



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA  
APLICADA.

# **POLIEDROS AUTODUALES FUERTEMENTE INVOLUTIVOS**

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE DOCTOR EN  
CIENCIAS

PRESENTA:

**M.C. ERIC PAULÍ PÉREZ CONTRERAS**

DIRECTORES DE LA TESIS

**DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT**  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

**DR. JORGE RAMÍREZ ALFONSÍN**  
INSTITUT MONTPELLIÉRAIN ALEXANDER GROTHENDIECK, UM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR

**DR. JAVIER BRACHO CARPIZO**  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE DE 2020.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Poliedros Autoduales Fuertemente Involutivos.

15 de octubre de 2020



# Índice general

Introducción . . . . .	5
Agradecimientos. . . . .	17
<b>1. Poliedros Autoduales.</b>	<b>19</b>
1.1. Dualidad en gráficas planas y 3-conexas. . . . .	20
1.2. Isomorfismos de dualidad. . . . .	24
1.3. Automorfismos y Dualidades. . . . .	28
1.4. Nuestra pregunta central. . . . .	32
1.5. Algunos ejemplos. . . . .	36
<b>2. <math>\mathbb{S}^2</math> y su Geometría.</b>	<b>45</b>
2.1. Los Grupos finitos de isometrías de $\mathbb{S}^2$ . . . . .	47
2.2. El Lema del Encaje Isométrico. . . . .	49
2.3. Forma de dualidad de un poliedro autodual. . . . .	50
2.4. Teorema de la Antípoda. . . . .	52
2.5. Las 10 Formas de Autodualidad. . . . .	54
2.6. Órbifolds y Garabatos. . . . .	56
<b>3. Clasificación de poliedros.</b>	<b>61</b>
3.1. Teorema de Clasificación de Poliedros. . . . .	61
3.2. Poliedros autoduales fuertemente involutivos. . . . .	69
3.3. Aplicación: Construcción de encajes. . . . .	73
<b>4. Encajes Métricos.</b>	<b>79</b>
4.1. La multi-rueda. . . . .	80
4.2. La multi-hiperrueda. . . . .	85
<b>5. Resultados obtenidos.</b>	<b>91</b>
5.1. Clasificación Geométrica. . . . .	91

5.2. Clasificación Combinatoria . . . . .	92
---	----

5.3. Respuestas a nuestra pregunta central. . . . .	94
---	----

*Cuanto más misterioso es algo, más asumimos que lo comprendemos.*

Anónimo.

# Introducción.

Una gráfica  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  simple, plana y 3-conexa se puede dibujar esencialmente de una manera en el plano o la esfera. Este hecho fundamental es un resultado del trabajo de H. Whitney [30]. Nos dice que además de los conjuntos  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{E}$  de vértices y aristas, también tenemos determinado el conjunto  $\mathcal{F}$  de caras y está bien definida su gráfica dual  $\mathcal{G}^*$ . La gráfica dual  $\mathcal{G}^*$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices  $\mathcal{V}^*$  es el conjunto de caras  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{G}$ , y dos nuevos vértices en  $\mathcal{G}^*$  están conectados por una arista si y sólo si las caras que los definen son adyacentes en  $\mathcal{G}$ .

En este tipo de gráficas, cada cara  $f$  está determinada por su *camino borde*, que es una sucesión cíclicamente ordenada  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  que consta de los vértices (y las aristas) que están en la cerradura de la región que define a  $f$  (ver [10]). En este sentido podemos decir que  $v$  *incide* en  $f$ , si es cualquiera de los elementos  $v_1, v_2, \dots, v_k$  del ciclo que define a la cara  $f$ . Denotaremos esta situación simplemente por  $v \in f$ . Del teorema de E. Steinitz's ([26]) sabemos que es lo mismo hablar de poliedros en el sentido de 3-politopos convexos y hablar de éstas gráficas, así que nos referiremos a ellas como *poliedros*. Un *poliedro* es una gráfica  $\mathcal{G}$  que es simple (sin lazos ni aristas múltiples), plana y 3-conexa.

Un poliedro  $\mathcal{P}$  se dice *autodual* si existe un isomorfismo de gráficas  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$  al que llamaremos *isomorfismo de dualidad*. Puede haber varios de estos isomorfismos de dualidad y cada uno de ellos es una biyección entre vértices y caras de  $\mathcal{P}$ , de manera tal que vértices adyacentes se corresponden con caras adyacentes. Estamos interesados en un isomorfismo de dualidad

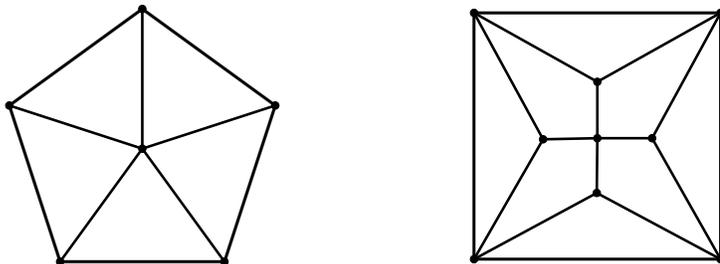


Figura 1: La 5-rueda y la 4-hiperrueda.

que satisfaga las siguientes dos propiedades:

- (i) Para cada par  $u, v$  de vértices,  $u \in \tau(v)$  si y sólo si  $v \in \tau(u)$ .
- (ii) Para cada vértice  $v$ , tenemos que  $v \notin \tau(v)$ .

Tal isomorfismo será llamado *involución fuerte*. Si  $\mathcal{P}$  es un poliedro autodual que admite una involución fuerte  $\tau$ , diremos que  $\mathcal{P}$  es un *poliedro fuertemente involutivo*. Los poliedros autoduales fuertemente involutivos son muy comunes, por ejemplo las ruedas sobre  $q$ -ciclos con  $q$  impar y las hiperruedas sobre  $q$ -ciclos con  $q$  par (ver figura 1). De hecho, la importancia de éstos poliedros está relacionada con el famoso problema de Vázsonyi: sea  $T$  un conjunto finito de puntos de diámetro  $h$  en el espacio euclidiano  $d$ -dimensional. Caracterizar aquellos conjuntos  $T$  para los que el diámetro es realizado un máximo número de veces como segmento de longitud  $h$  cuyos extremos están en  $T$ . Y. S. Kupitz *et al.*, [14] llaman a estos conjuntos *configuraciones extremas*. Para  $d = 3$ , si  $T$  es una configuración extrema y  $V$  es la intersección de bolas de radio  $h$  con centros en puntos de  $T$ , se puede definir en la frontera de  $V$  una estructura facial que es *fuertemente autodual* en el sentido de que admite un isomorfismo de dualidad que es involución y es libre de puntos fijos cuando actúa como automorfismo de la primera subdivisión baricéntrica del complejo celular frontera de  $V$  (ver [14]). Sin duda, esta inusual conexión entre las geometrías discreta y convexa ha atraído la atención de muchos matemáticos hacia éste y otros problemas relacionados. Ver por ejemplo L. Lóvasz [16], L. Montejano y E. Roldán-Pensado [20], L.

Montejano *et al.* ([21]) y el trabajo de K. Bezdek *et al.* [3]. Para más sobre el problema de Vázsonyi ver [18].

En éste trabajo, nuestro estudio de los poliedros autoduales fuertemente involutivos ha estado inspirado en los *Poliedros de Reuleaux*. El problema central consiste en caracterizar aquellos poliedros autoduales que admiten un *encaje métrico*: una función inyectiva  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que  $\text{diam}(\eta(\mathcal{V})) = 1$  y la distancia euclidiana entre cualesquiera dos puntos  $\eta(u)$  y  $\eta(v)$  es 1 si y sólo si  $u \in \tau(v)$ , para algún isomorfismo de dualidad  $\tau$ . Cuando esto es posible, el trabajo de L. Montejano y E. Roldán-Pensado ([20]) ofrece una manera de asociar un cuerpo de ancho constante a cada poliedro.

En el artículo [25], B. Servatius y H. Servatius reinterpretan a las gráficas autoduales como *mapas* en la esfera y a sus automorfismos y dualidades como isometrías de la esfera. Clasifican las parejas de grupos  $\text{Aut}(\mathcal{G}), \text{Dual}(\mathcal{G})$  que dan lugar a todos los posibles mapas autoduales esféricos, donde  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  es el grupo de automorfismos de la gráfica  $\mathcal{G}$  asociada al mapa y  $\text{Dual}(\mathcal{G})$  es el grupo que consta tanto de automorfismos como de isomorfismos de dualidad de  $\mathcal{G}$ , siendo  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  un subgrupo de índice 2 de  $\text{Dual}(\mathcal{G})$ . En esta tesis exploraremos varios ejemplos para hacer notar la importancia de los automorfismos e isomorfismos de dualidad en gráficas planas y 3-conexas. Usamos las ideas de Servatius para reinterpretar el problema geoméricamente a través de isometrías de la esfera y así probar que todo poliedro autodual tiene a lo más una involución fuerte y, de hecho, es la función antípoda (Teorema 2.4.1). Usando esto, clasificamos a las parejas de grupos  $\text{Aut}(\mathcal{G}), \text{Dual}(\mathcal{G})$  que dan lugar a poliedros autoduales fuertemente involutivos (Teorema 2.5.3). Por otro lado, se establece un teorema que clasifica a los poliedros autoduales fuertemente involutivos a través de operaciones de borrado y contracción de aristas (Teorema 3.2.4). Usamos este teorema para construir un encaje antipodal para cada poliedro autodual  $(\mathcal{P}, \tau)$  dado: un encaje en  $\mathbb{E}^3$  en el que para cada vértice  $v$ , las imágenes de  $v$  y de  $\tau(v)$  son puntos antipodales (Sección 3.3). Finalmente exponemos parte del trabajo que se desarrolla actualmente para encontrar encajes métricos en dos familias infinitas de poliedros autoduales (Capítulo 4).

El lector interesado en el presente trabajo debe tener presente que se ha asumido cierta familiaridad con la terminología y nociones básicas de teoría de las gráficas, grupos, notación de conjuntos y las geometrías euclidiana

y esférica. El capítulo 1 está dedicado a dar los preliminares necesarios y motivar el estudio de los poliedros autoduales fuertemente involutivos. El capítulo 2 provee una manera geométrica de interpretar a estos poliedros utilizando las isometrías de la esfera. En el capítulo 3 nos centramos en el estudio de los poliedros en general exhibiendo un teorema de clasificación inspirado en las ideas de W. T. Tutte en su teorema de clasificación de gráficas 3-conexas [27], que establece que toda gráfica 3-conexa es una rueda (un ciclo en el que todos los vértices están también conectados a un vértice común  $o$ ) o bien puede obtenerse de una rueda mediante una sucesión finita de dos operaciones: añadir una arista entre cualquier par de vértices y separar un vértice dado  $v$ , con grado  $\delta(v) \geq 4$ , en dos nuevos vértices adyacentes  $v'$  y  $v''$  de tal manera que la nueva gráfica obtenida siga siendo 3-conexa. En ese mismo capítulo usamos estas ideas para dar un teorema de clasificación de los poliedros autoduales fuertemente involutivos. Finalmente en el capítulo 4 mostramos dos familias infinitas de poliedros autoduales que admiten encajes métricos.

# Introduction (Français).

Un graphe simple, planaire et 3-connexe  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ne peut être essentiellement dessiné que d'une seule manière dans un plan ou sur une sphère. Ce fait fondamental est le résultat du travail de H. Whitney. Il nous dit qu'en plus des ensembles  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{E}$  de sommets et d'arêtes, nous avons également déterminé l'ensemble  $\mathcal{F}$  de faces, et son graphe dual  $\mathcal{G}^*$  est bien défini. Le graphe dual  $\mathcal{G}^*$  est le graphe dont l'ensemble des sommets  $\mathcal{V}^*$  est l'ensemble des faces  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{G}$ , et deux nouveaux sommets en  $\mathcal{G}^*$  sont reliés par un arc si et seulement si les faces les définissant sont adjacentes en  $\mathcal{G}$ .

Dans ce type de graphe, chaque face  $f$  est déterminée par son *chemin de bord*, qui est une séquence cyclique  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  constituée des sommets (et des arcs) qui sont dans l'adhérence de la région qui définit  $f$  (voir [10]). En ce sens, on peut dire que  $v$  est en  $f$ , si c'est l'un des éléments  $v_1, v_2, \dots, v_k$  du cycle qui définit la face  $f$ . Nous dénoterons cette situation simplement par  $v \in f$ . D'après le théorème de E. Steinitz, nous savons que c'est la même chose de parler de polyèdres au sens de 3-polytopes convexes et de parler de ces graphes, nous les appellerons donc *polyèdres*. Un polyèdre est un graphe  $\mathcal{G}$  simple (pas de boucles ni d'arêtes multiples), planaire et 3-connexe.

Un polyèdre  $\mathcal{P}$  est dit *autodual* s'il y a un isomorphisme des graphes  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$  que nous appellerons *isomorphisme de la dualité*. Il peut y avoir plusieurs de ces isomorphismes de la dualité et chacun d'eux est une bijection entre sommets et faces de  $\mathcal{P}$ , de sorte que les sommets adjacents correspondent aux faces adjacentes. Nous nous intéressons à un isomorphisme de la dualité qui satisfait les deux propriétés suivantes:

- (i) Pour chaque paire  $u, v$  de sommets,  $u \in \tau(v)$  si et seulement si  $v \in \tau(u)$ .

(ii) Pour chaque vertex  $v$ , nous devons  $v \notin \tau(v)$ .

Un tel isomorphisme sera appelé *involution forte*. Si  $\mathcal{P}$  est un polyèdre autodual qui admet une involution forte  $\tau$ , nous dirons que  $\mathcal{P}$  est un polyèdre fortement involutif. Les polyèdres fortement involutifs sont très courants, par exemple les roues sur les  $q$ -cycles avec  $q$  impair et les hyper-roues sur les  $q$ -cycles avec  $q$  pair (voir figure 1). En fait, l'importance de ces polyèdres est liée au fameux problème de Vázsonyi: Soit  $T$  un ensemble fini de points de diamètre  $h$  dans l'espace euclidien  $d$ -dimensionnel. Caractériser les ensembles  $T$  dont le diamètre est réalisé un nombre maximum de fois comme un segment de longueur  $h$  dont les extrémités sont en  $T$ . Y. S. Kupitz *et al.* [14], appellent ces ensembles des *configurations extrêmes*. Pour  $d = 3$ , si  $T$  est une configuration extrême et  $V$  est l'intersection de boules de rayon  $h$  avec des centres en points de  $T$ , une structure faciale peut être définie à la frontière  $V$  qui est *fortement autodual* dans le sens où elle admet un isomorphisme de la dualité qui est involution et est libre de points fixes quand elle agit comme un automorphisme de la première subdivision barycentrique du complexe cellulaire frontière de  $V$  (voir [14]). Sans aucun doute, ce lien inhabituel entre les géométries discrètes et convexes a attiré l'attention de nombreux mathématiciens sur ce problème et d'autres problèmes connexes. Voir par exemple L. Lóvasz [16], Y. S. Kupitz *et al.*, L. Montejano et E. Roldan-Pensado [20]), L. Montejano *et al.* et les travaux de K. Bezdek et al. [3]. Pour en savoir plus sur le problème de Vázsonyi, voir [18].

Dans cet ouvrage, notre étude des polyèdres fortement involutives s'inspire des polyèdres de Reuleaux. Le problème central consiste à caractériser ces polyèdres autoduels qui admettent un plongement métrique : une fonction d'injection  $\eta : \mathbb{E}^3$  tel que  $\text{diam}(\mathcal{V}) = 1$  et la distance euclidienne entre deux points quelconques  $\eta(u)$  et  $\eta(v)$  est 1 si et seulement si  $u \in \tau(v)$ , pour un certain isomorphisme de la dualité  $\tau$ . Lorsque cela est possible, le travail de L. Montejano et E. Roldán-Pensado ([20]) propose une façon d'associer un corps de largeur constante à chaque polyèdre.

Dans l'article [25], B. Servatius et H. Servatius réinterprètent les graphes autoduaux comme *cartes* dans la sphère et leurs automorphismes et dualités comme isométries de la sphère. Ils classent les paires de groupes

$\text{Aut}(\mathcal{G})$ ,  $\text{Dual}(\mathcal{G})$  qui donnent lieu à toutes les cartes autoduales sphériques possibles, où  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  est le groupe d'automorphismes du graphe  $\mathcal{G}$  associé à la carte et  $\text{Dual}(\mathcal{G})$  est le groupe constitué à la fois d'automorphismes et d'isomorphismes de dualité de  $\mathcal{G}$ , avec  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  étant un sous-groupe de l'indice 2 de  $\text{Dual}(\mathcal{G})$ . Dans cette thèse, nous allons explorer plusieurs exemples pour noter l'importance des automorphismes et des isomorphismes de la dualité dans les graphes planaires et 3-connexes. Nous utilisons les idées de Servatius pour réinterpréter le problème géométriquement à travers les isométries de la sphère afin de prouver que tous les polyèdres autoduales ont au plus une involution forte et c'est en fait la fonction antipode (Théorème 2.4.1). À partir de là, nous classons les paires de groupes  $\text{Aut}(\mathcal{G})$ ,  $\text{Dual}(\mathcal{G})$  qui donnent lieu à des polyèdres autoduales fortement involutifs (Théorème 2.5.3). D'autre part, un théorème est établi qui classe les polyèdres autoduales fortement involutifs par des opérations de suppression et de contraction d'arêtes (Théorème 3.2.4). Nous utilisons ce théorème pour construire un ajustement antipodale pour chaque polyèdre autodual donné  $(\mathcal{P}, \tau)$ : un ajustement en  $\mathbb{E}^3$  dans laquelle pour chaque sommet  $v$ , les images de  $v$  et de  $\tau(v)$  sont des points antipodaux (Section 3.3). Enfin, nous présentons certains des travaux en cours pour trouver des plongements métriques dans deux familles infinies de polyèdres autoduales (Chapitre 4).

Le lecteur intéressé par cet article doit garder à l'esprit qu'une certaine familiarité avec la terminologie et les notions de base de la théorie des graphes, des groupes, de la notation des ensembles et des géométries euclidienne et sphérique a été supposée. Le chapitre 1 est consacré à donner les préliminaires nécessaires et à motiver l'étude des polyèdres fortement involutifs. Le chapitre 2 propose une façon géométrique d'interpréter ces polyèdres en utilisant les isométries de la sphère. Dans le chapitre 3, nous nous concentrons sur l'étude des polyèdres en général en montrant un théorème de classification inspiré des idées de W. T. Tutte dans son théorème de classification des graphes à 3-connexes [27], qui déclare que chaque graphe à 3-connexe est soit une roue (un cycle dans lequel tous les sommets sont également connectés à un sommet commun  $o$ ) ou peut être obtenu à partir d'une roue par une succession finie de deux opérations: en ajoutant une arête entre une paire de sommets et en séparant un sommet donné  $v$ , avec le degré  $\delta(v) \geq 4$ , en deux nouveaux sommets adjacents  $v'$  et  $v''$  de sorte que le nouveau graphique obtenu reste à 3-connectés. Dans le même chapitre, nous utilisons ces idées pour donner un théorème de classification des polyèdres fortement involutifs.

Enfin, dans le chapitre 4, nous donnons deux familles infinies de polyèdres autoduels qui induisent des plongements métriques.

# Introduction (English).

A simpler, planar and 3-connected graph  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  can be drawn in essentially one way on the sphere or the plane. This fundamental fact is a result of the work of H. Whitney [30]. It tells us that we not only have the sets  $\mathcal{V}$  and  $\mathcal{E}$  defined, but that the set  $F$  of faces is also determined, and furthermore the dual graph  $\mathcal{G}^*$  is well defined. The dual graph  $\mathcal{G}^*$  is the graph whose vertex set  $\mathcal{V}^*$  is the set of faces  $\mathcal{F}$  of  $\mathcal{G}$ , and two new vertices in  $\mathcal{G}^*$  are connected by an edge if and only if the faces that define them are adjacent in  $\mathcal{G}$ .

In this class of graphs, each face  $f$  is determined by its *boundary walk*, that is, a cyclically ordered sequence  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  consisting of the vertices (and the edges) that are in the closure of the region defining the face  $f$  (see [10]). In this sense we can say that  $v$  *incides* on  $f$ , if it is any of the elements  $v_1, v_2, \dots, v_k$  of the cycle defining the face  $f$ . We denote this situation simply by  $u \in f$ . From E. Steinitz's theorem ([26]) we know that it is the same to talk about polyhedra in the sense of convex polytopes and to talk about these graphs, so we will refer to them as *polyhedra*. A *polyhedron* is a graph  $\mathcal{G}$  that is simple (without loops and multiple edges), planar and 3-connected.

A polyhedron  $\mathcal{P}$  is said to be *self-dual* if there exists an isomorphism of graphs  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ . This isomorphism is called a *duality isomorphism*. There may be several of these duality isomorphisms and each of them is a bijection between vertices and faces of  $\mathcal{P}$ , such that adjacent vertices correspond to adjacent faces. We are interested in such an isomorphism that satisfies two

more properties:

- (i) For each pair  $u, v$  of vertices,  $u \in \tau(v)$  if and only if  $v \in \tau(u)$ .
- (ii) For every vertex  $v$ , we have that  $v \notin \tau(v)$ .

Such an isomorphism will be called a *strong involution*. If  $\mathcal{P}$  is a self-dual polyhedron admitting a strong involution  $\tau$ , we will say that  $\mathcal{P}$  is a *strongly involutive polyhedron*. Strongly involutive self-dual polyhedra are very common, like for example wheels on  $n$ -cycles with  $n$  odd and hyperwheels on  $n$ -cycles with  $n$ -even (see figure 1). In fact the relevance of strongly involutive self-dual polyhedra is partially related with the famous Vázsonyi problem. Let  $T$  be a finite set of points of diameter  $h$  in Euclidean  $d$ -space. Characterize those sets  $T$  for which the diameter is attained a maximal number of times as a segment of length  $h$  with both endpoints in  $T$ . Y. S. Kupitz *et al.* [14], call these sets *extremal configurations*. For  $d = 3$ , if  $T$  is an extremal configuration and  $V$  is the intersection of balls of radius  $h$  with centers in points of  $T$ , a facial structure can be defined on the boundary of  $V$  that is *strongly self-dual* in the sense that it admits an duality isomorphism that is involution and is fixed-point free when acting as an automorphism of the first barycentric subdivision of the boundary cell complex of  $V$  (see [14]). Indeed, this unusual connection between discrete and convex geometry attracted the attention of several mathematicians to this and other related problems. See, for example L. Lóvasz [16], L. Montejano and E. Roldán-Pensado [20], L. Montejano *et al.* ([21]) and the work of Bezdek *et al.* [3]. For more about the Vázsonyi problem see [18].

In this work, our study of strongly involutive self-dual polyhedra has been inspired in the *Reuleaux Polyhedra*. The central problem consists on characterizing those self-dual polyhedra that admit a *metric embedding*: an injective function  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{E}^3$  such that  $\text{diam}(\eta(\mathcal{V})) = 1$  and the euclidean distance between any two points  $\eta(u)$  and  $\eta(v)$  is 1 if and only if  $u \in \tau(v)$ , for some duality isomorphism  $\tau$ . If this is possible, the work of L. Montejano and E. Roldán-Pensado ([20]) shows a way to associate a constant width body to such a polyhedron.

In the paper [25], B. Servatius and H. Servatius reinterpret self-dual graphs as *maps* in the sphere and their automorphisms and dualities as isometries of the sphere. They classify the pairs of groups  $\text{Aut}(\mathcal{G}), \text{Dual}(\mathcal{G})$  that

give rise to all possible spherical self-dual graphs, where  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  is the group of automorphisms from the graph  $\mathcal{G}$  associated with the map and  $\text{Dual}(\mathcal{G})$  is the group consisting of both automorphisms and duality isomorphisms from  $\mathcal{G}$ , with  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  being a subgroup of  $\text{Dual}(\mathcal{G})$  of index 2. In this thesis we will explore several examples to note the importance of automorphisms and isomorphisms of duality in planar and 3-connected graphs. We use Servatius' ideas to reinterpret the problem geometrically through isometries of the sphere to prove that all self-dual polyhedra have at most one strong involution and, in fact, is the antipodal mapping (Theorem 2.4.1). Using this, we classify the pairs  $\text{Aut}(\mathcal{G}), \text{Dual}(\mathcal{G})$  of groups that give rise to strongly involutive self-dual polyhedra (Theorem 2.5.3). On the other hand, a theorem is established that classifies strongly involutive self-dual polyhedra through edge deletion and contraction operations (Theorem 3.2.4). We use this theorem to construct an antipodal embedding for each given self-dual polyhedron  $(\mathcal{P}, \tau)$ : an embedding in  $\mathbb{E}^3$  in which for each vertex  $v$ , the images of  $v$  and of  $\tau(v)$  are antipodal points (Section 3.3). Finally we present some of the work currently being done to find metric laces in two infinite families of self-dual polyhedrons (Chapter 4).

The reader interested in this paper should bear in mind that a certain familiarity with the terminology and basic notions of graph theory, groups, set notation and the Euclidean and spherical geometries has been assumed. Chapter 1 is devoted to give the necessary preliminaries and to motivate the study of strongly involutive polyhedra. Chapter 2 provides a geometrical way of interpreting these polyhedra using the isometries of the sphere. In Chapter 3 we focus on the study of polyhedra in general by showing a classification theorem inspired by W. T. Tutte's ideas in his 3-connected graphs classification theorem [27], which states that every 3-connected graph is either a wheel (a cycle in which all vertices are also connected to a common vertex  $o$ ) or can be obtained from a wheel by a finite succession of two operations: adding an edge between any pair of vertices and separating a given vertex  $v$ , with degree  $\delta(v) \geq 4$ , into two new adjacent vertices  $v'$  and  $v''$  so that the new graph obtained remains 3-connected. In the same chapter we use these ideas to give a classification theorem for strongly involutive polyhedra. Finally in chapter 4 we show two infinite families of self-dual polyhedra that admit metric embeddings.



# Agradecimientos.

Agradezco profundamente a mis padres por haber apoyado todas mis decisiones desde mi niñez. A mis tutores el Dr. Luis Montejano Peimbert, el Dr. Jorge Ramírez Alfonsín y el Dr. Javier Bracho Carpizo por sus valiosos consejos, su inspiración y las innumerables discusiones matemáticas que resultaron tan fructíferas. A mis amigos matemáticos, en especial a Elías Javier García Claro por estar siempre presente para el importante proceso de compartir y discutir ideas y a Mario Veruete por compartir conmigo sus valiosos consejos y ayudarme a desarrollar ejemplos importantes en el software Mathematica con el diseño y realización de la figura 1.15 del Tetraedro de Reuleaux. Al Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM, Morelia por proporcionarme un espacio para poder escribir esta tesis y el apoyo que siempre me ha brindado a través de su gente, en especial del Dr. Gerardo Raggi Cárdenas. A mis compañeros del Instituto de Matemáticas de la UNAM, Juriquilla por los momentos y esfuerzos que han ayudado a crear el ambiente adecuado para poder estudiar un posgrado como este. Al Dr. Leonardo Ignacio Martínez Sandoval, a quien considero mi hermano académico por su ejemplo, sus consejos y su valioso apoyo. A la Universidad de Montpellier por brindarme el espacio y las condiciones para realizar la cotutela de este doctorado. Finalmente a nuestra Universidad Nacional Autónoma de México, que ha logrado sostener las condiciones para seguir impulsando proyectos tan importantes, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología en México por haber brindado el soporte económico para mis estudios de doctorado así como a la Unité Mixte Internationale Laboratoire Solomon Lefschetz CNRS-UNAM-CONACyT y grant CNRS PICSO7848 por el apoyo económico para viajar a la Université de Montpellier.



