



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE QUÍMICA

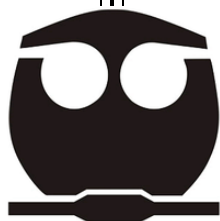
**Transferencia Transitoria de Energía a Través de Paredes
Compuestas**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA

Tiberio Alejandro Rangel Delgado



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Vocal: Dr. Bernardo Carreón Calderón

Secretario: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

1er. Suplente: Dr. Marcos Turcio Cuevas

2do. Suplente: Dr. Alberto Castellanos Campillo

SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA: Departamento de Ingeniería Química de la Facultad de Química de la UNAM.

Asesor del Tema:

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Supervisor Técnico:

Dr. Alberto Castellanos Campillo

Sustentante:

Tiberio Alejandro Rangel Delgado

Contenido

1. Introducción y objetivo	
2. Antecedentes	
2.1 Vectores y valores propios.....	2
2.2 Ecuaciones diferenciales parciales y el método de separación de variables	5
2.3 Conductividad térmica y los mecanismos de transporte de energía	6
2.4 Tipos de régimen.....	8
2.5 Caso base, primera propuesta de solución	9
3. Desarrollo	
3.1 Análisis de la transferencia transitoria con la Ley de Enfriamiento de Newton	13
3.2 Análisis de la transferencia transitoria con dependencia de la posición ..	16
4. Análisis de Resultados	
4.1 Análisis de resultados de la transferencia transitoria a través de paredes compuestas con la Ley de Enfriamiento de Newton.....	37
4.2 Análisis de resultados de la transferencia transitoria a través de paredes compuestas con la Ecuación de Energía	40
5. Conclusiones	46
6. Apéndice	
6.1 Multiplicidad de \mathcal{K} con los valores propios asociados a la distribución de temperatura en el caso 1	48
6.2 Ecuaciones importantes	49
6.3 Códigos de programación en <i>Mathematica</i>	51
7. Bibliografía	

Ilustraciones y Tablas

Ilustración 1. Desarrollo de la distribución de temperatura en estado estacionario para una placa sólida entre dos láminas paralelas.....	6
Ilustración 2. Mecanismos de transporte de energía.....	7
Ilustración 3 Pared compuesta de dos elementos (x,y).....	9
Ilustración 4 Pared compuesta de tres elementos (x,y)	13
Ilustración 5 Pared de un solo componente (x,y,z).....	17
Ilustración 6 Pared de tres componentes (x,y,z).....	26
Tabla 1 Coeficientes de difusión de energía.....	24
Tabla 2 Datos de la pared simulada para el caso 4.....	42

Nomenclatura

Símbolo	Dimensiones	Significado
\mathcal{K}	$1/t$	Constante de proporcionalidad de la Ley de enfriamiento de Newton
λ	L	Longitud de onda en los antecedentes, valores propios de una ecuación para las demás secciones.
ε	ML^2/t^2	Energía de una onda electromagnética.
\mathcal{T}	T	Vector de distribuciones de temperatura
q	M/t^3	Flux de energía en su forma vectorial
τ	M/Lt^2	Tensor de esfuerzos
α	L^2/t	Coefficiente de difusión de energía
k	$1/L^2$	Constante de igualación de ecuaciones en el método de separación de variables
k	ML/t^3T	Conductividad térmica
L	L	Longitud de la pared
H	L	Altura de la pared
W	L	Espesor de la pared
a_n, b_n, c_n	T	Coefficientes de la serie de Fourier
Escalar	Vector	Tensor
a	\mathbf{a}	\mathbf{A}

1 Introducción

Las leyes del universo están escritas, por un lenguaje tan grande como el universo mismo, las matemáticas.

Por supuesto, la Ingeniería Química no es la excepción, también utiliza este lenguaje para dar solución a muchos problemas. En algunos casos los fenómenos naturales se resuelven de manera sencilla, como los fenómenos estáticos, que necesitan un poco de álgebra; sin embargo, los fenómenos más interesantes y en algunos casos muy útiles, implican cambios y dependen de muchas variables, es por ello por lo que se describen mejor a través de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales que relacionen estas variables.

La derivada de una función puede ser considerada como la razón de cambio de una cantidad $y = f(t)$ respecto a la variable independiente t ; entonces es natural que una ecuación que contiene derivadas describa a nuestro universo con sus únicas constantes, el cambio.

El objetivo de escribir y estudiar un fenómeno en el lenguaje de las matemáticas, específicamente, como una ecuación diferencial o un conjunto de ellas, es describir una situación física, para finalmente encontrar un solución adecuada para esa ecuación.

A diferencia del álgebra, en la cual buscamos un conjunto variables que satisfacen una ecuación, al dar solución a una ecuación diferencial buscamos un conjunto de funciones. Generalmente se quiere encontrar todas las funciones de la ecuación diferencial, pero iremos buscando cada función respecto al entendimiento de la física del problema.

En los Fenómenos de Transporte es bien sabido que algunos materiales como los metales conducen la energía fácilmente, mientras que otros como la madera actúan como aislantes térmicos. La propiedad física que describe la rapidez con la que se conduce la energía a través de un material es la conductividad térmica k .

Es aquí cuando las matemáticas describen un fenómeno físico, en este caso es el transporte de energía a través de materiales sólidos y es justamente el tema central de esta tesis.

La Ley de Enfriamiento de Newton es la expresión en lenguaje matemático escrita para describir nuestro fenómeno y está establecida como: La razón de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura de referencia T_A (del ambiente). Considerando que T_A es constante y que el flujo de energía es lo suficientemente rápido, la temperatura T del cuerpo es la misma en todos los puntos del cuerpo para cualquier tiempo t , Esto es:

$$[1] \quad \frac{dT}{dt} = -\mathcal{K}(T - T_A)$$

en la que \mathcal{K} es un valor que se considera constante (positivo) para simplificar el problema, más adelante se verá la razón. La ley física se traduce así en una ecuación diferencial con la que podemos encontrar una expresión para $T(t)$ y con ello poder predecir cómo será la temperatura en el futuro del cuerpo.

En problemas industriales de transferencia de energía a menudo es necesario abordar la difusión a través de paredes hechas de capas de varios materiales, cada uno con su propia conductividad térmica característica, por ello el análisis matemático nos permitirá crear un modelo, que como ya se hizo mención, describa el comportamiento de la temperatura en el tiempo.

Finalmente, para los alcances de esta introducción es importante mencionar que las ecuaciones diferenciales resultantes se resolverán como un problema de valores propios y que un sistema de transferencia de energía a través de paredes compuestas consta de un bloque de diferentes materiales sólidos, con espesor característico, entre dos fluidos con su temperatura definida, cuyo gradiente permite el transporte de energía desde el sólido con mayor temperatura hasta el fluido de menor temperatura. Una vez dicho esto vayamos entonces a tratar de traducir al lenguaje matemático el cambio en el universo.

Objetivo

La información compilada en esta tesis tiene por objetivo modelar un sistema con transferencia transitoria de energía a través de paredes compuestas integrando los conocimientos en Fenómenos de Transporte y Matemáticas Aplicadas para su aplicación en problemas de transferencia de energía en sistemas industriales o de investigación que así lo requieran.

- El primer modelo que se obtendrá es dependiente del tiempo.
- En la segunda parte del trabajo se obtendrá un modelo dependiente del tiempo y la posición.

2 Antecedentes

2.1 Vectores y valores propios

Los valores y vectores propios son muy importantes en la solución y análisis de los sistemas lineales, por esta razón será el método de valores propios para sistemas lineales el que utilizaremos como herramienta en la resolución de nuestro problema de transferencia de energía. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, con coeficientes constantes

$$[2] \quad y'' + 4y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 0 \quad \text{y} \quad y(\pi) = 0$$

Que puede escribirse de forma general como

Ecuación 1

$$y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0$$

Con

$$y(a) = 0 \quad \text{y} \quad y(b) = 0$$

En cuyo caso $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 1$, $a \equiv 0$ y $b \equiv \pi$.

Entonces el número λ es parámetro del problema con valor $\lambda = 4$. Este ejemplo muestra entonces una situación en un problema de valores a la frontera con un parámetro, del cual depende fuertemente la solución, acorde a su valor numérico.

A λ se le llama valor propio o valor característico del problema, de tal manera que la solución $y(x)$ del problema de valores propios es también una función propia (función característica) asociada al valor propio λ .

Para construir la solución de un sistema de n ecuaciones con n funciones desconocidas de la forma:

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\&\vdots \\x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}$$

Sistema 1

Donde los elementos a son números reales; denominado sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de $n \times n$, tenemos que:

Por el teorema de soluciones generales de sistemas homogéneos que dice:

1Teorema 1

“Sean x_1, x_2, \dots, x_n n soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea $x' = P(t)$ sobre algún intervalo abierto I en donde los elementos $p_{ij}(t)$ de $P(t)$ son continuos. Si $x(t)$ es una solución de la ecuación $x' = P(t)x$ sobre I , entonces existen números c_1, c_2, \dots, c_n tales que:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$$

Para toda I .”

Por lo tanto, sabemos que basta obtener n vectores solución linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ y \mathbf{x}_n ; la combinación lineal

Ecuación 2

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

de coeficientes constantes constituye la solución general del sistema, una vez dicho esto es posible suponer la forma de los vectores solución:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \\ \mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

¹ Edwards, C.H. y Penney, D. (1986). Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones. México: Prentice Hall.

Donde λ_n son constantes. Si reescribimos el sistema como $x_i = v_i e^{\lambda t}$ con $i = 1, 2, 3 \dots n$ el factor $e^{\lambda t}$ se cancelará dejando n ecuaciones lineales en las que podemos despejar los coeficientes v_1, v_2, \dots, v_n . Para ello se vuelve necesario expresar nuestro sistema de ecuaciones diferenciales en forma matricial:

Ecuación 3

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Cuyo equivalente en notación de índices sería $\mathbf{x}' = (x'_i)$, $\mathbf{A} = a_{ij} = (a)_{ij}$ y $\mathbf{x} = (x_j)$.

Es visible que este sistema tiene por solución la siguiente expresión:

Ecuación 4

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

Entonces al sustituir la solución en nuestra ecuación diferencial (Ec. 3) el resultado es que cancelamos el factor no nulo $e^{\lambda t}$ para finalmente obtener:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Lo que significa que $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ es una solución no trivial de la ecuación diferencial en su forma matricial; para que se cumpla esto es absolutamente necesario que \mathbf{v} sea un vector no nulo y λ un valor constante, lo que permite que el producto matricial $\mathbf{A}\mathbf{v}$ sea un múltiplo escalar del vector \mathbf{v} . Por lo tanto, para encontrar \mathbf{v} y λ es imperativo reescribir la ecuación anterior en la forma:

Ecuación 5

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

Dado λ , este es un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas en las incógnitas v_1, v_2, \dots, v_n . Por un teorema estándar del álgebra lineal, tendrá una solución lineal y homogénea solamente si el determinante de los coeficientes de la matriz es cero; por lo tanto:

Ecuación 6

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

En general, el método de los valores propios consiste en encontrar los valores propios λ_i que cumplan la ecuación 6 y en seguida la ecuación 5 con este valor, para obtener v_1, v_2, \dots, v_n . Después, $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ será nuestro vector solución.

Derivado de resolver la ecuación 6 se encuentra un polinomio de n raíces denominado ecuación característica de la matriz \mathbf{A} , donde justamente sus raíces constituyen los n valores propios de la matriz.

Es evidente entonces que por el teorema fundamental del álgebra la ecuación característica de la matriz \mathbf{A} de $n \times n$ tendrá también n valores propios, reales o complejos, repetidos o alguna combinación de éstos.

En resumen, el método de valores propios para la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Consiste primero en encontrar la ecuación característica resultante de la ecuación 6, luego resolverla para encontrar los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matriz \mathbf{A} . Posteriormente buscamos los n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ asociados a esos valores propios. Finalmente obtendremos las n soluciones linealmente independientes.

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} \quad , \quad x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t} \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t}$$

Y la solución general será la combinación lineal de las n soluciones.

2.2 Ecuaciones diferenciales parciales y el método de separación de variables

Una de las aplicaciones más importantes de las series de Fourier son la solución de las ecuaciones diferenciales parciales a través del método de separación de variables. Es importante recordar que una ecuación diferencial parcial es aquella que contiene una o más derivadas parciales de una variable dependiente, que es función de al menos dos variables independientes, un ejemplo es la ecuación de difusión de energía en una dimensión

Ecuación 7

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

En la cual la variable dependiente u es una función desconocida de la posición en x y del tiempo t , siendo K una constante positiva dada, que más adelante observaremos que es el coeficiente de difusión de energía α al realizar el balance de energía para nuestro sistema de transferencia.

Para el método de separación de variables que resuelve el problema de valores en la frontera, primero se investigan las funciones de los factores u_1, u_2, u_3, \dots que satisfagan la ecuación 7 y las condiciones homogéneas $u(0, t) = u(L, t) = 0$ con cada una de estas funciones de la forma especial

Ecuación 8

$$[4] \quad u(x, t) = X(x)T(t)$$

En la cual las variables se encuentran "separadas", esto es, cada una de las funciones de los factores es el producto de una función de posición x (únicamente) y una función del tiempo t (solamente). Al sustituir la ecuación 8 en la ecuación 7 se obtiene

$$XT' = KX''T$$

Donde para simplificar la escritura se escribe T' para $T'(t)$ y X'' para $X''(x)$. La división de la ecuación entre KXT resulta en

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT}$$

En este caso se observa que el lado izquierdo de la ecuación 9 es una función solamente de x y por supuesto el lado derecho es una función exclusivamente de t . Si t se mantiene constante en el lado derecho, entonces en el lado izquierdo X''/X deberá permanecer constante conforme varía x . De manera muy similar, si x se mantiene constante del lado izquierdo, entonces el lado derecho T'/KT debe permanecer constante conforme t varía. En consecuencia, esta ecuación sólo es válida si cada una de las expresiones en la igualdad es la misma constante, la cual se representa como $-\lambda$ por conveniencia. Así la ecuación 9 se convierte en

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT} = -\lambda$$

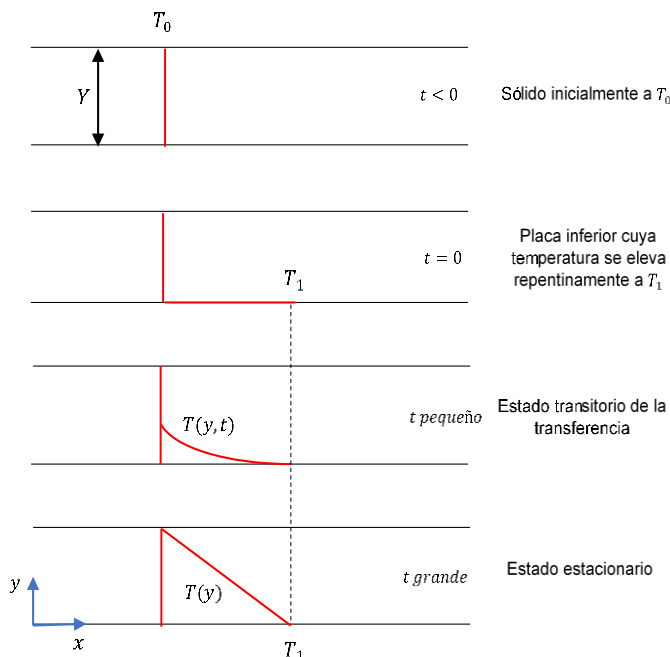
La cual está compuesta de dos ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T'(t) + \lambda KT(t) = 0$$

Por lo que podemos concluir que la función del producto $u(x, t) = X(x)T(t)$ satisface la ecuación 7 si $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen por separado las ecuaciones diferenciales ordinarias dadas en (10) y (11) para algún valor (común) de la constante λ .

2.3 Conductividad térmica y los mecanismos de transporte de energía



(Bird, et al. 2006) en su libro, Fenómenos de Transporte, proponen un ejemplo de una placa de algún material sólido de área A situada entre dos grandes láminas paralelas separadas por una distancia Y , que inicialmente se encuentra a la temperatura T_0 en todas las partes, después en $t = 0$, la cara inferior de la placa se lleva a una temperatura ligeramente superior T_1 , que se mantiene constante. Conforme transcurre el tiempo la distribución de temperatura cambia y

Ilustración 1. Desarrollo de la distribución de temperatura en estado estacionario para una placa sólida entre dos láminas paralelas. Reproducción de la imagen original, pp. 310. (Bird, et al. 2006)

en el estado estacionario se alcanza una distribución lineal; para mantener la diferencia $\Delta T = T_1 - T_0$ es necesario una rapidez constante de flujo de energía Q a través de la lámina, entonces los autores, proponen que la relación matemática que cumple esto para valores lo suficientemente pequeños de ΔT es:

Ecuación 12

$$\frac{Q}{A} = k \frac{\Delta T}{Y}$$

Lo que nos habla de la proporcionalidad entre flux (flujo por unidad de área) de energía y la disminución de temperatura sobre la distancia. A la constante de proporcionalidad k se le conoce como conductividad térmica, en este caso de la placa. Finalmente podemos saber por análisis dimensional que la conductividad térmica tiene unidades de energía por unidad de tiempo, longitud y temperatura, por supuesto es válido pensar que todos los materiales tienen esta propiedad asociada, aunque con diferencias significativas entre estados físicos.

Los mecanismos de transporte de energía constituyen la forma en que la energía se transfiere en un sistema, esto dependerá de la naturaleza del mismo sistema; existen 3, difusión, convección y radiación. La difusión es el transporte molecular de energía puesto que el mecanismo involucra fundamentalmente el contacto de las partículas constituyentes del sistema. La energía también puede transportarse por el movimiento de un fluido y a eso se denomina convección, misma que depende de la densidad del fluido. Finalmente, la energía puede transportarse por medio de la radiación que resulta ser bastante distinto a los otros dos mecanismos porque no requiere de un medio material a diferencia de la difusión y la convección.

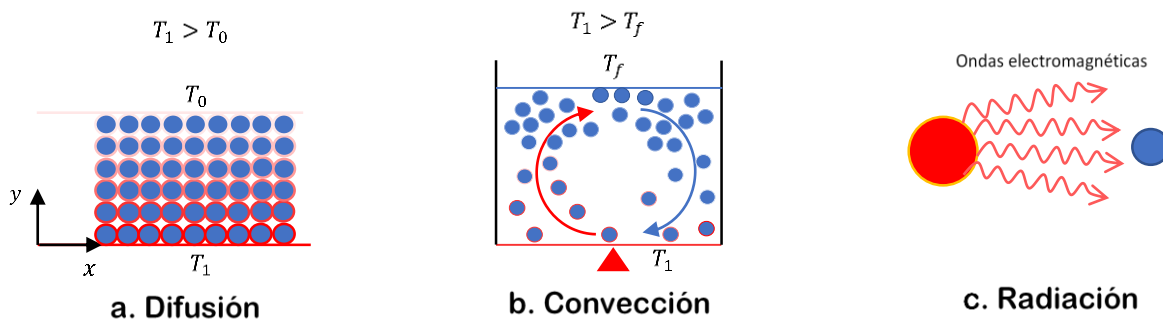


Ilustración 2. Mecanismos de transporte de energía

En la ilustración 2a se observa la difusión en un medio continuo donde las partículas que están en contacto con la placa inferior del sólido tienen una concentración mayor de energía y como se dijo, la energía se transporta por un gradiente, por lo que las partículas con una mayor temperatura transfieren la energía a las partículas contiguas por contacto.

La ilustración 2b nos muestra la convección, particularmente la convección natural. Como sabemos las partículas en la parte inferior del recipiente están a una mayor temperatura por la presencia de la una fuente de calor, lo que disminuye su densidad; por otra parte, las partículas de las capas superiores del fluido tienen menor concentración de energía y esto permite que tengan una densidad mayor, por lo tanto, se producirá un movimiento

convectivo transfiriendo la energía donde las partículas más densas bajan y las partículas menos densas suben dentro del recipiente. Es importante resaltar que la convección puede ser forzada, es decir, que por acción de una fuerza externa (como un agitador) el fluido se mueva y transporte la energía.

