UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Extensiones H-cerradas de Espacios Topológicos Hausdorff

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

OSVALDO APARICIO HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

2020

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

1. Datos del alumno
Osvaldo
Aparicio
Hernández
55 8015 8907
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310656713

2. Datos del tutor
Dr
Ángel
Tamariz
Mascarúa

3. Datos del sinodal 1
Dra
Natalia
Jonard
Pérez

4. Datos del sinodal 2
Dr
Alejandro Darío
Rojas
Sánchez

5. Datos del sinodal 3
Dr
Francisco Javier
Torres
Ayala

6. Datos del sinodal 4
Dr
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

7. Datos del trabajo escrito
Extensiones H-cerradas de Espacios Topológicos Hausdorff
94 p
2020

Índice general

Introducción

El concepto de espacio H-cerrado fue introducido en 1924 por Alexandroff y Urysohn en el artículo [1]. Alexandroff y Urysohn dejaron una pregunta abierta, la cual era, ¿cuándo un espacio Hausdorff puede ser encajado en un espacio H-cerrado? No fue hasta 1930, que Tychonoff demostró que cualquier espacio Hausdorff puede ser encajado (no necesariamente, de manera densa) en un espacio H-cerrado, ver [6]. Pasaron 10 años hasta que Katetov, Fomin, Sanin y Stone demostraron que cualquier espacio Hausdorff tiene a lo menos una extensión H-cerrada, la Extensión de Katetov. Fue gracias al artículo [4] publicado por Katetov, que la teoría de espacios H-cerrados tuvo un gran desarrollo. Al día de hoy, los espacios H-cerrados juegan un papel clave en el estudio de las Extensiones de Espacios Hausdorff.

En este trabajo nos centramos en el estudio de los espacios H-cerrados, más concretamente en las extensiones H-cerradas. Esta tesis está basada en el capítulo 7 del libro, [5]. El propósito de esta tesis es el estudio de cómo interactúan los diferentes tipos de extensiones H-cerradas que un espacio Hausdorff puede tener. Entre las extensiones H-cerradas de algún espacio Hausdorff, X, las que tienen mayor relevancia son: la extensión de Katetov, la extensión de Fomin y si el espacio X es semiregular también la extensión de Banacheveski; esta última extensión también llamada la extensión de Banacheveski-Fomin-Sanin. Dichas extensiones están intrínsecamente relacionadas ya que tienen como común denominador el mismo conjunto base pero con topologías no necesariamente equivalentes. Es importante hacer notar que los espacios compactos son espacios H-cerrados; es decir, los espacios H-cerrados son una generalización de los espacios compactos.

Para que el lector pueda seguir las ideas presentadas en este trabajo, es necesario que el lector tenga conocimientos sobre el área de Topología General. Los libros que se pueden consultar para un primer acercamiento a esta área de las Matemáticas son [3] y [2]. La notación de éste trabajo esta basada en el libro [2].

Los espacios topológicos a estudiar son los espacios Hausdorff, así que nos referiremos a ellos simplemente como espacios.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos previos al estudio de los espacios H-cerrados y extensiones H-cerradas, como son los filtros abiertos y los espacios semiregulares. Estos últimos juegan un papel fundamental en la teoría de los espacios H-cerrados, en particular, en el estudio de la extensión de Banacheveski.

En el capítulo 2, en la sección 2.1 se introducen los espacios H-cerrados, se estudian sus propiedades, y además se establecen condiciones necesarias y suficientes de cuándo un espacio H-cerrado es compacto. La sección 2.2 tiene como principal objetivo el poder identificar y caracterizar a los subespacios H-cerrados de un espacio H-cerrado. En la sección 2.3 se introducen los subespacios que se denominan H-conjuntos. Los H-conjuntos son una generalización de los espacios H-cerrados. La importancia de estos subespacios radica en la conexión intrínseca que tienen con los subespacios compactos de un espacio H-cerrado y Urysohn. Los espacios Urysohn son espacios que se introducen en la sección 2.5, y juegan un papel importante en la teoría de las extensiones H-cerradas. Y en la sección 2.4 se definen las funciones theta-continuas; tales funciones son una generalización de las funciones continuas. La importancia de las funciones theta-continuas radica en la versatilidad que en ellas se obtiene a la hora de estudiar los espacios H-cerrados.

En el capítulo 3, el capítulo más importante de esta tesis, se introducen las extensiones H-cerradas en la sección 3.1, además se construyen nuevas extensiones H-cerradas a partir de extensiones dadas, dichas extensiones se llaman Extensiones Simples y Extensiones Estrictas. Se estudian sus propiedades topológicas y el cómo se relacionan; esto en la sección 3.2. En la sección 3.3 se demuestra que todo espacio Hausdorff tiene una extensión H-cerrada, la extensión de Katetov; dicha extensión es el máximo proyectivo del conjunto de las extensiones H-cerradas del espacio en cuestión. Resulta que la extensión de Katetov es una extensión simple, así que muchos de los resultados en la sección 3.2 se aplican a esta nueva sección. En la sección 3.4 se introducen y se estudian las propiedades de la extensión de Fomin; dicha extensión es una extensión estricta. Más aún, la extensión de Fomin de un espacio X es la extensión estricta que se obtiene de la extensión de Katetov del espacio X. En la sección 3.5 se estudian las extensiones H-cerradas por un punto al igual que se estudian los espacios localmente H-cerrados, ya que las extensiones H-cerradas por un punto están restringidas a los espacios localmente H-cerrados; es decir, no todo espacio admite una extensión H-cerrada por un punto, solamente si el espacio es localmente H-cerrado éste posee una extensión H-cerrada por un punto. También es importante mencionar que un espacio localmente H-cerrado puede tener diferentes extensiones H-cerradas por un punto no equivalentes entre sí. Así que se establecen condiciones necesarias y suficientes de cuándo un espacio localmente H-cerrado tiene una única extensión H-cerrada por un punto. Y finalmente en la sección 3.6 se presenta la extensión de Banacheveski. Muchos de los resultados desarrollados en el capítulo 1 y en el capítulo 2 sirven para desarrollar la teoría de dicha extensión. Al final de dicha sección se establece la relación que hay entre las extensiones de Katetov, Fomin y Banacheveski y se exhiben algunos ejemplos.

Por último, en esta tesis se hacen observaciones a la teoría de extensiones H-cerradas que no vienen en el libro [5]. Éstas son enunciadas en las Proposiciones 3.1.5, 3.3.7, 3.3.17, 3.4.4 (4), 3.4.16, 3.4.17, 3.4.19, 3.5.7 y 3.6.15. En la Proposición 3.4.16, ejercicio propuesto del libro [5], menciona condiciones suficientes de cuando los cerrados regulares son espacios casi H-cerrados, la observación que se hace en la tesis es la demostración de que dicha condición es una condición necesaria y suficiente.

Capítulo 1

Preliminares

La meta de este primer capítulo es introducir las técnicas básicas y las propiedades más generales de los espacios topológicos que se usarán en el capítulo 2 y en el capítulo 3. Además se analizarán algunos ejemplos, y se desglozarán las propiedades que se consideren más relevantes a la hora de introducir los temas. Los espacios topológicos a estudiar son los espacios Hausdorff, a menos que se indique lo contrario, y se referirá a ellos simplemente como espacios.

1.1. Filtros abiertos

Entendemos por relación binaria en un conjunto X un subconjunto R del producto cartesiano $X \times X$, es decir $R \subseteq X \times X$. Si $(a,b) \in R$ entonces se denotará como aRb.

Definición 1.1.1. Un *orden parcial* en un conjunto X es una relación binaria $\leq$ en X, que satisface las siguientes condiciones:

1. Si $x \in X$, entonces $x \leq x$.

2. Si $x, y \in X$, $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. Si $x, y, z \in X$, $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Al conjunto X con la relación binaria $\leq$ se le denomina como conjunto parcialmente ordenado. Se le suele denotar como $(X, \leq)$.

Definición 1.1.2. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$.

1. x es llamado *cota superior* de A, si $a \leq x$ para cualquier elemento $a \in A$.

2. x es llamado *cota inferior* de A, si $x \leq a$ para cualquier elemento $a \in A$.

3. x es llamado *supremo* de A, si x es una cota superior de A y si b es otra cota superior a A entonces $x \leq b$. Se le suele denotar al supremo de A como supA.

4. x es llamado *ínfimo* de A, si x es una cota inferior de A y si b es otra cota inferior a A entonces $b \leq x$. Se le suele denotar al ínfimo de A como ínfA.

Definición 1.1.3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que X es una *retícula* si para cualquier par de elementos $x, y \in X$, los elementos $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en X. Si $A \subseteq X$, entonces decimos que A es una *subretícula* de X si para cada $a, b \in A$, los elementos $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$ existen y pertenecen a A.

Ejemplo 1.1.4. Sea X un espacio topológico y sean τ_X la topología de X y $\mathscr{P}(X)$ el conjunto potencia de X, es decir $\mathscr{P}(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X. Entonces $\subseteq$ es un orden parcial en $\mathscr{P}(X)$ tal que si $A, B \in \mathscr{P}(X)$, entonces $\sup\{A, B\} = A \cup B$ e $\inf\{A, B\} = A \cap B$. Por lo tanto $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ es una retícula. Por otro lado, $(\tau_X, \subseteq)$ es una subretícula de $\mathscr{P}(X)$.

Definición 1.1.5. Sea $\mathscr{L}$ una subretícula de $\mathscr{P}(X)$ para algún conjunto X. Sea $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{L}$. Entonces decimos que $\mathscr{F}$ es un *$\mathscr{L}$-filtro* si satisface lo siguiente:

1. $\mathscr{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

2. Si $A, B \in \mathscr{F}$, entonces existe $C \in \mathscr{F}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

3. Si $A \in \mathscr{F}$ y $B \in \mathscr{L}$ tal que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}$.

Decimos que $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{L}$ es una *$\mathscr{L}$-base de filtro* si satisface 1 y 2. Si $\mathscr{G}$ es una $\mathscr{L}$-base de filtro, entonces definimos $\widehat{\mathscr{G}} := \{A \in \mathscr{L} : F \subseteq A \text{ para algún } F \in \mathscr{G}\}$ el cual es un $\mathscr{L}$-filtro. Decimos que $\widehat{\mathscr{G}}$ es el filtro generado por $\mathscr{G}$.

Definición 1.1.6. Sea $\mathscr{L}$ una subretícula de $\mathscr{P}(X)$ para algún conjunto X. Decimos que $\mathscr{F}$ es un *$\mathscr{L}$-ultrafiltro* si es un $\mathscr{L}$-filtro maximal.

Proposición 1.1.7. Sea $\mathscr{L}$ una subretícula de $\mathscr{P}(X)$ para algún conjunto X. Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{L}$-filtro, entonces existe un $\mathscr{L}$-ultrafiltro que contiene a $\mathscr{F}$.

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-filtro. Definimos $\mathfrak{U} := \{\mathscr{G} \subseteq \mathscr{L} : \mathscr{G} \text{ es un } \mathscr{L}\text{-filtro y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}\}$. Es claro que $\mathfrak{U} \neq \emptyset$, ya que $\mathscr{F} \in \mathfrak{U}$. Sea $\mathscr{C}$ una cadena no vacía en $\mathfrak{U}$. Afirmamos que $\bigcup \mathscr{C}$ es un $\mathscr{L}$-filtro que pertenece a $\mathfrak{U}$.

Es claro $\bigcup \mathscr{C} \neq \emptyset$ y para cada $\mathscr{G} \in \mathscr{C}$, $\emptyset \notin \mathscr{G}$, es decir $\emptyset \notin \bigcup \mathscr{C}$. Sean $A, B \in \bigcup \mathscr{C}$, entonces existen $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2 \in \mathscr{C}$ tales que $A \in \mathscr{G}_1$ y $B \in \mathscr{G}_2$. Como $\mathscr{C}$ es una cadena, se sigue que $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ ó $\mathscr{G}_2 \subseteq \mathscr{G}_1$. Supongamos que $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$. Entonces $A, B \in \mathscr{G}_2$ y como $\mathscr{G}_2$ es un $\mathscr{L}$-filtro, existe $C \in \mathscr{G}_2 \subseteq \bigcup \mathscr{C}$ tal que $C \subseteq A \cap B$. Por lo tanto se cumple la condición (2) de la Definición 1.1.5. Sea $A \in \bigcup \mathscr{C}$ y sea $B \in \mathscr{L}$ tal que $A \subseteq B$, entonces existe $\mathscr{G} \in \mathscr{C}$ tal que $A \in \mathscr{G}$, y como $\mathscr{G}$ es un $\mathscr{L}$-filtro, $B \in \mathscr{G} \subseteq \bigcup \mathscr{C}$. Por lo tanto $\bigcup \mathscr{C}$ es un $\mathscr{L}$-filtro.

Por otro lado, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ para cada $\mathscr{G} \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\mathscr{F} \subseteq \bigcup \mathscr{C}$, es decir $\bigcup \mathscr{C} \in \mathfrak{U}$ y además $\bigcup \mathscr{C}$ es cota superior de $\mathscr{C}$. Es decir cada cadena en $\mathfrak{U}$ tiene una cota superior. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathscr{H} \in \mathfrak{U}$. Es claro que $\mathscr{H}$ es un $\mathscr{L}$-ultrafiltro que contiene a $\mathscr{F}$.

$\boxtimes$

Empezaremos por introducir uno de los conceptos claves e importantes de esta tesis.

Definición 1.1.8. Dado un espacio topológico (X, τ_X).

1. Un $\mathscr{P}(X)$-filtro (respectivamente, $\mathscr{P}(X)$-base de filtro, $\mathscr{P}(X)$-ultrafiltro) será llamado *filtro* (respectivamente, *base de filtro, ultrafiltro*).

2. Un τ_X-filtro (respectivamente, τ_X-base de filtro, τ_X-ultrafiltro) será llamado *filtro abierto* (respectivamente, *base de filtro abierto, ultrafiltro abierto*).

Ahora fijaremos toda nuestra atención al estudio de los filtros abiertos, bases de filtros abiertos y ultrafiltros abiertos.

Proposición 1.1.9. Sea X un espacio topológico y sea $\mathscr{F}$ una base de filtro abierto. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro abierto.

2. Para cada U abierto en X, $U \in \mathscr{F}$ ó $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$.

3. Si U es un abierto en X y $U \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathscr{F}$, entonces $U \in \mathscr{F}$.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Sea U abierto en X. Supongamos que $U \notin \mathscr{F}$. Si $U \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathscr{F}$, definimos $\mathscr{G} := \{W \subseteq X : W$ es abierto en X y $U \cap V \subseteq W$ para algún $V \in \mathscr{F}\}$. Es claro que $\mathscr{G} \neq \emptyset$ ya que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, y $\emptyset \notin \mathscr{F}$ ya que $U \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathscr{F}$. Sean $W_1, W_2 \in \mathscr{G}$, entonces existen $V_1, V_2 \in \mathscr{F}$ tales que $V_i \cap U \subseteq W_i$ con $i = 1, 2$. Como $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{F}$, entonces $(V_1 \cap V_2) \cap U \subseteq W_1 \cap W_2$. Por lo tanto $\mathscr{G}$ es una base de filtro abierto. Sea $\widehat{\mathscr{G}}$ el filtro abierto generado por $\mathscr{G}$. Entonces $\mathscr{F} \subsetneq \widehat{\mathscr{G}}$, ya que $U \notin \mathscr{F}$ pero $U \in \widehat{\mathscr{G}}$. Lo cuál es una contradicción ya que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro abierto. Por lo tanto, existe $V \in \mathscr{F}$ tal que $V \cap U = \emptyset$, entonces $V \subseteq X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$.

$[2 \Rightarrow 3]$ Sea U un abierto en X tal que $U \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathscr{F}$. Sabemos por hipótesis que $U \in \mathscr{F}$ ó $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$. Si $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$, entonces, $U \cap (X \setminus cl_X U) \neq \emptyset$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $U \in \mathscr{F}$.

$[3 \Rightarrow 1]$ Sea $\mathscr{G}$ un filtro abierto tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. Sea $U \in \mathscr{G}$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $U \in \mathscr{F}$, lo que implica que $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Por lo tanto $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro abierto.

$\boxtimes$

Corolario 1.1.10. Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro abierto en un espacio X. Si U es un abierto denso en X, entonces $U \in \mathscr{F}$.

Demostración. Si U es un abierto denso, entonces $U \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathscr{F}$, ya que $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Por la Proposición 1.1.9, $U \in \mathscr{F}$.

$\boxtimes$

Corolario 1.1.11. Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son ultrafiltros abiertos distintos en un espacio X, entonces existen abiertos $U \in \mathscr{F}$ y $V \in \mathscr{G}$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Demostración. Como $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$, entonces existe $U \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{G}$. Dado que $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro abierto, por la Proposición 1.1.9, existe $V \in \mathscr{G}$ tal que $V \cap U = \emptyset$.

$\boxtimes$

Corolario 1.1.12. Sea X un espacio y sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro abierto. Si $U,V \in \tau_X$ y $U \cup V \in \mathscr{F}$ entonces $U \in \mathscr{F}$ ó $V \in \mathscr{F}$.

Demostración. Supongamos que $U \notin \mathscr{F}$, entonces existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $U \cap W = \emptyset$. Por lo tanto $\emptyset \neq W \cap (U \cup V) \in \mathscr{F}$, pero $W \cap (U \cup V) = W \cap V \subseteq V$. Por lo tanto $V \in \mathscr{F}$.

$\boxtimes$

Proposición 1.1.13. Sea $\{\mathscr{F}_i : i \in I\}$ una familia no vacía de filtros abiertos en un espacio X. Entonces $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ es un filtro abierto.

Demostración. Como $X \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$, $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i \neq \emptyset$ y además $\emptyset \notin \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ ya que $\emptyset \notin \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$. Sean $U,V \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$. Entonces $U \cap V \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$, lo cuál satisface la condición 2 de la Definición 1.1.5. Por último, sea $U \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$, y sea V un abierto en X tal que $U \subseteq V$. Entonces $V \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $V \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$.

Por lo tanto, $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ es un filtro abierto.

$\boxtimes$

Proposición 1.1.14. Sea X un espacio y sea $\mathscr{F}$ una base de filtro abierto. Entonces el filtro abierto generado por $\mathscr{F}$ cumple:

$$\widehat{\mathscr{F}} = \bigcap\{\mathscr{H} : \mathscr{H} \text{ es un filtro abierto y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}\}.$$

Demostración. Tenemos que $\mathscr{F} \subseteq \widehat{\mathscr{F}}$ y como $\widehat{\mathscr{F}}$ es un filtro abierto, se sigue que $\bigcap\{\mathscr{H} : \mathscr{H} \text{ es un filtro abierto y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}\} \subseteq \widehat{\mathscr{F}}$. Ahora veremos que si $\mathscr{G}$ es un filtro abierto tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, entonces $\widehat{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{G}$. En efecto, si $U \in \widehat{\mathscr{F}}$, entonces existe $V \in \mathscr{F}$ tal que $V \subseteq U$. Como $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, entonces $V \in \mathscr{G}$ lo cuál implica que $U \in \mathscr{G}$. Por lo tanto $\widehat{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{G}$. Entonces $\widehat{\mathscr{F}} \subseteq \bigcap\{\mathscr{H} : \mathscr{H} \text{ es un filtro abierto y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}\}$.

Por lo tanto $\widehat{\mathscr{F}} = \bigcap\{\mathscr{H} : \mathscr{H} \text{ es un filtro abierto y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}\}$.

$\boxtimes$

Proposición 1.1.15. Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto en un espacio X. Entonces:

1. Si $\mathscr{G} := \bigcap\{\mathscr{U} : \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro abierto en } X \text{ y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}\}$, entonces

$$\mathscr{G} = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto y } int_X[cl_X U] \in \mathscr{F}\}.$$

2. $\mathscr{F}$ está contenido en un único ultrafiltro abierto si y sólo si existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ tal que $\{int_X[cl_X U] : U \in \mathscr{U}\} \subseteq \mathscr{F}$.

Demostración. 1. Por la Proposición 1.1.13, $\mathscr{G}$ es un filtro abierto en X. Sea $\mathscr{G}' := \{U \subseteq X : U \text{ es abierto y } int_X[cl_X U] \in \mathscr{F}\}$. Veamos que $\mathscr{G} = \mathscr{G}'$.

$\subseteq$] Sea $V \in \mathscr{G}$. Basta demostrar que $int_X[cl_X V] \in \mathscr{F}$. Afirmammos que existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $(X \setminus cl_X V) \cap W = \emptyset$. Si $(X \setminus cl_X V) \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathscr{F}$, entonces $\{(X \setminus cl_X V) \cap U : U \in \mathscr{F}\}$ es una base de filtro abierto. Por lo tanto existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{V}$ que lo contiene. Es claro que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}$ ya que $\mathscr{V}$ es cerrado bajo supraconjuntos abiertos. Lo que implica que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G} \subseteq \mathscr{V}$, entonces $V \in \mathscr{V}$, por otro lado $X \setminus cl_X V \in \mathscr{V}$, es decir $\emptyset = V \cap (X \setminus cl_X V) \in \mathscr{V}$ lo cuál es una contradicción.

Por lo tanto, existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $(X \setminus cl_X V) \cap W = \emptyset$. Por lo tanto $W \subseteq cl_X V$, lo que implica que $W \subseteq int_X[cl_X V] \in \mathscr{F}$. Entonces $V \in \mathscr{G}'$. Por lo tanto $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}'$.

$\supseteq$] Sea $V \in \mathscr{G}'$. Por definición de $\mathscr{G}'$, $int_X[cl_X V] \in \mathscr{F}$. Sea $\mathscr{V}$ un ultrafiltro abierto tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}$. Por la Proposición 1.1.9, $V \in \mathscr{V}$ ó $X \setminus cl_X V \in \mathscr{V}$. Si $X \setminus cl_X V \in \mathscr{V}$, entonces $\emptyset = int_X[cl_X V] \cap (X \setminus cl_X V) \in \mathscr{V}$ ya que $int_X[cl_X V] \subseteq cl_X V$. Lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $V \in \mathscr{V}$. Esto implica que $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$.

Por lo tanto, $\mathscr{G} = \mathscr{G}'$.

2. Demostremos la necesidad. Supongamos que $\mathscr{F}$ está contenido en un único ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$. Entonces por (1), $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{U}$ y como $\mathscr{U}$ es único, $\mathscr{U} = \{U \subseteq X : U$ es abierto y $int_X[cl_X U] \in \mathscr{F}\}$. Por lo tanto $\{int_X[cl_X U] : U \in \mathscr{U}\} \subseteq \mathscr{F}$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que $\{int_X[cl_X U] : U \in \mathscr{U}\} \subseteq \mathscr{F}$ para algún ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$. Sea $\mathscr{V}$ un ultrafiltro abierto tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}$. Entonces $\{int_X[cl_X U] : U \in \mathscr{U}\} \subseteq \mathscr{V}$. Sea $U \in \mathscr{U}$. Como $(X \setminus cl_X U) \cap int_X[cl_X U] = \emptyset$ y $\mathscr{V}$ es un ultrafiltro abierto, entonces $U \in \mathscr{V}$. Es decir, $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$. Como $\mathscr{U}$ es máximal, $\mathscr{U} = \mathscr{V}$. Por lo tanto $\mathscr{F}$ está contenido en un único ultrafiltro abierto.

$\boxtimes$

Definición 1.1.16. Sea X un espacio topológico y sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto.

1. Entonces el conjunto $\bigcap\{cl_X U : U \in \mathscr{F}\}$ es llamado la *adherencia* de $\mathscr{F}$ y es denotado como $a(\mathscr{F})$. Si además $a(\mathscr{F}) = \emptyset$, se dice que $\mathscr{F}$ es un *filtro abierto libre*.

2. Decimos que $\mathscr{F}$ *converge* a un punto x_0, si el sistema de vecindades del punto x_0, denotado por $\mathscr{N}_{x_0}$, es tal que $\mathscr{N}_{x_0} \cap \tau_X \subseteq \mathscr{F}$ donde τ_X es la topología de X. Al conjunto de puntos tal que $\mathscr{F}$ converge, se le denotara como $c(\mathscr{F})$.

Proposición 1.1.17. Sea $\mathscr{F}$ una base de filtro abierto y $\mathscr{H}$ un ultrafiltro abierto. Entonces:

1. $c(\mathscr{F}) \subseteq a(\mathscr{F})$.

2. $c(\mathscr{H}) = a(\mathscr{H})$.

3. $\mid c(\mathscr{F}) \mid \leq 1$.

4. $\mid a(\mathscr{H}) \mid \leq 1$.

Demostración. 1. Sea $p \in c(\mathscr{F})$ y sea $U \in \mathscr{F}$. Entonces por definición, para cualquier abierto V en X tal que $p \in V$, se tiene que $V \in \mathscr{F}$, es decir $V \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $p \in cl_X U$, y esto para cualquier $U \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $c(\mathscr{F}) \subseteq a(\mathscr{F})$.

2. Basta demostrar que $a(\mathscr{H}) \subseteq c(\mathscr{H})$. Sea $p \in a(\mathscr{H})$ y sea U una vecindad abierta de p en X. Como $p \in a(\mathscr{H})$, entonces $p \in cl_X V$ para cualquier $V \in \mathscr{H}$. Por lo tanto $V \cap U \neq \emptyset$ para cualquier $V \in \mathscr{H}$. Como $\mathscr{H}$ es un ultrafiltro abierto, $U \in \mathscr{H}$. Por lo tanto $a(\mathscr{H}) \subseteq c(\mathscr{H})$. Por (1), $c(\mathscr{H}) = a(\mathscr{H})$.

3. Supongamos que $\mid c(\mathscr{F}) \mid > 1$. Entonces existen $x, y \in c(\mathscr{F})$ con $x \neq y$. Como X es Hausdorff, existen vecindades abiertas U y V de x y y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$. Dado que $x, y \in c(\mathscr{F})$ se sigue que $U, V \in \mathscr{F}$. Por otro lado, $\mathscr{F}$ es una base de filtro abierto, entonces existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $W \subseteq U \cap V = \emptyset$, esto es una contradicción ya que implica que $W = \emptyset$ pero $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Por lo tanto $\mid c(\mathscr{F}) \mid \leq 1$.

4. Es consecuencia de (2) y (3).

$\boxtimes$

1.2. Espacios Semiregulares

En las siguientes proposiciones se dará por hecho que uno conoce lo más básico de las propiedades de los operadores cerradura e interior, para mayor referencias de estos conceptos véase [3, 2].

Veamos un ejemplo de cómo se usan tales operadores. Dado un espacio X y $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$, se sigue que $int_X A \subseteq int_X B$ y $cl_X A \subseteq cl_X B$, y por lo tanto se puede concluir que $int_X[cl_X A] \subseteq int_X[cl_X B]$ y $cl_X[int_X A] \subseteq cl_X[int_X B]$.

Proposición 1.2.1. Sean X un espacio, $U \subseteq X$ abierto, C un cerrado y $A, B \subseteq X$. Entonces:

1. $int_X[cl_X[int_X[cl_X A]]] = int_X[cl_X A]$.

2. $cl_X[int_X[cl_X[int_X A]]] = cl_X[int_X A]$.

3. $int_X[cl_X[U \cap A]] = int_X[cl_X U] \cap int_X[cl_X A]$.

4. $cl_X[int_X[C \cup A]] = cl_X[int_X C] \cup cl_X[int_X A]$.

Demostración. 1. Dado que $int_X[cl_X A] \subseteq cl_X[int_X[cl_X A]]$ se sigue que $int_X[cl_X A] \subseteq int_X[cl_X[int_X[cl_X A]]]$. Por otro lado, sea $V := int_X[cl_X[int_X[cl_X A]]]$, se sigue que

$$V \subseteq cl_X[int_X[cl_X A]] = int_X[cl_X A] \cup Fr_X[int_X[cl_X A]] = int_X[cl_X A] \cup Fr_X[X \setminus int_X[cl_X A]].$$

Supongamos que $V \cap (X \setminus int_X[cl_X A]) \neq \emptyset$.

Como $cl_X[X \setminus cl_X A] = X \setminus int_X[cl_X A]$ esto implica que $V \cap (X \setminus cl_X A) \neq \emptyset$. Por otro lado $X \setminus cl_X A \subseteq X \setminus int_X[cl_X A]$, es decir $X \setminus cl_X A \subseteq int_X[X \setminus int_X[cl_X A]]$, por lo tanto

$$\emptyset \neq V \cap int_X[X \setminus int_X[cl_X A]] = V \cap (X \setminus cl_X[int_X[cl_X A]]).$$

Contradiciendo el hecho de que $V \subseteq cl_X[int_X[cl_X A]]$. Por lo tanto $V \subseteq int_X[cl_X A]$.

2. Por (1) tenemos

$$int_X[cl_X[int_X[cl_X[X \setminus A]]]] = int_X[cl_X[X \setminus A]],$$

pero

$$int_X[cl_X[X \setminus A]] = int_X[X \setminus int_X A] = X \setminus cl_X[int_X A].$$

Análogamente,

$$int_X[cl_X[int_X[cl_X[X\setminus A]]]] = X\setminus cl_X[int_X[cl_X[int_X A]]].$$

Es decir, $X\setminus cl_X[int_X A] = X\setminus cl_X[int_X[cl_X[int_X A]]]$. Por lo tanto, $cl_X[int_X[cl_X[int_X A]]] = cl_X[int_X A]$.

3. Como $cl_X[U\cap A]\subseteq cl_X U\cap cl_X A$, entonces $int_X[cl_X[U\cap A]]\subseteq int_X[cl_X U\cap cl_X A] = int_X[cl_X U]\cap int_X[cl_X A]$. Por otro lado, sea $W = int_X[cl_X U]\cap int_X[cl_X A]$. Dado que W es abierto, basta demostrar que $W\subseteq cl_X[U\cap A]$.

Sea $z\in W$ y $V\subseteq X$ una vecindad abierta de z, y sea $V_0 = V\cap W$. Se sigue que V_0 es una vecindad abierta de z tal que

$$V_0\subseteq W\subseteq cl_X U\cap int_X[cl_X A].$$

Por lo tanto $V_0 = cl_X U\cap(int_X[cl_X A]\cap V_0)$, implica que $\emptyset\neq U\cap int_X[cl_X A]\cap V_0\subseteq V_0\cap U\cap cl_X A$ y esto implica que $\emptyset\neq V_0\cap U\cap A\subseteq V\cap U\cap A$. Es decir, $z\in cl_X[U\cap A]$ y por lo tanto $W\subseteq cl_X[U\cap A]$.

4. Tenemos que

$$int_X[cl_X[(X\setminus C)\cap(X\setminus A)]] = int_X[cl_X[X\setminus C]]\cap int_X[cl_X[X\setminus A]],$$

donde $int_X[cl_X[X\setminus C]] = int_X[X\setminus int_X C] = X\setminus cl_X[int_X C]$. Análogamente se obtiene que $int_X[cl_X[X\setminus A]] = X\setminus cl_X[int_X A]$. Lo que implica

$$int_X[cl_X[X\setminus C]]\cap int_X[cl_X[X\setminus A]] = X\setminus cl_X[int_X C]\cup cl_X[int_X A].$$

Por otro lado, $int_X[cl_X[(X\setminus C)\cap(X\setminus A)]] = int_X[X\setminus int_X[C\cup A]] = X\setminus cl_X[int_X[C\cup A]]$.

Por lo tanto, $cl_X[int_X[C\cup A]] = cl_X[int_X C]\cup cl_X[int_X A]$.

⊠

Proposición 1.2.2. Sea X un espacio y $U\subseteq X$. El conjunto U es abierto en X si y sólo si se cumple que $cl_X[U\cap A] = cl_X[U\cap cl_X A]$ para todo $A\subseteq X$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Es claro que $cl_X[U\cap A]\subseteq cl_X[U\cap cl_X A]$ para cualquier $A\subseteq X$. Por otro lado, sea $A\subseteq X$ arbitrario y sea $z\in cl_X[U\cap cl_X A]$, por lo que $V\cap U\cap cl_X A\neq\emptyset$ donde V es una vecindad abierta de z, lo que implica que $V\cap U\cap A\neq\emptyset$, ya que U es abierto. Es decir, $z\in cl_X[U\cap A]$, y por lo tanto $cl_X[U\cap cl_X A]\subseteq cl_X[U\cap A]$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que U no es abierto, es decir, existe $z\in U$ tal que para toda vecindad V de z se tiene que $V\cap(X\setminus U)\neq\emptyset$ y por lo tanto $z\in cl_X[X\setminus U]$. Con lo que concluimos que $z\in cl_X[U\cap cl_X[X\setminus U]]$ y por otro lado, $cl_X[U\cap cl_X[X\setminus U]] = cl_X[U\cap(X\setminus U)] = \emptyset$. Contradiciendo la hipótesis de que $cl_X[U\cap A] = cl_X[U\cap cl_X A]$ para todo $A\subseteq X$. Por lo tanto U es abierto.

⊠

Definición 1.2.3. Un conjunto abierto U en un espacio X es un *abierto regular* si $U = int_X[cl_X U]$. Denotamos al conjunto de todos los abiertos regulares en el espacio X como $\mathscr{RO}(X)$. Por la Proposición 1.2.1 (1) se sigue que

$$\mathscr{RO}(X) = \{int_X[cl_X A] : A\subseteq X\}.$$

Más aún, se puede caracterizar al conjunto $\mathscr{RO}(X)$ a través de conjuntos abiertos de X. En efecto, es claro que $\{int_X[cl_X U] : U \text{ es abierto en } X\}\subseteq\mathscr{RO}(X)$, sea $V\in\mathscr{RO}(X)$ entonces $V = int_X[cl_X A]$ con $A\subseteq X$, V es abierto y $V = int_X[cl_X V]\in\{int_X[cl_X U] : U \text{ es abierto en } X\}$. Por lo tanto

$$\mathscr{RO}(X) = \{int_X[cl_X U] : U \text{ es abierto en X}\}.$$

Además si $C, D \in \mathscr{RO}(X)$, entonces $C \cap D \in \mathscr{RO}(X)$. Haciendo un proceso inductivo se puede concluir que $\mathscr{RO}(X)$ es cerrado bajo intersecciones finitas, sin embargo la intersección arbitraria de abiertos regulares no necesariamente es un abierto regular. Un ejemplo de ello es el siguiente.

Sea $\mathscr{C} := \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $\mathscr{C}$ es una familia de abiertos regulares en $\mathbb{R}$ y $\bigcap \mathscr{C} = \{0\}$ lo que implica que $\bigcap \mathscr{C}$ no es un abierto regular, ya que $int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}[\bigcap \mathscr{C}]] = int_{\mathbb{R}}[\{0\}] = \emptyset$.

Definición 1.2.4. Decimos que un conjunto A en un espacio X es un *cerrado regular* si $A = cl_X[int_X A]$, y denotamos al conjunto de todos los cerrados regulares de X como $\mathscr{R}(X)$. Y por la Proposición 1.2.1 (2) se sigue que

$$\mathscr{R}(X) = \{cl_X[int_X A] : A \subseteq X\}.$$

Aunque $\mathscr{R}(X)$ no necesariamente es cerrado bajo intersecciones finitas, sí se puede concluir por la Proposición 1.2.1 (4) que $\mathscr{R}(X)$ es cerrado bajo uniones finitas, además se puede caracterizar a $\mathscr{R}(X)$ mediante conjuntos cerrados.

$$\mathscr{R}(X) = \{cl_X[int_X C] : C \text{ es cerrado en } X\}.$$

Proposición 1.2.5. Sea X un espacio. Entonces $\mathscr{RO}(X)$ es una base abierta para una topología Hausdorff.

Demostración. Dado que $\mathscr{RO}(X)$ es cerrado bajo intersecciones finitas y $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathscr{RO}(X)$ resulta que $\mathscr{RO}(X)$ es una base abierta para una topología en X. Veamos que esta topología es Hausdorff.

Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$. Como X es un espacio existen vecindades abiertas ajenas U y V de p y q respectivamente y por la Proposición 1.2.1 (3) implica que $int_X[cl_X U]$ y $int_X[cl_X V]$ son vecindades abiertas ajenas de p y q respectivamente.

Por lo tanto, $\mathscr{RO}(X)$ es una base para una topología Hausdorff.

⊠

A tal topología en X la denotaremos como τ_s.

Definición 1.2.6. Un espacio X es *semiregular* si $\mathscr{RO}(X)$ forma una base para la topología de X.

Dado un espacio X, entonces X_s denotará al espacio topológico que tiene como conjunto base a X y cuya topología es τ_s, es decir $X_s = (X, \tau_s)$. Decimos que X_s es la semiregularización de X.

Proposición 1.2.7. La semiregularización de un espacio X es Hausdorff.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.2.5.

⊠

Observación 1.2.8. Un espacio X es un semiregular si y sólo si $\mathscr{RO}(X)$ es una base abierta en X, si y sólo si $X = X_s$.

La Observación 1.2.8 no implica (de manera directa) que la semiregularización de un espacio X sea semiregular, aunque en efecto sí lo sea, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.2.9. Sea X un espacio, sean $U, A \subseteq X$ un conjunto abierto y uno cerrado respectivamente en X. Entonces:

1. $cl_X U = cl_{X_s} U$ y $int_X A = int_{X_s} A$.

2. $int_X[cl_X U] = int_{X_s}[cl_{X_s} U]$ y $cl_X[int_X A] = cl_{X_s}[int_{X_s} A]$.

3. $\mathscr{RO}(X_s) = \mathscr{RO}(X)$ y $\mathscr{R}(X_s) = \mathscr{R}(X)$.

4. X_s es un espacio semiregular, en particular $(X_s)_s = X_s$.

Demostración. 1. Si τ es la topología del espacio X se sigue que $\tau_s \subseteq \tau$ lo que impica que $cl_X U \subseteq cl_{X_s} U$. Sea $x \notin cl_X U$, entonces existe una vecindad abierta V de x tal que $V \cap U = \emptyset$, y por la Proposición 1.2.1 (3) $int_X[cl_X V] \cap int_X[cl_X U] = \emptyset$. Dado que $int_X[cl_X V]$ es una vecindad abierta de x en X_s y $U \subseteq int_X[cl_X U]$, entonces $x \notin cl_{X_s} U$, es decir $cl_X U = cl_{X_s} U$.

Por otro lado, $X \setminus A$ es abierto en X y $cl_X[X \setminus A] = cl_{X_s}[X \setminus A]$, es decir $X \setminus int_X A = X \setminus int_{X_s} A$. Por lo tanto $int_X A = int_{X_s} A$.

2. Dado que $int_X A = int_{X_s} A$ y $cl_X U = cl_{X_s} U$ se sigue que $cl_X[int_X A] = cl_{X_s}[int_{X_s} A]$.

3. En efecto, $\mathscr{RO}(X_s) = \{int_{X_s}[cl_{X_s} U] : U \text{ es abierto en } X_s\} \subseteq \mathscr{RO}(X)$ y por el enunciado (2) se sigue que $\mathscr{RO}(X_s) = \mathscr{RO}(X)$. Análogamente $\mathscr{R}(X_s) = \mathscr{R}(X)$.

4. La semiregularización de un espacio X, X_s, tiene por base al conjunto $\mathscr{RO}(X)$ que coincide por el enunciado (3) con $\mathscr{RO}(X_s)$. Es decir, la semiregularización de un espacio es semiregular y por la Observación 1.2.8 se tiene que $X_s = (X_s)_s$.

$\boxtimes$

Proposición 1.2.10. Cualquier espacio regular es semiregular.

Demostración. Sea X un espacio regular. Sea $x \in X$ y sea V una vecindad abierta de x. Dado que X es regular, existe una vecindad abierta U de x tal que $cl_X U \subseteq V$. Lo que implica que $x \in int_X[cl_X U] \subseteq V$ y como $int_X[cl_X U] \in \mathscr{RO}(X)$ se sigue que $\mathscr{RO}(X)$ es una base para la topología de X. Por lo tanto X es semiregular.

$\boxtimes$

Denotamos por $C(X,Y)$ al conjunto de funciones continuas que van del espacio X al espacio Y.

Proposición 1.2.11. Sea $f \in C(X,Y)$ donde X es un espacio y Y es regular, y definimos la función $f_s : X_s \to Y$ mediante $f_s(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Entonces f_s es continua.

Demostración. Sea $x \in X$ y sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y. Como Y es un espacio regular, existe una vecindad abierta U de $f(x)$ en Y, tal que $cl_Y U \subseteq V$.

Como f es continua, existe una vecindad abierta W de x en X, tal que $f[W] \subseteq U$. Usando nuevamente la continuidad de f tenemos que $f[cl_X W] \subseteq cl_Y[f[W]] \subseteq cl_Y U \subseteq V$ lo que implica que $f[int_X[cl_X W]] \subseteq V$. Por lo tanto f_s es continua ya que $\mathscr{RO}(X)$ es base abierta de X_s.

$\boxtimes$

El recíproco de la proposición anterior no se cumple, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.12. Sea $X = \mathbb{R} \cup \{p_+, p_-\}$ donde $\mathbb{R} \cap \{p_+, p_-\} = \emptyset$ y $p_+ \neq p_-$. Sea $\mathscr{B}$ una colección de conjuntos de X, tal que si $U \in \mathscr{B}$, tenemos que $U \cap \mathbb{R}$ es un abierto euclidiano en $\mathbb{R}$, y si $p_+ \in U$ (respectivamente, $p_- \in U$), entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : n \leq m,$ y m es par (respectivamente, m es impar) $\} \subseteq U$. Veamos que la colección de estos subconjuntos de X define una base para una topología en X.

Es claro que $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathscr{B}$, ya que $\emptyset$ es abierto en $\mathbb{R}$ y $X \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Sean $V_1, V_2 \in \mathscr{B}$, tenemos que $V_1 \cap \mathbb{R}$ y $V_2 \cap \mathbb{R}$ son abiertos en $\mathbb{R}$, lo cual implica que $(V_1 \cap V_2) \cap \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$. Si $(V_1 \cap V_2) \cap \{p_+, p_-\} \neq \emptyset$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p_+ \in V_1 \cap V_2$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $A_{n_1} \subseteq V_1$ y $A_{n_2} \subseteq V_2$ donde $A_{n_1} = \bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : n_1 \leq m,$ y m es par $\}$ y $A_{n_2} = \bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : n_2 \leq m,$ y m es par $\}$.

Notemos que $A_{n_1} \cap A_{n_2} = A_{n_0}$ donde $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Entonces $A_{n_0} \subseteq V_1 \cap V_2$. Por lo tanto $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{B}$. Por lo tanto $\mathscr{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Concluimos que $\mathscr{B}$ es una base para una topología en X.

1. Afirmamos que X es un espacio semiregular y Hausdorff, pero no regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos $V_n = \{p_+\} \cup A_n$ donde $A_n = \bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : n \leq m,$ y m es par $\}$. Vamos a demostrar que $int_X[cl_X V_n] = V_n$. Es claro que V_n es abierto en X y $cl_X V_n = cl_X[\{p_+\} \cup A_n] = \{p_+\} \cup cl_X A_n$. Afirmamos que $cl_X A_n = \{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n$.

Es claro que $p_- \notin cl_X A_n$, ya que cualquier abierto básico de la forma $U_t = \{p_-\} \cup \bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : t \leq m,$ y m es impar $\}$ donde $t \in \mathbb{N}$, cumple que $U_t \cap A_n = \emptyset$. Por otro lado, $cl_X A_n \cap \mathbb{R} = cl_{\mathbb{R}} A_n$. Basta demostrar que $p_+ \in cl_X A_n$.

En efecto, cualquier vecindad abierta U de p_+, contiene un subconjunto de la forma $B_t = \bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : t \leq m,$ y m es par $\}$ donde $t \in \mathbb{N}$. Es claro que $A_n \cap B_t \neq \emptyset$. Por lo tanto $cl_X A_n = \{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n$. Por lo tanto $cl_X V_n = \{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n$.

Por otro lado, $int_X[\{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n] \cap \mathbb{R} \subseteq cl_{\mathbb{R}} A_n$ y como $int_X[\{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n] \cap \mathbb{R}$ es un abierto en $\mathbb{R}$ se sigue que $int_X[\{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n] \cap \mathbb{R} \subseteq int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}} A_n] = A_n$ ya que A_n es un abierto regular en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $int_X[cl_X V_n] = int_X[\{p_+\} \cup cl_{\mathbb{R}} A_n] \subseteq \{p_+\} \cup A_n = V_n$. Por lo tanto $int_X[cl_X V_n] = V_n$.

Analogamente definimos $W_n = \{p_-\} \cup \bigcup\{(-m-1,-m) \cup (m,m+1) : n \leq m,$ y m es impar $\}$, es claro que W_n es abierto en X y $int_X[cl_X W_n] = W_n$, además $W_1 \cap V_1 = \emptyset$, y si $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, entonces $T = (x-t, x+t)$ es una vecindad abierta de x en X tal que $int_X[cl_x T] = T$.

Por lo tanto, X es semiregular y Hausdorff. Y para cada $n, k \in \mathbb{N}$, $cl_X V_n \cap cl_X W_n \neq \emptyset$, lo que implica que X no es regular.

Sea $Y = \{p_+\} \cup \bigcup\{[m, m+1] : 0 \leq m,$ y m es par $\}$ con la topología heredada de X. Sea $f : Y \to X$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in Y$, es decir f es la función inclusión. Por lo tanto, f es continua.

2. Afirmamos que $f_s \notin C(Y_s, X_s)$.

Vemos que Y_s es compacto, mientras que Y no es regular, ya que los conjuntos cerrados ajenos

$\{p_+\}$ y $\mathbb{N}$ no pueden ser separados por abiertos ajenos, dado que una vecindad arbitraria V de p_+ contiene a un conjunto de la forma $A_n = \bigcup\{(m, m+1) : n \leq m, \text{ y } m \text{ es par }\}$ donde $n \in \mathbb{N}$, y para cualquier $m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ y m par, no existe ninguna vecindad abierta de m en Y tal que sea ajena a A_n. Si f_s fuera continua, entonces $f_s[Y_s] = Y$ sería compacto en un Hausdorff, lo que implica que Y es normal en particular Y es regular, por lo tanto f_s no es continua de Y_s en X_s.

$\boxtimes$

El subespacio Y del espacio semiregular X del Ejemplo 1.2.12 no es un subespacio semiregular, es decir que la semiregularidad no es hereditaria. La siguiente proposición nos dirá para que subespacios la semiregularidad se hereda.

Proposición 1.2.13. 1. La semiregularidad se hereda a subespacios abiertos.

2. Si D es un subespacio denso en un espacio X, entonces D_s es un subespacio denso en X_s, es decir que la semiregularidad se hereda a subespacios densos.

Demostración. 1. Sea X un espacio semiregular y sea $U \subseteq X$ un subconjunto abierto de X. Sea $p \in U$ y sea V una vecindad abierta de p en U. Como U es abierto en X se sigue que V es abierto en X. Por lo tanto, basta demostrar que existe un abierto regular de U que se queda contenido en V y es vecindad de p.

Como X es semiregular existe un abierto regular W de X, tal que $p \in W \subseteq V$ y además

$$int_U[cl_U W] = int_U[U \cap cl_X W] = int_X[U \cap cl_X W].$$

Esta última igualdad se sigue de que U es abierto. Usando el hecho de que W es un abierto regular de X obtenemos que $int_X[U \cap cl_X W] = int_X[cl_X W] \cap int_X U = W \cap U = W$. Es decir $p \in int_U[cl_U W] = W \subseteq V$, por lo tanto U es semiregular.