# Capítulo 1

## Poliedros Autoduales.

La dualidad de poliedros es un concepto que ha llamado la atención desde hace ya mucho tiempo. En los conocidos sólidos platónicos se observa esta relación entre el cubo y el octaedro, en el dodecaedro con el icosaedro y en el tetraedro consigo mismo. Definiremos un *poliedro* como una gráfica que es simple, plana y 3-conexa. Una *gráfica*  $G$  consta de un conjunto  $V$  (usualmente finito) de elementos llamados *vértices* y una relación de *adyacencia* entre ellos. Los vértices se suelen representar por medio de puntos y cuando dos vértices  $u$  y  $v$  están relacionados entre sí decimos que son *adyacentes* y lo representamos dibujando una línea entre los puntos  $u$  y  $v$  llamada *arista*  $a = uv$ . Una gráfica  $G$  queda determinada por los conjuntos  $V$  y  $A$ , donde  $A$  es el conjunto de aristas. El presente capítulo está dedicado a dar algunos preliminares así como a plantear la pregunta central de esta tesis.

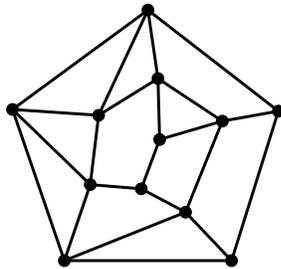


Figura 1.1: Un poliedro.

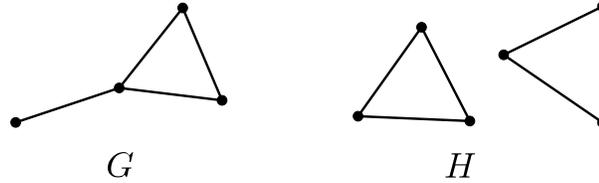


Figura 1.2: Ejemplos de gráficas planas.

### 1.1. Dualidad en gráficas planas y 3-conexas.

Una gráfica  $G = (V, A)$  es *plana*, si se puede dibujar en un plano (o una esfera) de manera que dos aristas nunca se crucen. Formalmente decimos que  $G$  es plana si existe una función inyectiva o *encaje*  $i$  de  $V \cup A$  en el plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  o la esfera  $\mathbb{S}^2$  de manera que:

1. Para cada  $v \in V$ ,  $i(v)$  es un punto.
2. Para cada arista  $a = uv \in A$ ,  $i(a)$  es un segmento de curva, homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$ , cuyos extremos son  $i(u)$  e  $i(v)$ .
3. Si  $a_1, a_2 \in A$  son dos aristas distintas, entonces  $i(a_1)$  e  $i(a_2)$  sólo pueden intersectarse cuando  $a_1$  y  $a_2$  tienen vértice común  $v$ , en cuyo caso, se intersectan en  $i(v)$ .

Como ejemplos sencillos de gráficas planas tenemos a los ciclos  $C_n$  con  $n$  vértices y a los árboles, que son gráficas conexas sin ciclos. En la figura 1.2 la gráfica  $G$  es la gráfica simple y conexa con el menor número de vértices que no es árbol ni ciclo. La gráfica  $H$  es un ejemplo de gráfica plana que no es conexa. En este caso, cada una de las componentes conexas es por sí misma una gráfica plana por lo que podríamos considerar a  $H$  como unión de dos gráficas planas. En adelante sólo consideraremos gráficas planas conexas.

Si una gráfica  $G$  está dibujada o *encajada* en el plano  $\mathbb{E}^2$ , se delimitan naturalmente varias regiones que son las componentes conexas de  $\mathbb{E}^2 \setminus i(V \cup A)$ . Llamaremos a estas regiones las *caras* de  $G$ . Si una gráfica  $G$  es plana, definimos su *gráfica dual*  $G^*$  como sigue: cada cara  $c$  de  $G$  es un vértice  $v_c$  de  $G^*$  y si dos caras  $c$  y  $d$  de  $G$  comparten una arista  $a$  de  $G$ , entonces habrá una

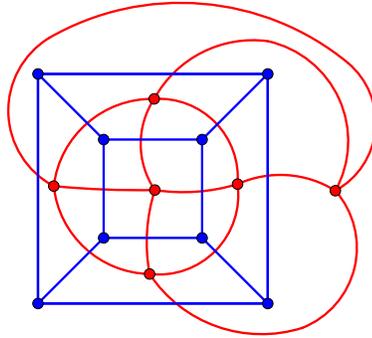


Figura 1.3: La gráfica del cubo en azul y su dual en rojo.

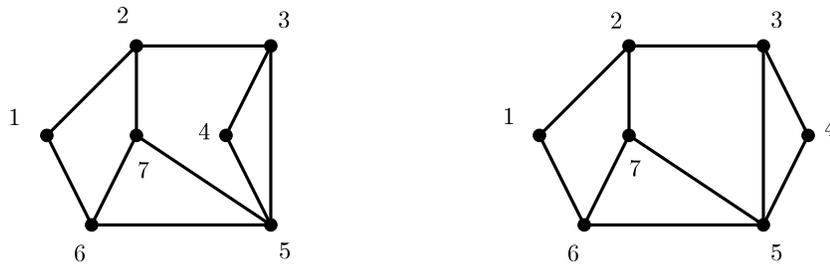


Figura 1.4: Dos encajes distintos de una misma gráfica plana.

arista  $a^* = v_c v_d$  entre sus vértices correspondientes en  $G^*$ . (Véase la figura 1.3). Cabe restallar que por cada arista de  $G$  habrá una arista de  $G^*$  y que aún siendo  $G$  una gráfica simple, la dual  $G^*$  no necesariamente lo es.

Obsérvese que las caras de  $G$  y por lo tanto la gráfica dual  $G^*$  pueden depender del encaje  $i$  escogido, por ejemplo, en la figura 1.4 aparecen dos encajes diferentes de una gráfica. A pesar de que se trata de la misma gráfica, la gráfica dual es diferente para cada dibujo. Vamos a ver que bajo ciertas condiciones, hay gráficas que tienen *esencialmente* un único encaje en el plano, lo que significa que para cualesquiera dos encajes  $i$  e  $i'$  de  $G$ , la gráfica dual es la misma. Si esto pasa, decimos que la gráfica  $G$  es *bien dibujable*.

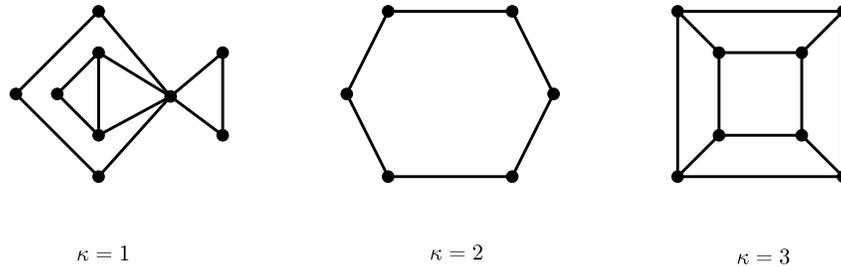


Figura 1.5: Conexidad de algunas gráficas.

Por ejemplo, los ciclos  $C_n$  son bien dibujables pero la gráfica de la figura 1.4 no lo es.

La *conexidad*  $\kappa$  de una gráfica  $G$  se define como el menor número de vértices que hay que quitar para que resulte una gráfica desconexa o trivial (la gráfica trivial consta de un solo vértice). En la figura 1.5 se pueden ver algunos ejemplos de conexidad. Una gráfica se dice  $k$ -conexa, si su conexidad es  $\kappa \geq k$ . Se dice que dos gráficas  $G = (V, A)$  y  $G' = (V', A')$  son *isomorfas* si existe una biyección  $\sigma : V \rightarrow V'$  que preserva la relación de adyacencia entre sus vértices, es decir,  $uv \in A \Leftrightarrow \sigma(u)\sigma(v) \in A'$ . En otras palabras,  $G$  y  $G'$  son combinatoriamente la misma gráfica.

Se sigue de los trabajos de H. Whitney [28], [29] y [30] que son condiciones suficientes para que una gráfica plana  $G$  sea bien dibujable el ser simple, plana y 3-conexa. Whitney define el *dual* de cualquier gráfica de una manera puramente combinatoria, sin la necesidad de recurrir a encajes en el plano. Prueba que una condición necesaria y suficiente para que una gráfica sea plana es precisamente tener un dual (Teorema 29 de [28]). En ese mismo artículo se demuestra que, en las gráficas planas, esta noción combinatoria de *dual* de una gráfica coincide con la versión geométrica que hemos definido aquí y que es típicamente conocida. El siguiente teorema es el Teorema 11 de [29]:

**Teorema 1.1.1.** *Una gráfica (plana) simple, y 3-conexa  $G$  tiene una única gráfica dual  $G^*$ .*

En adelante haremos referencia al Teorema 1.1.1 como *El Teorema de Whitney*. Como consecuencia tenemos que cada cara de  $c$  de  $G$  está determinada por su *camino borde*, que es el ciclo de vértices y aristas  $(v_1, a_1, \dots, v_n, a_n)$  que están en su frontera; así que podemos escribir  $c = (v_1 \cdots v_n)$  o bien  $c = (a_1 \cdots a_n)$ , donde  $a_i = v_i v_{i+1}$  (índices mod  $n$ ). Aquí describiremos a cada cara en términos de los vértices de su camino borde y constantemente diremos que  $v$  *está en*  $c$  refiriéndonos a que  $v$  es uno de los vértices de su camino borde.

Los importantes hechos del párrafo anterior hacen que trabajar con gráficas simples, planas y 3-conexas sea suficientemente cómodo ya que no hay ambigüedad en el conjunto de caras y está bien definida la dualidad. Éstas gráficas coinciden con la noción de *poliedro* entendido como *3-politopo convexo*, que puede definirse como la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en posición general en  $\mathbb{E}^3$ . Hay un teorema debido a E. Steinitz [26] que relaciona estas dos ideas: dado un 3-politopo convexo, este tiene una estructura de incidencia entre vértices, aristas y caras; los vértices y aristas forman lo que se llama el *1-esqueleto* del politopo. El teorema de Steinitz afirma que este 1-esqueleto es siempre una gráfica plana y 3-conexa y, recíprocamente, que toda gráfica plana y 3-conexa corresponde al 1-esqueleto de algún 3-politopo. En vista de estos hechos, en adelante nos referiremos a estas gráficas como poliedros.

Un *poliedro*  $G = (V, A, C)$  es una gráfica simple, plana y 3-conexa. La 3-conexidad significa que si al quitar un subconjunto  $X$  de vértices desconectamos a la gráfica, es decir, obtenemos una gráfica desconexa (o trivial), entonces necesariamente  $|X| \geq 3$ . En otras palabras, si quitáramos cualesquiera dos vértices de  $G$  seguiríamos teniendo una gráfica conexa. En [27] W. T. Tutte estudia con detalle esta propiedad y en el capítulo 3 documentamos las ideas que necesitaremos. En virtud del Teorema de Whitney, un poliedro está determinado por su conjunto de vértices y la relación de adyacencia entre ellos dada por la gráfica  $G$ . Esta relación se puede extender a aristas y a caras: dos aristas  $a$  y  $b$  son *adyacentes* si se intersectan en un vértice; dos caras  $c_1$  y  $c_2$  son *adyacentes* si se intersectan en una arista. Diremos que un vértice  $v$  *incide* en una arista  $a$  o en una cara  $c$  si es cualquiera de los vértices que definen a la arista o a la cara; una arista  $a$  *incide* en una cara  $c$  si es cualquiera de las aristas que definen a la cara. En tales casos escribiremos  $v \in a$ ,  $v \in c$  ó  $a \in c$ , respectivamente. El *grado* de un vértice  $v$ , denotado por

$\delta(v)$ , es el número de vértices de  $G$  que son adyacentes a  $v$ . De la 3-conexidad de  $G$  se desprenden las siguientes propiedades:

- $G$  tiene al menos 4 vértices.
- El grado mínimo  $\delta(G)$  es mayor o igual a 3.
- Cada arista de  $G$  pertenece exactamente a dos caras.
- Dos caras cualesquiera de  $G$  se intersectan en el vacío, en un vértice o en una arista.

Llamaremos a la última propiedad, *propiedad de intersección de caras* para poliedros. Usando la planaridad se puede probar que se cumple la *Fórmula de Euler*:

- $|V| - |A| + |C| = 2$ .

Otra ventaja que tenemos es que si  $G$  es un poliedro, entonces su dual  $G^*$  es también un poliedro: la clase de poliedros es cerrada bajo dualidad. En lo que sigue nos concentraremos en buscar propiedades de aquellos poliedros que son combinatoriamente isomorfos a su dual, es decir, hay una biyección entre  $V(G)$  y  $V(G^*)$  que preserva todas las adyacencias.

## 1.2. Isomorfismos de dualidad.

Una gráfica  $G$  es *autodual* si existe una biyección  $\tau : V(G) \rightarrow V(G^*)$  que preserva las adyacencias entre los vértices de  $G$  y los de  $G^*$ , equivalentemente,  $uv \in A(G) \Leftrightarrow \tau(u)\tau(v) \in A(G^*)$ . Llamaremos *isomorfismo de dualidad* a tal biyección  $\tau$ . Cuando hablamos de dualidad en una gráfica plana que no es 3-conexa, estamos pensando en algún encaje particular. La gráfica autodual más pequeña consta de un sólo vértice: tiene una sola cara y cero aristas, por lo que trivialmente es autodual. Con dos y tres vértices es fácil contar las posibles gráficas autoduales. En la figura 1.6 hemos dibujado todas las gráficas autoduales con dos vértices y en la figura 1.7 con tres vértices. En general, si  $G$  tiene  $n$  vértices y  $m$  aristas, entonces  $G$  tiene  $n$  caras, y de la *Fórmula de Euler* se puede deducir que  $m = 2n - 2$ . Los casos que más nos interesan son los poliedros, para los cuales  $n \geq 4$ .



Figura 1.6: Gráficas autoduales con dos vértices.

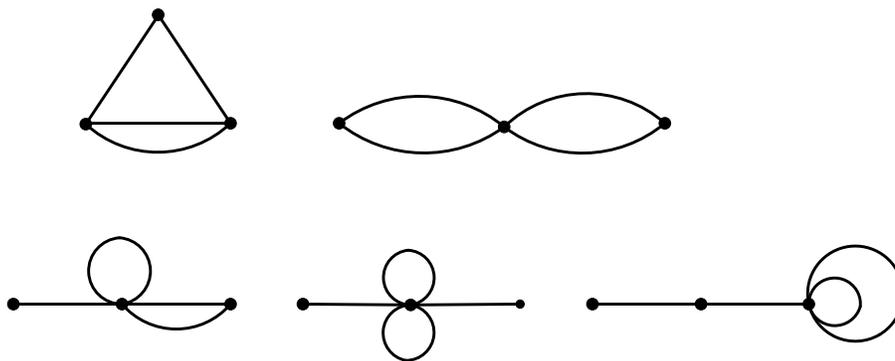


Figura 1.7: Gráficas autoduales con tres vértices.

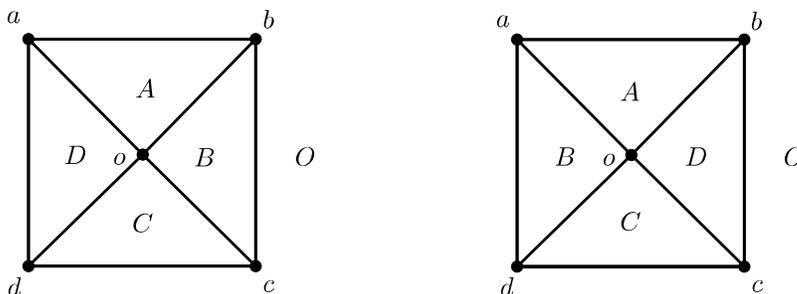


Figura 1.8: Dos isomorfismos de dualidad en un poliedro con 5 vértices.

Sea  $G = (V, A, C)$  un poliedro autodual. El Teorema de Whitney nos garantiza que hay esencialmente una única manera de dibujar a  $G$  en el plano, por lo tanto, las caras y la dualidad están siempre bien definidas. Esto significa que  $G$  tiene una única gráfica dual independiente de cómo se dibuje en el plano. Sin embargo, puede haber más de un isomorfismo de dualidad entre  $G$  y  $G^*$ . Por ejemplo, en la figura 1.8 encontramos dos isomorfismos de dualidad distintos en un poliedro autodual con cinco vértices  $a, b, c, d, o$ . Hemos etiquetado a cada cara con una letra mayúscula, que corresponde a la imagen de un vértice bajo la dualidad. En la siguiente sección comentaremos más acerca de la relación que guardan entre sí los isomorfismos de dualidad.

Un isomorfismo de dualidad  $\tau$  está definido como un isomorfismo de gráficas y como tal *actúa* en el conjunto de vértices de  $G$ . Sin embargo esa *acción* se puede extender también a aristas y caras de  $G$  como sigue: dada una arista  $e = uv \in A(G)$ ,  $\tau(e)$  es la arista de  $G^*$  cuyos extremos son los vértices  $\tau(u)$  y  $\tau(v)$ . Si  $(v_1, \dots, v_k)$  es el camino borde de una cara  $f \in C$ , entonces  $(\tau(v_1), \dots, \tau(v_k))$  es el camino borde de alguna cara de  $G^*$  que corresponde a un vértice  $v$  de  $G$  por lo que podemos definir  $\tau(f) = v$ . Observemos que  $\tau$  preserva también adyacencia entre caras e incidencia entre vértices y caras, por lo cual además de ser un isomorfismo de gráficas, se dice que es un *isomorfismo de poliedros*. Dicho esto vamos a establecer los siguientes lemas:

**Lema 1.2.1.** *Sean  $\tau$  un isomorfismo de dualidad de  $G$  y  $uv$  una arista de  $G$ . Entonces  $\tau(uv) = \tau(u) \cap \tau(v)$ .*

*Demostración.* Por definición de dualidad,  $\tau(u), \tau(v)$  deben ser caras adya-

centes de  $G$ , por lo que se deben intersectar en alguna arista  $xy \in A(G)$ . Ésta arista es precisamente la que define la adyacencia entre  $\tau(u)$  y  $\tau(v)$  en  $G^*$  por lo que  $\tau(uv) = xy$ .  $\square$

**Lema 1.2.2.** *Sean  $\tau$  un isomorfismo de dualidad de  $G$  y  $f = (v_1 \cdots v_r)$  una cara de  $G$ , con  $r \geq 3$ . Entonces  $\tau(f) = \tau(v_1) \cap \cdots \cap \tau(v_r)$ .*

*Demostración.* Nuevamente por definición de dualidad,  $\tau(v_i), \tau(v_{i+1})$  deben ser caras adyacentes de  $G$  para  $i = 1, \dots, r-1$  y  $\tau(v_r), \tau(v_1)$  también deben ser caras adyacentes de  $G$ . Como  $f$  es una cara de  $G$ ,  $\tau(f)$  debe ser un vértice de  $G$  que pertenece a  $\tau(v_i)$  para toda  $i = 1, \dots, r$  por lo que  $\tau(f) \in \tau(v_1) \cap \cdots \cap \tau(v_r)$ . De la propiedad de intersección de las caras de un poliedro, se sigue que  $\tau(v_1) \cap \cdots \cap \tau(v_r) = \tau(f)$ .  $\square$

Los lemas anteriores permiten entender a cada isomorfismo de dualidad  $\tau$  como una permutación del conjunto  $V \cup A \cup C$  con una notación cíclica similar a la que se usa en Teoría de Grupos para escribir permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Más precisamente,  $\tau$  puede escribirse como el producto de  $k$  ciclos ajenos  $(v_1 \ \tau(v_1) \cdots \tau^{r_1-1}(v_1)) \cdots (v_k \ \tau(v_k) \cdots \tau^{r_k-1}(v_k))$ , en los que  $\tau^i(v_j)$  es un vértice cuando  $i$  es par y una cara cuando  $i$  es impar. En el ejemplo de la izquierda en la figura 1.8,  $\tau = (a \ abo \ b \ bco \ c \ cdo \ d \ dao)$  es una permutación que tiene orden 8, mientras que el de la derecha  $\tau' = (a \ abo)(b \ dao)(c \ cdo)(d \ bco)$  tiene orden 2.

Es bien sabido que la dualidad es un operador involutivo, en el sentido de que si tomamos la gráfica dual de la gráfica dual recuperamos la gráfica original; no obstante existen gráficas autoduales que no admiten ningún isomorfismo de dualidad de orden 2. B. Grünbaum y G. C. Shephard [11] definen el *rango* de un poliedro autodual  $G$  como el mínimo entero tal que  $G$  admite un isomorfismo de dualidad de tal orden. En [12], S. Jendrol proporciona un ejemplo de un poliedro autodual de rango 4. Se sabe que el rango de un poliedro autodual es siempre una potencia de 2 (ver [19]). Se suele llamar *involutivos* a aquellos poliedros autoduales que tienen rango 2 y *no involutivos* a aquellos que tienen rango mayor a 2. En este trabajo nos centraremos especialmente en el estudio de los poliedros involutivos.

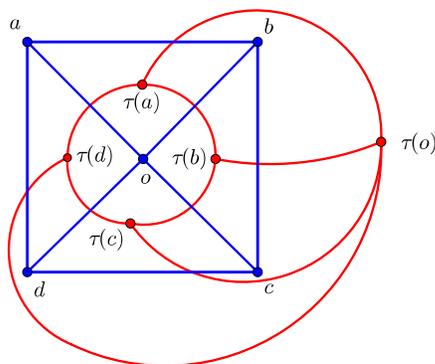


Figura 1.9: Rueda cuadrada  $\mathcal{R}_4$  en azul y su dual en rojo.

### 1.3. Automorfismos y Dualidades.

Sea  $\mathcal{R}_4$  la gráfica azul de la figura 1.9. Esta gráfica es un poliedro conocido como *rueda cuadrada* o también llamada *pirámide cuadrada*. En este caso,  $V = \{a, b, c, d, o\}$ ,  $A = \{ab, bc, cd, da, ao, bo, co, do\}$  y  $C = \{(abo), (bco), (cdo), (dao), (abcd)\}$ . Si intercambiamos los vértices  $b$  y  $d$ , todas las adyacencias se preservan. Seguimos obteniendo la misma gráfica con los mismos conjuntos de vértices, aristas y caras. Esta permutación  $(b\ d)$  es un *automorfismo* de  $\mathcal{R}_4$ . En una gráfica cualquiera  $G = (V, A)$ , un *automorfismo* de  $G$  es una biyección  $\sigma : V \rightarrow V$  que preserva las adyacencias entre sus vértices, es decir,  $uv \in A \Leftrightarrow \sigma(u)\sigma(v) \in A$ .

El conjunto de todos los posibles automorfismos de una gráfica  $G$  forma el *grupo*  $\text{Aut}(G)$ . En el caso de las gráficas planas y 3-conexas, la *acción* de cada automorfismo  $\sigma$  puede extenderse a aristas y caras: si  $uv$  es una arista, entonces  $\sigma(uv)$  es la arista  $\sigma(u)\sigma(v)$  y si  $f = (v_1 \cdots v_r)$  es una cara, entonces  $\sigma(f)$  será la cara  $(\sigma(v_1) \cdots \sigma(v_r))$ . El Teorema de Whitney, nos permite pensar a cada automorfismo de  $G$  como una biyección del conjunto  $V \cup A \cup C$  que preserva las adyacencias e incidencias entre sus elementos.

En el ejemplo que hemos puesto,  $\sigma = (b\ d)$  y la imagen de la cara  $(abo)$  debe ser  $\sigma(abo) = (ado)$ . El grupo  $\text{Aut}(\mathcal{R}_4)$  consta de ocho elementos:  $\{(a\ b)(c\ d), (a\ d)(b\ c), (a\ c), (b\ d), (a\ b\ c\ d), (a\ c)(b\ d), (a\ d\ c\ b), id\}$ , donde  $id$  denota aquella permutación de los vértices que deja fijos a todos los

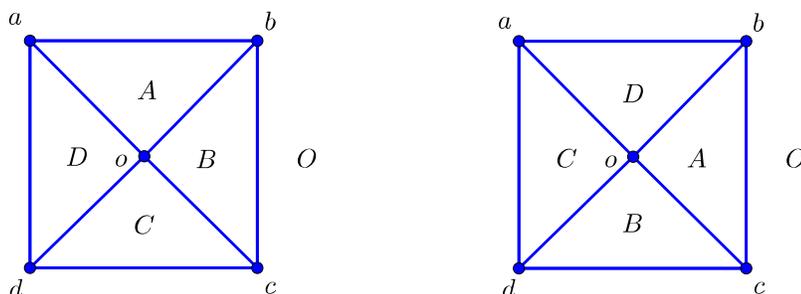


Figura 1.10: Dos isomorfismos de dualidad  $\mathcal{R}_4$ .

elementos. Por la manera en que hemos dibujado al poliedro  $\mathcal{R}_4$  se puede observar que cada uno de estos automorfismos corresponde con una *simetría* del cuadrado: cuatro reflexiones a través de ejes y cuatro rotaciones. Este grupo es conocido como *grupo diédrico*  $D_4$ . En general los grupos diédricos modelan las simetrías de los polígonos regulares: tantas rotaciones y reflexiones como número de lados que tiene la figura.

Cuando  $G$  es autodual, un isomorfismo de dualidad  $\tau : G \rightarrow G^*$  puede ser visto como una biyección de  $V \cup A \cup C$ , que manda elementos de  $V$  en elementos de  $C$ , y viceversa, preservando las adyacencias. El conjunto de todos los posibles isomorfismos de dualidad de  $G$ , que denotaremos por  $\text{Iso}(G)$ , no es un grupo pues la composición de cualesquiera dos de ellos es un automorfismo y no una dualidad. Lo que es cierto es que la unión de  $\text{Aut}(G)$  con  $\text{Iso}(G)$  forma un grupo denotado por  $\text{Dual}(G)$ . Encontrar isomorfismos de dualidad puede ser más o menos difícil, dependiendo de la gráfica, lo mismo que encontrar automorfismos. Lo que es interesante notar es que una vez dado un isomorfismo de dualidad  $\tau$ , podemos encontrarlos todos haciendo actuar  $\text{Aut}(G)$  en  $\text{Iso}(G)$  por composición: dadas  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  y  $\tau \in \text{Iso}(G)$ , su composición  $\tau \circ \sigma$  es un elemento de  $\text{Iso}(G)$ . Esta acción es transitiva, por lo que hay tantos isomorfismos de dualidad como automorfismos de  $G$ .

En la figura 1.10, si  $\tau$  es el isomorfismo de la figura de la izquierda y  $\rho$  es el automorfismo  $(a \ b \ c \ d)$ , la segunda dualidad se obtiene de  $\tau$  mediante la composición  $\rho \circ \tau$ . Si componemos así los ocho automorfismos de  $\mathcal{R}_4$  con  $\tau$ , obtendremos las ocho posibles dualidades de  $\mathcal{R}_4$ , determinando al conjunto

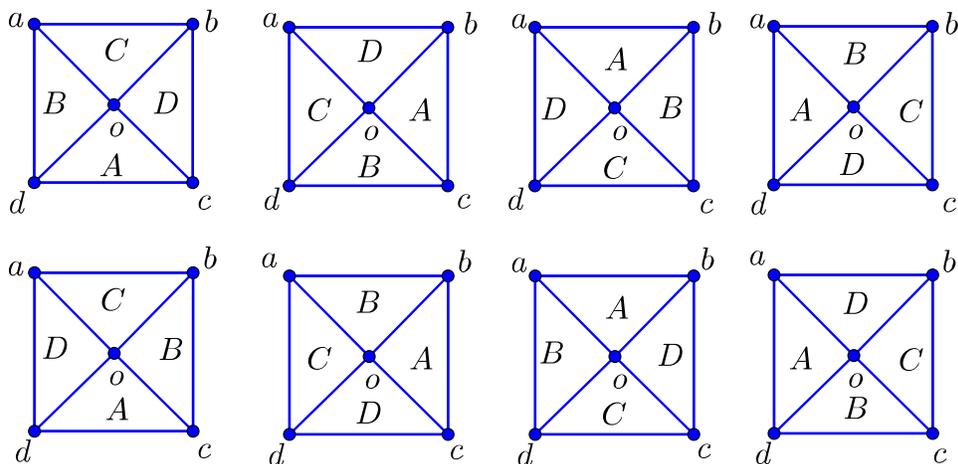


Figura 1.11: Ocho posibles dualidades de  $\mathcal{R}_4$ .

