



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

ANÁLISIS ELEMENTAL  
DE ESTRUCTURAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Ingeniero Civil**

PRESENTA:

**Víctor Hugo Negrete Villegas**

Asesor:

**Ing. Gustavo Adolfo Jiménez Villegas**



CIUDAD NEZAHUALCÓYOTL, EDO. DE MÉX 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a  
mi familia*

---

## **Prefacio.**

El estudio de las estructuras en la ingeniería civil, es un tema que da pauta para el diseño de estructuras resistentes, ya sea para cargas de servicio, como para acciones accidentales, tales como un sismo o el viento. El ingeniero estructurista debe contar con un conocimiento previo en materias como estática y mecánica de materiales para poder comprender conceptos un poco más avanzados como lo pueden ser rigidez y deformaciones, que son conceptos en los que se basa el análisis de estructuras. Criterios que se revisan a la hora de gestar una estructura nueva o revisar una existente, y que por lo general, las normativas de construcción toman en cuenta para establecer las características de una estructura, y limitarlas para tratar de que la estructura sea segura para el usuario.

## **Sobre la presente tesis.**

Se debe tener en cuenta que en la presente tesis se abarcan solo temas en dos dimensiones, debido a facilidad de cálculo, pero qué, como se sabe esto no ocurre en la realidad, pero sí establece las bases para análisis más avanzados y que si se comprenden adecuadamente los principios básicos, se podrán comprender sin mayor dificultad problemas más complicados. Este texto pretende dotar de un texto de consulta, ya sea para el profesor de la materia de Análisis estructural, así como para el alumno interesado en el estudio de las estructuras. Se utilizó un lenguaje sencillo, para que cualquier estudiante con nociones básicas de matemáticas y de física pudiera comprender los conceptos y los métodos de resolución de problemas. Se introdujeron problemas sencillos para explicar la teoría y la manera de realizar los respectivos cálculos. Los ejercicios van aumentando de dificultad para establecer un reto para el alumno o lector. El autor se basó en el temario de la materia de Análisis estructural de la Facultad de Estudios Superiores Aragón, para disponer el orden de los temas tratados, se incluyeron introducciones para algunos temas que en realidad están fuera de la asignatura pero que el autor consideró necesarios para la comprensión del contenido. El texto comienza con una breve introducción al estudio de las estructuras, capítulo I, donde se abordan temas que se consideraron necesarios. Principalmente la obra está dividida en dos partes, capítulos II y III, que son el análisis de estructuras determinadas, capítulos IV, V, y VI, donde se abordan estructuras indeterminadas. Se incluyeron numerosas ilustraciones para tratar de hacer más comprensibles los conceptos tan abstractos que se estudian en la materia. Por último se incluyeron dos apéndices, sobre como resolver vigas articuladas (Gerber) y sobre centroides y momentos de inercia; el primero debido a que es un tema que con frecuencia no se da la importancia adecuada, y que el autor consideró que se aplican principios básicos necesarios para la formación de un estructurista; el segundo, comprende de un repaso de las propiedades geométricas, que son bastante utilizadas en las estructuras, tales como los centroides y momentos de inercia.

---

## Agradecimientos.

*“Desear tan poco y conocer tanto como sea posible ha sido la máxima principal que ha guiado mi existencia”*  
(Arthur Schopenhauer).

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de alguna forma a la realización de esta tesis, ya todo lo que esta conlleva; es imposible nombrarlas a todas. En primer lugar, a mis padres y hermanas, por todo el apoyo brindado así como la paciencia dada a lo largo de toda la gestación de este trabajo. Pero principalmente al ingeniero Gustavo Adolfo Jiménez Villegas, profesor, compañero, pero sobretodo, amigo entrañable; y me doy la libertad de decirle lo que ha sido y sigue siendo para mí, ya que sin usted, sin su enseñanza y ejemplo, nada de esto, hubiera sucedido, y constatar que su trabajo y su empeño de profesor, continúan siempre vivos en uno de sus tantos alumnos, que, pese a los años no ha dejado de ser su alumno agradecido; y a su querida esposa, la ingeniera Carmen María Arias Díaz, personas con las que tengo una gran deuda por su incansable motivación para emprender este proyecto, así como por su constante aliento desde el primer día. A todas estas personas mencionadas y a las que no, agradezco enormemente.



# Análisis elemental de estructuras

Víctor Hugo Negrete Villegas

## Tabla de contenido

<b>I. Introducción.</b>	<b>8</b>
<b>II. Tipos de estructuras.</b>	<b>9</b>
II.1. Grado de determinación en las estructuras. . . . .	16
II.2. Apoyos. . . . .	17
II.3. Estabilidad. . . . .	18
<b>III. Métodos geométricos.</b>	<b>20</b>
III.1. Ecuación diferencial para la deflexión de vigas. . . . .	20
III.2. Método de la doble integración. . . . .	23
III.3. Viga conjugada. . . . .	52
III.4. Obtención de deformaciones. . . . .	57
<b>IV. Métodos energéticos.</b>	<b>72</b>
IV.1. Trabajo. . . . .	72
IV.2. Trabajo Virtual. . . . .	75
IV.3. Obtención de deformaciones. . . . .	79
IV.4. Primer teorema de Castigliano. . . . .	97
IV.5. Obtención de deformaciones. . . . .	100
IV.6. Vigas. . . . .	100
<b>V. Compatibilidad de deformaciones.</b>	<b>104</b>
<b>VI. Pendiente-Desviación.</b>	<b>108</b>
<b>VII. Método de las rigideces.</b>	<b>112</b>
<b>A. Vigas Gerber.</b>	<b>128</b>
<b>B. Centroides y Momentos de inercia.</b>	<b>144</b>

\*



## I. Introducción.

En este capítulo se brinda una introducción general a la materia a la cual está dirigido este material, que es el *análisis estructural*. Comenzando con definiciones básicas, a manera de repaso, para la comprensión de los temas abarcados en este trabajo, así como una introducción a los temas de *trabajo y energía*, de los que se partirá para poder entender y aplicar los métodos energéticos, que son bastante simples, versátiles y potentes a la hora de calcular deflexiones y giros, pero se debe comprender de dónde provienen los principios y las formulas, para usarlos de manera correcta. Se incluyen algunas demostraciones de este método, como también ejemplos numéricos. Posteriormente se abarcan los métodos geométricos, principalmente, el método de la viga conjugada, en donde se inicia con un poco de teoría y algunas demostraciones necesarias así como ejercicios numéricos, de igual manera el método de la doble integral.

En un principio convendría definir, qué es el Análisis Estructural. “El análisis estructural es la predicción del desempeño de una estructura ante las cargas prescritas y/o efectos externos, tales como movimientos en los apoyos y cambios de temperatura” (Kassimali, 2014: 3). Se puede añadir, que el análisis estructural es la rama de la *ingeniería civil* que intenta prever de manera precisa y exacta el comportamiento de una estructura, bajo las diferentes tipos de cargas a las que será sometida a lo largo de su vida útil. Esto se logra estimado lo mejor posible las fuerzas a las que estarán sometidos los elementos estructurales, sus dimensiones y sus correspondientes deformaciones.

Algunos autores, en sus obras se refieren a la *ingeniería estructural* como: “etapas tanto del análisis como del diseño de un sistema estructural” (Laible, 1988: 2). Que prácticamente es una combinación del análisis estructural y el diseño estructural, con los rasgos antes mencionados. Dentro de la definición de Análisis Estructural aparecen más conceptos, algunos se definirán a continuación.

Una *Estructura*<sup>1</sup> es un conjunto de elementos, predispuestos y apoyados de manera tal, que soporte su peso propio, las cargas de diseño (definidas por el uso de la estructura) y las sobrecargas (que pueden ser debidas a sismo o viento). Cumpliendo siempre los siguientes puntos:

- Segura: Que no presente deformaciones y/o vibraciones apreciables, para que el usuario se sienta cómodo y seguro en la estructura. Y en caso de falla, la estructura sea lo suficientemente dúctil<sup>2</sup> para que los usuarios salgan de ella sin algún tipo de daño, antes del colapso (si llegara a suceder).
- Económica: Debido a un análisis inadecuado, que lleva a un mal diseño, dando como resultado secciones muy robustas, generando un encarecimiento de la estructura.

En este texto se estudiarán *solo* estructuras planas,<sup>3</sup> puesto que son la base para las teorías de las estructuras espaciales y que de estas teorías se parte para analizarlas. Además de que

<sup>1</sup> Del Latín “*structus*” (construcción) y el sufijo “*ura*” (resultado)

<sup>2</sup> Materiales que resisten deformaciones considerables y permanentes antes de fallar

<sup>3</sup> Estructuras que únicamente se pueden mover en el plano ( $x,y$ )

en la actualidad nos apoyamos de los diversos programas computacionales que existen para realizar todo tipo de análisis en las estructuras, debido a que estos lo facilitan y lo más importante reducen el tiempo que toma realizar los cálculos.

Como se acaba de establecer las estructuras deben de cumplir varios requisitos, entre ellos las deformaciones que puedan resultar debido a las cargas, deben ser poco perceptibles por los usuarios, para el cálculo de estas se emplea el análisis estructural y es lo que se abordará en la presente tesis. En las NORMAS TÉCNICAS COMPLEMENTARIAS SOBRE CRITERIOS Y ACCIONES PARA EL DISEÑO ESTRUCTURAL DE LAS EDIFICACIONES, del REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL, se dan valores permisibles a los desplazamientos de elementos estructurales ya que se pueden generar problemas debido a deflexiones excesivas, tales como desprendimiento de acabados, daño a elementos no estructurales, transmisión de esfuerzos a elementos que no fueron diseñados para soportarlos, permitir el paso del agua, ocasionar grietas y/o separaciones, etc. De ahí su importancia de analizar los desplazamientos en un proyecto estructural.

Otra cuestión que cabe mencionar es que en la presente tesis, toda la teoría desarrollada sólo será aplicable a materiales elásticos, materiales a los cuales si se retira la carga aplicada regresan a su estado original, a estas deformaciones se les conoce como *deformaciones elásticas lineales* debido a que estas varían linealmente con la carga que se les aplica, también son conocidos como materiales hookeanos, puesto que obedecen la ley de Hooke. Estos materiales tienen un diagrama de esfuerzo-deformación bien definido, sobre todo en la parte lineal, que es el comportamiento que vamos a suponer toman, todos los materiales utilizados en la presente tesis.

## II. Tipos de estructuras.

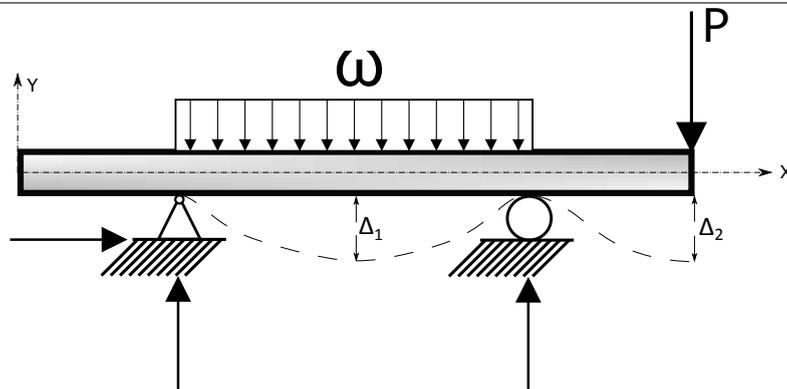
Cuando se trata de resolver un problema en ingeniería, especialmente de estructuras, una manera sencilla de plantear el problema es dibujar un diagrama de cuerpo libre<sup>4</sup>, que por lo general esta en dos dimensiones, pero sabemos que las estructuras en la realidad no existen de esa manera, todas son tridimensionales, pero para facilitar el cálculo se suponen las estructuras en el plano, aunque, tengamos que resolver varias veces la misma estructura, esto lo facilita. Según estos principios teóricos (que no siempre van de acuerdo con la realidad), podemos establecer un tipo de clasificación de las estructuras, que es el siguiente:

- *Planas*: Estructuras que se encuentran y se desplazan dentro de dos dimensiones( $x,y$ ). De igual manera las reacciones, las cargas, los esfuerzos y las deflexiones que pueda sufrir el elemento, se encuentra en un espacio  $R^2$ .

---

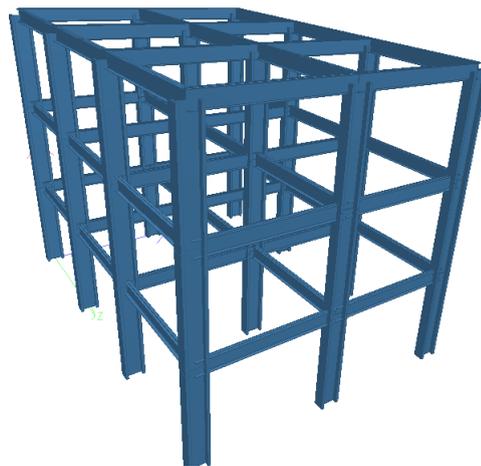
<sup>4</sup> Representación de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento.

Fig. 1 Ejemplo de estructura plana.



- *Espaciales*: Estructuras tridimensionales ( $x, y$  y  $z$ ), todos sus elementos están contenidos en un espacio  $R^3$ .

Fig. 2 Estructura tridimensional (Render, STAAD Pro)



Estos dos tipos de estructuras engloban a todas las existentes, pero existen un gran número de estructuras, así como clasificaciones, por ejemplo, una muy común es por los esfuerzos que resisten. Mencionaremos algunos tipos de estructuras, a las que en el ingeniero civil tiene que tener en consideración, como las más usadas.

Las *armaduras* se componen de formas trianguladas, compuestas por elementos rectos unidos por articulaciones perfectas (en las que no existe fricción) en los extremos, que generalmente son llamados nudos, o sea que no restringen momentos. Y que las cargas a las que se somete siempre son puntuales y tienen como punto de aplicación las articulaciones (nudos articulados). Esto es solo una suposición teórica, en la realidad sabemos que las articulaciones no son perfectas y frecuentemente el método de construcción es soldar o atornillar las uniones de los elementos rectos, esto da cabida a pequeños esfuerzos de flexión que para el análisis se consideran despreciables. Estos elementos rectos sólo trabajan a carga axial (tensión o compresión).

Las armaduras están compuestas por:

## II TIPOS DE ESTRUCTURAS.

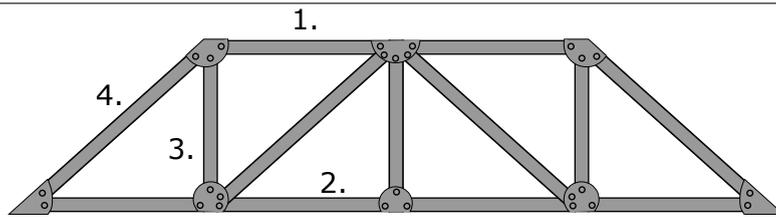
---

1. Cuerda superior. Es el elemento recto más alto.
2. Cuerda inferior. Es el elemento recto más bajo.
3. Montantes. Elemento recto vertical.
4. Diagonales. Elemento recto diagonal.

---

**Fig. 3** Ejemplo de armadura 1.

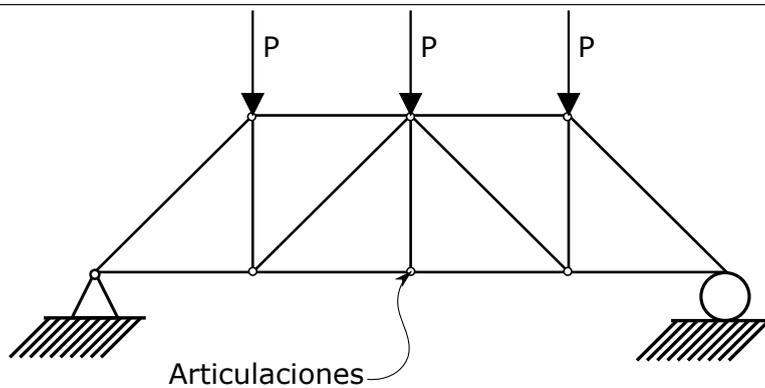
---



---

**Fig. 4** Ejemplo de armadura 2.

---

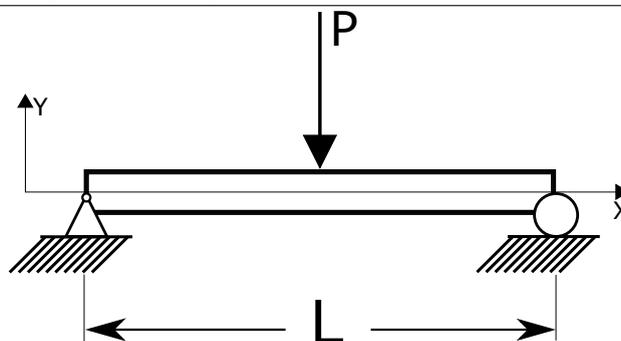


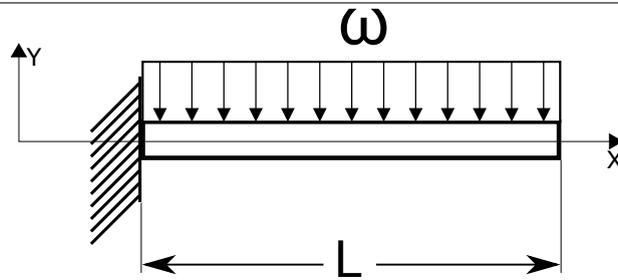
Las *vigas* son elementos estructurales que tienen su eje longitudinal horizontal al plano, y por lo general las cargas a las que son sometidas, son perpendiculares a su eje longitudinal, lo que genera que trabajen principalmente a esfuerzos de cortante y de flexión.

---

**Fig. 5** Ejemplo de Viga simplemente apoyada.

---



**Fig. 6** Ejemplo de Viga empotrada.

Las *columnas* son elementos estructurales que tienen su eje longitudinal vertical al plano, por lo tanto están sujetas principalmente a cargas axiales de compresión, además de cortante y flexión. En el análisis se debe prestar especial atención en el efecto del pandeo en el elemento así como las condiciones de apoyo de los extremos.

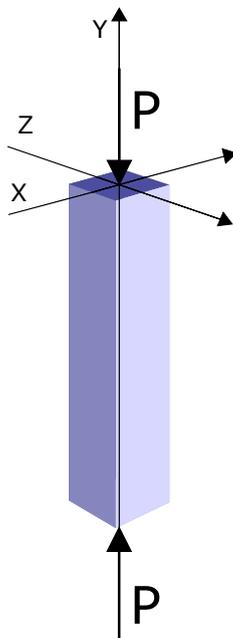
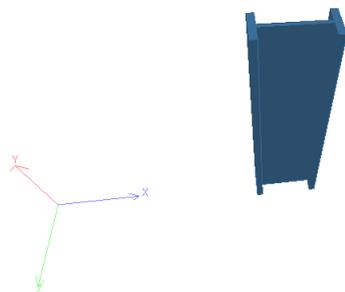
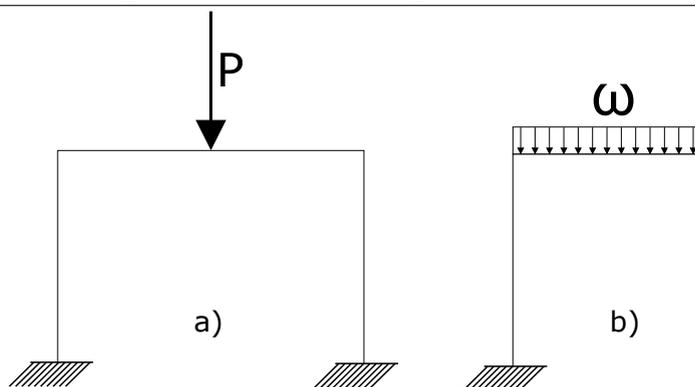
**Fig. 7** Ejemplo de Columna.

Fig. 8 Columna I



Una estructura que surge de unir al menos una viga y una columna, por medio de un *nudo rígido*<sup>5</sup>. Es conocida como *Marco*. Aunque no necesariamente un marco tiene que tener vigas rectas, puede ser un marco a dos aguas, o con un arco, además de en vez de nudos rígidos puede tener articulaciones, cuidando en todo momento la estabilidad. También puede tener muchos niveles, o muchos claros, todos los que se desee. Por lo general en la realidad son tridimensionales, aunque se pueden analizar manualmente en dos dimensiones, de esta manera se trabajará en esta tesis.

Fig. 9 Ejemplo de marcos planos. a) Marco doblemente empotrado, con una carga puntual a la mitad del clar. b) Marco empotrado con una carga uniformemente repartida.



El *arco* es concebido como solución arquitectónica a la necesidad de salvar claros generosos que con los materiales de la antigüedad no se podían alcanzar, ya que se fabricaban en su mayoría de mampostería<sup>6</sup> y ésta no trabaja adecuadamente a flexión y con la geometría del arco trabaja sólo a compresión. Se conocen como estructuras de eje curvo, que soportan principalmente esfuerzos de compresión y los transmiten a sus apoyos. Pueden ser perfectamente circulares, parabólicos o elípticos<sup>7</sup>, dependiendo del diseño y de la época. Esta

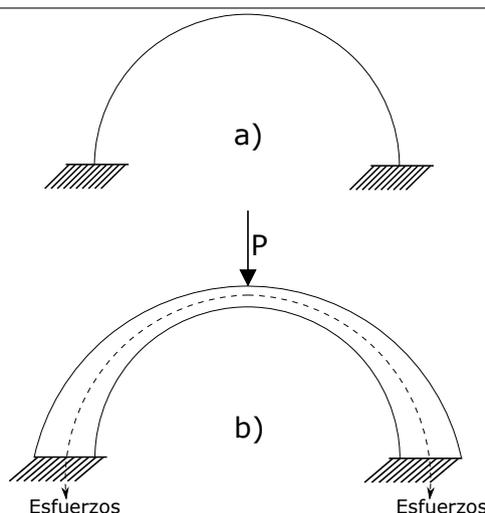
<sup>5</sup> Es un elemento de unión que es capaz de resistir momentos y fuerzas, así como de transmitirlos, por lo tanto puede girar o desplazarse.

<sup>6</sup> Del latín *manuspositus* poner con la mano. Son piezas, que pueden ser naturales o no, y que se colocan con algún tipo de mortero o no, para formar algún tipo de elemento constructivo, como puede ser un muro.

<sup>7</sup> Por mencionar unos cuantos, existen cuantiosos tipos, como el arco de zig zag, carpanel, ojival, florentino, etc. Esto depende de las diferentes clasificaciones que existen. Para ahondar en su historia y terminología, re-

formado por una clave y dos basales o contraclaves, que estos a su vez están conformados por dovelas, colocados de tal manera que se mantienen en equilibrio debido a su peso propio.

Fig. 10 Ejemplo de Arco.



Las estructuras que conocemos como *Cascarones*, son al igual que los arcos, estructuras de eje curvo que salvan claros grandes de superficie, cuya característica principal es que su espesor es mucho menor con relación al área que cubren. De los cuales podemos resaltar dos tipos: las *bóvedas* y las *cúpulas*<sup>8</sup>

Cuando se necesita cubrir un espacio se construye una bóveda, cuya característica principal es que el espacio que cubre, es de dimensiones superiores, a las de los elementos de mampostería de los que está formado, y esta parte del cascaron es la más importante, aunque también pueden estar formadas por *tímpanos* para darle un acabado estético, y sus respectivas vigas de borde, a las que se transmitirán los esfuerzos. A diferencia de estructuras como las losas<sup>9</sup> que son de las más usadas en la actualidad, y que trabajan principalmente a flexión, las bóvedas trabajan solo a compresión. En la antigüedad estaban construidas principalmente de mampostería, pero en el presente, se pueden construir de concreto armado. En cuanto a sus diferentes tipos, surgen de la posibilidad de un sin número de diseños en el momento de cambiar y jugar con las formas de la generatriz y la directriz. Existen las bóvedas cilíndricas o de cañón, bóveda en rincón de claustro, Bóveda por arista con línea de clave peraltada, bóveda de estrella, entre otras.

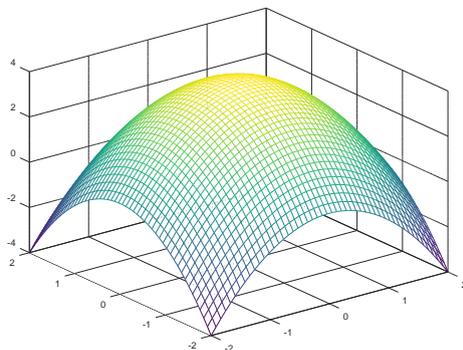
mito al lector al siguiente libro, donde se encuentran numerosos ejemplos de arcos y definiciones de conceptos así como la explicación de todas las partes que los componen (García,1985)

<sup>8</sup> Si al lector le interesara ahondar sobre el tema, recomendaría un par de libros, que por su bastedad de ejemplos, teoría, y terminología sobre este tópico, resultarían interesantes en demasía(Thunnissen,2012) y (López,1968).

<sup>9</sup> Elemento constructivo-estructural conformada por concreto reforzado o mampostería, que puede trabajar en una o dos direcciones que puede transmitir sus cargas a vigas o columnas (losas planas y losas perimetralmente apoyadas respectivamente)

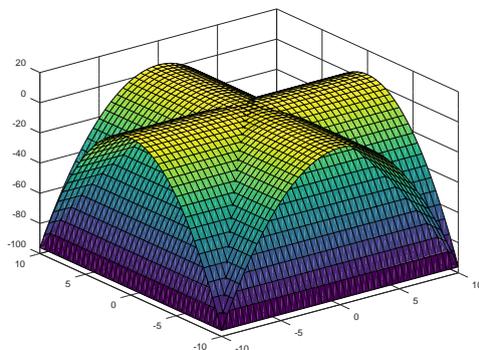
**Fig. 11** Bóveda de pañuelo

---



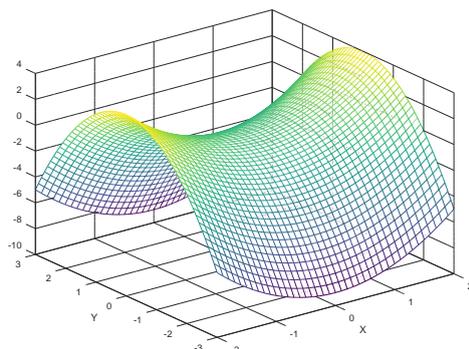
**Fig. 12** Bóveda de doble cañón

---



**Fig. 13** Bóveda de silla de montar

---



En cuanto a la geometría de las cúpulas, se puede afirmar que están compuestas de una semicircunferencia, que forma la generatriz, y que esta gira en torno a su eje vertical. Produciendo una llamada superficie de revolución (Casquete esférico), bien definida por sus intrados y extrados.<sup>10</sup> Está sometida a esfuerzos de compresión, aunque presente esfuerzos de flexión, estos son tan minúsculos que no se consideran. Pueden ser de forma de semi-esfera o esferoide, paraboloides, etc. ésto lo define el arco generatriz. Se puede construir de mampostería o concreto reforzado.

<sup>10</sup> Del latín “intra” dentro, “extra” fuera y de “dorsum” dorso. Son, respectivamente, las superficies del arco interiores y exteriores.

Fig. 14 Cúpula circular.

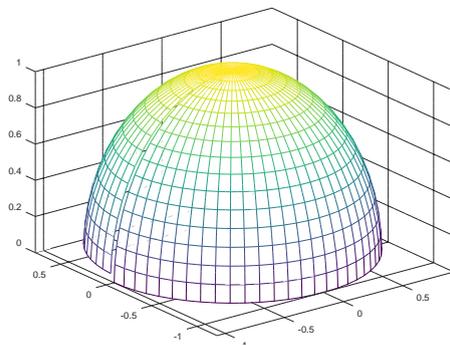
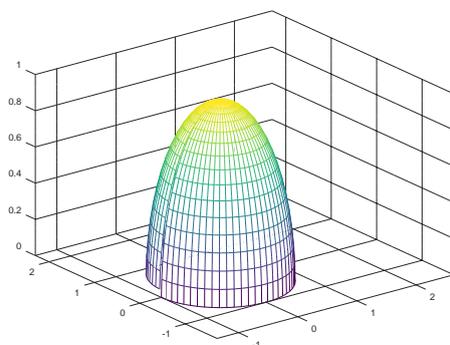


Fig. 15 Cúpula parabólica.



## II.1. Grado de determinación en las estructuras.

El *grado de determinación* de una estructura se refiere a que si es posible resolver una estructura cualquiera, con ayuda de las ecuaciones de la estática. Una clasificación, con base en el grado de determinación de una estructura, es la siguiente:

- Estructuras **Hipostáticas**: Del prefijo Griego “*hypó*” que significa debajo, Denota inferioridad. Se refiere a las estructuras cuya característica, es que el número de incógnitas que presenta en sus apoyos, son inferiores en número a las ecuaciones que proporciona la Estática<sup>11</sup>:

$$\sum M = 0; \sum F_x = 0; \sum F_y = 0$$

Y que, gracias a esta característica son, Estáticamente indeterminadas y no se estudiarán en esta obra.

- Estructuras **Isostáticas**: Del prefijo Griego “*isos*” que significa igual. Se refiere a las estructuras en las que las incógnitas de sus apoyos son iguales al número de ecuaciones de la Estática. Se pueden calcular sus reacciones de apoyos con los principios de la Estática, o sea son Estáticamente determinadas, lo que significa que están en *equilibrio*.<sup>12</sup>

<sup>11</sup> En el plano, para el espacio son nueve ecuaciones que proporciona la Estática, tres por cada eje

<sup>12</sup> Este principio parte de la siguiente manera: un cuerpo, bajo efectos de fuerzas y momentos, se encuentra en equilibrio si y solo si, la suma de todas sus fuerzas y de todos sus momentos son igual a cero. Este mismo principio se utiliza al calcular las reacciones de una estructura y tienen como base las ecuaciones de la estática, que a su vez surgen de la primera y tercera Ley de Newton.

Este tipo de estructuras se estudiarán en este capítulo.

- Estructuras **Hiperestáticas**: Del prefijo Griego “*hypér*” que significa sobre, por encima de. El número de ecuaciones proporcionadas por la Estática no son suficientes para resolverlas. Son estructuras que necesitan un estudio más complejo ya que no pueden ser resueltas con los principios de la Estática, son estructuras estáticamente indeterminadas. Este tipo de estructuras se estudiarán en el Capítulo 2 de este trabajo.

El grado de indeterminación se calcula, sencillamente por simple inspección, o con la diferencia de incógnitas y reacciones. Así pues una viga doblemente empotrada es una estructura Hiperestática de tercer grado, puesto que, tiene 6 reacciones.<sup>13</sup>  $\text{reacciones} - \text{incógnitas} = \text{Grado de estaticidad}$ ,  $6 - 3 = 3$  Hiperestática de tercer grado.

El grado de estaticidad puede ser cero, que correspondería a una estructura del tipo isostática, si es menor que cero, se trata de una estructura hipoestática.

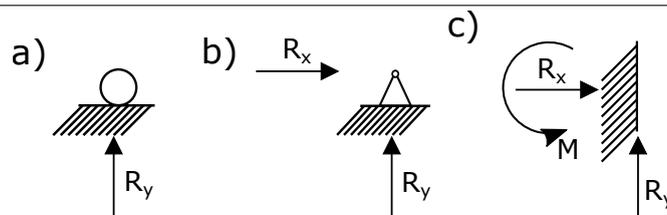
Una vez que se conoce el grado de estaticidad, se puede determinar la manera de resolverla, si es que las ecuaciones de la estática son suficientes, o no, en este caso hay que emplear otros conocimientos más avanzados y complejos.

## II.2. Apoyos.

Un concepto importante a la hora de concebir una estructura son sus apoyos. Estos brindan a la estructura estabilidad Estática y equilibrio (relativo)<sup>14</sup>. Los apoyos, brindan a las estructuras restricciones en cuanto a su movimiento, evitando que estas, floten caóticamente por el espacio, manteniéndolas en un solo lugar, gracias a sus fuerzas de reacción.<sup>15</sup> Existen principalmente tres tipos de apoyos. Que son los que generalmente se usan en las estructuras. Véase la Fig 16.

- Apoyo Móvil
- Apoyo Fijo
- Empotre

Fig. 16 Tipos de Apoyos



La ubicación, el número y el tipo de apoyos con los que contará la estructura es un paso de suma importancia a la hora de concebirla, ya que, si no se colocan de manera adecuada, nuestra estructura tendrá defectos en cuanto a *inestabilidades*. Del número de apoyos depende el grado de determinación de la estructura.

<sup>13</sup> Para ahondar en el tema, remito al lector al capítulo 3.4 “Determinación estática, hiperestaticidad e inestabilidad” (Kassimali, 2014: 58).

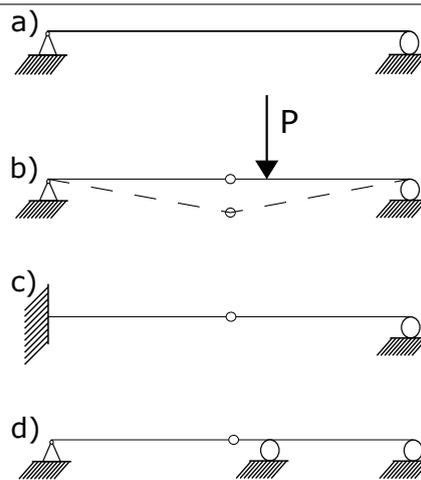
<sup>14</sup> Aunque se supone que está en reposo, sabemos que la tierra se mueve.

<sup>15</sup> Fuerza transmitida del elemento estructural a sus apoyos y que estos deben ser capaces de soportar

### II.3. Estabilidad.

Estabilidad<sup>16</sup> se refiere a una cualidad de las estructuras que permite que mantengan su forma, ya sea bajo efectos de cargas externas o simplemente de su peso propio. Que una estructura se encuentre en equilibrio estático no necesariamente es estable. Esto ocurre cuando a una estructura en equilibrio, como puede ser una viga simplemente apoyada Fig.17(a), si se adiciona una unión de articulación a la mitad de su claro se deformará de la siguiente manera Fig.17(b):

Fig. 17 Estabilidad



Por efecto de la articulación se producirán giros no deseados a la derecha y a la izquierda de la misma, lo cual sucede cuando las cargas aplicadas al rededor de la articulación *no* son igual a cero, ya que esta que no es capaz de resistir momentos, cambiando su cualidad de estructura estable a una "inestable internamente". Esto se soluciona adicionando un apoyo móvil que proveerá una reacción Fig.17(d), regresando su cualidad de estable, o cambiando el apoyo fijo por un empotre Fig.17(c). A este fenómeno se le conoce como: *inestabilidad geométrica interna* y a este tipo de vigas que se basan en el principio de la articulación ya sea para pasar de un estado hiperestático a uno isostático o de una inestabilidad geométrica interna a una estructura estable, se les conoce como *Vigas Gerber*.<sup>17</sup>

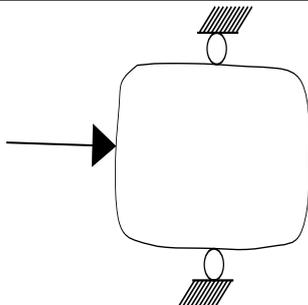
Ahora estudiaremos algunos tipos de inestabilidades. Suponga un cuerpo amorfo infinitamente rígido<sup>18</sup>, restringido de movimiento por apoyos cualquiera y sometido a fuerzas cualquiera. Entonces tenemos:

<sup>16</sup> Del Latín "stabilitas" (estar de pie) y el sufijo "bilis" indicador de posibilidad y el sufijo "tas" que indica cualidad. Que se mantiene sin desplazamientos aparentes

<sup>17</sup> Heinrich Gerber (1832 - 1912) Ingeniero e inventor alemán. Véase el Apéndice A

<sup>18</sup> Esta idealización permite enfocar nuestra atención solamente en cuestiones de estabilidad.

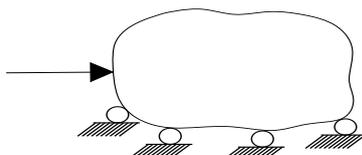
**Fig. 18** Inestabilidad estática.



En la Figura se produce una *Inestabilidad estática* debido a que el número de apoyos no son suficientes. Además se puede observar que sus elementos de reacción son colineales por lo tanto, no resistirían desplazamientos horizontales.

Si disponemos de diferente manera los apoyos y aumentamos su número, se pensaría que este problema cesaría, entonces:

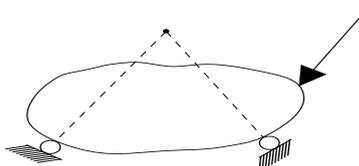
**Fig. 19** Inestabilidad estática 2.



En la figura los elementos de reacción son paralelos, por lo tanto no pueden restringir los desplazamientos horizontales de la estructura. El problema de inestabilidad estática se conserva.

Otro ejemplo de mal disposición de apoyos que producen inestabilidad, es el de la Fig. 20.

**Fig. 20** Inestabilidad geométrica externa.



En la figura los elementos de reacción concurren hacia un punto específico, por lo tanto estos no pueden restringir el giro de la estructura. Produciendo una *inestabilidad geométrica externa*

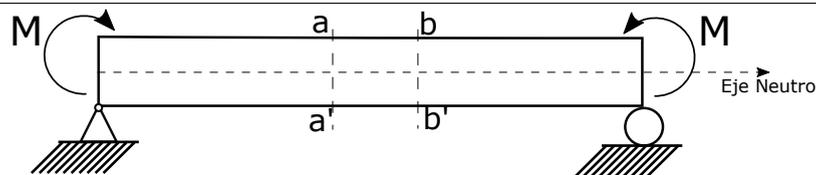
### III. Métodos geométricos.

Como el título apunta, este tipo de métodos para calcular deformaciones en vigas, se basa en la geometría de las posibles deformaciones de ésta a causa de las cargas o pares<sup>19</sup> que actúan sobre ella. Comenzando por demostrar la ecuación diferencial para cuando lo analizado es la flexión en vigas, ya que de ella parten los otros dos métodos, una vez demostrada esta ecuación, se estudiará el método de la doble integral y se resolverán ejercicios, para posteriormente analizar deformaciones por el método de la viga conjugada.

#### III.1. Ecuación diferencial para la deflexión de vigas.

Para la siguiente demostración considérese una viga simplemente apoyada, hecha de materiales elásticos, en la que están actuando un par de momentos en los extremos, debido a esto se dice que la viga se encuentra bajo *flexión pura*. Puesto que la viga está trabajando a flexión pura, se supone que la viga está compuesta de fibras esbeltas a lo largo de esta, y que por lo tanto sólo se encuentran bajo esfuerzos de compresión o tensión, según sea el caso. Además como se mencionó los materiales con los que está hecha obedecen la Ley de Hooke<sup>20</sup>.

Fig. 21 Viga bajo flexión pura

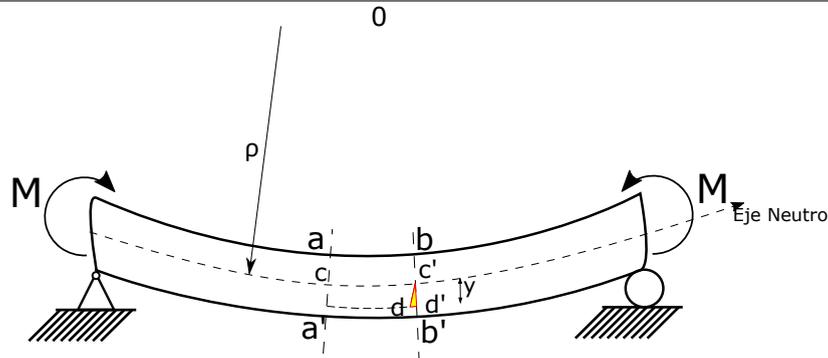


Analicemos un par de secciones transversales ( $a - a'$  y  $b - b'$ ), en algún punto cualquiera de la viga. Antes de la aplicación de los momentos  $M$ , ambas secciones eran paralelas entre sí, pero este estado cambia después de aplicados los momentos, puesto que rotan un poco, entonces tenemos:

<sup>19</sup> Momentos

<sup>20</sup> El módulo de elasticidad  $E$  se considera el mismo, ya sea para tensión que para compresión

Fig. 22 Viga bajo flexión pura.



Por simple inspección sabemos que las fibras superiores se encuentran bajo esfuerzos de compresión, y a su vez las fibras inferiores a esfuerzos de tensión. La línea  $c - c'$  no se encuentra bajo ningún tipo de esfuerzo, es el *eje neutro*. A una distancia  $y$  por debajo del eje neutro se encuentra el punto  $d$ , de manera que, si se traza una línea paralela a  $a - a'$  se puede calcular el alargamiento producto de la tensión que sufre la fibra longitudinal que pasa por el punto  $d$ . Si se sabe que  $\rho$  es el radio de la curvatura de la viga y  $O$  el centro de curvatura, y aplicando triángulos semejantes calculamos dicho alargamiento, entonces:

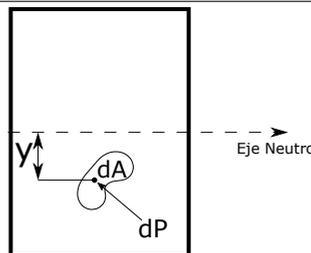
$$\epsilon = \frac{d d'}{c c'} = \frac{d c'}{c O} = \frac{y}{\rho} \tag{1}$$

Por lo que el alargamiento de la fibra es proporcional a la distancia con respecto al eje neutro. Y como se sabe por la Ley de Hooke  $E = \sigma/\epsilon$  ó  $\sigma = E\epsilon$  lo anterior afirmado, se puede demostrar.

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} \tag{2}$$

Ahora analicemos la sección transversal de la viga, dónde  $dA$  es un elemento diferencial de área, ubicado a una distancia  $y$  del eje neutro. El elemento  $dP$  actúa en el punto señalado en la figura. Y como sabemos  $\sigma = P/A$ , para este caso  $\sigma = dP/dA$ , entonces tenemos:

Fig. 23 Sección transversal



$$dP = \frac{Ey}{\rho} dA \tag{3}$$

Y debido a que la fuerza axial que actúa sobre el elemento  $dA$  es nula (para este caso especial de flexión pura), se puede integrar, considerando lo dicho.

$$\int \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \quad (4)$$

La parte de la integral  $\int y dA = 0$  es lo que se conoce como *momento estático de la sección* con respecto al eje neutro, y a su vez  $\int y dA = \tilde{y}A$  por lo tanto  $\tilde{y}A = 0$  y  $\tilde{y}$  es la distancia desde el eje neutro al centro de gravedad de la sección transversal. Entonces, se sabe que  $A \neq 0$  por lo que  $\tilde{y} = 0$  para que se cumpla la ecuación. Así es que se afirma que: el eje neutro de la sección transversal pasa siempre por el centro de gravedad de la misma.