2. Primero se demostrará que la semiregularización del subespacio D (visto como subespacio de X) es igual al subespacio D con la topología heredada por X_s. A tal espacio lo denotaremos como $D_{|X_s}$, es decir se demostrará que $D_s = D_{|X_s}$

Sea W abierto en X. Basta demostrar que $int_D[cl_D[W \cap D]] = int_X[cl_X W] \cap D$. Por la Proposición 1.2.2 se sigue $cl_D[W \cap D] = cl_X[W \cap D] \cap D = cl_X W \cap D$, lo que implica que $int_X[cl_X W] \cap D \subseteq cl_X W \cap D = cl_D[W \cap D]$ y como $int_X[cl_X W] \cap D$ es un abierto en D se sigue que

$$int_X[cl_X W] \cap D \subseteq int_D[cl_D[W \cap D]].$$

Por otro lado, sea $p \in int_D[cl_D[W \cap D]]$. Existe una vecindad abierta U de p en X tal que $p \in U \cap D \subseteq int_D[cl_D[W \cap D]] \subseteq cl_X W \cap D$, lo que implica $cl_X U = cl_X[U \cap D] \subseteq cl_X[cl_X W \cap D]$; es decir, $U \subseteq int_X[cl_X U] \subseteq int_X[cl_X W]$, lo que implica $p \in U \cap D \subseteq int_X[cl_X W] \cap D$, es decir, $int_D[cl_D[W \cap D]] \subseteq int_X[cl_X W] \cap D$. Por lo tanto, $int_D[cl_D[W \cap D]] = int_X[cl_X W] \cap D$ que es equivalente a $D_s = D_{|X_s}$.

Para finalizar veamos que D_s es denso en X_s. En efecto, sea τ la topología del espacio X, dado que $\tau_s \subseteq \tau$ se tiene que D_s es denso en X_s

$\boxtimes$

Proposición 1.2.14. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios. Entonces X_i es semiregular para cada $i \in I$ si y sólo si $X = \prod_{i \in I} X_i$ es semiregular. Es decir la semiregularidad es productiva.

Demostración. Demostremos la suficiencia. Supongamos que X es semiregular. Para cada $i \in I$, las proyección $\pi_i : X \to X_i$ son continuas, abiertas y suprayectivas. Sea $x \in X_i$ para algún $i \in I$ y sea U una vecindad de x en X_i. Entonces existe un punto $y \in X$ tal que $\pi_i(y) = x$ y además $y \in \pi_i^{-1}[U]$. Como X es semiregular, existe un abierto regular V tal que $y \in V \subseteq \pi_i^{-1}[U]$, y existe un abierto canónico W que cumple

$$y \in W = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[W_{j_k}] \subseteq V \subseteq \pi_i^{-1}[U],$$

donde $\{j_1, ..., j_n\} \subseteq I$ con $n \in \mathbb{N}$, y $W_{j_k} \subseteq X_{j_k}$ es un conjunto abierto para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto $int_X[cl_X W] \subseteq V \subseteq \pi_i^{-1}[U]$ donde

$$int_X[cl_X W] = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[int_{X_{j_k}}[cl_{X_{j_k}} W_{j_k}]].$$

Dado que las proyecciones son funciones suprayectivas, si U es un abierto estrictamente contenido en X_i, entonces existe $k^* \in \{1, ..., n\}$ tal que $X_{j_{k^*}} = X_i$ es decir $i = j_{k^*}$, Por lo tanto, $x \in W_i \subseteq int_{X_i}[cl_{X_i} W_i] \subseteq U$ y como $int_{X_i}[cl_{X_i} W_i] \in \mathscr{RO}(X)$ entonces X_i es semiregular.

Ahora demostremos la necesidad. Supongamos que X_i es semiregular para cada $i \in I$. Sea $x \in X$ y sea U un abierto básico de x donde

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[U_{j_k}]$$

donde $\{j_1, ..., j_n\} \subseteq I$ con $n \in \mathbb{N}$, y $U_{j_k} \subseteq X_{j_k}$ es un conjunto abierto para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Y como X_{j_k} es semiregular para cada $k \in \{1, ..., n\}$, existen $V_{j_k} \in \mathscr{RO}(X_{j_k})$ tales que $\pi_{j_k}(x) \in V_{j_k} \subseteq U_{j_k}$. Consideramos al conjunto $V = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[V_{j_k}]$ el cual cumple que

$$\begin{aligned} int_X[cl_X V] &= int_X\left[cl_X\left[\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[V_{j_k}]\right]\right] = int_X\left[\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[cl_{X_{j_k}} V_{j_k}]\right] \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[int_{X_{j_k}}[cl_{X_{j_k}} V_{j_k}]] = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}[V_{j_k}] = V. \end{aligned}$$

Es decir que V es un abierto regular en X y $x \in V \subseteq U$. Por lo tanto X es semiregular.

$\boxtimes$

Nuevamente si consideramos una familia de espacios $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$, y $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es semiregular, cabe preguntarse cuál es la relación (en cuanto a su estructura topológica) entre X y $\prod_{\alpha \in J}(X_\alpha)_s$. La siguiente proposición da una respuesta a esto.

Proposición 1.2.15. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios no vacíos, y sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Entonces $X_s = \prod_{\alpha \in J}(X_\alpha)_s$.

Demostración. Sea $U \in \mathscr{RO}(X)$ y sea $p \in U$. Entonces existe un abierto básico $\widehat{U}$ tal que

$$p \in \widehat{U} = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[U_{i_j}] \subseteq U,$$

donde $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq J$ con $n \in \mathbb{N}$, y $U_{i_j} \subseteq X_{i_j}$ es un conjunto abierto para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Además se cumple que $p \in int_X[cl_X \widehat{U}] \subseteq int_X[cl_X U] = U$ donde

$$int_X[cl_X\widehat{U}] = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[int_{X_{i_j}}[cl_{X_{i_j}} U_{i_j}]] = \prod_{j\in\{1,\dots,n\}}(int_{X_{i_j}}[cl_{X_{i_j}} U_{i_j}]) \times \prod_{\alpha\in J\setminus\mathscr{F}} X_\alpha \tag{1}$$

donde $\mathscr{F} = \{i_1,\dots,i_n\}$. Por lo tanto $int_X[cl_X\widehat{U}] \in \mathscr{RO}(\prod_{\alpha\in J}(X_\alpha)_s)$ lo que implica que U es abierto en $\prod_{\alpha\in J}(X_\alpha)_s$.

Por otro lado, $int_X[cl_X\widehat{U}]$ es un abierto regular en X. Es decir, $int_X[cl_X\widehat{U}] \in \mathscr{RO}(X)$ y dado que cualquier elemento de $\mathscr{RO}(\prod_{\alpha\in J}(X_\alpha)_s)$ es de la forma (1) entonces dicho elemento pertenece a $\mathscr{RO}(X)$. Se sigue que $\mathscr{RO}(X)$ y $\mathscr{RO}(\prod_{\alpha\in J}(X_\alpha)_s)$ generan la misma topología en el espacio X. ⊠

Ahora demostraremos que cada espacio puede ser encajado como un subespacio cerrado y denso en ninguna parte de un espacio semiregular.

Sea X un espacio y $\mathbb{N}_\infty$ la compactación por un punto de $\mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}_\infty\setminus\mathbb{N} = \{p_\infty\}$. Sea $Z = X\times\mathbb{N}_\infty$ y consideremos a $\mathscr{B}_*\subseteq\mathscr{P}(Z)$ definida como

$$\mathscr{B}_* = \{\{(x,n)\} : x\in X,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\tau$$

donde τ es la topología producto de los espacios X y $\mathbb{N}_\infty$.

Proposición 1.2.16. $\mathscr{B}_*$ es una base para una topología Hausdorff τ^* de Z.

Demostración. Es claro que $\{\emptyset, X\}\subseteq\mathscr{B}_*$ y $\mathscr{B}_*$ es cerrado bajo intersecciones, esto hace que $\mathscr{B}_*$ sea una base para una topología en Z. Como $\tau\subseteq\mathscr{B}_*$, (Z,τ^*) es un espacio Hausdorff. ⊠

Proposición 1.2.17. X es homeomorfo a $(X\times\{p_\infty\}, \tau^*_{|X\times\{p_\infty\}})$.

Demostración. Afirmamos que $\tau^*_{|X\times\{p_\infty\}} = \tau_{|X\times\{p_\infty\}}$. Es claro que $\tau_{|X\times\{p_\infty\}} \subseteq \tau^*_{|X\times\{p_\infty\}}$. Sea $A\in\tau^*_{|X\times\{p_\infty\}}\setminus\{\emptyset\}$. Sea $(r,p_\infty)\in A$, entonces existe $B\in\mathscr{B}_*\setminus\{\emptyset\}$ tal que

$$(r,p_\infty)\in B\cap(X\times\{p_\infty\})\subseteq A.$$

Si $B\in\mathscr{B}_*\setminus\tau$ entonces existe $x\in X$ y $n\in\mathbb{N}$ tal que $B=\{(x,n)\}$ lo que implica que $B\cap(X\times\{p_\infty\}) = \emptyset$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $B\in\tau$, es decir $B\cap(X\times\{p_\infty\})\in\tau_{|X\times\{p_\infty\}}$. Lo que implica que $A\in\tau_{|X\times\{p_\infty\}}$. Por lo tanto $\tau^*_{|X\times\{p_\infty\}} = \tau_{|X\times\{p_\infty\}}$.

Por otro lado, como X es homeomorfo a $X\times\{p_\infty\}$ como subespacio de $(X\times\mathbb{N}_\infty,\tau)$, entonces por lo ya mencionado anteriormente que X es homeomorfo a $X\times\{p_\infty\}$ como subespacio de Z. ⊠

Proposición 1.2.18. $X\times\{p_\infty\}$ es un subespacio cerrado y denso en ninguna parte de Z.

Demostración. Como $Z\setminus(X\times\mathbb{N}) = X\times\{p_\infty\}$ y $X\times\mathbb{N}\in\tau^*$ entonces $X\times\{p_\infty\}$ es cerrado en Z. La prueba terminará una vez que demostremos que $int_Z[X\times\{p_\infty\}] = \emptyset$.

Supongamos $int_Z[X\times\{p_\infty\}]\neq\emptyset$. Sea $(r,p_\infty)\in int_Z[X\times\{p_\infty\}]$, entonces existe $B\in\mathscr{B}_*$ tal que

$$(r,p_\infty)\in B\subseteq int_Z[X\times\{p_\infty\}],$$

es claro que $B\in\tau$, podemos suponer que B es un abierto canónico, es decir B es de la forma

$$B = U\times(V\cup\{p_\infty\}),$$

donde $U\subseteq X$ es abierto en X y $V\subseteq\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}\setminus V$ es finito. Como $int_Z[X\times\{p_\infty\}]\subseteq X\times\{p_\infty\}$ y $B\nsubseteq X\times\{p_\infty\}$, entonces $B\nsubseteq int_Z[X\times\{p_\infty\}]$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $int_Z[X\times\{p_\infty\}] = \emptyset$.

⊠

Sea $\in \mathbb{N}$, definimos $\mathbb{N}_n := \{0,1,...,n\}$ y $\mathbb{N}_n^c := \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_n$.

Proposición 1.2.19. Sea $U \subseteq X$ abierto en X. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(r, p_\infty) \in Z$ con $r \in X \setminus U$. Entonces $(r, p_\infty) \notin int_Z[cl_Z[U \times \mathbb{N}_n^c]]$.

Demostración. Supongamos que $(r, p_\infty) \in int_Z[cl_Z[U \times \mathbb{N}_n^c]]$. Por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ y $V \subseteq X$ abierto en X, tales que

$$(r, p_\infty) \in V \times \mathbb{N}_m^c \subseteq int_Z[cl_Z[U \times \mathbb{N}_n^c]].$$

Esto implica que $(r, m+1) \in V \times \mathbb{N}_m^c \subseteq int_Z[cl_Z[U \times \mathbb{N}_n^c]]$. Entonces $(r, m+1) \in cl_Z[U \times \mathbb{N}_n^c]$. Como $\{(r, m+1)\}$ es abierto en Z, implica que $(r, m+1) \in U \times \mathbb{N}_n^c$, es decir $r \in U$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $(r, p_\infty) \notin int_Z[cl_Z[U \times \mathbb{N}_n^c]]$.

⊠

Proposición 1.2.20. El espacio (Z, τ^*) es semiregular.

Demostración. Como cada $(r, n) \in X \times \mathbb{N}$ se tiene que $\{(r, n)\} \in \mathscr{RO}(Z)$. Basta demostrar que para cada $(r, p_\infty) \in Z$ y $U \subseteq Z$ abierto en Z con $(r, p_\infty) \in U$, entonces existe $V \in \mathscr{RO}(Z)$ tal que $(r, p_\infty) \in V \subseteq U$.

Sea $(r, p_\infty) \in Z$ y sea $U \subseteq Z$ abierto en Z con $(r, p_\infty) \in U$. Entonces existe $V \subseteq X$ abierto en X y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$(r, p_\infty) \in V \times \mathbb{N}_n^c \subseteq U. \tag{1.1}$$

Afirmamos que $int_Z[cl_Z[V \times \mathbb{N}_n^c]] = V \times \mathbb{N}_n^c$.

Basta demostrar que $int_Z[cl_Z[V \times \mathbb{N}_n^c]] \subseteq V \times \mathbb{N}_n^c$. Sea $(x, y) \in int_Z[cl_Z[V \times \mathbb{N}_n^c]]$.

Si $y = p_\infty$, por la Proposición 1.2.19, $x \in V$. Por lo tanto $(x, y) \in V \times \mathbb{N}_n^c$.

Si $y \neq p_\infty$, entonces $(x, y) \in cl_Z[V \times \mathbb{N}_n^c]$. En este caso $\{(x, y)\}$ es abierto en Z. Por lo tanto $(x, y) \in V \times \mathbb{N}_n^c$.

Por lo tanto $int_Z[cl_Z[V \times \mathbb{N}_n^c]] = V \times \mathbb{N}_n^c$. Es decir $V \times \mathbb{N}_n^c \in \mathscr{RO}(Z)$ y por (1), $\mathscr{RO}(Z)$ es una base de abietos en Z. Por lo tanto Z es semiregular.

⊠

Proposición 1.2.21. Cualquier espacio X se puede encajar en un subespacio cerrado y denso en ninguna parte del espacio semiregular Z.

Demostración. Es consecuencia de las Proposiciones 1.2.17, 1.2.18 y 1.2.20.

⊠

La *semiregularidad* es un concepto muy importante en la teoría de los espacios H-cerrados, ya que muchas de las propiedades de estos últimos se pueden caracterizar a través de la *semiregularidad*, y es por eso que se le dedica cierto estudio a este tema. En matemáticas muchos de los conceptos se tienden a "generalizar". La semiregularidad no es la excepción, presentaremos una generalización del concepto de semiregularidad. Veremos más adelante, en el capítulo 3, que esta generalización juega un papel importante en las extensiones de los espacios H-cerrados. Le pedimos al lector paciencia.

Definición 1.2.22. Sea X un espacio y $A, M \subseteq X$. Decimos que el conjunto A es un *abierto regular con respecto de M* si

$$A = int_X[A \cup (M \cap cl_X A)]$$

Denotamos al conjunto $int_X[A \cup (M \cap cl_X A)]$ por $\alpha_M(A)$. Es decir, si $A = \alpha_M(A)$, entonces A es un abierto regular con respecto de M. Si $M = X$ se sique que $\alpha_M(A)$ es un abierto regular, ya que $\alpha_X(A) = int_X[cl_X A]$, lo que supone una generalización del concepto de abiertos regulares.

Obsérvese que cualquier subconjunto abierto regular con respecto a M en X, es un subconjunto abierto en X. Sea A es un subconjunto abierto y denso en X, que es un abierto regular con respecto a $M \subseteq X$, entonces $int_X A = int_X[A \cup M]$. Lo cual implica que el subconjunto de los números reales menos los números enteros, es un subconjunto abierto en $\mathbb{R}$ que no es abierto regular con respecto al conjunto de los números enteros.

Proposición 1.2.23. Sea X un espacio y A, B y M subconjuntos de X. Entonces se cumple

1. $\alpha_M(A) = \alpha_X(A) \cap int_X[A \cup M]$.

2. Si $A \subseteq B$, entonces $\alpha_M(A) \subseteq \alpha_M(B)$.

3. $\alpha_M(\alpha_M(A)) = \alpha_M(A)$

4. Si A es cerrado, entonces $\alpha_M(A) = \alpha_X(A)$.

5. Si A, B son abiertos en X, entonces $\alpha_M(A \cap B) = \alpha_M(A) \cap \alpha_M(B)$.

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}
\alpha_M(A) &= int_X[A \cup (M \cap cl_X A)] = int_X[(A \cup M) \cap (A \cup cl_X A)] \\
&= int_X[A \cup cl_X A] \cap int_X[A \cup M] = int_X[cl_X A] \cap int_X[A \cup M] \\
&= \alpha_X(A) \cap int_X[A \cup M].
\end{aligned}$$

2. Como $A \subseteq B$ entonces $M \cap cl_X A \subseteq M \cap cl_X B$ lo que implica $A \cup (M \cap cl_X A) \subseteq B \cup (M \cap cl_X B)$. Por lo tanto

$$\alpha_M(A) = int_X[A \cup (M \cap cl_X A)] \subseteq int_X[B \cup (M \cap cl_X B)] = \alpha_M(B).$$

3.

$$\begin{aligned}
\alpha_M(\alpha_M(A)) &= int_X[\alpha_M(A) \cup (M \cap \alpha_M(A))] \\
&= int_X[\alpha_M(A) \cup M] \cap int_X[\alpha_M(A) \cup \alpha_M(A)] \\
&= int_X[\alpha_M(A) \cup M] \cap int_X[\alpha_M(A)] = \alpha_M(A).
\end{aligned}$$

4. Como A es cerrado, entonces $A = cl_X A$ lo que implica $\alpha_X(A) = int_X[cl_X A] = int_X A \subseteq int_X[A \cup M]$. Por lo tanto

$$\alpha_M(A) = \alpha_X(A) \cap int_X[A \cup M] = \alpha_X(A).$$

5. Por la Proposición 1.2.1.(3), $\alpha_X(A\cap B)=\alpha_X(A)\cap\alpha_X(B)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\alpha_M(A\cap B) &= \alpha_X(A\cap B)\cap int_X[(A\cap B)\cup M]\\ &= \alpha_X(A)\cap\alpha_X(B)\cap int_X[A\cup M]\cap int_X[B\cup M]\\ &= \alpha_X(A)\cap int_X[A\cup M]\cap\alpha_X(B)\cap int_X[B\cup M]\\ &= \alpha_M(A)\cap\alpha_M(B).\end{aligned}$$

⊠

A partir de la Proposición 1.2.23 (1), cualquier bola abierta en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto regular con respecto a cualquier subconjunto M de $\mathbb{R}^n$, ya que dada una bola abierta con centro en $x\in\mathbb{R}^n$ y radio $r>0$, que la denotaremos como $B_r(x)$, es un abierto regular en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y cumple que $\alpha_{\mathbb{R}^n}(B_r(x))=B_r(x)\subseteq int_{\mathbb{R}^n}[B_r(x)\cup M]$ donde M es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\alpha_M(B_r(x))=B_r(x)$.

Veamos otro ejemplo. Sea H el semiplano $\{(a,b):0\leq b \text{ y } a,b\in\mathbb{R}\}$, L es la línea $\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$, y D igual a la intersección del disco abierto con centro en $(0,0)$ y radio 1, con H. Entonces D es un abierto regular con respecto a L si consideramos a H con la topología euclideana, pero D no es un abierto regular con respecto a L si consideramos a L con la topología de Moore, véase el Ejemplo 5.25 de [2].

Ya vimos que una condición suficiente para que $\alpha_M(A)$ sea un abierto regular es que $M=X$, sin embargo no es una condición necesaria, es decir, no necesariamente se debe de cumplir que M sea igual a X para que $\alpha_M(A)$ sea un abierto regular, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.2.24. Sea X un espacio y $A,M\subseteq X$.

1. Entonces $\alpha_M(A)=\alpha_X(A)$ si y sólo si $\alpha_X(A)\setminus A\subseteq M$.

2. Si M es un abierto regular y $A\subseteq M$, entonces $\alpha_M(A)=\alpha_X(A)$.

Demostración. 1. Demostremos la necesidad. Supongamos que $\alpha_M(A)=\alpha_X(A)\cap int_X[A\cup M]=\alpha_X(A)$, lo que implica que $\alpha_X(A)\subseteq int_X[A\cup M]$. Por lo tanto, $\alpha_X(A)\setminus A=\alpha_X(A)\cap(X\setminus A)\subseteq int_X[A\cup M]\cap(X\setminus A)\subseteq(A\cup M)\cap(X\setminus A)=M\cap(X\setminus A)\subseteq M$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que $\alpha_X(A)\setminus A\subseteq M$. Como $\alpha_M(A)=\alpha_X(A)\cap int_X[A\cup M]$. Basta demostrar que $\alpha_X(A)\subseteq int_X[A\cup M]$. Como $\alpha_X(A)\setminus A\subseteq M$, entonces

$$\alpha_X(A)=(\alpha_X(A)\cap(X\setminus A))\cup(\alpha_X(A)\cap A)=(\alpha_X(A)\setminus A)\cup(\alpha_X(A)\cap A)\subseteq M\cup A.$$

Es decir $\alpha_X(A)\subseteq M\cup A$ y como $\alpha_X(A)$ es abierto $\alpha_X(A)\subseteq int_X[M\cup A]$.

2. Como M es un abierto regular y $A\subseteq M$, entonces $\alpha_X(A)\subseteq M$. Por el enunciado (1) se sigue que $\alpha_M(A)=\alpha_X(A)$.

⊠

Proposición 1.2.25. Sea X un espacio y sea $M\subseteq X$. Entonces el conjunto

$$\mathscr{B}=\{\alpha_M(U):U \text{ es abierto en } X\}$$

es una base para una topología $\tau(X_M)$ de X, y tal topología hace al espacio X Hausdorff.

Demostración. Como $\alpha_M(X) = X$ y $\alpha_M(\emptyset) = \emptyset$, implica que $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathscr{B}$ y además $\mathscr{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Lo que implica que $\mathscr{B}$ es una base para una topología de X.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces, existen abiertos ajenos U y V de x y y respectivamente. Por la Proposición 1.2.23.(5) se sigue que $\alpha_M(U)$ y $\alpha_M(V)$ son vecindades abiertas ajenas de x y y respectivamente.

Por lo tanto, $\mathscr{B}$ es una base para una topología Hausdorff en X.

$\boxtimes$

Definición 1.2.26. Un espacio X es un *semiregular con respecto de M* si la topología de X, τ, es igual a la topología $\tau(X_M)$. Y denotamos por $X_M = (X, \tau(X_M))$.

Corolario 1.2.27. Sea X un espacio, y $M \in \mathscr{RO}(X)$. Entonces

$$\tau_s = \tau(X_X) \subseteq \tau(X_M) \subseteq \tau(X_\emptyset) = \tau.$$

Demostración. Es claro que $\tau_s = \tau(X_X)$ y $\tau(X_M) \subseteq \tau(X_\emptyset) = \tau$. Así que basta demostrar que $\tau_s \subseteq \tau(X_M)$ lo que es equivalente a demostrar que $\mathscr{RO}(X) \subseteq \tau(X_M)$.

Sea $U \in \mathscr{RO}(X)$ entonces $\alpha_M(U) = \alpha_X(U) \cap int_X[U \cup M] = U \cap (U \cup M) = U$. Por lo tanto, $U \in \tau(X_M)$ es decir $\mathscr{RO}(X) \subseteq \tau(X_M)$.

$\boxtimes$

Capítulo 2

Espacios H-cerrados

En este capítulo se introducirán los conceptos de espacio H-cerrado y se presentarán las propiedades básicas que estos espacios poseen. En las últimas secciones de este capítulo se estudiarán las funciones Θ-continuas, los espacios Urysohn y la relación que tienen con los espacios H-cerrados.

2.1. Espacios H-cerrados

Definición 2.1.1. Un espacio X es *H-cerrado* si X es cerrado en cualquier espacio que lo contenga como subespacio.

Una caracterización de estos espacios es la siguiente.

Proposición 2.1.2. Dado un espacio X las siguientes propiedades son equivalentes.

1. X es H-cerrado.

2. Para cualquier cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X, existe una subcolección finita $\mathscr{V}$ de $\mathscr{U}$ cuya unión es densa en X, i.e. $cl_X[\cup\mathscr{V}] = X$.

3. Cualquier filtro abierto de X tiene al menos un punto de acumulación.

4. Cualquier ultrafiltro abierto de X converge.

Demostración.
$[1 \Rightarrow 3]$ Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto de X tal que $a_X(\mathscr{F}) = \emptyset$. Sea $Y = X \cup \{\mathscr{F}\}$ y sea $\mathscr{T}$ una colección de conjuntos de Y tal que si $U \in \mathscr{T}$ satisface que $U \cap X$ es abierto en X, y si $\mathscr{F} \in U$ entonces $U \cap X \in \mathscr{F}$. Demostremos que $\mathscr{T}$ define una topología en Y.

Es claro $\{\emptyset, Y\} \subseteq \mathscr{T}$ ya que $\emptyset$ es abierto en X, $\mathscr{F} \in Y$ y $Y \cap X = X \in \mathscr{F}$. Sean $V_1, V_2 \in \mathscr{T}$, entonces $V_1 \cap X$ y $V_2 \cap X$ son abiertos en X. Lo cual implica que $(V_1 \cap V_2) \cap X$ es abierto en X. Supongamos que $\mathscr{F} \in V_1 \cap V_2$, es decir $\mathscr{F} \in V_1$ y $\mathscr{F} \in V_2$, entonces $V_1 \cap X \in \mathscr{F}$ y $V_2 \cap X \in \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es un filtro abierto en X, $(V_1 \cap V_2) \cap X \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{T}$.

Sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$, entonces para cada $U \in \mathscr{A}$, $U \cap X$ es abierto en X. Por lo tanto $\bigcup \mathscr{A} \cap X$ es abierto en X. Si $\mathscr{F} \in \bigcup \mathscr{A}$, entonces existe $U_0 \in \mathscr{A}$ tal que $\mathscr{F} \in U_0$, es decir $U_0 \cap X \in \mathscr{F}$. Por otro lado, $\mathscr{F}$ es un filtro abierto lo cual implica que $U_0 \cap X \subseteq \bigcup \mathscr{A} \cap X \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{T}$. Por lo tanto $\mathscr{T}$ define una topología en Y. Además como X es Hausdorff y abierto en Y, se sigue que para cualesquiera puntos distintos en X pueden ser separados por conjuntos abiertos ajenos en Y.

Sea $p \in X$. Como $a_X(\mathscr{F}) = \emptyset$, existe un conjunto abierto $U \in \mathscr{F}$ y una vecindad abierta V de p tal que $U \cap V = \emptyset$. Es claro que V y $U \cup \{\mathscr{F}\}$ son abiertos ajenos en Y que contienen a p y $\mathscr{F}$ respectivamente, lo que implica que Y es Hausdorff. Como X no es cerrado en Y, se sigue que X no es H-cerrado.

[$3 \Rightarrow 4$] Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro abierto en X, como $a_X(\mathscr{U}) \neq \emptyset$ y $a_X(\mathscr{U}) = c_X(\mathscr{U})$, entonces $\mathscr{U}$ converge.

[$4 \Rightarrow 3$] Supongamos que $\mathscr{F}$ es un filtro abierto en X. El filtro $\mathscr{F}$ está contenido en un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$, y como $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$, entonces $a_X(\mathscr{U}) \subseteq a_X(\mathscr{F})$, pero $c_X(\mathscr{U}) = a_X(\mathscr{U})$ y $c_X(\mathscr{U}) \neq \emptyset$. Por lo tanto $a_X(\mathscr{U}) \neq \emptyset$, lo que implica que $a_X(\mathscr{F}) \neq \emptyset$.

[$3 \Rightarrow 1$] Supongamos que X no es H-cerrado, entonces existe un espacio Y tal que X es un subespacio de Y y $cl_Y X \neq X$, es decir existe $p \in cl_Y X \setminus X$. Sea $\mathscr{F} = \{U \cap X : U$ es abierto en Y y $p \in U\}$. Entonces $\mathscr{F}$ es un filtro abierto en X y como Y es Hausdorff, entonces $a_X(\mathscr{F}) = \emptyset$.

[$2 \Rightarrow 3$] Supongamos que $\mathscr{F}$ es un filtro abierto libre de X, entonces $\{X \setminus cl_X U : U \in \mathscr{F}\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathscr{A}$ una subcolección finita de $\mathscr{F}$. Como $cl_X[\bigcup_{U \in \mathscr{A}}(X \setminus cl_X U)] = \bigcup_{U \in \mathscr{A}}(X \setminus int_X[cl_X U]) = X \setminus \bigcap_{U \in \mathscr{A}} int_X[cl_X U] \subseteq X \setminus \bigcap_{U \in \mathscr{A}} U \neq X$ ya que $\bigcap_{U \in \mathscr{A}} U \neq \emptyset$ porque $\mathscr{F}$ es un filtro. Por lo tanto, no existe subfamilias finitas de $\{X \setminus cl_X U : U \in \mathscr{F}\}$ cuya unión sea densa en X.

[$3 \Rightarrow 2$] Sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de X tal que para cada subconjunto finito $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$, $X \neq cl_X[\bigcup \mathscr{A}]$. Sea $\mathscr{F} = \{U : U$ abierto y $X \setminus cl_X[\bigcup \mathscr{A}] \subseteq U$ para $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ finito $\}$. La colección $\mathscr{F}$ es un filtro abierto de X y $a_X(\mathscr{F}) = \bigcap_{U \in \mathscr{F}} cl_X U \subseteq \bigcap\{cl_X[X \setminus cl_X[\bigcup \mathscr{A}]] : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ es finito $\} \subseteq \bigcap\{cl_X[X \setminus cl_X V] : V \in \mathscr{C}\} \subseteq X \setminus \bigcup \mathscr{C} = X \setminus X = \emptyset$. Por lo tanto $\mathscr{F}$ es un filtro abierto libre de X.

$\boxtimes$

Proposición 2.1.3. Un espacio X es H-cerrado y regular si y sólo si X es compacto.

Demostración. Es claro que un espacio compacto es H-cerrado y regular. Supongamos que X es un espacio H-cerrado y regular. Sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de X, para cada $x \in X$ existe un subconjnto abierto $U_x \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U_x$. Como X es regular existe un conjunto abierto V_x que contiene a x tal que $cl_X V_x \subseteq U_x$. Por la proposición anterior $\{V_x : x \in X\}$ tiene una subfamilia finita $\{V_x : x \in A\}$ con $A \subseteq X$ finito, tal que $X = cl_X[\bigcup_{x \in A} V_x] = \bigcup_{x \in A} cl_X V_x$. Y como $cl_X V_x \subseteq U_x$, $X = \bigcup_{x \in A} U_x$; es decir, $\mathscr{C}$ tiene una subcubierta finita. Por lo tanto X es compacto.

$\boxtimes$

Todo espacio compacto es H-cerrado, pero no necesariamente un espacio H-cerrado es compacto como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.4. Sea $Y := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \in \mathbb{N}, |m| \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ cuya topología es la heredada por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbb{X} := Y \cup \{p_+, p_-\}$. Sea $U \subseteq \mathbb{X}$. Decimos que U es abierto en $\mathbb{X}$ si $U \cap Y$ es abierto en Y y si $p_+ \in U$ (respectivamente $p_- \in U$) implica que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \geq r, m \in \mathbb{N}\} \subseteq U$ (respetivamente, $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \geq r, -m \in \mathbb{N}\} \subseteq U$). Esto nos define una topología Hausdorff en $\mathbb{X}$.

Sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de $\mathbb{X}$, entonces existen subconjuntos abiertos U_+, U_- de $\mathscr{C}$ que contienen a p_+, p_- respectivamente.

Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{X} \setminus cl_{\mathbb{X}}[U_+ \cup U_-] \subseteq D$ donde $D = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \leq r, |m| \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \leq r\}$. Pero D es compacto, por lo tanto existe una familia finita $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $D \subseteq \bigcup \mathscr{R}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{X} = cl_{\mathbb{X}}[U_+ \cup U_-] \bigcup \left(\bigcup \mathscr{R}\right) = cl_{\mathbb{X}}\Big[U_+ \cup U_- \bigcup \left(\bigcup \mathscr{R}\right)\Big].$$

Esto muestra que $\mathbb{X}$ es un espacio H-cerrado y $\mathscr{T} = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio infinito cerrado y discreto de $\mathbb{X}$, es decir $\mathbb{X}$ no es compacto.

Por otro lado, $\mathscr{T}$ es un subespacio infinito cerrado, discreto y regular. Lo que implica que $\mathscr{T}$ no es H-cerrado, por la Proposición 2.1.3.

Por lo tanto, en un espacio H-cerrado la propiedad de ser H-cerrado no necesariamente se hereda a subespacios cerrados. En cambio, la compacidad, la compacidad numerable, la propiedad de Lindelöf, y la compacidad local, entre otros, sí las heredan los subespacios cerrados de espacios con algunas de estas propiedades. Sin embargo, la propiedad de ser H-cerrado sí se hereda a cierta familia de subconjuntos cerrados, los cerrados regulares, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.5. Sea X un espacio H-cerrado y sea $U \subseteq X$ abierto. Entonces $cl_X U$ es H-cerrado.

Demostración. Sea $A = cl_X U$ y $\mathscr{F}$ un filtro abierto de A. Entonces $\mathscr{H} := \{F \cap U : F \in \mathscr{F}\}$ es un filtro abierto de X. Definimos $\mathscr{G} := \{W \subseteq X : W$ es abierto en X y $H \subseteq W$ para algún $H \in \mathscr{H}\}$. $\mathscr{G}$ es un filtro abierto de X y $\emptyset \neq a_X(\mathscr{G}) \subseteq \bigcap_{H \in \mathscr{H}} cl_X H = \bigcap_{H \in \mathscr{H}} cl_A H \subseteq \bigcap_{F \in \mathscr{F}} cl_A F = a_A(\mathscr{F})$. Por lo tanto A es H-cerrado.

$\boxtimes$

Proposición 2.1.6. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios. El producto topológico $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es H-cerrado si y sólo si X_α es H-cerrado para cada $\alpha \in I$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es H-cerrado. Sea $\alpha \in I$, y sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro abierto en X_α, entonces $\pi_\alpha^{-1}[\mathscr{U}] := \{\pi_\alpha^{-1}[U] : U \in \mathscr{U}\}$ es una base abierta de filtro en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{V}$ en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $\pi_\alpha^{-1}[\mathscr{U}] \subseteq \mathscr{V}$. Como $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es H-cerrado, entonces $\mathscr{V}$ converge a un punto $x_0 \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Por otro lado, dado que π_α es una función contina, abierta y suprayectiva, entonces $\pi_\alpha[\mathscr{V}] := \{\pi_\alpha[V] : V \in \mathscr{V}\}$ es un filtro abierto en X_α tal que $\pi_\alpha[\mathscr{V}]$ converge a $\pi_\alpha(x_0)$ en X_α y $\mathscr{U} = \pi_\alpha[\pi_\alpha^{-1}[\mathscr{U}]] \subseteq \pi_\alpha[\mathscr{V}]$, por la maximalidad de $\mathscr{U}$ se tiene que $\pi_\alpha[\mathscr{V}] = \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ converge a $\pi_\alpha(x_0)$, lo que implica que X_α es H-cerrado.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que X_α es H-cerrado para cada $\alpha \in I$. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafitro abierto en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Como $\pi_\alpha[\mathscr{U}]$ es una función continua y abierta para cada $\alpha \in I$, entonces $\pi_\alpha[\mathscr{U}]$ es un filtro abierto en X_α para cada $\alpha \in I$.

Afirmamos que $\pi_\alpha[\mathscr{U}]$ es un ultrafiltro abierto en X_α para cada $\alpha \in I$. Sea $\alpha \in I$, y sea W un abierto en X_α tal que $W \cap \pi_\alpha[U] \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\pi_\alpha^{-1}[W] \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathscr{U}$, lo que implica que $\pi_\alpha^{-1}[W] \in \mathscr{U}$. Dado que π_α es suprayectiva, $W = \pi_\alpha[\pi_\alpha^{-1}[W]] \in \pi_\alpha[\mathscr{U}]$, por lo tanto $\pi_\alpha[\mathscr{U}]$ es un ultrafiltro abierto en X_α. Por la Proposición 2.1.2.(4), $\pi_\alpha[\mathscr{U}]$ converge a un punto $x_\alpha^* \in X_\alpha$. Sea $x^* = (x_\alpha^*)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Afirmamos que $\mathscr{U}$ converge a x^*. Sea V una vecindad abierta de x^*. Por lo tanto, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ y abiertos $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ con $x_{\alpha_i}^* \in U_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tal que

$$x^* \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \subseteq V.$$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\pi_{\alpha_i}[\mathscr{U}]$ converge a $x_{\alpha_i}^*$, entonces $U_i \in \pi_{\alpha_i}[\mathscr{U}]$, es decir existe $W_i \in \mathscr{U}$ tal que $U_i = \pi_{\alpha_i}[W_i]$, entonces $W_i \subseteq \pi_{\alpha_i}^{-1}[\pi_{\alpha_i}[W_i]] = \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i]$. Por lo tanto, $\pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \in \mathscr{U}$. Es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \in \mathscr{U}$, lo que implica que $V \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ converge a x^*.

Por lo tanto, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es H-cerrado.

$\boxtimes$

Es decir, la propiedad de ser H-cerrado es productiva.

En la siguiente sección analizaremos mas a fondo las propiedades de los subespacio H-cerrado.

2.2. Subespacios H-cerrados

Como ya vimos la propiedad de ser H-cerrado no necesariamente se hereda a subespacios cerrados, sin embargo si se hereda a los cerrados regulares. Es decir el conjunto de subespacios H-cerrados de un espacio H-cerrado, se encuentra entre el conjunto de los subespacios cerrados y el conjunto de los cerrados regulares $\mathscr{R}(X)$.

Nuestra meta en está sección es poder identificar y caracterizar a los subespacio H-cerrados de un espacio H-cerrado.

Pero antes veamos cuándo los subespacios H-cerrados coinciden con los subespacios cerrados de un espacio H-cerrado.

Sea X un espacio H-cerrado y $\mathscr{H}$ una cadena de subespacios H-cerrados no vacíos de X.

Proposición 2.2.1. Sean $H \in \mathscr{H}$ y $p \notin H$. Entonces existe un conjunto abierto $U_{(p,H)}$ tal que $p \notin cl_X U_{(p,H)}$ y $H \subseteq cl_X[U_{(p,H)} \cap H]$.

Demostración. Sean $H \in \mathscr{H}$ y $p \notin H$. Por lo tanto, para cada $q \in H$ existen $U_{p,q}, V_{p,q}$ abiertos ajenos de X tales que $p \in U_{p,q}$ y $q \in V_{p,q}$. Por lo tanto $\{V_{p,q} : q \in H\}$ es una cubierta abierta de H. Como H es H-cerrado, $\exists S \subseteq H$ finito tal que $H = cl_H[\bigcup_{q\in S} V_{p,q} \cap H] \subseteq cl_X[\bigcup_{q\in S} V_{p,q} \cap H]$.

Definimos $U_{(p,H)} := \bigcup_{q\in S} V_{p,q}$ y $W_p := \bigcap_{q\in S} U_{p,q}$ es claro que $p \in W_p$ y $U_{(p,H)} \bigcap W_p = \emptyset$. Por lo tanto $cl_X[U_{(p,H)}] \bigcap W_p = \emptyset$, es decir $p \notin cl_X U_{(p,H)}$ y $H \subseteq cl_X[U_{(p,H)} \cap H]$.

$\boxtimes$

Proposición 2.2.2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $H_i \in \mathscr{H}$ para $1 \leq i \leq n$. Supongamos que existe $p_i \in X \setminus H_i$ para $1 \leq i \leq n$ y $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_n$, entonces $H_i \cap U_{(p_1,H_1)} \cap U_{(p_2,H_2)} \cap \ldots \cap U_{(p_n,H_n)} \neq \emptyset$ para cada $i \leq n$, en donde cada $U_{(p_i,H_i)}$ es el subconjunto abierto cuya existencia asegura la Proposición 2.2.1.

Demostración. La demostración se hará por inducción.

Para $n = 1$: tenemos que $\emptyset \neq H_1 \subseteq cl_X[U_{(p_1,H_1)} \cap H_1]$ y como $cl_X\emptyset = \emptyset$, $H_1 \cap U_{(p_1,H_1)} \neq \emptyset$. Veamos para el caso $n = 2$.

Para $n = 2$: si $i = 1$ este hecho ya fue probado, para $i = 2$ tenemos que $H_1 \subseteq H_2$ lo que implica que $U_{(p_1,H_1)} \cap H_2 \neq \emptyset$. Por otro lado, $H_2 \subseteq cl_X[U_{(p_2,H_2)} \cap H_2]$, es decir $U_{(p_2,H_2)} \cap H_2$ es denso en H_2 y $U_{(p_1,H_1)} \cap H_2$ es un abierto no vacío en H_2. Por lo tanto $H_2 \cap U_{(p_1,H_1)} \cap U_{(p_2,H_2)} \neq \emptyset$.

[Hipótesis de Inducción] Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_i \cap \textstyle\bigcap_{j=1}^{i} U_{(p_j,H_j)} \neq \emptyset \qquad \text{para } i \leq k. \tag{1}$$

Afirmamos que para $k+1$ se obtiene

$$H_i \cap \textstyle\bigcap_{j=1}^{i} U_{(p_j,H_j)} \neq \emptyset \qquad \text{para } i \leq k+1. \tag{2}$$

Si $i \leq k$ se cumple (1). Sea $i = k+1$. Por Hipótesis de Inducción tenemos que $H_k \cap \bigcap_{j=1}^{k} U_{(p_j,H_j)} \neq \emptyset$ y por hipótesis $H_k \subseteq H_{k+1}$. Por lo tanto, $H_{k+1} \cap \bigcap_{j=1}^{k} U_{(p_j,H_j)} \neq \emptyset$. Por otro lado, $H_{k+1} \subseteq cl_X[U_{(p_{k+1},H_{k+1})} \cap H_{k+1}]$, es decir que $U_{(p_{k+1},H_{k+1})} \cap H_{k+1}$ es denso en H_{k+1} y como $H_{k+1} \cap \bigcap_{j=1}^{k} U_{(p_j,H_j)}$ es un abierto no vacío en H_{k+1}, se cumple que

$$H_{k+1} \cap \bigcap_{j=1}^{k+1} U_{(p_j,H_j)} \neq \emptyset.$$

Es decir se cumple (2). Por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$H_i \cap \textstyle\bigcap_{j=1}^{i} U_{(p_j,H_j)} \neq \emptyset \qquad \text{para } i \leq n.$$

$\boxtimes$

Sea $\mathscr{U} := \{U_{(p,H)} : H \in \mathscr{H}, p \notin H\}$. Por la proposición anterior y dado que $\mathscr{H}$ es una cadena, $\mathscr{U}$ tiene la p.i.f (propiedad de intersección finita). Por lo tanto, existe un filtro abierto $\mathscr{F}$ el cual es generado por las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{U}$.

Proposición 2.2.3. Sea $\mathscr{F}$ el filtro abierto generado por las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{U}$. Entonces $a_X(\mathscr{F}) = \bigcap \mathscr{H}$.

Demostración. Sean $H \in \mathscr{H}$ y $p \notin H$, entonces $H \subseteq cl_X[U_{(p,H)} \cap H] \subseteq cl_X U_{(p,H)}$. Por lo tanto,

$$\bigcap \mathscr{H} \subseteq \bigcap \{cl_X U_{(p,H)} : U_{(p,H)} \in \mathscr{U}\} = a_X(\mathscr{F}).$$

Es decir $\bigcap \mathscr{H} \subseteq a_X(\mathscr{F})$.

Sea $p_0 \in a_X(\mathscr{F})$. Supongamos que $p_0 \notin \bigcap \mathscr{H}$, es decir, $\exists H_0 \in \mathscr{H}$ tal que $p_0 \notin H_0$. Por la Proposición 2.2.1 tenemos que $p_0 \notin cl_X U_{(p_0,H_0)}$. Por lo tanto, $p_0 \notin \bigcap \{cl_X U_{(p,H)} : U_{(p,H)} \in \mathscr{U}\} = a_X(\mathscr{F})$. De esta contradicción se obtiene que $a_X(\mathscr{F}) \subseteq \bigcap \mathscr{H}$.

Por lo tanto, $a_X(\mathscr{F}) = \bigcap \mathscr{H}$.

$\boxtimes$

Dado que X es H-cerrado, concluimos que $\bigcap \mathscr{H} \neq \emptyset$.

Proposición 2.2.4. La intersección de una cadena de subespacio H-cerrados es no vacía.

Demostración. Es consecuencia de la Proposición anterior y de la Proposición 2.1.1 (3). ⊠

Sea X un espacio H-cerrado, y sea $\mathscr{S}$ una familia de subespacios H-cerrados. Si $\mathscr{S}$ tiene la p.i.f., no necesariamente se cumple $\bigcap \mathscr{S} \neq \emptyset$. Afirmamos que existe un espacio H-cerrado y una familia de subespacios H-cerrados con la p.i.f. tal que su intersección es vacía.

En efecto, consideremos el espacio $\mathbb{X}$ del Ejemplo 2.1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_n = \{(\tfrac{1}{r}, \tfrac{1}{m}) : n \leq r, \text{ tal que } r, m \in \mathbb{N}\} \text{ y } B_n = \{(\tfrac{1}{r}, \tfrac{1}{m}) : n \leq r, \text{ tal que } r, -m \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n y B_n son abiertos en $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ es H-cerrado y por la Proposición 2.1.3

$$cl_{\mathbb{X}} A_n = A_n \bigcup \{(\tfrac{1}{r}, 0) : n \leq r, \ r \in \mathbb{N}\} \cup \{p_+\} \text{ y } cl_{\mathbb{X}} B_n = B_n \bigcup \{(\tfrac{1}{r}, 0) : n \leq r, \ r \in \mathbb{N}\} \cup \{p_-\}$$

son subespacios H-cerrados para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathscr{S} = \{cl_{\mathbb{X}} A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{cl_{\mathbb{X}} B_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathscr{S}$ es una familia de subespacios H-cerrados con la p.i.f. y

$$\bigcap \mathscr{S} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl_{\mathbb{X}} A_n \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl_{\mathbb{X}} B_n = \{p_+\} \cap \{p_-\} = \emptyset.$$

Proposición 2.2.5. Sea X un espacio tal que cualquier subespacio cerrado de él es H-cerrado. Entonces, X es compacto.

Demostración. Por hipótesis, X es H-cerrado. Sea $\mathscr{H}$ una cadena de conjuntos cerrados no vacíos, lo que implica que $\mathscr{H}$ sea una cadena de subespacios H-cerrados. Por la Proposición 2.2.4, $\bigcap \mathscr{H} \neq \emptyset$ y por el teorema de Alexander, el cuál puede consultarse en el Apéndice A, X es compacto. ⊠

Teorema 2.2.6. Sea X un espacio H-cerrado. Cualquier subespacio cerrado de él es H-cerrado si y sólo si X es compacto.

Demostración. Demostremos la necesidad. Es consecuencia de la Proposición 2.2.5.

Ahora demostremos la suficiencia. Si X es un compacto Hausdorff, entonces cualquier subespacio cerrado de él es compacto, en particular es un H-cerrado. ⊠

Ahora veamos que sucede con la intersección y unión de subespacios H-cerrados.