$\text{Iso}(\mathcal{R}_4)$  (figura 1.11). El grupo  $\text{Dual}(\mathcal{R}_4)$  es una  $\mathbb{Z}_2$ -extensión del diédrico  $D_4$ , es decir, el grupo cociente  $\text{Dual}(\mathcal{R}_4)/\text{Aut}(\mathcal{R}_4)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

De este modo, cada gráfica autodual  $G$  tiene naturalmente asociado un par de grupos  $\text{Aut}(G) \triangleleft \text{Dual}(G)$ , siendo  $\text{Aut}(G)$  un subgrupo de índice 2 de  $\text{Dual}(G)$ . Los grupos de automorfismos  $\text{Aut}(G)$  de poliedros autoduales  $G$  fueron clasificados por S. Jendrol en [13]. P. Mani [17] mostró que es posible encontrar un poliedro convexo  $\mathcal{P}$  para cada gráfica plana 3-conexa  $H$  de modo tal que el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}$  es isomorfo a  $H$  y cuyo grupo de simetrías es isomorfo a  $\text{Aut}(H)$ . Se usa la notación de Cóxeter introducida en [8] para grupos generados por isometrías de la esfera.

**Teorema 1.3.1.** *El grupo  $\Gamma$  es un grupo de simetrías  $S(\mathcal{P})$  de un poliedro convexo autodual  $\mathcal{P}$  si, y sólo si  $\Gamma$  es uno de los grupos de la siguiente lista:*

$$[q], [q]^+, q \geq 1, \quad [2, 2], [2, 2]^+, [2, 2^+], [2^+, 4], [2^+, 2^+], [2^+, 4^+], [3, 3], [3, 3]^+$$

Los detalles de este teorema pueden consultarse en [13], en donde Jendrol establece también relaciones entre algunos de estos grupos y el rango de los poliedros, en particular muestra que para cada grupo  $\Gamma$  de la lista anterior hay un poliedro autodual involutivo con grupo de simetrías isomorfo a  $\Gamma$ .

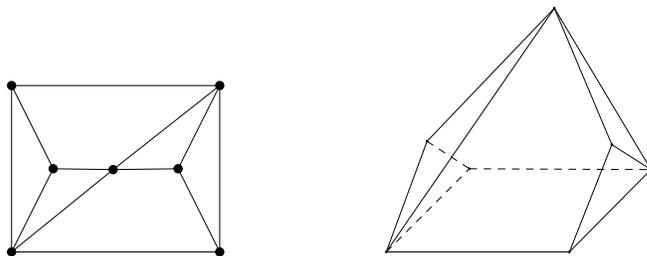


Figura 1.12: 1-esqueleto de un poliedro convexo  $\mathcal{P}$  con 7 vértices.

En [25], B. Servatius y H. Servatius muestran que el grupo de automorfismos no determina al grupo de dualidades y dan una clasificación de gráficas autoduales en términos de los pares  $\text{Aut}(G)$ ,  $\text{Dual}(G)$  llamados *pares de auto-dualidad*. En ese trabajo prueban que existen 24 posibles pares distintos que corresponden a gráficas autoduales; los enlistaremos en el teorema 2.5.2. Todos estos grupos pertenecen a una clase importante de grupos conocida como *Grupos de Cóxeter*, que rigen leyes de simetría de objetos geométricos por lo que están descritos en términos de isometrías de la esfera. Estudiaremos a detalle estos grupos y la notación de Cóxeter en el capítulo 2.

En [1], D. Archdeacon y R. B. Richter se proponen construir y clasificar todos los poliedros autoduales; para ello replantean el problema en términos de cuadrangulaciones utilizando la *gráfica radial*  $R(G)$  de  $G$ , cuyo conjunto de vértices es  $V(R(G)) = V(G) \cup C(G)$  y existe una arista entre dos elementos de  $V(R(G))$  si estos son incidentes, es decir si son un vértice  $v \in V(G)$  y una cara  $f \in C(G)$  tales que  $v \in f$ . Resulta que  $R(G)$  es siempre una gráfica plana bipartita (2-coloreable) cuyas caras son cuadriláteros, llamada una *cuadrangulación* y, reciprocamente, toda cuadrangulación corresponde a la gráfica radial de alguna gráfica  $G$ . Con esta reinterpretación, un isomorfismo de dualidad  $\tau$  induce un automorfismo de la gráfica radial  $R(G)$  que invierte la coloración y, reciprocamente, cada cuadrangulación con un automorfismo que invierte los colores de sus vértices corresponde a una gráfica autodual  $G$  con un isomorfismo de dualidad. En ese trabajo, ellos utilizan gráficas de voltaje para definir seis construcciones topológicas que dan lugar a todos los posibles poliedros autoduales en la esfera: tres de ellas corresponden a

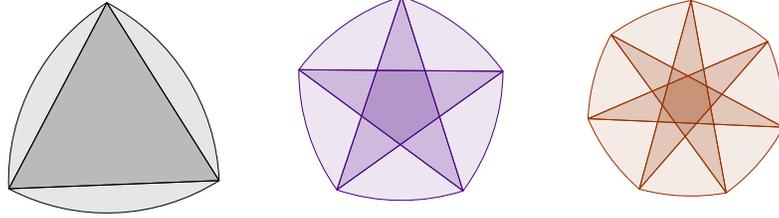


Figura 1.13: Polígonos de Reuleaux.

poliedros involutivos y las otras tres a poliedros no involutivos.

## 1.4. Nuestra pregunta central.

Dado un punto  $p$  en el plano  $\mathbb{E}^2$ , denotamos por  $B(p)$  al conjunto  $\{x \in \mathbb{E}^2 : |x - p| \leq 1\}$  llamado *bola centrada en  $p$* . Considérese un triángulo equilátero con vértices  $a, b$  y  $c$ . La intersección de las *bolas*  $B(a) \cap B(b) \cap B(c)$  es una figura plana conocida como el *Triángulo de Reuleaux*. Algo análogo se puede hacer para cualquier polígono regular con un número impar de lados. En la figura 1.13 se muestran algunos *Polígonos de Reuleaux*. Los polígonos de Reuleaux tienen la propiedad de ser *figuras de ancho constante*: figuras planas convexas que tienen el mismo ancho en cualquier dirección.

En tres dimensiones podemos definir un *poliedro bola*  $\Omega$  como la intersección de un número finito (al menos tres) bolas 3-dimensionales de radio 1 en  $\mathbb{E}^3$ . La frontera de un poliedro bola  $\partial\Omega$  se puede representar como la unión de vértices, aristas y caras definidas de manera natural, dando lugar a una gráfica  $G_\Omega$  encajada en  $\partial\Omega$  (ver[21]). Las caras son las cerraduras de las componentes de  $\partial\Omega \setminus G_\Omega$ , donde cada cara es un subconjunto cerrado de una esfera de radio 1. Además, cada cara de  $G_\Omega$  es un arco de un círculo cuyo radio es menor que 1. Si además se cumple la *propiedad de intersección de caras* (ver el final de la sección 1), se dice que  $\Omega$  es un poliedro bola *estándar*, y su gráfica correspondiente  $G_\Omega$  es una gráfica simple, plana y 3-conexa. Sea  $\Omega$  un poliedro bola estándar definido por un conjunto de puntos  $X \subset \mathbb{E}^3$ , es decir,  $\Omega$  es la intersección de una colección de bolas cerradas

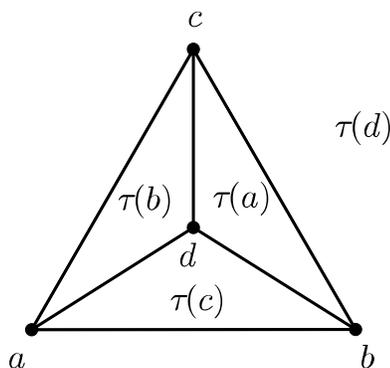


Figura 1.14:  $K_4$ , la gráfica completa con 4 vértices.

3-dimensionales de radio 1 centradas en los puntos del conjunto  $X$ . Decimos que  $\Omega$  es un *Poliedro de Reuleaux* si  $\Omega$  tiene la propiedad de que los vértices de la gráfica  $G_\Omega$  son precisamente los puntos de  $X$ .

Es natural preguntarse sobre la existencia de poliedros de Reuleaux en tres dimensiones y es precisamente esta la pregunta que sirve para inspirar este trabajo. Los poliedros de Reuleaux se obtienen a partir de gráficas planas, 3-conexas y autoduales (ver [20]), de las cuales la más pequeña es  $K_4$ : consta de cuatro vértices  $a, b, c, d$  conectados entre sí por todas las posibles aristas entre ellos:  $ab, ac, ad, bc, bd$  y  $cd$ . En la figura 1.14 se muestra un dibujo en el que se puede ver que esta gráfica es autodual con isomorfismo de dualidad  $\tau = (a\ bcd)(b\ acd)(c\ abd)(d\ abc)$ .

Esta gráfica puede encajarse en el espacio euclidiano  $\mathbb{E}^3$  de manera que la distancia euclidiana entre cada vértice y todos los vértices que están en su *cara dual* es 1, en otras palabras, para  $x, y \in V(K_4)$ ,

$$|x - y| = 1 \Leftrightarrow x \in \tau(y)$$

lo cual permite hacer una construcción análoga al Triángulo de Reuleaux: tomamos la intersección de las bolas 3-dimensionales centradas en  $a, b, c$  y  $d$ :  $B(a) \cap B(b) \cap B(c) \cap B(d)$  y obtenemos un *poliedro bola* conocido como

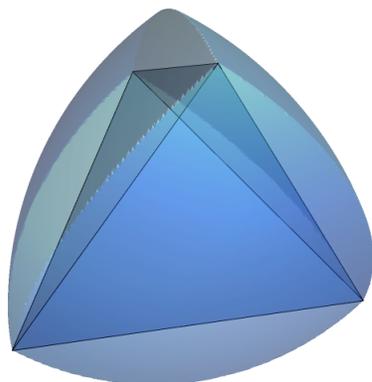


Figura 1.15: Tetraedro de Reuleaux.

*Tetraedro de Reuleaux* (véase la figura 1.15). En este trabajo estudiaremos las condiciones necesarias para las gráficas autoduales que dan lugar a los Poliedros de Reuleaux y nos preguntamos en qué casos estas condiciones son suficientes. Una referencia del trabajo documentado en este tema es [21].

*¿Cuáles gráficas autoduales dan lugar a Poliedros de Reuleaux?.*

La pregunta puede traducirse en determinar condiciones bajo las cuales una gráfica autodual  $G$  admite un *encaje métrico* en el espacio euclidiano  $\mathbb{E}^3$ , esto es, una función inyectiva  $\eta : V \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que si  $x$  y  $y$  son vértices de la gráfica, entonces la distancia euclidiana  $|\eta(x) - \eta(y)| = 1$  si, y sólo si  $x \in \tau(y)$ , para alguna  $\tau \in \text{Iso}(G)$  y además el diámetro  $\text{diám}(\eta(V)) = 1$ , siendo  $\text{diám}(\eta(V)) = \max\{|\eta(x) - \eta(y)| : \eta(x), \eta(y) \in \eta(V)\}$ . Para que  $\tau$

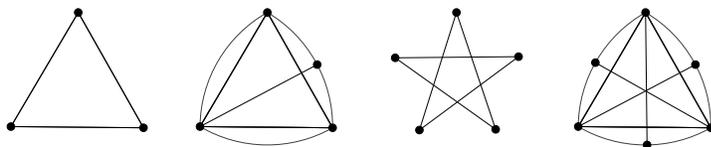


Figura 1.16: Configuraciones extremas para  $d = 2$  y  $n = 3, 4, 5$  y  $6$ .

cumpla esto, se deben satisfacer las siguientes dos condiciones:

- (i)  $\tau^2 = id \in \text{Dual}(G)$ .
- (ii) Para todo  $v \in V(G)$ ,  $v$  no está en  $\tau(v)$ .

Una forma equivalente para la condición (i) es:  $u \in \tau(v) \Leftrightarrow v \in \tau(u)$ . Si  $\tau$  es un isomorfismo de dualidad que cumple (i) y (ii) diremos que  $\tau$  es una *involución fuerte*. Si  $G$  admite una involución fuerte decimos que  $G$  es *fuertemente involutiva*. No toda gráfica autodual es fuertemente involutiva tal y como veremos en los ejemplos de la siguiente sección.

Este es un problema de particular interés para las geometrías convexa y discreta. Por un lado, cuando una gráfica plana y 3-conexa  $G$  admite un encaje métrico, hay un procedimiento descrito por L. Montejano y E. Roldán-Pensado en [20] para construir un *cuerpo de ancho constante*: un cuerpo convexo que tiene el mismo ancho en cualquier dirección. Por otro lado es un problema relacionado con el famoso *problema de Vázsonyi* [14] acerca de los polítopos bola. Lo presentamos en los siguientes párrafos.

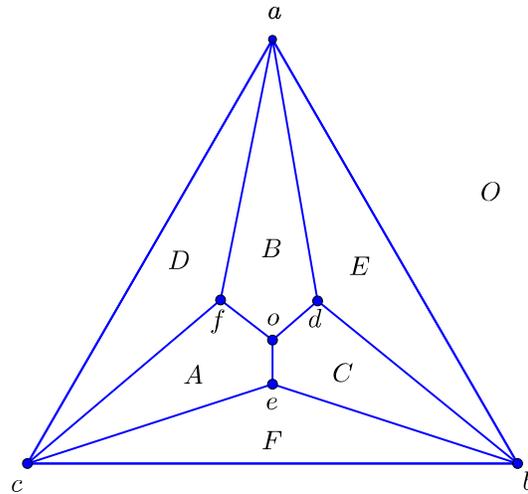
Sea  $T$  un conjunto de  $n \geq 2$  puntos en  $\mathbb{E}^d$ . Se define el *diámetro* de  $T$  como  $\text{diám}(T) = \max\{|x - y| : x, y \in T\}$ . La *excentricidad* de  $T$  es  $e(T) = \{\{x, y\} \subseteq T : |x - y| = \text{diám}(T)\}$ . Dados  $d, n \in \mathbb{N}$ , se define  $e(d, n) = \max\{e(T) : T \subseteq \mathbb{E}^d, |T| = n\}$ . Se dice que  $T$  es *configuración extrema* si  $n > d$  y  $e(T) = e(d, n)$ . El caso  $d = 1$  es demasiado sencillo. Para  $d = 2$  las configuraciones extremas están bien estudiadas y se conocen bien. Se sabe que  $T \subseteq \mathbb{E}^2$  es configuración extrema si, y sólo si  $\text{vert}\mathcal{P} \subseteq T \subseteq \text{bd}\mathcal{P}$  para algún polígono de Reuleaux  $\mathcal{P}$ . Aquí  $\text{bd}\mathcal{P}$  denota la frontera de  $\mathcal{P}$ .

Para  $d = 3$ , A. Vázsonyi conjeturó que  $e(3, n) = 2n - 2$ , para  $n \geq 4$ , y fueron B. Grünbaum, A. Heppes y S. Straszewicz quienes probaron esto en forma independiente. El problema de Vázsonyi consiste en describir y caracterizar todas las configuraciones extremas para  $d = 3$ . Se define el *politopo bola*  $\mathcal{B}(T)$  asociado a  $T$  como la intersección de todas las bolas de radio  $\text{diám}(T)$  con centros en  $T$ . Cuando  $e(T) = 2n - 2$  el politopo bola  $\mathcal{B}(T)$  es *fuertemente autodual* en el sentido de que admite una dualidad que se comporta como una involución fuerte cuando  $\mathcal{B}(T)$  tiene estructura combinatoria de poliedro: los vértices, aristas y caras dadas por la estructura facial del politopo bola forman un 3-politopo (Kupitz *et al.*, [14]). Esto no pasa siempre, existe una configuración  $T \subseteq \mathbb{E}^3$  con ocho vértices en la que  $\mathcal{B}(T)$  no es combinatoriamente equivalente a un 3-politopo. Otras referencias importantes en el tema de los politopos bola y el problema de Vázsonyi son L. Lóvasz [16], K. Bezdek *et al.* [3] y el libro sobre cuerpos de ancho constante de H. Martini, L. Montejano y D. Oliveros [18].

Finalmente, en la sección siguiente además de explorar ejemplos de gráficas fuertemente involutivas y no fuertemente involutivas, mencionamos una conexión con un problema famoso de P. Erdős [9] acerca de gráficas que se pueden encajar en el espacio de manera que todas sus aristas sean segmentos de recta de longitud 1. En el capítulo 4 de esta tesis documentamos parte del trabajo que se realiza actualmente para construir encajes métricos de familias infinitas de poliedros fuertemente involutivos. Estos poliedros además de que podrían servir para construir cuerpos de ancho constante, son ejemplos de configuraciones extremas en el sentido de Vázsonyi y proveen familias de gráficas que dan una respuesta afirmativa a este problema de Erdős.

## 1.5. Algunos ejemplos.

El *triángulo con orejas* es la gráfica  $\mathcal{O}_3$  de la figura 1.17; es un poliedro autodual. ¿Será posible encontrar una dualidad  $\tau$  que permita encajarla en el espacio  $\mathbb{E}^3$  con la propiedad de que la distancia euclidiana entre cada vértice y los vértices de su cara dual sea 1? Hemos etiquetado a cada región con la letra mayúscula correspondiente a la imagen de cada vértice bajo el isomorfismo de dualidad  $\tau$ , por ejemplo,  $D = \tau(d) = (afc)$ . Lo primero que salta a la vista es que no debe ocurrir que  $d$  esté en su cara dual  $D$ . Hemos

Figura 1.17: Triángulo con Orejas  $\mathcal{O}_3$ .

seleccionado una  $\tau$  cuidando este detalle:

- Para cada  $v \in V$ ,  $v \notin \tau(v)$ .

Esta es una condición necesaria para los poliedros autoduales  $G$  que estamos buscando. Para citar otra vamos a definir la *gráfica de distancias*  $\mathcal{D}_\tau(G)$  como la gráfica cuyos vértices son  $V(\mathcal{D}_\tau(G)) = V(G)$  y  $uv \in A(\mathcal{D}_\tau(G))$  si y sólo si  $u \in \tau(v)$  ó  $v \in \tau(u)$ . En general se define la *dimensión*  $\dim(G)$  de una gráfica como el mínimo entero  $d$  con la propiedad de que  $G$  se puede encajar en el espacio  $\mathbb{E}^d$  con aristas de longitud 1. Otra condición necesaria es:

- $\dim(\mathcal{D}_\tau(G)) \leq 3$ .

Como ejercicio obsérvese que no existen cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera dos estén a distancia 1. En el espacio tridimensional, los vértices de un tetraedro regular cumplen esa propiedad, lo cual muestra que  $\dim(K_4) = 3$ . De forma muy similar se puede probar que  $\dim(K_5) = 4$ . En el caso de la figura 1.17 se puede verificar que la gráfica de distancias contiene a  $K_5$  como subgráfica, por lo que su dimensión es mayor a 3. En [9] P. Erdős, F. Harary y W. T. Tutte exploran el problema de encontrar la dimensión

de ciertas gráficas y en [4], L. Boza y M. P. Revuelta calculan la dimensión de algunas gráficas importantes y muestran algunas gráficas prohibidas para el caso de dimensión 2. Una gráfica  $G$  se dice *prohibida* respecto a cierta propiedad, si  $G$  no tiene la propiedad pero cualquier subgráfica  $H$  de  $G$  sí la tiene. En este sentido,  $K_5$  es una gráfica prohibida para las gráficas que tienen dimensión 3.

Sean  $\sigma$  y  $\tau$  un automorfismo y una dualidad de  $G$ , respectivamente. Es evidente que  $\sigma\tau$  y  $\tau\sigma$  son elementos de  $\text{Iso}(G)$  que, en principio, no tendrían por qué coincidir, pero cuando sí, decimos que  $\sigma$  y  $\tau$  son *compatibles*. Veamos dos ejemplos diferentes: en la figura 1.11 vimos los ocho isomorfismos de dualidad posibles para la rueda cuadrada  $\mathcal{R}_4$ , entre los cuales solo los dos primeros verifican la condición de que no hay un vértice que esté en su cara dual. Estos son  $\tau = (a\ c\ d\ b\ a\ d\ o\ c\ a\ b\ o\ d\ b\ c\ o)$  y  $\sigma\tau = (a\ b\ c\ d\ a\ b\ o\ c\ a\ d\ o\ b\ c\ d\ o)$ , relacionados entre sí por el automorfismo  $\sigma = (a\ b\ c\ d)$  que es compatible con  $\tau$ . Las correspondientes gráficas de distancias son isomorfas a  $K_5$  por lo que no hay esperanza para este poliedro.

Examinando la gráfica  $\mathcal{O}_3$  de la figura 1.17 vemos que el automorfismo  $\sigma = (a\ c\ b)(d\ f\ e)$  también es compatible con  $\tau$  y también  $\tau\sigma$  verifica la condición de que no hay vértices que estén en sus caras duales. De nuevo, las correspondientes gráficas de distancias son isomorfas. En la figura 1.19 se muestra esta gráfica de distancias y en la 1.18 las seis posibles dualidades.

Dos dualidades son *compatibles* si difieren por un automorfismo  $\sigma$  compatible. En tal caso, si  $uv$  es una arista de la gráfica de distancias  $\mathcal{D}_\tau(G)$ , entonces  $\sigma(u)\sigma(v)$  es arista de  $\mathcal{D}_{\sigma\tau}(G)$ . ¿Será cierto que si dos isomorfismos de dualidad son compatibles, entonces sus gráficas de distancias son isomorfas? En estos ejemplos hemos podido encontrar a  $K_5$  usando un algoritmo muy amigable: cada vez que tengamos un triángulo intentamos completarlo a un  $K_4$ , una vez encontrado un  $K_4$  intentamos completarlo a un  $K_5$ , pero ¿será suficiente no tener  $K_5$  para que  $G$  admita la construcción de Reuleaux? Desde luego las gráficas de distancias no deben tener *loops*, debido a la condición de no pegar vértices en sus caras duales.

Las figuras 1.20 y 1.21 muestran dos ejemplos más de gráficas autoduales: el *panqué triangular*  $\mathcal{P}_3$  y el *cuadrado con orejas*  $\mathcal{O}_4$ . Busquemos algunos posibles isomorfismos de dualidad para este último. En la figura 1.22 hemos

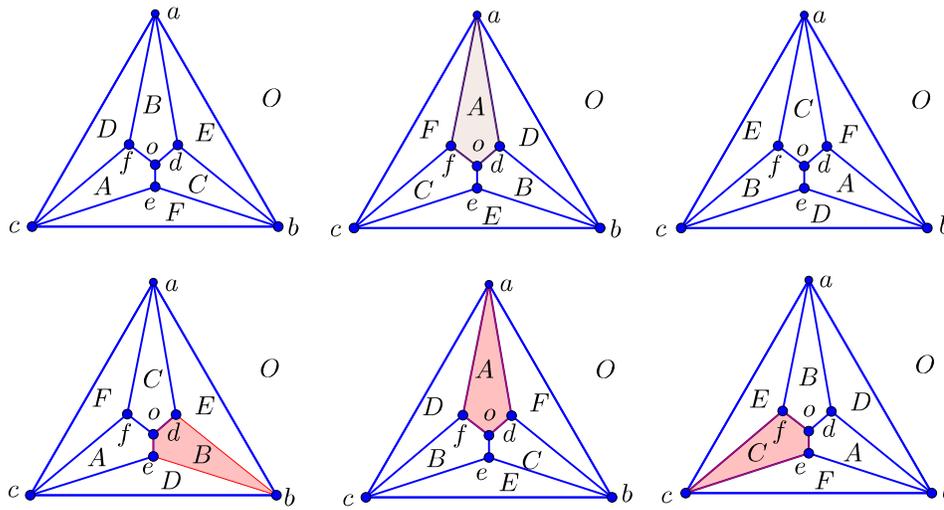


Figura 1.18: Seis posibles dualidades de  $\mathcal{O}_3$ .

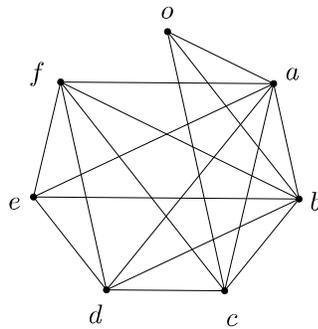
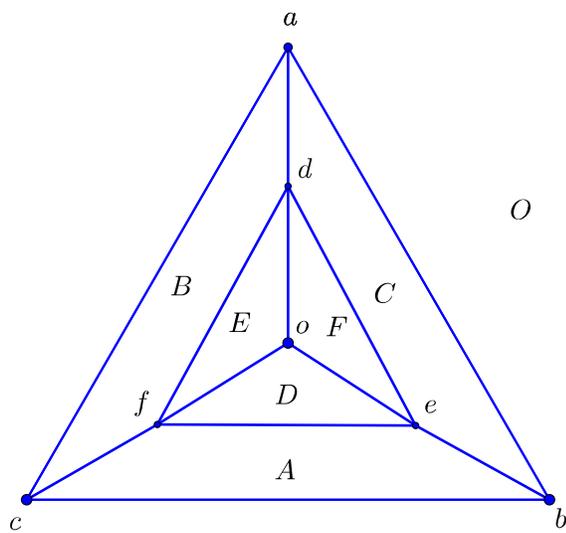
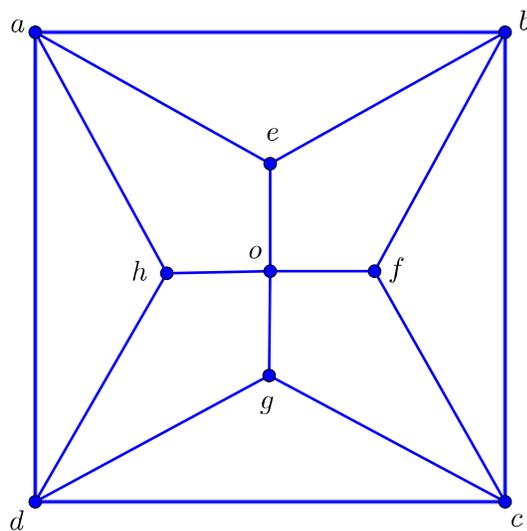


Figura 1.19: Gráfica de distancias de  $\mathcal{O}_3$  para  $\tau$  y  $\sigma\tau$ .

Figura 1.20: Panqué triangular  $\mathcal{P}_3$ .Figura 1.21: Cuadrado con orejas  $\mathcal{O}_4$ .

