



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

ESTIMACIÓN DE FUERZA
PARA ROBOTS MANIPULADORES
CON RESTRICCIONES HOLONÓMICAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

PRESENTA:
ALLEN EDUARDO SÁNCHEZ ORTEGA

TUTOR PRINCIPAL
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ
FACULTAD DE INGENIERÍA

CDMX, JULIO 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto
Secretario: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel
1er. Vocal: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio
2do. Vocal: Dr. Fridman Leonid
3er. Vocal: Dr. Gutiérrez Giles Iván Alejandro

La presente Tesis se realizó en el Laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez



FIRMA

*A mis queridos abuelitos
Memo y José, quienes han sido
mis mejores maestros.*

Agradecimientos

A mis padres **Edgar** y **Virginia**, por todo el amor, atención, consejo y apoyo incondicional brindado durante mi vida.

A mi novia **Angelica** ♡ por darme su amor, cariño y apoyo:

Моя прекрасная пучунга

A mis amigos, por compartir inolvidables momentos y enseñanzas.

A mis compañeros de laboratorio, que hicieron de este proceso, un camino agradable e interesante.

Al **Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez** por su asesoría, haciendo posible este trabajo.

Al apoyo otorgado por el programa de Becarios CONACYT y al proyecto PAPIIT 117820.

Abstract

In this work, the problem of force estimation when a serial manipulator robot is in contact with its environment is presented. It is assumed that the environment is stiff and non-deformable, and that there is full knowledge of the constraint with which the robot interacts.

Five different observers are proposed. These belonging to multiple observation techniques from literature. These observers were favorably suited to the estimation problem, addressed hereby.

To validate the estimation quality of each observer, a case study was established at a simulation level. The kinematic and dynamic model of the robot A465 CRS Robotics is used.

By using the Root Mean Square Error (RMSE), a comparative study is made and the data obtained, then is shown through graphs and tables.

Finally, the conclusions are presented based on the results obtained before, and prospects for future work are given.

Resumen

En este trabajo, se presenta el problema de estimación de fuerza, particularmente, cuando un robot manipulador serial está en contacto con su ambiente. Se asume que el ambiente es rígido e indeformable y que se tiene pleno conocimiento de la restricción con la que interactúa el robot.

Se proponen cinco observadores diferentes. Estos pertenecen a múltiples técnicas de observación de la literatura. Estos observadores se adaptaron favorablemente al problema de estimación, abordado aquí.

Para validar la calidad de la estimación de cada observador, se estableció un caso de estudio a nivel simulación. Se utilizó el modelo cinemático y dinámico del robot A465 CRS Robotics.

Haciendo uso de la raíz del error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés), se realiza un estudio comparativo y a los datos obtenidos, luego se les muestra a través de gráficos y tablas.

Finalmente, las conclusiones se presentan con base en los resultados obtenidos anteriormente, y se dan perspectivas para el trabajo futuro.

Índice general

Abstract	V
Resumen	VII
Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XV
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Contribución	7
1.4. Estructura del trabajo	8
2. Preliminares	9
2.1. Algunas propiedades de los sistemas dinámicos	9
2.1.1. Observabilidad	9
2.1.2. Reconstructibilidad	11
2.2. Observabilidad y reconstructibilidad para sistemas no lineales	12
2.3. Observador Luenberger	14

2.3.1. Caso lineal	14
2.3.2. Caso no lineal	16
2.4. Cinemática diferencial	18
2.5. Restricciones holonómicas	19
2.6. Modelo dinámico de un robot manipulador en movimiento restringido	19
2.7. Principio de ortogonalización	20
3. Estimación de fuerza	25
3.1. Observadores basados en la técnica de Perturbación Externa	27
3.1.1. Observador No Lineal de Perturbación (NDO)	28
3.1.1.1. Observador modificado	32
3.1.2. Observador No Lineal de Perturbación de Orden Superior (NDO-HO)	34
3.2. Observadores basados en la técnica de Alta Ganancia	41
3.2.1. Observador de Alta Ganancia (HGO)	41
3.2.2. Observador Proporcional-Integral Generalizado (GPIO)	45
3.3. Observadores basados en la técnica de Impedancia	48
3.3.1. Observador de fuerza basado en impedancia	48
3.4. Observadores basados en la técnica de Modos Deslizantes	50
3.4.1. Observador tipo Super-Twisting Generalizado de Ganancia Variable (VGSTO)	50
3.5. Observadores basados en la técnica de Inmersión	55
3.5.1. Observador de Perturbación por Modos Deslizantes (SMDO)	55
3.6. Resumen cualitativo	60
4. Análisis de resultados	67
4.1. Caso de estudio, Robot: A465 CSR Robotics	67

4.1.1. Cinemática directa	67
4.1.2. Cinemática inversa	68
4.1.3. Modelo dinámico	69
4.1.4. Restricción holonómica	71
4.1.5. Jacobiano analítico y gradiente restringido	71
4.1.6. Perfiles de fuerza	73
4.1.7. Control de posición y fuerza	74
4.2. Escenarios de simulación	75
4.3. Datos simulación	77
4.3.1. Parámetros Robot: A465	77
4.3.2. Restricción holonómica	77
4.3.3. Cinemática inversa	77
4.3.4. Parámetros control de posición y fuerza	78
4.3.5. Parámetros observadores	78
4.3.5.1. NDO	78
4.3.5.2. NDOHO	79
4.3.5.3. GPIO	79
4.3.5.4. IBO	79
4.3.5.5. VGSTO	80
4.3.5.6. SMDO	80
4.4. Gráficas simulación	81
4.5. Resultados cuantitativos	94
4.5.1. Raíz del error medio cuadrático	94

5. Conclusiones y Trabajo a futuro	97
5.1. Conclusiones	97
5.2. Trabajo a futuro	98
Referencias	98

Índice de figuras

2.1. Concepto de observabilidad	11
2.2. Concepto de reconstructabilidad	12
2.3. Punto de contacto entre el efector final y la restricción.	23
3.1. Momento del contacto con la restricción.	25
3.2. Diagrama de bloques representativo de la estimación de fuerza y su uso en el control de posición / fuerza.	27
3.3. Diagrama esquemático del observador NDO.	60
3.4. Diagrama esquemático del observador NDOHO.	61
3.5. Diagrama esquemático del observador HGO.	62
3.6. Diagrama esquemático del observador GPIO.	63
3.7. Diagrama esquemático del observador IBO.	64
3.8. Diagrama esquemático del observador VGSTO.	65
3.9. Diagrama esquemático del observador SMDO.	66
4.1. Configuración del Robot A465 CSR Robotics (Imagen obtenida de [1]).	68
4.2. Perfiles de fuerza.	74
4.3. Diagrama de bloques sobre el funcionamiento de la simulación sin ruido.	76
4.4. Diagrama de bloques sobre el funcionamiento de la simulación con ruido.	76

4.5. Seguimiento y error de seguimiento de las coordenadas Cartesianas.	81
4.6. Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 1 (sin ruido).	82
4.7. Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 1 (sin ruido).	83
4.8. Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 1 (sin ruido).	84
4.9. Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 2.	85
4.10. Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 2.	86
4.11. Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 2.	87
4.12. Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 3.	88
4.13. Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 3.	89
4.14. Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 3.	90
4.15. Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 4.	91
4.16. Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 4.	92
4.17. Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 4.	93
4.18. Error de estimación, Perfil de fuerza 1, Escenario 1 (sin ruido).	96
4.19. Error de estimación, Perfil de fuerza 1, Escenario 2.	96
4.20. Cambios en los valores RMSE del VGSTO.	96

Índice de tablas

3.1. Resumen cualitativo observador NDO	60
3.2. Resumen cualitativo observador NDOHO	61
3.3. Resumen cualitativo observador HGO	62
3.4. Resumen cualitativo observador GPIO	63
3.5. Resumen cualitativo observador IBO	64
3.6. Resumen cualitativo observador VGSTO	65
3.7. Resumen cualitativo observador SMDO	66
4.1. Parámetros Denavit Hartenberg	68
4.2. Parámetros modelo dinámico (Obtenidos de [1]).	77
4.3. Desempeño de observadores en el Escenario 1.	95
4.4. Desempeño de observadores en el Escenario 2.	95
4.5. Desempeño de observadores en el Escenario 3.	95
4.6. Desempeño de observadores en el Escenario 4.	95

Introducción

1.1 Estado del arte

Las tareas a realizar en el caso de los robots manipuladores seriales, se relacionan íntimamente con posición y fuerza. Es tarea del que diseña los sistemas de control, garantizar la estabilidad en lazo cerrado al efectuar la tarea demandada. Es común que el diseño del movimiento en el espacio de trabajo del robot se realice en coordenadas Cartesianas. Las coordenadas Cartesianas guardan una relación geométrica con las articulaciones del robot, así para cada punto en coordenadas Cartesianas del espacio de trabajo se le asignarán valores a las articulaciones del robot para que este puede alcanzar la posición dada, a esto se le llama cinemática inversa y es, básicamente, un pilar para el diseño de trayectorias.

Como es evidente las tareas de un robot abarcan desde ir de un punto A a un punto B con su efector final, hasta corte láser de precisión o manipulación de objetos. Entonces, para un robot manipulador serial existen dos formas características de hacer su trabajo: la primera, es cuando la tarea sea netamente limitada a una trayectoria que requiere ser seguida y la segunda, es cuando el robot además de seguir una trayectoria, aplica una fuerza deseada en una superficie de contacto.

Cuando existe una interacción entre una superficie de contacto y un robot, es necesario no sólo un control de posición, sino también un control de fuerza que pueda prevenir, evitar o actuar conforme a la tarea diseñada, no hacerlo de esta forma puede derivar en daño del robot a la superficie o viceversa[2].

Para establecer un control de fuerza es necesario retroalimentar la fuerza de reacción. Ésta es comúnmente determinada mediante el uso de un sensor; sin embargo, es bien sabido que los sensores de fuerza aumentan costos, incertidumbres y cuentan con una muy probable adición de ruido, por lo que para evitarlos, lo que se hace es una estimación basada en modelo. La dificultad de la estimación basada en modelo, radica en el conocimiento previo de la restricción física natural y el modelo dinámico del robot en cuestión.

Es la intención de la presente tesis abordar el problema de estimación de fuerza de contacto en robots manipuladores

seriales en ambientes restringidos, para su posterior uso en el control posición/fuerza, además, ampliar con técnicas no lineales dicha estimación.

La motivación de conocer las variables internas de un sistema dinámico viene de varios propósitos; por ejemplo, para verificar la relación de un sistema dinámico físico con un modelo matemático a través de la identificación en línea de parámetros y/o estados, para monitorear algún estado o combinación de ellos que a su vez lleven a la identificación de fallas en el sistema, para implementar una ley de control basada en estados, entre otros [3]. Dado que la técnica para la estimación de los estados internos de un sistema dinámico, son los observadores, se seguirá en esta línea de trabajo; los observadores, existen de orden completo o de orden reducido. Aquellos que reconstruyen todos los estados del sistema dinámico son de orden completo y aquellos que solo reconstruyen algunos estados o mezcla de ellos, son de orden reducido.

El problema de observación para sistemas dinámicos ha sido ampliamente estudiado y categorizado para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (L.I.T.), donde existen condiciones necesarias y suficientes para su existencia. Para sistemas dinámicos no lineales, las condiciones de existencia son todavía motivo de estudio, ya que la clasificación de estos sistemas es gigantesca y generalizar es imposible, pero se han obtenido resultados, en donde para ciertos sistemas dinámicos no lineales hay condiciones de existencia. Existen tres casos que podemos distinguir de aquí: cuando el sistema no es forzado (cuando el sistema no es excitado por una entrada), el caso cuando el sistema es forzado por una entrada conocida y el caso cuando, el sistema no contiene la completa información de la entrada. Este último, es un problema en el cual una parte de la entrada es desconocida y por tanto se toma como una dinámica no modelada.

Dado que los robots manipuladores al modelarlos son sistemas dinámicos altamente no lineales y con una estructura acoplada, las técnicas lineales aplicadas a modelos linealizados resultan en estimaciones dudosas [4]. En específico, los observadores propuestos en esta tesis son no lineales y se han utilizado para la estimación en problemas similares (o iguales, en el caso de los observadores basados en la técnica de Alta Ganancia), éstos se clasificaron en cinco categorías basadas en técnicas para el diseño de observadores.

- Observadores basados en la técnica de Perturbación Externa.
- Observadores basados en la técnica de Alta Ganancia.
- Observadores basados en la técnica de Impedancia.
- Observadores basados en la técnica de Modos Deslizantes.
- Observadores basados en la técnica de Inmersión.

Este trabajo presenta de manera detallada su uso en el problema de estimación de fuerza de reacción con ambiente restringido. A continuación, se presenta una breve introducción a dichos observadores.

Observadores basados en la técnica de Perturbación Externa.

En 1992 *Friedland y Park* proponen un observador de fricción no lineal para sistemas mecánicos, que es presentado en [5]. Este, se construye a partir de la dinámica de la velocidad y el objetivo es la estimación del parámetro asociado a la fuerza de fricción a través de un observador de orden reducido; se asume que la velocidad del sistema es medible.

En el contexto del estudio de perturbaciones externas en robots manipuladores, los observadores de perturbación No Lineal (OPNL o NDO, por sus siglas en inglés) delimitaron sus líneas de interés, tales como: estimación de incertidumbres para compensación de modelo, estimación de fricción viscosa para la compensación en el control, monitoreo de fallas (diagnóstico) y control híbrido sin sensor de fuerza. En [4], se propone un observador de perturbación externa no lineal (NDO) con el objetivo de compensar la fricción viscosa de las juntas del robot. Se muestra que al hacer una buena selección de las ganancias hay estabilidad con ayuda de la teoría de Lyapunov. Los resultados en [4] están desarrollados para un robot de dos grados de libertad por simplicidad de las pruebas realizadas. El observador propuesto en este artículo contiene dos versiones; la primera se describe con una ganancia constante propuesta por el diseñador que puede garantizar estabilidad asintótica del error de observación y en la segunda versión, se diseña una ganancia variante en el tiempo basada en la correcta selección de variables auxiliares, que garanticen tanto la estabilidad en el sentido de Lyapunov y además, sirvan como grado de libertad en el cual, el diseñador tenga opciones de tuneo.

En [6], se extiende y generaliza el trabajo realizado en [4]. En esta realización se utiliza un robot de tres grados de libertad para fines de simulación numérica, además se analiza su estabilidad y diseño basados en el método directo de Lyapunov.

Kyung-Soo et al. muestran en [7] que el observador de fricción no lineal puede ser extendido para determinar no sólo dinámicas constantes sino de algún grado polinomial; es decir, un observador de perturbación externa de alto orden (NDOHO, por sus siglas en inglés).

Observadores basados en la técnica de Alta Ganancia.

Los observadores basados en la técnica de Alta Ganancia fueron concebidos a principios de la década de los 1980's, como observadores robustos para sistemas lineales.

A través de los años la técnica basada en Alta Ganancia para el diseño de observadores ha tomado numerosas líneas de estudio, una de éstas, es la estimación de una perturbación externa. La estimación de la perturbación externa en un sistema dinámico tiene varias aplicaciones, como la compensación de incertidumbres o dinámicas no modeladas que no permiten el buen funcionamiento del control. Otra aplicación, por ejemplo, es el uso observadores de Alta Ganancia y control lineal en [8] para sistemas dinámicos mecánicos no lineales, en donde la dinámica no modelada debida a las perturbaciones, es determinada mediante un Observador Proporcional Integral Generalizado (OPIG o GPIO, por sus siglas en inglés) y compensada en el control lineal. Siguiendo esta misma técnica, en [2], se describe una forma para estimar la fuerza de contacto de robots manipuladores en ambientes restringidos.

Observadores basados en la técnica de Impedancia.

La impedancia es un concepto asociado a los circuitos eléctricos de corriente alterna, se define como: *La resistencia al paso de una corriente alterna*. Es similar al concepto de resistencia en circuitos de corriente continua pero, a diferencia de la resistencia, la impedancia se representa mediante un número complejo. Las impedancias, al igual que los números complejos, poseen una parte real y una parte imaginaria [9]. Al analizar un circuito RLC a través de las leyes de Khirchhoff, se obtiene una representación matemática mediante una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes. En el dominio de Laplace, se le conoce como *Filtro de Impedancia* [10].

De manera homóloga, los sistemas dinámicos mecánicos tienen una representación similar conocida como *Filtro de Impedancia Mecánica*, en este sentido, la masa del sistema es la que impide el movimiento, es decir, la velocidad que puede tomar el objeto. A la cantidad recíproca de la Impedancia se le conoce como Admitancia y por el contrario, se percibe como la fuerza que admite cierta cantidad de movimiento [10].

En robótica, el uso de la Impedancia y la Admitancia toma interés cuando se analiza un ambiente de interacción, ya que es usualmente modelado como un sistema masa-resorte-amortiguador y por tanto, un comportamiento deseado y asociado a la Impedancia y Admitancia. En este sentido, será tarea del diseñador elaborar la abstracción del ambiente (suave, rígido, deformable) con ciertos parámetros de diseño, que son los coeficientes de la ecuación diferencial antes mencionada [10].

Alcocer *et al.* en [11], desarrollan un observador para determinar la fuerza infligida por el ambiente hacia el robot, su estructura matemática se formuló al estilo de Impedancia. El diseño del observador se hace en dos etapas. La primera se establece un observador basado en la técnica de Alta Ganancia y se considera que el sistema es libre de perturbación, en la segunda etapa, se toma la variable del error de estimación y al derivarla temporalmente se puede determinar una relación entre la perturbación y el modelo dinámico perturbado, esta relación muestra al reorganizarse una estructura dinámica de una ecuación diferencial de segundo orden y por eso se le puede considerar tipo impedancia; sin embargo, en este caso los coeficientes son variables.

Los coeficientes quedan en función del modelo del robot y las ganancias asociadas al observador basado en la técnica de Alta Ganancia (primera etapa de diseño).

Observadores basados en la técnica de Modos Deslizantes.

Los modos deslizantes han florecido ya por años, se han desarrollado varias técnicas y aplicaciones para un sin fin de sistemas dinámicos. El control por modos deslizantes (Sliding Mode control), es discontinuo en la mayoría de las ocasiones, presenta soluciones en el sentido de inclusiones diferenciales y normalmente se analiza su existencia en el sentido de Filippov [12].

Una de las metodologías en modos deslizantes para evitar el *chattering* en el control es mediante el uso del control Super-Twisting, el cual es un modo deslizante de segundo orden, éste evita discontinuidad y es aplicable a sistemas dinámicos con grado relativo dos [12]. Esta misma metodología puede ser aplicada para definir un observador, me-

diante el error de observación. Para reforzar la estructura del Super-Twisting es posible ocupar ganancias variables diseñadas a partir de las incertidumbres/perturbaciones [12].

En [13], se propone un observador generalizado Super-Twisting para bioprocesos. Este tipo de observador tiene estructura tipo Super-Twisting de ganancia variable (VGSTO, por sus siglas en inglés) y permite recobrar el comportamiento de un observador Super-Twisting estándar o por el contrario convertirse en un observador lineal. A través de una correcta selección de ganancias fue posible establecer convergencia de las trayectorias al origen a pesar de perturbaciones. Una aplicación directa para esta metodología fue la estimación de variables internas de los bioprocesos comparando su propuesta con un observador basado en Alta Ganancia.

Observadores basados en la técnica de Inmersión.

Kou et al. [14] establecen las bases matemáticas para el mapa de observabilidad en un sistema no lineal y su relación con los sistemas lineales y en [15], proponen los primeros observadores tipo Luenberger como parte de la extensión para sistemas no lineales, a estos se les conoció como *Observadores Exponenciales*, su nombre derivó, ya que bajo condiciones restrictivas del sistema se pueden definir un observador con decaimiento exponencial del error de observación y estimación asintótica de los estados.

Se le conoce como la técnica de *inmersión*, debido a que la metodología utilizada, es haciendo uso de una existente transformación, la cual, valga la redundancia, trasforma al sistema en una versión de sí mismo pero más simple a ojos de la matemática. Dicha transformación debe ser capaz de mapear punto a punto, cuando menos inyectiva; no obstante para ir y venir entre los espacios de estados, se pide que la transformación sea biyectiva, que tenga inversa bien definida y que su inversa sea al menos una vez diferenciable; es decir, debe ser un difeomorfismo. Precisamente, encontrar la transformación adecuada es la dificultad de esta técnica.

Del trabajo realizado por *Zeitz* en [16], se dio origen a una línea de investigación orientada a extender los resultados del observador lineal Luenberger. Así, *Gauthier* en [17], *Ciccarella* en [18], *Kazantzi* y *Kravaris* en [19], entre otros, permitieron el análisis desde diferentes perspectivas y con diferentes condiciones de trabajo. Se destaca el trabajo de [19], ya que en éste, se logró la generalización del método.

Dado que el principal obstáculo de la técnica es encontrar un difeomorfismo adecuado para la transformación del sistema no lineal, en *Sliding Mode Control and Observation* [12] y en [20], se da una solución versátil a este contratiempo. Mediante el conocido diferenciador de *Levant* [12] y modos deslizantes de alto orden (HOSM, por sus siglas en inglés) es posible encontrar las derivadas temporales de la salida, que justamente coincide con la definición de un tipo de difeomorfismo, únicamente definido para sistemas que puedan ser representados por medio de la salida y sus derivadas; además, se pide que el sistema tenga un grado relativo bien definido. Lo que representa un interés para este trabajo, es que mediante esta metodología, es posible hacer una reconstrucción de la perturbación externa al hacer un simple despeje (bajo ciertas condiciones) [20].

1.2 Planteamiento del problema

La mayoría de las aplicaciones industriales para robots manipuladores seriales son automáticas e iterativas, gran parte de estas pueden ser solucionadas mediante un control de posición siguiendo una trayectoria deseada en el espacio Cartesiano. Incluso actualmente, es posible enseñar a un robot mediante inteligencia artificial a como moverse, diseñando el usuario de forma manual, la ruta que debe seguir el robot.

Cuando la tarea de seguimiento ya no resulte útil por la misma definición, o por los requerimientos de precisión en la tarea, como limpiar una ventana con una esponja sin romper el vidrio o manejar alguna herramienta de devastado y contornear alguna pieza metálica, etc; entonces, en ese momento, se debe diseñar un control adecuado, el cual no debe basar su operación exclusivamente en posición, sino en una combinación entre posición y fuerza, para esto, es necesario percibir la fuerza de reacción normal a la superficie de contacto, con el objetivo de definir una acción de control coherente y realizar la tarea demandada.

En el contexto de control de posición y fuerza, denominado *control híbrido*, se hace uso comúnmente de un sensor de fuerza para retroalimentar la interacción con el entorno; sin embargo, en su mayoría, los sensores de fuerza representan un costo significativo y adicional si no se tenía contemplado. Además, gran parte de los sensores de fuerza, hacen una medición basada en los pares experimentados por el robot en la muñeca o en segunda posición después del efector final, lo cual implica ruido implícito de los momentos de inercia inherentes al propio cuerpo del robot al moverse (entre más rápido se mueva, más momentos de inercia habrá y menos calidad en la medición del sensor); justamente de aquí nace la intención de determinar la fuerza externa de interacción para su retroalimentación de otra forma.

Para evitar el uso de un sensor de fuerza, matemáticamente es posible hacer una suposición del valor de la fuerza, siempre y cuando, se cuente con un modelo dinámico del robot lo suficientemente completo para representar el comportamiento real aproximado del robot y el conocimiento del medio de interacción (restricción), el cual deber ser conocido en todo momento.

El concepto de estimación basada en modelo, es un concepto nada nuevo y ha sido aplicada desde hace más de 50 años. A los entes matemáticos capaces de recuperar una respuesta dinámica a través del tiempo por medio de la medición de la entrada y la salida de un sistema estudiado, se les denomina *Observadores*. Bajo las condiciones establecidas del párrafo anterior y con ayuda de un observador, es posible determinar la fuerza de contacto basada en modelo. El problema de observación de la fuerza de contacto, es similar al problema de *reconstrucción de perturbaciones, entradas desconocidas o dinámicas no modeladas*.

Dicho lo anterior, considérese un robot manipulador serial de n grados de libertad, al cual se le asignó una tarea específica, en donde se hace uso del control híbrido. Normalmente las tareas, en las que un control híbrido es utilizado, se dividen en dos tipos de acción, la primera cuando el robot esta en movimiento libre y la segunda cuando tiene movimiento restringido con aplicación del control de fuerza. Suponiendo que el robot está en su posición de *Home* y se le pida hacer dicha tarea híbrida; en primera instancia, se tendrá movimiento libre y posterior a esto,

el efector final entra en interacción con el medio; es decir, entra en contacto con una superficie conocida rígida e indeformable.

Entonces, en el momento de la interacción, se desea estimar la fuerza de reacción puntual debida al contacto entre el efector final del robot y la superficie en cuestión. El punto de contacto da lugar a que la fuerza de reacción pueda ser descompuesta ortogonalmente de dos formas, aquella fuerza normal a la superficie y que es contraria a la aplicada por el robot y por otro lado, la fuerza de fricción que surge cuando el punto de contacto se mueve.

Para simplificar la estimación, en el presente trabajo, se ha considerado a la fuerza de fricción entre el efector final y la superficie, es nula. También, se considera que el robot está en contacto con la superficie en todo momento de la estimación de fuerza.

1.3 Contribución

En este trabajo se extiende la gamma de herramientas matemáticas y metodológicas para la estimación de fuerza de contacto; en particular, cuando se tiene un ambiente rígido, indeformable y la restricción (superficie de interacción) es conocida. Se explora la aplicación de 5 observadores que son ocupados en campos de conocimiento similares o diferentes y como éstos son aplicables al problema antes planteado.

Se desarrollan a lo largo del trabajo 7 observadores, dos de ellos planteados de la misma forma que en [2] y los otros 5 observadores desarrollados a partir de sus propias metodologías. Además, se extienden los resultados reportados en [2] y se toma la misma línea de trabajo para la estimación, adecuando definiciones matemáticas tales como la descomposición ortogonal, perfil de fuerza y control híbrido, a los nuevos observadores.

Se hace un cotejo entre los distintos observadores desarrollados (7 en total), analizando sus ventajas y desventajas, así obteniendo una crítica cualitativa a manera de calificación y en general, un estudio sobre la estimación de fuerza.

Además, se calcula mediante la raíz del error cuadrático medio (RMSE) una calificación (menor error de observación), para posteriormente hacer una comparativa en la cual se califica al observador con mejor desempeño. En resumen, una evaluación de los observadores según el RMSE

1.4 Estructura del trabajo

Capítulo 1. Introducción

Se presentan de manera histórica y breve las técnicas utilizadas en el desarrollo de los observadores tratados en este trabajo. Se define detalladamente el planteamiento del problema y las contribuciones hacia la estimación de fuerza.

Capítulo 2. Preliminares

Se definen los conceptos matemáticos y de competencia robótica, con el fin de integrar el conocimiento necesario para la comprensión del presente trabajo.

Capítulo 3. Estimación de fuerza

Se desarrollan a detalle cada una de las metodologías utilizadas y por último se da un pequeño resumen cualitativo de cada observador.

Capítulo 4. Análisis de resultados

A nivel simulación se estudia y desarrolla la aplicación de los observadores tratados aquí, en el robot A465 CRS Robotics. Se describe la forma de implementación en el robot, así como la definición de los perfiles de fuerza estudiados. Además se establecen los escenarios de simulación y los parámetros con los que ésta se llevo a cabo.

Se presentan los resultados obtenidos de los distintos escenarios de simulación y se muestran gráficas con la respuesta en desempeño de cada observador. Se muestra el mejor desempeño, a través de la raíz del error medio cuadrático.

Capítulo 5. Conclusiones y Trabajo a futuro

Se describen las conclusiones obtenidas a través de la realización del presente trabajo y se describe la vía de estudio a seguir, respecto a este trabajo y las posibles perspectivas que se pueden tomar.

2

Preliminares

En este capítulo se darán todos los elementos necesarios para comprender el desarrollo matemático y conceptual del presente trabajo. Para la mejor comprensión de los observadores desarrollados en el Capítulo 3, se hace una breve descripción de las propiedades existentes en los sistemas dinámicos, como lo son, la observabilidad y reconstructibilidad.

2.1 Algunas propiedades de los sistemas dinámicos

2.1.1 Observabilidad

Considérese un sistema dinámico lineal y variante en el tiempo (LVT), tal que:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de coeficientes del vector de estados, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de coeficientes para el vector de entradas, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas del sistema, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de salida del sistema, y n, m, p indican el número de estados, entradas y salidas del sistema, respectivamente.

El sistema dinámico (2.1) se dice observable sí para un intervalo de tiempo $t \in [t_0, t_1]$, sí y solo si, para toda entrada $\mathbf{u}(t)$ y sus correspondientes salidas $\mathbf{y}(t)$ en ese mismo intervalo de tiempo, el estado inicial \mathbf{x}_0 en el tiempo t_0 es unívocamente determinado; es decir, que el estado inicial será determinado haciendo uso de mediciones presentes y futuras del sistema.

Para verlo de forma clara, supóngase que la condición inicial \mathbf{x}_0 es conocida, entonces la solución al sistema (2.1)

es:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Si $\mathbf{y}(t)$ es calculada, se obtiene:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

donde, $\Phi(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de transición. Nótese que de la ecuación (2.3), se puede hacer el siguiente despeje:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \mathbf{x}_0 &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \\ \underbrace{\mathbf{C}(t)}_{q \times n} \cdot \underbrace{\Phi(t, t_0)}_{n \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{x}_0}_{n \times 1} &= \underbrace{\tilde{\mathbf{y}}}_{q \times 1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

del cual, se puede calcular el valor de \mathbf{x}_0 bajo ciertas condiciones (ver Teorema 2.1).

Para sistemas lineales, todos los estados que sean indistinguibles entre sí, son caracterizados como aquellos estados que pertenecen al subespacio inobservable [21]. El subespacio inobservable \mathcal{N} definido $\forall t \in [t_0, t_1]$, consiste en todos los estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ para los cuales se cumple que:

$$\underbrace{\mathbf{C}(t)}_{q \times n} \cdot \underbrace{\Phi(t, t_0)}_{n \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{x}}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{0}}_{q \times 1}. \quad (2.5)$$

Teorema 2.1. Dadas las matrices (\mathbf{C}, \mathbf{A}) del sistema (2.1) continuas a trozos, \mathbf{x}_0 puede ser determinada unívocamente de $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, sí y solo si, se cumplen las siguientes equivalencias [21]:

- El operador lineal $\mathbf{F} = \mathbf{C}(t) \cdot \Phi(t, t_0)$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}^q$, es inyectivo (existe inversa por la izquierda).
- El subespacio inobservable \mathcal{N} , contiene unicamente al vector cero como elemento, $\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$.
- El determinante del grammiano de observabilidad $\mathbf{M}(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es diferente de cero,

$$\mathbf{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) \mathbf{C}^T(t) \cdot \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) dt \Rightarrow \det [\mathbf{M}(t_0, t_1)] \neq 0. \quad (2.6)$$

La representación esquemática de observabilidad se muestra en la Figura 2.1.