El último mecanismo de transporte de energía es la radiación, característico por no necesitar un medio material para transportar la energía, tal como lo haría el Sol con los planetas o una fogata cuando estamos cerca de ella. Por supuesto todos los cuerpos con $T > 0 K$ emiten radiación, pero es claro que entre más elevada sea la temperatura del cuerpo, mayor cantidad de radiación emite; volviendo al ejemplo del Sol con los planetas, el Sol debido a la fusión de los núcleos de hidrógeno en núcleos de helio, libera energía a razón de $3.86 \times 10^{26} W$ cada segundo lo que produce una temperatura en su núcleo alrededor de $15\,700\,000 K$ y en su superficie aproximadamente de $6000 K$ y es claro que nuestro planeta es millones de veces menos caliente que eso, por ello el Sol calienta la Tierra a pesar de que nuestro planeta también emita radiación, resulta ser una cuestión que la mecánica cuántica describe muy bien, ya que permite conocer los mecanismos atómicos y moleculares por los que se produce la radiación, en este caso sólo es necesario saber que cuando un cuerpo sólido se calienta (puede ser cualquier otro cuerpo, no necesariamente sólido) algunos de sus átomos o moléculas pasan a estados de energía más elevados o “estados excitados” y cuando estos regresan a su estado basal de manera espontánea se emite energía en forma de radiación electromagnética que se distribuye sobre un intervalo de longitudes de onda y es justamente esto lo que hace única a la radiación que cada cuerpo emite, así la longitud de onda característica de una onda electromagnética está descrita por la ecuación:

Ecuación 13

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Donde $c = 2.998 \times 10^8 m/s$ y es la velocidad de la luz en el vacío y ν es la frecuencia de la onda. Finalmente es necesario considerar la radiación electromagnética desde el punto de vista de la onda-partícula donde asociamos una onda electromagnética de frecuencia ν con un fotón, que es una partícula con carga neta cero y masa cero cuya energía está dada por la ecuación:

Ecuación 14

$$\varepsilon = h\nu$$

2.4 Tipos de régimen

En general, la temperatura de un cuerpo varía con el tiempo, así como con la posición. En coordenadas rectangulares, esta variación se expresa como $T(x, y, z, t)$, en donde (x, y, z) indica la variación en las direcciones x, y, z y t indica la variación con el tiempo, este tipo de problemas se encuentran en régimen transitorio y se pueden encontrar en todo lo que nos rodea, es posible incluso decir que en algunos fenómenos el régimen transitorio duran millones de años y en otros casos sólo algunas fracciones de segundo, pero por supuesto eso dependerá de la naturaleza del sistema. En el caso de problemas en estado estacionario (o régimen estacionario) la difusión de energía -por ejemplo- en cualquier punto no cambia con el tiempo, lo que simplifica el análisis de los sistemas de transferencia, en

especial cuando la temperatura sólo varió en una dirección. Este tipo de fenómenos son los menos comunes en el universo, pero nos sirven para tener un panorama más amplio del comportamiento de estos. (Véase *Ilustración 1*)

2.5 Caso base, primera propuesta de solución

En el **primer caso (Kath, 2002)** supone un problema de transferencia de energía entre dos objetos en contacto térmico entre sí y en un baño térmico.

Se plantea también que los bordes laterales están aislados. Las caras laterales se encuentran inmersas en el baño térmico y se mantienen a 0°C por conveniencia, tal como se muestra en la ilustración 3.

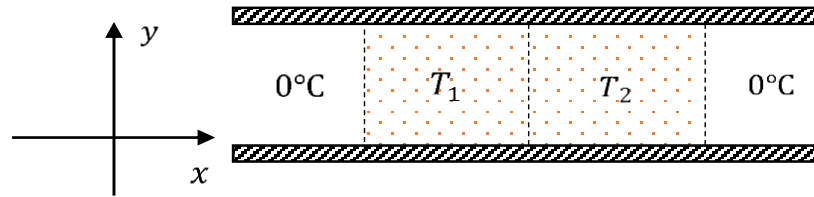


Ilustración 3

Entonces, escribimos el sistema en términos de nuestro modelo, la Ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_A) \quad T \gg T_A$$

$$\frac{dT}{dt} = -\mathcal{K}(T - T_A)$$

Al modelar el cambio de la temperatura en el tiempo para T_1 y T_2 en el sistema de la ilustración 3, es importante mencionar que el autor [1] utiliza el signo negativo de la \mathcal{K} de tal manera que la diferencia de temperaturas queda como: $(T_A - T)$ donde T es la variable dependiente de la ecuación diferencial, de igual forma propone que $\mathcal{K} = 1$ ya que es una constante que es múltiplo del valor propio asociado a la ecuación (véase el Apéndice, sección 6.1), entonces el sistema queda descrito como:

$$\frac{dT_1}{dt} = \mathcal{K}(T_2 - T_1) + \mathcal{K}(0 - T_1) = \mathcal{K}(T_2 - 2T_1)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \mathcal{K}(T_1 - T_2) + \mathcal{K}(0 - T_2) = \mathcal{K}(T_1 - 2T_2)$$

Que es equivalente a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{K} = 1$, entonces

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que este es un caso que nos sirve exclusivamente para ejemplificar el procedimiento matemático empleado en la primera propuesta de solución, que sin duda se complica en problemas donde la física y las características de los materiales son muy diversas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene como solución de equilibrio

$$\mathcal{T}_\epsilon = \mathbf{0}$$

Entonces

$$(\mathcal{T}(t))_j = v_j e^{\lambda_j t}$$

Es una solución donde λ_j es un valor propio de \mathbf{A} y v_j es el vector propio asociado a λ_j .

Para obtener los valores propios del sistema resolvemos la ecuación 6 para conocer el polinomio característico. Para simplificar el proceso utilizamos los invariantes de la matriz \mathbf{A} .

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = -4 \quad \text{y} \quad \text{Det}(\mathbf{A}) = 3$$

Si
$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{A})\lambda + \text{Det}(\mathbf{A}) = 0$$

Entonces la ecuación característica de la matriz \mathbf{A} se vuelve:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Al resolver este polinomio de segundo grado los valores propios que se obtienen son:

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3$$

Cuyos vectores propios asociados son:

Para $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$-v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 - v_2 = 0$$

Donde $v_1 = v_2$, por lo que podemos decir que $v_1 = 1$

$$\therefore \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

Es evidente que $v_1 = -v_2$, por lo tanto, si $v_1 = -1$ entonces $v_2 = 1$.

Y el vector propio asociado es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos los vectores propios se puede escribir una solución como la combinación lineal de las soluciones asociadas a cada valor propio:

Ecuación 15

$$\mathcal{J} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para definir el valor de las constantes podemos utilizar dos condiciones iniciales, una donde $T_1(0) = T_A$ y otra donde $T_2(0) = T_B$ de tal forma que podemos encontrar el valor de las constantes c_1 y c_2 .

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t}$$

$$T_2 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

$$T_A = c_1 - c_2$$

$$T_B = c_1 + c_2$$

Sistema 2

Al sumar las ecuaciones del sistema 2 obtenemos

$$T_A + T_B = 2c_1$$

$$\therefore c_1 = \frac{1}{2}(T_A + T_B)$$

Y al evaluar c_1 en la primera ecuación del sistema 2 podemos calcular c_2

$$c_2 = \frac{1}{2}(T_B - T_A)$$

Lo que finalmente deriva en la distribución de temperatura siguiente:

Ecuación 16

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \left[(T_A + T_B) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (T_B - T_A) e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

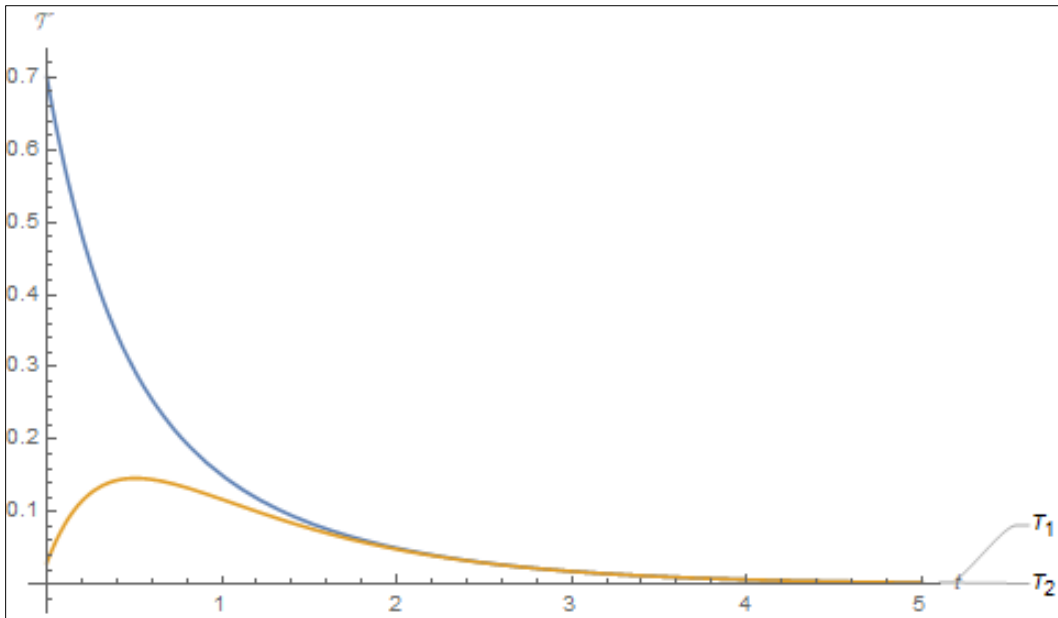


Gráfico 1. Distribución de temperatura no estacionaria con $T_A = 0.7\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $T_B = 0.03\text{ }^{\circ}\text{C}$

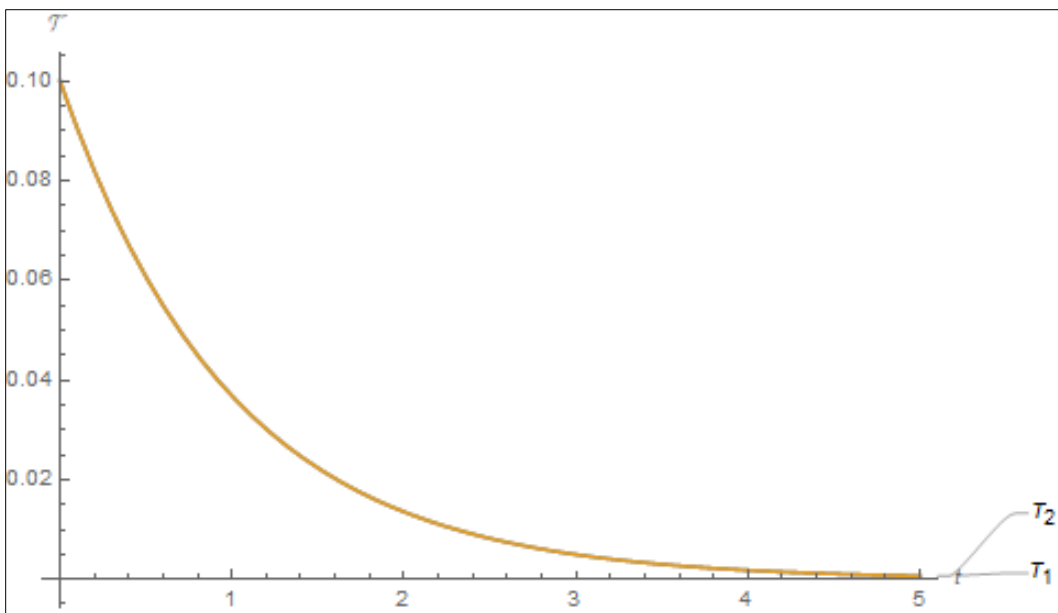


Gráfico 2. Distribución de temperatura no estacionaria con $T_A = 0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $T_B = 0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$

El gráfico 1 muestra las distribuciones de temperatura producidas por los dos vectores propios, la curva azul corresponde al vector propio $[1,1]^T$, mientras que la curva naranja representa el vector propio $[-1,1]^T$. Para el primer vector es evidente que T_1 y T_2 son la misma temperatura, lo que indica que no hay transferencia de energía entre las dos paredes, entonces la única forma en que puede equilibrarse la temperatura es por el calor perdido en el baño térmico a 0°C . Para el segundo vector propio, la energía se transfiere al baño térmico y también entre las dos paredes ya que $T_1 = -T_2$, movida por un gradiente térmico que va de la pared más caliente a la más fría y esta transferencia adicional es la razón por la cual el segundo vector propio decae con una rapidez 3 veces más grande que

el primero. Para el gráfico 2 se propusieron las mismas temperaturas iniciales y dado que no hay ninguna fuerza motriz de la transferencia de energía entre las paredes, estas transfieren su energía al baño térmico (de menor temperatura en este caso) hasta que llegan al equilibrio térmico.

Como resultado del análisis al comenzar con una condición inicial general, cualquier diferencia entre las dos temperaturas decaerá mucho más rápido que su promedio. Así, después de que haya transcurrido un tiempo considerable, la solución general se verá como la primera parte de la solución, es decir:

$$\mathcal{T} \approx \frac{1}{2}(T_A + T_B)e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto se observa en el gráfico 1 a partir de $t \approx 1.8$ s.

3 Desarrollo

3.1 Análisis de la transferencia transitoria con la Ley de Enfriamiento de Newton

Caso 2. En la sección anterior se llevó a cabo la solución de un problema de transferencia de energía para dos paredes en un baño térmico a temperatura constante. El planteamiento siguiente es similar, pero ahora extenderemos el problema a tres paredes como se muestra en la ilustración 4, nuevamente considerando $\mathcal{K} = 1$ por simplicidad.

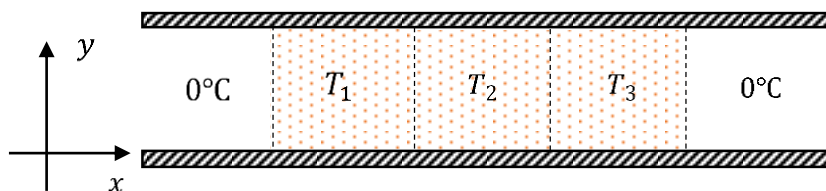


Ilustración 4

En este caso las ecuaciones que representan el fenómeno de transferencia son:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= (T_2 - T_1) + (0 - T_1) = T_2 - 2T_1 \\ \frac{dT_2}{dt} &= (T_1 - T_2) + (T_3 - T_2) = T_1 + T_3 - 2T_2 \\ \frac{dT_3}{dt} &= (T_2 - T_3) + (0 - T_3) = T_2 - 2T_3 \end{aligned}$$

Que es equivalente a

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \mathbf{A}\mathcal{T} \quad \text{donde } \mathcal{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular los valores propios utilizamos la ecuación 6 de tal forma que

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

el polinomio característico del sistema es $(\lambda + 2)[(\lambda + 2)^2 - 2] = 0$, luego los valores propios son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{2}$ y $\lambda_3 = -2 - \sqrt{2}$.

Ahora es posible calcular los vectores propios utilizando la ecuación 5; para $\lambda_1 = -2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
$$\begin{aligned} v_1 + v_3 &= 0 \\ v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Después

$$v_1 = -v_3$$

Si $v_1 = -1$ entonces inmediatamente sabemos que $v_3 = 1$, por lo tanto, el vector propio 1 es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para $\lambda_2 = -2 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Tomamos la primer y última ecuación

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}v_1 + v_2 &= 0 \\ v_2 - \sqrt{2}v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, si proponemos que $v_1 = 1$ por consecuencia $v_2 = \sqrt{2}$ y al sustituir v_2 en la segunda ecuación tenemos que $v_3 = 1$; por lo tanto, el vector propio 2 se escribe como:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, por complementariedad el vector propio correspondiente a $\lambda_3 = -2 - \sqrt{2}$ se vuelve

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como resultado obtenemos la solución general descrita por la siguiente ecuación

Ecuación 17

$$\mathcal{J} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-(2+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-(2-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al realizar el análisis de la solución se puede observar que el decaimiento más lento de la temperatura es donde todas las temperaturas son positivas, es decir, en el vector propio 2 de modo que el calor sólo puede transferirse por los extremos. Es importante observar que la temperatura de la pared central es más grande que la de sus laterales porque las paredes de los extremos aíslan la pared central del baño de temperatura. La siguiente solución con un decaimiento lento es la corresponde al vector propio 1 ya que la temperatura central es la del baño térmico y las temperaturas finales son opuestas. Por lo tanto, la energía no sólo se escapa en los extremos, sino que también se transfiere entre las paredes movida por un gradiente térmico.

Finalmente, el decaimiento de la temperatura más rápido se encuentra donde las paredes de los extremos están a la misma temperatura y la pared central está a una temperatura opuesta. En este caso la energía no sólo se transfiere de las paredes en los extremos al baño, sino que también se transfiere de las paredes en los extremos a la pared central, aumentando su temperatura y disminuyendo la temperatura de las paredes que están en contacto con el baño térmico.

Para conocer el comportamiento gráficamente del modelo es necesario proponer tres condiciones iniciales que nos permitan crear un modelo aún más general, por ello, sea

$$T_1(0) = T_A, T_2(0) = T_B \quad \text{y} \quad T_3(0) = T_C$$

Al evaluar las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} T_A &= -c_1 + c_2 + c_3 \\ T_B &= c_2\sqrt{2} - c_3\sqrt{2} \\ T_C &= c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

Sistema 4

De la segunda ecuación del sistema 4 podemos despejar c_2

$$c_2 = \frac{T_B + \sqrt{2}c_3}{\sqrt{2}}$$

Al sumar la primera y tercera ecuación del sistema 4 y sustituyendo c_2

$$\begin{aligned} T_A + T_C &= 2c_2 + 2c_3 \\ T_A + T_C &= \frac{2T_B}{\sqrt{2}} + 4c_3 \end{aligned}$$

Podemos encontrar el valor de c_3

$$c_3 = \frac{1}{4}(T_A + T_C - \sqrt{2}T_B)$$

Finalmente

$$c_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{2}T_B + T_A + T_C)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(T_C - T_A)$$

Para corroborar que el valor de las constantes cumple con las condiciones iniciales, comprobaremos el valor de c_3 .

Primero la condición inicial nos indica que $T_3(0) = T_C$ por lo tanto;

$$T_3 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-(2+\sqrt{2})t} + c_3 e^{-(2-\sqrt{2})t}$$

En el tiempo $t = 0$

$$T_3 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(T_C - T_A) + \frac{1}{4}\sqrt{2}T_B + \frac{1}{4}(\sqrt{2}T_B + T_A + T_C) + \frac{1}{4}(T_A + T_C - \sqrt{2}T_B)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}T_C - \frac{1}{2}T_A + \frac{1}{2}T_A + \frac{1}{2}T_C$$

$$T_3(0) = T_C$$

Con esto se demuestra que los valores de las constantes cumplen con las condiciones iniciales propuestas. En la sección de Análisis de Resultados se muestran gráficamente las distribuciones de temperatura dependientes del tiempo correspondientes a este problema; también se discute acerca de la influencia de \mathcal{K} en la distribución de temperatura cuando su valor positivo es diferente de 1, en cuyo caso la distribución de temperatura queda de la forma de la ecuación 18.

Ecuación 18

$$\mathcal{J} = c_1 e^{-2\mathcal{K}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\mathcal{K}(2+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-\mathcal{K}(2-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es importante resaltar que las constantes se mantienen igual que para el problema anterior, esto debido a que \mathcal{K} no aparece en los vectores propios, es exclusivamente un múltiplo de los valores propios.

3.2 Análisis de la transferencia transitoria con dependencia de la posición

Caso 3. Es claro que el problema de transferencia propuesto en la sección 3.1 simplifica mucho la solución de este, sin embargo, será importante realizar una propuesta para

encontrar un modelo matemático que describa la temperatura de las paredes compuestas en el espacio de tres dimensiones, si su temperatura inicial $f(x)$ depende solamente de x .