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>o</i>
<i>abcd</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	• • •
<i>aeoh</i>	×	•	•	•	×	×	×	×	×
<i>bfoe</i>	•	×	•	•	×	×	×	×	×
<i>cgof</i>	•	•	×	•	×	×	×	×	×
<i>dhog</i>	•	•	•	×	×	×	×	×	×
<i>abe</i>	×	×	×	×	×	•	•	•	×
<i>bcf</i>	×	×	×	×	•	×	•	•	×
<i>cdg</i>	×	×	×	×	•	•	×	•	×
<i>dah</i>	×	×	×	×	•	•	•	×	×

Figura 1.22: Tabla de isomorfismos para  $\mathcal{O}_4$ .

creado una tabla donde para cada vértice  $v$  de la fila de arriba hemos tachado las casillas de su columna que no pueden ser imagen de  $v$ , ya sea por que  $v$  es uno de los vértices que forman la cara o por que los grados de sus vecinos no corresponden a las longitudes de las caras adyacentes a cada una de las regiones que están en la columna izquierda. Esto determina algunos bloques de posibles imágenes de  $v$ . Si escogemos una cara para que sea  $\tau(v)$ , colocamos un punto de color verde, digamos, y completamos el resto de las imágenes de acuerdo a las adyacencias de la gráfica. Esto nos da como resultado tres isomorfismos de dualidad que hemos indicado con los colores rojo, verde y azul. Utilizando los lemas que establecimos en la sección 1.2, podemos ver que el isomorfismo verde es, de hecho, una involución y su gráfica de distancias no contiene a  $K_5$ . En [20], L. Montejano y E. Roldán-Pensado muestran un encaje de las gráficas de distancias para estos ejemplos en  $\mathbb{E}^3$  con aristas de longitud 1 y se puede ver como en las figuras 1.24 y 1.23.

Analizando estos tres ejemplos de gráficas autoduales: la rueda o pirámide  $q$ -agonal  $\mathcal{R}_q$ , el  $q$ -ágono con orejas  $\mathcal{O}_q$  y el panqué  $q$ -agonal  $\mathcal{P}_q$ , observamos que tienen en común el hecho de que su grupo de automorfismos es isomorfo al grupo diédrico  $D_q$ . Terminaremos el capítulo con dos ejemplos más de

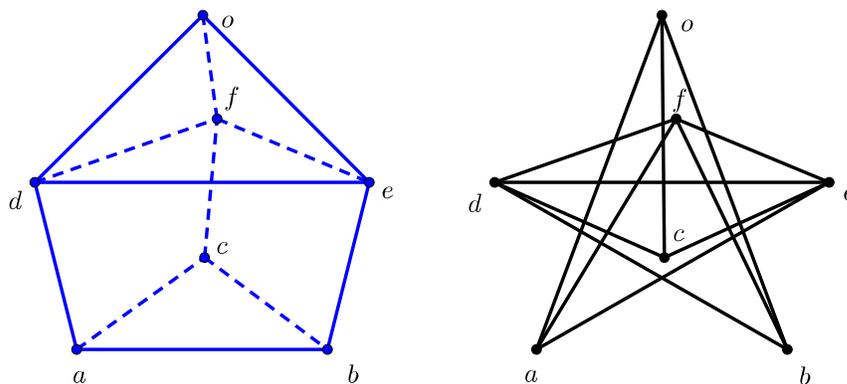


Figura 1.23: Encaje de  $\mathcal{P}_3$  y su gráfica de distancias en  $\mathbb{E}^3$ .

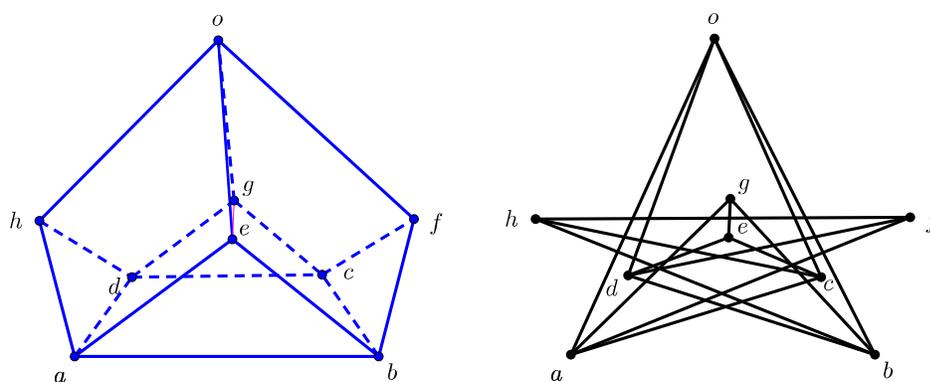


Figura 1.24: Encaje de  $\mathcal{O}_4$  y su gráfica de distancias en  $\mathbb{E}^3$ .

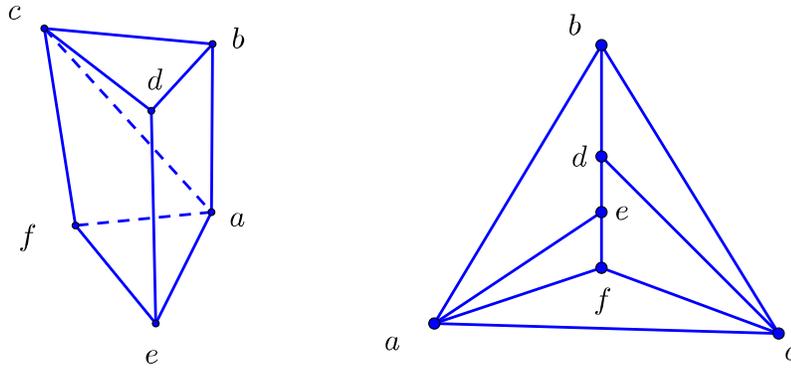


Figura 1.25: Poliedro autodual con grupo de automorfismos isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

poliedros autoduales mostrados en las figuras 1.25 y 1.26. El primero de ellos tiene grupo de automorfismos isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$  por lo que tiene exactamente dos isomorfismos de dualidad, y ninguno de ellos satisface que  $v \notin \tau(v)$ , para todo  $v$ . El segundo no tiene automorfismos no triviales y por lo tanto tiene un sólo isomorfismo de dualidad. En el siguiente capítulo estudiaremos los grupos de automorfismos y dualidades desde el punto de vista de la geometría esférica el cual nos permitirá detectar involuciones fuertes de una manera geométrica y finalmente clasificar los pares de auto-dualidad que corresponden a los poliedros en los que estamos interesados.

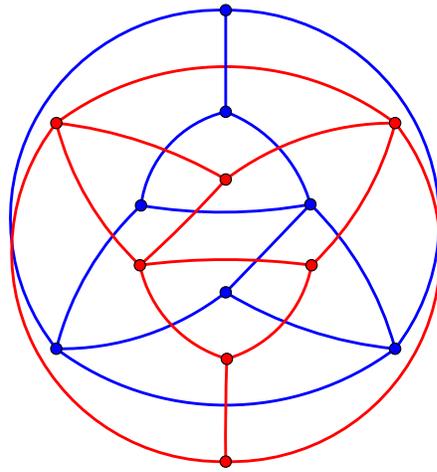


Figura 1.26: Poliedro autodual con grupo de automorfismos trivial.

# Capítulo 2

## $\mathbb{S}^2$ y su Geometría.

En este capítulo estudiaremos los grupos de isometrías de la esfera  $\mathbb{S}^2$  que dan lugar a gráficas autoduales. Trabajaremos con gráficas planas encajadas en la superficie  $\mathbb{S}^2$  y el resultado fundamental será el Lema del Encaje Isométrico 2.2.1 que nos permite pensar que las simetrías y dualidades de la gráfica son isometrías de la esfera. Por ejemplo, las simetrías de un hexágono regular generan al grupo diédrico  $D_6$  que consta de seis rotaciones y seis reflexiones. Si  $\sigma$  es una de estas reflexiones y  $\rho$  es la rotación por ángulo  $\frac{2\pi}{6}$ , entonces  $\sigma$  y  $\rho$  satisfacen las relaciones  $\sigma^2 = \rho^6 = id$ , y  $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$ . Esto es una *presentación* del grupo diédrico  $D_6$ . Una segunda presentación para  $D_6$  se obtiene con las reflexiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  a través de las rectas  $y = 0$  y  $y = mx$ , con  $m = \tan(\frac{\pi}{6})$  (figura 2.1). La composición  $\sigma_2\sigma_1$  resulta ser la rotación por el doble del ángulo entre las dos rectas.

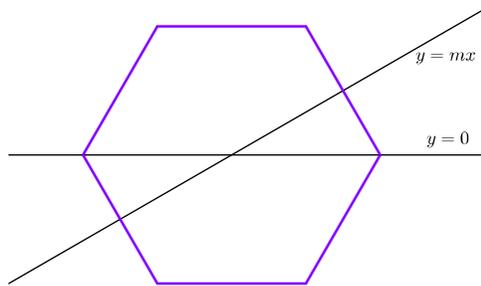
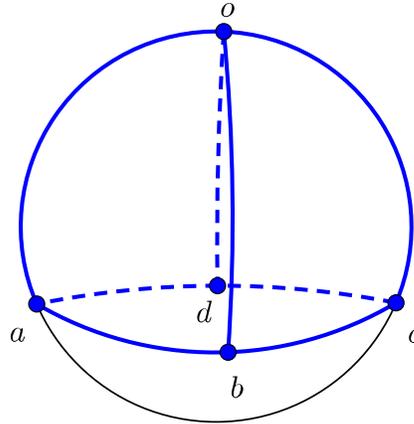


Figura 2.1: Reflexiones de un hexágono regular.

Figura 2.2: Encaje isométrico de  $\mathcal{R}_4$  en  $\mathbb{S}^2$ .

Las potencias de  $\sigma_2\sigma_1$  generan todas las rotaciones y cada una de las otras reflexiones puede obtenerse al componer cada una de esas rotaciones con  $\sigma_1$  ó  $\sigma_2$ . Si damos una orientación al hexágono, por ejemplo en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, distinguimos dos tipos de simetrías: las que conservan la orientación y las que la invierten; una reflexión invierte la orientación y cualquier composición de un número par de reflexiones la conserva.

En la superficie de la esfera se puede obtener el grupo diédrico  $D_q$  al considerar las reflexiones en dos planos que pasan por el origen y que forman entre sí un ángulo de  $\frac{\pi}{q}$ . Si llamamos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  a éstas reflexiones, el grupo diédrico queda determinado por las relaciones  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = (\gamma_1\gamma_2)^q = id$ . De acuerdo con la notación de Cóxeter, denotaremos a éste grupo por  $[q]$  (ver [8]). Para algunos de nuestros ejemplos es fácil imaginar una manera de encajarlos en la esfera de manera que cualquiera de sus automorfismos sea una isometría de la propia esfera, esto es, una transformación de la esfera en sí misma que preserva la distancia entre cualesquiera dos puntos. Este tipo de encaje será muy importante para nuestro estudio y nos referiremos a él como *encaje isométrico*. En la figura 2.2 se muestra cómo podría verse un encaje isométrico para  $\mathcal{R}_4$ . Vamos a ver que es posible hacer esto para cualquier gráfica plana, lo cual nos permite interpretar geoméricamente a

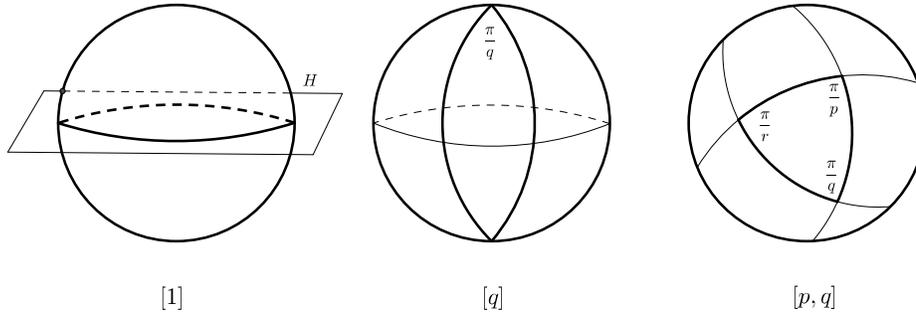


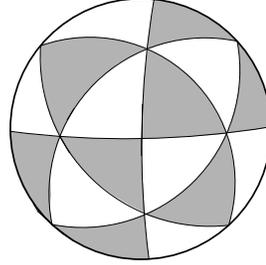
Figura 2.3: Reflexiones en uno, dos y tres planos.

los poliedros, a sus simetrías (automorfismos) y a sus dualidades.

## 2.1. Los Grupos finitos de isometrías de $\mathbb{S}^2$ .

Comenzaremos con un breve sumario de los grupos finitos de isometrías de la esfera usando la notación de H. S. M. Cóxeter [8]. Una isometría de  $\mathbb{S}^2$  puede ser una reflexión, una rotación o una composición de estas; una buena referencia es [7]. Cada isometría puede ser expresada como composición de a lo más tres reflexiones, así que podemos comenzar con los grupos que son generados por reflexiones y después enumerar algunos de los subgrupos que necesitaremos. El caso más sencillo es el grupo que genera una sola reflexión. Considérese  $H$  un plano que pasa por el centro de la esfera. La reflexión  $\gamma$  a través de  $H$  es una isometría involutiva y por ello el grupo que genera debe ser cíclico de orden 2. Este grupo se denota por [1].

Dos planos  $H_1$  y  $H_2$  con ángulo  $\angle(H_1, H_2) = \frac{\pi}{q}$  delimitan una *lúnula* (figura 2.3). Las reflexiones  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  a través de estos planos generan al grupo [q] que es isomorfo a  $D_q$  y cuya presentación es  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = (\gamma_1\gamma_2)^q = id$ . El siguiente caso es el grupo  $[p, q]$  generado por las reflexiones  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  en los lados de un triángulo esférico con ángulos  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$  y  $\frac{\pi}{r}$ . De la geometría esférica sabemos que la suma de estos tres ángulos debe ser mayor a  $\pi$  por lo que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ . En esta última desigualdad se puede ver que  $\min\{p, q, r\} = 2$  y por lo tanto  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$  que se puede reescribir como  $(p-2)(q-2) < 4$ .

Figura 2.4: El grupo  $[3, 3]$ .

Analizando los posibles enteros  $p, q$  que verifican esta desigualdad obtenemos los casos  $[3, 3]$ ,  $[3, 4]$ ,  $[3, 5]$  y  $[2, q]$  para el grupo  $[p, q]$  o  $[q, p]$  definido por las relaciones  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = (\gamma_1\gamma_2)^p = (\gamma_2\gamma_3)^q = (\gamma_1\gamma_3)^2 = id$  y cuya *región fundamental* es un triángulo esférico con ángulos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Estos son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos:  $[3, 3]$  para el tetraedro,  $[3, 4]$  para el cubo y el octaedro,  $[3, 5]$  para el dodecaedro e icosaedro y  $[2, q]$  para un poliedro con forma de diamante cuyo dual corresponde a un prisma de base  $q$ -agonal.

Cada uno de estos grupos tiene un subgrupo rotatorio que consta solo de las posibles rotaciones generadas por pares de reflexiones. El subgrupo rotatorio de  $[q]$  es denotado  $[q]^+$  y consta únicamente de las potencias de  $\gamma_1\gamma_2$ . Por supuesto que  $[1]^+$  es el grupo trivial. El subgrupo rotatorio de  $[p, q]$  es  $[p, q]^+$  y tiene como generadores a las rotaciones  $\gamma_1\gamma_2$ ,  $\gamma_2\gamma_3$  y  $\gamma_3\gamma_1$ . Estos son subgrupos de índice 2. Cuando  $q$  es par,  $[p, q]$  tiene otro subgrupo de índice 2 denotado  $[p^+, q]$  o  $[q, p^+]$  generado por  $\rho = \gamma_1\gamma_2$  que es una rotación de orden  $p$  y la reflexión  $\gamma_3$ . Finalmente el grupo  $[2^+, q]$  tiene a su vez un subgrupo de índice 2. Este subgrupo es denotado  $[2^+, q^+]$  y es un grupo cíclico generado por  $\rho\gamma_3$  (ver [8] para más detalles).

## 2.2. El Lema del Encaje Isométrico.

El siguiente resultado es fundamental para nuestro estudio de los poliedros autoduales y la demostración puede leerse en [25].

**Lema 2.2.1.** *Dada cualquier gráfica plana  $G = (V, A)$  existe un encaje  $i$  de  $G$  en la superficie  $\mathbb{S}^2$  tal que para todo automorfismo  $\sigma$  de la gráfica existe una isometría  $\tilde{\sigma}$  de  $\mathbb{S}^2$  que cumple  $i \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ i$ .*

Nos referiremos a este resultado como *Lema del Encaje Isométrico* y básicamente nos dice que  $G$  puede dibujarse sobre la esfera de tal manera que cualquier automorfismo de  $G$  actúe como isometría. En particular, si  $G$  es un poliedro autodual, el grupo completo  $\text{Dual}(G)$  tiene la posibilidad de actuar como grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  como establece el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $G$  una gráfica autodual. Existe  $i : G \rightarrow \mathbb{S}^2$  encaje tal que para todo  $\phi \in \text{Dual}(G)$  existe una isometría  $\tilde{\phi}$  de  $\mathbb{S}^2$  tal que  $i \circ \phi = \tilde{\phi} \circ i$ .*

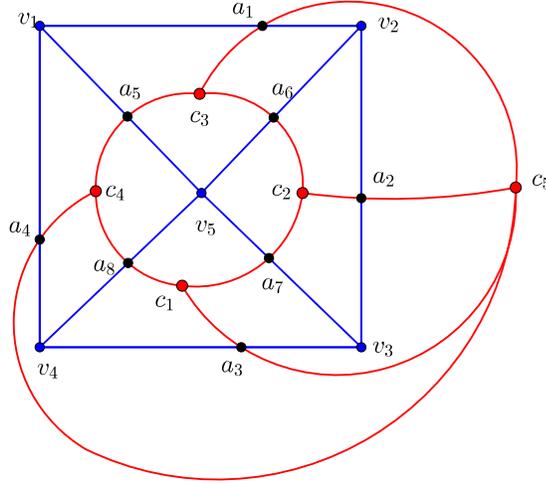
*Demostración.* Consideremos la gráfica  $G_{\square}$  cuyo conjunto de vértices consta de los vértices, aristas y caras de  $G$ , y las aristas son parejas de la forma  $va$  donde  $v$  es un vértice y  $a$  es una arista que contiene a  $v$ , o de la forma  $ac$  donde  $a$  es una arista y  $c$  es una cara que contiene a  $a$ :

$$V(G_{\square}) = V(G) \cup C(G) \cup A(G)$$

$$A(G_{\square}) = \{va : v \in V(G), a \in A(G), v \in a\} \cup \{ac : a \in A(G), c \in C(G), a \in c\}$$

Esta es la *gráfica de cuadrados* de  $G$  y es una gráfica plana en la que todas sus caras son cuadriláteros (figura 2.5). Además podemos notar que el grupo  $\text{Dual}(G)$  está contenido en el grupo de automorfismos de la gráfica de cuadrados, esto es, cualquier automorfismo o dualidad de la gráfica  $G$  es un automorfismo de  $G_{\square}$ . Por el Lema del Encaje Isométrico existe un encaje  $i$  de  $G_{\square}$  en la esfera de modo que su grupo de automorfismos actúa como grupo de isometrías. Este es el encaje buscado.  $\square$

En lo que sigue asumiremos que hemos encajado de esta manera a la gráfica autodual  $G$  y abusaremos de la notación no haciendo distinción entre  $G$  y su imagen bajo dicho encaje así como tampoco distinguiremos entre los elementos del grupo  $\text{Dual}(G)$  y sus correspondientes isometrías.

Figura 2.5: Gráfica de cuadrados de  $\mathcal{R}_4$ .

### 2.3. Forma de dualidad de un poliedro auto-dual.

Hemos visto en la sección 1.3 que cada gráfica autodual  $G$  tiene asociado un par o *forma de autodualidad*  $\text{Aut}(G) \triangleleft \text{Dual}(G)$ . Los pares de autodualidad fueron clasificados en términos de grupos finitos de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  por B. Servatius y H. Servatius [25]. Los enlistaremos en el Teorema 2.5.2.

Veamos un ejemplo con la gráfica  $G = \mathcal{O}_4$ . En la figura 2.6 aparece la gráfica de cuadrados de  $\mathcal{O}_4$  dibujada sobre una representación plana de  $\mathbb{S}^2$ . El círculo exterior con línea punteada negra representa el polo norte, el círculo verde representa la línea del ecuador y el punto central representa el polo sur. Las gráficas  $G$  y  $G^*$  aparecen en azul y rojo, respectivamente y hay un vértice negro por cada intersección de una arista de  $G$  con una de  $G^*$ . Obsérvese que cualquier elemento  $\phi \in \text{Dual}(G)$  preserva cuadrados, es decir, si consideramos un cuadrado típico  $(vacb)$  de  $G_{\square}$  en el que  $v \in V(G)$ ,  $a, b \in A(G)$  y  $c \in C(G)$ , entonces su imagen bajo  $\phi$  es otro cuadrado de  $G_{\square}$ .

En  $\text{Dual}(G)$  podemos distinguir isometrías que conservan la coloración

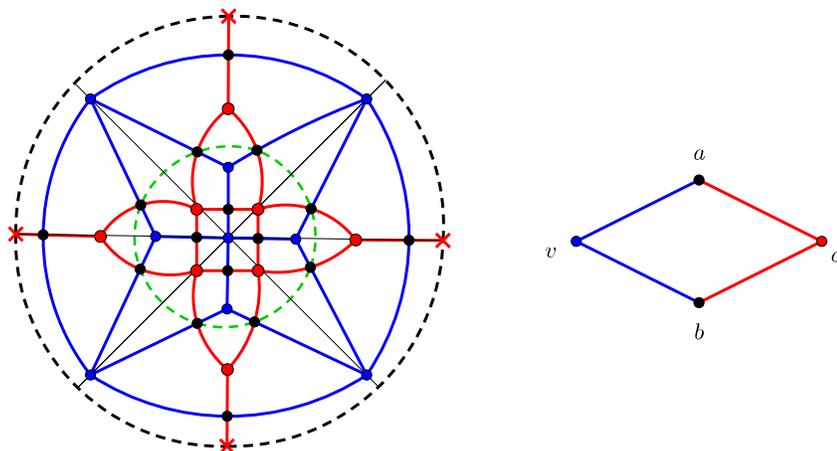


Figura 2.6: Gráfica de cuadrados de  $\mathcal{O}_4$  y un cuadrado típico.

de  $G_{\square}$  o que la invierten. Si  $\phi \in \text{Aut}(G)$  entonces  $\phi$  conserva la coloración y si  $\phi \in \text{Iso}(G)$  entonces  $\phi$  la invierte. Supongamos que  $\phi$  es la reflexión en una recta esférica  $l$  que intersecta al cuadrado  $(vacb)$ . Si  $\phi \in \text{Iso}(G)$  entonces la línea de reflexión  $l$  debe pasar por  $a$  y  $b$  e intercambiar  $v$  y  $c$ . En nuestro ejemplo, la reflexión en la línea del ecuador es un isomorfismo de dualidad ya que intercambia vértices azules y vertices rojos. Cada automorfismo puede ser obtenido como composición de reflexiones en cuatro rectas que pasan por el origen. Las reflexiones a través de estas rectas generan al grupo  $[4]$  y cada una de ellas funciona como automorfismo, así que podemos escribir  $\text{Aut}(\mathcal{O}_4) = [4]$ . El grupo  $\text{Dual}(\mathcal{O}_4)$  es  $[2, 4]$  y puede obtenerse añadiendo la reflexión en la línea del ecuador. Así,  $\text{Dual}(\mathcal{O}_4)$  está generado por las reflexiones en tres planos  $H_1, H_2$  y  $H_3$ . Los planos  $H_1$  y  $H_2$  forman entre sí un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  y pueden pensarse como planos verticales que pasan por los polos de la esfera, mientras que el plano  $H_3$  es el plano del ecuador y forma ángulos de  $\frac{\pi}{2}$  con cada uno de los planos  $H_1, H_2$ . De este modo se delimita en la esfera una *región fundamental*  $R$  que en este caso es un triángulo esférico con ángulos internos  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ . El par de autodualidad de esta gráfica es pues  $[4] \triangleleft [2, 4]$  y queda descrito por este triángulo esférico en el que distinguimos tres isometrías: dos reflexiones en  $\text{Aut}(G)$  (líneas en color negro) y una en  $\text{Iso}(G)$  (línea de color verde).

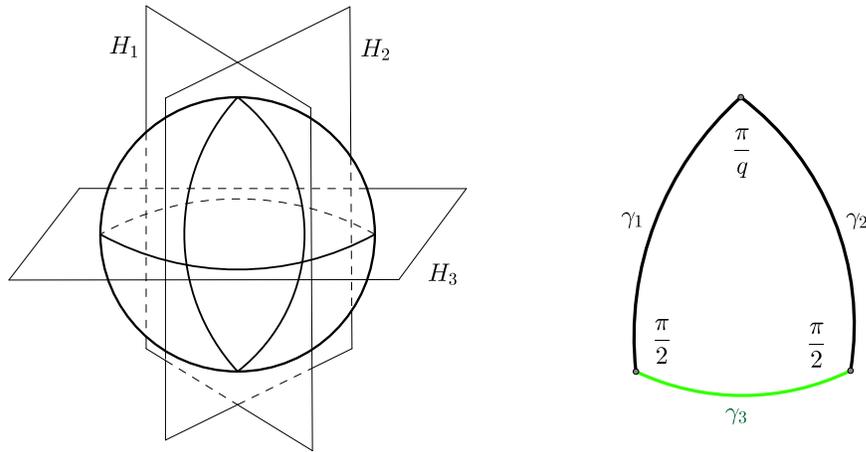


Figura 2.7: Construcción del orbifold del par  $[q] \triangleleft [2, q]$ .

Esta pieza de información es conocida como *orbifold* (ver figura 2.7). La gráfica  $\mathcal{O}_q$  tiene par de autodualidad  $[q] \triangleleft [2, q]$ . Su orbifold correspondiente es totalmente análogo al anterior: un triángulo esférico con ángulos  $\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  como región fundamental y tres reflexiones  $\gamma_1, \gamma_2 \in [q]$  y  $\gamma_3 \in [2, q] \setminus [q]$  como generadores.

## 2.4. Teorema de la Antípoda.

En esta sección usamos la fuerza del Lema del Encaje Isométrico para establecer uno de nuestros principales aportes a la teoría de poliedros autoduales [5]; un teorema que detecta aquellas dualidades que son fuertemente involutivas. La técnica es, a *grosso modo*, usar la gráfica de cuadrados para convencernos de que las condiciones combinatorias que hacen que una dualidad sea involución fuerte, geoméricamente se traducen en una isometría involutiva y sin puntos fijos. Esta idea será clave para nuestro trabajo y usaremos la geometría esférica para concluir que una isometría así tiene que ser el mapeo *antípoda*  $\alpha : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , con  $\alpha(x) = -x$ .

**Teorema 2.4.1.** *Sean  $G$  una gráfica plana autodual y  $\tau \in \text{Iso}(G)$ . La dualidad  $\tau$  es involución fuerte, si y sólo si,  $\tau$  actúa como el mapeo antípoda  $\alpha$ .*

*Demostración.* Asumamos que  $G_{\square}$  está encajada en la esfera de manera que cualquiera de sus automorfismos es una isometría. La condición (i) de involuciones fuertes implica que  $\tilde{\tau}$  debe ser una involución. Hay tres posibles isometrías involutivas en la esfera: la reflexión a través de una línea recta (esférica), una rotación por  $\frac{\pi}{2}$  y la función antípoda (ver [7]). De ellas solamente la antípoda no tiene puntos fijos, así que mostraremos que  $\tilde{\tau}$  no puede tener puntos fijos. Procederemos por contradicción, suponiendo que  $\tilde{\tau}$  tiene punto fijo y concluiremos la existencia de un vértice  $v$  tal que  $v \in \tau(v)$ , contrario a la hipótesis.

