observamos los siguientes funtores adjuntos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Con} \arrow[r, hook, shift left=1, "p^*" description] \arrow[r, hook, shift right=5, "p^!" description] & \mathbf{GrafR} \arrow[l, shift right=5, "p_!" description] \arrow[l, shift left=1, "p_*" description]
\end{tikzcd}$$

Donde el funtor $p_!$ mapea una gráfica reflexiva a sus componentes conexas, el funtor p^* asigna a un conjunto una gráfica con lazos entre cualesquiera dos nodos (discreta), p_* manda a una gráfica a sus puntos y $p^!$ asigna a un conjunto a una gráfica donde los únicos lazos son los lazos distinguidos (co-discreta).

De manera visual:

[5] Véase [Corfield 2020].



Esta cuadruple adjunción forma dos modalidades adjuntas que capturan las nociones dialécticas de lo discreto y lo codiscreto, así como de partes conexas y puntos. Más adelante se expondrá a más profundidad la noción de pre-cohesividad que supone esta adjunción cuadruple.

4.3. *Tractatus Lógico-Geometricus*

La formalización del concepto de *aufhebung* es particularmente fértil en el contexto de las categorías conocidas como *topos*. La introducción del concepto matemático de *categoría* debido a Saunders Mac Lane y Samuel Eilenberg en 1945, la axiomatización de categorías abelianas que introdujo Grothendieck en el *Artículo de Tôhoku* y la definición de adjunciones dada por Daniel Kan en la década de 1950 establecieron un precedente conceptual para la teoría de topos, la cual "unifica dos aspectos aparentemente completamente distintos, por un lado la topología y geometría algebraica y por el otro lado lógica y teoría de conjuntos" [Mac Lane, Moerdijk 1994, 1]. Los dos aspectos (geometría y lógica) tuvieron orígenes independientes en el trabajo de Alexander Grothendieck y William Lawvere, respectivamente. Dado que esta conexión resultará el motor principal detrás de la formalización de los conceptos Hegelianos explorados en el último capítulo, es un ejercicio valioso presentar ambas realizaciones del concepto de topos, comenzando por el aspecto geométrico: los *topos de Grothendieck*.

Definición 4.3.1. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría y* c *un objeto de ella. Una criba* S *es un subconjunto de* $Hom_{\mathbf{C}}(-, c)$ *cerrado bajo la pre-composición, es decir si existe un morfismo* $f : d \longrightarrow c$ *en la criba entonces dado cualquier morfismo* $g : b \longrightarrow d$*, la composición* $fg : b \longrightarrow c$ *pertenece a* S*.*

Definición 4.3.2. *Una topología de Grothendieck en una categoría* $\mathbf{C}$ *es una colección de cribas (llamadas cubrientes) para cada objeto* c *que satisfacen las siguientes condiciones:*

- *Si* S *es una criba cubriente sobre* c *y* $f : d \longrightarrow c$ *un morfismo cualquiera, entonces la criba* $f * S$ *(los morfismos con codominio* d *cuya composición con* f *está en* S*) es una criba cubriente sobre* d*.*
- *Para cualquier objeto* c *la criba maximal (i.e* $Hom_{\mathbf{C}}(-, c)$*) es una criba cubriente.*
- *Dos cribas* S*,* S' *son cubrientes si y sólo si* $S \cap S'$ *es una criba cubriente.*
- *Si* S *es una criba sobre* c *tal que* $\bigcup_d \{f : d \longrightarrow c | \ f * S$ *es una criba cubriente sobre* $d\}$ *es una criba cubriente entonces* S *también es cubriente.*

Al conjunto de cribas cubrientes sobre c *lo denotamos* $J(c)$

A una categoría $\mathbf{C}$ equipada con una topología de Grothendieck J se le llama *sitio*.

Definición 4.3.3. *Dado un sitio* $(\mathbf{C}, J)$ *una pregavilla es un funtor* $\mathbf{F} : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow Set$*, y una gavilla es una pregavilla que cumple con lo siguiente:*

Si $\{U_i \longrightarrow U\}$ *es una familia cubriente entonces el siguiente diagrama:*

$$\mathbf{F}(U) \longrightarrow \prod \mathbf{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathbf{F}(U_i \times_U U_j)$$

es un igualador.

Los topos de Grothendieck fueron concebidos por el matemático homónimo en su búsqueda de una generalización de la teoría de cohomología que se define en la topología, es por eso que Grothendieck decidió llamarlos así, pues el nombre tenía como propósito la sugerencia que "el objetivo de la topología es el estudio de los *topos* y no solamente de los espacios topológicos" [Grothendieck, Verdier 1972, 301] resaltando así su naturaleza geométrica y la intuición espacial asociada (generalizada a partir de la de un espacio topológico). Como menciona Colin McLarty "La generalización no es meramente formal. Muchos objetos que tuvieron su origen en la geometria clásica, y que actuaban más o menos como espacios clásicos pero no lo eran, eran precisamente topos" [McLarty 1990, 358].

Por el otro lado, durante los años 1969 y 1970 William Lawvere y Miles Tierney concentraron sus esfuerzos en presentar una axiomatización categórica de los topos de Grothendieck (Lawvere por su parte estaba motivado por la posibilidad de fundamentar teorías geométricas y físicas) que resultaron en los axiomas de topos elementales:

Definición 4.3.4. *Un Topos Elemental es una categoría $\mathscr{E}$ que cumple con lo siguiente:*

- *$\mathscr{E}$ tiene límites finitos.*
- *$\mathscr{E}$ es una Categoría Cartesiana Cerrada (CCC), es decir:*
  - *$\mathscr{E}$ tiene un objeto terminal (que denotamos $\ast$)*
  - *Para cualesquiera objetos X, Y en $\mathscr{E}$ existe el producto $X \times Y$*
  - *Para cualesquiera par de objetos X, Y en $\mathscr{E}$ existe la exponencial Y^X, es decir un objeto I y un morfismo $e : I \times X \longrightarrow Y$ tal que para cualquier objeto Z y para cualquier morfismo $g : Z \times X \longrightarrow Y$ existe un único morfismo $\bar{g} : Z \longrightarrow I$ que hace al siguiente diagrama conmutar:*

$$\begin{tikzcd} I \times X \arrow[r, "e"] & B \\ Z \times X \arrow[u, "\bar{g}\times X"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(Esta condición es equivalente a que el funtor $- \times Y$ tenga un adjunto derecho $-^{Y}$)

- *$\mathscr{E}$ tiene un clasificador de subobjetos, es decir un objeto Ω y un morfismo $verdad : 1 \longrightarrow \Omega$ tal que para todo monomorfismo $s : S \rightarrowtail A$ existe un único morfismo $\chi_S : A \longrightarrow \Omega$ que hace al siguiente diagrama un producto fibrado:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, tail, "s"'] & * \arrow[d, "verdad"] \\ A \arrow[r, "\chi_s"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

En Con los anteriores axiomas describen en orden las nociones familiares de:

- El conjunto con un único elemento $\{1\}$
- El producto cartesiano
- $B^A = \{f | f : A \longrightarrow B\}$
- $\Omega = \{0, 1\}$ y χ_s es la función característica usual.