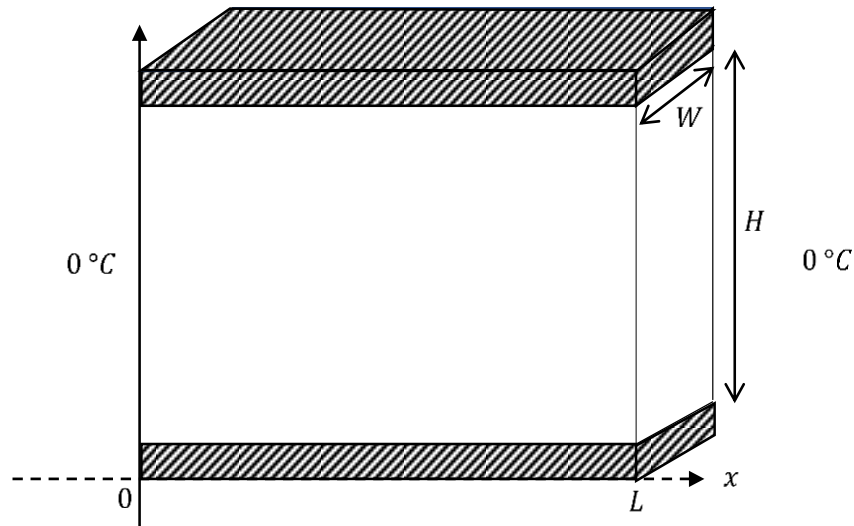


Ilustración 5

El sistema mostrado en la Ilustración 5 es una segunda propuesta de solución en este trabajo de tesis; en el que se observará cómo se da la transferencia de energía transitoria en una sola pared, pero ahora con dependencia espacial, es decir, la transferencia depende del tiempo y de la posición en x . Se considera que la placa tiene una sección transversal uniforme con un área definida, perpendicular al eje y y que está hecha de un material homogéneo. De igual forma se asume que la sección transversal de la barra es tan pequeña que la temperatura es constante en cada sección transversal y el sistema se encuentra aislado en sus extremos superior e inferior (de igual forma que en el problema anterior); de este modo T es una función de x y de t donde la energía fluye únicamente a lo largo de la pared en la dirección de x . Para comenzar con la solución del problema utilizaremos la ecuación de energía en términos del flux de energía \mathbf{q} en coordenadas cartesianas

Ecuación 19

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

Consideraciones

- Propiedades físicas constantes
- Estado transitorio
- No hay disipación viscosa (por tratarse de un sólido).
- El término $\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p$ es cero porque la densidad se supone constante.
- $\mathbf{q}_{rad} \approx 0$
- $\mathbf{q} = q(x)$
- No hay convección ya que se evalúa la transferencia dentro del sólido.

Una vez evaluadas todas las consideraciones en la ecuación 19, ésta se reduce a la siguiente expresión

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \frac{\partial q_x}{\partial x}$$

Al introducir la Ley de Fourier

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Ecuación 20

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, t > 0)$$

Donde $\alpha = k/\rho C_p$ y es el coeficiente de difusión de energía, similar a sus análogos de momentum ν y masa D ; los tres con dimensiones de L^2/T .

La ecuación 20 modela la variación de la temperatura con la posición x y tiempo t en una pared que se extiende a lo largo del eje x . Se considera que la pared tiene una sección transversal uniforme con área A perpendicular al eje y que su composición es homogénea. Es importante resaltar que el área de sección transversal tiene un espesor muy pequeño por lo que la temperatura es constante en cada sección transversal y que las superficies laterales de la pared están aisladas de modo que la energía no pasa a través de ellas. De este modo la temperatura se vuelve una función de x y de t donde la energía fluye únicamente a lo largo de la pared en dirección x .

Condiciones de frontera e inicial. Supóngase ahora que la pared tiene una longitud finita (ilustración 5) que va desde $x = 0$ a $x = L$. La función de temperatura $T(x, t)$ se determinará dentro de todas las posibles soluciones de la ecuación 20 con las condiciones acorde al sistema de transferencia. En este caso de la pared, puede especificarse su función de temperatura $f(x)$ en el tiempo $t = 0$. Esto proporciona su *condición inicial*.

$$\text{En } t = 0 \quad T = f(x) \quad \forall x \in (0, L)$$

También pueden especificarse las temperaturas fijas en los extremos de la pared, en este caso se propuso que la pared esté en contacto con un fluido cuya temperatura sea 0°C , de tal manera que se tendrían las *condiciones de frontera*

$$\text{En } x = 0, \quad T = 0 \quad \text{y en } x = L, \quad T = 0 \quad \forall t > 0.$$

Otros casos serán que la pared, en vez de tener temperaturas fijas, los dos extremos pueden estar aislados o alternativamente pueda estar aislada en un extremo y tener una temperatura fija en el otro. Estas posibilidades se analizarán cuando la pared sea compuesta, ya que debemos tomar en cuenta que un bloque de una pared compuesta funciona de cierta forma como aislante para el bloque contiguo o bien el bloque central tendrá sus extremos aislados (hablando de una pared compuesta de tres materiales).

Algo que es importante observar es que la ecuación 20 es lineal, lo que significa que cualquier combinación lineal $T = c_1T_1 + c_2T_2$ de las soluciones de (19) es también solución de esta. También es cierto que si T_1 y T_2 satisfacen las condiciones de frontera; entonces cualquier combinación lineal de $T = c_1T_1 + c_2T_2$ lo hará. Las condiciones de frontera de la ecuación 20 por lo tanto se denominan, condiciones de frontera homogéneas. A diferencia de la condición inicial que es no homogénea.

Para resolver el problema será necesario entonces encontrar las funciones $T_1, T_2, T_3 \dots$ que satisfagan la ecuación 20 como las condiciones de frontera, para luego combinar estas funciones y así obtener una solución $T = c_1T_1 + c_2T_2 + \dots$ que satisfaga la condición no homogénea. En general, necesitaremos una sucesión infinita de funciones $T_1, T_2, T_3 \dots$ que como ya se dijo, satisfagan (20) y sus condiciones de frontera. En tal caso se escribirá una serie infinita de la forma

Ecuación 21

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x, t)$$

Posterior a ello determinaremos los coeficientes $c_1, c_2, c_3 \dots$ para satisfacer también la condición inicial. Para asegurar que (21) es una solución para el problema de valores a la frontera dado esta deberá ser continua y derivable término a término, una vez respecto a t y dos veces respecto a x . También deberá ser una función exclusivamente de x en el tiempo $t = 0$ para toda $0 < x < L$ y finalmente dentro del intervalo $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$, las condiciones de frontera e inicial en sus extremos, (21) deberá ser una función continua.

Para el método de separación de variables recordemos los pasos vistos en los Antecedentes de este trabajo de tesis ya que serán necesarios en la solución del problema.

Sea

$$T(x, t) = G(x)F(t)$$

Una solución de la ecuación diferencial parcial (20) de tal manera que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = G(x) F'(t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = G''(x) F(t)$$

Al sustituir en (20)

$$G(x) F'(t) = \alpha G''(x)F(t)$$

Ecuación 22

$$\frac{1}{\alpha} \frac{F'}{F} = \frac{G''}{G} = -k$$

Resolviendo la parte con dependencia temporal

$$\frac{1}{\alpha} \frac{F'}{F} = -k$$

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = -k\alpha$$

$$\int \frac{dF}{F} = -k\alpha \int dt$$

$$\ln(F) = -k\alpha t + \ln(c_1)$$

Ecuación 23

$$F = c_1 e^{-k\alpha t}$$

Al resolver la parte dependiente de x

$$\frac{G''}{G} = -k$$

Ecuación 24

$$G'' + kG = 0$$

Deben considerarse todos los valores reales posibles de k , es decir, positivos, negativos y cero. Por ejemplo, si $k = 0$, entonces la ecuación diferencial es $G'' = 0$ y su solución general es

$$G(x) = c_2 x + c_3$$

Por lo que las condiciones de frontera de (20) inmediatamente hacen que $c_2 = c_3 = 0$, en cuyo caso la única solución es la función trivial $G(x) = 0$. Lo que nos indica que $k = 0$ no es un valor propio del problema en (24).

Si $k < 0$, entonces puede definirse como $k = -\lambda^2$, así la ecuación diferencial toma la forma

$$G'' - \lambda^2 G = 0$$

Y su solución general es

$$G(x) = c_2 e^{\lambda x} + c_3 e^{-\lambda x} = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x)$$

Donde $A = B = c_2 + c_3$. La condición de frontera $G(0) = 0$ determinará que

$$G(0) = A \cosh(0) + B \sinh(0)$$

$$A = 0$$

Por lo que podemos deducir que $G(x) = B \sinh(\lambda x)$. Sin embargo, la segunda condición de frontera también vuelve cero la constante B ya que resulta en $G(L) = B \sinh(\lambda L) = 0$. Recordemos que $\lambda \neq 0$ y que el seno hiperbólico de cero sólo es cero cuando su argumento es cero, como se muestra en el gráfico 3. Entonces podemos concluir que la solución de (20) en la que $\lambda < 0$ es únicamente la solución trivial y por lo tanto podemos saber que el problema no tiene valores propios negativos.

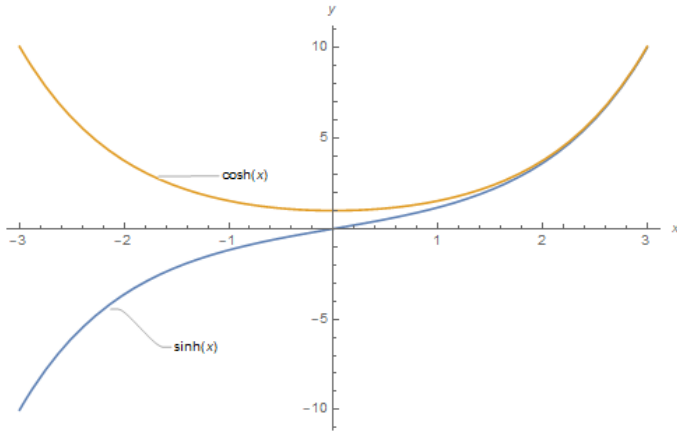


Gráfico 3

La última posibilidad es que $k = \lambda^2 > 0$ con $\lambda > 0$. En este caso la ecuación diferencial resulta en

$$G'' + \lambda^2 G = 0$$

Cuya solución general es

$$G(x) = c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \text{sen}(\lambda x)$$

Ahora es posible evaluar las condiciones de frontera con las funciones obtenidas.

$$T(x, t) = G(x)F(t)$$

$$T(x, t) = c_1 e^{\lambda^2 at} [c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \text{sen}(\lambda x)]$$

Entonces cuando $x = 0$, $T = 0$

$$0 = c_1 e^{\lambda^2 at} [c_2 \cos(0) + c_3 \text{sen}(0)]$$

$$c_2 = 0$$

La condición de frontera anterior implica que $c_2 = 0$, lo que reduce la solución a

$T(x, t) = c_1 e^{\lambda^2 at} [c_3 \text{sen}(\lambda x)]$ entonces al evaluar en $x = L$, $T = 0$, resulta en

$$0 = c_3 \text{sen}(\lambda L)$$

Sin embargo, $c_3 \neq 0$ únicamente cuando el argumento del seno sea un múltiplo entero positivo de π :

$$\lambda L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

Y dado que $k = \lambda^2$ entonces

$$k = \lambda^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots, \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Luego queda en evidencia que (20) tiene una secuencia infinita de valores propios positivos de la forma

$$k = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo tanto, la función propia con el valor λ_n es

$$G_n(x) = c_3 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

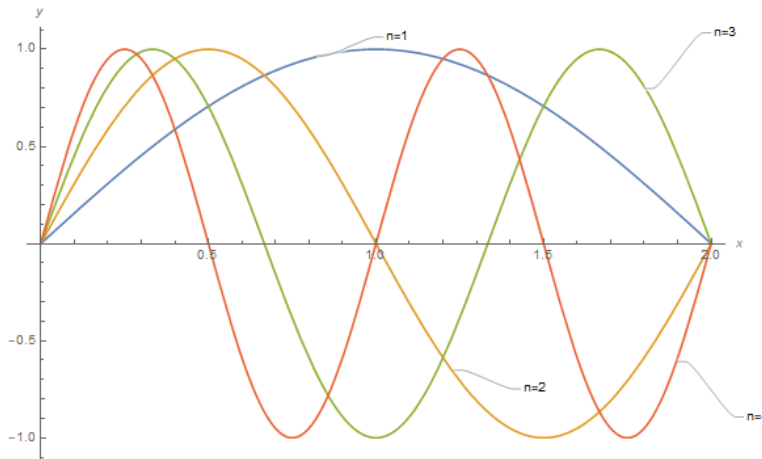


Gráfico 4

Al programar la función propia con $c_3 = 1$ y $L = 2$ se muestran las gráficas de varias funciones propias, en el gráfico 4 se observa cómo las condiciones de frontera sirven para seleccionar justo aquellas funciones seno que inician un periodo en $x = 0$ y terminan en $x = L$.

Una vez aplicadas las condiciones de frontera podemos reescribir la solución del problema para dar paso a una sucesión de bloques de funciones producto

$$T(x, t) = G_n(x)F_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Por el momento se omite la constante arbitraria $c_4 = c_1c_3$ ya que se insertará en los pasos posteriores de la solución.

Cada una de estas funciones satisface la ecuación 20, así como sus condiciones de frontera homogéneas. Ahora se combinarán para intentar satisfacer la condición inicial (no homogénea) y por consiguiente se forma la serie infinita mostrada en la ecuación 21.

$$T(x, 0) = f(x)$$

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Y al evaluar la condición inicial podremos encontrar el conjunto de coeficientes constantes c_n .

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Con $0 < x < L$. La serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo de x resultará entonces de la definición de la constante

Ecuación 25

$$c_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$. Finalmente podemos escribir la distribución de temperaturas en términos de la serie

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Donde $\{b_n\}$ es el conjunto de coeficientes de la función seno de la serie de Fourier en la ecuación 25 de la función de temperatura inicial de la pared.

Para corroborar la funcionalidad del modelo, reproduciremos un problema similar, propuesto por (Edwards, 2009) que nos plantea una pared de longitud $L = 50 \text{ cm}$ que durante un tiempo considerable se pone en contacto con vapor hasta que su temperatura es $T_0 = 100^\circ\text{C}$. En $t = 0$ sus extremos inferior y superior son aisladas y sus caras WH son colocadas en un baño a 0°C (ver ilustración 5). Se nos pide calcular la temperatura de la pared en su punto medio después de media hora si está hecha de concreto, considerando un coeficiente de difusión térmica $\alpha = 0.005 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Como se puede observar es un problema de valores a la frontera con las mismas características del modelo que se obtuvo anteriormente, de tal manera que debemos determinar la serie seno de Fourier para el intervalo $0 < x < L$ con $f(x) \equiv T_0$ y entonces la ecuación (25) resulta en

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2T_0}{L} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Para resolver la integral, proponemos

$$u = \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2T_0}{n\pi} \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(u) du = \frac{2T_0}{n\pi} [-\cos(u)]_0^{n\pi}$$

$$b_n = \frac{2T_0}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1]$$

Lo que define los coeficientes de Fourier en la ecuación 26 como

$$b_n = \begin{cases} \frac{4T_0}{n\pi} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Por lo que la función de temperatura de la pared estará definida como

$$T(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para resolver el problema debemos evaluar algunos términos de la serie y así determinar la temperatura en el centro de la pared después de media hora de estar en contacto con el baño a 0°C .

Entonces sabiendo que $\alpha = 0.005 \text{ cm}^2/\text{s}$

$$T(25,1800) \approx 122.8795 - 30.8257 + 10.4754 - 3.1894 + 0.7958 - 0.1572 + 0.0242 - 0.0029 + 0.0003 - 0.000 + \dots \approx 100^\circ\text{C}$$

Como podemos observar la serie converge en unos cuantos términos a 100°C lo que nos permite ver que el concreto resulta ser un aislante muy efectivo.

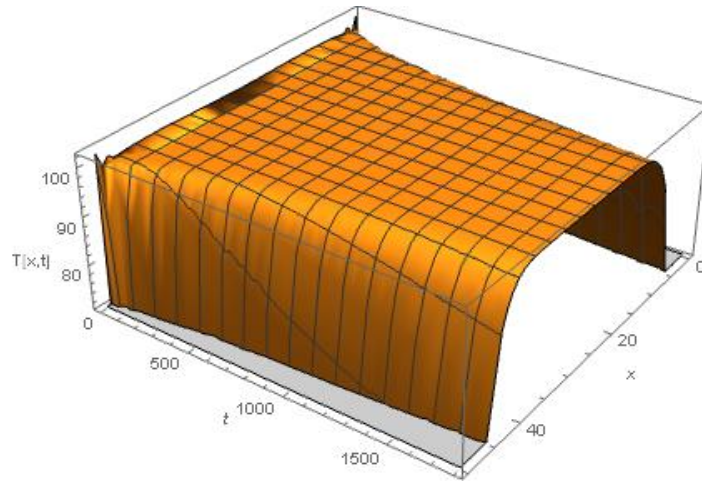


Gráfico 5

Como se puede apreciar en el gráfico 5, el concreto resulta ser un conductor de energía poco eficiente, ya que conforme transcurre el tiempo la temperatura en el centro de la pared cambia muy poco y en los extremos en contacto con el baño térmico decrece lentamente.

Tabla 1

Material	$\alpha \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right]$
Cobre	1.15
Hierro	0.15
Concreto	0.005

A continuación, compararemos el concreto con otros dos materiales, cobre y hierro, cuyo coeficiente de difusión térmica se muestra en la tabla 1. Para realizar el análisis utilizaremos gráficos en 3D y de contornos, mismos que permiten observar detalladamente el comportamiento del fenómeno de transferencia en la pared acorde al material utilizado,

es importante resaltar que en el modelo de la ecuación 26 las características del material se encuentran definidas por el coeficiente de difusión de energía, ya que contiene la conductividad térmica del material, su capacidad calorífica y su densidad, de ahí la importancia de este número en el transporte de energía. Los códigos de programación en *Mathematica* de todas las gráficas se podrán encontrar en el Apéndice, al final de este trabajo.

Consideramos para todos los materiales $0 < x < 50\text{cm}$, $0 < t < 1800\text{s}$.