*CASO I.* Si  $\tilde{\tau}$  es una reflexión en un plano  $H$ . Sean  $v \in V(G)$ ,  $a, b \in A(G)$  y  $c \in C(G)$  tales que  $H$  intersecta al cuadrado  $(vacb)$  en su interior. Los únicos puntos en que  $H$  puede intersectar a las aristas del cuadrilátero son  $a$  y  $b$ , así que  $H \cap \mathbb{S}^2 = l$  donde  $l$  es la línea recta esférica que pasa por  $a$  y  $b$  por lo que debe tenerse  $\tau(v) = c$  lo cual significa que  $v \in \tau(v)$ .

*CASO II.* Si  $\tilde{\tau}$  es una rotación en un eje  $PP'$ . Sea  $(vacb)$  un cuadrilátero que contiene a  $P$ . Si  $P$  es el centro del cuadrilátero, la rotación debe mandar  $v$  en  $c$ , pero entonces  $\tau(v) = c$ , lo cual significa que  $v \in \tau(v)$ . Veamos qué pasa si  $P$  es  $a$  o  $b$ . Digamos que  $P = a$ , entonces la arista  $va$  debe ir a dar a una arista de la forma  $ac'$  donde  $c'$  es una cara de  $G$ , distinta de  $c$  y que también incide en  $v$ , pero entonces si consideramos el cuadrado que contiene a  $v$  y  $c'$  vemos que  $\tau(v) = c'$  implica que  $v \in \tau(v)$ .

Recíprocamente, si  $\tau$  es una dualidad cuya isometría correspondiente es la función antípoda, entonces  $\tau$  es una involución libre de puntos fijos, lo cual se traduce en las dos condiciones que debe satisfacer un isomorfismo de dualidad para ser una involución fuerte.  $\square$

Este teorema nos muestra una condición geométrica necesaria y suficiente para que una gráfica autodual  $G$  sea fuertemente involutiva:  $\alpha \in \text{Iso}(G)$ . Adicionalmente muestra que toda gráfica autodual admite a lo más una involución fuerte. Esto nos motiva a entender los grupos finitos de isometrías de la esfera e identificar en cuáles de ellos está la función antípoda  $\alpha$ .

## 2.5. Las 10 Formas de Autodualidad.

El siguiente lema identifica cuáles son los grupos que contienen a la función antípoda.

**Lema 2.5.1.** *Sea  $\alpha : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  la función antípoda. Entonces:*

1.  $\alpha \notin [q]$  para cualquier  $q$  entero positivo.
2.  $\alpha \notin [q]^+$  para cualquier  $q$  entero positivo.
3.  $\alpha \in [p, q]$  si y sólo si  $p = 3, q = 4$  o bien si  $p = 2$  y  $q$  es par.
4.  $\alpha \notin [p, q]^+$  para cualquier  $q$  entero positivo.
5.  $\alpha \in [p^+, q]$  si  $p = 3, q = 4$  o bien si  $p = 2$ ,  $q$  es par y  $\frac{q}{2}$  es impar.
6.  $\alpha \in [p^+, q^+]$  si  $p = 2$ ,  $q$  es par y  $\frac{q}{2}$  es impar.

*Demostración.* Como  $\alpha$  es una isometría libre de puntos fijos se verifica 1. Además  $\alpha$  es composición de tres reflexiones, lo cual verifica 2 y 4 ya que en esos casos todos los elementos son producto de rotaciones y cada rotación es composición de dos reflexiones. Podemos establecer 3 observando que un prisma tiene simetría central si y sólo si tiene como base a un polígono de un número par de lados y similarmente vemos que el cubo y el octaedro son los únicos sólidos platónicos que son centralmente simétricos.

Para probar 5 y 6 veamos que  $\alpha \in [2^+, 6]$ . El grupo  $[2, 6]$  tiene como región fundamental a un triángulo con ángulos  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$  y es generado por las reflexiones  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$  tales que  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = (\gamma_1\gamma_2)^6 = (\gamma_3\gamma_1)^2 = (\gamma_2\gamma_3)^2 = id$ . Etiquetemos a esta región con  $id$ . La imagen de  $id$  bajo  $\gamma_i$  es una región vecina  $\gamma_i$  congruente con  $id$  y la imagen de  $id$  bajo un elemento  $\phi$  cualquiera del grupo es una región  $\phi$  congruente con  $id$  que tiene regiones vecinas  $\phi\gamma_i$ . Una región fundamental del subgrupo  $[2^+, 6]$  puede obtenerse pegando las regiones  $id$  y  $\gamma_2$  del grupo  $[2, 6]$  y considerando como generadores solo a la reflexión  $\gamma = \gamma_1$  y a la rotación  $\rho = \gamma_2\gamma_3$ . Esta nueva región será  $id$  para  $[2^+, 6]$ . Ahora un elemento cualquiera  $\phi$  de este nuevo grupo manda a la región  $id$  junto con sus regiones vecinas  $\gamma$  y  $\rho$  en una región  $\phi$  congruente a  $id$  con sus vecinos  $\phi\gamma$  y  $\phi\rho$ . Cualquier expresión de  $\phi$  como producto de elementos generadores corresponde a un camino desde una posición inicial dentro de la región  $id$  a una posición final dentro de la región  $\phi$ . El elemento

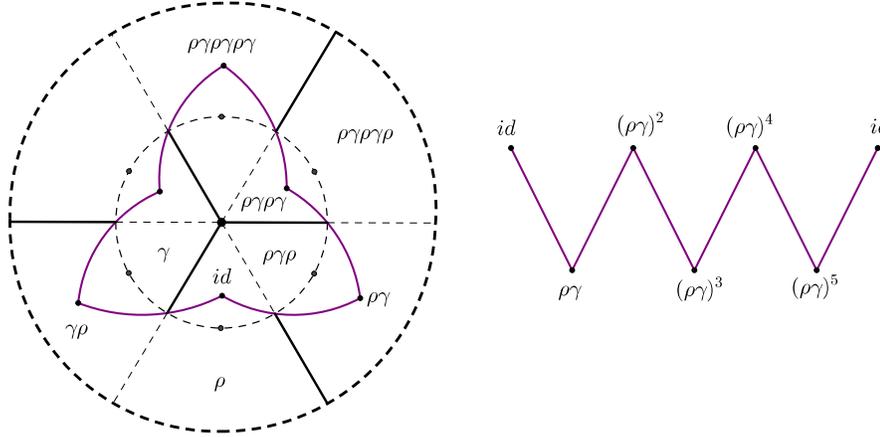


Figura 2.8: Zig-zag que describe  $(\rho\gamma)^i$  en  $[2^+, 6]$ .

$\rho\gamma$  es una *reflexión rotatoria* o *paso*, que es composición de una reflexión y una rotación en torno a un eje perpendicular al plano de reflexión. El camino que describen las potencias de  $\rho\gamma$  es un *zig-zag* que permite observar que  $(\rho\gamma)^6 = id$  y  $(\rho\gamma)^3 = \alpha$  (figura 2.8). En general para  $q$  par, en el grupo  $[2^+, q]$  se tiene que  $(\rho\gamma)^q = id$  y  $(\rho\gamma)^{\frac{q}{2}} = \alpha$  cuando  $\frac{q}{2}$  es impar. De aquí se concluye también 6 ya que  $[2^+, q^+]$  es precisamente el cíclico generado por el paso  $\rho\gamma$ . Finalmente tenemos el subgrupo  $[3^+, 4]$  generado también por una reflexión  $\gamma$  y una rotación  $\rho$ . En este caso se verifica que  $\alpha = (\rho\gamma)^3$  (ver [8]).  $\square$

Este lema permite identificar cuáles son las gráficas autoduales que admiten a la función antípoda como isomorfismo de dualidad. Estas formas son las que nos interesan para construir poliedros autoduales fuertemente involutivos. A continuación enunciamos el teorema principal de Servatius [25] que enumera las posibles 24 formas de dualidad que dan lugar a gráficas autoduales.

**Teorema 2.5.2.** *Toda gráfica autodual tiene una de las siguientes formas de autodualidad:*

$[q] \triangleleft [2, q], [q]^+ \triangleleft [2, q]^+, [q]^+ \triangleleft [2, q^+], [q] \triangleleft [2^+, 2q], [q]^+ \triangleleft [2^+, 2q^+], [1] \triangleleft [2], [2]^+ \triangleleft [2], [2] \triangleleft [4], [1]^+ \triangleleft [2]^+, [2]^+ \triangleleft [4]^+, [2, 2]^+ \triangleleft [2, 2], [2^+, 4] \triangleleft [2, 4], [2, 2^+] \triangleleft [2, 2], [2, 2] \triangleleft [2, 4], [2, 2]^+ \triangleleft [2, 4]^+, [2, 2]^+ \triangleleft [2^+, 4], [2^+, 4^+] \triangleleft [2^+, 4], [2^+, 4^+] \triangleleft [2, 4^+], [2^+, 2^+] \triangleleft [2, 2^+], [2, 2^+] \triangleleft [2, 4^+], [1] \triangleleft [2, 2^+], [3, 3] \triangleleft [3, 4], [3, 3]^+ \triangleleft [3, 4]^+ \text{ ó } [3, 3]^+ \triangleleft [3^+, 4].$

De esta lista seleccionaremos aquellas que dan lugar a gráficas autoduales fuertemente involutivas.

**Teorema 2.5.3.** *Toda gráfica autodual fuertemente involutiva tiene una de las siguientes formas de autodualidad: Para  $q$  par  $[q] \triangleleft [2, q]$ ,  $[q]^+ \triangleleft [2, q^+]$ , para  $q$  impar  $[q] \triangleleft [2^+, 2q]$ ,  $[q]^+ \triangleleft [2^+, 2q^+]$ ,  $[2, 2]^+ \triangleleft [2, 2]$ ,  $[2^+, 4] \triangleleft [2, 4]$ ,  $[2^+, 4^+] \triangleleft [2, 4^+]$ ,  $[1] \triangleleft [2, 2^+]$ ,  $[3, 3] \triangleleft [3, 4]$ , ó  $[3, 3]^+ \triangleleft [3^+, 4]$ .*

*Demostración.* Para cada par de autodualidad  $\text{Aut}(G) \triangleleft \text{Dual}(G)$  hay que verificar que  $\alpha \in \text{Dual}(G)$  y  $\alpha \notin \text{Aut}(G)$ . Usando el lema 2.5.1 se puede verificar esto para cada par de autodualidad y obtener así la lista deseada.  $\square$

## 2.6. Órbifolds y Garabatos.

El grupo  $\text{Dual}(G)$  actúa en  $\mathbb{S}^2$  por evaluación: dados  $\phi \in \text{Dual}(G)$  y  $p \in \mathbb{S}^2$ ,  $\phi \cdot p := \phi(p)$ . El *estabilizador* de  $p$  consta de los elementos en  $\text{Dual}(G)$  que fijan a  $p$ . Un orbifold es una región fundamental  $R$  con información sobre sus puntos singulares: puntos con estabilizador no trivial. La órbita de  $R$  es un conjunto de regiones congruentes a  $R$  que cubren toda la esfera (tantas regiones como elementos del grupo  $\text{Dual}(G)$ ). El orbifold consta de la región fundamental  $R$  junto con los estabilizadores de sus puntos singulares. Al tener dibujado el poliedro  $G$  sobre la esfera, a la porción del dibujo de la gráfica que queda dibujada sobre el orbifold le llamaremos *garabato* de  $G$ .

Dibujando algún garabato sobre el orbifold se puede obtener una gráfica autodual con forma de dualidad  $\text{Aut}(G) \triangleleft \text{Dual}(G)$  haciendo actuar al grupo de dualidades en la esfera. En la figura 2.9 hemos sombreado una región fundamental  $R$  para  $\mathcal{O}_4$  y dibujamos el correspondiente garabato. Este mismo garabato funciona para generar cualquier  $\mathcal{O}_q$ . Una cuestión interesante es la de establecer condiciones para los posibles garabatos de un orbifold dado.

Las gráficas  $\mathcal{P}_q$  y  $\mathcal{O}_q$  (que ilustramos en la sección 1.5) tienen en común que su grupo de automorfismos es  $[q]$  cuando son encajados isométricamente en la esfera. No obstante su forma de dualidad es distinta, lo que significa que sus grupos de dualidades no son isomorfos. Para entender cuál es la forma

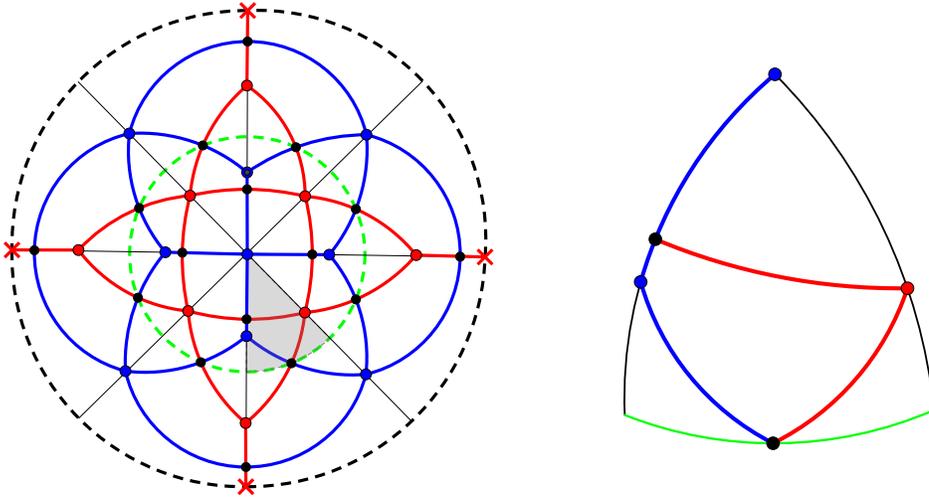


Figura 2.9: La parte sombreada es región fundamental y a la derecha el garabato de  $\mathcal{O}_4$ .

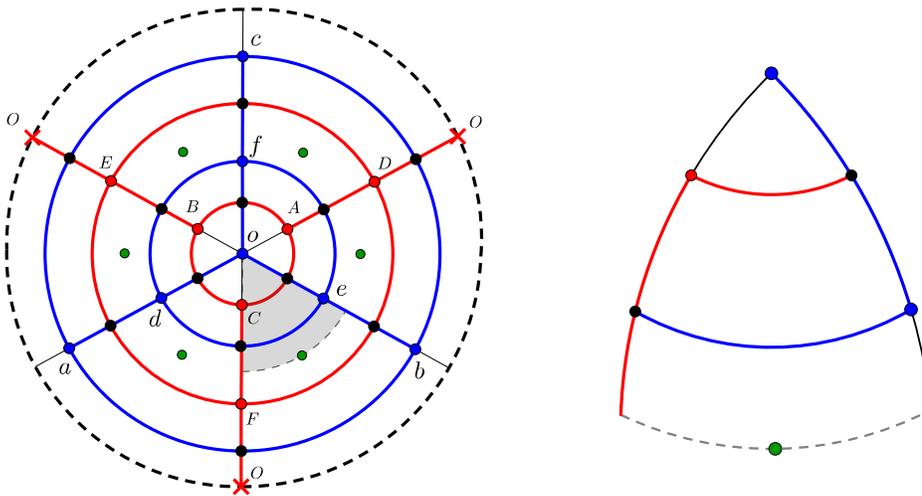


Figura 2.10: Una región fundamental de  $[3] \triangleleft [2^+, 6]$  y el garabato de  $\mathcal{P}_3$ .

de dualidad de  $\mathcal{P}_3$  comencemos con un encaje isométrico (figura 2.10). En ese encaje, los vértices  $a, b$  y  $c$  están en un círculo mientras que  $d, e$  y  $f$  están en otro círculo. Estos dos círculos son concéntricos siendo  $o$  el centro que podemos suponer en el polo sur. Los vértices rojos, que corresponden a la gráfica dual, también se encuentran sobre círculos concéntricos y en este caso  $D, E$  y  $F$  están unidos con el vértice central  $O$  que está ubicado en el polo norte (línea punteada exterior en la figura). Consideremos una región fundamental. Obsérvese que en este caso la reflexión a través de la línea del ecuador no funciona como dualidad. En cambio, la rotación por  $\pi$  en torno al punto que hemos colocado en color verde sí funciona como isomorfismo de dualidad. Estos puntos verdes están todos sobre la línea del ecuador. Al rotar la *lúnula* comprendida entre los planos verticales  $H_1$  y  $H_2$  en torno al punto verde por un ángulo  $\pi$  vemos que se intercambian puntos azules con puntos rojos, por ejemplo, vemos que el punto  $e$  va a  $F$ , el punto rojo  $C$  va a  $b$  y el vértice central  $o$  va a dar a  $O$ . Si llamamos  $\rho$  a esta rotación, el grupo de dualidades  $\text{Dual}(\mathcal{P}_3)$  queda generado por  $\gamma_1, \gamma_2, \rho$  y en la notación de Cóxeter corresponde a  $[2^+, 6]$  por lo que la forma de autodualidad de  $\mathcal{O}_3$  es  $[3] \triangleleft [2^+, 6]$ .

Por supuesto que podemos dibujar garabatos diferentes en cada uno de estos orbifolds. Para cada forma de autodualidad  $\text{Aut}(G) \triangleleft \text{Dual}(G)$  es posible detectar condiciones necesarias para los garabatos que dan lugar a gráficas autoduales con dicha forma de autodualidad. Por ejemplo, el triángulo de la figura 2.11 corresponde al orbifold de la forma de dualidad  $[q] \triangleleft [2, q]$ , con  $q = 3$ , la misma que  $\mathcal{O}_q$ . Un garabato cualquiera allí no tiene vértices azules o rojos en la línea verde, por ejemplo, y debe tener siempre un vértice azul o rojo en la esquina superior. Otro detalle a cuidar para diseñar garabatos es que al generar la gráfica no obtengamos más simetrías que las dadas en el orbifold. En particular el garabato por sí mismo no debe tener simetrías.

En el capítulo 4 estudiaremos dos construcciones infinitas de garabatos que generan poliedros autoduales fuertemente involutivos. Nuestra meta será mostrar que los poliedros autoduales que obtengamos admiten encaje métrico y por tanto dan una respuesta satisfactoria a nuestra pregunta central.

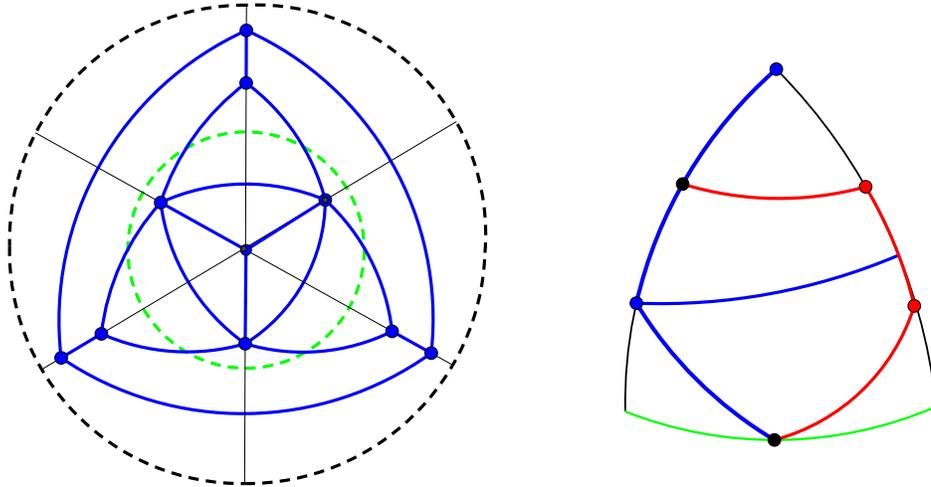


Figura 2.11: Gráfica autodual generada con un garabato en la forma  $[3] \triangleleft [2, 3]$ .

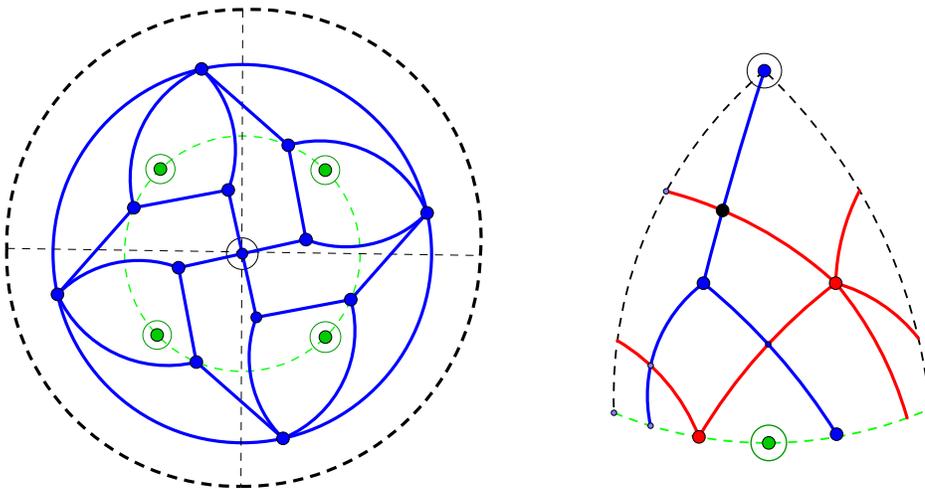


Figura 2.12: Poliedro autodual de la forma  $[4]^+ \triangleleft [2, 4]^+$  y su garabato. Los puntos con un pequeño círculo denotan una rotación en torno a ese punto.

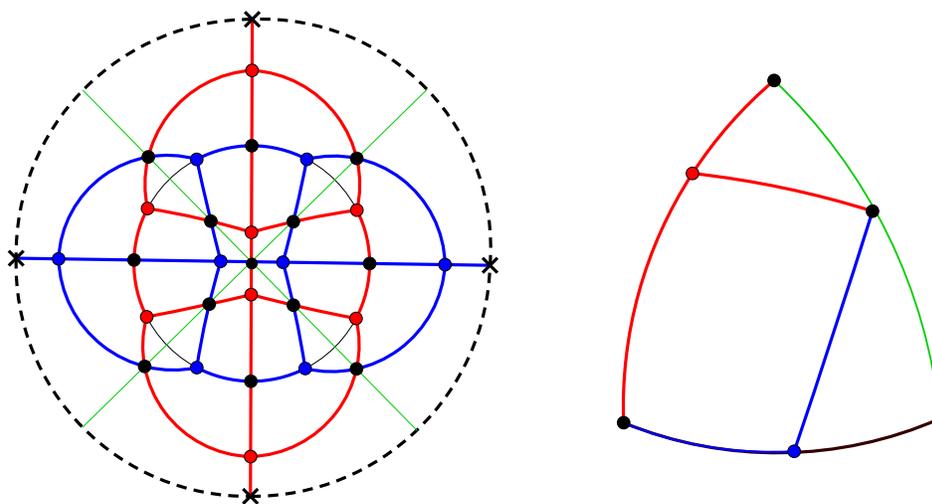


Figura 2.13: Poliedro autodual de la forma  $[2, 2] \triangleleft [2, 4]$ .

# Capítulo 3

## Clasificación de poliedros.

En este capítulo estudiamos propiedades combinatorias de los poliedros, entendidos estos como gráficas simples, planas y 3-conexas y las usamos para clasificar a los poliedros autoduales fuertemente involutivos en términos de operaciones de borrado y contracción de aristas, mostrando que se pueden reducir a una clase de poliedros muy simples: las ruedas. Una *rueda*  $\mathcal{R}_n$  es una gráfica que consta de un  $n$ -ciclo en el que todos los vértices están unidos a un vértice  $o$ .

### 3.1. Teorema de Clasificación de Poliedros.

Sea  $\mathcal{G} = (V, E, F)$  un poliedro. Usando la 3-conexidad y la planaridad de  $\mathcal{G}$  se pueden verificar las siguientes propiedades:

- Para toda arista  $e$  existen dos únicas caras distintas  $f$  y  $g$  cuya intersección es  $e$ , es decir, si  $f'$  es una cara tal que  $e$  incide en  $f'$ , entonces  $f'$  es  $f$  o  $g$ .
- Para todo par de caras distintas  $f$  y  $g$ , su intersección es bien vacía, un sólo vértice o una única arista.
- Fórmula de Euler:  $|V| - |E| + |F| = 2$ .

Las ruedas son en cierto sentido los poliedros más simples que podemos imaginar: todas sus caras, salvo quizás una, son triangulares y todos sus

vértices, salvo quizás uno, son de grado tres. El siguiente lema muestra una caracterización un poco más fuerte para estos poliedros.

**Lema 3.1.1.** *Supóngase que  $\mathcal{G}$  satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *Para cada arista, uno de sus extremos es un vértice de grado 3.*
2. *Toda arista está en una cara triangular.*

*Entonces  $\mathcal{G}$  es una rueda.*

*Demostración.* Si todos los vértices son de grado 3 y todas las caras son triángulos entonces de la fórmula de Euler se puede deducir que  $\mathcal{G}$  es el tetraedro y por lo tanto no hay nada que probar ya que el tetraedro es la rueda  $\mathcal{R}_3$ . Supongamos que  $\mathcal{G}$  no es el tetraedro. Si todos los vértices son de grado 3, debe existir al menos una cara que no es triángulo. Sea  $f = (v_1 \cdots v_r)$  dicha cara. Por la condición 2, sabemos que la arista  $(v_1v_2)$  está en un triángulo  $T_1$ ,  $(v_2v_3)$  está en un triángulo  $T_2$ , ... y  $(v_rv_1)$  está en un triángulo  $T_r$ . Sea  $x_i$  el vértice que falta para que  $(v_iv_{i+1})$  forme el triángulo  $T_i$ . Como el grado de  $v_i$  debe ser 3, esto fuerza a que todos los  $x_i$  sean el mismo vértice  $x$ . Pero como supusimos que todo vértice es de grado 3, entonces  $r = 3$ , lo cual es una contradicción.

Análogamente, si  $\mathcal{G}$  no es el tetraedro pero todas sus caras son triángulos, debería existir al menos un vértice de grado mayor a 3. La gráfica dual de  $\mathcal{G}$  debería ser un poliedro que no es el tetraedro (pues el dual del tetraedro es el tetraedro) donde todos los vértices son de grado 3 y existe al menos una cara que no es triángulo. Por el párrafo anterior sabemos que no es posible obtener tal poliedro. Entonces un poliedro que no sea el tetraedro y cumple nuestras condiciones 1 y 2, debe tener algún vértice de grado mayor que tres y alguna cara que no es triángulo. Sea  $f = (v_1 \cdots v_r)$  una cara con más de 3 lados. Como antes, por la condición 2 sabemos que la arista  $(v_1v_2)$  está en un triángulo  $T_1$ ,  $(v_2v_3)$  está en un triángulo  $T_2$ , ... y  $(v_rv_1)$  está en un triángulo  $T_r$ . Sea  $x_i$  el vértice que falta para que  $(v_iv_{i+1})$  forme el triángulo  $T_i$ . Ahora bien, sabemos que debe haber vértices de grado mayor a 3. Vamos a ver que ningún elemento del conjunto  $B = \{v_1, \cdots, v_r\}$  puede tener grado mayor a 3.