Calculando el momento producido por el elemento  $dP$  a la distancia  $y$  del eje neutro:

$$dM = dP \cdot y = \left( \frac{Ey}{\rho} dA \right) (y) \quad (5)$$

Integrando.

$$M = \int \frac{Ey^2}{\rho} A \quad (6)$$

Y sustituyendo el valor de  $\int y^2 dA = I$

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (7)$$

De la ecuación anterior podemos eliminar  $\rho$  despejandola de la ecuación (2) y sustituyendo en la ecuación (7), tenemos:

$$M = \frac{My}{I} \quad (8)$$

Esta fórmula se conoce como la *fórmula de la escuadrilla*, de dónde  $M$  es el momento de la viga en cualquier punto de su longitud,  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje neutro, e  $y$  es una distancia medida desde el eje neutro hasta cualquier punto, dentro de la sección transversal de la viga, en donde actúa el esfuerzo  $\sigma$  y que puede ser de tensión o de compresión.

La ecuación (7) también se puede escribir como:

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \quad (9)$$

Y como se sabe el valor de  $M$  varia a lo largo de la longitud de la viga, por lo tanto la curvatura de la deformación de la viga es a su vez variable.

La expresión exacta que define la curvatura de la deformación, en cualquier punto a lo largo de la viga, se obtiene por cálculo diferencial y es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (10)$$

De dónde la parte  $dy/dx$  es conocida como la pendiente de la curva en cualquier punto, y que es tan pequeña que se considera despreciable, bajo este supuesto la ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2} \quad (11)$$

Y partiendo del principio de que se presentan deformaciones pequeñas, podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (12)$$

Esta es la ecuación diferencial de segundo orden para la deflexión de vigas.<sup>21</sup>

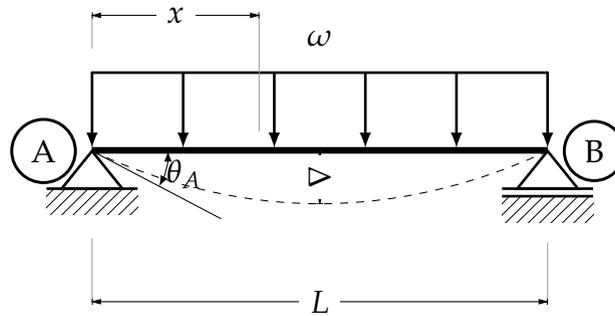
### III.2. Método de la doble integración.

Una vez demostrada la ecuación diferencial de para la deformación de vigas, se puede calcular deflexiones con ella, con ayuda de integrales, la primera integral resulta en la pendiente  $dy/dx$  en cualquier punto de la longitud de la viga, y la segunda la deflexión en cualquier punto de la longitud de la viga. Para poder integrar  $M$ , que es la ecuación de momento de la viga a analizar, debe estar en función de  $x$  ya que  $x$  y  $y$  son coordenadas. Al realizar las integrales, se obtienen dos constantes de integración, las cuales deben respetar las condiciones de frontera. Básicamente en esto consiste el método de la doble integral. Para ampliar y complementar la explicación teórica se realizaron ejercicios numéricos y algebraicos. El método es sumamente sencillo, pero cuando la rigidez a la flexión no es constante hay que realizar cálculos adicionales, que sí complican un poco el método.

**Ejemplo** Demostraremos el empleo del método calculando el giro y a deflexión máxima de una viga simplemente apoyada de longitud  $L$ , con una carga uniformemente repartida de valor  $\omega$  y un  $EI$  constante.

<sup>21</sup> El producto de el modulo de elasticidad ( $E$ ) y la inercia ( $I$ ) es conocido como *coeficiente a la flexión* que físicamente representa la oposición de un cuerpo, tomando en cuenta su forma geométrica y el material del que está hecho, a sufrir una flexión

Fig. 24 Ejercicio



Calculando las reacciones que por simple inspección se pueden calcular. Posteriormente la ecuación de momento a una distancia  $x$ , con un sólo corte es suficiente.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M = \frac{\omega Lx}{2} - \frac{\omega x^2}{2}$$

Factorizando

$$M = \frac{\omega}{2}(Lx - x^2)$$

Aplicando la fórmula diferencial para la deflexión tenemos:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{2}(Lx - x^2)$$

Integrando dos veces.

$$\theta = EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{2}(Lx - x^2)$$

$$\theta = EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{2} \int (Lx - x^2) dx$$

$$\theta = EI \frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{2} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$\Delta = EI \int dy = \frac{\omega}{2} \int \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) dx + C_1 dx$$

$$\Delta = EI y = \frac{\omega}{2} \left( \frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

Ahora aplicamos las condiciones de frontera, la primera que corresponde al apoyo fijo es:  $x = 0$  y  $y = 0$ , o  $(\Delta)_{x=0} = 0$  por lo que  $C_2 = 0$ . De igual manera para  $C_1$  son  $x = L$  y  $y = 0$  entonces  $(\theta)_{x=L/2} = 0$

$$0 = \frac{\omega}{2EI} \left( \frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} \right) + C_1 L + \cancel{C_2}^0$$

$$C_1 = -\frac{\omega L^3}{24EI}$$

Hecho lo anterior podemos escribir la ecuación de giro de la viga estudiada.

$$\theta = \frac{\omega}{2EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12} \right)$$

Y como el giro buscado es en  $x = 0$ , tenemos.

$$\theta_A = -\frac{\omega L^3}{24EI}$$

Por simetría de la viga en ambos apoyos el giro tendría que ser el mismo, entonces evaluamos en  $x = L$  que corresponde al apoyo móvil.

$$\theta = \frac{\omega L^3}{24EI}$$

Ahora la deflexión, que por revisión se sabe que a  $L/2$  se encuentra la deflexión máxima, por lo que  $x = L/2$ .

$$\Delta = \frac{\omega}{2EI} \left( \frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3x}{12} \right)$$

En esta parte del problema se puede corroborar que el planteamiento de las condiciones de frontera es correcto, si evaluamos la ecuación de  $\Delta$  en los dos puntos donde la deflexión en teoría es cero, o sea  $(\Delta)_{x=0}$  y  $(\Delta)_{x=L}$  la ecuación da cero.

$$\Delta_{\text{máx}} = -\frac{5\omega L^4}{384EI}$$

El signo negativo indica que la deflexión está por debajo del eje  $y$ . Recuerdese que el eje longitudinal de la viga pasa exactamente por el eje coordenado  $x$  y el eje  $y$  es perpendicular a este, por lo que el punto  $A$  de la viga es el origen de los dos ejes.

Como se observó el método es bastante sencillo, lo complicado es plantear correctamente las condiciones de frontera. Por ejemplo también se puede despejar  $C_1$  de la ecuación del giro, ya que a la mitad del claro  $\theta = 0$  cuando  $x = L/2, (\theta_{x=L/2} = 0)$  así pues:

$$\begin{aligned} \theta = EI \frac{dy}{dx} &= \frac{\omega}{2} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1 \\ \theta &= \frac{\omega}{2EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1 \end{aligned}$$

Entonces

$$0 = \frac{\omega}{2EI} \left( \frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{24} \right) + C_1$$

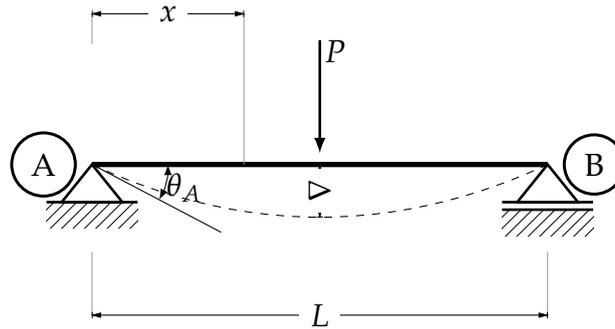
Despejando  $C_1$

$$C_1 = -\frac{\omega L^3}{24EI}$$

A partir de aquí el procedimiento es el mismo, se sustituye  $C_1$  y se integra para calcular la deflexión.

**Ejemplo** Calcule la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada con una carga  $P$  al centro de su longitud total ( $L$ ) y un  $EI$  constante a lo largo del claro.

Fig. 25 Ejercicio



Por simple inspección sabemos que las dos reacciones verticales de ambos apoyos son  $P/2$ . Realizando un corte a una distancia  $x$  obtenemos la ecuación de momento.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M = \frac{Px}{2}$$

Aplicamos la fórmula diferencial para la deflexión de vigas.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{2EI}$$

Integrando.

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4EI} + C_1$$

Como sabemos la deflexión es simétrica a lo largo de su longitud con respecto al centro del claro y por lo tanto la tangente es paralela al eje de la viga en este punto, entonces  $\theta = 0$  en  $x = L/2$ , conociendo lo anterior se puede calcular la  $C_1$  sustituyendo lo anteriormente planteado  $(\theta)_{L/2} = 0$ .

$$C_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Entonces la ecuación para calcular el giro es:

$$\theta = \frac{Px^2}{4EI} - \frac{PL^2}{16EI}$$

Para el punto A  $(\theta)_{x=0} = \text{máx}$

$$\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Factorizando e integrando por segunda vez.

$$\Delta = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{4EI} \left( x^2 - \frac{L^2}{2} \right)$$

$$\Delta = y = \frac{P}{4EI} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{L^2 x}{4} \right) + C_2$$

Por las condiciones de frontera  $y = 0$  y  $x = 0$  en el apoyo izquierdo, o sea ( $\Delta_{x=0} = 0$ ) entonces  $C_2 = 0$

$$\Delta = \frac{P}{4EI} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{L^2 x}{4} \right) + \cancel{C_2}^0$$

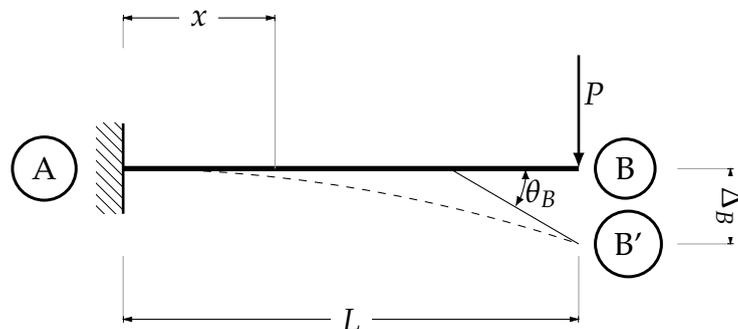
Calculando la deflexión máxima a  $L/2$ , evaluando  $(\Delta)_{x=L/2} = \text{máx}$

$$\Delta_{\text{máx}} = \frac{P}{4EI} \left( \frac{L^3}{24} - \frac{L^3}{8} \right) = -\frac{PL^3}{48EI}$$

### Cálculo de deflexiones.

**Ejercicio (1)** Calcular la deflexión máxima de una viga empotrada, como se muestra a continuación, considérese el  $EI$  constante.

**Fig. 26** Ejercicio (1)



Calculando las reacciones del empotre y calculando la ecuación de momento.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M = -PL + Px$$

Factorizando y aplicando la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EI} (-L + x)$$

Se integra para obtener el giro

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \left( -Lx + \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Debido al empotre en el punto  $A$  no existe pendiente por lo que  $(\theta)_{x=0} = 0$  entonces  $C_1 = 0$

$$0 = \frac{P}{EI} \left( -Lx + \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

El giro máximo se encuentra, evaluando  $(\theta)_{x=L}$  la ecuación anterior.

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

Integrando una vez más para obtener la deflexión

$$\Delta = \frac{P}{EI} \left( -\frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

Nuevamente, debido al empotramiento en el punto  $A$   $(\Delta)_{x=0} = 0$  por lo que  $C_2 = 0$

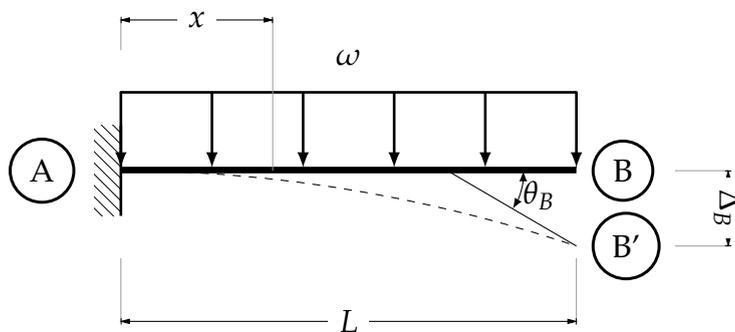
$$\Delta = \frac{P}{EI} \left( -\frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

Evaluando  $(\Delta)_{x=L} = \text{máx}$

$$\Delta_{B'} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

**Ejercicio (2)** Calcular la deflexión máxima de una viga empotrada, como se muestra a continuación, considérese el  $EI$  constante.

Fig. 27 Ejercicio (2)



Calculando las reacciones y la ecuación de momento a una distancia  $x$  como se muestra en la figura ()

$$0 \leq x \leq L$$

$$M = -\frac{\omega L^2}{2} + \omega Lx - \frac{\omega x^2}{2}$$

Factorizando y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{EI} \left( -\frac{L^2}{2} + Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Integrando

$$\theta = \frac{\omega}{EI} \left( -\frac{L^2x}{2} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1$$

Las condiciones de frontera son:  $(\theta)_{x=0} = 0$  debido al empotramiento

$$0 = \frac{\omega}{EI} \left( -\frac{L^2x}{2} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 \quad \swarrow 0$$

Entonces  $(\theta)_{x=L} = \text{máx}$

$$\theta_B = -\frac{\omega L^3}{6EI}$$

Integrando la ecuación del giro, obtenemos

$$\Delta = \frac{\omega}{EI} \left( -\frac{L^2x^2}{4} + \frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{24} \right) + C_2$$

Estableciendo las condiciones de frontera debido al empotre  $(\Delta)_{x=0} = 0$

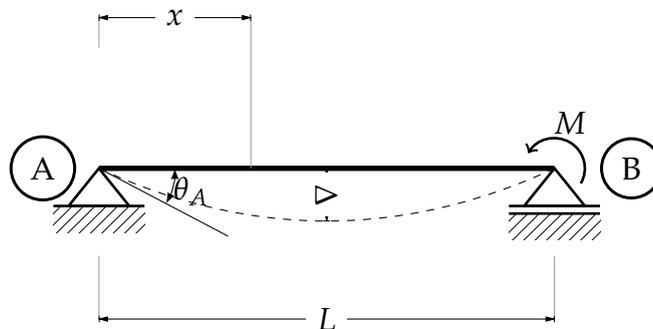
$$0 = \frac{\omega}{EI} \left( -\frac{L^2x^2}{4} + \frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{24} \right) + C_2 \quad \swarrow 0$$

Ahora se puede calcular la deflexión máxima cuando  $(\Delta)_{L/2} = \text{máx}$

$$\Delta_{B'} = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

**Ejercicio(3)** Ahora analicemos otro tipo de carga un poco diferente de las que se ha hecho. En una viga simplemente apoyada un momento  $M$  actúa en el apoyo móvil,  $EI = \text{constante}$ .

Fig. 28 Ejercicio (3)



Se procede a calcular las reacciones de los apoyos

$$RAY = \frac{M}{L}$$

$$RBY = -\frac{M}{L}$$

Ahora la ecuación de momentos a una distancia  $x$

$$M = \frac{Mx}{L}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Mx}{L}$$

Integrando

$$EI\theta = \frac{Mx^2}{2L} + C_1$$

No se pueden establecer condiciones de frontera ya que no se sabe cuando es que el giro vale cero. Integrando nuevamente.

$$EI\Delta = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Aquí sí se pueden establecer las condiciones de frontera. Primero para  $C_2$  ya que  $(\Delta)_{x=0} = 0$  por lo que

$$EI\Delta = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x + \overset{0}{\cancel{C_2}}$$

Para  $C_1$  la condición de frontera es que la deflexión vale cero en el apoyo derecho, entonces,  $(\Delta)_{x=L} = 0$

$$0 = \frac{ML^3}{6L} + C_1L$$

$$C_1 = -\frac{ML}{6}$$

Ahora podemos sustituir la constante  $C_1$  en la ecuación del giro

$$EI\theta = \frac{Mx^2}{2L} - \frac{ML}{6}$$

Para el apoyo  $A$  el giro es,  $(\theta)_{x=0}$

$$\theta_A = -\frac{ML}{6EI}$$

Para el apoyo izquierdo  $(\theta)_{x=L}$ , por lo tanto

$$\theta_B = \frac{ML}{3EI}$$

Es posible establecer una relación entre la deflexión y los giros, de manera similar que con los valores de cortante y momento flexionant. Cuando el giro vale cero, es decir que la tangente en un punto es paralela al eje  $x$ , se presenta la deflexión máxima. Sabiendo esto podemos suponer que si igualamos a cero la ecuación del giro y despejamos  $x$ , en ese valor de  $x$  se presentará la deflexión máxima.

$$0 = \frac{Mx^2}{2L} - \frac{ML}{6}$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

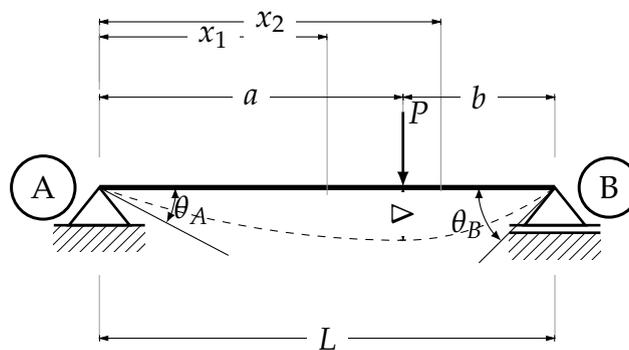
La deflexión máxima se encuentra a  $\frac{L}{\sqrt{3}}$  del origen, o sea del apoyo  $A$ , ahora se puede sustituir en la ecuación de la deflexión para encontrar su valor máximo en la viga.

$$EI\Delta = \frac{M}{6L} \cdot \frac{L^3}{3\sqrt{3}} - \frac{ML}{6} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta_{m\acute{a}x} = -\frac{ML^2 \cdot \sqrt{3}}{27EI}$$

**Ejercicio (4)** Este ejercicio presenta una cuestión nueva, los ejercicios anteriores se pudieron resolver con una sola ecuación de momentos, puesto que esta era válida para toda la viga, o que era válida para la mitad del claro, y por simetría, la otra mitad era idéntica a la primera. Para el presente ejercicio, se puede deducir por observación que este no es el caso, ya que no existe simetría en la deformación producida por la carga, por lo que se deberán de considerar dos ecuaciones de momento, una de  $a$  a  $b$  y otra de  $b$  a  $L$ , lo que producirá cuatro constantes de integración, dificultando un poco su resolución. Considerese  $EI$  constante.

**Fig. 29** Ejercicio (4)



Primero se calculan las reacciones.

$$RVA = \frac{Pb}{L}$$

$$RVB = \frac{Pa}{L}$$

Determinamos la primera ecuación de momentos

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = \frac{Pbx}{L}$$

En la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pbx}{L}$$

Integrando

$$EI\theta = \frac{Pbx^2}{2L} + C_1$$

No es posible en este punto aplicar las condiciones de frontera, para así calcular  $C_1$ . Pero en este momento se puede calcular el giro en el punto en el que actúa la carga

$$EI(\theta)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2L} + C_1$$

Integrando

$$EI\Delta = \frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Estableciendo las condiciones de frontera, en el apoyo  $A$   $x = 0$  y  $y = 0$  por lo que  $C_2 = 0$

$$EI\Delta = \frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + \overset{0}{C_2}$$

Ahora se puede calcular la deflexión en el punto en el que actúa la carga  $P$

$$EI(\Delta)_{x=a} = \frac{Pba^3}{6L} + C_1a$$

Ahora calculando la segunda ecuación de momento que corresponde a un corte después de la carga  $P$

$$a \leq x \leq L$$

$$M_2 = \frac{Pbx}{L} - P(x - a)$$

En la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pbx}{L} - P(x - a)$$

Integrando

$$EI\theta = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x - a)^2}{2} + C_3$$

De igual manera, no se puede aplicar las condiciones de frontera, pero sí se puede evaluar el giro en el punto de aplicación de la carga

$$EI(\theta)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2L} + C_3$$

Las dos ecuaciones de giro calculadas y evaluadas en  $x = a$  se pueden igualar debido a que el giro en ese punto es el mismo

$$\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = \frac{Pba^2}{2L} + C_3$$

Se deduce

$$C_1 = C_3$$

Integrando la segunda ecuación de giro

$$EI\Delta = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

Evaluando la deflexión en el punto de aplicación de la carga  $P$  en la segunda ecuación de momentos calculada

$$EI(\Delta)_{x=a} = \frac{Pba^3}{6L} + C_3a + C_4$$

Para poder calcular  $C_4$  podemos igualar las dos ecuaciones de deflexión que se acaban de calcular

$$\frac{Pba^3}{6L} + C_1a = \frac{Pba^3}{6L} + C_3a + C_4$$

Entonces

$$C_4 = 0$$

La condición de frontera pueden ser aplicadas en la segunda ecuación de deflexión, esto es  $y = 0$  cuando  $x = L$ ,  $(\Delta)_{x=L} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{PbL^2}{6} - \frac{P(L-a)^3}{6} + C_3L \\ 0 &= \frac{PbL^2}{6} - \frac{Pb^3}{6} + C_3L \\ C_3 &= \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2) \end{aligned}$$

Calculadas las cuatro constantes, solo queda sustituir sus valores para obtener los giros y las deflexiones. Primero  $(\theta_A)_{x=0}$

$$EI\theta_A = \frac{Pbx^2}{2L} + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)$$

$$EI\theta_A = \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)$$

$$\theta_A = -\frac{P}{6EI}\left(bL - \frac{b^3}{L}\right)$$

Para el apoyo en B  $(\theta)_{x=L}$

$$EI\theta = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x-a)^2}{2} + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)$$

$$EI\theta = \frac{PbL}{2} - \frac{Pb^2}{2} + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)$$

$$\theta_B = \frac{P}{6EI}\left(2bL + \frac{b^3}{L} - 3b^2\right)$$

Ahora las deflexiones primero para  $\Delta_1, 0 \leq x \leq a$

$$0 \leq x \leq a$$

$$EI\Delta = \frac{Pbx^3}{6L} + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)x$$

$$\Delta_1 = \frac{Pb}{6EIL}\left[x^3 + (b^2 - L^2)x\right]$$

Para  $\Delta_2, a \leq x \leq L$

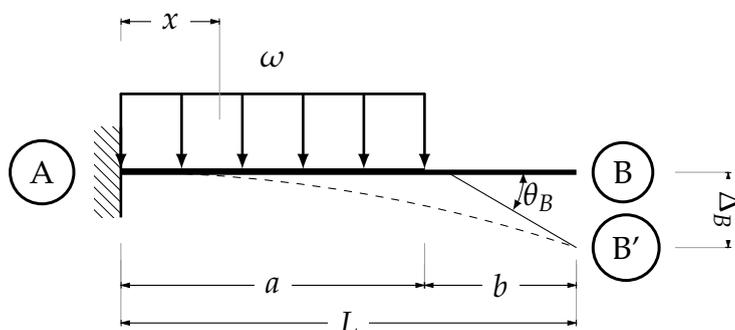
$$a \leq x \leq L$$

$$EI\Delta = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)x$$

$$\Delta_2 = \frac{Pb}{6EIL}\left[x^3 - \frac{L}{b}(x-a)^3 + (b^2 - L^2)x\right]$$

**Ejercicio (5)** Calcular los giros y las deflexiones causados por la carga uniformemente repartida en una viga empotrada, de claro  $L$ . Considérese  $EI = \text{constante}$ .

**Fig. 30** Ejercicio (5)



Calculadas las reacciones, se sustituye la ecuación de momento en la ecuación diferencial.

$$0 \leq x \leq a$$

$$M = -\frac{\omega a^2}{2} + \omega ax - \frac{\omega x^2}{2}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\omega a^2}{2} + \omega ax - \frac{\omega x^2}{2}$$

Integrando obtenemos el giro

$$EI\theta = -\frac{\omega a^2 x}{2} + \frac{\omega ax^2}{2} - \frac{\omega x^3}{6} + C_1$$

Como se sabe  $(\theta)_{x=0} = 0$  y aplicando esta condición de frontera

$$EI\theta = -\frac{\omega a^2 x}{2} + \frac{\omega ax^2}{2} - \frac{\omega x^3}{6} + \cancel{C_1}^0$$

Realizando la integral del giro

$$EI\Delta = -\frac{\omega a^2 x^2}{4} + \frac{\omega ax^3}{6} - \frac{\omega x^4}{24} + C_2$$

Por condición de frontera  $(\Delta)_{x=0} = 0$

$$EI\Delta = -\frac{\omega a^2 x^2}{4} + \frac{\omega ax^3}{6} - \frac{\omega x^4}{24} + \cancel{C_2}^0$$

Con esta ecuación se puede calcular el giro y la deflexión en  $a$ .

$$EI\theta_a = \frac{\omega a^3}{6}$$

$$EI\Delta = -\frac{\omega a^4}{4} + \frac{\omega a^4}{6} - \frac{\omega a^4}{24}$$

$$EI\Delta_a = -\frac{\omega a^4}{8}$$

Ahora la parte que no se encuentra bajo los efectos de la carga, por lo que

$$a \leq x \leq L$$

$$M = 0$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Integrando

$$EI\theta = C_3$$

Y como en en  $a$  el giro debe ser el mismo

$$C_3 = -\frac{\omega a^3}{6}$$

$$EI\theta = -\frac{\omega a^3}{6}$$

Esta ecuación para calcular el giro es aplicable sólo para  $a \leq x \leq L$ .

Integrando nuevamente

$$EI\Delta = -\frac{\omega a^3 x}{6} + C_4$$

Las dos deflexiones deben ser iguales, por lo que, igualando las dos ecuaciones de deflexión evaluadas en  $a$

$$-\frac{\omega a^4}{8} = -\frac{\omega a^4}{6} + C_4$$

Despejando  $C_4$

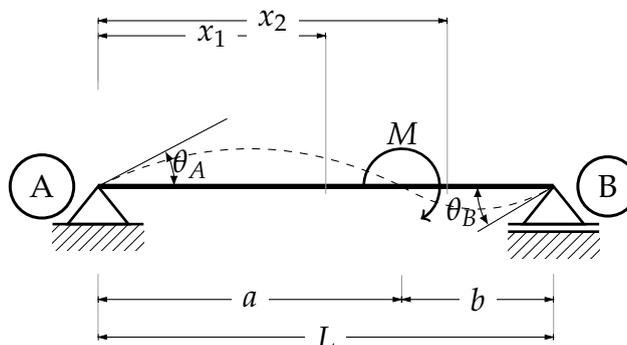
$$C_4 = +\frac{\omega a^4}{24}$$

$$EI\Delta = -\frac{\omega a^3 x}{6} + \frac{\omega a^4}{24}$$

Esta ecuación es aplicable para  $a \leq x \leq L$

**Ejercicio (6)** Calcular las deflexiones y giros, de la siguiente viga simplemente apoyada, con un momento actuando a una distancia  $a$  del apoyo A. Considérese  $EI = \text{constante}$

**Fig. 31** Ejercicio (6)



Una vez calculadas las reacciones, se calcula la ecuación de momento

$$0 \leq x \leq a$$

$$M = -\frac{Mx}{L}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial para la deflexión

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Mx}{L}$$

Integrando para obtener la ecuación del giro

$$EI\theta = -\frac{Mx^2}{2L} + C_1$$

No se pueden aplicar las condiciones de frontera, pero sí se puede evaluar en  $a$

$$EI\theta = -\frac{Ma^2}{2L} + C_1$$

Volviendo a integrar para obtener la deflexión

$$EI\Delta = -\frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Se sabe que  $(\Delta)_{x=0} = 0$ , así que ahora sí se puede aplicar esta condición de frontera

$$EI\theta = -\frac{Mx^3}{6L} + C_1x + \cancel{C_2}^0$$

Ahora para la otra parte de la viga

$$a \leq x \leq L$$

$$M = -\frac{Mx}{L} + M$$

La ecuación diferencial para la flexión en la parte después del momento actuante es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Mx}{L} + M$$

Integrando por primera vez

$$EI\theta = -\frac{Mx^2}{2L} + Mx + C_3$$

No es posible aplicar condiciones de frontera, pero sí de evaluar en  $a$

$$EI\theta = -\frac{Ma^2}{2L} + Ma + C_3$$

Para calcular las constantes que surgieron de la integración, se igualan las ecuaciones del giro, partiendo del supuesto que los giros en el punto  $a$ , deben ser iguales

$$-\frac{Ma^2}{2L} + C_1 = -\frac{Ma^2}{2L} + Ma + C_3$$

Despejamos  $C_1$

$$C_1 = Ma + C_3$$

Integrando la ecuación del giro

$$EI\Delta = -\frac{Mx^3}{6L} + \frac{Mx^2}{2} + C_3x + C_4$$

Ahora es factible aplicar una condición de frontera,  $(\Delta)_{x=L} = 0$

$$EI\Delta = -\frac{ML^3}{6L} + \frac{ML^2}{2} + C_3L + C_4$$

Para calcular  $C_1$  se igualan las ecuaciones de deflexión, evaluadas en  $x = a$

$$-\frac{Ma^3}{6L} + C_1a = -\frac{Ma^3}{6L} + \frac{Ma^2}{2} + C_3a + C_4$$

Despejando  $C_1$

$$C_1a = \frac{Ma^2}{2} + C_3a + C_4$$

Sustituyendo el valor de  $C_1$

$$Ma^2 + C_3a = \frac{Ma^2}{2} + C_3a + C_4$$

Despejando el valor de la constante cuatro

$$C_4 = \frac{Ma^2}{2}$$

Bajo el principio de la condición de frontera con respecto a el apoyo móvil, sabemos que  $(\Delta)_{x=L} = 0$ , entonces

$$EI\Delta = -\frac{ML^3}{6L} + \frac{ML^2}{2} + C_3L + C_4$$

Despejando  $C_3$

$$C_3 = -\frac{ML}{3} - \frac{Ma^2}{2L}$$

Calculadas las cuatro constantes, se sustituyen en las ecuaciones de giro y de deflexión, para encontrar los valores respectivos en cualquier punto de la viga. Primero los giros.

$$EI\theta = -\frac{Mx^2}{2L} + Ma + -\frac{ML}{3} - \frac{Ma^2}{2L} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EI\theta = -\frac{Mx^2}{2L} + Mx - \frac{Ma^2}{2L} \quad a \leq x \leq L$$

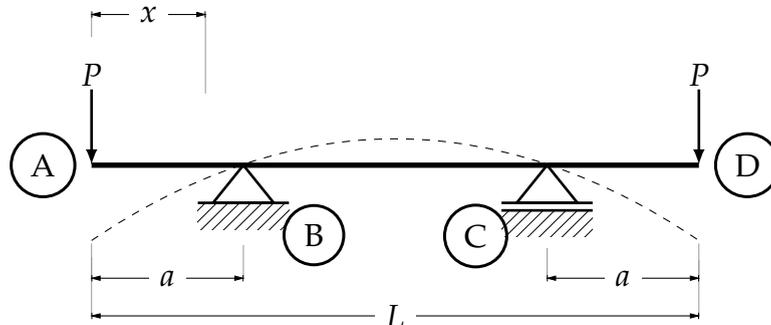
Y las deflexiones

$$EI\Delta = -\frac{Mx^3}{6L} + Max - \frac{MLx}{3} - \frac{Ma^2x}{2L} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EI\Delta = -\frac{Mx^3}{6L} + \frac{Mx^2}{2} - \frac{MLx}{3} - \frac{Ma^2x}{2L} + \frac{Ma^2}{2} \quad a \leq x \leq L$$

**Ejercicio (7)** Calcular las ecuaciones que rigen la deflexión en la siguiente viga dada, así como las ecuaciones de giro. Considérese un modulo de elasticidad y una inercia constante.

Fig. 32 Ejercicio (7)



Realizando un corte a una distancia  $x$  se obtiene la ecuación de momento, para sustituirla en la ecuación diferencial.

$$0 \leq x \leq a$$

$$M = -Px$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

Integrando

$$EI\theta = -\frac{Px^2}{2} + C_1$$

Integrando nuevamente

$$EI\theta = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

Debido a que no es posible hacer válida ninguna condición de frontera, evaluamos ( $\Delta_{x=a} = 0$ ) para usarla posteriormente

$$EI\Delta = -\frac{Pa^3}{6} + C_1a + C_2$$

$$a \leq x \leq (L - a)$$

$$M = -Px$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Pa$$

Integrando

$$EI\theta = -Pax + C_3$$

Aplicando la condición de frontera  $(\theta)_{x=L/2} = 0$  y despejando  $C_3$

$$C_3 = \frac{PaL}{2}$$

Entonces

$$EI\theta = -Pa^2 + \frac{PaL}{2}$$

Igualando las ecuaciones del giro

$$-\frac{Pa^2}{2} + C_1 = -Pa^2 + \frac{PaL}{2}$$

$$C_1 = -\frac{Pa^2}{2} + \frac{PaL}{2}$$

Calculada la  $C_1$  se puede sustituir su valor en la ecuación de deflexión, evaluada en  $(\Delta)_{x=a} = 0$  para la primera parte de la viga, para calcular la segunda constante de integración.

$$0 = -\frac{pa^3}{6} - \frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2L}{2} + C_2$$

Despejando  $C_2$

$$C_2 = \frac{2Pa^3}{3} - \frac{Pa^2L}{2}$$

Integrando la ecuación de giro para la segunda parte de la viga

$$EI\Delta = -\frac{pax^2}{2} + \frac{PaLx}{2} + C_4$$

Se aplica la condición de frontera  $(\Delta)_{x=a} = 0$  debido al apoyo

$$0 = -\frac{pa^3}{2} + \frac{Pa^2L}{2} + C_4$$

Despejando  $C_4$

$$C_4 = \frac{pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2}$$

Calculadas todas las constantes, se procede a sustituir en las fórmulas. Para los giros

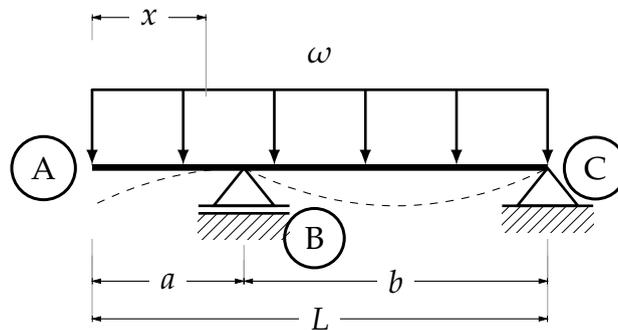
$$\begin{aligned}
 & 0 \leq x \leq a \\
 EI\theta &= -\frac{Px^2}{2} - \frac{Pa^2}{2} + \frac{PaL}{2} \\
 & a \leq x \leq (L-a) \\
 EI\theta &= -Pax + \frac{PaL}{2}
 \end{aligned}$$

Las deflexiones

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq x \leq a \\
 EI\Delta &= -\frac{Pa^3}{6} + -\frac{Pa^2x}{2} + \frac{PaLx}{2} + \frac{2Pa^3}{3} - \frac{Pa^2L}{2} \\
 & a \leq x \leq (L-a) \\
 EI\Delta &= -\frac{pax^2}{2} + \frac{PaLx}{2} + \frac{pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2}
 \end{aligned}$$

**Ejercicio (8)** Calcular las ecuaciones de giro y de deflexion para la siguiente viga mostrada, por el método de la doble integral, considérese un  $EI = Constante$ .

**Fig. 33** Ejercicio (8)



Calculamos reacciones

$$\begin{aligned}
 \sum M_C &= 0 \\
 RVB(b) - \frac{\omega L^2}{2} &= 0 \\
 RVB &= \frac{\omega L^2}{2b} \\
 \sum F_y &= 0 \\
 -\omega L + \frac{\omega L^2}{2b} + RVC &= 0 \\
 RVC &= -\frac{\omega L^2}{2b} + \omega L
 \end{aligned}$$

Realizado lo anterior, sustituimos el valor de la ecuación de momento obtenida por un corte a una distancia  $x$  de la viga y se sustituye en la ecuación diferencial.

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = -\frac{\omega x^2}{2}$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\omega x^2}{2}$$

Integrando para obtener la ecuación de giro que corresponde a la parte de la viga que se encuentra en voladizo

$$EI\theta = -\frac{\omega x^3}{6} + C_1$$

No es posible aplicar ninguna condición de frontera, así que volvemos a integrar

$$EI\Delta = -\frac{\omega x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Todavía no es posible calcular las constantes de integración, pero es factible evaluar la ecuación  $(\Delta)_{x=a} = 0$

$$0 = -\frac{\omega a^4}{24} + C_1 a + C_2$$

Ahora se sustituye la ecuación diferencial con el momento obtenido de un segundo corte

$$a \leq x \leq L$$

$$M_2 = -\frac{\omega x^2}{2} + \frac{\omega L^2}{2b}(x - a)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\omega x^2}{2} + \frac{\omega L^2}{2b}(x - a)$$

Integrando

$$EI\theta = -\frac{\omega x^3}{6} + \frac{\omega L^2}{2b} \left[ \frac{(x - a)^2}{2} \right] + C_3$$

Volviendo a integrar

$$EI\Delta = -\frac{\omega x^4}{24} + \frac{\omega L^2}{2b} \left[ \frac{(x - a)^3}{6} \right] + C_3 x + C_4$$

Debido a la integración se han obtenido cuatro constantes, se deben de establecer las condiciones de frontera para calcularlas, para las ecuaciones de giros establecemos la primera condición de frontera  $(\theta)_{x=a}$ , se igualan, bajo el supuesto de que en el punto  $a$  las dos ecuaciones deben ser iguales, pero no se puede suponer que el giro es nulo, observese la ecuación, este supuesto es meramente teórico

$$-\frac{\omega a^3}{6} + C_1 = -\frac{\omega a^3}{6} + C_3$$

$$C_1 = C_3$$

Ahora utilizando la segunda ecuación de deflexión, que rige la segunda parte de la viga, aplicamos las siguientes condiciones de frontera  $(\Delta)_{x=a} = 0$  y  $(\Delta)_{x=L} = 0$ , se tiene

$$0 = -\frac{\omega a^4}{24} + C_3 a + C_4$$

Despejando  $C_4$

$$C_4 = \frac{\omega a^4}{24} - \frac{\omega l^2 b^2}{12} - C_3$$

$$0 = -\frac{\omega L^4}{24} + \frac{\omega L^2 b^2}{12} + C_3 L + C_4$$

Sustituyendo el valor de  $C_4$  en la ecuación anterior y despejando  $C_3$

$$C_3 = -\frac{\omega a^4}{24b} + \frac{\omega L^4}{24b} - \frac{\omega L^2 b}{12}$$

Y como sabemos  $C_1 = C_3$

$$C_1 = C_3 = \frac{\omega(L^4 - a^4)}{24b} - \frac{\omega L^2 b}{12}$$

sustituyendo el valor de  $C_3$  en la ecuación de deflexión evaluada en  $(\Delta)_{x=a} = 0$ , tenemos

$$0 = -\frac{\omega a^4}{24} + \frac{\omega(L^4 - a^4)}{24b} - \frac{\omega L^2 b}{12} + C_4$$

Y despejado  $C_4$

$$C_2 = C_4 = +\frac{\omega a^4}{24} - \frac{\omega(L^4 - a^4)a}{24b} + \frac{\omega L^2 ba}{12}$$

Una vez calculadas todas las incógnitas, se procede a sustituir los valores en las ecuaciones necesarias.

Para los giros.

$$EI\theta = -\frac{\omega x^3}{6} + \frac{\omega(L^4 - a^4)}{24b} - \frac{\omega L^2 b}{12} \quad 0 \leq x \leq a$$

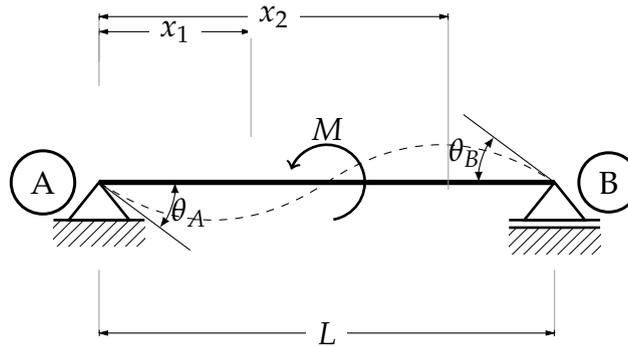
$$EI\theta = -\frac{\omega x^3}{6} + \frac{\omega L^2}{2b} \left[ \frac{(x-a)^2}{2} \right] + \frac{\omega(L^4 - a^4)}{24b} - \frac{\omega L^2 b}{12} \quad a \leq x \leq L$$

$$EI\Delta = -\frac{\omega x^4}{24} + \frac{\omega(L^4 - a^4)x}{24b} - \frac{\omega L^2 bx}{12} + \frac{\omega a^4}{24} - \frac{\omega(L^4 - a^4)a}{24b} + \frac{\omega L^2 ba}{12} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EI\Delta = -\frac{\omega x^4}{24} + \frac{\omega L^2}{2b} \left[ \frac{(x-a)^3}{6} \right] + \frac{\omega(L^4 - a^4)x}{24b} - \frac{\omega L^2 bx}{12} + \frac{\omega a^4}{24} - \frac{\omega(L^4 - a^4)a}{24b} + \frac{\omega L^2 ba}{12} \quad a \leq x \leq L$$

**Ejercicio (9)** Debido a la simetría que presenta el siguiente ejercicio sólo calcularemos la mitad. El momento concentrado se encuentra al centro del claro  $L$ , considerar un  $EI = cte$

**Fig. 34** Ejercicio (9)



Calculadas las reacciones establecemos las ecuaciones de momento que son dos, una antes del momento concentrado  $x_1$  y otro después  $x_2$ , se tiene

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_1 = \frac{Mx}{L}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$M_2 = \frac{Mx}{L} - M$$

Aplicando la ecuación de la elástica para vigas e integrando para obtener la ecuación del giro

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$EI \theta = \int \frac{Mx}{L} dx$$

$$EI \theta = \frac{Mx^2}{2L} + C_1$$

Volviendo a integrar

$$EI \Delta = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Procediendo a calcular las constantes de integración, partimos del supuesto de que la deflexión es igual a cero cuando  $x = 0$ , o sea en el apoyo A. Entonces

$$0 = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Por lo que  $C_2 = 0$ . Escribiendo de nuevo la ecuación para la deflexión

$$EI \Delta = \frac{Mx^3}{6L} + C_1x$$

Aquí se puede hacer otra suposición para poder calcular  $C_1$ , se considera que la deflexión en el punto de aplicación del momento concentrado vale cero.<sup>22</sup> Entonces cuando  $\Delta = 0$ ,  $x = L/2$

$$\frac{ML^3}{48} + \frac{C_1L}{2} = 0$$

$$C_1 = -\frac{ML}{24}$$

Una vez calculadas las constantes de integración, se escriben las ecuaciones

$$0 \leq x \leq L/2$$

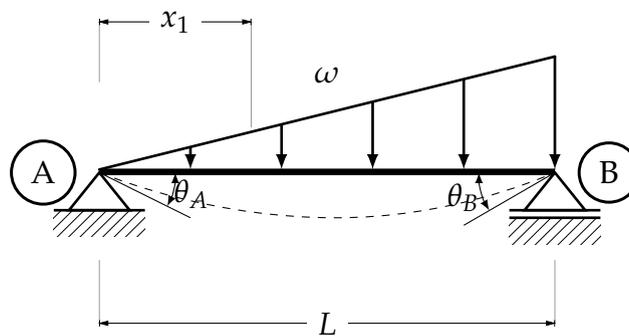
$$\theta = \frac{Mx^2}{2LEI} - \frac{ML}{24EI}$$

$$\Delta = \frac{Mx^3}{6LEI} - \frac{MLx}{24EI}$$

Después de la mitad del claro las deformaciones serán iguales a las de la primera mitad, véase la Fig. 34, pero con el signo distinto.

