UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
COLEGIO DE FILOSOFÍA

EL ARGUMENTO DE INDISPENSABILIDAD QUINE - PUTNAM. ANÁLISIS DE LOS SUPUESTOS EN TORNO A LA APLICABILIDAD Y LA EXISTENCIA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FILOSOFÍA

P R E S E N T A:
LORENA MEJIA BARRETTO

D I R E C T O R D E. T E S I S:
DR. MARIO GÓMEZ-TORRENTE

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE DE 2020.

A mis padres, Mónica y Arturo.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría dedicar esta investigación a mis padres, Mónica y Arturo. Su esfuerzo y su amor incondicional hicieron algo muy especial en mis profundidades. En un mundo complejo, conservaron intactos en mí la curiosidad, mi espontaneidad, mi gusto por la naturaleza y mi amor por la sabiduría. Gracias a ustedes mis raíces son tan profundas que mis ramas más voladoras nunca han temido llegar a nuevas altura. Gracias por la vida mamá, estamos unidas por algo inmenso. Gracias papá por una vida tan enriquecedora, llena de inteligencia, cultura y prosperidad.

Agradezco especialmente a mi director de tesis el Dr. Mario Gómez Torrente, por su infinita paciencia, por sus clases de filosofía del leguaje y sus valiosas observaciones que me retaron a darle una dirección más aguda a este trabajo.

A mi familia, en especial a mis amados hermanos Natalia y Julián.

A mis abuelos, a quienes llevo en mi corazón.

A mis amigos que han tejido mi vida de grandes momentos de complicidad y diversión. En especial a los que acompañaron la realización de este trabajo: a Felipe Lanz y su familia (Ana, Jacinta y Alberto), Carlos Prieto, Luisa Valender, Frank Sierra, Edgar R. Ruiz, Jacobo Asse, Mariana Flores, Estefanía González, Satya y Ananda Chatillón, Lina Zdruli, Aslan Cohen, Manuel de León, Arturo Javier, Fabián Frías y Carol Karasik.

A mis maestros de la Facultad quienes con sus clases, su perspectiva y presencia me formaron humana y académicamente, dejando un eco en mí que aún resuena en mi día a día. En especial al Dr. Mario Gómez-Torrente, a la Dra. Nydia G. Lara Zavala, a quien agradezco su afectuoso apoyo, al Dr. Ricardo Horneffer, Dr. Ricardo Vázquez, Dr. Miguel Ángel Fernández, Dra. Amalia Amaya, Dr. Axel Barceló, Dr. Josu Landa y la Dra. Maite Ezcurdia.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación me gustaría centrar mi mirada en dos problemas clásicos sobre los que reflexiona la filosofía de las matemáticas: la existencia de los objetos matemáticos y el problema de su aplicabilidad en las ciencias. Ambas cuestiones han sido tratadas de forma independiente, pero también en su intersección. Posiblemente, la cuestión sobre si existen los objetos matemáticos se nos presenta, por primera vez, en la experiencia de las pruebas demostrativas de las matemáticas puras. En ellas se prueba a cabalidad un hecho matemático novedoso y previamente no vislumbrado a la par que experimentamos la peculiar necesidad que caracteriza a la verdad matemática. En las matemáticas, como escribía Platón, encontramos “algo que es necesario y no puede ser puesto de lado y, si no me equivoco, algo de necesidad divina” (*Leyes:* p. 818). La necesidad con la que se impone la verdad matemática en la mente humana origina que la mayor parte de los matemáticos consideren que su campo de estudio es objetivo e independiente de nuestra cognición; un campo en donde la razón pura realiza logros cognitivos que, ante todo, son descubrimientos, pues se trata del conocimiento de una realidad que por sí misma parecería poseer existencia objetiva.

En su vertiente pura las matemáticas también parecerían tener un objeto de estudio distinto del mundo físico, lo que convierte su aplicación y éxito en las ciencias en un problema filosófico que ha sido catalogado por algunos como un milagro que no entendemos y que tampoco nos merecemos (Wigner, 1960). En palabras del historiador de la ciencia A. C. Crombie (1994), nos encontramos con la enigmática correspondencia entre la naturaleza y las matemáticas y con las asombrosas matemáticas de la naturaleza. Nos enfrentamos con el problema de la aplicabilidad de las matemáticas.

En *Why is there philosophy of mathematics at all?* Ian Hacking (2014) afirma que la riqueza de las aplicaciones matemáticas es una de las dos razones por las cuales existe todo un campo de investigación llamado filosofía de las matemáticas. Sin embargo, a pesar de la importancia cardinal del problema de la aplicabilidad, si emprendemos una investigación del estado de la cuestión de las propuestas filosóficas sobre la aplicabilidad y el éxito de las matemáticas en las ciencias naturales, notaremos que poseemos una visión deficiente del problema. No es claro que comprendamos a fondo lo que significan "enunciados mixtos" como 'La masa del satélite es de 100 kg', 'La aceleración gravitacional es de 9.81 m/s2' y ' y = ut − 1 2 gt 2 − mu α ln(m0 m) (3)'. Ni que podamos definir con precisión cuáles son sus condiciones de verdad (Pincock, 2004).

No obstante, es un hecho claro, naturalista y poco controversial que las matemáticas juegan un rol esencial en la ciencia, al menos como la practicamos en la actualidad, independientemente de la viabilidad de los proyectos nominalistas como el de Hartry Field. Resulta claro y distinto: las matemáticas ocupan un lugar central en la ciencia contemporánea y diversas porciones de teorías matemáticas son utilizadas en cada una de las ramas científicas. A su vez, como señala Colyvan (2001), el rol que juegan en las teorías científicas es variado; no sólo son una herramienta poderosa para lograr predicciones empíricas, también nos permiten formular teorías de manera simple y económica.

Dada la indispensabilidad de las aplicaciones matemáticas en las ciencias naturales y su indubitable éxito, en distintos momentos de la filosofía de las matemáticas, se ha utilizado este carácter poco controversial para argumentar a favor de la existencia de los objetos matemáticos. Es decir, para investigar la cuestión ontológica de los objetos matemáticos, su aplicabilidad ha sido un punto de partida frecuente. A menudo, "la irrazonable efectividad de las matemáticas" en las ciencias empíricas, o el milagro de su aplicabilidad, es la evidencia citada para sostener la existencia de los objetos matemáticos (Wigner, 1960). De esta manera, la pregunta por la existencia de los objetos matemáticos se intersecta con el problema de la aplicabilidad.

En filosofía de las matemáticas los argumentos que concluyen la existencia de los objetos matemáticos o enuncian una tesis sobre su naturaleza a partir de su indubitable aplicabilidad se conocen como argumentos de indispensabilidad. Aunque Frege, Zermelo y Gödel formularon razonamientos bajo esta línea de argumentación, en esta investigación me centraré en el argumento de indispensabilidad formulado por W.V.O. Quine (1976; 1980a; 1980b; 1981a; 1981c) y Hilary Putnam (1979a; 1979b). Quine y Putnam sostuvieron que el carácter indispensable de las matemáticas en la ciencia nos brinda buenas razones para creer que los objetos matemáticos existen y forman parte del mobiliario del Universo.

Si bien el argumento de indispensabilidad Quine-Putnam es considerado el argumento más poderoso del realismo matemático, resulta extraña la particular atención que ha recibido en los debates metafísicos de la ortodoxia de la filosofía de las matemáticas. Si se traza la genealogía del argumento y se emprende una recolección de la literatura que ha surgido como producto del debate generado por Quine-Putnam, nos encontraremos con una vasta producción filosófica. Pocas son las cuestiones filosóficas cuya verdad parecería pender de un solo argumento, como es el caso de la existencia de los objetos matemáticos y el argumento Quine-Putnam. A la luz de una revisión de la filosofía de las matemáticas contemporánea, parecería que el veredicto filosófico sobre la existencia de los objetos matemáticos depende del desenlace del debate en torno al argumento de indispensabilidad.

Con una reflexión parecida, en *A New Perspective on the Problem of Applied Mathematics,* Pincock (2004) advierte que, desde la década de los sesenta del siglo pasado la filosofía de las matemáticas se ha focalizado en el argumento de indispensabilidad y en el consecuente debate entre platonistas y nominalistas, lo que relega a un segundo plano el problema de la aplicabilidad de las matemáticas. A su parecer, es el protagonismo del argumento Quine-Putnam lo que ha oscurecido el problema de la aplicabilidad y condenado al olvido posibles propuestas sobre cómo funcionan las matemáticas aplicadas, en particular aquellas propuestas independientes de las querellas metafísicas.

Concuerdo con Pincock en que el protagonismo de Quine-Putnam ha menguado nuestra comprensión de la aplicabilidad de las matemáticas debido al peso metafísico del argumento, es decir, debido a que, en último término, éste busca responder a dudas ontológicas sobre los objetos y el mobiliario del Universo. Más aún, pienso que no es extraño que el problema de la aplicabilidad esté fuera del foco de la atención del debate, y considero que esto es resultado de la lógica de los argumentos de indispensabilidad.

Bajo la lógica general de los argumentos de indispensabilidad podemos comprender la yerma problematización de la aplicabilidad de las matemáticas en el debate en torno al argumento. El argumento Quine-Putnam parte del carácter incontrovertible de la aplicabilidad de las matemáticas: más específicamente, parte del éxito de las teorías científicas en las que las matemáticas son indispensables sin esbozar una respuesta a la pregunta "¿cómo funcionan las matemáticas aplicadas?" La indispensabilidad de las matemáticas en la ciencia más bien es afirmada por Quine-Putnam como un hecho naturalista, puesto que es imposible, a los ojos de Quine, librar a la ciencia de los objetos matemáticos [1]. El éxito de las teorías científicas en las que las matemáticas aplicadas son indispensables es el propósito robusto a explicar del argumento y el punto fijo inferencial desde el cual Quine-Putnam buscará sostener una afirmación ontológica. Por consiguiente, aunque el argumento recurra a la aplicabilidad de las matemáticas, éstas, por la lógica del argumento, quedan fuera del foco de la discusión.

Si bien concuerdo con la observación de Pincock, considero que un análisis de los supuestos del argumento Quine-Putnam es un magnifico punto de partida para arrojar luz sobre los dos problemas filosóficos mencionados y que, a primera vista, parecerían inextricables: la pregunta por la existencia de los objetos matemáticos y la que plantea su aplicabilidad. Todavía más, pienso que desde el análisis de los supuestos del argumento Quine-Putnam ambas cuestiones pueden enriquecerse mutuamente; pienso al argumento de indispensabilidad como un punto de intersección privilegiado que condesa supuestos paradigmáticos que han guiado nuestro entendimiento filosófico sobre el conocimiento matemático y científico. Esta investigación iluminará los supuestos de la filosofía quineana que se han filtrado con el argumento en el debate y han configurado nuestra mirada, determinando nuestra comprensión y las categorías con las que pensamos ambas cuestiones.

---

[1] En el artículo "Steps Towards a Constructive Nominalism", Quine y Nelson Goodman (1947) intentaron fallidamente eliminar del discurso científico la referencia a objetos abstractos: "We shall not believe in abstract entities. We shall not forego all use of predicates and other words that are often taken to name abstract objects […]. But we cannot use variables to call for abstract objects as values" (p. 105).

Por ello, en esta investigación emprendo un "retorno exegético" a Quine, explicitando los supuestos paradigmáticos que están detrás del argumento de indispensabilidad. Debo aclarar que por razones filosóficas el argumento ha permanecido quineano en espíritu, pero ha sido desligado del proyecto filosófico de Quine: de su ontología, su epistemología, su comprensión del lenguaje y de la ciencia. En contexto, en realidad, todos éstos se encuentran engarzados en un sistema filosófico altamente consumado. En el debate, por el contrario, el argumento de indispensabilidad es comprendido apelando a un mínimo de supuestos quineanos; en general, el holismo confirmacional y el naturalismo son los supuestos socorridos. Como sabemos, la desvinculación de un argumento de la filosofía que le dio génesis es un fenómeno filosófico que con frecuencia resulta profundamente fructífero. Sin embargo, considero que un análisis minucioso del argumento de indispensabilidad enmarcado en la filosofía de Quine puede acercarnos a una reevaluación de los supuestos paradigmáticos que han guiado nuestro entendimiento del conocimiento matemático y científico.

La revisión de los supuestos que están detrás del argumento, el análisis de su coherencia respecto al naturalismo quineano y el contrastaste con aspectos fundamentales de la práctica matemática y científica me permitirán señalar posibles lagunas o supuestos incompatibles y falibles. Comprendiendo, de esta manera, los límites del argumento Quine-Putnam y, posiblemente, arrojando luz sobre la cuestión ontológica de los objetos matemáticos y su aplicabilidad. Debo aclarar que no es mi intención refutar la conclusión del argumento Quine-Putnam, sino más bien enmarcar esta investigación se enmarca dentro del espíritu de la filosofía quineana y ejercer uno de sus más valiosos principios: el principio de revisabilidad. Con este principio como lupa, me acercaré a los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana sometiéndolos a consideración y reevaluando su aceptabilidad desde una mirada naturalista.

En las *Investigaciones Filosóficas,* Wittgenstein escribe: "Philosophy is a battle against the bewitchment of our intelligence by means of our language" (1953). El argumento de indispensabilidad es un argumento filosóficamente imponente no sólo por su robusta conclusión metafísica, sino por la fuerza con la que se impone su razonamiento en nuestra coherencia intelectual. A tal grado que en uno de sus escritos Hilary Putnam (1979) ha señalado que negar su conclusión y afirmar un doble criterio ontológico entre las entidades teóricas y las matemáticas sería una "deshonestidad intelectual". Debo decir que gran parte de la fuerza de Quine-Putnam es producto de un tipo de razonamiento que está en la base del argumento. Se trata de un razonamiento ampliamente aceptado en la racionalidad moderna y significativo para la ciencia contemporánea, la mejor explicación. No obstante, argumentaré que la conclusión del argumento y más aún, la fuerza con la que se impone de manera irresoluble a nuestra inteligencia está relacionada, a su vez, con un conjunto de supuestos paradigmáticos que están detrás de los conceptos y premisas del argumento. En particular, supuestos que se sitúan en la filosofía del lenguaje de W.V. O. Quine, que configuran la noción de objeto matemático y otras categorías con las que pensamos la labor científica y que, en última instancia, originan la imposibilidad del "doble criterio ontológico".

En esta investigación, luego de emprender una revisión de los supuestos paradigmáticos del pensamiento quineano, argumentaré que uno de ellos, a saber, el supuesto filosófico que afirma la continuidad entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático o, en otras palabras, el supuesto que afirma que la diferencia entre ambos lenguajes es sólo una diferencia en grado, sistematicidad y rigor, tiene repercusiones en la configuración de los objetos con los que nos comprometemos ontológicamente según Quine-Putnam y que, en coherencia con el naturalismo, requería una mayor justificación. En contraste, presentaré una investigación que, a partir de un estudio naturalista de la práctica matemática, confronta este supuesto y afirma la peculiaridad del lenguaje matemático frente al lenguaje natural. Siguiendo esta línea, mostraré que las categorías que ofrece el pensamiento quineano para comprender la práctica de las matemáticas aplicadas o la función de las matemáticas en la ciencia son insuficientes, lo que limita, por tanto, la validez irrestricta (en todos los casos) de la conclusión de Quine-Putnam.

Es importante recordar que mi intención no es refutar la conclusión de Quine-Putnam, sino arrojar luz sobre los supuestos paradigmáticos detrás del argumento con la finalidad de iluminar posibles lagunas de la comprensión quineana de la ciencia y de las matemáticas. Considero que Quine realizó valiosas aportaciones a la filosofía y al proyecto naturalista y es, en parte, por esta razón que el argumento condensa importantes aspectos y categorías desde los cuales pensamos el problema de la aplicabilidad de las matemáticas y su ontología. No obstante, si estamos comprometidos con el naturalismo y con la búsqueda científica de las "últimas y verdaderas categorías de la realidad" se hace claro que tenemos que comprender de manera más aguda el rol jugado por las matemáticas en nuestras mejores teorías físicas. Lo anterior no va suceder a menos que filosófica y científicamente produzcamos las categorías y los supuestos adecuados para comprender la práctica de las matemáticas, su funcionamiento, los usos peculiares del lenguaje matemático, los conceptos y el razonamiento matemático, la verdad matemática y finalmente, su aplicabilidad. Si buscamos concluir la ontología de los objetos matemáticos a partir de su aplicabilidad, resulta fundamental la revisión y el análisis de los supuestos desde los cuales pensamos la práctica de las matemáticas (puras y aplicadas).

El orden expositivo en el que desarrollaré el primer capítulo es el siguiente: en 1.1 caracterizaré a los argumentos de indispensabilidad y examinaré su lógica general, pues se trata de una familia de argumentos que no se agotan en la filosofía de las matemáticas. Más tarde, me centraré en un tipo de argumento de indispensabilidad, esto es, en el argumento de inferencia a la mejor explicación, en vista de que el argumento Quine-Putnam pertenece a esta clase de argumentos. Examinaré esta clase utilizando un argumento prequineano atribuido a Gottlob Frege que considero un antecedente del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam. Finalmente, buscaré comprender por qué se trata de un tipo de argumentación privilegiada para las cuestiones ontológicas de la filosofía de las matemáticas. Los elementos analizados en este apartado me servirán para acercarme a la inferencia básica del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam.

En el apartado 1.2 expondré de manera ortodoxa el argumento de indispensabilidad, es decir, recurriré a la formulación clásica del argumento Quine-Putnam. Para ello, introduciré la formulación canónica del argumento de indispensabilidad; la que escribió Hilary Putnam (1979) en su *Philosophy of Logic* sintetizando con ella distintas tesis de la filosofía de Quine.