Proposición 2.2.7. Sea Z un espacio (no necesariamente H-cerrado). Sean $A, B \subseteq Z$ subespacios H-cerrados. Entonces $A \cup B$ es H-cerrado.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta de $A \cup B$. Entonces $\{A \cap W : W \in \mathscr{U}\}$ y $\{B \cap W : W \in \mathscr{U}\}$ son cubiertas abiertas de A y B respectivamente. Como A y B son subespacios H-cerrados, existen $\mathscr{V}_1$ y $\mathscr{V}_2$ subfamilias finitas de $\mathscr{U}$ tal que $\mathscr{A} := \bigcup \{A \cap W : W \in \mathscr{V}_1\}$ y $\mathscr{B} := \bigcup \{B \cap W : W \in \mathscr{V}_2\}$ son abiertos densos de A y B respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} A \cup B &= cl_A[\mathscr{A}] \cup cl_B[\mathscr{B}] \subseteq cl_{A\cup B}\left[\bigcup \mathscr{V}_1\right] \cup cl_{A\cup B}\left[\bigcup \mathscr{V}_2\right] \\ &= cl_{A\cup B}\left[\left(\bigcup \mathscr{V}_1\right) \cup \left(\bigcup \mathscr{V}_2\right)\right] = cl_{A\cup B}\left[\bigcup (\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2)\right]. \end{aligned}$$

Es decir $\bigcup (\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2)$ es un abierto denso de $A \cup B$, lo cual implica que $\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2$ es una subcolección finita de $\mathscr{U}$ cuya unión es densa en $A \cup B$. Por lo tanto $A \cup B$ es un subespacio H-cerrado.

⊠

Como consecuencia la unión finita de subespacios H-cerrados es H-cerrado. Pero al igual que los espacios compactos, la unión arbitraria de subespacios H-cerrados no necesariamente es H-cerrada. Por otro lado la intersección de subespacios H-cerrados no necesariamente es H-cerrada como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.8. Nuevamente consideremos el espacio $\mathbb{X}$ del Ejemplo 2.1.1. Definimos los siguientes conjuntos

$$U^+ := \{(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\} \text{ y } U^- := \{(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}) : n \in \mathbb{N}, -m \in \mathbb{N}\}.$$

Como $\mathbb{X}$ es un espacio H-cerrado y $\{cl_{\mathbb{X}}U^+, cl_{\mathbb{X}}U^-\} \subseteq \mathscr{R}(\mathbb{X})$, entonces $cl_{\mathbb{X}}U^+$ y $cl_{\mathbb{X}}U^-$ son subespacios H-cerrados tales que

$$cl_{\mathbb{X}}U^+ \cap cl_{\mathbb{X}}U^- = \{(\tfrac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto $cl_{\mathbb{X}}U^+ \cap cl_{\mathbb{X}}U^-$ no es un subespacio H-cerrado.

Definición 2.2.9. Decimos que una cubierta abierta $\mathscr{Q}$ de un espacio Z (no necesariamente H-cerrado) es una *p-cubierta*, si existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$, tal que $\bigcup \mathscr{S}$ es un abierto denso en Z.

En un espacio H-cerrado toda cubierta abierta es una p-cubierta.

Definición 2.2.10. Sea $f : Z \to Y$ una función continua. Decimos que f es un *p-mapeo* si para cada p-cubierta $\mathscr{Q}$ de Y. Se tiene que $f^{-1}[\mathscr{Q}] := \{f^{-1}[U] : U \in \mathscr{Q}\}$ es una p-cubierta de Z.

Proposición 2.2.11. Sea $f : Z \to Y$ una función continua. Si f es abierta ó un encaje denso, entonces f es un p-mapeo.

Demostración. Si f es abierta ó un encaje denso, entonces para cada $V \subseteq Y$ abierto denso en Y, se tiene que $f^{-1}[V]$ es un abierto denso en X. Por lo tanto, si $\mathscr{Q}$ es una p-cubierta de Y, existe $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ finita tal que $\bigcup \mathscr{S}$ es un abierto denso en Y. Por lo tanto $\bigcup f^{-1}[\mathscr{S}]$ es un abierto denso en X, es decir $f^{-1}[\mathscr{Q}]$ es una p-cubierta.

⊠

Si Z es H-cerrado y Y es un espacio arbitrario, entonces el conjunto de funciones continuas definidas en Z con valores en Y, $C(Z,Y)$, coincide con el conjunto de todas las funciones de Z en Y que son p-mapeos.

Lema 2.2.12. Sea $f : Z \to Y$ un p-mapeo y sea $A \in \mathscr{R}(Z)$. Si $int_Y[cl_Y f[A]] = \emptyset$, entonces $cl_Y f[A]$ es H-cerrado.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de $cl_Y f[A]$. Entonces $\mathscr{C}$ es de la forma $\{U_i \cap cl_Y f[A] : i \in I\}$ donde U_i es un abierto de Y, para cada $i \in I$. Como $int_Y[cl_Y f[A]] = \emptyset$, entonces $\{Y \setminus cl_Y f[A]\} \cup \{U_i : i \in I\}$ es una p-cubierta en Y. Como f es un p-mapeo, entonces

$$\{f^{-1}[Y \setminus cl_Y f[A]]\} \cup \{f^{-1}[U_i] : i \in I\},$$

es una p-cubierta en Z. Por lo tanto existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$f^{-1}[Y \setminus cl_Y f[A]] \cup \bigcup_{i \in J} f^{-1}[U_i],$$

es un abierto denso en Z. Como $f^{-1}[Y \setminus cl_Y f[A]] \cap int_Z A = \emptyset$, entonces $int_Z A \cap \left[\bigcup_{i\in J} f^{-1}[U_i]\right]$ es denso en $int_Z A$. Por otro lado, $cl_A[int_Z A] = cl_Z[int_Z A] \cap A = A \cap A = A$ ya que $A \in \mathscr{R}(Z)$. Es decir, $int_Z A$ es denso en A. Por lo tanto $f[int_Z A]$ es denso en $f[A]$. Lo que implica que $f[A] \cap (\bigcup_{i\in J} U_i)$ es denso en $f[A]$.

Afirmamos que $cl_Y f[A] \cap (\bigcup_{i\in J} U_i)$ es denso en $cl_Y f[A]$.

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
cl_Y f[A] &= cl_{cl_Y f[A]} f[A] = cl_{cl_Y f[A]} cl_{f[A]} \left[f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right] \\
&= cl_{cl_Y f[A]} \left[cl_Y \left[f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right] \cap f[A] \right] \\
&= cl_Y \left[cl_Y \left[f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right] \cap f[A] \right] \cap cl_Y f[A] \\
&\subseteq cl_Y \left[f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right] \cap cl_Y f[A] \\
&= cl_Y \left[cl_Y f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right] \cap cl_Y f[A] = cl_{cl_Y f[A]} \left[cl_Y f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$cl_Y f[A] = cl_{cl_Y f[A]} \left[cl_Y f[A] \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \right].$$

Por lo tanto $cl_Y f[A] \cap (\bigcup_{i\in J} U_i)$ es un abierto denso en $cl_Y f[A]$. Por la Proposición 2.1.2 $cl_Y f[A]$ es un subespacio H-cerrado.

$\boxtimes$

Lema 2.2.13. Sea $f : Z \to Y$ un p-mapeo. Si $A \in \mathscr{R}(Z)$, entonces $cl_Y f[A] = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Y)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Y.

Demostración. Sea $B := cl_Y[int_Y[cl_Y f[A]]]$, entonces $B \in \mathscr{R}(Y)$. Sea $T := cl_Y[cl_Y f[A] \setminus B]$. Es claro que T es cerrado en Y. Veamos que T es un conjunto denso en ninguna parte, es decir que $int_Y[cl_Y T] = int_Y T = \emptyset$.

Observamos que $cl_Y f[A] \setminus B = cl_Y f[A] \cap (Y \setminus B) = cl_Y f[A] \cap (Y \setminus cl_Y[int_Y[cl_Y f[A]]]) = cl_Y f[A] \cap int_Y[cl_Y[Y \setminus cl_Y f[A]]]$. Por lo tanto $T \subseteq cl_Y f[A] \cap cl_Y[int_Y[cl_Y[Y \setminus cl_Y f[A]]]]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
int_Y T &\subseteq int_Y[cl_Y f[A]] \cap int_Y[cl_Y[int_Y[cl_Y[Y \setminus cl_Y f[A]]]]] = int_Y[cl_Y f[A]] \cap int_Y[cl_Y[Y \setminus cl_Y f[A]]] \\
&= int_Y[cl_Y f[A]] \cap int_Y[Y \setminus int_Y[cl_Y f[A]]] \subseteq int_Y[cl_Y f[A]] \cap (Y \setminus int_Y[cl_Y f[A]]) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $int_Y T = \emptyset$. Es decir T es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte de Y. Veamos que $cl_Y f[A] = B \cup T$.

$$B \cup T = B \cup cl_Y[cl_Y f[A] \setminus B] = cl_Y B \cup cl_Y[cl_Y f[A] \setminus B] = cl_Y[B \cup (cl_Y f[A] \setminus B)] = cl_Y[B \cup cl_Y f[A]].$$

Como $B \subseteq cl_Y f[A]$. Entonces $cl_Y[B \cup cl_Y f[A]] = cl_Y f[A]$. Por lo tanto $cl_Y f[A] = B \cup T$. Falta demostrar que T es H-cerrado.

Sea $E := cl_Z[int_Z A \cap f^{-1}[Y \setminus B]]$. Como f es continua, $f^{-1}[Y \setminus B]$ es abierto en Z, lo que implica que $int_Z A \cap f^{-1}[Y \setminus B]$ es abierto en Z. Por lo tanto $E \in \mathscr{R}(Z)$. Afirmamos que $cl_Y f[E] = T$.

$\subseteq]$ Por la continuidad de f, tenemos que

$$f[E] \subseteq cl_Y[f[int_Z A \cap f^{-1}[Y \setminus B]]] \subseteq cl_Y[f[int_Z A] \cap (Y \setminus B)] \subseteq cl_Y[cl_Y f[A] \setminus B] = T.$$

Por lo tanto, $cl_Y f[E] \subseteq T$.

$\supseteq]$ Sea $y \in T$ y sea $V \in \mathscr{N}_y$. Por demostrar que $V \cap f[E] \neq \emptyset$. Es decir, basta demostrar que existe $x \in E$ tal que $u := f(x)$ cumple que $u \in V$. Como $y \in T$, entonces existe $z \in V \cap (cl_Y f[A] \setminus B) = V \cap cl_Y f[A] \cap (Y \setminus B)$. Notemos que $V \cap (Y \setminus B) \in \mathscr{N}_z$ y como $z \in cl_Y f[A]$, entonces existe $u \in V \cap (Y \setminus B) \cap f[A]$. Entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = u$. Afirmamos que $x \in E$.

Sea $U \in \mathscr{N}_x$. Como $A \in \mathscr{R}(Z)$, es decir A no tiene puntos aislados. Por lo tanto $int_Z A$ es denso en A, y como f es continua, por lo tanto $U \cap f^{-1}[Y \setminus B] \in \mathscr{N}_x$. Por lo tanto $U \cap f^{-1}[Y \setminus B] \cap int_Z A \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in E$ y $u = f(x) \in V$. Es decir $V \cap f[E] \neq \emptyset$. Por lo tanto $T \subseteq cl_Y f[E]$.

Por lo tanto $cl_Y f[E] = T$. Es decir $int_Y[cl_Y f[E]] = \emptyset$ y como f es un p-mapeo, por el Lema anterior T es un H-cerrado.

$\boxtimes$

Teorema 2.2.14. Sea $A \subseteq Z$ y sea $i : A \hookrightarrow Z$ y $j : cl_Z A \hookrightarrow Z$ las inclusiones. Entonces:

1. i es un p-mapeo si y sólo si j es un p-mapeo.

2. i es un p-mapeo si y sólo si $cl_Z A = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z.

3. Si Z es H-cerrado, entonces i es un p-mapeo si y sólo si $cl_Z A$ es H-cerrado.

4. Sea Y un subespacio de un espacio H-cerrado Z. Entonces Y es un subespacio H-cerrado si y sólo si Y es de la forma $B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z.

Demostración. 1. Sea $\mathscr{Q}$ una p-cubierta de Z.

Demostremos la necesidad. Es claro que si i es un p-mapeo si y sólo si existe $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ subfamilia finita de $\mathscr{Q}$ tal que $D_1 := \bigcup\{U \cap A : U \in \mathscr{S}\}$ es denso en A, entonces D_1 es denso en $cl_Z A$. Por lo tanto $\{U \cap cl_Z A : U \in \mathscr{S}\}$ es una cubierta abierta de $cl_Z A$ cuya unión es densa. Por lo tanto j es un p-mapeo.

Ahora demostremos la suficiencia. j es un p-mapeo si y sólo si existe $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ subfamilia finita de $\mathscr{Q}$ tal que $D := \bigcup\{U \cap cl_Z A : U \in \mathscr{S}\}$ es denso en $cl_Z A$. Afirmamos que $D \cap A$ es denso en $cl_Z A$.

$$\begin{aligned} cl_{cl_Z A}[D \cap A] &= cl_Z[D \cap A] \cap cl_Z A = \bigcup\{cl_Z[U \cap A] : U \in \mathscr{S}\} \cap cl_Z A \\ &= \bigcup\{cl_Z[U \cap cl_Z A] : U \in \mathscr{S}\} \cap cl_Z A = cl_Z D \cap cl_Z A \\ &= cl_{cl_Z A} D = cl_Z A. \end{aligned}$$

Por lo tanto $D \cap A$ es denso en $cl_Z A$, más aún $D \cap A$ es denso en A y como $D \cap A = \bigcup\{U \cap A : U \in \mathscr{S}\}$. Por lo tanto i es un p-mapeo.

2. Demostremos la necesidad. Si i es un p-mapeo, es claro que $A \in \mathscr{R}(A)$. Entonces por el Lema 2.2.13, $cl_Z A = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que $cl_Z A = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z. Sea $\mathscr{Q}$ una p-cubierta de Z. Como T es H-cerrado, $\{U \cap T : U \in \mathscr{Q}\}$ es una cubierta abierta de T, entonces existe $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{Q}$ subfamilia finita de $\mathscr{Q}$ tal que $\bigcup\{U \cap T : U \in \mathscr{G}\}$ es denso en T. Por otro lado, como $\mathscr{Q}$ es una p-cubierta, existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ tal que $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en Z. Entonces $int_Z B \cap \bigcup \mathscr{S}$ es denso en $int_Z B$. Afirmamos que $int_Z B \cap \bigcup \mathscr{S}$ es denso en B.

En efecto, como $B = cl_Z[int_Z B]$ y $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en Z. Entonces,

$$\begin{aligned} cl_B\left[int_Z B \cap \left(\bigcup \mathscr{S}\right)\right] &= cl_Z\left[int_Z B \cap \left(\bigcup \mathscr{S}\right)\right] \cap B = cl_Z\left[int_Z B \cap cl_Z\left[\bigcup \mathscr{S}\right]\right] \cap B \\ &= cl_Z[int_Z B \cap Z] \cap B = cl_Z[int_Z B] \cap B = B. \end{aligned}$$

Por lo tanto $int_Z B \cap \bigcup \mathscr{S}$ es denso en B. Como $int_Z B \cap \bigcup \mathscr{S} \subseteq cl_Z A \cap \bigcup \mathscr{S}$ y $cl_Z A = B \cup T$, $D := \bigcup\{U \cap cl_Z A : U \in \mathscr{S} \cup \mathscr{G}\}$ es denso en $cl_Z A$. Por lo tanto $D \cap A = \bigcup\{U \cap A : U \in \mathscr{S}\}$ es denso en A. Por lo tanto $i^{-1}[\mathscr{Q}]$ es una p-cubierta.

3. Demostremos la necesidad. Si i es un p-mapeo. Entonces por (2), $cl_Z A = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z. Como Z es H-cerrado, entonces B es un subespacio H-cerrado de Z. Es decir $cl_Z A$ es la unión de subespacios H-cerrados. Por lo tanto $cl_Z A$ es H-cerrado.

Ahora demostremos la suficiencia. Si $cl_Z A$ es un H-cerrado, entonces j es un p-mapeo ya que j tiene por dominio un conjunto H-cerrado. Por lo tanto j es un p-mapeo. Por (1), i es un p-mapeo.

4. Demostremos la necesidad. Si Y es un subespacio H-cerrado de Z. Entonces i es un p-mapeo. Por (2), $Y = cl_Z Y = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z.

Ahora demostremos la suficiencia. Si $Y = B \cup T$ donde $B \in \mathscr{R}(Z)$ y T es un subespacio H-cerrado y denso en ninguna parte en Z. Entonces Y es cerrado, es decir $cl_Z Y = B \cup T$. Por (2) i es un p-mapeo y como suponemos que Z es H-cerrado, por (3), se tiene que $Y = cl_Z Y$ es H-cerrado.

⊠

Por lo tanto el problema de determinar los subespacios H-cerrados de un espacio H-cerrado se reduce a determinar los subespacios cerrados y densos en ninguna parte de un espacio H-cerrado.

Corolario 2.2.15. Sea Z un espacio H-cerrado. Cualquier subespacio cerrado y denso en ninguna parte en Z es H-cerrado si y sólo si Z es compacto.

Demostración. Es consecuencia de los los Teoremas 2.2.6 y 2.2.14 (4).

⊠

2.3. H-Conjuntos

En esta sección introducimos el concepto de H-conjunto que es una generalización del concepto de subespacio H-cerrado.

Definición 2.3.1. Un subespacio X de un espacio Y es un *H-conjunto* si para cada cubierta $\mathscr{C}$ de X formada por abiertos de Y, existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $X \subseteq \bigcup\{cl_Y C : C \in \mathscr{S}\}$.

Proposición 2.3.2. Sea X un H-conjunto de un espacio Y. Entonces X es un subconjunto cerrado de Y.

Demostración. Veamos que $Y \setminus X$ es abierto. Sea $x \in Y \setminus X$ fijo. Para cada $z \in X$, existen vecindades abiertas ajenas $U_{x,z}, V_{x,z}$ de Y tales que $x \in U_{x,z}$ y $z \in V_{x,z}$. Es claro que $U_{x,z} \cap cl_Y V_{x,z} = \emptyset \; \forall z \in X$, ya que si $U_{x,z} \cap cl_Y V_{x,z} \neq \emptyset$ para algún $z \in X$ esto implicaría que $U_{x,z} \cap V_{x,z} \neq \emptyset$, contradiciendo que $U_{x,z}$ y $V_{x,z}$ son ajenas. Dado que $\mathscr{C} := \{V_{x,z} : z \in X\}$ es una cubierta abierta de X y X es un H-conjunto se sigue que existe un conjunto finito $S \subseteq X$ tal que $X \subseteq \bigcup_{z \in S} cl_Y V_{x,z}$.

Definimos $U_x = \bigcap_{z \in S} U_{x,z}$. Dado que $U_{x,z} \cap cl_Y V_{x,z} = \emptyset \; \forall z \in X$ se sigue que $U_x \cap \bigcup_{z \in S} cl_Y V_{x,z} = \emptyset$. Es decir, $U_x \cap X = \emptyset$. Por lo tanto $Y \setminus X$ es abierto y subsecuentemente X es cerrado.

$\boxtimes$

Proposición 2.3.3. Sea X un H-conjunto de un espacio Y y sea Y un subespacio de Z. Entonces X es un H-conjunto de Z.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos abiertos en Z que cubren a X. Entonces $\mathscr{V} := \{C \cap Y : C \in \mathscr{C}\}$ es una cubierta abierta de X formada de elementos abiertos de Y. Dado que X es un H-conjunto de Y, existe $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}$ finito tal que $X \subseteq \bigcup_{C \in \mathscr{S}} cl_Y [C \cap Y] \subseteq \bigcup_{C \in \mathscr{S}} cl_Z C$. Por lo tanto X es un H-conjunto de Z.

$\boxtimes$

Proposición 2.3.4. Sea X un subespacio H-cerrado de un espacio Y. Entonces X es un H-conjunto de Y.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de X formada por abiertos de Y. Como X es un subconjunto H-cerrado de Y se sigue que existe $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}$ finito tal que $X = cl_X[\bigcup_{C \in \mathscr{S}} C \cap X] \subseteq cl_Y[\bigcup_{C \in \mathscr{S}} C] = \bigcup_{C \in \mathscr{S}} cl_Y C$. Por lo tanto X es un H-conjunto de Y.

$\boxtimes$

Veamos ahora un ejemplo de un subespacio que es un H-conjunto pero no es un H-cerrado.

Ejemplo 2.3.5. Sea $K = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p_+\}$ cuya topología es la heredada por la topología del espacio $\mathbb{X}$, que se definió en el Ejemplo 2.1.4. Como K tiene un subespacio cerrado, infinito y discreto, se sigue que K no es compacto, pero dado que K es regular concluimos que K no es H-cerrado. Afirmamos que K es un H-conjunto.

En efecto, sea $\mathscr{C}$ una cubierta de K formada por abiertos de $\mathbb{X}$. Existe $U \in \mathscr{C}$ tal que $p_+ \in U$ y existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $cl_{\mathbb{X}} U = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : r \leq n, \text{ y } n, m \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto $K \setminus cl_{\mathbb{X}} U$ es finito. Existe $\mathscr{S} \cup \{U\} \subseteq \mathscr{C}$ con $\mathscr{S}$ finito, tal que

$$K \subseteq cl_{\mathbb{X}} U \cup \bigcup\{cl_{\mathbb{X}} V : V \in \mathscr{S}\}.$$

Por lo tanto, K es un ejemplo de un H-conjunto que no es H-cerrado.

Veamos ahora una caracterización de los H-conjuntos.

Proposición 2.3.6. Sea X un subespacio de un espacio Y. El subespacio X es un H-conjunto de Y si y sólo si para cualquier filtro abierto $\mathscr{F}$ de Y tal que $F \cap X \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{F}$, $a_Y(\mathscr{F}) \cap X \neq \emptyset$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que X es un H-conjunto. Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto de Y tal que para cada $F \in \mathscr{F}$ se tiene que $F \cap X \neq \emptyset$. Supongamos que $a_Y(\mathscr{F}) \cap X = \emptyset$ lo que implica que $\mathscr{U} := \{Y \setminus cl_Y F : F \in \mathscr{F}\}$ es una cubierta abierta de X, y como X es un H-conjunto existe una subcubierta finita $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{F}$ tal que

$$X \subseteq \bigcup \{cl_Y[Y \setminus cl_Y V] : V \in \mathscr{V}\} = \bigcup \{Y \setminus int_Y[cl_Y V] : V \in \mathscr{V}\}.$$

Lo que implica $\bigcap_{V \in \mathscr{V}} int_Y[cl_Y V] = Y \setminus \bigcup_{V \in \mathscr{V}} (Y \setminus int_Y[cl_Y V]) \subseteq Y \setminus X$. Por otro lado, como $\mathscr{F}$ es un filtro y $\mathscr{V}$ es finita, $\bigcap \mathscr{V} \in \mathscr{F}$, y

$$\emptyset \neq \bigcap \mathscr{V} \cap X \subseteq \bigcap_{V \in \mathscr{V}} int_Y[cl_Y V] \cap X \subseteq (Y \setminus X) \cap X.$$

Por lo tanto, $a_Y(\mathscr{F}) \cap X \neq \emptyset$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que X no es un H-conjunto de Y. Entonces existe una cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X formada por conjuntos abiertos de Y tal que

$$X \setminus cl_Y \left[\bigcup \mathscr{S}\right] \neq \emptyset \tag{2.1}$$

donde $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{U}$ es finito. Sea $\mathscr{F} = \{Y \setminus cl_Y[\bigcup \mathscr{S}] : \mathscr{S} \subseteq \mathscr{U}$ es finito$\}$. Afirmamos que $\mathscr{F}$ es una base para un filtro abierto en Y.

En efecto, por (2.1) se sigue que $\emptyset \notin \mathscr{F}$ y $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Sean $U, V \in \mathscr{F}$ donde $U = Y \setminus cl_Y[\bigcup \mathscr{S}_0]$ y $V = Y \setminus cl_Y[\bigcup \mathscr{S}_1]$. Las colecciones $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1 \subseteq \mathscr{U}$ son finitas. Entonces

$$U \cap V = Y \setminus cl_Y \left[\bigcup \mathscr{S}_0 \cup \mathscr{S}_1\right] \in \mathscr{F}.$$

Es decir $\mathscr{F}$ es una base para un filtro abierto $\widehat{\mathscr{F}}$. Por (2.1), para todo $F \in \widehat{\mathscr{F}}$ se cumple que $\emptyset \neq F \cap X$. Por lo tanto

$$\emptyset \neq a_Y(\widehat{\mathscr{F}}) \cap X \subseteq \bigcap \{cl_Y \left[Y \setminus cl_Y \left[\bigcup \mathscr{S}\right]\right] : \mathscr{S} \subseteq \mathscr{U} \text{ es finito}\} \cap X,$$

donde $\bigcap \{cl_Y(Y \setminus cl_Y[\bigcup \mathscr{S}]) : \mathscr{S} \subseteq \mathscr{U}$ es finito$\} = \bigcap \{Y \setminus int_Y[cl_Y[\bigcup \mathscr{S}]] : \mathscr{S} \subseteq \mathscr{U}$ es finito$\} = Y \setminus \bigcup \{int_Y[cl_Y[\bigcup \mathscr{S}]] : \mathscr{S} \subseteq \mathscr{U}$ es finito$\} \subseteq Y \setminus \bigcup \mathscr{U} \subseteq Y \setminus X$.

Por lo tanto $\emptyset \neq a_Y(\widehat{\mathscr{F}}) \cap X \subseteq (Y \setminus X) \cap X$. Lo que implica que X es un H-conjunto.

$\boxtimes$

Proposición 2.3.7. Sea $A \subseteq X$ un H-conjunto de un espacio X, y sea $B \in \mathscr{R}(X)$ tal que $B \subseteq A$. Entonces B es un subespacio H-cerrado de X.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta del subespacio B. Para cada $U \in \mathscr{U}$ existe un abierto V en X tal que $U = V \cap B$. Sea $\mathscr{V} = \{V_U : V_U \cap B \in \mathscr{U}\}$. Entonces $\mathscr{V} \cup \{X \setminus B\}$ es una cubierta abierta de A, y como A es un H-conjunto, existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{V}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup \{cl_X V_U : V_U \in \mathscr{S}\} \cup \{cl_X[X \setminus B]\}.$$

Sea $\mathscr{C} = \{V_U \cap B : V_U \in \mathscr{S}\}$. Es claro que $\mathscr{C}$ es una subfamilia finita de $\mathscr{U}$. Por otro lado $int_X B$ es denso en $cl_X[int_X B] = B$ y además $int_X B \cap cl_X[X \setminus B] = int_X B \cap (X \setminus int_X B) = \emptyset$. Por lo tanto,

$$int_X B \subseteq \bigcup \{cl_X V_U : V_U \in \mathscr{S}\} \cap B = cl_X \left[\bigcup \mathscr{S}\right] \cap B.$$

Por la Proposición 1.2.1 (3) concluimos que

$$int_X B \subseteq int_X[cl_X[\bigcup \mathscr{S}] \cap B] = int_X[cl_X[\bigcup \mathscr{S}]] \cap int_X B = int_X[cl_X[\bigcup \mathscr{S}]] \cap int_X[cl_X B] = \\ int_X[cl_X[\bigcup \mathscr{S} \cap B]] \subseteq cl_X[\bigcup \mathscr{C}].$$

Por lo tanto $int_X B \subseteq cl_X[\bigcup \mathscr{C}] \cap B = cl_B[\bigcup \mathscr{C}] = B$ ya que $B = cl_B[int_X B] \subseteq cl_B[\bigcup \mathscr{C}]$. Es decir B es H-cerrado.

⊠

Proposición 2.3.8. Sea $A \subseteq X$ un H-conjunto de un espacio regular X. Entonces A es compacto.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta de A formada por conjuntos abiertos de X. Para cada $x \in A$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$. Como X es regular, existe una vecindad abierta V_x de x en X tal que $x \in V_x \subseteq cl_X V_x \subseteq U$. Entonces $\{V_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A y dado que A es un H-conjunto, existe $F \subseteq A$ finito tal que

$$A \subseteq \bigcup \{cl_X V_x : x \in F\}.$$

Por otro lado, existe una subcubierta finita $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ tal que para cada $x \in F$ existe $V \in \mathscr{V}$ tal que $cl_X V_x \subseteq V$. Por lo tanto

$$A \subseteq \bigcup \{cl_X V_x : x \in F\} \subseteq \bigcup \mathscr{V}.$$

Lo que implica que A sea compacto.

⊠

2.4. Funciones Θ-Continuas

Denotamos por $F(X,Y)$ al conjunto de funciones que van del espacio X al espacio Y.

Definición 2.4.1. Sean X y Y espacios, $f \in F(X,Y)$ y $x_0 \in X$.

1. La función f es Θ-*continua en* x_0 si para cada vecindad abierta V de $f(x_0)$, existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $f[cl_X U] \subseteq cl_Y V$.

2. f es Θ-*continua*, si f es Θ-continua para todo punto de X.

3. El conjunto de funciones Θ-continuas de X en Y es denotado como $\Theta C(X,Y)$.

4.f es un Θ-*homeomorfismo*, si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son Θ-continuas.

Proposición 2.4.2. Sean X, Y y Z espacios y $f \in F(X,Y)$ y $g \in F(X,Y)$. Entonces:

1. Si f es Θ-continua en $x_0 \in X$ y g es Θ-continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es Θ-continua en x_0.

2. $C(X,Y) \subseteq \Theta C(X,Y)$.

3. Si Y es regular, entonces $C(X,Y) = \Theta C(X,Y)$.

4. Si $A \subseteq X$ y $f \in \Theta C(X,Y)$, entonces $f_{|A} \in \Theta C(A,Y)$.

5. Si D es denso en Y, $f \in \Theta C(X,Y)$ y $f[X] \subseteq D$ entonces $f \in \Theta C(X,D)$.

6. Si f es Θ-continua, suprayectiva y X es H-cerrado, entonces Y es H-cerrado.

7. La función identidad $Id : X_s \to X$ es un Θ-homeomorfismo (donde X_s es la semiregularización de X).

8. X es un H-cerrado si y sólo si X_s es un H-cerrado.

Demostración. 1. Supongamos que $g \circ f(x_0) \in W$ para algún subconjunto abierto W en Z. Como g es Θ-continua en $f(x_0)$, entonces existe un subconjunto abierto V de Y tal que $f(x_0) \in V$ y $g[cl_Y V] \subseteq cl_Z W$. De igual manera f es Θ-continua en x_0, es decir existe un subconjunto abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $f[cl_X U] \subseteq cl_Y V$.

Por lo tanto $g \circ f[cl_X U] \subseteq g[cl_Y V] \subseteq cl_Z W$; es decir $g \circ f$ es Θ-continua en x_0.

2. Sea $f \in C(X,Y)$ y sea $x \in X$. Entonces para cualquier conjunto abierto V de $f(x)$ en Y existe un conjunto abierto U de x en X tal que $f[U] \subseteq V$, por otro lado usando nuevamente la continuidad de f tenemos que $f[cl_X U] \subseteq cl_Y f[U] \subseteq cl_Y V$.

Por lo tanto $f \in \Theta C(X,Y)$, es decir $C(X,Y) \subseteq \Theta C(X,Y)$.

3. Por 2 es suficiente demostrar que $\Theta C(X,Y) \subseteq C(X,Y)$. Sea $f \in \Theta C(X,Y)$ y sea $x \in X$. Sea V una vecindad abierta de $f(x)$. Dado que Y es regular, existe una vecindad abierta W de $f(x)$ tal que $cl_Y W \subseteq V$. Como f es Θ-continua, existe un abierto U de x en X tal que $f[cl_X U] \subseteq cl_Y W$ es decir $f[U] \subseteq V$ y por lo tanto f es continua en x; es decir $C(X,Y) = \Theta C(X,Y)$.

4. Sea $x \in A$ y sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y. Dado que $f : X \to Y$ es Θ-continua, existe un abierto U de x en X tal que $f[cl_X U] \subseteq cl_Y V$. Además, tenemos que $cl_A[U \cap A] \subseteq cl_X U$. Por lo tanto $f_{|A}[cl_A[U \cap A]] \subseteq cl_Y V$.

5. Sea $x \in X$ y sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en D. Existe un abierto W en Y tal que $W \cap D = V$. Dado que $f : X \to Y$ es Θ-continua en $f(x) \in W$, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $f[cl_X U] \subseteq cl_Y W$. Por lo tanto, $f[cl_X U] \subseteq cl_Y W \cap f[X] \subseteq cl_Y[W \cap D] \cap D = cl_D V$; es decir $f \in \Theta C(X,D)$.

6. Sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de Y. Para cada $x \in X$ existe un abierto $V_x \in \mathscr{C}$ tal que $f(x) \in V_x$.

Como f es Θ-continua, existe un conjunto abierto U_x en X tal que $x \in U_x$ y $f[cl_X U_x] \subseteq cl_Y V_x$. Como X es H-cerrado, existe un conjunto finito $S \subseteq X$ tal que $X = cl_X[\bigcup_{x\in S} U_x] = \bigcup_{x\in S} cl_X U_x$. Por otro lado, $Y = f[X] = \bigcup_{x\in S} f[cl_X U_x] \subseteq \bigcup_{x\in S} cl_Y V_x$. Por la Proposición 2.1.2, Y es H-cerrado.

7. Dado que la identidad Id es biyectiva y $Id^{-1} : X \to X_s$ es Θ-continua, basta demostrar que $Id : X_s \to X$ es Θ-continua. Sea $x \in X_s$ y sea V una vecindad abierta de $Id(x) = x$ en X, i.e. $Id(x) = x \in V$. Definimos $U = int_{X_s} cl_{X_s} V$. Dado que U es una vecindad abierta de x en X_s se sigue que $cl_{X_s} U = cl_{X_s}[int_{X_s}[cl_{X_s} V]] = cl_X[int_X[cl_X V]] = cl_X V$. Por lo tanto $Id[cl_{X_s} U] = cl_{X_s} U \subseteq cl_X V$, es decir Id es Θ-continua.

8. Se sigue de las Proposiciones 6 y 7.

$\boxtimes$

Proposición 2.4.3. Sea $f \in \Theta C(X,Y)$ y sea $A \subseteq X$ un H-conjunto. Entonces $f[A]$ es un H-conjunto.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una cubierta de $f[A]$ formada por abiertos de Y. Para cada $y \in f[A]$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, y existe una vecindad abierta de $f(x) = y$, $V_y \in \mathscr{C}$ en Y. Como f es Θ-continua, existe una vecindad abierta U_y de x en X, tal que

$$f[cl_X U_y] \subseteq cl_Y V_y.$$

Sea $\mathscr{S} = \{U_y : y \in f[A]\}$. $\mathscr{S}$ es una cubierta abierta de A. Como A es un H-conjunto, existe un subconjunto finito $T \subseteq f[A]$ tal que

$$A \subseteq \bigcup\{cl_X U_y : y \in T\}.$$

Por lo tanto,

$$f[A] \subseteq \bigcup\{f[cl_X U_y] : y \in T\} \subseteq \bigcup\{cl_Y V_y : y \in T\}.$$

Es decir, $f[A]$ es un H-conjunto en Y.

$\boxtimes$

Proposición 2.4.4. Sean $\{X_i : i \in I\}$ y $\{Y_i : i \in I\}$ dos familias de espacios y sea $f_i \in \Theta C(X_i, Y_i)$ para cada $i \in I$. Entonces $\sqcap_i f_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i$ es Θ-continua.

Demostración. Sean $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ y $\mathscr{V}$ una vecindad abierta de $\sqcap_i f_i(x) := (f_i(x))_{i\in I}$. Denotamos al producto $\prod_{i\in I} X_i$ como $\mathscr{L}$ y a $\prod_{i\in I} Y_i$ como $\mathscr{Z}$ para simplificar. Sea V un abierto canónico de la forma

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[V_j]$$

que contine a $(f_i(x))_{i\in I}$, donde $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$ con $n \in \mathbb{N}$, y $V_j \subseteq Y_{i_j}$ es un conjunto abierto para cada $j \in \{1, ..., n\}$.

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$, como f_{i_j} es Θ-continua, existe una vecindad abierta de x_{i_j}, $U_j \subseteq X_{i_j}$, tal que

$$f_{i_j}[cl_{X_{i_j}} U_j] \subseteq cl_{Y_{i_j}} V_{i_j}.$$

Defininimos $U := \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[U_j]$ que es una vecindad abierta de x.

Afirmamos que $\sqcap_i f_i[cl_{\mathscr{L}}U] \subseteq cl_{\mathscr{Z}}V$.

En efecto, dado que $cl_{\mathscr{L}}U = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[cl_{X_{i_j}} U_j]$, si $b \in \sqcap_i f_i[cl_{\mathscr{L}}U]$ y si $a \in cl_{\mathscr{L}}U$ tal que $\sqcap_i f_i(a) = b$, como $a \in cl_{\mathscr{L}}U$ entonces $a \in \pi_{i_j}^{-1}[cl_{X_{i_j}} U_j] \quad \forall j \in \{1,...,n\}$, es decir $a_{i_j} \in cl_{X_{i_j}} U_j \quad \forall j \in \{1,...,n\}$. Por la propiedad que cumple U_j tenemos

$$\pi_{i_j}(b) = \pi_{i_j}(\sqcap_i f_i(a)) = f_{i_j}(a_{i_j}) \in cl_{Y_{i_j}} V_j.$$

Es decir $b \in cl_{\mathscr{Z}}V$. Por lo tanto $\sqcap_i f_i[cl_{\mathscr{L}}U] \subseteq cl_{\mathscr{Z}}V \subseteq \mathscr{V}$. Por lo tanto $\sqcap_i f_i$ es Θ-continua.

$\boxtimes$

Proposición 2.4.5. Sean X y Y espacios y K es un subconjunto compacto de Y, y sea $f \in \Theta C(X,Y)$. Entonces $f^{-1}[K]$ es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Sea $x \in cl_X f^{-1}[K]$. Por demostrar que $x \in f^{-1}[K]$, es decir $f(x) \in K$.

Supongamos que $f(x) \notin K$. Ya que Y es Hausdorff y como $\{f(x)\}$ y K son compactos en Y entonces existen $U,V \subseteq Y$ abiertos tales que $f(x) \subseteq U$ y $K \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Como f es Θ-continua se sigue que existe una vecindad abierta de x, $W \subseteq X$, tal que $f[cl_X W] \subseteq cl_Y U$. Como $W \cap f^{-1}[K] \neq \emptyset$, se sigue que $cl_Y U \cap K \neq \emptyset$.

Por lo tanto $cl_Y U \cap V \neq \emptyset$, es decir $U \cap V \neq \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $U \cap V = \emptyset$.

Por lo tanto $f(x) \in K$, es decir $f^{-1}[K]$ es cerrado.

$\boxtimes$

Proposición 2.4.6. Sean X un espacio compacto y Y un espacio, y sea $f \in \Theta C(X,Y)$. Entonces f es perfecta.

Demostración. Sea $y \in Y$, por demostrar que $f^{-1}[\{y\}]$ es un compacto.

Ya que $\{y\}$ es un compacto de Y, por la Proposición 2.4.5, $f^{-1}[\{y\}]$ es un cerrado en el compacto X. Por lo tanto $f^{-1}[\{y\}]$ es un compacto.

Veamos que f es cerrada.

Sea A un conjunto cerrado (y por lo tanto compacto) de X, en particular A es un H-conjunto y por la Proposición 2.5.1 $f[A]$ es un H-conjunto y por 2.3.2 $f[A]$ es un cerrado en Y.

Por lo tanto f es perfecta.

$\boxtimes$

2.5. Espacios Urysohn

Definición 2.5.1. Un espacio X es *Urysohn* si para cada $p,q \in X$ con $p \neq q$, existen conjuntos abiertos U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$ y $cl_X U \cap cl_X V = \emptyset$.

Sea X un espacio regular y sean $p,q \in X$ con $p \neq q$ y sean $U,V \subseteq X$ abiertos tales que $p \in U$ y $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como X es regular, se sigue que existen vecindades abiertas $U_0, V_0 \subseteq X$ tales que $p \in U_0 \subseteq cl_X U_0 \subseteq U$ y $q \in V_0 \subseteq cl_X V_0 \subseteq V$. Se sigue que $cl_X U_0 \cap cl_X V_0 = \emptyset$, es decir X es Urysohn.

Por lo tanto si X es un espacio regular se sigue que X es Urysohn, y si X es Urysohn se sigue que X es Hausdorff.

Por otra parte, si un espacio es Hausdorff no necesariamente es Urysohn, y si un espacio es Urysohn no necesariamente es regular, véase el Ejemplo 2.5.3 que nos muestra un ejemplo de un espacio Hausdorff no Urysohn y el Ejemplo 2.5.4 que nos muestra un ejemplo de un espacio Urysohn no regular.

Corolario 2.5.2. Un espacio X es compacto si y sólo si X es H-cerrado, semiregular y Urysohn.

Demostración. Es claro que un espacio compacto es H-cerrado, Urysohn y semiregular. Supongamos ahora que X es H-cerrado, Urysohn y semiregular. Por la Proposición 2.1.3 basta demostrar que X es regular. Sea F cerrado de X y $z \in X \setminus F$. Dado que X es semiregular, existe un conjunto abierto regular U tal que $z \in U \subseteq X \setminus F$. Sea $V = X \setminus cl_X U$. Como $F \subseteq X \setminus U$ y U es un abierto regular, entonces $X \setminus U = X \setminus int_X[cl_X U] = cl_X[X \setminus cl_X U] = cl_X V$. Por lo tanto, $F \subseteq cl_X V$ y $z \notin cl_X V$. Por la Proposición 2.1.5 se sigue que $cl_X V$ es H-cerrado. Para cada $x \in cl_X V$ existen vecindades abiertas W_x de x y A_x de z tales que $cl_X W_x \cap cl_X A_x = \emptyset$. Por lo tanto existe $S \subseteq cl_X V$ finito tal que $cl_X V \subseteq \bigcup_{x \in S} cl_X W_x$. Sea $A = \bigcap_{x \in S} A_x$, entonces $z \in A$ y $cl_X A \bigcap \bigcup_{x \in S} cl_X W_x = \emptyset$. Por lo tanto $cl_X A \bigcap F = \emptyset$; es decir, X es regular.

$\boxtimes$

Ejemplo 2.5.3. El espacio $\mathbb{X}$ del Ejemplo 2.1.4 no es Urysohn pero si es semiregular.

Demostración. Por como se definió el espacio $\mathbb{X}$, cualesquiera vecindades abiertas U de p_+ y V de p_- cumplen

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : r < n,\ n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq cl_{\mathbb{X}} U \cap cl_{\mathbb{X}} V$$

para algún $r > 0$. Lo que implica que $\mathbb{X}$ no es Urysohn.

Por otro lado, es claro que $\mathbb{X} \setminus \{p_+, p_-\}$ es un abierto en $\mathbb{X}$ que es semiregular. Sea U_+ un abierto básico de p_+ en $\mathbb{X}$. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que U_+ es de la forma

$$U_+ = \{p_+\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) : n \geq r,\ \text{y } m,n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Entonces $cl_{\mathbb{X}} U_+ = U_+ \cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \geq r,\ n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto $int_{\mathbb{X}}[cl_{\mathbb{X}} U_+] = U_+$ ya que $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \geq r,\ n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio cerrado y denso en ninguna parte de $\mathbb{X}$.

Por lo tanto cualquier abierto básico de p_+ es un abierto regular. De manera análoga se tiene que cualquier abierto básico de p_- es un abierto regular.

Por lo tanto $\mathbb{X}$ es semiregular.

$\boxtimes$

Ejemplo 2.5.4. El subespacio $\mathscr{W} := \{p_+\}\bigcup\{(\frac{1}{n},0) : n \in \mathbb{N}\}\bigcup\{(\frac{1}{n},\frac{1}{m}) : n,m \in \mathbb{N}\}$ del espacio $\mathbb{X}$ es Urysohn pero no es regular.

Demostración. Es claro que $\mathscr{W} \setminus \{p_+\}$ es un abierto regular en $\mathscr{W}$, en particular el subespacio $\mathscr{W} \setminus \{p_+\}$ es Urysohn.

Sea $x = (x_1,y_1) \in \mathscr{W} \setminus \{p_+\}$. Entonces $x_1 = \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n < r$ y $U_r := \{p_+\}\bigcup\{(\frac{1}{s},\frac{1}{t}) : r \leq s$, con $s,t \in \mathbb{N}\}$ es una vecindad abierta de p_+, y además

$$cl_{\mathscr{W}}U_r = U_r\bigcup\left\{\left(\frac{1}{s},0\right) : r \leq s,\ s \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sea $l = \frac{1}{2}[\frac{1}{n} - \frac{1}{r}]$ y sea $U_x = B_l(x) \cap \mathscr{W}$ donde $B_l(x) \subseteq \mathbb{R}^2$ es la bola abierta en $\mathbb{R}^2$ con centro en x y radio l. Por lo tanto, U_x es una vecindada abierta de x en $\mathscr{W}$ que cumple

$$cl_{\mathscr{W}}U_r \cap cl_{\mathscr{W}}U_x = \emptyset.$$

Se sigue que $\mathscr{W}$ es Urysohn.

Por otro lado, como cualquier vecindad abierta de p_+ en $\mathscr{W}$ intersecta a $\{(\frac{1}{n},0) : n \in \mathbb{N}\}$ se sigue que $\mathscr{W}$ no es regular.

$\boxtimes$

Una observación más sobre este ejemplo es que $\mathscr{W}$ es un cerrado regular en el espacio H-cerrado $\mathbb{X}$, por lo tanto $\mathscr{W}$ es H-cerrado pero no semiregular, por el Corolario 2.5.2.

Proposición 2.5.5. La propiedad Urysohn es hereditaria.

Demostración. Sea Y un espacio Urysohn y $X \subseteq Y$ un subespacio. Sean $x,y \in X$ con $x \neq y$. Entonces existen vecindades abiertas U_x y V_y de x y y respectivamente en Y tales que

$$cl_Y U_x \cap cl_Y V_y = \emptyset.$$

Por otro lado, $U_x \cap X$ y $V_y \cap X$ son vecindades abiertas de X. Por lo tanto,

$$cl_X[U_x \cap X] \cap cl_X[V_y \cap X] = cl_Y[U_x \cap X] \cap cl_Y[V_y \cap X] \cap X \subseteq cl_Y U_x \cap cl_Y V_y = \emptyset.$$

Por lo tanto X es Urysohn. Es decir la propiedad de Urysohn es hereditaria.

$\boxtimes$

Proposición 2.5.6. Sean X y Y espacios tales que Y es Urysohn. Si X y Y son homeomorfos entonces X es Urysohn.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, existen vecindades abiertas U y V de $f(x)$ y $f(y)$ en Y respectivamente, tales que $cl_Y U \cap cl_Y V = \emptyset$. Por lo tanto $A = f^{-1}[U]$ y $B = f^{-1}[V]$ son vecindades abiertas de x y y respectivamente.

Afirmamos que $cl_X A \cap cl_X B = \emptyset$.

Supongamos que $cl_X A \cap cl_X B \neq \emptyset$. Dado que f es continua y biyectiva se sigue que

$$\emptyset \neq f[cl_X A] \cap f[cl_X B] \subseteq cl_Y f[A] \cap cl_Y f[B] = cl_Y U \cap cl_Y V = \emptyset.$$

Se sigue que X es Urysohn.

$\boxtimes$

Proposición 2.5.7. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios no vacíos. El espacio producto $\prod_{i\in I} X_i$ es Urysohn si y sólo si X_i es Urysohn para cada $i \in I$.