**Ejercicio 10** Obtener la ecuación de la deflexión de la siguiente viga, así como la de giros. Considerando un  $EI = cte$

Fig. 35 Ejercicio (10)



Calculadas las recciones y la ecuación de momento, aplicamos el método.

$$EI\theta = \int \frac{\omega Lx}{6} - \frac{\omega x^3}{6L}$$

Integrando

$$EI\theta = \frac{\omega Lx^2}{12} - \frac{\omega x^4}{24L} + C_1$$

Ahora para la deflexión, se tiene

$$EI\Delta = \int \frac{\omega Lx^2}{12} - \frac{\omega x^4}{24L} + C_1$$

<sup>22</sup> Resolviendo el ejercicio por el método del trabajo virtual se puede comprobar esta suposición

Integrando

$$EI\Delta = \frac{\omega Lx^3}{36} - \frac{\omega x^5}{120L} + C_1x + C_2$$

Estableciendo las condiciones de frontera para calcular las constantes Cuando  $x = 0$ ,  $\Delta = 0$ , entonces:  $C_2 = 0$  Cuando  $x = L$ ,  $\Delta = 0$ , entonces

$$C_1 = -\frac{4\omega L^3}{360}$$

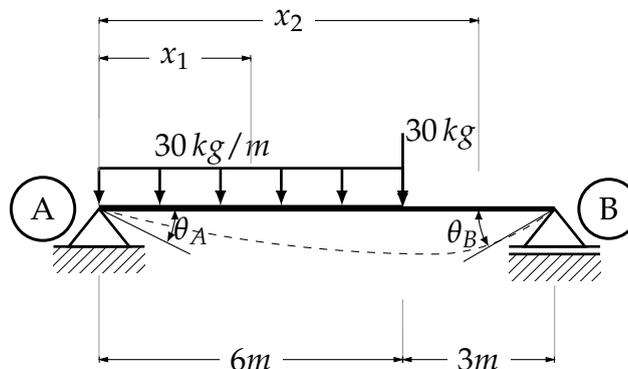
Sustituyendo el valor de  $C_1$  en las ecuaciones de las deformaciones

$$EI\Delta = \frac{\omega Lx^3}{36} - \frac{\omega x^5}{120L} - \frac{4\omega L^3x}{360}$$

$$EI\theta = \frac{\omega Lx^2}{12} - \frac{\omega x^4}{24L} - \frac{4\omega L^3}{360}$$

**Ejercicio 11** Encontrar las respectivas ecuaciones de deflexión y de giro para la siguiente viga, cargada de la siguiente manera. Considerar  $EI = cte$

Fig. 36 Ejercicio (11)



Calculando las reacciones

$$RVA = 130 \text{ kg}$$

$$RVB = 80 \text{ kg}$$

Calculadas las reacciones se realizan los cortes necesarios

$$0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$M = 130x - 15x^2$$

$$6 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

$$M = 130x - 180(x - 3) - 30(x - 6)$$

Para la primera parte de la viga

$$0 \leq x \leq 6 m$$

$$EI\theta = \int 130x - 15x^2$$

$$EI\theta = 65x^2 - 5x^3 + C_1$$

Integrando

$$EI\Delta = \frac{65x^3}{3} - \frac{5x^4}{4} + C_1x + C_2$$

En este punto es posible saber el valor de  $C_2$  ya que cuando  $x = 0 \Delta = 0 \therefore C_2 = 0$  Ahora para la segunda parte

$$6 m \leq x \leq 9 m$$

$$EI\theta = \int 130x - 180(x - 3) - 30(x - 6)$$

$$EI\theta = 65x^2 - 90(x - 3)^2 - 15(x - 6)^2 + C_3$$

Integrando

$$EI\Delta = \frac{65x^3}{3} - 30(x - 3)^3 - 5(x - 6)^3 + C_3x + C_4$$

Aunque ya se eliminó una constante de integración, quedan tres que aún no se sabe su valor, basándose en la continuidad de la viga, se igualan las ecuaciones de giro evaluadas en  $6m$ , para obtener una relación entre constantes que ayude a encontrar el valor de las constantes que faltan.

$$\cancel{65x^2} - 5x^3 + C_1 = \cancel{65x^2} - 90(x - 3)^2 - \cancel{15(x - 6)^2} + C_3$$

$$(C_1 - C_3) = 270$$

De igual manera con las ecuaciones de deflexión

$$\cancel{65x^2} - 5x^3 + C_1x = \cancel{65x^2} - 90(x - 3)^2 - \cancel{15(x - 6)^2} + C_3x + C_4$$

$$-1620 + C_1(6) = -810 + C_3(4) + C_4$$

$$6(C_1 - C_3) - 810 = C_4$$

$$C_4 = 810$$

Evaluando la ecuación de deflexión de la segunda mitad de la viga en  $x = 9$ , donde es sabido  $\Delta = 0$

$$\frac{65x^3}{3} - 30(x - 3)^3 - 5(x - 6) + C_3(9) + 810 = 0$$

$$C_3 = 1110$$

Regresamos a la relación que se encontró al igualar las ecuaciones de giro

$$C_1 = -840$$

Calculadas todas las constantes de integración, se vuelven a escribir las ecuaciones de deformaciones completas.

$$0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$EI\theta = 65x^2 - 5x^3 - 840$$

$$EI\Delta = \frac{65x^3}{3} - \frac{5x^4}{4} - 840x$$

$$6 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

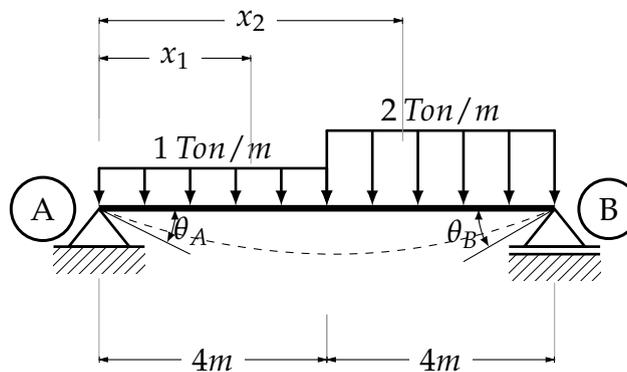
$$EI\theta = 65x^2 - 90(x - 3)^2 - 15(x - 6)^2 + 1110$$

$$EI\Delta = \frac{65x^3}{3} - 30(x - 3)^3 - 5(x - 6)^3 + 1110x + 810$$

Resolviendo la primera ecuación de giro, se obtiene el punto donde la deflexión es máxima, es  $x = 4.4267 \text{ m}$

**Ejercicio 12** Obtener las ecuaciones de deflexión y de giros para la siguiente viga, considérese  $EI = cte$ .

Fig. 37 Ejercicio (12)



Calculando las reacciones

$$RVA = 5 \text{ Ton}$$

$$RVB = 7 \text{ Ton}$$

Ahora haciendo dos cortes

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$M_1 = 5x - \frac{x^2}{2}$$

$$4 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$M_2 = 5x - 4(x - 2) - (x - 4)^2$$

Aplicando el método

$$0 \leq x \leq 4m$$

$$EI\theta = \int 5x - \frac{x^2}{2}$$

$$EI\theta = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EI\Delta = \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2$$

De las dos constantes que surgieron podemos eliminar  $C_2$ . Como sabemos cuando  $x = 0$   $\Delta = 0$  por lo que  $C_2 = 0$ .

Ahora para la otra mitad de la viga

$$4m \leq x \leq 8m$$

$$EI\theta = \int 5x - 4(x-2) - (x-4)^2$$

$$EI\theta = \frac{5x^2}{2} - 2(x-2)^2 - \frac{(x-4)^3}{3} + C_3$$

Volviendo a integrar obtenemos

$$EI\Delta = \frac{5x^3}{6} - \frac{2(x-4)^3}{3} - \frac{(x-4)^4}{12} + C_3x + C_4$$

Una vez obtenidas las ecuaciones, se deben calcular las constantes de integración que se desconocen. Partiendo del hecho de que los giros deben valer lo mismo en  $4m$  debido a la condición de continuidad de las ecuaciones de momento que se calcularon realizando dos cortes, dicho esto, se igualan las ecuaciones de giros evaluadas a  $4m$ . A pesar de este supuesto no se podrá calcular ninguna constante, ya que existen dos incógnitas, pero se podrá establecer una condición para calcularlas.

$$\cancel{\frac{5x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + C_1 = \cancel{\frac{5x^2}{2}} - 2(x-2)^2 - \cancel{\frac{(x-4)^3}{3}} + C_3$$

Entonces

$$(C_1 - C_3) = \frac{8}{3}$$

Ahora igualando las ecuaciones de deflexión bajo el mismo principio que con los giros

$$-\frac{x^4}{24} + C_1(4) = -\frac{2(x-2)^2}{3} + C_3(4) + C_4$$

$$4(C_1 - C_3) - \frac{16}{3} = C_4$$

Despejando  $C_4$

$$C_4 = \frac{16}{3}$$

Ya calculada la cuarta constante de integración se puede sustituir en la ecuación de la deflexión de la segunda mitad de la viga, evaluada en  $x = 8 m$  y despejando  $C_3$

$$C_3 = -\frac{100}{3}$$

Conociendo  $C_4$  y  $C_3$ , sustituimos sus respectivos valores

$$(C_1 + \frac{100}{3}) = \frac{8}{3}$$

$$C_1 = -\frac{92}{3}$$

Calculadas las cuatro constantes de integración se pueden volver a escribir las ecuaciones de las deformaciones

$$0 \leq x \leq 4 m$$

$$EI\theta = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{92}{3}$$

$$EI\Delta = \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{92x}{3}$$

$$4 m \leq x \leq 8 m$$

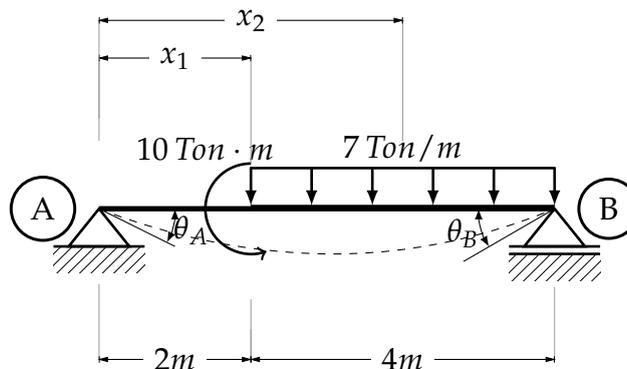
$$EI\theta = \frac{5x^2}{2} - 2(x-2)^2 - \frac{(x-4)^3}{3} - \frac{100}{3}$$

$$EI\Delta = \frac{5x^3}{6} - \frac{2(x-4)^3}{3} - \frac{(x-4)^4}{12} - \frac{100x}{3} + \frac{16}{3}$$

Para encontrar la deflexión máxima en la viga, se resuelve la ecuación de la deflexión de la segunda mitad del claro, y se obtiene  $x = 4.1106 m$

**Ejercicio 13** Obtener las ecuaciones de deformaciones de la siguiente viga, así como el punto donde se encuentra la deflexión máxima. Considerar  $EI = cte$

Fig. 38 Ejercicio (13)



Realizando los cortes necesarios

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$M = 11x$$

$$2 \leq x \leq 6m$$

$$M = 11x - 10 - \frac{7(x-2)^2}{2}$$

Aplicando el método

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI\theta = \frac{11x^2}{2} + C_1$$

$$EI\Delta = \frac{11x^3}{6} + C_1x + C_2$$

Estableciendo que, cuando  $x = 0$   $\Delta = 0$  es posible saber que  $C_2 = 0$  Para la otra parte de la viga

$$2m \leq x \leq 6m$$

$$EI\theta = \frac{11x^2}{2} - 10x - \frac{7(x-2)^3}{6} + C_3$$

$$EI\Delta = \frac{11x^3}{6} - 5x^2 - \frac{7(x-2)^4}{24} + C_3x + C_4$$

Igualando las ecuaciones de giro

$$EI\theta = \frac{11x^2}{2} + C_1 = \frac{11x^2}{2} - 10x - \frac{7(x-2)^3}{6} + C_3$$

Evaluando en  $x = 2$

$$C_1 = -20 + C_3$$

$$(C_1 - C_3) = -20$$

Haciendo lo mismo para las ecuaciones de deflexión

$$C_1(2) = -5x^2 + C_3(2) + C_4$$

$$C_4 = -20$$

Ahora evaluando la ecuación de la deflexión en  $x = 6$

$$C_3 = -\frac{182}{9}$$

Entonces

$$C_1 = -\frac{362}{9}$$

Reescribiendo las ecuaciones obtenidas con sus respectivos valores de las constantes

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI\theta = \frac{11x^2}{2} - \frac{362}{9}$$

$$EI\Delta = \frac{11x^3}{6} - \frac{362x}{9}$$

$$2m \leq x \leq 6m$$

$$EI\theta = \frac{11x^2}{2} - 10x - \frac{7(x-2)^3}{6} - \frac{182}{9}$$

$$EI\Delta = \frac{11x^3}{6} - 5x^2 - \frac{7(x-2)^4}{24} - \frac{182x}{9} - 20$$

Resolviendo la ecuaciones de giro se obtiene el punto donde se presentará la deflexión máxima, este es en  $x = 3.0959$

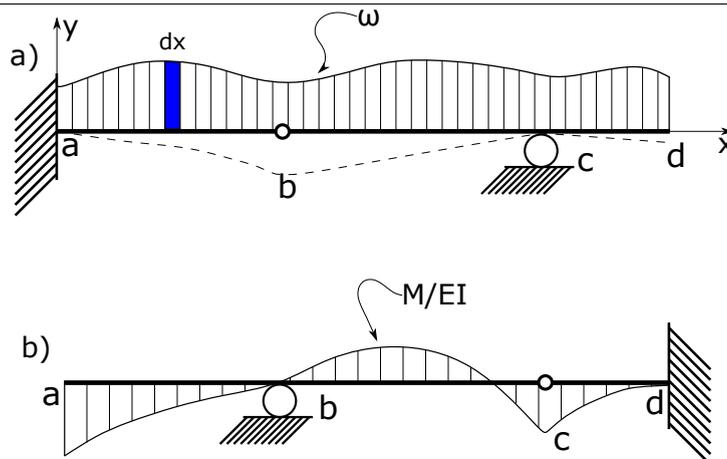
### III.3. Viga conjugada.

Se basa en la relación que existe entre la carga, reacciones, fuerza cortante, y momento flexionante. El método consiste en transformar un viga bajo cargas reales en otra, llamada *viga conjugada* de igual longitud, pero diferente sistema de apoyos, sometida a una carga elástica (llamada de este modo por el hecho de estar dividida entre  $EI$ ), que resulta del diagrama de momentos de la original ( $M/EI$ ), cuyos valores de los esfuerzos cortantes y momentos corresponden a los giros y deflexiones de la viga original, respectivamente.

La gran ventaja de este método en comparación al del trabajo virtual es que se puede calcular deflexiones en distintos puntos, con el mismo planteamiento. Esto puede resultar en una simplificación del problema.

Para demostrar el método, consideremos una viga Gerber, con una carga  $\omega$  de valor variable.

Fig. 39 Viga Gerber



La curvatura para cualquier punto de una viga está expresada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (13)$$

Y la pendiente por:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \approx \theta \quad (14)$$

Para pequeñas deformaciones

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} \quad (15)$$

Integrando la ecuación anterior.

$$\theta = -\int \frac{M}{EI} dx$$

Sustituyendo  $\theta$

$$y = \int \theta dx = -\iint \frac{M}{EI} dx dx$$

Considerando un elemento diferencial  $dx$  en una viga

$$\frac{dV}{dx} = -\omega$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$V = -\int \omega dx$$

$$M = \int V dx = -\iint \omega dx dx$$

Considerando la viga conjugada con una carga elástica de  $M/EI$  y sustituyendo  $\omega$  en las ecuaciones anteriores

$$\bar{V} = -\int \frac{M}{EI} dx$$

$$\bar{M} = -\iint \frac{M}{EI} dx dx$$

De esta manera se deduce que el cortante de la viga conjugada es el giro en cualquier punto de la viga real, y de igual manera el momento de la viga conjugada es la deflexión de la viga original.

En cuanto al sistema de apoyos, debe de haber una coherencia, debido a que el sistema de apoyos de la viga original podría no permitir deflexiones, por el hecho de que por naturaleza un apoyo restringe desplazamientos, en algún punto. El caso más sencillo para comprender esta cuestión es el del empotre, si la viga real está empotrada en uno de sus extremos, en este punto no existen los giros ni las deflexiones, si se apoya de igual manera la viga conjugada, en el punto donde se encuentra el apoyo existiría el giro y la deflexión, porque en este punto existe el cortante y el momento (máximos), faltando a la definición de apoyo. Si en la viga conjugada liberamos el extremo donde se encontraba originalmente el apoyo y el extremo libre se empotra, en este punto se encontrará la deflexión y el giro, debidos al cortante y momento (máximos), como se supone que sucedería en la viga real. Debido a este tipo de problemas se debe prestar atención al sistema de apoyos de la viga conjugada, véase el *b*) de la Fig. 39, el extremo empotrado, pasó a estar libre y viceversa, en el punto (*b*) existe una articulación y esta transmite cortantes pero no así momentos, por lo tanto no puede mantenerse en la viga virtual, ya que no habría momentos en ese punto, pero se debe mantener el límite de frontera, y deben de existir los momentos en la viga conjugada para que estos den lugar a un desplazamiento, es por eso que en la viga conjugada en el punto (*b*) pasa de ser una articulación a un apoyo móvil. De igual manera el apoyo móvil de la viga real, pasa a ser una articulación en la viga conjugada, debido a que, por tratarse de un apoyo no puede existir un desplazamiento en dicho punto (*c*) pero si se mantiene el apoyo móvil en la viga conjugada, en este punto existirían momentos que darían lugar a un desplazamiento, pero se estaría violando los límites de frontera, entonces se cambia por una articulación en donde no existen momentos y por lo tanto no existen desplazamientos.

Para facilitar este problema, se puede desarrollar un pequeño diagrama, para ayudar a guiar a la hora de resolver problemas.

*Empotre*  $\longleftrightarrow$  *Libre*

*Apoyo movil*  $\longleftrightarrow$  *Apoyo móvil*

*Apoyo fijo*  $\longleftrightarrow$  *Apoyo fijo*

*Apoyo fijo ó móvil*  $\longrightarrow$  *Articulación*

*Articulación interna*  $\longrightarrow$  *Apoyo móvil*

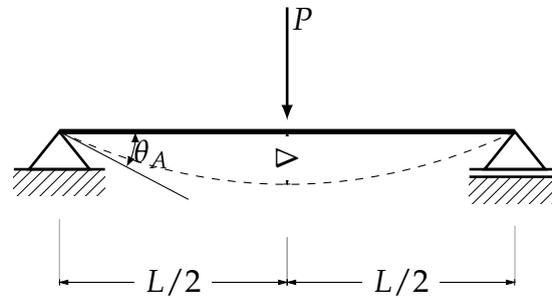
En el diagrama<sup>23</sup> se da una muy simple instrucción para colocar apoyos cuando se emplea el método de la viga conjugada, pero esto va más allá, se deben de revisar los límites de frontera para que estos no sean violados.

Un importante número de ejercicios serán resueltos para explicar a detalle este método, comenzando con un par de ejercicios algebraicos para acabar de demostrar el método.

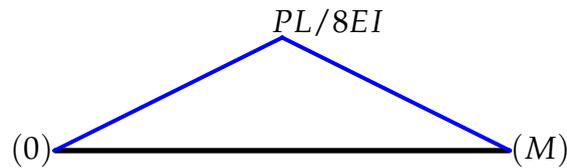
**Ejemplo** Calcular la deflexión máxima la siguiente viga por el método de la viga conjugada, a la mitad del claro, en donde se presenta la deflexión máxima como se muestra a continuación.

<sup>23</sup> Donde con *interno* se refiere a que no está en los extremos del claro de la viga.

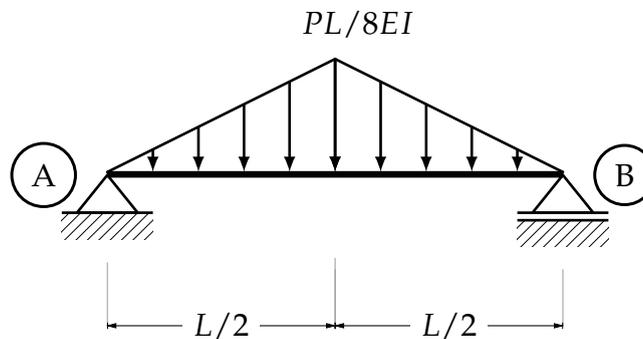
Fig. 40 Ejercicio



Dibujando el diagrama de momento flexionante dividido entre  $EI$ .



Cargando la viga conjugada, tomando como carga el momento flexionante de la viga original. Debido al tipo de apoyos, estos se mantienen.



Se calculan las reacciones de los apoyos, ya que en los apoyos se encuentran los esfuerzos cortantes máximos, el resultado de las reacciones son los giros en estos.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \circlearrowleft \\ -\frac{PL^2}{16} \left(\frac{L}{3}\right) - \frac{PL^2}{16} \left(\frac{2L}{3}\right) + R_{VB}(L) &= 0 \\ R_{VB} &= \frac{PL^2}{16} \\ \sum F_Y &= 0 \uparrow \\ R_{VA} - \frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{16} + \frac{PL^2}{16} &= 0 \\ R_{VA} &= \frac{PL^2}{16} = 0 \end{aligned}$$

Debido a los signos positivos de las reacciones, los giros se miden en dirección a la deformación generada por la carga.

Como es sabido del método de la viga conjugada, el diagrama de momento de la viga conjugada es la deflexión de la viga real. Realizando un corte en la viga conjugada, y evaluando la ecuación de momento obtenida en  $L/2$ , se obtendrá la deflexión máxima de la viga real.

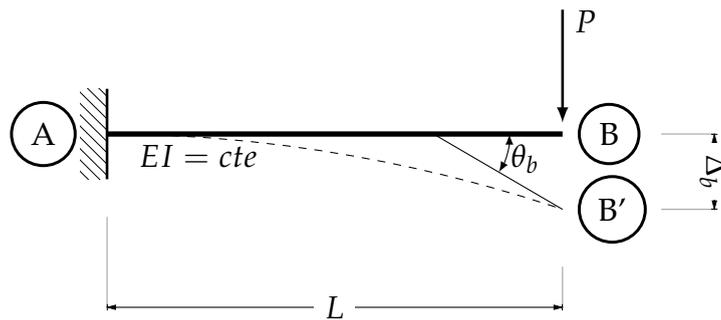
$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M = \frac{PL^3}{32} - \frac{PL^3}{96} = \frac{PL^3}{48EI}$$

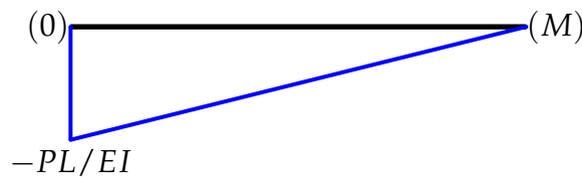
$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

**Ejemplo** Calcular la deflexión y el giro en el punto B de la siguiente viga por el método de la viga conjugada.

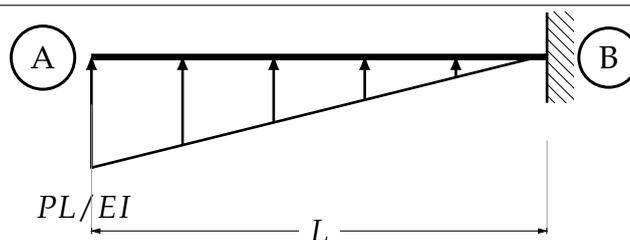
Fig. 41 Ejercicio



Dibujando el diagrama de momento flexionante de la viga original.



Cargando la viga conjugada y cambiando el sistema de apoyo como dicta el método.



Una vez cargada calculamos su reacción vertical.

$$\begin{aligned}\sum F_Y &= 0 \uparrow \\ R_{VB} + \frac{PL^2}{2} &= 0 \\ R_{VB} &= -\frac{PL^2}{2} \\ \theta_B &= -\frac{PL^2}{2}\end{aligned}$$

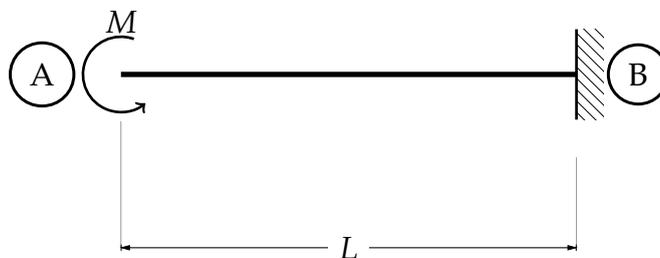
La reacción vertical define el valor del giro máximo en el extremo en voladizo. El signo indica que la reacción está mal propuesta, el giro se mide en dirección de la deformación como indica la Fig. 41. De igual manera calculamos la deflexión, con el valor del momento del apoyo empotrado.

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \circlearrowleft \\ -\frac{PL^2}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) + M_B &= 0 \\ M_B &= \frac{PL^3}{3EI} \\ \Delta_B &= \frac{PL^3}{3EI}\end{aligned}$$

### III.4. Obtención de deformaciones.

**Ejercicio (1)** Calcular el giro y la deflexión máxima de la siguiente viga empotrada, considere para el largo de la viga un  $EI = cte$

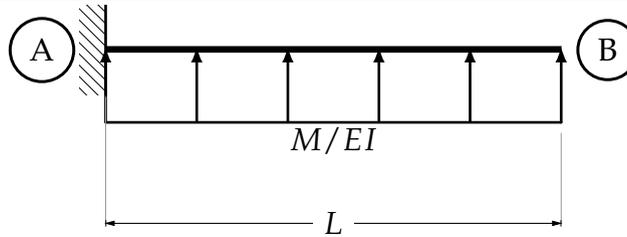
Fig. 42 Ejercicio (1)



Dibujando el diagrama de momentos para la viga real.



Estableciendo la viga conjugada.



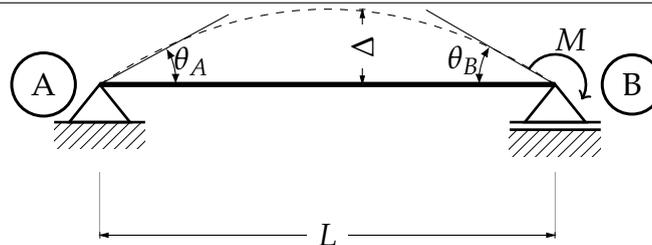
Calculando las reacciones del apoyo

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \downarrow \\ RVB - \frac{ML}{EI} &= 0 \\ RVB &= \frac{ML}{EI} \\ \theta_A &= \frac{ML}{EI} \\ \sum M_A &= 0 \curvearrowright \\ -\frac{ML^2}{2EI} + M_A &= 0 \\ \Delta_A &= \frac{ML^2}{2EI} \end{aligned}$$

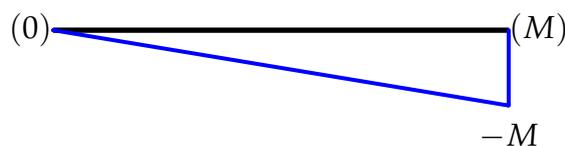
Aquí es posible apreciar que si se grafican los diagramas de esfuerzo cortante y momento flexionante, los máximos son las reacciones encontradas.

**Ejercicio (2)** Calcular las deformaciones máximas de la siguiente viga, por el método de la viga conjugada, considerar un  $EI = cte$ .

Fig. 43 Ejercicio (3)

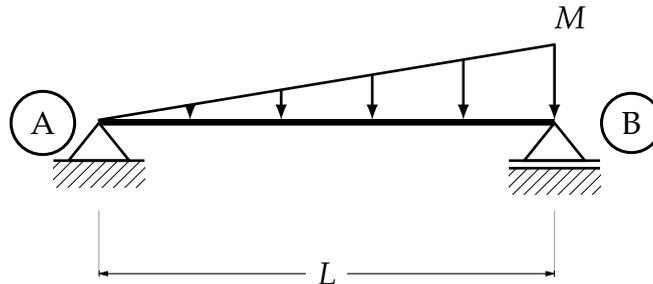


Calculadas las reacciones de la viga real, se dibuja el diagrama de momentos

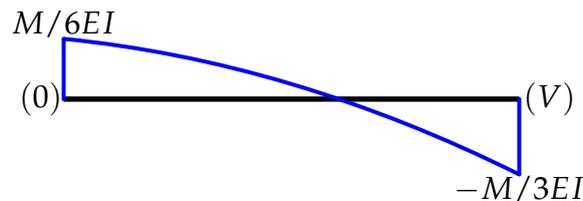


Dividiendo entre el modulo a la flexión para convertir el diagrama de momentos en una carga elástica, para cargar la viga virtual

Fig. 44 Ejercicio (3)



Se calculan las reacciones de los apoyos de la viga conjugada para proceder a dibujar los diagramas de esfuerzos de dicha viga, de esta manera se facilita la obtención de los esfuerzos máximos, que en el caso de los giros son los valores de las reacciones de los apoyos.



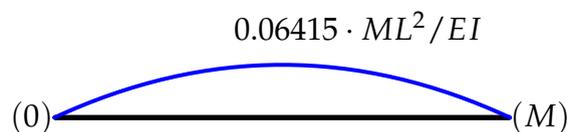
$$\theta_A = \frac{ML}{6EI}$$

$$\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$$

Para la deflexión es necesario realizar un corte en la viga conjugada y evaluar en el punto donde el cortante es cero y se presentará la deflexión máxima<sup>24</sup> que es en  $0.5773L$

$$0 \leq x \leq L$$

$$M = -\frac{M}{6EI}(x^3 - L^2x)$$



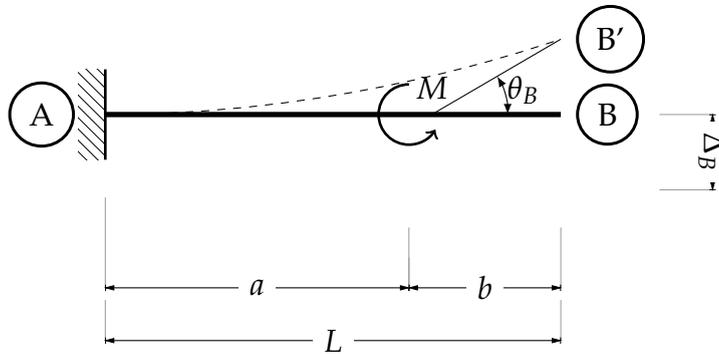
$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{ML^2 \cdot \sqrt{3}}{27EI}$$

<sup>24</sup> Remito al lector al Ejercicio(3) del método de la doble integral

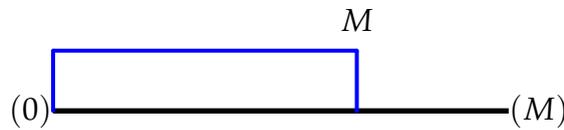
**Ejercicio (3)** Calcular la flecha y el giro provocado por el momento concentrado, en el extremo libre de la viga, considérese  $EI = cte$ .

Debido a la dirección del momento la deflexión se presentará de la manera en que se muestra en la siguiente figura, dónde B' representa el punto de donde se dibuja la tangente para medir el ángulo  $\theta_B$

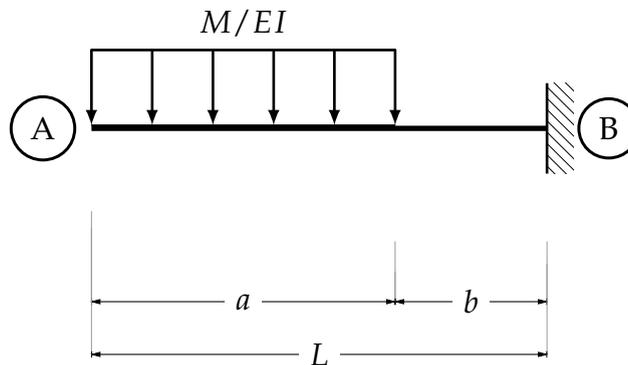
Fig. 45 Ejercicio



Dibujando el diagrama de momento que corresponde a la viga real

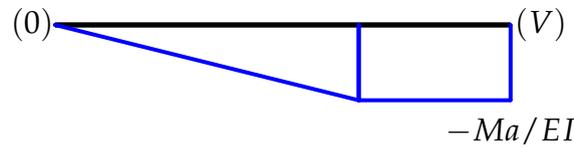


Cambiando el sistema de apoyo de la viga real y cargando la viga con la carga elástica del diagrama de momento de la viga real



Una vez establecida la viga conjugada, que corresponde a la viga real, lo más sencillo es dibujar los diagramas de cortante, para que, con la ayuda de las reacciones de el empotre se conozca los picos de las deformaciones que se producen en la viga real. Entonces

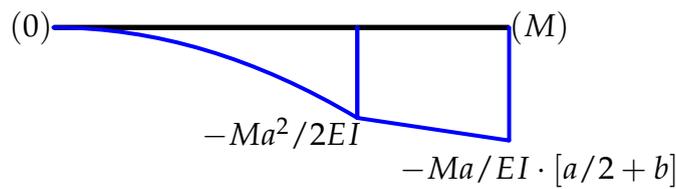
Para los giros, el diagrama de cortante



El giro en el extremo libre de la viga empotrada es

$$\theta_B = \frac{Ma}{EI}$$

Para la deflexión, el diagrama de momentos



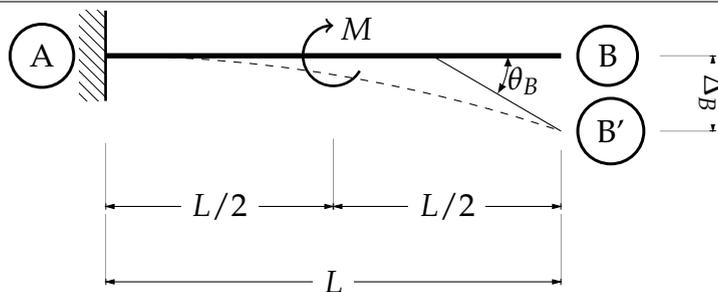
La deflexión máxima en el extremo libre de la viga es

$$\Delta_B = \frac{Ma}{EI} \left[ \frac{a}{2} + b \right]$$

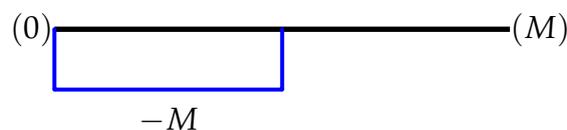
Por cómo se consideró la carga elástica, el diagrama de momentos resultó con valores negativos, pero la deflexión va en el otro sentido, como se ilustró en la (Fig. 45)

**Ejercicio (4)** Calcular las deformaciones máximas de la siguiente viga, por el método de la viga conjugada, considerar que está hecha de un material elástico homogéneo, y que la sección se mantiene en toda la longitud de la viga.

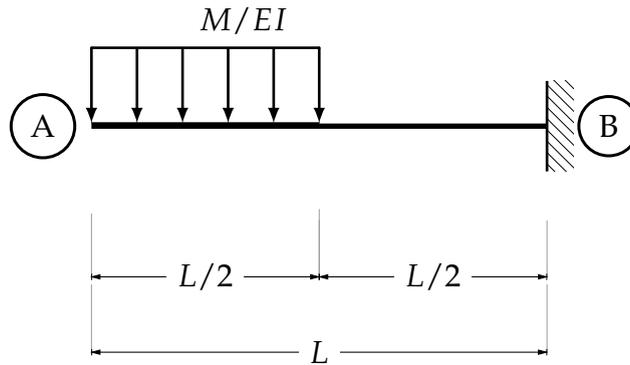
Fig. 46 Ejercicio



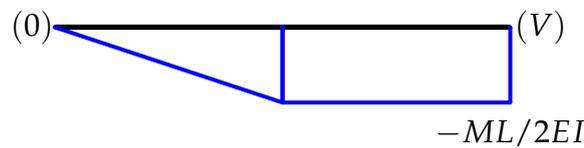
Calculando las reacciones del empotre y dibujando el diagrama de momentos.



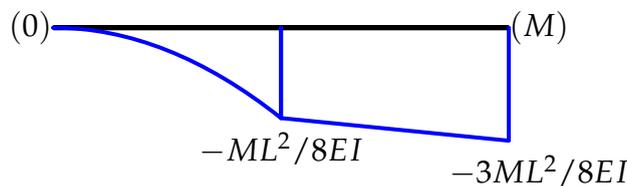
Convirtiendo la carga en elástica y aplicandola en la viga virtual, con su correspondiente sistema de apoyos.



Resolviendo la viga virtual que se ve afectada por la carga elástica y dibujando el diagrama de cortante, se obtienen dos giros, de los cuales uno es el máximo, como se muestra en la siguiente figura.

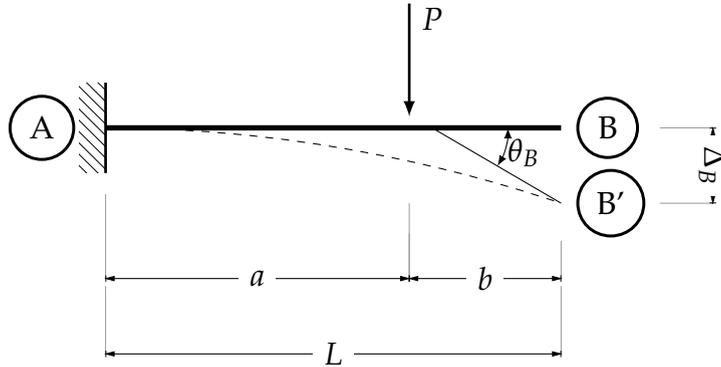


De igual forma dibujando el diagrama de momentos, se obtiene el máximo, que como se puede observar, se presenta en el extremo libre de la viga real.

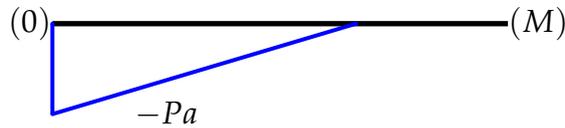


**Ejercicio (5)** Calcular la deflexión máxima, así como el giro máximo de la siguiente viga. Considerar un  $EI = cte$ .

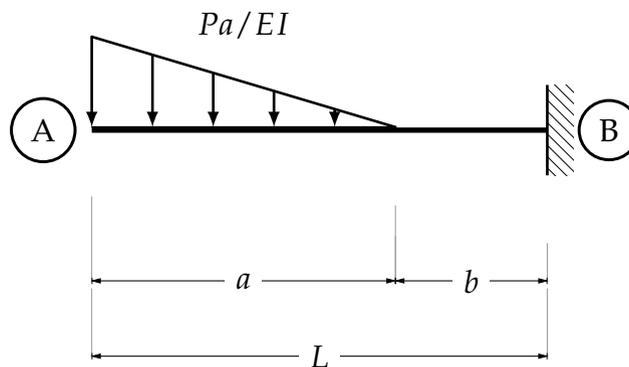
Fig. 47 Ejercicio



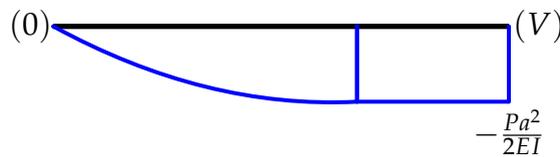
Dibujando el diagrama de momentos de la viga original.



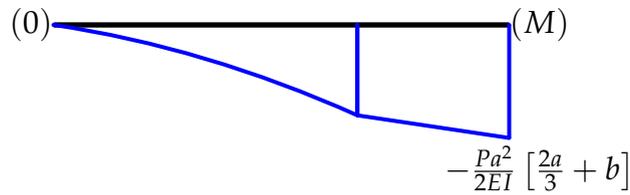
Convirtiéndola en una carga elástica y aplicando el nuevo sistema de apoyos de la viga virtual, se obtiene



Resolviendo la viga virtual y dibujando su diagrama de cortante, se obtiene el giro máximo de la viga original.

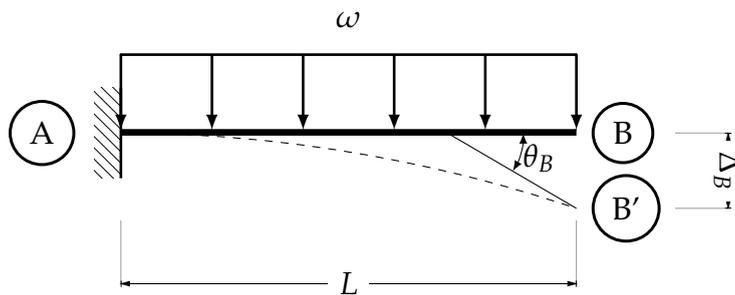


Dibujando el diagrama de momentos, se obtiene el giro máximo. De igual manera es posible calcular las deformaciones, realizando cortes en la viga virtual, pero para facilitar el cálculo se resolvió dibujando los diagramas.

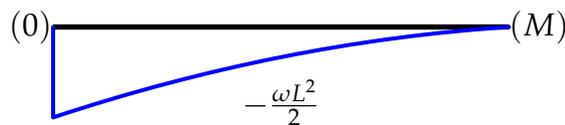


**Ejercicio(6)** Calcula la deflexión máxima y el giro máximo de la siguiente viga empotrada, bajo efectos de una carga  $\omega$  a lo largo de su longitud. Considerar el módulo a la flexión como constante a lo largo de su longitud.

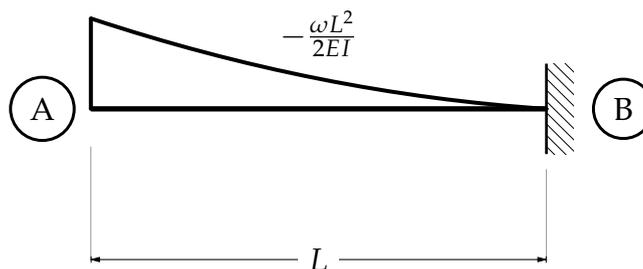
**Fig. 48** Ejercicio (6)



Dibujando el diagrama de momentos de la viga real.