Es el objetivo del segundo capítulo emprender un retorno exegético a Quine y comprender los supuestos paradigmáticos de su pensamiento, en particular aquellos que configuraron la mirada quineana que dio génesis al argumento de indispensabilidad. Al comenzar el apartado (en 2.1) recurriré a la formulación del argumento de indispensabilidad de Mark Colyvan (2001), la cual me permitirá comprender el papel de dos supuestos fundamentales de Quine en el argumento: el holismo y el naturalismo.

El apartado 2.2 tiene como objetivo exponer los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana y comprender qué significa comprometernos ontológicamente con un objeto que es indispensable para la verdad de nuestras mejores teorías científicas. Así, para comprender la indispensabilidad interpretada en términos cuantificacionales, o por qué el discurso científico cuantifica sobre objetos matemáticos, exploraré qué es un objeto para Quine, qué significa en la filosofía quineana que un objeto exista y cómo es que nos referimos a ellos. Para ello, es necesario emprender un retorno exegético a Quine y revisar su criterio de compromiso ontológico, distinguirlo de la tesis óntica quineana y apreciar las motivaciones y supuestos que lo llevaron a formular el criterio de compromiso ontológico.

En esta sección buscaré dar cuenta de la concepción de la ontología que Quine sostenía, sus consideraciones acerca lo que existe y sobre nuestra capacidad de referirnos a ello por medio del lenguaje. Asimismo, en el análisis de las motivaciones del criterio de compromiso ontológico emprenderé una revisión de la Teoría de las Descripciones Definidas de Bertrand Russell, la cual atenderé como parte de su Teoría de los Símbolos Incompletos. Luego, exploraré brevemente la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia de Quine. Ambas teorías me servirán, primero, para entender por qué para Quine sólo podemos referirnos a objetos y hablar de su existencia cuando empleamos variables y cuantificadores. Y, segundo, y más importante aún, me permitirá exponer aspectos de la filosofía del lenguaje de Quine a los que recurriré en el tercer capítulo. A lo largo de este capítulo se esclarecerán los supuestos paradigmáticos del pensamiento quineano que configuraron el argumento Quine-Putnam.

Finalmente, en el tercer capítulo argumentaré que la imposibilidad de esgrimir un doble criterio ontológico, como apunta la conclusión del argumento, es producto no sólo de la inferencia a la mejor explicación, sino de supuestos paradigmáticos de la filosofía del lenguaje quineana. En un primer momento de este capítulo revisaré y analizaré tales supuestos y cómo configuran las categorías mediante las cuales pensamos el conocimiento científico y, en última instancia, la metafísica de objetos de Quine.

En particular, buscaré cuestionar el supuesto quineano que sostiene que la diferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural es sólo una diferencia de grado (en rigor, claridad, sistematicidad, etc.). Si somos coherentes con los principios naturalistas, una investigación más aguda sobre el lenguaje matemático se torna fundamental, como sostendré más adelante. Para finalizar, en concordancia con esta observación, recurriré a una investigación naturalista sobre la práctica matemática que Danielle Macbeth (2014) presenta en su libro *Realizing Reason*, en el que cuestiona el supuesto de la continuidad entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, caracterizando, en contraste, un uso peculiar del lenguaje matemático por su relación respecto al razonamiento matemático. De acuerdo con Macbeth, las notaciones matemáticas son fundamentales para los modos de razonamiento que operan en sistemas matemáticos particulares, pues son sistemas de signos capaces de encarnar y potenciar el razonamiento matemático. Lo distintivo de uno de los usos de los lenguajes matemáticos, sostiene Macbeth, es que son capaces de formular el contenido de conceptos matemáticos en un sistema escrito de signos que promueve y facilita el razonamiento matemático y, en último término, el descubrimiento y conocimiento matemático.

A lo largo del último capítulo se aclararán los supuestos paradigmáticos del pensamiento quineano que han determinado nuestras intuiciones filosóficas y las categorías desde las cuales pensamos la intersección entre la aplicabilidad y la ontología de los objetos matemáticos. Como se verá más adelante, considero que dichas categorías son insuficientes para concluir de manera irrestricta la existencia de los objetos matemáticos a partir de su aplicabilidad y no obstante, son profundamente fructíferas como objeto del principio de revisabilidad y punto de partida para pensar la intersección entre ambas cuestiones. Espero que esta investigación ilumine, en algún sentido, la intersección aquí apuntada, dado que el conocimiento y la reflexión filosófica sobre el quehacer y la práctica científica es parte y continuación de la búsqueda científica por las últimas y verdaderas categorías de la realidad.

CAPÍTULO 1

EL ARGUMENTO DE INDISPENSABILIDAD QUINE-PUTNAM

1.1 Los Antecedentes y la lógica de los argumentos de indispensabilidad

Es el objetivo de este apartado preparar el terreno antes de introducir el argumento de indispensabilidad Quine-Putnam. En *Realism, Mathematics and Modality,* Hartry Field (1989) asegura que cualquiera que busque sostener una posición ficcionalista o antirrealista de las entidades matemáticas se encontrará con dificultades *prima facie*, al menos cualquiera que se tome en serio la lógica de los argumentos de indispensabilidad. Dada la advertencia de Field, este primer apartado lo dedicaré a examinar la lógica de los argumentos de indispensabilidad.

Los argumentos de indispensabilidad concluyen que “deberíamos creer en cierta afirmación (por ejemplo, la que afirma la existencia de alguna clase de entidad) porque hacerlo es indispensable para ciertos propósitos” (Field, 1989: p.14.). En otras palabras, son argumentos que buscan establecer la verdad de un enunciado a partir de su indispensabilidad para ciertos fines. Naturalmente, dada esta caracterización, son argumentos que no se agotan en la filosofía de las matemáticas. Sus variaciones, así como su fuerza y plausibilidad dependen del propósito que especifique el argumento.

Colyvan (2001) ilustra este punto con un par de argumentos de indispensabilidad cuyos propósitos son dudosos. El primero de los argumentos que Colyvan menciona concluye que debemos creer en la existencia de Dios porque ésta es indispensable para el disfrute de una vida religiosa saludable. Otro ejemplo de un argumento de indispensabilidad afirma que debemos creer que las personas blancas son moralmente superiores a las negras porque esta creencia es indispensable para la justificación de la esclavitud negra.

Pocos estarían convencidos de la plausibilidad de estos argumentos debido a que buscan concluir propósitos controversiales; "disfrutar de una vida religiosa saludable" y "justificar la esclavitud negra", nos dice Colyvan (2001), no son el tipo de propósitos indicados para garantizar la fuerza de un argumento de indispensabilidad. Si la fuerza y la plausibilidad de un argumento de indispensabilidad depende en parte del propósito que especifica, surge, entonces la pregunta: "Which purposes are the right sort for cogent arguments?" (Colyvan, 2001: p. 7). Parte de la inmensa fuerza del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam, como veremos más adelante, depende de que busca explicar un propósito incontrovertido: la indispensabilidad de los objetos matemáticos en nuestras mejores teorías acerca del Universo.

A decir verdad, los argumentos de indispensabilidad son más ordinarios de lo que su nombre nos permite apreciar. Existe un tipo especial de argumento de indispensabilidad que penetra toda una gama de razonamientos, tanto científicos como cotidianos, y que parecería subyacer a buena parte de nuestro conocimiento sobre el mundo. Me refiero a la inferencia a la mejor explicación, en la que el propósito del argumento es la explicación de algún hecho o, en su variante científica, la explicación de algún fenómeno natural.

Gilbert Harman (1965) describe la inferencia a la mejor explicación como un tipo de inferencia en la que se concluye la verdad de la hipótesis z porque z es la que mejor explica la evidencia disponible que otras hipótesis alternas (k, x, y), en consecuencia, z es indispensable para explicarnos el fenómeno en cuestión:

> Por lo general, habrá varias hipótesis que podrían explicar la evidencia, así que uno debe ser capaz de rechazar todas esas hipótesis alternativas para estar justificado en inferir la verdad de una de las hipótesis. Así, uno infiere, de la premisa que señala que una hipótesis dada proveería una "mejor" explicación a la evidencia que cualquier otra hipótesis, la conclusión de que la hipótesis dada es verdadera (Harman, 1965: p. 1).

Asimismo, Field (1989) describe las condiciones en las que ocurre la inferencia a la mejor explicación:

> Más detalladamente, supongamos que (a) tenemos ciertas creencias sobre algún fenómeno, creencias a las que no estamos dispuestos a renunciar; (b) el fenómeno en el que creemos es complejo; (c) tenemos una muy buena explicación del fenómeno, es decir, tenemos un cuerpo de principios relativamente simples y *non-ad hoc*; (d) una de las afirmaciones que conforma esta explicación es el enunciado S. S es una afirmación central, pues estamos seguros que ninguna explicación del fenómeno es posible sin esta afirmación. La idea básica de la inferencia a la mejor explicación es que en estas circunstancias tenemos una razón justificada para creer la afirmación S (p. 15).

En este tipo de inferencia concluimos la verdad de S, pues S es la mejor explicación para explicarnos el fenómeno en cuestión. Ahora bien, si repensamos las condiciones que Field enlista en términos de la definición de un argumento de indispensabilidad, comprenderemos que la inferencia a la mejor explicación es un tipo de argumento de indispensabilidad. Recordemos que Field caracteriza a los argumentos de indispensabilidad como aquellos que concluyen cierta afirmación porque hacerlo es indispensable para ciertos propósitos. En la inferencia a la mejor explicación el propósito es la explicación de un fenómeno y S es la afirmación que concluimos como verdadera por ser indispensable para satisfacer dicho propósito; la inferencia a la mejor explicación es un argumento de indispensabilidad. Debido a la indispensabilidad de la afirmación (S) para el propósito explicativo concluimos la verdad de S. Así pasamos de la indispensabilidad de la afirmación a la verdad de la misma.

Ahora bien, para ilustrar la inferencia a la mejor explicación, recurramos a un ejemplo inspirado en un texto de Putnam (1981), y por un momento imaginemos que vamos caminando por la playa: en nuestra caminata nos encontramos con una imagen dibujada en la arena de lo que parecería ser una caricatura de Sir Winston Churchill. Con extrañeza, nos preguntamos por el origen de la imagen. De repente, a un lado de ella observamos a una diminuta hormiga caminando y mientras lo hace va dejando en la arena cierto rastro de su recorrido. Entonces consideramos una explicación posible o hipótesis: la hormiga, sin tener propiamente la representación mental de Winston Churchill, emprendió un recorrido cuyo rastro en la arena coincide con lo que a nuestro parecer es una caricatura de Churchill. Pero esta explicación, aunque pintoresca, no es la que mejor integra la evidencia, pues a una corta distancia de la imagen, también hallamos una varita de madera cuyo diámetro coincide con el grosor de las líneas que conforman el contorno de la caricatura y, además, notamos que la imagen contiene algunas líneas o figuras inconexas. La hormiga no pudo haber trazado figuras o líneas inconexas entre sí, el rastro de su recorrido debería estar conectado. Así, descartamos la primera hipótesis al pensar que la hormiga no pudo haber saltado de una superficie a otra dejando espacios entre los trazos. Al contrastar los trazos inconexos con el recorrido de la hormiga y considerar la varita de madera concluimos que la mejor explicación es que alguien debió haber dibujado la caricatura de Winston Churchill.

Analicemos el ejemplo. En nuestra caminata hacemos un hallazgo que nos presenta un reto explicativo; el propósito es explicarnos la insólita presencia de la imagen en la arena. Para satisfacerlo contamos con al menos dos hipótesis, las cuales evaluamos de acuerdo con la evidencia disponible: descartamos todas excepto una y concluimos la mejor explicación. Como en cualquier inferencia a la mejor explicación, las conclusiones no se siguen lógicamente de las premisas, ni tampoco garantizamos la inferencia por medio de información estadística o probabilística. Lo que justifica la conclusión es precisamente que lo que mejor explica la presencia de la imagen en la arena es suponer que alguien la dibujó. Este es un ejemplo de una inferencia a la mejor explicación tal como la describen Harman y Field y, a su vez, es también un argumento de indispensabilidad, pues es indispensable suponer que alguien dibujó la imagen si queremos explicarnos satisfactoriamente su presencia en la arena, es decir, es indispensable asumir la verdad de esta creencia si queremos cumplir el propósito explicativo.

El argumento Quine-Putnam es un argumento de indispensabilidad que apela al principio de inferencia a la mejor explicación, pues involucra *indispensabilidad para una explicación*. Desde el punto de vista inferencial, Quine-Putnam concluye que debemos creer en la existencia de las entidades matemáticas porque ésta es la mejor explicación del éxito de nuestras mejores teorías científicas en las que las matemáticas son utilizadas indispensablemente. Así, detrás del argumento Quine-Putnam encontramos un principio ampliamente aceptado, en realidad, uno de los más valiosos, en tanto que guía buena parte de nuestro conocimiento sobre el mundo: la inferencia a la mejor explicación.

La inquietud que el argumento condensa y de donde toma buena parte de su fuerza puede ser expresada en las siguientes preguntas: ¿cómo explicamos el tremendo éxito de la ciencia si no asumimos que en verdad existen en el mundo las entidades que estas teorías postulan? ¿Cómo explicamos la magnífica predictibilidad sobre los fenómenos naturales que poseen las teorías científicas así como su gran poder explicativo si no presumimos la existencia de los objetos que suponen? El *quid* de la cuestión, sin embargo, es que Quine-Putnam lleva esta inquietud a sus últimas consecuencias, es decir, sostiene que esta misma inferencia indispensable no sólo justifica la existencia de objetos observables como las mitocondrias y de entidades teóricas como los electrones, sino que también justifica la existencia de "objetos abstractos" como los objetos matemáticos.

Más tarde continuaré esta línea de pensamiento del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam. Ahora más bien examinaré un antecedente de este argumento con la finalidad de apreciar cómo funciona la lógica de los argumentos de indispensabilidad en la filosofía de las matemáticas. Se trata de un argumento que pertenece a Frege y su consideración nos permitirá apreciar la lógica de los argumentos de indispensabilidad en la filosofía de las matemáticas. En particular, nos permitirá comprender por qué el carácter naturalista e incontrovertible de las aplicaciones matemáticas es idóneo para este tipo de argumentos.

En *Grudlagen* [1884], Gottlob Frege sostiene que es la aplicación de la aritmética al mundo la que la eleva de un mero juego al rango de ciencia; es por su aplicabilidad que deja de ser una sola manipulación de símbolos sin significado de acuerdo con reglas y se convierte en ciencia (Frege, 1928). Con esto en mente, Frege examina la función de las expresiones numéricas en enunciados sobre números y esgrime un argumento platonista a favor de la existencia de los objetos aritméticos. Sucintamente, el argumento sostiene: (i) los términos singulares que refieren a números naturales aparecen en enunciados simples y verdaderos; (ii) es posible que los enunciados simples que contienen términos singulares como componentes sólo sean verdaderos si existen los objetos a los que los términos singulares refieren. Por tanto, concluye Frege: (iii) los números naturales existen. Basando en el hecho de la aplicabilidad de los números naturales a la realidad empírica, el argumento de Frege afirma que algunas identidades numéricas simples son objetivas. Como el argumento muestra, Frege concluye la existencia de los números naturales a partir de su aplicabilidad, de su uso en enunciados verdaderos.

Ahora, consideremos la lógica de los argumentos de indispensabilidad analizando el argumento fregeano. Obsérvese que Frege, dado un análisis de la función de las expresiones numéricas, parte de un punto incontrovertible, de la verdad de los enunciados simples numéricos. De esta manera, enuncia la primera premisa: los términos singulares que refieren a números naturales aparecen en enunciados simples y verdaderos. De ahí, el argumento procede con la segunda premisa, que establece la condición de posibilidad de la primera que es incontrovertible; o sea, establece que es posible que la verdad de los enunciados numéricos sólo lo sea en virtud de la existencia de los objetos a los cuales refieren los términos singulares de dichos enunciados. La segunda premisa, por tanto, liga la verdad de los enunciados numéricos a una afirmación indispensable y ya que la verdad de la primera premisa es incontrovertible, podemos concluir la afirmación indispensable. La existencia de los objetos aritméticos es indispensable para la verdad de los enunciados simples que contienen términos singulares numéricos. En este caso, el argumento de indispensabilidad condiciona a la primera premisa y utiliza su carácter incontrovertido como fulcro para arribar a una conclusión ontológica.

Comencé este escrito apuntando la intersección entre las preguntas ontológicas y las que versan sobre la aplicabilidad de las matemáticas. Asimismo, noté que la aplicabilidad suele ser la evidencia citada para argumentar a favor de la existencia de los objetos matemáticos. Por las razones que recién he apuntado, no es extraño que el razonamiento utilizado a menudo cobre la forma de un argumento de indispensabilidad. Ya en el argumento fregeano se hace visible por qué esta clase de argumentos son el arma preferida de los realistas matemáticos. Los argumentos de indispensabilidad toman un punto fijo, un propósito, diría Field, y emprenden una reflexión sobre aquello que es indispensable para satisfacerlo. El propósito de un argumento de indispensabilidad puede tener un carácter pragmático, explicativo o naturalista y la fuerza del argumento depende, en parte, de la plausibilidad del propósito. Si optamos por un propósito incontrovertible y arribamos a una afirmación indispensable para éste, para refutarlo nos encontraremos, como señala Field, en graves dificultades.

Ejemplo de lo anterior es el caso de los argumentos de indispensabilidad de la filosofía de las matemáticas, cuyo punto fijo son las aplicaciones matemáticas, las cuales poseen un carácter incontrovertible, naturalista y exitoso tanto en sus aplicaciones básicas (tal es el caso aritmética) como en nuestras mejores teorías sobre el Universo y la naturaleza. Existe, en consecuencia, cierta afinidad entre la lógica de los argumentos de indispensabilidad y los argumentos ontológicos de la filosofía de las matemáticas. Las aplicaciones matemáticas, al tratarse de un propósito naturalista y exitoso, son idóneas para satisfacer la lógica de un argumento de indispensabilidad robusto.