Demostración. Supongamos que para cada $i \in I$, X_i es Urysohn. Sean $f, g \in \prod_{i\in I} X_i$ tal que $f \neq g$. Denotamos al producto $\prod_{i\in I} X_i$ como $\mathscr{L}$ para simplicar.

Sea $J \subseteq I$ finito tal que $f(i) \neq g(i)$ para cada $i \in J$. Como X_i es Urysohn, existen vecindades abiertas U_i y V_i, tales que $f(i) \in U_i$, $g(i) \in V_i$ y $cl_{X_i} U_i \cap cl_{X_i} V_i = \emptyset$ para cada $i \in J$.

Sean $U = \bigcap_{i\in J} \pi_{X_i}^{-1}[U_i]$ y $V = \bigcap_{i\in J} \pi_{X_i}^{-1}[V_i]$, las cuales son vecindades abiertas ajenas de f y g respectivamente, además de que

$$cl_{\mathscr{L}} U \cap cl_{\mathscr{L}} V = \bigcap_{i\in J} \pi_{X_i}^{-1}[cl_{X_i} U_i] \cap \bigcap_{i\in J} \pi_{X_i}^{-1}[cl_{X_i} V_i] = \bigcap_{i\in J} \pi_{X_i}^{-1}[cl_{X_i} U_i \cap cl_{X_i} V_i] = \emptyset$$

Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es Urysohn.

Ahora supongamos que $\mathscr{L}$ es Urysohn. Sea $i_0 \in I$ arbitraria. Vamos a demostrar que X_{i_0} es Urysohn. Para cada $i \in I \setminus \{i_0\}$ fijamos un punto $x_i \in X_i$ y consideramos al subespacio $\mathscr{T} = \{f \in \mathscr{L} : f(i) = x_i \text{ para toda } i \in I \setminus \{i_0\}\} \subseteq \mathscr{L}$.

Como consecuencia de la Proposición 2.5.5, $\mathscr{T}$ es Urysohn y dado que $\mathscr{T}$ y X_{i_0} son homeomorfos, entonces X_{i_0} es Urysohn.

Y como $i_0 \in I$ fue arbitraria, se sique que X_i es Urysohn $\forall i \in I$.

$\boxtimes$

Proposición 2.5.8. Sean $f, g \in \Theta C(X, Y)$ donde X y Y son espacios y Y es Urysohn. Si $D := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es denso en X, entonces $f = g$.

Demostración. Supongamos que D es denso en X y que $f \neq g$. Entonces, existe $z \in X \setminus D$ tal que $f(z) \neq g(z)$. Por lo tanto, existen abiertos ajenos U y V en Y tales que $f(z) \in U$ y $g(z) \in V$, y además

$$cl_Y U \cap cl_Y V = \emptyset.$$

Como f es Θ-continua en z, existen vecindades abiertas A y B de z en X tales que $f[cl_X A] \subseteq cl_Y U$ y $f[cl_X B] \subseteq cl_Y V$. Entonces $cl_X A \subseteq f^{-1}[cl_Y U]$ y $cl_X B \subseteq f^{-1}[cl_Y V]$. Dado que $A \cap B$ es abierto en X, y $f^{-1}[cl_Y U] \cap f^{-1}[cl_Y V]$ es ajeno a D. Por lo tanto,

$$\emptyset \neq (A \cap B) \cap D \subseteq (f^{-1}[cl_Y U] \cap f^{-1}[cl_Y V]) \cap D = \emptyset.$$

Lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, $f = g$.

$\boxtimes$

En la proposición anterior, un hecho crucial para demostrar que $f = g$ es el hecho de que Y es Urysohn. Es natural preguntarse si la proposición sigue siendo válida a pesar de que Y no sea Urysohn. Desafortunadamente si Y no es Urysohn no necesariamente $f = g$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.9. Sea $\mathbb{N}_\infty$ la compactación por un punto de $\mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}_\infty \setminus \mathbb{N} = \{p_\infty\}$, y sean $f : \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{X}$ definidas como $f(n) = (\frac{1}{n}, 0) = g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por otro lado $f(p_\infty) = p_+$ y $g(p_\infty) = p_-$, es decir $f \neq g$. Es claro que

$$D = \{x \in \mathbb{N}_\infty : f(x) = g(x)\}$$

es denso en $\mathbb{N}_\infty$ (ya que $D = \mathbb{N}$). Afirmamos que f, g son Θ-continuas. Basta demostrar que f, g son Θ-continua en p_∞.

Sea V una vecindad de $f(p_\infty) = p_+$ en $\mathbb{X}$. Existe un abierto $U_r = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : r \leq n \text{ y } m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{p_+\}$ tal que $U_r \subseteq V$ y sea $U = \{n \in \mathbb{N} : n \geq r\} \cup \{p_\infty\}$. Es claro que U es una vecindad abierta de p_∞ en $\mathbb{N}_\infty$. Entonces

$$f[cl_{\mathbb{N}_\infty} U] = f[U] = \{(\tfrac{1}{n}, 0) : r \leq n\} \cup \{p_+\} \subseteq cl_{\mathbb{X}} U_r \subseteq cl_{\mathbb{X}} V.$$

Por lo tanto $f \in \Theta C(\mathbb{N}_\infty, \mathbb{X})$. Análogamente g es una función Θ-continua de $\mathbb{N}_\infty$ en $\mathbb{X}$.

Esto nos da un ejemplo de funciones $f, g \in \Theta C(X, Y)$ tales que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es denso en X y $f \neq g$.

Proposición 2.5.10. X es Urysohn si y sólo si X_s es Urysohn.

Demostración. Supongamos que X es Urysohn. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Existen vecindades abiertas U y V de x y y respectivamente, tales que

$$cl_X U \cap cl_X V = \emptyset.$$

Sean $W = int_X[cl_X U]$ y $T = int_X[cl_X V]$. W y T cumplen que $x \in U \subseteq W$ y $y \in V \subseteq T$ y además $W, T \in \tau_s$ y

$$W \cap T = int_X[cl_X[U \cap V]] = \emptyset.$$

Es decir, $W \cap T = \emptyset$. Por otro lado, tenemos que

$$cl_{X_s} W = cl_{X_s}[int_X[cl_X U]] = cl_{X_s}[int_{X_s}[cl_X U]] = cl_X[int_X[cl_X U]].$$

Análogamente,

$$cl_{X_s} T = cl_X[int_X[cl_X V]].$$

Por lo tanto,

$$cl_{X_s} W \cap cl_{X_s} T = cl_X[int_X[cl_X U]] \cap cl_X[int_X[cl_X V]] \subseteq cl_X[cl_X U] \cap cl_X[cl_X V] = cl_X U \cap cl_X V = \emptyset.$$

Se concluye que X_s es Urysohn.

El recíproco de está proposición se demuestra de manera análoga. En efecto, supongamos que X_s es Urysohn, y sean $x, y \in X_s$ con $x \neq y$. Existen vecindades abiertas W y Z en X_s de x y y respectivamente, tales que

$$cl_{X_s}W \cap cl_{X_s}Z = \emptyset.$$

Sean $A = int_X[cl_{X_s}W]$ y $B = int_X[cl_{X_s}Z]$. Se sigue que $x \in W \subseteq A$ y $y \in Z \subseteq B$. Usando el hecho de que $cl_X U \subseteq cl_{X_s}U$ para $U \subseteq X$ abierto, se tiene

$$cl_X A \cap cl_X B \subseteq cl_{X_s}[int_X[cl_{X_s}W]] \cap cl_{X_s}[int_X[cl_{X_s}Z]] \subseteq cl_{X_s}[cl_{X_s}W] \cap cl_{X_s}[cl_{X_s}Z] = cl_{X_s}W \cap cl_{X_s}Z = \emptyset.$$

Por lo tanto, X es Urysohn.

$\boxtimes$

Proposición 2.5.11. Sea X un espacio. Entonces X es H-cerrado y Urysohn si y sólo si X_s es compacto.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que X es H-cerrado y Urysohn. Por las Proposiciones 2.4.2 (8), 1.2.9 (4) y 2.5.10 tenemos que X_s es H-cerrado, semiregular y Urysohn. Por lo tanto, X_s es compacto.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que X_s es compacto. Por el Corolario 2.5.2 X_s es H-cerrado y Urysohn y nuevamente por las Proposiciones 2.4.2 (8) y 2.5.10, X es H-cerrado y Urysohn.

$\boxtimes$

Corolario 2.5.12. Sea X un espacio. Entonces X es H-cerrado y Urysohn si y sólo si para cada cubierta abierta $\mathscr{U}$, $\mathscr{C} = \{int_X[cl_X U] : U \in \mathscr{U}\}$ tiene subcubierta finita.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supogamos que X es H-cerrado y Urysohn, por la Proposición 2.5.11 X_s es compacto. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta de X entonces $\mathscr{C}$ es una cubierta abierta de X_s. Por lo tanto, $\mathscr{C}$ tiene una subcubierta finita.

Ahora demostremos la suficiencia. Como $\mathscr{RO}(X)$ es una base para X_s, entonces dada cualquier cubierta abierta $\mathscr{V}$ cuyos elementos pertenecen a $\mathscr{RO}(X)$, tiene subcubierta finita, entonces X_s es compacto, lo que implica que X es H-cerrado y Urysohn.

$\boxtimes$

Proposición 2.5.13. Sea X un espacio Urysohn H-cerrado y sea $A \subseteq X$ un subespacio. Entonces A es un H-conjunto de X si y sólo si A es un subespacio compacto de X_s.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que A es un H-conjunto. Por la Proposición 2.5.11, X_s es compacto y por las Proposiciones 2.4.2 (7) y 2.4.3, A es un H-conjunto en X_s lo que implica que A es cerrado en el compacto X_s. Por lo tanto A es compacto.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que A es un subespacio compacto de X_s, en particular A es un H-cerrado lo que implica que A es un H-conjunto. Consideremos la función identidad $Id : X_s \to X$ la cual es un Θ-homeomorfismo. Por la Proposición 2.4.3, $Id[A] = A$ es un H-conjunto en X.

$\boxtimes$

Capítulo 3

Extensiones H-cerradas

En este capítulo se introducen las extensiones H-cerradas, se estudian sus propiedades topológicas y el como se relacionan.

3.1. Extensiones

Definición 3.1.1. Sea X un espacio. Una *extensión* de X es una pareja (Y,h), donde Y es un espacio y $h: X \to Y$ es un encaje denso. Si Y es H-cerrado decimos que (Y,h) es una *extensión H-cerrada* de X. De igual manera, si Y es compacto decimos que (Y,h) es una *compactación* de X.

De aquí en adelante una *extensión* (Y,h) de un espacio X se denotará como Y, ya que a $h[X]$ y a X se les suele considerar el mismo espacio, es decir una *extensión* Y de un espacio X es un espacio Y tal que $X \subseteq Y$ es un subespacio denso de Y.

Ejemplo 3.1.2. Sea $\mathbb{X}$ el espacio definido en el Ejemplo 2.1.4. El espacio $\mathbb{X}$ es una extensión H-cerrada de $\mathbb{N}$, ya que $\mathbb{N}$ se puede indentificar con el subespacio $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \in \mathbb{N},\ |\ m\ |\in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{X}$ el cuál es un subespacio discreto, numerable y denso de $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ es H-cerrado semiregular no compacto, implica que $\mathbb{X}$ no es Urysohn. Es decir, $\mathbb{X}$ es una extensión H-cerrada de $\mathbb{N}$ que es semiregular pero no Urysohn.

De igual manera, el espacio $\mathscr{W}$ definido en la Proposición 2.5.4 es una extensión H-cerrada de $\mathbb{N}$, ya que $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio discreto, numerable y denso en $\mathscr{W}$. Y como resultado de la misma proposición $\mathscr{W}$ es una extensión H-cerrada de $\mathbb{N}$ que es Urysohn pero no semiregular.

Es decir hemos mostrado dos extensiones H-cerradas de $\mathbb{N}$ con distintas propiedades.

En el área de las extensiones existe un gran interés en saber cómo se relacionan las extensiones H-cerradas con las compactaciones. Una de las relaciones entre extensiones H-cerradas y compactaciones es la que nos proporciona la siguiente proposición.

Proposición 3.1.3. Sea X un espacio. Sea Y una extensión H-cerrada y Urysohn de X. Entonces Y_s es una compactación de X_s.

Demostración. Por la Proposición 2.5.11, el espacio Y_s es compacto y por la Proposición 1.2.13 Y_s es una compactación de X_s.

⊠

Por lo tanto, $\mathscr{W}_s$ es una compactación de $\mathbb{N}_s$. Más aún, como $\mathbb{N}$ es un espacio discreto, se tiene que $\mathbb{N} = \mathbb{N}_s$, es decir que $\mathscr{W}_s$ es una compactación de $\mathbb{N}$.

Corolario 3.1.4. Sea Y una extensión H-cerrada y Urysohn de un espacio X. Entonces X_s es Tychonoff.

Demostración. Por la Proposición 3.1.3 Y_s es compacto y en consecuencia Y_s es Tychonoff y como ser Tychonoff es una propiedad hereditaria, entonces X_s es Tychonoff.

⊠

Corolario 3.1.5. Sea X un espacio regular no Tychonoff. Entonces X no tiene extensiones H-cerradas que sean Urysohn ó regulares.

Demostración. Como cualquier espacio H-cerrado que es regular es compacto, en particular es Urysohn. Basta demostrar que X no tiene extensiones H-cerradas que sean Urysohn. Supongamos que existe una extensión H-cerrada Y del espacio X que es Urysohn. Entonces por el Corolario 3.1.4 X_s es Tychonoff. Como X es regular, por la Proposición 1.2.10 X es semiregular, es decir $X = X_s$. Por lo tanto X es Tychonoff, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto X no tiene extensiones H-cerradas que sean Urysohn ó regulares.

⊠

Definición 3.1.6. Sea Y una extensión de un espacio X y sea $p \in Y$.

1. Definimos $\mathscr{O}_Y^p := \{U \cap X : U$ es abierto en Y y $p \in U\}$. Algunas veces $\mathscr{O}_Y^p$ se denotará como $\mathscr{O}^p$ cuando no exista confusión y se trabaje con sólo una extensión. Para cada $p \in Y$, $\mathscr{O}^p$ es un filtro abierto de X.

2. Al conjunto $\mathrm{T}_Y := \{\mathscr{O}^p : p \in Y\}$ se le denomina *la traza del filtro de vecindades* de Y.

3. Si U es un abierto de X, sea $o_Y U := \{p \in Y : U \in \mathscr{O}^p\}$. A $o_Y U$ se le denotará como oU cuando no exista ambigüedad.

Proposición 3.1.7. Sea Y una extensión de un espacio X. Entonces Y es una extensión H-cerrada si y sólo si para cada ultrafiltro abierto en X, éste contiene a $\mathscr{O}^p$ para algún $p \in Y$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que Y es H-cerrado. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro abierto en X, y sea $\mathscr{F} = \{W : W$ es abierto en Y y $W \cap X \in \mathscr{U}\}$ el cual es un filtro abierto en Y. Como Y es un espacio H-cerrado, entonces existe $p \in a_Y(\mathscr{F})$, lo que implica que para cada $V \in \mathscr{O}^p$ se tiene que $V \cap U \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto, entonces $\mathscr{O}^p \subseteq \mathscr{U}$.

Ahora demostremos la suficiencia. Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto en Y, y sea $\mathscr{G} = \{U \cap X : U \in \mathscr{F}\}$. Entonces $\mathscr{G}$ es un filtro abierto en X. Por lo tanto, existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ en X tal que $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{U}$. Por hipótesis, existe $p \in Y$ tal que $\mathscr{O}^p \subseteq \mathscr{U}$. Sea $\mathscr{V} = \{V \subseteq Y : V$ es abierto en Y y $V \cap X \in \mathscr{U}\}$. Es claro que $\mathscr{V}$ es un filtro abierto en Y tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}$ y $\mathscr{V}$ converge a p. Por lo tanto,

$$p \in c_Y(\mathscr{V}) \subseteq a_Y(\mathscr{V}) \subseteq a_Y(\mathscr{F}).$$

Por la Proposición 2.1.2 (3), Y es H-cerrado.

⊠

Definición 3.1.8. Sean Y_1 y Y_2 extensiones de los espacios X_1 y X_2 respectivamente, y sea $f \in F(X_1, X_2)$. Decimos que una función $F \in F(Y_1, Y_2)$ es una *extensión* de f, si $F_{|X_1} = f$.

Proposición 3.1.9. Sean Y_1 y Y_2 extensiones de los espacios X_1 y X_2 respectivamente, y sea $f : X_1 \to X_2$ una función continua. Entonces f tiene a lo más una extensión continua $F \in C(Y_1, Y_2)$.

Demostración. Cualesquiera dos funciones definidas en un espacio Hausdorff y que coinciden en un denso, son iguales.

⊠

Proposición 3.1.10. Si Y es una extensión de X. Entonces $\mid Y \mid \leq 2^{2^{|X|}}$.

Demostración. Sea $\varphi : Y \to \mathscr{P}\mathscr{P}(X)$ dada por $\varphi(p) = \mathscr{O}^p$, la cual está bien definida.

Para cada $y \in Y$, se sigue que $\emptyset \notin \mathscr{O}^y$ ya que X es denso en Y y para cualesquiera $U, V \in \mathscr{O}^y$ entonces $U \cap V \in \mathscr{O}^y$. Sean $p, q \in Y$ tales que $p \neq q$ entonces existen vecindades abiertas ajenas U_p, V_q de p y q, respectivamente, en Y y además $V_q \in \mathscr{O}^q \setminus \mathscr{O}^p$ es decir $\varphi(p) = \mathscr{O}^p \neq \mathscr{O}^q = \varphi(q)$.

Por lo tanto, la función φ es inyectiva, lo que implica que$\mid Y \mid \leq 2^{2^{|X|}}$.

⊠

Definición 3.1.11. Para un espacio X definimos a $E[X]$ como la colección de todas las extensiones de X.

Definición 3.1.12. Dos extensiones Y_1 y Y_2 de X son *equivalentes* y lo denotamos como $Y_1 \equiv_X Y_2$, si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que, $h_{|X} = Id_X$.

Las extensiones equivalentes serán consideradas la misma extensión, de este modo podemos identificar a $E[X]$ con la colección de clases de equivalencia definidas por $\equiv_X$. Así que los elementos de $E[X]$ no son equivalente entre sí, y cualquier extensión de un espacio X es equivalente a una única extensión en $E[X]$.

Como una consecuencia de la Proposición 3.1.10 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.13. Dado un espacio X, $E[X]$ es un conjunto.

Definimos una relación $\preceq$ en $E[X]$ como sigue; para cualesquiera $Y_1, Y_2 \in E[X]$ decimos que $Y_1 \preceq Y_2$ si y sólo si $\exists\, f \in C(Y_2, Y_1)$ tal que $f_{|X} = Id_X$.

Proposición 3.1.14. $(E[X], \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (copo), tal que si $\mathscr{S} \subseteq E[X]$ con $\mathscr{S} \neq \emptyset$. Entonces $\mathscr{S}$ tiene supremo en $E[X]$, que se denotará como $\bigvee \mathscr{S}$.

Demostración. Afirmación 1. $(E[X], \preceq)$ es un copo.

Es claro que $\preceq$ es reflexiva y transitiva. Basta demostrar que $\preceq$ es antisimétrica. Supongamos que $Y \preceq Z$ y $Z \preceq Y$ donde $Y, Z \in E[X]$, es decir existen funciones continuas $f \in C(Z, Y)$ y $g \in C(Y, Z)$ tales que $f_{|X} = Id_X = g_{|X}$. Entonces $g \circ f : Z \to Z$ es continua y $g \circ f_{|X} = Id_X$, es decir $g \circ f$ extiende a la función identidad y como las extensiones son únicas, entonces $g \circ f = Id_Z$. De manera análoga

$f \circ g = Id_X$, por lo tanto $f = g^{-1}$, es decir $\preceq$ es antisimétrica.

Afirmación 2. Sea $\mathscr{S} \subseteq E[X]$ con $\mathscr{S} \neq \emptyset$, entonces $\mathscr{S}$ tiene supremo en $E[X]$.

Sea $\prod \mathscr{S} := \prod_{Y \in \mathscr{S}} Y$. Para cada $Y \in \mathscr{S}$, sea $i_Y : X \hookrightarrow Y$ la función inclusión. Afirmamos que i_Y separa puntos de cerrados, es decir si $F \subseteq X$ es cerrado en X y $x \in X \setminus F$, entonces $i_Y(x) \notin cl_Y i_Y[F]$. Sea $F \subseteq X$ cerrado en X, entonces existe $A \subseteq Y$ cerrado de Y tal que $F = A \cap X$. Sea $x \in X \setminus F$, entonces $x \notin A$ y como $F \subseteq A$ entonces $cl_Y F \subseteq A$. Por lo tanto, $x \notin cl_Y F$.

Por lo tanto $\{i_Y : Y \in \mathscr{S}\}$ también separa puntos de cerrados de X. Entonces por el Teorema del Encaje, la función $e : X \to \prod \mathscr{S}$ dada por $\pi_Y \circ e = i_Y$ es un encaje. Definimos $Z := cl_{\prod \mathscr{S}} e[X]$, entonces $Z \in E[X]$.

Afirmación 3. $Z = \sup \mathscr{S}$.

Sea $Y \in \mathscr{S}$, como $\pi_Y \restriction_Z : Z \to Y$ es continua y $\pi_Y \restriction_{e[X]} = \pi_Y \circ e = Id_X$, entonces $Y \preceq Z$. Sea $W \in E[X]$ tal que $Y \preceq W$ para toda $Y \in \mathscr{S}$, es decir existe $h_Y : W \to Y$ continua tal que $h_Y \restriction_X = Id_X$. Por demostrar que $Z \preceq W$. Definimos $g : W \to \prod \mathscr{S}$ dada por $\pi_Y \circ g = h_Y$. Como h_Y es continua para cada $Y \in \mathscr{S}$, entonces g es continua. Dado $x \in X$,

$$\pi_Y \circ g(x) = h_Y(x) = x = \pi_Y \circ e(x) \qquad \forall Y \in \mathscr{S}.$$

Entonces $g_{\restriction X} = e$. Por otro lado

$$g[W] = g[cl_W X] \subseteq cl_{\prod \mathscr{S}} g[X] = cl_{\prod \mathscr{S}} e[X] = Z.$$

Por lo tanto $g[W] \subseteq Z$. Entonces $g : W \to Z$ es continua tal que $g_{\restriction X} = e$, es decir $Z \preceq W$.

Por lo tanto $Z = \sup \mathscr{S}$.

⊠

Definición 3.1.15. Sea $\mathscr{S} \subseteq E[X]$ no vacío y sea $Y \in E[X]$ tal que $Z \preceq Y$ ($Y \preceq Z$) para toda $Z \in \mathscr{S}$. Entonces, decimos que Y es un *máximo proyectivo* (respectivamente, *un mínimo proyectivo*) de $\mathscr{S}$.

Definición 3.1.16. Sea X un espacio. Denotamos al conjunto de todas las extensiones H-cerradas de X como

$$\mathscr{H}(X) = \{Y \in E[X] : Y \text{ es H-cerrado }\}$$

el cual cumple que cada extensión H-cerrada de X es equivalente a algún $Y \in \mathscr{H}(X)$ y no hay dos extenciones equivalentes de X en $\mathscr{H}(X)$. Es decir, se puede considerar a $\mathscr{H}(X) \subseteq E[X]$ como un copo.

En las siguientes proposiciones se establecerán no solamente condiciones suficientes, sino que además, condiciones necesarias para conocer cuándo una función continua definida en un espacio X se extiende continuamente a un elemento de $E[X]$.

Proposición 3.1.17. Sean $Y \in E[X]$, Z un espacio regular y $f \in C(X,Z)$. Entonces f tiene una extensión continua a Y si y sólo si para todo $p \in Y$ se tiene que el filtro $\mathscr{F}_p := \{A \subseteq Z : \text{existe } U \in \mathscr{O}^p \text{ y } f[U] \subseteq A\}$ converge.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que existe $G : Y \to Z$ continua que extiende a f. Sea $p \in Y$. Afirmamos que $\mathscr{F}_p$ converge a $G(p)$. Sea U una vecindad abierta de $G(p)$ en Z, entonces por la continuidad de G existe una vecindad abierta V de p tal que $G[V] \subseteq U$. Entonces $U \cap X \in \mathscr{O}^p$ y además $f[V \cap X] = G[V \cap X] \subseteq G[V] \subseteq U$. Entonces $U \in \mathscr{F}_p$, por lo tanto $\mathscr{F}_p$ converge a $G(p)$.

Ahora demostremos la suficiencia. Definimos $G : Y \to Z$ donde $G(p)$ es el punto de convergencia de $\mathscr{F}_p$. Afirmamos que $G_{|X} = f$. Sea $x \in X$. Sea V una vecindad abierta de $f(x)$. Entonces por la continuidad de f existe una vecindad abierta U de x tal que $f[U] \subseteq V$. Como X es subespacio de Y, existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $U = W \cap X$, lo que implica que $U \in \mathscr{O}^x$ y $f[U] \subseteq V$, entonces $V \in \mathscr{F}_x$. Por lo tanto, $\mathscr{F}_x$ converge a $f(x)$, es decir $G_{|X} = f$.

Afirmamos que G es continua. Sea $p \in Y$. Sea V una vecindad abierta de $G(p)$, como Z es regular, entonces existe una vecindad abierta W de $G(p)$ tal que $G(p) \in W \subseteq cl_Z(W) \subseteq V$. Por otro lado, $\mathscr{F}_p \to G(p)$, es decir $W \in \mathscr{F}_p$, lo que implica que existe una vecindad abierta U de p en Y tal que $f[U \cap X] \subseteq W$.

Afirmamos que $G[U] \subseteq cl_Z W \subseteq V$. Sea $y \in U$. Sea A un abierto en Z tal que $G(y) \in A$. Como $\mathscr{F}_y$ converge a $G(y)$, entonces existe un abierto A_0 en Y con $y \in A_0$ y $f[A_0 \cap X] \subseteq A$, entonces $A_0 \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A_0 \cap U \cap X \neq \emptyset$, es decir

$$\emptyset \neq f[A_0 \cap U \cap X] \subseteq W \cap A.$$

Lo que implica que $G(y) \in cl_Z W$, es decir $G[U] \subseteq cl_Z W \subseteq V$. Por lo tanto, G es continua.

Por lo tanto, f tiene una extensión continua a Y.

$\boxtimes$

Teorema de Taimanov 3.1.18. Sea Y una extensión de un espacio X, sea Z un espacio compacto y sea $f \in C(X,Z)$. Entonces, f se extiende continuamente a Y si y sólo si $\forall A, B \subseteq Z$ cerrados ajenos, se tiene que $cl_Y f^{-1}[A] \cap cl_Y f^{-1}[B] = \emptyset$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que existe una función $F : Y \to Z$ tal que $F_{|X} = f$. Sean $A, B \subseteq Z$ cerrados ajenos, entonces $F^{-1}[A]$ y $F^{-1}[B]$ son subconjuntos cerrados en X tales que $f^{-1}[A] \subseteq F^{-1}[A]$ y $f^{-1}[B] \subseteq F^{-1}[B]$ lo que implica que $cl_Y f^{-1}[A] \subseteq F^{-1}[A]$ y $cl_Y f^{-1}[B] \subseteq F^{-1}[B]$. Como $A \cap B = \emptyset$ y $cl_Y f^{-1}[A] \cap cl_Y f^{-1}[B] \subseteq F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B] = \emptyset$, entonces $cl_Y f^{-1}[A] \cap cl_Y f^{-1}[B] = \emptyset$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que para cada $A, B \subseteq Z$ cerrados ajenos, se tiene que $cl_Y f^{-1}[A] \cap cl_Y f^{-1}[B] = \emptyset$. Sea $y \in Y$. Por la Proposición 3.1.17 basta demostrar que $\mathscr{F}_y = \{A \subseteq Z : f[U] \subseteq A$ para algún $U \in \mathscr{O}^y\}$ converge.

Como Z es compacto, entonces $\emptyset \neq \bigcap_{U \in \mathscr{O}^y} cl_Z f[U] = a(\mathscr{F})$. Supongamos que existe $p, q \in a(\mathscr{F})$ con $p \neq q$. Entonces existen subconjntos abiertos U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$ y $cl_Z U \cap cl_Z V = \emptyset$, lo que implica que $cl_Y f^{-1}[cl_Z U] \cap cl_Y f^{-1}[cl_Z V] = \emptyset$. Para cada $W \in \mathscr{O}^y$, $U \cap f[W] \neq \emptyset$, es decir $W \cap f^{-1}[U] \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathscr{O}^y$. Lo que implica que $y \in cl_Y f^{-1}[U]$, análogamente $y \in cl_Y f^{-1}[V]$. Entonces, $y \in cl_Y f^{-1}[U] \cap cl_Y f^{-1}[V] = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $a(\mathscr{F}_y) = \{p\}$ para algún $p \in Z$. Sea W una vecindad abierta de p. Entonces, $Z \setminus W$ es compacto y para cada $z \in Z \setminus W$, $z \notin a(\mathscr{F}_y)$, lo que implica que existe $A \in \mathscr{F}_y$ tal que $z \in Z \setminus cl_Z A$, entonces $Z \setminus W \subseteq \bigcup_{F\in\mathscr{F}_y}(Z \setminus cl_Z F)$. Por lo tanto existe una familia finita $S \subseteq \mathscr{F}_y$ tal que $Z \setminus W \subseteq \bigcup_{F\in S}(Z \setminus cl_Z F) \subseteq Z \setminus \bigcap S$. Dado que $\bigcap S \in \mathscr{F}_y$ y $\bigcap S \subseteq W$, entonces $W \in \mathscr{F}_y$. Por lo tanto, $\mathscr{F}_y$ converge a p.

$\boxtimes$

3.2. Extensiones Estrictas y Extensiones Simples Y_ν y Y_μ

En está sección se construirán nuevas extensiones de un espacio X, a partir de extensiones dadas, con propiedades muy interesantes y que serán la base para las secciones 3.3 y 3.4.

En la Definición 3.1.6 se definió el conjunto $o(\cdot)$ el cuál es un conjunto bien definido. Es decir, si $Y \in E[X]$ y $U, V \subseteq Y$ abiertos en Y con $U \neq V$, tales que $U \cap X = V \cap X$, entonces $o(U \cap X) = o(V \cap X)$. Más aún, $oW \subseteq Y$ es abierto en Y, para cualquier abierto $W \subseteq X$ en X, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Sea $Y \in E[X]$. Si $W \subseteq X$ es un abierto en X. Entonces $oW \subseteq Y$ es abierto en Y.

Demostración. Sea $y \in oW$. Entonces $W \in \mathscr{O}^y$, es decir existe una vecindad abierta $U \subseteq Y$ de y en Y tal que $U \cap X = W$. Sea $z \in U$, entonces $W = U \cap X \in \mathscr{O}^z$ lo cuál implica que $z \in o(U \cap X) = oW$. Por lo tanto $y \in U \subseteq oW$. Por lo tanto oW es abierto en Y.

$\boxtimes$

Veamos ahora algunas propiedades de $o(\cdot)$.

Proposición 3.2.2. Sea $Y \in E[X]$. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos en X y sea $W \subseteq Y$ abierto en Y. Entonces

1. $oX = Y$ y $o\emptyset = \emptyset$.

2. $oU \cap X = U$.

3. $X \cap o(W \cap X) = W \cap X$.

4. $oU \cap oV = o(U \cap V)$.

5. $W \subseteq o(W \cap X) \subseteq cl_Y(W \cap X) = cl_Y W$.

Demostración. 1. Dado que $X \in \mathscr{O}^p$ $\forall p \in Y$, se tiene que $oX = Y$. Por otro lado, $\emptyset \notin \mathscr{O}^p$ $\forall p \in Y$, lo que implica que $o\emptyset = \emptyset$.

2. Sea $x \in U$. Entonces $U \in \mathscr{O}^x$, lo que implica que $x \in oU \cap X$. Por lo tanto, $U \subseteq oU \cap X$. Sea $z \in oU \cap X$, entonces $U \in \mathscr{O}^z$, entonces existe un abierto W en Y tal que $U = W \cap X$ y $z \in W$ y dado que $z \in X$, $z \in U$.

3. Es consecuencia de (2).

4. Sea $y \in Y$. Entonces $y \in oU \cap oV$ si y sólo si $U \in \mathscr{O}^y$ y $V \in \mathscr{O}^y$ si y sólo si $y \in o(U \cap V)$.

5. Dado que $o(W\cap X)$ y W son abiertos en Y y X es denso en Y, se sigue que $cl_Y[o(W\cap X)] = cl_Y[o(W\cap X)\cap X]$ y $cl_Y W = cl_Y[W\cap X]$. Por (3), $cl_Y[o(W\cap X)] = cl_Y W$. Si $p\in W$, entonces $W\cap X\in \mathscr{O}^p$ y $p\in o(W\cap X)$.

$\boxtimes$

Una caracterización de $o(\cdot)$ es la siguiente.

Proposición. 3.2.3. Sea $Y\in E[X]$ y $U\subseteq X$ abierto en X. Entonces

$$oU = \bigcup\{W : W \text{ es un abierto en } Y \text{ y } W\cap X\subseteq U\} = Y\setminus cl_Y[X\setminus U].$$

Demostración. Sea $x\in oU$. Entonces $U\in\mathscr{O}^x$. Por lo tanto existe un abierto W de Y tal que $U = W\cap X$ y $x\in W$. Por lo tanto, $oU\subseteq \bigcup\{W : W \text{ es un abierto en } Y \text{ y } W\cap X\subseteq U\}$.

Sea $W\subseteq Y$ abierto en Y, tal que $W\cap X\subseteq U$. Basta demostrar que $W\cap cl_Y[X\setminus U]=\emptyset$. Supongamos que $W\cap cl_Y[X\setminus U]\neq\emptyset$, entonces $\emptyset\neq W\cap(X\setminus U)\subseteq W\cap X\subseteq U$, lo cual es una contradicción. Es decir $W\subseteq Y\setminus cl_Y[X\setminus U]$.

Por lo tanto, $\bigcup\{W : W \text{ es un abierto en } Y \text{ y } W\cap X\subseteq U\}\subseteq Y\setminus cl_Y[X\setminus U]$.

Sea $x\in Y\setminus cl_Y[X\setminus U]$. Basta demostar que $U\in\mathscr{O}^x$. Dado que $(Y\setminus cl_Y[X\setminus U])\cap X = X\setminus cl_X[X\setminus U]$, y como $U = int_X U = X\setminus cl_X[X\setminus U]$ entonces $U\in\mathscr{O}^x$. Por lo tanto, $Y\setminus cl_Y[X\setminus(U\cap X)]\subseteq o(U\cap X)$.

Es decir,

$$oU\subseteq\bigcup\{W : W \text{ es un abierto en } Y \text{ y } W\cap X\subseteq U\}\subseteq Y\setminus cl_Y[X\setminus U]\subseteq oU.$$

$\boxtimes$

Esta es otra manera de demostrar que oU es abierto en Y. Ahora vamos a caracterizar a los abiertos regulares de Y a partir de los abiertos regulares de X.

Proposición 3.2.4. Sea Y una extensión de un espacio X y sea U un abierto en Y. Entonces

$$int_Y[cl_Y U] = int_Y[cl_Y[U\cap X]] = o(int_X[cl_X[U\cap X]]).$$

Demostración. Dado que $cl_Y U = cl_Y[U\cap X]$, se sigue que $int_Y[cl_Y U] = int_Y[cl_Y[U\cap X]]$. Sea $R = int_X[cl_X[U\cap X]]$ y $W = int_Y[cl_Y[U\cap X]]$. Es claro que $W = Y\setminus cl_Y[X\setminus R]$ y por la Proposición 3.2.3 se tiene que $int_Y[cl_Y[U\cap X]] = o(int_X[cl_X[U\cap X]])$.

$\boxtimes$

Por lo tanto, para cada $V\in\mathscr{RO}(Y)$, existe $U\in\mathscr{RO}(X)$ tal que $V = oU$. Además para cada $U\in\mathscr{RO}(X)$, $oU\in\mathscr{RO}(Y)$. Es decir,

$$\mathscr{RO}(Y) = \{o_Y U : U\in\mathscr{RO}(X)\}.$$

Proposición 3.2.5. Sea $Y\in E[X]$. Entonces el conjunto $\mathscr{B} := \{oU : U \text{ es abierto en } X\}$ es una base abierta para una topología Hausdorff $\tau(Y_v)$ en Y y que está contenida en la topología original de Y, denotada como τ_Y.

Demostración. El hecho de que $\{oU : U \text{ es abierto en } X\}$ sea una base para una topología Y se sigue de las Proposiciones 3.2.2 (1) y (4). Tal topología está contenida en la topología original de Y. Veamos que tal topología es Hausdorff, sean $p,q\in Y$ con $p\neq q$. Sean U y V vecindades ajenas de p y q respectivamente en Y, tales que $(U\cap X)\cap(V\cap X)=\emptyset$. Por la Proposición 3.2.3 $p\in U\subseteq o(U\cap X)$ y $q\in V\subseteq o(V\cap X)$ y $o(U\cap X)\cap o(V\cap X) = o((U\cap X)\cap(V\cap X)) = o\emptyset = \emptyset$. Por lo tanto $\tau(Y_v)$ es una topología Hausdorff.

$\boxtimes$

Al espacio topológico $(Y, \tau(Y_v))$ lo denotaremos como Y_v.

Proposición 3.2.6. Y_v es una extensión de X.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.2.2 (2) que el subespacio X en Y es el mismo subespacio X en Y_v.

$\boxtimes$

Definición 3.2.7. Decimos que Y es una *extensión estricta* de X si $Y = Y_v$.

Proposición 3.2.8. Si Y es semiregular, entonces Y es una extensión estricta.

Demostración. Supongamos que Y es semiregular, entonces $\mathscr{RO}(Y) \subseteq \{oU : U \text{ es abierto en } Y\}$ y como $\mathscr{RO}(Y)$ es una base para Y, entonces la topología de Y se queda contenida en $\tau(Y_v)$ y por la Proposición 3.2.5 se cumple que $Y = Y_v$. Por lo tanto Y es una extensión estricta.

$\boxtimes$

Ejemplo 3.2.9. 1. El espacio $\mathbb{X}$ es una extensión estricta de $\mathbb{N}$.

2. No necesariamente el regreso de la Proposición 3.2.8 se cumple, como lo muestra el siguiente ejemplo, visto en el capítulo 1. Consideremos el espacio $Y = \{p_+\} \cup \bigcup\{[m, m+1] : 0 \leq m, \text{ y } m$ es par $\}$, visto en el Ejemplo 1.2.12, el cual es una extensión no semiregular de $Y \setminus \{p_+\}$, ya que $Y \setminus \{p_+\} \subseteq Y$ es denso. Afirmamos que Y es una extensión estricta de $Y \setminus \{p_+\}$.

Basta demostrar que para cualquier vecindad abierta $V \subseteq Y$ en Y de p_+, existe un abierto $U \subseteq Y \setminus \{p_+\}$ en $Y \setminus \{p_+\}$ tal que

$$p_+ \in Y \setminus cl_Y[(Y \setminus \{p_+\}) \setminus U] \subseteq V.$$

Sea $V \subseteq Y$ una vecindad abierta en Y de p_+, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y un abierto canónico W_n de Y definido como

$$W_n := \{p_+\} \cup \bigcup\{(l, l+1) : n \leq l, \text{ y } l \text{ es par }\},$$

tal que $p_+ \in W_n \subseteq V$. Definimos $U := W_n \setminus \{p_+\}$, es claro que $U \subseteq Y \setminus \{p_+\}$ es un abierto en $Y \setminus \{p_+\}$, lo que implica que $cl_Y[(Y \setminus \{p_+\}) \setminus U] = cl_{Y \setminus \{p_+\}}[(Y \setminus \{p_+\}) \setminus U] = (Y \setminus \{p_+\}) \setminus U = (Y \setminus W_n) \setminus \{p_+\}$. Por lo tanto

$$Y \setminus cl_Y[(Y \setminus \{p_+\}) \setminus U] = Y \setminus ((Y \setminus W_n) \setminus \{p_+\}) = (Y \setminus (Y \setminus W_n)) \cup (Y \cap \{p_+\}) = W_n \cup \{p_+\} = W_n.$$

Es decir, $p_+ \in Y \setminus cl_Y[(Y \setminus \{p_+\}) \setminus U] \subseteq V$. Por lo tanto, el espacio Y es un ejemplo de una extensión estricta que no es semiregular.

Pero a pesar de que existen extensiones estrictas no semiregulares de un espacio X, tales extensiones tienen propiedades (topológicas) muy parecidas a los espacios semiregulares, es decir se comportan como una generalización de estos. Así que cabe preguntarse ¿Cuál es la relación entre las extensiones estrictas y los espacios semiregulares con respecto a un subconjunto? Pero antes de dar respuesta a está pregunta necesitaremos del siguiente Lema.

Lema 3.2.10. Sea Y una extensión de X y sea W un subconjunto abierto de Y. Entonces $\alpha_{Y\setminus X}(W) = o(W\cap X)$.

Demostración. $\supseteq]$ Tenemos que $p \in o(W\cap X)$ si y sólo si $W\cap X \in \mathscr{O}_Y^p$ si y sólo si $p \in W \subseteq int_Y[W \cup ((Y\setminus X)\cap cl_Y W)] = \alpha_{Y\setminus X}(W)$; es decir $p \in \alpha_{Y\setminus X}(W)$. Por lo tanto, $o(W\cap X) \subseteq \alpha_{Y\setminus X}(W)$.

$\subseteq]$ Afirmamos que $\alpha_{Y\setminus X}(W)\cap X = W\cap X$. Como $W \subseteq \alpha_{Y\setminus X}(W)$, entonces $W\cap X \subseteq \alpha_{Y\setminus X}(W)\cap X$. Por otro lado,

$$\alpha_{Y\setminus X}(W)\cap X = \alpha_Y(W)\cap int_Y[W\cup(Y\setminus X)]\cap X \subseteq int_Y[W\cup(Y\setminus X)]\cap X \subseteq [W\cup(Y\setminus X)]\cap X = W\cap X.$$

Es decir $\alpha_{Y\setminus X}(W)\cap X = W\cap X$. Por la Proposición 3.2.3, $\alpha_{Y\setminus X}(W) \subseteq o(W\cap X)$. ⊠

La siguiente proposición dará respuesta a la pregunta planteada con anterioridad y además caracteriza a las extensiones estrictas.

Proposición 3.2.11. Sea Y una extensión de X. Las siguiente proposiciones son equivalentes.

1. Y es una extensión estricta de X.

2. $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base cerrada para Y.

3. Y es un espacio semiregular con respecto a $Y\setminus X$.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Sea $F \subseteq Y$ cerrado de Y. Entonces $Y\setminus F$ es abierto en Y. Como Y es una extensión estricta de X, existe una familia $\mathscr{S}$ de conjuntos abiertos en X tal que

$$Y\setminus F = \bigcup_{T\in\mathscr{S}} oT = \bigcup_{T\in\mathscr{S}} (Y\setminus cl_Y[X\setminus T]).$$

Por lo tanto

$$F = \bigcap_{T\in\mathscr{S}} cl_Y[X\setminus T].$$

Por lo tanto $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base cerrada para Y.

$[2 \Rightarrow 1]$ Supongamos que $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base cerrada para Y. Entonces $\{Y\setminus cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base abierta para Y. Sea $p \in Y\setminus cl_Y A$ para algún $A \subseteq X$. Basta demostrar que existe $U \subseteq X$ abierto en X tal que $p \in oU \subseteq Y\setminus cl_Y A$.

Como $p \in Y\setminus cl_Y A$, entonces $p \notin cl_Y A$; es decir, existe un abierto W en Y tal que $p \in W$ y $W\cap A = \emptyset$. Sea $U = W\cap X$. Entonces

$$U\cap A = (W\cap X)\cap A \subseteq W\cap A = \emptyset.$$

Es decir $U\cap A = \emptyset$. Afirmamos que $p \in oU \subseteq Y\setminus cl_Y A$.

En efecto $p \in oU$. Supongamos que $oU \nsubseteq Y\setminus cl_Y A$. Es decir, existe $q \in oU\cap cl_Y A$. Esto implica que $U \in \mathscr{O}^q$, es decir existe un abierto V en Y tal que $q \in V$, $U = V\cap X$ y $V\cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto

$$V\cap(X\cap A) = V\cap A \neq \emptyset.$$

Por otro lado, $(V\cap X)\cap A = U\cap A$. Es decir $U\cap A \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción ya que $U\cap A = \emptyset$. Por lo tanto $p \in oU \subseteq Y\setminus cl_Y A$.

$[1 \Leftrightarrow 3]$ Es consecuencia del Lema 3.2.10.

$\boxtimes$

Al conjunto $Y \setminus X$ se le denomina el *residuo* de X en Y.

Seguiremos con el estudio de nuevas extensiones a partir de una extensión dada.

Proposición 3.2.12. Sea $Y \in E[X]$, y sea $\mathrm{B}_Y = \{V \cup \{p\} : V \in \mathscr{O}^p \text{ y } p \in Y\}$.

1. B_Y es una base abierta para una topología Hausdorff τ_μ de Y que contiene a la topología τ_Y.

2. (Y, τ_μ) es una extensión de X.

3. $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto de (Y, τ_μ).

Demostración. 1. Sean $U \cup \{p\}, V \cup \{q\} \in \mathrm{B}_Y$ donde $U \in \mathscr{O}^p$ y $V \in \mathscr{O}^q$. Si $p = q$, entonces $(U \cup \{p\}) \cap (V \cup \{q\}) = (U \cap V) \cup \{p\} \in \mathrm{B}_Y$. Si $p \neq q$ y $r \in (U \cup \{p\}) \cap (V \cup \{q\})$, entonces $(U \cup \{p\}) \cap (V \cup \{q\}) = U \cap V$ y $r \in X$. Lo que implica $U \cap V = (U \cap V) \cup \{r\} \in \mathrm{B}_Y$. Por lo tanto B_Y es una base para una topología τ_μ de Y.

Sea $V \in \tau_Y$, entonces
$$V = \bigcup \{(V \cap X) \cup \{y\} : y \in V\}.$$
Por lo tanto, $\tau_Y \subseteq \tau_\mu$ y (Y, τ_μ) es Hausdorff.

2. Primero se demostrará que $(X, \tau_Y \lfloor_X)$ es igual a $(X, \tau_\mu \lfloor_X)$. Dado que $\tau_Y \subseteq \tau_\mu$ se obtiene que $\tau_Y \lfloor_X \subseteq \tau_\mu \lfloor_X$. Sea $U \cup \{p\} \in \mathrm{B}_Y$, donde $U \in \mathscr{O}^p$. Se tiene que $(U \cup \{p\}) \cap X = U$, lo que implica que $\tau_\mu \lfloor_X \subseteq \tau_Y \lfloor_X$, ya que $\{V \cap X : V \in \mathrm{B}_Y\}$ es una base de $\tau_\mu \lfloor_X$. Por lo tanto $(X, \tau_Y \lfloor_X) = (X, \tau_\mu \lfloor_X)$.

Además, para cada $U \cup \{p\} \in \mathrm{B}_Y$, donde $U \in \mathscr{O}^p$, se tiene que $(U \cup \{p\}) \cap X \neq \emptyset$. Por lo tanto, (Y, τ_μ) es una extensión de X.