Dividiendo el diagrama de momento de la viga real entre  $EI$  y aplicandola a la viga virtual.<sup>25</sup>



El valor de la reacción vertical en el apoyo ubicado en B es el valor del giro de la viga. Entonces

<sup>25</sup> Las cargas parabólicas no aparecen achuradas, pero se diferencian de los diagramas de esfuerzo por su color negro

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \downarrow \\ RVB - \frac{ML^3}{6EI} &= 0 \\ RVB &= \frac{ML^3}{6EI} \\ \theta_B &= \frac{ML^3}{6EI} \end{aligned}$$

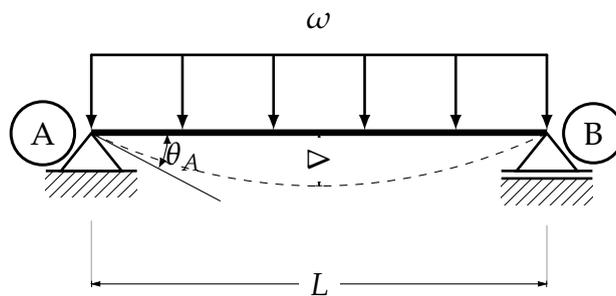
Del mismo modo el momento del empotre es la deflexión en el extremo libre de la viga real

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \curvearrowright \\ \left( -\frac{(L)\left[\frac{\omega L^2}{2EI}\right]}{3} \right) \left( \frac{2L}{4} \right) + M_B &= 0 \\ \Delta_B &= \frac{\omega L^4}{8EI} \end{aligned}$$

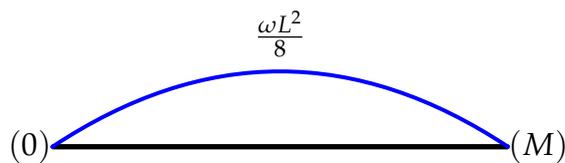
Dónde el primer paréntesis es el área de la parábola y el segundo la distancia del apoyo al centroide de dicha parábola.

**Ejercicio (7)** Calcular las deformaciones máximas de la siguiente estructura. Considerar el módulo a la flexión constante.

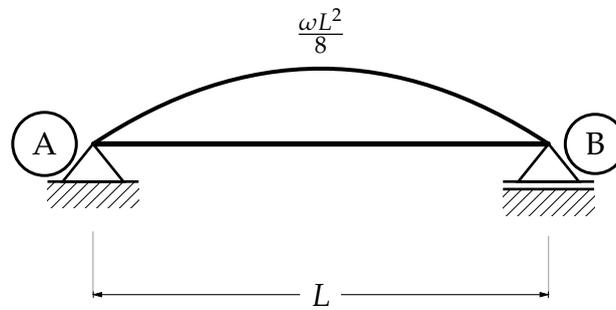
**Fig. 49** Ejercicio (6)



Calculando las reacciones, se procede a dibujar el diagrama de momentos.



Aplicando la carga elástica a la viga virtual.



Debido al sistema de apoyos de la viga, las reacciones de estos serán los cortantes máximos, por lo tanto los giros máximos se presentan en los puntos de los apoyos. Calculando las reacciones de la viga virtual.

$$RVA = -\frac{\omega L^3}{24 EI} = \theta_A$$

$$RVB = \frac{\omega L^3}{24 EI} = \theta_B$$

Para la deflexión máxima, por inspección se sabe que se presenta a la mitad del claro de la viga real, entonces, se realiza un corte en  $L/2$  para obtener el momento de la viga virtual en ese punto, que es el mismo de la deformación máxima de la viga real.

$$0 \leq x \leq L/2$$

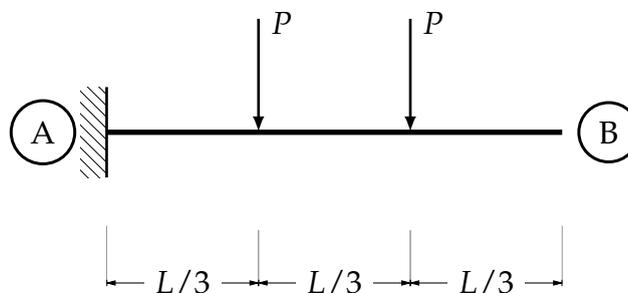
$$M = -\frac{\omega L^3}{24} \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{\omega L^3}{24} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5\omega L^4}{384 EI}$$

Donde el  $3/8$  es la distancia del corte al centroide de la media parábola. Entonces.

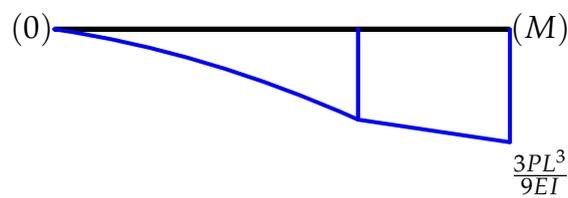
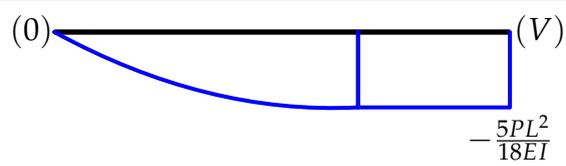
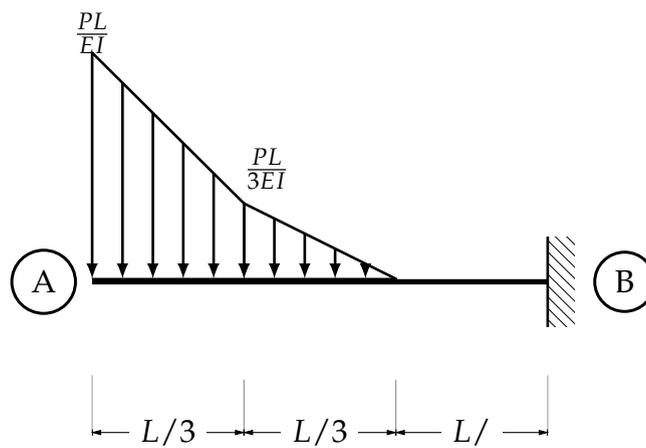
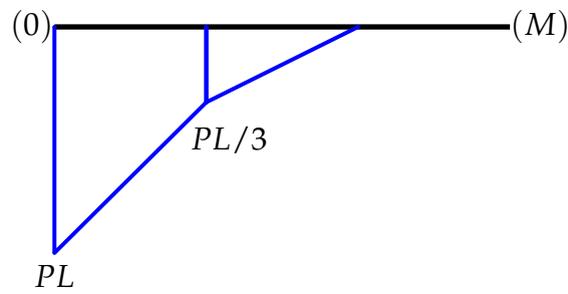
$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{5\omega L^4}{384 EI}$$

**Ejercicio (8)** Calcular las deformaciones máximas de la siguiente viga empotrada, por el método de la viga conjugada, considerar la misma sección a lo largo de se claro y el mismo material.

Fig. 50 Ejercicio

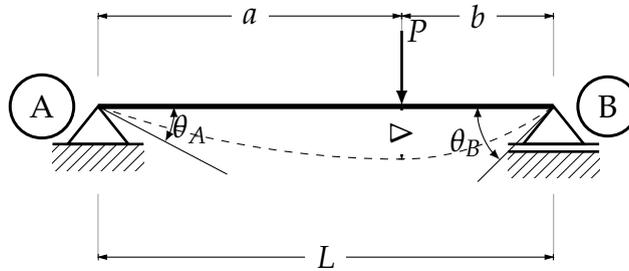


Resolviendo la viga y dibujando su diagrama de momentos



**Ejercicio (9)** Calcular las deformaciones máximas presentadas por la siguiente estructura, bajo las configuraciones dadas.

**Fig. 51** Ejercicio (4)

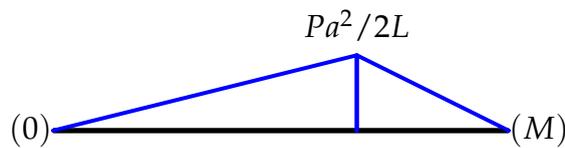


Calculando las reacciones de los apoyos

$$RVA = \frac{Pb}{L}$$

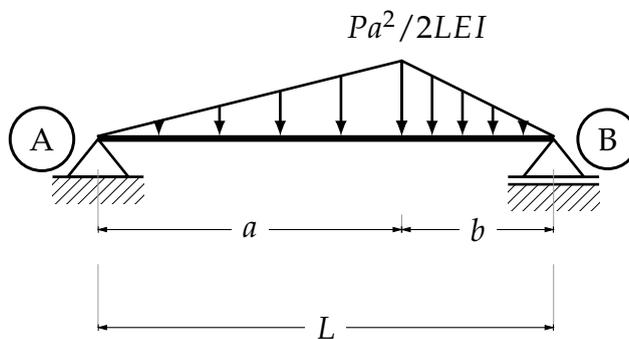
$$RVB = \frac{Pa}{L}$$

Calculadas las reacciones correspondientes, se dibuja el diagrama de momentos de la viga original.



Se aplica la carga elástica a la viga conjugada.

**Fig. 52** Ejercicio (4)

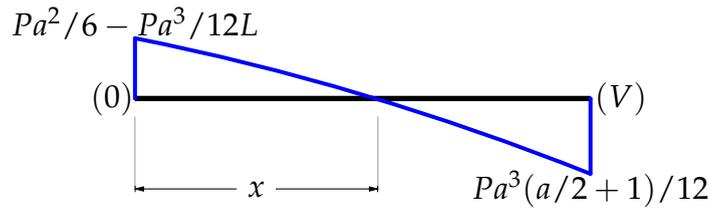


Se calculan las reacciones de la viga conjugada.

$$\theta_A = RVA = \frac{Pa^2}{6EI} - \frac{Pa^3}{12L}$$

$$\theta_B = RVB = \frac{Pa^2}{12EI} \left( \frac{a}{L} + 1 \right)$$

Las reacciones de los apoyos son los cortantes máximos de la viga conjugada, por lo tanto, los giros atribuidos a los apoyos de la viga original.



En este punto se realiza un corte para calcular las ecuaciones de cortante y momento antes de la carga puntual  $P$ , se obtiene

Para  $0 \leq x \leq a$

$$\theta = V = \frac{Pa^2}{6LEI} \left[ L - \frac{a}{2} - \frac{6x^2}{4a} \right]$$

$$\Delta = M = \frac{Pax}{12LEI} \left[ 2aL - a^2 - x^2 \right]$$

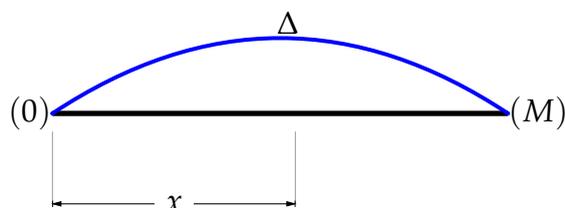
La deflexión máxima de la viga original se presenta cuando el momento es máximo en la viga conjugada; el momento es máximo cuando el cortante es cero, entonces igualando a cero la ecuación de cortante se obtiene el valor de  $x$  para cuando el momento es máximo.

$$x = \sqrt{\frac{a}{3} (2L - a)}$$

Evaluando la ecuación de deflexión para obtener la deflexión máxima

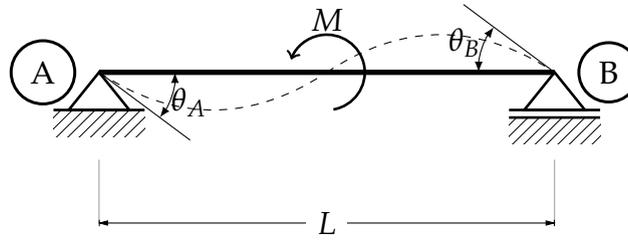
$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{\sqrt{3}Pa^2(a - 2L)\sqrt{2La - a^2}}{54LEI}$$

Como la ecuación de la deflexión es de tercer grado el diagrama es



**Ejercicio (10)** Calcular las deformaciones máximas de la siguiente viga.

Fig. 53 Ejercicio (9)

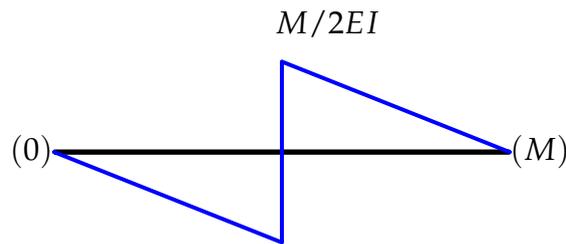


Las reacciones de los apoyos, son:

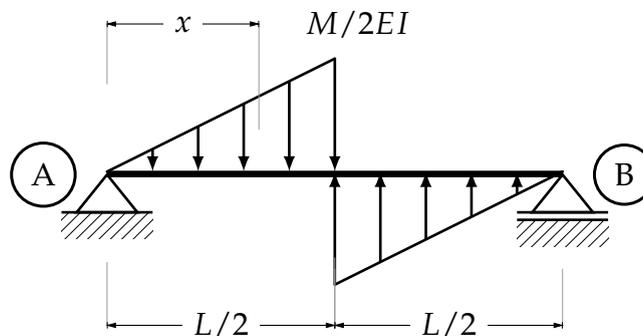
$$RVA = \frac{M}{L}$$

$$RVB = -\frac{M}{L}$$

El diagrama de momentos es el siguiente.



La configuración de la viga conjugada queda de la siguiente forma.



Calculando las reacciones, se obtienen los cortantes a los extremos de la viga conjugada, por lo tanto, los giros de la viga original.

$$\theta_A = RVA = \frac{ML}{24EI}$$

$$\theta_B = RVB = -\frac{ML}{24EI}$$

Realizando un corte en  $x$

$$\text{Para } 0 \leq x \leq L/2$$

$$\theta = V = -\frac{ML}{24EI} + \frac{Mx^2}{2LEI}$$

$$\Delta = M = -\frac{MLx}{24EI} + \frac{Mx^3}{6LEI}$$

Igualando a cero la ecuación de cortante para la viga conjugada, se obtiene el valor de  $x$  donde el momento es máximo, por lo tanto en ese punto la deflexión de la viga original es máxima también.

$$x = \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot (L)$$

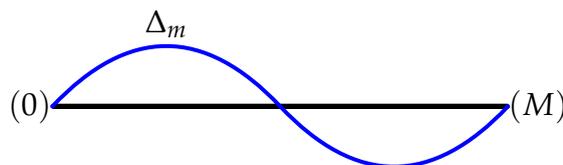
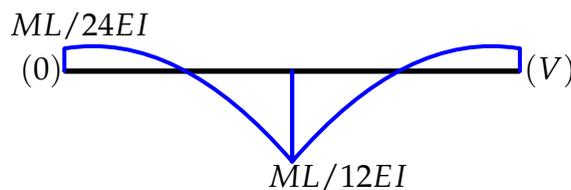
Evaluando la ecuación de la deflexión

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{\sqrt{3} \cdot L^2 M}{216EI}$$

El giro máximo se encuentra al centro de la viga, así que evaluando la ecuación de giros en  $L/2$  se obtiene el giro máximo de la viga original.

$$\theta_{m\acute{a}x} = \frac{ML}{12EI}$$

Dibujando los diagramas.



### Conclusiones para los métodos geométricos.

El método de la doble integral se complica a medida que las ecuaciones de momento son más extensas y que por lo tanto existan tantos elementos a integrar, también se deben tener bien presentes los conceptos de las condiciones de frontera, ya que de lo contrario no se podrían calcular las constantes de integración o podría existir algún tipo de error en el cálculo. En cuanto al método de la viga conjugada, es muy sencillo cuando se trata de diagramas

de momentos con formas básicas, que son los que resultan de cargas puntuales o momentos concentrados, pero a medida que se trabaja con cargas más complejas el método se dificulta, de igual manera lo mejor es tener bien claros los conceptos de cortante y momento así como del cómo se dibujan sus respectivos diagramas, para evitar así una confusión a la hora de calcular alguna deformación.

La gran ventaja de los métodos geométricos en comparación a los energéticos es que se obtiene ecuaciones que rigen las deformaciones a lo largo de la viga y es fácil evaluarlas en cualquier punto deseado. El principal inconveniente es que no se puede utilizar en otras estructuras, tales como armaduras o marcos.

## IV. Métodos energéticos.

Los métodos energéticos parten de los principios de trabajo y energía, son aplicables a distintas estructuras (armaduras, vigas y marcos), a diferencia de los métodos geométricos que son más limitados en cuando a las estructuras de aplicación. Pero el mayor de los inconvenientes se debe a que por cada aplicación sólo se calcula la deflexión o un giro, en un solo punto.

Los métodos energéticos al igual que los geométricos son la base para los métodos de rigideces y flexibilidades. Por su importancia habrá que realizarse uno pequeño preámbulo sobre *trabajo*, para posteriormente, analizar deformaciones por el método del *trabajo virtual* y el *segundo teorema de Castigliano*.

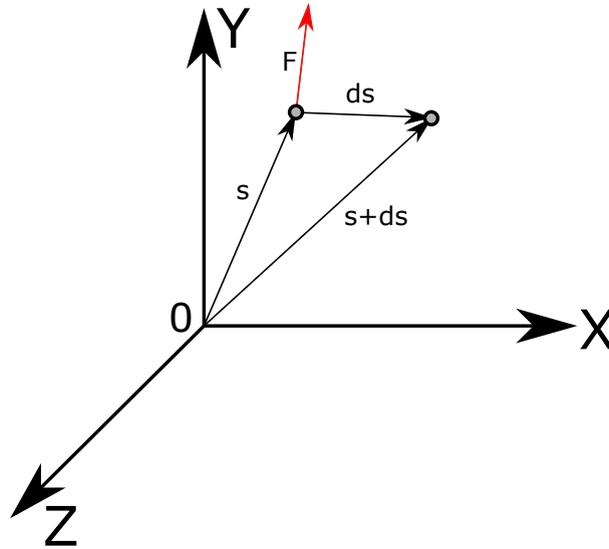
### IV.1. Trabajo.

Supongamos una partícula,<sup>26</sup> en el espacio, que se encuentra en una posición inicial  $a$  en donde  $s$  es el vector de posición, cuando la partícula se desplaza al punto  $b$  como se observa en la fig.54. Surge un  $ds$  que es la cantidad infinitesimal que se desplazó la partícula. Por consecuencia obtenemos la siguiente ecuación, que corresponde al trabajo realizado por la fuerza  $F$  es:

---

<sup>26</sup> Punto material, que se encuentra en el espacio, y que tiene tan poca materia que su masa se considera nula.

Fig. 54 Trabajo.



$$dT = F ds \quad (16)$$

Realizando producto escalar:

$$dT = F ds \cdot \cos \alpha \quad (17)$$

Entonces se dice que: *Trabajo es el producto de la fuerza actuante en la partícula y el desplazamiento de la misma.* Cabe resaltar que Trabajo es una cantidad escalar.<sup>27</sup>

El concepto de *trabajo* es un concepto físico que se podría definir, de una manera sencilla como:  $T = (\text{Fuerza})(\text{distancia})$ . Entonces podríamos definir el trabajo total de una Fuerza como:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} F ds \quad (18)$$

Donde  $s_1$  y  $s_2$  son posición inicial y posición final, respectivamente y  $F$  es la sumatoria de fuerzas que actúan sobre la partícula.

En el caso de algún elemento estructural, al cual es sometido a una carga  $P$  de manera paulatina, partiendo de 0, en el punto exacto de aplicación de la carga, surgirá un desplazamiento que aumentará desde cero hasta su valor de  $\Delta$ .

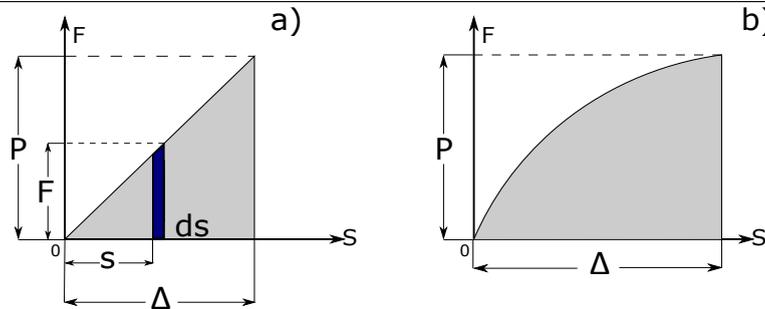
$$T = \int_0^{\Delta} F ds = \int_0^{\Delta} \left( \frac{Ps}{\Delta} \right) ds = \frac{1}{2} P \Delta \quad (19)$$

<sup>27</sup> Las unidades surgen de multiplicar las unidades de fuerza y las unidades de longitud del desplazamiento, *joule* en el sistema SI. Se debe tener cuidado si se están utilizando estas unidades, de no confundir con Momentos, ya que estos no se consideran como energía.

Si el material del cual está hecho el elemento analizado, es un material *elástico*, que obedece la Ley de Hooke<sup>28</sup> Su diagrama Fuerza-Deformación será Fig.55(a). En la Fig.55(b)

$T = \int_0^{\Delta} P d\Delta$  el material del elemento no se comporta linealmente, este tipo de elementos no serán estudiados en este texto.

Fig. 55 a) Trabajo en un material elástico. b) Trabajo en un material no elástico.



De igual manera se puede deducir el trabajo que realiza un par  $M$ , desde cero hasta una rotación final  $\Theta$

$$T = \int_0^{\Theta} M d\Theta \quad (20)$$

El trabajo realizado por un par,  $M$  desde cero hasta  $\Theta$ , es:

$$T = \frac{1}{2} M\Theta \quad (21)$$

Otro concepto importante es el de *fuerzas que no producen trabajo* son las fuerzas que no producen un desplazamiento, y en el caso de las estructuras los momentos que no producen un giro. Otra de sus características es que tiene la misma dirección que el desplazamiento. Tomando en consideración que a la hora de aplicar estos principios en estructuras, generalmente se hace en sistemas en equilibrio. Ahora analicemos una partícula en equilibrio, que gracias al efecto de un número "n" de fuerzas, sufre un desplazamiento, lo que significa que la componente en el eje del desplazamiento, es cero, por lo tanto:

$$\Delta T = 0 \quad (22)$$

Por consiguiente se puede concluir que el trabajo virtual<sup>29</sup> que produce un desplazamiento virtual<sup>30</sup>, equivale a cero.

Aplicando el mismo principio anterior, pero ahora a un cuerpo rígido<sup>31</sup>, en estado de equilibrio, en donde cada partícula que lo compone se ve afectada por las fuerzas que están

<sup>28</sup> Postulada por Robert Hooke (1635-1703). Ley de relación lineal entre el esfuerzo y la deformación

<sup>29</sup> Con virtual se refiere a que no es real y su valor es tan, pero tan pequeño, que se toma como despreciable.

<sup>30</sup> Es un desplazamiento demasiado pequeño, por lo tanto, despreciable, ya que si no se considera así, cambiaría la calidad de estructura en equilibrio. Sólo se utiliza como herramienta para resolver estos problemas.

<sup>31</sup> Cuerpo formado por un gran número de partículas, cuyas posiciones se mantienen, por lo que no acepta deformaciones.

actuando sobre el cuerpo, a causa de un desplazamiento virtual, es cero. Entonces se puede decir que:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \dots + \Delta T_n = \sum_{i=1}^n \Delta T = 0 \quad (23)$$

Es sabido que en las estructuras actúan dos tipos diferentes de fuerzas. Las *fuerzas externas* en una estructuras, pueden ser: las cargas y/o las reacciones de sus apoyos. Y las *fuerzas internas* aparecen siempre en pares que se eliminan entre ellas, manteniendo el equilibrio en el elemento, siempre y cuando el elemento se encuentre en equilibrio desde un principio.

## IV.2. Trabajo Virtual.

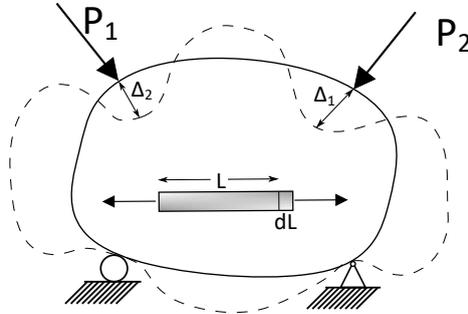
El *Método del Trabajo Virtual* es una herramienta eficaz para calcular deflexiones en estructuras planas y de lo más utilizados por su sencillez. Consiste en aplicar una carga *virtual* en el punto a lo largo del claro en el que se desea calcular la deflexión, a una viga idealizada (virtual), de la misma longitud y sistema de apoyos que la viga a estudiar (real). Calculadas las reacciones de ambas vigas, se procede a calcular, por medio de cortes (los necesarios, dependiendo de las cargas a las que está sometida la viga real, y del punto en el que se desea calcular la deflexión) las ecuaciones de momentos, realizado esto, se procede al empleo de la fórmula general del trabajo virtual, resuelta la integral de dicha fórmula se obtiene la deflexión de la viga original en el punto elegido. El método para marcos es el mismo, y para armaduras, se carga en una armadura (virtual) de mismas dimensiones, número de elementos y apoyos, la carga unitaria en el punto de interés, la fórmula es distinta, para facilitar el cálculo se desarrolla una tabla, para posteriormente sustituir valores en la fórmula, fórmula para cuando lo que interesa estudiar es la carga axial. Se realizarán varios ejercicios para ejemplificar esto a detalle.

El *principio del trabajo virtual* se puede enunciar como a continuación:

“Si una estructura deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas virtuales (o de pares de fuerzas) y si está sujeta a una pequeña deformación consistente con el apoyo y condiciones de continuidad de la estructura, entonces el trabajo virtual externo realizado por las fuerzas virtuales externas (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos externos virtuales (y rotaciones) es igual al trabajo virtual interno realizado por las fuerzas internas virtuales (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos internos reales (y rotaciones).” (Kassimali, 2014: 272).

Dibujando un cuerpo elástico apoyado simplemente para demostrar las ecuaciones correspondientes al principio del trabajo virtual. En dicho cuerpo se aplican paulatinamente un par de cargas  $P_1$  y  $P_2$ , y que estas a su vez, producen respectivamente un par de desplazamientos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ .

**Fig. 56** Trabajo Virtual 1



Calculando el trabajo interno y el trabajo externo:

$$T_E = \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 \quad (24)$$

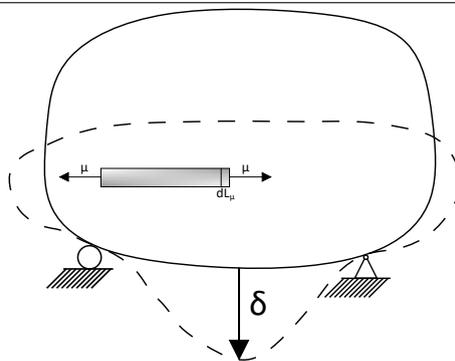
$$T_I = \sum_{i=1}^n \frac{PdL}{2} \quad (25)$$

Igualando (9) y (10) partiendo del principio de que el trabajo interno debe ser igual al trabajo externo, se obtiene:

$$\frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 = \sum_{i=1}^n \frac{PdL}{2} \quad (26)$$

Del cuerpo anterior nos interesa calcular el desplazamiento en el punto  $g$ . Por lo cual aplicaremos en el punto de interés, y en su dirección, una carga unitaria que produce un desplazamiento en el cuerpo  $\delta$ . En una fibra cualquiera de longitud inicial  $L$  debido a la fuerza interna  $\mu$  produce un cambio  $dL$ .

**Fig. 57** Trabajo virtual 2



De donde podemos calcular:

$$T_E = \frac{1}{2}(1)(\delta) \quad (27)$$

$$T_I = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(\mu)dL_\mu \quad (28)$$

Igualando (27) y (28) se obtiene:

$$\frac{1}{2}(1)(\delta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(\mu)dL_{\mu} \quad (29)$$

$$T_E = \frac{1}{2}(1)(\delta) + \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 + \frac{1}{2}(1)(\Delta) \quad (30)$$

$$T_I = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\mu d\mu + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}PdL + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\mu dL \quad (31)$$

$$\therefore \frac{1}{2}(1)(\Delta) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu dL}{2} \quad (32)$$

Simplificando, surge la *Ecuación general del trabajo virtual*.

$$(1)(\Delta) = \sum_{i=1}^n \mu dL \quad (33)$$

De donde se puede identificar las partes *reales* de las partes *virtuales*.

$$\underbrace{(1)}_{\text{Virtual}} \underbrace{(\Delta)}_{\text{Real}} = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\mu)}_{\text{Virtual}} \underbrace{(dL)}_{\text{Real}} \quad (34)$$

Sabemos por la ley de Hooke, que:

$$dL = \frac{PL}{AE} \quad (35)$$

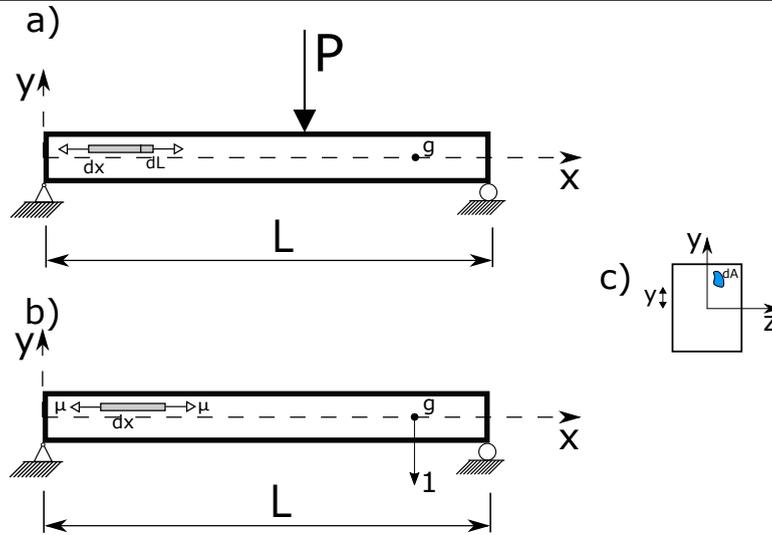
Entonces sustituyendo (35) en (34) y como la sumatoria es discreta:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{P \mu L}{AE} \quad (36)$$

Esta es la ecuación de trabajo virtual, para cuando lo que interesa analizar es la carga axial.

Para llegar a la fórmula del trabajo virtual, cuando lo que interesa analizar es la flexión, analicemos la siguiente viga, en donde se encuentra una fibra cualquiera, con una longitud inicial,  $dx$  y una área inicial,  $dA$ . Debido a la carga  $P$  (carga real), dicha fibra se alarga un  $dL$

Fig. 58 Viga 1



Partiendo de la ecuación general del trabajo virtual

$$(1)(\Delta) = \sum_{i=1}^n \mu dL$$

Sabemos que

$$\sigma = \frac{\mu}{dA}$$

$$\mu = \sigma dA$$

Por fórmula de la escuadrilla.

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Del la carga elástica.

$$dL = \frac{My}{EI} dx$$

$$1 \cdot \Delta = \sum \left( \frac{M_V y}{I} dA \right) \left( \frac{M_R y}{EI} dx \right) = \int_0^L \int_A \left( \frac{M_R M_V \cdot y^2}{EI^2} dA dx \right) = \int_0^L \left( \frac{M_R M_V}{EI^2} dx \right) \int_A (y^2 dA) \quad (37)$$

Como sabemos  $\int_A y^2 dA = I$ <sup>32</sup>

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{M_R M_V}{EI} dx \quad (38)$$

<sup>32</sup> (Gere 2006) : 311

Esta es la ecuación general del trabajo virtual, para cuando lo que interesa estudiar es la flexión del elemento. Para cuando el interés es la pendiente, se utiliza la siguiente ecuación:

$$1 \cdot \theta = \sum \mu dL \tag{39}$$

Procediendo con el mismo método, se obtiene:

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \left( \frac{M_R M_V}{EI} dx \right) \tag{40}$$

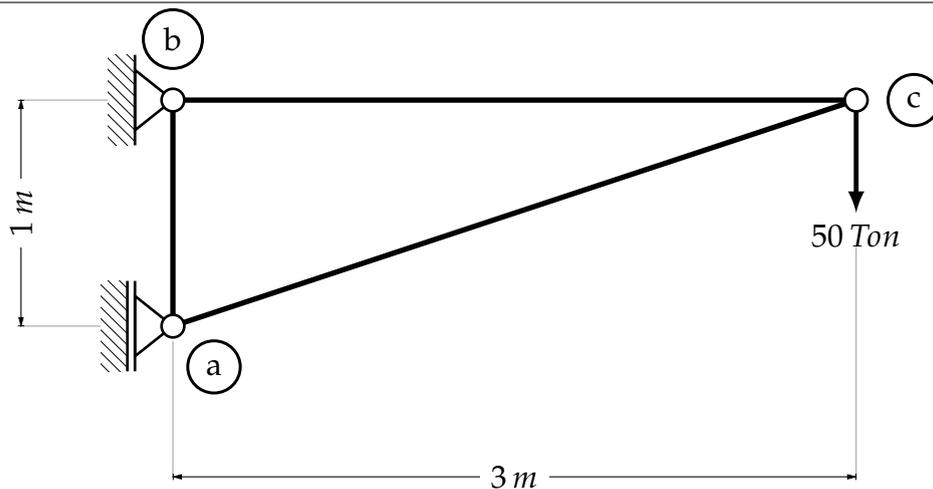
Aplicando un momento unitario en cualquier punto de la viga, para este caso el punto g.

### IV.3. Obtención de deformaciones.

#### Armaduras.

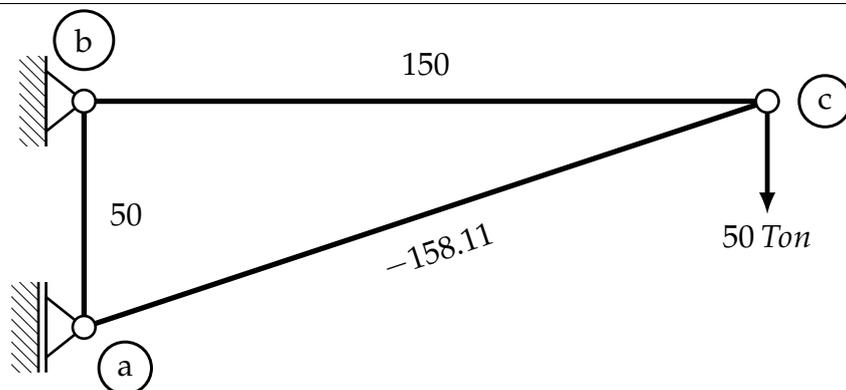
**Ejercicio 1** Calcular la deformación de la siguiente armadura, en el nudo C, con el método del trabajo virtual.  $AI = cte$ .

Fig. 59 Ejercicio 1



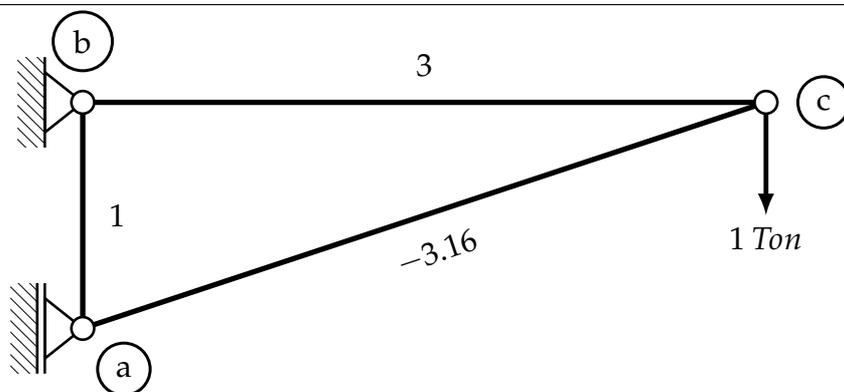
Resolviendo la armadura obtenemos:

Fig. 60 Ejercicio 1. (a)



En una armadura de las mismas dimensiones, aplicamos una carga virtual de 1 en el punto y con la dirección a estudiar (c).

Fig. 61 Ejercicio 1. (b)



Resueltas las dos armaduras podemos crear una tabla con los valores e los esfuerzos, esto hace el proceso más sencillo.

Elemento	L(m)	$\mu$	P(kg)	$P \cdot \mu \cdot L$
a - b	1	1	50	50
a - c	3.16	-3.16	-158.11	1578.82
b - c	3	3	150	1350
				$\sum P \cdot \mu \cdot L = 2948.82$

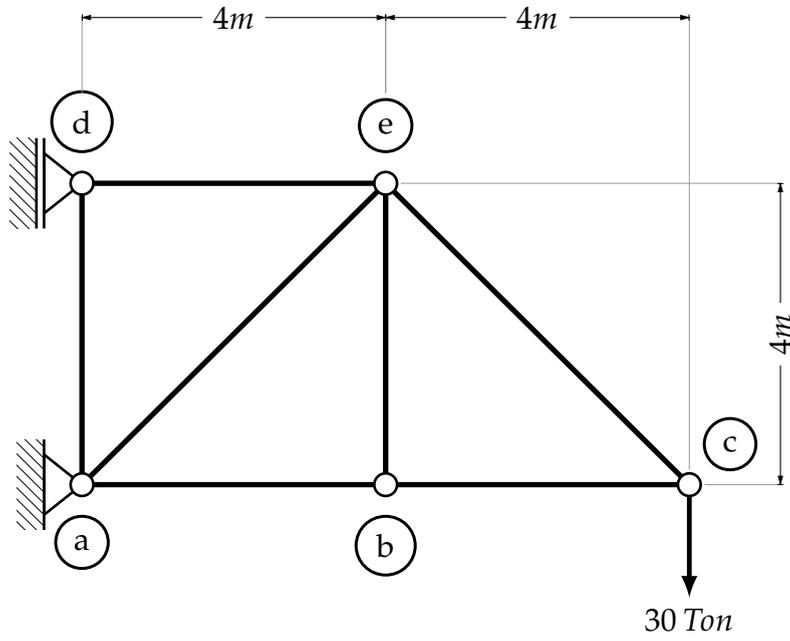
Calculada la tabla, sustituimos valores en la formula:

$$1 \cdot \Delta_c = \frac{1}{EA} \sum P \cdot \mu \cdot L$$

$$\Delta_c = \frac{12948.82}{EA}$$

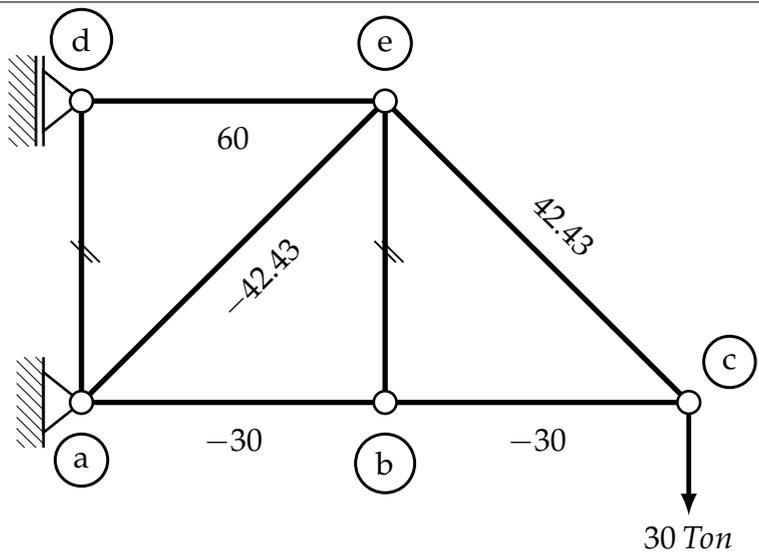
**Ejercicio 2** Calcular el desplazamiento en el nudo c de la siguiente armadura, por el método del trabajo virtual.  $AI = cte$ .

Fig. 62 Ejercicio (2)



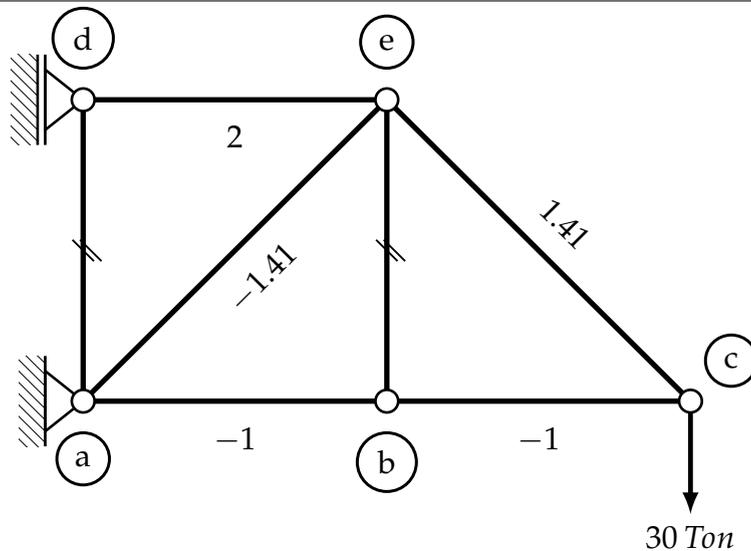
Resolviendo la armadura:

Fig. 63 Ejercicio (2.a)



Resolviendo la armadura virtual:

Fig. 64 Ejercicio (2.b)



Resueltas ambas armaduras se puede organizar una tabla.

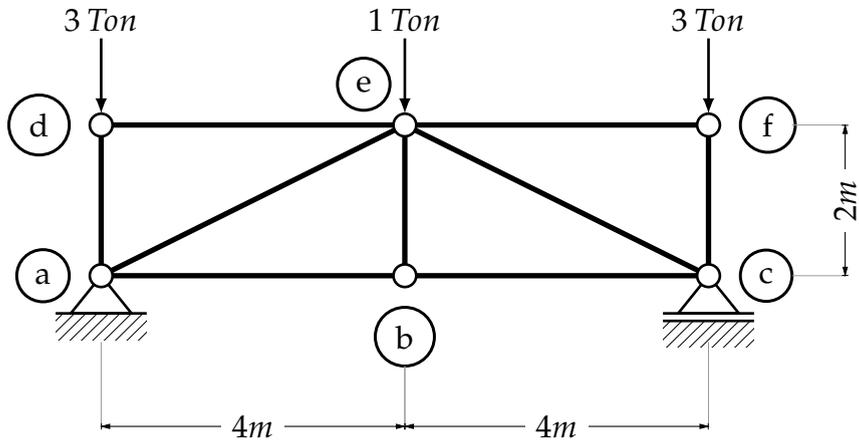
Elemento	L(m)	$\mu$ (kg)	P(kg)	$P \cdot \mu \cdot L$
a - b	4	-1	-30	120
a - d	4	0	0	0
a - e	5.66	-1.41	-42.43	338.62
b - c	4	-1	-30	120
b - e	4	0	0	0
c - e	5.66	1.41	42.43	388.62
e - d	4	2	60	480
<b><math>\sum P \cdot \mu \cdot L = 1397.24</math></b>				

$$1 \cdot \Delta_c = \frac{1}{EA} \sum P \cdot \mu \cdot L$$

$$\Delta_c = \frac{1397.24}{EA}$$

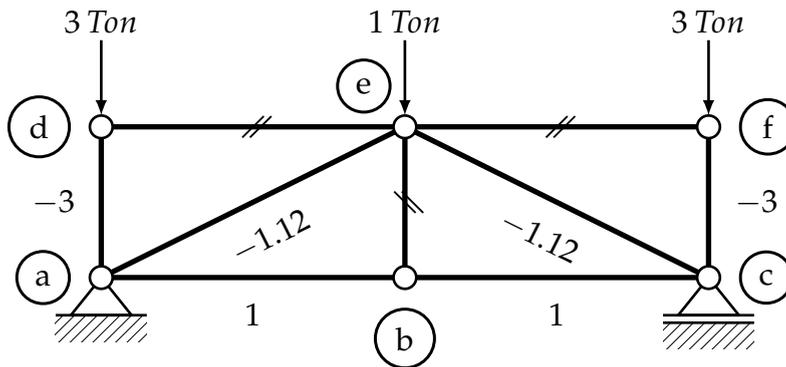
**Ejercicio 3** Calcular el desplazamiento en el punto (b) de la siguiente armadura, por el método del trabajo virtual.  $AI = cte$ .