Si el propósito de Quine-Putnam es explicar la indispensabilidad de las matemáticas en nuestras exitosas teorías científicas, entonces estamos hablando de un propósito naturalista, incontrovertido y, más aún, uno que parecería ser un misterio filosófico que apela a nuestra racionalidad. Colyvan se referiría a él como un propósito adecuado para la lógica de un argumento de indispensabilidad, con las consiguientes dificultades para refutarlo (Field, 1989).

1.2. El argumento de indispensabilidad. *La formulación clásica*

En este apartado expondré la versión clásica del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam, que es un argumento a favor del realismo matemático. Desde la óptica del argumento, el Universo no sólo está compuesto por objetos físicos, como los átomos y sus partículas, sino también por números y por cualquier formalismo matemático que figure en nuestras mejores teorías científicas por más abstracto que éste sea. Si nos creáramos una imagen del dominio del universo, de acuerdo con el argumento, ésta contendría, por ejemplo, a los números primos y a otras entidades de teorías complejas como las postuladas por la teoría lagrangiana de los campos.

El *locus classicus* del argumento de indispensabilidad se encuentra en un texto de Hilary Putnam titulado *Philosophy of Logic.* En él, Putnam nos dice que ha estado trabajando en un argumento a favor del realismo matemático:

> So far I have been developing an argument to realism along rougly the following lines: quantification over math entities is indispensable for science, both formal and physical; therefore we should accept such quantification; but this commit us to accepting the existence of the math entities in question. This type of argument stems, of course, from Quine, who has for years stressed both the indispensability of quantification over mathematical entities and the intellectual dishonesty of denying the existence of what one daily presupposes (Putnam, 1971: p. 347).

Debido a que la cuantificación existencial sobre las entidades matemáticas es indispensable para la verdad de nuestras mejores teorías científicas, dice Putnam, debemos comprometernos con la existencia de los objetos matemáticos. La referencia a entidades matemáticas —tales como conjuntos, números y espacios vectoriales— es indispensable para las teorías científicas que consideramos verdaderas y por ello debemos comprometernos con su existencia. No hacerlo sería una deshonestidad intelectual.

Resulta importante aclarar que en sus textos Quine nunca utilizó el término i*ndispensabilidad*, se trata de una noción introducida por Putnam que, sin embargo, ya estaba prefigurada en Quine. En su lugar, Quine hablaba del compromiso ontológico que implica la cuantificación sobre las entidades matemáticas en la versión canónica o regimentada de nuestras mejores teorías científicas.

En el pasaje citado se vislumbran algunos supuestos quineanos necesarios para comprender el argumento de indispensabilidad. Supuestos como el criterio de compromiso ontológico, la noción de indispensabilidad cuantificacional y el naturalismo figuran en él con toda claridad. Todavía más, en él Putnam también nos recuerda la fuerza del argumento de indispensabilidad cuando nos dice que su conclusión se impone en nuestra coherencia intelectual.

El argumento de indispensabilidad ha permanecido quineano en espíritu, pero ha sido desligado del pensamiento filosófico de Quine. No obstante, considero que si comprendemos el argumento de indispensabilidad enmarcado en la filosofía quineana, en la metafísica y la epistemología naturalizada y a la luz de su concepción del lenguaje y de la ciencia, podremos arrojar luz sobre los supuestos paradigmáticos que han guiado en el debate nuestro entendimiento del conocimiento matemático y científico. El esclarecimiento de estos supuestos, el análisis de su verdad y de su coherencia interna nos permitirá la revalorar la conclusión y fuerza del argumento de indispensabilidad. Con esto en mente, emprenderé en el siguiente capítulo un recorrido exegético por los textos de W.V.O. Quine.

CAPÍTULO 2

W.V.O. QUINE: RETORNO EXEGÉTICO

En este apartado investigaré algunos supuestos paradigmáticos del pensamiento de W.V.O. Quine que dan forma y fuerza al argumento de indispensabilidad. Todos los supuestos aquí revisados se encuentran explícitos en su obra y son conocidos por la gran mayoría de los filósofos que se interesan por la filosofía naturalista o por la filosofía de las matemáticas. No obstante, como he apuntado, el argumento Quine-Putnam ha sido desvinculado de gran parte de estos supuestos por razones filosóficas y pragmáticas. En el debate el argumento es comprendido recurriendo a un mínimo de ellos.

Es mi objetivo hacer explícitos estos supuestos paradigmáticos con la finalidad de clarificar las consecuencias que tienen algunos de ellos en nuestra concepción del conocimiento matemático y científico. Si bien es un fenómeno filosófico profundamente fructífero debatir la cuestión apelando a un mínimo de supuestos que no nos comprometan con una mayor complejidad, también es preciso saber qué supuestos detrás están guiando nuestras intuiciones y nuestra mirada del conocimiento científico, del conocimiento acerca del Universo. Honrando la máxima quineana según la cual todas las parcelas del conocimiento están sujetas a constante revisión, emprendamos una revisión de los supuestos paradigmáticos que están detrás del argumento Quine-Putnam. Al final de este apartado nos quedará claro qué significa para Quine *que un objeto exista en el Universo, por qué decimos que cuantificar sobre objetos matemáticos es indispensable* y por qué no *comprometernos con la existencia de los objetos matemáticos* sería una deshonestidad intelectual.

2.1. La formulación de M. Colyvan y los supuestos mínimos

Me gustaría introducir una versión del argumento Quine-Putnam que por su simplicidad y formulación me permitirá explicar un par de supuestos mínimos de la filosofía quineana que son fundamentales para comprender el argumento. Me refiero a la formulación del argumento que Mark Colyvan (2001) diseña en *The indispensability of mathematics:*

Premisa 1: Debemos comprometernos ontológicamente con todas y sólo con las entidades que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas.
Premisa 2: Las entidades matemáticas son indispensables para nuestras mejores teorías científicas.
Conclusión: Debemos comprometernos ontológicamente con las entidades matemáticas.

En vista de que las matemáticas son, sin duda alguna, utilizadas en distintas ramas de la ciencia y sus roles en ella son diversos, parece ser que la primera premisa requiere de una justificación más compleja que la segunda, en principio más plausible. Aunque la segunda premisa depende en último término de lo que signifique el concepto de *indispensabilidad*. Aun así, comencemos por la premisa 1 que dice que debemos comprometernos con la existencia de todas y sólo con la existencia de las entidades indispensables para nuestras mejores teorías. La justificación de esta premisa requiere de dos de los supuestos más importantes de la filosofía quineana: el naturalismo y el holismo. Si queremos comprender por qué la premisa afirma que *sólo* debemos creer en la existencia de aquellos objetos que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas, debemos entender el naturalismo de W.V. O. Quine. Si queremos comprender por qué la premisa afirma que debemos comprometernos con *todos* los objetos indispensables para las teorías científicas, debemos advertir que detrás de esta afirmación se encuentra el holismo quineano.

Esta premisa implica en su matiz naturalista, implica que no debemos de creer en la existencia de entidades ajenas a nuestras mejores teorías científicas. Por ejemplo, no debemos creer en la existencia de los *leprechauns* o los *aluxes.* De acuerdo con el naturalismo quineano, a nuestros ojos el mobiliario del Universo debería estar compuesto exclusivamente por objetos físicos, partículas subátomicas, fotones, neutrones, quarks, bosones y demás partículas elementales. O sea sólo por aquellas entidades postuladas por nuestras mejores teorías científicas. Simultáneamente, en su matiz holista, la premisa implica que debemos asumir el mismo compromiso ontológico para todas las entidades de las teorías científicas, es decir, debemos aceptar con el mismo compromiso la existencia tanto de las entidades teóricas como la de las entidades matemáticas como los vectores, los espacios de Hilbert, el continuo y los números primos.

Consideremos, en primer lugar, el naturalismo para comprender por qué debemos asumir que *sólo* existen los objetos postulados por nuestras mejores teorías científicas. El naturalismo es un abanico de doctrinas filosóficas; de acuerdo con Papineau (2015), el uso contemporáneo del término tiene su origen en los debates de la filosofía anglosajona de la primera mitad del siglo pasado. Filósofos como Ernest Nagel, R.W. Sellars y John Dewey incitaron a la filosofía a mirar al quehacer científico y a aliarse con los conocimientos y el método de la ciencia. Como consigna común sostenían que la realidad se agota en la naturaleza, la cual no contiene nada "supernatural", y que el método científico debía ser el método prevaleciente para estudiar la realidad, la cual incluía a la esfera de lo humano, a la experiencia y a la conciencia (Kim, 2003).

En la actualidad el término *naturalismo e*s utilizado ubicuamente y con distintos significados, dependiendo de los supuestos con los que la doctrina se combine. Así, de un lado del espectro, Armstrong (1978) define al naturalismo como la doctrina metafísica que afirma que la realidad consiste en "nothing but a single all-embracing spatio-temporal system." (Armstrong, 1978: p. 261). Y por otro lado, Quine concibe al naturalismo como una doctrina fundamentalmente epistemológica acerca de la práctica y del método filosóficos. De acuerdo con Quine, el naturalismo es “the abandonment of the goal of a first philosophy” (Quine, 1981a: p. 72).

A pesar de este heterogéneo espectro, la gran mayoría de los filósofos contemporáneos naturalistas, incluido Quine mismo, asentirían a la consigna del naturalismo en sus orígenes, aquella que nos incita a mirar el quehacer científico. En este punto, comenzamos a advertir por qué sólo debemos creer en la existencia de las entidades científicas como señala la primera premisa del argumento, pero para la comprensión cabal de la justificación de esta premisa ahondaré en distintos aspectos del naturalismo de Quine. Comenzaré por la caracterización negativa del naturalismo, la que renuncia a la filosofía primera, pues ésta me permitirá identificar lo distintivo del naturalismo quineano respecto a otras doctrinas naturalistas. Luego, abordaré la definición positiva.

Cuando Quine nos invita a abandonar la filosofía primera, está aludiendo y rechazando a la filosofía cartesiana y al proyecto que emprende Descartes en las *Meditationes de Prima Philosophia* en las que buscaba establecer de una vez y para siempre una certeza infalible y duradera en las ciencias. En la apertura de las *Meditaciones* leemos:

> He advertido hace ya algunos años cuántas cosas falsas he admitido desde mi infancia como verdaderas, y cuán dudosas son todas las que después he apoyado sobre ellas: de manera que, por una vez en la vida, deben ser subvertidas todas ellas completamente, para empezar de nuevo desde los primeros fundamentos si deseo alguna vez establecer algo firme y permanente en las ciencias (Med. 1, AT 7:19).

Es este sueño cartesiano que anhela encontrar un sustrato metaempírico que fundamente todo el conocimiento científico lo que Quine impugna: “I am of that large minority or small majority who repudiate the Cartesian dream of a foundation for scientific certainty firmer that scientific method itself” (Quine, 1990: p. 19). La razón de su rechazo es porque considera que no existe el anhelado punto filosófico ‘externo’ a la ciencia, no hay un método propio a la filosofía independiente del método científico desde el cual podamos comprender y fundamentar toda la labor científica, “there is no cosmic exile”, escribe Quine en 1960 (p. 275). No existe tampoco un conocimiento metaempírico o *a priori* que fundamente a la ciencia: para la filosofía quineana no hay una certeza infalible que permanezca intacta en nuestro sistema de conocimiento.

La negación de un método propio a la filosofía, así como la de un fundamento certero y duradero a la ciencia tiene un doble origen en el pensamiento de Quine. El primero podemos situarlo en la crítica de Quine a la distinción analítico-sintético, distinción que diluye en *Dos Dogmas del Empirismo.* De acuerdo con Quine, no existe ningún enunciado inmune a la experiencia, es decir, todos los enunciados que consideramos verdaderos son falibles, puesto que son parte de una teoría, de un sistema que en la búsqueda de la verdad y la objetividad constantemente se encuentra en revisión, acomodo y contrastación empírica. Para Quine, ningún enunciado habita fuera del tribunal de la experiencia y cualquier enunciado, en principio, puede ser sostenido como verdadero haciendo los ajustes necesarios en el sistema total del conocimiento: "Any statement can be held true come what may, if we make drastic enough adjustments elsewhere in the system […] Conversely, by the same token, no statement is immune to revision" (Quine, 1941: p. 43).

La segunda razón por la cual Quine rechaza a la filosofía primera está conectada con la idea de que nos encontramos "en el medio de las cosas":

> The philosopher's tasks differs from the others', then, in detail; but in no such drastic way as those suppose who imagine for the philosopher a vantage point outside the conceptual scheme that he takes in charge. There is no such cosmic exile. He cannot study and revise the fundamental conceptual scheme of science and common sense without having some conceptual scheme, whether the same or another no less in need of philosophical scrutiny, in which to work (Quine, 1960: p. 254).

Irremediablemente, nos encontramos en medio de nuestro sistema de conocimiento y es sólo desde este lugar que podemos emprender la labor filosófica. No hay punto externo, estamos en el medio de las cosas. Lo cual implica un *continuum* entre el quehacer científico y el filosófico, mismo que Quine ilustra con una de sus metáforas preferidas, la balsa de Neurath. En *Word and Object*, Quine dice "Neurath has likened science to a boat which, if we are to rebuild it, we must rebuild plank by plank while staying afloat in it. The philosopher and the scientist are in the same boat" (1960: p.3). La filosofía y la ciencia son un continuo, una misma empresa no sólo porque comparten método, sino porque ambas labores comparten el mismo objetivo: el conocimiento de la realidad. Los proyectos filosóficos no deben ser distinguidos de los científicos, pues ambos son: "a quest for the ultimate categories, a limning of the most general traits of reality" (Quine, 1960: p.161).

Como mencioné, tal continuo también está unido por la naturaleza del conocimiento, que no puede librarse de sus determinaciones, esto es, está unido por el único método que tenemos para conocer el mundo: el método científico. En concordancia con la epistemología naturalizada de Quine, todos nuestros esfuerzos por afirmar un conocimiento deberían estar sometidos a los estándares de evidencia y justificación que tan explícitamente encontramos en las ciencias naturales, o sea, la observación y al método hipotético-deductivo. Incluso cuando en esta misma empresa intentamos conocer qué es la ciencia también debemos adoptar dichos estándares:

> In our account of how science might be acquired we do not try to justify science by some prior and firmer philosophy, but neither are we to maintain less than scientific standards. Evidence must regularly be sought in external objects, out where observers can jointly observe it (Quine, 1974: 34f).

No existe tal punto distintivo de la filosofía externo al conocimiento científico; ambos, filósofo y científico, se encuentran en la misma balsa. La filosofía, por tanto, no puede emprender reflexiones prescriptivas sobre el quehacer científico o establecer una certeza infalible que fundamente a la ciencia, sino más bien debe buscar mejorar nuestro conocimiento sobre el mundo por medio de métodos coherentes con los de la ciencia; puesto que los estándares para cualquier conocimiento son los mismos. De esta manera, la filosofía misma se halla incluida en la empresa científica. Los filósofos deben adoptar métodos coherentes con los de la ciencia, asimilar sus conocimientos y, en general, los objetivos de la empresa científica.

Ahora bien, Quine entiende a la ciencia en un sentido amplio, pues ésta comprende tanto las distintas ramas de la ciencia natural, a saber: la física, la biología y la química, como las de las ciencias sociales, por ejemplo, la psicología y la lingüística. Sin embargo, también incluye al sentido común, pues para Quine la ciencia simplemente es una extensión del sentido común. En realidad, la ciencia es un perfeccionamiento del funcionamiento del sentido común: “Science is not a substitute for common sense, but an extension of it. The quest for knowledge is properly an effort simply to broaden and deepen the knowledge which the man on the street already enjoys, in moderation, in relation to the common-place things around him” (Quine, 1960: p. 221). Así, en la perspectiva quineana encontramos englobados bajo el término *ciencia* tanto al sentido común como a la filosofía.

Bien, en este punto, hemos advertido las dos caras del naturalismo quineano que ahora es preciso distinguir. En la primera definición mencionada, cuando Quine nos exhorta a abandonar la filosofía primera, la tesis naturalista parece ser una tesis normativa que prescribe lo que la filosofía debería rechazar. Sin embargo, en la justificación de esta tesis normativa nos encontramos con supuestos descriptivos que niegan, desde un estudio naturalista[2] de la ciencia, que exista un método extracientífico. En su lugar, sostienen que todo el conocimiento está sometido a los mismos estándares de evidencia y justificación. Es claro que la tesis del naturalismo entendida normativamente se encuentra intrincada con su vertiente descriptiva. La razón de esto es porque el naturalismo quineano supone a la epistemología quineana, es decir, la justificación del naturalismo quineano reside en una teoría o historia sobre cómo conocemos el mundo.

Esta historia comienza de la siguiente manera: "the only source of our knowledge of the world around is energy impinging on our sensory surfaces" (Quine, 1990: p.19). De acuerdo con la teoría del conocimiento de Quine, la manera en la que conocemos el mundo en el que vivimos y a los objetos mundanos es por medio de la estimulación de nuestros sentidos. Si bien no todo el conocimiento es observacional en Quine, sí podemos afirmar que todo el conocimiento está conectado indirectamente con enunciados observacionales en nuestro sistema total del conocimiento sobre el mundo. Como mencioné antes, para Quine la ciencia es una extensión y perfeccionamiento del sentido común; es la continuación de una empresa que comienza con la estimulación de nuestros sentidos en la vida cotidiana y que en la búsqueda por las verdaderas categorías y la estructura de la realidad, produce teorías sistemáticas que mejoran con el tiempo, en buena medida, gracias a la contrastación empírica.

A partir de una teoría del conocimiento, investigando naturalistamente los orígenes, fuentes y procesos del conocimiento, Quine establece los límites y las prescripciones que acompañan a su proyecto naturalista. Como he sostenido, la justificación de

---

[2] En este mismo enunciado se evidencia la tensión y la circularidad que guarda el naturalismo entre su vertiente normativa y la descriptiva, pues al hablar de la justificación del naturalismo como proyecto normativo señalo que se fundamenta en un "estudio naturalista de la ciencia" y en esta expresión utilizo de nuevo el término, pero ahora en su vertiente descriptiva.

la tesis normativa del naturalismo se encuentra inexorablemente ligada a la epistemología quineana, misma que parte de un hecho empírico, es decir, de un hecho básico de la ciencia natural: "Its is a finding of natural science itself, however fallible, that our information about the world comes only through impacts on our sensory receptors." (Quine, 1969: p. 52).