3. Sea $p \in Y$, entonces $X \in \mathscr{O}^p$, en particular si $p \in X$ entonces $X \cup \{p\} = X \in \mathrm{B}_Y$. Es decir $Y \setminus X$ es cerrado. Por otro lado si $p \in Y \setminus X$, entonces $X \cup \{p\} \in \mathrm{B}_Y$ y $\{p\} = (Y \setminus X) \cap (X \cup \{p\})$. Por lo tanto $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto de (Y, τ_μ).

$\boxtimes$

Definición 3.2.13. El espacio (Y, τ_μ) será denotado como Y_μ, y su topología será denotada como $\tau(Y_\mu)$. Decimos que Y es una *extensión simple* de X si $Y = Y_\mu$.

La siguiente proposición caracteriza a las extensiones simples.

Proposición 3.2.14. Y es una extensión simple de X si y sólo si $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto de Y.

Demostración. La necesidad se demostró en la Proposición 3.2.12.

Ahora demostremos la suficiencia. Sea $W \subseteq Y$ un abierto no vacío en Y. Sea $p \in W$. Si $p \in X$, entonces $W \cap X$ es una vecindad abierta de p en Y, ya que $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado de Y, esto implica que X es abierto en Y. Es claro que $W \cap X = \{p\} \cup W \cap X$ y además $W \cap X \in \mathscr{O}^p$. Por lo tanto, $p \in \{p\} \cup W \cap X \subseteq W$.

Supongamos que $p \in Y \setminus X$, como $Y \setminus X$ es un subespacio discreto en Y, esto implica que existe $V \subseteq Y$ abierto en Y tal que $\{p\} = V \cap (Y \setminus X)$. Por otro lado $V \cap X$ es abierto en Y y se cumple que

$$V = V \cap Y = V \cap (X \cup Y \setminus X) = (V \cap X) \cup (V \cap Y \setminus X) = V \cap X \cup \{p\}.$$

El conjunto $U := V \cap W$ es una vecindad abierta de p en Y tal que $U = U \cap X \cup \{p\}$. Es claro que $U \cap X \in \mathscr{O}^p$. Por lo tanto se cumple que $p \in U \cap X \cup \{p\} \subseteq W$. Es decir, el conjunto $\mathrm{B}_Y = \{V \cup \{p\} : V \in \mathscr{O}^p \text{ y } p \in Y\}$ es una base de Y. Por lo tanto Y es una extensión simple de X.

$\boxtimes$

Si Y es una extensión de un espacio X, entonces al conjunto de trazas de los filtros de vecindades de Y_ν y Y_μ, definidas en 3.1.6 (2), las denotaremos, siempre que no exista ambigüedad, como T_ν y T_μ respectivamente.

Proposición 3.2.15. Sea $Y \in E[X]$. Entonces $\tau(Y_\nu) \subseteq \tau(Y_\mu)$ y $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_\nu = \mathrm{T}_\mu$.

Demostración. Por las Proposiciones 3.2.5 y 3.2.12 (1) se tiene que $\tau(Y_\nu) \subseteq \tau_Y \subseteq \tau(Y_\mu)$. Lo que implica que $\mathscr{O}^p_{Y_\nu} \subseteq \mathscr{O}^p_Y \subseteq \mathscr{O}^p_{Y_\mu}$ para cada $p \in Y$. Sea $U \in \mathscr{O}^p_{Y_\mu}$, entonces $U = X \cap W$ donde $p \in W$ y W es un abierto en Y_μ. Por lo tanto

$$W = \bigcup_{i \in I} (V_i \cup \{p_i\})$$

donde $p_i \in Y$ y $V_i \in \mathscr{O}^{p_i}_Y$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, existe $j \in I$ tal que $p \in V_j \cup \{p_j\}$. Es claro que $V_j \subseteq U$ y $p \in oV_j$. Entonces $p \in oU$ y $U \in \mathscr{O}^p_{Y_\nu}$.

Por lo tanto $\mathscr{O}^p_{Y_\mu} = \mathscr{O}^p_{Y_\nu}$, es decir $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_\nu = \mathrm{T}_\mu$.

$\boxtimes$

Proposición 3.2.16. Sean $Y, Z \in E[X]$ tales que Y y Z tienen el mismo conjunto base. Entonces $\tau(Y_\nu) \subseteq \tau(Z) \subseteq \tau(Y_\mu)$ si y sólo si $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que $\tau(Y_\nu) \subseteq \tau(Z) \subseteq \tau(Y_\mu)$, entonces $\mathscr{O}^p_{Y_\nu} \subseteq \mathscr{O}^p_Z \subseteq \mathscr{O}^p_{Y_\mu}$ para cada $p \in Y$. Por la proposición anterior se cumple que $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$. Es decir, $\mathscr{O}^p_Y = \mathscr{O}^p_Z$ para cada $p \in Z$. Lo que implica que $o_Y U = o_Z U$ donde $U \subseteq X$ es abierto en X, y $\mathrm{B}_Y = \mathrm{B}_Z$. Por lo tanto $\tau(Y_\nu) = \tau(Z_\nu)$ y $\tau(Y_\mu) = \tau(Z_\mu)$. Por lo tanto,

$$\tau(Y_\nu) = \tau(Z_\nu) \subseteq \tau(Z) \subseteq \tau(Z_\mu) = \tau(Y_\mu).$$

$\boxtimes$

Corolario 3.2.17. $\tau(Y_\nu) = \tau((Y_\nu)_\nu)$ y $\tau(Y_\mu) = \tau((Y_\mu)_\mu)$.

Demostración. Sea $Z \in \{Y_\nu, Y_\mu\}$. Entonces $\tau(Y_\nu) \subseteq \tau(Z) \subseteq \tau(Y_\mu)$. Por la Proposición 3.2.16, $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$ si y sólo si $\tau(Y_\nu) = \tau(Z_\nu) = \tau((Y_\nu)_\nu)$ y $Y_\mu = \tau(Z_\mu) = \tau((Y_\mu)_\mu)$.

$\boxtimes$

Proposición 3.2.18. Sea $Y \in E[X]$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. Y es H-cerrado.

2. Y_μ es H-cerrado.

3. Y_ν es H-cerrado.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro abierto en X. Supongamos que Y es H-cerrado. Por la Proposición 3.1.7, existe $p \in Y$ tal que $\mathscr{O}_Y^p \subseteq \mathscr{U}$. Como $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_{Y_\mu}^p = \mathscr{O}_{Y_\nu}^p$, entonces $\mathscr{O}_{Y_\mu}^p = \mathscr{O}_{Y_\nu}^p \subseteq \mathscr{U}$. Por lo tanto, Y_μ y Y_ν son espacios H-cerrados. Analogamente se obtiene que si Y_μ ó Y_ν es H-cerrado, entonces Y es H-cerrado.

$\boxtimes$

Teorema 3.2.19. Sea X un espacio y sean $Y, Z \in \mathscr{H}(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentas.

1. $Y_\nu \equiv_X Z_\nu$.

2. $Y_\mu \equiv_X Z_\mu$.

3. $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$.

4. $Y_\nu \preceq Z \preceq Y_\mu$.

Demostración. $[1 \Rightarrow 3]$ Supongamos que $Y_\nu \equiv_X Z_\nu$. Es decir existe un homeomorfismo $H : Y_\nu \to Z_\nu$ tal que $H_{|X} = Id_X$. Basta demostrar que para cada $\mathscr{O}_Y^p \in \mathrm{T}_Y$, $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_Z^{H(p)}$ lo que implica de manera directa que para cada $\mathscr{O}_Z^q \in \mathrm{T}_Z$, entonces $\mathscr{O}_Z^q = \mathscr{O}_Y^{H^{-1}(q)}$ ya que H es biyectiva.

Sea $\mathscr{O}_Y^p \in \mathrm{T}_Y$ y sea $U \in \mathscr{O}_Y^p$, entonces $H[o_Y U]$ es una vecindad abierta de $H(p)$ en Z_ν, tal que $H[o_Y U] \cap X = H[o_Y U] \cap H[X] = H[o_Y U \cap X] = H[U] = U$ ya que $U \subseteq X$ y $H_{|X} = Id_X$. Es decir, $U \in \mathscr{O}_Z^{H(p)}$. Lo que implica que $\mathscr{O}_Y^p \subseteq \mathscr{O}_Z^{H(p)}$.

Análogamente si $W \in \mathscr{O}_Z^{H(p)}$, entonces $H^{-1}[o_Z W]$ es una vecindad abierta de p en Y_ν, tal que $H^{-1}[o_Z W] \cap X = H^{-1}[o_Z W] \cap H^{-1}[X] = H^{-1}[o_Z W \cap X] = H^{-1}[W] = W$ ya que $W \subseteq X$ y $H_{|X} = Id_X$. Es decir, $W \in \mathscr{O}_Y^p$. Lo que implica que $\mathscr{O}_Z^{H(p)} \subseteq \mathscr{O}_Y^p$. Por lo tanto, $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_Z^{H(p)}$.

Por lo tanto, $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$.

$[1 \Rightarrow 2]$ Como $Y_\nu \equiv_X Z_\nu$, existe un homeomorfismo $H : Y_\nu \to Z_\nu$ tal que $H_{|X} = Id_X$. Primero veamos que $H : Y_\mu \to Z_\mu$ es una función abierta. Sea $p \in Y_\mu$ y $V \in \mathscr{O}_Y^p$, entonces $H[V \cup \{p\}] = H[V] \cup \{H(p)\}$ ya que $H[V] \subseteq X$ y $H[V] = Id_X[V] = V$. Por lo tanto $H[V \cup \{p\}] = V \cup \{H(p)\}$. Por $[1 \Rightarrow 3]$ tenemos que $V \in \mathscr{O}_Z^{H(p)}$. Es decir, $H[V \cup \{p\}]$ es abierto en Z_μ . Por lo tanto, H es una función abierta.

Afirmamos que H es continua. Sea $q \in Z_\mu$ y $W \in \mathscr{O}_Z^q$, entonces $H^{-1}[W \cup \{q\}] = H^{-1}[W] \cup \{H^{-1}(q)\}$ como $W \subseteq X$, entonces $H^{-1}[W] = W$. Por lo tanto, $H^{-1}[W \cup \{q\}] = W \cup \{H^{-1}(q)\}$. Por $[1 \Rightarrow 3]$ tenemos que $W \in \mathscr{O}_Y^{H^{-1}(q)}$. Es decir, $H^{-1}[W \cup \{q\}]$ es abierto en Y_μ. Por lo tanto, H es una función continua.

Por lo tanto, $Y_\mu \equiv_X Z_\mu$.

[$2 \Rightarrow 3, 1$] Supongamos que $Y_\mu \equiv_X Z_\mu$. Es decir existe un homeomorfismo $F : Y_\mu \to Z_\mu$ tal que $F_{|X} = Id_X$.

Afirmación 1. Para cada $p \in Y$, $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_Z^{F(p)}$.

Sea $p \in Y$ y sea $U \in \mathscr{O}_Y^p$. Entonces $U \cup \{p\}$ es una vecindad abierta de p en Y_μ. Entonces $F[U \cup \{p\}] = F[U] \cup \{F(p)\} = U \cup \{F(p)\}$ ya que $U \subseteq X$ y $F_{|X} = Id_X$. Como $U \cup \{F(p)\}$ es una vecindad abierta de $F(p)$ en Z_μ y $(U \cup \{F(p)\}) \cap X = U$, entonces $U \in \mathscr{O}_Z^{F(p)}$.

De manera análoga, si $V \in \mathscr{O}_Z^{F(p)}$. Entonces $F^{-1}[V \cup \{F(p)\}] = V \cup \{p\}$. Donde $V \cup \{p\}$ es una vecindad abierta de p en Y_μ y $(V \cup \{p\}) \cap X = V$, es decir $V \in \mathscr{O}_Y^p$. Por lo tanto $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_Z^{F(p)}$, es decir se cumple [$2 \Rightarrow 3$].

Veamos que F es una función abierta. Afirmación 2. Sea $U \subseteq X$ abierto en X, entonces $F[o_Y U] = o_Z U$.

$\subseteq$] Sea $p \in F[o_Y U]$, es decir existe $q \in o_Y U$ tal que $F(q) = p$. Como $q \in o_Y U$, implica que $U \in \mathscr{O}_Y^q$ y por la Afirmación 1. $U \in \mathscr{O}_Z^{F(q)} = \mathscr{O}_Z^p$, es decir $p \in o_Z U$. Por lo tanto $F[o_Y U] \subseteq o_Z U$.

$\supseteq$] Sea $p \in o_Z U$, esto implica que $U \in \mathscr{O}_Z^p = \mathscr{O}_Z^{F(q)}$ para algún $q \in Y$. Como $\mathscr{O}_Y^q = \mathscr{O}_Z^{F(q)}$, entonces $U \in \mathscr{O}_Y^q$. Es decir $q \in o_Y U$. Por lo tanto $o_Z U \subseteq F[o_Y U]$. Lo que implica que $F[o_Y U] = o_Z U$. Como consecuencia F es una función abierta.

Por último demostremos que F es continua. Sea $U \subseteq X$ abierto en X. Entonces por la Afirmación 2 $F^{-1}[o_Z U] = F^{-1}[F[o_Y U]] = o_Y U$, el cuál es abierto en Y_ν. Por lo tanto F es continua.

Concluimos que $F : Y_\nu \to Z_\nu$ es un homeomorfimo tal que $F_{|X} = Id_X$. Es decir $Y_\nu \equiv_X Z_\nu$.

[$3 \Rightarrow 4$] Supongamos que $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$. Es decir existe una función biyectiva $\varphi : Y \to Z$ tal que $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_Z^{\varphi(p)}$ para cada $p \in Y$.

Afirmación 1. $\varphi^{-1} : Z \to Y_\nu$ es continua tal que $\varphi^{-1}_{|X} = Id_X$.

Primero veamos que $\varphi^{-1}_{|X} = Id_X$. Sea $x \in X$, entonces $\mathscr{O}_Y^x = \mathscr{O}_Z^{\varphi(x)}$. Dado que $\mathscr{O}_Y^x$ es un filtro abierto que converge a x en X, $\mathscr{O}_Z^{\varphi(x)}$ converge a x en X. Supongamos que $\varphi(x) \neq x$, entonces existen $W, V \subseteq Z$ abiertos en Z tales que $\varphi(x) \in W$ y $x \in V$ con $W \cap V = \emptyset$. Como $\{W \cap X, V \cap X\} \subseteq \mathscr{O}_Z^{\varphi(x)}$, $\emptyset = (V \cap X) \cap (W \cap X) \in \mathscr{O}_Z^{\varphi(x)}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\varphi(x) = x$. Como x es arbitraria, entonces $\varphi_{|X} = Id_X$ y como φ es biyectiva, $\varphi^{-1}_{|X} = Id_X^{-1} = Id_X$.

Ahora veamos que $\varphi^{-1} : Z \to Y_\nu$ es continua. Basta demostrar que para cada $U \subseteq X$ abierto en X, entonces $(\varphi^{-1})^{-1}[o_Y U] = \varphi[o_Y U]$ es abierto en Z. Más aún, afirmamos que $\varphi[o_Y U] = o_Z U$. Sea $U \subseteq X$ abierto en X.

$\subseteq$] Sea $p \in \varphi[o_Y U]$, es decir existe $q \in o_Y U$ tal que $\varphi(q) = p$. Por demostrar que $U \in \mathscr{O}_Z^p$. Como $q \in o_Y U$, entonces $U \in \mathscr{O}_Y^q = \mathscr{O}_Z^{\varphi(q)} = \mathscr{O}_Z^p$ si y sólo si $p \in o_Z U$. Es decir $\varphi[o_Y U] \subseteq o_Z U$.

$\supseteq$] Sea $p \in o_Z U$, como φ es biyectiva, existe $q \in Y$ tal que $\varphi(q) = p$. Por demostrar, $q \in o_Y U$. Como $p \in o_Z U$, entonces $U \in \mathscr{O}_Z^p = \mathscr{O}_Z^{\varphi(q)} = \mathscr{O}_Y^q$, esto implica que $q \in o_Y U$, es decir $p \in \varphi[o_Y U]$.

Por lo tanto, $\varphi[o_Y U] = o_Z U$ y como $o_Z U$ es abierto en Z, entonces $\varphi^{-1} : Z \to Y_\nu$ es continua. Por lo tanto, $Y_\nu \preceq Z$.

Falta por mostrar que $Z \preceq Y_\mu$. Afirmación 2. $\varphi : Y_\mu \to Z$ es continua tal que $\varphi_{|X} = Id_X$.

Dado que $\varphi_{|X} = Id_X$ ya se demostró, veamos que $\varphi : Y_\mu \to Z$ es continua. Sea $W \subseteq Z$ abierto no vacío en Z. Sea $q \in \varphi^{-1}[W]$ tal que $\varphi(q) \in W$ y $\mathscr{O}_Y^q = \mathscr{O}_Z^{\varphi(q)}$ y además $W \cap X \in \mathscr{O}_Z^{\varphi(q)} = \mathscr{O}_Y^q$. Por lo tanto,

$$\{q\} \cup (W \cap X) = \{q\} \cup \varphi_{|X}^{-1}[W \cap X] \subseteq \varphi^{-1}[W].$$

Por lo tanto, $\varphi^{-1}[W]$ es abierto en Y_μ. Por lo tanto, $\varphi : Y_\mu \to Z$ es continua. Concluimos que $Y_\nu \preceq Z \preceq Y_\mu$.

[$3 \Rightarrow 1$] Es consecuencia de [$3 \Rightarrow 4$] ya que la función biyectiva $\varphi : Y \to Z$ tal que $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_Z^{\varphi(p)}$ para cada $p \in Y$, cumple que $\varphi[o_Y U] = o_Z U$. Por lo tanto $Y_\nu \equiv_X Z_\nu$.

[$4 \Rightarrow 3$] Supongamos que $Y_\nu \preceq Z \preceq Y_\mu$. Es decir, existen funciones continuas $F : Z \to Y_\nu$ y $G : Y_\mu \to Z$ tales que $F_{|X} = Id_X = G_{|X}$. Por lo tanto $F \circ G : Y_\mu \to Y_\nu$ es una función continua tal que $F \circ G_{|X} = Id_X$. Otra función que extiende de manera continua a la función Id_X es la función identidad de Y, $Id_Y : Y_\mu \to Y_\nu$. Por la Proposición 3.1.9 $F \circ G = Id_Y$, es decir G es una función inyectiva.

Por otro lado, como Y es H-cerrado, entonces por la Proposición 3.2.18, Y_μ es H-cerrado y como G es una función continua entonces $G[Y_\mu] \subseteq Z$ es un H-cerrado tal que $X \subseteq G[Y_\mu]$. Por lo tanto $G[Y_\mu] = Z$ ya que X es denso en Z. Por lo tanto G es una función biyectiva y su función inversa es F.

Sea Y_b el conjunto base del espacio topológico Y. Sea $\psi : Y_b \to Z$ dada por $\psi(y) = G(y)$ para cada $y \in Y_b$, es decir ψ es una función definida en un conjunto Y_b que toma valores en un espacio topológico Z, entonces ψ es una función biyectiva tal que $\psi_{|X} = Id_X$. Sea $Y_\psi := (Y_b, \tau_\psi)$ un espacio topológico donde τ_ψ es la topología débil heredada de ψ. Es decir $\tau_\psi := \{\psi^{-1}[W] : W \text{ es abierto en } Z\}$ es una topología en Y_b tal que ψ es continua. Más aún, como ψ es biyectiva, entonces ψ es un homeomorfismo, lo que implica que $\psi^{-1}[X] = X$ es denso en Y_φ, y Y_ψ es un H-cerrado ya que Z es un H-cerrado. Por lo tanto $Y_\psi \in \mathscr{H}(X)$ tal que $Y_\psi \equiv_X Z$.

Por lo tanto $\mathrm{T}_{Y_\psi} = \mathrm{T}_Z$. Como $Y_\nu \preceq Z \preceq Y_\mu$, entonces $Y_\nu \preceq Y_\psi \preceq Y_\mu$; es decir, $\tau(Y_\nu) \subseteq \tau_\psi \subseteq \tau(Y_\mu)$. Por la Proposición 3.2.16 $\mathrm{T}_{Y_\psi} = \mathrm{T}_Y$. Por lo tanto $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_Z$.

$\boxtimes$

3.3. La Extensión de Katětov κX

Hasta ahora se ha trabajado con el supuesto (o bajo la hipotesis) de que existen las extenciones H-cerradas para algún espacio X, sin tener en consideración de que tal vez tales extensiones no existan para algunos espacios. Por esta razón es importante saber para qué espacios X se tiene que $\mathscr{H}(X) \neq \emptyset$.

Definición 3.3.1. Sea X un espacio, y sea

$$\kappa X = X \bigcup \{\mathscr{U} : \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro abierto libre de } X\}.$$

Se puede verificar que

$$\mathscr{B} = \{U : U \text{ es abierto en } X\} \bigcup \{U \cup \{\mathscr{U}\} : U \in \mathscr{U},\ \mathscr{U} \in kX \setminus X\}$$

es una base abierta para alguna topología en κX, que lo hace Hausdorff.

Proposición 3.3.2. Dado un espacio X, κX es una extensión H-cerrada de X. Además, X es abierto en κX y $\kappa X \setminus X$ es un subespacio cerrado, discreto de κX.

Demostración. En efecto, por como se definió la topología en κX, el subespacio X es abierto en κX y $\kappa X \setminus X$ es un subespacio cerrado, discreto.

Veamos que κX es Hausdorff. Como X es Hausdorff, para cualesquiera $p, q \in X$ con $p \neq q$ existen vecindades abiertas ajenas en X, U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$, y tales conjuntos U y V son abiertos en κX. Sean $x \in X$ y $\mathscr{F} \in \kappa X \setminus X$, como $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro abierto libre, existen $U \in \mathscr{F}$ y V vecindad abierta de x tal que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, V y $U \cup \{\mathscr{F}\}$ son vencindades abiertas ajenas de x y $\mathscr{F}$ respectivamente. Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \kappa X \setminus X$ con $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$, es decir existen $U \in \mathscr{F}$ y $V \in \mathscr{G}$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $U \cup \{\mathscr{F}\}$ y $V \cup \{\mathscr{G}\}$ son vecindades abiertas ajenas de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ respectivamente. Por lo tanto, κX es Hausdorff.

Afirmamos que κX es una extensión H-cerrada de X. Sea $\mathscr{F} \in \kappa X \setminus X$, entonces una vecindad canónica de $\mathscr{F}$ es de la forma $U \cup \{\mathscr{F}\}$ donde $U \in \mathscr{F}$; es decir, U es un abierto no vacío de X. Por lo tanto $X \cap (U \cup \{\mathscr{F}\}) = U \neq \emptyset$, lo que implica que X es denso en κX. Supongamos que κX no es H-cerrado, es decir existe un ultrafiltro abierto libre, $\mathscr{U}$, en κX. Como X es denso y abierto, por la Proposición 1.1.8 (2), $X \in \mathscr{U}$. Sea

$$\mathscr{V} = \{W \cap X : W \in \mathscr{U}\}.$$

Afirmamos que $\mathscr{V}$ es un ultrafiltro abierto libre en X, tal que $\mathscr{U}$ converge a $\mathscr{V}$. Como $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, entonces $\mathscr{V}$ es una base abierta de filtro en X. Sea U un abierto en X, tal que $U \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathscr{V}$. Sea $W_0 \in \mathscr{U}$, entonces $\emptyset \neq (W_0 \cap X) \cap U \subseteq W_0 \cap U$. Esto implica que $U \cap W \neq \emptyset$ para cada $W \in \mathscr{U}$ y como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto, entonces $U \in \mathscr{U}$, lo que implica que $U \in \mathscr{V}$. Por lo tanto $\mathscr{V}$ es un ultrafiltro abierto en X, más aún $\mathscr{V}$ es un ultrafiltro abierto libre en X ya que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto libre.

Por otro lado, como $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, para cada $V \in \mathscr{V}$, $V \subseteq V \cup \{\mathscr{V}\}$ y como $\mathscr{U}$ es cerrada bajo supraconjuntos, entonces $V \cup \{\mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$, es decir el conjunto de vecindades abiertas canónicas en κX de $\mathscr{V}$ se queda contenido en $\mathscr{U}$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ converge a $\mathscr{V}$, esto es una contradicción ya que habíamos supuesto que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto libre en κX.

Por lo tanto, κX es una extensión H-cerrada de X.

$\boxtimes$

De la proposición anterior obtenemos que $\mathscr{H}(X) \neq \emptyset$ para cualquier espacio X y naturalmente $\bigvee \mathscr{H}(X)$ existe en $E[X]$, más aún, el máximo proyectivo de $\mathscr{H}(X)$ es κX, es decir $\bigvee \mathscr{H}(X) = \kappa X$, como lo muestra el siguiente Teorema.

Teorema 3.3.3. Sea X un espacio. Se cumple que:

1. Si $Y \in \mathscr{H}(X)$, existe una única función continua $f : \kappa X \to Y$ tal que $f_{|X} = Id_X$, es decir $Y \preceq \kappa X$.

2. Si $Z \in \mathscr{H}(X)$ y $Y \preceq Z$ para toda $Y \in \mathscr{H}(X)$, entonces $\kappa X \equiv_X Z$, es decir $\kappa X = \bigvee \mathscr{H}(X)$.

Demostración. 1. Sea $Y \in \mathscr{H}(X)$. Sea $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$ y sea

$$\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]} := \{W \subseteq Y : W \text{ es abierto en } Y \text{ y } W \cap X \in \mathscr{U}\}.$$

Es claro que $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ es un filtro abierto en Y. Afirmamos que $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ es un ultrafiltro abierto en Y. Sea U un abierto en Y tal que $U \notin \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, lo que implica que $U \cap X \notin \mathscr{U}$. Sea $V := X \setminus cl_X[U \cap X]$, entonces, por la Proposición 1.1.9 (2), $V \in \mathscr{U}$ y además

$$cl_Y[U \cap X] \cap V = cl_X[U \cap X] \cap V = \emptyset,$$

es decir, $V \subseteq Y \setminus cl_Y[U \cap X] = Y \setminus cl_Y U$. Lo que implica que $Y \setminus cl_Y U \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$. Por la Proposición 1.1.9 (2), $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ es un ultrafiltro abierto en Y. Como Y es H-cerrado, entonces $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ converge a un punto $y_{\mathscr{U}} \in Y$.

Definimos $f : \kappa X \to Y$ por $f(x) = x$ para $x \in X$ y $f(\mathscr{U}) = y_{\mathscr{U}}$ para $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$. Es claro que $f_{|X} = Id_X$, basta demostrar que f es continua. Como X es abierto en κX y $f_{|X} : X \to Y$ es continua, entonces f es continua en cada punto de X. Sea $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$ y sea W una vecindad abierta de $y_{\mathscr{U}}$ en Y. Como $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ converge a $y_{\mathscr{U}}$, entonces $W \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, lo que implica que $W \cap X \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\{\mathscr{U}\} \cup (W \cap X)$ es una vecindad abierta de $\mathscr{U}$ en κX y

$$f[\{\mathscr{U}\} \cup (W \cap X)] = \{y_{\mathscr{U}}\} \cup (W \cap X) \subseteq W.$$

Por lo tanto, f es continua y por la Proposición 3.1.9 f es única.

2. Sea $Z \in \mathscr{H}(X)$ tal que $Y \preceq Z$ para toda $Y \in \mathscr{H}(X)$. Por la proposición anterior $Z \preceq \kappa X$ y por hipótesis $\kappa X \preceq Z$. Por lo tanto, $\kappa X \equiv_X Z$. Lo que implica que $\kappa X = \bigvee \mathscr{H}(X)$.

$\boxtimes$

Corolario 3.3.4. El espacio κX es una extensión simple del espacio X.

Demostración. Por las Proposiciones 3.2.12 (1) y 3.2.18 $\kappa X \preceq (\kappa X)_\mu$ y $(\kappa X)_\mu \in \mathscr{H}(X)$. Por la proposición anterior tenemos que $\kappa X = (\kappa X)_\mu$.

$\boxtimes$

Definición 3.3.5. La extensión H-cerrada κX para un espacio X, es llamada *la extensión de Katětov* de X. Para un espacio $Y \in \mathscr{H}(X)$, la única función continua $f : \kappa X \to Y$ tal que $f_{|X} = Id_X$ es llamada *la función de Katětov* de Y.

Proposición 3.3.6. Sea $Y \in \mathscr{H}(X)$ y f la función de Katětov de Y. Si $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$ y $p \in Y$, entonces $f(\mathscr{U}) = p$ si y sólo si $\mathscr{O}_Y^p \subseteq \mathscr{U}$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que $f(\mathscr{U}) = p$, es decir $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ converge a p. Sea $V \in \mathscr{O}_Y^p$, entonces existe $U \subseteq Y$ abierto en Y tal que $V = U \cap X$ y $p \in U$, lo que implica que $U \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$. Por lo tanto, $V \in \mathscr{U}$, es decir $\mathscr{O}_Y^p \subseteq \mathscr{U}$.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que $\mathscr{O}_Y^p \subseteq \mathscr{U}$. Sea $W \subseteq Y$ un abierto en Y tal que $p \in W$, entonces $W \cap X \in \mathscr{O}_Y^p$, lo que implica que $W \cap X \in \mathscr{U}$. Por lo tanto $W \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, es decir $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ converge a p. Por lo tanto, $f(\mathscr{U}) = p$.

⊠

Proposición 3.3.7. La función de Katětov de cualquier extensión H-cerrada, es una función suprayectiva.

Demostración. Sea X un espacio y sea $Y \in \mathscr{H}(X)$. Entonces la función de Katětov de Y, $f : \kappa X \to Y$, es una función continua tal que $f_{|X} = Id_X$. Por lo tanto $f[\kappa X]$ es un subespacio H-cerrado de Y tal que $X \subseteq f[\kappa X]$, y como X es denso en Y, entonces $f[\kappa X]$ es denso y cerrado en Y, por lo tanto $f[\kappa X] = Y$. Es decir f es una función suprayectiva.

⊠

Corolario 3.3.8. Sea $Y \in \mathscr{H}(X)$ para algún espacio X. Entonces $|Y| \leq |\kappa X|$.

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 3.3.7.

⊠

Veamos algunas propiedades de κX.

Proposición 3.3.9. Sea X un espacio. Entonces:

1. Si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $cl_{\kappa X} U = cl_X U \cup \{\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathscr{U}\}$.

2. Si U, V son abiertos en X y $U \cap V = \emptyset$, entonces $(cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \setminus X = \emptyset$.

3. Si U, V son abiertos en X y $cl_X U \cap cl_X V = \emptyset$, entonces $cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V = \emptyset$. En particular, si U es un abierto-cerrado en X, entonces $cl_{\kappa X} U$ es abierto-cerrado en κX.

4. X está C^*-encajado en κX.

5. Si $A \subseteq X$ es cerrado y denso en ninguna parte, entonces A es cerrado en κX.

Demostración. 1. Como $U \subseteq X$, entonces $cl_X U = cl_{\kappa X} U \cap X$. Basta demostrar que $cl_{\kappa X} U \setminus X = \{\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathscr{U}\}$. Tenemos que $\mathscr{U} \in cl_{\kappa X} U \setminus X$ si y sólo si para toda vecindad abierta $V \cup \{\mathscr{U}\}$ de $\mathscr{U}$ donde $V \in \mathscr{U}$ se tiene que $(V \cup \{\mathscr{U}\}) \cap U = V \cap U \neq \emptyset$. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto en X, se tiene que $U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $cl_{\kappa X} U = cl_X U \cup \{\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathscr{U}\}$.

2. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos en X tales que $U \cap V = \emptyset$. Por (1),

$$(cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \setminus X = \{\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathscr{U}\} \cup \{\mathscr{V} \in \kappa X \setminus X : V \in \mathscr{V}\} = \{\mathscr{F} \in \kappa X \setminus X : U \cap V \in \mathscr{F}\} = \emptyset.$$

3. Por (1) tenemos que $cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V = [(cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \setminus X] \cup [(cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \cap X]$ y por (2) $(cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \setminus X = \emptyset$, entonces $cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V = (cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \cap X = cl_X U \cap cl_X V = \emptyset$.

Sea $U \subseteq X$ un abierto-cerrado en X, entonces $cl_X U \cap cl_X[X \setminus U] = U \cap (X \setminus U) = \emptyset$, lo que implica que $cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X}[X \setminus U] = \emptyset$. Por otro lado, $\kappa X = cl_{\kappa X}[U \cup (X \setminus U)] = cl_{\kappa X}[U] \cup cl_{\kappa X}[X \setminus U]$. Por lo tanto, $cl_{\kappa X} U = \kappa X \setminus cl_{\kappa X}[X \setminus U]$, es decir $cl_{\kappa X} U$ es abierto cerrado en κX.

4. Sea $f \in C(X, K)$ donde $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto. Basta demostrar por el Teorema de Taimanov 3.1.18 que para cualesquiera conjuntos cerrados ajenos $A, B \subseteq K$, se cumple que $cl_{\kappa X} f^{-1}[A] \cap cl_{\kappa X} f^{-1}[B] = \emptyset$. Sean $A, B \subseteq K$ cerrados y ajenos, como K es compacto, existen conjuntos abiertos $U, V \subseteq K$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ y $cl_K U \cap cl_K V = \emptyset$. Como f es continua, entonces $f^{-1}[U]$ y $f^{-1}[V]$ son abiertos en X y cumplen

$$f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[U] \subseteq cl_X f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[cl_K U] \quad \text{y} \quad f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[V] \subseteq cl_X f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[cl_K V]$$

Como $f^{-1}[cl_K U] \cap f^{-1}[cl_K V] = \emptyset$, entonces $cl_X f^{-1}[U] \cap cl_X f^{-1}[V] = \emptyset$. Por (3), $cl_{\kappa X} f^{-1}[U] \cap cl_{\kappa X} f^{-1}[V] = \emptyset$. Por lo tanto, $cl_{\kappa X} f^{-1}[A] \cap cl_{\kappa X} f^{-1}[B] = \emptyset$.

5. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado y denso en niguna parte en X. Entonces $X \setminus A$ es un abierto denso en X. Sea $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$, entonces $(X \setminus A) \in \mathscr{U}$, lo que implica que $(X \setminus A) \cup \{\mathscr{U}\}$ es una vecindad abierta de $\mathscr{U}$. Por lo tanto,

$$(X \setminus A) \cup (\kappa X \setminus X) = \bigcup_{\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X} (X \setminus A) \cup \{\mathscr{U}\}$$

es abierto en κX. Por lo tanto $\kappa X \setminus [(X \setminus A) \cup (\kappa X \setminus X)] = A$ es cerrado en κX.

$\boxtimes$

Proposición 3.3.10. Sea $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$. Entonces $\mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X} = \mathscr{U}$.

Demostración. Sea $V \in \mathscr{U}$, entonces $V \cup \{\mathscr{U}\}$ es una vecindad abierta de $\mathscr{U}$ en κX. Por lo tanto, $V = (V \cup \{\mathscr{U}\}) \cap X \in \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X}$. Es decir $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X}$. Pero como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto en X se sigue que $\mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X} = \mathscr{U}$.

$\boxtimes$

Ahora veamos y estudiemos algunas propiedades de $\kappa\mathbb{N}$.

Proposición 3.3.11. $\kappa\mathbb{N}$ no es compacto.

Demostración. Supongamos que $\kappa\mathbb{N}$ es compacto. Como $\mathbb{X} \in \mathscr{H}(\mathbb{N})$, entonces la función de Katětov con respecto de $\mathbb{X}$, $f : \kappa\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{X}$, cumple, por la Proposición 3.3.7, que $f[\kappa\mathbb{N}] = \mathbb{X}$. Como f es continua se sigue que $\mathbb{X}$ es un compacto, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $\kappa\mathbb{N}$ no es compacto.

$\boxtimes$

Proposición 3.3.12. $\kappa\mathbb{N}$ es Urysohn.

Demostración. Sean $p, q \in \kappa\mathbb{N}$ con $p \neq q$ y sean $U, V \subseteq \kappa\mathbb{N}$ vecindades abiertas ajenas de p y q respectivamente en $\kappa\mathbb{N}$. Entonces $U \cap \mathbb{N}$ y $V \cap \mathbb{N}$ son abiertos-cerrados ajenos en $\mathbb{N}$, lo que implica, por la Proposición 3.3.9 (3),

$$\emptyset = cl_{\kappa\mathbb{N}}[U \cap \mathbb{N}] \cap cl_{\kappa\mathbb{N}}[V \cap \mathbb{N}] = cl_{\kappa\mathbb{N}} U \cap cl_{\kappa\mathbb{N}} V.$$

Por lo tanto, $\kappa\mathbb{N}$ es Urysohn.

$\boxtimes$

Hasta ahora tenemos que $\mathbb{X},\mathscr{W},\mathscr{W}_s$ y $\kappa\mathbb{N}$ son extenciones H-cerradas de $\mathbb{N}$ tales que $\mathbb{X},\mathscr{W},\mathscr{W}_s \preceq \kappa\mathbb{N}$. Más aún, las extensiones H-cerradas $\mathbb{X},\mathscr{W},\mathscr{W}_s$ y $\kappa\mathbb{N}$ no son equivalentes por pares.

Ahora trataremos el problema de cuando una función continua entre espacios $f : X \to Y$ se extiende continuamente a una función $F : \kappa X \to \kappa Y$. Como veremos en el siguiente Teorema los p-mapeos (introducidos en el capítulo 2 de la sección 2.2) dan solución a este problema.

Teorema 3.3.13. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces existe $F : \kappa X \to \kappa Y$ que extiende continuamente a f si y sólo si f es un p-mapeo.

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que f se extiende continuamente a una función $F : \kappa X \to \kappa Y$. Sea $\mathscr{Q}$ una p-cubierta de Y. Supongamos que $f^{-1}[\mathscr{Q}]$ no es una p-cubierta. Entonces $\{X \setminus cl_X f^{-1}[U] : U \in \mathscr{Q}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, y por lo tanto existe un ultrafiltro abierto libre $\mathscr{U}$ que lo contiene. Si $F(\mathscr{U}) \in Y$, entonces existe $V \in \mathscr{Q}$ tal que $F(\mathscr{U}) \in V$. Por lo tanto $\mathscr{U} \in F^{-1}[V]$, entonces existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $U \cup \{\mathscr{U}\} \subseteq F^{-1}[V]$, lo que implica que $U = (U \cup \{\mathscr{U}\}) \cap X \subseteq F^{-1}[V] \cap X$. Por lo tanto $F^{-1}[V] \cap X \in \mathscr{U}$, pero $F^{-1}[V] \cap X = f^{-1}[V]$, lo cuál es una contradicción ya que $X \setminus cl_X f^{-1}[V] \in \mathscr{U}$. Por lo tanto $F(\mathscr{U}) = \mathscr{V} \in \kappa Y \setminus Y$. Como $\mathscr{Q}$ es una p-cubierta, existe una subfamilia finita $\mathscr{S}$ de $\mathscr{Q}$ tal que $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en Y. Como $\mathscr{V}$ es maximal, entonces existe $U \in \mathscr{S}$ tal que $U \in \mathscr{V}$. Por lo tanto $F^{-1}[\{\mathscr{V}\} \cup U]$ es un abierto que contiene a $\mathscr{U}$. Pero $f^{-1}[U] = F^{-1}[\{\mathscr{V}\} \cup U] \cap X \in \mathscr{U}$ lo cuál es una contradicción ya que $X \setminus cl_X f^{-1}[U] \in \mathscr{U}$. Por lo tanto $f^{-1}[\mathscr{Q}]$ es una p-cubierta.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que f es un p-mapeo. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro abierto libre en X, y sea

$$\mathscr{G} := \{V \subseteq Y : V \text{ es abierto en } Y \text{ y } f[U] \subseteq V \text{ para algún } U \in \mathscr{U}\}.$$

Es claro que $\mathscr{G}$ es un filtro abierto en Y.

Caso 1. Supongamos que $\mathscr{G}$ es un filtro abierto libre. Afirmamos que $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro abierto. Sea V un abierto en Y. Entonces para cada $y \in Fr_Y V$, existe una vecindad abierta W_y de y tal que $W_y \notin \mathscr{G}$. Sea $\mathscr{Q} := \{V, Y \setminus cl_Y V\} \cup \{W_y : y \in Fr_Y V\}$, entonces $\mathscr{Q}$ es una p-cubierta de Y. Por hipotesis $f^{-1}[\mathscr{Q}]$ es una p-cubierta de X. Por lo tanto existe $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ subfamilia finita tal que $\bigcup_{W \in \mathscr{S}} f^{-1}[W]$ es denso en X, a saber $\mathscr{S} := \{V, Y \setminus cl_Y V\}$. Por la maximalidad de $\mathscr{U}$, existe $U_0 \in \mathscr{S}$ tal que $f^{-1}[U_0] \in \mathscr{U}$. Entonces $U_0 \in \mathscr{G}$. Donde $U_0 = V$ ó $U_0 = Y \setminus cl_Y V$. Por lo tanto $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro abierto.

Caso 2. Supongamos que $\mathscr{G}$ es un filtro abierto no libre. Entonces existe $z := z_{[\mathscr{G}]} \in \bigcap\{cl_Y W : W \in \mathscr{G}\}$. Afirmamos que $\mathscr{G}$ converge a z. Sea V una vecindad abierta de z. Para cada $y \in Fr_Y V$, existe una vecindad abierta W_y de y tal que $z \notin cl_Y W_y$. Por lo tanto $\mathscr{Q} := \{V, Y \setminus cl_Y V\} \cup \{W_y : y \in Fr_Y V\}$. Entonces $\mathscr{Q}$ es una p-cubierta de Y. Como en el Caso 1, existe $U_0 \in \mathscr{Q}$ tal que $f^{-1}[U_0] \in \mathscr{U}$. Como $z \notin cl_Y W_y$ para cada $y \in Fr_Y V$ y además $z \notin cl_Y[Y \setminus cl_Y V]$, entonces $U_0 = V$. Por definición de $\mathscr{G}$, $V \in \mathscr{G}$. Por lo tanto $\mathscr{G}$ converge a z.

Definimos $F : \kappa X \longrightarrow \kappa Y$ dada por $F(x) = f(x)$ si $x \in X$, y si $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$ entonces

$$F(\mathscr{U}) = \begin{cases} \mathscr{G} & \text{si } \mathscr{G} \text{ es un filtro abierto libre,} \\ z_{[\mathscr{G}]} & \text{si } \mathscr{G} \text{ es un filtro abierto no libre.} \end{cases}$$

Es claro que F es una extensión de f. Afirmamos que F es continua. Como X (respectivamente Y) es abierto en κX (respectivamente κY), entonces F es continua en cada punto de X. Sea $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$.

Si $F(\mathscr{U}) = \mathscr{G} \in \kappa Y \setminus Y$, sea $W_0 \in \mathscr{G}$. Por definición de F, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $f[U] \subseteq W_0$. Por lo tanto $\{\mathscr{U}\} \cup U$ es una vecindad abierta de $\mathscr{U}$ en κX tal que $F[\{\mathscr{U}\} \cup U] \subseteq \{\mathscr{G}\} \cup W_0$, lo que implica que F es continua en $\mathscr{U}$.

Si $F(\mathscr{U}) = z_{[\mathscr{G}]} \in Y$, sea V una vecindad abierta de $z_{[\mathscr{G}]}$ en Y. Es claro que V es un abierto en κY. Entonces $V \in \mathscr{G}$, y por lo tanto existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $f[U] \subseteq V$. Por lo tanto $\{\mathscr{U}\} \cup U$ es una vecindad de $\mathscr{U}$ en κX tal que $F[\{\mathscr{U}\} \cup U] \subseteq V$, es decir F es continua en $\mathscr{U}$.

Por lo tanto F es una extensión continua de f.

$\boxtimes$

Notación 3.3.14. Sea $f : X \to Y$ un p-mapeo. Denotamos a su extensión continua $F : \kappa X \to \kappa Y$ como κf.

Proposición 3.3.15. Sean $Y, Z \in E[X]$. Si $Z \preceq Y$, entonces $\kappa Z \preceq \kappa Y$.

Demostración. Como $Z \preceq Y$, entonces existe una función continua $f : Y \to Z$ tal que $f_{|X} = Id_X$. Basta demostrar que f es un p-mapeo. Sea $\mathscr{Q}$ una p-cubierta de Z. Es claro que $f^{-1}[\mathscr{Q}]$ es una cubierta de Y. Como $\mathscr{Q}$ una p-cubierta de Z, entonces existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ tal que $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en Z. Entonces $\bigcup\{U \cap X : U \in \mathscr{S}\}$ es un abierto denso en X. Como

$$\bigcup\{U \cap X : U \in \mathscr{S}\} \subseteq \bigcup\{f^{-1}[U] : U \in \mathscr{S}\},$$

$\{f^{-1}[U] : U \in \mathscr{S}\}$ es una subfamilia finita de $f^{-1}[\mathscr{Q}]$ cuya unión es densa en Y. Por lo tanto f es un p-mapeo. Por lo tanto f se extiende continuamente a una función $\kappa f : \kappa Y \to \kappa Z$. Por lo tanto $\kappa Z \preceq \kappa Y$.

$\boxtimes$

Proposición 3.3.16. Sea A un subespacio cerrado de X. Entonces la función inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es un p-mapeo si y sólo si $cl_{\kappa X} A$ y κA son extensiones equivalentes de A.

Demostración. Demostremos la suficiencia. Supongamos que $cl_{\kappa X} A$ y κA son extensiones equivalentes de A. Entonces existe $F : \kappa A \to cl_{\kappa X} A$, homeomorfismo, tal que $F_{|A} = Id_A = i$. Por lo tanto F es una extensión continua de i. Por el teorema anterior i es un p-mapeo.

Ahora demostremos la necesidad. Supongamos que i es un p-mapeo. Por lo tanto i tiene una extensión continua $\kappa i : \kappa A \to \kappa X$. Afirmamos que $\kappa i(\kappa A) = cl_{\kappa X} A$. Es claro que $\kappa i(\kappa A)$ es un conjunto cerrado en κX tal que $A \subseteq \kappa i(\kappa A)$, lo que implica que $cl_{\kappa X} A \subseteq \kappa i(\kappa A)$. Por otro lado como κi es continua entonces

$$\kappa i(\kappa A) = \kappa i(cl_{\kappa A} A) \subseteq cl_{\kappa X}[\kappa i(A)] = cl_{\kappa X} A.$$

Por lo tanto $\kappa i(\kappa A) = cl_{\kappa X} A$ es H-cerrado. Por demostrar que $cl_{\kappa X} A \equiv_A \kappa A$.

Afirmación 1. $cl_{\kappa X} A$ es una extensión simple.

Como A es un subespacio cerrado de X, entonces $A = cl_X A = cl_{\kappa X} A \cap X$. Y como X es un abierto en κX, entonces $cl_{\kappa X} A \cap X$ es un abierto en $cl_{\kappa X} A$. Es decir A es abierto en $cl_{\kappa X} A$. Por lo tanto $cl_{\kappa X} A \setminus A$ es un subespacio cerrado discreto en $cl_{\kappa X} A$, ya que $cl_{\kappa X} A \setminus A \subseteq \kappa X \setminus X$ y $\kappa X \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto en κX. Por la Proposición 3.2.14 $cl_{\kappa X} A$ es una extensión simple. Es decir $cl_{\kappa X} A = (cl_{\kappa X} A)_\mu$.

Afirmación 2. $\mathrm{T}_{cl_{\kappa X}A} = \mathrm{T}_{\kappa A}$.

Es claro que si $p \in A$, entonces $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A} = \mathscr{O}^p_{\kappa A}$. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro abierto libre en A, entonces por la Proposición 3.3.10 $\mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa A} = \mathscr{U}$ y como $cl_{\kappa X}A$ es H-cerrado, entonces existe $p \in cl_{\kappa X}A \setminus A$ tal que $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A} \subseteq \mathscr{U}$. Basta demostar que $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A} = \mathscr{U}$.