Fig. 65 Ejercicio (3)



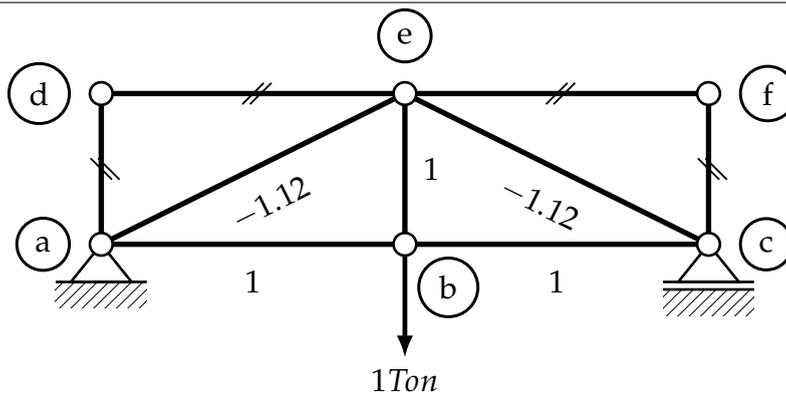
Resolviendo la armadura:

Fig. 66 Ejercicio (3.a)



Resolviendo la armadura con la carga virtual en el punto en el que deseamos calcular el desplazamiento:

Fig. 67 Ejercicio (3.b)



Una vez calculadas las dos armaduras, ordenamos los datos en una tabla:

Elemento	L(m)	$\mu$ (kg)	P(kg)	$P \cdot \mu \cdot L$
a - b	4	1	1	4
a - d	2	0	-3	0
a - e	4.47	-1.12	-1.12	5.6
b - c	4	1	1	4
b - e	2	1	0	0
c - e	4.47	-1.12	-1.12	5.6
e - d	4	0	0	0
c - f	2	0	-3	0
e - f	4	0	0	0

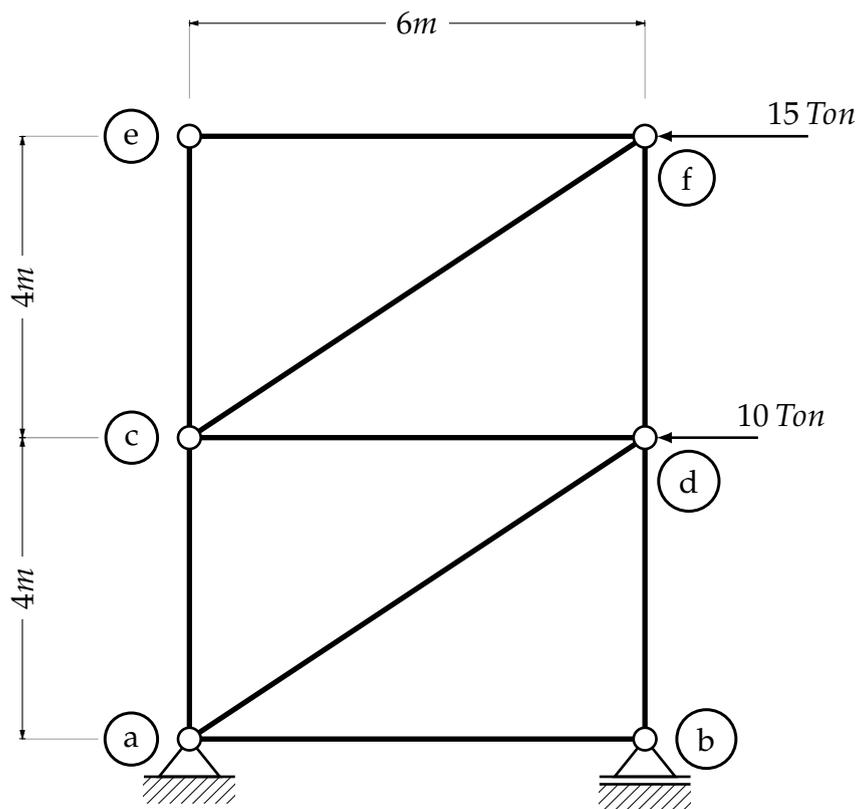
$\Sigma P \cdot \mu \cdot L = 19.2$

$$1 \cdot \Delta_b = \frac{1}{EA} \sum P \cdot \mu \cdot L$$

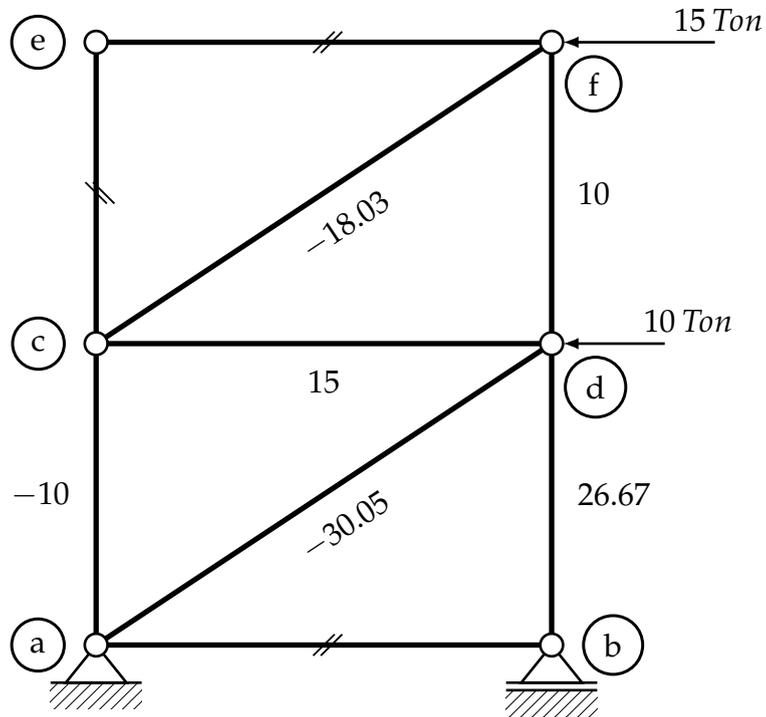
$$\Delta_b = \frac{19.2}{EA}$$

**Ejercicio 4** Calcular el desplazamiento lateral en el nudo (e) debido a las cargas externas de la armadura siguiente, por el método del trabajo virtual.  $AI = cte$ .

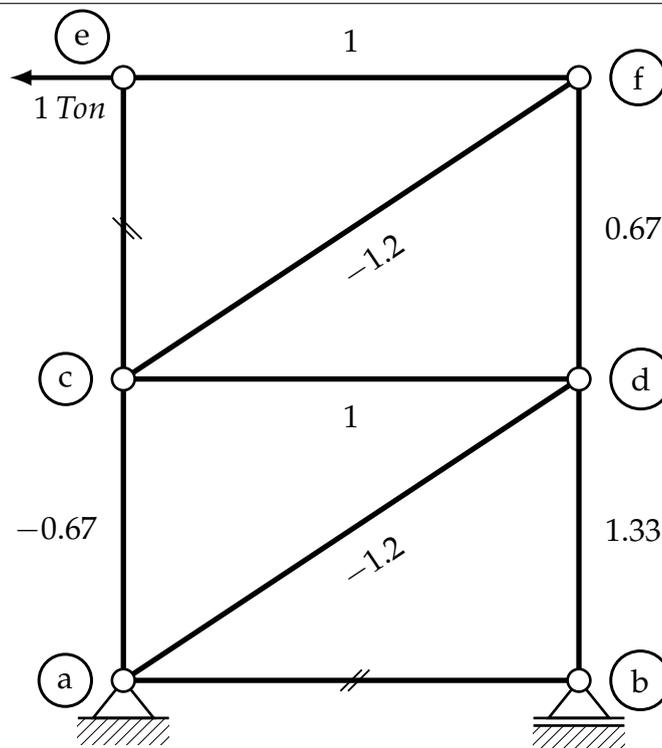
Fig. 68 Ejercicio (4)



**Fig. 69** Ejercicio (4.a)



**Fig. 70** Ejercicio (4.b)



Ordenando los datos en una pequeña tabla.

Elemento	L(m)	$\mu$ (kg)	P(kg)	$P \cdot \mu \cdot L$
a - b	6	0	0	0
a - d	7.21	-1.2	-30.05	260
a - c	4	-0.67	-10	26.8
b - d	4	1.33	26.67	141.88
c - d	6	1	15	90
c - e	4	0	0	0
c - f	7.21	-1.2	-18.03	156
d - f	4	0.67	10	26.8
f - e	6	1	0	0
				$\sum P \cdot \mu \cdot L = 711.48$

$$1 \cdot \Delta_e = \frac{1}{EA} \sum P \cdot \mu \cdot L$$

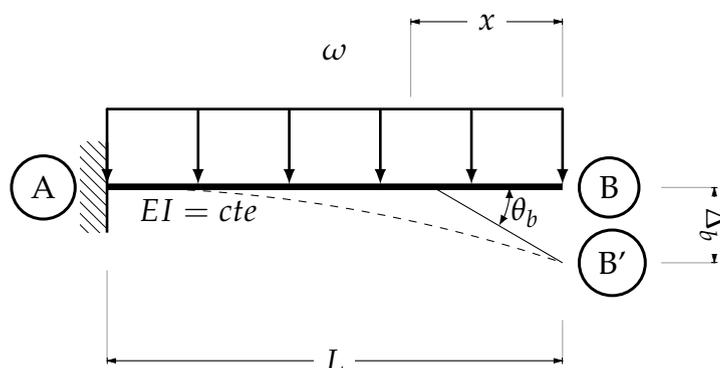
$$\Delta_e = \frac{711.48}{EA}$$

## Vigas.

**Ejercicio 1** En la siguiente viga se pide calcular la flecha máxima, así como el ángulo de la tangente por el método del trabajo virtual.

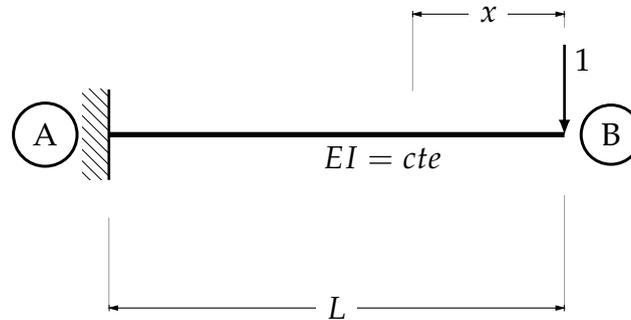
Por simple inspección la flecha máxima se presenta en el punto B de la viga, produciendo la deformación de dicho punto hasta el punto B'

Fig. 71 Ejercicio 1



Para poder usar la fórmula del trabajo virtual, a una segunda viga, igualmente apoyada y con un claro igual, se aplica una carga puntual unitaria en el punto que será analizado, para obtener la flecha producida por la carga. En este caso será el punto (b), donde se produce la máxima flecha ( $\Delta_b$ ). Entonces se tiene:

Fig. 72 Ejercicio (1.a)



Haciendo un corte a una distancia  $x$  en la viga estudiada *Real* y otro en la viga *virtual* procede aplicar la fórmula (37). Dónde  $M =$  *Momento Real* y  $m =$  *Momento Virtual* obtenido de la viga virtual con la carga virtual. Para la viga:

$$0 < x < L$$

$$M = -\frac{\omega x^2}{2}$$

$$\Delta_b = \int_0^L \frac{\left(\frac{-\omega x^2}{2}\right)(-x)}{EI} dx$$

Como  $EI$  es constante:

$$\Delta_b = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{\omega x^3}{2} dx = \frac{\omega x^4}{8} \Big|_0^L$$

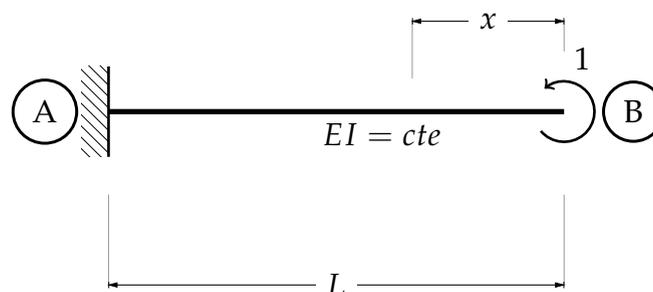
Integrando.

$$\Delta_b = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

El signo positivo significa que la dirección en la que va la carga unitaria es la misma que la de la flecha.

Para calcular el ángulo de la tangente, a una viga igualmente apoyada y del mismo claro se aplica un momento unitario en el punto que se desea analizar el giro. Entonces:

Fig. 73 Ejercicio (1.b)



$$\theta_b = \int_0^L \frac{\omega x^2}{2EI} dx$$

Como EI es constante:

$$\theta_b = \left. \frac{1}{EI} - \frac{\omega x^3}{6} \right]_0^L$$

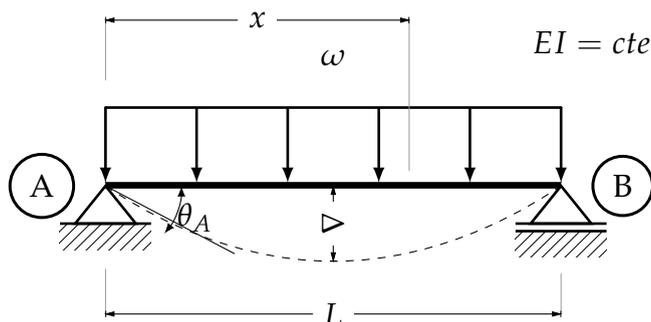
$$\theta_b = -\frac{\omega L^3}{6EI}$$

El signo negativo representa un error a la hora de suponer la dirección del momento unitario. Corrigiendo:

$$\theta_b = \frac{\omega L^3}{6EI}$$

**Ejercicio 2** Calcular la flecha máxima de la siguiente viga, a la mitad de su longitud  $L$ .

Fig. 74 Ejercicio 2

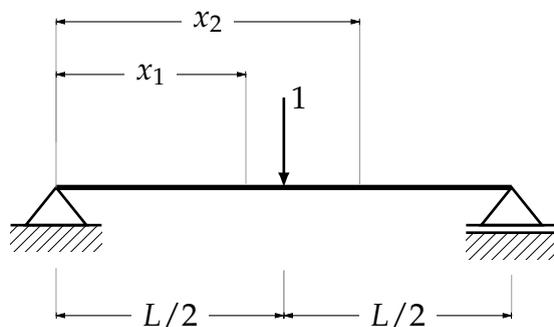


Se calcula la ecuación de momento de la viga real.

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_R = \frac{\omega Lx}{2} - \frac{\omega x^2}{2}$$

Fig. 75 Ejercicio (2.a)



Realizando dos cortes, uno antes de la carga virtual  $x_1$  y otro después  $x_2$ . Resultan un par de ecuaciones de momento virtual.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_v = \frac{x}{2}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$M_v = -\frac{x}{2} + \frac{L}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación de trabajo virtual:

$$\Delta = \oint \frac{M_R M_V}{EI} dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{\omega Lx}{2} - \frac{\omega x^2}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx + \int_{L/2}^L \frac{1}{EI} \left( \frac{\omega Lx}{2} - \frac{\omega x^2}{2} \right) \left( -\frac{x}{2} + \frac{L}{2} \right) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{\omega Lx^2}{4} - \frac{\omega x^3}{4} \right) dx + \int_{L/2}^L \frac{1}{EI} \left( -\frac{\omega Lx^2}{4} + \frac{\omega L^2 x}{4} + \frac{\omega x^3}{4} - \frac{\omega x^2 L}{4} \right) dx$$

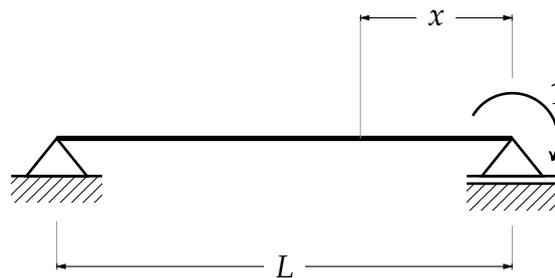
$$\Delta = \frac{1}{EI} \left[ \frac{\omega Lx^3}{12} - \frac{\omega x^4}{16} \right]_0^{L/2} + \frac{1}{EI} \left[ -\frac{\omega Lx^3}{12} + \frac{\omega L^2 x^2}{8} + \frac{\omega x^4}{16} - \frac{\omega x^3 L}{12} \right]_{L/2}^L$$

Simplificando.

$$\Delta = \frac{5\omega L^4}{384EI}$$

Para calcular el giro, a una viga virtual se aplica un momento unitario en el punto en el que se desee, para este caso se aplica en el punto  $B$  ya que ahí se presenta el giro máximo, por simetría el giro en  $B$  y en  $A$  son iguales.

Fig. 76 Ejercicio (2.b)



$$0 \leq x \leq L$$

$$M_v = -1 + \frac{x}{L}$$

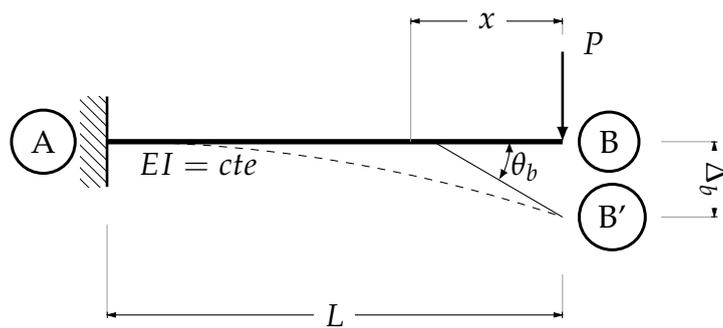
$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{\omega Lx}{2} - \frac{\omega x^2}{2} \right) \left( -1 + \frac{x}{L} \right) dx$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{\omega Lx^2}{4} + \frac{2\omega x^3}{6} - \frac{\omega x^4}{8L} \right]_0^L$$

$$\theta = \frac{\omega L^3}{24EI}$$

**Ejercicio 3** Calcular la deflexión máxima y el giro máximos para una viga empotrada de longitud  $L$ , cargada con una carga puntual, considerando un  $EI = cte$ .

Fig. 77 Ejercicio 3



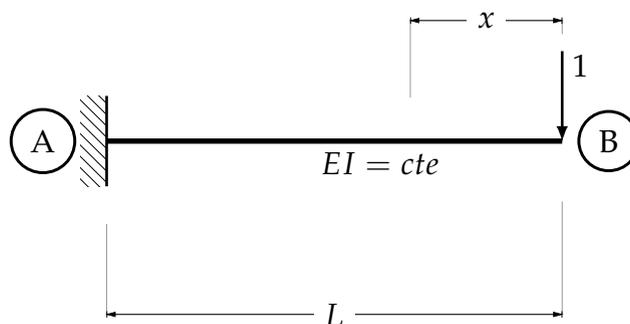
Realizando un corte a una distancia  $x$

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_R = -Px$$

De la misma manera obtenemos la ecuación de momento para la viga virtual.

Fig. 78 Ejercicio (3.a)



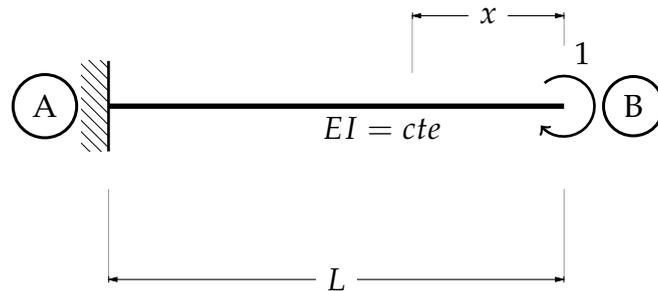
$$0 \leq x \leq L$$

$$M_R = -x$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^L (Px)(-x) dx$$

$$\Delta = \left[ \frac{Px^3}{3} \right]_0^L$$

Fig. 79 Ejercicio (3.b)



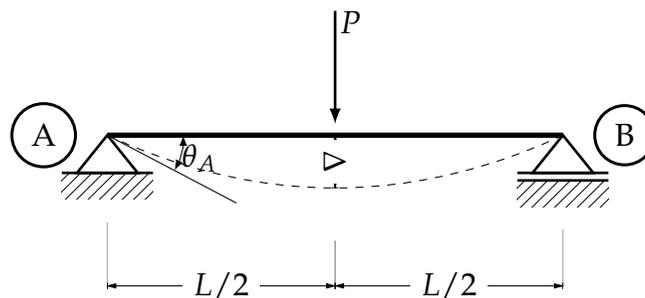
$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L (-Px)(-x) dx$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^2}{2} \right]_0^L$$

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$$

**Ejercicio 4** Calcular las deformaciones de la siguiente estructura

Fig. 80 Ejercicio 4



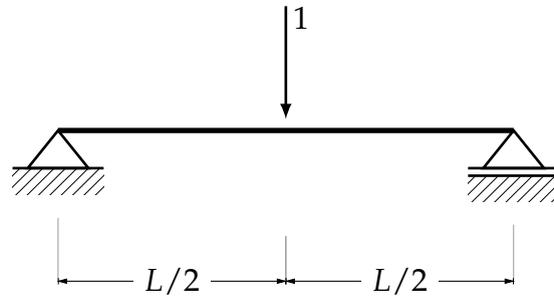
Calculadas las reacciones de la viga, realizamos un par de cortes, para obtener dos ecuaciones de momento.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_R = \frac{Px}{2}$$

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_R = -\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2}$$

**Fig. 81** Ejercicio (4.a)

Realizando dos cortes en la viga virtual obtenemos

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_v = \frac{x}{2}$$

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_v = -\frac{x}{2} + \frac{L}{2}$$

Aplicando la ecuación del trabajo virtual:

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{Px}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( -\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2} \right) \left( -\frac{x}{2} + \frac{L}{2} \right) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{Px^2}{4} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( \frac{Px^2}{4} - \frac{PxL}{2} + \frac{PL^2}{4} \right) dx$$

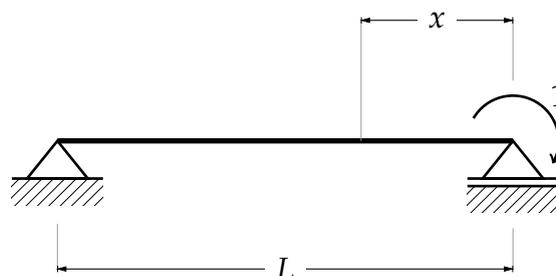
$$\Delta = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{12} \right]_0^{L/2} + \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{12} - \frac{Px^2L}{4} + \frac{PL^2x}{4} \right]_{L/2}^L$$

Reduciendo términos

$$\Delta = \frac{PL^3}{EI} \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \right]$$

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{PL^3}{48EI}$$

Los giros, al igual que la deflexión son simétricos, así que, calculando el giro en un apoyo, el otro giro por simetría, sería igual pero de sentido diferente. Bajo este supuesto se calcula el giro en B

**Fig. 82** Ejercicio (4.b)

Realizando un corte y aplicando la fórmula del trabajo virtual, se tiene

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{Px}{2}\right) \left(-1 + \frac{x}{L}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{Px}{2} + \frac{pL}{2}\right) \left(-1 + \frac{x}{L}\right) dx$$

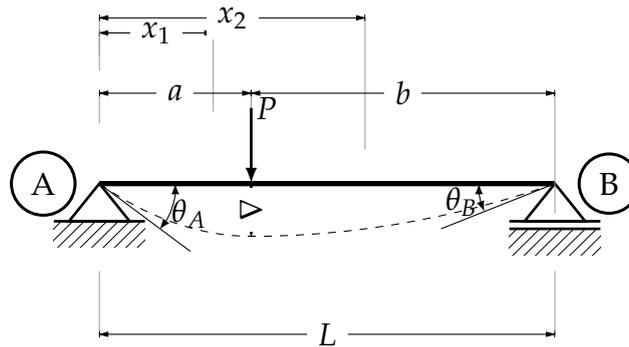
$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[-\frac{PL^2}{16} + \frac{PL^2}{48}\right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^2}{4} - \frac{PL^2}{2} - \frac{PL^2}{6} + \frac{PL^2}{4}\right] - \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^3}{16} - \frac{PL^2}{4} - \frac{PL^2}{48} + \frac{PL^2}{16}\right]$$

$$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

**Ejercicio 5** Calcular la deflexión máxima y los giros en los apoyos de la siguiente viga simplemente apoyada  $EI = cte$  Por simple inspección se puede saber que al no existir más cargas que la puntual, en el lugar de aplicación de dicha carga se concentra la deflexión máxima.

Fig. 83 Ejercicio 5



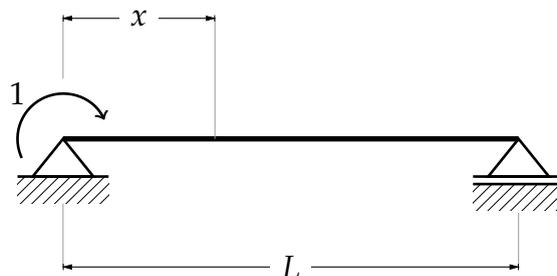
$$EI \cdot \Delta = \int_0^a \left(\frac{Pbx}{L}\right) \left(\frac{bx}{L}\right) dx + \int_a^L \left(\frac{Pbx}{L} - P(x-a)\right) \left(\frac{bx}{L} - (x-a)\right) dx$$

Resolviendo la integral, tenemos

$$EI \cdot \Delta = \frac{Pb^2L}{3} - \frac{2PbL^2}{3} + bPbLa + \frac{Pb^3}{3} - \frac{Pba^3}{3L}$$

A una viga de longitud  $L$  se aplica un momento unitario con el fin de calcular el giro en en apoyo A de la viga *Real*

Fig. 84 Ejercicio (5.a)



Una vez calculadas las reacciones se realiza un corte a una distancia  $x$  para aplicar la fórmula del trabajo virtual

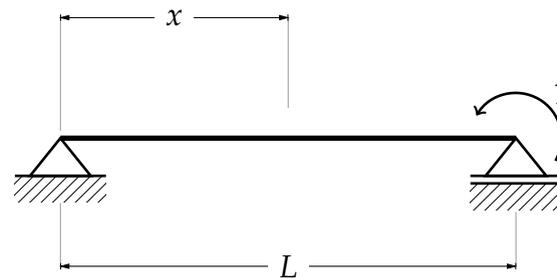
$$EI \cdot \theta_A = \int_0^a \left( \frac{Pbx}{L} \right) \left( -\frac{x}{L} + 1 \right) dx + \int_a^L \left( \frac{Pbx}{L} - P(x-a) \right) \left( -\frac{x}{L} + 1 \right) dx$$

Resolviendo la integral

$$EI \cdot \theta_A = \frac{PbL}{6} - \frac{PL^2}{6} - \frac{PaL}{2} + PaL + \frac{Pa^3}{6L} - \frac{Pa^2}{2}$$

Del mismo modo calculamos el giro en el otro apoyo

Fig. 85 Ejercicio (5.b)

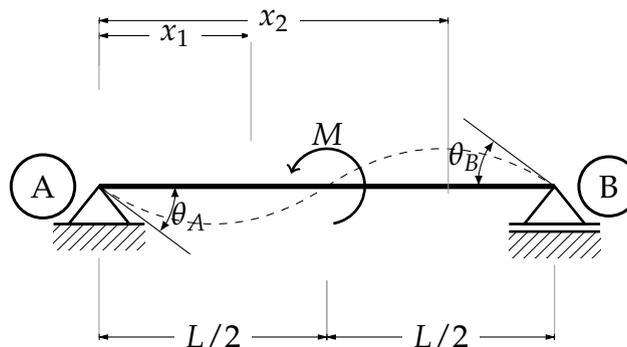


$$EI \cdot \theta_B = \int_0^a \left( \frac{Pbx}{L} \right) \left( \frac{x}{L} \right) dx + \int_a^L \left( \frac{Pbx}{L} - P(x-a) \right) \left( \frac{x}{L} \right) dx$$

$$EI \cdot \theta_B = \frac{PbL}{3} - \frac{PL^2}{3} + \frac{PaL}{2} - \frac{Pa^3}{6L}$$

**Ejercicio 6** Calcular la deflexión al centro de la siguiente viga, así como los giros y comprobar si es que en los apoyos se encuentra el giro máximo, dicha viga se encuentra cargada con un momento concentrado de magnitud  $M$ , y los correspondientes giros en los extremos. Considérese  $EI = cte$

Fig. 86 Ejercicio 6



En primera instancia se calculan las reacciones de la viga real, para después calcular las dos ecuaciones de momento que rigen a lo largo del claro de la viga estudiada.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_{R1} = \frac{Mx}{L}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$M_{R1} = \frac{Mx}{L} - M$$

Esas dos ecuaciones de momentos obtenidas al realizar dos cortes correspondientes, servirán para calcular tanto la deflexión como los giros. Ahora establecemos la viga virtual, a la cual se coloca una carga concentrada en el punto medio del claro de la viga real, esto ya se ha realizado así que

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_v = \frac{x}{2}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$M_v = -\frac{x}{2} + \frac{L}{2}$$

Aplicando la ecuación del trabajo virtual para la deflexión

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{Mx}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{Mx}{L} - M\right) \left(-\frac{x}{2} + \frac{L}{2}\right) dx$$

resolviendo la integral

$$\Delta = 0$$

Esto se puede comprobar utilizando algún programa de análisis estructural, recordar que sólo si el momento concentrado se encuentra a la mitad del claro de una viga simplemente apoyada, y que no se encuentra actuando ninguna otra fuerza en el elemento.

Para calcular en que punto se encuentra la deflexión máxima debida a estas circunstancias tan específicas, se partirá del *Ejercicio 9* del tema de la doble integral, de donde igualando a cero el giro  $\theta$  y resolviendo la ecuación, se obtiene que  $\Delta$  es máxima, cuando  $x = \frac{\sqrt{3}}{6}L$ .

Así como existen dos giros de igual magnitud pero de sentido diferente en los apoyos de la viga, existe un tercero, basando esta hipótesis en el valor acabado de encontrar de la deflexión al centro de la viga, por lo que habrían de existir dos valores máximos de giro en la viga, uno en los apoyos, y otro al centro, evidentemente debido al momento concentrado. De la ecuación del giro, la misma que usamos para encontrar la deflexión máxima, evaluada en  $L/2$  que es el punto en donde aparece otro valor máximo, obtenemos que el giro al centro de la viga es  $ML/12$  comprobando la hipótesis que se realizó en el párrafo anterior. A manera de comprobación se tratará de llegar al mismo resultado ahora por el método del trabajo virtual, después de calcular los giros ubicados en los apoyos.

Para los giros, como dicta el método del trabajo virtual, colocando un momento unitario en el punto  $A$  de la viga en dirección de la deformación mostrada previamente en la figura, y haciendo un corte que regirá los valores de momento a lo largo del elemento, tenemos

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_V = -\frac{x}{L} + 1$$

Aplicando la ecuación del trabajo virtual

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{Mx}{L} \right) \left( -\frac{x}{L} + 1 \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( \frac{Mx}{L} - M \right) \left( -\frac{x}{L} + 1 \right) dx$$

Resolviendo la integral anterior

$$\theta_A = \frac{ML}{24EI}$$

Y por simetría

$$\theta_B = -\frac{ML}{24EI}$$

Ahora para el tercer giro, colocamos un giro en el centro de la viga y obtenemos las ecuaciones de momento.

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_{V1} = \frac{x}{2}$$

$$L \leq x \leq L$$

$$M_{V2} = \frac{x}{2} - 1$$

Aplicando la ecuación de trabajo virtual

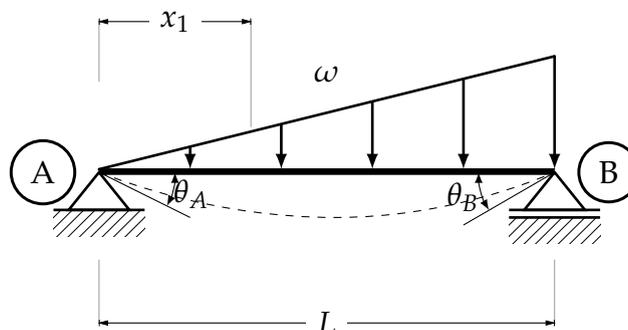
$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{Mx}{L} \right) \left( \frac{x}{L} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( \frac{Mx}{L} - M \right) \left( \frac{x}{L} - 1 \right) dx$$

Donde C es el punto de aplicación del momento concentrado. Integrando y evaluando los límites

$$\theta_C = \frac{ML}{12EI}$$

**Ejercicio 7** Calcular el giro máximo, así como su deflexión, de la siguiente viga hecha de un material y sección constante.

**Fig. 87** Ejercicio 7



por simple inspección se puede saber que el giro máximo se encuentra en los apoyos, que es de igual magnitud pero sentido diferente. En cuanto a la deflexión máxima no es posible hacer una suposición igual que con los giros, ya que por las condiciones de la carga, la deflexión ni siquiera se encuentra en el punto donde el momento es máximo. Así que con la ayuda del *Ejercicio 10* del método de la doble integral se encontrará dicho punto. Como se sabe cuando la deflexión es máxima el giro vale cero, partiendo de esto e igualando a cero la ecuación de giro obtenida en el ejercicio anteriormente mencionado y resolviéndola se obtienen cuatro valores de  $x$  de los cuales descartamos inmediatamente los valores negativos, ya que estos se encontrarían a la izquierda del apoyo  $A$ , o sea el origen de nuestro sistema coordenado. De los otros dos valores positivos restantes eliminamos el valor que es mayor a uno, ya que este valor se encontraría a la derecha del apoyo ubicado en  $B$ , por lo que se ubicaría

fuera de la viga. Entonces se encuentra el valor de  $x$  que es:  $\sqrt{-\frac{2\sqrt{30}}{15} + 1} = 0.5193296L$

En cuanto a los giros, se aplica un momento unitario en dirección de la deformación esperada, se realiza un corte y una vez obtenida la ecuación de momento aplicamos la ecuación de trabajo virtual

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{\omega Lx}{6} - \frac{\omega x^3}{6L} \right) \left( -\frac{x}{L} + 1 \right) dx$$

Resolviendo la integral

$$\theta_A = \frac{7\omega L^3}{360EI}$$

Para el giro en  $B$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{\omega Lx}{6} - \frac{\omega x^3}{6L} \right) \left( \frac{x}{L} \right) dx$$

Resolviendo la integral

$$\theta_B = \frac{\omega L^3}{45EI}$$

#### IV.4. Primer teorema de Castigliano.

El primer teorema de Castigliano es otro método que parte del principio de conservación de la energía y de como esta produce deformaciones. Debe hacerse énfasis en que sólo puede ser aplicado a elementos elásticos, fue inicialmente presentado por Alberto Castigliano en 1873. Como a continuación se manifiesta.

“Implica igualar la deflexión a la primera derivada parcial del trabajo interno total de la estructura respecto a una carga situada en el punto dónde se busca la deflexión.” (Kassimali, 2014: 309).

Se puede escribir matemáticamente como:

$$\Delta = \frac{\partial T}{\partial P} \quad (41)$$

Donde  $\Delta$  es el desplazamiento, lineal o giro,  $P$  puede ser una fuerza o un momento, y  $T$  la energía de deformación

En este punto de la demostración retomemos lo antes considerado en el tema de trabajo virtual.

$$T = \frac{1}{2}M\Theta$$

Y basándose en el principio de la conservación de la energía que ya utilizamos en el método del trabajo virtual, dónde se hizo

$$T_E = T_I$$

Ahora considérese una viga de longitud  $L$  a la cual se aplican cargas gradualmente, de valores desde 0 hasta  $P$ , fabricada con un material elástico, tenemos

$$dT = \frac{1}{2}M d\theta$$

Dónde  $dT$  es la energía de deformación de un elemento diferencial de la viga.

Si lo que interesa solo es el momento  $M$  es posible utilizar la fórmula diferencial para la flexión, que ya se demostró, para los métodos geométricos, entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Despejando

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (42)$$

Sustituyendo

$$dT = \frac{M^2}{2EI} dx \quad (43)$$

Y la energía total de deformación en la viga

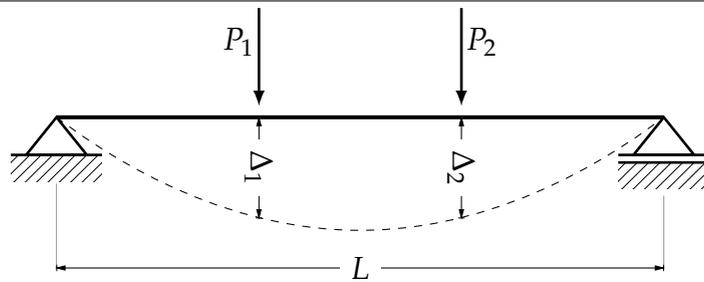
$$T = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (44)$$

Para una armadura recordamos la ecuación (44), y si de igual manera se considera que en la armadura se aplican las cargas  $P$  gradualmente y que estas a su vez generan fuerzas internas  $\mu$ , y que además está formada de barras de sección  $A$  y longitud  $L$  constantes así como la carga axial que actúa sobre el eje de la barra, tenemos

$$T = \sum \frac{F^2L}{2EA} \quad (45)$$

Siguiendo con el método y dejando atrás el pequeño recordatorio, considérese la siguiente viga, en la que actúan un par de fuerzas aplicadas gradualmente, produciendo una deflexión y que cada una produce su respectivo  $\Delta$  como se muestra a continuación.

**Fig. 88** Viga simplemente apoyada, con dos cargas  $P$ .



Aplicando la fórmula del primer teorema de castigliano

$$\Delta_1 = \frac{\partial T}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \left( \frac{\partial M}{\partial P_1} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (46)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial T}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P_2} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \left( \frac{\partial M}{\partial P_2} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (47)$$

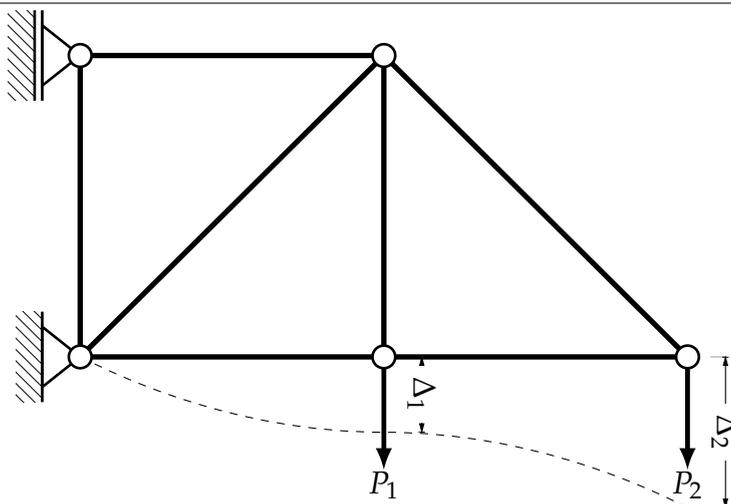
En cuanto a los giros  $\theta$  se obtienen de manera similar

$$\theta = \frac{\partial T}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \left( \frac{\partial M}{\partial m} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (48)$$

Donde  $m_1$  es un momento unitario ficticio

Del mismo modo se calculan las ecuaciones para una armadura, considerar la siguiente armadura.

**Fig. 89** Armadura simplemente apoyada, con dos cargas  $P$ .



$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{F^2 L}{2EA} = \sum \left( \frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{FL}{EA} \quad (49)$$

Aplicando el teorema para la anterior armadura mostrada.

$$\Delta_1 = \frac{\partial T}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{F^2 L}{2EA} = \sum \frac{F \mu_1 L}{EA}$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial T}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{F^2 L}{2EA} = \sum \frac{F \mu_2 L}{EA}$$

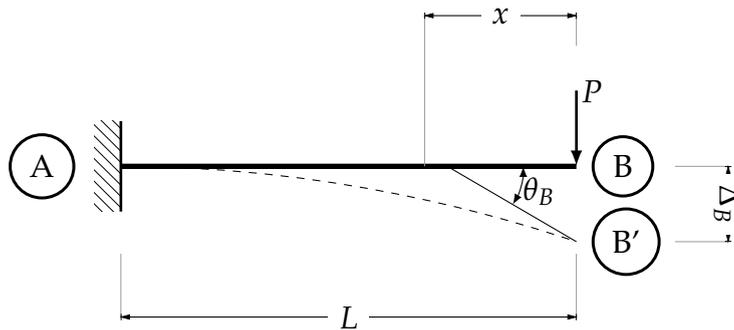
Dónde  $\mu_1$  es la fuerza interna de cualquier barra que compone la armadura debido a una carga unitaria ficticia en el punto de aplicación de la carga  $P_1$ , de igual manera  $\mu_2$

## IV.5. Obtención de deformaciones.

### IV.6. Vigas.

**Ejercicio 1** Obtener las deformaciones máximas de la siguiente estructura, considérese un material u una sección constante a lo largo de su longitud.

Fig. 90 Ejercicio (1)



Aplicando el teorema

$$\Delta_B = \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Calculando la ecuación de momento, debido a que la carga que actúa en la viga está en el punto de interés, no es necesario otro cálculo.

$$M = -Px$$

Calculando la derivada parcial

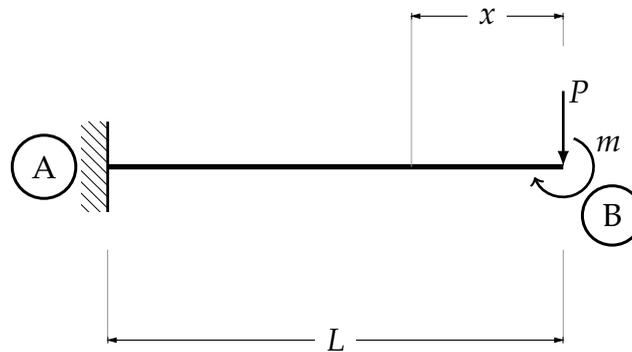
$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Sustituyendo

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L (-Px)(-x) dx = \frac{PL^3}{3EI} \quad \downarrow$$

Para el giro, no es posible aplicar el teorema directamente, pero agregando un momento concentrado ficticio en el punto de interés resolvemos este problema.