Supongamos que hay exactamente un elemento del conjunto  $B$  cuyo grado es mayor a 3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que es  $v_1$ . El

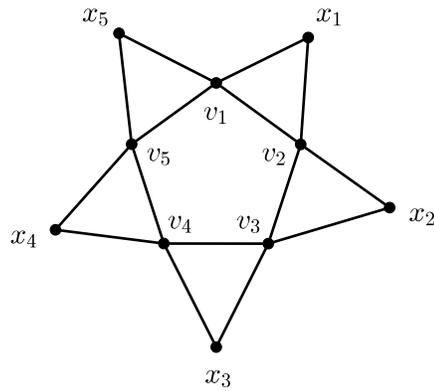


Figura 3.1: Cara  $f$  con cinco lados.

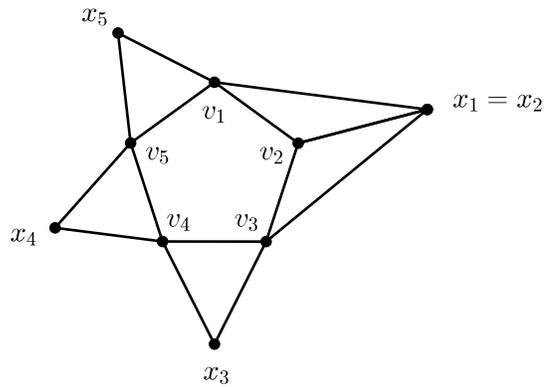
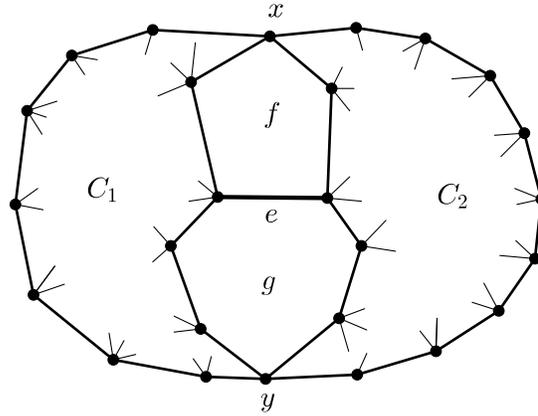


Figura 3.2: Cara  $f$  con cinco lados si hay dos elementos de  $B$  con grado mayor a 3.

vértice  $v_1$  es adyacente a  $v_2$ , a  $v_r$ , a  $x_1$  y a  $x_r$ . Como  $v_2$  es de grado 3 se debe tener  $x_1 = x_2$ , como  $v_3$  es de grado 3, se tiene que  $x_2 = x_3$  y así sucesivamente, como  $v_r$  es de grado 3, debe tenerse  $x_{r-1} = x_r$ . Sea  $x = x_1 = \dots = x_r$ , entonces  $(v_1x_1)$  y  $(v_1x_r)$  deben ser la misma arista, ya que de lo contrario tendríamos una arista múltiple, contradiciendo que  $\mathcal{G}$  es simple. Como  $v_1$  tiene grado mayor a 3, debería ser adyacente a algún vértice  $y$  fuera de  $B$ , pero entonces la arista  $(xv_1)$  ya no cumple la condición 2, una contradicción.

Si hay dos (al menos) elementos del conjunto  $B$  cuyo grado es mayor a 3. Sean  $v_i$  y  $v_j$  dos vértices de  $B$  con grado mayor a 3 y que estén a distancia menor. No pueden estar a distancia 1, es decir, no pueden ser adyacentes puesto que si lo fueran, la arista que los une no cumpliría la condición 1. Digamos que  $v_i$  es el primero de estos vértices y entonces el segundo es  $v_{i+k}$ , donde hemos visto que  $k > 1$ . Esto significa que todos los vértices que están entre estos dos tienen grado igual a 3. Llamemos  $I$  a ese conjunto:  $I = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+k-1}\}$ . Puede verse que entonces  $x_i = \dots = x_{i+k-1} = x$  y que de hecho  $k = 2$ , puesto que  $x$  no puede tener grado mayor a 3 ya que si lo tuviera, la arista  $(xv_i)$  no cumpliría la condición 1. Por otro lado, sabemos que  $v_i$  tiene dos vecinos en  $B$ : uno es  $v_{i+1}$  y el otro es  $v_{i-1}$  que debe ser de grado 3. Sea  $y = x_{i-1}$  y observemos que no es posible encontrar una trayectoria que vaya de  $x$  a  $y$  sin pasar por  $v_i$  o  $v_{i+k}$  por lo que estos últimos formarían un conjunto de corte de tamaño 2, lo cual es una contradicción.  $\square$

En lo que sigue estableceremos algunos lemas necesarios para exponer un teorema que clasifica a todos los poliedros en términos de las operaciones de borrado y contracción de aristas. Estas ideas fueron desarrolladas por W. T. Tutte [27] para clasificar a todas las gráficas 3-conexas: toda gráfica 3-conexa es una rueda o bien puede obtenerse de una rueda mediante una sucesión finita de dos operaciones: añadir una arista entre cualquier par de vértices y separar un vértice dado  $v$ , con grado  $\delta(v) \geq 4$ , en dos nuevos vértices adyacentes  $v'$  y  $v''$  de manera que la nueva gráfica obtenida siga siendo 3-conexa. Lo que haremos aquí será restringirnos al caso de gráficas planas. B. Grünbaum y D. W. Barnette [2] usaron estas ideas para dar una segunda prueba del famoso Teorema de Steinitz [26] que establece la correspondencia uno a uno entre gráficas (simples) planas y 3-conexas y los 1-esqueletos de

Figura 3.3: Arista  $e$  que no se puede borrar.

3-politopos.

Sea  $e = (uv)$  una arista de  $\mathcal{G}$ . Denotaremos por  $\mathcal{G} \setminus e$  a la gráfica obtenida de  $\mathcal{G}$  suprimiendo la arista  $e$ . Escribiremos  $\mathcal{G}/e$  para referirnos a la gráfica obtenida de  $\mathcal{G} \setminus e$  identificando sus extremos  $u$  y  $v$  en un sólo vértice  $uv$ . Dado cualquier subconjunto  $X$  de  $V$ , denotamos por  $\mathcal{G} \setminus X$  a la gráfica obtenida de  $\mathcal{G}$  omitiendo a los elementos de  $X$  y a cualquier arista que tenga alguno de sus extremos en  $X$ . Decimos que  $e = (uv)$  *se puede borrar* si  $\mathcal{G} \setminus e$  es un poliedro y decimos que  $e = (uv)$  *se puede contraer* si  $\mathcal{G}/e$  es un poliedro. Diremos que  $X$  es un  $n$ -corte si tiene  $n$  vértices y  $\mathcal{G} \setminus X$  no es conexa.

**Lema 3.1.2.** *Si  $\mathcal{G} \setminus e$  no es un poliedro, entonces existen vértices  $x, y$  de  $\mathcal{G}$  tales que  $X = \{x, y\}$  es un 2-corte de  $\mathcal{G} \setminus e$  tal que  $u$  está en una de las componentes  $C_1$  de  $(\mathcal{G} \setminus e) \setminus X$  y  $v$  está en la otra componente  $C_2$ . Más aún, si  $f$  y  $g$  son caras tales que  $f \cap g = e$ , entonces  $x$  incide en una de ellas y  $y$  incide en la otra.*

*Demostración.* Como  $\mathcal{G} \setminus e$  es claramente simple y plana, debe existir un conjunto  $X \subset V$  con  $|X| < 3$  tal que  $(\mathcal{G} \setminus e) \setminus X$  no es conexa. Observemos que  $|X| = 2$ , de lo contrario existiría un vértice de corte en  $\mathcal{G} \setminus e$  y  $\mathcal{G}$  no sería

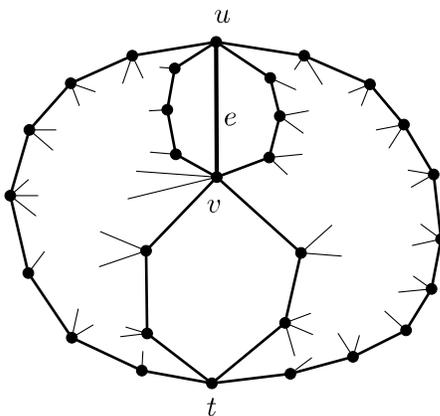


Figura 3.4: Arista  $e$  que no se puede contraer.

3-conexa. Entonces  $X = \{x, y\}$  para ciertos vértices  $x, y$  en  $\mathcal{G}$ . Esto implica que en  $\mathcal{G} \setminus e$  cualquier trayectoria entre  $u$  y  $v$  debe contener a  $x$  o  $y$ , así que si  $C_1$  y  $C_2$  son las componentes conexas que contienen a  $u$  y  $v$ , respectivamente, en  $(\mathcal{G} \setminus e) \setminus X$ , podemos observar que  $C_1 \neq C_2$ . Además si  $f$  y  $g$  son caras tales que  $f \cap g = e$  entonces debe tenerse  $x \in f$  y  $y \in g$  (o viceversa), de otra forma tendríamos trayectorias entre  $u$  y  $v$  que no contienen ni a  $x$  ni a  $y$ .  $\square$

**Lema 3.1.3.** *Si  $\mathcal{G}/e$  no es un poliedro, entonces  $e$  está en una cara triangular de  $\mathcal{G}$  o bien existe un vértice  $t$  tal que el conjunto  $\{u, v, t\}$  es un 3-corte de  $\mathcal{G}$ .*

*Demostración.* De nuevo,  $\mathcal{G}/e$  es claramente plana pero podría no ser simple justo en el caso en el que  $e$  pertenece a una cara triangular de  $\mathcal{G}$ . Si no es el caso, entonces  $\mathcal{G}/e$  no es 3-conexa, por lo que existe un conjunto  $X \subset V$  con  $|X| < 3$  tal que  $(\mathcal{G}/e) \setminus X$  no es conexa. Tal como antes, podemos observar que  $|X| = 2$ , por lo que existen vértices  $q$  y  $t$  en  $\mathcal{G}/e$  tales que  $X = \{q, t\}$ . Observemos que el vértice  $uv$  debe ser  $q$  o  $t$ . Si no, entonces  $\{q, t\}$  sería un 2-corte de  $\mathcal{G}$ , una contradicción. Supongamos que  $uv = q$ . Por definición de  $\mathcal{G}/e$  es claro que  $\{u, v, t\}$  es un 3-corte de  $\mathcal{G}$ .  $\square$

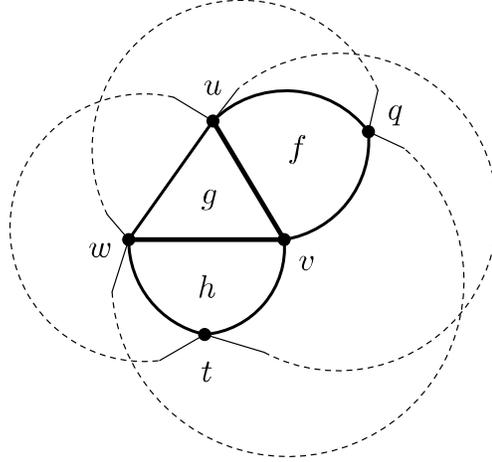


Figura 3.5: Las aristas  $(uv)$  y  $(vw)$  son esenciales.

Siguiendo la terminología de Tutte [27], diremos que una arista  $e$  es *esencial* si ni  $\mathcal{G} \setminus e$  ni  $\mathcal{G}/e$  son poliedros. En otras palabras,  $e$  es esencial si no se puede borrar y no se puede contraer.

**Lema 3.1.4.** *Sea  $g = (uvw)$  una cara triangular con  $a = (uv)$  y  $b = (vw)$  aristas esenciales. Entonces  $a$  y  $b$  tienen uno de sus extremos de grado 3.*

*Demostración.* Sean  $f$  y  $h$  caras tales que  $f \cap g = a$  y  $g \cap h = b$ . Si  $f \cap h \neq \emptyset$  se intersectan en una arista y por lo tanto  $v$  tiene grado 3, así que en este caso hemos terminado. Supongamos que  $f$  y  $h$  no se intersectan. Por el lema 3.1.2,  $\{u, q\}$  es un 2-corte de  $\mathcal{G} \setminus b$  para algún vértice  $q$  de la cara  $f$  y existe  $\{w, t\}$  un 2-corte de  $\mathcal{G} \setminus a$  para algún vértice  $t$  en la cara  $h$ . Esto implica que en  $\mathcal{G} \setminus a$  cualquier trayectoria entre  $u$  y  $q$  debe contener a  $w$  o  $t$ , por lo que  $(wq)$  es una arista de  $\mathcal{G}$ . Similarmente, en  $\mathcal{G} \setminus b$  cualquier trayectoria entre  $w$  y  $t$  debe contener a  $u$  o  $q$  y por lo tanto  $(vt)$  es una arista de  $\mathcal{G}$ . Como  $\mathcal{G}$  es 3-conexa, es fácil verificar que no hay más vértices adyacentes a  $u$  o  $w$ , así que ambos tienen grado 3.  $\square$

**Lema 3.1.5.** *Si  $a = (uv)$  es una arista esencial, entonces  $a$  está en una cara triangular o tiene uno de sus extremos de grado 3.*

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  caras tales que  $f \cap g = a$ . Por el lema 3.1.2, como  $a$  no se puede borrar, existen vértices  $x \in f, y \in g$  tales que  $\{x, y\}$  es un 2-corte de  $\mathcal{G} \setminus a$ . Si  $f$  y  $g$  no son triángulos, entonces por el lema 3.1.3 existe un  $t$  tal que  $\{u, v, t\}$  es un 3-corte de  $\mathcal{G}$ . Observemos que  $t$  debe estar en una de las componentes  $C_1$  o  $C_2$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $t \in C_2$ . Notemos que toda trayectoria entre  $x$  y  $y$  debe contener a  $u, v$  o  $t$ , una trayectoria así en  $C_1$  debe contener a  $u$ , por lo que  $(ux)$  y  $(uy)$  son aristas de  $\mathcal{G}$  y  $u$  tiene grado 3.  $\square$

**Teorema 3.1.6.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1.  $\mathcal{G}$  es una rueda.
2. Toda arista es esencial.
3. Toda arista está en una cara triangular y tiene uno de sus extremos de grado 3.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Supongamos que  $\mathcal{G}$  es una rueda  $\mathcal{R}_n$ . Tenemos dos tipos de aristas: las aristas en el ciclo principal y las aristas que unen vértices del ciclo principal con el vértice central. Para ambos tipos de aristas se puede observar que no podemos borrar ninguna de ellas, ya que quedaría un vértice de grado 2, y sus vértices vecinos formarían un 2-corte. Tampoco podemos contraer ninguna de ellas ya que todas están en un triángulo.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sea  $a$  cualquier arista. Por el lema 3.1.5,  $a$  está en un triángulo o tiene uno de sus extremos de grado 3. Si  $a$  está en un triángulo  $f$ , al ser todas las aristas esenciales, el lema 3.1.4 nos asegura que todas las aristas de  $f$  tienen uno de sus extremos de grado 3 y hemos acabado. Hemos probado entonces que siempre que  $a$  está en un triángulo, entonces tiene uno de sus extremos de grado 3. Necesitamos mostrar que siempre que  $a$  tenga uno de sus extremos de grado 3, entonces está en un triángulo, pero esto puede hacerse usando dualidad, ya que  $\mathcal{G}^*$  también cumple la hipótesis.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Es el lema 3.1.1.  $\square$

Este resultado se puede reescribir en la siguiente forma:

*Todo poliedro es bien una rueda o puede obtenerse de una rueda añadiendo nuevas aristas dentro de las caras del poliedro o de las caras del poliedro dual. Equivalentemente: si un poliedro no es una rueda existe siempre una arista no esencial, esto es, una arista que podemos borrar o contraer con el fin de obtener un nuevo poliedro con una arista menos.*

De esta manera podemos *reducir* cualquier poliedro mediante una sucesión finita de estas operaciones hasta obtener una rueda. Enfatizamos que esta reducción de poliedros no es una relación de equivalencia, ya que es posible obtener diferentes ruedas a partir de un poliedro dado seleccionando sucesiones distintas de aristas no esenciales.

## 3.2. Poliedros autoduales fuertemente involutivos.

En esta sección exponemos una de las principales contribuciones a la teoría de poliedros autoduales [5]: aplicamos las ideas de W. T. Tutte expuestas en la sección previa para hacer borrado y contracción de aristas simultáneamente y clasificar de este modo a todos los poliedros fuertemente involutivos. Trabajaremos con poliedros autoduales, es decir, gráficas simples, planas y 3-conexas  $\mathcal{G}$  que además admiten un isomorfismo de gráficas  $\tau$  entre  $\mathcal{G}$  y su dual  $\mathcal{G}^*$ . Un poliedro autodual  $\mathcal{P}$  es *fuertemente involutivo* si admite un isomorfismo de dualidad  $\tau$  que cumple las siguientes dos propiedades:

- (i) Para cada par  $u, v$  de vértices,  $u \in \tau(v)$  si y sólo si  $v \in \tau(u)$ .
- (ii) Para todo vértice  $v$  de  $\mathcal{P}$ ,  $v$  no está en el borde de su cara dual  $\tau(v)$ .

Durante esta sección,  $\mathcal{P} = (V, E, F, \tau)$  es un poliedro autodual fuertemente involutivo y  $(ab) \in E$  es una arista cualquiera de  $\mathcal{P}$ . Por definición,  $\tau(a)$  y  $\tau(b)$  son caras adyacentes de  $\mathcal{P}$ , por lo tanto debe existir una arista  $(xy) \in E$  tal que  $\tau(a) \cap \tau(b) = (xy)$  y la condición (i) de involución fuerte implica que  $\tau(x) \cap \tau(y) = (ab)$ . Escribiremos  $\tau(ab)$  para la arista  $(xy)$ . Diremos que  $(ab)$

es un *diámetro* si, y solo si  $a \in \tau(b)$  (y por lo tanto  $b \in \tau(a)$ ). Los resultados siguientes son parte del trabajo de J. Bracho, L. Montejano, E. Pauli y J. Ramírez-Alfonsín [5].

**Lema 3.2.1.** *Si  $(ab)$  y  $(xy)$  son diámetros, entonces  $\mathcal{P}$  es el tetraedro  $K_4$ .*

*Demostración.* Por la hipótesis podemos deducir que  $a \in \tau(x) \cap \tau(y) \cap \tau(b)$  y  $x \in \tau(a) \cap \tau(b) \cap \tau(y)$ , entonces  $\{a, x\} \subset \tau(y) \cap \tau(b)$  pero de la 3-conexidad, sabemos que la intersección de dos caras puede ser vacía, un sólo vértice o una sólo arista, por lo tanto  $(ax)$  es una arista, pues si no  $\{a, x\}$  es un 2-corte. Análogamente,  $(bx)$  es una arista. De la misma manera,  $(ya)$  y  $(yb)$  son aristas. Se sigue que la subgráfica inducida por estos cuatro vértices es  $K_4$ . Además, tenemos que las caras  $\tau(a), \tau(b), \tau(x)$  y  $\tau(y)$  son triángulos. Supongamos que existen otros vértices. Tomemos cualquier vértice  $v \in V \setminus \{a, b, x, y\}$  tal que  $v$  está conectado a algún vértice en  $\{a, b, x, y\}$  por una arista. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $(av)$  es una arista. Esto es una contradicción, pues en ese caso  $\tau(a)$  debería formar un ciclo con al menos cuatro vértices.  $\square$

**Lema 3.2.2.** *Si  $(ab)$  es un diámetro y  $(xy)$  no lo es, entonces  $\{a, b, x\}$  y  $\{a, b, y\}$  son 3-cortes de  $\mathcal{P}$ .*

*Demostración.* De la hipótesis podemos deducir que  $(\tau(a) \cup \tau(b)) \setminus (xy)$  y  $(\tau(x) \cup \tau(y)) \setminus (ab)$  son ciclos cuya intersección es  $\{a, b\}$ , entonces podemos observar que  $(\tau(a) \cup \tau(b)) \setminus (xy) \cup (ab)$  es la unión de dos ciclos  $\gamma_1, \gamma_2$  que se intersectan en la arista  $(ab)$  y por lo tanto  $\mathcal{P} \setminus \gamma_1$  consta de dos piezas conexas  $R_1, R_2$  y también  $\mathcal{P} \setminus \gamma_2$  consta de dos piezas conexas  $S_1, S_2$ . Como  $\tau(x) \cap \tau(y) = (ab) = \gamma_1 \cap \gamma_2$ , podemos suponer que  $\tau(x) \setminus (ab) \subset R_1 \cap S_1$  y  $\tau(y) \setminus (ab) \subset R_2 \cap S_2$ . Sea  $w \in (\tau(y) \setminus (ab)) \setminus \gamma_1 \subset R_2 \cap S_2$ . Existe, pues de lo contrario  $\tau(y) = \gamma_1$ , y entonces  $x \in \tau(y)$ , una contradicción ya que  $(xy)$  no es un diámetro. Análogamente, sea  $u \in (\tau(x) \setminus (ab)) \setminus \gamma_2 \subset S_1 \cap R_1$ . Entonces en las gráficas  $\mathcal{P} \setminus \{a, b, y\}$  y  $\mathcal{P} \setminus \{a, b, x\}$ , los vértices  $u$  y  $w$  quedan desconectados.  $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Si  $\mathcal{P}$  no es una rueda, entonces existe una arista  $e$  que satisface las siguientes tres condiciones:*

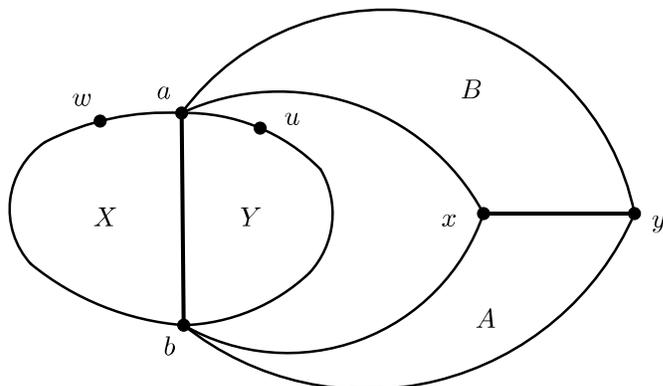


Figura 3.6: La arista  $(ab)$  es un diámetro y  $(xy)$  no lo es.

1. No está en un triángulo.
2. No está en un 3-corte.
3. No es un diámetro.

*Demostración.* Por los lemas 3.2.1 y 3.2.2, es suficiente mostrar que existe una arista que no está en un triángulo ni en un 3-corte. El teorema 3.1.6 nos dice que en  $\mathcal{P}$  hay una arista no esencial: una arista que bien se puede borrar o bien se puede contraer. De hecho aseguramos que, por ser autodual, hay una arista que se puede contraer, si no, entonces tomamos  $e$  arista que se puede borrar y la correspondiente arista dual  $e^*$  se puede contraer en  $\mathcal{P}^* \cong \mathcal{P}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $e$  se puede contraer en  $\mathcal{P}$ . Esto implica que  $e$  no está en un triángulo, de lo contrario  $\mathcal{P}/e$  no sería simple; y también que  $e$  no está en un 3-corte, de lo contrario  $\mathcal{P}/e$  no sería 3-conexa.  $\square$

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $e = (ab)$  una arista que satisface las tres condiciones del teorema anterior. Entonces la gráfica  $(\mathcal{P}/(ab)) \setminus \tau(ab)$ , denotada por  $\mathcal{P}^\diamond = \mathcal{P}_{ab}^\diamond$ , es un poliedro autodual fuertemente involutivo.*

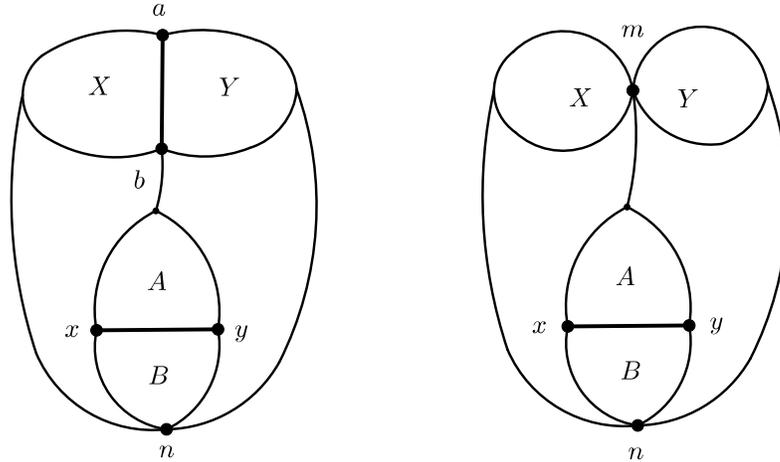


Figura 3.7: La arista  $(ab)$  cumple las condiciones del teorema 3.2.3.

*Demostración.* Como  $(ab)$  satisface las tres propiedades del teorema anterior, se sigue que  $\mathcal{P}/(ab)$  es un poliedro, y por lo tanto su dual  $\mathcal{P}\setminus\tau(ab)$  es también un poliedro. Mostraremos que  $\mathcal{P}^\circ$  es un poliedro. Sin duda, es simple y plana. Necesitamos que sea 3-conexa. Si no lo fuera, existiría un 2-corte  $\{m, n\}$ . Como  $\tau(a)$  y  $\tau(b)$  son las caras tales que  $\tau(a) \cap \tau(b) = \tau(ab)$  podemos observar que uno de los elementos en  $\{m, n\}$  está en  $\tau(a)$  y el otro está en  $\tau(b)$ . Supongamos que  $m \in \tau(a)$  y  $n \in \tau(b)$ . Más aún, el vértice  $a = b$ , denotado por  $ab$  debe ser uno de los elementos en  $\{m, n\}$ , de lo contrario  $\{m, n\}$  sería un 2-corte de  $\mathcal{P}\setminus\tau(ab)$ , una contradicción. Esto implica que en  $\mathcal{P}$ ,  $a \in \tau(b)$  (y por lo tanto  $b \in \tau(a)$ ), así que  $(ab)$  sería un diámetro, lo cual contradice la hipótesis. Finalmente, por definición,  $\mathcal{P}^\circ$  es autodual y es fuertemente involutivo con isomorfismo de dualidad  $\tau^\circ(u) = \tau(u)$  para todo  $u \notin \{a, b\}$  y siendo  $\tau^\circ(a = b)$  la cara obtenida de la unión  $\tau(a)$  y  $\tau(b)$  cuando la arista  $(xy)$  es borrada.  $\square$

El teorema 3.2.4, nos permite definir la operación *quita-contrae* en cualquier poliedro autodual fuertemente involutivo que no sea una rueda: existe al menos una arista  $(ab)$  que podemos contraer y al mismo tiempo borrar la arista  $\tau(ab)$  con el fin de obtener un nuevo poliedro autodual fuertemente

involutivo. Podemos aplicar esta operación repetidamente para finalizar con una rueda (con un número impar de vértices en el ciclo principal). Recíprocamente, podemos empezar con una rueda así y entonces diagonalizar caras y separar sus correspondientes vértices cuidadosamente con el fin de *expandir* poliedro fuertemente involutivo. Por diagonalizar nos referimos a que dada una cara no triangular, añadimos una nueva arista dentro de la cara uniendo dos vértices no consecutivos. En estos términos, tenemos el siguiente:

**Corolario 3.2.5.** *Todo poliedro autodual fuertemente involutivo es bien una rueda o se puede obtener a partir de una rueda mediante una sucesión finita de operaciones que consisten en diagonalizar caras del poliedro y de su dual simultáneamente.*

El trabajo de B. Grünbaum y D. W. Barnette [2] describe el proceso siguiente: dado cualquier poliedro  $\mathcal{G}$  que no sea una rueda siempre es posible encontrar una arista a borrar o a contraer con el fin de obtener un nuevo poliedro más simple, con menos aristas; este proceso puede continuarse hasta llegar a una clase de poliedros irreducibles en este sentido: las ruedas. En todo momento, al aplicar la operación de borrado o contracción, estamos obteniendo gráficas que caen dentro de una misma clase específica: las simples, planas y 3-conexas o poliedros. En este caso estamos ilustrando un proceso más específico para la clase de gráficas que nos interesa: dado cualquier poliedro autodual  $\mathcal{P}$  fuertemente involutivo que no sea una rueda, es posible encontrar una pareja de aristas duales una de la otra de tal manera que al borrar una y contraer otra obtengamos un nuevo poliedro dentro de esta misma clase, pero con menos aristas. Estamos simplificando el poliedro y podemos hacerlo hasta obtener una rueda de longitud impar. El último corolario clasifica a esta familia de poliedros al describir el proceso inverso: partir de una rueda y *expandir* el poliedro añadiendo un par de nuevas aristas duales una de la otra. Ilustraremos este proceso en una aplicación en la sección siguiente.