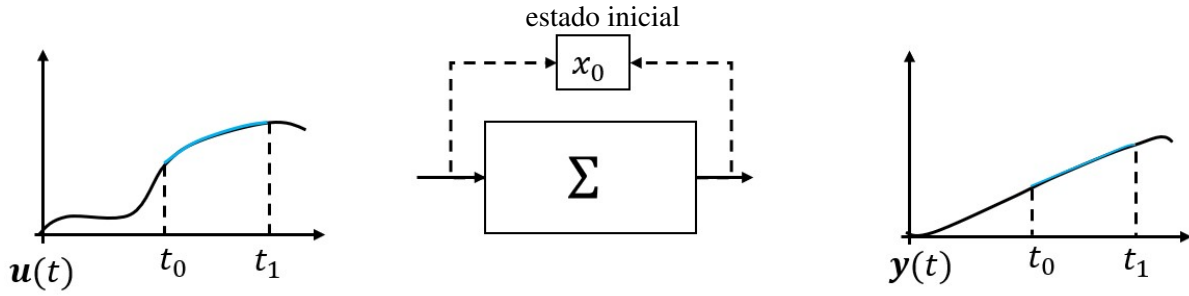


Figura 2.1: Concepto de observabilidad

2.1.2 Reconstructibilidad

El sistema dinámico (2.1) se dice reconstruible, para un intervalo de tiempo $t \in [t_0, t_1]$, sí y solo sí, para toda entrada $\mathbf{u}(t)$ y sus correspondientes salidas $\mathbf{y}(t)$ en ese mismo intervalo de tiempo, el estado \mathbf{x}_1 en el tiempo t_1 es unívocamente determinado, lo cual, en términos llanos podría traducirse como la reconstrucción del estado actual o presente con base en mediciones pasadas.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}(t) \cdot \Phi(t, t_1) \cdot \mathbf{x}_1 &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t) \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
 \underbrace{\mathbf{C}(t)}_{q \times n} \cdot \underbrace{\Phi(t, t_1)}_{n \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{x}}_{n \times 1} &= \underbrace{\tilde{\mathbf{y}}}_{q \times 1}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Los estados que sean indistinguibles entre sí, son caracterizados como aquellos estados que pertenecen al subespacio irreconstruible [21]. El subespacio irreconstruible \mathcal{U} definido $\forall t \in [t_0, t_1]$, consiste en todos los estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ para los cuales se cumple que:

$$\underbrace{\mathbf{C}(t)}_{q \times n} \cdot \underbrace{\Phi(t, t_1)}_{n \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{x}}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{0}}_{q \times 1}. \tag{2.8}$$

De forma análoga, la reconstrucción del estado \mathbf{x}_1 debe cumplir con el siguiente teorema.

Teorema 2.2. Dadas las matrices (\mathbf{C}, \mathbf{A}) del sistema (2.1) continuas a trozos; \mathbf{x}_1 puede ser determinada unívocamente de $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, sí y solo si, se cumplen las siguientes equivalencias [21]:

- El operador lineal $\mathbf{F} = \mathbf{C}(t) \cdot \Phi(t, t_1)$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}^q$, es inyectivo (existe inversa por la izquierda).
- El subespacio irreconstruible \mathcal{U} , contiene únicamente al vector cero como elemento, $\mathcal{U} = \{\mathbf{0}\}$.
- El determinante del grammiano de reconstructibilidad $\mathbf{N}(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es diferente de cero,

$$\mathbf{N}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_1) \mathbf{C}^T(t) \cdot \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_1) dt \Rightarrow \det[\mathbf{N}(t_0, t_1)] \neq 0. \tag{2.9}$$

La representación esquemática de reconstructibilidad se muestra en la Figura 2.2.

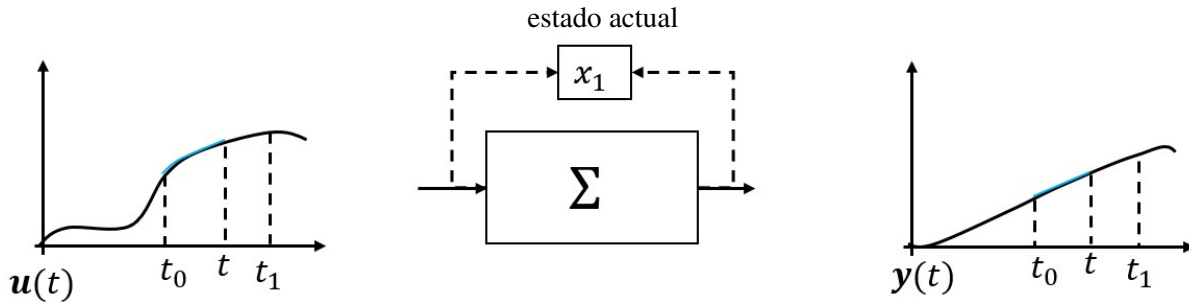


Figura 2.2: Concepto de reconstructibilidad

2.2 Observabilidad y reconstructibilidad para sistemas no lineales

En general, determinar si un sistema dinámico no lineal es observable o reconstruible es una tarea difícil; sin embargo, se pueden hacer algunas aseveraciones mientras el sistema no lineal sea suave.

Los sistemas con grado relativo bien definido ρ , se les considera fuertemente observables, si es posible describir al estado a través de las salida y sus derivadas: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\rho)})$. A éstos también se les conoce como sistemas planos.

Asumiendo que la salida $\mathbf{y}(t)$ es k continuamente diferenciable, entonces puede ser descrita como una expansión en series de Taylor (ver ecuación (2.10)). La expansión permite mostrar como la salida del sistema al ser k diferenciable forma un sistema de ecuaciones, el cual puede terminar de manera única la solución para la obtención del tiempo inicial t_0 y por ende del estado inicial \mathbf{x}_0 [14].

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \dot{\mathbf{y}}(t)(t-t_0) + \ddot{\mathbf{y}}(t) \left[\frac{1}{2!} \right] \cdot (t-t_0)^2 + \dots + \mathbf{y}^{(k-1)}(t) \left[\frac{1}{(k-1)!} \right] \cdot (t-t_0)^{k-1} + \mathbf{y}^{(k)}(t) \left[\frac{1}{(k)!} \right] \cdot (t-t_0)^k, \quad (2.10)$$

donde, k es una constante definida como el grado polinomial de la expansión y t^* es algún tiempo entre t_0 y t .

Si esto es posible, al sistema se le considera diferencialmente observable, y si el mapa es al menos inyectivo (preferiblemente biyectivo), entonces el sistema también es instantáneamente observable (valido también para sistema lineales).

Reorganizando las derivadas de la expansión (2.10):

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \triangleq \mathbf{h}_0(\mathbf{x}(t_0), t_0), \\
\dot{\mathbf{y}}(t_0) &= \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial t}(\mathbf{x}(t_0), t_0) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \mathbf{x}(t_0)}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \right] \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \triangleq \mathbf{h}_1(\mathbf{x}(t_0), t_0), \\
&\vdots \\
\mathbf{y}^{(k-1)}(t_0) &= \frac{\partial \mathbf{h}_{k-2}}{\partial t}(\mathbf{x}(t_0), t_0) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}_{k-2}}{\partial \mathbf{x}(t_0)}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \right] \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \triangleq \mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{x}(t_0), t_0),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, que define el mapa de observabilidad:

$$\mathbf{T}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_0) \\ \dot{\mathbf{y}}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(k-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0(\mathbf{x}(t_0), t_0) \\ \mathbf{h}_1(\mathbf{x}(t_0), t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Al obtener el Jacobiano del mapa de observabilidad (2.12), se obtiene la matriz de observabilidad Ω :

$$\Omega = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{y}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_2} & \dots & \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{(k-1)}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k-1)}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k-1)}(t_0)}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Si los menores principales¹ de la matriz de observabilidad (2.13), cumplen con:

$$\begin{aligned}
|\Delta| \geq \varepsilon, \quad \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} \geq \varepsilon, \quad \dots, \quad \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_{n-1}|} \geq \varepsilon, \\
\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde, Δ_n son los menores principales de la matriz Ω , con esto se confirma que Ω es un mapeo uno a uno (condición de proporción) [14].

De manera general para un sistema con grado relativo bien definido ρ , el mapa de observabilidad puede ser definido

¹Los menores principales son los determinantes de las submatrices cuadradas que normalmente se forman a partir del primer elemento; la diagonal principal de las submatrices, pertenece a la diagonal principal de la matriz original.

de forma compacta como las sucesivas derivadas de Lie del vector $\mathbf{h}(\cdot)$ a lo largo del campo vectorial $\mathbf{f}(\cdot)$:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(\rho-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_f^0 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_f^0 \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{h}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida medible de un sistema no lineal y $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el campo asociado al sistema no lineal.

2.3 Observador Luenberger

2.3.1 Caso lineal

Considerando un sistema Lineal e Invariante en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés), sin entrada, con un vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, condición inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y salida $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora asumiendo, que existe otro LTI manejado por la salida $\mathbf{y}(t)$ del sistema (2.16), con $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ como estado y condición inicial $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^m$, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (2.17)$$

donde, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz Hurwitz (todos sus valores propios tienen parte real negativa), relacionando ambos sistemas: (2.16) y (2.17), se busca una transformación constante $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que $\mathbf{z} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$, esto permite establecer que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{z} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) = 0, \quad (2.18)$$

se define el error: $e = z - T \cdot x$, al derivar y sustituir, se encuentra la dinámica del error, quedando como:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{z} - T\dot{x} = Fz + Hy - TAx + Fz - Fz \\ \dot{e} &= \dot{z} - T\dot{x} = \{Fz - FTx\} + HCx - TAx + FTx \\ \dot{e} &= Fe + (FT - TA + HC)x,\end{aligned}\tag{2.19}$$

donde analizando y proponiendo la ecuación: $FT = TA - HC$, la dinámica se reduce a: $\dot{e} = Fe$, con lo cual, se asegura que conforme pase el tiempo $z \rightarrow Tx$, ya que: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

De lo anterior se desprenden las siguientes observaciones [21] :

- Nótese que la ecuación $z = Tx$, es lineal en T .
- Dadas las matrices A, C, F, H para dimensiones m, n , arbitrarias (no necesariamente iguales), \exists una única solución para T , solo si A y F , tienen diferentes valores propios.
- Con base en lo anterior, cualquier sistema, con valores propios distintos de A , es un observador del sistema original, si estima mediante una función lineal Tx , los estados de la planta (Esta definición, resulta útil, para definir observadores de orden reducido).
- Obtener el estado estimado completo, se le pide a T , ser al menos inyectiva, lo cual implica invertibilidad por la izquierda, esto con el fin de recobrar el estado original de $x = T^{-1}z$.
- En el caso de que $m = n$, y si la pareja (A, C) es observable y (F, AH) es controlable, entonces T es invertible, existe una única solución.

Si la transformación lineal T se define como la identidad I , se da lugar, al conocido observador identidad. Ahora supóngase un sistema LTI con entrada:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Gu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.20}$$

Propóngase un observador identidad, en donde $T = I$, entonces:

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + Hy, \quad \hat{x}(t_0) = x_0,\tag{2.21}$$

Con error de observación: $e = (\hat{x} - x)$, como lo que se quiere es que el observador reproduzca al sistema original,

se impone la siguiente condición (justo igual a la construcción anterior, ecuación (2.18)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = 0, \quad (2.22)$$

derivando el error de observación, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e} + [\mathbf{G} - \mathbf{B}]\mathbf{u} + [\mathbf{F} - \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C}]\mathbf{x}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.23)$$

procediendo de la misma forma que en (2.19), se definen las matrices del observador como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Reduciendo la dinámica del error $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e}$, haciendo la convergencia del error exponencial y a la estimación asintótica (mientras $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$, sea Hurwitz), por tanto, al sustituir los valores matriciales en el observador inicialmente propuesto, se llega a la definición del observador tipo Luenberger, tradicional, el cual es conocido por establecer una copia de la planta a través de la inyección de la salida [21]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{H}[\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}] \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3.2 Caso no lineal

Para la construcción de observadores tipo Luenberger en sistemas no lineales se procede de una forma similar. Considérese un sistema no lineal perturbado [22], tal que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función del sistema, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida del sistema, $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ es la función afín a la perturbación y $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ es la perturbación.

Considerando que existe una transformación local biyectiva (mapeo uno a uno) $\mathbf{T}(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con inversa bien definida $\mathbf{T}^{-1}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a su vez esta inversa es continua y además se puede diferenciar al menos una vez \mathcal{C}^1 ; entonces se le denomina a esta transformación un difeomorfismo local [21].

Haciendo uso de la transformación, se redefine el estado, obteniendo uno nuevo:

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0), \quad (2.27)$$

pudiendo regresar en cualquier momento a su contenido original mediante la transformación inversa:

$$\mathbf{T}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}(t)) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}_0). \quad (2.28)$$

Entonces, el sistema transformado queda como:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})), \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \quad (2.29)$$

resultando de forma compacta en:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}(t)), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados transformados, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es la inyección de lo medible del sistema no transformado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ el vector de estados estimados y $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ es la perturbación.

Tal como se define en [19], la ecuación (2.30) es la forma más general de un sistema transformado. Como obviamente lo que se quiere es que el sistema original transformado sea más sencillo en esta nueva definición, lo que se hace es imponer una dinámica lineal canónica al sistema (2.30), obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{z} + \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}(t, \boldsymbol{\omega}) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}(t)), \end{aligned} \quad (2.31)$$

siendo $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz canónica controlable, \mathbf{B} la matriz de entrada y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ la función que describe a la perturbación en el sistema transformado.

Se dice que (2.31) es un observador asintótico para (2.26), tal que si la solución del sistema transformado $\mathbf{z}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ evaluada en $t_0 = 0$, $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ representa una única solución global para cada condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ $\forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ admisibles [22], entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})\| = 0, \quad (2.32)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\omega}(t, z_0, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) - \omega(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{x})\| = 0. \quad (2.33)$$

Una de las tantas formas de definir el difeomorfismos para acceder a la transformación del sistema, es a través del mapa de observabilidad no lineal \mathbf{T} (2.12) y su matriz de observabilidad Ω (2.13). Esto es muy utilizado para sistemas con un grado relativo bien definido y permite la aplicación del observador en varias aplicaciones [14] [18].

Finalmente, una forma explicita del observador, es mediante el Jacobiano del mapa de observabilidad, lo cual coincide con la búsqueda de un observador identidad, como en el caso lineal. Entonces, dadas la relaciones (2.30), es posible establecer el siguiente observador de ganancia variable, al derivar temporalmente $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t})$.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \omega(t) + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \right] (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \quad (2.34)$$

2.4 Cinemática diferencial

La cinemática diferencial hace alusión a la relación entre velocidades lineales y angulares del efector final en el robot. Suponiendo que las coordenadas del efector final son totalmente conocidas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

donde, \mathbf{p}_n son las coordenadas del espacio cartesiano y ϕ es la orientación del efector final. Si $n = 6$, entonces $\mathbf{p}_n = [x \ y \ z]$ y $\phi = [\theta, \alpha, \psi]$. Al derivar el vector \mathbf{x} , se obtiene la siguiente relación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.36)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.37)$$

donde, $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es el jacobiano analítico, el cual relaciona las velocidades del espacio cartesiano, con las velocidades propias del espacio articular, se le puede considerar una transformación entre espacios.

Al derivar temporalmente una segunda vez, se obtiene la relación entre aceleraciones del espacio cartesiano y las del espacio articular, en la ecuación 2.38, se muestra dicha relación.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.38)$$

2.5 Restricciones holonómicas

Las restricciones existen de varios tipos y formas de clasificarlas. Algunos de los criterios que fundamentan la clasificación de una restricción son, la integrabilidad (reducción de grados de libertad) y la dependencia del tiempo.

La forma matemática general para expresar una restricción en un sistema dinámico viene dado por la ecuación (2.39):

$$\varphi(t, \mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i, \dots) = 0. \quad (2.39)$$

Desglosando en dos grandes ramas, las restricciones pueden ser descritas como:

- **Restricciones Holonómicas:** Define una superficie o una curva en el espacio, a la que el sistema dinámico está restringido, son integrables en todo momento y reducen los grados de libertad del sistema. Se representan por la siguiente ecuación:

$$\varphi(t, \mathbf{q}_i) = 0. \quad (2.40)$$

- **Restricciones No Holonómicas:** Son las restricciones que no eliminan los grados de libertad y no son integrables bajo alguna condición. Matemáticamente pueden describirse como desigualdades del tipo:

$$\varphi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i) \leq 0. \quad (2.41)$$

En robótica, las restricciones holonómicas son utilizadas para describir la restricción natural o artificial de un ambiente físico al aplicarse una tarea específica, como apretar un tornillo, devastar piezas metálicas, entre otras.

2.6 Modelo dinámico de un robot manipulador en movimiento restringido

Mediante la formulación de Euler-Lagrange basada en el cálculo de variaciones [23], un robot manipulador de n grados de libertad en movimiento restringido puede ser modelado como :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda}_e, \quad (2.42)$$

con:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}}) dt - U(\mathbf{q}) \quad (2.43)$$

donde $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ corresponde a la función Lagrangiana, $K \in \mathbb{R}$ es la energía cinética, $U \in \mathbb{R}$ es la energía potencial, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posición angular, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidad angular, $\mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$ es la función de disipación de Rayleigh, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de pares de entrada ($m = n$), $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz afín a los multiplicadores de Lagrange y $\boldsymbol{\lambda}_e$ es el vector de los multiplicadores de Lagrange.

Reorganizando el sistema de ecuaciones (2.42), el modelo dinámico restringido asociado a un robot puede ser expresado como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_e, \quad (2.44)$$

donde, $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector asociado a Coriolis y a los pares centrífugos, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal semidefinida positiva de los coeficientes de fricción viscosa, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares debidos a la gravedad, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de pares de entrada, $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es el Jacobiano de la restricción holonómica $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ que describe a la superficie de contacto y $\boldsymbol{\lambda}_e \in \mathbb{R}^m$ es la fuerza de reacción al contacto.

2.7 Principio de ortogonalización

El principio de Ortogonalización, propuesto en [24] por *Arimoto et al.*, permite la separación de las tareas de control de posición y fuerza. Mientras un punto de contacto exista entre el efector final del robot y el ambiente restringido (superficie), la fuerza aplicada es normal (perpendicular) y la velocidad (movimiento) es tangente a dicha superficie. Este principio facilita el diseño de la ley de control y el análisis de estabilidad, por ende ha sido utilizado en diversos esquemas de control en la literatura.

Considerando a la restricción holonómica $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ y denotando su gradiente como:

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

donde $\mathbf{r} = [x \ y \ z]$ son las coordenadas en el espacio cartesiano y $\boldsymbol{\phi} = [\theta, \alpha, \psi]$ es la orientación del efector final. Como se sabe que las coordenadas y la orientación están en función de las coordenadas articulares del robot, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, resultando en un gradiente dependiente de coordenadas articulares:

$$\nabla \varphi(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}), \quad (2.46)$$

por lo que cualquier vector multiplicado por el Jacobiano de la restricción $\varphi(\mathbf{q}) = 0$, será mapeado al plano perpendicular en el punto de estudio. La relación entre el par y fuerza ejercida al estar en contacto con la restricción,

está dado por el transpuesto del Jacobiano, por lo que sin perder generalidad en el mapeo, se utiliza éste².

Para separar las tareas de control ortogonalmente se generalizó el mismo concepto, optando por el diseño de dos operadores lineales: uno que permita mapear cualquier vector al plano perpendicular de la restricción en un punto y otro que haga un mapeo perpendicular a este último; es decir, habrá un mapeo perpendicular y un mapeo tangencial respecto a un punto de estudio en la restricción.

Sea el operador lineal de proyección $\mathbf{P}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Rango} \{ \mathbf{J}_\varphi^T \}, \quad (2.47)$$

entonces, para lograr lo anterior:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}), \quad (2.48)$$

donde $\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})$ es la Pseudoinversa de *Moore-Penrose*, la cual se define como:

$$\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})]^{-1}. \quad (2.49)$$

El objetivo de la ortogonalización es restringir las acciones de control en dos espacios distintos ortogonalmente, por lo que el espacio obtenido por el operador lineal $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ es el asociado a la aplicación de fuerza; de forma similar, se define un operador para la aplicación de un control de posición, éste operador debe ser perpendicular a $\mathbf{P}(\mathbf{q})$, entonces:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}(\mathbf{q})) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{y} = \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N} \{ \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \}, \quad (2.50)$$

donde $\mathcal{N} \{ \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \}$ es el espacio nulo del Jacobiano asociado a la restricción.

Por tanto, las matrices $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ y $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ son ortogonales, es decir que cumplen con:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}(\mathbf{q}), \quad (2.51)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{q}), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{q}). \quad (2.52)$$

²La relación entre las coordenadas Cartesianas y la orientación del efector final respecto a las coordenadas articulares del robot, se calculan con base en la definición del Jacobiano y haciendo uso del principio de trabajo virtual, se encuentran las relaciones entre fuerzas y pares.

Ya definidos los dos operadores de proyección ortogonal (2.48) y (2.50), se procede a definir el movimiento del robot cuando establece contacto. En el momento de contacto con la restricción, la velocidad se queda contenida en el plano tangencial de la restricción, dado que el movimiento vertical está ortogonalmente descoplado, ésto permite que la velocidad esté descrita por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{\mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}}_{=} + \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}}_{\perp} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.53)$$

El principio de ortogonalización muestra una clara ventaja; permite aplicar el control de manera dividida, lo cual es excelente cuando se tiene una acción de control híbrida; pero también existe una desventaja, la superficie de contacto debe tener una forma adecuada (preferiblemente un plano) para que el punto de contacto inicial y el subsecuente tengan una distancia lo bastante pequeña entre sí, de lo contrario el funcionamiento de la ortogonalización resulta en proyecciones erróneas.

Lo anterior puede ser visualizado en la Figura 2.3.

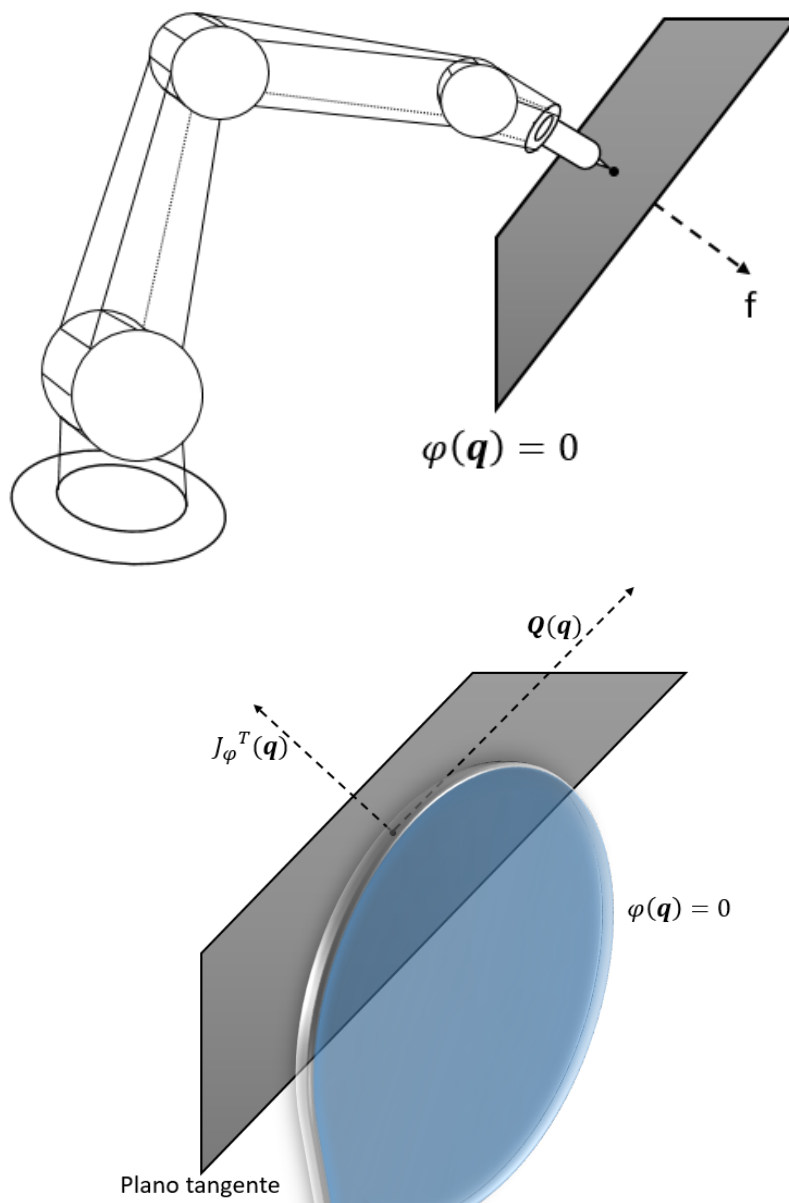


Figura 2.3: Punto de contacto entre el efector final y la restricción.

3

Estimación de fuerza

La estimación de fuerza de contacto en un esquema de control posición - fuerza, tiene sentido en el momento en el que el robot deja el movimiento libre, para comenzar un movimiento restringido, que se asume paralelo a la restricción, según la ecuación (2.53) y en donde la aplicación de un perfil de fuerza de forma perpendicular es la tarea deseada (ver Figura 3.1).

Supóngase que se tiene una restricción holonómica del tipo $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, representa las posiciones finales del efector final del robot. Entonces, en presencia de contacto con la superficie (restricción) se cumple la ecuación (3.1).

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{x} = f(\mathbf{q}) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.1)$$

Como consecuencia del contacto con la restricción, se derivan las relaciones diferenciales de las ecuaciones (3.2) y (3.3), las cuales se cumplen, dada la restricción de movimiento establecida en (2.53).

$$\dot{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.2)$$

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (3.3)$$

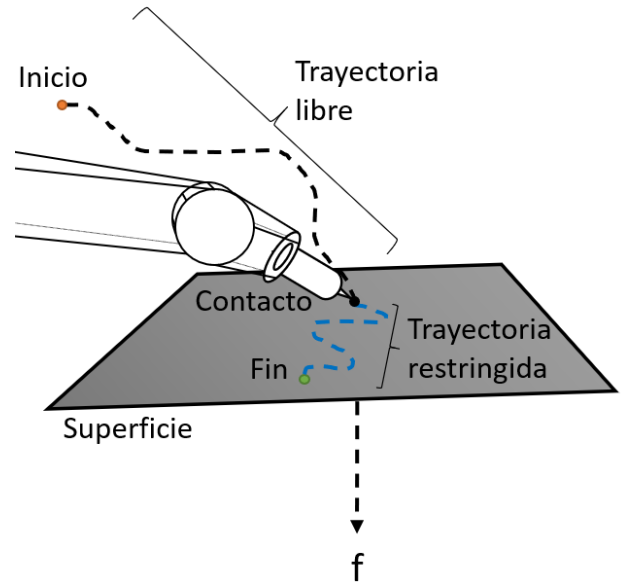


Figura 3.1: Momento del contacto con la restricción.

Del modelo dinámico (2.44), se puede despejar el vector asociado a la aceleración angular $\ddot{\mathbf{q}}$, quedando como:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e, \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$ y se asume que de las ecuaciones (3.3) y (3.4), es posible la sustitución de la aceleración angular $\ddot{\mathbf{q}}$ en (3.3), con lo cual se obtiene:

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \underbrace{[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e]}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.5)$$

Desarrollando y simplificando términos se consigue el siguiente despeje:

$$\lambda_e = (\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}))^{-1} \left\{ -\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] - \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\varphi}(\mathbf{q}) \right\}. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) resulta en la estimación ideal y apropiada de la fuerza de contacto, esto se cumple en un ambiente físico real, teniendo en cuenta que la restricción es rígida e indeformable y que el rango de \mathbf{J}_φ es completo.

Para fines de simulación, como no existe una restricción física que haga que se cumpla idealmente: $\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = \dot{\varphi}(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}) = 0$; lo que se hace es emular el comportamiento cuando sucede el contacto, definiendo una ecuación diferencial de segundo orden que sustituya el contacto físico por una respuesta dinámica sobre amortiguada.

Dado que la restricción (3.1) y sus relaciones diferenciales (3.2) restringen el movimiento, la ecuación diferencial para emular el contacto, se define como:

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) + 2\alpha\dot{\varphi}(\mathbf{q}) + \beta^2\varphi(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = -2\alpha\dot{\varphi}(\mathbf{q}) - \beta^2\varphi(\mathbf{q}), \quad (3.8)$$

donde $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0 \in \mathbb{R}$, son constantes positivas, que fungen como parámetros de diseño para la respuesta al contacto con la restricción. Nótese que la ecuación (3.7) representa una ecuación lineal estable, mientras que: $\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = 0$, es un doble integrador inestable.

Sustituyendo la ecuación (3.8) en la ecuación (3.6), se obtiene:

$$\lambda_e = (\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}))^{-1} \left\{ -\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] - \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - 2\alpha \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \beta^2 \varphi(\mathbf{q}) \right\}. \quad (3.9)$$

De la ecuación (3.9) se puede emular la fuerza de reacción, al estar en contacto con una superficie rígida e indeformable.

Resulta evidente que la estimación descrita por la ecuación (3.6), requiere del perfecto conocimiento de la superficie y sus relaciones diferenciales, que a su vez, se relacionan de manera directa con el movimiento del robot a través de la aceleración angular \ddot{q} ; sin embargo, en un entorno real, las mediciones asequibles son la posición angular y posiblemente la velocidad angular de cada articulación.

En este capítulo se presentan 5 técnicas de diseño para observadores, resultando en 7 observadores, de los cuales 5 son nuevos y 2 observadores utilizados como comparación. Las técnicas de diseño son: Perturbación Externa, Alta Ganancia, Impedancia, Modos Deslizantes e Inmersión.

En la Figura 3.2, se presenta de forma genérica el objetivo de operación de los observadores desarrollados en este capítulo, en donde se muestra que para la estimación de la fuerza se requiere de la entrada de control y la medición de las posiciones angulares, y si fuera posible también, obtener la medición de las velocidades angulares. Finalmente la fuerza estimada es retroalimentada al control de posición y fuerza.