A su vez, aquí podemos advertir la justificación de la epistemología quineana. Como señala Peter Hylton (2014), muchos filósofos, sin duda alguna, aceptarían que los métodos y las técnicas de la ciencia son la mejor forma de investigar y conocer al mundo. Empero, la peculiaridad del naturalismo quineano radica en su justificación última: "The naturalist sees science as an inquiry into reality, fallible and corrigible but not answerable to any supra-scientific tribunal, and not in need of any justificaction beyond observation and the hypothetico-deductive method" (Quine, 1981: p. 70). Si seguimos la interpretación de Hylton, en esta circularidad radica la singularidad del naturalismo quineano: "This is the revolutionary step: naturalism self-applied. There is no *foundation* for Quine's naturalism: it not based on anything else" (Hylton, 2014).

Una vez expuesta la definición negativa del naturalismo de Quine, podemos afirmar la caracterización positiva: "naturalism is the recognition that it is within science itself, and not in some prior philosophy, that reality is to be identified and described" (Quine, 1981: p.21). El naturalismo considera a la ciencia nuestra mejor empresa epistémica; una empresa que con sus métodos nos entrega conocimiento de las categorías y de la estructura de la realidad. Si frente a la caracterización positiva, una vez más, nos preguntamos ¿por qué la ciencia ocupa esta posición privilegiada?, ¿cuál es la justificación para aceptar que es nuestra mejor empresa epistémica sobre el mundo?, debemos, de nuevo, recurrir a la epistemología quineana y a su justificación última[3].

Ahora bien, si, por un lado, afirmamos que sólo en la ciencia conocemos, identificamos y describimos la realidad y, por otro lado, decimos que la filosofía es parte de esta empresa científica, puesto que no existe un método extracientífico entonces debe-

---

[3] A cualquiera que le cause incomodidad la justificación última del naturalismo quineano, puede encontrar en las virtudes epistémicas de Quine cierto alivio. Pues, de acuerdo con esta interpretación, adoptamos a la ciencia como nuestra mejor empresa epistémica por las virtudes que posee, por ejemplo, por la capacidad predictiva y explicativa que goza de los fenómenos naturales.

mos re-concebir la labor de la metafísica como rama de la filosofía. Así, Quine plantea la naturalización de la metafísica. La metafísica naturalizada, y en particular la ontología, se encargará de determinar qué es lo que existe por medio de un método coherente con los métodos de la ciencia y basándose en lo que nuestras mejores teorías científicas afirman que hay en el Universo.

Con esto en mente, Quine plantea un método naturalista para conocer los compromisos ontológicos de cualquier teoría, es decir, un método para conocer de qué objetos es necesario reconocer la existencia si aceptamos como verdadera una teoría en particular. Formulado este método, podemos aplicarlo a las que consideramos las teorías más exitosas. El método en cuestión es el llamado el criterio de compromiso ontológico de Quine y, sucintamente, consiste en traducir la teoría a la lógica de primer orden con identidad. La traducción total de la teoría es llamada por Quine 'la regimentación de la teoría'.

En el próximo apartado abordaré los detalles del criterio de compromiso ontológico, por ahora sencillamente me gustaría enfatizar que, de acuerdo con Quine, si asumimos el naturalismo, en la metafísica determinaremos lo que existe al recurrir al criterio de compromiso ontológico y, por supuesto a nuestras mejores teorías científicas. Asimismo quisiera apuntar que para Quine nuestras mejores teorías científicas se encuentran en cierto sentido incompletas, pues no poseen explícitos sus compromisos ontológicos; es necesario un método de explicitación y es necesaria la labor ontológica que por medio de la regimentación saque a la luz los compromisos ontológicos de una teoría. Las teorías científicas de la física, por ejemplo, forman parte de nuestras mejores teorías sobre el Universo y, sin embargo, es necesario que éstas sean regimentadas en la labor metafísica para conocer los objetos que postulan.

En realidad, en la filosofía quineana, la labor metafísica es una de las partes encumbradas de la labor científica, pues requiere de toda una empresa detrás, misma que comienza con el sentido común y la estimulación de los sentidos y culmina con la determinación de los objetos existentes en el Universo, es decir, con el conocimiento de las verdaderas estructuras de la realidad. Como exploraremos en el siguiente apartado, para Quine, no es sino hasta la regimentación cuando podemos hablar de la totalidad de los objetos existentes. De esta manera, incluida la labor metafísica en la empresa científica, el naturalismo afirma que al mobiliario del Universo *sólo* lo componen los objetos que la ciencia, a través de su sistematicidad, métodos y virtudes epistémicas, ha concluido que existen. Recapitulando, la metafísica naturalizada determinará lo que existe a partir del supuesto positivo fundamental del naturalismo: es en la ciencia donde conocemos e identificamos lo que existe, en ella se agota el conocimiento de lo real. Por tanto, las únicas entidades en cuya existencia debemos creer son las entidades postuladas por nuestras mejores teorías científicas.

Una vez expuesto el naturalismo, retomemos la primera premisa del argumento de indispensabilidad y analicemos esta vez su matiz holista. De acuerdo con esta premisa, debemos asumir el mismo compromiso ontológico para *todas* las entidades de las teorías científicas. No sólo debemos creer en la existencia de las entidades directamente observables como las estrellas y las bacterias o en la de las indirectamente observables, los hoyos negros y los electrones, sino también en la existencia de los objetos matemáticos. ¿Por qué el argumento sostiene el mismo compromiso ontológico para entidades científicas, a primera vista, tan dispares? Para responder a esta pregunta es menester comprender el holismo quineano.

Como Colyvan (2001) apunta, el holismo filosófico ha cobrado muchas formas, incluso en Quine podemos distinguir dos tesis holistas. La primera de ellas es la que se refiere al holismo semántico y la segunda al holismo confirmacional. La tesis del holismo semántico sostiene, metafóricamente, que la unidad mínima del significado es el lenguaje. Esta tesis surge en contra de un supuesto fundamental del positivismo lógico, el cual sostenía que a cada oración le corresponde un conjunto específico de consecuencias observacionales que determinan su significado. Quine identifica este supuesto como uno de los dos dogmas del empirismo y señala que este supuesto implica que debe haber conexiones semánticas entre cada enunciado teórico y un grupo de enunciados observacionales. Asimismo, cada hipótesis sobre un fenómeno no observable debe tener ciertas consecuencias empíricas o predicciones sobre lo observable y éstas son validas en virtud de los significados de los términos teóricos que contiene la hipótesis (Fodor, 1983).

Frente al criterio positivista de significado, Quine sostiene que en el caso de los enunciados observacionales el significado de una oración depende de los estímulos sensoriales que nos llevan a asentir o disentir frente a esta oración, pero también depende de las relaciones que este enunciado guarda con el resto de la teoría. Por tanto, la unidad del significado no es, como suponían los positivistas lógicos, el enunciado con sus consecuencias observacionales, sino el sistema de enunciados, o en su versión robusta, el sistema total:

> The idea of defining a symbol in use was […] an advance over the impossible term-by term empiricism of Locke and Hume. The statement, rather than the term, came with Bentham to be recognized as the unit accountable to an empiricist critique. But what I am now urging is that even in taking the statement as unit we have drawn our grid too finely. The unit of empirical significance is the whole of science (Quine, 1951: p. 42).

Si el significado de una sola oración está indeterminado, pues sólo podemos comprenderlo en el sistema total de conocimiento, es imposible verificar o confirmar oraciones de manera aislada. En otras palabras, si no existe la evidencia observacional propia de una oración, dado que "los enunciados no tienen un fondo de consecuencias empíricas propias" (Quine, 1980b: p.41), entonces sólo podemos hablar de la evidencia de la teoría como un todo y sostener que las teorías se confirman como un todo: "our statements about the external world face the tribunal of sense experience not individually but only as a corporate body" (Quine, 1951: p.41). Esta tesis recibe el nombre de holismo confirmacional.

Como lo deja ver el razonamiento anterior, Quine defendió el holismo confirmacional a partir del holismo semántico. Pero como han apuntado algunos (Colyvan, 2001; Maddy, 1992), si bien es cierto que el holismo semántico implica al holismo confirmacional, es posible defender el holismo confirmacional sin recurrir a la tesis del holismo semántico, que es más controvertida; pues ésta, en parte, depende de la critica quineana a la distinción analítico-sintético. Habría que decir también que distintos filósofos de las matemáticas sostienen que el argumento de indispensabilidad sólo requiere del holismo confirmacional para la fuerza de su conclusión (Colyvan, 1998; Field, 1989, Hellman, 1999; Maddy, 1992). Siguiendo esta línea, exploraré el holismo confirmacional de forma independiente.

Cuando Quine investiga naturalistamente a la ciencia tratando de comprender lo que sucede entre el estímulo sensorial y el conocimiento científico, se encuentra con una reflexión sobre la confirmación de las teorías de Pierre Duhem:

> The physicist can never subject an isolated hypothesis to experimental test, but only a whole group of hypothesis; when the experiment is in disagreement with his predictions, what he learns is that one of the hypothesis constituting this group is unacceptable and ought to be modified; but the experiment does not designate which one should be changed. (Duhem, 1906: p. 187)

Es por esta observación que tradicionalmente el holismo confirmacional recibe el nombre de tesis Duhem-Quine. En este pasaje, Duhem apunta que aunque un experimento u observación nos puede llevar a cuestionar una teoría, éstos no necesariamente nos indican cuál de las oraciones o elementos de la teoría tenemos que revisar. Por ejemplo, no nos dicen si debemos revisar las relaciones establecidas entre los enunciados o el formalismo matemático o si es necesario modificar los supuestos sobre los instrumentos que utilizamos en el experimento. Ya que la unidad de confirmación no es el enunciado observacional, si una hipótesis es falseada, tenemos que remitirnos a toda la red teórica o al conjunto de hipótesis científicas para averiguar dónde está el error, pues el experimento no falseará un solo enunciado, ni nos indicará cuál es el enunciado en tela de juicio.

Esta observación, acerca de la particular naturaleza de la confirmación de las teorías científicas nos lleva a afirmar que los enunciados o hipótesis sobre el mundo enfrentan al tribunal de la experiencia en conjunto, como un cuerpo o sistema:

> Our statements about the external world face the tribunal of sense experience not individually, but only as a corporate body […]. The totality of our so-called knowledge or beliefs, from the most casual matters of geography and history to the profoundest laws of atomic physics… is a man-made fabric which impinges on experience only along the edges (Quine, 1951: pp. 41-42).

Según el holismo quineano, la mayor parte de nuestros enunciados no tienen implicaciones en la experiencia cuando son tomados uno por uno, aislados del resto de la teoría a la que pertenecen. Incluso una misma observación puede confirmar o refutar el mismo enunciado dependiendo del resto de los enunciados aceptados por la teoría. Lo que tiene consecuencias observacionales no es el enunciado, sino un bloque de la teoría o la teoría en su totalidad. La teoría es un tejido que se contrasta con la experiencia sólo por los bordes, pero es la totalidad de la teoría lo que establece este nexo con la experiencia:

> As Pierre Duhem urged, it is the system as a whole that is keyed to experience. It is

> taught by exploitation of its heterogeneous and sporadic links with experience, and it stands or falls, is retained or modified, according as it continues to serve us well or ill in the face of continuing experience (Quine, 1953: p. 222).

Asumiendo el holismo quineano, si una teoría es confirmada por consecuencias o descubrimientos empíricos, entonces la totalidad de los componentes de la teoría son confirmados. En particular, sostiene Quine, los componentes matemáticos de la teoría son confirmados (1976: p. 120). El holismo quineano nos lleva a asumir la existencia de todas las entidades postuladas por una teoría confirmada, incluyendo la de las entidades matemáticas, puesto que la evidencia, como revisaré más tarde, es la misma para toda la teoría. La evidencia que justifica la existencia de las entidades teóricas es la misma que justifica las entidades matemáticas.

Con todo esto, habría que advertir que el holismo confirmacional posee un lado que enfatiza la confirmación, al sostener que es la totalidad de la teoría la que es confirmada. Y otro lado que enfatiza la 'desconfirmación' según el cual, cuando una teoría entra en conflicto con alguna observación o predicción empírica, no es claro cuál es la hipótesis equivocada o la parte de la teoría que es necesario revisar. En su lugar, es necesario emprender una serie de ajustes, revisiones y alteraciones a la teoría para resolver el conflicto. Lakatos (1970) ilustra este punto con un ejemplo ficticio:

> The story is about an imaginary case of planetary misbehavior. A physicist of the pre Einsteinian era takes Newton's mechanics and his law of gravitation, N, the accepted initial conditions, I, and calculates, with their help, the path of a newly discovered small planet, P. But the planet deviates from the calculated path. Does our Newtonian physicist consider that the deviation was forbidden by Newton's theory and therefore that, once established, it refutes the theory N? No. He suggests that there must be a hitherto unknown planet, P', which perturbs the path of P. He calculates the mass, orbit, etc. of this hypothetical planet and then asks an experimental astronomer to test his hypothesis. The planet P' is so small that even the biggest available telescopes cannot possibly observe it; the experimental astronomer applies for a research grant to build yet a bigger one. In three years time, the new telescope is ready. Were the unknown planet P' to be discovered, it would be hailed as new victory of Newtonian science. But it is not. Does our scientist abandon Newton's theory and his idea of the perturbing planet? No. He suggests that a cloud of cosmic dust hides the planet from us…(Lakatos, 1970: pp.100).

La historia de Lakatos sigue por varias líneas más, en las que el científico imaginario de la era pre-einsteinana continúa postulando posibles hipótesis para explicar la desviación del planeta. El pasaje ilustra cómo cuando un experimento entra en conflicto con una teoría, éste no apunta cuál es la hipótesis o el bloque de la teoría a revisar.

No obstante, en esta labor revisionista existen partes de la teoría que están menos sujetas a revisión o, como diría Goodman (1983), que están más “atrincheradas” es decir, partes que estamos menos dispuestos a revisar en comparación con aquellas que de inmediato son alteradas cuando una teoría es falseada por un experimento. Tal es el caso de los componentes matemáticos de una teoría que, de acuerdo con Quine, sólo estamos dispuestos a revisar como último recurso, cuando los beneficios superan a los costos, como en el caso del remplazo de la geometría euclideana por la geometría riemanniana en la teoría de la relatividad. Sin embargo, por lo general semejante revisión es muy costosa. Al respecto, Quine escribe: “mathematics infiltrate all branches of our system of the world, and its disruption would reverberate intolerably” (1990: p.15). Las matemáticas pertenecen a los componentes más atrincherados, a aquellos que estaríamos menos dispuestos a revisar, ya que permean tanto la gramática de la ciencia, como a sus distintas ramas. Como veremos más tarde, para Quine es esta menor disposición a ser revisadas lo que lleva injustificadamente a muchos filósofos a afirmar que las matemáticas son los componentes *a priori* de las teorías.

Finalmente, haré una breve observación sobre el holismo semántico y las entidades matemáticas. Si bien es aceptado que el argumento de indispensabilidad sólo requiere del holismo confirmacional, Quine invocó de manera explícita al holismo semántico para defender el argumento (Quine, 1980b: pp. 4-5 y 46). En distintos textos Quine (1936; 1951; 1963) argumenta que no es posible trazar una distinción entre los componentes matemáticos y los componentes físicos de nuestras teorías. No, al menos, desde la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos. De acuerdo con Quine, no es posible distinguir estos componentes en ninguna forma filosóficamente relevante porque ambos enunciados son revisables, ninguno de los dos es inmune a la experiencia a pesar de la naturaleza atrincherada de los componentes matemáticos. Para Quine, las matemáticas tienen una naturaleza empírica debido a que también están sujetas a revisión y a contrastación empírica.

Incluso más, no existe una forma obvia de separar las proposiciones matemáticas de las del resto de la ciencia, de las proposiciones meramente empíricas, porque ambas se encuentran semánticamente fusionadas. Colyvan (2001) hace una observación en este sentido: “a cursory glance at any physics book will confirm this, where one is likely to find mixed statements such as: "planets travel in elliptical orbits"; "the curvature of space-time is not zero” (Colyvan, 2001: p. 37). Esta fusión implicada por el holismo semántico es también citada por Putnam como una de las razones por la cual debemos adoptar el mismo compromiso ontológico para todas las entidades: “mathematics and physics are integrated in such a way that it is not possible to be a realist with respect to physical theory and an anti-realist with respect to mathematical theory” (1975: p. 74).

Una vez revisado el holismo quineano en sus dos facetas, en la del holismo confirmacional y el holismo semántico, comprendemos por qué Quine afirma que debemos comprometernos con *todas* las entidades de nuestras mejores teorías científicas, incluyendo las entidades matemáticas. Es de notar que el holismo, como el naturalismo, tiene su justificación en un estudio naturalista de la ciencia. Son las observaciones señaladas a partir de un estudio naturalista de la ciencia lo que nos lleva a una prescripción ontológica abreviada en la afirmación “debemos comprometernos con todas las entidades” de la premisa primera del argumento de indispensabilidad.

En este apartado he revisado los dos supuestos de la primera premisa del argumento de indispensabilidad. He estudiado el naturalismo para comprender por qué la premisa afirma que *sólo* debemos comprometernos ontológicamente con las entidades indispensables para nuestras mejores teorías científicas. Más tarde exploré las dos vertientes del holismo quineano para comprender por qué debemos asumir el mismo compromiso ontológico para *todas* las entidades indispensables para la ciencia, es decir, tanto para las entidades matemáticas como para las entidades teóricas. En los siguientes subcapítulos emprenderé una revisión de los supuestos paradigmáticos y aspectos centrales de la filosofía quineana que dan forma y fuerza al argumento de indispensabilidad.