Los topos elementales son interesantes por su estructura lógica, dado que se puede definir una lógica interna a partir de los objetos que definen *tipos*, productos (coproductos) que definen la conjunción (disyunción), los subobjetos que definen proposiciones, etc. Dicha internalización de la lógica es una realización de la lógica objetiva de Hegel, pues la lógica está determinada por los objetos que estudia, es decir es inherente a la estructura de la categoría en cuestión. [6]

Ambos conceptos de topos están relacionados por el siguiente hecho: todo topos de Grothendieck es un topos elemental (y no al revés),[7] esto reafirma lo que menciona Lawvere: existe una unidad de opuestos entre la lógica y la geometría, y de estos

[6]Véase [Rodin 2013]
[7]Véase [Caramello 2018]

"hay razones convincentes para afirmar que la geometría es el aspecto principal" (Lawvere, 1971, p. 329).

4.4. *Aufhebung*

Definición 4.4.1. *Sea $\mathscr{E}$ un topos. Un nivel* [8] *de $\mathscr{E}$ es una subcategoría i que cumple lo siguiente:*

- *i es reflexiva, es decir es una subcategoría plena y el funtor inclusión $i_* : i \hookrightarrow \mathscr{E}$ tiene un adjunto izquierdo i^* llamado reflexión.*
- *Es una localización, es decir la reflexión i^* preserva límites finitos.*
- *Es esencial, es decir la reflexión tiene un adjunto izquierdo (denotado $i_!$).*

Dado un nivel de un topos tenemos la siguiente adjunción triple:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[d, "i^*"] \\ i \arrow[u, bend left=60, "i_!"] \arrow[u, hook, bend right=60, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

donde además el funtor derecho es fiel y pleno (pues es una inclusión de una subcategoría plena).

Proposición 4.4.2. *$i_!$ es un funtor fiel y pleno.*

Demostración. Por el lema 4.2.2 tenemos que i_* es fiel y pleno $\iff$ la counidad ϵ de la adjunción $i^* \dashv i_*$ es un isomorfismo natural.

Observación: Una adjunción triple induce una co-mónada y mónada adjuntas en $\mathscr{E}$ (véase la sección "Unidad e Identidad" de Opuestos"). Por lo tanto $i_! i^* \dashv i_* i^*$

[8]La terminología usada es justificada por el resultado de Lawvere y G.M. Kelly en el artículo de 1989 *On the complete lattice of essential localizations* que los niveles de un topos dado forman una retícula completa.

son endofuntores adjuntos.

Observación: tenemos por el lema anterior que $i^*i_* \cong Id_i$ por lo que $i^*i_! \cong Id_i$ puesto que las adjunciones son únicas salvo isomorfía.
Por lo anterior tenemos que la unidad de la adjunción $i_! \dashv i^*$ es un isomorfismo.[9]
Usando la afirmación dual del lema 4.2.2 (es decir $i_!$ es fiel y pleno $\iff$ la unidad de la adjunción $i_! \dashv i^*$ es un isomorfismo) cuya prueba es análoga tenemos que $i_!$ es fiel y pleno. $\square$

Cabe señalar que la proposición anterior no hizo uso de detalles particulares a la adjunción triple dada, por lo que toda situación en la que algun funtor externo en una adjunción triple es fiel y pleno también cumple que el funtor externo opuesto también es fiel y pleno.

De la proposición anterior tenemos que la adjunción triple $i_! \dashv i^* \dashv i_*$ induce una *adjunción modal* en $\mathscr{E}$

$$\Box_i \dashv \bigcirc_i$$

dada por $\Box_i = i_!i^*$ y $\bigcirc_i = i_*i^*$

A partir de estas modalidades se definen los siguientes: [10]

- i-co-esqueleta: $X \in Obj(\mathscr{E})$ tal que $\bigcirc_i X \cong X$
- i-esqueleta: $X \in Obj(\mathscr{E})$ tal que $\Box_i X \cong X$

Definición 4.4.3. *Sean i, j niveles de un topos $\mathscr{E}$ decimos que i es inferior a j y lo denotaremos $i < j$ (haciendo referencia a la siguiente situación):*

$$\begin{array}{ccc} \Box_i & < & \Box_j \\ \perp & & \perp \\ \bigcirc_i & < & \bigcirc_j \end{array}$$

[9] Véase [Johnstone 2002, 4].
[10] La terminología viene del artículo del artículo *Levels in the toposes of simplicial sets and cubical sets* de Kennett, Riehl, Roy, Zacks

Si $\square_j \square_i(X) \cong \square_i(X)$ *(todo i-esqueleto es un j-esqueleto)*

y $\bigcirc_j \bigcirc_i (X) \cong \bigcirc_i(X)$ *(todo i-co-esqueleto es un j-co-esqueleto)*

Definición 4.4.4. *Sean* i, j *niveles de un topos* $\mathscr{E}$ *tales que* $i < j$*. Decimos que* j *resuelve la oposición del nivel* i *y denotamos* $i \ll j$ *si* $\bigcirc_j \square_i(X) \cong \square_i(X)$ *(es decir todo i-esqueleto es un j-co-esqueleto.)*

Definición 4.4.5. *Decimos que un nivel* j *de un topos* $\mathscr{E}$ *es el aufhebung de un nivel* i *(y lo denotamos con el siguiente diagrama)*

$$\begin{array}{ccc} \square_i & \ll & \square_j \\ \perp & \searrow & \perp \\ \bigcirc_i & \ll & \bigcirc_j \end{array}$$