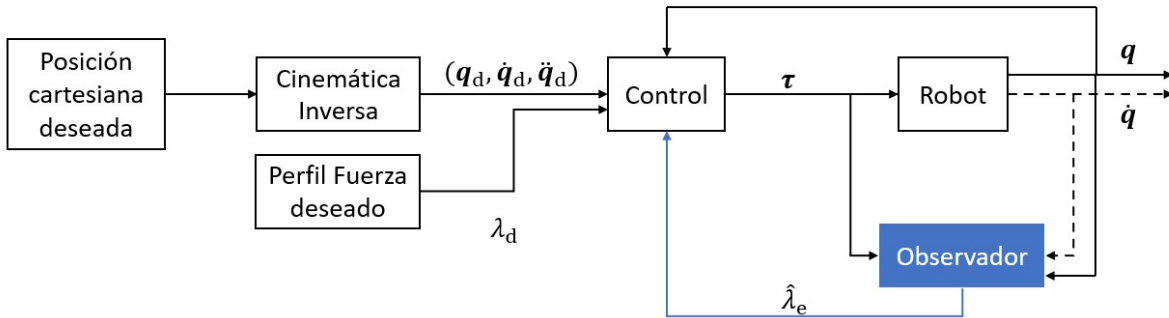


Figura 3.2: Diagrama de bloques representativo de la estimación de fuerza y su uso en el control de posición / fuerza.

3.1 Observadores basados en la técnica de Perturbación Externa

La formulación de la técnica radica en la idea, de que la fuerza de contacto se determina de la estimación de un par externo, para posteriormente, mediante un despeje matricial se obtenga la fuerza.

Utilizando el modelo dinámico descrito en (2.44), agrupando $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + D(\dot{q})\dot{q} + g(q)$ y definiendo $J_{\varphi}^T(q)\lambda_e = \tau_e$, se puede hacer el siguiente despeje:

$$\tau_e = H(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) - \tau, \quad (3.10)$$

de donde la fuerza de contacto es calculada como:

$$\lambda_e = (J_{\varphi x}^+)^T J^{-T} [\tau_e]. \quad (3.11)$$

Como es evidente, para estimar la fuerza de contacto se requiere de la posición, velocidad y aceleración angular de cada articulación, respectivamente, ver ecuación (3.10); por tanto, esta estimación de la fuerza de contacto estará sujeta a una estimación sensible al ruido y a perturbaciones externas, esto se debe a que la obtención de \dot{q} y \ddot{q} es mediante la derivación de la posición q , lo cual implica que si la medición es ruidosa, ésta se incrementará por cada derivación ¹.

Para evitar incrementar el ruido inherente de la medición, se procede a prescindir de la aceleración angular de cada articulación, lo que permite que la estimación no esté basada en la derivación de una posible señal ruidosa. Para lograr esto, se presentan a continuación dos metodologías que aunque basadas en la misma técnica de diseño, su procedimiento es distinto.

3.1.1 Observador No Lineal de Perturbación (NDO)

El Observador No Lineal de Perturbación (NDO, por sus siglas en inglés), es una metodología por primera vez aplicada por *Chen et al.* en [4], con el propósito de lograr la compensación de la fuerza de fricción en la implementación de un control de posición; estos mismos resultados fueron extendidos para un robot de n grados de libertad en [6].

Del modelo anterior, se despeja el par externo:

$$\tau_e = [H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)] - \tau. \quad (3.12)$$

Definiendo el error de estimación como:

$$e = \tau_e - \hat{\tau}_e, \quad (3.13)$$

sustituyendo la ecuación (3.12) en (3.13), se obtiene:

$$e = \{[H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)] - \tau\} - \hat{\tau}_e, \quad (3.14)$$

para establecer el comportamiento dinámico del error, se procede a derivar,

$$\dot{e} = \dot{\tau}_e - \dot{\hat{\tau}}_e. \quad (3.15)$$

¹Idealmente, si se conociera el modelo exacto y las mediciones de q , \dot{q} , \ddot{q} , fueran asequibles de forma directa, la estimación tendría un comportamiento equivalente al obtenido en la ecuación (3.6).

La propuesta de [4] en la estimación, define que si la dinámica del error se puede describir como:

$$\dot{e} = \dot{\tau}_e - \hat{\tau}_e = -L(q, \dot{q}) (\hat{\tau}_e - \tau_e), \quad (3.16)$$

entonces:

$$\dot{e} + L(q, \dot{q})e = 0, \quad (3.17)$$

donde $L(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz propuesta que se diseña intencionalmente para que la dinámica del error sea estable. Lo anterior es posible, solo sí el vector τ_e es constante.

Por tanto, es posible proponer un observador con la siguiente forma:

$$\dot{\hat{\tau}}_e = L(q, \dot{q}) \{ [H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)] - \tau \} - L(q, \dot{q})\hat{\tau}_e, \quad (3.18)$$

simplificando la ecuación (3.18), se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\hat{\tau}}_e + L(q, \dot{q})\hat{\tau}_e = L(q, \dot{q})\tau_e. \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) pone en evidencia, que el funcionamiento del estimador es equivalente a filtrar el par externo. Dado que no se puede evidentemente medir el par externo, se hace lo siguiente. Proponiendo una variable auxiliar de forma que:

$$\psi = \hat{\tau}_e - p(q, \dot{q}), \quad (3.20)$$

$$\hat{\tau}_e = \psi + p(q, \dot{q}), \quad (3.21)$$

donde $\psi \in \mathbb{R}^n$ es una variable auxiliar y $p(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ es un vector dependiente la velocidad y la posición de las articulaciones del robot. Se nota que de la definición de la ecuación auxiliar (3.20), la estimación del par externo es restado por el vector auxiliar $p(q, \dot{q})$. Nótese que este vector auxiliar tiene el objetivo de contrarrestar los términos indeseables del par externo.

Por otro lado, es posible reescribir la ecuación (3.21), de tal forma que el par estimado quede en función de las variables auxiliares. Este despeje proporciona una conexión directa relacionando las variables auxiliares con la

dinámica de la estimación al derivar temporalmente. Entonces, derivando (3.21) y sustituyendo en el estimador propuesto de la ecuación (3.19), se obtiene:

$$\dot{\hat{\tau}}_e = \dot{\psi} + \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt}, \quad (3.22)$$

$$\dot{\psi} + \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \{[\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})] - \boldsymbol{\tau}\} - \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]. \quad (3.23)$$

En la definición del observador en [4], la dinámica de la estimación recae en la variable auxiliar $\dot{\psi}$ y los términos indeseables consumidos por el vector $\frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt}$.

Agrupando términos, el estimador se reescribe como:

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \{\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})\}, \quad (3.24)$$

$$\dot{\psi} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \{\{\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\} - \boldsymbol{\tau}\} - \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \underbrace{\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt}}_{=0}. \quad (3.25)$$

Lo anterior se cumple, sí y solo si:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

quedando una dinámica ausente de la aceleración angular:

$$\dot{\psi} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \{\{\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\} - \boldsymbol{\tau}\} - \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]. \quad (3.27)$$

Por tanto, la ecuación (3.27) define la dinámica del observador; sin embargo, quedan pendientes las definiciones matemáticas de la matriz $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y el vector $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Existen dos formas de definir dichas entidades matemáticas, como se explicara a continuación.

Derivando $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y usando la regla de la cadena, el vector se reescribe como:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \left[\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (3.29)$$

Para la definición de la primera versión asúmase que: $\frac{\partial p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0$, con lo cual:

$$\frac{\partial p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}), \quad (3.30)$$

además, para fines de simplificación en esta primera definición del observador, asúmase que $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es una matriz constante positiva definida, entonces: $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; adicional a esto, si la matriz es diagonal, la definición es equivalente a la multiplicación por una constante:

$$\mathbf{L} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = c \cdot \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (3.31)$$

donde $c > 0 \in \mathbb{R}$ es el factor de escala de la diagonal principal. Se puede mostrar que mediante ésta selección, el observador (3.27) guiado por la ecuación del error de observación (3.17), es asintóticamente estable [4].

De la definición de $\mathbf{L} = c \cdot \mathbf{I}$, el vector $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es definido de manera consecuente a la ecuación (3.30):

$$\frac{\partial p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{q}) \int d\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = c \cdot \mathbf{H}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.33)$$

De lo calculado anteriormente, se puede hacer un resumen del estimador de fuerza con las siguientes ecuaciones (3.34):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\psi}} &= c \{ \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau} \} - c [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_e &= \boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= c \cdot \mathbf{H}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}. \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_e &= (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \end{aligned} \quad (3.34)$$

El estimador en (3.34), se considera una versión directa, ya que el calculo de la matriz \mathbf{L} repercute directamente en la estabilidad del error de estimación propuesto en (3.17).

3.1.1.1. Observador modificado

Una forma alternativa de propuesta, es asumiendo que $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, en efecto no es constante, volviendo al problema anterior, se tiene que:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}. \quad (3.36)$$

Si se elige a $\mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}})$, como:

$$\mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}}) = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

con $c \in \mathbb{R}$ que es un parámetro de diseño de escala. Se cumple la ecuación (3.36), considerando que:

$$\frac{d\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}. \quad (3.38)$$

Entonces despejando $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la ecuación (3.36), se encuentra la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \left\{ c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \right\} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (3.39)$$

$$c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}, \quad (3.40)$$

$$c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}), \quad (3.41)$$

Quedando una matriz dependiente de las posiciones articulares \mathbf{q} :

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}) = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}). \quad (3.42)$$

Finalmente, el observador modificado se conforma como:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\psi}} &= \mathbf{L}(\mathbf{q}) \{ \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau} \} - \mathbf{L}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}})] \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_e &= \boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}}) \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_e &= (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\psi} + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}})] \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}}) &= c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}(\mathbf{q}) &= c \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

Cabe mencionar que el observador definido en (3.43), cuenta con una prueba de estabilidad basada en el método directo de Lyapunov; sin embargo, se debe apelar a la simetría de la matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, ésta se puede reescribir como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

donde, $\mathcal{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ también es positiva definida para toda $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; proponiendo una candidata de Lyapunov cuadrática: $V(\mathbf{e}, \mathbf{q}) = \mathbf{e}^T \mathcal{H}(\mathbf{q}) \mathbf{e}$, con $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ y es definido como $\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}}$; en [4], se demostró que el punto de equilibrio ($\mathbf{e} = 0$) es estable global y asintóticamente.

3.1.2 Observador No Lineal de Perturbación de Orden Superior (NDO-HO)

Inspirados en un observador de fricción, en [7] *Kyung-Soo et al.* presentan una solución novedosa a la estimación de perturbaciones externas, ésta permite reducir la dinámica y establecer un observador de orden reducido exclusivo para la perturbación, para hacer esto, se permite describir a la perturbación como una expansión en series de tiempo, que en esencia es asumir que la perturbación tiene un comportamiento no lineal que puede ser descrito polinomialmente, al estilo de las series de Taylor, la diferencia es que no se conoce la función a modelar, por lo que de manera indirecta, se hace uso del error del sistema reducido.

A continuación, se presenta de manera constructiva el desarrollo matemático del observador y su uso en la robótica de manipuladores para la estimación de fuerza.

Considérese un sistema dinámico con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}(t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados con condiciones iniciales \mathbf{x}_0 , $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada al sistema, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es la salida medible del sistema, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n$ es el campo vectorial del sistema, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ con $\text{rango}(\mathbf{F}) = r$ es la matriz afín a la perturbación externa y $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^r$ es la perturbación externa. Hágase notar que lo único desconocido en este sistema dinámico, es la perturbación externa.

El sistema descrito en (3.45) puede reducir su dinámica al nivel de la perturbación al premultiplicar por la pseudo inversa de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, definida a continuación:

$$\underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} = \left(\underbrace{\mathbf{F}^T(\mathbf{x})}_{r \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{x})}_{n \times r} \right)^{-1} \underbrace{\mathbf{F}^T(\mathbf{x})}_{r \times n}, \quad (3.46)$$

quedando como:

$$\underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \underbrace{\dot{\mathbf{x}}}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}_{n \times 1} + \underbrace{\mathbf{d}(t)}_{r \times 1}, \quad \underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{x}(0)}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{x}_0}_{n \times 1}. \quad (3.47)$$

El sistema reducido (3.47), puede ser descrito de una forma más simple, si se asume que la dinámica reducida

$(\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, es concentrada en una variable dinámica $\dot{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$; quedando como:

$$\underbrace{\dot{\mathbf{z}}}_{r \times 1} = \underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}_{n \times 1} + \underbrace{\mathbf{d}(t)}_{r \times 1}, \quad (3.48)$$

esta redefinición de la dinámica permite la simplificación de cálculos, principalmente en el desarrollo matemático del error de observación, una vez definido el observador. La ecuación (3.48) representa a la planta o al sistema original, de donde se pretende estimar la perturbación.

Para definir al observador desde la perspectiva más básica, se asume que la perturbación a estimar es constante, tipo: $\mathbf{d}(t) = cte$, es decir, un polinomio de grado cero, definiendo al observador como:

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{\mathbf{d}}}_{r \times 1} &= \underbrace{\mathbf{\Gamma}_0}_{r \times r} \cdot \underbrace{(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})}_{r \times 1} \\ \underbrace{\dot{\mathbf{z}}}_{r \times 1} &= \underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}_{n \times 1} + \underbrace{\hat{\mathbf{d}}(t)}_{r \times 1}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde, $\hat{\mathbf{d}}$ es la perturbación estimada y $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de estados reducido asociado a la estimación.

Con el mismo objetivo que un observador identidad, se pretende copiar al modelo de la planta a través de un error de observación; en este aspecto, el observador (3.49) no cambia, ya que se distinguen dos sistemas reducidos: la planta (3.48) y el observador (3.49), la diferencia radica en que la estimación está exclusivamente hecha para la perturbación externa.

Analizando el error de estimación: $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}$, se tiene que al derivar:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{d}} - \dot{\hat{\mathbf{d}}}, \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{\Gamma}_0 \cdot [\dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}}] = \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{\Gamma}_0 \cdot \left\{ \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{d}(t) - \left[\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \hat{\mathbf{d}}(t) \right] \right\}, \\ \dot{\mathbf{e}} &= -\mathbf{\Gamma}_0 \cdot \mathbf{e} + \dot{\mathbf{d}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

finalmente llegando a:

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Gamma}_0 \cdot \mathbf{e} = \dot{\mathbf{d}}, \quad (3.51)$$

con solución:

$$e(t) = e(0) \cdot \exp(-\Gamma_0 t) + \exp(-\Gamma_0 t) \left[\int_0^t \dot{\mathbf{d}} \cdot \exp(\Gamma_0 t) dt \right], \quad (3.52)$$

en (3.51), se obtiene una ecuación de primer orden que se comporta exponencialmente estable siempre y cuando $\dot{\mathbf{d}} = 0$, lo cual es cierto para una perturbación constante, como en un principio se asumió.

Por otro lado, de la estimación hecha en (3.49), como: $\hat{\mathbf{d}} = \Gamma_0(z - \hat{z})$, se toma en consideración que z es medible (de forma teórica), lo cual no es posible, por que implicaría que se conoce a la perturbación. Lo que se hace en vez de lo anterior, es aproximar el valor de z a través de la salida del sistema origen (3.45), ya que es verdaderamente lo asequible para poder estimar, entonces haciendo uso de la matriz de reducción $\mathbf{F}^+(\mathbf{x})$ y la salida $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, se considera que: $z = \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$.

Cuando la salida del sistema (3.45) idealmente sea todo el estado; es decir: $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, entonces la aproximación queda como: $z = \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$; de esta aproximación al derivar, se tiene que: $\dot{z} = \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}{dt} \cdot \mathbf{x}$, donde: $\left(\frac{d\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}{dt} \cdot \mathbf{x} \right) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ es una dinámica no considerada en el observador, ésta surge como consecuencia de tener una matriz $\mathbf{F}^+(\mathbf{x})$ no constante. Sin embargo lo que se desea es que $\dot{z} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, esté definida como en (3.48).

En este sentido, en los subsecuentes cálculos, se asume que: $\dot{z} = \frac{d}{dt} [\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}] \approx \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, ésta aseveración está basada en el hecho de que la reducción del sistema dinámico perturbado culmina en (3.47). Otra forma de concebir lo anterior, es a través de considerar a $\mathbf{F}^+(\mathbf{x})$ como una transformación entre espacios; es decir: $\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$, ésta permite mapear del espacio \mathbb{R}^n (estados del sistema), al espacio de la perturbación \mathbb{R}^r y viceversa, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, mapea del espacio de la perturbación \mathbb{R}^r al espacio de estados \mathbb{R}^n ; entonces, el objetivo es mapear a $\dot{\mathbf{x}}$ (representante del sistema dinámico perturbado (3.45)) al espacio de la perturbación \mathbb{R}^r ; lo cual se representa como: $\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$.

A pesar de la dinámica no modelada que esta consideración implica, en el Capítulo 4, se muestra mediante los resultados en simulación, que esta aproximación es aceptable e incluso robusta ante esta incertidumbre. Nótese que cuando la matriz afín a la perturbación \mathbf{F}^+ es constante, si se cumple que: $z = \mathbf{F}^+ \mathbf{x}$, ya que al derivar, $\dot{z} = \mathbf{F}^+ \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$.

Usando la aproximación anterior, se redefine el observador (3.49), como:

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{\mathbf{d}}}_{r \times 1} &= \underbrace{\Gamma_0}_{r \times r} \underbrace{(\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{z})}_{r \times 1} \\ \underbrace{\dot{\hat{\mathbf{d}}}}_{r \times 1} &= \underbrace{\mathbf{F}^+(\mathbf{x})}_{r \times n} \underbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}_{n \times 1} + \underbrace{\dot{\hat{\mathbf{d}}}(t)}_{r \times 1}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora suponiendo que la perturbación se comporta como un polinomio de primer grado: $\mathbf{d}(t) = \alpha + \beta t$, con

parámetros $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$; entonces, se puede extender el sistema descrito en (3.53), tal que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}} &= \Gamma_0 (\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}) + \Gamma_1 \int_0^\tau (\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}) dt \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{F}^+ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \hat{\mathbf{d}}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Analizando el error de estimación $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}$ para (3.54), al derivar se desarrolla como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{d}} - \dot{\hat{\mathbf{d}}} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{d}} - \Gamma_0 \frac{d}{dt} \{(\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}})\} - \Gamma_1 \frac{dv_1}{dt} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{d}} - \Gamma_0 \mathbf{e} - \Gamma_0 \{(\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}})\} \\ \ddot{\mathbf{e}} &= \ddot{\mathbf{d}} - \Gamma_0 \dot{\mathbf{e}} - \Gamma_1 \frac{d}{dt} \{(\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}})\} \\ \ddot{\mathbf{e}} &= \ddot{\mathbf{d}} - \Gamma_0 \dot{\mathbf{e}} - \Gamma_1 \mathbf{e},\end{aligned}\tag{3.55}$$

quedando como:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \Gamma_0 \dot{\mathbf{e}} + \Gamma_1 \mathbf{e} = \ddot{\mathbf{d}},\tag{3.56}$$

en este caso, el requisito para establecer una estimación asintótica es suponer que $\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$, lo cual es cierto, ya que: $\dot{\mathbf{d}}(t) = \alpha$ y $\ddot{\mathbf{d}} = 0$. Nótese que dependiendo de la selección de Γ_0 y Γ_1 , se asegura que el error converja a cero. La posición de los polos en el plano complejo otorgará al error de estimación el comportamiento dinámico, sin embargo, es común usar polos repetidos para hacer que la respuesta sea sobre amortiguada.

Cuando se extiende el sistema para estimar una perturbación de grado polinomial p , el error de estimación lo acompañará con una dinámica asintóticamente estable, siempre y cuando la p -ésima derivada de la perturbación sea cero. Lo anterior se puede generalizar como:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}} &= \Gamma_0 (\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}) + \Gamma_1 v_1 + \cdots + \Gamma_p v_p \\ \dot{v}_1 &= (\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}) \\ &\vdots \\ \dot{v}_p &= v_{p-1} \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \hat{\mathbf{d}},\end{aligned}\tag{3.57}$$

con error de estimación:

$$\mathbf{e}^{(p)} + \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}^{(p-1)} + \dots + \mathbf{\Gamma}_{p-1} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{e} = \mathbf{d}^{(p)}. \quad (3.58)$$

Por tanto, con la correcta selección de las ganancias $\mathbf{\Gamma}'s$, se puede lograr una convergencia asintótica, excepto para el caso de perturbación constante, que como visto anteriormente, tiene convergencia exponencial.

Para aplicar el anterior observador en robots manipuladores, se procede con el siguiente desarrollo. Se define el modelo dinámico genérico usado en este trabajo (2.44), se agrupan los términos:

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \{ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \}, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{\varphi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\lambda_e. \quad (3.60)$$

Reorganizando:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \mathbf{J}_{\varphi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\lambda_e, \quad (3.61)$$

despejando la aceleración angular:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\lambda_e, \quad (3.62)$$

por último, transformando a variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1)\mathbf{J}_{\varphi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_1)\lambda_e, \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados relacionado a la posición angular \mathbf{q} , $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados relacionado a la velocidad angular $\dot{\mathbf{q}}$. Cabe mencionar que el manejo del modelo dinámico del robot manipulador es preferible hacerlo desde la perspectiva de variables de estado, ya que de esta forma la definición del observador resulta trivial.

Una vez establecido el sistema (3.63) y concentrándose en la segunda ecuación; se procede a normalizar dicha ecuación para dejar un coeficiente unitario a la perturbación, el primer paso de la normalización se hace al premultiplicar

por la izquierda la matriz $\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)$, quedando:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)\dot{\mathbf{x}}_2 = [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{J}_\varphi^\top(\mathbf{x}_1)\lambda_e, \quad (3.64)$$

siguiendo con la normalización y recordando la definición del Jacobiano asociado a la restricción holonómica: $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{J}_{\varphi x}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}(\mathbf{x}_1)$, se calcula su transpuesto como:

$$\mathbf{J}_\varphi^\top(\mathbf{x}_1) = (\mathbf{J}_{\varphi x}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}(\mathbf{x}_1))^\top = \mathbf{J}^\top(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_{\varphi x}^\top(\mathbf{x}_1). \quad (3.65)$$

De (3.65), la pseudo inversa de $\mathbf{J}_\varphi^\top(\mathbf{x}_1)$, se define, tal que:

$$\underbrace{(\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^{\top}}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{J}^{\top}(\mathbf{q})}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi x}^{\top}(\mathbf{q})}_{n \times 1} = 1. \quad (3.66)$$

Definiendo a $\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) = \underbrace{(\mathbf{J}_{\varphi x}^+(\mathbf{x}_1))^\top}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{x}_1)}_{n \times n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como una transformación de reducción y premultiplicando a (3.64), se normaliza y se reduce la dinámica con la misma dimensión que la fuerza de contacto (perturbación externa), quedando como:

$$\underbrace{\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1)}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)}_{n \times n} \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_2}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1)}_{1 \times n} \underbrace{[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]}_{n \times 1} + \underbrace{\lambda_e}_{1 \times 1}. \quad (3.67)$$

Del sistema reducido (3.67), se establece que la dinámica $\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1)\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)\dot{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}$ es concentrada en una variable dinámica $\hat{z} \in \mathbb{R}$; es decir: $\hat{z} = \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1)\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)\dot{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}$, reescribiendo como:

$$\underbrace{\hat{z}}_{1 \times 1} = \underbrace{\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1)}_{1 \times n} \underbrace{[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]}_{n \times 1} + \underbrace{\lambda_e}_{1 \times 1}. \quad (3.68)$$

Por consiguiente, asumiendo una fuerza constante $\lambda_e = cte$ quiere ser estimada, el observador se define como:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_e &= \gamma_0 (z - \hat{z}) \\ \dot{\hat{z}} &= \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \hat{\lambda}_e \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde $\hat{z} \in \mathbb{R}$ es el vector de estados reducidos asociado a la estimación, $\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es la pseudo inversa del Jacobiano transpuesto de la restricción holonómica, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es la entrada de control, $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es un vector

que agrupa los términos de Coriolis, fricción viscosa y debidos a la gravedad en el robot manipulador, por último, $\hat{\lambda}_e \in \mathbb{R}$ es la fuerza estimada.

Al igual que en la definición del observador en (3.49), la estimación no puede realizarse usando la definición (3.69); sin embargo, de la planta (2.44), se asume que la velocidad angular $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, es medida o al menos es asequible por medio de la posición angular $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$; entonces se puede aproximar a z como: $z = \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}$. Por otro lado, se asume que: $\dot{z} \approx \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \dot{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}$, ésto con el mismo sentido de que la dinámica del sistema perturbado (3.63), particularmente $\dot{\mathbf{x}}_2$, es mapeada al espacio de la fuerza externa $\lambda_e \in \mathbb{R}$, al ser premultiplicada por $\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)$, tal como se aprecia en (3.67). A pesar de las no linealidades y las dinámicas no modeladas involucradas en esta consideración, el funcionamiento de (3.69) mostrado en el Capítulo 4, resulta en un observador con buen desempeño (para más detalles, consultar el Capítulo 4).

Tomando a $z = \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}$, la redefinición del observador (3.69), queda como:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_e &= \gamma_0 (\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{z}) \\ \dot{\hat{z}} &= \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \hat{\lambda}_e.\end{aligned}\tag{3.70}$$

Analizando el error de estimación:

$$\tilde{\lambda}_e = \lambda_e - \hat{\lambda}_e = \lambda_e - \gamma_0 (\mathbf{m}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{z}),\tag{3.71}$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}_e = \dot{\lambda}_e - \dot{\hat{\lambda}}_e = \dot{\lambda}_e - \gamma_0 (\dot{z} - \dot{\hat{z}}),\tag{3.72}$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}_e = \dot{\lambda}_e - \gamma_0 \tilde{\lambda}_e, \quad \dot{\tilde{\lambda}}_e + \gamma_0 \tilde{\lambda}_e = \dot{\lambda}_e,\tag{3.73}$$

con solución:

$$\tilde{\lambda}(t) = \tilde{\lambda}_e(0) e^{-\gamma_0 t} + e^{-\gamma_0 t} \left[\int_0^t \dot{\lambda}_e e^{\gamma_0 t} dt \right],\tag{3.74}$$

de la misma forma que en (3.49), se concluye que mientras la estimación sea para $\lambda_e = cte$; lo cual se cumple sí: $\dot{\lambda}_e = 0$, entonces la estimación es asintótica, con un error de observación que converge exponencialmente. Nótese que en este caso particular, la dinámica quedo reducida a una sola ecuación diferencial, lo cual evita un gran procesamiento al hacer la estimación.

Generalizando el observador, para la estimación de un comportamiento polinomial de grado p , como en (3.57), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_e &= \gamma_0 (\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{z}}) + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_p v_p, \\
\dot{v}_1 &= (\mathbf{m}^+(\mathbf{x}_1) \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{z}}), \\
&\vdots \\
\dot{v}_p &= v_{p-1}, \\
\dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{m}^+ [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \hat{\lambda}_e,
\end{aligned} \tag{3.75}$$

quedando el error de estimación como:

$$\tilde{\lambda}_e^{(p)} + \gamma_0 \tilde{\lambda}_e^{(p-1)} + \cdots + \gamma_{p-1} \dot{\tilde{\lambda}}_e + \gamma_p \tilde{\lambda}_e = \lambda_e^{(p)}, \tag{3.76}$$

donde p es el grado del polinomio asociado con el comportamiento deseado de la estimación, $\lambda_e^{(p)} \in \mathbb{R}$ es la p -ésima derivada de la fuerza. Nótese que para que el estimador funcione asintóticamente [7], la p -ésima derivada de la fuerza debe tender a cero, $\lambda_e^{(p)} \rightarrow 0$ o ser cero, $\lambda_e^{(p)} = 0$, lo cual se asume.

3.2 Observadores basados en la técnica de Alta Ganancia

3.2.1 Observador de Alta Ganancia (HGO)

Considérese un sistema dinámico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\
\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{3.77}$$

donde, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^r$ es la perturbación externa, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida medible del sistema y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de condiciones iniciales.

El observador de Alta Ganciana (HGO), se define como:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) + \mathbf{K} (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}),
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n]^T, \tag{3.79}$$

$$S^{(n)} + \mathbf{k}_1 S^{(n-1)} + \dots + \mathbf{k}_n = 0, \quad (3.80)$$

donde, $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados estimados, $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de estados medible, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es el vector de ganancias asociadas a la ecuación (3.79).

El diseño de las ganancias es siempre un reto. De la ecuación (3.79), *Khalil et al.* [25], establecieron que si el vector de ganancia se define como:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1/\varepsilon, \mathbf{k}_2/\varepsilon^2, \dots, \mathbf{k}_n/\varepsilon^n]^T, \quad (3.81)$$

tal que, la ecuación (3.82) es Hurwitz. Es posible para una selección pequeña de ε obtener un observador asintótico e incluso recobrando en presencia de control, la retroalimentación de variables para la ley de control. Reescribiendo la ecuación (3.80):

$$S^{(n)} + \frac{\mathbf{k}_1}{\varepsilon} S^{(n-1)} + \dots + \frac{\mathbf{k}_n}{\varepsilon^n} = 0. \quad (3.82)$$

Particularizando la aplicación de observadores de Alta Ganancia para sistemas mecánicos perturbados, lo anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{d} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado asociado a las posiciones, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado asociado a las velocidades, $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es la función que hay entre tiempo, entradas y estados del sistema mecánico, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida del sistema (usualmente, las posiciones del sistema) y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ es la perturbación externa que afecta al sistema.

Extendiendo el sistema para otorgarle una dinámica a la perturbación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} &= \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde, $\boldsymbol{\delta}(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ es la función asociada a la dinámica de la perturbación externa, dicha dinámica se presupone desconocida.

Aplicando la misma estructura de (3.78), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \hat{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\hat{\mathbf{d}}} &= \mathbf{K}_3 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}),
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

donde la dinámica de la perturbación externa $\dot{\hat{\mathbf{d}}} \in \mathbb{R}^p$, es calculada mediante el término correctivo $\mathbf{K}_3 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}))$. Nótese que mediante la extensión del sistema dinámico y el uso del termino correctivo antes mencionado, es posible estimar a la perturbación externa, siempre y cuando ésta tenga un comportamiento dinámico lento (*Slow Rate Motion*, en inglés) o preferiblemente que la perturbación externa sea constante.

Lo anterior puede ser ratificado por el sistema error, el cual puede ser determinado mediante la resta del sistema original extendido (3.84), menos el estimado (3.85), quedando:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 &= \tilde{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 &= \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\tilde{\mathbf{d}}} &= \delta(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}_3 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})).
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Haciendo la suposición de que la salida medible es la posición angular, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1$, lo cual es usual en sistemas mecánicos y el error de estimación $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_1$; las ecuaciones (3.86) derivan en la ecuación del error de estimación (3.87):

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{K}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_3 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 = \delta(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}). \tag{3.87}$$

De (3.87) se observa que si las ganancias, como antes se menciono, cumplen con que la ecuación (3.82) sea Hurwitz y aunado a esto la dinámica $\delta(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \approx 0$, entonces la estimación es asintótica [25]; si la dinámica de la perturbación $\delta(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \neq 0$ pero acotada, el error de estimación $\tilde{\mathbf{x}}_1$ está últimamente acotada bajo ciertas condiciones en las ganancias descritas en [25].