2.2 Los supuestos paradigmáticos

α. Dos tesis quineanas

Si observamos la versión clásica de Putnam del argumento de indispensabilidad, distinguiremos en ella al menos dos tesis de la filosofía quineana. A una de ellas, Colyvan (2001) la llama 'la tesis óntica de Quine' y a la otra 'la tesis de los compromisos ontológicos de las teorías'. Esta distinción no debe pasar inadvertida, pues mientras la primera tesis es prescriptiva, la segunda es esencialmente descriptiva. Antes de abordar la distinción primero comprendamos qué significa decir que nos "comprometemos ontológicamente con un objeto o entidad", ya que se trata de una noción común a ambas tesis.

En su diccionario filosófico, Ferrater Mora dice que se le da el nombre de *compromiso ontológico* "al resultado de la actitud según la cual se acepta que hay tales o cuales entidades" (2004: p. 3555). Así, por ejemplo, comprometernos ontológicamente con la materia oscura quiere decir que racionalmente aceptamos que en el Universo existe la materia oscura, que estamos convencidos de su realidad, aunque actualmente sólo podamos deducir su existencia a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible, como en las estrellas o en las galaxias. Líneas más tarde, Ferrater Mora también apunta que el compromiso ontológico es filosóficamente fundamental porque pone de relieve qué tipos de entidades se aceptan como reales.

Comprendido esto, acerquémonos entonces a la *tesis de los compromisos ontológicos de las teorías*. Generalmente, aceptamos entidades en nuestra ontología vía la aceptación de teorías específicas. Esto es, cuando afirmamos una teoría como verdadera nos comprometemos con las demandas que la teoría tiene respecto al mundo y esto incluye, desde el punto de vista quineano, comprometernos con la existencia de los objetos descritos por la teoría o, en palabras de Quine, con los objetos que la teoría dice que hay. Dicho de otra manera, las teorías poseen condiciones de verdad, las cuales nos indican cómo tendría que ser el mundo y qué objetos o clases de objetos deberían existir para que la teoría sea verdadera. Estos últimos, los objetos que tendrían que existir en el mundo para satisfacer la verdad de la teoría, conforman los compromisos ontológicos de la teoría. En síntesis, los compromisos ontológicos de una teoría son las entidades que deberían existir en el mundo para que la teoría sea verdadera (Rayo, 2007). Por tanto, si mostramos que la existencia de un objeto es *indispensable* para la verdad de una teoría podemos afirmar que este objeto se encuentra en los compromisos ontológicos de esta teoría.

Pongamos por caso a la teoría biológica sobre el ADN. El ADN es un polinucleótido con una función biológica específica: es una molécula que transporta información genética en forma de instrucciones utilizadas en el desarrollo, el funcionamiento y la reproducción de todos los seres vivientes y de múltiples virus. La mayoría de las moléculas de ADN consisten en un par de polímeros lineales que se entrelazan para formar una estructura de doble hélice. Estos polímeros, a su vez, están formados por nucleótidos enlazados, de ahí el nombre *polinucleótido*. Los nucléotidos se componen de una desoxirribosa, una base nitrogenada (ya sea adenina, timina, citosina o guanina) y un fosfato que actúa como enganche entre ellos (Watson, 2003). En lo que toca a los compromisos ontológicos de la teoría del ADN, podemos afirmar que la existencia de los nucléotidos de adenina es indispensable para la verdad de la teoría, así como lo es la existencia del resto de las entidades mencionadas. Estas entidades forman parte de los compromisos ontológicos de la teoría, de sus condiciones de verdad, pues si ellas no existieran en el mundo la descripción del mundo que sostiene la teoría y, por ende la teoría, sería falsa.

Si, como he mencionado, aceptamos entidades en nuestra ontología vía la aceptación de teorías específicas, se hace necesario un método que determine los compromisos ontológicos de las teorías, es decir, un método para conocer de qué objetos es necesario reconocer la existencia cuando se sostiene como verdadera una teoría. El criterio de compromiso ontológico de Quine es un método cuantificacional para conocer dichos compromisos. Se trata de un método que en principio puede ser aplicado a cualquier teoría, sin importar si la teoría en cuestión es o no verdadera, esto es, si constituye o no nuestra mejor empresa epistémica. Por esta razón, *la tesis de los compromisos ontológicos* de las teorías es una tesis *descriptiva* que sencillamente afirma que cada teoría tiene un “peso ontológico” particular, es decir, que cada teoría se compromete con un conjunto definido de objetos existentes, el cual es determinado por medio del criterio de compromiso ontológico. Esto, sin embargo, es distinto de la *tesis óntica de Quine*, la cual trata sobre lo que de hecho existe aunque utiliza también el criterio de compromiso ontológico. En otras palabras, recurre al método del compromiso ontológico, pero solamente cubre aquellas teorías que aceptamos como verdaderas afirmando la existencia de los objetos indispensables para la verdad de nuestras mejores teorías.

Gracias a esta distinción se puede razonablemente esgrimir el criterio de compromiso ontológico y simultáneamente rechazar la tesis óntica de Quine. La posición empirista-constructivista de Van Fraassen ilustra esta distinción. Para Van Fraassen es claro que la física contemporánea está comprometida ontológicamente con las partículas subatómicas; por ejemplo, con la existencia de electrones. Podemos decir, si aplicamos el criterio de compromiso quineano, que estas entidades se encuentran en el "peso ontológico" de las teorías físicas contemporáneas. Sin embargo, esto no implica que Van Fraassen acepte que es racional creer en la existencia de electrones y que considere, por tanto, que debamos comprometernos prescriptivamente con su existencia.

Van Fraasen no se compromete con la existencia de electrones y demás entidades inobservables porque de acuerdo con su posición filosófica la ciencia no busca entregarnos con sus teorías "a literally true story of what the world is like" (1980: p. 8). La ciencia, sostiene en *The Scientific Image*, sólo trata con verdad los aspectos observables del mundo, no de los inobservables: "Science aims to give us theories which are empirically adequate; and acceptance of a theory involves as belief only that it is empirically adequate" (1980: p. 12). Si las teorías científicas se centran en explicar lo observable y por ello son sólo empíricamente adecuadas, entonces no es necesario comprometernos con todas las entidades que postulan, como sostiene la tesis óntica de Quine.

En síntesis, la tesis del compromiso ontológico de las teorías, como lo ilustra el constructivismo-empirista, es una tesis descriptiva sobre lo que existe de acuerdo con una teoría particular, mientras que la tesis óntica es una "invitación normativa", por así decirlo, sobre lo que de hecho existe en el Universo y está enmarcada en la filosofía naturalista de Quine. Hecha esta distinción, es momento de profundizar en el criterio quineano.

β. El criterio de compromiso ontológico

El criterio de compromiso ontológico de Quine, en su versión sofisticada, es un método cuantificacional para determinar los objetos que existen en el mundo de acuerdo con una teoría en particular. Como la distinción previa deja ver, funciona para cualquier teoría o esquema conceptual independientemente de si es o no verdadero; recordemos que el criterio es utilizado tanto en la tesis óntica de Quine como en su tesis sobre los compromisos ontológicos de la teorías. Esto es, nos encontramos con un método aplicable a cualquier teoría con independencia de su valor epistémico: "with it we have a more explicit standard to decide what ontology is committed to a given a theory or discourse" (Quine, 1948). Por esta razón, Philip Bricker (2014) afirma que el criterio de compromiso ontológico pertenece más al ámbito de la meta-ontología que al de la ontología; considerando que la ontología se ocupa del estudio del ser y de lo que existe, mientras que la meta-ontología se interesa por la naturaleza y la metodología de las preguntas ontológicas. En palabras de Bricker: "a meta-ontologists asks what entities exist according to a given theory or discourse" (2014).

Con este fin en mente, en *La Relatividad Ontológica y Otros Ensayos*, Quine esboza la noción básica que subyace a su criterio: "para mostrar que una teoría supone un objeto dado u objetos de una clase dada, debemos mostrar que esta teoría sería falsa si este objeto no existiera o si esta clase estuviera vacía" (Quine, 1977: p. 111). Más tarde, Quine también señala: "los objetos requeridos por una teoría son los objetos de los cuales ciertos predicados tienen que ser verdaderos para que esta teoría sea verdadera" (Quine, 1977: p. 130). En esta última formulación resulta claro por qué Putnam introdujo tan expeditamente el término *indispensabilidad.* Se trata de objetos existentes cuando éstos o sus predicados son *indispensables* para la verdad de la teoría.

No obstante, esta noción daría lugar a una versión más refinada del criterio, una ligada a la concepción de la lógica y del lenguaje de Quine (Fernández de Castro, 2009). En *On What There Is*, Quine enuncia formalmente el criterio de compromiso ontológico recurriendo a la Teoría de las Descripciones Definidas de Bertrand Russell. Ahí, Quine escribe: "a theory is committed to those and only those entities to which the bound variables of the theory must be capable of referring" (Quine, 1948: p. 33). Los compromisos ontológicos de una teoría son las entidades u objetos a los que las variables de la versión regimentada de la teoría deben poder referir para que ésta sea verdadera. Obsérvese que el compromiso ontológico en Quine reside en los valores de las variables, esto es, los objetos existentes son los valores que toman las variables determinadas por la versión regimentada de la teoría. Si en la versión regimentada una variable aparece dentro del rango de un cuantificador existencial, entonces debemos comprometernos ontológicamente con el objeto que toma el valor de dicha variable. De ahí la reconocida máxima quineana: “to be is to be the value of a variable” (1948: p.7).

Ahora bien, como he mencionado, aunque Quine no utiliza el término *indispensabilidad* y fue Putnam quien lo introdujo, el debate del argumento sí ha girado en torno a esta noción. Sorprendentemente, a excepción de algunos el autores (Colyvan, 2015; Field, 1980 y Baker 2009), el término ha recibido poco tratamiento, incluso Baker sostiene que el término ‘indispensable para la ciencia’ es vago (Baker, 2015). Colyvan (2015) afirma que lo primero debemos que distinguir es que ‘dispensabilidad’ no es lo mismo que eliminabilidad. Lo que quiere decir que una entidad sea dispensable no es que ésta puede ser eliminada, dispensabilidad quiere decir que podemos eliminar una entidad de una teoría y que la teoría resultante es atractiva, posiblemente, más atractiva que la original[4]. La indispensabilidad de las entidades matemáticas quiere decir, por tanto, que no podemos eliminar la referencia o cuantificación sobre los objetos matemáticos de nuestras mejores teorías científicas porque la teoría resultante sería menos atractiva.

En este punto es preciso observar que para la filosofía quineana no existen todos los objetos matemáticos tradicionales, en específico no existen los objetos postulados por los matemáticos puros que no encuentran aplicación en la ciencia, pues éstos no son indispensables para nuestras mejores teorías sobre el mundo; recordemos que existentes sólo son los objetos sobre los que tenemos que cuantificar para que nuestras mejores teorías científicas sean verdaderas. De inmediato se evidencia que en la concepción quineana de la ciencia las matemáticas puras no están incluidas. En sus escritos, Quine menciona que él utiliza el término *ciencia* de manera amplia; por ciencia no sólo

[4] Una teoría es atractiva por las virtudes epistémicas que posee, por ejemplo, la simplicidad, el éxito empírico y predictivo, el poder explicativo, etcétera.

entiende a las “ciencias duras”, sino también a las "softer Sciences, from psychology and economics through sociology to history" (1995: p. 49). Sin embargo, en *On Empirically Equivalent Systems of the World* nos dice que lo común a estas ciencias es que todas exhiben presumiblemente los marcadores de la observación, el método hipotético deductivo y una particular atención a las virtudes teóricas.

El método hipotético deductivo, como modelo de la investigación científica en el que la observación juega un papel fundamental, es una herencia de la larga tradición empirista. Aunque Quine se distancia de algunos de los dogmas empiristas, comparte con esta tradición la tesis cardinal que afirma que: “the only source of our knowledge of the world around is energy impinging on our sensory surfaces” (1990: p. 19). En la epistemología naturalizada de Quine todo conocimiento es conocimiento empírico sobre el mundo. En este cuadro, los objetos matemáticos sólo obtienen su estatus objetivo y ontológico en el marco de las teorías de la ciencia natural. Quine privilegia la ciencia natural y presta atención a las matemáticas sólo por el rol que desempeñan en la ciencias físicas, biológicas y sociales. En suma, el argumento de indispensabilidad sólo concede existencia a los objetos de las matemáticas aplicadas; al resto de las matemáticas puras, Quine las marca como a “mathematical recreation […] without ontological rights” (1986: p. 400).

Enseguida, explicaré los pasos que conforman el método quineano al dilucidar los supuestos de la filosofía del lenguaje y de la lógica sobre los que descansa. Comenzaré por exponer las motivaciones y los supuestos que llevaron a Quine a formular su criterio. Para ello me adentraré también en algunos aspectos de la filosofía del lenguaje de Bertrand Rusell, inspiración del criterio de compromiso ontológico de Quine. Es importante no perder de vista que, como he mencionado antes, Quine concebía a la metafísica como una de las labores encumbradas de la ciencia. La metafísica naturalizada debe poseer un método coherente con el método científico y debe ser una continuación de la búsqueda de la ciencia por conocer las verdaderas y fundamentales categorías de la realidad. Y bajo este supuesto debemos comprender por qué Quine adoptó y adaptó el método de Russell a la labor ontológica.

Como la máxima quineano deja ver, Quine rechaza el criterio tradicional por medio del cual aceptamos la existencia de un objeto o entidad. Es decir, Quine rechaza el nombrar como criterio para determinar lo que existe. Desde su perspectiva, es problemático afirmar la existencia de un objeto a partir del uso de un nombre. El argumento clásico para defender el criterio de compromiso ontológico y preferir el uso variables cuantificadas para medir los compromisos ontológicos de las teorías es expuesto en *On What There Is* en contraste con los problemas filosóficos y acertijos metafísicos que genera el uso de nombres como criterio de lo que existe.

En este célebre texto, Quine discute el antiquísimo problema metafísico que origina el uso de nombres vacíos. Consideremos, nos dice Quine, un nombre como *Pegaso*. Desde la perspectiva naturalista, es claro que podemos decir que no existe semejante criatura como Pegaso, es decir, podemos afirmar el enunciado existencial negativo 'Pegaso no existe'. Sin embargo, al afirmar este enunciado notamos que 'Pegaso' es un nombre significativo y entonces, nos surge la duda de si su significatividad se debe a que el objeto nombrado en algún sentido existe. Esto resulta problemático, porque el enunciado inicial justamente niega la existencia de Pegaso. Quine llama a éste 'el viejo acertijo platónico del no-ser' o 'el problema de la barba de Platón'. El problema surge cuando los metafísicos sostienen que el no-ser en algún sentido debe ser, pues, de lo contrario, sería un sinsentido utilizar significativamente el nombre:

> Nonbeing must in some sense be, otherwise what is it that there is not? Thus, take Pegasus. If Pegasus were not, McX argues, we should not be talking about anything when we use the word; therefore it would be nonsense to say even that Pegasus is not. Thinking to show thus that the denial of Pegasus cannot be coherently maintained, he concludes that Pegasus is (Quine, 1948: p. 2).

Para personificar esta posición, Quine imagina a McX, un filósofo que asume que el objeto nombrado por el nombre 'Pegaso' existe, puesto que se trata de un nombre significativo. En su discurrir, McX concluye que el objeto existente al que 'Pegaso' refiere es una idea, una entidad intensional. Luego de McX, Quine explora una alternativa meinongiana a esta cuestión y lo hace desde la perspectiva de Wiman, un filósofo que sostiene que Pegaso existe, pero que se trata de una entidad posible no actualizada.

Los personajes ilustrados por Quine muestran que si optamos por el nombrar como criterio de lo que existe, es decir, si asumimos que existe un objeto sólo porque es significativamente nombrado, obtendremos una metafísica desordenada y sobrepoblada. Semejante metafísica ofendería el gusto estético de los que disfrutan de paisajes desérticos, nos dice Quine en una de sus líneas más elegantes. Pero más allá de las consideraciones estéticas, la cuestión radica en que este criterio nos llevaría a comprometernos con entidades inexistentes, con distintos sentidos del término *existir* y, al final, con la imposibilidad de un criterio ontológico certero:

> Wyman's overpopulated universe is in many ways unlovely. It offends the aesthetic sense of us who have a taste for desert landscapes, but this is not the worst of it. Wyman's slum of possibles is a breeding ground for disorderly elements. Take, for instance, the possible fat man in that doorway; and, again, the possible bald man in that doorway. Are they the same possible man, or two possible men? How do we decide? (Quine, 1948, p. 2)

En *Hamlet*, Shakespeare nos advierte: "existen más cosas en el cielo y en la tierra de aquellas que son soñadas en una filosofía". Quine, sin embargo, como nos deja ver en *On What There Is,* está más bien preocupado por asegurarse de que no existan más objetos en la filosofía de los que hay en el cielo y en la tierra (Raymo, 2008). En consecuencia, piensa que requerimos de un método de compromiso ontológico que palie la profusión metafísica. Es así como entran en escena los cuantificadores existenciales y las variables.

Buscando sortear los enredos metafísicos de antaño, Quine recurre a la Teoría de las Descripciones Definidas de Bertrand Russell para formular el criterio de compromiso ontológico, pues esta teoría resuelve el debate metafísico al permitir el uso significativo de nombres sin que éstos presupongan la existencia de las entidades que los términos pretenden referir. Con esta ventaja en mente, exploremos la propuesta russelliana con el propósito de arrojar una nueva luz sobre la labor del criterio de compromiso ontológico.