Si $i \ll j$ *y* $\forall k$ *tal que* $i \ll k$ *tenemos que* $j \leqslant k$ *en el orden de la retícula de niveles. Es decir* j *es el nivel minimal con la propiedad resolver la oposición del nivel* i*.*

Es importante resaltar la diferencia entre el concepto de *aufhebung* y *unidad e identidad de opuestos*. Este último se refiere a las contradicciones aparentes (no formales, por supuesto) entre dos conceptos, y la unión que los exhibe como idénticos al mismo tiempo; por el otro lado, *aufhebung* es una condición que garantiza una resolución de la aparente contradicción, es un proceso constructivo en la filosofía Hegeliana que se refleja en el orden de los niveles en un topos, es decir, la única forma de entender (*i.e.* resolver) una contradicción dialéctica es dada la existencia de una categoría adecuada (en el sentido filosófico y matemático[11]) que disuelva la aparente contradicción y que la exhiba como un resultado de una perspectiva incompleta.

[11] La terminología de Mac Lane y Eilenberg de *categoría* fue escogida como una especie de referencia humorosa a las categorías de Aristóteles, Kant y Peirce. Sin embargo lo observado aquí justifica de manera seria la elección del término y evidencía un vínculo notable y accidental entre filosofía y matemáticas.

Capítulo 5

Niveles

El trabajo de William Lawvere tiene como uno de sus propósitos principales el estudio de *categorías de espacio y cantidad*, su investigación en teoría de categorías fue impulsada inicialmente por la búsqueda de una axiomatización de teorías físicas y es esto lo que continúa motivando esta área de su proyecto matemático, donde la lógica objetiva de Hegel es para él, entre otras cosas, "una de las herramientas para llegar a una concepción más adecuada de *espacio*" [Lawvere 1990, 2]. [1] En este capítulo exploraremos la relación entre las categorías espaciales a las que Lawvere se refiere y la lógica objetiva de Hegel presentada en *La Doctrina de Ser*.

5.1. Categorías de *ser*

Primero consideremos el siguiente resultado:

Proposición 5.1.1. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría,* $\boldsymbol{1}$ *la categoría terminal (la categoría con un único elemento y el morfismo trivial) y* $\mathbf{F}_{\boldsymbol{1}} : \mathbf{C} \longrightarrow \boldsymbol{1}$ *el funtor terminal. La categoría* $\mathbf{C}$ *tiene un objeto inicial (terminal) si y sólo si el funtor* $\mathbf{F}_{\boldsymbol{1}}$ *tiene adjunto izquierdo (derecho).*

Demostración. Supongamos que existe un objeto inicial $\varnothing$ en $\mathbf{C}$ y consideremos

[1] [Énfasis añadido].

el funtor $i_\varnothing : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}$ definido como $i_\varnothing(1) \mapsto \varnothing$

Sea $X \in Obj(\mathbf{C})$, $Y \in Obj(\mathbf{1})$ i.e. $Y = \mathbf{1}$
Por las definiciones de $i_\varnothing(1)$ y de objeto inicial tenemos que:

$$Hom_{\mathbf{C}}(i_\varnothing(1), X) = Hom_{\mathbf{C}}(\varnothing, X) \cong \{1\}$$

Por otro lado tenemos gracias a la definición de funtor terminal y por el hecho que solo existe un morfismo en la categoría terminal que:

$$Hom_{\mathbf{1}}(1, \mathbf{F_1}(1)) = Hom_{\mathbf{1}}(1, 1) \cong \{1\}$$

$\implies Hom_{\mathbf{C}}(i_\varnothing(1), X) \cong Hom_{\mathbf{1}}(1, \mathbf{F_1}(1)) \therefore i_\varnothing \dashv \mathbf{F_1}$
La implicación recíproca tiene una demostración análoga. De manera dual se concluye también que $i_*(\mathbf{1}) \mapsto *$ es adjunto derecho de $\mathbf{F_1}$ $\square$

Dada la proposición anterior tenemos que una categoría $\mathbf{W}$ con objeto inicial y terminal cuenta con una adjunción triple

$$\begin{tikzcd} \mathbf{W} \arrow[d, "\mathbf{F_1}"] \\ \mathbf{1} \arrow[u, shift left=6, "i_\varnothing"] \arrow[u, shift right=6, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

donde los funtores extremos son (trivialmente) fieles y plenos y por lo tanto existen *modalidades adjuntas* que denotaremos:

$$\varnothing \dashv *$$

$$\textit{nichts} \dashv \textit{sein}$$

$\varnothing$ - la co-mónada $i_\varnothing \circ \mathbf{F_1}$
$*$ - la mónada $i_* \circ \mathbf{F_1}$

Esto corresponde al concepto *werden* de *WdL*: [2] "*Convertirse* es esta síntesis inmanente de ser y nada" [Hegel 1832 / 2010, 72].

La *unidad* de esta adjunción modal por lo tanto está representada por el siguiente esquema:

$$UX : \varnothing \longrightarrow X \longrightarrow *$$

Este esquema a su vez captura la esencia de la siguiente afirmación de Hegel:

> "[...] no *hay* nada que no se encuentre en un *estado intermedio entre ser y nada*" [Hegel 1832 / 2010, 80].

Dado que todo topos tiene objeto inicial[3] y objeto terminal, este nivel está presente en todo topos.

Es importante notar que una categoría $\mathbf{W}$ dada en donde exista la adjunción modal *werden* no necesariamente tiene suficiente estructura para fungir como una categoría de espacio o como un contexto apropiado en el cual discutir el siguiente concepto de *La Doctrina de Ser*, a saber *dasein*.

Como ejemplo consideremos brevemente a $\mathbf{2}$, es decir la categoría:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[loop below] & 1 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

En esta categoría tenemos la *adjunción modal* de *nichts* y *sein*, sin embargo el esquema de la unidad se reduce al morfismo no trivial entre los dos elementos, por lo que no podemos hablar de ningún elemento que tenga alguna *determinación* en el sentido Hegeliano, ni mucho menos proveer a la categoría de alguna estructura espacial no trivial.