### 3.3. Aplicación: Construcción de encajes.

En esta sección vamos a describir una aplicación de nuestro teorema de clasificación de poliedros autoduales fuertemente involutivos. El teorema de la antípoda 2.4.1 junto con el lema del encaje isométrico 2.2.2 nos garantiza la existencia de un encaje para una gráfica  $\mathcal{G}$  fuertemente involutiva tal que

el isomorfismo de dualidad entre  $\mathcal{G}$  y su dual actúe como la función antípoda, pero proporcionarlo en forma explícita podría ser un problema de dificultad considerable. Llamaremos a este tipo de encaje *encaje antipodal*.

Antes recordemos que pensando a  $\mathbb{S}^2$  como la esfera unidad centrada en el origen  $O$  de  $\mathbb{R}^3$ , las distancias se suelen medir como ángulos: si  $P$  y  $Q$  son dos puntos en  $\mathbb{S}^2$ , la distancia  $d(P, Q)$  en la esfera es el ángulo que forman los radio vectores  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OQ}$ . De este modo la distancia entre dos puntos antipodales  $P$  y  $-P$  es  $\pi$  y ésta es la distancia máxima alcanzada por algún par de puntos de la esfera. La distancia entre el polo norte y cualquiera de los puntos del ecuador es igual a  $\frac{\pi}{2}$ .

Veamos un ejemplo: Sea  $\mathcal{G} = \mathcal{R}_5$  la rueda sobre un pentágono. Dibujemos un círculo azul sobre  $\mathbb{S}^2$  que esté a una distancia  $d < \frac{\pi}{2}$  con respecto al ecuador. Este será el ciclo principal de la rueda; en él ubicaremos a los vértices  $a, b, c, \dots$  del ciclo principal formando un pentágono regular siendo  $o$  el polo norte (figura 3.8). Luego dibujaremos otro círculo rojo a igual distancia pero en el otro hemisferio para el ciclo principal de la gráfica dual  $\mathcal{G}^*$ . Podemos elegir los vértices de  $\mathcal{G}^*$  para ser los antípodas de  $a, b, c, \dots$ . Esto proporciona un encaje antipodal para el poliedro autodual fuertemente involutivo  $\mathcal{R}_5$ . Agreguemos ahora la arista  $(ad)$  dentro de la cara  $(abcde)$ , que es el ciclo principal. Esto divide a dicha cara en dos, las caras  $(abcd)$  y  $(ade)$ . Para que la autodualidad se preserve, debemos imitar esta diagonal en la gráfica dual  $\mathcal{G}^*$  añadiendo la arista  $AD$  en el interior de la cara  $(ABCDE)$ , esto se traduce en separar el vértice  $o$  de  $\mathcal{G}$  en dos nuevos vértices adyacentes  $o'$  y  $o''$ , de acuerdo al corolario 3.2.5 como se muestra en la figura 3.9.

Podemos hacer esto en el encaje antipodal: basta borrar los vértices  $o$  y  $O$  que pertenecen a  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^*$ , respectivamente; añadir las aristas  $(ad)$  y  $(AD)$  en los pentágonos correspondientes y ubicando los nuevos puntos  $o', o'', O'$  y  $O''$  en las nuevas regiones formadas de manera que formen pares antipodales. El hecho de que el encaje de la gráfica original  $\mathcal{R}_5$  haya sido antipodal nos garantiza que al hacer estos cambios simultáneamente en  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^*$  nos dará un encaje antipodal para la nueva gráfica expandida. Podemos repetir esta operación añadiendo una nueva diagonal a cualquier cara no triangular de esta nueva gráfica con el fin de obtener una gráfica autodual fuertemente involutiva con encaje antipodal. Algo importante a notar es que en este proceso podríamos no estar obteniendo encajes isométricos, en el sentido de que

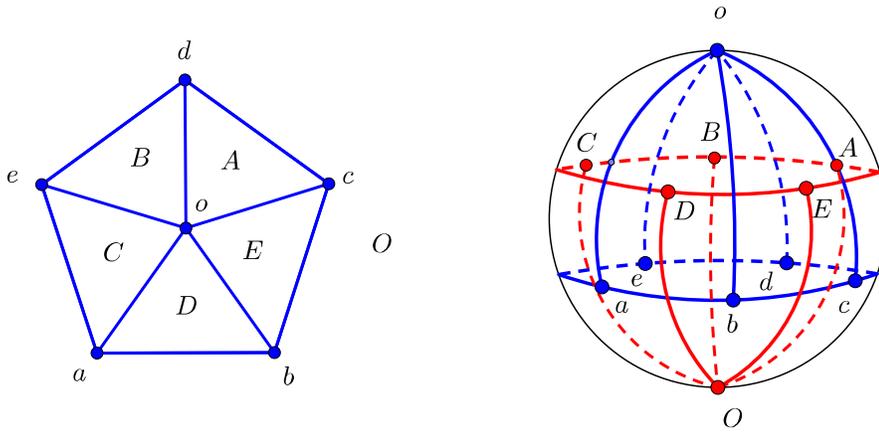


Figura 3.8: Encaje antipodal de la rueda  $\mathcal{R}_5$ .

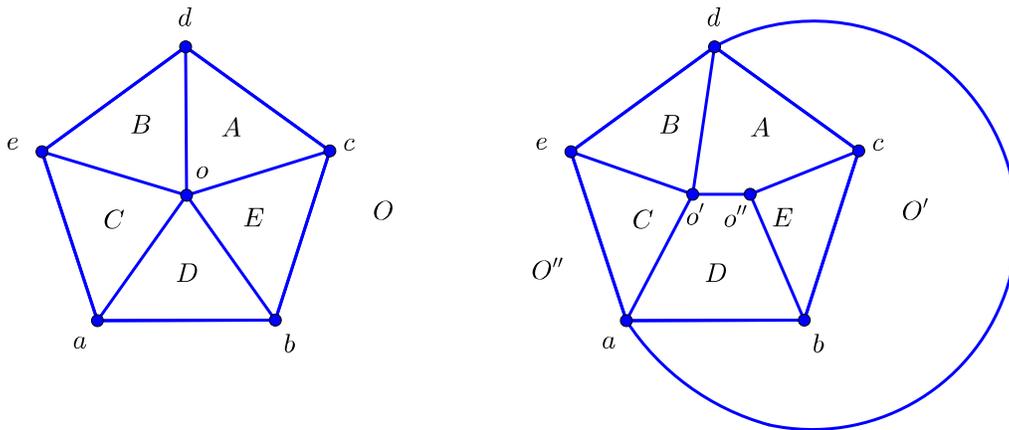


Figura 3.9: Diagonalización de la cara  $(abcde)$  y separación del vértice dual  $o$  en el plano.

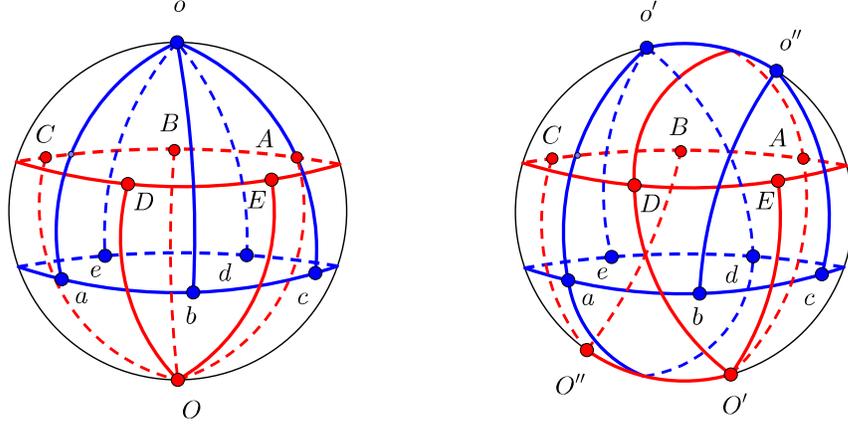


Figura 3.10: Diagonalización de la cara  $(abcde)$  y separación del vértice dual  $o$  en la esfera.

todos los automorfismos de la gráfica actúan como isometrías; el lema del encaje isométrico nos garantiza la existencia de tales encajes, aquí estamos construyendo uno muy particular y luego modificándolo mediante la inversa de la operación quita-contrae cuidando que el isomorfismo de dualidad continúe actuando como la función antípoda  $\alpha$ , olvidándonos del resto de los automorfismos de  $\mathcal{G}$ . A pesar de estas observaciones, para las aplicaciones que nos interesan es relevante el tener encajes antipodales.

Vamos a dar ahora un encaje métrico para la rueda  $\mathcal{R}_q$ . Comenzaremos con un encaje antipodal como que acabamos de describir, en la esfera con centro en el origen  $O$  y radio  $\frac{1}{2}$  y aprovecharemos la simetría del grupo  $[q]$ .

**Teorema 3.3.1.** *Existe un encaje métrico para la rueda  $\mathcal{R}_q$ , para  $q = 2k + 1$ .*

*Demostración.* Sean  $A_1, \dots, A_q$  los puntos de la esfera correspondientes a los vértices del ciclo principal de la rueda y  $C$  el punto correspondiente al vértice cúspide. Cada  $A_i$  tiene por cara dual al triángulo  $A_{i+k}A_{i-k}O$  (módulo  $q$ ), por lo que en un encaje métrico  $\eta$  en  $\mathbb{E}^3$ , las imágenes de los segmentos  $A_iA_{i+q}$  y  $A_iA_{i-q}$  deben medir 1, al igual que las imágenes de los segmentos  $CA_i$ , para cada  $i = 1, \dots, q$ . Consideremos los radiovectores  $\overrightarrow{OA_i}$  para cada  $i = 1, \dots, q$ . Podemos elegir un  $\lambda_0 \in \mathbb{E}$  tal que

$$\lambda_0 |\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_{i+k}}| = 1$$

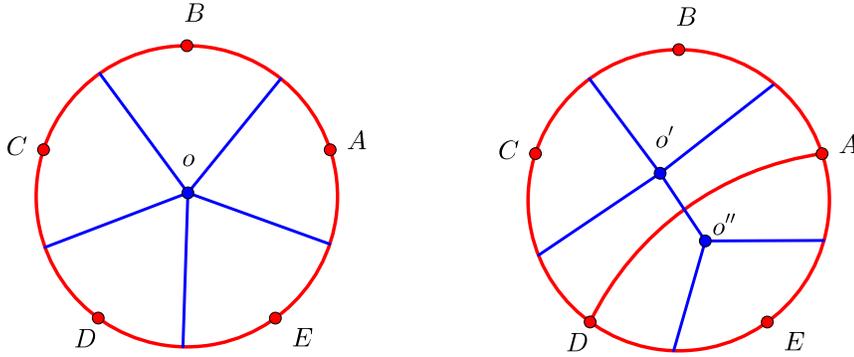


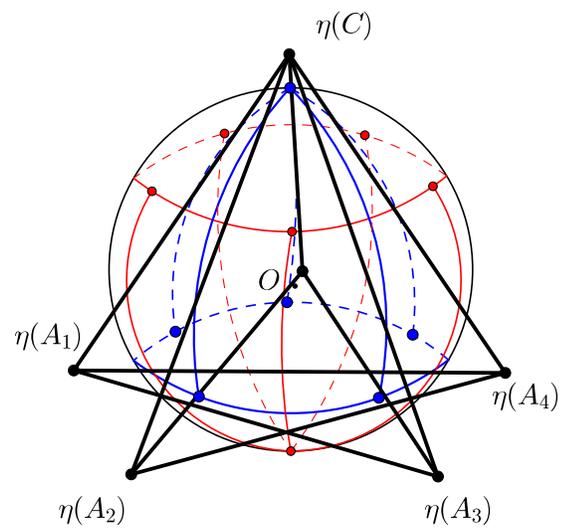
Figura 3.11: La cara pentagonal de  $\mathcal{R}_5$  vista desde el polo norte.

Definiremos  $\eta(A_i)$  como el punto  $\lambda_0(\overrightarrow{OA_i})$ . Hemos reescalado los vectores  $\overrightarrow{OA_i}$  con el fin de que las imágenes de los segmentos  $\overline{A_i A_{i+k}}$  y  $\overline{A_i A_{i-k}}$  bajo  $\eta$  tengan longitud 1. Haremos lo mismo con la cúspide  $C$ . Sea  $\lambda_1 \in \mathbb{E}$  tal que

$$|\lambda_0(\overrightarrow{OA_i}) - \lambda_1(\overrightarrow{OC})| = 1$$

Definimos  $\eta(C) = \lambda_1(\overrightarrow{OC})$ . Por construcción,  $\eta$  es un encaje métrico. Es un ejercicio fácil argumentar que  $\text{diám}\{\eta(V)\} = 1$  para el conjunto  $V$  de vértices de  $\mathcal{R}_q$ .  $\square$

En el siguiente capítulo usaremos esta técnica de reescalar vectores para construir encajes métricos de familias infinitas de poliedros autoduales fuertemente involutivos.

Figura 3.12: Encaje métrico de  $\mathcal{R}_5$ .

# Capítulo 4

## Encajes Métricos.

En este capítulo aplicaremos algunas de los resultados expuestos en el capítulo 2 para encontrar encajes métricos en dos ejemplos de familias infinitas de poliedros fuertemente involutivos. Un poliedro autodual  $\mathcal{P}$  es *fuertemente involutivo* si, y sólo si existe un isomorfismo de dualidad  $\alpha$  que satisface:

- (i) Para cada par  $A, B$  de vértices,  $A \in \alpha(B)$  si, y sólo si  $B \in \alpha(A)$ .
- (ii) Para cada vértice  $A$ , tenemos que  $A \notin \alpha(A)$ .

En el capítulo 2 hemos establecido que  $\alpha$  se comporta geoméricamente como el *mapeo antípoda*. Por ejemplo, las gráficas de la figura 4.1 son poliedros fuertemente involutivos en donde  $\alpha$  es una asignación de una *cara dual*

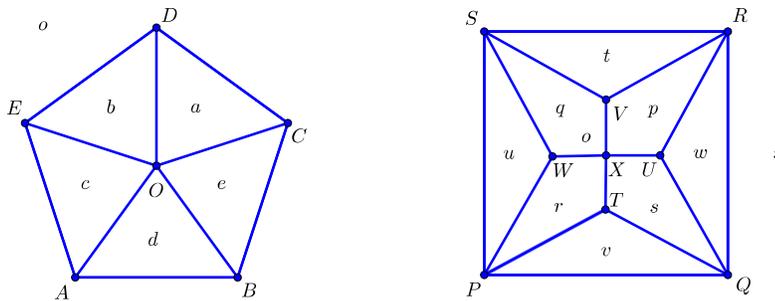


Figura 4.1: La 5-rueda y la 4-hiperrueda.

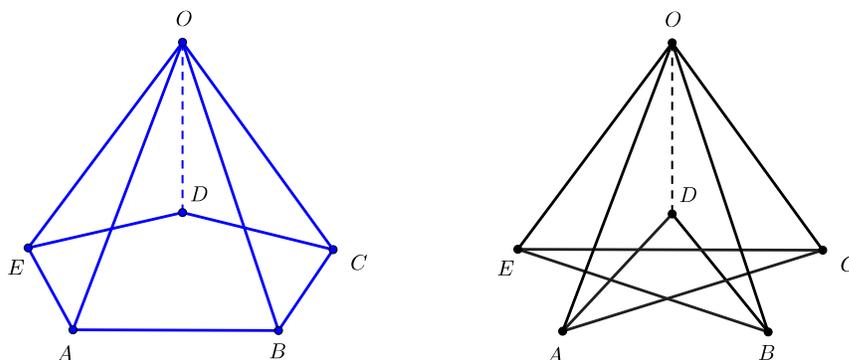


Figura 4.2: Encaje de la 5-rueda y su gráfica de distancias en  $\mathbb{E}^3$ .

para cada punto. Así, la cara dual de  $A$  es la región  $CDO$  que denotaremos simplemente por  $a$ , la cara dual de  $X$  es la región  $PQRS$ , denotada por  $x$ .

Dado un poliedro autodual fuertemente involutivo  $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \alpha)$  un *encaje métrico* es una función inyectiva  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{E}^3$  con  $\text{diam}(\eta(\mathcal{V})) = 1$  y tal que la distancia euclidiana entre cualquier par de puntos  $\eta(X)$  y  $\eta(Y)$  es 1 si y sólo si  $X \in \alpha(Y)$ . Si tal función existe, el trabajo de L. Montejano y E. Roldán-Pensado ([20]) muestra una manera de asociar un cuerpo de ancho constante al poliedro  $\mathcal{P}$ . Para mostrar la existencia de encajes métricos recurriremos a la *gráfica de distancias* o *gráfica de diámetros*  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ , la cual tiene por conjunto de vértices al mismo conjunto de vértices de  $\mathcal{P}$  y donde  $AB$  es una arista si, y sólo si  $A \in \alpha(B)$  (figura 4.2). Usaremos el Lema del Encaje Isométrico 2.2.2 y las ideas expuestas en el capítulo 2 para aprovechar la simetría dada por la forma de autodualidad de  $\mathcal{P}$ .

## 4.1. La multi-rueda.

En la figura 4.3 mostramos un garabato correspondiente a una región fundamental  $R$  para el grupo  $[q]$ . Es una lúnula comprendida entre dos planos verticales que forman un ángulo de  $\frac{\pi}{q}$ . El punto verde que aparece en el centro de la lúnula denota una rotación por un ángulo de  $\pi$  en torno a dicho punto. Esta rotación manda el garabato azul en el garabato rojo y viceversa pues es un isomorfismo de dualidad en el par  $[q] \triangleleft [2^+, 2q]$  que corresponde a la forma de dualidad de una  $q$ -rueda para  $q > 3$ . Al hacer actuar  $[q]$  en  $\mathbb{S}^2$  se produce

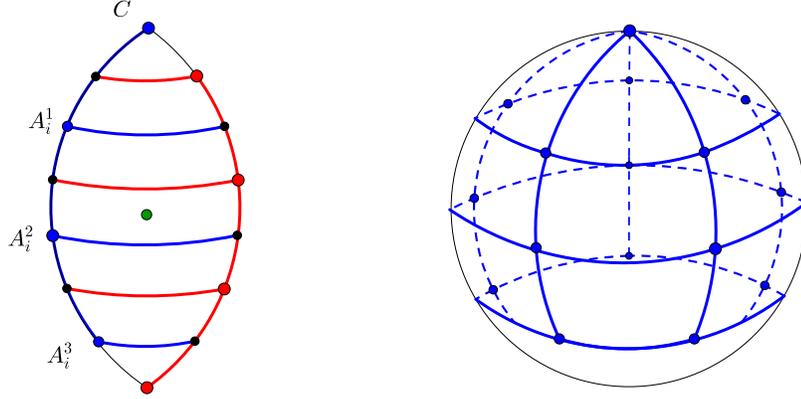


Figura 4.3: Una región fundamental  $R$ , el garabato y encaje de  $\mathcal{P}_5^3$  en  $\mathbb{S}^2$ .

una gráfica autodual que generaliza a la  $q$ -rueda y al *panqué*  $q$ -agonal que ejemplificamos en el primer capítulo. Se trata en este caso de un panqué con tres pisos que en general definiremos como  $q$ -*multi-rueda* con  $l$  niveles  $\mathcal{P}_q^l$  (figura 4.3).

Dados cualesquiera  $q, l$  números naturales, la  $q$ -*multi-rueda* con  $l$  niveles es la gráfica  $\mathcal{P}_q^l$  que consta de los  $l$  ciclos  $(A_1^1, \dots, A_q^1), \dots, (A_1^l, \dots, A_q^l)$ , un vértice central  $C = A_i^0$  llamado *cúspide* y aristas  $A_i^j A_i^{j+1}$ . En la figura 4.4 ilustramos esta construcción para  $q = 5, l = 3$ . De acuerdo al teorema 2.5.3, cuando  $q = 2k + 1$ ,  $\mathcal{P}_q^l$  es un poliedro autodual fuertemente involutivo con involución fuerte  $\alpha$  ilustrada en las figuras 4.4 y 4.5 denotando por  $\alpha(A_i^j) = a_i^j$  y  $\alpha(C) = c$ . Más precisamente:

$$\alpha(A_i^j) = A_{i+k}^{l-j} A_{i+k}^{l-j+1} A_{i-k}^{l-j} A_{i-k}^{l-j+1}, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, l - 1$$

$$\alpha(A_i^l) = A_{i+k}^1 A_{i-k}^1 C$$

y finalmente

$$\alpha(C) = A_1^l \cdots A_q^l$$

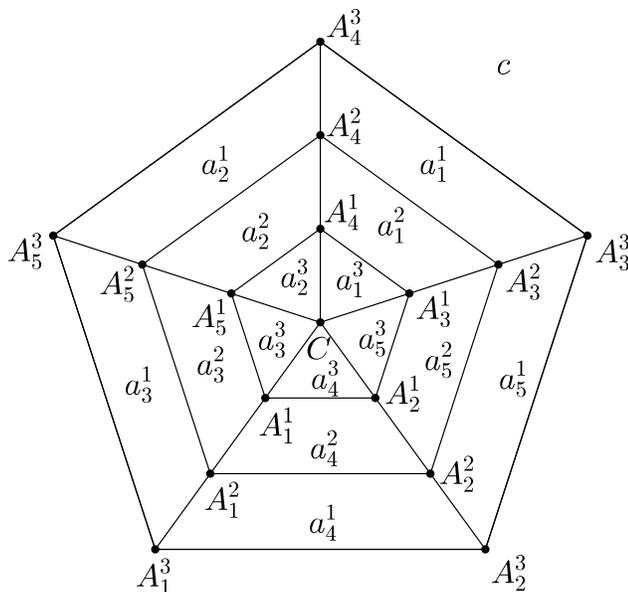


Figura 4.4: La 5-multi-rueda con 3 niveles.

Por construcción, el poliedro  $\mathcal{P}_q^l$  tiene forma de dualidad  $[q] \triangleleft [2^+, 2q]$  y se genera dibujando el garabato de la figura 4.3 en una región fundamental  $R$  del grupo  $[q]$ . Podemos observar que la órbita de cada punto  $A_i^j$  al hacer actuar  $[q]$  en la esfera será un  $q$ -ágono regular sobre un plano horizontal. Para mostrar que este poliedro tiene encaje métrico bastará mostrar un encaje para los puntos de la región fundamental  $R$  de modo tal que las aristas de la gráfica de distancias  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_q^l)$  que inciden en la región fundamental  $R$  tengan todas longitud 1. Una vez hecho esto, aprovecharemos la simetría del encaje isométrico obtenido al hacer actuar  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  en la esfera para obtener el encaje deseado.

**Proposición 4.1.1.** *Si  $q = 2k + 1$ , entonces existe un encaje métrico para  $\mathcal{P}_q^l$ .*

*Demostración.* Por el Lema del Encaje Isométrico podemos comenzar con un encaje de  $\mathcal{P}_n^l$  en la esfera con centro en el origen  $O$  y radio  $\frac{1}{2}$  en el que todos los automorfismos son isometrías. En este caso  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n^l) = [q]$  así que una

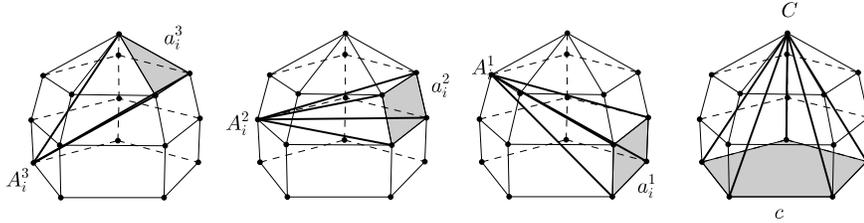


Figura 4.5: Asignación  $\alpha$  de la cara dual para cada punto  $A_i^j$ .

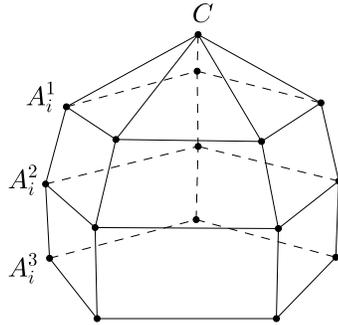


Figura 4.6: Encaje isométrico de la 5-multi-rueda con 3 niveles.

región fundamental es una *lúnula* limitada por dos planos que forman ángulo  $\frac{\pi}{q}$ . Los  $l$  ciclos son  $q$ -ágonos regulares que están sobre planos paralelos de manera tal que sus centros pertenecen a una recta común  $\mathcal{L}$  perpendicular a estos planos, que contiene también a la cúspide  $C$ . Por la simetría, para cada  $i$  los puntos  $A_i^1, \dots, A_i^l$  y  $C$  están sobre el plano  $\mathcal{S}_i$  determinado por la recta  $CA_i^1$  y la recta  $\mathcal{L}$ .

Por la manera en que está definida la involución fuerte, en la gráfica de diámetros  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_q^l)$  todos los puntos en  $\mathcal{S}_i$  deben estar conectados con puntos de  $\mathcal{S}_{i-k}$  y  $\mathcal{S}_{i+k}$ , y los puntos en el nivel  $j$  deben estar conectados con puntos de los niveles  $l-j$  y  $l-j+1$  para  $0 \leq j \leq l$ . Notemos que los puntos en el nivel  $j = \lceil \frac{l}{2} \rceil$  deben estar conectados con puntos del mismo nivel. Será

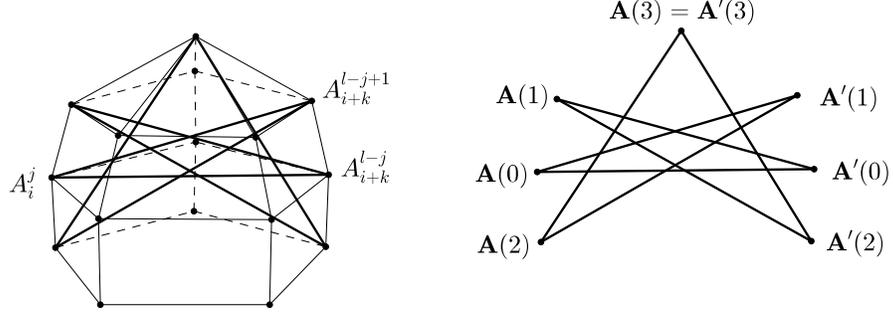


Figura 4.7: Adyacencias de la gráfica de distancias.

suficiente mostrar un encaje métrico  $\eta : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  para el conjunto  $\mathcal{U}_i$  de puntos en  $\mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{i+k}$  en el que las imágenes de las aristas  $A_i^j A_{i+k}^{l-j}$  y  $A_i^j A_{i+k}^{l-j+1}$  para  $0 \leq j \leq l$  tengan todas longitud 1.