Si echamos un vistazo a la filosofía del lenguaje de Bertrand Russell, comprenderemos desde un inicio que, para él los nombres propios funcionan en realidad como descripciones definidas abreviadas. En su libro *Los problemas de la filosofía,* Russell precisa que una descripción definida es una frase de la forma "el esto y aquello", es decir, se trata de una expresión formada por un artículo definido seguido por un predicado simple o complejo. Bajo esta óptica, el nombre propio 'Bach', por poner un ejemplo, es en realidad una abreviatura de la descripción definida 'el compositor más famoso del Barroco'. Y lo mismo sucede cuando afirmo un enunciado que contiene un nombre propio como 'Kawabata está deliberando'; en este caso, el pensamiento real, según la teoría russelliana, es un enunciado con una descripción definida como: 'El escritor de *Lo Bello y lo Triste* está deliberando'. Con esta sustitución, Russell muestra una vía para eliminar los problemáticos nombres propios y, una vez eliminados éstos, Russell propone una teoría que se aplica a las descripciones definidas.

Antes de adentrarme en la Teoría de las Descripciones Definidas de Russell me gustaría hacer la siguiente observación: Juan José Acero comienza su artículo "Descripciones Definidas, Composicionalidad y Forma Lógica*"* sugiriendo que no siempre se presenta a la Teoría de las Descripciones Definidas de Russell como un apartado de una teoría suya mucho más general a saber: su Teoría de los Símbolos Incompletos. En este trabajo, haciendo caso de la sugerencia de Acero, expondré la Teoría de las Descripciones Definidas en el marco de la Teoría de los Símbolos Incompletos, pues considero que dicha exposición mostrará qué es lo que Quine apreciaba de la filosofía del lenguaje de Russell y, a su vez, iluminará nuestra comprensión del criterio ontológico de Quine y de algunos de los supuestos del argumento de indispensabilidad.

En *On Denoting,* Russell (1905) expone cuatro acertijos filosóficos relacionados con la referencia. Por su relevancia respecto a este trabajo, sólo mencionaré dos de ellos. El primero es el caso de los enunciados existenciales singulares, caso que analizamos previamente con el ejemplo: 'Pegaso existe'. Russell dice que el problema con estos enunciados es que tienen como sujeto un nombre propio, pues si el enunciado es verdadero, es decir, si el referente de hecho existe el enunciado resulta trivial. Y si, por el contrario, el enunciado es falso, nos encontramos con un enunciado contradictorio, pues presuponemos que existe el portador al usar significativamente el nombre mas luego negamos su existencia. El segundo acertijo surge con los enunciados que contienen términos singulares denotativos, por ejemplo: 'El actual rey de Francia es calvo'. Estas oraciones violan el Principio del Tercer Excluso, pues, como notamos en el ejemplo, la oración no es verdadera (ya que Francia actualmente es una República democrática), pero su contraria 'El actual rey de Francia no es calvo' también es falsa.

Para resolver estos acertijos Russell propone la Teoría de los Símbolos Incompletos. Esta teoría se ocupa de las expresiones denotativas; una expresión denotativa es cualquier frase formada por un sintagma cuantificacional (como 'algún F', 'todos los F', 'cualquier F', 'un F' o 'el F') y un predicado (F). Algunos ejemplos de expresiones denotativas son: 'algún escritor', 'un autor', 'todos los pintores', pero también las descripciones definidas como 'el autor de *El banquete'* son expresiones denotativas. Obsérvese que una expresión es denotativa en virtud de su forma, independientemente de si existe o no el individuo que satisface la descripción. La tesis fundamental de la teoría russelliana sostiene que las expresiones denotativas son símbolos incompletos y que, como tal, están supeditados al 'Principio Fundamental de la Teoría de la Denotación' (PFTD) (Acero, 2005). De acuerdo con este principio: "[…] las expresiones denotativas nunca poseen significado alguno consideradas en sí mismas, pero […] toda proposición en cuya expresión verbal intervienen aquéllas posee un significado" (Russell [1905, 1966: p. 56).

Ahora bien, de inmediato salta a la vista que el PFTD contrasta con uno de los principios protagonistas de la filosofía del lenguaje: el Principio de Composicionalidad de Frege, según el cual el significado de un enunciado o de una expresión compleja se determina por las propiedades referenciales de sus partes, es decir, por la estructura y los significados de sus constituyentes. Formulemos el Principio de Composicionalidad (PC) de la siguiente manera: el significado de un enunciado o expresión *e* es determinado por la estructura de *e* y por los significados de los constituyentes de *e* (Szabó, 2013). El Principio fregeano supone que si conocemos el significado de cada una las partes de un enunciado y cómo éstas se relacionan entre sí, entonces conoceremos el significado del enunciado. Para Frege el significado se construye a partir de la referencia de las partes.

La Teoría de las Descripciones Definidas de Russell, como parte de su Teoría de los Símbolos Incompletos, propone que las descripciones definidas son expresiones denotativas, es decir, son expresiones no referenciales. Lo que Russell está diciendo con esto es que las descripciones definidas son excepciones al Principio de Composicionalidad, pues no son expresiones que contribuyen independiente y composicionalmente al significado de un enunciado, sino que, en vista de su naturaleza denotativa son símbolos incompletos que no tienen significado por sí mismas y que sólo lo obtienen en el contexto de un enunciado. En tanto símbolos incompletos están supeditados al PFTD:

> Russell entendió que las expresiones denotativas, y también, por tanto, las descripciones definidas, eran expresiones sincategoremáticas o, como él dijo, símbolos incompletos: expresiones que necesitan articularse con el resto de los componentes de una oración para poder ejercer su cometido semántico, aunque sin aportar elemento separado alguno al significado de estas oraciones […] (Acero, 2005: p. 32)

Dada esta teoría, el análisis de Russell procede a eliminar las descripciones definidas reduciéndolas a fórmulas que muestran su naturaleza denotativa. Esto, en parte, con el objetivo de solucionar los acertijos metafísicos mencionados (entre ellos, el problema de los enunciados singulares existenciales y el de los términos singulares denotativos). Russell describe el proceder de su análisis en el siguiente pasaje de *On Denoting,*: "mi análisis se trata de una reducción de todas las proposiciones en que intervienen expresiones denotativas a fórmulas en las que no intervienen tales expresiones" (Russell, 1905: p. 355).

Mientras los nombres propios lógicos tienen referentes asociados a ellos[5] las descripciones definidas, para Russell, no tienen una unidad lógica-semántica independiente como el Principio de Composicionalidad sostiene, sino que más bien son símbolos incompletos cuyo significado es necesario establecer por medio de una 'definición contextual'. En esta definición contextual, una descripción definida es comprendida como un conjunto de cuantificadores (por ejemplo, 'algún', 'todo') y de funciones proposicionales ('x es un autor', 'x es un rey de Francia'). De esta manera, en la notación del *Principia Mathematica,* un enunciado que contiene una descripción definida como lo es 'el autor de Waverley es un poeta' se define como la conjunción de tres cláusulas:

(1) existe al menos un W,
(2) existe a lo sumo un W, y
(3) todo lo que sea W es P.

(C) Las tres cláusulas pueden resumirse en la siguiente fórmula:

[5] Un nombre propio lógico es un símbolo que designa directamente a un individuo, el cual es el significado del término (Russell, 1918).

$((\exists x)\ (Wx\ \&\ (\forall y)(Wy \supset y=x)\ \&\ Px)$
(Hay un único W y (para todo x, si x es W, entonces x es P)

En suma, para el análisis de Russell que comprende las descripciones definidas como símbolos incompletos, lo que el enunciado ‘el autor de Waverley es un poeta’ quiere decir es que existe un único objeto que es el autor de Waverley y que tal objeto tiene la propiedad de ser un poeta. En otras palabras, existe alguien (o mejor dicho, algo) que escribió Waverley y era poeta y nadie (nada) más escribió Waverley.

Como puede observarse, la teoría de Russell plantea un modo de analizar las descripciones definidas exhibiendo su naturaleza denotativa, su carácter de símbolos incompletos y, a su vez, mostrando la contribución semántica que hacen a la proposición completa en la que se encuentran engastadas. Si analizamos desde Russell un enunciado de la forma ‘El F que G es H’, en la formalización $(\exists x\ [(Fx \wedge Gx \wedge \forall y\ (Fy \wedge Gx \supset y=x)\ \&\ Hx])$, observaremos que una descripción definida no es un constituyente referencial y sintagmático. No obstante, también notaremos, tal como establece el PFTD, que los predicados ‘F’ & ‘G’ hacen una contribución semántica a la proposición; sólo que contribuyen al significado completo de la proposición de otra manera, no nombrando objetos.

Una vez expuesta la teoría russelliana, es momento ahora de distinguir algunos supuestos de la teoría de la referencia de Russell que son relevantes y atractivos para Quine, tanto para su criterio de compromiso ontológico como para su filosofía del lenguaje. Son estos supuestos los que más tarde me permitirán comprender qué significa para Quine que un objeto exista en el Universo. Comencemos por el primero, que trata sobre la naturaleza de los predicados. En el análisis de Russell los predicados que aparecen en una proposición (‘F’ & ‘G’) denotan conceptos, no denotan objetos y decimos que denotan conceptos; es decir, no decimos que refieren a ellos porque la proposición en la que aparecen no es acerca del concepto más bien es acerca de un objeto que satisface o no el concepto. Por ejemplo, si utilizamos el predicado ‘cerebro’ en el enunciado ‘El cerebro con mayor materia gris que ha sido estudiado’ claramente no hablamos sobre el concepto ‘cerebro’, sino que hablamos sobre todos y cada uno de los cerebros del universo estudiado y hablamos de un cerebro en particular.

Como nos deja ver el ejemplo, para Russell los predicados pueden aparecer como sujetos gramaticales de un enunciado aparentando ser nombres propios y cuando lo hacen generalmente se encuentran precedidos por una expresión del tipo 'algún', 'el', 'cada' o 'todos'. Lo que nos deja ver que la noción de predicado está ligada sobre todo a la noción de cuantificación. A su vez, para Russell un predicado es una "expresión que, independientemente de si aparece como sujeto gramatical o no, da lugar a o está asociada con muchas otras nociones; el predicado 'perro' está asociado con lo 'canino' y con la 'animalidad'" (Russell en Tomasini, 2004). Esta observación nos deja entrever la naturaleza conceptual de los predicados. Podemos concluir que lo distintivo de un predicado es su naturaleza denotativa, no referencial, incluso cuando funge como un sujeto gramatical. Ahora, si tomamos en cuenta que en el análisis russelliano una descripción definida es "desglosada", por así decirlo, en predicados, comprenderemos que las descripciones definidas realmente no son nombres que tienen un significado completo.

De esta manera, entra en escena el segundo supuesto a notar, el cual tiene que ver con la reconfiguración lingüística de la referencia que el análisis de Russell plantea. En la traducción de Russell comprendemos que las descripciones definidas son símbolos incompletos que necesitan articularse con el resto de los elementos de un enunciado para ejercer su contenido semántico. Esto es, no funcionan como nombres gramaticales que refieren directamente al objeto nombrado, el cual es su significado. Más bien son expresiones de la forma "el tal y cual" que se usan en una afirmación de que un objeto del dominio del Universo y sólo él satisface determinados predicados.

Por medio de su análisis, Russell expone de una manera particular el contenido semántico de un enunciado que contiene una descripción definida: por un lado, muestra que lo distintivo de un predicado es su naturaleza denotativa, incluso cuando funge como un sujeto gramatical. Y, por otro lado, sitúa la referencia objetiva en las variables cuantificadas. En contraste con el criterio ontológico tradicional que demanda una referencia objetiva para los nombres significativos, en la teoría russelliana la referencia es tomada por las variables en fórmulas cuantificadas universal o existencialmente:

> In Russell's translation the burden of objective reference which had been put upon the descriptive phrase is now taken over by words of the kind that logicians call bound variables, variables of quantification, namely, words like "something", "nothing", "everything". These words, far from purporting to be names specifically of the author of Wa-

> verley, do not purport to be names at all; they refer to entities generally, with a kind of studied ambiguity peculiar to themselves (Quine, 1948: p. 4).

Las variables de cuantificación no presuponen ningún objeto preasignado, pues no son propiamente nombres, sino que refieren a las entidades en general. Sólo una vez analizado el enunciado completo asignamos el o los objetos correspondientes a las variables, es decir, conocemos sus valores. Los nombres significativos no son un criterio de lo existente. Con esta observación sobre la referencia en Russell comenzamos a vislumbrar el sentido de la máxima quineana "ser es ser el valor de una variable".

Asimismo, comprendemos a cabalidad cómo el análisis russelliano soluciona satisfactoriamente el viejo problema platónico del no ser y demás paradojas lógicas que son insolubles si atendemos la mera gramática de los enunciados. Por medio de la paráfrasis que Russell propone podemos hacer uso, por ejemplo, del nombre ficticio 'Gatsby' sin presuponer su existencia y sin incurrir, en consecuencia, en una paradoja lógica. No incurrimos en una paradoja lógica al afirmar el enunciado existencial negativo 'El gran Gatsby no existe', pues lo que estamos diciendo es que la proposición $\exists x(G(x) \& \forall y(G(y) \supset y=x))$ no es verdadera para ningún valor que x pueda tomar; no hay ningún objeto en el dominio del Universo que satisfaga los predicados contenidos en esta proposición. La referencia objetiva es tomada por las variables de cuantificación en vez de los nombres gramaticales. Las variables refieren a los objetos en general y si ninguno de ellos satisface el predicado dentro del rango de la variable cuantificada, el enunciado simplemente será falso.

Finalmente, el último supuesto que me gustaría mencionar se relaciona con la concepción russelliana de la existencia. Los enunciados analizados à la Russell afirman tanto singularidad como existencia. Es decir, afirman que solamente un objeto determinado posee cierta propiedad o una constelación de propiedades y, al hacerlo, también afirman la existencia de tal objeto. Sin embargo, no porque una letra argumental, es decir, una variable, aparezca a lado de un cuantificador existencial, debemos asumir que el cuantificador es un predicado de objetos; éste sólo se refiere indirectamente a los objetos que ejemplifican las propiedades en cuestión. Con esta observación advertimos que Russell comparte con Frege cierta concepción de la existencia, pues para ambos ésta es una propiedad de segundo orden, esto es, que no es una propiedad de objetos, sino de conceptos. Por tanto, cuando decimos que existe oxígeno en Marte estamos afirmando que el concepto ‘oxígeno en Marte’ no es vacío, en tanto que es satisfecho por al menos un individuo. En contraste con el concepto ‘gran Gatsby’, que es un concepto vacío. En su libro, *Filosofía Analítica: un Panorama* Tomasini Bassols (2004) explica ilustrativamente qué quiere decir que la existencia sea una propiedad de segundo orden para Russell:

> Afirmar que algo existe no es adjudicarle a ese algo una extraña propiedad llamada “existencia”, sino simplemente decir que el objeto del que se habla tiene determinada propiedad y afirmar que no existe es indicar que ninguna propiedad quedó ejemplificada. Es al afirmar que algo es rojo o cuadrado o bello o interesante o lo que sea que automáticamente damos a entender que la cosa existe, pero no tiene sentido afirmar la existencia por sí sola, como si fuera una propiedad más que las cosas pudieran tener o de la cual pudieran carecer con independencia de otras (Tomasini, 2004).

El cuantificador existencial no es un predicado, sino más bien cubre predicados especificando su extensión en dos sentidos: por un lado, cuando afirma si el concepto es o no vacío (puesto que no todos los conceptos subsumen objetos reales) y, por otro lado, al afirmar qué relación hay entre la extensión de un predicado y la de otro (Diez Martínez, 2005).

En este punto comprendemos cómo en la teoría russelliana los enunciados pueden contener nombres significativos o descripciones definidas sin que éstos presupongan la entidad nombrada. A partir de esto podemos deducir cómo esta teoría resuelve satisfactoriamente los dos acertijos metafísicos, pues las expresiones denotativas no poseen valores semánticos independientes[6]. A su vez, distinguimos algunos de los elementos de la teoría de la referencia de Russell que son relevantes y atractivos para Quine, tanto para su criterio de compromiso ontológico como para su filosofía del lenguaje, pues es

---

[6] Recordemos los dos acertijos. El primero es de los enunciados existenciales negativos, cuya solución apenas he examinado y el segundo es el que plantea el enunciado: ‘El rey de Francia es calvo’. De acuerdo con el análisis que ofrece la teoría russelliana de las descripciones definidas este enunciado es falso, pues ningún objeto satisface el enunciado $\exists x(R(x) \& \forall y(R(y) \supset (y=x)) \& C(x)$. Por tanto, su contrario, ‘El actual rey de Francia no es calvo’, en virtud del Principio del Tercer Excluso, debe ser verdadero. Russell afirma que este último enunciado es ambiguo. Su teoría explica la ambigüedad y propone las dos siguientes interpretaciones, una de las cuales es verdadera, a saber la segunda. La primera de ellas $\exists x(R(x) \& \forall y(R(y) \supset (y=x)) \& \neg C(x))$ que se lee de la siguiente manera: Hay un único rey de Francia y (para todo x, si x es rey de Francia entonces x NO es calvo; la segunda: $\neg\exists(R(x) \& \forall y\ (R(y) \supset (y=x) \& C(x))$ que quiere decir que NO (hay un único rey de Francia y (para todo x, si x es rey de Francia entonces x es calvo). Así es como Russell resuelve el acertijo resguardando el Principio del Tercer Excluso.

con la teoría de Russell como base que Quine establecerá una liga fundamental entre su concepción de los cuantificadores y variables y su teoría de la psicogénesis de la referencia, esto es, su teoría sobre cómo llegamos a referirnos exitosamente a los objetos existentes.

La teoría de Russell no sólo resuelve el debate metafísico, sino que incorpora un método compatible con ideas fundamentales de la filosofía quineana, en particular con supuestos sobre el lenguaje de la ciencia y la labor ontológica según Quine. Estos supuestos explican la motivación de Quine para retomar la traducción de Russell y formular con ella el criterio de compromiso ontológico. A continuación retomaré por última vez el criterio quineano, sólo que ahora lo expondré a la luz de la teoría russelliana. Después, expondré brevemente las motivaciones de Quine para retomar a Russell.