Lawvere propone que "la investigación de una categoría espacial dada puede ser guiada en parte por principios filosóficos" [Lawvere 1992, 28]. Y así como un topos

[2] Consultar página 19

[3] Véase [Mclarty 1992, 146]

sencillo provee un marco en el cual interpretar (inspirado por Hegel) la unidad e identidad de opuestos entre *sein* y *nichts*, menciona también que "dentro del sistema de subcategorías de la categoría investigada, uno puede encontrar una estructura de riqueza ascendiente paralela a aquellas de la Ciencia de la Lógica de Hegel" [Lawvere 1992, 28]. A continuación se presentarán algunos tipos de categorías espaciales y los paralelos que se pueden trazar entre sus interpretaciones geométricas y el pensamiento de Hegel presentado en el capítulo 3.

Definición 5.1.2. *Un topos $\mathscr{E}$ es casi-cohesivo respecto a otro topos $\mathscr{D}$ (en este contexto nos limitaremos al caso $\mathscr{D} = Con$) si existen cuatro funtores adjuntos* $\Pi_0 \dashv Disc \dashv \Gamma \dashv coDisc$

$$\begin{tikzcd} Con \arrow[r, hook, shift left=4.5, "Disc"] \arrow[r, hook, shift right=4.5, "coDisc"'] & \mathscr{E} \arrow[l, shift right=9, "\Pi_0"'] \arrow[l, shift left=0, "\Gamma"] \end{tikzcd}$$

donde:

- *Disc y Γ son un morfismo geométrico.*
- *Disc es fiel y pleno (por lo que coDisc también lo es).*
- Π_0 *preserva productos finitos (fuertemente conexo).*

Los nombres de los funtores son sugerentes y están escogidos para resaltar su intención geométrica. Π_0 se refiere a las componentes conexas, Γ se refiere a los *puntos*, mientras que *Disc* y *coDisc* hacen referencia a la topología discreta y codiscreta (o caótica) respectivamente.

Dados estos cuatro funtores obtenemos una adjunción modal triple:

$$\int \dashv \flat \dashv \sharp$$

$$\text{La modalidad “figura”: } \int = Disc \circ \Pi_0$$
$$\text{La co-modalidad “plana”: } \flat = Disc \circ \Gamma$$
$$\text{La modalidad “aguda”: } \sharp = coDisc \circ \Gamma$$

Como fue mencionado previamente, un topos casi-cohesivo tiene (en virtud de ser un topos) un objeto inicial y terminal, por lo que tenemos la adjunción modal *nichts* $\dashv$ *sein*, y dada la triple adjunción modal mencionada previamente, tenemos la siguiente configuración de niveles:

$$\begin{array}{ccc} \flat & \dashv & \sharp \\ \vee & & \vee \\ \varnothing & \dashv & \circledast \end{array}$$

Demostración. Primero observemos que:

- La $\varnothing$-esqueleta son los objetos isomorfos al objeto inicial.
- La $\circledast$-co-esqueleta son los objetos isomorfos al objeto terminal.

Lema 5.1.3. *Sean dos categorías* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *y dos funtores adjuntos entre ellas* $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$. *El adjunto derecho (izquierdo) preserva límites (co-límites).*

Demostración. Supongamos que tenemos un diagrama $I : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{D}$ tal que el límite $\varprojlim I_j$ existe en $\mathbf{D}$ Tenemos en virtud de la adjunción dada que para todo $X \in Obj(\mathbf{C})$:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathbf{G}(\varprojlim I_j)) &\cong Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}X, \varprojlim I_j) \\ &\cong \varprojlim Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}X, I_j) \\ &\cong \varprojlim Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathbf{G}I_j) \\ &\cong Hom_{\mathbf{C}}(X, \varprojlim \mathbf{G}I_j) \end{aligned}$$

(Donde la segunda y cuarta línea se tienen por la propiedad de preservar límites del funtor Hom.[4])

Por el lema de Yoneda tenemos entonces que:

$$\mathbf{G}(\varprojlim I_j) \cong \varprojlim \mathbf{G}I_j$$

[4]Véase [Rotman 2008, 235-236].

De manera análoga obtenemos que el adjunto izquierdo preserva co-límites. $\square$

Usando el lema con la adjunción $\flat \dashv \sharp$ tenemos entonces que:

$$\sharp * (X) \cong *(X) \cong 0 \text{ y}$$
$$\flat\varnothing(X) \cong \varnothing(X) \cong 1$$

$\square$

Dado que cualquier adjunción será superior a la adjunción $\varnothing \dashv *$ llamaremos a este el nivel fondo. Esta construcción (inherente al concepto de topos casi-cohesivo) nos otorga un nivel nuevo que es necesariamente superior al nivel fondo, sin embargo nuestra interpretación Hegeliana requiere que este nuevo nivel *resuelva* las oposiciones y por lo tanto satisfaga la condición de *aufhebung*. Esto no necesariamente sucederá en un topos casi-cohesivo arbitrario como lo ilustrará el siguiente ejemplo.

Ejemplo: El Topos de Sierpiński
Dada la categoría **2**, con la topología de Grothendieck trivial (es decir las únicas cribas cubrientes son la criba maximal en cada elemento), en este caso la categoría de gavillas sobre el sitio es isomorfa a $Con^{\rightarrow}$ (la categoría de morfismos entre conjuntos).

El topos de Sierpiński es casi-cohesivo (con respecto a Con) y los funtores asociados se definen de la siguiente manera:

$$\Gamma : (I \leftarrow S) \mapsto S$$
$$\Pi_0 : (I \leftarrow S) \mapsto I$$

Mientras que para un $A \in Obj(Set)$

$$Disc : A \mapsto (A \xleftarrow{id} A)$$
$$coDisc : A \mapsto (1 \leftarrow A)$$

Por lo que:

$$\flat : (I \leftarrow S) \mapsto (S \xleftarrow{id} S)$$
$$\sharp : (I \leftarrow S) \mapsto (1 \leftarrow S)$$

Para verificar que el Topos de Sierpiński no cumple con la condición de *aufhebung* entre $\varnothing \dashv \ast$ y $\flat \dashv \sharp$ (i.e. $\sharp 0 \cong 0$) primero probaremos un lema.