Concreto

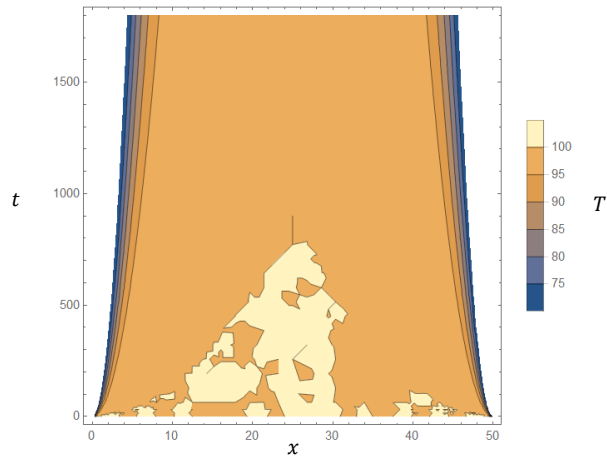


Gráfico 6

Cobre

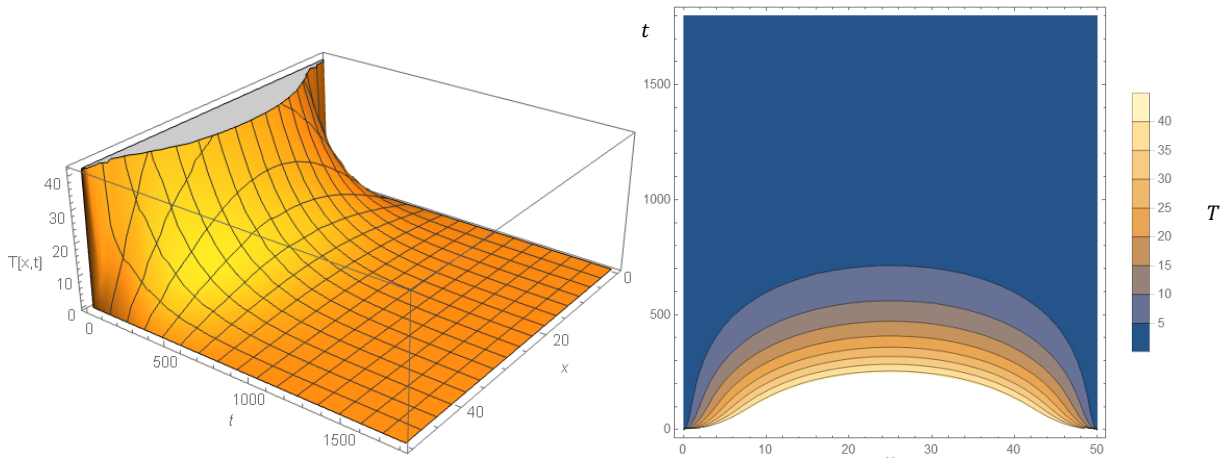


Gráfico 7

Gráfico 8

Hierro

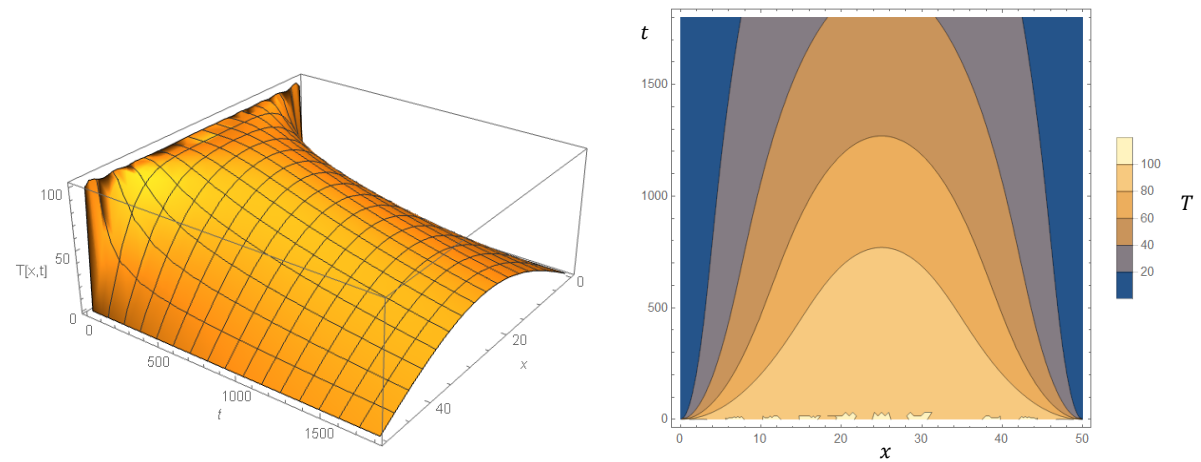


Gráfico 9

Gráfico 10

Como podemos observar en los gráficos anteriores, cada material presenta un comportamiento diferente y por supuesto es aquí donde el ingeniero químico, utiliza su criterio para elegir el material adecuado para su proceso, por ejemplo, si se desea aislar algún fluido caliente, desde luego elegiríamos el concreto ya que presenta las características de mejor aislante respecto al cobre o el hierro; esto lo sabemos ya que en los gráficos que modelan su transferencia de energía, observamos que la temperatura de la pared tarda mucho más tiempo en entrar en equilibrio con el baño térmico a 0°C .

El gráfico 6 muestra que aproximadamente en 900 segundos (15 min), una pequeña sección en el centro de la pared aún continúa a 100°C , lo que nos permite deducir que la energía fluye con una rapidez menor que en los demás materiales. Ahora, si observamos los gráficos 7 y 8 que corresponden al cobre, podemos notar que rápidamente llega al equilibrio térmico con el baño térmico y por supuesto esto se debe a que la conductividad térmica del cobre es mucho más grande que la del concreto, incluso que la del hierro. Otro dato interesante que debemos analizar es que se llega al estado estacionario mucho más rápido y esto resulta muy útil, ya que eso nos dice que los aislantes más eficientes se encuentran en régimen transitorio por periodos más prolongados.

El análisis del cobre es similar al del hierro sólo que el hierro resulta ser un aislante no tan eficiente, pero que podría adecuarse bien a las características de algún proceso con exigencias mínimas de aislamiento.

Caso 4. En siguiente problema plantea un análisis similar al anterior, la diferencia se encuentra en las condiciones de frontera del nuevo sistema, derivadas de que la pared a estudiar es una composición de materiales, es decir, se llevará a cabo la transferencia de energía en una pared compuesta. Como en todo problema de fenómenos de transporte, es importante visualizar el sistema para poder tratar de interpretarlo desde la perspectiva matemática; en la ilustración 6 se muestra el diagrama del sistema.

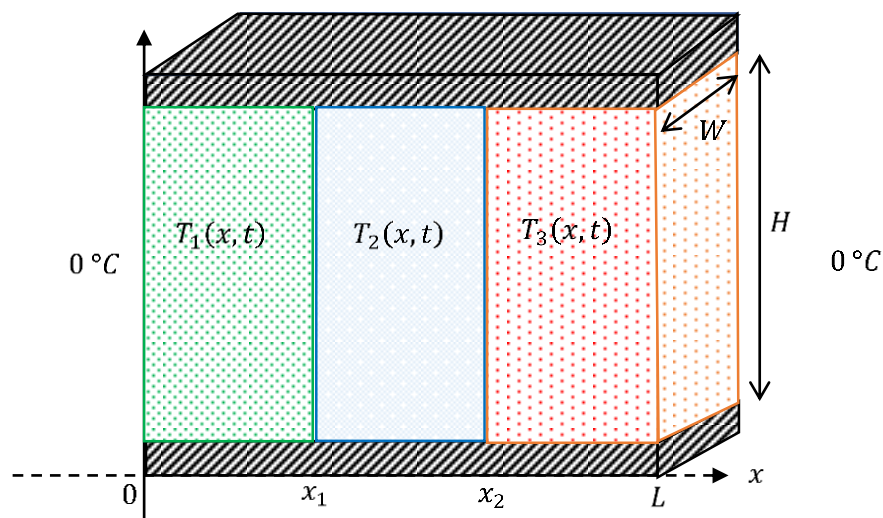


Ilustración 6

En resumen, supóngase que una pared de longitud L se encuentra aislada en sus caras inferior y superior y las caras laterales se encuentran en contacto con un fluido a 0°C . Su

distribución de temperatura se encuentra descrita por la ecuación 20, por supuesto, con las condiciones y características particulares del sistema. Es importante resaltar que éste es el caso principal de la presente tesis, ya que involucra la mayor cantidad de consideraciones químicas, físicas y matemáticas del problema de transferencia transitoria de energía a través de paredes compuestas, lo que se plantea es resolver el problema a través de un análisis similar al caso 3 para cada pared, solamente cambiando las condiciones de frontera respecto a la pared y material de ésta.

Para comenzar la solución del caso 4, resolveremos $T_2(x, t)$ como un procedimiento similar al caso 3, con condiciones de frontera aislada ya que como podemos ver en la ilustración 6, la pared central se encuentra aislada en sus extremos en x_1 y x_2 .

Entonces, considere el problema con valores en la frontera del que resulta la ecuación 27

Ecuación 27

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, t > 0)$$

$$T_x(x_1, t) = T_x(x_2, t) = 0 \quad 27.a$$

$$T(x, 0) = f(x) \quad 27.b$$

Que corresponde a la pared central de longitud $x_2 - x_1$ con una temperatura inicial $f(x)$, pero con sus dos extremos aislados por las otras dos paredes que componen el aislante. Para simplificar la solución del problema moveremos el sistema de referencia haciendo que el origen este en x_1 y L_2 en x_2 , de tal manera que $x_2 - x_1 = L_2$, como se observa en la ilustración 6.a.

El procedimiento de separación de variables $T(x, t) = G(x)F(t)$ se realiza sin cambio alguno hasta la definición de las condiciones de frontera homogéneas para $G(x)$ que resultan de (27.a), entonces las ecuaciones a resolver son las mismas del caso anterior.

Ecuación 28

$$G''(x) + kG(x) = 0$$

Ecuación 29

$$F'(t) + k\alpha F(t) = 0$$

De esta manera $G(x)$ satisface el problema de valores en la frontera en la ecuación 28.

Una vez más es necesario considerar las opciones para los valores de k , es decir, cuando $k = 0$, $k = -\lambda^2 < 0$ y $k = \lambda^2 > 0$ para encontrar los valores propios.

Así que si utilizamos la primera opción con $k = 0$, la solución general de $G'' = 0$ es

$$G(x) = c_1x + c_2$$

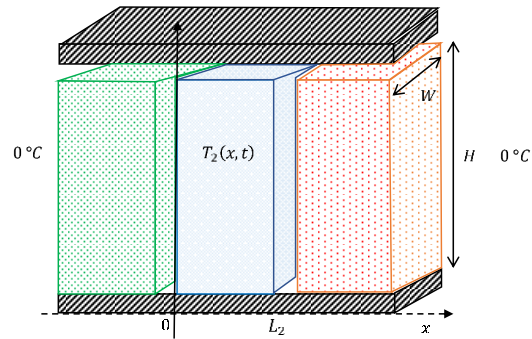


Ilustración 6.a

Lo que nos dice que $G' = c_1$. Así que cuando evaluamos las condiciones de frontera homogéneas es imperativo que $c_1 = 0$, pero que $c_2 \neq 0$. Entonces si una constante múltiplo de una función propia, es otra función propia, puede seleccionarse un valor arbitrario para c_2 , por ejemplo, si $c_2 = 1$ automáticamente el valor propio es cero y la función propia asociada

$$\lambda_0 = 0, \quad G_0(x) = 1$$

De igual forma para (29), ya que se obtienen que $F'(0) = 0$, de tal manera que $F_0(t) = 1$.

Con $k = -\lambda^2 < 0$ la solución general de la ecuación 28 es

$$G(x) = c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x)$$

Y fácilmente se observa que $G'(0) = G'(L_2) = 0$ sólo si $c_1 = c_2 = 0$. De este modo se comprueba que no existen valores propios negativos, lo que nos indica que el sistema es inestable y por supuesto físicamente k tiene que ser menor que cero porque el sistema debe llegar al estado estacionario; esta es la razón por la que desde el caso 3 se propuso.

Con $k = \lambda^2 > 0$ la solución general de (28) es

$$G(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$

Y su derivada

$$G'(x) = -c_1 \lambda \sin(\lambda x) + c_2 \lambda \cos(\lambda x)$$

Por lo tanto, al evaluar las condiciones de frontera homogéneas $G'(0) = 0$ lo que implica que $c_2 = 0$ y entonces

$$G'(L_2) = -c_1 \lambda \sin(\lambda L_2) = 0$$

Al igual que en el caso anterior, esta ecuación requiere que λL_2 sea un múltiplo entero de π debido a que el valor propio $\lambda \neq 0$ y $c_1 \neq 0$, para evitar la solución trivial. Entonces se tiene una sucesión infinita de valores propios y funciones propias asociadas

$$k_n = \lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L_2^2}, \quad G_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L_2}\right)$$

Para $n = 1, 2, 3 \dots$

En lo que respecta a la ecuación 29 sabiendo que la constante k_n debe ser uno de los valores propios de la ecuación anterior. Para la enésima de estas posibilidades, la ecuación 29 se escribe como

$$F_n' + \frac{n^2\pi^2}{L_2^2} F_n = 0$$

Una solución no trivial de esta ecuación es

$$F_n(t) = e^{\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha}{L_2^2}t\right)}$$

Cuya constante de integración se insertará en la ecuación 30, por consiguiente, la solución de la prueba es

Ecuación 30

$$T_2(x, t) = G(x)F(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha}{L_2^2}t\right)} \cos\left(\frac{n\pi x}{L_2}\right)$$

Respecto a la condición no homogénea descrita en 27.b $T(x, 0) = f(x)$, obviamente se desea reducir la ecuación (30) cuando $t = 0$ a la serie coseno de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L_2}\right)$$

Donde

Ecuación 31

$$a_n = \frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L_2}\right) dx$$

Para $n = 1, 2, 3 \dots$ Finalmente se tiene que la distribución de temperatura para este caso resulta en

Ecuación 32

$$T_2(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha}{L_2^2}t\right)} \cos\left(\frac{n\pi x}{L_2}\right)$$

Donde el conjunto de las $\{a_n\}$ son los coeficientes de la función coseno de Fourier dados por (31) de la función de temperatura inicial.

El análisis de cada problema planteado será expuesto en la sección de análisis de resultados.

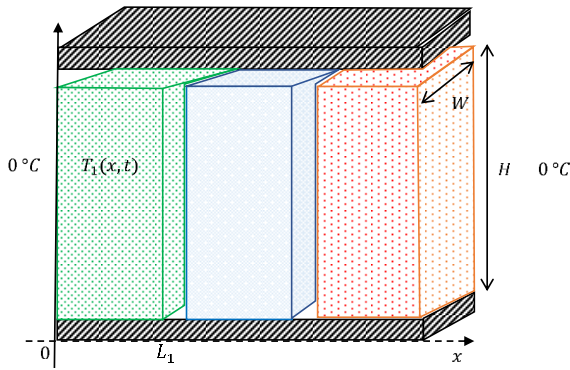


Ilustración 6.b

La siguiente distribución por resolver es $T_1(x, t)$, el procedimiento es el mismo, la única diferencia radica en las condiciones de frontera nuevamente. Para esto se movió el sistema de referencia colocando el cero en la cara sin aislante y L_1 en la interfase de los aislantes 1 y 2 (véase Ilustración 6.b). Es importante recordar que $L_1 = x_1$ para evitar confusiones con el diagrama original.

Entonces, definimos el problema de valores

a la frontera descrito en la ecuación 27 pero con las condiciones de frontera siguientes

$$T(0, t) = T_x(x_1, t) = 0 \quad 27.c$$

Recordemos la ecuación 22, que plantea la igualdad a una constante de las funciones $G(x)$ y $F(t)$ de la cual resulta el conjunto de dos ecuaciones (28) y (29). Al resolver la parte temporal obtenemos que

$$F(t) = c_1 e^{-kat}$$

Sin embargo, hay que evaluar las diferentes posibilidades para los valores de k ($k = 0, k = -\lambda^2 < 0$ y $k = \lambda^2 > 0$) en la solución de la parte dependiente de la posición en x , tal como se ha hecho en los casos previos.

Con $k = 0$, (28) se vuelve $G'' = 0$, con solución general

$$G(x) = c_2 x + c_3$$

Con las condiciones de frontera $G(0) = 0$ y $G'(L_1) = 0$, las constantes $c_2 = c_3 = 0$ lo que nos lleva a la solución trivial, por lo que descartamos esta opción.

Con $k = -\lambda^2 < 0$ la ecuación 28 toma la forma $G'' - \lambda^2 G = 0$ y su solución general es

$$G(x) = c_2 \cosh(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x)$$

Su derivada

$$G'(x) = c_2 \lambda \sinh(\lambda x) + c_3 \lambda \cosh(\lambda x)$$

Al evaluar las condiciones de frontera

$$0 = c_2 \cosh(0) + c_3 \sinh(0)$$

$$0 = c_2 \lambda \sinh(\lambda L_1) + c_3 \lambda \cosh(\lambda L_1)$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 \lambda \cosh(\lambda L_1) = 0$$

Esto implica que $c_2 = 0$ porque $\lambda \neq 0$ y la función $\cosh(x) \neq 0$ para cualquier valor de x (recordemos el gráfico 3), lo que nos lleva nuevamente a la solución trivial.

Finalmente, la única posibilidad es que $k = \lambda^2 > 0$ con $\lambda > 0$ por lo que la ecuación 28 es

$$G'' + \lambda^2 G = 0$$

Con solución general

$$G(x) = c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

Nuevamente al evaluar las condiciones de frontera $c_2 = 0$ y la solución queda como

$$G(x) = c_3 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

$$G'(x) = c_3 \lambda \cos(\lambda x)$$

Con $G'(L_1) = 0$

$$c_3 \lambda \cos(\lambda L_1) = 0$$

Para hacer que esta igualdad se cumpla evitando que $c_2 \neq 0$ y con ello la solución trivial, recurriremos a la gráfica de la función coseno (gráfico 11) y observamos que $\cos(x)$ es cero

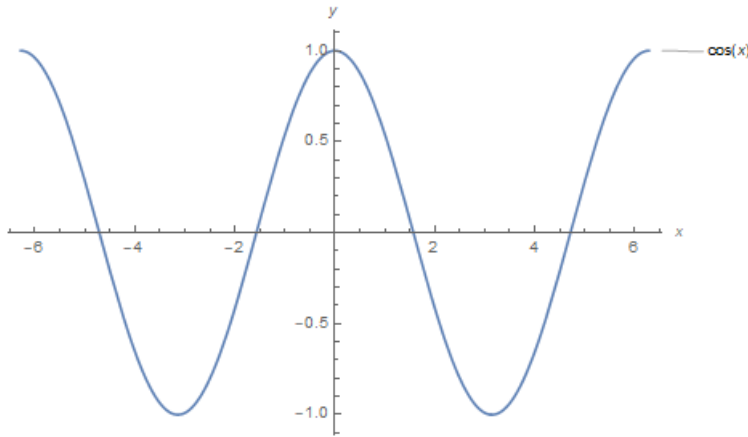


Gráfico 11

sólo en los múltiplos enteros impares de $\pi/2$. Por lo tanto, podemos decir que λL_1 deberán ser este conjunto de múltiplos de $\pi/2$.

$$\lambda L_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

y si

$$k = \lambda^2 = \frac{\pi^2}{4L_1^2}, \frac{3\pi^2}{4L_1^2}, \frac{5\pi^2}{4L_1^2}, \dots, \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L_1^2}$$

Con $n = 1, 2, 3, \dots$

Si hacemos que $c_2 = 1$, la función propia con el valor λ_n es

$$G_n(x) = c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De la ecuación (29) tendremos un número de Fourier que depende del valor de n

$$F_n(t) = c_1 e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 \alpha}{4L_1^2} t}$$

En consecuencia, las funciones producto que satisfacen las condiciones homogéneas son

$$T_n(x, t) = G_n(x)F_n(t) = \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha}{4L_1^2}t}$$

Para $n = 1, 2, 3 \dots$ Y forman la serie infinita

$$T_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha}{4L_1^2}t}$$

La cual sirve para determinar los coeficientes constantes $\{c_n\}$ de tal manera que satisfacen la condición inicial 27.b

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right) = f(x)$$

$$c_n = b_n = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x) \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right) dx$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de la función impar tiene sólo términos seno:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right)$$

Ecuación 33

$$T_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha}{4L_1^2}t}$$

En la ecuación 33 se describe la distribución de temperatura para la primera pared con $n = 1, 2, 3 \dots$

En este punto de la tesis nos encontramos en la parte final del trabajo matemático, con la resolución de la última distribución de temperatura $T_3(x, t)$, al igual que en la pared 1, se movió el sistema de referencia y cambiarán las condiciones de frontera siempre estando acopladas con las condiciones de $T_2(x, t)$ ya que lo que se busca es que en conjunto las tres temperaturas describan el

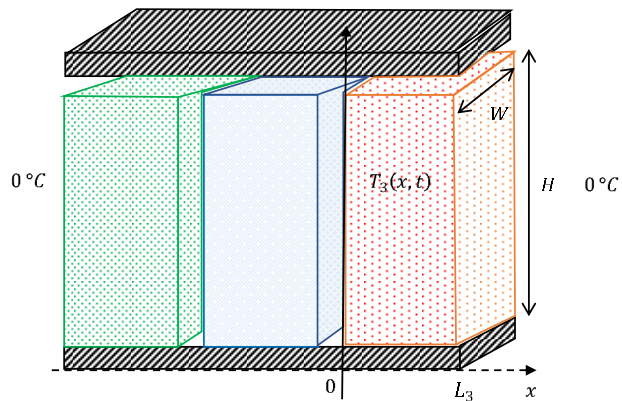


Ilustración 6.c

comportamiento de la transferencia de energía transitoria en la pared compuesta. Entonces las condiciones de frontera para el sistema de la ilustración 6.c

$$T(L_3, t) = T_x(0, t) = 0 \quad 27.d$$

Sabiendo que este sistema está descrito por el balance de energía transitorio en (27) y esta ecuación se resuelve por separación de variables, partimos de la propuesta ya conocida

$$T_3(x, t) = G(x)F(t)$$

Por (22) sabemos también se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias para $G(x)$ y $F(t)$ (Ec. 28 y Ec. 29), de primer y segundo orden respectivamente. La solución para la parte temporal es

$$F(t) = c_1 e^{-kat}$$

Respecto a la solución de $G(x)$ nos encontramos con la diferencia en las condiciones de frontera homogéneas que aplican para $G(x)$, por lo que en este problema será necesario definir un problema de Sturm-Liouville como un problema con valores en la frontera de la forma

Ecuación 34

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (a < x < b);$$

Ecuación 35

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Donde α_1 y α_2 como β_1 y β_2 son diferentes de cero. El parámetro λ en la ecuación 34 es el valor propio cuyos posibles valores constantes se buscan. Nótese que el problema de Sturm-Liouville en (34) y (35) siempre tiene la solución trivial $y(x) = 0$. Por consiguiente, se buscan los valores de λ (valores propios) para los cuales este problema tiene una solución real no trivial (una función propia) y que cada valor propio cuenta con su función propia asociada. El teorema 2 nos da las condiciones suficientes bajo las cuales el problema dado en (34) y (35) presenta una sucesión infinita de $\{\lambda_n\}_1^\infty$ de valores propios no negativos, donde cada valor propio tiene una función propia asociada $y_n(x)$ asociada.