En *La relatividad ontológica y otros ensayos,* Quine sostiene que “los objetos requeridos por una teoría son los objetos de los cuales ciertos predicados tienen que ser verdaderos para que esta teoría sea verdadera” (Quine, 1977: p. 111). El método para conocer dichos objetos es el siguiente: el primer paso es traducir la teoría à la Russell, es decir, al cálculo de predicados de primer orden con un número finito de predicados y sin constantes individuales. Supongamos que T’ es el resultado de dicha operación. En sus textos Quine llama a esta operación la regimentación de las teorías y a T’ la versión canónica o regimentada de la teoría. Los compromisos ontológicos de T son los objetos que deben ser contados entre los valores de las variables de T’ para que los enunciados de T’ sean verdaderos.

Siguiendo el análisis de Russell, en T’ encontramos el contenido semántico de la teoría T expuesto en enunciados existenciales en los que los únicos términos referenciales son las variables. Por su naturaleza, las variables refieren a los objetos en general, a su objetividad, entendida ésta como su cualidad de ser objetos. Por esta razón, el uso de variables en la traducción no presupone la existencia de un objeto en particular. Sólo cuando un predicado se encuentra dentro del rango de una variable cuantificada podemos referirnos a un objeto en particular, a saber, al objeto que satisface el predicado en cuestión. Los predicados apuntan las propiedades que determinan a los objetos y, en consecuencia, son los que nos permiten distinguirlos unos de otros. A pesar del importante papel que desempeñan los predicados en determinar el valor de las variables, no olvidemos su carácter de símbolos incompletos, su naturaleza denotativa e insaturada en proposiciones en las que sólo las variables son los términos singulares que refieren.

Si el criterio de compromiso ontológico es un método que rastrea los objetos indispensables para la verdad de una teoría y en este rastreo hemos notado que la función de los predicados es central, entonces el criterio se centrará en apuntar los predicados que deben ser verdaderos de los objetos. Si T' afirma un enunciado de la forma "$\exists x(F(x))$", entonces T no puede ser verdadera a menos que exista un objeto que instancie el predicado F. Si queremos mostrar que una teoría postula un objeto que instancia F, debemos mostrar que esta teoría sería falsa si el predicado F no quedara ejemplificado en un objeto. Asimismo, decimos que estamos comprometidos con la existencia de los objetos de la clase K si T' implica el enunciado $\exists x(F(x))$, donde F es un predicado al que sólo lo satisfacen los objetos de la clase K.

Como la exposición nos deja ver, el criterio de compromiso ontológico de Quine, así como su concepción de lo que es un objeto están intrínsecamente ligados a la notación de Russell y a los supuestos que conlleva. Para Quine comprometerse con la existencia de un objeto es comprometerse a utilizar la lógica de primer orden con identidad para razonar sobre él y ser un objeto significa simplemente ser el valor de una variable. A su vez, no perdamos de vista la distinción entre conceptos y objetos que el criterio quineano asume al adoptar el análisis russelliano. En la ontología quineana las variables cuantificadas son los únicos términos singulares que refieren a objetos, mientras que los predicados son verdaderos o falsos de los objetos, es decir, los objetos satisfacen o no los predicados de naturaleza denotativa; razón por la cual podemos hablar de conceptos vacíos. Los predicados son expresiones que denotan conceptos por medio de los cuales pensamos a los objetos

Una vez revisado el criterio de compromiso ontológico a la luz de la teoría russelliana, adentrémonos en las motivaciones de Quine para retomar el análisis de Russell. Al finalizar esta exposición, en conjunto con lo hasta ahora ya expuesto, se comprenderá: (i) por qué sólo podemos hablar de la existencia de objetos cuando empleamos variables y cuantificadores; (ii) qué significa que un objeto exista en el Universo y, finalmente, (iii) el rol del criterio de compromiso ontológico en el argumento de indispensabilidad que nos llevará a comprender la indispensabilidad cuantificacional.

La primera y más transparente razón por la que Quine encuentra atractivo el análisis de Russell es porque en él los únicos términos referenciales son las variables. Y las variables por su naturaleza no presuponen entidad alguna como los nombres, sino que varían sobre el dominio de los objetos existentes y su valor se determina sólo en el contexto de enunciado. De esta manera, en el marco de una ontología consecuencialista, Quine encuentra en Russell un método de traducción "metafísicamente neutral" que puede determinar los objetos que existen según una teoría determinada sin presuponer la existencia de algún objeto en particular sólo por el uso de un nombre significativo; de esta manera se libera de los problemas metafísicos que acompañan al uso de nombres. El método quineano convierte todo nombre a predicado apuntando así las propiedades de los objetos requeridos por la teoría y, por consiguiente, los objetos que la verdad de la teoría demanda sin suponer *a priori* ninguno de ellos:

> If our logic is first-order, there are no logical objects: to accept first-order logic is not to commit oneself to the existence of any particular kind of entity. It does commit one to accepting that at least one object exists, but it requires no assumptions at all about the nature of that object (Hylton, 2007: p. 267)

La única presuposición metafísica robusta en este método es que lo que existe en el Universo son entidades u objetos. Y éste es un supuesto quineano fundamental. Lo que existe conforma el dominio de la cuantificación y, para Quine, se trata de un conjunto de objetos cuya totalidad no posee estructura interna o jerarquía. O al menos su estructura no es relevante para la labor ontológica como Quine la concibe. En consecuencia, la labor ontológica para Quine consiste en enlistar el catálogo de seres o entidades (Schaffer, 2009). La ontología se convierte así en un catálogo de objetos el cual está dado por los valores de las variables de los enunciados existenciales à la Russell.

Esto nos deja ver, como he mencionado, que estamos frente a un método propio de una "ontología consecuencialista" según la cual sólo podemos referirnos a objetos y comprometernos ontológicamente con ellos desde una teoría previamente seleccionada. Éste es, a su vez, otro supuesto fundamental de la filosofía quinenana:

> This formula ("To be is to be the value of a variable") serves rather in testing the conformity of a given remark or doctrine to a prior ontological standard. We look to bound variables in connection with ontology not in order to know what there is, but in order to

> know what a given remark or doctrine, ours or someone else's, says there is (…) (Quine, 1948).

Para la filosofía quineana la noción de objeto sólo tiene sentido en el marco de una teoría particular: "We do not first settle what objects there are in some presuppositionless or pretheoretical fashion and then construct a theory with that ontology" (Hylton, 2007: p. 233). En suma, la traducción russelliana es el lenguaje ideal para la concepción de la ontología de Quine, pues se trata de un lenguaje apropiado para una ontología consecuencialista, ya que no supone la existencia de un objeto o clase de objeto en particular al utilizar como términos singulares a las variables y, simultáneamente, opera en una teoría previamente seleccionada.

Ahora bien, continuemos con la segunda y la principal motivación. Se trata de una que involucra distintos momentos del pensamiento quineano. Por lo mismo, primero haré una breve revisión de estos momentos y sólo hasta el final se comprenderá la principal motivación de Quine para retomar el análisis de Russell.

Comenzaré por decir que para Quine la referencia a objetos no es una relación semántica fundamental, como lo es para los filósofos que esgrimen el Principio de Composicionalidad; en todo caso, se trata de una relación derivativa (Glanzberg, 2012). Para la filosofía quineana la referencia a objetos no surge de los enunciados observacionales que contienen términos singulares. Por ello, nos dice Quine, no podemos hablar de la referencia a un particular en el caso de un niño que aprende a hacer uso del término 'mamá'. Esto, porque la relación de referencia no es inmediata, sino es una relación que se va construyendo a lo largo de todo un proceso cognitivo en el que sólo desarrollamos toda potencialidad del lenguaje como un aparato referencial cuando optamos por el uso de cuantificadores, variables y predicados. No podemos, nos dice Quine, referirnos propiamente a la totalidad de los objetos existentes en el Universo hasta que utilizamos el lenguaje de la lógica de primer orden. Quine da cuenta de la génesis y el desarrollo de este proceso cognitivo en su teoría sobre la Psicogénesis de la Referencia (1960b; 1974; 1992; 1995). Exploremos brevemente la teoría con la finalidad de comprender a plenitud la principal motivación de Quine para adoptar el análisis russelliano aunque ya bien sabemos que esta motivación está conectada con su concepción de la metafísica naturalizada[7].

δ. La teoría de Psicogénesis de la Referencia

En su teoría sobre la Psicogénesis de la Referencia Quine explica cómo adquirimos la capacidad de referirnos a los objetos existentes en un proceso que comienza en los albores de la infancia con la adquisición del lenguaje natural y culmina con el lenguaje regimentado de la ciencia. Se trata de una teoría compatible con el naturalismo quineano, pero también de una teoría fundamentalmente conductista que explica el significado atendiendo a la conducta de los hablantes en circunstancias observables: "There is nothing in linguistic meaning beyond what is to be gleaned from overt behavior in observable circumstances" (Quine, 1992: p. 38). Si queremos comprender la génesis del significado lingüístico, escribe Quine, debemos atender a aquellas situaciones que podrían contar como condiciones estímulo y a cómo éstas se encuentran pareadas a las palabras y a los enunciados.

Con este supuesto, Quine explica cómo adquirimos el lenguaje en la primera infancia. Según Quine, cuando de pequeños emitimos exitosamente un enunciado observacional como 'Ahí hay un conejo' ('Gavagai') es porque hemos aprendido y establecido correctamente la correspondencia entre las condiciones estímulo y el comportamiento de los otros hablantes que nos rodean, quienes asienten o disienten frente a nuestra afirmación del enunciado. Lo que explica que para Quine estos enunciados no involucren la relación de referencia, dado que su significado no refiere a objetos particulares, sino a las condiciones estímulo y al comportamiento de los hablantes en el contexto de emisión. La comprensión y el uso de estos enunciados no presupone la referencia a un objeto determinado; en este caso, no presupone la referencia a un conejo particular y

[7] En la exposición de esta teoría me apoyaré en los textos de Quine y en la interpretación que Michael Glanzberg (2012) ofrece en *Quine on Reference and Quantification.*

tampoco supone que estamos predicando de él una propiedad determinada: “Even at this stage, there is no denotation, no reference to bodies or other objects, to my way of reckoning” (Quine, 1995: p. 22).

Para Quine, la referencia, en tanto relación derivativa, sólo ocurre en etapas posteriores del desarrollo lingüístico; es necesario un salto cognitivo que transite de las condiciones estímulo y del comportamiento de los hablantes, de lo que Quine (1995) llama “the repeatable features of the passing show”, a la referencia a los particulares. Sin embargo, aunque no haya referencia en ellos, Quine nos dice que los enunciados observacionales son fundamentales porque con ellos se inaugura el lenguaje cognitivo pues son expresiones “that can be conditioned to global stimuli without the aid of prior language” (Quine 1995, p.22). Se trata de enunciados con los que aprendemos el lenguaje y por esta razón exhiben la manera fundamental en la que éste se relaciona con el mundo.

En *Quine on Reference and Quantification,* Glanzberg (2012) dice que resulta fructífero mirar a la Teoría sobre la Psicogénesis de la Referencia como un ejercicio kantiano. Es una teoría de corte kantiano, escribe Glanzberg, porque en ella se investigan las condiciones de posibilidad de la referencia, es decir, en esta teoría Quine se pregunta por las herramientas y los dispositivos gramáticos que un hablante tendría que dominar para dominar la referencia a objetos en el Universo. De acuerdo con la teoría quineana, no son los enunciados observacionales, sino el uso de predicados y de ‘términos generales’ la primera de las herramientas lingüísticas que involucra la relación de referencia. Esto es: “It is with full fledged general terms like ‘apple’ or ‘rabbit’, that peculiarities of reference emerge which call for distinctions not implicit in the mere stimulatory occasions of occasion sentence” (Quine 1960, 91). El uso de términos generales por ejemplo, ‘conejo’ requiere, nos dice Quine, de un proceso de individuación y de distinciones que superan cognitivamente a las herramientas lingüísticas y cognitivas demandadas por los enunciados observacionales. Es decir, requiere que el hablante vaya más allá de los significados estímulo asociados con los enunciados y que comprenda el rol de los particulares. Que comprenda, por ejemplo, qué hace a un individuo un conejo.

Si bien con el uso de términos generales o predicados emprendemos un paso significativo hacia la relación de referencia, en especial si hablamos de la referencia a los objetos físicos, no es sino hasta el uso de cuantificadores y variables cuando podemos establecer exitosamente esta relación y, más aún, donde podemos hablar de la existencia de toda clase de objetos del Universo. Se hace claro que, de acuerdo con Quine, para lograr la relación de referencia es necesario desarrollar e ir afinando un aparato lingüístico particular. En 1974 sostiene que este aparato referencial emerge en un primer momento de la estructura de los enunciados subordinados, tesis que ilustra en *The Roots of Reference* con el enunciado 'I bought Fido from a man that found him' [Yo compré a Fido de un hombre que lo encontró].

Si retomamos este ejemplo, nos dice Quine, notaremos que en el lenguaje no sólo mencionamos objetos (Fido o 'x') y les atribuimos propiedades, sino que en él también establecemos complejas relaciones de predicación. A su vez, en este ejemplo notamos que los enunciados subordinados exhiben una particular estructura interna que introduce en el lenguaje el uso de variables. En consecuencia, en estos enunciados acontece la primera reificación de los objetos. Observemos, retomando el ejemplo, que el enunciado 'el perro que encontró el hombre' introduce en el lenguaje el uso de variables ('x' & 'y') al exhibir en su estructura la relación: 'y encontró x'. A su vez, y no por casualidad, el uso de variables en estos enunciados abre la puerta para la cuantificación: "mastery of relative clauses with the internal structure of bound variables opens the way for quantification in its familiar forms" (p. 377). Así, una vez introducidas las variables podemos hablar de la singularidad y la existencia de los distintos objetos contables que establecen alguna clase de relación.

De esta manera podemos afirmar una tesis fundamental de la filosofía del lenguaje de Quine: la reificación de los objetos, la posibilidad de referirnos a ellos como existentes, ocurre cuando introducimos en el lenguaje a las variables cuantificadas. Ahora, si queremos comprender por qué la reificación ocurre con la introducción de las variables, tenemos que mirar su función en el lenguaje. De acuerdo con Quine, las variables son un signo lingüístico exitoso porque por medio de ellas podemos identificar, rastrear y llevar el récord de objetos particulares. Es la mejor manera lingüística que hemos encontrado. En otras palabras, se trata de la mejor herramienta lingüística para hablar de los objetos, de sus relaciones y dependencias predicativas a través de contextos, en especial, cuando los predicados que nos permiten pensarlos se encuentran engastados en enunciados complejos. El ejemplo anterior nos deja ver esto claramente, las variables nos permiten exponer el contenido semántico de un enunciado distinguiendo los objetos involucrados y manteniedo rastro de los mismos mientras exhibimos las relaciones en las que se encuentran engastados.

Así, tanto por sus virtudes para identificar y distinguir objetos, así como por su capacidad para mantener transparentes las relaciones entre los mismos, Quine considera la introducción de las variables en el lenguaje un éxito cognitivo en la empresa lingüística de la referencia. La lógica de primer orden es un aparato lingüístico poderoso que por sus virtudes como herramienta lingüística garantiza la relación de referencia y por ende, es en este estadio lingüístico donde acontece la reificación de los objetos. Y si Quine concibe la ontología como la regimentación de las teorías a la lógica de primer orden, entonces en esta labor culminará la empresa lingüística de la referencia; es ahí donde podremos referirnos a la totalidad de los objetos existentes en el Universo y donde culminará también la empresa científica. Ahí, la idea de referencia objetiva se hace explícita y podemos conocer la totalidad de los objetos que componen el mobiliario del Universo.

En este panorama comprendemos que, desde la óptica quineana, sólo podemos conocer las "últimas y verdaderas categorías de la realidad" conforme desarrollamos y afinamos nuestras habilidades lingüísticas, sus herramientas y dispositivos gramáticos. Ésta es una tesis fundamental en Quine y permea toda su trayectoria intelectual, no obstante, alcanza su máxima formulación en escritos tardíos como *From Stimulus to Science*. En este texto, Quine describe que la labor ontológica sólo es posible mediante la construcción de un lenguaje virtuoso que, aunque técnico o en apariencia artificial, es sólo producto del perfeccionamiento de las capacidades del lenguaje natural[8].

Quine lleva esta tesis un paso más allá al sostener que, en realidad, no podemos trazar una distinción entre el conocimiento de "las últimas y verdaderas categorías y estructuras de la realidad" y la búsqueda por este lenguaje o notación que sistematice, simplifique y clarifique de la mejor manera nuestras teorías sobre el mundo. La búsqueda por la mejor notación canónica, dice Quine, es la búsqueda por las verdaderas categorías de la realidad. Esto, porque encontrar la mejor notación para traducir nuestras teorías científicas mejoraría sustancialmente el conocimiento que éstas tienen de los

[8] Recordemos que para Quine el lenguaje científico es un continuo con el lenguaje ordinario. Bajo este supuesto entendemos, por ejemplo, la firme convicción quineana que sostiene que el cuantificador existencial de primer orden equivale a las expresiones "hay" o "existe" del lenguaje natural.

objetos y de las categorías fundamentales del mundo. Sistematizar una teoría, escribe Quine, en una notación que nos permita limpiar sus dificultades conceptuales es una de las formas de conocer qué dice dicha teoría sobre lo que existe en el Universo. Por tanto, la elección de la notación repercutirá en las categorías y objetos del mundo. Todavía más, dice Quine: "If we had succeeded in choosing the best canonical notation, then our theory as paraphrased in that notation tell us what there really is in the world" (Quine, 1960: p. 221). En un momento, volveré a esta observación sobre la intrincada relación entre la elección de la notación canónica y las verdaderas y últimas categorías del Universo.