Fig. 91 Ejercicio (1.b)



Del teorema se tiene

$$\theta_B = \frac{\partial T}{\partial m} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial m} dx$$

Calculando la ecuación de momento

$$M = -Px - m$$

Realizando la derivada parcial

$$\frac{\partial M}{\partial m} = -1$$

Como  $m = 0$  debido a que es un momento ficticio y que se agrega sólo para ser posible realizar la derivada parcial y sustituyendo

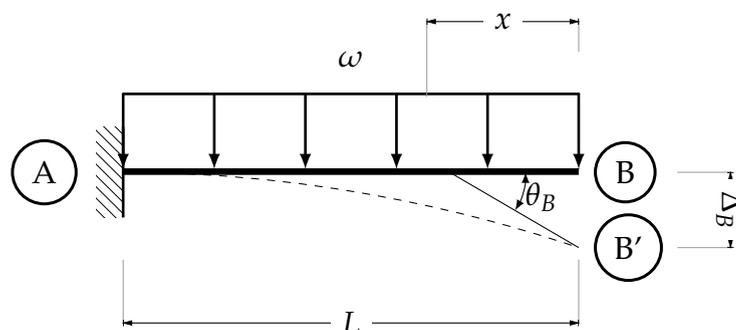
$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L (-Px - m)(-1) dx$$

Resolviendo

$$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

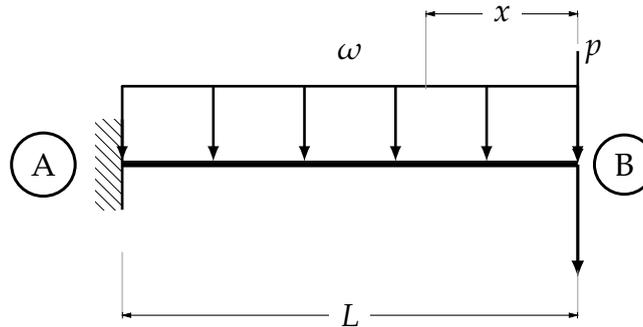
**Ejercicio 2** Calcular las deformaciones máximas de la siguiente viga empotrada, considérese un  $EI = cte$

Fig. 92 Ejercicio (2)



Debido a que en el punto en el que se encuentra la deflexión máxima no está actuando ninguna fuerza concentrada, no es posible aplicar el teorema, así que para resolver este inconveniente se coloca, en dicho punto, una carga ficticia  $p$ . Entonces

Fig. 93 Ejercicio (2.a)



Del teorema

$$\Delta_B = \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Realizando un corte, se obtiene la ecuación de momento

$$M = -Px - \frac{\omega x^2}{2}$$

Obteniendo la derivada parcial

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

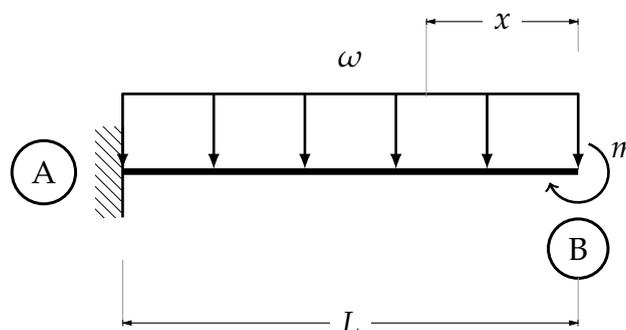
$$\Delta_B = \int_0^L \left(-Px - \frac{\omega x^2}{2}\right)(-x) dx$$

Haciendo  $P = 0$  dada que es una fuerza ficticia

$$\Delta_B = \frac{\omega L^4}{8EI} \quad \downarrow$$

Aplicando un momento ficticio para calcular el giro máximo

Fig. 94 Ejercicio (2.b)



De la misma manera para los giros, se tiene

$$\theta_B = \frac{\partial T}{\partial m} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial m} dx$$

Haciendo un corte en  $x$  y calculando la ecuación de momento

$$M = -\frac{\omega x^2}{2} - m$$

Realizando la derivada parcial

$$\frac{\partial M}{\partial m} = -1$$

Sustituyendo

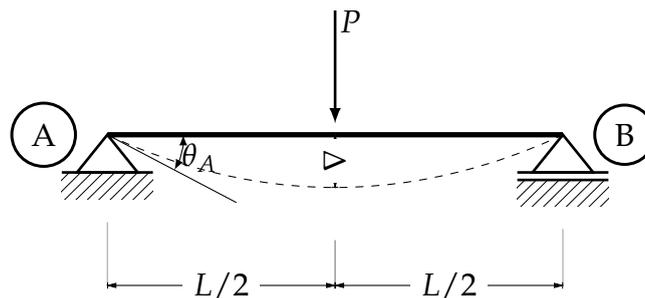
$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{\omega x^2}{2} - m \right) (-1) dx$$

Como el momento es ficticio  $m = 0$ , e integrando

$$\theta_B = \frac{\omega L^3}{6EI}$$

**Ejercicio 3** Calcular la deflexión máxima y los giros producidos en los apoyos debido a la carga actuante.

**Fig. 95** Ejercicio 3



Colocando una carga unitaria ficticia en el punto de interés, y calculando la derivada parcial para multiplicar el resultado por la ecuación de momento de la viga rea, se tiene.

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{Px}{2} \right) (x) dx$$

Resolviendo la integral

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{PL^3}{48EI}$$

Para lo giros, de igual manera.

$$\theta = \frac{PL^2}{16EI}$$

## Conclusiones sobre los métodos energéticos.

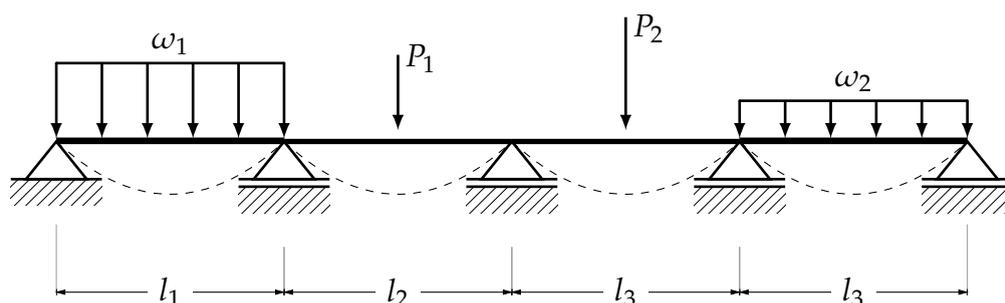
Sólo se presentan en esta tesis dos métodos, que al autor parecieron los más fundamentales para dar un contexto al lector en el tema de deformaciones en elementos estructurales, y así dar cabida a un estudio más extenso sobre el tema. Los métodos son bastante fáciles de prender y parte de principios muy sencillos. Son prácticos si se conoce el punto donde una deformación es máxima, o si está bien claro el punto donde se necesita analizar la deformación. El problema principal de estos métodos radica en la necesidad de plantear tantas estructuras y resolverse, como puntos se quieran estudiar, esto es algo impracticable si es necesario revisar varios puntos en una estructura.

## V. Compatibilidad de deformaciones.

El método es muy simple, consiste en transformar una estructura hiperestática que por principio no puede ser resuelta por las ecuaciones de la estática, en una estáticamente determinada quitando, por así decirlo, las incógnitas de más que puedan existir en la estructura, suponiéndolas en unas ecuaciones llamadas "ecuaciones de compatibilidad", que resultan de suponerlas deformaciones debido a las cargas originales y las reacciones de más que hacen a la estructura hiperestática. El método es aplicable a cualquier tipo de estructura pero existe una limitación y es que debe ser aplicable el principio de superposición, ya que de este principio parte el método.<sup>33</sup>

En una viga hiperestática bajo diferente número y tipo de cargas se aplicará el método. Según el método las deflexiones en los puntos de los apoyos, causadas por las cargas originales actuantes en la estructura primaria, más las deflexiones causadas por las reacciones supuestas en los apoyos, deben ser cero. Entonces: como se puede observar es una estructura hiperestática de tercer grado, así que el primer paso será convertirla en una estructura determinada, suponiendo las reacciones de los tres apoyos móviles internos, transformándola en una viga simplemente apoyada.

Fig. 96 rrr



En la siguiente figura () se observan las deflexiones (*Delta*) causadas por las cargas de la viga primaria.

<sup>33</sup> Para el análisis de estructuras determinadas, el método difiere un poco de lo presentado

Fig. 97 rrr

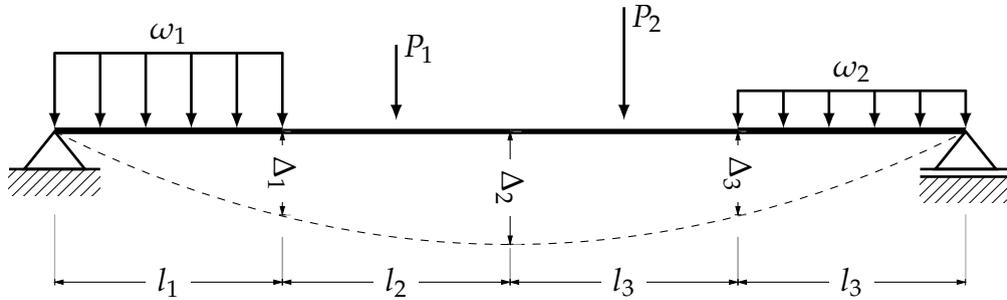


Fig. 98 rrr

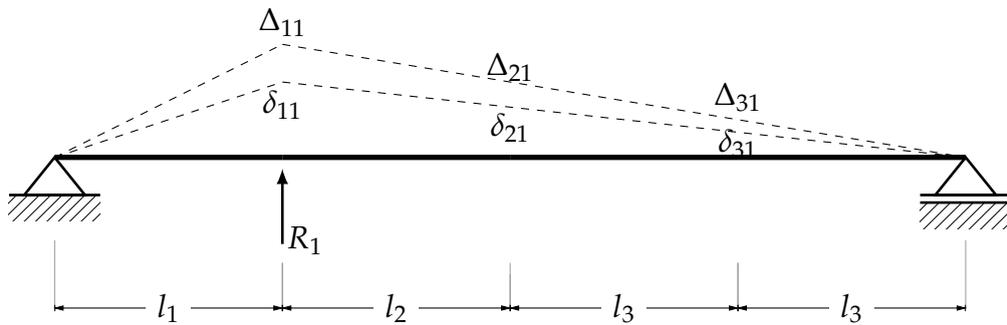


Fig. 99 rrr

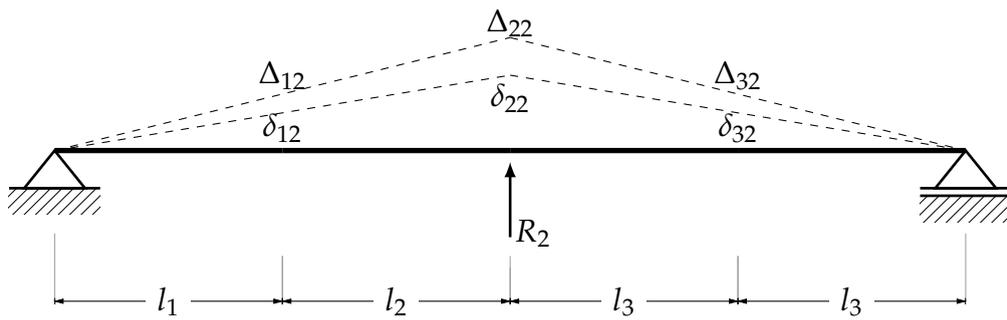
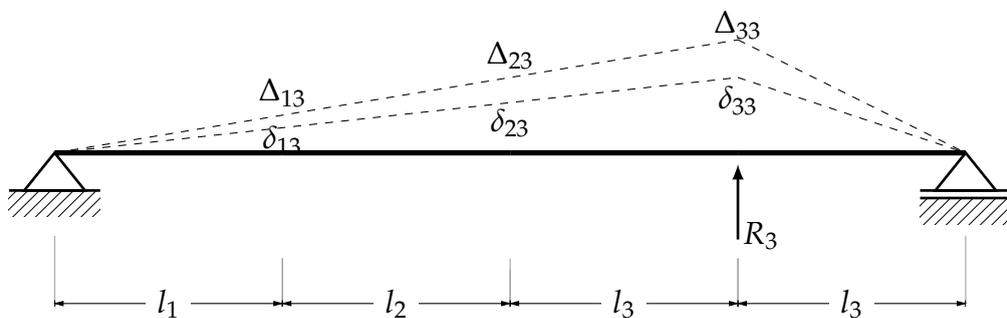


Fig. 100 rrr



$$\Delta_1 + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} = 0$$

$$\Delta_2 + \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} = 0$$

$$\Delta_3 + \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} = 0$$

$$\Delta_1 + \delta_{11} R_1 + \delta_{12} R_2 + \delta_{13} R_3 = 0$$

$$\Delta_2 + \delta_{21} R_1 + \delta_{22} R_2 + \delta_{23} R_3 = 0$$

$$\Delta_3 + \delta_{31} R_1 + \delta_{32} R_2 + \delta_{33} R_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 + \delta_{11} R_1 + \delta_{12} R_2 + \dots + \delta_{1n} R_n = 0$$

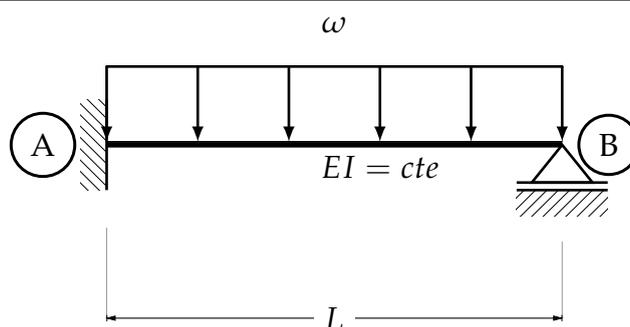
$$\Delta_2 + \delta_{21} R_1 + \delta_{22} R_2 + \dots + \delta_{2n} R_n = 0$$

$$\Delta_n + \delta_{n1} R_1 + \delta_{n2} R_2 + \dots + \delta_{nn} R_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

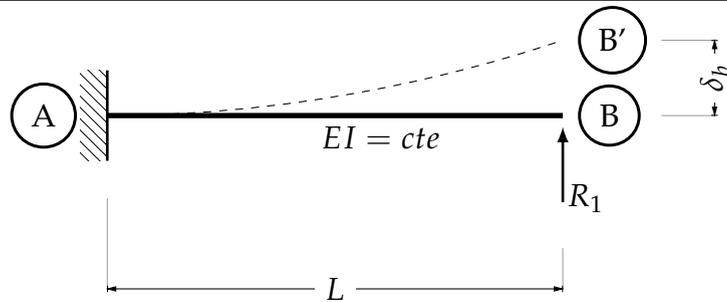
Analizaremos una viga hiperestática de primer grado, la cual dividiremos en dos vigas estáticamente determinadas, evitando las inestabilidades. Una empotrada con la carga  $\omega$  y la otra empotrada suponiendo la reacción ( $R_1$ ), como una fuerza con un valor unitario (1).

Fig. 101 Ejercicio



Comenzando por la viga en la que se aplica la suposición de reacción ( $R_1$ ) y haciendo un corte a una distancia  $x$  para obtener la ecuación de momentos para después calcular su deflexión.

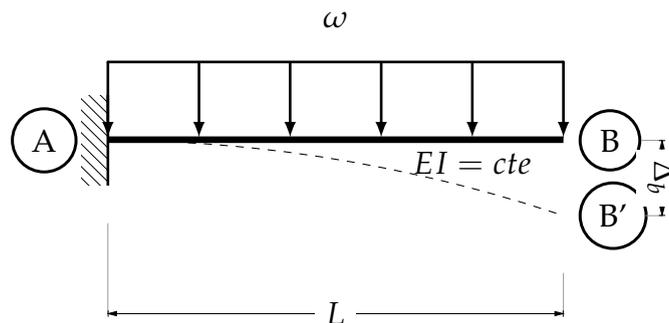
Fig. 102 Ejercicio



$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_R M_V}{EI} dx = \int_0^L \frac{-x(-x)}{EI} dx = \left. \frac{x^3}{3EI} \right]_0^L = \frac{L^3}{3EI}$$

De igual manera haciendo un corte a una distancia  $x$  obtenemos la ecuación de momentos para la viga empotrada con la carga  $\omega$  que forma parte de la estructura primaria. Para posteriormente calcular su deflexión.

Fig. 103 Ejercicio



$$\Delta_1 = \int_0^L \frac{M_R M_V}{EI} dx = \int_0^L \frac{\left(\frac{-\omega x^2}{2}\right)(x)}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \omega x^3 = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{\omega x^4}{4} \right]_0^L = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

Sustituyendo los términos obtenidos, en la ecuación de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \delta_{11} R_1 &= 0 \\ \frac{\omega L^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_1 &= 0 \\ R_1 &= -\frac{\omega L^4}{8EI} \cdot \frac{3EI}{L^3} = 0 \\ R_1 &= -\frac{3\omega L}{8} \end{aligned}$$

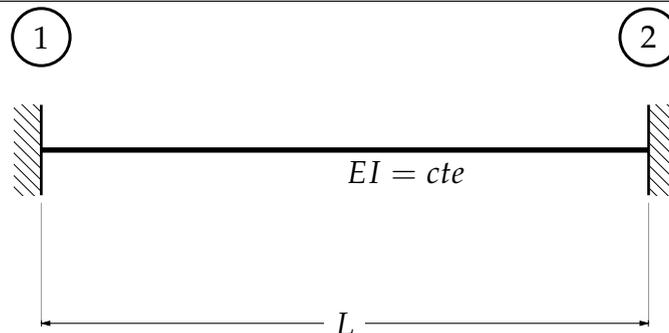
El signo indica que está mal propuesta la reacción, va hacia arriba.

## VI. Pendiente-Desviación.

En el capítulo anterior se estudiaron estructuras estáticamente indeterminadas en las que se consideraban como incógnitas las fuerzas que provocaban a la estructura un grado de indeterminación, pero de igual manera se puede considerar como incógnitas los desplazamientos provocados por las cargas. De este principio parte el método de Pendiente - desviación, que se presenta a manera de introducción al capítulo siguiente, "lo presentó George A. Maney en 1915." (Kassimali, 2014: 583). Para su demostración se calculan las ecuaciones fundamentales, que están en función de las deformaciones que sufra la estructura. El siguiente método puede ser aplicable a vigas y marcos, con módulo de rigidez constante o no.

La siguiente viga está doblemente empotrada, lo que significa que es hiperestática de grado 3, por lo que no se puede resolver por los métodos convencionales.

Fig. 104 Ejercicio



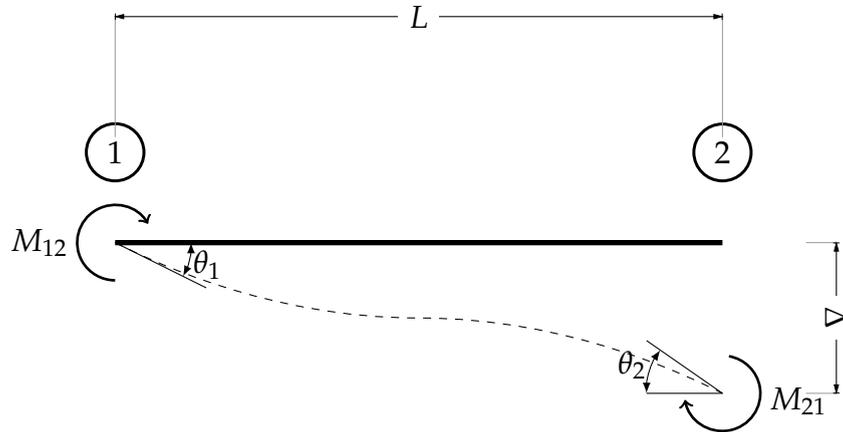
Liberando los extremos, se sabe que existirán deformaciones, un  $\Delta$  de deflexión, un par de giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (que pueden no ser debidos a carga), por lo cual es posible determinar un par de funciones:

$$M_{12} = f(\theta_1, \theta_2, \Delta_{12}, \omega) \quad (50)$$

$$M_{21} = g(\theta_1, \theta_2, \Delta_{12}, \omega) \quad (51)$$

Que determinan el valor de los momentos,  $M_{12}$  (momento de 1 a 2) y  $M_{21}$  (momento de 2 a 1). Que estas a su vez están en función de cuatro efectos. El momento debido al giro en el punto uno, al giro en el punto dos, a la deflexión y a la carga

Fig. 105 Ejercicio



Estableciendo la siguiente configuración de apoyos, los momentos que actúan en el elemento producen una deformación, y un  $\theta_1$  debido al tipo de apoyo. Para determinar los momentos, se utiliza el método de Viga conjugada.

Fig. 106 Ejercicio

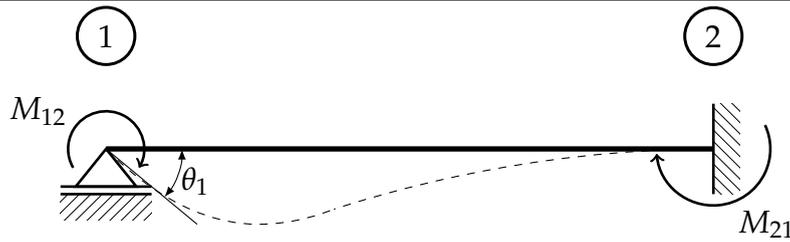
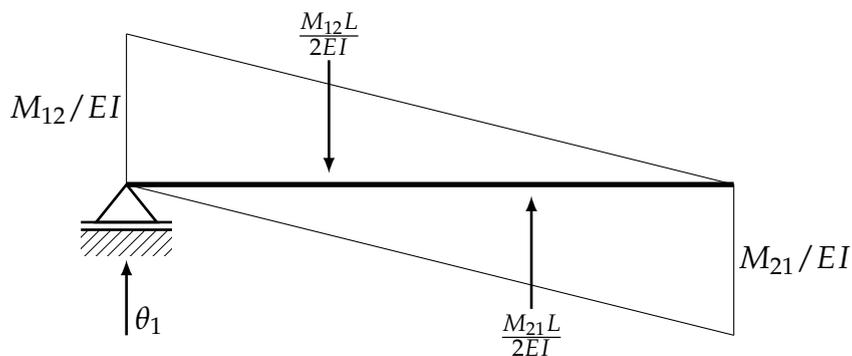


Fig. 107 Ejercicio



$$\sum M_1 = 0 \quad \curvearrowright$$

$$-\frac{M_{12}L}{2EI} \left( \frac{L}{3} \right) + \frac{M_{21}L}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) = 0$$

$$\frac{M_{21}L^2}{3EI} = \frac{M_{12}L^2}{6EI}$$

$$2M_{21} = M_{12}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$-\theta_1 L + \frac{M_{12}L}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) - \frac{M_{21}L}{2EI} \left( \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$-\theta_1 L + \frac{M_{12}L^2}{3EI} - \frac{M_{21}L^2}{6EI} = 0$$

$$\theta_1 L = \frac{M_{12}L^2}{3EI} - \frac{M_{21}L^2}{6EI}$$

$$M_{12} = 2M_{21}$$

$$\theta_1 L = \frac{2M_{21}L^2}{3EI} - \frac{M_{21}L^2}{6EI}$$

$$\theta_1 L = \frac{M_{21}L^2}{EI} \left( -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right)$$

$$\theta_1 = \frac{M_{21}L}{EI} \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{L} \theta_1 \quad \therefore \quad M_{12} = 2M_{21} = \frac{4EI}{L} \theta_1$$

Fig. 108 Ejercicio

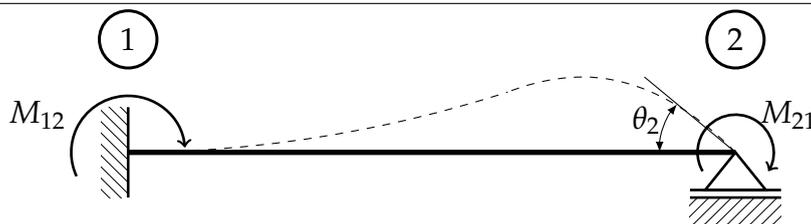
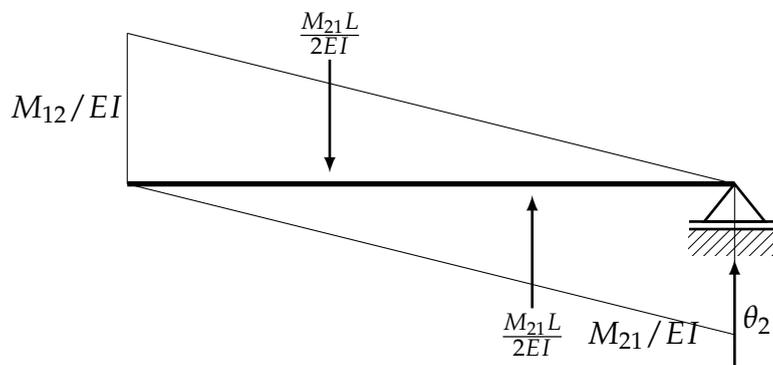


Fig. 109 Ejercicio



$$\sum M_2 = 0 \quad \curvearrowright$$

$$-\frac{M_{12}L}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) + \frac{M_{21}L}{2EI} \left( \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$M_{21} = 2M_{12}$$

$$\sum M_1 = 0$$

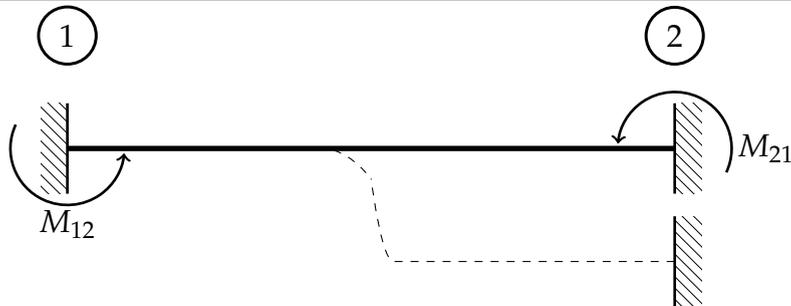
$$\frac{M_{12}L}{2EI} \left( \frac{L}{3} \right) - \frac{M_{21}L}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) + \theta_2 L = 0$$

$$\theta_2 L = \frac{M_{12}L^2}{EI} \left( -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right)$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{L} \theta_2$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{L} \theta_2$$

Fig. 110 Ejercicio



$$M_{12} = M_{21} = -M$$

$$\sum M_1 = 0 \quad \curvearrowright$$

$$-\frac{M_{12}L}{2EI} \left( \frac{L}{3} \right) - \frac{M_{21}L}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) - \Delta_{12} = 0$$

$$-M = \frac{6EI}{L^2} \Delta_{12}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{6EI}{L^2} \Delta_{12}$$

$$M_{F12} =$$

$$M_{12} = f(\theta_1)$$

$$M_{12} = g(\theta_2)$$

$$M_{12} = h(\theta_{12})$$

$$M_{12} = M_E \omega_{12}$$

$$M_{F21} =$$

$$M_{21} = f(\theta_2)$$

$$M_{21} = g(\theta_1)$$

$$M_{21} = h(\theta_{21})$$

$$M_{21} = M_E \omega_{21}$$

$$M_{12} = \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 + \frac{6EI}{L^2} \Delta_{12} \pm M_E \omega_{12}$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2 + \frac{6EI}{L^2} \Delta_{21} \pm M_E \omega_{21}$$

## VII. Método de las rigideces.

Partiendo de lo expuesto en el capítulo anterior, se presentará el *método de las rigideces*. A diferencia del método de la compatibilidad de deformaciones, en donde, las fuerzas eran las incógnitas que se buscaba calcular, en el método de las rigideces las incógnitas son los desplazamientos en los nudos, se entiende como desplazamientos a las traslaciones y rotaciones. Se determinan ecuaciones para los elementos de la estructura con base en:

- Los desplazamientos desconocidos
- Las propiedades de los elementos de la estructura
- Las cargas

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante del análisis, se obtienen las fuerzas internas de los elementos así como sus reacciones en los apoyos. Para facilitar la resolución de dicho sistema de ecuaciones, es común utilizar matrices, esto facilita el cálculo. El ensamble de dichas matrices se realizará a continuación, enunciando sus cualidades específicas de dichas matrices.

El método de las rigideces es ampliamente utilizado en la actualidad debido a su exactitud en los cálculos, así también por lo sencillo que es programarlo en computadoras, facilitando el cálculo y haciéndolo muy rápidamente. Cabe mencionar, que, si no todos, la mayoría de los programas computacionales de análisis estructural comercial, de la actualidad, utilizan como principio el método de las rigideces, ensamblando matrices y resolviendo sistemas de ecuaciones tan grandes como la estructura lo requiera.

Cabe destacar que en el presente trabajo solo se abordará el método para deflexiones, ya que este es aplicable a esfuerzos axiales, cortantes y torsionales. Para el análisis de las armaduras, es de igual manera ampliamente utilizado este método, el cual, es muy simple, pero que está fuera del alcance de este texto, así pues si el lector comprende los principios del método de las rigideces para elementos a flexión, sin problemas podría comprender el

mismo método aplicado a los demás tipos de esfuerzos presentes en las estructuras. Cabe resaltar que en vigas, elementos tipo barra horizontales sujetos a cargas perpendiculares al eje del elemento, la carga axial es prácticamente nula, y, por lo tanto, totalmente despreciable. Caso que no ocurre con los marcos, que en las columnas suele presentarse esfuerzos axiales, pero qué, como es sabido la energía de deformación causada por carga axial, es demasiada pequeña en comparación con la deformación por flexión, por lo que se despreciará sin tener errores significativos en el cálculo.

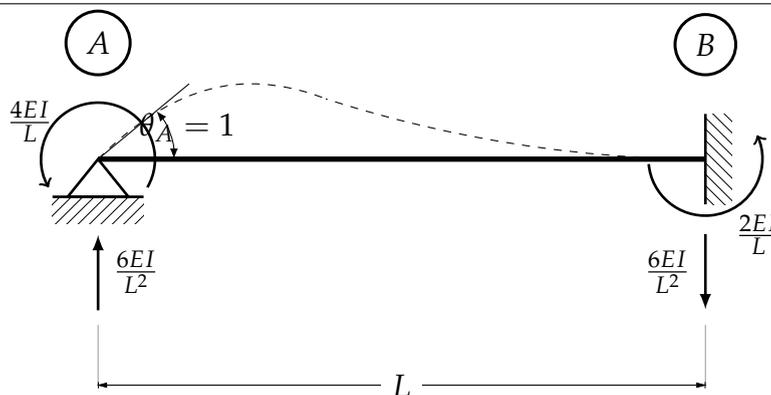
El método consiste, como ya se mencionó anteriormente, en establecer ecuaciones para la estructura a analizar, para posteriormente realizar algunas operaciones matriciales para obtener los esfuerzos internos de los elementos. se enfocará el texto específicamente en el ensamble de la matriz de rigideces, puesto que, este paso es crucial para poder resolver estructuras, se tienen que tener bien presentes todos los conocimientos en estructuras brindados por todos los métodos anteriores para ser capaces de ensamblar correctamente una matriz de rigideces. Las operaciones matriciales posteriores, sin mayores problemas se pueden realizar con cualquier programa de computadora, tales como: Octave, MathLab, Mathcad etc.

Se analizará la siguiente viga doblemente empotrada para demostrar el método. Tómese en cuenta que no existen alargamientos ni acortamientos axiales en el elemento.

Téngase en cuenta lo demostrado por el método de Pendiente-Desviación que se muestra a continuación.

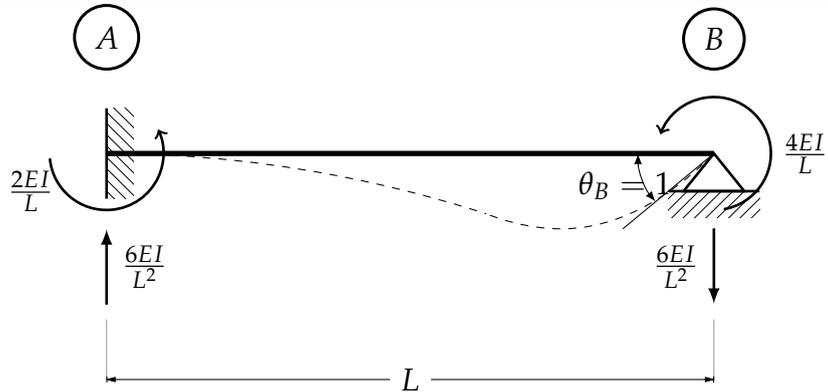
Liberando el extremo  $A$  para permitir el giro, y aplicando un momento que produce una deformación unitaria  $\theta_A = 1$  se tiene.

Fig. 111 Estructura primaria con giro en  $A$



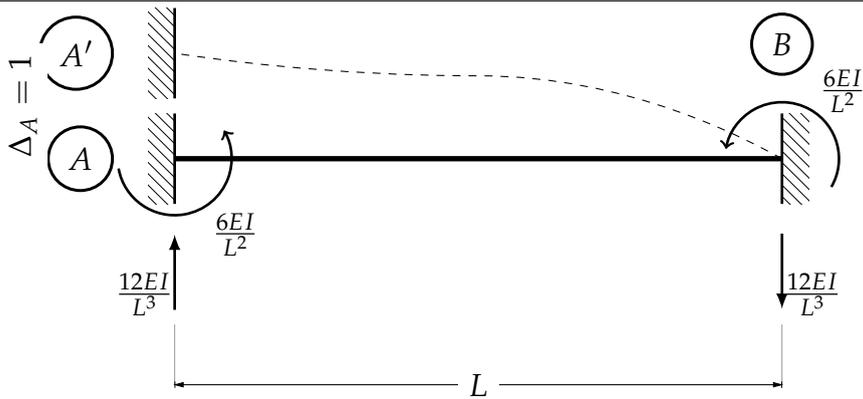
Ahora con el extremo  $B$ .

Fig. 112 Estructura primaria con giro en B



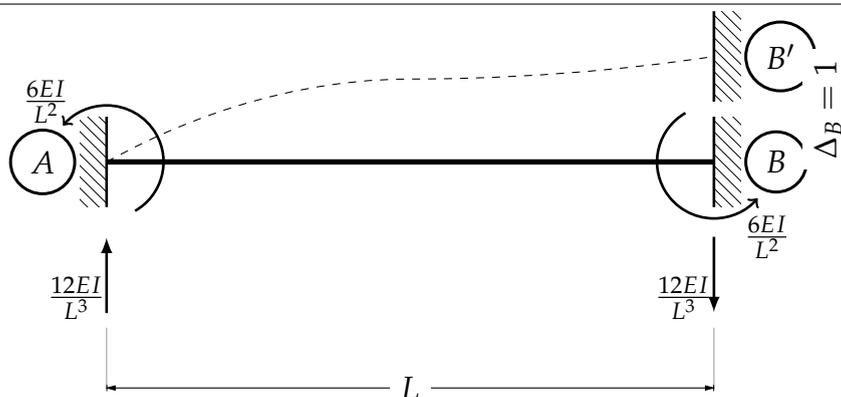
Provocando un  $\Delta$  en A.

Fig. 113 Estructura primaria con desplazamiento  $\Delta_A$



Ahora en B.

Fig. 114 Estructura primaria con desplazamiento  $\Delta_B$



Ensamblando la matriz de rigideces.

$$\begin{bmatrix} M_A \\ Fy_A \\ M_B \\ Fy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_A \\ \Delta_A \\ \theta_B \\ \Delta_B \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Esta es la matriz de rigideces para la estructura. Para una barra, esta es la matriz de rigidez *completa*, estas matrices tienen características especiales, tales como:

- Cuadrática
- Simétrica
- No necesariamente inversible (singular)

Observe se que las columnas de la matriz completa guardan equilibrio estático.

Las características de una matriz de rigidez que no es completa (reducida), se refiere a que corresponde a una estructura en la cual tiene algún o algunos grados de libertad. Estas matrices tienen características en común con las matrices completas excepto una, que son inversibles. Dichas características son:

- Cuadrática
- Simétrica
- Inversible

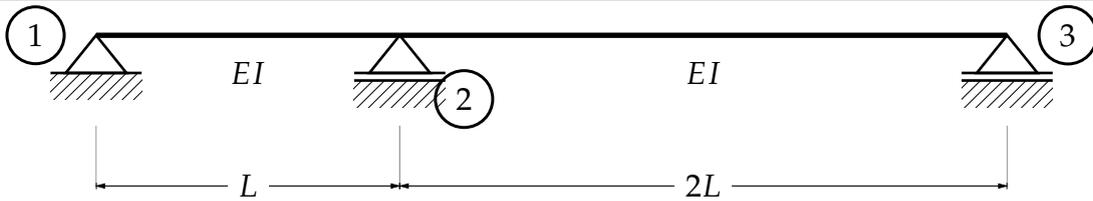
Como se mencionó anteriormente, el método de las rigideces es aplicable a cualquier estructura, estáticamente determinada o no, incluso si es *inestable*, lo cual daría lugar al fenómeno llamado, *desplazamiento de cuerpo rígido*, sería el caso, por ejemplo, de un elemento sin apoyos que se desplazaría de forma aleatoria indefinidamente. Si la matriz de rigideces no tiene solución o arroja resultados incongruentes, se debería a un mal ensamble, si no es el caso, se debería a que la estructura siendo analizada es inestable.

La matriz de rigideces anteriormente obtenida, es el elemento finito más pequeño, del cual se basan todos los análisis por el método de las rigideces, sin importar si se trata de elementos barra o elementos placa.

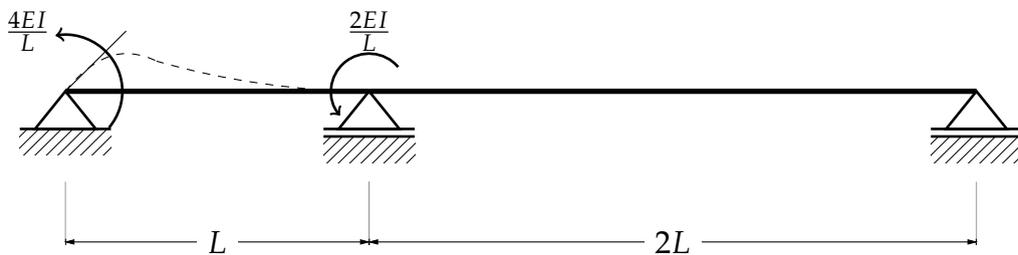
$$\begin{bmatrix} M_A \\ Fy_A \\ M_B \\ Fy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_A \\ \Delta_A \\ \theta_B \\ \Delta_B \end{bmatrix}$$

**Ejercicio** Ensamblar la matriz de rigidez por flexión de la siguiente estructura tipo viga.

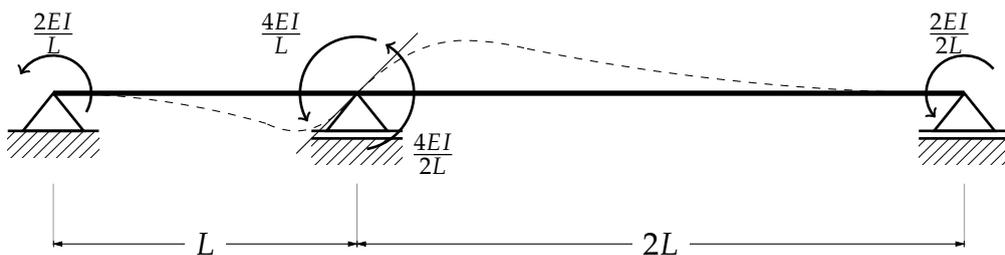
En primer lugar se debe determinar el número de grados de libertad de la estructura a analizar, considerando que los elementos barra son muy rígidos a esfuerzos axiales, es decir, no se acortan ni se alargan, la estructura solo tiene tres grados de libertad, que son los giros en 1, 2 y 3, por lo que su matriz de rigideces debe ser una matriz cuadrada y simétrica de 3X3.



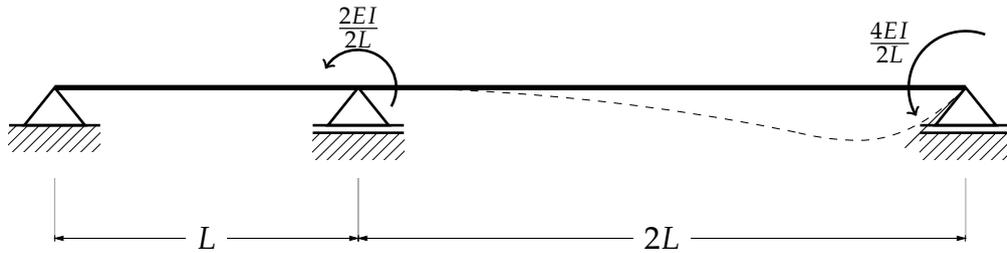
Provocando un giro al rededor de 1.



Provocando un giro al rededor de 2



Provocando un giro al rededor de 3

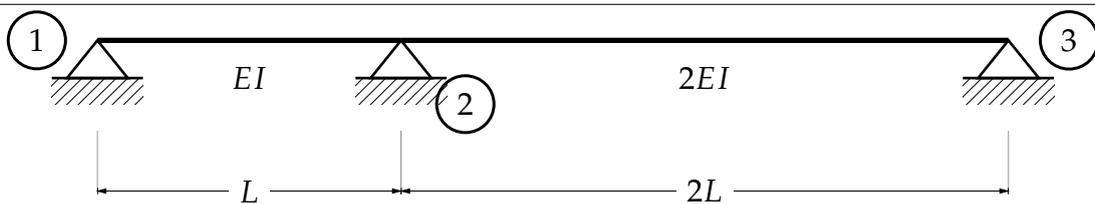


Ensamblando la matriz de rigideces, se tiene

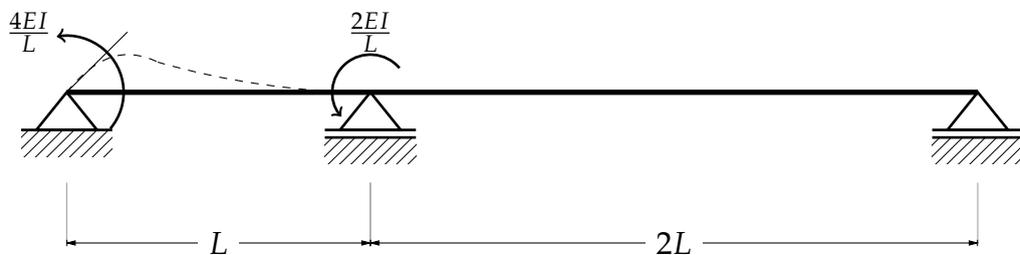
$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{2L} & \frac{2EI}{2L} \\ 0 & \frac{2EI}{2L} & \frac{4EI}{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L} & \frac{EI}{L} \\ 0 & \frac{EI}{L} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

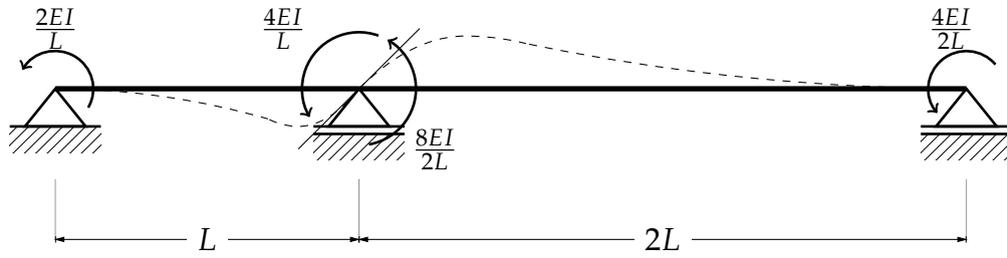
**Ejercicio** Ensamble la matriz de rigideces de la siguiente estructura.