Como $p \in cl_{\kappa X}A \setminus A$, p es un ultrafiltro abierto libre en X y $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A} = \{U \cap A : U \in p\}$. Sea $V \subseteq A$ abierto en A tal que $W \cap V \neq \emptyset$ para cada $W \in \mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A}$. Como V es abierto en A, entonces existe V_0 abierto en X tal que $V = V_0 \cap A$. Por lo tanto $V_0 \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in p$ y como p es un ultrafiltro abierto en X, entonces $V_0 \in p$. Por lo tanto $V \in \mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A}$. Es decir $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A}$ es un ultrafiltro abierto en A y como $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A} \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\mathscr{O}^p_{cl_{\kappa X}A} = \mathscr{U}$. Por lo tanto $\mathrm{T}_{cl_{\kappa X}A} = \mathrm{T}_{\kappa A}$.

Por el Teorema 3.2.19 $(cl_{\kappa X}A)_\mu \equiv_A \kappa A$. Como $cl_{\kappa X}A = (cl_{\kappa X}A)_\mu$, entonces $cl_{\kappa X}A \equiv_A \kappa A$.

⊠

Proposición 3.3.17. Sea $\{Z_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia finita de espacios. Entonces

$$\kappa\left(\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})\right) \equiv_{\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha\times\{\alpha\})} \bigoplus_{\alpha\in J}(\kappa Z_\alpha \times \{\alpha\}).$$

Demostración. Sea $\mathscr{A} := \bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})$. Como $Z_\alpha \times \{\alpha\}$ es abierto y cerrado en $\mathscr{A}$, la función inclusión $i : Z_\alpha \times \{\alpha\} \hookrightarrow \mathscr{A}$ es una función continua y abierta para cada $\alpha \in J$. Por la Proposición 2.2.11, i es un p-mapeo y por la Proposición 3.3.16 tenemos que

$$cl_{\kappa\mathscr{A}}(Z_\alpha \times \{\alpha\}) \equiv_{Z_\alpha\times\{\alpha\}} \kappa(Z_\alpha \times \{\alpha\}) \equiv_{Z_\alpha} \kappa Z_\alpha.$$

Afirmamos que $cl_{\kappa\mathscr{A}}(Z_\alpha \times \{\alpha\})$ es abierto en $\kappa\mathscr{A}$ para cada $\alpha \in J$, y $cl_{\kappa\mathscr{A}}(Z_\alpha \times \{\alpha\}) \cap cl_{\kappa\mathscr{A}}(Z_\beta \times \{\beta\}) = \emptyset$ con $\alpha \neq \beta$.

Pero esto es consecuencia de la Proposición 3.3.9 (3), ya que $Z_\alpha \times \{\alpha\}$ es abierto-cerrado en $\mathscr{A}$ para cada $\alpha \in J$. Por lo tanto

$$\kappa\mathscr{A} = cl_{\kappa\mathscr{A}}\left[\bigcup_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})\right] = \bigcup_{\alpha\in J} cl_{\kappa\mathscr{A}}(Z_\alpha \times \{\alpha\}) = \bigoplus_{\alpha\in J} cl_{\kappa\mathscr{A}}(Z_\alpha \times \{\alpha\}) \equiv_{\mathscr{A}} \bigoplus_{\alpha\in J}(\kappa Z_\alpha \times \{\alpha\}).$$

⊠

3.4. La Extensión de Fomin σX

Definición 3.4.1. Dado un espacio X. La extensión estricta $(\kappa X)_\nu$ se le denomina la *Extensión de Fomin* y será denotada por σX.

Es claro que una extensión de Fomin es una extensión H-cerrada por la Proposición 3.2.18. Y además el conjunto $\{o_{\kappa X}U : U \text{ es abierto en } X\}$ es una base abierta para σX. También es importante observar que κX y σX tienen el mismo conjunto base, aunque como espacios topológicos puedan ser distintos, se darán condiciones necesarias y suficientes de cuando estos espacios κX y σX son equivalentes, véase Teorema 3.4.18.

Proposición 3.4.2. Sea X un espacio. Entonces

1. Si $p \in \kappa X$, entonces $\mathscr{O}^p_{\kappa X} = \mathscr{O}^p_{\sigma X}$.

2. Si $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$, entonces $\mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X} = \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\sigma X} = \mathscr{U}$.

Demostración. 1. Sea $p \in \kappa X$. Como $\kappa X = (\kappa X)_\mu$ y $\sigma X = (\kappa X)_\nu$, por la Proposición 3.2.15, $\mathscr{O}^p_{(\kappa X)_\nu} = \mathscr{O}^p_{(\kappa X)_\mu}$. Por lo tanto, $\mathscr{O}^p_{\kappa X} = \mathscr{O}^p_{\sigma X}$.

2. Por la Proposición 3.3.10, $\mathscr{U} = \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X}$, y por (1) concluimos que $\mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X} = \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\sigma X} = \mathscr{U}$.

$\boxtimes$

Por la proposición anterior, $o_{\sigma X}U = o_{\kappa X}U$ para cada $U \subseteq X$ abierto en X.

Proposición 3.4.3. Sea $Y \in \{\kappa X, \sigma X\}$ y sea $U \subseteq X$ abierto en X. Entonces

$$o_Y U = U \cup \{\mathscr{G} \in Y \setminus X : U \in \mathscr{G}\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{M} := U \cup \{\mathscr{G} \in Y \setminus X : U \in \mathscr{G}\}$. Es claro que $\mathscr{M}$ es un abierto en κX tal que $\mathscr{M} \cap X = U$. Por la Proposición 3.2.3 se tiene que $\mathscr{M} \subseteq o_{\kappa X}U$ y como $o_Y U = o_{\kappa X}U$, entonces $\mathscr{M} \subseteq o_Y U$.

Sea $p \in o_Y U$. Si $p \in o_Y U \cap X = U \subseteq \mathscr{M}$. Si $p \in o_Y U \setminus X$, entonces $U \in \mathscr{O}^p_Y = p$. Por lo tanto $p \in \mathscr{M}$.

Por lo tanto $\mathscr{M} = o_Y U$.

$\boxtimes$

Cuando no exista ambigüedad, se va a trabajar con oU en vez de $o_{\kappa X}U$ ó $o_{\sigma X}U$ para no abusar de la notación.

Proposición 3.4.4. Sea X un espacio, sea $Y \in \{\kappa X, \sigma X\}$ y sean U, V abiertos en X. Entonces

1. $cl_Y U = cl_X U \cup oU$.

2. $o(int_X[cl_X U]) = int_X[cl_X U] \cup oU$.

3. Sea $A \subseteq X$. Si A es un subconjunto cerrado y denso en niguna parte de X, entonces A es cerrado en Y.

4.$o(U \cup V) \setminus X = (oU \cup oV) \setminus X$.

5. $(Y \setminus X) \setminus oU = o(X \setminus cl_X U) \setminus X$.

Demostración. 1. Basta demostrar que $cl_Y U \setminus X = oU \setminus X$. Tenemos que $\mathscr{U} \in cl_Y U \setminus X$ si y sólo si $V \cap U \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathscr{U}$, lo que implica que $U \in \mathscr{U}$. Por otro lado $\mathscr{U} = \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_Y$. Por lo tanto, $U \in \mathscr{U}$ si y sólo si $\mathscr{U} \in oU \setminus X$.

2. Basta demostrar que $o(int_X[cl_X U])\setminus X = oU\setminus X$. Sea $\mathscr{U}\in o(int_X[cl_X U])\setminus X$, lo que implica que $int_X[cl_X U]\in \mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}} = \mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto en X, entonces $\emptyset \neq V\cap int_X[cl_X U]\subseteq V\cap cl_X U$ para cada $V\in\mathscr{U}$, es decir $V\cap U\neq\emptyset$ para cada $V\in\mathscr{U}$, lo que implica que $U\in\mathscr{U}$. Por lo tanto, $int_X[cl_X U]\in\mathscr{U}$ si y sólo si $U\in\mathscr{U}=\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ si y sólo si $\mathscr{U}\in oU\setminus X$. Por lo tanto, $o(int_X[cl_X U])\setminus X = oU\setminus X$.

3. Sea $A\subseteq X$ un subconjunto cerrado y denso en niguna parte de X, como $X\setminus A$ es un abierto denso en X, entonces para cada $\mathscr{U}\in Y\setminus X$ se tiene que $X\setminus A\in\mathscr{U}$, es decir $Y\setminus X\subseteq o(X\setminus A)$. Entonces $Y\setminus o(X\setminus A)\subseteq X$, es decir

$$Y\setminus o(X\setminus A) = (Y\setminus o(X\setminus A))\cap X = X\setminus o(X\setminus A).$$

Por lo tanto,

$$Y\setminus o(X\setminus A) = X\setminus o(X\setminus A) = X\setminus (X\setminus A) = A.$$

Por lo tanto A es cerrado en Y.

4. Sea $\mathscr{U}\in o(U\cup V)\setminus X$, entonces $U\cup V\in\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}=\mathscr{U}$. Supongamos que $U\notin\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ y $V\notin\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$. Entonces como $\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ es un ultrafiltro abierto, existen $W_0\in\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ y $W_1\in\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ tales que $U\cap W_0=\emptyset = V\cap W_1$. Como $W_0\cap W_1\in\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$, entonces $(W_0\cap W_1)\cap(U\cup V)\in\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$, pero

$$(W_0\cap W_1)\cap(U\cup V) = [(W_0\cap W_1)\cap U]\cup[(W_0\cap W_1)\cap V]\subseteq (U\cap W_0)\cup(W_1\cap V)=\emptyset.$$

Lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, $U\in\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ ó $V\cap\mathscr{O}_Y^{\mathscr{U}}$ si y sólo si $\mathscr{U}\in oU\cup oV$.

Por otro lado, sea $p\in(oU\cup oV)\setminus X$, supongamos sin pérdida de generalidad que $p\in oU\setminus X$, entonces $U\in\mathscr{O}_Y^{p}$, lo que implica $U\cup V\in\mathscr{O}_Y^{p}$. Por lo tanto, $p\in o(U\cup V)$.

Por lo tanto, $o(U\cup V)\setminus X = (oU\cup oV)\setminus X$.

5. Es claro que $Fr_X U$ es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte de X, y $X\setminus Fr_X U = U\cup(X\setminus cl_X U)$, entonces por (3), $Y\setminus X\subseteq o(X\setminus Fr_X U)$ y por (4) concluimos que,

$$Y\setminus X = o(X\setminus Fr_X U)\setminus X = o(U\cup(X\setminus cl_X U))\setminus X = (oU\setminus X)\cup(o(X\setminus cl_X U)\setminus X).$$

Por la Proposición 3.2.2 (4), $oU\cap o(X\setminus cl_X U)=\emptyset$. Concluimos que

$$(Y\setminus X)\setminus oU = (o(X\setminus cl_X U)\setminus X)\setminus oU = o(X\setminus cl_X U)\setminus X.$$

⊠

Proposición 3.4.5. Existe un Θ-homeomorfismo de κX en σX.

Demostración. Sea $Id:\kappa X\to\sigma X$ la función identidad. Sea $p\in\kappa X$ y $U\in\mathscr{O}^p$, entonces $Id[U\cup\{p\}]\subseteq oU$. Por lo tanto Id es una función continua y suprayetiva. Por otro lado, sea $p\in\kappa X$ y $U\in\mathscr{O}^p$, entonces $p\in oU$ y por las Proposición 3.4.4 (1) $Id^{-1}[cl_{\sigma X} oU] = cl_X U\cup oU = cl_{\kappa X} U$, es decir Id^{-1} es Θ-continua en p. Por lo tanto, Id es Θ-homeomorfismo.

⊠

Como vimos anteriormente κX y σX están muy relacionados. Sin embargo, existen diferencias entre estos dos espacios, una de ellas es que $\sigma X\setminus X$ no es necesariamente discreto y la otra, X no es necesariamente abierto en σX. Seguiremos estudiando estos dos espacios y cómo se relacionan entre ellos.

Definición 3.4.6. Sea Y una extensión de un espacio X. El espacio X se dice que está *hipercombinatorialmente encajado en* Y si para cualesquiera F y H conjuntos cerrados en X se tiene que $F\cap H$ es denso en ninguna parte en X, entonces $cl_YF\cap cl_YH=F\cap H$.

Proposición 3.4.7. Si X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\mathscr{O}^p$ es un ultrafiltro abierto para cada $p\in Y\setminus X$.

Demostración. Supongamos que X está hipercombinatorialmente encajado en Y. Sea $p\in Y\setminus X$, y sea $U\subseteq X$ abierto en X. Basta demostrar que $U\in\mathscr{O}^p$ ó $X\setminus cl_XU\in\mathscr{O}^p$.

Sea $F:=cl_XU$ y $G:=cl_X[X\setminus cl_XU]$. *Afirmación 1.* $p\notin cl_YF$ ó $p\notin cl_YG$.

Tenemos que

$$F\cap G\subseteq cl_XU\cap cl_X[X\setminus U]=Fr_XU.$$

Dado que la frontera de un conjunto abierto en un espacio, es denso en ninguna parte y como $F\cap G\subseteq Fr_XU$, entonces $F\cap G$ es denso en ninguna parte en X. Como X está hipercombinatorialmente encajado en Y, se sigue que $cl_YF\cap cl_YG=F\cap G$. Por lo tanto $p\notin cl_YF\cap cl_YG\subseteq X$, ya que $p\in Y\setminus X$.

Por lo tanto, $p\notin cl_YF$ ó $p\notin cl_YG$.

Afirmación 2. Supongamos que $p\notin cl_YF$, entonces $X\setminus cl_XU\in\mathscr{O}^p$.

Como $p\notin cl_YF$, entonces $p\in Y\setminus cl_YF$. Sea $W:=(Y\setminus cl_YF)\cap X$, entonces $W\in\mathscr{O}^p$ y

$$W=X\setminus cl_YF\subseteq X\setminus F=X\setminus cl_XU.$$

Por lo tanto, $X\setminus cl_XU\in\mathscr{O}^p$.

$\boxtimes$

Proposición 3.4.8. Sea X un espacio. Si $A\subseteq X$ es cerrado y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto de X tal que $U\cap A\neq\emptyset$ para cada $U\in\mathscr{U}$, entonces $U\cap int_XA\neq\emptyset$ para cada $U\in\mathscr{U}$.

Demostración. Es claro que si A es un conjunto denso en ninguna parte en X, entonces $X\setminus A$ es un abierto denso en X. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto, entonces $X\setminus A\in\mathscr{U}$, pero $A\cap(X\setminus A)=\emptyset$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $int_XA\neq\emptyset$. Como A es cerrado, entonces $A=Fr_XA\cup int_XA$.

Afirmamos que $int_X[Fr_XA]=\emptyset$. Supongamos que $int_X[Fr_XA]\neq\emptyset$, entonces $int_X[Fr_XA]\subseteq A$, lo que implica que $int_X[Fr_XA]\subseteq int_XA$. Como $int_X[Fr_XA]\neq\emptyset$, por lo tanto $Fr_XA\cap int_XA\neq\emptyset$ lo cuál es una contradicción, es decir Fr_XA es un conjunto denso en ninguna parte en X. Por lo tanto $X\setminus Fr_XA\in\mathscr{U}$.

Supongamos que existe $U_0\in\mathscr{U}$ tal que $U_0\cap int_XA=\emptyset$. Como $X\setminus Fr_XA=(X\setminus A)\cup(int_XA)$ es un abierto denso en X, entonces $X\setminus Fr_XA\in\mathscr{U}$. Por lo tanto $U_0\cap(X\setminus Fr_XA)=U_0\cap(X\setminus A)\in\mathscr{U}$. Pero $[U_0\cap(X\setminus A)]\cap A=\emptyset$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $U\cap int_XA\neq\emptyset$ para cada $U\in\mathscr{U}$.

$\boxtimes$

Proposición 3.4.9. Supongamos que X está hipercombinatorialmente encajado en Y. Sean $F_1,\ldots,F_n$ conjuntos cerrados de X, con $n\in\mathbb{N}$, tal que $\bigcap_{i=1}^n F_i$ es denso en niguna parte en X. Entonces $\bigcap_{i=1}^n cl_YF_i=\bigcap_{i=1}^n F_i$.

Demostración. Es claro que $\bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n cl_Y F_i$. Sea $p \in \bigcap_{i=1}^n cl_Y F_i$. Supongamos $p \notin \bigcap_{i=1}^n F_i$, entonces existe $i_0 \in \{1,...,n\}$ tal que $p \notin F_{i_0}$. Por otro lado, como F_{i_0} es cerrado en X, entonces $F_{i_0} = cl_X F_{i_0} = cl_Y F_{i_0} \cap X$ y como $p \in cl_Y F_{i_0}$, entonces $p \in Y \setminus X$. Como X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\mathscr{O}^p$ es un ultrafiltro abierto en X. Dado que $p \in cl_Y F_i$ para cada $i \in \{1,...,n\}$, para cada $W \subseteq Y$ abierto en Y, con $p \in W$, se tiene que $W \cap F_i \neq \emptyset$, es decir para cada $U \in \mathscr{O}^p$, $U \cap F_i \neq \emptyset$. Entonces por la Proposición 3.4.8 $int_X F_i \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathscr{O}^p$ e $i \in \{1,...,n\}$. Como $\mathscr{O}^p$ es un ultrafiltro abierto, entonces $int_X F_i \in \mathscr{O}^p$ para cada $i \in \{1,...,n\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n int_X F_i \in \mathscr{O}^p$, es decir $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^n int_X F_i$ lo cuál es una contradicción ya que $\bigcap_{i=1}^n int_X F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n F_i$ y $\bigcap_{i=1}^n F_i$ es denso en niguna parte en X. Por lo tanto $p \in \bigcap_{i=1}^n F_i$.

Por lo tanto $\bigcap_{i=1}^n cl_Y F_i = \bigcap_{i=1}^n F_i$.

$\boxtimes$

Proposición 3.4.10. Sea Y un espacio H-cerrado. Si X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\sigma X \preceq Y \preceq \kappa X$.

Demostración. Es claro que $Y \preceq \kappa X$. Basta demostrar que $\sigma X \preceq Y$. Sabemos que $\sigma X = (\kappa X)_\nu$ y $\kappa X = (\kappa X)_\mu$. Por el Teorema 3.2.19 basta demotrar que $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_{\kappa X}$.

Es claro que si $x \in X$, entonces $\mathscr{O}_Y^x = \mathscr{O}_{\kappa X}^x$. Sea $p \in Y \setminus X$, y sea $\mathscr{U} := \mathscr{O}_Y^p$. Como X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto libre en X, es decir $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$ y por la Proposición 3.3.10 $\mathscr{O}_{\kappa X}^{\mathscr{U}} = \mathscr{U}$. Lo que implica que $\mathscr{O}_Y^p = \mathscr{O}_{\kappa X}^{\mathscr{U}}$. Por lo tanto, $\mathrm{T}_Y \subseteq \mathrm{T}_{\kappa X}$.

Sea $\mathscr{V}$ un ultrafiltro abierto libre en X, entonces $\mathscr{V} = \mathscr{O}_{\kappa X}^{\mathscr{V}} \in \mathrm{T}_{\kappa X}$. Entonces

$$\mathscr{F}_{[\mathscr{V}]} := \{W \subseteq Y : W \text{ es abierto en } Y \text{ y } W \cap X \in \mathscr{V}\},$$

el cuál fue definido en la demostración del Teorema 3.3.3 (1), es un ultrafiltro abierto en Y. Como Y es H-cerrado, entonces $\mathscr{F}_{[\mathscr{V}]}$ converge a un punto $y_{\mathscr{V}} \in Y \setminus X$.

Afirmamos que $\mathscr{O}_Y^{y_{\mathscr{V}}} = \mathscr{O}_{\kappa X}^{\mathscr{V}} = \mathscr{V}$.

En efecto, por como se definio la función de Katětov $f : \kappa X \to Y$, ésta cumple que $f(\mathscr{V}) = y_{\mathscr{V}}$ si y sólo si $\mathscr{O}_Y^{y_{\mathscr{V}}} \subseteq \mathscr{O}_{\kappa X}^{\mathscr{V}}$, consecuencia de la Proposición 3.3.6. Por otra parte como X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\mathscr{O}_Y^{y_{\mathscr{V}}}$ es un ultrafiltro abierto en X. Entonces por la maximalidad de $\mathscr{O}_Y^{y_{\mathscr{V}}}$ se tiene que

$$\mathscr{O}_Y^{y_{\mathscr{V}}} = \mathscr{O}_{\kappa X}^{\mathscr{V}} = \mathscr{V}.$$

Por lo tanto $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_{\kappa X}$. Lo que implica que

$$\sigma X = (\kappa X)_\nu \preceq Y \preceq \kappa X = (\kappa X)_\mu.$$

$\boxtimes$

Proposición 3.4.11. Sea Y un espacio H-cerrado. Entonces $Y \equiv_X \kappa X$ si y sólo si $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto de Y y X está hipercombinatorialmente encajado en Y.

Demostración. Demostremos la suficiencia. Como $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto en Y, entonces Y es una extensión simple de X, es decir $Y = Y_\mu$. Por otro lado, como X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_{\kappa X}$. Por lo tanto, $Y_\mu \equiv_X (\kappa X)_\mu$. Es decir $Y \equiv_X \kappa X$.

Ahora demostremos la necesidad. Tenemos que Y_μ es una extensión H-cerrada de X, lo que implica $Y_\mu \preceq \kappa X \equiv_X Y$ es decir $Y_\mu \preceq Y$, pero $Y \preceq Y_\mu$. Por lo tanto, $Y = Y_\mu$, es decir Y es una extensión simple de X, lo que implica que $Y \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto de Y. Demostremos que X está hipercombinatorialmente encajado en Y.

Sean $F, G \subseteq X$ conjuntos cerrados en X, tal que $F \cap G$ es denso en ninguna parte de X.

Afirmamos que $cl_{\kappa X}F \cap cl_{\kappa X}G = F \cap G$.

Sea $v \in cl_{\kappa X}F \cap cl_{\kappa X}G$. Si $v \in X$, entonces $v \in F \cap G$. Supongamos que $v \in \kappa X \setminus X$, es decir v es un ultrafiltro abierto libre en X. Como $F \cap G$ es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte de X, entonces $X \setminus (F \cap G)$ es un abierto denso en X y como v es un ultrafiltro abierto en X, entonces $X \setminus (F \cap G) = (X \setminus F) \cup (X \setminus G) \in v$. Entonces es claro que $X \setminus F \in v$ ó $X \setminus G \in v$, ya que si este no fuera el caso, entonces $X \setminus F \notin v$ y $X \setminus G \notin v$, y esto implica $int_X F = X \setminus cl_X[X \setminus F] \in v$ y $int_X G = X \setminus cl_X[X \setminus G] \in v$, es decir $\emptyset = int_X[F \cap G] = int_X F \cap int_X G \in v$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, $X \setminus F \in v$ ó $X \setminus G \in v$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $X \setminus F \in v$, entonces $W := \{v\} \cup (X \setminus F)$ es una vecindad abierta de v en κX tal que $W \cap F = \emptyset$, es decir $v \notin cl_{\kappa X}F$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto concluimos que $cl_{\kappa X}F \cap cl_{\kappa X}G = F \cap G$.

Como $\kappa X \equiv_X Y$, existe un homeomorfismo $H : \kappa X \to Y$ tal que $H_{\restriction X} = Id_X$. Entonces por continuidad de H, se tiene $H[cl_{\kappa X}F] \subseteq cl_Y(H[F]) = cl_Y F$. Por otro lado H es una función cerrada y como $F \subseteq cl_{\kappa X}F$, esto implica $H[F] \subseteq H[cl_{\kappa X}F]$, entonces $cl_Y H[F] \subseteq H[cl_{\kappa X}F]$. Por lo tanto, $H[cl_{\kappa X}F] = cl_Y F$. Análogamente $H[cl_{\kappa X}G] = cl_Y G$. Por lo tanto,

$$F \cap G = H[F \cap G] = H[cl_{\kappa X}F \cap cl_{\kappa X}G] = H[cl_{\kappa X}F] \cap H[cl_{\kappa X}G] = cl_Y F \cap cl_Y G.$$

Es decir, $F \cap G = cl_Y F \cap cl_Y G$. Por lo tanto, X está hipercombinatorialmente encajado en Y.

$\boxtimes$

Proposición 3.4.12. Sea Y un espacio H-cerrado. Entonces $Y \equiv_X \sigma X$ si y sólo si $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base cerrada para Y y X está hipercombinatorialmente encajado en Y.

Demostración. Demostremos la suficiencia. Como $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base cerrada para Y, entonces Y es una extensión estricta de X, es decir $Y = Y_\nu$. Por otro lado, como X está hipercombinatorialmente encajado en Y, entonces $\mathrm{T}_Y = \mathrm{T}_{\kappa X}$. Por lo tanto, $Y_\nu \equiv_X (\kappa X)_\nu$. Es decir $Y \equiv_X \sigma X$.

Ahora demostremos la necesidad. Como $\sigma X \equiv_X Y$, existe un homeomorfismo $H : \sigma X \to Y$ tal que $H_{\restriction X} = Id_X$. Es claro que $H[cl_{\sigma X}A] = cl_Y A$ para todo $A \subseteq X$. Además la función H manda bases cerradas de σX, en bases cerradas de Y. Por lo tanto $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$ es una base cerrada para Y, es decir $Y = Y_\nu$. Demostremos que X está hipercombinatoriamente encajado en Y.

Sean $F, G \subseteq X$ conjuntos cerrados en X, tal que $F \cap G$ es denso en ninguna parte de X. Sea $\mathscr{U} \in (cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G) \setminus X$. Como $X \setminus (F \cap G)$ es un abierto denso en X, lo que implica que $(X \setminus F) \cup (X \setminus G) = X \setminus (F \cap G) \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $X \setminus F \in \mathscr{U}$ ó $X \setminus G \in \mathscr{U}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $X \setminus F \in \mathscr{U}$. Sea $U := X \setminus F$, dado que $\mathscr{U} = \mathscr{O}^{\mathscr{U}}_{\kappa X}$ y $U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\mathscr{U} \in o_{\kappa X}U$ y $o_{\kappa X}U$ es un abierto básico en σX tal que $o_{\kappa X}U \cap F = o_{\kappa X}U \cap X \cap F = U \cap F = (X \setminus F) \cap F = \emptyset$, es decir $\mathscr{U} \notin cl_{\sigma X}F$ lo cuál es una contradicción.

Por lo tanto $(cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G) \setminus X = \emptyset$, lo que implica que $cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G \subseteq X$ y

$$cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G = (cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G) \cap X = (cl_{\sigma X}F \cap X) \cap (cl_{\sigma X}G \cap X) = cl_X F \cap cl_X G = F \cap G.$$

Por lo tanto $cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G = F \cap G$.

Por otro lado, tenemos $H[cl_{\sigma X}F] = cl_Y F$ y $H[cl_{\sigma X}G] = cl_Y G$. Por lo tanto,

$$F \cap G = H[F \cap G] = H[cl_{\sigma X}F \cap cl_{\sigma X}G] = H[cl_{\sigma X}F] \cap H[cl_{\sigma X}G] = cl_Y F \cap cl_Y G.$$

Es decir, $F \cap G = cl_Y F \cap cl_Y G$. Por lo tanto, X está hipercombinatorialmente encajado en Y.

⊠

Definición 3.4.13. Un espacio X es *casi H-cerrado* si $\mid \kappa X \setminus X \mid \leq 1$.

Proposición 3.4.14. Un espacio X es casi H-cerrado si y sólo si para cada pareja de abiertos ajenos U y V se tiene que $cl_X U$ ó $cl_X V$ es H-cerrado.

Demostración. Demostremos la necesidad. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos ajenos en X. Si $\kappa X \setminus X = \emptyset$, es decir X no tiene ultrafiltros abiertos libres, lo que implica que todo ultrafiltro abierto en X converge. Por lo tanto X es H-cerrado, entonces $cl_X U$ y $cl_X V$ son H-cerrados.

Supongamos que $\kappa X \setminus X = \{\mathscr{F}\}$, entonces $U \in \mathscr{F}$ ó $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $U \in \mathscr{F}$, entonces $X \setminus cl_X U \notin \mathscr{F}$ y como $V \subseteq X \setminus cl_X U$, entonces $V \notin \mathscr{F}$, es decir $cl_{\kappa X} V = cl_X V$. Como $cl_{\kappa X} V$ es un subespacio H-cerrado, $cl_X V$ es un subespacio H-cerrado.

Ahora demostremos la sificiencia. Supongamos que $|\kappa X \setminus X| \geq 2$. Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \kappa X \setminus X$ con $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$. Entonces por la maximalidad de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, existen $U \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{G}$ y $V \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{F}$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por otro lado como U y V son abiertos en κX, entonces $cl_{\kappa X} U = cl_X U \cup \{\mathscr{F}\}$ y $cl_{\kappa X} V = cl_X V \cup \{\mathscr{G}\}$ son subespacios H-cerrados. Afirmamos que $cl_X U$ y $cl_X V$ no son H-cerrados.

Supongamos que $cl_X U$ es H-cerrado. Como $U \in \mathscr{F}$, entonces $W \cap cl_X U \neq \emptyset$ para cada $W \in \mathscr{F}$. Como $cl_X U$ es un H-cerrado, en particular un H-conjunto, por la Proposición 2.3.6, $a_X(\mathscr{F}) \cap cl_X U \neq \emptyset$, es decir $a_X(\mathscr{F}) \neq \emptyset$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, $cl_X U$ no es H-cerrado. De manera análoga se demuestra que $cl_X V$ no es H-cerrado. Por lo cuál es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto $|\kappa X \setminus X| \leq 1$.

⊠

Proposición 3.4.15. Sea $A \subseteq X$ y A es casi H-cerrado. Entonces $cl_X A \setminus A$ tiene a lo más un punto.

Demostración. Supongamos que $|cl_X A \setminus A| \geq 2$. Sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in cl_X A \setminus A$ con $\widehat{x} \neq \widehat{y}$ y sean $\widehat{U}, \widehat{V} \subseteq X$ abiertos en X con $\widehat{x} \in \widehat{U}$ y $\widehat{y} \in \widehat{V}$ tales que $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$. Sean $U := \widehat{U} \cap A$ y $V := \widehat{V} \cap A$. U y V son abiertos ajenos en A. Como A es casi H-cerrado, entonces $cl_A U$ ó $cl_A V$ son H-cerrados. Supongamos sin pérdida de generalidad que $cl_A U$ es un subespacio H-cerrado. Entonces $cl_A U$ es un conjunto cerrado en X que contiene a U. Como $\widehat{x}$ es un punto de acumulación de U, $\widehat{x} \in cl_A U \subseteq A$, lo cuál es una contradicción ya que $\widehat{x} \notin A$.

⊠

Proposición 3.4.16. Sea $U \subseteq X$ abierto en X. El conjunto $o_{\sigma X}U \setminus U$ contiene a lo más un punto si y sólo si $cl_X U$ es casi H-cerrado.

Demostración. Demostremos la necesidad. Sea $U \subseteq X$ un abierto en X tal que $|o_{\sigma X}U \setminus U| \leq 1$. Como $o_{\sigma X}U = o_{\kappa X}U$ a $o_{\sigma X}U$ lo denotaremos simplemente como oU. Afirmamos que

$$cl_{\kappa X}[cl_X U] \equiv_{cl_X U} \kappa(cl_X U).$$

Como $cl_{\kappa X}U = cl_X U \cup oU$. Entonces $cl_X U \subseteq cl_{\kappa X}U$, lo que implica que $cl_{\kappa X}[cl_X U] \subseteq cl_{\kappa X}U$. Por otro lado, $U \subseteq cl_X U$, entonces $cl_{\kappa X}U \subseteq cl_{\kappa X}[cl_X U]$. Por lo tanto $cl_{\kappa X}[cl_X U] = cl_{\kappa X}U$, es decir $cl_{\kappa X}[cl_X U] = cl_X U \cup oU$.

Como $U \subseteq X$ es abierto en X, entonces la función inclusión $i : U \hookrightarrow X$ es una función continua y abierta. Por lo tanto i es un p-mapeo. Por el Teorema 2.2.14 (1), la función inclusión $j : cl_X U \hookrightarrow X$ es un p-mapeo.

Por lo tanto $cl_{\kappa X}[cl_X U] \equiv_{cl_X U} \kappa(cl_X U)$. Como $cl_{\kappa X}[cl_X U] \setminus cl_X U = oU \setminus U$ y $|oU \setminus U| \leq 1$. Entonces $|\kappa(cl_X U) \setminus cl_X U| \leq 1$. Por lo tanto $cl_X U$ es un subespacio casi H-cerrado.

Ahora demostremos la suficiencia. Supongamos que $cl_X U$ es casi H-cerrado. Por la Proposición 3.4.15, $|cl_{\kappa X}[cl_X U] \setminus cl_X U| \leq 1$. Como $cl_{\kappa X}[cl_X U] \setminus cl_X U = oU \setminus U$. Por lo tanto $|o_{\sigma X}U \setminus U| \leq 1$.

⊠

Proposición 3.4.17. Sea X un espacio y sea $p \in \kappa X \setminus X$. Entonces $\kappa X \setminus \{p\}$ es casi H-cerrado.

Demostración. Sea $Y := \kappa X \setminus \{p\}$. Sean $U, V \subseteq Y$ abiertos ajenos en Y. Entonces existen abiertos $W_0, W \subseteq \kappa X$ en κX, tales que $U = W_0 \cap Y$ y $V = W \cap Y$.

Afirmamos que $p \notin cl_{\kappa X}W_0 \cap cl_{\kappa X}W$. Basta demostrar que $p \notin cl_{\kappa X}[W_0 \cap X] \cap cl_{\kappa X}[W \cap X]$.

Es claro que $W_0 \cap X \subseteq W_0 \cap Y = U$ y $W \cap X \subseteq W \cap Y = V$ y como $U \cap V = \emptyset$, entonces $(W_0 \cap X) \cap (W \cap X) = \emptyset$. Por la Proposición 3.3.9 (2),

$$(cl_{\kappa X}[W_0 \cap X] \cap cl_{\kappa X}[W \cap X]) \setminus X = \emptyset.$$

Como $p \in \kappa X \setminus X$, se cumple

$$p \notin cl_{\kappa X}[W_0 \cap X] \cap cl_{\kappa X}[W \cap X].$$

Por lo tanto

$$p \notin cl_{\kappa X}W_0 \cap cl_{\kappa X}W.$$

Supongamos que $p \notin cl_{\kappa X}W_0$. Por lo tanto $cl_{\kappa X}W_0 \subseteq Y$. Como Y es denso en κX, ya que $X \subseteq Y$, tenemos

$$cl_Y U = cl_{\kappa X}[W_0 \cap Y] \cap Y = cl_{\kappa X}[W_0 \cap cl_{\kappa X}Y] \cap Y = cl_{\kappa X}W_0 \cap Y = cl_{\kappa X}W_0.$$

Como $cl_{\kappa X}W_0$ es un subespacio H-cerrado, entonces $cl_Y U$ es un subespacio H-cerrado. Por la Proposición 3.4.14, Y es un espacio casi H-cerrado.

⊠

Teorema 3.4.18. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. $\kappa X \equiv_X \sigma X$.

2. $\kappa X \setminus X$ es finito.

3. X es la unión finita de subespacios casi H-cerrados.

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$] Supongamos que $\kappa X \equiv_X \sigma X$. Sea $\mathscr{F} \in \kappa X \setminus X$ y sea $U \in \mathscr{F}$. Como $\kappa X \equiv_X \sigma X$, entonces existe una familia de abiertos $\{V_i : i \in I\}$ en X, tal que

$$\bigcup\{oV_i : i \in I\} = U \cup \{\mathscr{F}\}.$$

Por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que $\mathscr{F} \in oV_{i_0}$ si y sólo si $V_{i_0} \in \mathscr{O}^{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$. Definimos $U_{\mathscr{F}} := V_{i_0}$. Es claro que $oU_{\mathscr{F}} \subseteq U \cup \{\mathscr{F}\}$. Por lo tanto

$$oU_{\mathscr{F}} = oU_{\mathscr{F}} \cap (U \cup \{\mathscr{F}\}) = (U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{G} \in \kappa X \setminus X : U_{\mathscr{F}} \in \mathscr{G}\}) \cap (U \cup \{\mathscr{F}\}) = U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}.$$

Por lo tanto $oU_{\mathscr{F}} = U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}$. Afirmamos que $cl_{\kappa X}[oU_{\mathscr{F}}] = cl_X U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}$. En efecto,

$$cl_{\kappa X}[oU_{\mathscr{F}}] = cl_{\kappa X}[U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}] = cl_{\kappa X} U_{\mathscr{F}} \cup cl_{\kappa X}\{\mathscr{F}\} = cl_X U_{\mathscr{F}} \cup oU_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\} = cl_X U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}.$$

Por lo tanto $cl_{\kappa X}[oU_{\mathscr{F}}] = cl_X U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}$.

Sea $x \in X$, como X es abierto en κX y $\kappa X \equiv_X \sigma X$, existe $U_x \subseteq X$ abierto en X, con $x \in U_x$ tal que $oU_x \subseteq X$. Además como $U_x \subseteq oU_x \subseteq X$, entonces $cl_{\kappa X} U_x = cl_X U_x \cup oU_x \subseteq X$.

La colección $\{U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\} : \mathscr{F} \in \kappa X \setminus X\} \cup \{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta en κX. Como κX es H-cerrado, existen $S \subseteq \kappa X \setminus X$ y $F \subseteq X$, conjuntos finitos, tales que

$$\kappa X = \bigcup_{\mathscr{F} \in S} cl_{\kappa X}[U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}] \cup \bigcup_{x \in F} cl_{\kappa X} U_x = \bigcup_{\mathscr{F} \in S} (cl_X U_{\mathscr{F}} \cup \{\mathscr{F}\}) \cup \bigcup_{x \in F} (cl_X U_x \cup oU_x).$$

Entonces $\kappa X \setminus X \subseteq \bigcup S$. Por lo tanto $\kappa X \setminus X$ es finito.

[$2 \Rightarrow 1$] Si $\kappa X \setminus X$ es finito, entonces $\sigma X \setminus X$ es finito. Por lo tanto $\sigma X \setminus X$ es un subespacio cerrado discreto en σX. Como X está hipercombinatoriamente encajado en σX, entonces $\kappa X \equiv_X \sigma X$.

[$2 \Rightarrow 3$] Supongamos que $\kappa X \setminus X$ es finito. Es decir $\kappa X \setminus X = \{\mathscr{F}_i : i \in \{1, ..., n\}\}$. Sea $i \in \{1, ..., n\}$ fijo. Como $\mathscr{F}_i \neq \mathscr{F}_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$, y por la maximalidad de $\mathscr{F}_i$, existe $V_{ij} \in \mathscr{F}_i \setminus \mathscr{F}_j$ tal que $U_i := \bigcap_{j=1}^n V_{ij} \in \mathscr{F}_i$. Por lo tanto, tenemos una familia de conjuntos abiertos $\{U_i : i \in \{1, ..., n\}\}$ tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$ con $1 \leq i < j \leq n$. Sea $U_0 := X \setminus \bigcup_{i=1}^n cl_X U_i$. Es claro que $X = \bigcup_{i=0}^n cl_X U_i$. Afirmamos que para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$ el subespacio $cl_X U_i$ es casi H-cerrado.

Para $i = 0$ tenemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $U_0 \subseteq X \setminus cl_X U_i$. Como $X \setminus cl_X U_i \notin \mathscr{F}_i$, entonces $U_0 \notin \mathscr{F}_i$. Por lo tanto $oU_0 \setminus U_0 = \emptyset$, lo que implica que $cl_X U_0$ es casi H-cerrado.

Para $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $oU_i \setminus U_i = \{\mathscr{F}_i\}$. Por lo tanto $cl_X U_i$ es casi H-cerado para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Por lo tanto X es la unión finita de subespacios casi H-cerrados.

[3 ⇒ 2] Sea $\mathscr{V} := \{V_i \subseteq X : i \in I\}$ una familia finita de subespacios casi H-cerrados tal que $X = \bigcup \mathscr{V}$. Como X es denso en κX,

$$\kappa X = cl_{\kappa X} X = cl_{\kappa X}\left[\bigcup \mathscr{V}\right] = \bigcup_{i \in I} cl_{\kappa X} V_i.$$

Lo que implica que

$$\kappa X \setminus X = \bigcup_{i \in I} (cl_{\kappa X} V_i \setminus X) \subseteq \bigcup_{i \in I} (cl_{\kappa X} V_i \setminus V_i).$$

Como V_i es casi H-cerrado, entonces $|cl_{\kappa X} V_i \setminus V_i| \leq 1$. Por lo tanto $\kappa X \setminus X$ es finito.

⊠

Proposición 3.4.19. Sea $\{Z_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia finita de espacios casi H-cerrados. Entonces

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in J} (Z_\alpha \times \{\alpha\})\right) \equiv_{\bigoplus_{\alpha \in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})} \bigoplus_{\alpha \in J} (\sigma Z_\alpha \times \{\alpha\}).$$

Demostración. Sea $\mathscr{A} := \bigoplus_{\alpha \in J} (Z_\alpha \times \{\alpha\})$. Como $\mathscr{A}$ es la unión finita de subespacios casi H-cerrados, entonces por el Teorema 3.4.18 y por la Proposición 3.3.17 tenemos

$$\sigma \mathscr{A} \equiv_{\mathscr{A}} \kappa \mathscr{A} \equiv_{\mathscr{A}} \bigoplus_{\alpha \in J} (\kappa Z_\alpha \times \{\alpha\}).$$

Por otro lado, como Z_α es un subespacio casi H-cerrado para cada $\alpha \in J$, es decir $\kappa Z_\alpha \setminus Z_\alpha$ es finito. Entonces por el Teorema 3.4.18 $\kappa Z_\alpha \equiv_{Z_\alpha} \sigma Z_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Por lo tanto

$$\sigma \mathscr{A} \equiv_{\mathscr{A}} \bigoplus_{\alpha \in J} (\kappa Z_\alpha \times \{\alpha\}) \equiv_{\mathscr{A}} \bigoplus_{\alpha \in J} (\sigma Z_\alpha \times \{\alpha\}).$$

⊠

3.5. Las Extensiones H-cerradas por un punto X^ν y X^μ

Definición 3.5.1. Un espacio X es *localmente H-cerrado* si todo punto de X tiene una vecindad H-cerrada. Una extensión Y de un espacio Z es una *extensión H-cerrada por un punto* de Z si Y es H-cerrado y $Y \setminus Z = \{p\}$.

Es claro que cualquier espacio H-cerrado es localmente H-cerrado. Sin embargo, no todo espacio localmente H-cerrado es un espacio H-cerrado. Como lo muestra los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.5.2. 1. Sea X un espacio discreto e infinito. Entonces X es un espacio localmente H-cerrado, que no es H-cerrado. En particular $\mathbb{N}$ es localmente H-cerrado.

2. Cualquier espacio localmente compacto que no sea compacto es tambien un espacio localmente H-cerrado que no es H-cerrado. Ésto ya que si X es localmente compacto, entonces X es Tychonoff. Por lo tanto si X fuera H-cerrado, entonces X sería compacto, lo cuál sería una contradicción.

Proposición 3.5.3. Sea X un espacio. Entonces X es un espacio localmente H-cerrado si y sólo si para toda $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $cl_X U$ es H-cerrado.

Demostración. La suficiencia es trivial.

Demostremos la necesidad. Sea $x \in X$ y sea $V \subseteq X$ una vecindad H-cerrada de x. Entonces $x \in int_X V \subseteq V$. Como V es H-cerrado, entonces V es cerrado en X y $cl_X[int_X V] \subseteq V$. Sea $U = int_X V$, entonces U es un abierto en el subespacio V. Por la Proposición 2.1.5, $cl_V U$ es un subespacio H-cerrado, pero $cl_V U = cl_X U$ ya que $cl_X U \subseteq V$, es decir $cl_X U$ es H-cerrado.

$\boxtimes$

Proposición 3.5.4. Sea X un espacio y sea $A \subseteq X$. Si A es localmente H-cerrado, entonces A es abierto en $cl_X A$.

Demostración. Sea $x \in A$. Entonces existe $W \subseteq A$ abierto de A tal que $x \in W$ y $cl_A W$ es H-cerrado. Entonces $W = A \cap W_0$ donde $W_0 \subseteq X$ es abierto en X. Afirmamos que $x \in cl_X A \cap W_0 \subseteq A$.

Dado que $cl_A W = cl_X W \cap A = cl_X[A \cap W_0] \cap A$, entonces $cl_X[A \cap W_0] \cap A$ es H-cerrado, en particular $cl_X[A \cap W_0] \cap A$ es cerrado en X. Por otro lado, $A \cap W_0 \subseteq cl_X[A \cap W_0] \cap A$. Por lo tanto,

$$cl_X[A \cap W_0] \subseteq cl_X[A \cap W_0] \cap A \subseteq A,$$

pero $cl_X[cl_X A \cap W_0] = cl_X[A \cap W_0]$, ya que W_0 es abierto. Lo que implica que $cl_X A \cap W_0 \subseteq A$. Por lo tanto, A es abierto en $cl_X A$.

$\boxtimes$

Proposición 3.5.5. Sea X un espacio. Las siguientes proposiciones son equivalentes

1. X es localmente H-cerrado.

2. X es abierto en σX.

3. Para cada $Y \in E[X]$, X es abierto en Y.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Es consecuencia de la Proposición 3.5.4.

$[2 \Rightarrow 1]$ Sea $x \in X$, entonces existe $V \subseteq X$ abierto en X tal que $x \in V$ y además $oV \subseteq X$. Por la Proposición 2.1.5 se sigue que $cl_{\sigma X} V$ es H-cerrado, dado que $cl_{\sigma X} V = (cl_X V) \cup oV \subseteq X$. Por lo tanto, $cl_{\sigma X} V$ es una vecindad H-cerrada de x en X. Por lo tanto, X es localmente H-cerrado.

$[1 \Rightarrow 3]$ Es consecuencia de la Proposición 3.5.4.

$[3 \Rightarrow 2]$ Es trivial.

$\boxtimes$

Proposición 3.5.6. Sea X un espacio casi H-cerrado. Entonces X es localmente H-cerrado.

Demostración. Como X es casi H-cerrado, entonces $|\kappa X \setminus X| \leq 1$. Por el Teorema 3.4.18, $\kappa X \equiv_X \sigma X$. Como X es abierto en κX, entonces X es abierto en σX. Por la Proposición 3.5.5, X es localmente H-cerrado.

⊠

Proposición 3.5.7. Sea $\{Z_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia finita de espacios casi H-cerrados. Entonces $\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})$ es localmente H-cerrado.

Demostración. Como $\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})$ es la unión finita de subespacios casi H-cerrados, $Z_\alpha \times \{\alpha\}$, por el Teorema 3.4.18,

$$\kappa\left(\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})\right) \equiv_{\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha\times\{\alpha\})} \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})\right).$$

Es decir $\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})$ es abierto en $\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})\right)$. Por la Proposición 3.5.5, $\bigoplus_{\alpha\in J}(Z_\alpha \times \{\alpha\})$ es localmente H-cerrado.

⊠

Definición 3.5.8. Sea X un espacio localmente H-cerrado y que no es H-cerrado. Definimos $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ donde $\infty \notin X$.

1. Sea $\mathscr{G}^\propto$ la intersección de todos los filtros abiertos libres de X. Sea X^ν el espacio topológico que tiene como conjunto base a X_∞ y cuya topología es $\{U : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\{\infty\} \cup V : V \in \mathscr{G}^\propto\}$.