Aplicando el observador anterior al problema de estimación de fuerza externa y procediendo de la misma forma para extender el sistema, utilizando el modelo dinámico del robot y transformando a variables de estado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\
 \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Considerando a $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \cdot \lambda_e$ como toda la perturbación externa $\mathbf{d}_e(t)$; entonces, extendiendo el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{d}_e \\ \dot{\mathbf{d}}_e &= \boldsymbol{\Delta}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}),\end{aligned}\tag{3.89}$$

donde, $\boldsymbol{\Delta}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ es la dinámica desconocida de la perturbación.

Construyendo el observador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2)] + \hat{\mathbf{d}}_e + \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{d}}}_e &= \mathbf{K}_3 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_1,\end{aligned}\tag{3.90}$$

donde las ganancias son seleccionadas mediante la ecuación:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{K}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_3 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}).\tag{3.91}$$

Por tanto, la perturbación externa estimada se describe como:

$$\hat{\mathbf{d}}_e = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \hat{\lambda}_e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{d}}_e = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \hat{\lambda}_e,\tag{3.92}$$

quedando por último la estimación:

$$\hat{\lambda}_e = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T \mathbf{J}^{-T} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{d}}_e].\tag{3.93}$$

Nótese que este tipo de estimación es de forma indirecta, ya que el calculo procede de un término correctivo y no de un despeje directo. Se puede decir que este tipo de estimación al ser indirecta, literalmente estima todo lo externo que pueda afectar al modelo (3.88); sin embargo, bajo las consideraciones establecidas al principio del capítulo, la estimación se hace justo en el momento de contacto con la restricción y control de fuerza; con lo cual, la estimación es acertada.

Otra cosa a tener en cuenta, es que estos tipos de observadores estiman la posición, la velocidad, la aceleración y la fuerza de contacto, por lo que, su uso los hace bastante versátiles; no obstante, el problema subyacente del fenómeno de pico siempre es latente.

3.2.2 Observador Proporcional-Integral Generalizado (GPIO)

La idea principal del observador GPI, es aglutinar o hacinar las no linealidades desconocidas en una sola variable dinámica y que ésta al ser descrita por un polinomio, las representa a través del tiempo. Hablando sobre el polinomio, lo primero que sale a flote, es la necesidad de determinar los coeficientes del mismo. Para contrarrestar este problema, lo que se ha hecho en [8], es expresar el polinomio en una cadena de integradores. De esta forma el polinomio que evoluciona en el tiempo, se autoajusta al irse integrando, esto resulta posible por que el ajuste vendrá dado por la n -ésima derivada del residuo del polinomio al ser definido (véase la ecuación (3.94)).

Para lograr la estimación en armonía con el sistema dinámico estudiado, lo que se hace es acoplar la dinámica de la perturbación a la del propio sistema, esto se resume en extender el sistema con tantos integradores encadenados como el grado del polinomio deseado sea, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_1(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}_i \cdot t^i + \mathbf{r}(t), \quad \Rightarrow \quad & \begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_1 &= \mathbf{d}_2 \\ \dot{\mathbf{d}}_2 &= \mathbf{d}_3 \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{d}}_{p-1} &= \mathbf{d}_p \\ \dot{\mathbf{d}}_p &= \mathbf{r}^p(t), \end{aligned} \tag{3.94}
 \end{aligned}$$

donde, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}$ es un vector de de coeficientes constantes y $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}$ es el término residual. Ahora, considérese un sistema dinámico no lineal definido como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{d}(t), \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \tag{3.95}
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el campo vectorial del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida del sistema, $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ es la matriz asociada a la perturbación y $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^d$ es la perturbación externa.

Agrupando en un solo término a la perturbación externa: $\mathbf{z}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{d}(t)$ y extendiendo el sistema con un polinomio

de grado p , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{z}_1 \\
 \dot{\hat{z}}_1 &= \mathbf{z}_2 \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= \mathbf{z}_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{z}}_{p-1} &= \mathbf{z}_p \\
 \dot{\hat{z}}_p &= \mathbf{r}^{(p)}(t).
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

Construyendo el observador de la misma forma que en [2], se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{K}_p \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{K}_{p-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{\mathbf{z}}_3 + \mathbf{K}_{p-2} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{z}}_{p-1} &= \hat{\mathbf{z}}_p + \mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})) \\
 \dot{\hat{z}}_p &= \mathbf{r}^{(p)}(t) + \mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})).
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Analizando la dinámica del error surgida de restar (3.96) y (3.97), y definiendo el error de estimación como $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}))$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{K}_p \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\
 \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{\mathbf{z}}_2 - \mathbf{K}_{p-1} \tilde{\mathbf{x}} \\
 \dot{\tilde{z}}_2 &= \tilde{\mathbf{z}}_3 - \mathbf{K}_{p-2} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{z}}_{p-1} &= \tilde{\mathbf{z}}_p - \mathbf{K}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\
 \dot{\tilde{z}}_p &= \mathbf{r}^{(p)}(t) - \mathbf{K}_0 \cdot \tilde{\mathbf{x}}.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Derivando la primera ecuación del sistema (3.98) p veces, se determina una ecuación diferencial de orden p :

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(p)} + \mathbf{K}_p \cdot \tilde{\mathbf{x}}^{(p-1)} + \mathbf{K}_{p-1} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^{(p-2)} + \cdots + \mathbf{K}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 = \mathbf{r}^{(p)}(t). \tag{3.99}$$

Si el residuo $\mathbf{r}^{(p)}(t)$ está acotado y las ganancias \mathbf{K}'_s son escogidas tal que la ecuación (3.99) sea Hurwitz, se puede mostrar que el error de estimación y sus múltiples derivadas son final exponencialmente acotadas en un disco centrado en el origen $\tilde{\mathbf{x}} = 0$, para más detalles consultar: [2] [8].

Entrando de lleno al problema de estimación de la fuerza de contacto y transformando el modelo dinámico a variables de estado:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e.\end{aligned}\quad (3.100)$$

Agrupando la perturbación externa:

$$z_1 = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}_i \cdot t^i + \mathbf{r}(t) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e, \quad (3.101)$$

procediendo a extender el sistema dinámico y acoplar la dinámica de la perturbación externa, el sistema extendido resulta en:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{z}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{z}_3 \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{r}^p(t)\end{aligned}\quad (3.102)$$

Construyendo el observador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_{p+1} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2)] + \hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{K}_p \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_1 &= \hat{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{K}_{p-1} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_2 &= \hat{\mathbf{z}}_3 + \mathbf{K}_{p-2} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_{p-1} &= \hat{\mathbf{z}}_p + \mathbf{K}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_p &= \mathbf{K}_0 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{y} - \mathbf{x}_1\end{aligned}\quad (3.103)$$

Obteniendo el sistema dinámico del error de observación:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1^{p+2} + \mathbf{K}_{p+1} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1^{p+1} + \cdots + \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_0 = \mathbf{r}^p(t) \quad (3.104)$$

Basta con hacer una correcta selección de ganancias $\mathbf{K}'s$ para obtener una estimación final exponencialmente acotada. Por último, la estimación de la fuerza se establece al hacer un breve despeje:

$$\hat{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \hat{\lambda}_e, \quad \hat{\lambda}_e = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T \mathbf{J}^{-T} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{z}}_1]. \quad (3.105)$$

3.3 Observadores basados en la técnica de Impedancia

3.3.1 Observador de fuerza basado en impedancia

El observador propuesto en *Alcocer et al.* [11], permite hacer una estimación basada en la comparación de un modelo de referencia y un observador basado en la técnica de alta ganancia. La comparación tiene como fin obtener un sistema error, el cual es capaz de acumular las variaciones entre el modelo de referencia y el observador, estas variaciones por consecuencia son una definición indirecta de lo que perturba al sistema dinámico (robot).

Dado que la comparación se da entre dos sistemas dinámicos propuestos cabe la duda de la precisión de dicho método, sin embargo, como se demostró en [11], el observador fue capaz no solo de hacer una estimación de una fuerza constante, sino que permitió la determinación de una fuerza con un comportamiento tipo rampa.

A este observador se le denomina tipo impedancia, ya que su comportamiento dinámico equivale a grandes rasgos a un modelo dinámico del tipo: masa-resorte-amortiguador.

Transformando a variables de estado el modelo (2.44):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e. \end{aligned} \quad (3.106)$$

El sistema (3.106) se toma como una representación *real* de lo que ocurre en el ambiente, aunque se sepa que no es cierto, simplemente es una abstracción para comparar dicho modelo.

A continuación se procede a definir un observador basado en la técnica de Alta Ganancia, particularmente, sin considerar a la fuerza de contacto. Por lo que, la definición queda como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2)] + \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_1, \end{aligned} \quad (3.107)$$

Siendo $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ el error de observación; el término correctivo del observador, $\hat{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^n$ es el vector estimado de estados asociado a la posición angular y $\hat{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^n$ es el vector estimado de estados asociados a la velocidad angular.

Al restar (3.106) y (3.107) se determina el siguiente sistema error:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 &= \tilde{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{K}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \left[-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 - \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \right] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T \lambda_e - \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1.\end{aligned}\quad (3.108)$$

Derivando la primera ecuación del sistema 3.108 y sustituyendo en la segunda ecuación del sistema, se obtiene una dinámica reducida, tal que:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{K}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1, \quad (3.109)$$

desarrollando:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \left[-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 - \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \right] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T \lambda_e - \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{K}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \left[-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 - \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \right] + \mathbf{J}_\varphi^T \lambda_e - \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + [\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{D} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_1] \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{J}_\varphi^T \lambda_e, \quad (3.112)$$

definiendo las ganancias:

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \quad (3.113)$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{D} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_1 \quad (3.114)$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_2. \quad (3.115)$$

Finalmente despejando y obteniendo la estimación de la fuerza:

$$\mathbf{J}_\varphi^T \lambda_e = \mathbf{\Lambda}_2 \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_1 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{x}}_1, \quad (3.116)$$

quedando como:

$$\lambda_e = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T (\mathbf{J}^{-T}) \left[\mathbf{\Lambda}_2 \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_1 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{x}}_1 \right]. \quad (3.117)$$

La ecuación (3.117), representa a la estimación de la fuerza a través de una ecuación de segundo orden. Mientras las ganancias se escojan de tal modo, que el polinomio característico de dicha ecuación sean negativos definidos,

la estimación tendrá un comportamiento estable. Lo anterior se logra manteniendo las mismas ganancias que el observador (3.107) [11].

Uno de los contratiempos al momento de la estimación, es el hecho de usualmente solo se mide la posición angular del robot, por lo que la versión asequible por medición se define como:

$$\hat{\lambda}_e \approx (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T (\mathbf{J}^{-T}) [\mathbf{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{x}}_1]. \quad (3.118)$$

Hágase notar que esto equivale a tener una perturbación constante tipo *slow rate motion*; sin embargo es un buen aproximado [11].

Mediante la estimación de las derivadas del error es posible construir la versión completa, se recomienda el diferenciador de Levant descrito en [12]. Suponiendo que se tiene la estimación de las derivadas del error, la versión completa del observador queda como:

$$\hat{\lambda}_e = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T (\mathbf{J}^{-T}) \left[\mathbf{\Lambda}_2 \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_1 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{x}}_1 \right]. \quad (3.119)$$

*Las ganancias del observador y de la estimación de la fuerza deben ser las mismas.

3.4 Observadores basados en la técnica de Modos Deslizantes

3.4.1 Observador tipo Super-Twisting Generalizado de Ganancia Variable (VGSTO)

En [13], desarrollado por *Jaime A. Moreno et al.* en 2014, se presentó la generalización de los observadores tipo *Super-Twisting*, ésta generalización permite la extensión y unificación de resultados previos en el ámbito de los bioprocesos.

El observador tipo *Super-Twisting Generalizado* propuesto en [13], da lugar a que su comportamiento sea lineal, no lineal e incluso discontinuo, todo esto dependiendo de la correcta selección de las ganancias usadas en éste. Se probó en [13], que usando una forma cuadrática de una función Lyapunov, se permite asegurar convergencia en tiempo finito a pesar de las perturbaciones.

Considérese un sistema dinámico no lineal con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{b}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (3.120)$$

donde, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ son las entradas conocidas, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ representa la entrada desconocida, $f_1(\cdot)$ es una función continua conocida y $f_2(\cdot)$ es una función conocida posiblemente discontinua o

multivaluada, $\delta(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ representa una función desconocida o incierto. $\mathbf{b}(\cdot) \in \mathbb{R}$ es una función conocida la cual esta acotada por debajo y arriba (ver ecuación (3.121)). En lo subsecuente, se escribirá a $\mathbf{b}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ como $\mathbf{b}(t)$, a manera de simplificación.

$$0 \leq b_m \leq \mathbf{b}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \leq b_M, \quad (3.121)$$

donde $b_m \in \mathbb{R}$ como cota inferior y $b_M \in \mathbb{R}$ como cota superior. Nótese que se considera como un coeficiente que puede ser variable pero siempre positivo.

El objetivo del observador es obtener la estimación de x_2 a través de la medición de x_1 robustamente en tiempo finito, a pesar de las posibles perturbaciones.

Considerando el sistema (3.120), se propuso en [13], el siguiente observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{b}(t) \cdot \hat{x}_2 + l_1(t)\phi_1(\tilde{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + l_2(t)\phi_2(\tilde{x}_1), \\ \tilde{x}_1 &= x_1 - \hat{x}_1, \end{aligned} \quad (3.122)$$

donde, $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ son los estados estimados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $w \in \mathbb{R}^r$ representa la entrada desconocida, $\mathbf{f}_1(\cdot)$ es una función continua conocida y $\mathbf{f}_2(\cdot)$ es una función conocida posiblemente discontinua o multivaluada, $\delta(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ representa una función desconocida o incierta, $\mathbf{b}(\cdot) \in \mathbb{R}$ es una función conocida la cual esta acotada por debajo y arriba, como se describe en la ecuación (3.121).

Los términos de corrección basados en el error son monótonamente crecientes y se estructuran con una ganancia variable (función escalar) $l(t)$ multiplicando a una función no lineal $\phi(\cdot)$, teniendo la siguiente definición:

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \frac{1}{\beta} \cdot k_1(t) + \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot k_2(t), \\ l_2(t) &= \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot k_2(t) + \frac{\beta + \varepsilon^2}{\beta} k_2(t), \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mu_1 |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_2 |\tilde{x}_1|^c \text{sign}(\tilde{x}_1), \\ \phi_2 &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_1 \cdot \mu_2 \left(c + \frac{1}{2}\right) |\tilde{x}_1|^{(c-\frac{1}{2})} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_2^2 \cdot c \cdot |\tilde{x}_1|^{(2c-1)} \text{sign}(\tilde{x}_1), \end{aligned} \quad (3.124)$$

La ganancia interna $k_1(t) \in \mathbb{R}$, se define como:

$$k_1(t) > \frac{\Delta^2(t)}{4 \cdot \varepsilon} + \frac{\Delta(t)}{2 \cdot \varepsilon} \left| \frac{k_2(t)}{b(t)} - \beta + \varepsilon^2 \right| + \frac{b(t)}{4 \cdot \varepsilon} \left\{ \frac{k_2(t)}{b(t)} - \beta + \varepsilon^2 \right\}^2, \quad (3.125)$$

donde, $\{\varepsilon, \beta\} \in \mathbb{R}^+$ son constantes positivas definidas usadas como factor de ajuste en las ganancias variables $l(t)$, $\{\mu_1, \mu_2\} \in \mathbb{R}^+$ son los coeficientes de las no linealidades, $c \in \mathbb{R}$ es la constante asociada a la potencia de las no linealidades en su definición, $k_2(t) \in \mathbb{R}$ se define como cualquier función arbitraria, no obstante, se puede establecer constante y $\Delta(t)$ es la cota sobre la función desconocida o incierta, se le puede considerar como un valor que impone la condición de que tanto crece la perturbación (una pendiente), lo cual sirve al momento de estimarla (ver ecuación (3.126)), también puede ser constante o ser definida como función del tiempo.

$$|\delta(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq \Delta(t)|\phi_2(\tilde{\mathbf{x}}_1)|, \quad (3.126)$$

Las no linealidades se relacionan entre sí, a través de:

$$\phi_2(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \phi_1(\tilde{\mathbf{x}}_1) \cdot \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{\mathbf{x}}_1)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_1} \right], \quad (3.127)$$

$$\phi_2(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_1} \left\{ \mu_1 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_2 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^c \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right\} \cdot \phi_1(\tilde{\mathbf{x}}_1), \quad (3.128)$$

$$\phi_2(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \left\{ \frac{1}{2} \mu_1 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_2 c |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{c-1} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right\} \left[\mu_1 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_2 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^c \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right], \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\tilde{\mathbf{x}}_1) &= \left\{ \frac{1}{2} \mu_1 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right\} \left[\mu_1 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_2 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^c \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right] + \dots \\ &\dots + \left\{ \mu_2 c |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{c-1} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right\} \left[\mu_1 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_2 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^c \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \right], \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\phi_2 = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \frac{1}{2} \mu_1 \cdot \mu_2 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{(c-\frac{1}{2})} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot c \cdot |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{(c-\frac{1}{2})} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mu_2^2 \cdot c \cdot |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{(2c-1)} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1), \quad (3.131)$$

Por último, simplificando (3.131), se obtiene (3.124). La composición estructural del observador es modificada mediante los coeficientes μ_1, μ_2 y la constante asociada a la potencia de las no linealidades c , en general se pueden obtener muchas variaciones del observador, sin embargo, destacan tres:

- **Observador Lineal**, Si $\mu_1 = 0$ y $c = 1$:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mu_2 |\tilde{\mathbf{x}}_1|^c \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \mu_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \phi_2 &= \mu_2^2 \cdot c \cdot |\tilde{\mathbf{x}}_1|^{(2c-1)} \text{sign}(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \mu_2^2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1. \end{aligned} \quad (3.132)$$

- **Observador Super-Twisting**, Si $\mu_2 = 0$:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \mu_1 |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \phi_2 &= \frac{\mu_1^2}{2} \cdot \text{sign}(\tilde{x}_1).\end{aligned}\tag{3.133}$$

- **Observador Discontinuo**, Si $c = 1$:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \mu_1 |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_2 |\tilde{x}_1| \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \phi_2 &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_1 \mu_2 \left(\frac{3}{2}\right) |\tilde{x}_1|^{\left(\frac{1}{2}\right)} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_2^2 |\tilde{x}_1| \text{sign}(\tilde{x}_1).\end{aligned}\tag{3.134}$$

Al restar (3.120) y (3.122), se obtiene la dinámica del error de estimación:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -l_1(t) \phi_1(\tilde{x}_1) + \mathbf{b}(t) \cdot \tilde{x}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -l_2(t) \phi_2(\tilde{x}_1) + \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),\end{aligned}\tag{3.135}$$

derivando temporalmente la primera ecuación y sustituyendo, se obtiene:

$$\ddot{\tilde{x}}_1 = -l_1(t) \cdot \dot{\phi}_1(\tilde{x}_1) + b(t) \cdot \dot{\tilde{x}}_2,\tag{3.136}$$

$$\ddot{\tilde{x}}_1 = -l_1(t) \cdot \dot{\phi}_1(\tilde{x}_1) + b(t) \cdot [-l_2(t) \phi_2(\tilde{x}_1) + \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})],\tag{3.137}$$

$$\ddot{\tilde{x}}_1 = -l_1(t) \cdot \dot{\phi}_1(\tilde{x}_1) - l_2(t) \cdot b(t) \cdot \phi_2(\tilde{x}_1) + b(t) \cdot \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),\tag{3.138}$$

$$\ddot{\tilde{x}}_1 + l_1(t) \cdot \dot{\phi}_1(\tilde{x}_1) + l_2(t) \cdot b(t) \cdot \phi_2(\tilde{x}_1) = b(t) \cdot \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),\tag{3.139}$$

$$\ddot{\tilde{x}}_1 + l_1(t) \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \right] \dot{\tilde{x}}_1 + l_2(t) \cdot b(t) \cdot \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \right] \phi_1(\tilde{x}_1) = b(t) \cdot \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),\tag{3.140}$$

finalmente, se puede compactar la ecuación anterior, como:

$$\ddot{\tilde{x}}_1 + \alpha_1 \cdot \dot{\tilde{x}}_1 + \alpha_2 \cdot \phi_1(\tilde{x}_1) = b(t) \cdot \boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),\tag{3.141}$$

con:

$$\alpha_1 = l_1(t) \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{\mathbf{x}}_1)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_1} \right] \quad \alpha_2 = l_2(t) \cdot b(t) \cdot \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{\mathbf{x}}_1)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_1} \right]. \quad (3.142)$$

La solución de la ecuación (3.141), se puede entender en el sentido de Filippov [13]. Nótese que según la selección de μ_1 y μ_2 , el comportamiento de (3.141) será distinto. Cabe destacar, que una de las bondades de tener un observador discontinuo es que cuando $\mu_1 > 0$, la discontinuidad permite que la perturbación sea no desvaneciente en $\tilde{\mathbf{x}} = 0$. En [13], se demuestra mediante los métodos de Lyapunov, que el observador tipo Super-Twisting Generalizado es globalmente y robustamente estable. Para más detalles, revisar *Teorema 1* en [13].

La aplicación del observador antes desarrollado, no resulta de forma directa al problema de estimación de la fuerza externa. Se comienza con el modelo dinámico habitual en variables de estado.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \lambda_e, \end{aligned} \quad (3.143)$$

donde, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados relacionado a la posición angular \mathbf{q} , $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados relacionado a la velocidad angular $\dot{\mathbf{q}}$.

Para poder aplicarlo se procede a reducir la dinámica del sistema como en el desarrollo del observador NDOHO (ver sección (3.1.2)), de aquí destaca que la fuerza de contacto queda, por así decirlo, al nivel de la dinámica del robot, de esta forma, el sistema dinámico reducido (3.145), puede extenderse.

Reutilizando a $\mathbf{m}^+ = \underbrace{(\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})}_{n \times n}$ y premultiplicando, se obtiene la dinámica reducida (3.145).

$$\mathbf{m}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{m}^+ [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \lambda_e, \quad (3.144)$$

$$\underbrace{\dot{z}}_{1 \times 1} = \underbrace{\mathbf{m}^+}_{1 \times n} \underbrace{[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]}_{n \times 1} + \underbrace{\lambda_e}_{1 \times 1}. \quad (3.145)$$

Partiendo de la dinámica reducida (3.145), es posible extender el sistema, añadiéndole así a la fuerza de reacción su propia dinámica, de la misma forma se hizo en el observador HGO (3.90), quedando como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{m}^+ [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \lambda_e(\tilde{z}) \\ \dot{\lambda}_e &= \delta(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\tau}), \end{aligned} \quad (3.146)$$

donde, $\delta(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}$ es la dinámica desconocida de la fuerza de reacción. Para simplificar el desarrollo, se le llamara en lo subsecuente $\delta(t)$.

Una vez establecida la extensión del sistema como en (3.146), se puede aplicar el observador tipo Super-Twisting Generalizado, tal que:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{m}^+ [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \hat{\lambda}_e + l_1(t) \cdot \phi_1(\tilde{\mathbf{z}}), \\ \dot{\hat{\lambda}}_e &= l_2(t) \cdot \phi_2(\tilde{\mathbf{z}}), \\ \tilde{\mathbf{z}} &= (\mathbf{m}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{z}}).\end{aligned}\tag{3.147}$$

Al restar (3.146) y (3.147), se obtiene la dinámica del error, quedando como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= -l_1 \cdot \phi_1(\tilde{\mathbf{z}}) + \tilde{\lambda}_e, \\ \dot{\tilde{\lambda}}_e &= -l_2 \cdot \phi_2(\tilde{\mathbf{z}}) + \delta(t).\end{aligned}\tag{3.148}$$

Derivando la primera ecuación de (3.148) y sustituyendo:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{z}}} + l_1(t) \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \right] \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + l_2(t) \cdot \left[\frac{\partial \phi_1(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \right] \phi_1(\tilde{\mathbf{z}}) = \delta(t).\tag{3.149}$$

Por último, de la ecuación (3.149), se hacen notar que la dinámica es de orden uno; es decir, que queda descrita por una ecuación diferencial de primer orden; sin embargo altamente no lineal y con posibles discontinuidades, según la selección de las ganancias. De la misma forma que en (3.141), la solución se entiende en el sentido de Filippov [13]. Nótese que para el caso de la estimación de fuerza, esta es no desvaneciente en el origen $\tilde{\mathbf{z}} \rightarrow 0$, por lo que la condición de crecimiento $\Delta(t)$ en (3.126), se redefine como:

$$|\lambda_e| \leq \Delta(t); \quad \Delta(t) > 0,\tag{3.150}$$

donde, $\Delta(t) \in \mathbb{R}^+$ es la cota de crecimiento en la fuerza, puede ser constante o función del tiempo.

3.5 Observadores basados en la técnica de Inmersión

3.5.1 Observador de Perturbación por Modos Deslizantes (SMDO)

En [20], Leonid Fridman et al. en el año 2007, desarrollaron una metodología basada en modos deslizantes de alto orden (HOSM, por sus siglas en inglés), que permite desarrollar un observador basado en inmersión, sin necesidad

de calcular la tan codiciada transformación, lo que, por obvias razones ayuda decisivamente a la implementación de dichos observadores. A continuación se presenta el desarrollo.

Considérese un sistema dinámico no lineal perturbado:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.151}$$

donde, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ es la matriz afín a la perturbación, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ es la perturbación externa y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida del sistema.

Asúmase que para cualquier punto $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, se satisface que la salida, $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, tiene grado relativo ρ con respecto a la perturbación $\boldsymbol{\omega}(t)$ [20]; es decir,

$$\begin{aligned}L_g L_f^k \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \forall k < (\rho - 1) \\ L_g L_f^{\rho-1} &\neq 0\end{aligned}\tag{3.152}$$

Entonces, es posible definir el mapa de observabilidad como:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(\rho-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\tag{3.153}$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ es el nuevo vector de estados transformados.

Transformando al sistema (3.151) y reorganizando su estructura, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\xi}, d(t)) \\ \mathbf{x} &= \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}\tag{3.154}$$

donde los nuevos vectores y matriz, quedan definidos como:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},\tag{3.155}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ L_f^\rho h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ L_f^\rho h(\Phi^{-1}(\xi)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.156)$$

$$\lambda(\xi, d(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) \cdot \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(\xi)) \cdot \omega(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.157)$$

Como se sabe de la ecuación (2.12), hace falta la definición de la transformación $\Phi(x)$ para lograr la estructura impuesta en (3.154), no obstante, se sabe que el mapa de observabilidad (3.153) esta compuesto por las derivadas temporales de la salida del sistema (3.151), con base en ello, a través del diferenciador de alto orden definido por modos deslizantes, es posible obtener dichas derivadas.

De no hacerse lo anterior, aún es posible utilizar la metodología expuesta en [19], en donde, la transformación es obtenida mediante un sistema de ecuaciones y suposiciones respecto al sistema.

El diferenciador de alto orden, se define como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 = v_0 &= -k_0 |z_0 - \mathbf{y}|^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \cdot \text{sign}(z_0 - \mathbf{y}) + z_1, \\ \dot{z}_1 = v_1 &= -k_1 |z_1 - v_0|^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \cdot \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_i = v_i &= -k_i |z_i - v_{i-1}|^{\left(\frac{n-i}{n-i+1}\right)} \cdot \text{sign}(z_i - v_{i-1}) + z_{i+1}, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -k_n \cdot \text{sign}(z_n - v_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.158)$$

donde las ganancias k_n son definidas según:

$$\begin{aligned} k_0 &= \alpha_0 \cdot L^{\left(\frac{1}{n}\right)}, \\ k_1 &= \alpha_1 \cdot L^{\left(\frac{1}{n-1}\right)}, \\ &\vdots \\ k_n &= \alpha_n \cdot L, \end{aligned} \quad (3.159)$$

donde los coeficientes α' s son escogidas según [12]; sin embargo, se pueden elegir arbitrariamente según convenga.

Definiendo el mapa de observabilidad como la estimación del diferenciador, se tiene que:

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\xi}^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \Phi(x), \quad (3.160)$$

pudiendo construir el nuevo sistema estimado como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2, \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3, \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_n &= L_f^\rho h(\Phi^{-1}(\hat{\xi})) + L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(\hat{\xi})) \cdot \hat{\omega}(t), \end{aligned} \quad (3.161)$$

despejando a la perturbación:

$$\hat{\omega}(t) = \left(L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(\hat{\xi})) \right)^{-1} \left[\dot{\hat{\xi}}_n - L_f^\rho h(\Phi^{-1}(\hat{\xi})) \right], \quad (3.162)$$

donde se observa que si $L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(\hat{\xi})) \neq 0$, la estimación estara definida para todo tiempo.

Para la aplicación en los robots manipuladores y la estimación de la fuerza de contacto; primero, se procede a definir el mapa de observabilidad:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (3.163)$$

después, estableciendo la estructura como en (3.154):

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_1) [\tau - n(x_1, x_2)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_1) J_\varphi^T \lambda_e \end{bmatrix}, \quad (3.164)$$

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_1) [\tau - n(x_1, x_2)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{bmatrix}. \quad (3.165)$$

donde $\omega(t) = H^{-1}(x_1) J_\varphi^T \lambda_e$.

Construyendo el diferenciador:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 = v_0 &= -k_0 |z_0 - \mathbf{y}|^{\frac{2}{3}} \cdot \text{sign}(z_0 - \mathbf{y}) + z_1, \\ \dot{z}_1 = v_1 &= -k_1 |z_1 - v_0|^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_2 \cdot \text{sign}(z_2 - v_1). \end{aligned} \quad (3.166)$$

Nótese que la construcción del diferenciador en la metodología se establece del mismo orden que el sistema dinámico; sin embargo, al extender el diferenciador, se le otorga robustez a la estimación.