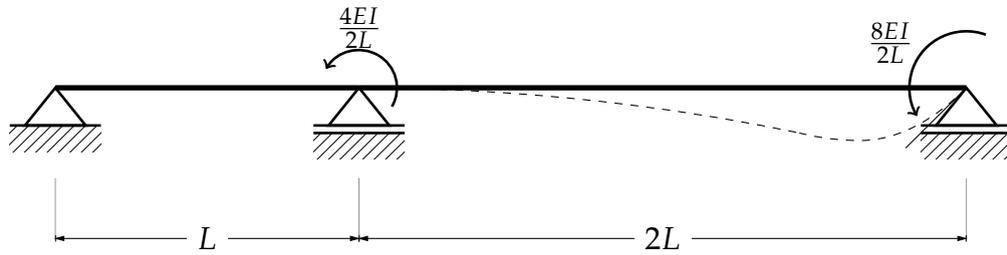
Provocando un giro al rededor de 1



Provocando un giro al rededor de 2



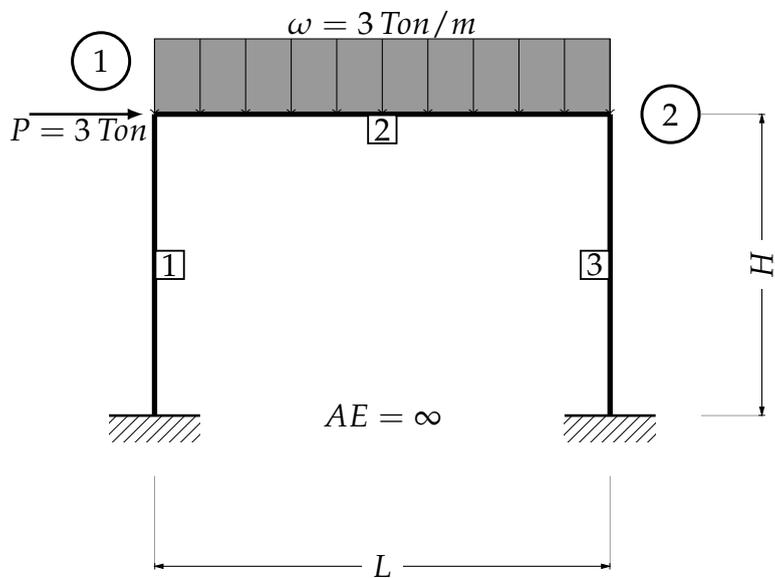
Ahora al rededor de 3



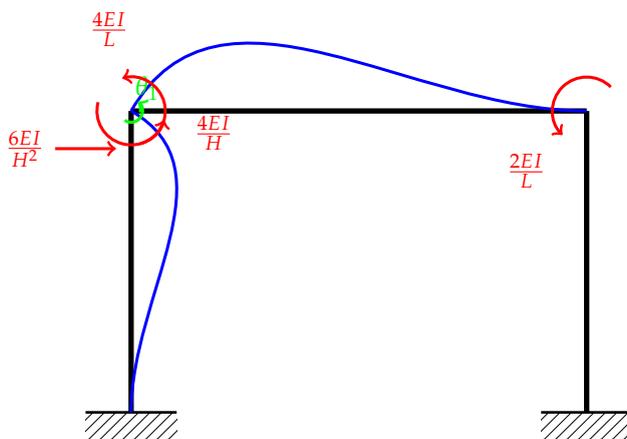
$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{8EI}{2L} & \frac{4EI}{2L} \\ 0 & \frac{4EI}{2L} & \frac{8EI}{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

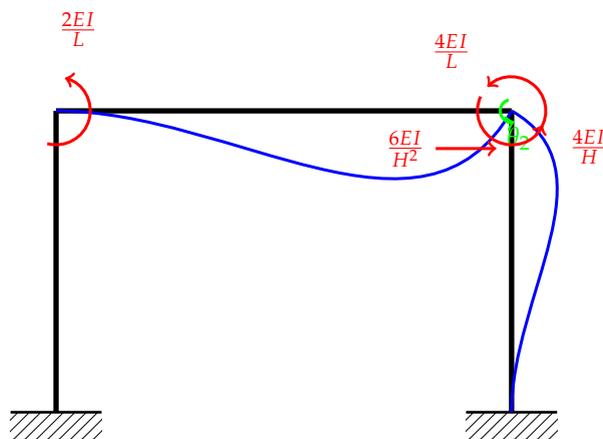
**Ejercicio** Ensamblar la matriz de rigideces del siguiente marco. Considerando que los elementos barra no se deforman axialmente y solo actúan esfuerzos de flexión en os elementos. La estructura tiene tres grados de libertad: giros en 1 y 2, y el desplazamiento horizontal



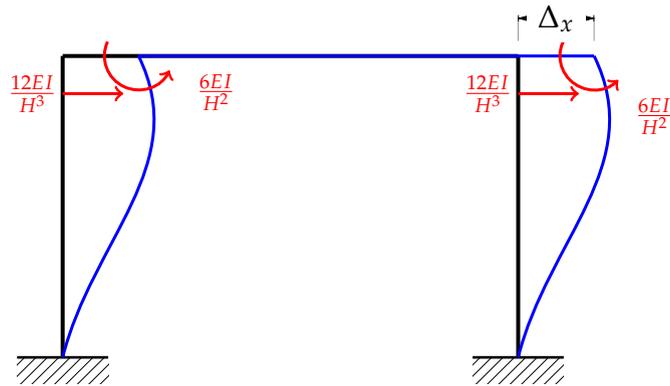
Girando el nudo 1



Girando el nudo 2



Desplazamiento horizontal



$$\begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(12EI)}{H^3} & \frac{6EI}{H^2} & \frac{6EI}{H^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas

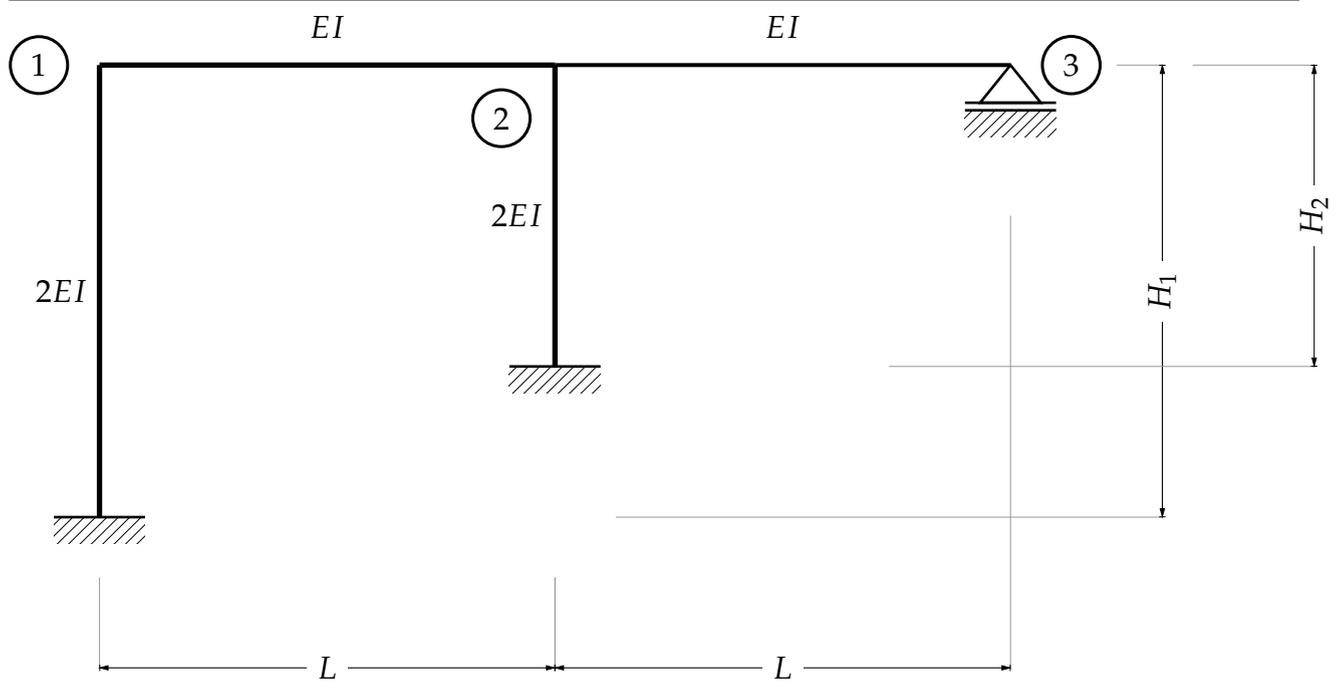
$$F_{I1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas queda de la siguiente manera

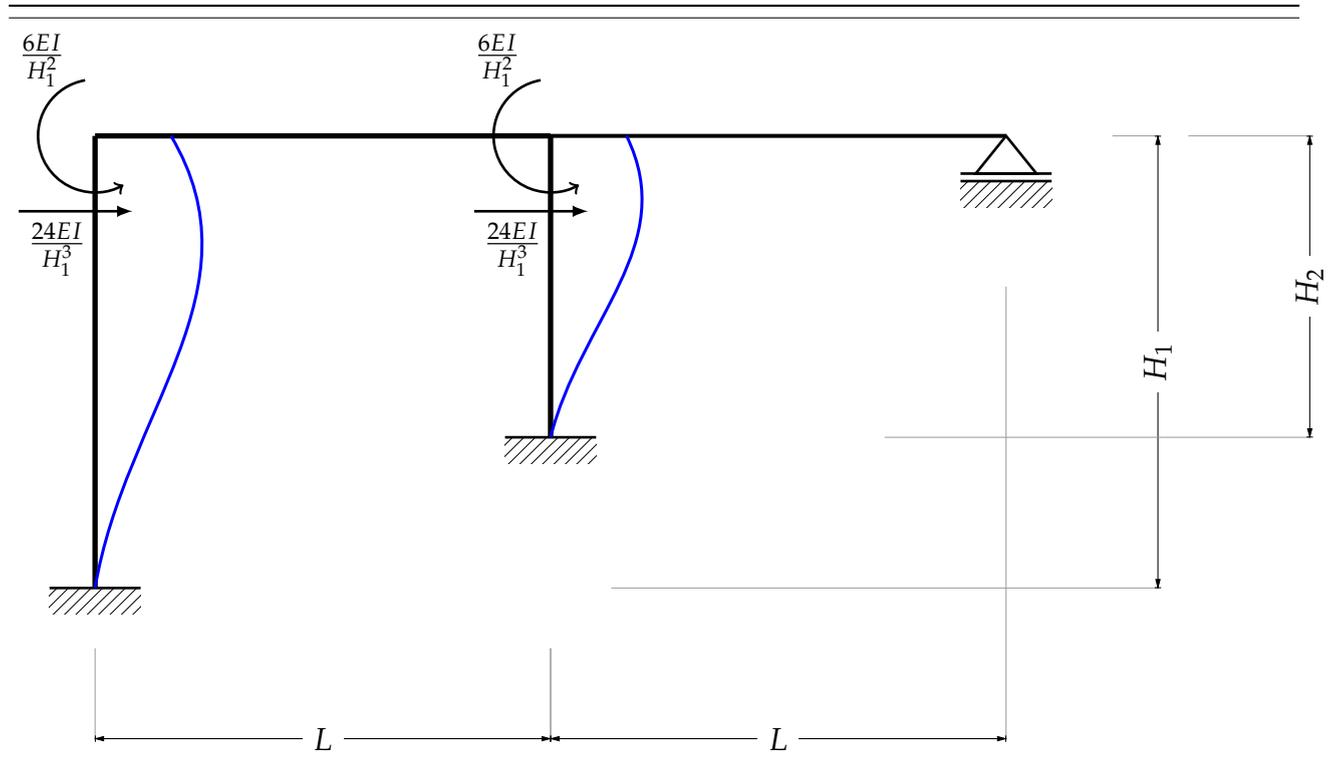
$$\begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003209 \\ 0.002294 \\ 0.001091 \end{bmatrix}$$

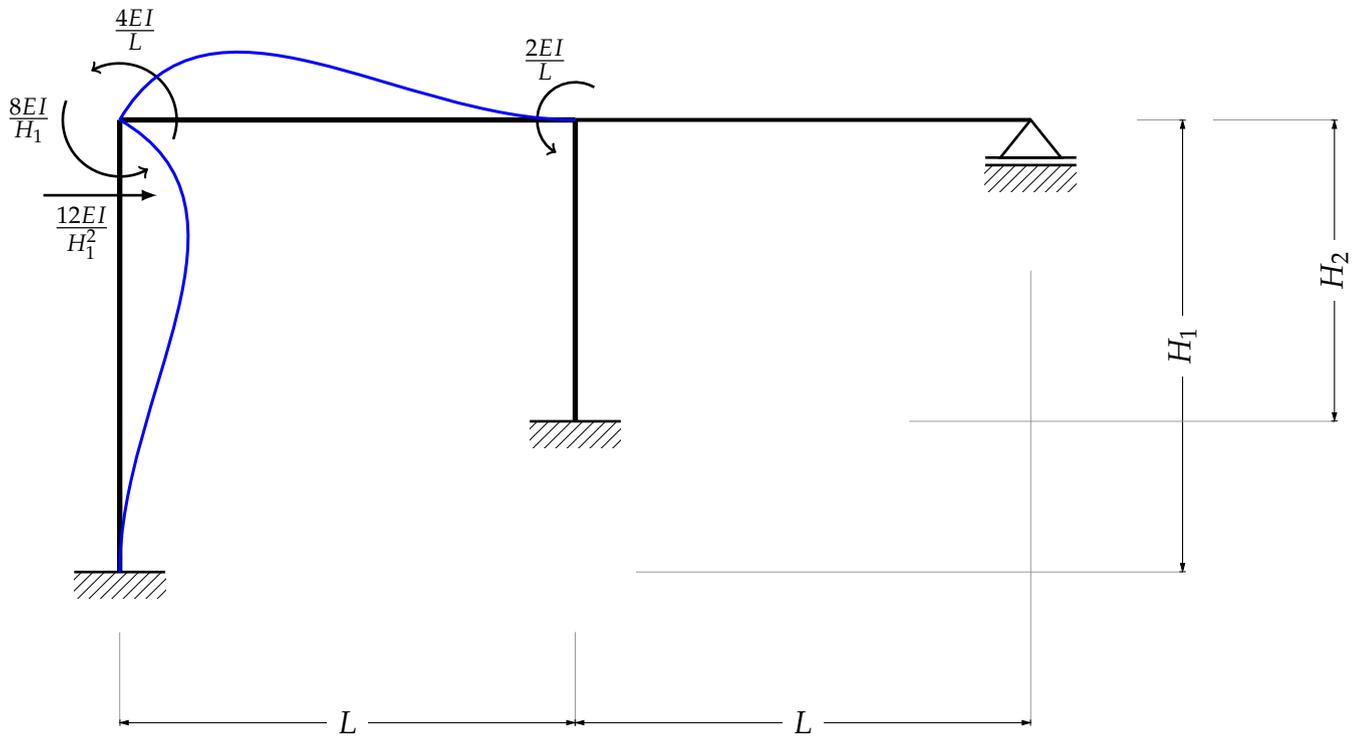
**Ejercicio** Ensamblar la matriz de rigideces del siguiente marco hiperestático.



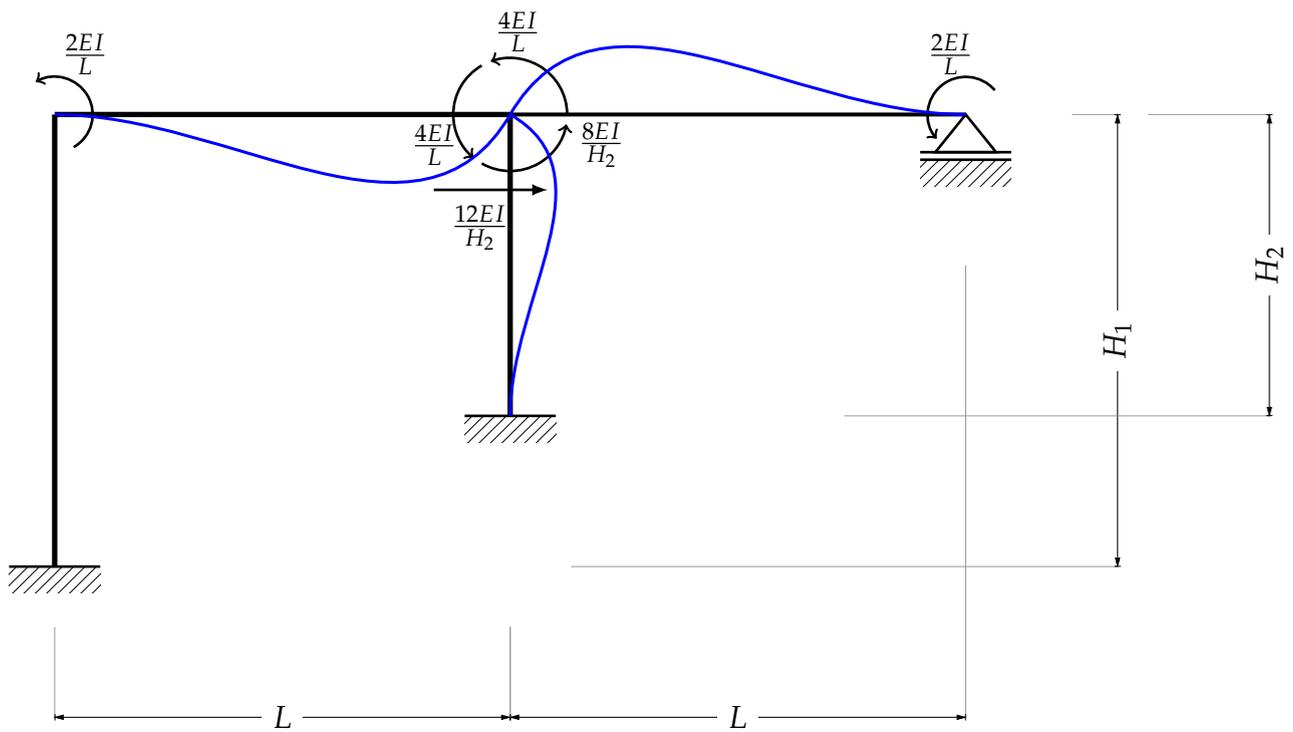
Para el desplazamiento horizontal.



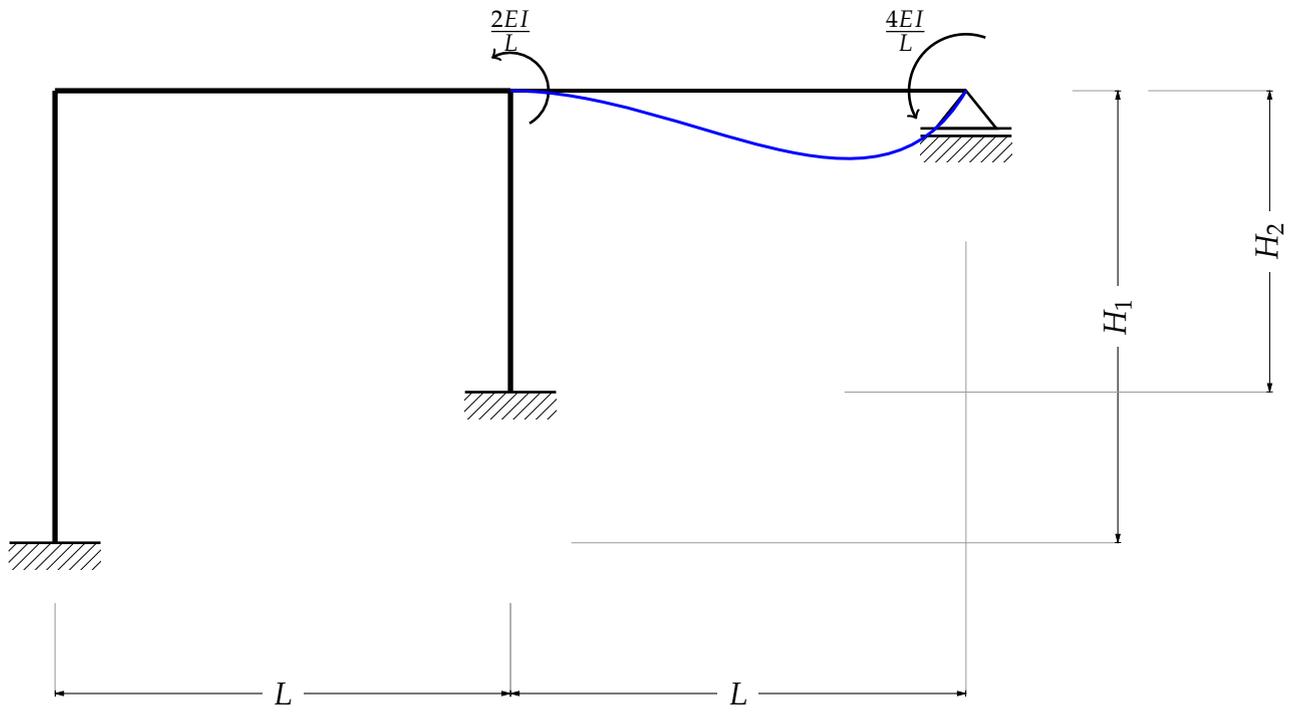
El giro en 1



El giro en 2



El giro en 3



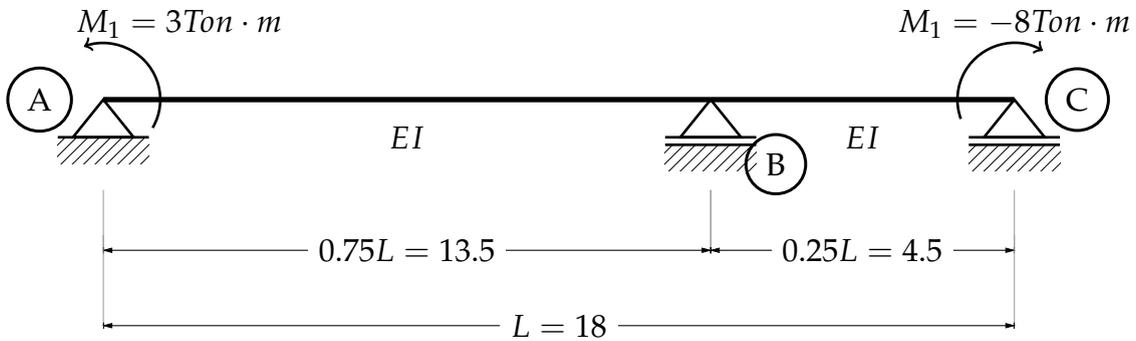
Ensamblando la matriz de rigideces:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{H_1^3} + \frac{24EI}{H_1^3} & \frac{12EI}{H_1^2} & \frac{12EI}{H_2^2} & 0 \\ \frac{12EI}{H_1^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{8EI}{H_1} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{12EI}{H_2^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} + \frac{8EI}{H_2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{H_1^3} + \frac{24EI}{H_1^3} & \frac{12EI}{H_1^2} & \frac{12EI}{H_2^2} & 0 \\ \frac{12EI}{H_1^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{8EI}{H_1} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{12EI}{H_2^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} + \frac{8EI}{H_2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio** Calcular el diagrama de momentos de la siguiente viga hiperestática, por el método de las rigideces con los siguientes datos.

$$E = 2.039 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2} \quad I = 1.278 \times 10^4 cm^4$$



$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{0.75L} & \frac{2EI}{0.75L} & 0 \\ \frac{2EI}{0.75L} & \frac{4EI}{0.75L} + \frac{4EI}{0.25L} & \frac{2EI}{0.25L} \\ 0 & \frac{2EI}{0.25L} & \frac{4EI}{0.25L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{0.75L} & \frac{2EI}{0.75L} & 0 \\ \frac{2EI}{0.75L} & \frac{4EI}{0.75L} + \frac{4EI}{0.25L} & \frac{2EI}{0.25L} \\ 0 & \frac{2EI}{0.25L} & \frac{4EI}{0.25L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 771.999 & 385.999 & 0 \\ 385.999 & 3087.996 & 1157.998 \\ 0 & 1157.998 & 2315.997 \end{bmatrix} \frac{\text{Ton} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

$$k^{-1} = \begin{bmatrix} 0.001403283 & -0.00021589 & 0.000107945 \\ -0.00021589 & 0.00043178 & -0.00021589 \\ 0.000107945 & -0.00021589 & 0.000539724 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{Ton} \cdot \text{m}}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003346 \\ 0.001079 \\ -0.003994 \end{bmatrix} \text{rad}$$

Para el elemento 1

$$M_{A1} = \frac{4EI}{0.75L} \cdot \theta_A + \frac{2EI}{0.75L} \cdot \theta_B = 3 \text{Ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{B1} = \frac{2EI}{0.75L} \cdot \theta_A + \frac{4EI}{0.75L} \cdot \theta_B = 2.125 \text{Ton} \cdot \text{m}$$

$$F_{A1} = \frac{6EI}{0.75L^2} \cdot \theta_A + \frac{6EI}{0.75L^2} \cdot \theta_B = 0.37963 \text{Ton}$$

$$F_{B1} = \frac{6EI}{0.75L^2} \cdot \theta_A + \frac{-6EI}{0.75L^2} \cdot \theta_B = -0.37963 \text{Ton}$$

Para el elemento 2

$$M_{A2} = \frac{4EI}{0.25L} \cdot \theta_B + \frac{2EI}{0.25L} \cdot \theta_C = -2.125 \text{Ton} \cdot \text{m}$$

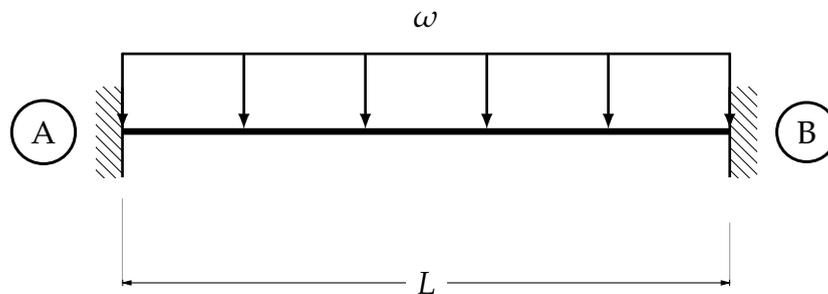
$$M_{B2} = \frac{2EI}{0.25L} \cdot \theta_B + \frac{4EI}{0.25L} \cdot \theta_C = -8 \text{Ton} \cdot \text{m}$$

$$F_{A2} = \frac{6EI}{0.25L^2} \cdot \theta_B + \frac{6EI}{0.25L^2} \cdot \theta_C = -2.25Ton$$

$$F_{B2} = \frac{6EI}{0.25L^2} \cdot \theta_B + \frac{-6EI}{0.25L^2} \cdot \theta_C = 2.25Ton$$

**Ejercicio** Ahora se calcularán los momentos de empotramiento de dos vigas doblemente empotradas, con el objeto de demostrar como es que se obtienen dichos valores en las tablas que se presentan en cualquier libro de análisis estructural, de manera similar se pueden obtener los valores con diferentes tipos de cargas y diferentes tipos de apoyo en vigas continuas.

**Fig. 115** Momento de empotramiento de una barra doblemente empotrada con una carga uniforme



Por simple inspección se puede deducir el valor de las reacciones verticales, pero se calcularán por suma de fuerzas. Las reacciones horizontales son nulas, dado que no hay fuerzas actuando en el eje  $x$ . Entonces haciendo sumatoria:

$$\sum F_y = 0$$

$$RVA - \frac{\omega L}{2} = 0$$

$$RVA = \frac{\omega L}{2}$$

Para los momentos no es tan sencillo, para calcularlos se usará el método de la doble integral, es posible usar cualquier método para calcular deformaciones en estructuras isostáticas, también se apoyará en suposiciones teóricas.

Primero, dado que la viga es simétrica, se sabe que los momentos, así como las reacciones verticales son simétricos, entonces se hace un corte por la mitad a la viga.

Realizado dicho corte, se observa que se queda una viga empotrada. Realizando un corte a una distancia  $x$  del claro de la viga se calcula la ecuación de momento:

$$\sum M_A = 0 + \circlearrowleft$$

$$M = M_A - \frac{\omega Lx}{2} + \frac{\omega(L-x)^2}{2}$$

Integrando una vez

$$EI\theta = Mx - \frac{\omega Lx^2}{4} + \frac{\omega(L-x)^3}{6} + C_1$$

Estableciendo las condiciones de frontera, se sabe que cuando  $x = 0$ , debido al apoyo la deformación es nula  $\theta_A = 0$  entonces:

$$EI\theta = Mx - \frac{\omega Lx^2}{4} + \frac{\omega(L-x)^3}{6}$$

Recordando que la deformación de los giros está relacionada con los momentos, así que se calcula el giro a la mitad del claro de la viga

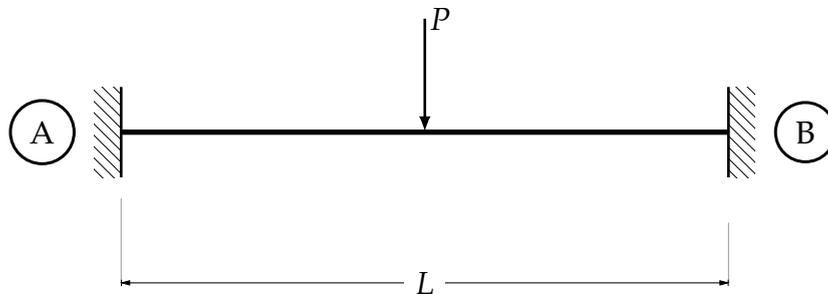
$$\frac{ML}{2} - \frac{\omega L^3}{16} + \frac{\omega L^3}{48} = 0$$

$$M = \frac{\omega L^2}{12}$$

Y por simetría:

Calcular las reacciones de la siguiente estructura.

**Fig. 116** Momento de empotramiento de una barra doblemente empotrada con una carga puntual al centro del claro



Como en el ejemplo anterior se pueden calcular las reacciones verticales de la estructura, las reacciones horizontales son nulas. Entonces:

$$\sum F_Y = 0$$

$$RVA = \frac{P}{4}$$

Utilizando el método de la doble integral, se calcula la ecuación de momentos.

$$M = M - \frac{Px}{4}$$

Integrando

$$EI\theta = Mx - \frac{Px^2}{8} + C_1$$

Estableciendo las condiciones de frontera, se sabe que cuando  $x = 0$  el giro es nulo, dado que en es punto existe un empote, por lo que  $\theta = 0$ . Entonces:

$$EI\theta = Mx - \frac{Px^2}{8}$$

Calculando el giro a la mitad del claro de la viga:

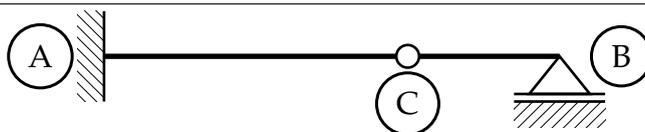
$$\frac{ML}{2} + \frac{PL^2}{16} = 0$$

$$M = -\frac{PL}{8}$$

## A. Vigas Gerber.

Las *vigas Gerber*, bautizadas así en honor al ingeniero alemán Heinrich Gottfried Gerber (1832 – 1912), son estructuras que se diferencian de las demás vigas, como las empotradas o las simplemente apoyadas, por la utilización de articulaciones dentro de los claros de dicha estructura, pero que por estaticidad siguen siendo isostáticas, por lo que con las ecuaciones de equilibrio es posible resolverlas, pero debido a la existencia de articulaciones el método de resolución es un poco diferente al que se sigue con las vigas más “comunes”. Debido a que en el método de la viga conjugada, al cambiar el sistema de apoyos de la viga real, es posible que la viga conjugada sea una viga Gerber, en el presente apéndice se realizará un pequeño repaso sobre la resolución de este tipo de vigas, puesto que el autor lo considera importante, en vista de que es escasa la bibliografía que aborda este tipo de vigas y de la importancia de ser capaz de resolverlas cuando se presenta este singular sistema de apoyos, sobre todo en el método de cálculo de deformaciones antes mencionado.

Como ya se mencionó antes, este tipo de vigas soluciona el problema de las vigas continuas, que son las vigas que tienen varios claros y que son, normalmente hiperestáticas, con la existencia de articulaciones. Para comprobar la estaticidad de las viga Gerber veamos algunos ejemplos.



En la viga anterior se solucionó que la viga fuera Hiperestática colocando una articulación en el punto C, para corroborar lo anterior, se usa la fórmula siguiente:  $(\text{reacciones} - \text{articulaciones}) - \text{incognitas} = \text{Grado de estaticidad}$ ,  $(4 - 1) - 3 = 0$  Estructura hiperestática. Por lo tanto es posible resolverla con ayuda de las ecuaciones de la estática.

En la siguiente viga, que originalmente era una viga continua, se solucionó la hiperestaticidad grado 2, colocando dos articulaciones en el claro central

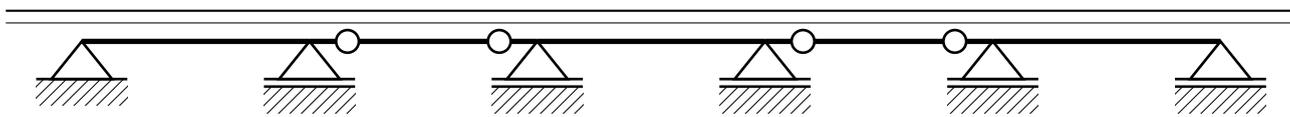


Otra variante de la viga anterior es colocar las articulaciones al centro.

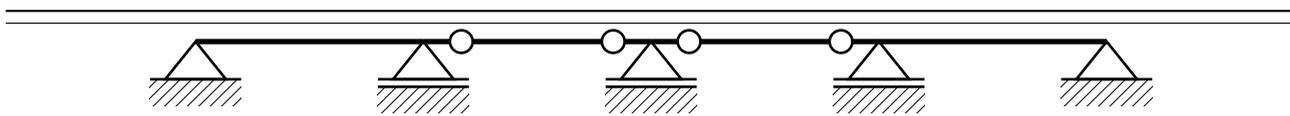


Aplicando la fórmula para afirmar lo dicho anterior,  $(5 - 2) - 3 = 0$  Con lo que queda comprobado que es posible resolverla con las ecuaciones de la estática.

De esta manera es posible continuar la viga todos los claros que se deseen, cuidando la posición de las articulaciones. Por ejemplo.

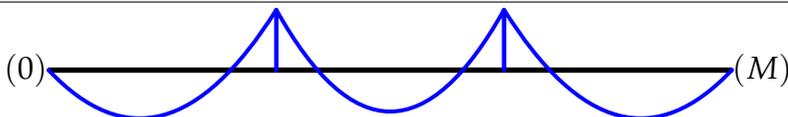
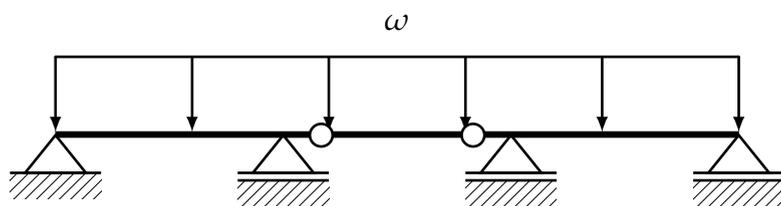


En estas circunstancias se debe cuidar que en la distribución de las articulaciones no se presente ningún tipo de inestabilidad, por ejemplo, sólo se puede colocar máximo dos articulaciones en un claro. Se considera que el número de articulaciones que permite una viga Gerber es el número de claros que salva menos uno, esto depende de el sistema de apoyos ya que depende del tipo de apoyos. Por ejemplo.



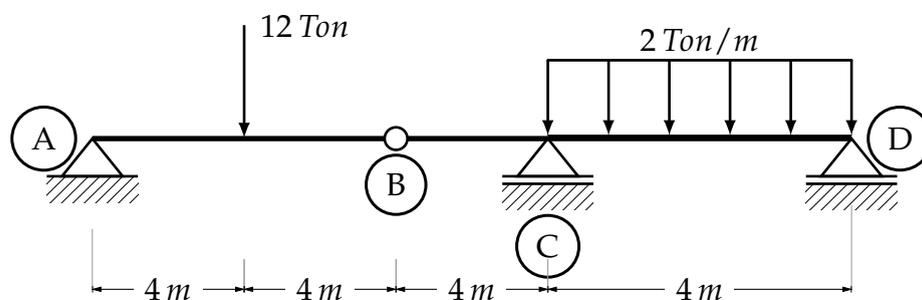
En dónde todos los apoyos son fijos y permiten este acomodo de articulaciones, con dos claros articulados consecutivos, sin presentar ningún tipo de inestabilidad.

Por su condición de articulación, éstas pueden rotar, debido a que no restringen momentos, pero sí transmiten cortantes, dada esta información, es posible establecer las bases para lograr que la estructura se mantenga de la manera deseada desde un punto de vista ingenieril. El comportamiento ideal para no comprometer su funcionalidad es que el eje del elemento se mantenga recto, por lo que las articulaciones no deben girar, y esto se logra considerando que en los puntos donde se encuentran las articulaciones los momentos deberán ser nulos<sup>34</sup>. De esta manera se garantiza que las articulaciones no girarán, además de que es la pauta para poder resolver la viga numéricamente, aunque como se menciono anteriormente, sí transmitirán cortantes. Mencionadas estas condiciones es factible resolver una viga Gerber. Para ilustrar esto se dibujará el diagrama de momentos de una viga Gerber, sin ningún tipo de inestabilidad y completamente isostática.



**Ejemplo (1)** Resolver la siguiente estructura.

<sup>34</sup> Si llegase a existir algún giro pequeño en las articulaciones, inducido o no, estos se consideran despreciables



Las reacciones correspondientes a los apoyos de la estructura mostrada se pueden calcular aplicando las ecuaciones de la estática a cada tramo rígido de la viga, esto es, de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BD}$ . Debido a la continuidad de la viga original, en la articulación del punto B se obtendrá una reacción, que equivale al cortante que se transmite en este punto, y que según la tercera Ley de Newton, para el otro segmento de la viga será de sentido diferente.

Haciendo sumatoria de momentos en el punto B del segmento  $\overline{BA}$

$$\sum M_B^{\overline{BA}} = 0 \quad + \curvearrowright$$

$$RVA(8) - 12(4) = 0$$

$$RVA = 6 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y^{\overline{AB}} = 0 \quad + \uparrow$$

$$6 - 12 + B_y = 0$$

$$B_y = 6 \text{ Ton}$$

Para la otra parte de la viga

$$\sum M_D^{\overline{DB}} = 0 \quad + \curvearrowright$$

$$-6(12) + RVC(8) - 16(4) = 0$$

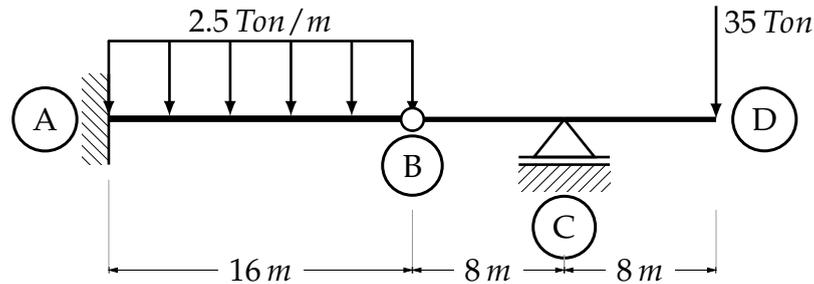
$$RVC = 17 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y^{\overline{BD}} = 0 \quad + \uparrow$$

$$-6 + 17 - 16 + RVD = 0$$

$$RVD = 5 \text{ Ton}$$

**Ejemplo (2)** Calcular las reacciones de la siguiente estructura.



Haciendo sumatoria de momentos en el punto B

$$\sum M_B^{\overline{BD}} = 0 \quad + \odot$$

$$-35(16) + R_{VC}(8) = 0$$

$$R_{VC} = 70$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en Y en el tramo de B a D

$$\sum F_y^{\overline{BD}} = 0 \quad + \uparrow$$

$$-35 + 70 + B_y = 0$$

$$B_y = -35 \downarrow$$

Haciendo sumatoria de momentos en A del tramo A a B

$$\sum M_A^{\overline{AB}} = 0 \quad + \odot$$

$$M_A + 35(16) - 40(8) = 0$$

$$M_A = -240 \odot$$

Realizando sumatoria de fuerzas en Y en el tramo de A a B

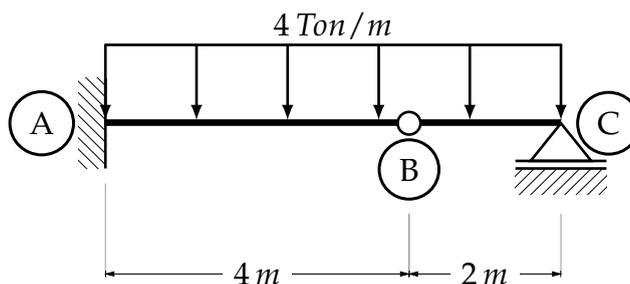
$$\sum F_y^{\overline{AB}} = 0 \quad + \uparrow$$

$$R_{VA} - 40 + 35 = 0$$

$$R_{VA} = 5$$

De este modo queda la estructura resuelta, sólo utilizando las ecuaciones que la estática brinda.

**Ejemplo (3)** Calcular las reacciones de la siguiente viga articulada, así como dibujar sus respectivos diagramas de esfuerzos.



Realizando sumatoria de momentos en el punto B hacia el punto C y siguiendo con el método.

$$\sum M_B^{\overline{BC}} = 0 \quad + \curvearrowright$$

$$RVC(2) - 8(1) = 0$$

$$RVC = 4 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y^{\overline{BC}} = 0$$

$$B_y - 8 + 4 = 0$$

$$B_y = 4 \uparrow$$

$$\sum M_A^{\overline{AB}} = 0 \quad + \curvearrowright$$

$$M_A - 16(2) - 4(4) = 0$$

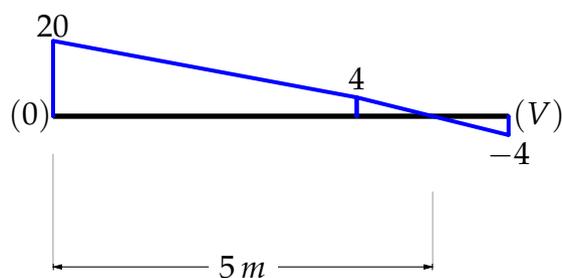
$$M_A = 48 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y^{\overline{AB}} = 0 \quad + \uparrow$$

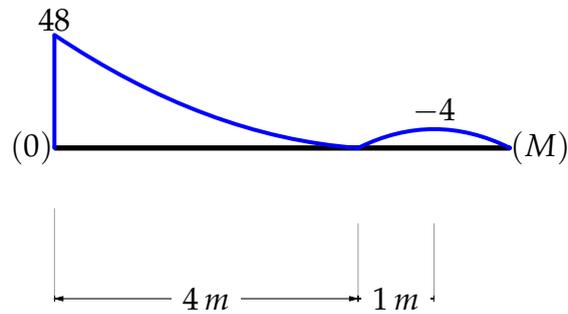
$$-16 - 4 + RVA = 0$$

$$RVA = 20 \text{ Ton}$$

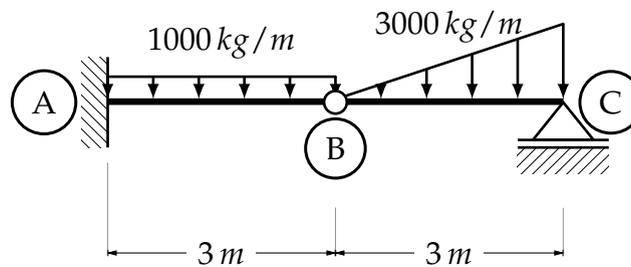
Dibujando el diagrama de cortante.