Sean  $\mathbf{A}(j)$  y  $\mathbf{A}'(j)$  los radio-vectores  $\overrightarrow{OA_i^{\Delta(j)}}$  y  $\overrightarrow{OA_{i+k}^{\Delta(j)}}$ , respectivamente, donde para  $0 \leq j \leq l$ ,  $\Delta(j) = \lceil \frac{l}{2} \rceil + (-1)^{l+1} \lceil \frac{j}{2} \rceil$ :

- Si  $l$  es par, entonces  $\Delta(j) = \frac{l}{2} + 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{j+1} j$ ,
- Si  $l$  es impar, entonces  $\Delta(j) = \frac{l+1}{2} - 1 + 2 - 3 + 4 + \dots + (-1)^j j$ .

La función  $\Delta$  simplemente describe el patrón de adyacencias en  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_n^l)$  mostrado en la figura 4.7, donde los vectores  $\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}'(0)$ ,  $\mathbf{A}'(0) - \mathbf{A}(0)$ ,  $\mathbf{A}(j) - \mathbf{A}'(j+1)$ ,  $\mathbf{A}'(j) - \mathbf{A}(j+1)$ , para  $0 \leq j \leq l$  son las aristas de  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_q^l)$ . Nuestra técnica será reescalar cada radio-vector con el fin de tener las distancias deseadas iguales a 1, preservando las adyacencias del poliedro.

Sea  $\lambda_0 \in \mathbb{E}$  tal que  $|\lambda_0(\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}'(0))| = 1$ . Luego para  $0 < j \leq l$ , podemos definir recursivamente  $\lambda_j \in \mathbb{E}$  tal que  $|\lambda_{j-1}\mathbf{A}(j-1) - \lambda_j\mathbf{A}'(j)| = |\lambda_{j-1}\mathbf{A}'(j-1) - \lambda_j\mathbf{A}(j)| = 1$ .

Definimos el encaje métrico  $\eta : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{E}^3$  como  $\eta(A_i^{\Delta(j)}) = \lambda_j\mathbf{A}(j)$ , y  $\eta(A_{i+k}^{\Delta(j)}) = \lambda_j\mathbf{A}'(j)$ .

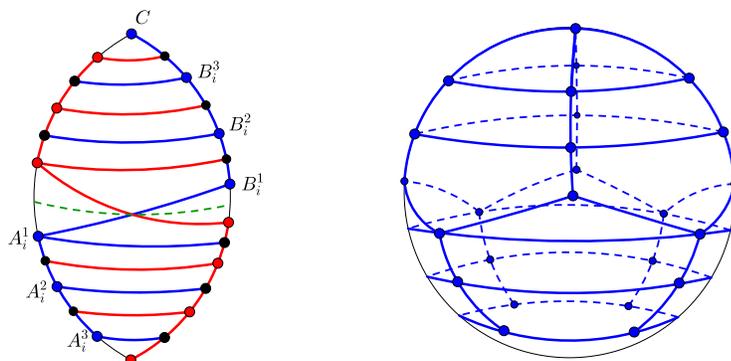


Figura 4.8: Una región fundamental  $R$ , el garabato y encaje de  $\mathcal{O}_4^3$  en  $\mathbb{S}^2$ .

□

## 4.2. La multi-hiperrueda.

Del mismo modo en que generalizamos la  $q$ -rueda añadiendo varios niveles, podemos generalizar a la  $q$ -hiperrueda. Consideremos el garabato de la figura 4.8. Está dibujado sobre otra lúnula entre dos planos que forman ángulo  $\frac{\pi}{q}$ . La reflexión en la línea punteada color verde intercambia los colores rojo y azul pues funciona como isomorfismo de dualidad del par  $[q] \triangleleft [2, q]$  que es la forma de dualidad de  $\mathcal{O}_q$ . Si hacemos actuar a  $[q]$  en la esfera, se completa una gráfica que generaliza a la  $q$ -hiperrueda. Dados dos números naturales  $q, l$ , la  $q$ -multi-hiperrueda con  $l$  niveles es la gráfica  $\mathcal{O}_q^l$  que consta de los ciclos:

$$\begin{aligned} & (A_1^1, B_1^1, A_2^1, B_2^1, \dots, A_q^1, B_q^1) \\ & (A_1^1, \dots, A_q^1), \dots, (A_1^l, \dots, A_q^l) \\ & (B_1^2, \dots, B_q^2), \dots, (B_1^l, \dots, B_q^l) \end{aligned}$$

un vértice  $C = B_i^{l+1}$  llamado *cúspide* y las aristas  $A_i^j A_i^{j+1}$  y  $B_i^j B_i^{j+1}$  para  $j = 1, \dots, l$ . En la figura 4.9 ilustramos esta gráfica para  $q = 4, l = 3$ .

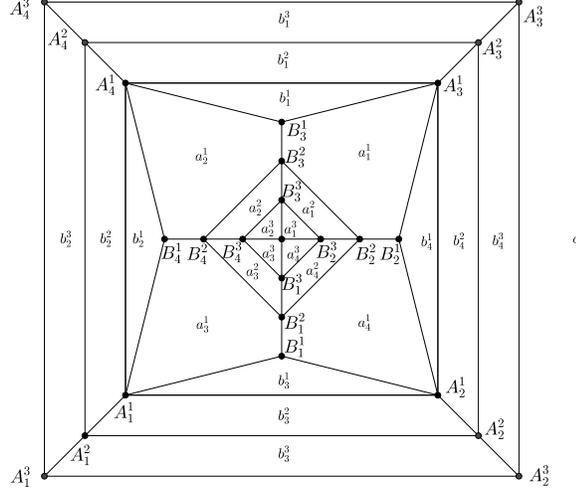


Figura 4.9: La 4-multi-hiperrueda con 3 niveles.

De acuerdo al teorema 2.5.3, si  $q = 2k$ ,  $\mathcal{O}_q^l$  es un poliedro autodual fuertemente involutivo con involución fuerte  $\alpha$ , indicada en las figuras 4.9 y 4.10 con  $\alpha(A_i^j) = a_i^j$ ,  $\alpha(B_i^j) = b_i^j$  y  $\alpha(C) = c$ . Más precisamente:

$$\begin{aligned} \alpha(A_i^l) &= B_{i+k}^1 B_{i+k-1}^1 C \\ \alpha(A_i^j) &= B_{i+k}^j B_{i+k-1}^j B_{i+k-1}^{j+1} B_{i+k}^{j+1}, j = 2, \dots, l-1 \\ \alpha(A_i^1) &= B_{i+k}^2 B_{i+k-1}^2 B_{i+k-1}^1 A_{i+k}^1 B_{i+k}^1 \\ \alpha(B_i^1) &= A_{i+k}^1 B_{i+k}^1 B_{i+k-1}^1 \\ \alpha(B_i^j) &= A_{i+k}^{j-1} A_{i+k}^j A_{i+k-1}^j A_{i+k-1}^{j-1}, j = 2, \dots, l \\ \alpha(C) &= A_1^l \cdots A_q^l \end{aligned}$$

Hagamos notar que  $\alpha$  visto como isomorfismo de dualidad asocia a cada punto  $P$ , el conjunto de vértices de su cara dual  $p$  mientras que vista como isometría de la esfera a cada punto  $P$  sobre la esfera le asocia su antípoda

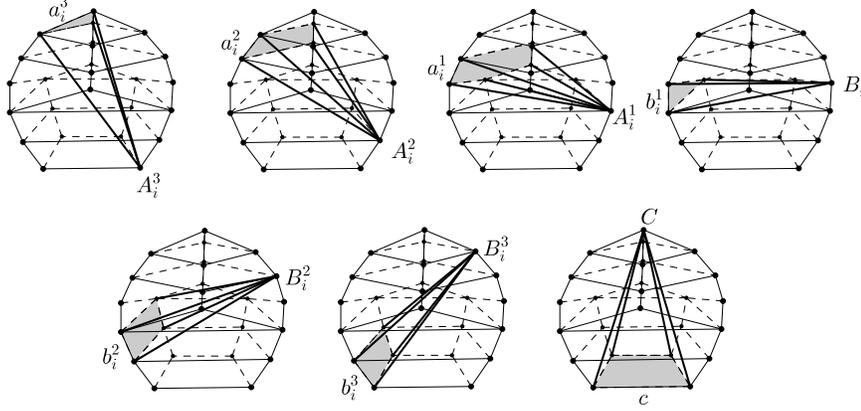


Figura 4.10: Asignación de cara dual para cada punto  $A_i^j$  y  $B_i^j$ .

– $P$  que resulta ser un punto dentro de la cara dual de  $P$  cuando la gráfica está encajada isométricamente según el teorema 2.2.2.

**Proposición 4.2.1.** *Si  $q = 2k$ , entonces existe un encaje métrico para  $\mathcal{O}_n^l$ .*

*Demostración.* De nuevo, comenzamos con un encaje isométrico de  $\mathcal{O}_q^l$  en la esfera con centro en el origen  $O$  y radio  $\frac{1}{2}$ . Como  $\text{Aut}(\mathcal{O}_q^l) = [q]$ , una región fundamental es una lúnula acotada por dos planos que forman un ángulo de  $\frac{\pi}{q}$ . Los ciclos

$$(A_1^1, \dots, A_q^1), \dots, (A_1^l, \dots, A_q^l)$$

$$(B_1^2, \dots, B_q^2), \dots, (B_1^l, \dots, B_q^l)$$

son  $q$ -ágonos regulares que están sobre planos paralelos de manera que sus centros están sobre una recta común  $\mathcal{L}$  perpendicular a estos planos, que contiene también a la cúspide  $C$ . Por la simetría, para cada  $i$  los puntos  $A_i^1, \dots, A_i^l$  y  $C$  están sobre el plano  $\mathcal{S}_i$  determinado por la recta  $CA_i^1$  y la recta  $\mathcal{L}$ ; y los puntos  $B_i^1, \dots, B_i^{l+1}$  están sobre el plano  $\mathcal{T}_i$  determinado por la recta  $CB_i^1$  y  $\mathcal{L}$ .

Por la manera en que la involución fuerte está definida, en la gráfica de diámetros  $\mathcal{D}(\mathcal{O}_q^l)$  todos los puntos en  $\mathcal{S}_i$  deben estar conectados con puntos en  $\mathcal{S}_{i+k}$  y  $\mathcal{S}_{i+k-1}$ , puntos en  $\mathcal{T}_i$  deben estar conectados con puntos de  $\mathcal{T}_{i+k}$  y

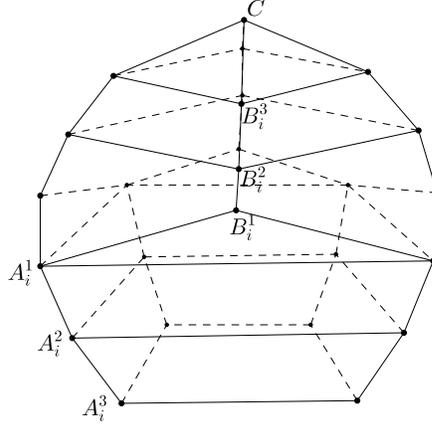


Figura 4.11: Encaje de  $\mathcal{O}_q^l$  en  $\mathbb{E}^3$ .

$\mathcal{T}_{i+k-1}$ . En este caso, los puntos  $A_i^j$  en el nivel  $j$  deben estar conectados con puntos  $B_{i+k}^{j-1}, B_{i+k-1}^{j-1}$  en el nivel  $j-1$  para  $0 \leq j \leq l$ . Notemos que los puntos del nivel  $j=1$  deben estar conectados con puntos del mismo nivel.

Es suficiente construir un encaje métrico  $\eta : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{E}^3$  para el conjunto  $\mathcal{U}_i$  de puntos en  $\mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{i+k} \cup \mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_{i+k}$  en el que las imágenes de las aristas  $A_i^j B_{i+k}^j$  y  $A_i^j B_{i+k}^{j-1}$  para  $0 \leq j \leq l$  tengan todas longitud 1.

Sean  $\mathbf{A}(j)$  y  $\mathbf{A}'(j)$  los radio-vectores  $\overrightarrow{OA_i^{j-1}}$  y  $\overrightarrow{OA_{i+k}^{j-1}}$  para  $0 \leq j \leq l-1$ , respectivamente, y sean  $\mathbf{B}(j)$  y  $\mathbf{B}'(j)$  los radio-vectores  $\overrightarrow{OB_i^{j-1}}$  y  $\overrightarrow{OB_{i+k}^{j-1}}$  para  $0 \leq j \leq l$ .

Esta numeración describe el patrón de adyacencias en  $\mathcal{D}(\mathcal{O}_q^l)$  mostrado en la figura 4.12, en donde los vectores  $\pm(\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}'(0)), \pm(\mathbf{B}'(0) - \mathbf{B}(0)), \pm(\mathbf{A}(j) - \mathbf{B}'(j)), \pm(\mathbf{A}(j) - \mathbf{B}'(j+1)), \pm(\mathbf{B}(j) - \mathbf{A}'(j)), \pm(\mathbf{B}(j) - \mathbf{A}'(j-1))$  para  $0 \leq j \leq l$  son las aristas de  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_q^l)$ . Nuestra técnica será reescalar cada radio-vector con el fin de obtener las distancias deseadas iguales a 1, preservando las adyacencias del poliedro.

Sean  $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{E}$  tales que  $|\lambda_0(\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}'(0))| = |\mu_0(\mathbf{B}(0) - \mathbf{B}'(0))| = 1$ .

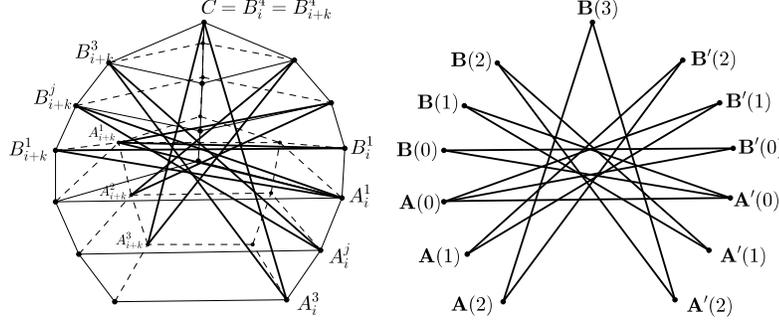


Figura 4.12: Patrón de adyacencias de la gráfica de distancias en  $\mathcal{O}_q^l$ .

En este caso necesitamos escojer la distancia adecuada entre los planos que contienen a  $\mathbf{A}(0)$ ,  $\mathbf{A}'(0)$  y  $\mathbf{B}(0)$ ,  $\mathbf{B}'(0)$  de manera que  $|\lambda_0 \mathbf{A}(0) - \mu_0 \mathbf{B}'(0)| = |\lambda_0 \mathbf{A}'(0) - \mu_0 \mathbf{B}(0)| = 1$ .

Luego, para  $0 < j \leq l$ , podemos definir recursivamente  $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$  tal que

$$|\lambda_{j-1} \mathbf{A}(j-1) - \mu_j \mathbf{B}'(j)| = |\lambda_{j-1} \mathbf{A}'(j-1) - \mu_j \mathbf{B}(j)| = 1$$

y

$$|\mu_j \mathbf{B}(j) - \lambda_j \mathbf{A}'(j)| = |\mu_j \mathbf{B}'(j) - \lambda_j \mathbf{A}(j)| = 1.$$

Definimos el encaje  $\eta : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{E}^3$  como  $\eta(A_i^{j-1}) = \lambda_j \mathbf{A}(j)$ ,  $\eta(A_{i+k}^{j-1}) = \lambda_j \mathbf{A}'(j)$ ,  $\eta(B_i^{j-1}) = \mu_j \mathbf{B}(j)$ ,  $\eta(B_{i+k}^{j-1}) = \mu_j \mathbf{B}'(j)$ .

□



# Capítulo 5

## Resultados obtenidos.

En este capítulo haremos una lista de los resultados de nuestra investigación y plantearemos algunas de las preguntas importantes en torno a la relevancia de los poliedros autoduales fuertemente involutivos.

### 5.1. Clasificación Geométrica.

A lo largo de este proyecto de tesis hemos alternado entre los puntos de vista abstracto y topológico, o también llamados combinatorio y geométrico. H. Whitney [28], [29] hace hincapié en las versiones abstracta y topológica de una gráfica, siendo la primera simplemente un conjunto de símbolos llamados vértices y arcos (aristas) y la segunda una realización de éstos símbolos como los subconjuntos usuales de  $\mathbb{E}^3$ . En vista de que nuestro problema involucra una métrica que se debe preservar entre ciertos vértices, he insistido en que más que topológica, la nuestra ha sido una interpretación geométrica para estas gráficas. Aquí una lista de lo que personalmente creo que han sido los principales resultados obtenidos de esta interpretación:

1. Se hizo ver la importancia de las isometrías de la esfera al poder encajar a nuestras gráficas de manera que su grupo de automorfismos actúe como grupo de isometrías (Teorema 2.2.2).
2. Se mostró que las condiciones combinatorias de que una gráfica autodual sea fuertemente involutiva se traducen en el hecho de que exista una dualidad que actúe como el mapeo antípoda, cuando se encaja isométricamente a la gráfica (Teorema 2.4.1).

3. Se clasificaron las formas de dualidad que dan lugar a gráficas autoduales fuertemente involutivas, dando lugar a 10 formas de dualidad distintas (Teorema 2.5.3).
4. Se introdujo la noción de *garabato* de una gráfica  $G$  entendido como la porción de la gráfica de cuadrados  $G_{\square}$  que queda dibujada sobre el orbifold correspondiente a la acción del grupo de dualidades  $\text{Dual}(G)$  como grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$ .
5. Se exploraron diversos ejemplos de garabatos que dan lugar a gráficas autoduales con una forma de dualidad dada, sugiriendo que existe una infinidad de gráficas autoduales con una misma forma de dualidad.

Por otro lado, dejamos la puerta abierta para reflexionar y trabajar activamente en las siguientes preguntas:

1. Encontrar condiciones bajo las cuales el grupo de automorfismos de una gráfica plana  $G$  pueda actuar de manera única como grupo de isometrías de la esfera.
2. Describir una manera sistemática de obtener familias distintas de gráficas autoduales con forma de dualidad dada.
3. Describir una manera sistemática de crear posibles garabatos para una forma de dualidad dada.
4. Construir familias infinitas de gráficas autoduales con forma de dualidad dada.
5. Buscar una clasificación descriptiva de las gráficas autoduales con forma de dualidad dada.

Esta lista de preguntas está lejos de ser completa. Pasaremos a comentar algunos resultados y preguntas que respectan al enfoque abstracto o combinatorio.

## 5.2. Clasificación Combinatoria

El trabajo de W. T. Tutte [27] clasifica a todas las gráficas 3-conexas. En virtud del teorema de Whitney, estas ideas nos permitieron explorar una

clasificación tal para los poliedros. Cabe mencionar que a lo largo del trabajo estuvimos pensando siempre en lo que usualmente se conoce como *poliedros esféricos*. El mundo de las gráficas simples y 3-conexas encajadas en alguna otra superficie compacta y orientable podría ofrecer sorpresas igualmente interesantes. Eso da para otro u otros proyectos. Por ahora, una lista de resultados obtenidos de manera combinatoria.

1. Se resumieron de manera compacta las ideas empleadas en el trabajo de W. T. Tutte restringidas al caso de gráficas planas para enunciar un teorema análogo que clasifica a todos los poliedros (esféricos) de manera que pudieramos usarlo para clasificar a los poliedros (esféricos) autoduales.
2. Se utilizaron los resultados de la clasificación anterior para clasificar a los poliedros (esféricos) autoduales en términos de operaciones de borrado y contracción de aristas.
3. Se introduce la idea de *reducción* de un poliedro, entendida como quitar o contraer aristas, preservando las propiedades de conexidad y en su caso la auto-dualidad. En este sentido llegamos a que los poliedros autoduales *irreducibles* son las ruedas.
4. Se ilustró como usar esta clasificación para construir encajes de los poliedros en la esfera de modo que la involución fuerte actúe como el mapeo antípoda.

A continuación se da una lista de preguntas que pudieran ser de interés para esta filosofía.

1. ¿Cómo se puede describir esta clasificación de poliedros usando matroides?
2. ¿Existe un teorema similar al teorema de Whitney para gráficas con género 1? ¿con género  $k$ ? ¿Hay una manera combinatoria de definir *el dual* de una gráfica en tales casos?
3. En caso de poder definir dual de manera única para género  $k > 0$ , ¿Se podrá dar un teorema análogo de clasificación en términos de operaciones de borrado y contracción de aristas? En caso afirmativo ¿cuáles podrían ser las gráficas *irreducibles* en cada caso?

4. ¿Se puede utilizar la operación *quita-contrae* para mostrar la existencia de encajes métricos?

### 5.3. Respuestas a nuestra pregunta central.

Entender la naturaleza de nuestro espacio geométrico parece ser un problema de mucha más dificultad que la que aparenta. Nuestra familiaridad con los sistemas de coordenadas en el espacio pueden crear la ilusión de que es sencillo resolver problemas geométricos en el mismo. El desglosar la pregunta central *¿Cuáles gráficas autoduales dan lugar a Poliedros de Reuleaux?* en sus versiones abstracta, topológica y geométrica me ha permitido vislumbrar dónde se encuentran las limitaciones de esa familiaridad : todo depende de dónde se parte. Por ejemplo, dada una configuración extrema de puntos en  $\mathbb{E}^3$  que corresponda a una gráfica autodual  $G$ , parece natural usar un encaje isométrico de  $G$  en la esfera para luego *diagonalizar* una cara, es decir, elegir una cara y un punto (duales uno del otro bajo el mapeo antípoda) para usar la operación *quita-contrae* a la inversa, buscando una gráfica  $G'$  con dos aristas más (duales una de la otra) de modo tal que al aplicar *quita-contrae* obtengamos  $G$  y finalmente intentar construir una configuración extrema con un punto más a partir de la configuración inicial. Este camino, si bien es atractivo, está lleno de complejidad en general. Si partimos ahora de una gráfica autodual  $G$  y la encajamos isométricamente en la esfera, podemos intentar descubrir un patrón de adyacencias (de la gráfica de distancias) que nos permita construir un encaje métrico parcial (sólo en la porción de la gráfica que se restringe a una región fundamental) y completarlo bajo la acción del grupo de dualidades de  $G$ . Nuevamente hay dificultades en este camino que, hasta el día de hoy, no he visto cómo atacar. Por el momento tenemos las siguientes conclusiones:

- a) Toda rueda sobre un ciclo de longitud impar  $n = 2k + 1$  admite un encaje métrico (3.3.1 y por lo tanto da lugar a un poliedro de Reuleaux y provee de una configuración extrema con  $n + 1$  puntos.

- b) Si una gráfica  $G$  es fuertemente involutiva, entonces hay una manera de encajarla en el espacio de manera que para cada vértice  $v$ , la cara dual (imagen bajo la involución fuerte) de  $v$  sea la *cara opuesta* de  $v$  en el sentido del Teorema 2.4.1.
- c) Las condiciones combinatorias para que una gráfica  $G$  sea fuertemente involutiva son equivalentes a la condición geométrica del Teorema 2.4.1.

Terminaremos enunciando la siguiente

**Conjetura 5.3.1.** *Todo poliedro autodual fuertemente involutivo  $\mathcal{P}$  admite un encaje métrico y por lo tanto da lugar a un Poliedro de Reuleaux.*

Quizás el optimismo que me motiva a escribirla sea producto de la ilusión que mencioné en el primer párrafo, pero me parece que encontrar una primera gráfica autodual fuertemente involutiva que no admita un encaje métrico sería quizás tan sorprendente como encontrar una demostración de la conjetura. En cualquier caso este es un proyecto que ha resultado muy enriquecedor y quizás sea el punto de partida para conectar y desarrollar muchas más ideas.



# Bibliografía

- [1] D. Archdeacon, R. B. Richter, The Construction and Classification of Self-Dual Spherical Polyhedra, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **54**, 37–63 (1992).
- [2] D. W. Barnette, B. Grünbaum, On Steinitz's Theorem concerning convex 3-polytopes, *Lecture Notes in Mathematics* **110** (1968), 27–40.
- [3] K. Bedzdek, Z. Lángi, M. Naszódi, P. Papez, Ball-polyhedra, *Discret. Comput. Geom.* **38** (2007), 201–230.
- [4] L. Boza, M. P. Revuelta, The dimension of a graph, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **28** (2007), 231–238.
- [5] J. Bracho, L. Montejano, E. Pauli and J. Ramírez-Alfonsín, Strongly Involutive Self Dual Polyhedra, Preprint (2019), arXiv:2005.03866v1.
- [6] J. Bracho, *Introducción analítica a las geometrías*, Fondo de Cultura Económica, 2010.
- [7] D. A. Brannan, M. F. Esplen and J.J. Gray, *Geometry* - 2nd ed., Cambridge, 2012.
- [8] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 14, Springer Verlag, 1972.
- [9] P. Erdős, F. Harary and W. T. Tutte, On the dimension of a graph, *Mathematika* **12** (1965), 118–122.
- [10] J. L. Gross and T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Wiley Interscience, New York, 1987.

- [11] B. Grünbaum, G. C. Shephard, Is selfduality involutory?, *Amer. Math. Monthly* **95** (1988), 729–733.
- [12] S. Jendrol, A non-involutory selfduality, *Discrete Math.* **74**, (1980), 325–326.
- [13] S. Jendrol, On Symmetry Groups of Selfdual Convex Polyhedra, *Annals of Discrete Mathematics* **51** (1992), 129–135.
- [14] Y. S. Kupitz, H. Martini, and M. A. Perles, Ball polytopes and the Vázsonyi problem, *Acta Mathematica Hungarica* **126** (2010), no. 1-2, 99–163.
- [15] L. Lovász, Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **25** (1978), no. 3, 319–324.
- [16] L. Lovász, Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **45** (1983), no. 1-4, 317–323.
- [17] P. Mani, Automorphismen von polyedrischen Graphen, *Math. Annalen* **192** (1971), 279–303.
- [18] H. Martini, L. Montejano, and D. Oliveros, *Bodies of constant width*, Springer International Publishing, 2019.
- [19] J. McCanna, Self-duality is not involutory, *Congressus Numerantium* **72** (1990), 175–178.
- [20] L. Montejano and E. Roldán-Pensado, Meissner polyhedra, *Acta Mathematica Hungarica* **151** (2017), no. 2, 482–494.
- [21] L. Montejano, E. Pauli, M. Raggi and E. Roldán-Pensado, The Graphs Behind Reuleaux Polyhedra, *Discrete Comput. Geom.* (2020), <https://doi.org/10.1007/s00454-020-00220-0>.
- [22] B. Servatius, P. R. Christopher, Construction of Self-Dual Graphs, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 153–158.
- [23] B. Servatius and H. Servatius, Self-dual graphs, *Discrete Mathematics* **149** (1996), no. 1-3, 223–232.
- [24] B. Servatius and H. Servatius, Self-dual maps on the sphere, *Discrete Mathematics* **134** (1994), 139–150.

- [25] B. Servatius and H. Servatius, The 24 Symmetry pairings of self-dual maps on the sphere, *Discrete Mathematics* **140** (1995), no. 1-3, 167–183.
- [26] E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen, *Enzykl. Math. Wiss. 3 (Geometrie)* **3AB12** (1922), 1–139.
- [27] W. T. Tutte, A Theory of 3-connected Graphs, *Indag. Math.* **23** (1961), 441—455.
- [28] H. Whitney, Non-Separable and Planar Graphs, *Transactions of the American Mathematical Society* **34 No. 2** (Apr., 1932), 339–362.
- [29] H. Whitney, Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs, *American Journal of Mathematics*, **54 No. 1** (Jan., 1932), 150–168.
- [30] H. Whitney, 2-Isomorphic graphs, *Amer. J. Math.* **55** (1933), 245–254.