Asignando las variables estimadas, a las variables transformadas:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \dot{z}_0, & \hat{\xi}_1 &= z_0, \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \dot{z}_1, & \hat{\xi}_2 &= z_1, \end{aligned} \quad (3.167)$$

quedando como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2, \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \end{aligned} \quad (3.168)$$

despejando a $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$, se tiene que:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = \dot{\hat{\xi}}_2 - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \hat{\xi}_2)], \quad (3.169)$$

finalmente, se define la estimación de la fuerza:

$$\hat{\lambda}_e = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \{\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)\}, \quad (3.170)$$

$$\hat{\lambda}_e = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \left\{ \dot{\hat{\xi}}_2 - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \hat{\xi}_2)] \right\}. \quad (3.171)$$

3.6 Resumen cualitativo

Tabla 3.1: Resumen cualitativo observador NDO

Observador:	Modelo:
Perturbación NDO Figura (3.4)	$\dot{\psi} = L[n(q, \dot{q}) - \tau] + L[\psi + p(\dot{q})]$ $\hat{\tau}_e = \psi + p(\dot{q})$ $\hat{\lambda}_e = (J_{\varphi x}^+)^T J^{-T} [\psi + p(\dot{q})]$
<p>Requerimientos: Posición angular q, velocidad angular \dot{q}, modelo restricción holonómica $\varphi(q) = 0$.</p> <p>Parámetros de diseño: Seleccionando a $p(\dot{q})$ con $c \in \mathbb{R}^+$, se obtiene a $L(q, \dot{q})$. La correcta selección de c hará que $L(q, \dot{q})$ influya directamente en la convergencia asintótica del observador.</p> <p>Ventaja: Fácil sintonización y capaz de estimar comportamientos no lineales, a pesar que su diseño teóricamente se limita a la estimación de perturbaciones constantes.</p> <p>Desventaja: Presupone que se tiene la medición de la velocidad angular disponible, al no contar con dicha medición, se puede implícitamente añadir ruido al estimarla con algún otro método.</p>	

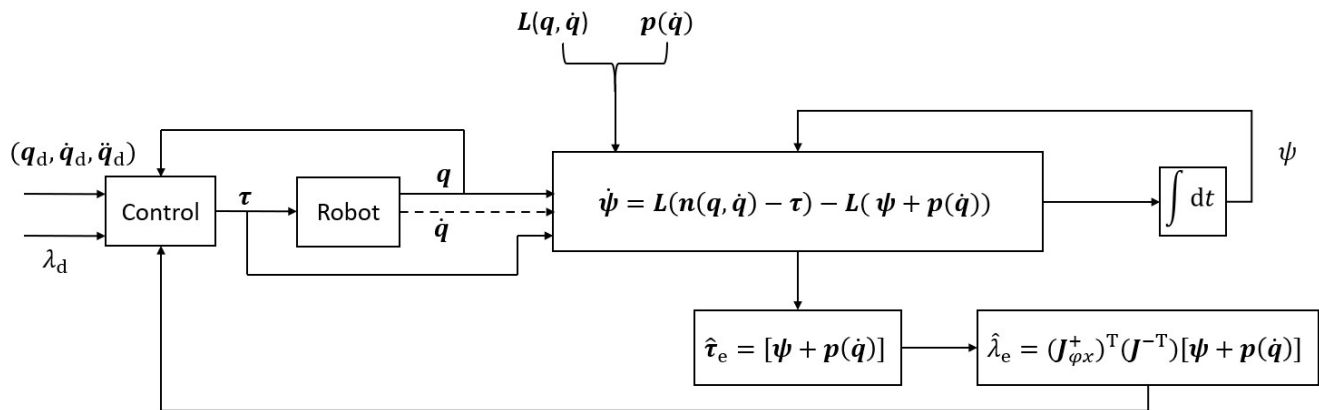


Figura 3.3: Diagrama esquemático del observador NDO.

Tabla 3.2: Resumen cualitativo observador NDOHO

Observador:	Modelo:
Perturbación NDOHO Figura (3.4)	$\begin{aligned} \hat{\lambda}_e &= \gamma_0 (\mathbf{m}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{z}}) + \gamma_1 \cdot v_1 + \dots + \gamma_p v_p \\ \dot{v}_1 &= (\mathbf{m}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{z}}) \\ &\vdots \\ \dot{v}_p &= v_{p-1} \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{m}^+ [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \hat{\lambda}_e \end{aligned}$
<p>Requerimientos: Posición angular (\mathbf{q}), Velocidad angular ($\dot{\mathbf{q}}$), entrada de control ($\boldsymbol{\tau}$) y restricción holonómica $\varphi(\mathbf{q})$.</p> <p>Parámetros de diseño: Ganancias $\gamma_0, \dots, \gamma_p$, las cuales están restringidas a cumplir con la ecuación: $\tilde{\lambda}_e^{(p)} + \gamma_0 \tilde{\lambda}_e^{(p-1)} + \dots + \gamma_{p-1} \tilde{\lambda}_e + \gamma_p \tilde{\lambda}_e = \lambda_e^{(p)}$, donde se asume que conforme $t \rightarrow \infty$, $\lambda_e^{(p)} = 0$, o por lo menos, $\lambda_e^{(p)} \rightarrow 0$ conforme el tiempo avanza.</p> <p>Ventaja: Facil sintonización y capaz de estimar un comportamiento polinomial de grado p.</p> <p>Desventaja: Sensible al ruido, en el sentido de que utiliza a la velocidad angular como base de la estimación, por lo que, si la velocidad arrastra ruido implícito, la estimación también. Es posible atenuar lo anterior haciendo uso de un filtro.</p>	

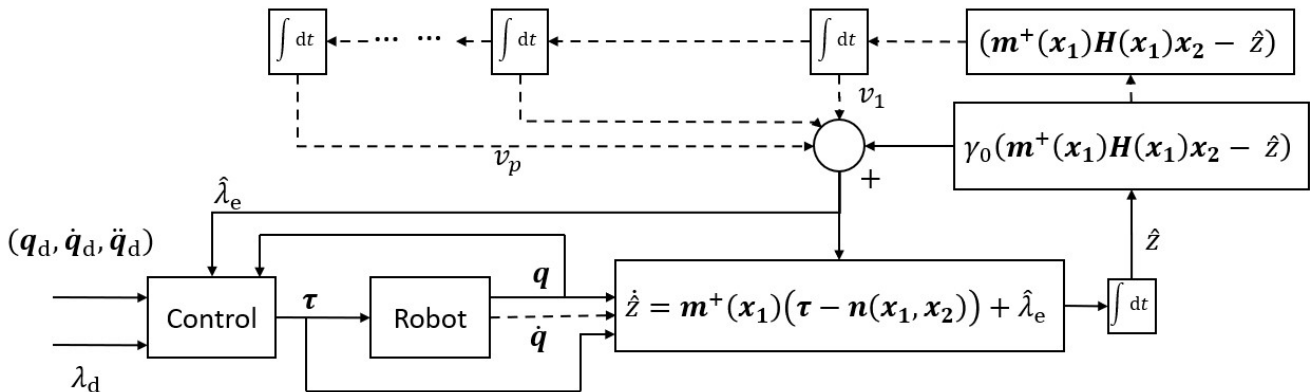


Figura 3.4: Diagrama esquemático del observador NDOHO.

Tabla 3.3: Resumen cualitativo observador HGO

Observador:	Definición:
Alta Ganancia HGO Figura (3.5)	$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_1 \cdot \tilde{x}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= H^{-1}(x_1) [\tau - n(x_1, \hat{x}_2)] + \hat{d}_e + K_2 \cdot \tilde{x}_1 \\ \dot{\hat{d}}_e &= K_3 \cdot \tilde{x}_1 \\ \hat{\lambda}_e &= (J_{\varphi x}^+)^T J^{-T} [H(x_1) \hat{d}_e] \end{aligned}$
<p>Requerimientos: Posición angular (q), entrada de control (τ) y restricción holonómica $\varphi(q)$.</p> <p>Parámetros de diseño: Ganancias matriciales K^r's, que se diseñan con base en ubicación de polos, para que el polinomio asociado sea Hurwitz .</p> <p>Ventaja: Facil sintonización y a pesar de estar diseñado para la estimación de perturbaciones lentas, es capaz de seguir aproximadamente comportamientos dinámicos rápidos.</p> <p>Desventaja: Fenómeno de pico y oscilaciones en zonas transitorias.</p>	

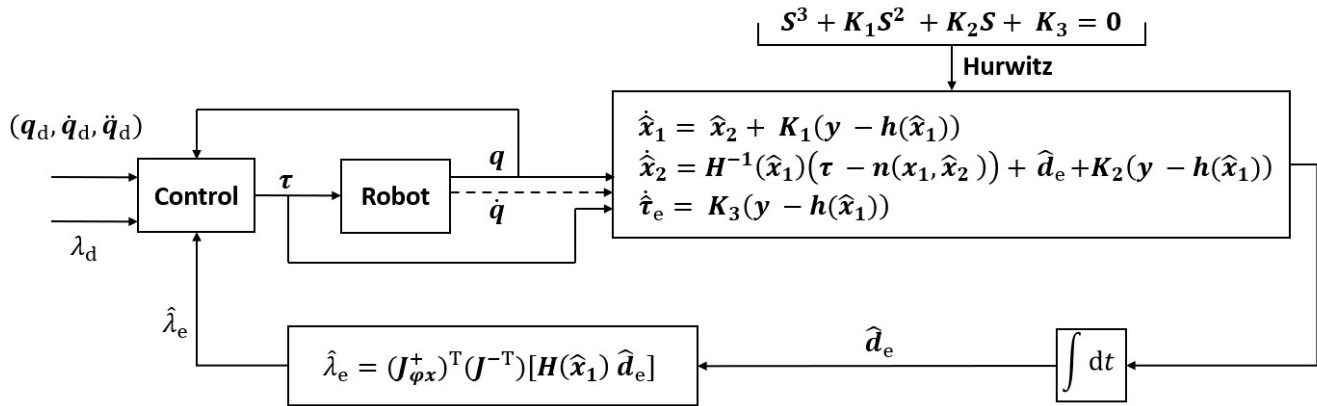


Figura 3.5: Diagrama esquemático del observador HGO.

Tabla 3.4: Resumen cualitativo observador GPIO

Observador:	Definición:
Alta Ganancia GPIO Figura (3.6)	$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_{p+1} \cdot \tilde{x}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= H^{-1}(x_1) [\tau - n(x_1, \hat{x}_2)] + \hat{z}_1 + K_p \cdot \tilde{x}_1 \\ \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + K_{p-1} \cdot \tilde{x}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + K_{p-2} \cdot \tilde{x}_1 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_{p-1} &= \hat{z}_p + K_1 \cdot \tilde{x}_1 \\ \dot{\hat{z}}_p &= K_0 \cdot \tilde{x}_1 \\ \hat{\lambda}_e &= (J_{\varphi x}^+)^T J^{-T} [H(x_1) \hat{z}_1] \end{aligned}$

Requerimientos: Posición angular (q), entrada de control (τ) y restricción holonómica $\varphi(q)$.

Parámetros de diseño: Ganancias matriciales K^l s, que se diseñan con base en ubicación de polos, para que el polinomio de grado p , sea Hurwitz (ver Figura (3.6)).

Ventaja: Fácil sintonización y capaz de estimar un comportamiento polinomial de grado p .

Desventaja: Fenómeno de pico (incrementa aún más con ruido) y oscilaciones en zonas transitorias.

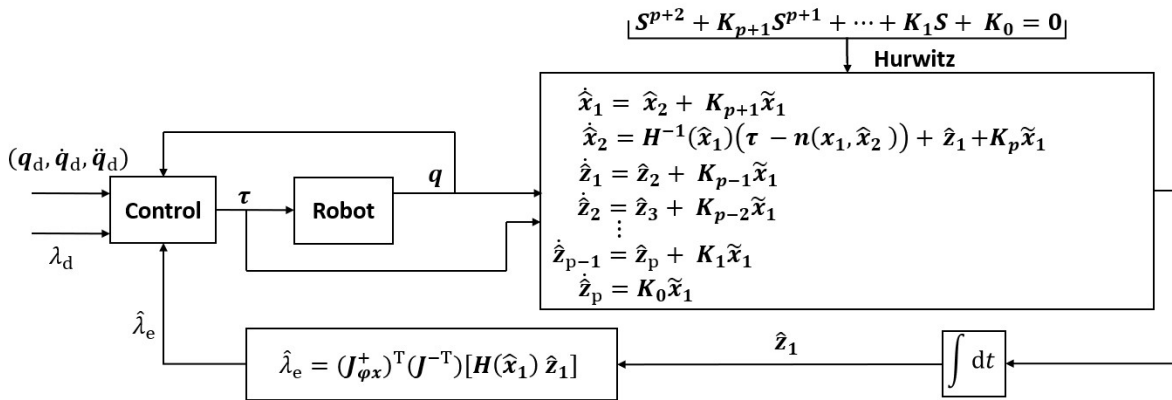


Figura 3.6: Diagrama esquemático del observador GPIO.

Tabla 3.5: Resumen cualitativo observador IBO

Observador:	Definición:
Impedancia IBO	$\Lambda_2 = H(x_1)$ $\Lambda_1 = C(x_1, \hat{x}_2) + D + H(x_1)K_1$ $\Lambda_0 = H(x_1)K_2$ $\hat{\lambda}_e = (J_{\varphi x}^+)^T (J^{-T}) [\Lambda_2 \ddot{\tilde{x}}_1 + \Lambda_1 \dot{\tilde{x}}_1 + \Lambda_0 \tilde{x}_1]$
<p>Requerimientos: Posición angular (q), entrada de control (τ) y restricción holonómica.</p> <p>Parámetros de diseño: Ganancias matriciales K''s, que se diseñan con base en ubicación de polos, para que el polinomio asociado sea Hurwitz y Λ''s en el sistema error. Las ganancias Λ''s, están en función de las K''s.</p> <p>Ventaja: Fácil sintonización y estimación <i>natural</i> de la perturbación, ocupa los mismos coeficientes matriciales del modelo dinámico.</p> <p>Desventaja: Basado en un modelo de referencia, lo que implica que si el modelo, no es lo suficientemente exacto, se incurre en una estimación ineficiente.</p>	

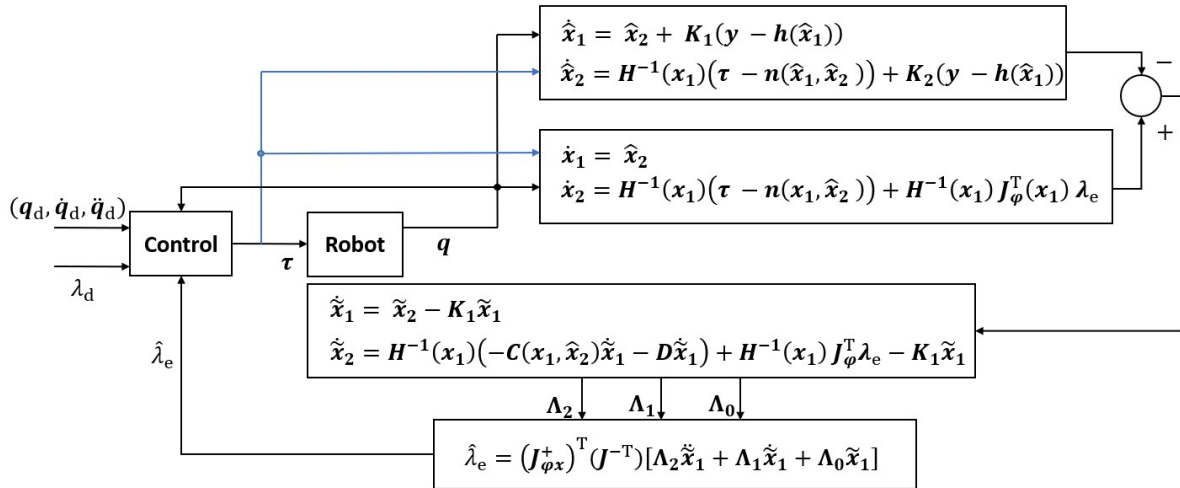


Figura 3.7: Diagrama esquemático del observador IBO.

Tabla 3.6: Resumen cualitativo observador VGSTO

Observador:	Definición:
Modos deslizantes VGSTO Figura (3.8)	$\dot{\hat{z}} = m^+ [\tau - n(x_1, x_2)] + \hat{\lambda}_e + l_1(t) \cdot \phi_1(\tilde{z})$
	$\dot{\hat{\lambda}}_e = l_2(t) \cdot \phi_2(\tilde{z})$
	$l_1(t) = \frac{1}{\beta} \cdot k_1(t) + \frac{\epsilon}{\beta} \cdot k_2(t)$
	$l_2(t) = \frac{\epsilon}{\beta} \cdot k_2(t) + \frac{\beta + \epsilon^2}{\beta} k_2(t)$
	$\phi_1 = \mu_1 \tilde{z} ^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{z}) + \mu_2 \tilde{z} ^q \text{sign}(\tilde{z})$
	$\phi_2 = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\tilde{z}) + \mu_1 \mu_2 \left(q + \frac{1}{2} \right) \tilde{z} ^{(q-\frac{1}{2})} \text{sign}(\tilde{z}) + \mu_2^2 \cdot q \cdot \tilde{z} ^{(2q-1)} \text{sign}(\tilde{z})$

Requerimientos: Posición angular (q), Velocidad angular (\dot{q}), entrada de control (τ) y restricción holonómica $\varphi(q)$.

Parámetros de diseño: Ganancias variables l 's dependientes de ganancias internas (k_1 y k_2 , ver Sección 3.4.1) y ϕ 's que son funciones del error de estimación, ambas seleccionadas según [13].

Ventaja: Según la selección de los parametros de diseño es posible heredar al observador, un comportamiento no lineal, lineal o discontinuo. Con la corecta selección de los parámetros se puede establecer convergencia en tiempo finito.

Desventaja: La sintonización es laboriosa y requiere a la medición velocidad angular, lo cual puede implicar ruido.

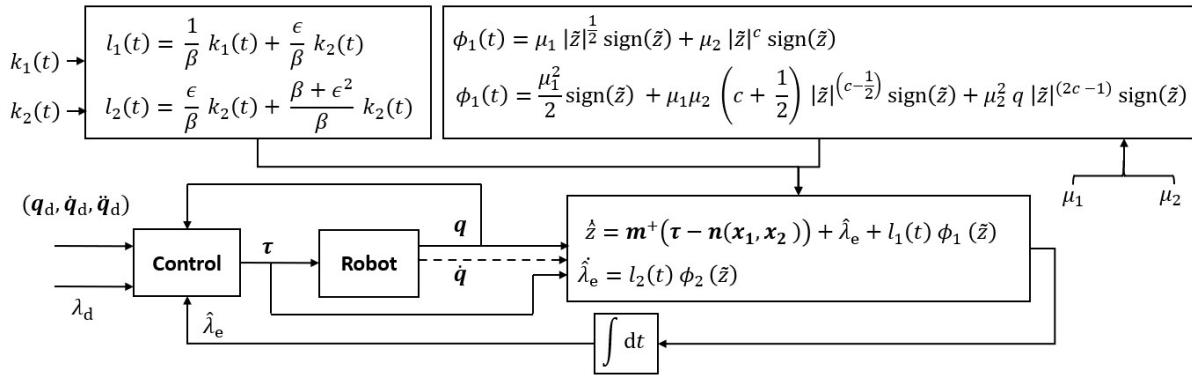


Figura 3.8: Diagrama esquemático del observador VGSTO.

Tabla 3.7: Resumen cualitativo observador SMDO

Observador:	Definición:
Inmersión SMDO Figura (3.9)	$\dot{\xi} = \Lambda \xi + \varphi(\xi) + \lambda(\xi, d(t))$ $\hat{x} = \Phi^{-1}(\xi)$ $\dot{\xi}_1 = \dot{z}_0$ $\dot{\xi}_2 = \dot{z}_1$ $\hat{\lambda}_e = (J_{\varphi x}^+)^T J^{-T} \{ H(x_1) \dot{\xi}_2 - [\tau - n(x_1, \hat{x}_2)] \}$
<p>Requerimientos: Posición angular (q), entrada de control (τ) y restricción holonómica $\varphi(q)$.</p> <p>Parámetros de diseño: Ganancias matriciales k's que son diseñadas mediante los valores establecidos en [12], existiendo dos variantes.</p> <p>Ventaja: Fácil sintonización y Preciso, en el sentido que la estimación es directa, hecha por despeje.</p> <p>Desventaja: Sensible al ruido.</p>	

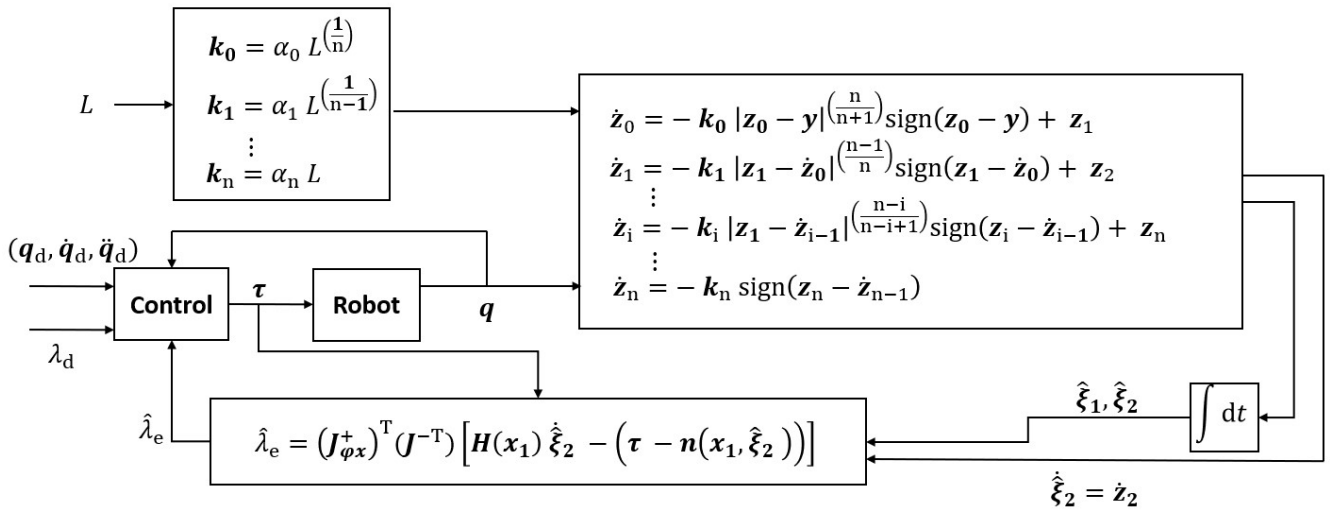


Figura 3.9: Diagrama esquemático del observador SMDO.

4

Análisis de resultados

En este capítulo, se abordan las implicaciones y desarrollos matemáticos necesarios para la aplicación de los anteriores esquemas de estimación (obtención de $\hat{\lambda}_e$), en el robot *A465 CSR Robotics* a un nivel de simulación. Se detalla la forma de implementación y la sintonización de los mismos. Se presenta el modelo cinemático y dinámico del robot, éstos han sido reportados en [1], por lo que, solo se describirán de manera breve, para más detalles consultar los anexos de [1]. Se define la restricción holonómica usada en simulación (obtenida de [2]); así como su Jacobiano y el Jacobiano analítico del robot, ambos necesarios para la estimación.

La estimación de la fuerza de contacto $\hat{\lambda}_e$, se hará de manera paralela al control de fuerza y posición, como se describirá más a detalle en la Sección 4.2, esto permite que al establecerse un lazo de control cerrado usando la fuerza *real simulada* (ver ecuación (3.9)), la estimación con los observadores descritos en el Capítulo 3 deriven en una comparación directa y por tanto, se puede determinar el mejor o peor desempeño según el valor de la *raíz del error cuadrático medio* (RMSE, por sus siglas en inglés).

4.1 Caso de estudio, Robot: A465 CSR Robotics

El robot *A465 CSR Robotics* cuenta con seis grados de libertad; sin embargo, por simplificación del problema de estimación se limitó el movimiento a tres de sus seis ejes. Los tres ejes de rotación seleccionados son coplanares, de esta forma, se asignó la numeración de las articulaciones como: q_1 , q_2 y q_3 , tal como se observa en la Figura 4.1. Por tanto, el movimiento del robot queda limitado a un plano de dos dimensiones Cartesianas, lo cual implica que la restricción holonómica pueda estar descrita por una recta o curva en este plano (ver Figura 4.1).

4.1.1 Cinemática directa

De acuerdo al algoritmo de Denavit - Hartenberg los parámetros del robot son los obtenidos en [1], descritos en la Tabla 4.1.

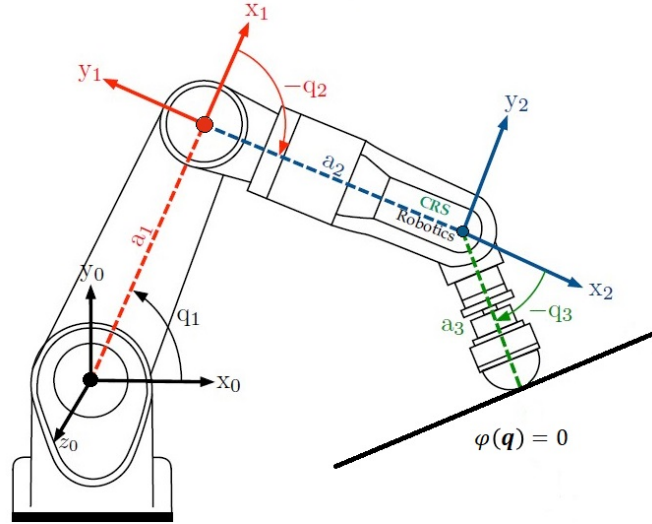


Figura 4.1: Configuración del Robot A465 CSR Robotics (Imagen obtenida de [1]).

$a_i [cm]$	$d_i [cm]$	$\theta_i [^\circ]$	$\alpha_i [^\circ]$
33	0	q_1	0
33	0	q_2	0
7	0	q_3	0

Tabla 4.1: Parámetros Denavit Hartenberg

Por tanto, la posición cartesiana (x, y) y la orientación del efector final ϕ , están descritas como:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ (q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.1.2 Cinemática inversa

Definida de manera geométrica, se buscan las relaciones entre los ejes referenciados (en este caso 3 ejes de coordenadas), mediante estos se encuentran las relaciones geométricas respecto a la posición de la muñeca con coordenadas (x_c, y_c) , para más detalles, consultar anexos de [1].

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - l_3 \cos(\phi) \\ y - l_3 \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\cos(q_2) = \frac{x_c^2 + y_c^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}, \quad \sin(q_2) = -\sqrt{1 - \cos^2(q_2)}, \quad (4.3)$$

quedando las respectivas posiciones angulares como:

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)), \\
 q_1 &= \text{atan2}(x_c, y_c) - \text{atan2}(l_2 \cdot \sin(q_2), l_1 + l_2 \cdot \cos(q_2)), \\
 q_3 &= \phi - q_2 - q_1.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.1.3 Modelo dinámico

Haciendo uso del modelo dinámico reportado en [1], se tiene que:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau + \tau_e, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_9 & 0 & 0 \\ 0 & p_{10} & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\
 &+ g_0 \begin{bmatrix} p_{12} \cos(q_1) + p_{13} \cos(q_1 + q_2) + p_{14} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ p_{13} \cos(q_1 + q_2) + p_{14} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ p_{14} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{1e} \\ \tau_{2e} \\ \tau_{3e} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde las matrices de Inercia y términos de Coriolis, tienen la siguiente definición:

$$H(q) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \tag{4.7}$$

$$h_{11} = p_1 + 2p_4 \cos(q_2) + 2p_5 \cos(q_2 + q_3) + 2p_6 \cos(q_3), \tag{4.8}$$

$$h_{12} = p_4 \cos(q_2) + p_5 \cos(q_2 + q_3) + 2p_6 \cos(q_3) + p_7, \tag{4.9}$$

$$h_{13} = p_5 \cos(q_2 + q_3) + p_6 \cos(q_3) + p_8, \tag{4.10}$$

$$h_{22} = p_2 + 2p_6 \cos(q_3), \tag{4.11}$$

$$h_{23} = p_8 + p_6 \cos(q_3), \tag{4.12}$$

$$h_{33} = p_3, \tag{4.13}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \tag{4.14}$$

$$c_{11} = -p_6 \sin(q_2)\dot{q}_2 - p_5 \sin(q_2 + q_3) + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \frac{1}{2}p_6 \sin(q_3)\dot{q}_3, \quad (4.15)$$

$$c_{12} = -p_4 \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - p_5 \sin(q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - p_6 \sin(q_3)\dot{q}_3, \quad (4.16)$$

$$c_{13} = -p_5 \sin(q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \frac{1}{2}p_6 \sin(q_3)(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3), \quad (4.17)$$

$$c_{21} = p_4 \sin(q_2)\dot{q}_1 + p_5 \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1 - p_6 \sin(q_3)\dot{q}_3, \quad (4.18)$$

$$c_{22} = -p_6 \sin(q_3)\dot{q}_3, \quad (4.19)$$

$$c_{23} = -p_6 \sin(q_3)(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3), \quad (4.20)$$

$$c_{31} = p_5 \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1 + \frac{1}{2}p_6 \sin(q_3)(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2), \quad (4.21)$$

$$c_{32} = p_6 \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad (4.22)$$

$$c_{33} = 0, \quad (4.23)$$

con las siguientes variables paramétricas:

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2) + I_1 + I_2 + I_3, & p_8 &= m_3 l_{c3}^2 + I_3, \\ p_2 &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 (l_1^2 + l_{c3}^2) + I_2 + I_3, & p_9 &= d_1, \\ p_3 &= m_3 l_{c3}^2 + I_3, & p_{10} &= d_2, \\ p_4 &= m_2 l_1 l_{c2} + m_3 l_1 l_2, & p_{11} &= d_3, \\ p_5 &= m_3 l_1 l_{c2}, & p_{12} &= m_1 l_{c1} + (m_2 + m_3) l_1, \\ p_6 &= m_3 l_2 l_{c3}, & p_{13} &= m_2 l_{c2} + m_3 l_2, \\ p_7 &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2) + I_2 + I_3, & p_{14} &= m_3 l_{c3}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde, las m 's son las masas de los eslabones, las l 's son las distancias entre articulaciones, así como las distancia entre centroides de los momentos de inercia, las I 's son los momentos de inercia propios de los eslabones, d 's son los coeficientes de fricción viscosa, g_0 es el valor de la gravedad nominal ($9.81[\frac{m}{s^2}]$), τ es el vector pares de entrada del robot y τ_e el vector de pares externos definidos como en (2.42).

Teniendo en cuenta el modelo anterior, supóngase que el robot A465, se encuentra en un ambiente rígido e indeformable, se mueve libremente excepto cuando está en contacto con la restricción. Asumiendo que la restricción es una superficie plana, se le pide al robot que de seguimiento a una línea recta sobre esta superficie y mediante el control de fuerza, aplique tres diferentes perfiles de fuerza, para lo cual, a continuación se define la restricción y los perfiles de fuerza.

4.1.4 Restricción holonómica

Haciendo uso del plano reportado en [2], se tiene que:

$$\sin(\alpha) \cdot x - \cos(\alpha) \cdot y + z - \sin(\alpha) \cdot \beta = 0, \quad (4.25)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el ángulo de inclinación del plano y $\beta \in \mathbb{R}$ es la distancia respecto al origen.