Lema 5.1.4. *Sea un topos $\mathscr{E}$ con un nivel asociado dado por una adjunción modal $\flat \dashv \sharp$ entonces $\sharp 0 \cong 0$ si y sólo si* $(\flat X \cong 0) \iff (X \cong 0)$

Demostración. Observación: En todo topos el objeto inicial es estricto[5] por lo que $(X \cong 0) \cong (X \to 0)$ Supongamos que $\sharp 0 \cong 0$

$$\begin{aligned}(X \cong 0) &\cong (X \to 0)\\ &\cong (X \to \sharp 0)\\ &\cong (\flat X \to 0)\\ &\cong (\flat X \cong 0)\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $(\flat X \cong 0) \iff (X \cong 0)$ Entonces para toda X

$$\begin{aligned}(X \to 0) &\cong (X \cong 0)\\ &\cong (\flat X \cong 0)\\ &\cong (\flat X \to 0)\\ &\cong (X \to \sharp 0)\end{aligned}$$

□

Dado que en el topos de Sierpiński $\flat(0 \to 0) = 0 \to 0 = \flat(0 \to X)$ por el lema anterior, tenemos que no se cumple la condición de *aufhebung*.

Geométricamente, un topos casi-cohesivo satisfacerá la condición de *aufhebung* entre *werden* (i.e. $\varnothing \dashv \ast$) y $\flat \dashv \sharp$ solamente cuando todas sus *piezas* tengan

[5] [Véase MacLane, Moerdijk 1994, 194]

puntos. Siendo este el caso lo llamaremos *topos cohesivo*.[6]

En los topos cohesivos podemos llamar a la adjunción modal $\flat \dashv \sharp$ *existencia* o *dasein*, pues según la Doctrina de Ser *dasein* es el siguiente paso tras *werden* y podemos referirnos entonces a cualidades presentes dentro de aquello que *existe*.

Usando lo anterior como motivación se presenta la siguiente definición:

Definición 5.1.5. *Una categoría de ser es un topos equipado de una adjunción modal (de tipo* $\square \dashv \bigcirc$*) que cumpla la condición aufhebung respecto al nivel fondo.*

Siguiendo el trabajo de Lawvere, Schreiber[7] presenta una interpretación inspirada en *La Doctrina de Ser* para las modalidades $\int$, $\flat$ y $\sharp$. Esta interpretación requiere de separar la adjunción triple en dos adjunciones a las que nos aproximaremos conceptualmente de manera distinta.

- Por un lado la adjunción $\int \dashv \flat$ representa de manera adecuada la oposición entre *attraktion und repulsion*, pues como ya fue mencionado, en una interpretación *espacial* la modalidad $\int$ está en oposición a $\flat$ en que la primera obtiene *piezas* cohesivas discretas mientras que la segunda obtiene *puntos cohesivos discretos*. Siendo que la adjunción es de tipo $\bigcirc \dashv \square$ tenemos que ambas modalidades expresan un sólo *momento* (el de ser *discreto*) que se proyecta de maneras opuestas, $\int$ en *piezas* y $\flat$ en *puntos*. A esta *unidad e identidad de opuestos* le llamamos *qualität*.
- Por el otro lado $\flat \dashv \sharp$ representa los *momentos opuestos diskretion und kontinuität*, pues mientras que $\flat$ crea una separación absoluta entre los puntos del *espacio* $\sharp$ une a todos en un sólo momento ininterrumpido, representando de manera perfecta las siguientes instancias del pensamiento de Hegel: "La cantidad es la unidad de estos momentos, de continuidad y de lo discreto" [Hegel 1832 / 2010, 154].
- La adjunción triple en sí formaliza de manera adecuada el concepto de *medida*, pues es la *unidad e identidad de opuestos* de *quantität* y *qualität*.

[6] Es importante mencionar que la noción aquí presentada como cohesión difiere por un axioma de aquella presentada en el artículo *Axiomatic Cohesion* de William Lawvere.

[7] [Véase nLab 2020, s. "Science of Logic"]

5.2. Universos

Los topos cohesivos nos proveen ya de una interpretación para una primera instancia de *aufhebung* y tres *unidades e identidades de opuestos*. En lo que sigue presentaremos *topos* a los que de manera axiomática otorgamos estructura extra.

Definición 5.2.1. *Sea* $\mathbf{H}_{red}$ *un topos cohesivo (respecto a* Con*) . Un topos* $\mathbf{H}$ *es elástico respecto* $\mathbf{H}_{red}$ *si existen cuatro funtores adjuntos:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}_{red} \arrow[r, hook, shift left=4.5, "\iota_{inf}"] \arrow[r, hook, shift right=1.5, "Disc_{inf}"] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right=1.5, "\Pi_{inf}"'] \arrow[l, shift left=4.5, "\Gamma_{inf}"']
\end{tikzcd}$$

Donde ι_{inf} *y* $Disc_{inf}$ *son fieles y plenos*

La cohesión de $\mathbf{H}$ en sí nos da el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Con \arrow[r, hook, shift left=1.5, "Disc"] \arrow[r, hook, shift right=4.5, "coDisc"] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right=4.5, "\Pi_0"'] \arrow[l, shift left=1.5, "\Gamma"']
\end{tikzcd}$$

Para ver la relación de ambos diagramas primero probaremos un lema:

Lema 5.2.2. *Sea* $\mathbf{H}$ *un topos cohesivo, entonces el morfismo geométrico* $\Gamma \circ Disc : Set \to \mathbf{H}$ *es único salvo isomorfismos.*

Demostración. *Observación* $\forall S \in Obj(Set)$, $S \cong \coprod_{s \in S} \{*\}$

Puesto que $Disc$ es adjunto izquierdo, preserva co-límites (lema 5.1.3), por lo que preserva el co-producto anterior. Al ser un morfismo geométrico, preserva también los productos finitos. Dado que $\{*\}$ es el producto del diagrama vacío, $Disc$ preserva

$\{*\}$. Por lo anterior $Disc$ queda fijado (salvo isomorfía) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Disc(S) &\cong Disc(\coprod_{s\in S}\{*\}) \\ &\cong \coprod_{s\in S} Disc(\{*\}) \\ &\cong \coprod_{s\in S}\{*\} \end{aligned}$$

Por lo que $Disc$ es único y dada la unicidad (de nuevo salvo isomorfismos) de las adjunciones, Γ también es único. $\square$

Dado el lema anterior, los funtores de los diagramas anteriores se relacionan según el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, hook, shift left=1, "Disc_{red}"] \arrow[rr, hook, bend right, "coDisc"'] & \mathbf{H}_{red} \arrow[l, shift left=3, "\Pi_{red}"'] \arrow[l, shift right=3, "\Gamma_{red}"] \arrow[r, hook, shift left=4, "\iota_{inf}"] \arrow[r, hook, shift right=1, "Disc_{inf}"] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right=1, "\Pi_{inf}"'] \arrow[l, shift left=4, "\Gamma_{inf}"] \end{tikzcd}$$

Donde $\Pi_0 = \Pi_{red} \circ \Pi_{inf}$, $\Gamma = \Gamma_{red} \circ \Gamma_{inf}$ y $Disc = Disc_{inf} \circ Disc_{red}$.