²Teorema 2

Supóngase que las funciones $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ de la ecuación 34 son continuas en un intervalo $[a, b]$ y que tanto $p(x) > 0$ como $r(x) > 0$ en cada punto de $[a, b]$. De este modo los valores propios del problema de Sturm-Liouville dado en (34) y (35) constituyen una sucesión creciente de la forma

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$$

De números reales con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

² Edwards, C.H. y Penney, D. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México: Prentice Hall.

Salvo por un factor constante, sólo una función propia $y_n(x)$ se asocia con cada valor propio λ_n . Además, si $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ y los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 en (35) son todos no negativos, entonces los valores propios son todos no negativos.

Así pues, será necesario encontrar los valores propios y las funciones propias asociadas del problema de Sturm-Liouville

$$G'' + kG = 0 \quad (0 < x < L)$$

$$G'(0) = 0, \quad G(L) = 0$$

Este problema satisface la hipótesis del teorema 2 con $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, por lo que no cuenta con valores propios negativos. De manera similar que los problemas anteriores debemos evaluar los posibles valores para k . Si $k = 0$, entonces $G(x) = c_2x + c_3$, y por lo tanto $G'(0) = c_2 = 0$ y $G(L_3) = c_3 = 0$. Por esto 0 no es un valor propio. Ahora si proponemos que $k = \lambda^2$, entonces

$$G(x) = c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

Y

$$G'(x) = -c_2 \lambda \operatorname{sen}(\lambda x) + c_3 \lambda \cos(\lambda x)$$

Al evaluar las condiciones de frontera

$$0 = c_2 \cos(\lambda L_3) + c_3 \operatorname{sen}(\lambda L_3)$$

$$0 = -c_2 \lambda \operatorname{sen}(0) + c_3 \lambda \cos(0)$$

Lo que implica que $c_3 = 0$ y de esta manera se obtiene que $G(L_3) = c_2 \cos(\lambda L_3) = 0$. Es aquí cuando debemos recordar la gráfica de la función coseno (gráfico 11) y por lo tanto concluir que λL es un múltiplo entero impar de $\pi/2$.

$$\lambda L = \frac{(2n - 1)\pi x}{2}$$

Así se tienen los valores propios y funciones propias asociadas

$$k_n = \lambda_n^2 = \frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4L_3^2}$$

Y

$$G_n(x) = \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2L_3}\right), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

El desarrollo de una función en términos de las funciones propias de un problema de Sturm-Liouville depende de una propiedad de ortogonalidad. Por ejemplo, se dice que las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ respecto a la *función peso* $r(x)$ siempre que

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)dx = 0$$

Entonces será necesario definir un teorema describiendo que cualesquiera dos funciones propias en un problema de Sturm-Liouville regular asociadas con valores propios distintos son ortogonales respecto a la función peso en la ecuación 35.

³Teorema 3

Supóngase que las funciones p , q y r en el problema de Sturm-Liouville de las ecuaciones 34 y 35 satisfacen las hipótesis del teorema 2 y que $y_i(x)$ y $y_j(x)$ son funciones propias asociadas con los valores propios distintos λ_i y λ_j . Entonces

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)dx = 0$$

Por supuesto la solución del problema no estaría completa si no realizamos el desarrollo en funciones propias, ello nos lleva representar una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ por una serie de términos de funciones propias

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x)$$

Donde las y_m son las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular definido en (34) y (35). Para determinar los coeficientes c_n , primero se multiplica cada lado de (37) por $y_n(x)r(x)$ y después se integra en el intervalo $[a, b]$. Luego obtenemos que

$$\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b y_m(x)y_n(x)r(x)dx$$

Pero debido a la ortogonalidad definida en el teorema 3, el único término diferente de cero en el lado derecho de la ecuación 38 es aquel en el que $m = n$. Por lo que podemos reducirla a la forma

$$\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_n \int_a^b [y_n(x)]^2 r(x)dx$$

Y así despejar los coeficientes c_n .

³ Edwards, C.H. y Penney, D. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México: Prentice Hall.

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx}{\int_a^b [y_n(x)]^2r(x)dx}$$

De esta manera se define la serie en términos de funciones propias en (37).

Una vez dicho lo anterior la serie en términos de las funciones propias para $f(x)$ establecida en la condición inicial 27.b será

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) = f(x)$$

Con

$$c_n = \frac{\int_0^{L_3} f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) dx}{\int_0^{L_3} \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) dx}$$

$$c_n = \frac{2}{L_3} \int_0^{L_3} f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) dx$$

ya que

$$\int_0^{L_3} \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) dx = \frac{2}{L_3}$$

De esta manera habremos completado el procedimiento para encontrar la serie infinita de la forma de la ecuación 21 que será la distribución de temperatura transitoria para la tercera placa de aislante en nuestra pared compuesta.

$$T_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \alpha_t}{4L_3^2} t}$$

4 Análisis de Resultados

En la sección 3, obtuvimos la distribución de temperatura transitoria de dos formas diferentes para sistemas similares, en el primero se realizaba la propuesta de análisis a través de la Ley de Enfriamiento de Newton y en la segunda parte se realizó el análisis partiendo de la Ecuación de energía en términos del flux de energía q .

4.1 Análisis de la transferencia de energía transitoria a través de paredes compuestas con Ley de enfriamiento de Newton

Para el caso 2 analizaremos primero la distribución de temperaturas cuando la temperatura inicial es la misma en las tres paredes, es decir, $T_A = T_B = T_C = 25^\circ\text{C}$.

Como se muestra en el gráfico 12, las temperaturas en los extremos, es decir, la temperatura de las paredes que se encuentran en contacto con el baño térmico, decae a la misma razón, sin embargo a pesar de que la pared central se encuentra a la misma temperatura se observa un mínimo en $t = 1.25\text{ s}$, donde la temperatura desciende hasta los -2.066°C , la razón física de este decaimiento de la temperatura es que dado que la paredes en contacto con el baño tienen un mayor gradiente de temperatura, ceden su energía al baño térmico de tal forma que la pared central tiene que ceder su energía a las paredes laterales hasta que llegan al equilibrio térmico con el baño, este comportamiento coincide con el último párrafo (página 15, párrafo 5) de la descripción de la ecuación 17, sin embargo, es importante resaltar que la pared central también se puede “aislar” siempre y cuando las temperaturas en las paredes de los extremos sean menores que la temperatura de la pared central, como se observa en el gráfico 13.

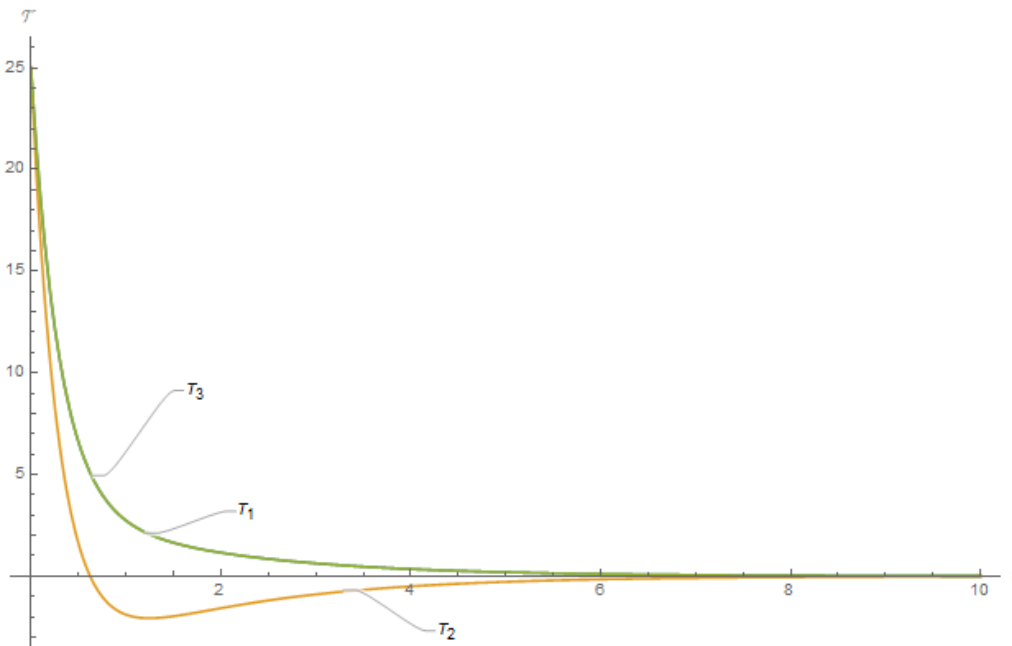


Gráfico 12. Distribución de temperatura para cada pared con temperatura inicial de 25°C .

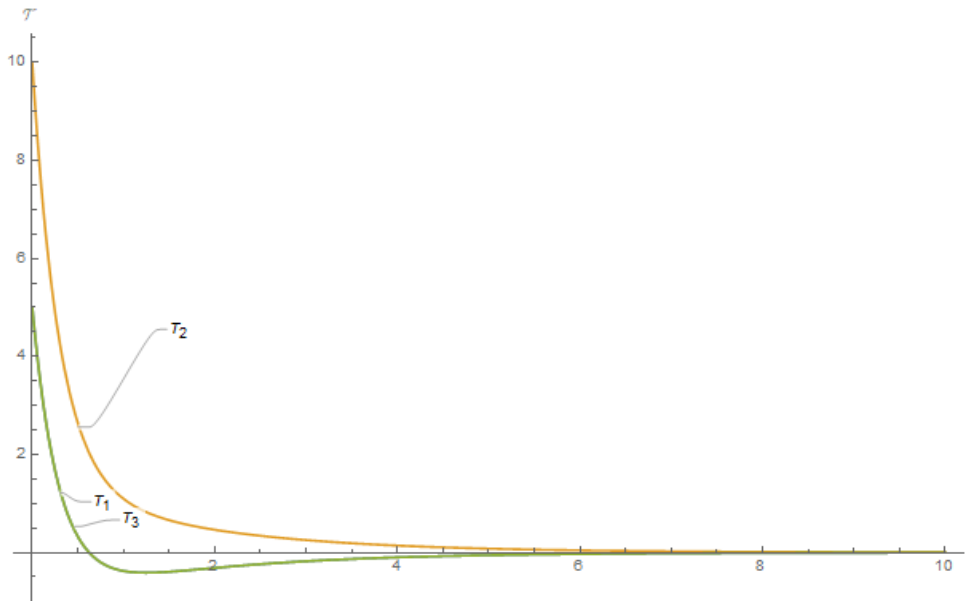


Gráfico 13. Distribución de temperatura para cada pared con $T_1 = T_3 = 10^\circ\text{C}$ y $T_2 = 5^\circ\text{C}$.

Incluso es observable que la temperatura de las paredes que se encuentran en contacto con el baño disminuye por debajo de la temperatura de este; lo que indica que la transferencia se da muy rápidamente entre el baño y las paredes laterales ya que el gradiente es mayor, a diferencia del gradiente de las paredes laterales con la pared central, que es menor y de cierta forma hay una acumulación de energía en la pared central. Debemos ser cautelosos al observar este fenómeno en los gráficos ya que los fenómenos en estado estacionario pueden tener un comportamiento diferente porque la escala de tiempo en que se llevan a cabo los fenómenos es muy diferente, habrá que recordar, que existen fenómenos que llegan al estado estacionario en breves periodos, pero algunos otros tardarán millones de años quizá, pero antes del estado estacionario están en estado transitorio. En este caso, el estado transitorio es muy corto ya que se está considerando que la conductividad térmica es constante y además el gradiente temperatura es lo suficientemente grande como para llevar la energía desde el punto más caliente al más frío. Además, la Ley de enfriamiento de Newton modela fenómenos de transporte de energía cuando la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su medio ambiente es muy pequeña ya que como se dijo antes, el calor transferido por unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por difusión, convección y radiación es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio en el que se encuentra inmerso.

Cuando $\mathcal{K} \neq 1$ y > 0 es posible realizar otro análisis y observar cómo cambia la distribución de temperatura, esto acorde a la ecuación 18, los resultados son los siguientes:

En los gráficos 14, 15, 16 y 17 se muestra la distribución de temperaturas para las tres paredes con temperatura inicial de 25°C y $\mathcal{K} = 0.001, 0.01, 0.1$ y 5 , respectivamente.

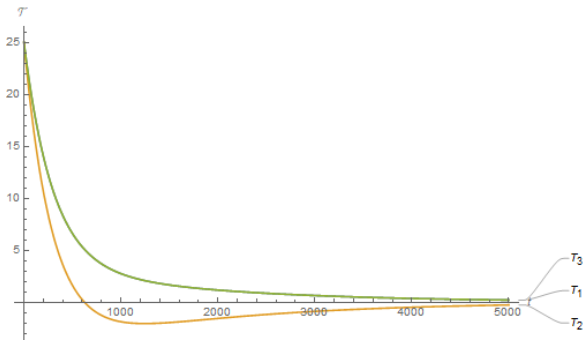


Gráfico 14. $\mathcal{K} = 0.001$

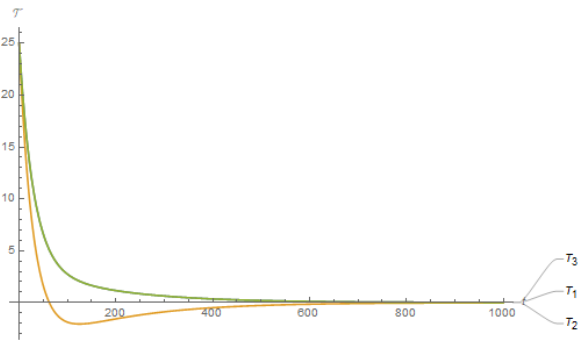


Gráfico 15. $\mathcal{K} = 0.01$

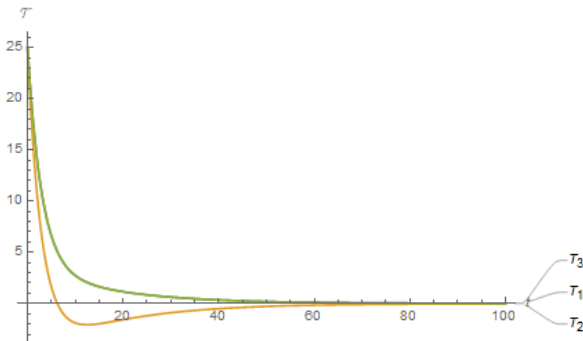


Gráfico 16. $\mathcal{K} = 0.1$

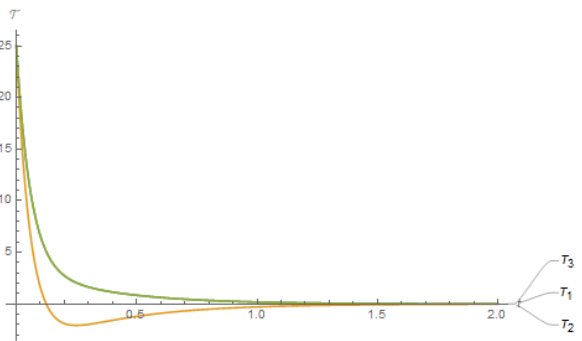


Gráfico 17. $\mathcal{K} = 5$

En los gráficos 18 y 19 se colocaron las temperaturas iniciales $T_A = 60^\circ\text{C}$, $T_B = 30^\circ\text{C}$ y $T_C = 5^\circ\text{C}$ variando y con $\mathcal{K} = 0.001$ y $\mathcal{K} = 1.5$.

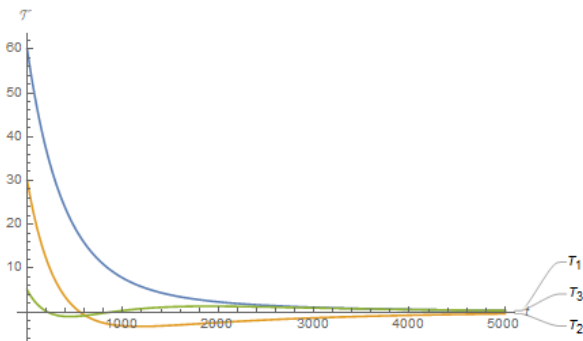


Gráfico 18. $\mathcal{K} = 0.001$

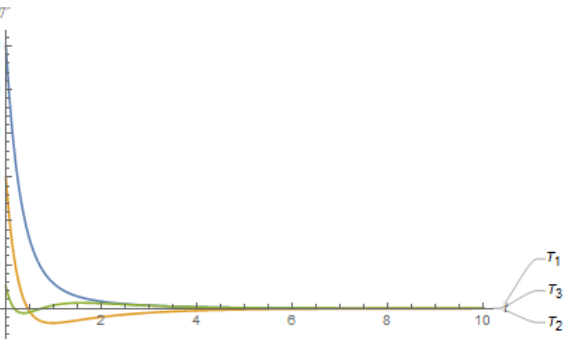


Gráfico 19. $\mathcal{K} = 1.5$

Entonces, una vez presentados los resultados podemos concluir que \mathcal{K} influye en el tiempo en que las paredes llegan al estado estacionario, es decir, si $0 < \mathcal{K} < 1$ entonces el tiempo para alcanzar el estado estacionario es mayor a 1000s; en el caso que $\mathcal{K} > 1$ tenemos que el tiempo para alcanzar el estado estacionario disminuye radicalmente, al grado de llegar a unos cuantos segundos como se puede observar en los gráficos. De igual forma que en el análisis donde $\mathcal{K} = 1$, los mínimos de temperatura se mantienen, la diferencia se encuentra en que se alcanzan a diferentes tiempos, dependiendo del valor de \mathcal{K} . La forma de decaimiento más rápido de la temperatura es cuando las paredes finales están a la misma temperatura, pero la pared central está a una temperatura opuesta.

En este caso, el calor no solo se transfiere de las paredes finales al baño, sino también a la pared central, elevando su temperatura y, por lo tanto, bajando aún más la temperatura de

las paredes finales, lo que muestra un mínimo considerable de temperatura para las distribuciones T_1 y T_2 .