2. Sea $\mathscr{H}^\dagger$ la intersección de todos los ultrafiltros abiertos libres en X. Sea X^μ el espacio topológico que tiene como conjunto base a X_∞ y cuya topología es $\{U : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\{\infty\} \cup V : V \in \mathscr{H}^\dagger\}$.

Proposición 3.5.9. $\mathscr{G}^\propto$ es un filtro abierto libre en X y X^ν es una extensión H-cerrada por un punto de X.

Demostración. Como X no es H-cerrado, entonces existe $\mathscr{G}^\propto$ y además es claro que $\mathscr{G}^\propto$ es un filtro abierto en X. Supongamos que $a_X(\mathscr{G}^\propto) \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap\{cl_X V : V \in \mathscr{G}^\propto\}$. Como X es localmente H-cerrado, existe $U \subseteq X$ abierto en X tal que $p \in U$ y $cl_X U$ es H-cerrado.

Supongamos que $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$ para cada filtro abierto libre $\mathscr{F}$ en X. Entonces $X \setminus cl_X U \in \mathscr{G}^\propto$. Pero $p \notin cl_X[X \setminus cl_X U]$ ya que $cl_X[X \setminus cl_X U] = X \setminus int_X[cl_X U]$ y $p \in U \subseteq int_X[cl_X U]$. Por lo tanto $a_X(\mathscr{G}^\propto) = \emptyset$ lo cuál es una contradicción. Entonces existe un filtro abierto libre $\mathscr{F}_0$ en X, tal que $X \setminus cl_X U \notin \mathscr{F}_0$. Como $\mathscr{F}_0$ es cerrado bajo supraconjuntos abiertos, entonces para cualquier $W \in \mathscr{F}_0$ se tiene $W \nsubseteq X \setminus cl_X U$. Es decir $W \cap cl_X U \neq \emptyset$ para cualquier $W \in \mathscr{F}_0$. Por otro lado, como $cl_X U$ es H-cerrado, esto implica que $cl_X U$ es un H-conjunto de X. Por la Proposición 2.3.6 $a_X(\mathscr{F}_0) \cap cl_X U \neq \emptyset$. Es decir $a_X(\mathscr{F}_0) \neq \emptyset$ lo cuál es una contradicción ya que $\mathscr{F}_0$ es un filtro libre en X.

Por lo tanto $\mathscr{G}^\propto$ es un filtro abierto libre en X.

Sean $x, y \in X^\nu$ con $x \neq y$, si $x, y \in X$, como X es Hausdorff existen U y V vecindades abiertas ajenas en X, de x y y respectivamente. Tales conjuntos U y V son abiertos en X^ν. Por otro lado, como $\mathscr{G}^\propto$ es un filtro abierto libre en X, existe $V \in \mathscr{G}^\propto$ tal que $x \notin cl_X V$. Entonces existe $U \subseteq X$ abierto en X tal que $U \cap V = \emptyset$ y $x \in U$. Por lo tanto $V \cup \{\infty\}$ y U son vecindades abiertas en X^ν, de ∞ y x respectivamente. Es decir X^ν es Hausdorff.

Es claro que X es denso en X^ν, es decir que X^ν es una extensión de X. Veamos que X^ν es H-cerrado.

Supongamos que X^{ν} no es H-cerrado, es decir existe un filtro abierto libre $\mathscr{F}$ en X^{ν}. Por lo tanto, existe $U_0 \in \mathscr{F}$ tal que $\infty \notin cl_{X^{\nu}}U_0$, es decir $U_0 \subseteq cl_{X^{\nu}}U_0 \subseteq X$, esto implica que $X \in \mathscr{F}$ ya que $\mathscr{F}$ es cerrada bajo supraconjuntos abiertos y además definimos

$$\mathscr{F}_0 := \{U \cap X : U \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathscr{F}.$$

Es claro que $\mathscr{F}_0$ es un filtro abierto en X. Más aún $\mathscr{F}_0$ es un filtro abierto *libre* en X, ya que

$$a_X(\mathscr{F}_0) = \bigcap_{U\in\mathscr{F}} cl_X[U \cap X] \subseteq \bigcap_{U\in\mathscr{F}} cl_{X^{\nu}}[U \cap X] = \bigcap_{U\in\mathscr{F}} cl_{X^{\nu}}U = a_{X^{\nu}}(\mathscr{F}) = \emptyset.$$

Entonces $\mathscr{G}^{\propto} \subseteq \mathscr{F}_0$. Sea $V \in \mathscr{F}_0$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathscr{G}^{\propto}$. Por lo tanto $\infty \in cl_{X^{\nu}}V$ para cada $V \in \mathscr{F}_0$, es decir

$$\infty \in \bigcap_{V\in\mathscr{F}_0} cl_{X^{\nu}}V = \bigcap_{U\in\mathscr{F}} cl_{X^{\nu}}[U \cap X] = \bigcap_{U\in\mathscr{F}} cl_{X^{\nu}}U = a_{X^{\nu}}(\mathscr{F}).$$

Es decir $a_{X^{\nu}}(\mathscr{F}) \neq \emptyset$, lo cuál es una contradicción ya que $\mathscr{F}$ es un filtro libre. Por lo tanto X^{ν} es H-cerrado.

$\boxtimes$

Proposición 3.5.10. $\mathscr{H}^{\dagger}$ es un filtro abierto libre en X y X^{μ} es una extensión H-cerrada por un punto de X.

Demostración. Como X no es H-cerrado, entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{F}$ en X que no converge en X y por lo tanto $\mathscr{F}$ es *libre*. Es decir $\mathscr{H}^{\dagger}$ existe y es un filtro abierto en X.

Supongamos que $a_X(\mathscr{H}^{\dagger}) \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap\{cl_X V : V \in \mathscr{H}^{\dagger}\}$. Como X es localmente H-cerrado, existe $U \subseteq X$ abierto en X tal que $p \in U$ y $cl_X U$ es H-cerrado.

Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro abierto libre en X. Entonces $U \in \mathscr{F}$ o $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$. Supongamos que $U \in \mathscr{F}$. Entonces como $cl_X U$ es un H-cerrado, en particular $cl_X U$ es un H-conjunto de X. Entonces para todo $V \in \mathscr{F}$ se tiene que $\emptyset \neq V \cap U \subseteq cl_X U \cap V$. Por lo tanto $a_X(\mathscr{F}) \cap cl_X U \neq \emptyset$, es decir $a_X(\mathscr{F}) \neq \emptyset$ lo cuál es una contradicción ya que $\mathscr{F}$ es libre. Por lo tanto $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$ y como $\mathscr{F}$ fue elegido arbitrariamente, entonces $X \setminus cl_X U \in \mathscr{H}^{\dagger}$. Por lo tanto $a_X(\mathscr{H}^{\dagger}) = \emptyset$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{H}^{\dagger}$ es un filtro abierto libre en X.

La demostración de que X^{μ} es Hausdorff es análoga a la demostración realizada a X^{ν}. Es claro que X es denso en X^{μ}.

La prueba de que X^{μ} es H-cerrado es análoga a la prueba de X^{ν} es H-cerrado.

$\boxtimes$

Por lo tanto X^{ν} y X^{μ} son extensiones H-cerradas por un punto de X.

Proposición 3.5.11. 1. $\mathscr{H}^{\dagger} = \{U \subseteq X : U$ es abierto en X y $X \setminus int_X[cl_X U]$ es H-cerrado $\}$.

2. $\mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X)$ es una base de filtro abierto de X.

3. $\mathscr{G}^{\propto}$ es un filtro abierto generado por $\mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X)$.

4. $\mathscr{G}^{\propto}$ es un filtro abierto generado por la base del filtro abierto $\{U \subseteq X : U$ es abierto y $X \setminus U$ es H-cerrado $\}$.

Demostración. 1. $\subseteq]$ Sea $U \in \mathscr{H}^{\dagger}$ y sea $F := X \setminus int_X[cl_X U]$. Afirmamos que F es un H-cerrado.

Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro abierto en F. Sea $\mathscr{V} := \{W \subseteq X : W \cap F \in \mathscr{F}$ y W es abierto en $X\}$.

Es claro que $\mathscr{V}$ es una base de filtro abierta en X. Como

$$cl_F[X \setminus cl_X U] = cl_X[X \setminus cl_X U] \cap F = (X \setminus int_X[cl_X U]) \cap F = F,$$

entonces $X \setminus cl_X U$ es un abierto denso en F. Por lo tanto $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$, es decir $X \setminus cl_X U \in \mathscr{V}$.

Afirmamos que $\mathscr{V}$ no es libre en X. Si suponemos que $\mathscr{V}$ es libre en X, entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ tal que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, es decir $a_X(\mathscr{U}) \subseteq a_X(\mathscr{V}) = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ sería un ultrafiltro abierto libre en X. Como $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, entonces $X \setminus cl_X U \in \mathscr{U}$, lo cual es imposible ya que $U \in \mathscr{H}^{\dagger} \subseteq \mathscr{U}$. Por lo tanto $\mathscr{V}$ no es libre y $\emptyset \neq a_X(\mathscr{V}) \subseteq cl_X[X \setminus cl_X U] = F$, es decir $a_X(\mathscr{V}) \subseteq F$.

Afirmamos que $a_F(\mathscr{F}) \neq \emptyset$. Tenemos que

$$a_F(\mathscr{F}) = \bigcap_{V \in \mathscr{V}} cl_F[V \cap F] = \bigcap_{V \in \mathscr{V}} [cl_X[V \cap F] \cap F] = \left[\bigcap_{V \in \mathscr{V}} cl_X[V \cap F]\right] \cap F.$$

Por otro lado, como $X \setminus cl_X U \in \mathscr{V}$, entonces $V \cap (X \setminus cl_X U) \in \mathscr{V}$ para cualquier $V \in \mathscr{V}$. Y como $a_X(\mathscr{V}) \subseteq F$, entonces

$$\begin{aligned}
\emptyset &\neq a_X(\mathscr{V}) = a_X(\mathscr{V}) \cap F = \left[\bigcap_{V \in \mathscr{V}} cl_X V\right] \cap F \\
&\subseteq \left[\bigcap_{V \in \mathscr{V}} cl_X \left[V \cap (X \setminus cl_X U)\right]\right] \cap F \\
&\subseteq \left[\bigcap_{V \in \mathscr{V}} cl_X[V \cap F]\right] \cap F = a_F(\mathscr{F}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a_F(\mathscr{F}) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathscr{F}$ converge en F, ya que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro abierto en F. Lo que implica que F es H-cerrado.

$\supseteq]$ Sea $U \subseteq X$ abierto en X y $X \setminus int_X[cl_X U]$ es H-cerrado. Como ya vimos, para cualquier ultrafiltro abierto $\mathscr{F}$ en X se tiene que $U \in \mathscr{F}$ o $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}$. Como $X \setminus cl_X U \subseteq X \setminus int_X[cl_X U]$ y $X \setminus int_X[cl_X U]$ es un H-cerrado, entonces $U \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $U \in \mathscr{H}^{\dagger}$.

2. Sea $V \in \mathscr{H}^{\dagger}$, entonces $V \subseteq int_X[cl_X V] \in \mathscr{H}^{\dagger}$ y además $int_X[cl_X V] \in \mathscr{RO}(X)$, es decir $\mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X) \neq \emptyset$ y

$$\mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X) = \{int_X[cl_X U] : U \in \mathscr{H}^{\dagger}\}.$$

Sean $V, W \in \mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X)$, entonces $\emptyset \neq V \cap W \in \mathscr{H}^{\dagger}$ ya que $V, W \in \mathscr{H}^{\dagger}$ y $\mathscr{H}^{\dagger}$ es un filtro abierto. Por otro lado $V \cap W \in \mathscr{RO}(X)$ como ya vimos en el capítulo 1. Es decir $V \cap W \in \mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X)$. Por lo tanto $\mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X)$ es una base de filtro abierto de X. Veamos ahora que $\mathscr{H}^{\dagger} \cap \mathscr{RO}(X)$ es *libre* en X.

Por la Proposición 1.2.1 (2) tenemos

$$\begin{aligned} a_X(\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X)) &= \bigcap_{V\in\mathscr{H}^\dagger} cl_X[int_X[cl_X V]] = \bigcap_{V\in\mathscr{H}^\dagger} cl_X[int_X[cl_X[int_X V]]] \\ &= \bigcap_{V\in\mathscr{H}^\dagger} cl_X[int_X V] = \bigcap_{V\in\mathscr{H}^\dagger} cl_X V = a_X(\mathscr{H}^\dagger) = \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X)$ es un filtro abierto libre de X.

3. Primero veamos que $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X) \subseteq \mathscr{G}^\propto$. Sea $U \in \mathscr{H}^\dagger$, entonces $X \setminus int_X[cl_X U]$ es H-cerrado. Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto libre *arbitrario* en X. Entonces existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $W \cap (X \setminus int_X[cl_X U]) = \emptyset$, es decir $W \subseteq int_X[cl_X U]$ lo que implica que $int_X[cl_X U] \in \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es un filtro abierto libre arbitrario, entonces $int_X[cl_X U]$ pertenece a cada filtro abierto libre en X, es decir $int_X[cl_X U] \in \mathscr{G}^\propto$. Por lo tanto $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X) \subseteq \mathscr{G}^\propto$.

Sea $\mathscr{F}_0$ el filtro generado por $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X)$. Es decir $\mathscr{F}_0$ es un filtro abierto libre en X, entonces $\mathscr{G}^\propto \subseteq \mathscr{F}_0$, ya que $\mathscr{G}^\propto$ es la intersección de todos los filtro abiertos libres en X. Por otro lado como $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X) \subseteq \mathscr{G}^\propto$ y $\mathscr{G}^\propto$ es cerrado bajo supraconjuntos abiertos, entonces $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{G}^\propto$. Por lo tanto $\mathscr{G}^\propto$ es un filtro abierto generado por $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X)$.

4. Es claro que $\mathscr{G}^\propto$ es un filtro abierto generado por la base de filtro abierto $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X)$ y por (1), $\mathscr{H}^\dagger \cap \mathscr{RO}(X) = \{U \subseteq X : U$ es abierto y $X \setminus U$ es H-cerrado$\}$.

$\boxtimes$

Proposición 3.5.12. Un espacio X es localmente H-cerrado y no es H-cerrado si y sólo si X tiene una extensión H-cerrada por un punto propia.

Demostración. Demostremos la necesidad. Es consecuencia de la Proposición 3.5.9.

Ahora demostremos la suficiencia. Sea Y una extensión H-cerrada por un punto de X. Entonces $\{p_\infty\} = Y \setminus X$ es cerrado en Y, es decir, X es abierto en Y. Sea $x \in X$, entonces existen vecindades abiertas $U, V \subseteq Y$ de x y p_∞ respectivamente tal que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $U \subseteq Y \setminus V$, entonces $cl_Y U \subseteq Y \setminus V$, es decir $cl_Y U \subseteq X$, lo que implica que $cl_X U = cl_Y U$. Como $cl_Y U$ es un H-cerrado, entonces $cl_X U$ es H-cerrado. Por lo tanto X es localmente H-cerrado.

Por otra parte, si suponemos que X es H-cerrado entonces X es cerrado en Y y dado que X es denso en Y tenemos que $X = Y$, contradiciendo el hecho de que $Y \setminus X \neq \emptyset$. Por lo tanto X es localmente H-cerrado y no H-cerrado.

$\boxtimes$

Como ya hemos mencionado, existe una cierta analogía a la hora de estudiar las extensiones H-cerradas y las compactaciones, sin embargo, también existen diferencias, y una de ellas es que en un espacio localmente compacto éste posee una única compactación por un punto, en cambio, en un espacio localmente H-cerrado podría tener muchas extensiones H-cerradas por un punto no equivalentes, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.13. Sea $X = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología heredada por $\mathbb{R}^2$. Es claro que X es localmente compacto, lo que implica que X es localmente H-cerrado.

Entonces el espacio $\mathscr{W}$ definido en el Ejemplo 2.6.4 es una extensión H-cerrada por un punto de X. Por otra parte, como X es semiregular, entonces $\mathscr{W}_s$ es la compactación por un punto de X. Por lo tanto, $\mathscr{W}$ y $\mathscr{W}_s$ son dos extensiones H-cerradas por un punto de X, no equivalentes.

Por el Teorema 3.3.3 (2) κX es un máximo proyectivo en $\mathscr{H}(X)$. La existencia de un mínimo proyectivo en $\mathscr{H}(X)$ requiere una estructura adicional de X, la siguiente proposición da prueba de ello.

Proposición 3.5.14. Sea X un espacio que no es H-cerrado. Las siguientes proposiciones son equivalentes

1. X es localmente H-cerrado.

2. $\mathscr{H}(X)$ tiene un mínimo proyectivo.

3. $E[X]$ tiene un mínimo proyectivo.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2,3]$ Supongamos que X es localmente H-cerrado. Basta demostrar que X^ν es el mínimo proyectivo de $E[X]$.

Sea $Y \in E[X]$. Definimos $f : Y \to X^\nu$ como sigue, $f_{|X} = Id_X$ y $f[Y \setminus X] = \{\infty\}$ si $Y \setminus X \neq \emptyset$. Por la Proposición 3.5.5, X es abierto en Y, es decir f restringida a X es continua. Supongamos que $Y \setminus X \neq \emptyset$. Sea $y \in Y \setminus X$, y sea $U \subseteq X^\nu$ una vecindad abierta de $f(y)$ en X^ν. Entonces, por la Proposición 3.5.11 (4), existe $V \subseteq X$ abierto en X tal que $X \setminus V$ es H-cerrado y $V \cup \{\infty\}$ es una vecindad abierta de $f(y)$, ya que $f(y) = \infty$. Por lo tanto

$$f^{-1}[V \cup \{\infty\}] = f^{-1}[V] \cup f^{-1}[\{\infty\}] = Id_X^{-1}[V] \cup (Y \setminus X) = V \cup (Y \setminus X) = Y \setminus (X \setminus V),$$

es una vencindad abierta de y en Y, la cual está contenida en $f^{-1}[U]$. Por lo tanto, f es continua. Lo que implica que Y es *proyectivamente más grade* que X^ν.

$[3 \Rightarrow 2]$ Si Y es un mínimo proyetivo en $E[X]$, entonces Y es imagen continua de κX. Por lo tanto, Y es H-cerrado.

$[2 \Rightarrow 1]$ Supongamos que Y es un mínimo proyectivo en $\mathscr{H}(X)$. Como X no es H-cerrado, entonces $Y \setminus X \neq \emptyset$. Afirmamos que $|Y \setminus X| = 1$.

Supongamos que $|Y \setminus X| \geq 2$. Sean $p, q \in Y \setminus X$ con $p \neq q$. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en Y, como sigue: $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = p$ y $y = q$. Sea $Z := Y/\sim$ el espacio cuya topología es la topología cociente. Es claro que Z es una extensión Hausdorff de X. Como Z es la imagen continua de Y, entonces Z es H-cerrado. Por lo tanto Y es proyectivamente más grande que Z, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $|Y \setminus X| = 1$; es decir, Y es una extensión H-cerrada por un punto del espacio X. Por la Proposición 3.5.12 X es localmente H-cerrado.

$\boxtimes$

Por lo tanto, si X es un espacio localmente H-cerrado que no es H-cerrado, entonces cualquier extensión H-cerrada Z de X, cumple que

$$X^\nu \preceq Z \preceq \kappa X.$$

Ahora trataremos el problema de cuándo un espacio X tiene una única extensión H-cerrada por un punto.

Proposición 3.5.15. Sea Y una extensión H-cerrada por un punto del espacio X y sea $p \in Y \setminus X$. Entonces $\mathscr{G}^{\propto} \subseteq \mathscr{O}^{p} \subseteq \mathscr{H}^{\dagger}$.

Demostración. Es claro que $\mathscr{O}^{p}$ es un filtro abierto libre en X. Por lo tanto $\mathscr{G}^{\propto} \subseteq \mathscr{O}^{p}$. Ahora veamos que $\mathscr{O}^{p} \subseteq \mathscr{H}^{\dagger}$.

Supongamos que $\mathscr{O}^{p} \nsubseteq \mathscr{H}^{\dagger}$, es decir existe $U \in \mathscr{O}^{p}$ tal que $U \notin \mathscr{H}^{\dagger}$. Entonces existe un ultrafiltro abierto libre $\mathscr{U}$ en X tal que $U \notin \mathscr{U}$, es decir $X \setminus cl_X U \in \mathscr{U}$.

Sea $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]} := \{W \subseteq Y : W \text{ es abierto en } Y \text{ y } W \cap X \in \mathscr{U}\}$. Como ya se vio en el Teorema 3.3.3 (1), $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ es un ultrafiltro abierto en Y. Como X es localmente H-cerrado, entonces X es un abierto denso en Y. Por lo tanto $X \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, lo que implica $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, en particular $X \setminus cl_X U \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$. Por otro lado, como Y es H-cerrado y $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, entonces $\mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$ converge a p. En particular $\{p\} \cup U \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, ya que $\{p\} \cup U$ es una vecindad abierta de p. Por lo tanto $U = (\{p\} \cup U) \cap X \in \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, es decir $\{U, X \setminus cl_X U\} \subseteq \mathscr{F}_{[\mathscr{U}]}$, lo cuál es una contradicción.

$\boxtimes$

En particular, X^{μ} (respectivamente, X^{ν}) es el máximo proyectivo (respectivamente, es el mínimo proyectivo) del conjunto de las extensiones H-cerradas por un punto del espacio X. Es decir, si Y es una extensión H-cerrada por un punto del espacio X, entonces $X^{\nu} \preceq Y \preceq X^{\mu}$.

Proposición 3.5.16. El espacio X tiene una única extensión H-cerrada por un punto si y sólo si cualquier conjunto cerrado y denso en ninguna parte está contenido en un subespacio H-cerrado de X.

Demostración. Basta demostrar que $\mathscr{G}^{\propto} = \mathscr{H}^{\dagger}$ si y sólo si cualquier conjunto cerrado y denso en ninguna parte está contenido en un subespacio H-cerrado de X.

Demostremos la necesidad. Supongamos que $\mathscr{G}^{\propto} = \mathscr{H}^{\dagger}$. Sea F un conjunto cerrado denso en ninguna parte en X. Entonces $X \setminus F$ es un abierto denso en X, lo que implica que $X \setminus F \in \mathscr{H}^{\dagger}$, entonces $X \setminus F \in \mathscr{G}^{\propto}$. Entonces por la Proposición 3.5.11 (4) existe $U \subseteq X$ abierto en X tal que $U \subseteq X \setminus F$. Por lo tanto $F \subseteq X \setminus U$ y $X \setminus U$ es un subespacio H-cerrado de X.

Ahora demostremos la suficiencia. Es claro que $\mathscr{G}^{\propto} \subseteq \mathscr{H}^{\dagger}$. Veamos que $\mathscr{H}^{\dagger} \subseteq \mathscr{G}^{\propto}$. Sea $U \in \mathscr{H}^{\dagger}$, entonces $X \setminus int_X[cl_X U] = cl_X[X \setminus cl_X U]$ es un subespacio H-cerrado en X. Como U es abierto en X, entonces $Fr_X U$ es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte. Por lo tanto existe $F \subseteq X$ subespacio H-cerrado en X tal que $Fr_X U \subseteq F$. Es decir $X \setminus F \subseteq X \setminus Fr_X U = U \cup (X \setminus cl_X U)$.

Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto libre *arbitrario* en X. Entonces existen $V_1, V_2 \in \mathscr{F}$ tales que $V_1 \cap (X \setminus int_X[cl_X U]) = \emptyset$ y $V_2 \cap F = \emptyset$. Es decir $V_1 \subseteq int_X[cl_X U]$ y $V_2 \subseteq X \setminus F$. Entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{F}$ y

$$V_1 \cap V_2 \subseteq (int_X[cl_X U]) \cap [U \cup (X \setminus cl_X U)] = [int_X[cl_X U] \cap U] \cup [int_X[cl_X U] \cap (X \setminus cl_X U)] = U.$$

Como $\mathscr{F}$ es cerrado bajo supraconjuntos abiertos, entonces $U \in \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ se eligió arbitrariamente, entonces $U \in \mathscr{G}^{\propto}$. Es decir $\mathscr{H}^{\dagger} \subseteq \mathscr{G}^{\propto}$. Por lo tanto $\mathscr{G}^{\propto} = \mathscr{H}^{\dagger}$.

$\boxtimes$

Ejemplo 3.5.17. Sea $X = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ cuya topología es la heredada por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Es claro que X no es H-cerrado, ya que $(0,0) \notin X$. Pero X si es localmente H-cerrado. También es claro que $\mathscr{T} := \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto cerrado y denso en niguna parte. Más aún no existe un subconjunto H-cerrado, F, tal que $\mathscr{T} \subseteq F$. Por lo tanto X no tiene una única extensión H-cerrada por un punto. Como $\mathscr{W}$ es una extensión H-cerrada por un punto de X, entonces $X^\nu \preceq \mathscr{W} \preceq X^\mu$.

Ahora veamos un ejemplo de un espacio que no es H-cerrado, y tal que cualquier subconjunto cerrado y denso en niguna parte es H-cerrado. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $X_{n_0} := \{(\frac{1}{n}, 0) : n_0 \geq n \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Es claro que X_{n_0} no es H-cerrado, pero X si es localmente H-cerrado y también $\mathscr{T}_{n_0} := \{(\frac{1}{n}, 0) : n_0 \geq n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto cerrado, denso en niguna parte y compacto. En particular $\mathscr{T}_{n_0}$ es un subespacio H-cerrado. Y cualquier subconjunto cerrado y denso en niguna parte está contenido en (el compacto) $\mathscr{T}_{n_0}$. Es decir, cualquier subconjunto cerrado y denso en niguna parte, es un subespacio H-cerrado. Por lo tanto X_{n_0} tiene una única extensión H-cerrada por un punto.

Proposición 3.5.18. Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva, abierta y continua. Si X es localmente H-cerrado, entonces Y es localmente H-cerrado.

Demostración. Sea $y \in Y$, como f es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y como X es localmente H-cerrado, existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $cl_X U$ es H-cerrada. Como f es continua y por las Proposiciones 2.4.2.(2) y (6) se tiene que $f[cl_X U]$ es un H-cerrado. Además f es abierta, entonces $f[U]$ es una vecindad abierta de y en Y. Es decir, $f[cl_X U]$ es una vecindad H-cerrada de y. Por lo tanto Y es localmente H-cerrado.

⊠

Proposición 3.5.19. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familias de espacios no vacíos. Entonces, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente H-cerrado si y sólo si cada X_α es localmente H-cerrado y existe $J \subseteq I$ finito tal que $\forall \alpha \in I \setminus J$, X_α es H-cerrado.

Demostración. Demostremos la necesidad. Como las proyecciones π_α son funciones suprayectivas, continuas y abiertas, por la proposición anterior X_α es localmente H-cerrado $\forall \alpha \in I$. Sea $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y sea $V \subseteq \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ una vecindad H-cerrada de x en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $\forall \alpha \in J$ existen abiertos $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ en X_α tales que

$$x \in \bigcap_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] \subseteq V.$$

Por lo tanto $\pi_\alpha[\bigcap_{\beta \in J} \pi_\beta^{-1}[U_\beta]] = X_\alpha \ \forall \alpha \in I \setminus J$. Es decir $\pi_\alpha[V] = X_\alpha \ \forall \alpha \in I \setminus J$ y como V es H-cerrado y por las Proposiciones 2.4.2 (2) y (6), entonces X_α es H-cerrado $\forall \alpha \in I \setminus J$.

Ahora demostremos la suficiencia. Sea $J \subseteq I$ finito tal que para toda $\alpha \in I \setminus J$, X_α es H-cerrado. Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Para cada $\alpha \in J$, sea $V_\alpha \subseteq X_\alpha$ una vecindad H-cerrada de x_α en X_α. Sea

$$V := \prod_{\alpha \in J} V_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus J} X_\alpha.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.1.6, V es una vecindad H-cerrada de x en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

⊠

3.6. La Extensión de Banaschewski μX

Definición 3.6.1. Sea X un espacio. Decimos que X es *minimal Hausdorff* si no existe en X una topología estrictamente menos fina con la que X sea un espacio Hausdorff.

Proposición 3.6.2. Sea X un espacio. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. X es minimal Hausdorff.

2. X es semiregular y H-cerrado.

3. Cualquier filtro abierto con un único punto de acumulación, converge.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Supongamos que X es minimal Hausdorff. Por la Proposición 1.2.7, X_s es Hausdorff y $\tau_s \subseteq \tau$ donde τ es la topología de X. Por lo tanto, $X = X_s$ y X es semiregular. Ahora veamos que X es H-cerrado.

Supongamos que X no es H-cerrado. Entonces existe un filtro abierto libre, $\mathscr{F}$, de X. Sea $x_0 \in X$. Definimos $\mathscr{B} := \{U \subseteq X : U \text{ es abierto en } X \text{ y } x_0 \notin U\} \cup \mathscr{F}$. Afirmamos que $\mathscr{B}$ es una base de una topología Hausdorff, que es menos fina que la topología de X.

Es claro que $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathscr{B}$, ya que $x_0 \notin \emptyset$ y $X \in \mathscr{F}$. Sean $V_1, V_2 \in \mathscr{B}$, si $x_0 \notin V_1$ ó $x_0 \notin V_2$, entonces $x_0 \notin V_1 \cap V_2$, es decir $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{B}$. Por otro lado, si $x_0 \in V_1 \cap V_2$, entonces $V_1, V_2 \in \mathscr{F}$ lo que implica $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$. Por lo tanto $\mathscr{B}$ es cerrado bajo intersecciones. Por lo tanto $\mathscr{B}$ es una base para una topología en X.

Veamos ahora que la topología generada por $\mathscr{B}$ es Hausdorff. Sean $x, y \in X \setminus \{x_0\}$ con $x \neq y$. Como X es Hausdorff, existen vecidades abiertas ajenas U_1 y V_1 de x y y respectivamente en X. Sean $U := U_1 \cap (X \setminus \{x_0\})$ y $V := V_1 \cap (X \setminus \{x_0\})$, entonces U y V son vecidades abiertas ajenas de x y y respectivamente tales que $x_0 \notin U \cup V$. Por lo tanto $U, V \in \mathscr{B}$.

Por otro lado, existen vecindades abiertas ajenas U_0 y V_0 de x_0 y y respectivamente en X. Como $\mathscr{F}$ es un filtro abierto que no converge, entonces existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $y \notin cl_X W$, lo que implica que existe una vecidad abierta V_1 de y tal que $V_1 \cap cl_X W = \emptyset$. Sea $V = V_0 \cap V_1$, entonces es claro que $cl_X V \cap U_0 = \emptyset$. Por lo tanto $x_0 \in U_0 \subseteq X \setminus cl_X V$ y además $cl_X V \cap W = \emptyset$ es decir $W \subseteq X \setminus cl_X V \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $\mathscr{B}$ genera una topología que es Hausdorff.

La topología generada por $\mathscr{B}$ debe excluir algún elemento abierto que contiene a x_0. De lo contrario $\mathscr{F}$ convergería a x_0. Entonces la topología generada por $\mathscr{B}$ se queda contenida estrictamente en τ, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es H-cerrado.

$[2 \Rightarrow 1]$ Supongamos que existe un espacio X' tal que su conjunto base coincide con X y su topología es menos fina que el espacio X. Por lo tanto, $Id : X \to X'$ es continua. Sea U un subconjunto abierto en X, entonces por la Proposición 2.1.5 $cl_X U$ es H-cerrado y además $Id[cl_X U] = cl_X U$ es un subespacio H-cerrado en X'. Como X es semiregular, entonces $\{cl_X U : U \text{ es abierto en } X\}$ es una base cerrada para X. Por lo tanto la función Id es una función cerrada, es decir Id^{-1} es continua. Por lo tanto la función $Id : X \to X'$ es un homeomorfismo, es decir X es minimal Hausdorff.

[$1 \Rightarrow 3$] Sea (X, τ_X) un espacio minimal Hausdorff. Sea $\mathscr{F}$ un filtro abierto tal que $a(\mathscr{F}) = \{p\}$. Sea $\tau' = \{U \subseteq X : U$ es abierto en X y $p \notin U\} \cup \mathscr{F}$. Entonces τ' es una topología Hausdorff en X tal que $\tau' \subseteq \tau_X$. Como τ_X es minimal, $\tau' = \tau_X$. La definición de τ' nos dice que $\mathscr{F}$ contiene al conjunto de vecindades abiertas de p en τ_X. Por lo tanto $\mathscr{F}$ converge a p.

[$3 \Rightarrow 1$] Supongamos que existe un espacio X' tal que su conjunto base coincide con X y su topología es menos fina que el espacio X. Sea $x \in X'$. Sea $\mathscr{F}_x$ el filtro de vecindades abiertas de x en X'. Sea $\mathscr{G}_x$ el filtro abierto generado por $\mathscr{F}_x$ en X. Entonces $a_X(\mathscr{G}_x) = \{x\}$. Por lo tanto, $\mathscr{G}_x$ converge a x en X. Esto se cumple para cada $x \in X$. Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío en X, y sea $z \in U$. Entonces $U \in \mathscr{G}_z$ y como $\mathscr{G}_z$ está generado por $\mathscr{F}_z$, existe $V \in \mathscr{F}_z$ tal que $z \in V \subseteq U$. Por lo tanto U es abierto en X', ya que V es abierto en X'. Por lo tanto X y X' tienen la misma topología. Por lo tanto X es un minimal Hausdorff.

$\boxtimes$

Corolario 3.6.3. 1. Un espacio es compacto si y sólo si es minimal Hausdorff y Urysohn.

2. El producto topológico de espacios no vacíos es minimal Hausdorff si y sólo si cada espacio coordenada es minimal Hausdorff.

3. Un espacio X es H-cerrado si y sólo si X_s es un minimal Hausdorff.

4. Sea $Y \in \mathscr{H}(X)$. Entonces Y_s es una extensión minimal Hausdorff de X_s.

Demostración. 1. Por el Corolario 2.5.2 y por la Proposición 3.6.2, X es compacto si y sólo si X es H-cerrado, semiregular y Urysohn si y sólo si X es minimal Hausdorff y Urysohn.

2. Es consecuencia de las Proposiciones 1.2.14 y 2.1.6.

3. Por la Proposición 2.4.2 (8), y por la Proposición 1.2.9 (4) el espacio X es H-cerrado, si y sólo si X_s es H-cerrado y semiregular si y sólo si X_s es minimal Hausdorff.

4. Es consecuencia de (3) y de la Proposición 1.2.13 (2).

$\boxtimes$

Proposición 3.6.4. 1. Un espacio puede ser encajado densamente en un espacio minimal Hausdorff si y sólo si éste es semiregular.

2. Cualquier espacio puede ser encajado en un subespacio cerrado y denso en niguna parte de un espacio minimal Hausdorff.

Demostración. 1. Demostremos la necesidad. Es consecuencia de que la semiregularidad se hereda a subespacios densos, véase la Proposición 1.2.13.

Ahora demostremos la suficiencia. Si X es semiregular, entonces X_s está encajado densamente en $(\kappa X)_s$ y dado que $X = X_s$ y $(\kappa X)_s$ es un espacio minimal Hausdorff, entonces X está encajado en un espacio minimal Hausdorff.

2. Por las Proposiciones 1.2.16 y 1.2.17, cualquier espacio X puede ser encajado en un subespacio cerrado y denso en ninguna parte de un espacio semiregular Y, y κY puede ser encajado en un subespacio denso en ninguna parte de un espacio semiregular Z. Por (1), Z está encajado densamente en un

espacio minimal Hasudorff W. Es claro que $int_W X = \emptyset$. Como X es cerrado y denso en ninguna parte en Y, entonces por la Proposición 3.3.9 (5) X es cerrado en κY. Por otro lado, κY es un H-cerrado en W, lo que implica que κY sea un cerrado en W. Por lo tanto X es cerrado en W. Por lo tanto X es un subespacio cerrado y denso en niguna parte del espacio W.

$\boxtimes$

Definición 3.6.5. Sea X un espacio semiregular. Entonces su extensión minimal Hausdorff $(\kappa X)_s$ es denotada por μX y es llamada la extensión *Banaschewski-Fomin-Šanin* de X. El conjunto de las extensiones minimal Hausdorff del espacio X es denotado por $\mathfrak{M}(X)$.

Por el Corolario 3.6.3 (4) y la Proposición 3.6.2, $\mu X \in \mathscr{H}(X)$, con X semiregular. Ahora veamos como se relacionan μX, σX y κX.

Proposición 3.6.6. Sea X un espacio semiregular. Entonces $\mu X \preceq \sigma X \preceq \kappa X$.

Demostración. Por la Proposición 3.2.4, $\mathscr{RO}(\kappa X) \subseteq \{oU : U \text{ es abierto en } \kappa X\}$. Es decir $\mu X \preceq \sigma X$. Evidentemente $\sigma X \preceq \kappa X$.

$\boxtimes$

Dado un espacio semiregular X, las extensiones μX, σX y κX son extensiones no necesariamente equivalentes por pares, como veremos más adelante. Ahora veamos algunas propiedades de μX.

Proposición 3.6.7. Sea X un espacio semiregular. Entonces

1. $\{oU : U \in \mathscr{RO}(X)\}$ es una base para μX.
2. $cl_{\mu X}[oU] = oU \cup cl_X U$ para $U \in \mathscr{RO}(X)$.
3. $cl_{\mu X}[Fr_X U] = Fr_X U$ si $U \in \mathscr{RO}(X)$.
4. $\mu X \setminus X = \sigma X \setminus X$.
5. $(\mu X \setminus X) \setminus oU = o(X \setminus cl_X U) \setminus X$ si $U \in \mathscr{RO}(X)$.

Demostración. 1. Sabemos que $\mathscr{RO}(\kappa X)$ es una base de $(\kappa X)_s = \mu X$ y como ya vimos en la Proposición 3.2.4 $\mathscr{RO}(\kappa X) = \{oU : U \in \mathscr{RO}(X)\}$.

2. Por las Proposiciones 1.2.9 (1), 3.4.4 (1) y 3.2.4 y dado que U es abierto en κX. Tenemos

$$cl_{\mu X}[oU] = cl_{(\kappa X)_s}[oU] = cl_{\kappa X}[oU] = cl_{\kappa X}[o(int_X cl_X U)] = cl_{\kappa X}[int_{\kappa X} cl_{\kappa X} U] = cl_{\kappa X} U = cl_X U \cup oU.$$

3. Afirmamos que $cl_{\mu X}[oU] \cap cl_{\mu X}[o(X \setminus cl_X U)] = Fr_X U$. Es claro que $oU \cap o(X \setminus cl_X U) = o(U \cap (X \setminus cl_X U)) = o\emptyset = \emptyset$, lo que implica

$$cl_X U \cap o(X \setminus cl_X U) = (cl_X U \cap X) \cap o(X \setminus cl_X U) = cl_X U \cap (X \cap o(X \setminus cl_X U)) = cl_X U \cap (X \setminus cl_X U) = \emptyset,$$

y de igual manera tenemos $oU \cap cl_X(X \setminus cl_X U) = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} cl_{\mu X}[oU] \cap cl_{\mu X}[o(X \setminus cl_X U)] &= (oU \cup cl_X U) \cap (o(X \setminus cl_X U) \cup cl_X(X \setminus cl_X U)) \\ &= [(oU \cup cl_X U) \cap o(X \setminus cl_X U)] \cup [(oU \cup cl_X U) \cap cl_X(X \setminus cl_X U)] \\ &= [cl_X U \cap o(X \setminus cl_X U)] \cup [cl_X U \cap cl_X(X \setminus cl_X U)] \\ &= Fr_X U. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Fr_X U$ es cerrado en μX, por ser la intersección de cerrados de μX. Es decir $cl_{\mu X}[Fr_X U] = Fr_X U$.

4. Como $\mu X = (\kappa X)_s$, entonces μX y σX tienen el mismo conjunto base. Por otro lado, $\{oU \setminus X : U \text{ es abierto en } X\}$ es una base para $\sigma X \setminus X$. De igual manera, el conjunto $\{oU \setminus X : U \in \mathscr{RO}(X)\}$ es una base para $\mu X \setminus X$. Por la Proposición 3.4.4 (2) se tiene que $\{oU \setminus X : U \text{ es abierto en } X\} = \{oU \setminus X : U \in \mathscr{RO}(X)\}$. Por lo tanto $\mu X \setminus X = \sigma X \setminus X$.

5. Es consecuencia de la Proposición 3.4.4 (5) y de (4).

⊠

Proposición 3.6.8. Sea X un espacio. Entonces existe una función biyectiva $F : \kappa X \to \mu(X_s)$ tal que $F_{|X}$ es la función identidad $Id_X : X \to X_s$.

Demostración. Sea $j := Id_X : X \to X_s$, entonces j es continua. Afirmamos que j es un p-mapeo. Sea $\mathscr{Q}$ una p-cubierta de X_s, entonces existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Q}$ tal que $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en X_s. Es claro que $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en X, ya que si $\bigcup \mathscr{S}$ no fuera denso en X, entonces $int_X[X \setminus \bigcup \mathscr{S}] \neq \emptyset$ y como $int_X[X \setminus \bigcup \mathscr{S}] \in \mathscr{RO}(X)$ implica que $\bigcup \mathscr{S}$ no es denso en X_s, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $\bigcup \mathscr{S}$ es denso en X. Entonces $j^{-1}[\mathscr{Q}]$ es una p-cubierta en X. Por lo tanto j es un p-mapeo.

Por el Teorema 3.3.13 existe $\kappa j : \kappa X \to \kappa(X_s)$ la extensión continua de j. Como $j[X] = X_s$ y $\kappa j[\kappa X]$ es un H-cerrado de $\kappa(X_s)$ que contiene a X_s. Entonces $\kappa j[\kappa X] = \kappa(X_s)$, es decir, κj es una función suprayectiva. Veamos ahora que κj es una función inyectiva.

Sea $\mathscr{U} \in \kappa X \setminus X$ y sea

$$\mathscr{G}[\mathscr{U}] := \{V \subseteq X_s : V \text{ es abierto en } X_s \text{ y } U \subseteq V \text{ para algún } U \in \mathscr{U}\}.$$

Como consecuencia del Teorema 3.3.13, $\mathscr{G}[\mathscr{U}]$ es un ultrafiltro abierto en X_s. Por otro lado, como $\mathscr{U}$ es libre y $\mathscr{R}(X) = \mathscr{R}(X_s)$, entonces $\mathscr{G}[\mathscr{U}]$ es libre en X_s. Por lo tanto $\kappa j(\mathscr{U}) = \mathscr{G}[\mathscr{U}]$. Basta demostrar que κj es inyectiva en $\kappa X \setminus X$.

Sean $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \kappa X \setminus X$ con $\mathscr{U} \neq \mathscr{V}$. Entonces existen $U \in \mathscr{U}$ y $V \in \mathscr{V}$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Entonces $int_X cl_X U \in \mathscr{G}[\mathscr{U}]$ y $int_X cl_X V \in \mathscr{G}[\mathscr{V}]$ y además $int_X cl_X U \cap int_X cl_X V = \emptyset$. Por lo tanto $\kappa j(\mathscr{U}) = \mathscr{G}[\mathscr{U}] \neq \mathscr{G}[\mathscr{V}] = \kappa j(\mathscr{V})$. Por lo tanto κj es inyectiva.

Por lo tanto κj es una función continua y biyectiva. Como la función identidad $Id : \kappa(X_s) \to \mu(X_s)$ es continua, $F := Id \circ \kappa j : \kappa X \to \mu(X_s)$ es una función continua y biyectiva tal que $F_{|X}$ es la función identidad que va de X en X_s.

⊠

Proposición 3.6.9. Sea X un espacio, y sean $Y_1, Y_2 \in \mathscr{H}(X)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. Existe un Θ-homeomorfismo $F : Y_1 \to Y_2$ tal que $F_{|X} = Id_X$.

2. $(Y_1)_s \equiv_{X_s} (Y_2)_s$.

Demostración. Demostremos la necesidad. Sea $F : Y_1 \to Y_2$ un Θ-homeomorfismo tal que $F_{|X} = Id_X$. Sean $Id_{Y_1} : Y_1 \to (Y_1)_s$ y $Id_{Y_2} : Y_2 \to (Y_2)_s$ las funciones identidades, las cuales son Θ-homeomorfismo por la Proposición 2.4.2 (7). Entonces $F = Id_{Y_2} \circ F \circ Id_{Y_1}^{-1} : (Y_1)_s \to (Y_2)_s$ es un Θ-homeomorfismo, como consecuencia de las Proposición 2.4.2 (1). Basta demostrar que $F : (Y_1)_s \to (Y_2)_s$ es una función cerrada.

Sea $Z := (Y_1)_s$ y sea $Y := (Y_2)_s$, con el fin de simplificar la notación. Afirmamos que $F[cl_Z U]$ es un cerrado en Y para cualquier abierto U en Z.

Sea U abierto en Z. Entonces $cl_Z U$ es un H-cerrado porque Y es H-cerrado, en particular $cl_Z U$ es un H-conjunto en Z. Como F es Θ-continua, entonces por la Proposición 2.4.3 $F[cl_Z U]$ es un H-conjunto en Y. Por la Proposición 2.3.2, $F[cl_Z U]$ es cerrado en Y.

Como $\{cl_Z U : U \text{ es abierto en } Z\}$ es una base cerrada en Z, ya que Z es semiregular, $F : Z \to Y$ es una función cerrada. De manera análoga se demuestra que $F^{-1} : Y \to Z$ es una función cerrada. Por lo tanto $F : Z \to Y$ es un homeomorfismo tal que $F_{|X_s} = Id_{X_s}$. Por lo tanto $(Y_1)_s \equiv_{X_s} (Y_2)_s$.

Ahora demostremos la suficiencia. Sea $F : (Y_1)_s \to (Y_2)_s$ un Θ-homeomorfismo tal que $F_{|X_s} = Id_{X_s}$. Las funciones identidades $Id_{Y_1} : Y_1 \to (Y_1)_s$ y $Id_{Y_2} : Y_2 \to (Y_2)_s$ son Θ-homeomorfismos. Por lo tanto $F = Id_{Y_2}^{-1} \circ F \circ Id_{Y_1} : Y_1 \to Y_2$ es un Θ-homeomorfismo tal que $F_{|X} = Id_X$.

$\boxtimes$

Por las Proposiciones 3.6.9 y 3.4.5, si X es un espacio semiregular, entonces $\mu X \equiv_X (\sigma X)_s$.

Corolario 3.6.10. Sea X un espacio semiregular. Entonces $\mu X \equiv_X \sigma X$ si y sólo si σX es semiregular.

Demostración. Como $\mu X \equiv_X (\sigma X)_s$. Entonces $\mu X \equiv_X \sigma X$ si y sólo si $\sigma X \equiv_X (\sigma X)_s$ si y sólo si σX es semiregular.

$\boxtimes$

Definición 3.6.11. Sea A un conjunto cerrado de un espacio X. Decimos que A es regularmente denso en ninguna parte en X si existen abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq cl_X U \cap cl_X V$.

Proposición 3.6.12. Sea X un espacio semiregular. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. μX es compacto.

2. κX es Urysohn.

3. X es Tychonoff y cualquier conjunto regularmente denso en ninguna parte en X es compacto.

Demostración. $[1 \Leftrightarrow 2]$ Es consecuencia de la Proposición 2.5.11.