Ahora el diagrama de momentos flexionantes.



**Ejemplo (4)** Obtener las reacciones de la siguiente viga Gerber y dibujar los esfuerzos que en ella actúan.



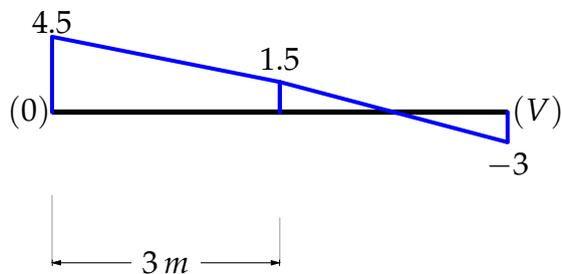
$$\begin{aligned}\sum M_B^{\overline{BC}} &= 0 + \odot \\ -4.5(2) + R_{VC}(3) &= 0 \\ R_{VC} &= 3 \uparrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y^{\overline{BC}} &= 0 \\ -4.5 + 3 + B_y & \\ B_y &= 1.5 \uparrow\end{aligned}$$

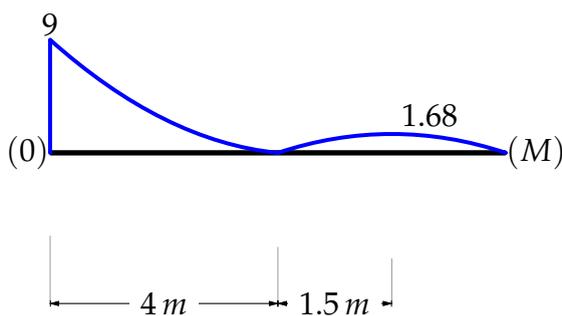
$$\begin{aligned}\sum M_A^{\overline{AB}} &= 0 \\ -1.5(3) - 3(1.5) + M_A &= 0 \\ M_A &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y^{\overline{AB}} &= 0 \\ -1.5 - 3 + R_{VA} &= 0 \\ R_{VA} &= 4.5 \uparrow\end{aligned}$$

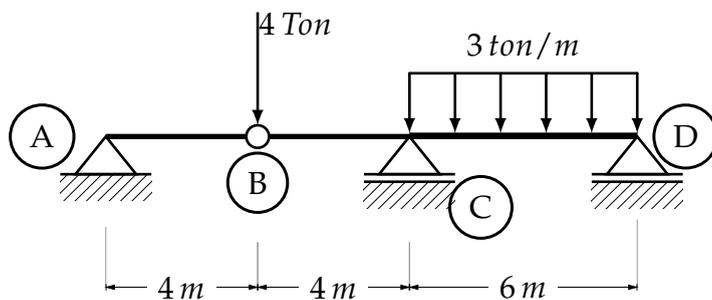
Realizando el diagrama de esfuerzos cortantes de la viga, se tiene.



Para los esfuerzos de momento.



**Ejemplo (4)** Se tiene la siguiente estructura, obtener los diagramas de esfuerzos.



$$\sum M_M^{\overline{BA}} = 0$$

$$RVA = 0$$

$$\sum F_y^{\overline{BA}} = 0$$

$$0 - 4 + B_y = 0$$

$$B_y = 4$$

$$\sum M_D^{\overline{DB}} = 0$$

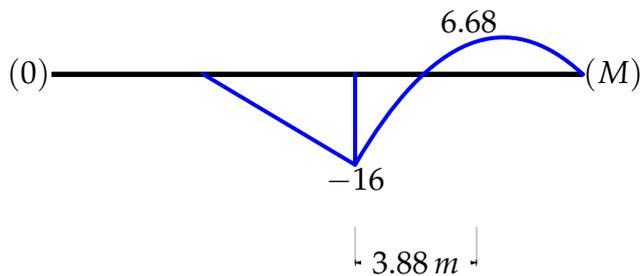
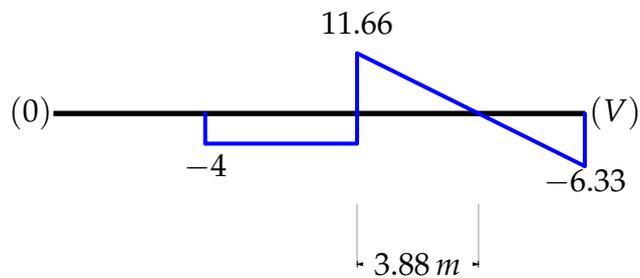
$$-4(10) + RVC(6) - 18(3) = 0$$

$$RVC = \frac{47}{3}$$

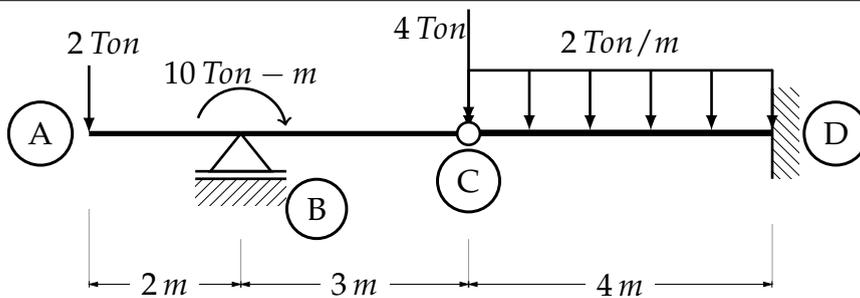
$$\sum F_y^{\overline{DB}} = 0$$

$$RVD = \frac{19}{3}$$

Los diagramas obtenidos, con base en las reacciones de la viga son los siguientes:



**Ejemplo (5)** Dada la siguiente estructura, resolverla con las ecuaciones de la estática.



Escogiendo el punto A para realizar sumatoria de momentos, se continúa con el método.

$$\sum M_C^{\overline{CA}} = 0$$

$$-2(5) + 10 + RVB(3) = 0$$

$$RVB = 0$$

$$\sum F_y^{\overline{CA}} = 0$$

$$-2 - 4 + C_y = 0$$

$$C_y = 6$$

$$\sum M_D^{\overline{DC}} = 0$$

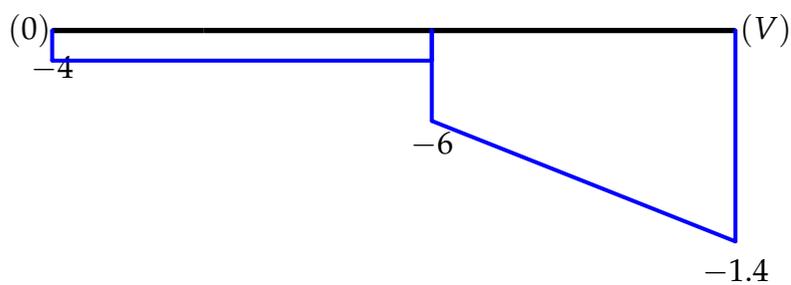
$$-6(4) - 8(2) + M_D = 40$$

$$M_D = 40$$

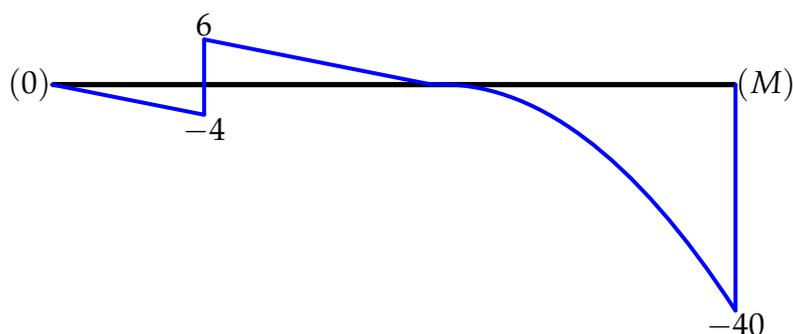
$$\sum F_y^{\overline{DC}} = 0$$

$$RVD = 14$$

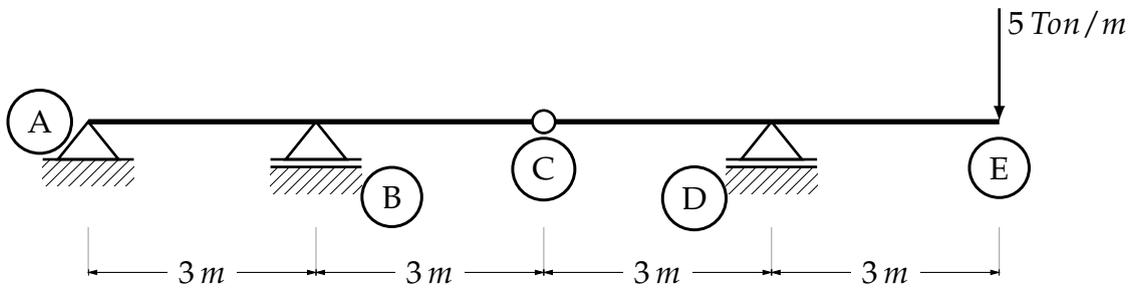
Dibujando los diagramas de cortante, haciendo énfasis en los puntos máximos.



De igual manera el diagrama de momentos.



**Ejemplo (6)** Se tiene la siguiente estructura, obtener los picos de los diagramas de cortante, así como los de momento flexionante.



Haciendo suma de momentos en C, y aplicando las ecuaciones de la estática.

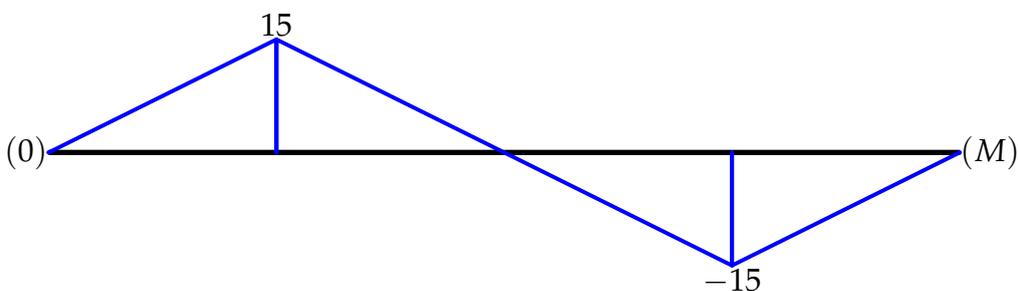
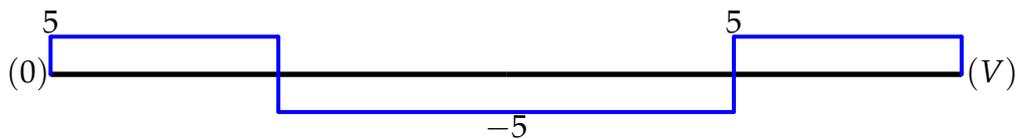
$$\begin{aligned} \sum M_C^{\overline{CE}} &= 0 + \circlearrowleft \\ RVD(5) - 5(6) &= 0 \\ RVD &= 0 \end{aligned}$$

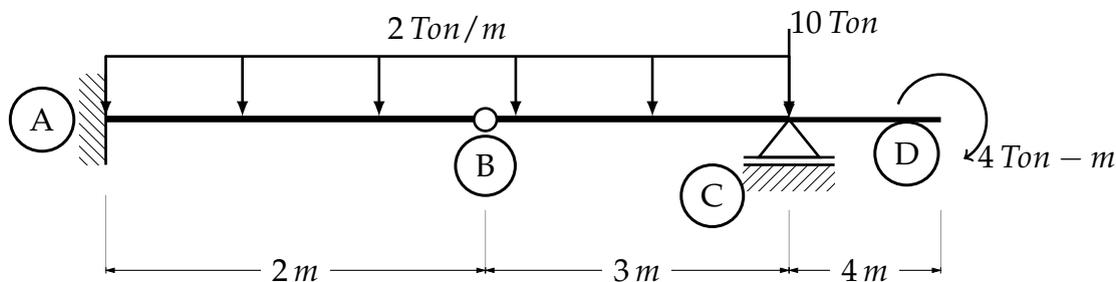
$$\begin{aligned} \sum F_y^{\overline{CE}} &= 0 \\ C_y + 10 - 5 &= 0 \\ C_y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A^{\overline{AC}} &= 0 \\ RVB(3) - 5(6) &= 0 \\ RVB &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y^{\overline{AC}} &= 0 \\ 5 + 10 + RVA &= 0 \\ RVA &= 5 \end{aligned}$$

Dibujando el diagrama de cortantes, se observa como la articulación transmite cortantes pero no momentos, esto queda demostrado en el siguiente diagrama.





**Ejemplo (7)** Dada la siguiente viga Gerber bajo diferentes tipos de cargas, construir los diagramas de esfuerzos para obtener los picos.

$$\sum M_B^{\overline{BD}} = 0 + \odot$$

$$-8(2) + R_{VC}(4) - 10(4) - 4 = 0$$

$$R_{VC} = 15 \uparrow$$

$$\sum F_y^{\overline{AD}} = 0$$

$$R_{VA} - 18 - 10 + 15 = 0$$

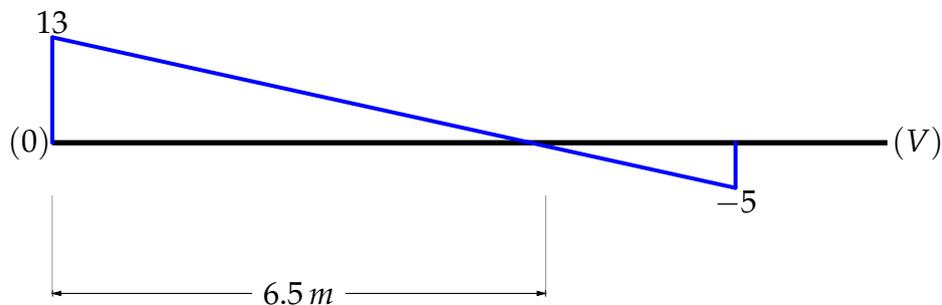
$$R_{VA} = 13 \uparrow$$

$$\sum M_A^{\overline{AD}} = 0$$

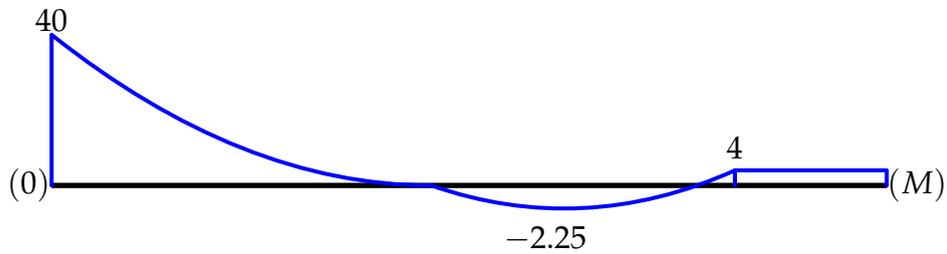
$$M_A - 18(4.5) - 10(9) + 15(9) - 4 = 0$$

$$M_A = 40$$

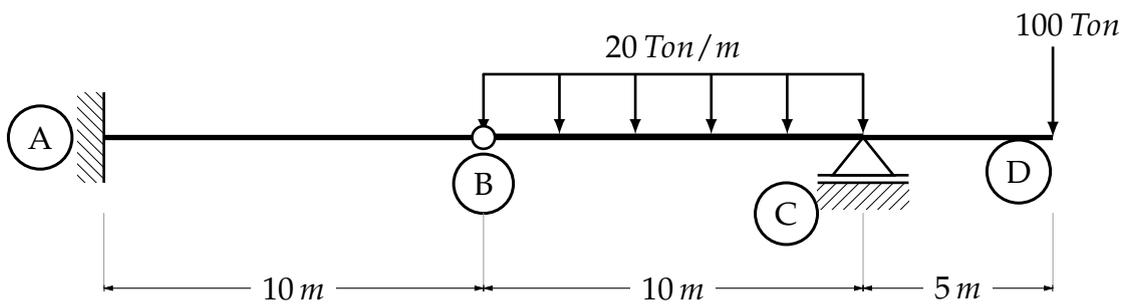
Construyendo el diagrama de cortantes y calculando la longitud donde el cortante es cero.



Para los esfuerzos de momento flexionantes.



**Ejemplo (8)** Resolver la siguiente estructura.



$$\sum M_B^{\overline{BD}} = 0$$

$$-200(5) + R_{VC}(10) - 100(15) = 250$$

$$F_y^{\overline{BD}} = 0$$

$$R_{VA} - 200 + 250 - 100 = 0$$

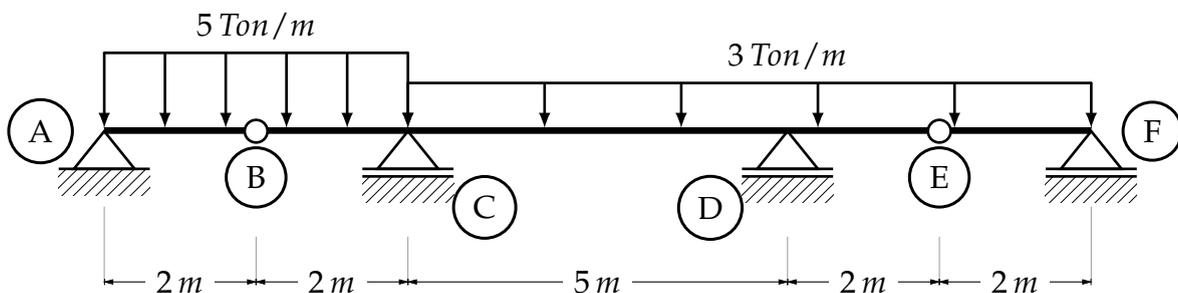
$$R_{VA} = 50$$

$$\sum M_A^{\overline{AD}} = 0$$

$$M_A - 200(15) + 250(20) - 100(25) = 0$$

$$M_A = 500$$

**Ejemplo (9)** Dada la siguiente viga Gerber bajo diferentes cargas, resuelva se, de dos métodos diferentes para demostrar las reacciones obtenidas.



Por el primer método.

$$\begin{aligned}\sum M_B^{\overline{BA}} &= 0 + \circlearrowleft \\ -RVA(2) + 10(1) &= 0 \\ RVA &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y^{\overline{AB}} &= 0 \\ 5 - 10 + B_y &= 0 \\ B_y &= 5\end{aligned}$$

Dónde  $B_y$  es la reacción de la articulación.

$$\begin{aligned}\sum M_E^{\overline{EF}} &= 0 \\ -6(1) + RVF(2) &= 0 \\ RVF &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y^{\overline{FE}} &= 0 \\ -6 + 3 + E_y &= 0 \\ E_y &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_C^{\overline{BE}} &= 0 \\ 5(2) + 10(1) - 21(3.5) + RVD(5) - 3(7) &= 0 \\ RVD &= 14.9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y^{BE} &= 0 \\ -5 - 10 + RVC - 21 - 3 + 14.9 &= 0 \\ RVC &= 24.1\end{aligned}$$

Método alternativo.

$$\begin{aligned}\sum M_B^{\overline{BA}} &= 0 \\ -RVA(2) + 10(1) &= 0 \\ RVA &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_E^{\overline{EF}} &= 0 \\ -6(1) + RVF(2) &= 0 \\ RVF &= 3\end{aligned}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$-5(9) + 20(7) - RVC(5) + 27(.5) + 3(4) = 0$$

$$RVC = 24.1$$

$$\sum F_y = 0$$

$$5 - 20 - 27 + 24.1 + RVD + 3 = 0$$

$$RVD = 14.9$$

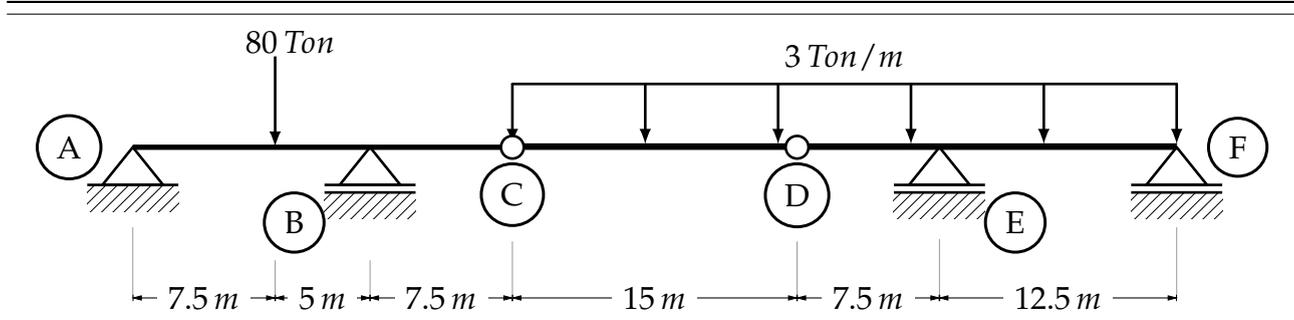
$$\sum M_C = 0$$

$$-5(4) + 20(2) + 27(4.5) + RVD(5) + 3(9) = 0$$

$$RVD = 14.9$$

Como se demostró, es posible obtener las reacciones de una viga articulada de diferentes maneras, ya sea haciendo sumatoria de momentos directamente en las articulaciones, o considerando reacciones en estas, que son en realidad el cortante que las articulaciones transmiten debido a la continuidad de la viga.

**Ejemplo (10)** Resolver la siguiente viga Gerber, realizando sumatoria de momentos en las articulaciones, y comprobar resultados planteando un sistema de ecuaciones.



$$\sum M_C^{\overline{CD}} = 0$$

$$D_y = 22.5$$

$$\sum F_y = 0$$

$$C_y = 22.5$$

$$\sum M_F^{\overline{FD}} = 0$$

$$RVE = 84$$

$$\sum F_y^{\overline{FD}} = 0$$

$$RVF = -1.5 \quad \downarrow$$

$$\sum M_A^{\overline{AC}} = 0$$

$$RVB = 84$$

$$\sum F_y^{\overline{AC}} = 0$$

$$RVA = 18.5$$

Método alternativo.

$$\sum M_C^{\overline{AC}} = 0$$

$$-RVA(20) + 80(12.5) - RVB(22.5) + 45(7.5) = 0$$

$$20RVA + 7.5RVB = 1000$$

$$\sum M_D^{\overline{AD}} = 0$$

$$-RVA(35) + 80(27.5) - RVB(22.5) + 45(7.5) = 0$$

$$35RVA + 22.5RVB = \frac{5075}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se obtuvo.

$$8RVA + 3RVB = 400$$

$$14RVA + 9RVB = 1015$$

Se obtiene.

$$RVA = 18.5 \quad RVB = 84$$

$$\sum M_D^{\overline{DF}} = 0$$

$$RVF(20) + RVE(22.5) - 105(17.5) = 0$$

$$20RVF + 7.5RVE = 600$$

$$\sum M_C^{\overline{CF}} = 0$$

$$RVF(35) + RVE(22.5) - 105(17.5) = 0$$

$$35RVF + 22.5RVE = \frac{3675}{2}$$

De los cálculos anteriores

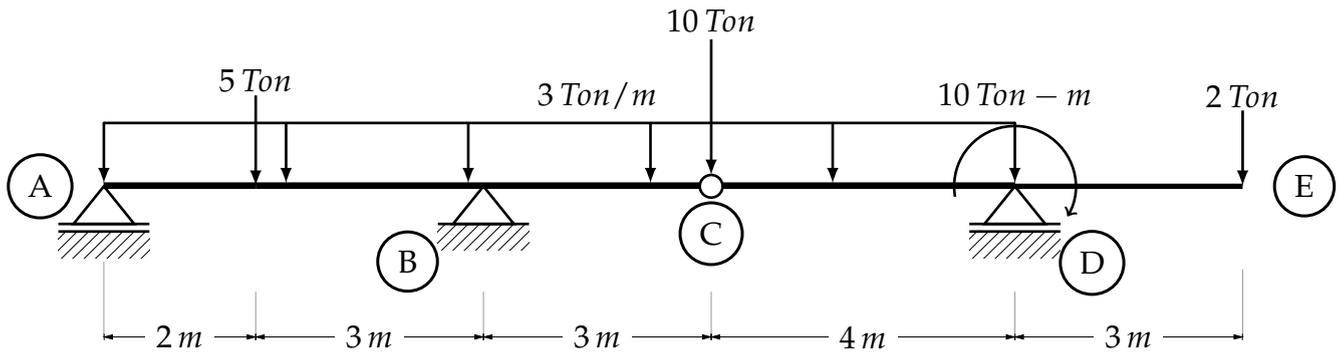
$$RVF + \frac{3RVE}{8} = 30$$

$$17.5RVF + \frac{45RVE}{4} = \frac{3675}{4}$$

Resolviendo se obtiene

$$RVF = -1.5 \quad RVE = 84$$

**Ejemplo (11)** Resolver la siguiente estructura, con la configuración de cargas que se muestra en la figura siguiente.



$$\sum M_C^{\overline{CE}} = 0 \quad + \circlearrowleft$$

$$RVD = 12$$

$$\sum F_y^{\overline{CE}} = 0$$

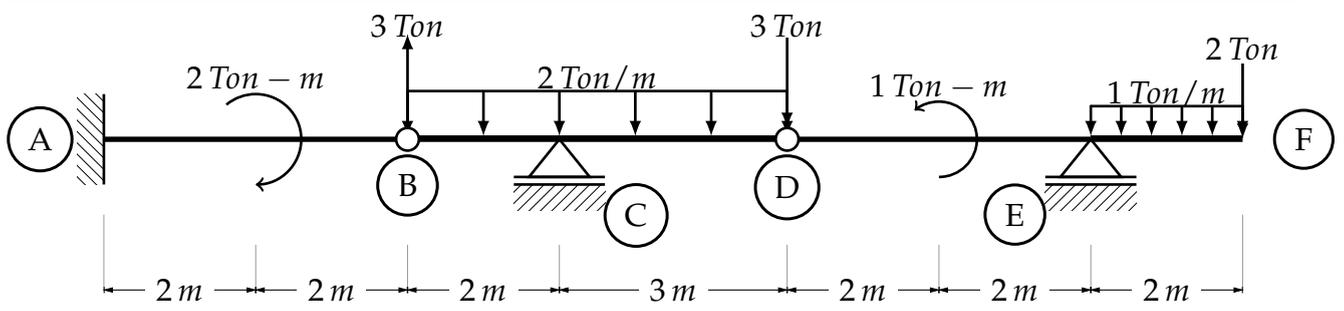
$$\sum M_A^{\overline{AC}} = 0$$

$$RVB = 40.4$$

$$\sum F_y^{\overline{AC}} = 0$$

$$RVA = 0.6$$

**Ejemplo(12)** Resolver la siguiente viga Gerber.



$$\sum M_D^{\overline{DF}} = 0 \quad + \circlearrowleft$$

$$RVE = \frac{21}{4}$$

$$\sum F_y^{\overline{DF}}$$

$$D_y = \frac{5}{4}$$

$$\sum M_B^{\overline{BD}}$$

$$RVC = \frac{75}{8}$$

$$\sum F_y^{\overline{BD}} = 0$$

$$B_y = -\frac{5}{4}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A = -\frac{1}{2}$$

$$\sum F_y^{\overline{AB}}$$

$$RVA = -\frac{5}{8}$$

## B. Centroides y Momentos de inercia.

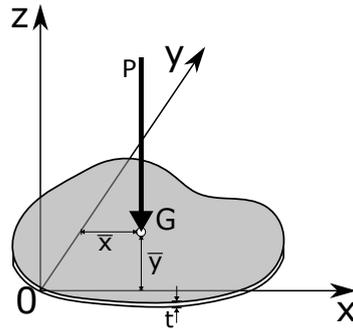
El *centroide* de una figura plana es una cualidad de importancia en las estructuras, debido a que cuando se manejan cargas que no son puntuales, es necesario establecer una carga puntual equivalente, y esta carga se debe aplicar en la coordenada correspondiente, de esta manera es que cuando una carga uniformemente repartida es aplicada en un claro cualquiera, se calcula el *área* de esta, y después se aplica esa carga equivalente, puntual, en la mitad del claro en el que actúa la carga uniforme, ya que, la mitad de la base es la coordenada del centroide de la carga en el eje  $x$ , que por lo general es el eje perpendicular al eje de las cargas en vigas. A medida que las cargas aumentan de complejidad, aumenta la complejidad de calcular el área de la carga así como de obtener las coordenadas de su centroide. Otro aspecto importante de las propiedades geométricas con las que se trabaja en las estructuras, son las formas de los elementos estructurales que comúnmente se utilizan, independientemente del material, como el llamado *modulo de sección* y los *momentos de inercia*, de los que se hablará posteriormente. Debe dejarse bien claro que aunque por lo general sólo se enseñan las características geométricas en figuras planas, de igual manera existen tales características en líneas o volúmenes, y que no son exclusivas de superficies.

### Centro de gravedad.

El *centro de gravedad* es un punto geométrico dónde se coloca el vector equivalente del peso  $P$ . La placa está formada por partículas las cuales tienen un peso propio, que dependen directamente de la densidad del material. A cada una de las partículas que forman la placa, debido a su peso, la Tierra ejerce una atracción sobre estas, resultando  $n$  vectores paralelos

$(\Delta P_n)$ , entonces el centro de gravedad es el punto de aplicación, de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , de un vector equivalente a la suma de todas estas fuerzas.

Fig. 117 Centro de gravedad



Por lo que

$$P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n$$

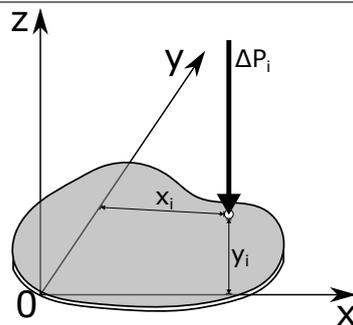
El momento producido por la fuerza  $P$ , es

$$M_y = \bar{x}P$$

$$M_x = \bar{y}P$$

Siendo  $(\bar{x}, \bar{y})$  las coordenadas del centroide geométrico de la placa. El centro de gravedad coincide con el centro de masa y con el centroide de área de la placa, si, y solo si, esta fue fabricada de un mismo material homogéneo y su espesor ( $t$ ) es constante en todo el elemento.

Fig. 118 Centro de gravedad 1



Haciendo sumatoria de momentos con respecto al eje  $y$

$$M_y = \Delta P_i x_i$$

Con respecto al eje  $x$

$$M_x = \Delta P_i y_i$$

Ahora para todas las partículas

$$\sum M_y : \bar{x}P = x_1 \Delta P_1 + x_2 \Delta P_2 + \dots + x_n \Delta P_n$$

$$\sum M_x : \bar{y}P = y_1\Delta P_1 + y_2\Delta P_2 + \dots + y_n\Delta P_n$$

Como el termino  $\Delta P$  es constante, entonces se puede escribir la ecuación anterior de esta otra forma

$$\bar{x}P = \sum_{i=1}^n x_i\Delta P \quad \text{Y} \quad \bar{y}P = \sum_{i=1}^n y_i\Delta P$$

Si las partículas en las que se divide el elemento placa son de un número infinito, entonces,  $n \rightarrow \infty$ , las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera

$$P = \int_P dP$$

$$\bar{x}P = \int_P x dP \quad \text{Y} \quad \bar{y}P = \int_P y dP$$

De igual manera es posible encontrar las ecuaciones previas para un alambre que se encuentra en el plano, tomando en consideración que el centro de gravedad de un alambre, generalmente se encuentra fuera del mismo.

Fig. 119 Centro de gravedad de un alambre

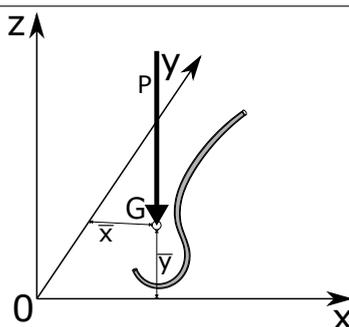
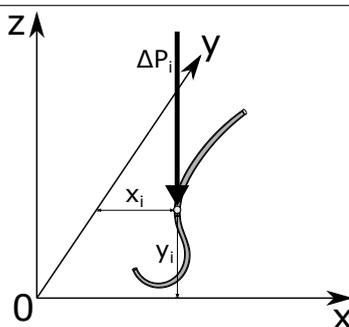


Fig. 120 Centro de gravedad de un alambre1



$$\bar{x}P = \int_P x dP \quad \text{Y} \quad \bar{y}P = \int_P y dP$$

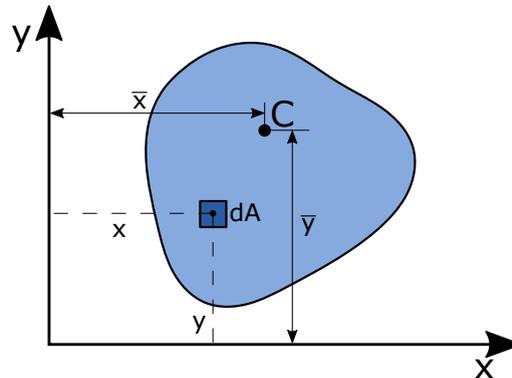
### Centroides.

De las ecuaciones para calcular las coordenadas del centro de gravedad

$$\bar{x}P = \sum_{i=1}^n x_i \Delta P \quad Y \quad \bar{y}P = \sum_{i=1}^n y_i \Delta P$$

Si ahora se analiza una superficie cualquiera así mismo como con la placa pero si espesor, cuyo centroide se ubica en las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , y dónde se delimita un diferencial de área  $dA$  con coordenadas particulares  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

Fig. 121 Superficie plana



Para cuando lo que interesa es el área y no el peso, como es el caso de la placa, se sabe que

$$P = \gamma V$$

Dónde:

$P$  = Peso

$\gamma$  = Peso específico del material

$V$  = Volumen

Sustituyendo  $P$  en las ecuaciones del centro de gravedad, considerando que un volumen es una área por un espesor.

$$\bar{x} \gamma t A = \sum_{i=1}^n x_i \Delta \gamma t A$$

Simplificando

$$\bar{x} A = \sum_{i=1}^n x_i \Delta A \quad Y \quad \bar{y} A = \sum_{i=1}^n y_i \Delta A$$

Estas ecuaciones son las mismas para calcular las coordenadas del centro de gravedad pero en vez de estar en función del peso, están en función del área del elemento. Tomando un número infinito de diferenciales de área

$$\bar{x} A = \int_A x \, dA \quad Y \quad \bar{y} A = \int_A y \, dA$$

El área de la superficie se define por la siguiente integral.

$$A = \int_A dA$$

Definida el área de la superficie, es posible obtener los *momentos estáticos* del área o *momentos de primer orden*, con la siguiente integral.

$$S_x = \int_A y \, dA$$

$$S_y = \int_A x \, dA$$

Respectivamente para cada eje. Estos pueden ser positivos, negativos o nulos, cuestión que depende de la posición de los ejes coordenados  $(x, y)$  y tienen unidades de longitud al cubo,  $m^3, cm^3$  o  $mm^3$  etc. Los momentos estáticos son utilizados en el diseño de vigas por esfuerzos cortantes. También es posible escribirlos como

$$S_x = \bar{y}A \quad Y \quad S_y = \bar{x}A$$

Si se mira con atención, las ecuaciones tienen forma de un momento, en este caso es un área por una distancia, es necesario aclarar que un momento no siempre está en función de una fuerza, como normalmente se encuentra en los problemas de ingeniería civil, puede ser como en este caso un área, un volumen, una longitud, una masa, etc..

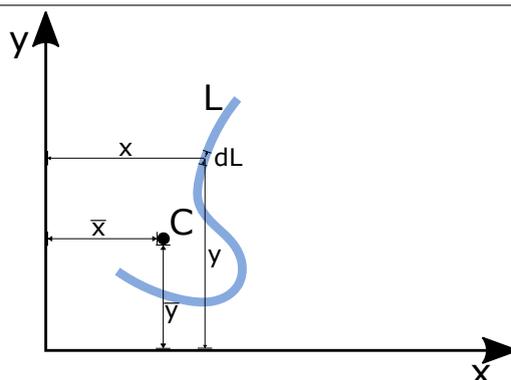
Las ecuaciones para las coordenadas centroidales también se pueden escribir de la siguiente manera.

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA}$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$

De la misma forma es posible obtener las ecuaciones para las coordenadas del centroide, correspondientes a una línea, en dónde a diferencia del alambre, su peso no se considera.

Fig. 122 Centroide de una línea



$$\bar{x}L = \int_L x \, dL \quad Y \quad \bar{y}L = \int_L y \, dL$$

### Momentos de inercia

El *momento de inercia* o *segundo momento de una área*, es una propiedad de las áreas, en este caso específico de las secciones transversales de los elementos estructurales, se debe hacer hincapié en qué, aunque en este trabajo se aborde solo con respecto a áreas, al igual que los centroides, hay momentos de inercia de líneas, volúmenes y masas. El concepto de momento de inercia, como ya se abordó en los temas de este presente trabajo, es muy utilizado en las estructuras, puesto que, representa físicamente, dada una sección transversal de un elemento estructural, una oposición a la flexión. El momento de inercia de una área, se consideran con respecto a cada eje que la contiene, es decir, al rededor del eje  $x$  y al rededor del eje  $y$ .

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

Considerando una viga en la que se encuentra en flexión pura positiva, se sabe que en las fibras más alejadas del eje neutro se encuentran los mayores esfuerzos normales, y que estos son de dos tipos, de compresión y de tensión, también que en el eje neutro no hay esfuerzos, y estos valores varían de forma lineal a medida de que se alejan del eje neutro. Ver la Fig. 124 y Fig.125<sup>35</sup>

Fig. 123 Viga bajo flexión pura

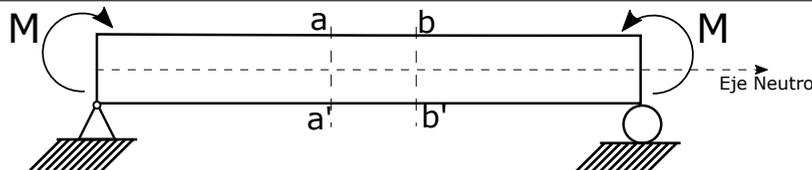
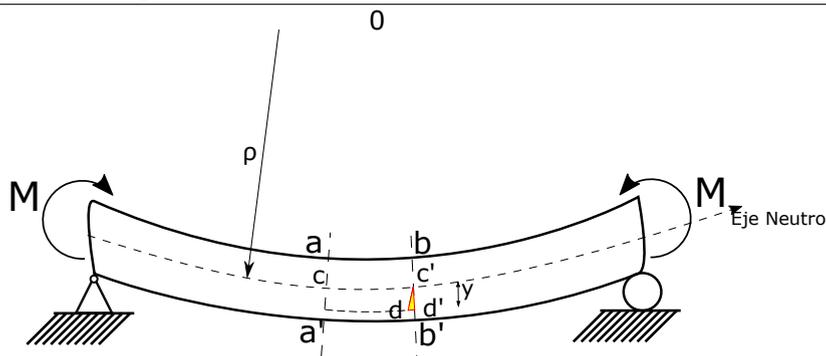


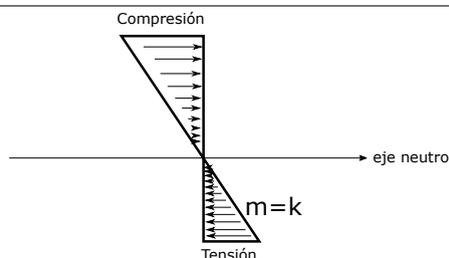
Fig. 124 Viga bajo flexión pura.



Haciendo un corte en la sección y graficando los esfuerzos en la viga, se tiene

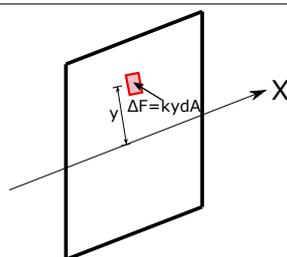
<sup>35</sup> Este tema es complemento de: "Ecuación diferencial para la deflexión en vigas", a este remito al lector.

**Fig. 125** Esfuerzos en la viga.



Como se sabe, los esfuerzos varían linealmente, donde  $k$  es la pendiente de los esfuerzos normales de la sección de la viga y se conoce como una constante de proporcionalidad. En la siguiente figura se representa una diferencial de área en la que actúa una fuerza.

**Fig. 126** Resultante de esfuerzos.



Dichas fuerzas van en la dirección longitudinal del elemento, y haciendo una sumatoria de fuerzas en toda el área, se tiene:

$$R = \int ky \, dA$$

Sacando la constante de la ecuación

$$R = k \int y \, dA$$

Como es evidente la sumatoria de fuerzas es igual a cero, por equilibrio, pero estas fuerzas generan un momento flector, entonces

$$\Delta M_x = y \Delta F$$

Sustituyendo el valor de  $\Delta F$  e integrando

$$M_x = k \int y^2 \, dA$$

Entonces:

$$I_x = \int y^2 \, dA$$

Realizando el mismo procedimiento al rededor del eje  $y$  se obtiene la ecuación del momento de inercia al rededor del eje  $y$ .

Como ya se mencionó, el concepto es ampliamente utilizado en el análisis estructural, así como en el diseño, de ahí su importancia en el coeficiente de rigidez a flexión  $EI$ . Se

debe tomar en cuenta que se está tratando con secciones constantes en toda la longitud del elemento, y simétricas, fabricadas con el mismo material.

### Radio de giro

El *radio de giro* es una propiedad geométrica que consiste en encontrar un brazo de palanca que produzca un momento de inercia centroidal con la misma área, y los ejes centroidales originales.

Entonces

$$I_x = r_x^2 A$$

Despejando el radio de giro

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Realizando el mismo proceso se obtiene el radio de giro al rededor del eje  $y$

## Bibliografía.

García, F. M. (1985), *Arcos y bóvedas*, 18 edn, CEAC, Barcelola.

Gere, J. (2006), *Mecánica de materiales*, Thomson.

**URL:** <https://books.google.com.mx/books?id=Q6JYKHrf-CYC>

Kassimali, A. (2014), *Análisis estructural*, quinta edición edn, Cengage Learning.

Laible, J. P. (1988), *Análisis estructural*, McGraw-Hill.

López, A. (1968), *Análisis, cálculo, y diseño de las bóvedas de cáscara*, Compañía Editorial Continental.

**URL:** <https://books.google.com.mx/books?id=6nRYAAAAMAAJ>

Thunnissen, C. (2012), *Bóvedas : su construcción y empleo en la arquitectura*, Textos sobre teoría e historia de las construcciones, Instituto Juan de Herrera.

**URL:** <https://books.google.com.mx/books?id=Oi2OMQEACAAJ>