Tenemos entonces modalidades adjuntas que definiremos como sigue:

$$\Re \dashv \Im \dashv \&$$

La co-modalidad "reducción infinitesimal": $\Re = \iota_{inf} \circ \Pi_{inf}$

La modalidad "figura infinitesimal": $\Im = Disc_{inf} \circ \Pi_{inf}$

La co-modalidad "plana infinitesimal": $\& = Disc_{inf} \circ \Gamma_{inf}$

La estructura matemática obtenida en virtud de la *sustancia elástica* del topos **H** permite realizar geometría sintética diferencial, por lo que generalmente se le conoce a la propiedad de elasticidad como cohesión diferencial. Dicha propiedad permite la formulación de teorías de cohomología, geometría de Cartan y variedades.

Proposición 5.2.3. *La adjunción modal triple definida anteriormente se relaciona con las anteriores de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{ccccccc}
id & \dashv & id & & & & \\
\vee & & \vee & & & & \\
\Re & \dashv & \Im & \dashv & \& & & \\
 & & \vee & & \vee & & \\
 & & \int & \dashv & \flat & \dashv & \sharp \\
 & & & & \vee & & \vee \\
 & & & & \varnothing & \dashv & *
\end{array}$$

(donde la adjunción modal $id \dashv id$ es la trivial maximal y que por lo tanto resuelve las oposiciones de todos los niveles)

Es decir, es necesario mostrar que:

$$\&\flat X \cong X$$
$$\Im \int X \cong X$$

Demostración. Por el lema 4.2.2 tenemos que

$$\Pi_{inf} \circ Disc_{inf} \cong id_{\mathbf{H}_{red}} \qquad \Gamma_{inf} \circ Disc_{inf} \cong id_{\mathbf{H}_{red}}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\&\flat X &\cong Disc_{inf}\Gamma_{inf}Disc\Gamma X \\
&\cong Disc_{inf}\Gamma_{inf}Disc_{inf}Disc_{red}\Gamma X \\
&\cong Disc_{inf}Disc_{red}\Gamma X \\
&\cong Disc\Gamma X \\
&\cong \flat X
\end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}
\Im \int X &\cong Disc_{inf}\Pi_{inf}Disc\Pi X \\
&\cong Disc_{inf}\Pi_{inf}Disc_{inf}Disc_{red}\Pi X \\
&\cong Disc_{inf}Disc_{red}\Gamma X \\
&\cong Disc\Pi X \\
&\cong \int X
\end{aligned}$$

$\square$

Un proceso análogo demuestra que se cumple la condición *aufhebung* entre $\Im \dashv \&$ y $\int \dashv \flat$. Dicho *aufhebung* formaliza el paso en lo que lo finito se vuelve infinito.

La interpretación de las dos adjunciones modales resultantes serán presentadas a continuación:

- Por un lado la adjunción $\Im \dashv \&$, siendo el *aufhebung* de $\int \dashv \flat$ que representa la *qualität* y por ende la *existencia determinada* (que por ser determinada es negada y por tanto, finita) es identificada con el concepto de *das Ideelle*, pues según Hegel "Lo ideal puede ser llamado la cualidad de lo infinito" [Hegel 1832 / 2010, 120] en una transición a partir de lo finito capturado en el momento de *ser-por* que se proyecta de dos maneras distintas, *fürsichsein* ($\Im$) y *sein-für-eines* ($\&$).

- Por otro lado la adjunción $\Re \dashv \Im$ expresa dos momentos distinguidos, a saber lo finito y lo infinito respectivamente. La adjunción por tanto es la formalización de la *unidad e identidad de opuestos* entre lo real y lo ideal. Esta interpretación es justificada más profundamente por el hecho que la operación $\Re$ corresponde geométricamente a la eliminación de los infinitesimales (identificados a su vez con el infinito), mientras que $\Im$ corresponde a los objetos cuyas trayectorias infinitesimales son constantes. Por esta razón llamamos a la adjunción modal: *realität*.

- La adjunción triple entonces es la *unidad e identidad de opuestos* entre *idealität* (infinito puro) y *realität* (finito y determinado).

5.3. Un paso a lo que sigue

Podemos generar una estructura con más información, que nos permitirá una última instancia de *aufhebung*, cuya interpretación Hegeliana está al límite de los paralelos que podemos sensatamente trazar entre el proceso físico matemático y la doctrina expuesta en el trabajo del filósofo alemán, trascendiendo por primera vez los confines de *WdL* y procediendo al siguiente paso de su sistema filosófico encontrado en *La Filosofía de la Naturaleza* incluída en su libro *Enciclopedia de las Ciencias Filosóficas [Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse]*. Este último paso sugiere la posible utilidad de otros textos de G.W.F. Hegel como motor para desarrollar de manera guiada las conexiones en las fronteras de conocimiento entre matemáticas, física y filosofía.

Definición 5.3.1. *Sea $\mathbf{H}_{bos}$ un topos elástico sobre un topos cohesivo $\mathbf{H}_{red}$ (respecto a Set). Un topos $\mathbf{H}$ es un topos sólido (respecto a $\mathbf{H}_{bos}$ si existen cuatro funtores adjuntos*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathbf{H}_{bos} \arrow[r, hook, shift left=1.5ex, "\iota_{sup}" description] \arrow[r, hook, shift right=4.5ex, "Disc_{sup}" description] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right=4.5ex, "par" description] \arrow[l, shift left=1.5ex, "\Pi_{sup}" description] \end{tikzcd}$$

donde ι_{sup} y $Disc_{sup}$ son fieles y plenos.