Dado que la configuración articular establecida del robot es coplanar, se reorganiza la ecuación del plano (4.25), redefiniendo así a la restricción, quedando solo en función de las coordenadas x y y :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \cos(\alpha) \cdot y - \sin(\alpha) \cdot (x - \beta). \quad (4.26)$$

Calculando las relaciones diferenciales de (4.26), se obtienen las restricciones de velocidad y aceleración:

$$\dot{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0, \quad (4.27)$$

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0, \quad (4.28)$$

donde $\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q})$ es el Jacobiano asociado a la restricción y $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es el Jacobiano analítico del robot.

4.1.5 Jacobiano analítico y gradiente restringido

El Jacobiano analítico del robot es obtenido al encontrar el gradiente respecto a las posiciones del efector final (Cinemática directa). Es una relación entre velocidades lineales y angulares; permite transformar la velocidad lineal a velocidad angular, es imprescindible en el momento en el que el robot interactue con su ambiente, ya que conecta el espacio cartesiano con el espacio rotacional interno del robot. Se define como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} j_{1,1} & j_{1,2} & j_{1,3} \\ j_{2,1} & j_{2,2} & j_{2,3} \\ j_{3,1} & j_{3,2} & j_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\dot{j}_{1,1} = -7 \cdot \frac{\sin(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)}{100} - 7 \cdot \frac{\sin(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{20} - 33 \cdot \frac{\sin(\mathbf{q}_1)}{100}, \quad (4.30)$$

$$\dot{j}_{1,2} = -7 \cdot \frac{\sin(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)}{100} - 7 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{20}, \quad (4.31)$$

$$\dot{j}_{1,3} = -7 \cdot \frac{\sin(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)}{100}, \quad (4.32)$$

$$\dot{j}_{2,1} = 7 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)}{100} + 7 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{20} + 33 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1)}{100}, \quad (4.33)$$

$$\dot{j}_{2,2} = 7 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)}{100} + 7 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{20}, \quad (4.34)$$

$$\dot{j}_{2,3} = 7 \cdot \frac{\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)}{100}, \quad (4.35)$$

$$\dot{j}_{3,1} = 1, \quad (4.36)$$

$$\dot{j}_{3,2} = 1, \quad (4.37)$$

$$\dot{j}_{3,3} = 1. \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

De manera análoga al Jacobiano analítico, el gradiente de la restricción holonómica permite determinar la interacción con la propia restricción, quedando como:

$$\mathbf{J}_{\varphi x} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) \cdot (\beta - x) - y \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

La proyección de la fuerza de reacción quedara entonces determinada por la interacción del robot con la restricción, para lograr esto se multiplican (4.29)(4.40), tal como se mostró en (2.53) y se relaciona con (4.27):

$$\mathbf{J}_{\varphi} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) \cdot (\beta - x) - y \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{j}_{1,1} & \dot{j}_{1,2} & \dot{j}_{1,3} \\ \dot{j}_{2,1} & \dot{j}_{2,2} & \dot{j}_{2,3} \\ \dot{j}_{3,1} & \dot{j}_{3,2} & \dot{j}_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Dado que en el modelo dinámico del robot la proyección aparece transpuesta: $\mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}_{\varphi x}^T(\mathbf{q})$ y la obtención de una pseudoinversa $\mathbf{m}^+(\mathbf{q})$ es necesaria para el diseño de los observadores; a continuación se presenta el desarrollo:

Pseudoinversa de $\mathbf{J}_{\varphi x}^T(\mathbf{q})$:

$$(\mathbf{J}_{\varphi x}^+)^T = \left[\mathbf{J}_{\varphi x}^T \cdot \{ \mathbf{J}_{\varphi x} \cdot \mathbf{J}_{\varphi x}^T \}^{-1} \right]^T \quad (4.42)$$

Inversa de $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$

$$\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) = \left\{ \left[\frac{1}{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))} \right] \cdot \text{Cof}(\mathbf{J}(\mathbf{q}))^T \right\}^T, \quad (4.43)$$

donde $\text{Cof}(\cdot)$ es la matriz de cofactores. Finalmente, se puede calcular a $\mathbf{m}^+(\mathbf{q})$, como:

$$\mathbf{m}^+(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}_{\varphi x}^+(\mathbf{q}))^T \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}). \quad (4.44)$$

4.1.6 Perfiles de fuerza

Los perfiles de fuerza deseada, son las referencias que el control debe seguir en su tarea de aplicación de fuerza. Se tomó como primer perfil el usado en [2] (para fines comparativos), el segundo y tercer perfil han sido propuestos con el objetivo de probar a los estimadores con base en dos características, la discontinuidad (Perfil 2) y una mezcla de funciones trascendentales (Perfil 3). Gráficamente observables en la Figura 4.2.

$$\text{Perfil 1: } \lambda_d = \begin{cases} 10 + 60 \cdot (1 - \exp(-\frac{t}{2})) + 10 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot t) & t \leq 8, \\ 70 & t > 8, \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\text{Perfil 2: } \lambda_d = \begin{cases} a_1 \cdot (1 - \exp(-6 \cdot t)) & 0 \leq t \leq 2, & a_1 = 50, \\ a_2 + m_1 \cdot (t - 2) & 2 < t \leq 4, & a_2 = a_3 = a_4 = a_1 \cdot (1 - \exp(-6 \cdot 2)), \\ a_3 + m_2 \cdot (t - 4) & 4 < t \leq 6, & a_6 = 50, \\ a_4 + m_3 \cdot (t - 6) & 6 < t \leq 8, & m_1 = m_2 = m_3 = 10, \\ a_5 & 8 < t \leq 10, & A_1 = 10, \\ a_6 + A_1 \sin(\omega \cdot \pi \cdot t) & t > 10 & \omega = 2, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\text{Perfil 3: } \lambda_d = \begin{cases} a_1 \cdot (1 - \exp(-6 \cdot t)) & 0 \leq t \leq 2, & A_1 = A_2 = 10, \\ a_2 + A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot (t - 2)) & 2 < t \leq 5, & A_3 = 5, \\ a_3 + A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot (t - 5)) & 5 < t \leq 7, & \omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{2}, \\ a_4 & 7 < t \leq 8, & \omega_3 = \pi, \\ a_5 + \Delta \cdot \exp(-5 \cdot (t - 8)) + A_3 \cdot \sin(\omega_3 \cdot (t - 8)) & 8 < t \leq 10, & a_1 = a_2 = 40, \\ a_6 & t > 10, & a_3 = a_2 + A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot (5 - 2)), \\ & & a_4 = a_3 + A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot (7 - 5)), \\ & & a_5 = a_4 + \Delta, \\ & & \Delta = 70 - a_4, \\ & & a_6 = 70. \end{cases} \quad (4.47)$$

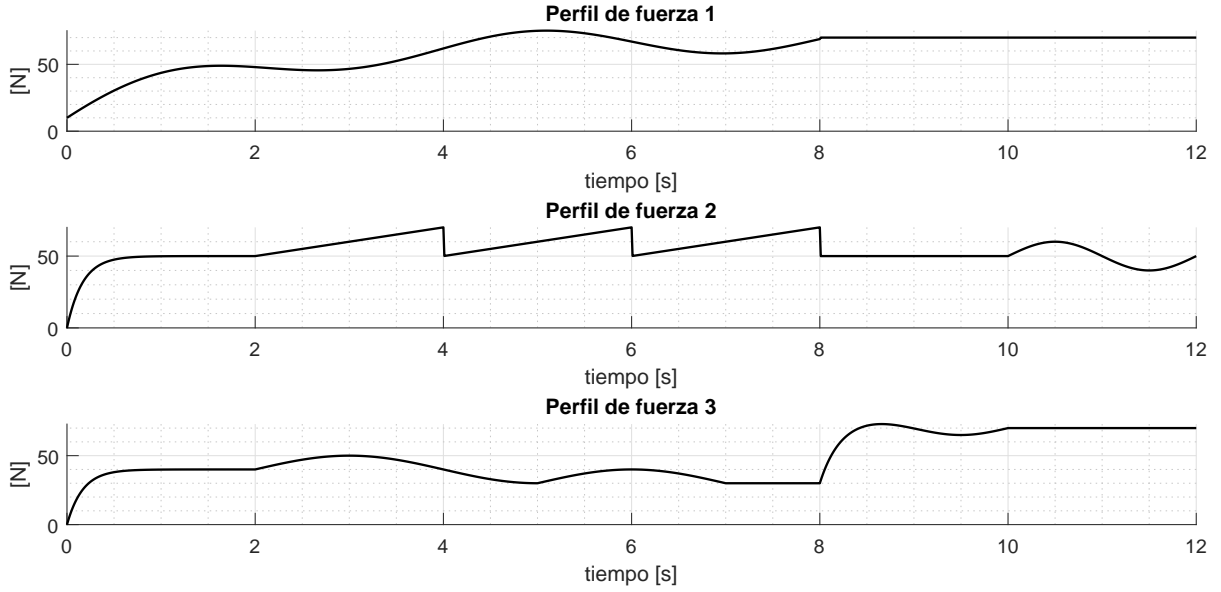


Figura 4.2: Perfiles de fuerza.

4.1.7 Control de posición y fuerza

Se asume que es posible tener la medición de la posición, velocidad angular, así como la fuerza de reacción experimentada por el robot en el entorno, para lograr anterior y contando con el modelo (4.6) (Obtenido de [1]), el comportamiento de interacción quedara establecido como en (3.9), por tanto se define a la ecuación de interacción como:

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) + k_{\alpha}\dot{\varphi}(\mathbf{q}) + k_{\beta}\varphi(\mathbf{q}) = 0, \quad \ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = -k_{\alpha}\dot{\varphi}(\mathbf{q}) - k_{\beta}\varphi(\mathbf{q}), \quad (4.48)$$

donde $k_{\alpha} = 2 \cdot \varsigma \cdot \omega_f$, $k_{\beta} = \omega_f^2$, $\varsigma = 1.0$ y $\omega_f = 10$.

Usando (4.48), se calcula la fuerza de contacto como:

$$\lambda_{\text{real}} = (\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi}^{\text{T}}(\mathbf{q}))^{-1} \left\{ -\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - k_{\alpha}\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - k_{\beta}\varphi(\mathbf{q}) \right\}. \quad (4.49)$$

Para el caso del control de posición, se define una ley de control PID genérica como en [2], simplemente se limita su movimiento mediante el principio de ortogonalización, representado por la matriz \mathbf{Q} y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{pos}} = -\mathbf{Q} \left[\mathbf{K}_p \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_i \cdot \int_0^t \tilde{\mathbf{q}} dt + \mathbf{K}_d \cdot \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right]. \quad (4.50)$$

El control de fuerza se define como un control tipo PI, en donde el error se define como $\Delta\tilde{\lambda} = \lambda_{\text{real}} - \lambda_d$:

$$\tau_f = -\mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \cdot \lambda_d + \mathbf{K}_f \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \int_0^t \Delta\tilde{\lambda} dt. \quad (4.51)$$

Quedando la ley de control $\tau = \tau_{\text{pos}} + \tau_f$:

$$\tau = -Q \left[\mathbf{K}_p \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_i \cdot \int_0^t \tilde{\mathbf{q}} dt + \mathbf{K}_d \cdot \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] - \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \cdot \lambda_d + \mathbf{K}_f \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \int_0^t \Delta\tilde{\lambda} dt. \quad (4.52)$$

4.2 Escenarios de simulación

En el presente trabajo, se abordan 4 escenarios con aumento gradual de ruido (agregado a la salida medida del robot); ésto con el fin de probar, analizar y determinar el desempeño con base en la raíz del error medio cuadrático a través de la aplicación de 3 perfiles diferentes de fuerza. Adicional a esto, los escenarios propuestos tienen el objetivo de mostrar la degradación en la estimación y con base en esto, poder distinguir el observador con mayor robustez ante la adición de ruido en la medición.

Común para todos los escenarios es el tiempo de ejecución, que tiene una duración de 12 segundos. Se mantendrán con un tiempo de muestreo de 5[ms]. Se tendrá una adición de ruido escalada, en la medición de la posición y conforme a esto, se derivó temporalmente para obtener la velocidad; ésto permitió simular el caso cuando la velocidad contiene ruido implícito. Las varianzas utilizadas para los escenarios se estructuran de la siguiente forma:

- Escenario 1: sin ruido,
- Escenario 2: ruido blanco con varianza $\sigma_1^2 = 1 \times 10^{-7}[\text{rad}^2]$,
- Escenario 3: ruido blanco con varianza $\sigma_2^2 = 1 \times 10^{-5}[\text{rad}^2]$,
- Escenario 4: ruido blanco con varianza $\sigma_3^2 = 1 \times 10^{-3}[\text{rad}^2]$,

con desviaciones estándar:

- Escenario 1: sin ruido,
- Escenario 2: ruido blanco con desviación estándar $\sigma_1 = 3.1623 \times 10^{-4}[\text{rad}] = 0.0181[^\circ]$,
- Escenario 3: ruido blanco con desviación estándar $\sigma_2 = 0.0032[\text{rad}] = 0.1812[^\circ]$,
- Escenario 4: ruido blanco con desviación estándar $\sigma_3 = 0.0316[\text{rad}] = 1.8119[^\circ]$,

y el ruido blanco r es centrado en cero y su función de distribución se define como:

$$r \sim \mathcal{N}(0, \sigma), \quad f_{\text{densidad}} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_a - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (4.53)$$

donde $\mu = 0$ es media de la distribución, x_a es la variable aleatoria y $\sigma \in \mathbb{R}$ es la desviación estándar.

En la Figura 4.3 se ejemplifica la forma de operación sin adición de ruido y en la Figura 4.4, se muestra la forma en la que el ruido es añadido. Los esquemas descritos por las Figuras 4.3 y 4.4, permiten una comparación entre la fuerza real simulada (4.49) y la obtenida por cada uno de los observadores de manera homogénea, ésto permite prescindir de un lazo cerrado basado en la estimación de los observadores; de no ser así, implicaría un análisis de estabilidad en lazo cerrado por cada observador, lo que escapa de los objetivos del presente trabajo.

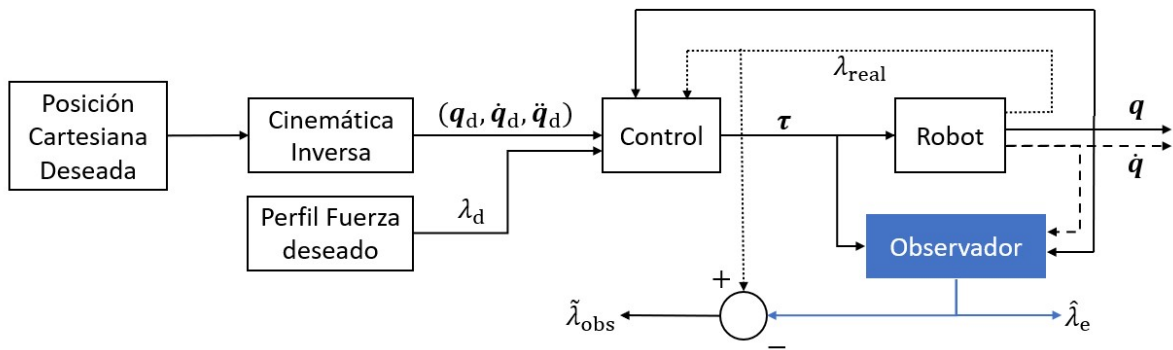


Figura 4.3: Diagrama de bloques sobre el funcionamiento de la simulación sin ruido.

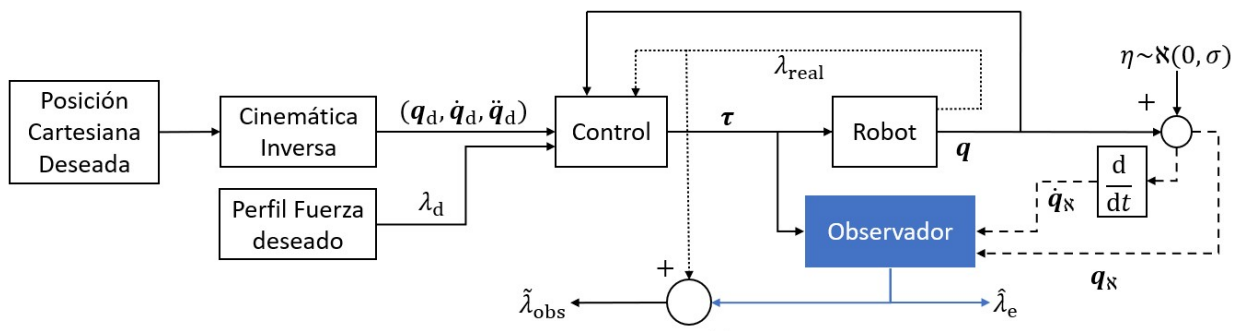


Figura 4.4: Diagrama de bloques sobre el funcionamiento de la simulación con ruido.

$m_1 = 28.5[Kg]$	$l_1 = 0.33[m]$	$l_{c1} = 0.14[m]$	$I_1 = 0.85[Kg \cdot m^2]$	$d_1 = 2.6[N \cdot m]$
$m_2 = 16.6[Kg]$	$l_2 = 0.35[m]$	$l_{c2} = 0.14[m]$	$I_2 = 0.70[Kg \cdot m^2]$	$d_2 = 2.5[N \cdot m]$
$m_3 = 16.6[Kg]$	$l_3 = 0.13[m]$	$l_{c3} = 0.07[m]$	$I_3 = 0.18[Kg \cdot m^2]$	$d_3 = 1.5[N \cdot m]$

Tabla 4.2: Parámetros modelo dinámico (Obtenidos de [1]).

4.3 Datos simulación

4.3.1 Parámetros Robot: A465

4.3.2 Restricción holonómica

La restricción se define como un plano, en el cual la tarea del control de fuerza es mantener un perfil de fuerza mientras el control posición realiza el seguimiento de una recta. Para la restricción holonómica se utilizaron los mismo datos que en [2], con: $\alpha = 80[^\circ]$, $\beta = 0.3$.

Definiendo un perfil quíntico para las coordenadas deseadas:

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5 \quad (4.54)$$

$$x(t) = \cot(\alpha) \cdot y(t) + \beta \quad (4.55)$$

donde $t_0 = 0[s]$, $t_f = 8[s]$, $y_0 = 0.4[m]$, $y_f = 0[m]$, $\dot{y}(0) = 0[m/s]$, $\dot{y}(f) = 0[m/s]$, $\ddot{y}(0) = 0[m/s^2]$, $\ddot{y}(f) = 0[m/s^2]$.

4.3.3 Cinemática inversa

Para que el efector final, siempre sea perpendicular al plano (4.25), basta con resolver la cinemática inversa con $\alpha = -10[^\circ]$ y las coordenadas definidas en (4.54) y (4.55).

4.3.4 Parámetros control de posición y fuerza

Se considera que el robot inicia la aplicación del control híbrido estando en contacto con la superficie.

Ganancias del control de fuerza y posición:

$$\mathbf{K}_p = 160.0 \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_i = 1.0 \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_d = 10.0 \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_f = 10.0 \cdot \mathbf{I} \quad (4.56)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s^2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

4.3.5 Parámetros observadores

En las subsecuentes condiciones iniciales para cada observador, se asume que el robot está en contacto con la superficie resultando en una fuerza de contacto y con la cual el control de fuerza está operando.

4.3.5.1. NDO

$$c = 85, \quad \mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}}) = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial (\dot{\mathbf{q}})} \cdot \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (4.58)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s \end{bmatrix}; \quad \psi_0 = 0 \quad (4.59)$$

4.3.5.2. NDOHO

$$\mathbf{K} = [1 \quad k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5] = [1 \quad 18 \quad 135 \quad 540 \quad 1215 \quad 1458 \quad 729] \quad (4.60)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \mathbf{x}_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_{1,0}) \mathbf{H}(\mathbf{x}_{1,0}) \mathbf{x}_{2,0} \quad (4.61)$$

4.3.5.3. GPIO

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= 490 \cdot \mathbf{I}, & \mathbf{K}_2 &= 102900 \cdot \mathbf{I}, & \mathbf{K}_3 &= 12 \times 10^6 \cdot \mathbf{I}, & \mathbf{K}_4 &= 840.35 \times 10^6 \cdot \mathbf{I}, \\ \mathbf{K}_5 &= 3.5294 \times 10^{10} \cdot \mathbf{I}, & \mathbf{K}_6 &= 8.2354 \times 10^{11} \cdot \mathbf{I}, & \mathbf{K}_7 &= 8.2354 \times 10^{12} \cdot \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \mathbf{x}_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

4.3.5.4. IBO

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= 600 \cdot \mathbf{I}, & \mathbf{K}_2 &= 90000 \cdot \mathbf{I} \\ \Lambda_2 &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_1), \\ \Lambda_1 &= \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{D} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_1, \\ \Lambda_0 &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \mathbf{K}_2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \mathbf{x}_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

4.3.5.5. VGSTO

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 5.0, & \mu_2 &= 50.0, \\
\beta &= 0.5, & \varepsilon &= 0.2, \\
c &= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, & b &= 1.0, \\
k_2 &= 0.9, & \Delta &= 0.001, \\
k_1 &= \frac{\Delta^2}{4\varepsilon} + \frac{\Delta}{2\varepsilon} \left| \frac{k_2}{b} - \beta + \varepsilon^2 \right| + \frac{b}{4\varepsilon} \left\{ \frac{k_2}{b} - \beta + \varepsilon^2 \right\}^2 + 0.01, & l_1 &= \frac{1}{\beta} \cdot k_1 + \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot k_2, \\
l_2 &= \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot k_2 + \frac{\beta + \varepsilon^2}{\beta} k_2
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \mathbf{x}_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s} \right]; \quad z_0 = \mathbf{m}^+(\mathbf{x}_{1,0}) \mathbf{H}(\mathbf{x}_{1,0}) \mathbf{x}_{2,0} \tag{4.67}$$

4.3.5.6. SMDO

$$\begin{aligned}
L &= 1.0, \\
k_1 &= 8.0(L^{\frac{1}{6}}) \cdot \mathbf{I}, & k_2 &= 5.0(L^{\frac{1}{5}}) \cdot \mathbf{I}, & k_3 &= 3.0(L^{\frac{1}{4}}) \cdot \mathbf{I}, \\
k_4 &= 2.0(L^{\frac{1}{3}}) \cdot \mathbf{I}, & k_5 &= 1.5(L^{\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{I}, & k_6 &= 1.1(L) \cdot \mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1.8510 \\ -1.5450 \\ -0.4806 \end{bmatrix} [rad]; \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

4.4 Gráficas simulación

En la Figura 4.5, se muestran las graficas correspondientes al seguimiento y error de seguimiento del control de posición en coordenadas Cartesianas. La configuración planteada en las Figuras 4.3 y 4.4, permite que el control de posición y fuerza sean inmunes al ruido aplicado en la medición, ésto con el objetivo de medir objetivamente la estimación de la fuerza de contacto, considerando que el control funciona idealmente.

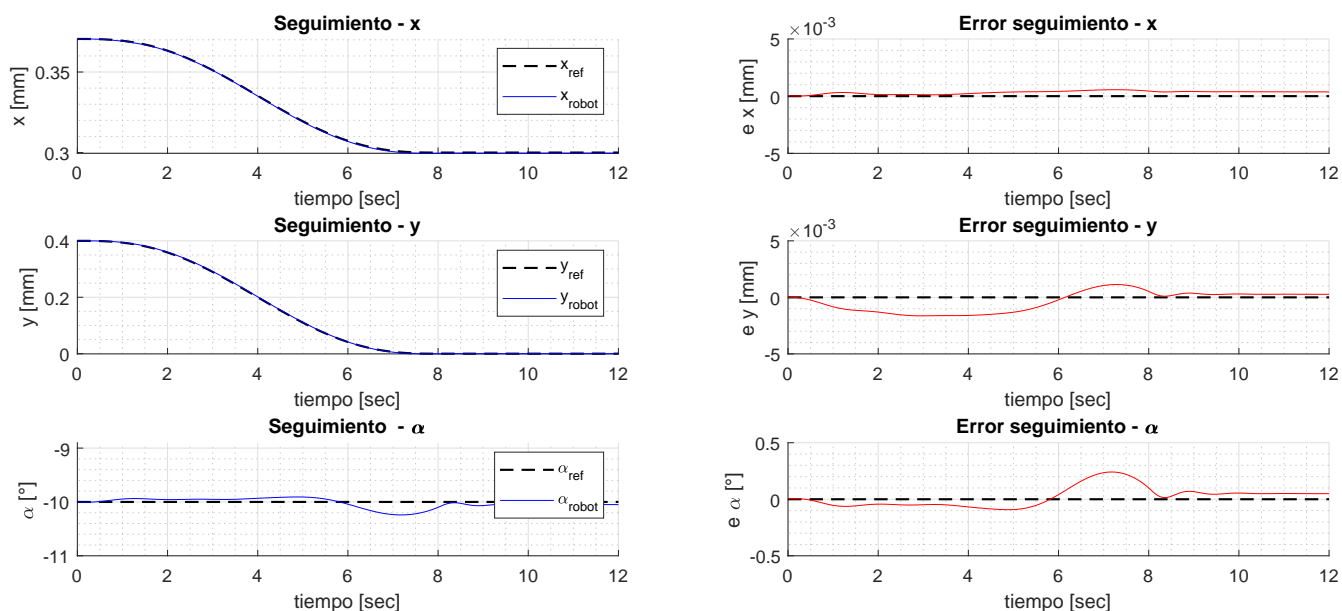
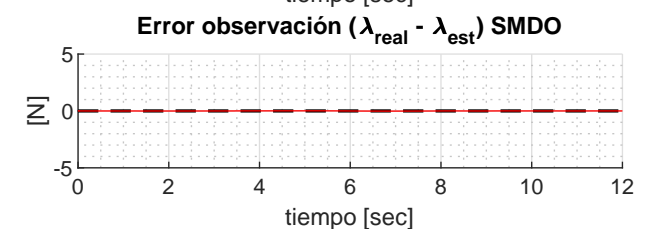
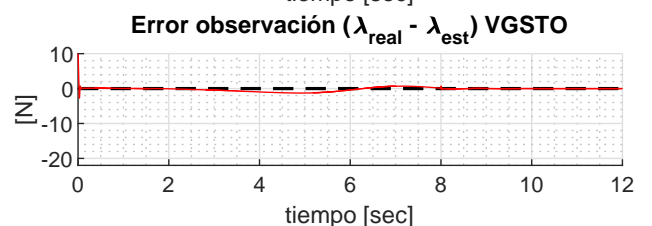
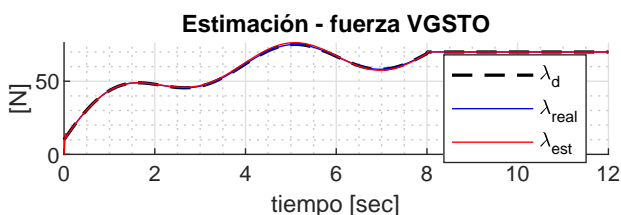
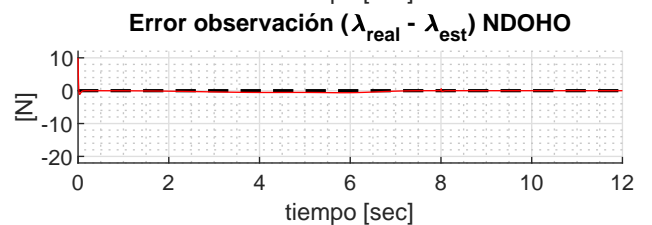
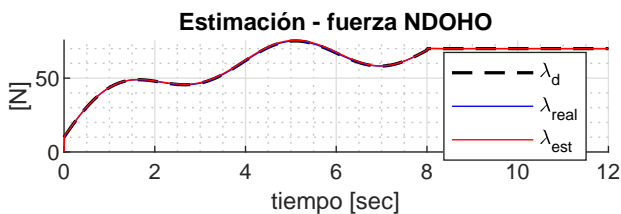
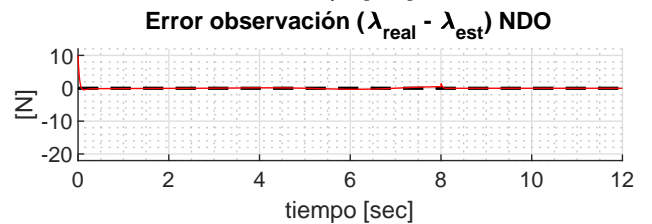
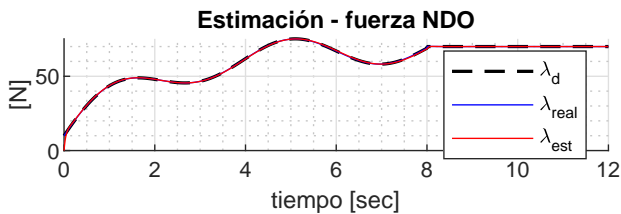
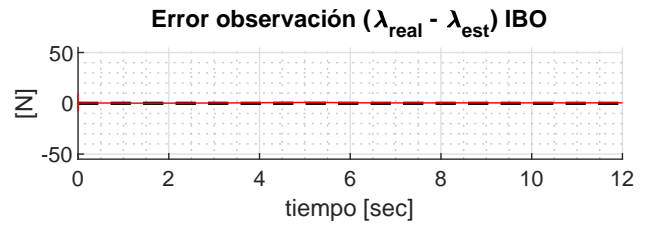
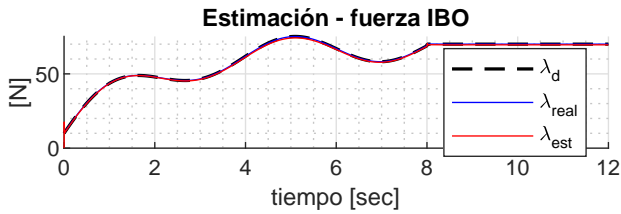
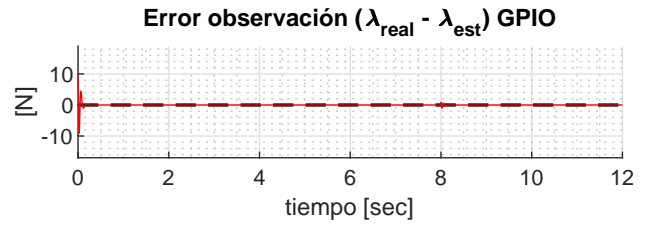
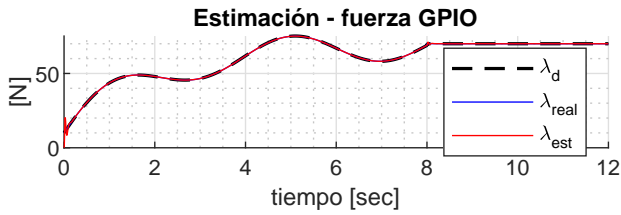
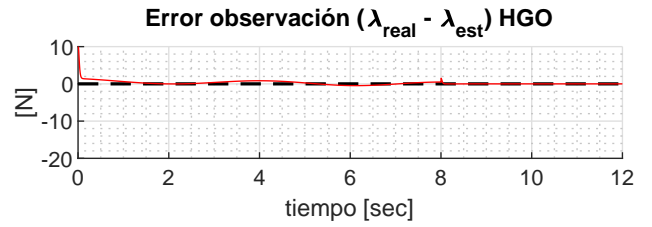
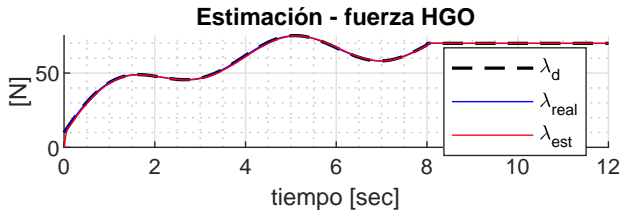


Figura 4.5: Seguimiento y error de seguimiento de las coordenadas Cartesianas.