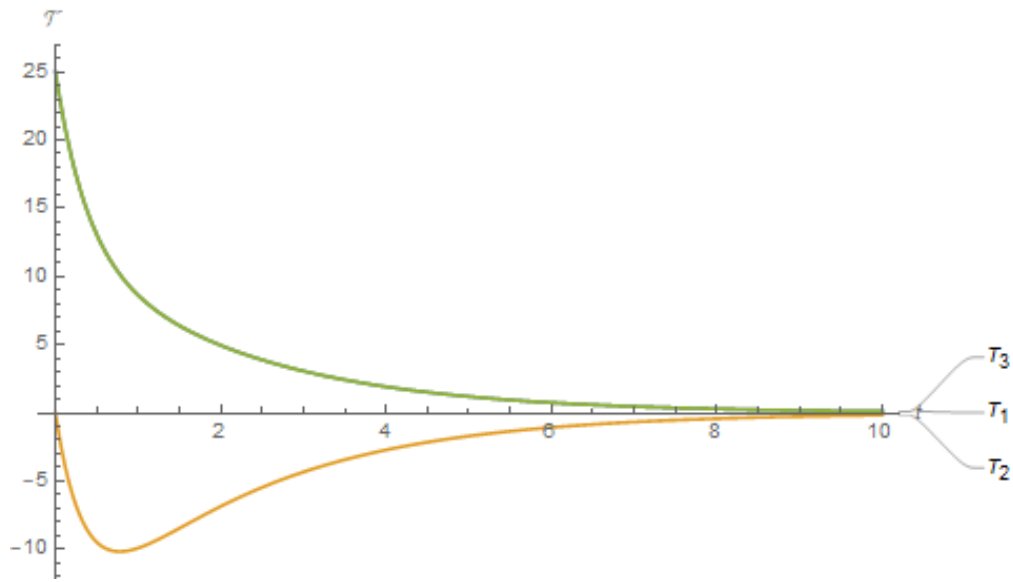


Gráfico 20. $\mathcal{K} = 0.8, T_A = 25\text{ }^\circ\text{C}, T_B = 0\text{ }^\circ\text{C}$ y $T_C = 25\text{ }^\circ\text{C}$.

4.2 Análisis de la transferencia de energía transitoria a través de paredes compuestas con la Ecuación de Energía

Para el análisis de resultados de la segunda parte del desarrollo, recordemos la ilustración 6 y definamos $L = 150\text{ cm}$, por lo que si los tres aislantes son de un espesor homogéneo $L_1 = L_2 = L_3 = 50$. También será necesario proponer las funciones de temperatura inicial para cada pared para con ello calcular los coeficientes de cada distribución de temperatura y finalmente acorde a las características de cada material, daremos un valor para cada coeficiente de difusión de energía.

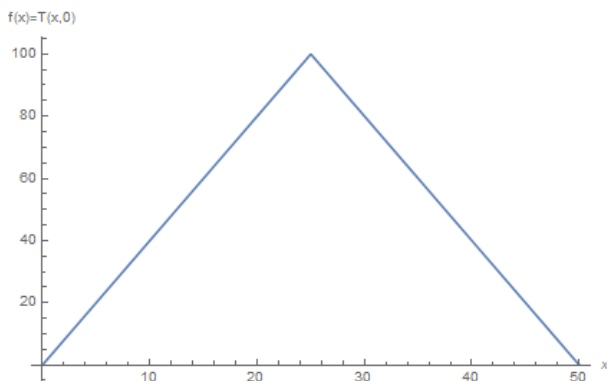


Gráfico 21

Iniciaremos con la distribución de temperatura de la pared 2, para lo cual se propone que su temperatura inicial está dada por una función triangular como la que se muestra en el gráfico 21. En $t = 0$ la superficie lateral se encuentra completamente aislada y sus dos extremos en contacto con los aislantes de las paredes 1 y 3. La serie de onda triangular par, que modela la función de temperatura inicial se obtuvo de la referencia [4].

$$f(x) = 50 - \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=2,6,10\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

La suma se desarrolla para todos los enteros positivos de la forma $2m - 2$ por lo que podemos iniciar en 1 la suma y $T_2(x, t)$ quedaría como

$$T_2(x, t) = 50 - \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n - 2)^2} e^{\left(\frac{-(4n-2)^2 \pi^2 \alpha_2 t}{2500}\right)} \cos\left(\frac{(4n - 2)\pi x}{50}\right)$$

Dato interesante: Se realizó el análisis de esta distribución de temperatura con la condición inicial $f(x) = T_0$, ya que todos los coeficientes de la serie se vuelven cero, excepto a_0 que es tal cual la temperatura inicial para cualquier tiempo. Esta condición es físicamente complicada de alcanzar, ya que lo que describe es que los aislantes son perfectos y el sistema mantiene la energía dentro de sí todo el tiempo y por supuesto, la mayoría de las veces esto nunca ocurre en los fenómenos con los que trabajamos. Es claro que esto es resultado de las condiciones de frontera aislada que se proponen en 27.a. Todo esto se ilustra en el gráfico 22.

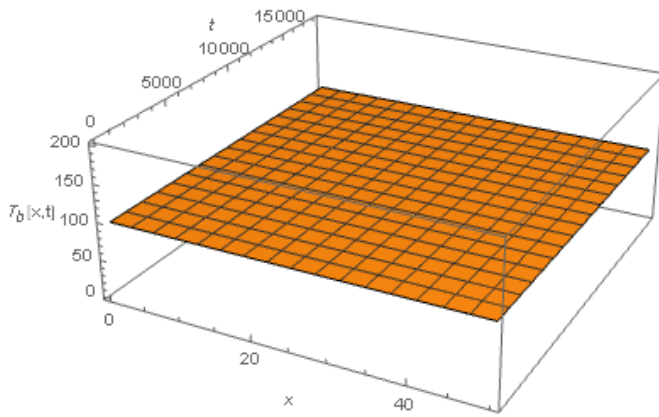


Gráfico 22

En las distribuciones de temperatura 1 y 3 se utilizó esta condición inicial y resulta ser bastante útil bajo ciertas condiciones como ya se verá más adelante.

Entonces, como se dijo, para la distribución de temperatura de la primera pared se propuso que $f(x) = T_0$, por lo que

$$b_n = \frac{2T_0}{L_1} \int_0^{L_1} \text{sen}\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2L_1}\right) dx$$

Y al resolver la integral se obtiene

$$b_n = \begin{cases} \frac{4T_0}{(2n - 1)\pi} & \text{para } n \text{ impar} \\ \frac{4T_0}{(2n - 1)\pi} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Así pues

$$T_1(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_1}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha t}{4L_1^2}}$$

De la misma forma para la tercera pared se propuso una condición inicial en la que $f(x) = T_0$ y los coeficientes de la serie quedan como

$$c_n = \frac{2T_0}{L} \int_0^{L_3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) dx$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4T_0}{(2n-1)\pi} & \text{para } n \text{ impar} \\ -\frac{4T_0}{(2n-1)\pi} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

y finalmente

$$T_3(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L_3}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha t}{4L_3^2}}$$

NOTA: El criterio para decidir ¿qué valor c_n tomar? fue que, cuando n se va a infinito todos los términos se anulan entre sí (porque sus signos se alternan) y sólo queda el término $\frac{4T_0}{(2n-1)\pi}$.

Ahora que ya se tienen las tres distribuciones de temperatura sólo queda conocer de qué material será cada pared y cuál será la temperatura inicial de las paredes externas.

[14] *Tabla 2*

$T_n(x, t)$	$T_1(x, t)$	$T_2(x, t)$	$T_3(x, t)$
$\alpha \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right]$	0.005 Concreto	0.00418 Poliestireno	0.0047 Yeso
$T_0 [^\circ\text{C}]$	100	NA	100
$k \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$	0.220	0.035	0.488

En la tabla 2 se muestra el orden de los materiales, su temperatura inicial (si es el caso) y su coeficiente de difusión térmica.

Se eligieron, concreto para la pared 1, poliestireno para la pared 2 y finalmente yeso para

la pared 3.

Cabe resaltar que la elección es arbitraria, pero sin duda el comportamiento de los gráficos nos dará suficiente información acerca de la elección del material y por supuesto el orden.

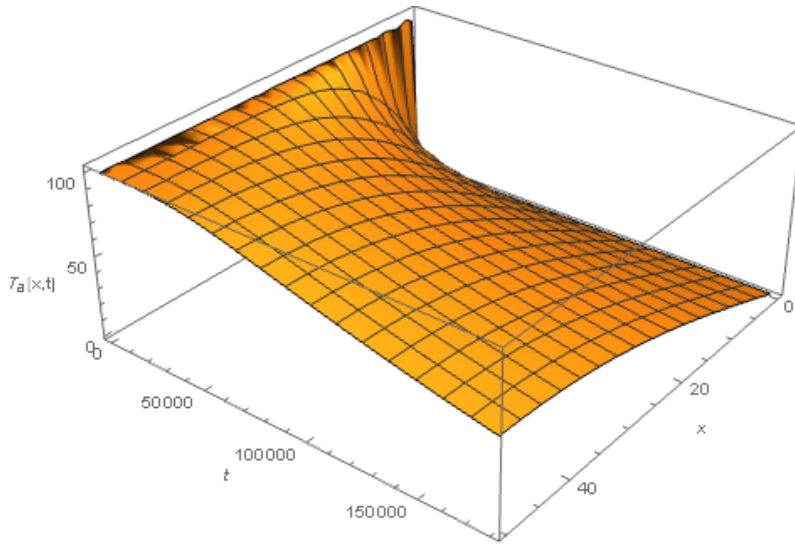


Gráfico 23

En el gráfico 23 se observa el comportamiento de la temperatura para la pared 1, como acotación, fue necesario extender el tiempo hasta 180 000 s (50 h) para observar el comportamiento de la temperatura con más claridad; como se mencionó en la primera parte de esta tesis, el estado transitorio de la pared dura lo suficiente como para concluir que el concreto es un excelente aislante.

En la gráfica de contornos, se puede ver como la temperatura disminuye lentamente a pesar de que el gradiente de temperatura entre el baño térmico (0°C) y la pared (100°C) es muy grande. Adicionalmente, podemos concluir que el concreto aislará bien un fluido cualquiera que se encuentre a mayor temperatura, por ejemplo, agua hirviendo, incluso mezclas de

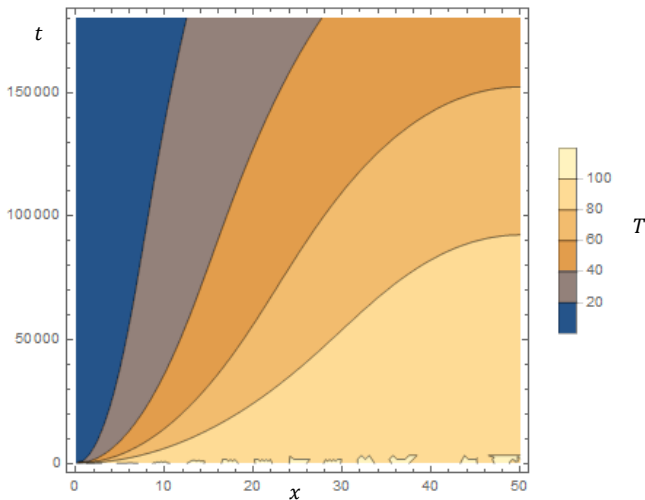


Gráfico 24

sílice fundida para elaborar productos de vidrio.

En la pared 2 observaremos desde diferentes perspectivas los gráficos con el objetivo de obtener información relevante

al análisis de resultados. El material elegido para esta pared es poliestireno.

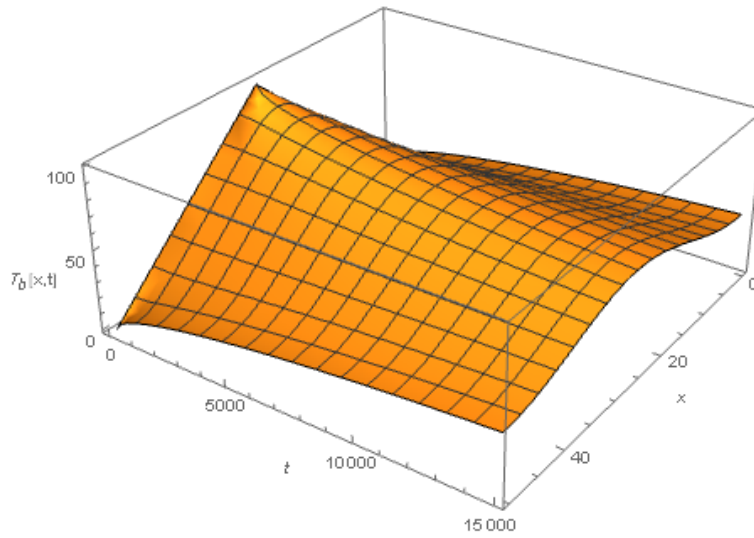
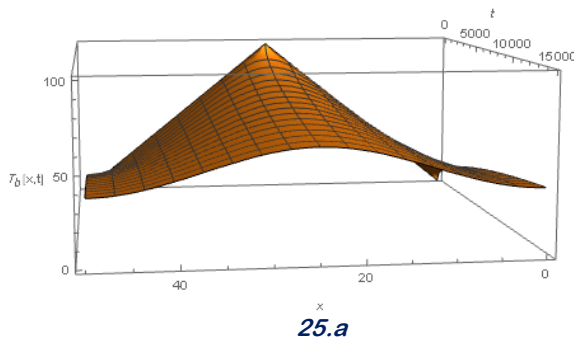
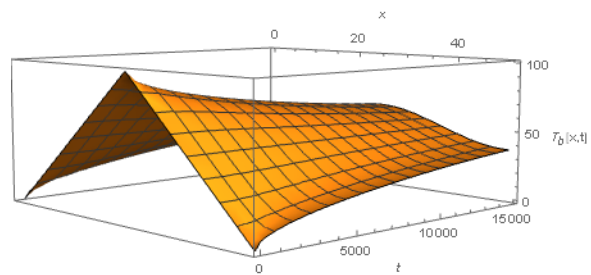


Gráfico 25



25.a



25.b

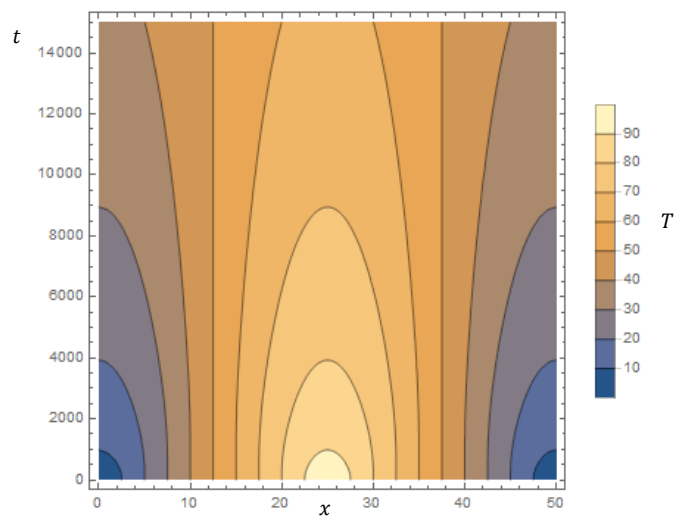


Gráfico 26

El gráfico 25 muestra el comportamiento de $T_2(x, t)$ para los primeros 15000s (4.16h) y se observa que la temperatura en la pared inicia con un máximo en la parte central, pero rápidamente se distribuye la energía en la pared con el incremento del tiempo, lo que “promedia” de cierta forma a $T_2(x, t)$ a lo largo de x .

En el gráfico 26, los contornos muestra claramente como la energía se distribuye del centro (donde está el máximo de temperatura) hacia los extremos, aumentando ligeramente la temperatura conforme transcurre el tiempo, por supuesto esto debe pasar en la pared central ya que también las paredes contiguas aportan calor a la pared central y limitan su transferencia de energía; este fenómeno se puede observar como una acumulación de energía en la pared central que sin duda podría ser la función principal de la segunda pared en un aislante compuesto de 3 paredes.

Finalmente, para la pared 3, se decidió utilizar yeso ya que puede ser un buen componente como aislante debido a su similitud con el concreto. Es importante diferenciar el tiempo en que se evalúan los materiales ya que dependiendo de sus características así tardarán en transferir la energía al medio que los rodea, es por eso por lo que el yeso será “la última barrera” en la transferencia de energía.

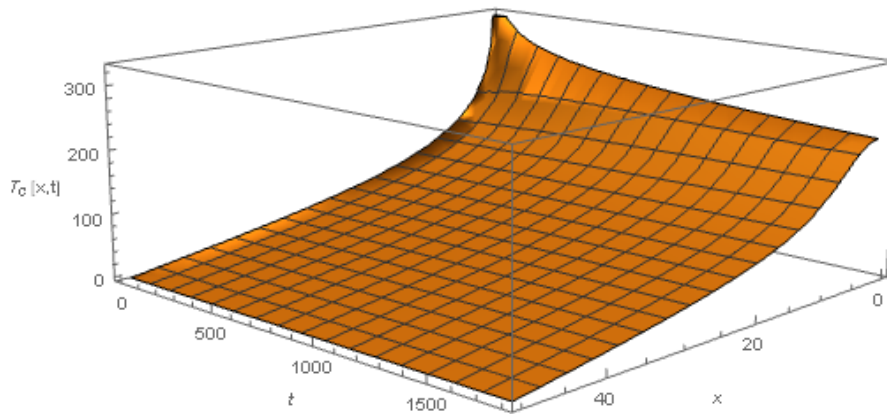


Gráfico 27

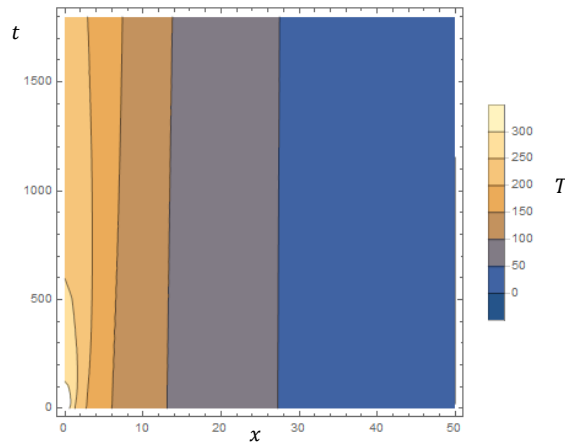


Gráfico 28

La última parte de este análisis nos lleva a los gráficos 27 y 28, donde se muestra el comportamiento de la distribución de temperatura para la pared 3. En el primero se observa que en $x = 0$ hay un incremento de la temperatura para los primeros segundos de la transferencia, este comportamiento probablemente sea resultado de la condición de frontera 27.d y también a la energía que la pared 2 puede transferir a la pared 3, sin embargo, este comportamiento es muy rápido y en los siguientes segundos la energía se redistribuye en la pared. En el gráfico de contornos (28) se observa cómo disminuye la rapidez de transferencia de energía, ya que conforme se avanza en la longitud de la pared la temperatura disminuye y esto nos habla de la “dificultad de tránsito” de la energía hacia el medio exterior. Lo que nos lleva a la conclusión de que el yeso también es un buen aislante, además de un material barato para los procesos industriales.

Todos los códigos de programación de los gráficos se muestran en el capítulo 6.

5 Conclusiones

Las ecuaciones diferenciales y las matemáticas en general son una herramienta invaluable para la creación de modelos matemáticos que describan los fenómenos que ocurren en el universo y la creación de un modelo debe pasar por tres etapas

1. La formulación del modelo a través del lenguaje de las matemáticas sobre un problema del universo.
2. El análisis o solución del problema matemático resultante.
3. La interpretación de los resultados matemáticos a través de gráficos o de respuestas a las interrogantes planteadas inicialmente.

Y eso fue justamente la trayectoria por la que pasamos. Este trabajo de tesis se puede dividir en dos partes, el planteamiento de un modelo matemático con la Ley de Enfriamiento de Newton, en el que se omitió la dependencia de la posición. Sin embargo, a pesar de lo simple del modelo se observó que puede describir muy bien el comportamiento general de la pared compuesta. Por otro lado, pudimos darnos cuenta de que no hay una solución que se ajuste de manera precisa al comportamiento de la transferencia en la vida real, por lo que podemos concluir que la Ley de Enfriamiento de Newton es un modelo simplificado que nos permite conocer en primera instancia el comportamiento del fenómeno, pero solamente se da cuando hacemos ciertas acotaciones al realizar el estudio; es importante resaltar la importancia del valor de \mathcal{K} como múltiplo de los valores propios en el caso 2 y de los valores y vectores propios en el caso 1, ya que cuando $0 < \mathcal{K} < 1$ el tiempo para alcanzar el estado estacionario es mucho mayor que cuando $\mathcal{K} \gg 1$.