Dada la elasticidad de $\mathbf{H}_{bos}$ y la cohesión de $\mathbf{H}_{red}$ tenemos la siguiente descomposición de los funtores (de manera análoga a los argumentos dados en el caso del topos elástico previamente):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \xleftarrow{\quad par \quad} & \\
 & & & \xhookrightarrow{\quad \iota_{inf} \quad} & & \xhookrightarrow{\quad \iota_{sup} \quad} & \\
 & \xleftarrow{\quad \Pi_{red} \quad} & & \xleftarrow{\quad \Pi_{inf} \quad} & & \xleftarrow{\quad \Pi_{sup} \quad} & \\
Con & & \mathbf{H}_{red} & & \mathbf{H}_{bos} & & \mathbf{H} \\
 & \xhookrightarrow{\ Disc_{red}\ } & & \xhookrightarrow{\ Disc_{inf}\ } & & \xhookrightarrow{\ Disc_{sup}\ } & \\
 & \xleftarrow{\quad \Gamma_{red} \quad} & & \multicolumn{3}{c}{\xleftarrow{\qquad\qquad\qquad \Gamma_{sup} \qquad\qquad\qquad}} & \\
 & \multicolumn{5}{c}{\xhookrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad coDisc \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}} &
\end{array}
$$

Dado un topos sólido $\mathbf{H}$ definimos las siguientes adjunciones modales:

$$\rightrightarrows \ \dashv \ \rightsquigarrow \ \dashv Rh$$

La modalidad "fermiónica": $\rightrightarrows = \iota_{sup} \circ par$

La co-modalidad "bosónica": $\rightsquigarrow = \iota_{sup} \circ \Pi_{sup}$

La modalidad "reónoma": $Rh = Disc_{sup} \circ \Pi_{sup}$

Proposición 5.3.2. *En virtud del diagrama anterior* $\mathbf{H}$ *es cohesivo respecto a Set y elástico respecto a* $\mathbf{H}_{red}$*, por lo que las adjunciones modales se encuentran relacionadas como sigue:*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
id & \dashv & id & & & & & & \\
\vee & & \vee & & & & & & \\
\rightrightarrows & \dashv & \rightsquigarrow & \dashv & Rh & & & & \\
 & & \vee & & \vee & & & & \\
 & & \Re & \dashv & \Im & \dashv & \& & & \\
 & & & & \vee & & \vee & & \\
 & & & & \int & \dashv & \flat & \dashv & \sharp \\
 & & & & & & \vee & & \vee \\
 & & & & & & \varnothing & \dashv & \ast
\end{array}
$$

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la de la proposición 5.2.3 por lo que se omite.

□

La estructura *sólida* provista por la definición de un topos sólido permite un entorno en el cual formular conceptos de *supergeometría*, que a su vez proveen un contexto matemático natural en el cual interpretar aspectos avanzados de la física cuántica.

La interpretación de la anterior adjunción modal $\rightrightarrows \dashv \rightsquigarrow$ es la siguiente:

- Identificando (de manera suficientemente adecuada) el concepto moderno de los bosones con el de la luz, tenemos que la modalidad bosónica corresponde con el concepto de luz pura encontrado en Hegel: "Siendo el ser abstracto de la materia, la luz es absolutamente desprovista de peso, y como materia, infinita, pero como ideal material es inseparable y simple ser fuera de si misma" [Hegel 1830 / 1970, § 220].
- La modalidad fermiónica por otro lado formaliza (imperfectamente) la noción de rigidez. "[La luz] tiene su antítesis real fuera de sí. Como un momento elementario de reflección se desvanece en sí y es una dualidad: a) de diversidad corpórea, de ser material de rigidez; b) una oposición como tal, la cual, existiendo independientemente y sin ser controlada por la individualidad, simplemente se hunde en sí misma y por lo tanto es disolución y neutralidad" [Hegel 1830 / 1970, § 223].
- La adjunción modal en sí representa la *separación de la materia*.

La construcción detallada en este capítulo mostró una progresión orgánica a partir del concepto de *sein* hasta teorías modernas de física cuántica y modelos matemáticos de *supergeometría* utilizando la llamada necesidad orgánica utilizada por Hegel y expuesta en los conceptos de *unidad e identidad de opuestos* y *aufhebung*. De esta forma hacemos explícita una conexión fértil entre las tres áreas de estudio, que justifica una gran porción del pensamiento Hegeliano, y que hace obvia la utilidad de programas como el de Lawvere.

Bibliografía

Aristóteles. (1963). *Categories.* (J. L. Ackrill Trad.) Clarendon Press. (Original c. 350 a.e.c)

Aristóteles. (1989). *Prior analytics.* (R. Smith Ed.) Hackett Publishing. (Original c. 350 a.e.c)

Breazeale, D. (2018) *Johann Gottlieb Fichte. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2018 Edition).* (Edward N. Zalta Ed.) Consultado Junio 2020 en https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/johann-fichte/

Caramello, O. (2018). *Topos Theory Lectures 7-8: Basic properties of categories of sheaves* Consultado Junio 2020 en http://www.oliviacaramello.com/Teaching/CambridgeToposTheoryCourseLectures7and8.pdf

Corfield, D. (2020). *Modal homotopy type theory: the prospect of a new logic for philosophy.* Oxford University Press.

Fichte, J. G. (1994). *Introductions to the Wissenschaftslehre and other writings, 1797-1800.* (Daniel Breazeale Ed.) Hackett Publishing. (Publicación Original 1797-1800)

Grothendieck A., Verdier J.L. (1972) *Topos.* (M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier Eds.) *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas SGA4.* Springer Verlag 299-519.

Hegel, G.W.F. (1892-6). *Lectures on the History of Philosophy.* (E. S. Haldane Trad.) Consultado Junio de 2020 en https://www.marxists.org/reference/archive

/hegel/works/hp/hpconten.htm. (Publicación Original 1840)

Hegel, G.W.F. (1972). *Leçons sur l'histoire de la philosophie, tome 3* (P. Garniron Trad.) Vrin.

Hegel, G.W.F. (2018). *Phenomenology of the Spirit.* (T. Pinkard, Trad.) Cambridge University Press. (Publicación Original 1832)

Hegel, G.W.F. (1970). *Hegel's Philosophy of Nature. Being Part Two of the Encyclopaedia of the Philosophical Sciences.* (A.V. Miller Trad.) Clarendon Press. (Publicación Original 1830)

Hegel, G.W.F. (1991). *The Encyclopaedia Logic.* (T.F. Geraets, W.A. Suchting, H.S. Harris Trad.) Hackett Publishing. (Publicación Original 1830)

Hegel, G.W.F. (2010). *The Science of Logic.* (G. di Giovanni, Trad.) Cambridge University Press. (Publicación Original 1832)

Houlgate, S. (2005). *The Opening of Hegel's Science of Logic.* Purdue University Press.