A pesar de haber aplicado un control de posición ideal; es decir, considerando que las mediciones de la posición y velocidad angulares son retroalimentadas del propio modelo, el control definido en (4.50) solo permite una compensación, ya que no toma en consideración las no linealidades intrínsecas del sistema para una linealización exacta. No obstante, éste es suficiente para demostrar que la estimación de fuerza funciona sin tener una ley de control compleja, justo como en [2].

En las subsecuentes doce figuras se mostrarán las gráficas asociadas al control de fuerza, éstas hacen una comparación entre la fuerza deseada λ_d , la fuerza real simulada λ_{real} y la fuerza estimada $\hat{\lambda}_e$; a su vez, se muestra el error de observación ($\lambda_{\text{real}} - \hat{\lambda}_e$). Las figuras están acomodadas en orden ascendente según el escenario y el perfil de fuerza deseado; es decir, se comienza con el perfil de fuerza 1 y el escenario 1, para terminar en el perfil de fuerza 3 y el escenario 4.

De las Figuras 4.12, 4.13 y 4.14, se observa un deterioro grave para los observadores, exceptuando el VGSTO, el cual demostró robustez ante el ruido. En las últimas Figuras 4.15, 4.16 y 4.17, la estimación ya es totalmente desproporcionada, a excepción del VGSTO; que a pesar del ruido, se mantiene con una estimación que aunque ruidosa es relativamente aceptable.



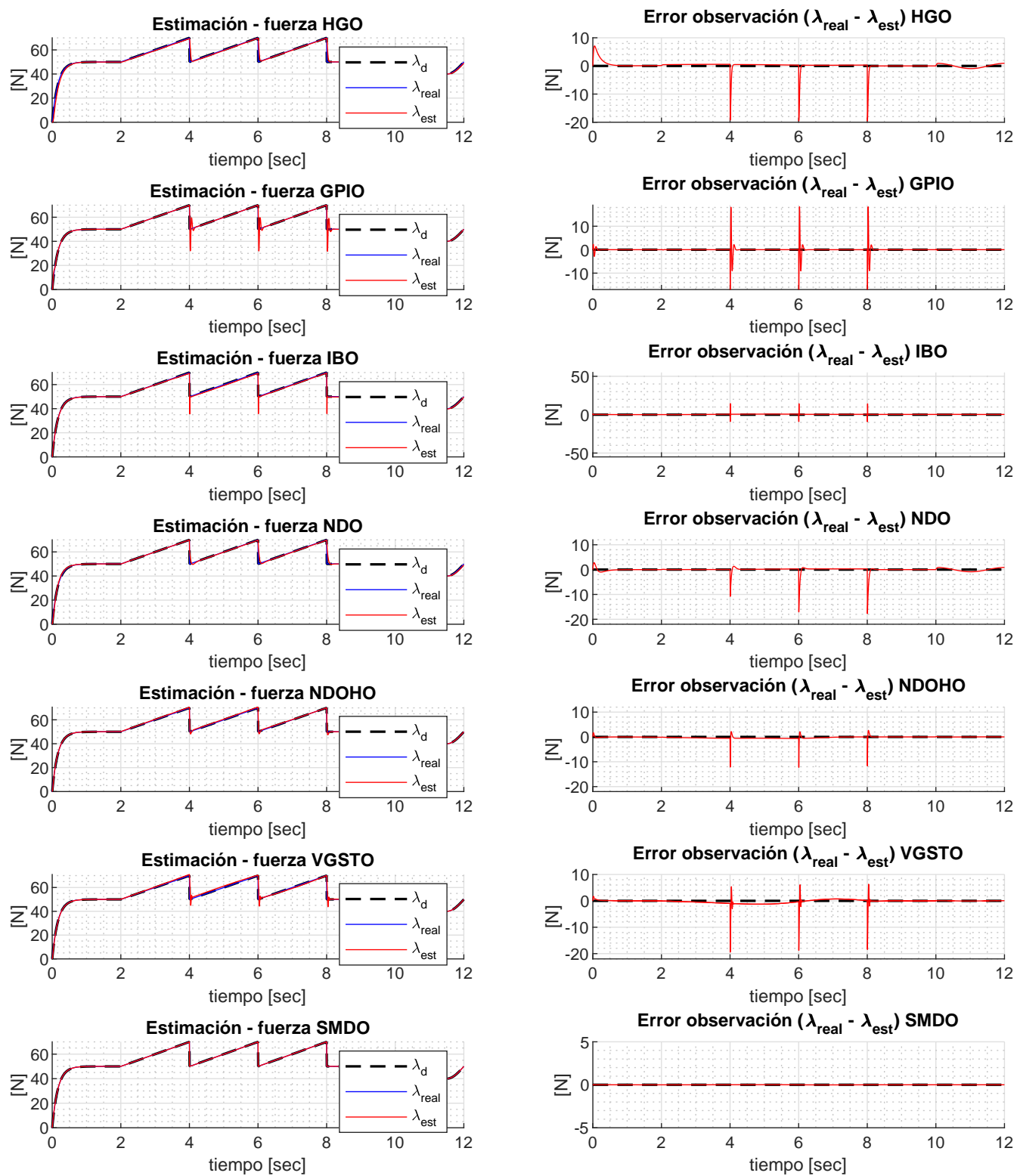


Figura 4.7: Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 1 (sin ruido).

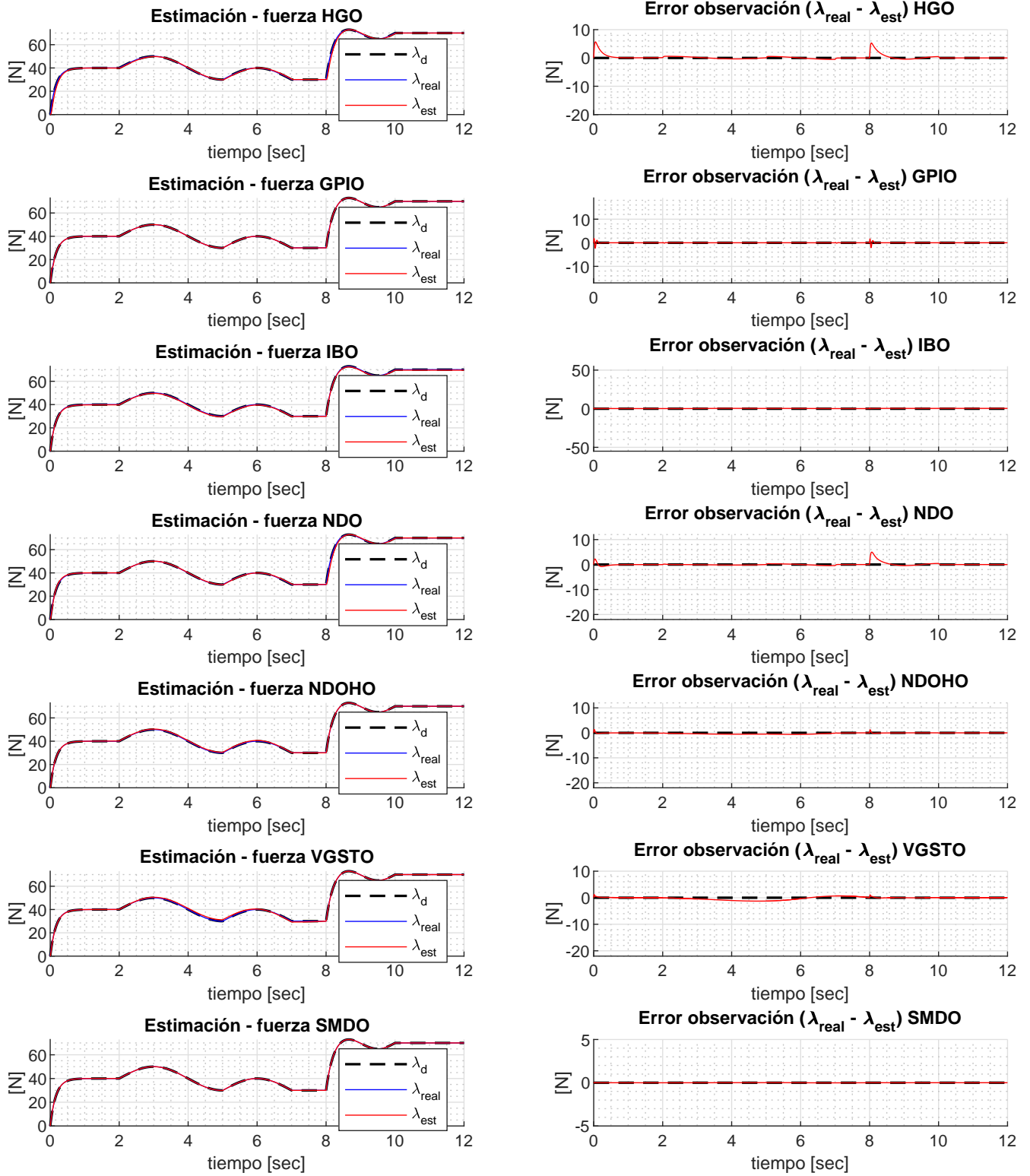


Figura 4.8: Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 1 (sin ruido).

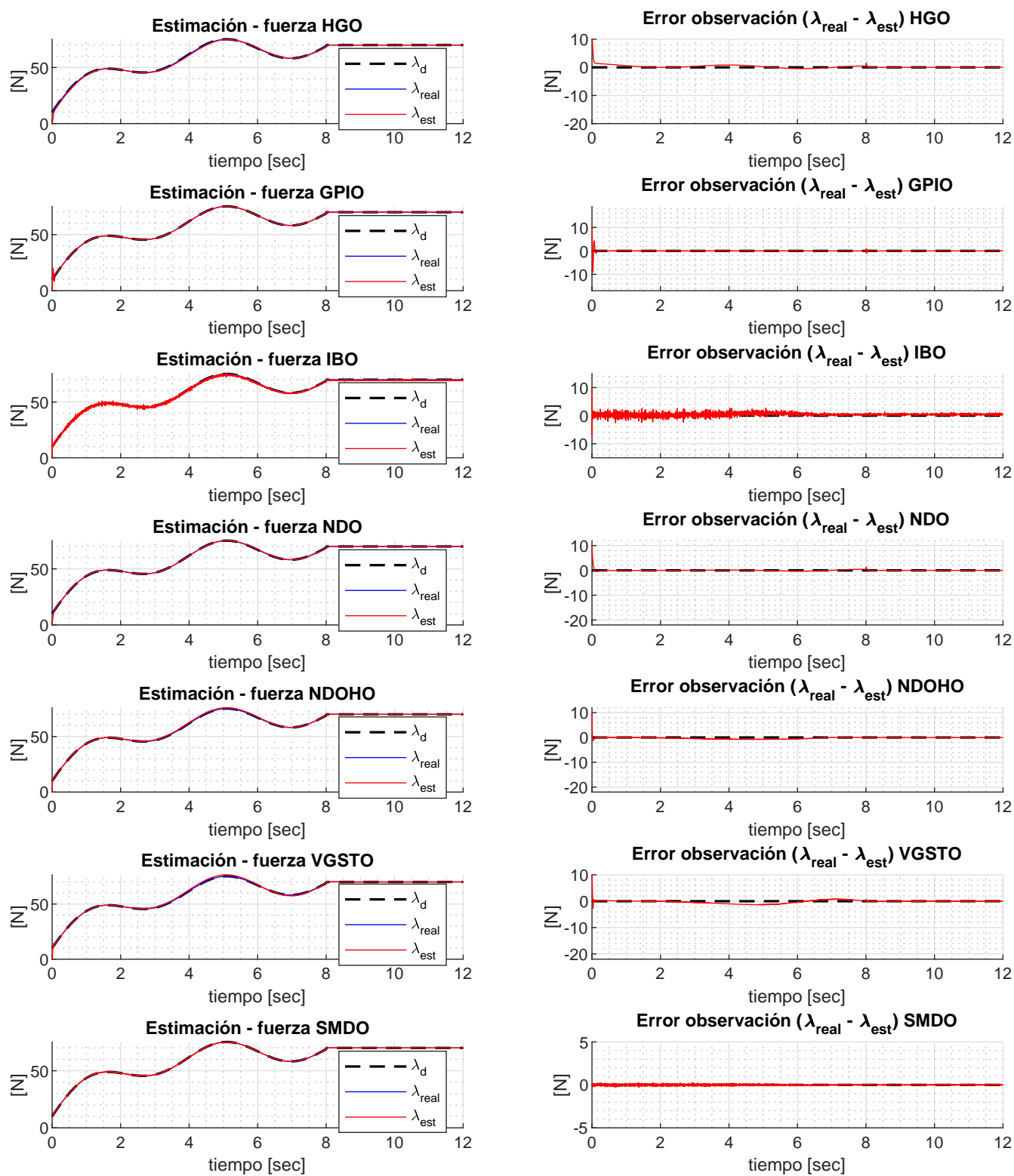


Figura 4.9: Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 2.

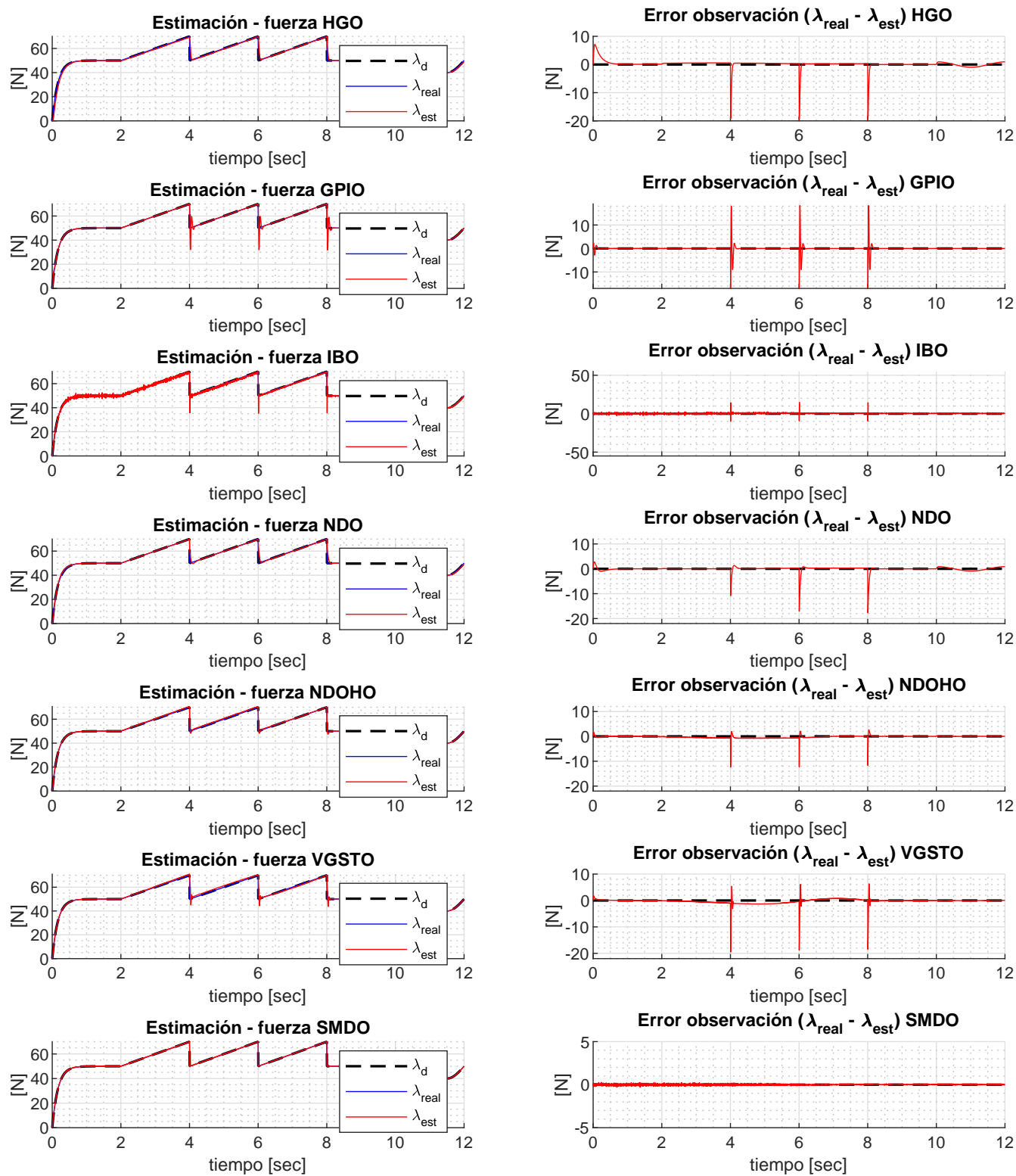


Figura 4.10: Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 2.

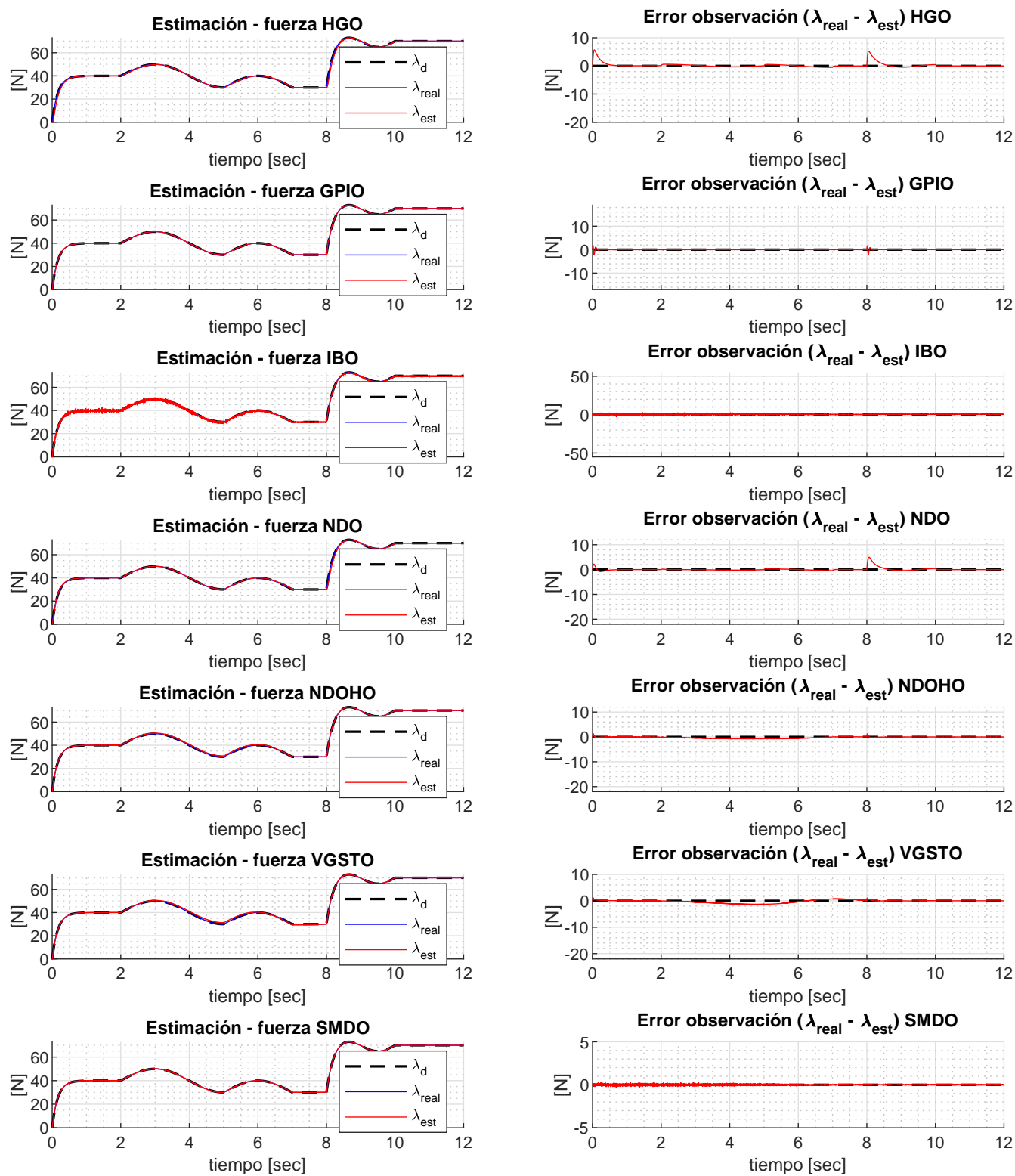


Figura 4.11: Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 2.

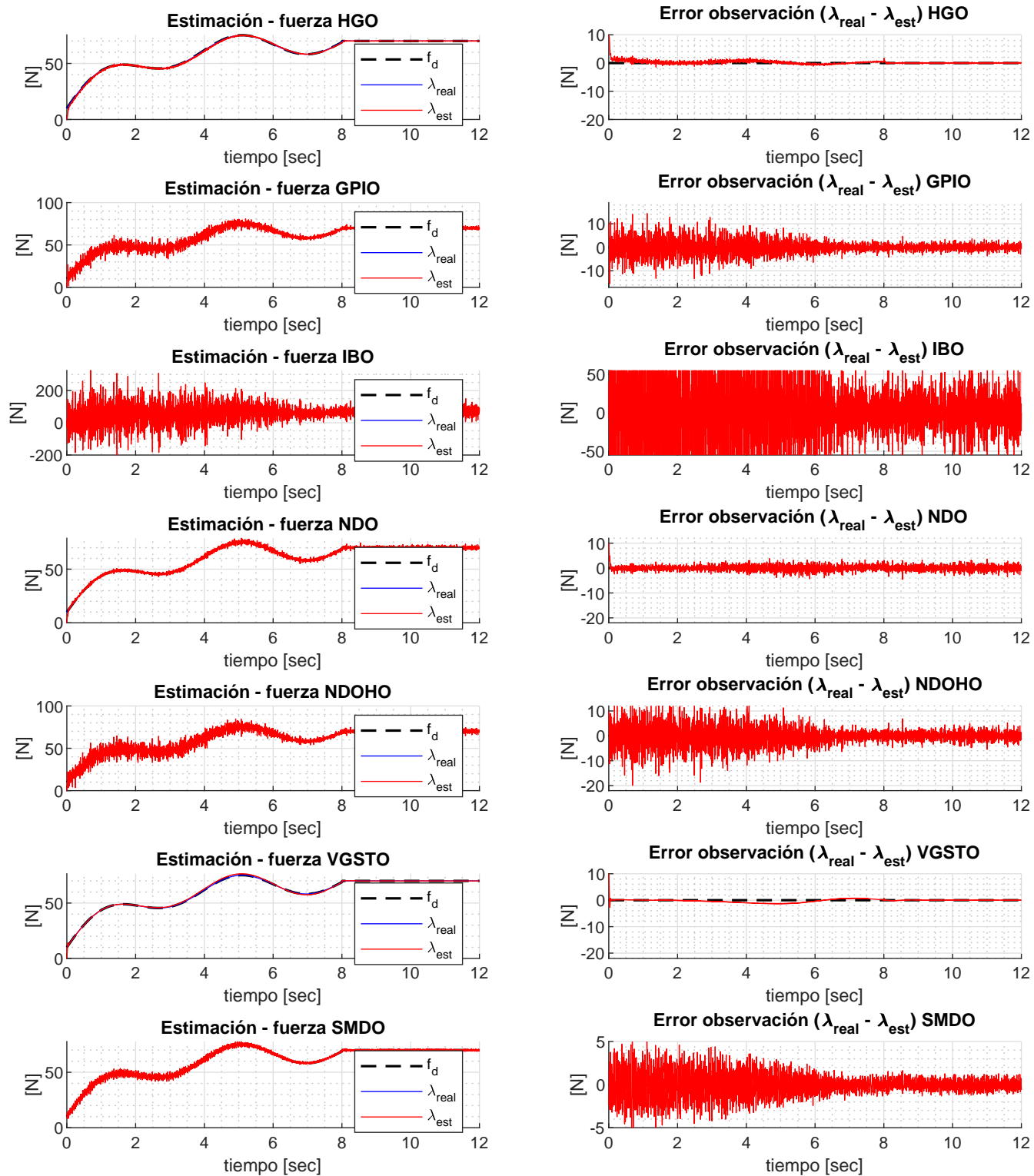


Figura 4.12: Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 3.

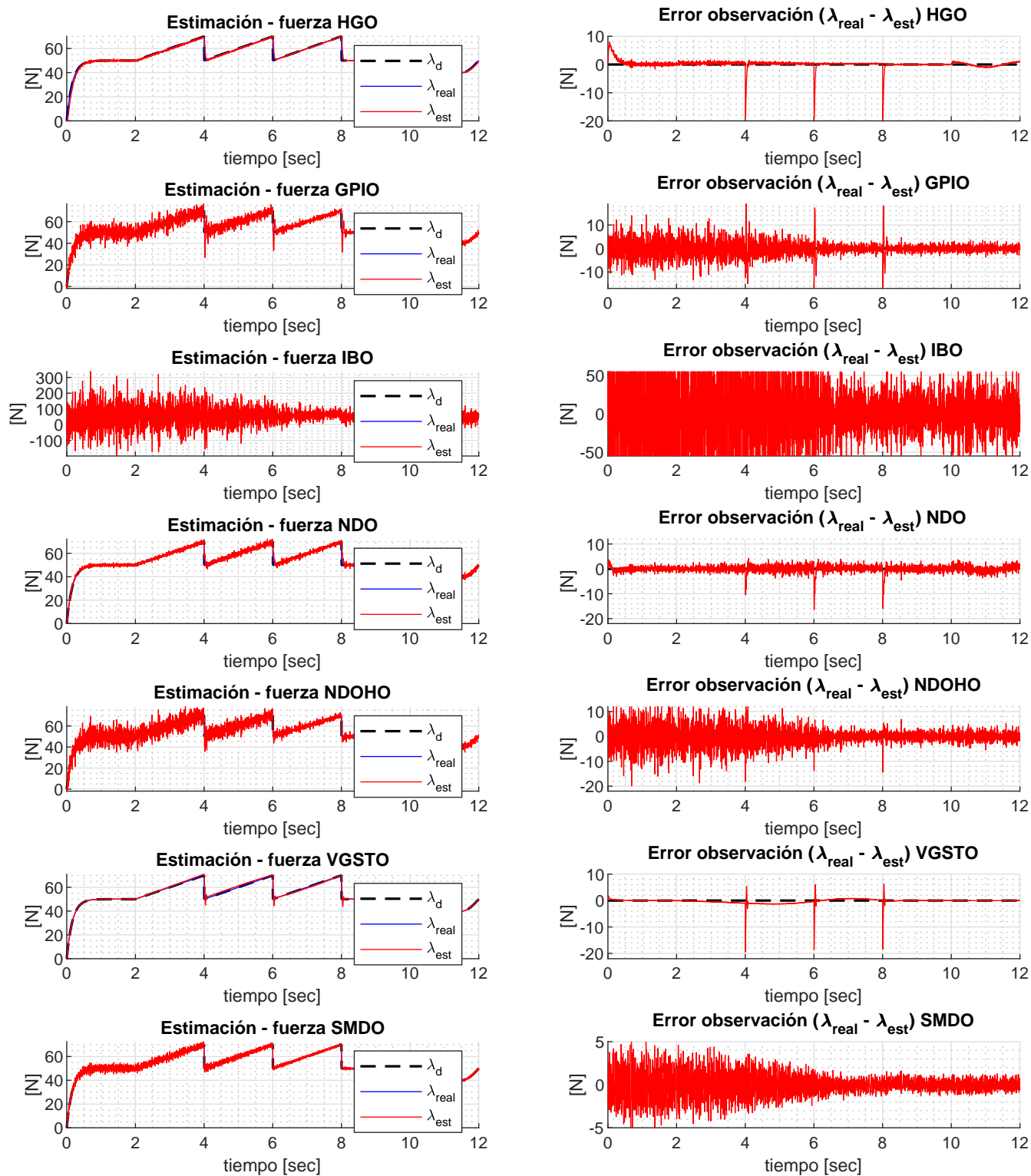


Figura 4.13: Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 3.

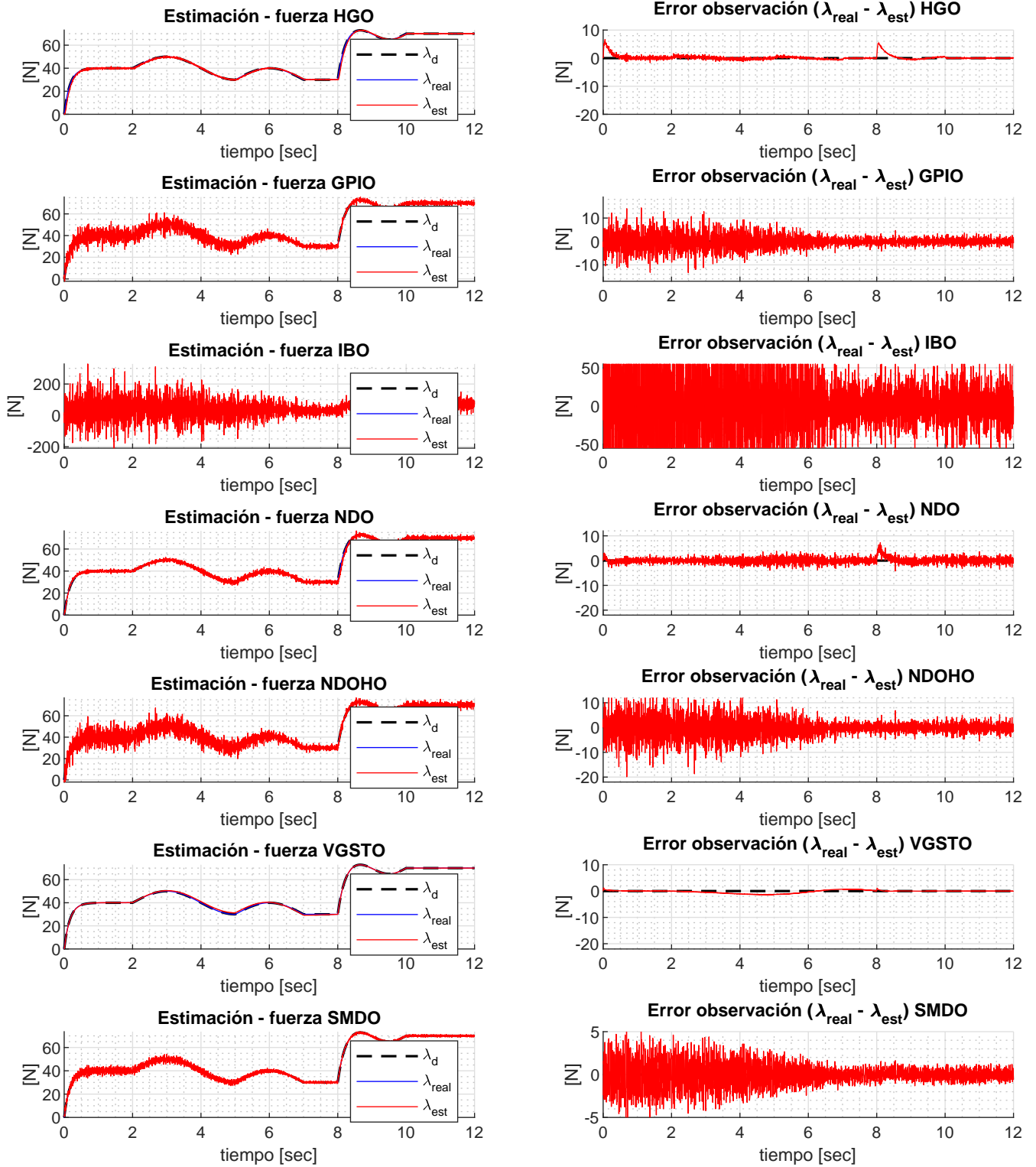


Figura 4.14: Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 3.