La segunda parte es el análisis a través de la ecuación de energía que nos llevó a una ecuación diferencial parcial y en donde sí era necesario considerar el tiempo y el espacio. Nuestro modelo fue una pared simple, posteriormente se extendió a una pared compuesta por tres paredes, por supuesto que la complejidad de las matemáticas exigió mucho más trabajo, pero eso valió para concluir que:

- El estado transitorio depende de las características del material o fenómeno a estudiar, es decir, puede ser muy corto si hablamos de una pared de metal o mucho más largo si se trata de una pared de concreto, como se puede observar en el caso 3.
- La función de temperatura inicial es un elemento crucial al utilizar los modelos aquí desarrollados, ya que como se pudo observar en el capítulo de Análisis de Resultados, no siempre elegir T_0 como función de temperatura inicial, resulta práctico e incluso nos aleja de la solución real del sistema. La razón de hacer modelos más complejos, como en la segunda parte de este trabajo, radica en que se aproximan más a la realidad que un modelo simple.
- Se comprobó que las expresiones analíticas obtenidas son correctas ya que cumplen con las condiciones de frontera, iniciales o ambas según sea el caso.
- La transferencia transitoria de energía a través de paredes compuestas es un fenómeno poco estudiado pero muy recurrente en muchos procesos industriales y de la vida cotidiana, es por eso por lo que $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$ y $T_3(x, t)$ son aplicables al menos a una geometría más, la cilíndrica, en la que se podría modelar un cilindro con la envoltura aislada, para observar la transferencia en los extremos de la barra.
- Como pudimos observar en el análisis de resultados las tres distribuciones de temperatura de los casos 3 y 4 normalmente convergen bastante rápido, a menos de que t sea muy pequeño, por tanto, resultan prácticas para cálculos numéricos.
- Las condiciones de frontera e iniciales pueden derivar en un problema matemático de alta complejidad, pero son absolutamente necesarias para la solución y el análisis del problema, en este trabajo fueron útiles para acoplar tres ecuaciones que describían una sola pared compuesta.
- Los modelos matemáticos que se obtuvieron nos permiten elegir adecuadamente los aislantes y el orden de estos en la pared, de tal manera que se ajusten correctamente a los requerimientos del sistema de aislamiento.
- A pesar de la complejidad matemática que pudieran tener los modelos aquí desarrollados se construyeron en base a un conjunto de consideraciones/suposiciones que permiten simplificar los cálculos.
- Para validar las expresiones de temperatura en cualquiera de los casos hará falta trabajo experimental, que está fuera de este trabajo de tesis, pero será la pauta para proponer la metodología de experimentación que compruebe lo observado en los gráficos.

El trabajo que resta es evaluar las distribuciones de temperatura cuando alcanzan el estado estacionario considerando las características de cada material que compone la pared, sin embargo, es necesario una tesis acerca de este tema también muy relevante.

Finalmente, nos queda mencionar que logramos modelar un fenómeno de transferencia transitoria de energía en paredes compuestas desde diferentes perspectivas que nos permiten saber que el camino por recorrer en esta línea de investigación aún es largo, pero el hecho de haber conjuntado las Matemáticas y los Fenómenos de Transporte, específicamente la transferencia de energía es un aporte muy valioso a la Ingeniería Química, porque sin duda la energía es lo que mueve todo en el universo.



6 Apéndice

6.1 Multiplicidad de \mathcal{K} con los valores propios asociados a la distribución de temperatura en el caso 1.

En los casos 1 y 2 se eligió que $\mathcal{K} = 1$ para simplificar el cálculo ya que la constante está asociada a los valores propios de cada sistema lo que la convierte en un múltiplo de estas como se verá a continuación.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{K} & \mathcal{K} \\ \mathcal{K} & -2\mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que este es un caso que nos sirve exclusivamente para ejemplificar el procedimiento matemático empleado en la primera propuesta de solución, que sin duda se complica en problemas donde la física y las características de los materiales son muy diversas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{K} & \mathcal{K} \\ \mathcal{K} & -2\mathcal{K} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene como solución de equilibrio

$$\mathcal{J}_\epsilon = \mathbf{0}$$

Entonces

$$(\mathcal{J}(t))_j = v_j e^{\lambda_j t}$$

Es una solución donde λ_j es un valor propio de \mathbf{A} y v_j es el vector propio asociado a λ_j .

Para obtener los valores propios del sistema resolvemos la ecuación 6 para conocer el polinomio característico. Para simplificar el proceso utilizamos los invariantes de la matriz \mathbf{A} tal como se hizo en los casos 1 y 2.

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = -4\mathcal{K} \quad \text{y} \quad \text{Det}(\mathbf{A}) = 4\mathcal{K}^2 - \mathcal{K}^2$$

Si
$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{A})\lambda + \text{Det}(\mathbf{A}) = 0$$

Entonces la ecuación característica de la matriz \mathbf{A} se vuelve:

$$\lambda^2 + 4\mathcal{K}\lambda + 3\mathcal{K}^2 = 0$$

Al resolver este polinomio de segundo grado los valores propios que se obtienen son:

$$\lambda_1 = -\mathcal{K} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3\mathcal{K}$$

Cuyos vectores propios asociados son:

Para $\lambda_1 = -\mathcal{K}$

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{K} & 1 \\ 1 & -\mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$-v_1\mathcal{K} + v_2 = 0$$

$$v_1 - v_2\mathcal{K} = 0$$

Donde $v_1 = v_2\mathcal{K}$, por lo que podemos decir que $v_1 = 1$

$$\therefore \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\mathcal{K} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -3\mathcal{K}$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K} & 1 \\ 1 & \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$v_1\mathcal{K} + v_2 = 0$$

$$v_1 + v_2\mathcal{K} = 0$$

Es evidente que $v_1 = -v_2\mathcal{K}$, por lo tanto, si $v_1 = -1$ entonces $v_2 = 1/\mathcal{K}$.

Y el vector propio asociado es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\mathcal{K} \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos los vectores propios se puede escribir una solución como la combinación lineal de las soluciones asociadas a cada valor propio:

Ecuación 42

$$\mathcal{J} = c_1 e^{-\mathcal{K}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\mathcal{K} \end{pmatrix} + c_2 e^{-3\mathcal{K}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\mathcal{K} \end{pmatrix}$$

6.2 Ecuaciones importantes

Ecuación diferencial	Solución
$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$	$\int g dy = \int f dx + c_1$
$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$	$y = e^{-\int f dx} \left(\int e^{\int f dx} g dx + c_1 \right)$
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$	$y = c_1 \cos(ax) + c_2 \text{sen}(ax)$
$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = 0$	$y = c_1 \cosh(ax) + c_2 \text{senh}(ax)$
$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + a^2 y = 0$	$y = \frac{c_1}{x} \cos(ax) + \frac{c_2}{x} \text{sen}(ax)$

Bird, R. Stewart, E. y Lightfoot, E. (2006). Fenómenos de Transporte. México: Limusa Wiley. pp.1001

La ecuación de energía en términos de q

$$\left[\rho C_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v) \right]$$

Coordenadas cartesianas (x,y,z)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v)$$

Coordenadas cilíndricas (r,θ, z)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v)$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right] - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v)$$

Bird, R. Stewart, E. y Lightfoot, E. (2002). Fenómenos de Transporte. México: Limusa Wiley. pp. 997

6.3 Códigos de programación en *Mathematica*

Distribución de temperatura transitoria para el caso 2 con Ley de Enfriamiento de Newton

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES Demostración

```

In[40]:= g1 =
Manipulate[Plot[{- (1/4) (T33 - T11) e^{-2 t} + (1/4) (\sqrt{2}) (T22 + T11 + T33) e^{-(2 \sqrt{2}) t} + (1/4) (- (\sqrt{2}) (T22) + T11 + T33) e^{-(2 \sqrt{2}) t},
  (1/\sqrt{2}) (1/4) (\sqrt{2}) (T22) + T11 + T33) e^{-(2 \sqrt{2}) t} - (\sqrt{2}) (1/4) (- (\sqrt{2}) (T22) + T11 + T33) e^{-(2 \sqrt{2}) t},
  (1/2) (T33 - T11) e^{-2 t} + (1/4) (\sqrt{2}) (T22) + T11 + T33) e^{-(2 \sqrt{2}) t} + (1/4) (- (\sqrt{2}) (T22) + T11 + T33) e^{-(2 \sqrt{2}) t}}, {t, 0, 10}],
  PlotRange -> Full, Frame -> TrueQ,
  PlotLabels -> {T1, T2, T3}, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {t, T}, {T11, -5, 100}, {T22, -5, 100}, {T33, -5, 100}],
  {etiquetas de representación [origen de ejes [etiqueta de ejes
  
```


Distribución de temperatura transitoria para el caso 2 con Ley de Enfriamiento de Newton con dependencia de \mathcal{K} .

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

Demostraciones | MathWorld

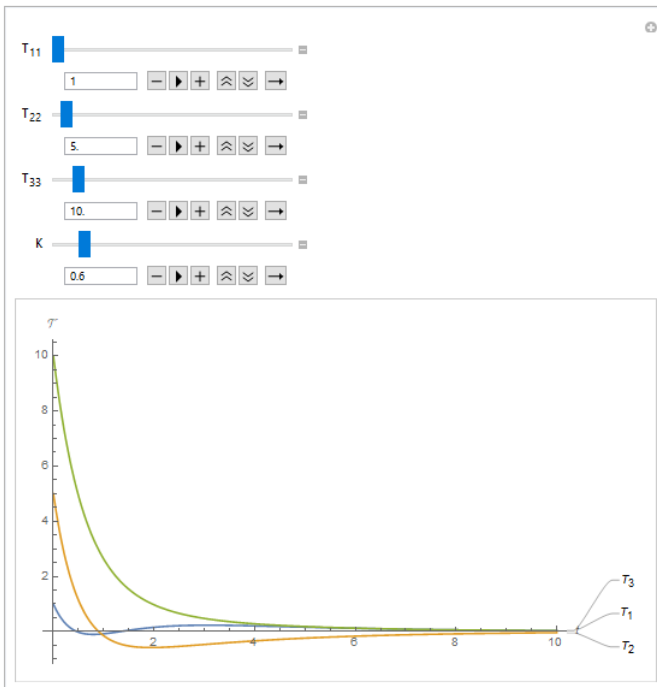
In[1]:= G1 =

Manipulate[Plot[{- $\left(\frac{1}{2}(T_{33} - T_{11})\right) e^{-2Kt} + \left(\frac{1}{4}\left((\sqrt{2})(T_{22}) + T_{11} + T_{33}\right)\right) e^{-K(2+\sqrt{2})t} + \left(\frac{1}{4}\left(-(\sqrt{2})(T_{22}) + T_{11} + T_{33}\right)\right) e^{-K(2-\sqrt{2})t}$,

$(\sqrt{2})\left(\frac{1}{4}\left((\sqrt{2})(T_{22}) + T_{11} + T_{33}\right)\right) e^{-K(2+\sqrt{2})t} - (\sqrt{2})\left(\frac{1}{4}\left(-(\sqrt{2})(T_{22}) + T_{11} + T_{33}\right)\right) e^{-K(2-\sqrt{2})t}$,

$\left(\frac{1}{2}(T_{33} - T_{11})\right) e^{-2Kt} + \left(\frac{1}{4}\left((\sqrt{2})(T_{22}) + T_{11} + T_{33}\right)\right) e^{-K(2+\sqrt{2})t} + \left(\frac{1}{4}\left(-(\sqrt{2})(T_{22}) + T_{11} + T_{33}\right)\right) e^{-K(2-\sqrt{2})t}$, {t, 0, 10}, PlotRange -> Full, Frame -> TrueQ,

PlotLabels -> {T₁, T₂, T₃}, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {t, T}, {T₁₁, 1, 100}, {T₂₂, 1, 100}, {T₃₃, 1, 100}, {K, 0.001, 5}]

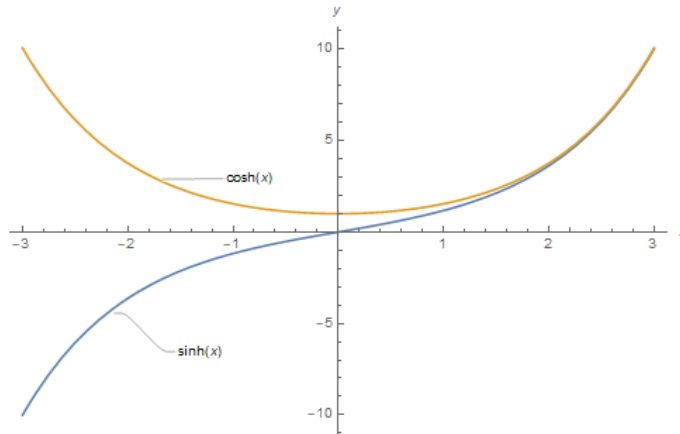


Funciones Seno Hiperbólico y Coseno Hiperbólico

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

```
In[11]:= Plot[{Sinh[x], Cosh[x]}, {x, -3, 3}, PlotRange -> Full, PlotLabels -> {Sinh[x], Cosh[x]}, AxesLabel -> {x, y}]
```

[repre... | seno hipe... | coseno hiperbólico | rango de rep... | compl... | etiquetas de rep... | seno hipe... | coseno hip... | etiqueta de ejes



Valores propios ecuación 16

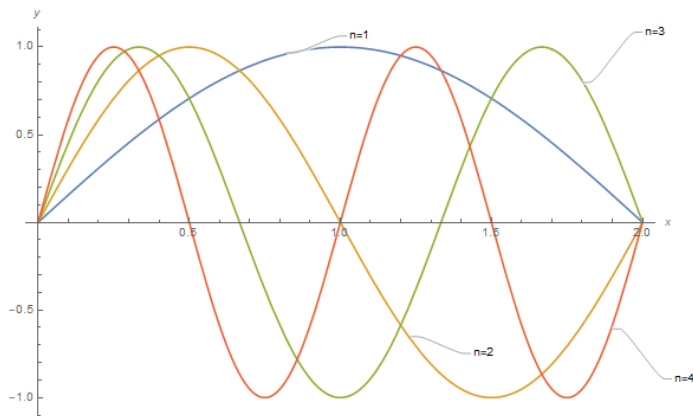
WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

```
In[1]:= c3 = 1
```

```
Out[1]= 1
```

```
Plot[{c3 Sin[π x / L], c3 Sin[2 π x / L], c3 Sin[3 π x / L], c3 Sin[4 π x / L]}, {x, 0, L = 2}, PlotLabels -> {"n=1", "n=2", "n=3", "n=4"}, AxesLabel -> {x, y}]
```

[represe... | seno | seno | seno | seno | etiquetas de representación | etiqueta de ejes



Distribución de temperatura $T(x, t)$ para una pared de concreto

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

$T_a = 100$
 $L = 50$
 $\alpha = 0.005$
 $s = 250$

$$T[x_, t_] := \frac{4 T_a}{\pi} \sum_{n=1}^s \frac{1}{2 n - 1} \left(e^{-\frac{(2 n - 1)^2 \pi^2 \alpha}{L^2} t} \right) \left(\text{Sin} \left[\frac{(2 n - 1) \pi}{L} x \right] \right)$$

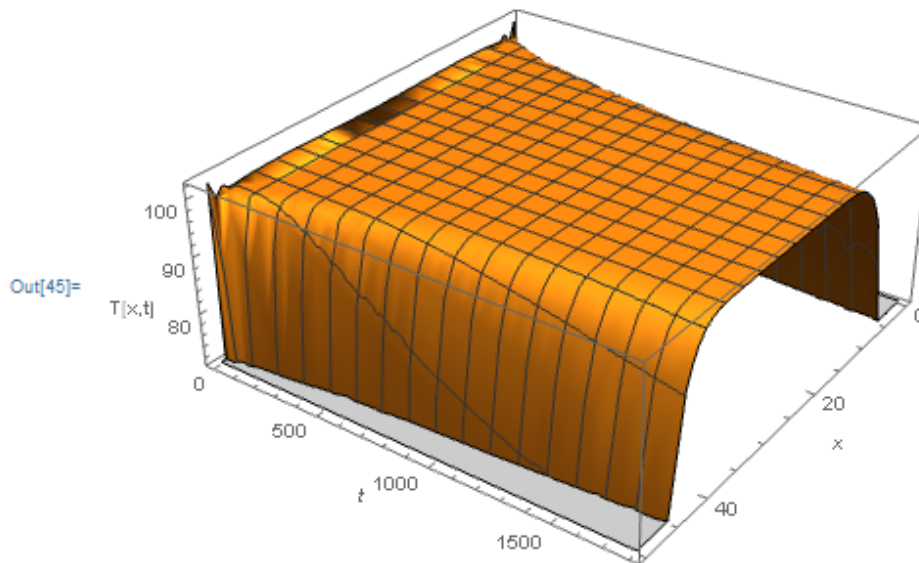
Out[40]= 100

Out[41]= 50

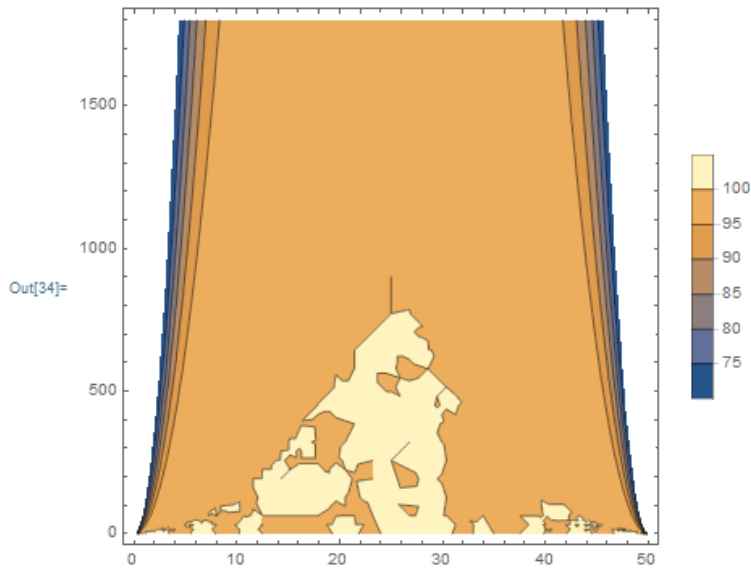
Out[42]= 0.005

Out[43]= 250

In[45]= `Plot3D[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 1800}, AxesLabel -> {x, t, "T[x,t]"}]`
|representación gráfica 3D |etiqueta de ejes

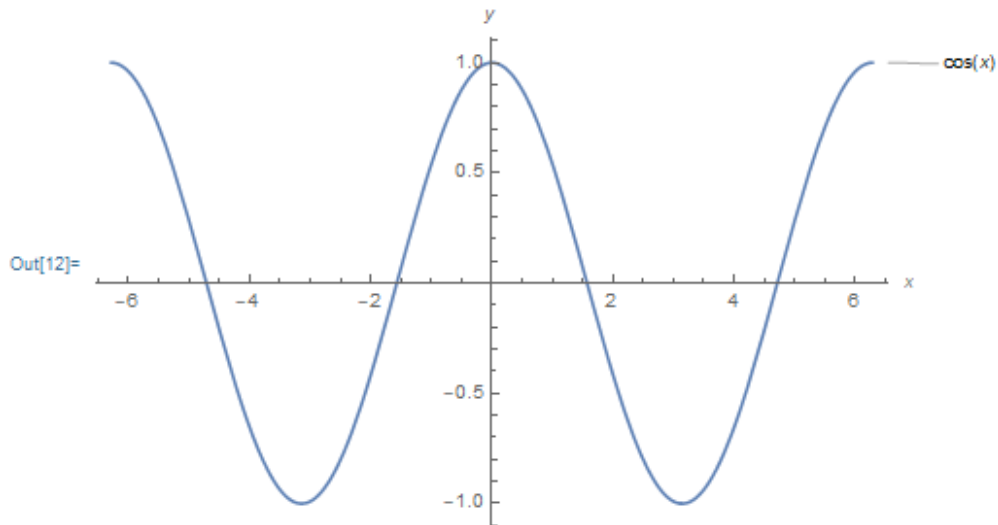


In[34]= `ContourPlot[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 1800}, AxesLabel -> {"t", "x"}, PlotLegends -> Automatic]`
[representación de contornos] [etiqueta de ejes] [leyendas de rep... [automático]