Johnstone, P.T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendiumm vol. 1.* Clarendon Press

Johnstone, P.T. (1983) *The Point of Pointless Topology. Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, 8.1.* Consultado Agosto 2020 en http://pointlesstopology.com/the-point-of-pointless-topology.pdf

Kant, I. (1998) *Critique of Pure Reason.* (Guyer, P., Wood, A.W. Trad. y Eds.) Cambridge University Press. (Publicación Original 1787)

Kaufmann, W.A. (1978). *Hegel: A Reinterpretation.* University of Notre Dame Press.

Kelly, G. M., Lawvere, F. W. (1989). *On the complete lattice of essential localizations.* University of Sydney. Department of Pure Mathematics.

Kennett, C., Riehl, E., Roy, M., Zaks, M. (2011). *Levels in the toposes of simplicial* *sets and cubical sets. Journal of Pure and Applied Algebra.* 215(5), 949-961.

Lambek, J. (1981). *The influence of Heraclitus on modern mathematics. Scientific Philosophy Today* Springer, 111-121

Lawvere, F. W. (2007). *Axiomatic cohesion. Theory and Applications of Categories.* 19, 41-49.

Lawvere, F.W. (1992). *Categories of Space and Quantity.* (J. Echeverría et al. Eds.) *The Space of Mathematics*, de Gruyter, 14-30

Lawvere, F. W. (1986). *Categories of spaces may not be generalized spaces as exemplified by directed graphs. Revista Colombiana de Matemáticas.* 20(3-4), 179-186.

Lawvere, F. W. (1994). *Cohesive toposes and Cantor's "lauter Einsen". Philosophia Mathematica*, 2(1), 5-15.

Lawvere, F.W. (1989). *Display of graphics and their applications, as exemplified by 2-categories and the Hegelian "taco".*(Fleck, A., Kirk, W. A. Eds.) University of Iowa *Proceedings of the First International Conference on Algebraic Methodology and Software Technology*, 51-75

Lawvere, F. W. (1971). *Quantifiers as sheaves. Proceedings of the International Congress of Mathematics* . Gauthier-Villars. 1506-1511

Lawvere, F.W. (1990). *Some Thoughts on the Future of Category Theory.* (Carboni, A., Pedicchio, M. C., Rosolini, G. Eds.) Springer Verlag *Category theory: proceedings of the international conference held in Como, Italy, July 22-28, 1990*, 1-13

Lawvere, F. W. (1994). *Tools for the advancement of objective logic: closed categories and toposes.* (Engel, P. Ed.) *The Logical Foundations of Cognition, Vancouver Studies in Cognitive Science,* 43-56.

Mac Lane, S. (1997). *Categories for the Working Mathematician.* Springer.

Mac Lane, S., Moerdijk, I. (1994). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer Science and Business Media.

Marmolejo, F. (2018). *Cohesión Axiomática*. (Video de conferencia dada en el Instituto de Matemáticas, 30 de enero del 2018). Consultado Junio 2020 en https://www.youtube.com/watch?v=Jtoktwv-V7g.

Mclarty C. (1992). *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Clarendon Press.

McLarty, C. (1990). *The uses and abuses of the history of topos theory. The British journal for the philosophy of science*. 41(3), 351-375.

Newlands, S. (2018) *Spinoza's Modal Metaphysics. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition).* E. N. Zalta Ed.) Consultado Junio 2020 en https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/spinoza-modal/.

nLab A. (2020). *Adjoint Modality*. Consultado Junio de 2020 https://ncatlab.org/nlab/show/adjoint+modality

nLab A. (2020). *Aufhebung*. Consultado Junio de 2020 https://ncatlab.org/nlab/show/Aufhebung

nLab A. (2020). *Geometry of Physics, Categories and Toposes*. Consultado Junio de 2020 https://ncatlab.org/nlab/show/geometry+of+physics+–+categories+and+toposes

nLab A. (2020). *Georg Hegel*. Consultado Junio de 2020 https://ncatlab.org/nlab/show/Georg+Hegel

nLab A. (2020). *Science of Logic*. Consultado Junio de 2020 https://ncatlab.org/nlab/show/Science+of+Logic

Pinkard, T. (1981). *Hegel's Philosophy of Mathematics. Philosophy and Phenomenological Research, Vol. 41, No. 4 (Junio, 1981)* 452-464

Program, T. U. F. (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Consultado Junio de 2020 en https://arxiv.org/abs/1308.0729.

Redding, P. (2020) *Georg Wilhelm Friedrich Hegel. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2020 Edition).* (E. N. Zalta Ed.), Consultado Junio 2020 en https://plato.stanford.
edu/archives/spr2020/entries/hegel/.

Rodin, A. (2013) *Axiomatic Method and Category Theory.* Consultado Junio de 2020 en https://arxiv.org/abs/1210.1478.

Rohlf, M. (2020) *Immanuel Kant. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2020 Edition).* (E. N. Zalta Ed.) Consultado Junio 2020 en https://plato.stanfo rd.edu/archives/spr2020/entries/kant/.

Rosen, S. (2013). *The Idea of Hegel's Science of Logic.* University of Chicago Press.

Rotman, J. J. (2008). *An Introduction to Homological Algebra.* Springer Science and Business Media.

Russell, B. (1945). *A History of Western Philosophy And Its Connection with Political and Social Circumstances from the Earliest Times to the Present Day.* Simon And Schuster.

Schreiber, U. (2013). *Differential cohomology in a cohesive ∞-topos.* Consultado en Junio 2020 en https://arxiv.org/abs/1310.7930v1.

Smith, R. (2020) *Aristotle's Logic. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition).* (E. N. Zalta Ed.) Consultado Junio 2020 en https://plato.stanf ord.edu/archives/sum2020/entries/aristotle-logic/.

Spinoza, B. (1925). Opera (Vol IV. C. Gebhardt. Ed.) C. Winter. (Carta de 1674)

Zubiría, M., Moral, J. J. (2016). *El poema doctrinal de Parménides.* Universidad Nacional de Cuyo.