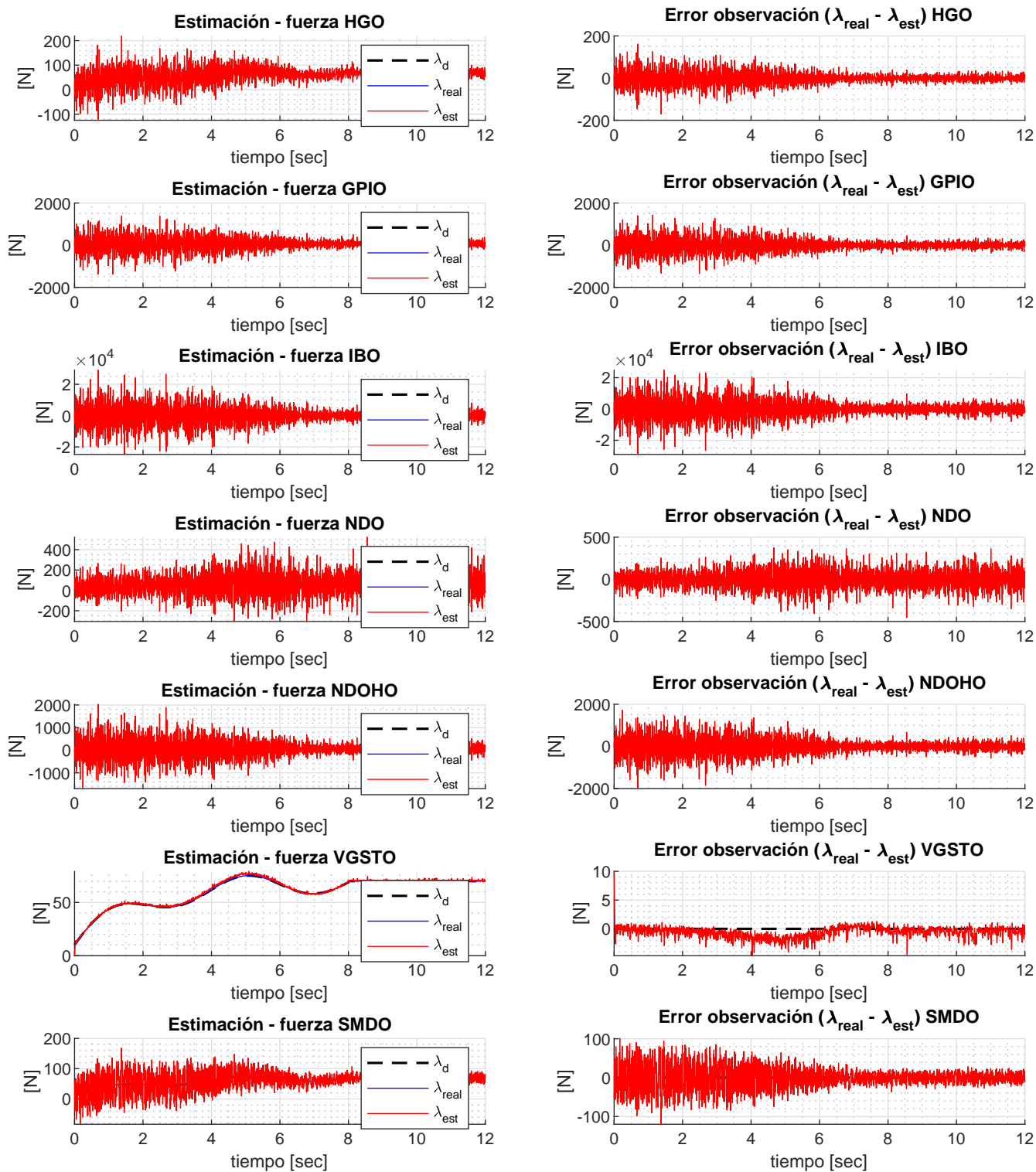


Figura 4.15: Estimación de fuerza Perfil 1, Escenario 4.

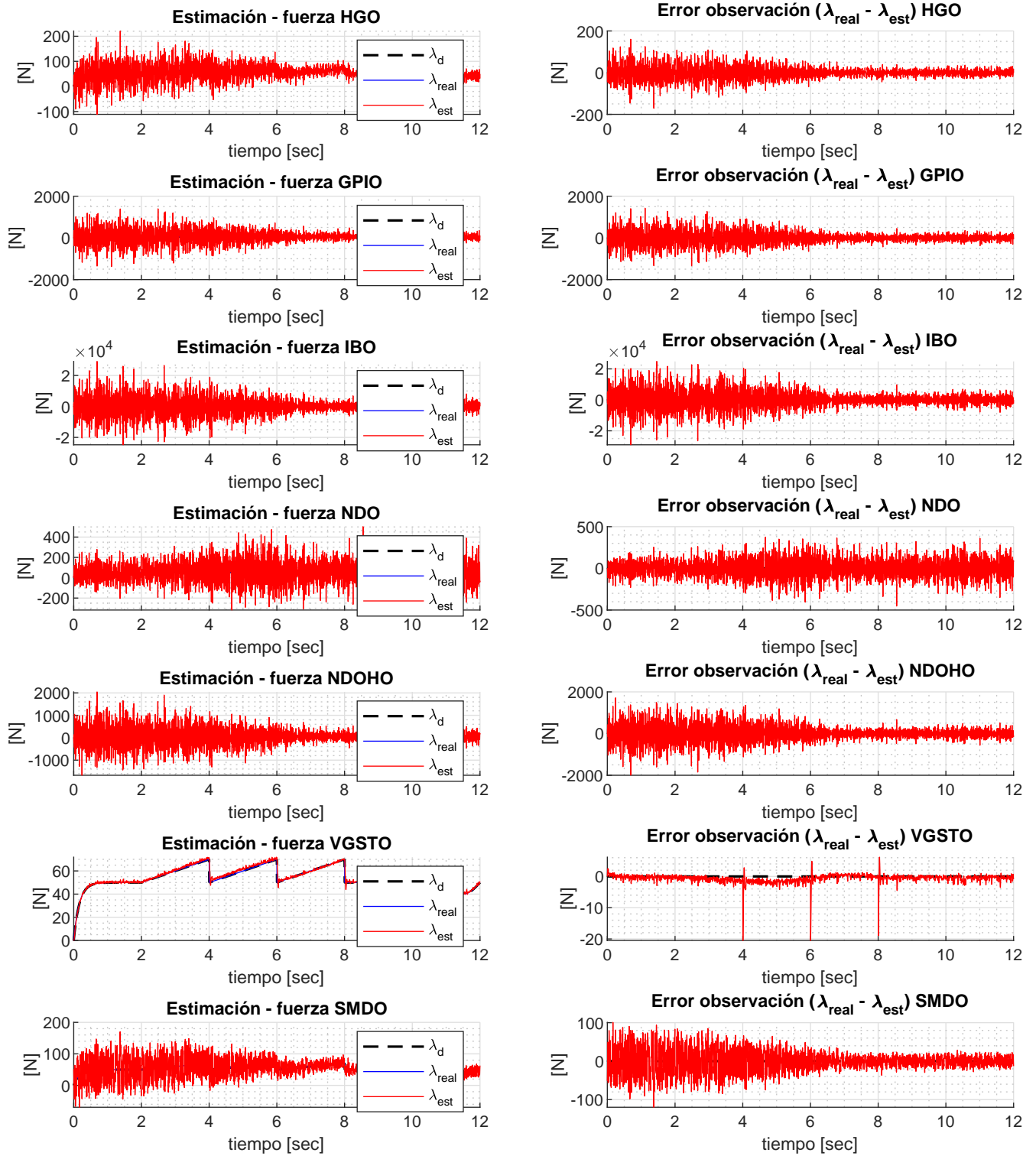


Figura 4.16: Estimación de fuerza Perfil 2, Escenario 4.

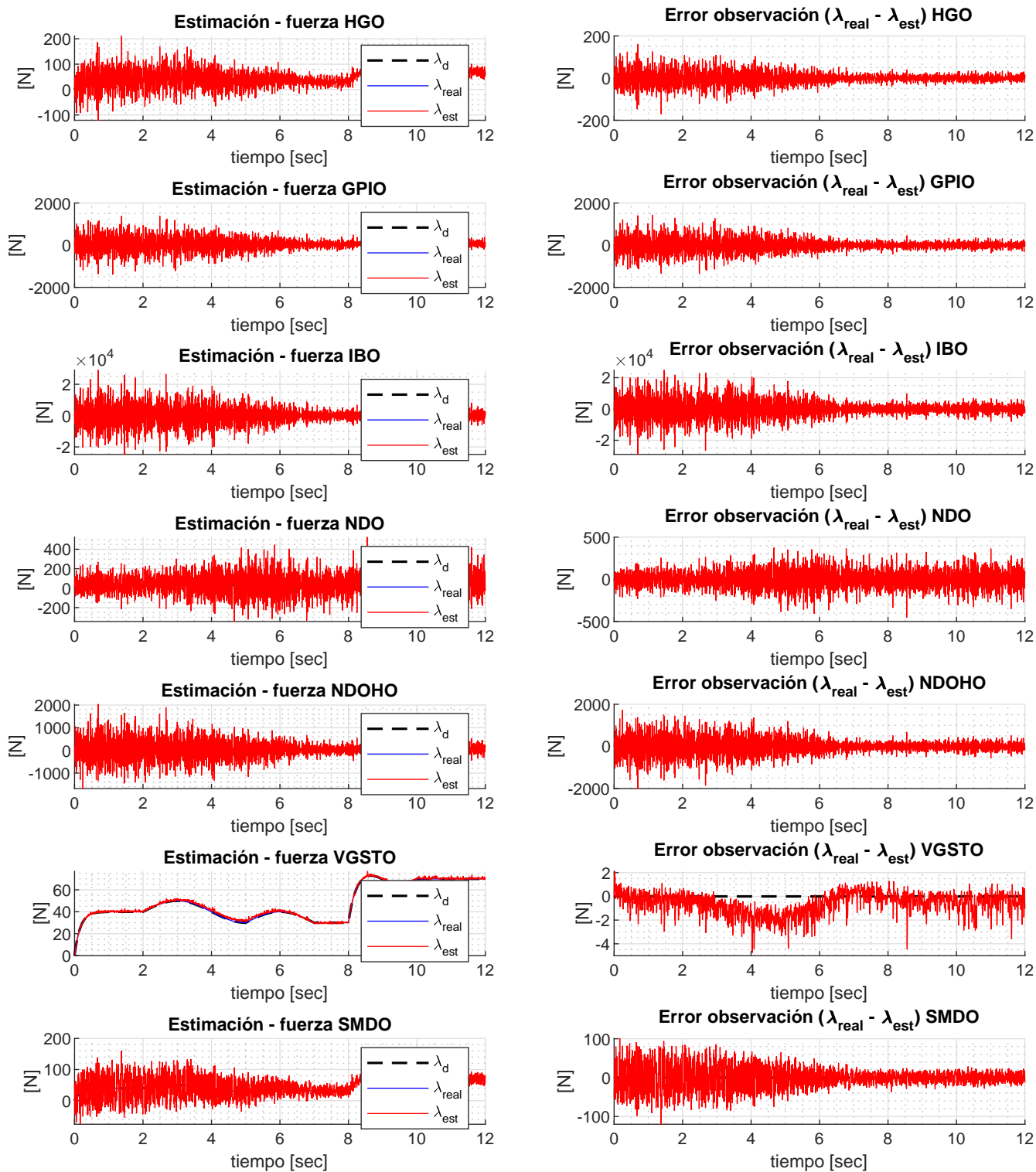


Figura 4.17: Estimación de fuerza Perfil 3, Escenario 4.

4.5 Resultados cuantitativos

4.5.1 Raíz del error medio cuadrático

El RMSE, por sus siglas en inglés, es una medida normalmente utilizada para detectar valores atípicos en una estimación (califica la calidad de la estimación); en otras palabras, se usa para determinar la acumulación del error respecto a una referencia en un conjunto de datos dado, lo cual permite mostrar la precisión de una estimación. En este caso, permite determinar el desempeño de estimación durante la simulación, al calcular de manera directa la acumulación de error respecto a tres perfiles de fuerza dados y la fuerza real simulada del robot. Se define como:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n (\hat{\lambda}_{e,k} - \lambda_{real,k})^2 \right]}, \quad (4.70)$$

donde k es el número actual de muestra, $\hat{\lambda}_{e,k}$ es la fuerza estimada correspondiente a la muestra k , $\lambda_{real,k}$ es la fuerza real simulada correspondiente a la muestra k y n es el número de muestras totales en cada simulación. Nótese que la detección de valores atípicos se da naturalmente ya que por definición en (4.70), si el valor estimado $\hat{\lambda}_{e,k}$ se desvía del valor de referencia $\lambda_{real,k}$, el valor se incrementa con una proporción cuadrática.

De acuerdo a los valores obtenidos al calcular la raíz del error medio cuadrático para cada escenario (ver Sección 4.2) y perfil de fuerza propuesto (ver Subsección 4.1.6). A continuación se presentan las Tablas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6. Éstas muestran de menor a mayor los valores RMSE, otorgándoles a cada observador una posición¹ de desempeño.

Del primer Escenario en la Tabla 4.3, según el valor obtenido durante el tiempo de simulación, se tiene que en el primer perfil, 6 de los 7 observadores mostraron tener una estimación similar; en particular, el SMDO demostró tener un desempeño bastante superior a comparación de los demás. En el segundo perfil con discontinuidades, se daña levemente la calidad de la estimación; con excepción de el SMDO, que se mantuvo prácticamente igual. Por último, el tercer perfil al tratarse de una colección de funciones trascendentales continuas entre sí (ver definición del perfil 3 (4.47)), la estimación es similar al primer perfil; no obstante, se mejoran los valores obtenidos.

La Tabla 4.4 muestra que en el primero de los escenarios con ruido; en términos del valor RMSE, todos los observadores mantienen casi la misma calidad de estimación que de la Tabla 4.3. El cambio en el valor RMSE es mínimo, indicando que ante un ruido leve con varianza $\sigma^2 = 1 \times 10^{-7}$, la estimación no pierde utilidad.

De las Tablas 4.5 y 4.6, se destaca que el observador IBO, presenta una degradación en su estimación, empeorándose a partir del tercer escenario, llegando a séptima posición. Por el contrario, el observador VGSTO destaca su robustez ante el ruido, ya que a pesar de que gradualmente se aumenta el ruido en los escenarios, éste observador mantiene una estimación bastante aceptable, manteniéndose en las primeras posiciones a partir del tercer escenario.

¹Recordando que son siete observadores, la primera posición será el mejor desempeño y la séptima será para el de peor.

	Posiciones	Perfil1	RMSE	Perfil 2	RMSE	Perfil 3	RMSE
Escenario 1	1	SMDO	0.0063	SMDO	0.0062	SMDO	0.0063
	2	NDOHO	0.3907	NDOHO	0.5951	GPIO	0.1704
	3	NDO	0.3987	IBO	0.7239	NDOHO	0.3186
	4	GPIO	0.4804	NDO	1.0975	IBO	0.3689
	5	IBO	0.5489	VGSTO	1.1536	VGSTO	0.5455
	6	VGSTO	0.6196	GPIO	1.5077	NDO	0.6059
	7	HGO	0.6627	HGO	1.5856	HGO	0.8699

Tabla 4.3: Desempeño de observadores en el Escenario 1.

	Posiciones	Perfil1	RMSE	Perfil 2	RMSE	Perfil 3	RMSE
Escenario 2	1	SMDO	0.0755	SMDO	0.0755	SMDO	0.0755
	2	NDOHO	0.398	NDOHO	0.6273	GPIO	0.1729
	3	NDO	0.4386	IBO	0.9417	NDOHO	0.3752
	4	GPIO	0.4811	NDO	1.0973	IBO	0.568
	5	IBO	0.637	VGSTO	1.1661	VGSTO	0.6052
	6	VGSTO	0.6627	GPIO	1.5078	NDO	0.6914
	7	HGO	0.7989	HGO	1.5856	HGO	0.8699

Tabla 4.4: Desempeño de observadores en el Escenario 2.

	Posiciones	Perfil1	RMSE	Perfil 2	RMSE	Perfil 3	RMSE
Escenario 3	1	VGSTO	0.6315	VGSTO	1.1602	VGSTO	0.5663
	2	HGO	0.7297	SMDO	1.4991	HGO	0.9238
	3	NDO	1.2012	NDO	1.5732	NDO	1.2862
	4	SMDO	1.4991	HGO	1.6125	SMDO	1.4992
	5	GPIO	3.0814	GPIO	3.395	GPIO	3.0521
	6	NDOHO	4.048	NDOHO	4.0824	NDOHO	4.0402
	7	IBO	58.4572	IBO	58.4824	IBO	58.4584

Tabla 4.5: Desempeño de observadores en el Escenario 3.

	Posiciones	Perfil1	RMSE	Perfil 2	RMSE	Perfil 3	RMSE
Escenario 4	1	VGSTO	1.1	VGSTO	1.5	VGSTO	1.1
	2	SMDO	29.6	SMDO	29.6	SMDO	29.6
	3	HGO	30.8	HGO	30.8	HGO	30.8
	4	NDO	113.9	NDO	113.9	NDO	113.9
	5	GPIO	304.8	GPIO	304.8	GPIO	304.9
	6	NDOHO	402.3	NDOHO	402.3	NDOHO	402.3
	7	IBO	5845.7	IBO	5845.8	IBO	5845.5

Tabla 4.6: Desempeño de observadores en el Escenario 4.

Con base en la Tabla 4.3 y 4.4, seleccionando el primer perfil de fuerza; en las Figuras 4.18 y 4.19, se muestra el comportamiento de la estimación respecto al error de cada observador con un acercamiento, limitando la gráfica entre $\tilde{\lambda}_{obs} \in [-2, 2] [N]$.

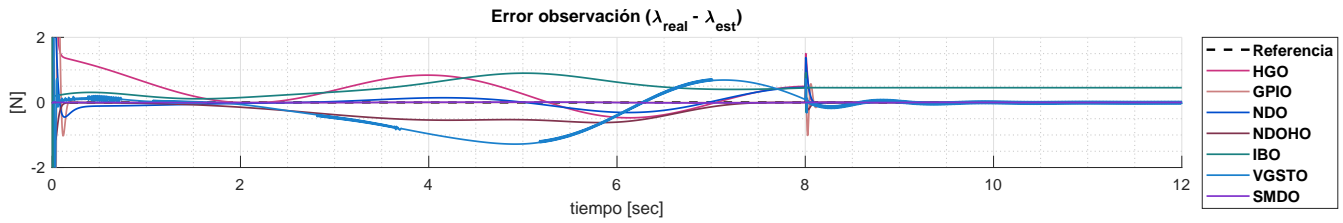


Figura 4.18: Error de estimación, Perfil de fuerza 1, Escenario 1 (sin ruido).

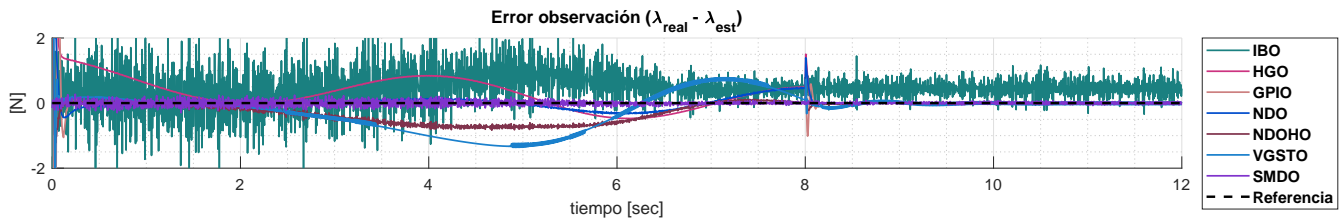


Figura 4.19: Error de estimación, Perfil de fuerza 1, Escenario 2.

Nótese, que a pesar de ser el primer escenario (ruido leve), existe una degradación en la estimación asociada al observador tipo impedancia (IBO), ya que se incrementa la oscilación notablemente respecto a los demás, quedando como un observador sensible al ruido.

Por otro lado, en la Figura 4.20, se muestran los valores RMSE correspondientes al observador tipo Super-Twisting generalizado, éste demostró en los cuatro escenarios mantener una estimación robusta ante ruido. Los valores mostrados indican que los cambios en el valor RMSE no fueron drásticos, considerándolo éste, el de mejor desempeño ante ruido.

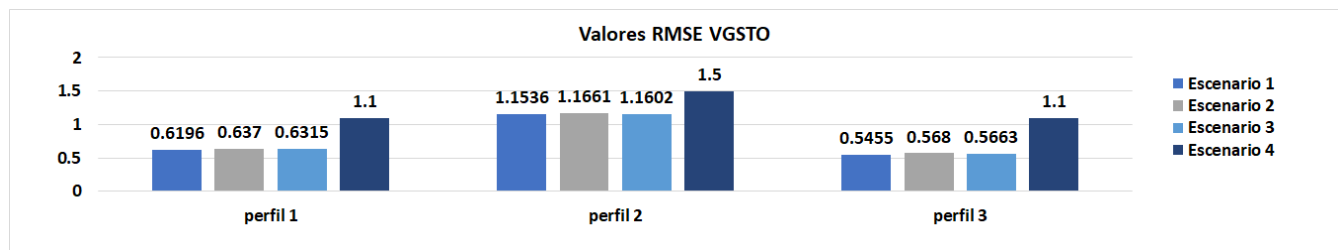


Figura 4.20: Cambios en los valores RMSE del VGSTO.

Conclusiones y Trabajo a futuro

5.1 Conclusiones

El desarrollo del presente trabajo extendió a través del estudio del estado del arte y análisis de 7 observadores las bases sobre la línea de investigación acerca de la estimación de fuerza de contacto en presencia de restricciones holonómicas en robots manipuladores; si bien este trabajo no aporta nuevos diseños de observadores, si aporta la metodología técnica para la estimación a través de los observadores estudiados.

Se adaptó favorablemente el uso de los observadores investigados al problema de estimación de fuerza de contacto, a pesar de estar definidos para diferentes circunstancias.

Tanto el observador Proporcional Generalizado (GPIO), como el observador no lineal de perturbaciones de alto orden (NDOHO), tienen la capacidad de hacer una estimación con grado polinomial p , la diferencia radica en la forma. Mientras el GPIO acopla la dinámica de la perturbación extendiendo el sistema; el NDOHO reduce la dinámica, dedicándose únicamente a la estimación de la perturbación y después extiende al sistema. Ambos, muestran un comportamiento similar ante el ruido; pero, existe una diferencia crucial entre ambos, ante un perfil discontinuo (perfil 2), el GPIO presenta picos (intrínsecos del mismo observador por ser diseñados con base en la técnica de Alta Ganancia), ésto la hace menos competente para estimación de perfiles de este estilo.

Según el funcionamiento del Observador No Lineal de Perturbación (NDO) en la estimación de la fuerza de contacto y con base en la Tabla 4.3, se concluye que este observador tiene un comportamiento similar al ofrecido por los observadores GPIO y NDOHO, a pesar de estar solo definido para estimar perturbaciones constantes; por otro lado, la estimación de NDO no presenta transitorios oscilantes.

El peor desempeño medido con base en el RMSE, fue el que tuvo el observador tipo impedancia (IBO). Ésto, con justa razón ya que la dependencia de un modelo de referencia como auxiliar para la estimación supone un acarreo del ruido y además una amplificación de este, dado que el error de observación se recibe directamente de un observador basado en Alta Ganancia.

El mejor desempeño en la estimación, cuando las mediciones de la posición no tienen ruido es para el observador SMDO. Sin lugar a dudas el mejor en términos del RMSE (ver Tabla 4.3); sin embargo, conforme el ruido se fue aumentando, la calidad de la estimación se distorsionó y perdió valor útil. Principalmente la forma de estimación descrita en (3.171) es asociada a un despeje; por lo que, en teoría debería coincidir con (3.11), lo cual se refleja en un desempeño notablemente mejor al de los demás observadores en la Tabla 4.3.

A pesar de no tener el mejor desempeño en todos los escenarios, el observador VGSTO, resultó ser un observador robusto ante el ruido, ya que a penas es perceptible el cambio entre escenarios, la calidad de su estimación siempre fue útil. Por otro lado, este observador resultó ser el de mayor dificultad en diseño por sus múltiples capas de ganancias que hay que ajustar.

Como parte de las contribuciones del presente trabajo, se estableció extender los resultados obtenidos en [2], lo cual queda concretado, al menos en simulación y bajo las condiciones establecidas.

5.2 Trabajo a futuro

Como continuación inmediata de este trabajo se propone hacer la implementación física de los observadores reportados, con el fin corroborar lo aquí concluido. En lugar de hacer la comparación con la fuerza real simulada, hacer la comparación con un sensor de fuerza.

Se pueden complementar las estimaciones hechas, a través de estimar la fuerza de fricción en el contacto y no solo la fuerza perpendicular debida a éste. La estimación de la fuerza de fricción permitiría realizar acciones de control híbrido a pesar de encontrarse con superficies no lisas o corrugadas.

Quedan como trabajo a futuro las pruebas de estabilidad en lazo cerrado para cada uno de los observadores aquí desarrollados. Posterior a la validación de lo anterior, se propone el uso de la estimación para el control de fuerza en un esquema teleoperado.

Referencias

- [1] J. P. Jimenez, “Control de posición y fuerza para un sistema de teleoperación maestro-esclavo con superficie de contacto desconocida,” tesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2013.
- [2] A. Gutierrez-Giles and M. A. Arteaga-Pérez, “Velocity/force observer design for robot manipulators,” *18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2013.
- [3] G. Besançon, *Nonlinear Observers and Applications*. Springer, 1 ed., 2007.
- [4] D. J. B. Wen-Hua Chen and P. J. Gawthrop, “A nonlinear disturbance observer for two link robotic manipulators,” *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, December, 1999*.
- [5] B. Friedland and Y.-J. Park, “Adaptative friction compensation in dc motor drives,” *IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 37, No 10 October, 1992*.
- [6] A. Nikoobin and R. Haghghi, “Lyapunov-based nonlinear disturbance observer for serial n-link robot manipulators,” *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, 2009.
- [7] R. K.-H. Kim Kyung-Soo and K. Soohyun, “Disturbance observer for estimating higher order disturbances in time series expansion,” *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 55, NO. 8, 2010*.
- [8] M. R.-N. H. Sira-Ramírez and A. Rodríguez-Angeles, “On the linear control of nonlinear mechanical systems,” *49th IEEE Conference on Decision and Control, December, 2010*.
- [9] F. Práctica, “Definición: Impedancia.” Accedido 20/02/2020, <https://www.fisicapractica.com/impedancia.php>, Febrero 2007.
- [10] J. A. P. Guzmán, “Control de seguimiento de un exoesqueleto basado en impedancia y admitancia,” tesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, 2016.
- [11] A. V. A. Alcocer, A. Robertson and R. Johansson, “Force estimation and control in robot manipulators,” *Elsevier, IFAC Robot Control, Wroclaw, Poland, 2003*.
- [12] L. F. Yuri Shtessel, Christopher Edwards and A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhauser, 1 ed., 2014.

- [13] J. A. Moreno and I. Mendoza, "application of super-twisting-like observers for bioprocesses," *13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, 2014.
- [14] D. L. e. Shauying R. Kou and T. J. Tarn, "Observability of nonlinear systems," *Academic Press, Information and control, Control Systems Science and Engineering, Washington University*, 1973.
- [15] D. L. e. Shauying R. Kou and T. J. Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems," *Academic Press, Information and control, New Technology Inc. Huntsville Alabama*, 1975.
- [16] M. Zeitz, "The extended luenberger observer for nonlinear systems," *Systems and Control Letters* 9 149-156, 1987.
- [17] H. H. J. P. Gauthier and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 37, No. 6, Junio, 1992.
- [18] M. D. M. G. Ciccarella and A. Germani, "A luenberger-like observer for nonlinear systems," *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 3, 5537-556, 1993.
- [19] N. Kazantzis and C. Kravaris, "Nonlinear observer design using lyapunov's auxiliary theorem," *Elsevier, systems and Control Letters* 34, 241-247, 1998.
- [20] C. E. Leonid Fridman, Y. Shtessel and X.-G. Yan, "Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems," *INTERNATIONAL JOURNAL OF ROBUST AND NONLINEAR CONTROL*, 18:399-412, 2008.
- [21] J. A. Moreno, "Observers for control." Notas del curso, métodos de diseño para sistemas no lineales., Abril 2012.
- [22] J. Moreno, "Unknown input observers for siso nonlinear systems," *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December*, 2000.
- [23] P. J. N. Romeo Ortega, Antonio Loría and H. Sira-Ramírez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer, 1 ed., 1999.
- [24] Y. H. L. S.Arimoto and T. Naniwa, "Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms," *IFAC 12th Triennial World Congress, Sydney, Australia*, 1993.
- [25] H. K. Khalil, "High-gain observers in nonlinear feedback control," *International Conference on Control, Automation and Systems Oct. 14-17, 2008 in COEX, Seoul, Korea*, 2008.