$[1 \Rightarrow 3]$ Como μX es una extensión H-cerrada y Urysohn, entonces, por el Corolario 3.1.4, X_s es Tychonoff, y como X es semiregular, $X = X_s$. Por lo tanto X es Tychonoff. Por otro lado, sea $A \subseteq X$ un conjunto regularmente denso en ninguna parte en X, entonces existen abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq cl_X U \cap cl_X V$. Por la Proposición 3.3.9 (2) $(cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \setminus X = \emptyset$. Es decir $cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V \subseteq X$. Por lo tanto,

$$A \subseteq cl_X U \cap cl_X V = (cl_{\kappa X} U \cap X) \cap (cl_{\kappa X} V \cap X) = (cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V) \cap X = cl_{\kappa X} U \cap cl_{\kappa X} V.$$

Por la Proposición 1.2.9 (1), $cl_{\kappa X}U \cap cl_{\kappa X}V = cl_{\mu X}U \cap cl_{\mu X}V$. Entonces $cl_{\mu X}U \cap cl_{\mu X}V = cl_X U \cap cl_X V$ es compacto ya que μX es compacto. Como $A \subseteq cl_X U \cap cl_X V \subseteq X$ y A es cerrado en X, entonces A es cerrado en el compacto $cl_X U \cap cl_X V$. Por lo tanto A es compacto.

$[3 \Rightarrow 2]$ Sean $p,q \in \kappa X$ con $p \neq q$.

Caso 1. Supongamos que $p,q \in X$. Entonces existen vecindades abiertas ajenas U y V de p y q respectivamente en X. Supongamos que $cl_X U \cap cl_X V \neq \emptyset$. Sea $A := cl_X U \cap cl_X V$. Entonces A es regularmente denso en ninguna parte en X. Por lo tanto A es compacto. Además, $\{p,q\} \cap A = \emptyset$. Entonces existen abiertos ajenos W_0 y W_1 en X tales que $A \subseteq W_0$ y $\{p,q\} \subseteq W_1$.

Sean $U_0 := U \cap W_1$ y $V_0 := V \cap W_1$ los cuales son abiertos ajenos tales que $p \in U_0$ y $q \in V_0$. Afirmamos que $cl_X U_0 \cap cl_X V_0 = \emptyset$.

Tenemos que $cl_X U_0 \cap cl_X V_0 \subseteq A$ y $cl_X W_1 \cap W_0 = \emptyset$. Como $A \subseteq W_0$. Entonces

$$cl_X U_0 \cap cl_X V_0 = (cl_X U_0 \cap cl_X V_0) \cap A \subseteq cl_X W_1 \cap W_0 = \emptyset.$$

Por lo tanto $cl_X U_0 \cap cl_X V_0 = \emptyset$. Por la Proposición 3.3.9 (3), $cl_{\kappa X} U_0 \cap cl_{\kappa X} V_0 = \emptyset$.

Caso 2. Supongamos que $p \in X$ y $q \in \kappa X \setminus X$. Entonces existen $U \subseteq X$ abierto en X tal que $p \in U$ y $V \in q$ tal que $V \cap U = \emptyset$. Supongamos que $cl_X U \cap cl_X V \neq \emptyset$. Sea $A := cl_X U \cap cl_X V$, entonces A es regularmente denso en ninguna parte en X. Por lo tanto A es compacto. Por otro lado, como X es regular y A es compacto, existe $W \subseteq X$ abierto en X tal que $p \in W$ y $cl_X W \cap A = \emptyset$.

Sea $U_0 := U \cap W$. Afirmamos que $cl_X U_0 \cap cl_X V = \emptyset$.

Como $cl_X U_0 \cap cl_X V \subseteq A$, entonces

$$cl_X U_0 \cap cl_X V = (cl_X U_0 \cap cl_X V) \cap A \subseteq cl_X U_0 \cap A \subseteq cl_X W \cap A = \emptyset.$$

Por lo tanto $cl_X U_0 \cap cl_X V = \emptyset$. Por la Proposición 3.3.9 (3), $cl_{\kappa X} U_0 \cap cl_{\kappa X} V = \emptyset$. Como $cl_{\kappa X}[V \cup \{q\}] = cl_{\kappa X} V \cup \{q\}$, $cl_{\kappa X} U_0 \cap cl_{\kappa X}[V \cup \{q\}] = \emptyset$.

Caso 3. Supongamos que $p,q \in \kappa X \setminus X$. Entonces existen $U \in p \setminus q$ y $V \in q \setminus p$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que $cl_X U \cap cl_X V \neq \emptyset$. Sea $A := cl_X U \cap cl_X V$, entonces A es regularmente denso en ninguna parte en X. Por lo tanto A es compacto. Como p es un ultrafiltro abierto libre, es decir, $a_X(p) = \bigcap_{W \in p} cl_X W = \emptyset$. Entonces $X = \bigcup_{W \in p} X \setminus cl_X W$. Como A es compacto, existe una subfamilia finita $\mathscr{S} \subseteq p$ tal que $A \subseteq \bigcup_{W \in \mathscr{S}} X \setminus cl_X W$. Entonces $\bigcap_{W \in \mathscr{S}} cl_X W \cap A = \emptyset$, lo cual implica que $cl_X[\bigcap \mathscr{S}] \cap A = \emptyset$.

Afirmamos que $cl_X[\bigcap \mathscr{S} \cap U] \cap cl_X V = \emptyset$.

Como $cl_X[\bigcap \mathscr{S} \cap U] \cap cl_X V \subseteq A$, entonces

$$cl_X\left[\bigcap \mathscr{S} \cap U\right] \cap cl_X V = \left(cl_X\left[\bigcap \mathscr{S} \cap U\right] \cap cl_X V\right) \cap A \subseteq cl_X\left[\bigcap \mathscr{S} \cap U\right] \cap A \subseteq cl_X\left[\bigcap \mathscr{S}\right] \cap A = \emptyset.$$

Por lo tanto $cl_X[\bigcap \mathscr{S} \cap U] \cap cl_X V = \emptyset$. Por la Proposición 3.3.9 (3), $cl_{\kappa X}[\bigcap \mathscr{S} \cap U] \cap cl_{\kappa X} V = \emptyset$. Es claro que $\bigcap \mathscr{S} \cap U \in p$; es decir, $(\bigcap \mathscr{S} \cap U) \cup \{p\}$ es una vecindad abierta de p. Además

$$cl_{\kappa X}\left[\left(\bigcap \mathscr{S} \cap U\right) \cup \{p\}\right] = cl_{\kappa X}\left[\bigcap \mathscr{S} \cap U\right] \cup \{p\} \text{ y } cl_{\kappa X}[V \cup \{q\}] = cl_{\kappa X} V \cup \{q\}.$$

Por lo tanto $cl_{\kappa X}[(\bigcap \mathscr{S} \cap U) \cup \{p\}] \cap cl_{\kappa X}[V \cup \{q\}] = \emptyset$.

Por lo tanto κX es Urysohn.

$\boxtimes$

Proposición 3.6.13. $\mu\mathbb{Q}$ y $\mu\mathbb{R}$ no son compactos.

Demostración. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Afirmamos que $\mathbb{Z}$ es regularmente denso en niguna parte en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Sea $U := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(2n, 2n+1) \cap \mathbb{Q}$ y sea $V := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(2n+1, 2n) \cap \mathbb{Q}$. Entonces U y V son abierto ajenos en $\mathbb{Q}$ tales que $cl_{\mathbb{Q}}U \cap cl_{\mathbb{Q}}V = \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}$ es regularmente denso en ninguna parte en $\mathbb{Q}$, de manera análoga se denuestra que $\mathbb{Z}$ es regularmente denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Z}$ no es compacto, por la Proposición 3.6.13, $\mu\mathbb{Q}$ y $\mu\mathbb{R}$ no son compactos.

$\boxtimes$

Nuevamente recapitulemos el estudio de las extensiones H-cerradas de $\mathbb{N}$. Como primera observación tenemos que $\mu\mathbb{N}$ existe, ya que $\mathbb{N}$ es semiregular. Como segunda observación tenemos que $\aleph_0 \leq |\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}|$. Entonces por el Teorema 3.4.18, $\sigma\mathbb{N}$ y $\kappa\mathbb{N}$ son extensiones no equivalentes con respecto a $\mathbb{N}$. Naturalmente surge la pregunta de cómo se relacionan las extensiones H-cerradas $\mu\mathbb{N}$ y $\sigma\mathbb{N}$. De manera más explicita uno se pregunta si $\mu\mathbb{N}$ y $\sigma\mathbb{N}$ son extensiones H-cerradas equivalentes con respecto a $\mathbb{N}$, o no son equivalentes. La siguiente proposición da respuesta a esta pregunta.

Proposición 3.6.14. $\mu\mathbb{N} \equiv_{\mathbb{N}} \sigma\mathbb{N}$.

Demostración. Como $\mathbb{N}$ es un espacio discreto, cada abierto U en $\mathbb{N}$ pertenece a $\mathscr{RO}(\mathbb{N})$. Por la Proposición 3.2.4, tenemos que

$$\mathscr{RO}(\kappa\mathbb{N}) = \{oU : U \text{ es abierto en } \kappa X\}.$$

Por lo tanto $\mu\mathbb{N} \equiv_{\mathbb{N}} \sigma\mathbb{N}$.

$\boxtimes$

Proposición 3.6.15. $\mu\mathbb{N}$ es compacto.

Demostración. Por la Proposición 3.3.12, $\kappa\mathbb{N}$ es Urysohn, y por la Proposición 3.6.12, $\mu\mathbb{N}$ es compacto.

$\boxtimes$

Proposición 3.6.16. $\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es un H-conjunto en $\kappa\mathbb{N}$.

Demostración. Como $\mu\mathbb{N}$ es compacto, basta demostrar que $\mu\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es cerrado en $\mu\mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{n\} \in \mathscr{RO}(\kappa\mathbb{N})$ es una vecindad abierta de n en $\mu\mathbb{N}$. Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{N}$ es abierto en $\mu\mathbb{N}$, lo que implica que $\mu\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es un conjunto cerrado en $\mu\mathbb{N}$ y por lo tanto $\mu\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es compacto. Por la Proposición 2.6.13, $\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es un H-conjunto en $\kappa\mathbb{N}$.

$\boxtimes$

Más aún, a partir de la Proposición 2.6.13, podemos caracterizar a todos los subespacios compactos de $\mu\mathbb{N}$ a partir de los H-conjuntos de $\kappa\mathbb{N}$.

Sabemos por la Proposición 3.1.14, que todo subconjunto $\mathscr{S}$ de $E[X]$ tiene un máximo proyectivo. En particular $\mathfrak{M}(X)$, definido en 3.6.5, tiene un máximo proyectivo. Desafortunadamente, el máximo proyectivo de $\mathfrak{M}(X)$ no necesariamente es un elemento del mismo, a pesar de que μX es un buen candidato para ser el máximo proyectivo de $\mathfrak{M}(X)$.

Por ejemplo, $\mu\mathbb{N}$ no es el máximo proyectivo de $\mathfrak{M}(\mathbb{N})$, ya que $\mu\mathbb{N}, \mathbb{X} \in \mathfrak{M}(\mathbb{N})$ y como $\mu\mathbb{N}$ es compacto y $\mathbb{X}$ no lo és, entonces $\mathbb{X} \npreceq \mu\mathbb{N}$. Sin embargo, si el máximo proyectivo de $\mathfrak{M}(X)$ es un elemento del mismo, entonces éste es μX, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 3.6.17. Sea X un espacio semiregular. Si el máximo proyectivo de $(\mathfrak{M}(X), \preceq)$ es un elemento de $\mathfrak{M}(X)$, éste es μX.

Demostración. Sea Z el máximo proyectivo de $\mathfrak{M}(X)$ tal que $Z \in \mathfrak{M}(X)$; es decir, Z es una extensión H-cerrada y semiregular de X. Entonces existe $G : Z \to \mu X$ tal que $G_{|X} = Id_X$. Por otro lado existe $F : \kappa X \to Z$ tal que $F_{|X} = Id_X$, ya que Z es una extensión H-cerrada de X. Por lo tanto $G \circ F : \kappa X \to \mu X$ es una función continua que extiende a la función identidad de X. Otra función que extiende de manera continua a la función Id_X es la función $Id_{\kappa X} : \kappa X \to \mu X$. Por la Proposición 3.1.9, $G \circ F = Id_{\kappa X}$, es decir F es inyectiva. Por la Proposición 3.3.7, F es biyectiva.

Afirmamos que $F^{-1} = G : Z \to \kappa X$ es Θ-continua.

Como $G : Z \to \mu X$ es continua, en particular G es Θ-continua. Por otro lado, $Id_{\kappa X} : \kappa X \to \mu X$ es un Θ-homeomorfismo, por la Proposición 2.4.2 (7). Entonces $G = Id_{\kappa X}^{-1} \circ G : Z \to \kappa X$, es Θ-continua, por ser la composición de funciones Θ-continuas.

Por lo tanto $F : \kappa X \to Z$ es un Θ-homeomorfismo. Por la Proposición 3.6.11 $\mu X \equiv_{X_s} Z_s$. Como X y Z son semiregulares, $\mu X \equiv_X Z$.

$\boxtimes$

Otra observación importante es la siguiente. Dado un espacio Tychonoff X, el conjunto de las compactaciones del espacio X, denotado por $\mathscr{K}(X)$, es no vacío. Por la Proposición 1.2.11, $Z \preceq \mu X$ para cada $Z \in \mathscr{K}(X)$. Si μX es compacto, entonces $\mu X = \bigvee \mathscr{K}(X)$. A $\bigvee \mathscr{K}(X)$ se le conoce como la compactación de Stone-Čech del espacio X, el cuál es denotado como βX.

Por último demostraremos que existe un espacio X tal que $\mu X \not\equiv_X \sigma X$. Consideremos al conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con su topología usual $\tau(\mathbb{R})$.

Definición 3.6.18. 1. Denotemos al conjunto de todos los ultrafiltros abiertos de $\mathbb{R}$ por $\theta\mathbb{R}$. Si $U \in \tau(\mathbb{R})$, definimos

$$0(U) := \{\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R} : U \in \mathscr{U}\}.$$

2. Denotemos al conjunto de todos los ultrafiltros abiertos que convergen en $\mathbb{R}$ por $E\mathbb{R}$. Es decir

$$E\mathbb{R} = \{\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R} : a(\mathscr{U}) \neq \emptyset\}.$$

Lema 3.6.19. Sean $U, V \in \tau(\mathbb{R})$. Entonces,

1. $0(U) = \emptyset$ si y sólo si $U = \emptyset$.

2. $0(U \cap V) = 0(U) \cap 0(V)$.

3. $\theta\mathbb{R} \setminus 0(U) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U)$. En particular $0(U) = 0(int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U])$.

4. $0(U) = \theta\mathbb{R}$ si y sólo si U es denso en $\mathbb{R}$. En particular $0(\mathbb{R}) = \theta\mathbb{R}$.

5. $\{0(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$ es una base abierta para alguna topología Hausdorff en $\theta\mathbb{R}$.

Demostración. 1. Es claro que si $U = \emptyset$, entonces $0(U) = \emptyset$. Por otro lado, si U es un abierto no vacío en $\mathbb{R}$, sea $x \in U$. Como el conjunto de vecindades abiertas de x en $\mathbb{R}$ es una base de filtro abierto, entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ que converge a x. Por lo tanto $U \in \mathscr{U}$. Es decir, $0(U) \neq \emptyset$ si U es un abierto no vacío.

2. $\mathscr{U} \in 0(U \cap V)$ si y sólo si $U \cap V \in \mathscr{U}$ si y sólo si $U \in \mathscr{U}$ y $V \in \mathscr{U}$ si y sólo si $\mathscr{U} \in 0(U)$ y $\mathscr{U} \in 0(V)$ si y sólo si $\mathscr{U} \in 0(U) \cap 0(V)$.

3. Por (1) y (2) tenemos que $0(U) \cap 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U) = \emptyset$. Entonces $0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U) \subseteq \theta\mathbb{R} \setminus 0(U)$. Por otro lado, si $\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R} \setminus 0(U)$, entonces $U \notin \mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro abierto, $\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto $\mathscr{U} \in 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U)$. Por lo tanto $\theta\mathbb{R} \setminus 0(U) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U)$.

4. U es un abierto denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si $cl_{\mathbb{R}}U = \mathbb{R}$ si y sólo si $\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U = \emptyset$ si y sólo si $0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U) = \emptyset$ y por (3) tenemos que $\theta\mathbb{R} \setminus 0(U) = \emptyset$ si y sólo si $0(U) = \theta\mathbb{R}$.

5. Por (1), (2) y (4) $\{0(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$ es una base abierta para alguna topología. Veamos que esta topología es Hausdorff. Sean $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \theta\mathbb{R}$ con $\mathscr{U} \neq \mathscr{V}$. Como $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ son maximales, entonces existen $U \in \mathscr{U}$ y $V \in \mathscr{V}$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $\mathscr{U} \in 0(U)$ y $\mathscr{V} \in 0(V)$ además $0(U) \cap 0(V) = \emptyset$, como consecuencia de (1) y (2).

$\boxtimes$

Entonces a $E\mathbb{R}$ le concedemos la topología heredada por la topología de $\theta\mathbb{R}$. Es decir, $\{0(U) \cap E\mathbb{R} : U \in \tau(\mathbb{R})\}$ es una base abierta de $E\mathbb{R}$.

Definición 3.6.20. Decimos que un espacio X es *0-dimensional* si el conjunto de subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez forman una base abierta de X. Denotamos al conjunto de subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez como $\mathscr{B}(X)$.

Por la Proposición 3.6.19 (3) $\{0(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$ es una base de subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez en $\theta\mathbb{R}$. Esto no implica de manera directa que $\theta\mathbb{R}$ sea 0-dimensional. Se tiene que demostrar que $\mathscr{B}(\theta\mathbb{R})$ es una base abierta en $\theta\mathbb{R}$. En la siguiente proposición demostraremos, que en efecto, $\theta\mathbb{R}$ es 0-dimensional, más aún, se demostrará que $\mathscr{B}(\theta\mathbb{R}) = \{0(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$.

Proposición 3.6.21. 1. Si $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau(\mathbb{R})$, entonces $cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i)\right] = 0\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$.

2. $\mathscr{B}(\theta\mathbb{R}) = \{0(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$.

3. $\theta\mathbb{R}$ es un compacto 0-dimensional.

4. $E\mathbb{R}$ es un subespacio denso y 0-dimensional en $\theta\mathbb{R}$.

Demostración. 1. Es claro que si U y V son abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $U \subseteq V$, entonces $0(U) \subseteq 0(V)$. Por lo tanto $\bigcup_{i\in I} 0(U_i) \subseteq 0(\bigcup_{i\in I} U_i)$. Como $0(\bigcup_{i\in I} U_i)$ es cerrado en $\theta\mathbb{R}$, entonces $cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i)\right] \subseteq 0(\bigcup_{i\in I} U_i)$. Por otro lado, sea $\mathscr{U} \in 0(\bigcup_{i\in I} U_i)$ y sea $0(V)$ una vecindad abierta de $\mathscr{U}$ en $\theta\mathbb{R}$, donde $V \in \tau(\mathbb{R})$. Entonces $0(\bigcup_{i\in I} U_i) \cap 0(V) \neq \emptyset$ y $0(\bigcup_{i\in I} U_i) \cap 0(V) = 0((\bigcup_{i\in I} U_i) \cap V)$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \cap V \neq \emptyset$, esto implica que $0(U_{i_0}) \cap 0(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathscr{U} \in cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i)\right]$. Por lo tanto $cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i)\right] = 0\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$.

2. Basta demostrar que para cada $B \in \mathscr{B}(\theta\mathbb{R})$ existe $U \in \tau(\mathbb{R})$ tal que $B = 0(U)$. Sea $B \in \mathscr{B}(\theta\mathbb{R})$. Como B es abierto en $\theta\mathbb{R}$ existe una familia $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau(\mathbb{R})$ tal que $B = \bigcup_{i\in I} 0(U_i)$. Por (1) tenemos que $B = cl_{\theta\mathbb{R}} B = cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i)\right] = 0\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$. Por lo tanto $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ es el abierto buscado en $\mathbb{R}$ que cumple $B = 0(U)$.

3. Por (2), $\theta\mathbb{R}$ es 0-dimensional. Ahora demostremos que $\theta\mathbb{R}$ es compacto. Como $\{0(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$ es una base abierta de $\theta\mathbb{R}$, basta demostrar que cualquier cubierta abierta formada por ésta colección, tiene una subcubierta finita que cubre a $\theta\mathbb{R}$. Sea $\{U_i \subseteq \mathbb{R} : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $\theta\mathbb{R} = \bigcup_{i\in I} 0(U_i)$. Supongamos que $\theta\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in F} 0(U_i) \neq \emptyset$ para cada $F \subseteq I$ finito. Entonces, para cada $F \subseteq I$ finito, $\bigcup_{i\in F} 0(U_i)$ es cerrado, por ser la unión fintita de cerrados, y por (1), $0(\bigcup_{i\in F} U_i) = \bigcup_{i\in F} 0(U_i)$, además por la Proposición 3.6.19 (3), $\theta\mathbb{R} \setminus 0(\bigcup_{i\in F} U_i) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}[\bigcup_{i\in F} U_i])$. Es decir, $\theta\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in F} 0(U_i) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}[\bigcup_{i\in F} U_i])$ para cada $F \subseteq I$ finito. Por lo tanto $\{\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}[\bigcup_{i\in F} U_i] : F \subseteq I \text{ es finito}\}$ es una familia de conjuntos abiertos no vacíos con la p.i.f., entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ en $\mathbb{R}$ que contiene a esta familia. Es claro que $U_i \notin \mathscr{U}$ para cada $i \in I$; es decir $\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in I} 0(U_i)$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $E\mathbb{R}$ es compacto.

4. Es evidente que la propiedad 0-dimensional es hereditaria, se sigue que $E\mathbb{R}$ es 0-dimensional. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto no vacío en $\mathbb{R}$ y sea $x \in U$. Entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ que converge a x, lo que implica que $U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto $0(U) \cap E\mathbb{R} \neq \emptyset$. Por lo tanto $E\mathbb{R}$ es un subespacio denso en $\theta\mathbb{R}$.

$\boxtimes$

Proposición 3.6.22. $\mu(E\mathbb{R})$ es compacto.

Demostración. Como $\theta\mathbb{R}$ es una compactación de $E\mathbb{R}$, $E\mathbb{R}$ es Tychonoff. Sean A y B abiertos ajenos no vacíos en $E\mathbb{R}$. Entonces $A = \bigcup_{i\in I} 0(U_i) \cap E\mathbb{R}$ y $B = \bigcup_{i\in J} 0(V_i) \cap E\mathbb{R}$ donde U_i y V_i son abiertos en $\mathbb{R}$ para cada $i \in I \cup J$. Entonces,

$$\begin{aligned} cl_{E\mathbb{R}} A &= cl_{E\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i) \cap E\mathbb{R}\right] = cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i) \cap E\mathbb{R}\right] \cap E\mathbb{R} \\ &\subseteq cl_{\theta\mathbb{R}}\left[\bigcup_{i\in I} 0(U_i)\right] \cap E\mathbb{R} = 0\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap E\mathbb{R} = A. \end{aligned}$$

Por lo tanto $cl_{E\mathbb{R}} A = A$. Análogamente $cl_{E\mathbb{R}} B = B$. Como A y B son ajenos, $cl_{E\mathbb{R}} A \cap cl_{E\mathbb{R}} B = \emptyset$. Por la Proposición 3.6.12, $\mu(E\mathbb{R})$ es compacto.

$\boxtimes$

Definición 3.6.23. 1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Denotamos al conjunto de las vecindades abiertas de x en $\mathbb{R}$ como $\mathscr{V}_x$. Es decir, $\mathscr{V}_x = \mathscr{N}_x \cap \tau(\mathbb{R})$, recordemos por la Definición 1.1.16 (2) que $\mathscr{N}_x$ es el conjunto de vecindades de x.

2. Para cada $\mathscr{U} \in E\mathbb{R}$ definimos $k_{\mathbb{R}}(\mathscr{U})$ como el único elemento de $a_{\mathbb{R}}(\mathscr{U})$, el cuál existe por la Proposición 1.1.17. Por lo tanto, $k_{\mathbb{R}} : E\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define una función. Más aún, $k_{\mathbb{R}}$ es una función suprayectiva, ya que para cada $x \in \mathbb{R}$ el conjunto de vecindades abiertas de x, $\mathscr{V}_x$ en $\mathbb{R}$ forma una base de filtro abierto. Por lo tanto, existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{G}$ que converge a x, como $\mathscr{G}$ es ultrafiltro abierto se tiene que $c_{\mathbb{R}}(\mathscr{U}) = a_{\mathbb{R}}(\mathscr{G})$. Esto implica que $k_{\mathbb{R}}$ sea una función suprayectiva.

3. Sean X, Y espacios. Decimos que una función cerrada y suprayectiva $F : X \to Y$ es *irreducible* si para cualquier subconjunto cerrado propio $A \subsetneq X$, $F[A] \neq Y$.

Proposición 3.6.24. Sea $U \in \tau(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple lo siguiente,

1. $k_{\mathbb{R}}[0(U) \cap E\mathbb{R}] = cl_{\mathbb{R}}U$.

2. $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}] \subseteq 0(U)$ si y sólo si $x \in int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U]$.

3. $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$ es compacto.

4. $k_{\mathbb{R}}$ es una función continua e irreducible.

5. $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un subespacio cerrado no compacto y denso en ninguna parte de $E\mathbb{R}$.

Demostración. 1. Sea $\mathscr{U} \in 0(U) \cap E\mathbb{R}$, entonces $U \in \mathscr{U}$ y $k_{\mathbb{R}}(\mathscr{U}) \in a_{\mathbb{R}}(\mathscr{U}) \subseteq cl_{\mathbb{R}}U$. Es decir $k_{\mathbb{R}}[0(U) \cap E\mathbb{R}] \subseteq cl_{\mathbb{R}}U$. Por otro lado, si $x \in cl_{\mathbb{R}}U$. Como $\mathscr{V}_x \cup \{U\}$ tiene la p.i.f., entonces la base de filtro abierto generada por las intersecciones finitas de $\mathscr{V}_x \cup \{U\}$ está contenida en un ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$. Por lo tanto $\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R}$ y $\mathscr{V}_x \subseteq \mathscr{U}$. Esto implica que $k_{\mathbb{R}}(\mathscr{U}) \in a_{\mathbb{R}}(\mathscr{U}) = \{x\}$. Es decir $x \in k_{\mathbb{R}}[0(U) \cap E\mathbb{R}]$. Por lo tanto $k_{\mathbb{R}}[0(U) \cap E\mathbb{R}] = cl_{\mathbb{R}}U$.

2. Demostremos la necesidad. Si $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}] \subseteq 0(U)$. Esto quiere decir que cada ultrafiltro abierto $\mathscr{U}$ que converge a x contiene a U. Supongamos que $x \notin int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U]$. Entonces $x \in cl_{\mathbb{R}}[\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U]$. Por lo tanto existe un ultrafiltro abierto $\mathscr{F}$ que converge a x tal que $\mathscr{V}_x \cup \{\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U\} \subseteq \mathscr{F}$. Lo cuál es una contradicción ya que $\{U, \mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U\} \subseteq \mathscr{F}$. Por lo tanto $x \in int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U]$.

Ahora demostremos la suficiencia. Sea $x \in int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U]$ y sea $\mathscr{U} \in k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$. Entonces $int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U] \in \mathscr{U}$, es decir $\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U \notin \mathscr{U}$. Por lo tanto $\mathscr{U} \notin 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U) = \theta\mathbb{R} \setminus 0(U)$. Por lo tanto $\mathscr{U} \in 0(U)$.

3. Basta demostrar que $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$ es cerrado en $\theta\mathbb{R}$. Sea $\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$; es decir, $\mathscr{U}$ no convege a x. Entonces existe $U \in \mathscr{V}_x$ tal que $U \notin \mathscr{U}$, por (2) $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}] \subseteq 0(U)$. Por otro lado, $\mathscr{U} \in \theta\mathbb{R} \setminus 0(U) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U)$. Por lo tanto $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$ es cerrado en $\theta\mathbb{R}$.

4. Veamos primero que $k_{\mathbb{R}}$ es una función continua. Basta demostrar que $k_{\mathbb{R}}$ es una función Θ-continua, ya que $\mathbb{R}$ es regular. Sea $\mathscr{U} \in E\mathbb{R}$ y sea $U \in \tau(\mathbb{R})$ tal que $k_{\mathbb{R}}(\mathscr{U}) \in U$. Entonces $U \in \mathscr{U}$, lo que implica que $\mathscr{U} \in 0(U)$. Entonces por (1), $k_{\mathbb{R}}[cl_{E\mathbb{R}}[0(U) \cap E\mathbb{R}]] = k_{\mathbb{R}}[0(U) \cap E\mathbb{R}] \subseteq cl_{\mathbb{R}}U$. Por lo tanto $k_{\mathbb{R}}$ es Θ-continua. Como $\mathbb{R}$ es regular, por la Proposición 2.4.2 (3) $k_{\mathbb{R}}$ es continua.

Veamos ahora que $k_{\mathbb{R}}$ es una función cerrada. Sea A un subconjunto cerrado de $E\mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}[A]$. Como $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}] \cap A = \emptyset$, para cada $\mathscr{U} \in k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathscr{U} \in 0(U)$ y $0(U) \cap A = \emptyset$, estos $0(U)$ forman una cubierta abierta en $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$ y como $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}]$ es compacto, existen abiertos $U_1, U_2, ..., U_n$ en $\mathbb{R}$ tales que $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}] \subseteq [\bigcup_{i=1}^{n} 0(U_i)] \cap E\mathbb{R} \subseteq E\mathbb{R} \setminus A$. Por la Proposición 3.6.21 (1) $\bigcup_{i=1}^{n} 0(U_i) = cl_{\theta\mathbb{R}}[\bigcup_{i=1}^{n} 0(U_i)] = 0(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$. Es decir, $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\{x\}] \subseteq 0(U) \cap E\mathbb{R} \subseteq E\mathbb{R} \setminus A$ donde $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto $A \subseteq E\mathbb{R} \setminus 0(U) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U) \cap E\mathbb{R}$ y por (1), $k_{\mathbb{R}}[A] \subseteq cl_{\mathbb{R}}[\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U] = \mathbb{R} \setminus int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U]$. Por (2), $x \in int_{\mathbb{R}}[cl_{\mathbb{R}}U]$ el cuál es un abierto ajeno a $k_{\mathbb{R}}[A]$. Por lo tanto $k_{\mathbb{R}}[A]$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

Por último veamos que $k_{\mathbb{R}}$ es irreducible. Sea A un subconjunto cerrado y propio de $E\mathbb{R}$. Entonces existe un abierto no vacío U en $\tau(\mathbb{R})$ tal que $A \subseteq E\mathbb{R} \setminus 0(U)$. Como $E\mathbb{R} \setminus 0(U) = 0(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U) \cap E\mathbb{R}$, entonces $k_{\mathbb{R}}[A] \subseteq cl_{\mathbb{R}}[\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}U] \subseteq \mathbb{R} \setminus U$. Por lo tanto, $k_{\mathbb{R}}$ es irreducible.

5. Como $\mathbb{N}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y $k_{\mathbb{R}}$ es continua, entonces $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un conjunto cerrado el cuál no es compacto, ya que si lo fuera, como $k_{\mathbb{R}}$ es suprayectiva, $k_{\mathbb{R}}[k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]] = \mathbb{N}$ sería compacto, lo cuál es una contradicción.

Veamos ahora que $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es denso en niguna parte en $E\mathbb{R}$. Basta demostrar que $int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}] = \emptyset$. Supongamos que $int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}] \neq \emptyset$. Afirmamos que $int_{\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}[int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]] \neq \emptyset$. En efecto, sea $W = int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$. Como $k_{\mathbb{R}}$ es irreducible, entonces $\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}[E\mathbb{R} \setminus W]$ es un abierto no vacío en $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}[E\mathbb{R} \setminus W] \subseteq k_{\mathbb{R}}W$. Por lo tanto $int_{\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}[int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]] \neq \emptyset$. Por lo tanto $\emptyset \neq int_{\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}[int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]] \subseteq int_{\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}[k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]] = int_{\mathbb{R}}\mathbb{N}$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $int_{E\mathbb{R}}k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}] = \emptyset$.

Por lo tanto, $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un subespacio cerrado no compacto y denso en ninguna parte de $E\mathbb{R}$.

$\boxtimes$

Teorema 3.6.25. $\mu(E\mathbb{R}) \not\equiv_{E\mathbb{R}} \sigma(E\mathbb{R})$ y $\sigma(E\mathbb{R}) \not\equiv_{E\mathbb{R}} \kappa(E\mathbb{R})$.

Demostración. Como $\mu(E\mathbb{R})$ es compacto, basta demostrar que $\sigma(E\mathbb{R})$ no es compacto. Afirmamos que $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un subespacio cerrado no compacto en $\sigma(E\mathbb{R})$. Es claro que, $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ no es compacto en $\sigma(E\mathbb{R})$, ya que $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ no es compacto en $E\mathbb{R}$. Veamos que $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es cerrado en $\sigma(E\mathbb{R})$. Como $k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un subespacio cerrado y denso en ninguna parte en $E\mathbb{R}$, entonces $E\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un subespacio abierto y denso en $E\mathbb{R}$. Por lo tanto, $E\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}] \in \mathfrak{U}$ para cada $\mathfrak{U} \in \sigma(E\mathbb{R}) \setminus E\mathbb{R}$. Entonces $o_{\sigma(E\mathbb{R})}(E\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]) = (\sigma(E\mathbb{R}) \setminus E\mathbb{R}) \cup (E\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}])$. Es decir, $E\mathbb{R} \setminus k_{\mathbb{R}}^{-1}[\mathbb{N}]$ es un cerrado en $\sigma(E\mathbb{R})$. Por lo tanto $\sigma(E\mathbb{R})$ no es compacto. Por lo tanto $\mu(E\mathbb{R}) \not\equiv_{E\mathbb{R}} \sigma(E\mathbb{R})$

Veamos ahora que $\sigma(E\mathbb{R}) \not\equiv_{E\mathbb{R}} \kappa(E\mathbb{R})$. Sea $T_1 = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\mathbb{N} \setminus T_1$ es numerable, existe una biyección $h_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus T_1$. Sea $T_2 = h_1[T_1]$. Nuevamente $(\mathbb{N} \setminus T_1) \setminus T_2$ es numerable, y existe una biyección $h_2 : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \setminus T_1) \setminus T_2$. Definimos $T_3 = h_2[T_1]$. Inductivamente definimos $T_n = h_{n-1}[T_1]$. Sea $G_m = \{(n, \infty) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\bigcup_{n \in T_m}(n-1, n)\}$. Es claro que G_n es una familia de abiertos en $\mathbb{R}$ con la p.i.f., entonces existe un ultrafiltro abierto libre $\mathscr{U}_n$ en $\mathbb{R}$ tal que $G_n \subseteq \mathscr{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $\mathscr{U}_n \neq \mathscr{U}_m$ con $n \neq m$ y $\mathscr{U}_n \in \theta\mathbb{R} \setminus E\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathscr{O}_{\theta\mathbb{R}}^{\mathscr{U}_n}$ es un filtro abierto en $E\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe un ultrafiltro abierto libre $\mathfrak{U}_n$ en $E\mathbb{R}$ tal que $\mathscr{O}_{\theta\mathbb{R}}^{\mathscr{U}_n} \subseteq \mathfrak{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\kappa(E\mathbb{R}) \setminus E\mathbb{R}$ no es finito. Por lo tanto $\sigma(E\mathbb{R}) \not\equiv_{E\mathbb{R}} \kappa(E\mathbb{R})$.

$\boxtimes$

Apéndice A

Teorema de Alexander

La redacción clásica del Teorema de la subbase de Alexander es:

A.1 Teorema Sea $\mathscr{S}$ una subbase de un espacio X. Si cada cubierta de X con elementos de $\mathscr{S}$ tienen una subcubierta finita, entonces X es compacto.

Para su demostración se necesitan los siguientes lemas:

A.2 Lema Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en X, el conjunto de puntos de acumulación de $\mathscr{U}$ coincide con el conjunto de puntos de convergencia de $\mathscr{U}$.

Demostración. La demostración se puede consultar en la Proposición 7.12. (3) implica (4) del Libro [2].

$\boxtimes$

A.3 Lema Un espacio topológico X es compacto si y sólo si todo ultrafiltro en X converge a un punto de X.

Demostración. La demostración se puede consultar en la Proposición 7.12. (1) si y sólo si (4) del Libro [2].

$\boxtimes$

Recordemos que si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro de un espacio X, entonces el conjunto de puntos de acumulación de $\mathscr{U}$ es $\bigcap_{U\in\mathscr{U}} cl_X U$.

Demostración del Teorema de Alexander: Supongamos que toda cubierta de X formada por elementos de $\mathscr{S}$ posee una subcubierta finita, y supongamos que X no es compacto. Entonces, existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en X tal que $\bigcap_{U\in\mathscr{U}} cl_X U = \emptyset$ (véanse los Lemas **A.2** y **A.3**) Probaremos que para cada $x \in X$ existe $S_x \in \mathscr{S}$ tal que $X \setminus S_x \in \mathscr{U}$. Si $x \in X$, escojamos $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \notin cl_X U$ (esto sucede ya que $\bigcap_{U\in\mathscr{U}} cl_X U = \emptyset$). Como $\mathscr{S}$ es una subbase, existen $S_0, \ldots, S_n \in \mathscr{S}$ tales que $x \in \bigcap_{i\leq n} S_i \subseteq X \setminus cl_X U$. Para alguna $i \in \{0,...,n\}$, debemos tener $X \setminus S_i \in \mathscr{U}$. En efecto, si para cada $i \in \{0,1,...,n\}$, $X \setminus S_i \notin \mathscr{U}$, existirían $U_i \in \mathscr{U}$ tales que $(X \setminus S_i) \cap U_i = \emptyset$ (recordemos que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro). Tomando $U^* = U \cap U_0 \cap \ldots \cap U_n$, tendríamos $U^* \in \mathscr{U}$ y $U^* \subseteq (\bigcap_{i\leq n} S_i) \cap U = \emptyset$, una contradicción. En consecuencia, existe alguna $i_0 \in \{0,1,...,n\}$ tal que $X \setminus S_{i_0} \in \mathscr{U}$. Definimos entonces $S_x = S_{i_0}$ y $U_x = X \setminus S_{i_0}$. Entonces la colección $\{S_x : x \in X\}$ es una cubierta de X formada con elementos de $\mathscr{S}$. Por hipótesis, existen $x_0,...,x_k \in X$ tales que $S_{x_0} \cup S_{x_1} \cup \cdots \cup S_{x_k} = X$. Pero entonces $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_k} = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $\mathscr{U}$ es un filtro. Por tanto, X es compacto.

$\boxtimes$

Otro resultado clásico sobre espacios compactos es

A.4 Proposición Un espacio X es compacto si y sólo si cualquier familia de cerrados en X con la propiedad de intersección finita tiene una intersección no vacía.

Demostración. La demostración se puede consultar en la Proposición 7.4 del Libro [2].

$\boxtimes$

Una cubierta $\mathscr{C}$ es *irreducible* si para cada $C \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C} \setminus \{C\}$ no cubre a X.

A.5 Lema Toda cubierta finita de X contiene una subcubierta irreducible.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta y finita de un espacio X, es decir $\mathscr{U} := \{U_i : i \in \{1,...,n\}\}$. Supongamos que $\mathscr{U}$ no tiene subcubiertas irreducibles. Como $\mathscr{U}$ es una subcubierta de si misma, existe $i_1 \in \{1,...,n\}$ tal que $\mathscr{V}_1 = \mathscr{U} \setminus \{U_{i_1}\}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ no tiene subcubiertas irreducibles, existe $i_2 \in \{1,...,n\} \setminus \{i_1\}$ tal que $\mathscr{V}_2 = \mathscr{U} \setminus \{U_{i_1}, U_{i_2}\}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$. De manera inductiva existe $i_{n-1} \in \{1,...,n\} \setminus \{i_1,...,i_{n-2}\}$ tal que $\mathscr{V}_{n-1} = \mathscr{U} \setminus \{U_{i_1},...,U_{i_{n-1}}\}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ tiene n elementos, esto implica que $\mathscr{V}_{n-1}$ al ser subcubierta de $\mathscr{U}$ tiene un solo elemento, es decir $\mathscr{V}_{n-1} = \{U_{i_n}\}$. Esto implica que $\mathscr{V}_{n-1}$ es una subcubierta irreducible de $\mathscr{U}$, lo cual es una contradicción al suponer que $\mathscr{U}$ no tiene subcubiertas irreducibles.

Por lo tanto $\mathscr{U}$ contiene una subcubierta irreducible.

$\boxtimes$

A.6 Lema Si $\mathscr{C}$ es una cadena de subconjuntos abiertos que cubre a X y es irreducible, entonces $\mathscr{C} = \{X\}$.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una cadena de subconjuntos abiertos que cubre a X. Supongamos que $\mathscr{C} \neq \{X\}$. Esto implica que existe $A \in \mathscr{C}$ tal que $A \subsetneq X$. Sea $B \in \mathscr{C} \setminus \{A\}$, el cual existe ya que $\mathscr{C}$ cubre a X. Como $\mathscr{C}$ es una cadena, entonces $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \subseteq B$ y sea $\mathscr{V} = \mathscr{C} \setminus \{A\}$.

Afirmamos que $\mathscr{V}$ es una subcubierta de $\mathscr{C}$.

En efecto, ya que

$$\bigcup \mathscr{V} = \bigcup \mathscr{V} \cup B \supseteq \bigcup \mathscr{V} \cup A = \bigcup \mathscr{C} = X.$$

Es decir $\bigcup \mathscr{V} = X$, lo cual es una contradicción ya que $\mathscr{C}$ es irreducible. Por lo tanto $\mathscr{C} = \{X\}$.

$\boxtimes$

Otra versión poco conocida del Teorema de Alexander es la siguiente:

A.7 Teorema Las siguientes condiciones en un espacio X son equivalentes:

1. X es compacto;

2. cada cubierta abierta de X contiene una subcubierta irreducible;

3. cada cadena de cerrados no vacíos en X tiene una intersección diferente del vacío.

Demostración. Las implicaciones $1 \Rightarrow 2$ y $1 \Rightarrow 3$ resultan de la Proposición **A.4** y del Lema **A.5**.

Demostremos $2 \Rightarrow 3$. Supongamos que X contiene una cadena de subconjuntos cerrados no vacíos, digamos $\mathscr{F}$. Consideremos la colección de abiertos $\mathscr{A} = \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}\}$. Como $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$, entonces $\mathscr{C}$ cubre a X. Obsérvese además que $\mathscr{C}$ es una cadena de subconjuntos abiertos. Por hipótesis, existe $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ que es una cubierta irreducible. Pero $\mathscr{D}$ es una cadena. Por el Lema **A.6**, $X \in \mathscr{D}$; es decir, existe un elemento en $\mathscr{F}$ que es vacío, lo cual es una contradicción.

[$3 \Rightarrow 2$] Supongamos que X contiene una cubierta abierta $\mathscr{C}$ que no contiene subcubiertas irreducibles. Sea $\mathfrak{C}$ la colección de cadenas maximales en $\mathscr{C}$. Dividimos a $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}_0 = \{\mathscr{D} \in \mathfrak{C} : \mathscr{D}$ tiene un elemento máximo$\}$ y $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{C}_0$. Existe un número cardinal κ_0 con el que podemos enumerar exactamente los elementos de $\mathfrak{C}_0$. Así tenemos: $\mathfrak{C}_0 = \{\mathscr{D}_\xi : \xi < \kappa_0\}$. Para cada $\mathscr{D}_\xi$ con $\xi < \kappa_0$, existe D_ξ que es el elemento máximo de $\mathscr{D}_\xi$. Nos fijamos en la colección $\mathscr{E} = \{D_\xi : \xi < \kappa_0\}$. La colección $\mathscr{E}$ no cubre a X pues de lo contrario sería una subcubierta irreducible de $\mathscr{C}$. Por lo tanto $\mathfrak{C}_1$ es no vacío. Existe un número cardinal κ_1 tal que podemos enumerar los elementos de $\mathfrak{C}_1$ de manera exacta: $\mathfrak{C}_1 = \{\mathscr{F}_\xi : \xi < \kappa_1\}$. Para cada $\xi < \kappa_1$ enumeramos $\mathscr{F}_\xi$ de manera exacta: $\{C^\xi_\eta : \eta < \alpha_\xi\}$. Definimos ahora los siguientes conjuntos abiertos: $A_0 = D_0$, y para cada $\xi > 0$ y $\xi < \kappa_0$, sea $A_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} D_\eta$. Sea $A_{\kappa_0} = \bigcup_{\xi<\kappa_0} D_\xi \cup C^0_0$, y para cada $\eta < \alpha_0$ sea $A_{\kappa_0+\eta} = \bigcup_{\xi<\kappa_0} D_\xi \cup \bigcup_{\zeta<\eta} C^0_\zeta$. Definimos $A_{\kappa_0+\alpha_0} = \bigcup_{\xi<\kappa_0} D_\xi \cup \bigcup_{\zeta<\alpha_0} C^0_\zeta$. De esta manera construimos una cadena de subconjuntos abiertos que cubre a X y carece de subcubiertas abiertas. Resulta entonces que la colección de complementos de los elementos de esta cubierta abierta es una cadena de subconjuntos cerrados no vacíos con intersección vacía.

[$2 \Rightarrow 1$] Supongamos que (2) se cumple pero que X no es compacto. Como X no es compacto, existe una cubierta abierta $\mathscr{C}$ que carece de subcubiertas finitas. Sea $\mathscr{D}$ la subcubierta irreducible de $\mathscr{C}$. Resulta que $\mathscr{D}$ carece también de subcubiertas finitas, pues si poseyera una, ésta sería una subcubierta finita de $\mathscr{C}$. Existe un número cardinal κ tal que podemos enumerar a los elementos de $\mathscr{D}$ de modo preciso: $\mathscr{D} = \{D_\xi : \xi < \kappa\}$. Obsérvese que κ no es un número cardinal finito ya que $\mathscr{D}$ no es una colección finita.

Por recursión, formamos una nueva cubierta abierta de X como sigue: Sea $A_0 = D_0$, y para cada $\xi < \kappa$, sea $A_\xi = \bigcup_{\eta\leq\xi} D_\eta$ si ξ es un ordinal finito, y $A_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} D_\eta$ si $\xi < \kappa$ es un ordinal infinito. Resulta que $\mathscr{A} = \{A_\xi : \xi < \kappa\}$ es una cubierta abierta de X. Además si $\eta < \zeta < \kappa$, $A_\eta \subseteq A_\zeta$, y $A_\zeta \setminus A_\eta \neq \emptyset$ ya que $\mathscr{D}$ es irreducible. Como κ es un ordinal límite, $\mathscr{A}$ es una cubierta abierta de X que es una cadena estrictamente creciente, y por lo tanto carece de subcubierta irreducible, contradiciendo que cualquier cubierta de X posee una subcubierta irreducible.

⊠

Bibliografía

[1] P.S. Alexandroff, P. Urysohn, *Zur Theorie der topologischen Raumen*, Math. Ann. 92 (1924), 258-266.

[2] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de Topología General*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, vol 37, 2012.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol.6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] M. Katetov, *Uber H-abgeschlossene und bikompakte Raume*, Cas. Mat. Fys. 69 (1939), 36-49.

[5] J.R. Porter, R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*. Springer New York.

[6] A. Tychonoff, *Uber die topologische Erweiterung von Raume*, Math. Ann. 102 (1930), 544-561.