Función Cos(x)

`Plot[Cos[x], {x, -2 π, 2 π}, AxesLabel -> {x, y}, PlotLabels -> {cos[x]}]`
[rep... [coseno] [etiqueta de ejes] [etiquetas de representación]



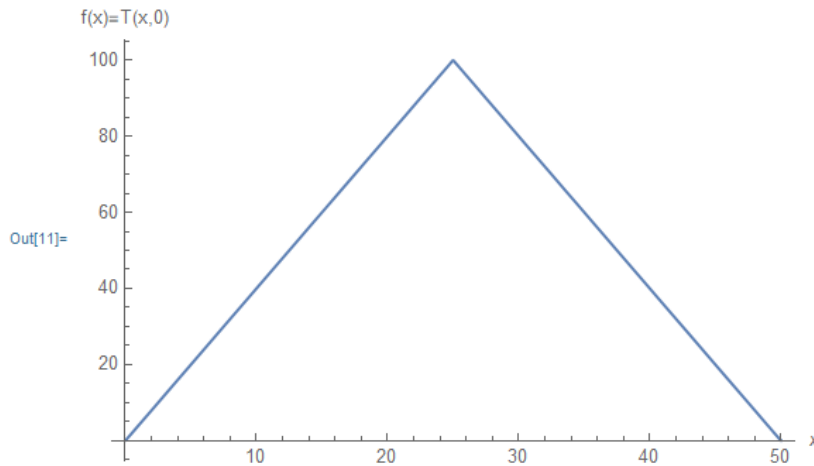
Función Triangular

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

In[3]:= $s = 100$

$$f[x] = 50 - \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=1}^s \frac{1}{(4n-2)^2} \left(\underset{\text{coseno}}{\text{Cos}} \left[\frac{(4n-2)\pi}{50} x \right] \right)$$

In[11]:= `Plot[f[x], {x, 0, 50}, AxesLabel -> {x, "f(x) = T(x, 0)"}]`
|representación gráfica |etiqueta de ejes



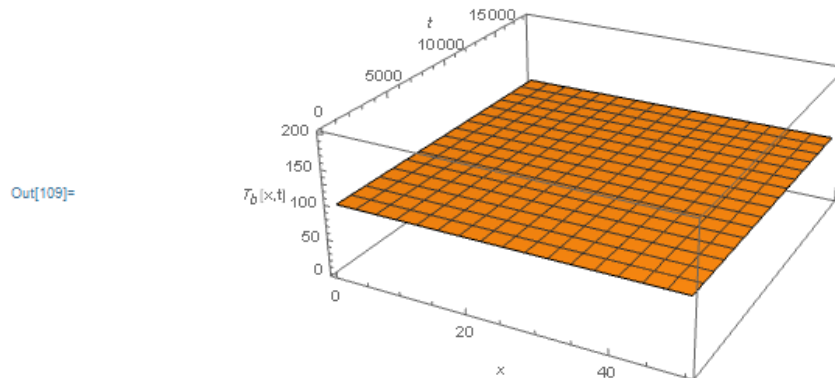
Distribución de temperatura 2 con $f(x) = T_0$

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

In[104]:= $T_a = 100$

`T[x_, t_] := T_a`

In[109]:= `Plot3D[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 18000}, AxesLabel -> {x, t, "T_0[x,t]"}]`
|representación gráfica 3D |etiqueta de ejes



Distribución de temperatura 1 con $f(x) = T_0$ para concreto.

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

$$\alpha = 0.005$$

$$s = 250$$

$$L = 50$$

$$T_a = 100$$

$$T[x_, t_] := \frac{4 T_a}{\pi} \sum_{n=1}^s \frac{1}{(2n-1)} \left(\text{Sin}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right] \right) \left(e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \alpha}{4L^2} t} \right)$$

Out[116]= 0.005

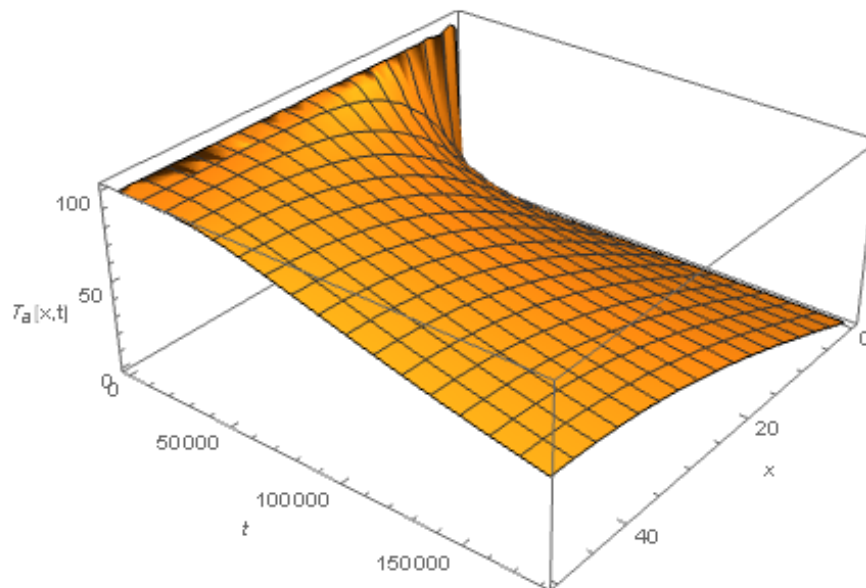
Out[117]= 250

Out[118]= 50

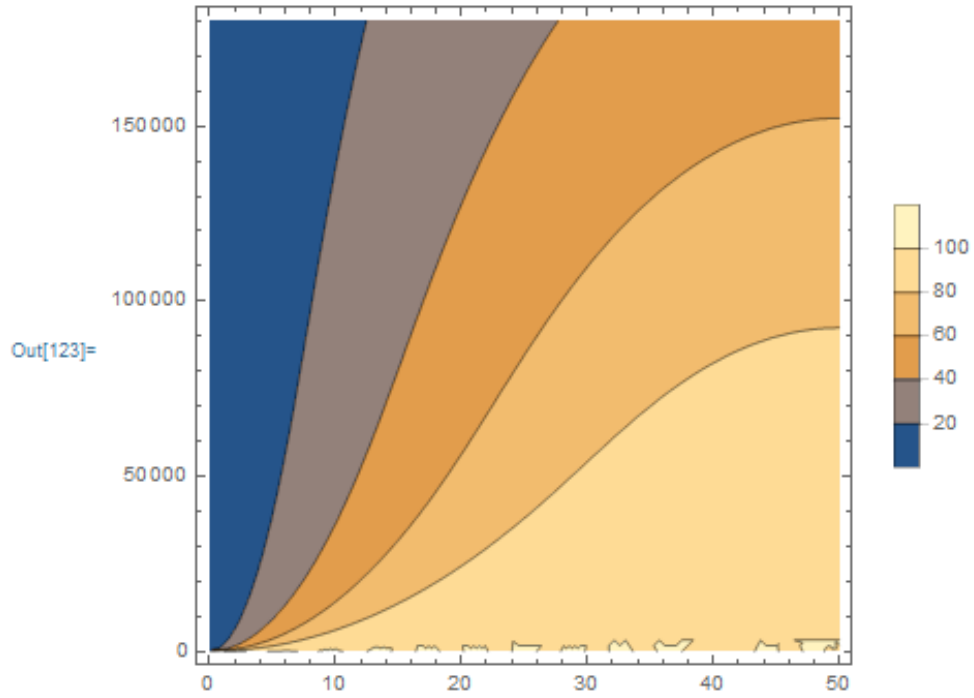
Out[119]= 100

In[121]:= `Plot3D[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 180000}, AxesLabel -> {x, t, "Ta[x,t]"}]`
[representación gráfica 3D] [etiqueta de ejes]

Out[121]=



In[123]:= `ContourPlot[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 180000}, PlotLegends -> Automatic]`
|representación de contornos |leyendas de rep... |automático



Distribución de temperatura 2 para poliestireno

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

$\alpha = 0.00418$

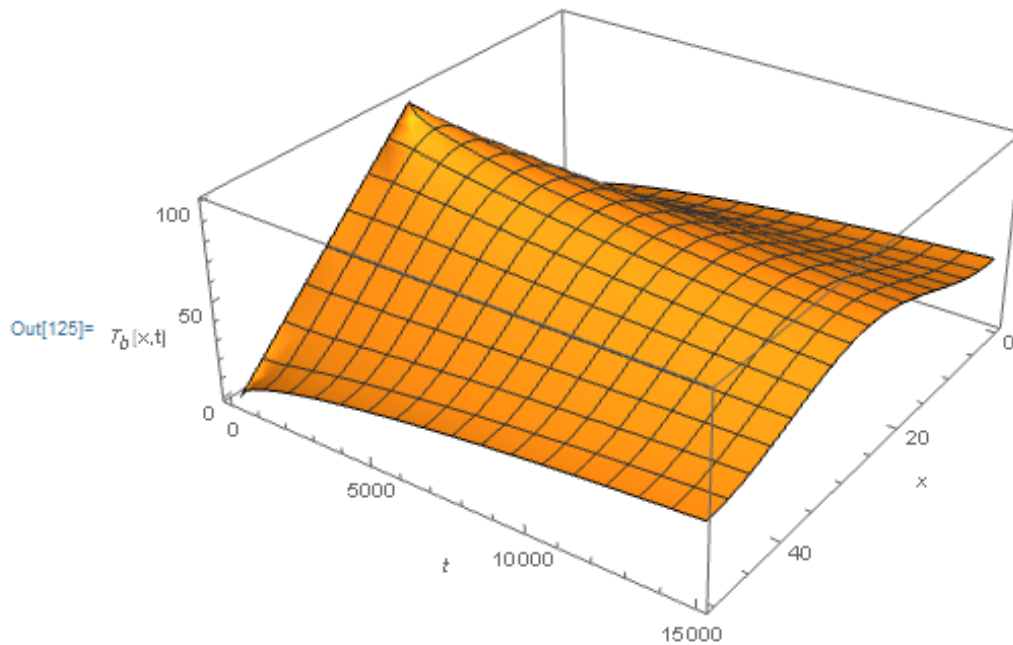
$s = 250$

Out[45]= 0.005

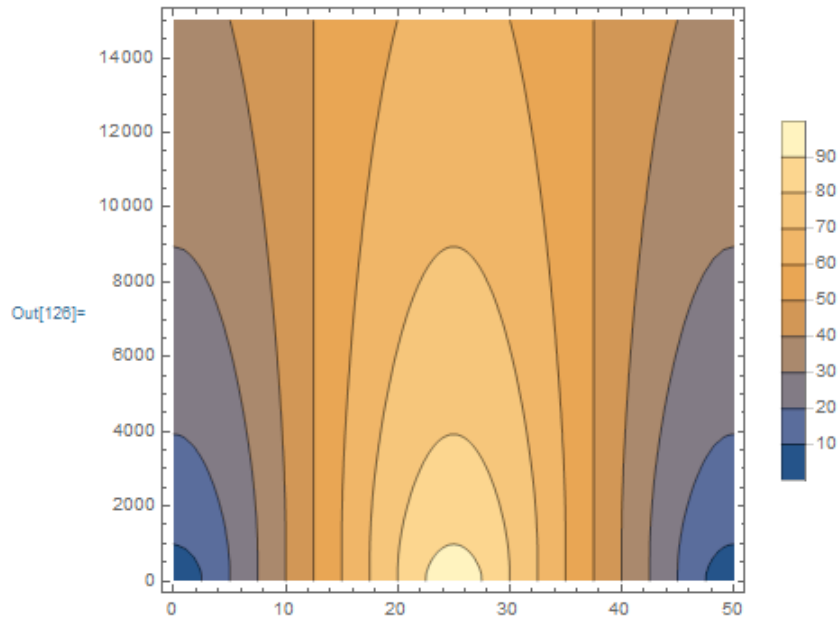
Out[46]= 250

$$\text{In[124]:= } T[x_, t_] := 50 - \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=1}^s \frac{1}{(4n-2)^2} \left(e^{-\frac{(4n-2)^2 \pi^2 \alpha}{2500} t} \right) \left(\underset{\text{coseno}}{\text{Cos}} \left[\frac{(4n-2)\pi}{50} x \right] \right)$$

In[125]:= **Plot3D**[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 15000}, AxesLabel -> {x, t, "T_b[x,t]"}]
[representación gráfica 3D] [etiqueta de ejes]



In[126]:= `ContourPlot[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 15000}, AxesLabel -> {t, x}, PlotLegends -> Automatic]`
[representación de contornos] [etiqueta de ejes] [leyendas de rep... [automático]



Distribución de temperatura 3 para yeso.

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA ESTUDIANTES

```
In[127]:=  $\alpha = 0.0047$   
 $s = 250$   
 $L = 50$   
 $T_a = 100$ 
```

$$T[x_, t_] := \frac{4 T_a}{\pi} \sum_{n=1}^s \frac{1}{(2n-1)} \left(\underset{\text{Coseno}}{\text{Cos}} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] \right) \left(e^{\frac{-(2n-1)^2 \pi^2 \alpha}{4L^2} t} \right)$$

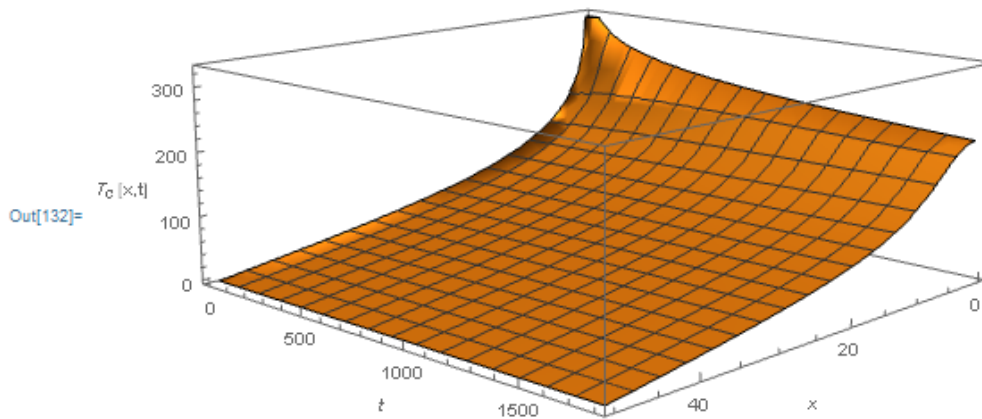
```
Out[127]= 0.0047
```

```
Out[128]= 250
```

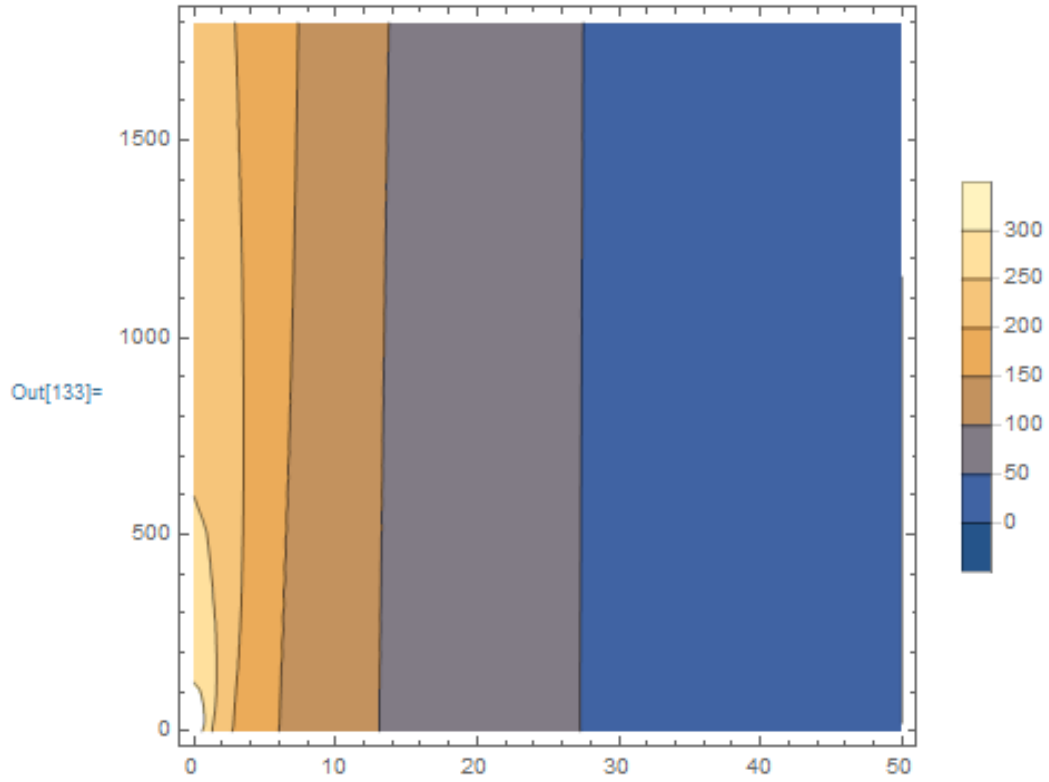
```
Out[129]= 50
```

```
Out[130]= 100
```

```
In[132]:= Plot3D[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 1800}, AxesLabel -> {x, t, "Tc[x,t]"}]  
|representación gráfica 3D |etiqueta de ejes
```



In[133]:= **ContourPlot**[T[x, t], {x, 0, 50}, {t, 0, 1800}, PlotLegends -> Automatic]
[representación de contornos] [leyendas de rep... [automático]



7 Bibliografía

- [1] Kath, W. (2002). Engineering Analysis 4, Ordinary Differential Equations. USA: Prentice Hall
- [2] Edwards, C.H. y Penney, D. (1986). Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones. México: Prentice Hall.
- [3] Bird, R. Stewart, E. y Lightfoot, E. (2002). Fenómenos de Transporte. México: Limusa Wiley.
- [4] Edwards, C.H. y Penney, D. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México: Prentice Hall.
- [5] Çengel, Y. y Ghajar A. (2011). Transferencia de calor y masa. México: McGraw-Hill.
- [6] Geankoplis, C. (1998). Procesos de transporte y operaciones unitarias. México: Compañía editorial continental.
- [7] Grossman, S. (2008). Álgebra lineal. México: McGraw-Hill
- [8] Incropera, F. and DeWitt, D. (1999). Fundamentals of Heat and Mass Transfer. USA: John Wiley & Sons.
- [9] Sitio web de Wolfram Research. Math World; consultado 4 de julio de 2020. <http://mathworld.wolfram.com>
- [10] Rice, R. and Do, D. (1995) Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers. USA: John Wiley & Sons.
- [11] Mickley, H., Sherwood, T. and Reed, C. (1957) Applied Mathematics in Chemical Engineering. USA: McGraw-Hill.
- [12] Bird, R. Stewart, E. Lightfoot, E. and Klingenberg, D. (2015). Introductory Transport Phenomena. USA: John Wiley & Sons.
- [13] R.P. Niu, G.R. Liu, M. Li, Inverse análisis of heat transfer across a multilayer composite wall with Cauchy boundary conditions. Elsevier (IJHMT), 2014, 727-735.
- [14] Guillén, C., Muciño, A., Santa Ana, P. & Verduzco, G. (2018, junio 17). Analysis of the Thermal Properties of Arundo Donax (reed) and Zea Mays (corn reed) for use as Insulation Material for Roofs. Academia XXII, 9, 90-107.