Ahora me gustaría notar que ya podemos comprender la principal motivación de Quine para retomar el análisis de Russell. Al resolver los acertijos metafísicos por medio del análisis lógico del lenguaje, la teoría de Russell se presenta a los ojos de Quine como una teoría tremendamente satisfactoria; una teoría que muestra la lúcida capacidad de la lógica para resolver las cuestiones metafísicas. Por esta razón, Quine se inspirará en ella para reflexionar sobre las herramientas lingüísticas virtuosas para referirnos a los objetos existentes. Así, por su éxito cognitivo, la teoría ruselliana provee a Quine del material necesario, desde el punto de vista lingüístico, para pensar cómo podemos referirnos exitosamente a los objetos, comprometernos con su existencia y más tarde, sobre cómo debemos concebir la ontología[9].

Los enunciados cuantificacionales de Russell dan muestra de las virtudes del lenguaje lógico de variables y revelan un camino (método) seguro sobre cómo podemos emplear el lenguaje para referirnos a los existentes. El método de Quine, bajo la inspiración de Russell, determina entonces que los asuntos metafísicos no serán resueltos vía un argumento *a priori,* sino en el marco de la elección de una notación canónica y dicha elección estará regida por las virtudes de la notación (Hylton, 2007: p. 260). La lógica de primer orden con un dispositivo referencial tan exitoso como las variables cuantificadas maximiza la simplicidad, la claridad y la eficacia referencial de nuestro sistema de conocimiento. La solución a los enigmas metafísicos es una prueba de ello.

[9] Delimito "desde el punto de vista lingüístico" porque Quine no sujeta el análisis lógico a los desiderata epistemológicos de Russell, por ejemplo, el desideratum que exige que los constituyentes básicos de una proposición sean objetos de conocimiento directo. El análisis russelliano es retomado por Quine desligado del proyecto y la epistemología de Bertrand Russell.

Se trata, sin embargo, de un método y de un lenguaje sofisticado que no emerge del lenguaje natural sin un esfuerzo intelectual. De ahí que la teoría de la Psicogénesis de la Referencia de Quine busca explicar el camino que sigue el desarrollo del lenguaje para lograr esta eficacia referencial; un camino que comienza con la estimulación sensorial en la que no hay propiamente objetos, continúa con los balbuceantes enunciados observacionales, los enunciados subordinados y sólo culmina con la introducción de las variables cuantificadas que nos permiten referirnos y reificar a los objetos.

Asimismo, en la exposición de la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia comprendemos porqué Quine adopta el uso de variables como los únicos términos referenciales. Se trata de una razón pragmática y de la principal motivación de Quine para retomar las variables cuantificadas de Russell. En esta teoría Quine nos dice que prefiere el uso de variables cuantificadas por su capacidad para mantener el rastro de objetos específicos, de sus relaciones y dependencias, a través de contextos, cuando nos referimos a ellos en enunciados altamente complejos. Y es el análisis de Russell el que le muestra las ventajas cognitivas de esta notación, así como las de las distinciones y los supuestos que la acompañan[10]. La teoría de las descripciones definidas nos muestra cómo un lenguaje virtuoso, esto es, cómo la lógica de primer orden, garantiza la relación semántica de referencia solucionando así las antiguas paradojas metafísicas causadas por el uso de nombres como criterio de lo que existe. Los enunciados de Russell recurren al uso de variables para resolver el debate platónico y con ello nos revelan, al mismo tiempo, cómo podemos emplear un lenguaje virtuoso para referirnos a los objetos existentes. Sorprendentemente, las virtudes de la notación russelliana abren la puerta tanto a la teoría quineana sobre la Psicogénesis de la Referencia como a su formulación del criterio de compromiso ontológico.

[10] Por ejemplo, de las ventajas que supone distinguir entre aquello que refiere a objetos (las variables cuantificadas) y aquello que denota conceptos (predicados).

ε. La notación canónica: la configuración del objeto quineano

Ahora bien, una vez esclarecidas las motivaciones quineanas, podemos adentrarnos en la concepción de lo que es un objeto para Quine e iluminar desde ahí el criterio de compromiso ontológico. Hasta ahora ya han salido a relucir varios supuestos sobre lo que significa para Quine que un objeto exista en el Universo. Sin embargo, es necesario profundizar en esta cuestión, en especial en cómo la elección de la notación canónica y sus particularidades configuran lo que es un objeto. Comencemos por mencionar algunas implicaciones sobre la ontología que se desprenden del conjunto de la exposición anterior, de la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia y del análisis de Russell; estas implicaciones trazarán pinceladas gruesas pero cardinales de lo que es un objeto quineano.

La primera implicación sostiene que, dados los supuestos revisados, para la filosofía quineana la ontología es una faena lingüística en la que: "Putting our ontological house in order is not a matter of making an already implicit ontology explicit by sorting and dusting up ordinary language. It is a matter of devising and imposing" (Quine, 1974, 88). Como la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia nos hizo comprender, para Quine la ontología es una labor en la que sólo conocemos las últimas y verdaderas categorías del Universo desarrollando los mejores dispositivos gramáticos. Se trata entonces de una labor que sobrepasa la mera explicitación y traducción, pues la notación siempre se encuentra en constante transformación y afinación, lo mismo que las consideraciones que nos llevan a elegirla. No obstante, aun cuando hemos elegido la notación canónica indicada las labores de la regimentación tampoco pueden reducirse a hacer explícitos los compromisos implícitos, pues existen otras faenas como la reducción ontológica, la definición de términos, la explicación y eliminación que Quine bien detalla en *Word and Object*.

Bajo estas premisas, comprendemos entonces que Quine conciba a la ontología como "a matter of devising and imposing" y no meramente como una explicitación o traducción de los compromisos ontológicos. En esta concepción, los objetos son conocidos en una depuración, en un desarrollo, afinación e instrumentación del lenguaje. Observamos en este supuesto la intrincada relación que existe entre los objetos quineanos, su conocimiento y el lenguaje que se va instrumentado, es decir, la notación canónica. Desde la óptica quineana sólo podemos referirnos a la totalidad de los objetos existentes conforme nuestras habilidades lingüísticas, nuestras teorías y nuestros lenguajes mejoran. La Teoría de la Psicogénesis de la Referencia da cuenta de este desarrollo lingüístico y cognitivo, de los saltos cognitivos necesarios para avanzar de los balbuceantes enunciados observacionales hacia la reificación de los objetos.

A su vez, se hace transparente en qué sentido son lingüísticos los objetos quineanos, son producto de una intensa instrumentación del lenguaje, aunque no perdamos de vista que son también fruto de un proceso empírico de descubrimiento y perfeccionamiento de las teorías científicas. Un objeto para Quine, desde el punto de vista epistémico, se conforma en el proceso de descubrimiento, formulación y comprobación de una teoría científica, pero su carácter ontológico sólo se consolida en la regimentación de la teoría que lo postula cuando es expresado en el lenguaje instrumentado de la notación canónica. En este caso, cuando es expresado como una variable, cuando es reconocido como "el valor de una variable".

Con todos estos supuestos llegamos a la conclusión de que para Quine, así como la referencia, la ontología del Universo también es derivativa: "Just as reference is derivative, so is the ontology of things to which we refer" (Glanzberg, 2012: p. 378). "Bodies are posits", nos dice Quine (1960) en una frase memorable de *Word and Object,* para después no dejar de advertirnos que "to call posit a posit is not to patronize it". Claro, no por tratarse de una postulación los objetos no tienen un carácter plenamente científico.

La segunda implicación que se desprende de la exposición nos deja ver que para Quine la ontología es un logro cognitivo producto del esfuerzo intelectual de los agentes y en consecuencia: "the assuming of objects is a mental act" (1981: p. 2). La teoría de la Psicogénesis de la Referencia esgrime esta tesis con toda claridad. Los objetos son derivados, productos del desarrollo de una empresa fundamentalmente cognitiva como lo es la empresa científica.

La tercera implicación menciona que la ontología así concebida, como la regimentación de las teorías, es una labor cuyas preguntas tienen respuestas técnicas relativas a la lógica de primer orden. Las cuestiones metafísicas serán resueltas en el marco de una notación canónica no en una discusión *a priori.* Asimismo, ligada a esta implicación, es de notar cómo la idea de la existencia y las cuestiones ontológicas en Quine están irremediablemente ligadas a la lógica y, en particular, a la lógica de primer orden con identidad. De esta forma, Quine solía afirmar que "a change in logic would mean a change in the very notion of existence" (Quine, 1981: p. 50).

Esta última observación en conjunción con las anteriores, nos deja ver que la elección de la notación canónica y las consideraciones pragmáticas que nos llevan a favorecerla tienen consecuencias en las "últimas y verdaderas categorías" del Universo, pues determinan lo que consideramos que es un objeto y también configuran la noción misma de objeto. A continuación, emprenderé una serie de apuntes sobre la notación preferida por Quine y sobre su interpretación de la misma con la finalidad de comprender cómo la particular notación canónica quineana configura lo que es un objeto existente.

Desde la perspectiva de la filosofía naturalizada de Quine, la lógica de primer orden no es un marco *a priori* impuesto externamente a las teorías científicas. Se trata de un marco elegido debido a sus virtudes en tanto que la regimentación de una teoría puede contribuir a: (1) simplificar, clarificar y precisar la formulación de una teoría; (2) facilitar las inferencias y nuestro entendimiento de los nexos inferenciales presentes en la teoría; (3) identificar y medir por medio de métodos lógicos los compromisos ontológicos de una teoría. La lógica de primer orden por su claridad, simplicidad, completitud y validez es la notación canónica favorecida que clarificará cualquier discurso cognitivo y, simultáneamente, nos revelará sus presuposiciones ontológicas; esto nos permitirá conocer qué es lo que en verdad dice la teoría; cuáles son los objetos que dice que hay en el Universo. Observamos entonces que el lenguaje de variables es sometido a las mismas consideraciones pragmáticas que cualquier elección en el resto de la ciencia. Si tenemos éxito en la elección de la mejor notación canónica, como en cualquier elección de la ciencia, entonces la teoría regimentada nos dirá con verdad qué es lo que existe en el mundo. Quine consideró que la lógica de primer orden es el lenguaje, hasta su momento, de mayores virtudes para referirnos a lo que existe. A su vez, esgrimió una particular interpretación sobre el mismo. Adentrémonos en la interpretación quineana de la lógica de primer orden y, al mismo tiempo, comprendamos cómo ésta configura la noción de objeto en Quine.

Comenzaré por decir que la concepción de la ontología de Quine es afín a la interpretación objetual de los cuantificadores que esgrime. El conjunto de enunciados que componen la teoría regimentada (T') son enunciados de la forma '$(\exists x)(Wx \;\&\; (\forall y)(Wy \supset y{=}x) \;\&\; Px)$', es decir, son enunciados que sitúan una variable dentro del rango de un cuantificador existencial. Como he mencionado antes, en la lógica de predicados un cuantificador existencial es una constante lógica que se interpreta como "existe un" o "hay un"[11]. En la filosofía de la lógica se distinguen dos interpretaciones del cuantificador existencial: la interpretación objetual y la interpretación sustitucional; elegir una u otra depende, en parte, de los compromisos ontológicos que estemos dispuestos a asumir, pues cada una de ellas tiene un "peso ontológico" particular.

La interpretación objetual sostiene que los predicados de los enunciados existenciales son verdaderos de los objetos. Según esta interpretación, un enunciado cuantificacional es verdadero por la existencia de un objeto que satisface los predicados en cuestión. Es decir, decimos que un objeto satisface, o no satisface, un predicado. En cambio, en la interpretación sustitucional, como su nombre lo indica, sustituimos las variables por nombres propios, con el supuesto de que los objetos nombrados existen al menos en el universo discursivo. En consecuencia, esta interpretación se compromete tanto con los objetos actuales como con objetos posibles.

Como he mencionado, ambas interpretaciones conllevan compromisos ontológicos distintos. La interpretación sustitucional, por su parte, incluye en el catálogo de lo que existe a entidades intensionales[12]. Quine rechaza esta interpretación; recordemos que en el debate de *On What There Is* encuentra problemático el uso de nombres en los métodos de la ontología. Sucintamente, la objeción de Quine a esta interpretación sostiene que podemos tener más nombres que objetos o más objetos que nombres[13]. No

---

[11] Recordemos que para Quine el lenguaje científico es continuo con el lenguaje ordinario. Bajo este supuesto, tenemos, por ejemplo, la firme convicción quineana de que el cuantificador existencial equivale a las expresiones "hay" o "existe" del lenguaje ordinario.

[12] Los conceptos, proposiciones, propiedades, cualidades, atributos, ideas y relaciones son entidades intensionales. Lo que distingue a una entidad intensional es que este tipo de entidades violan el principio de extensionalidad, según el cual equivalencia implica identidad.

[13] En un universo discursivo donde hay número infinito de objetos y un número finito de nombres, no se sostienen las siguientes equivalencias:

$\forall x\, Px$ si y sólo si $(Pa \circ Pb \circ \ldots \circ Pn)$

$\exists x\, Px$ si y solo si $(Pa \vee Pb \vee \ldots \vee Pn)$

Por tanto, puede ser verdadero que existe un objeto con la propiedad F y, al mismo tiempo, ser falso $(Pa \vee Pb \vee \ldots \vee Pn)$. Asimismo, puede ser verdadero $(Pa \circ Pb \circ \ldots \circ Pn)$ y ser falso que todos los objetos compartan la propiedad F.

obstante, la principal razón por la que Quine (1956, 1980) no se compromete con entidades intensionales, es decir, la razón por la cual no permite la cuantificación sobre nombres y predicados, es por la imposibilidad de sostener el principio de identidad para dichas entidades. En *The Scope and Language of Science* Quine llama a estas entidades "twilight half-entities to which the identity concept is not to apply" (1957: p. 3). De esta manera, Quine esgrime el principio de identidad como uno de los criterios fundamentales para el compromiso ontológico y entre las dos interpretaciones rechaza la interpretación sustitucional, por su incompatibilidad con el principio de identidad, y, por tanto, prefiere la interpretación objetual.

Dada la relevancia del principio identidad, surgen las siguientes preguntas: ¿por qué sólo podemos aceptar entidades a las cuales se aplique el principio de identidad? ¿Podemos decir que se trata de un principio que condiciona la elección de la notación canónica y, en esa medida, configura la concepción quineana de objeto? En suma, ¿cuál es el papel del principio de identidad en la ontología quineana y en la configuración de los objetos quineanos?

En distintos textos, Quine (1948; 1957; 1974) expresa que la pregunta ontológica fundamental "¿qué es lo que existe?" debe guiarse por el principio de identidad. "Ninguna entidad sin identidad", dice Quine (1948). Esto, porque sólo tiene sentido hablar de un objeto en particular si podemos identificarlo y diferenciarlo de los demás: "We have an acceptable notion of class, of physical object, or attribute, or any other sort of object, only insofar as we have an aceptable principle of individuation for that sort of object" (Quine, 1981: p. 102). En consecuencia, el conocimiento de lo existente debe estar gobernado por el principio de identidad. A partir de este principio, Quine interpreta la cuantificación como pudiendo variar las entidades admitidas como existentes. Es decir, no podemos cuantificar sobre entidades de las que no proporcionemos sus condiciones de identidad; para Quine no hay cuantificación sin identidad.

Del principio de identidad, por tanto, se derivan interesantes consecuencias para la ontología quineana. Primero observemos la estrecha relación que el principio de identidad guarda con la tesis quineana que afirma que lo existe en el Universo son objetos; relación que se afianza cuando este principio repercute en la elección y restricción de la notación canónica. Si todo lo que existe está gobernado por el principio de identidad en otras palabras, si toda cuantificación implica identidad, entonces sólo existirán objetos, pues rechazaremos la existencia de entidades intensionales como los conceptos, las relaciones, las propiedades y las ideas, ya que en el lenguaje de la lógica formal[14] no podemos proporcionar las condiciones de identidad de estas entidades. Dado el lenguaje de la lógica, no podemos pensar en otro tipo de existente cuando ponemos el principio de identidad a guiar los compromisos ontológicos:

> Un objeto es la referencia de un nombre propio y sólo los objetos son argumentos candidatos para saturar funciones, sólo sus expresiones son candidatos para ocupar la posición de las variables afectadas por la cuantificación […] Si aceptáramos que, después de todo, los predicados son algún tipo de objeto intensional deberíamos proporcionar sus condiciones de identidad, algo que no podremos hacer, pues los lugares argumentales de la relación de identidad son ocupados siempre por nombres propios (Martínez Diez, 2005: p. 94).

En el lenguaje de la lógica sólo podemos identificar objetos, pues sólo sus expresiones ocupan los lugares argumentales de la relación de identidad. En consecuencia, dada la relevancia ontológica del principio de identidad, no podemos afirmar la existencia de predicados, ni de conceptos. Observamos entonces que el principio de identidad condiciona la elección de la notación canónica, pues bajo este supuesto las lógicas de segundo orden son rechazadas; el cuantificador existencial sólo se aplica a entidades identificables, es decir, a objetos. La metafísica naturalizada elige como notación canónica a la lógica de primer orden y Quine no cuantifica sobre predicados. En una frase, Quine no permite ninguna cuantificación sin identidad y ninguna entidad sin identidad. De esta manera, entendemos que lo que existe en el Universo son objetos de los cuales tenemos criterios claros de identificación: ninguna cuantificación sin entidad (objeto).

Podemos decir que, en parte, del principio de identidad Quine deriva su principio ontológico "ser es ser el valor de una variable". O sea, su principio ontológico emana de la notación canónica elegida una vez que el principio de identidad ha determinado qué partes del enunciado son cuantificables. Es decir, una vez que el principio de identidad ha restringido la notación canónica a la lógica de primer orden. Los cuantificadores son interpretados objetualmente una vez aceptado el principio de identidad como criterio fundamental de lo que existe y las variables refieren a objetos: sus valores.

[14] El cual nos ha dado pruebas de su virtuosismo en el análisis de Russell.

En sintonía con las observaciones anteriores, Quine sostiene que no podemos cuantificar sobre predicados porque esto los entificaría. Es decir, puesto que todos los existentes son objetos, si pudiéramos expresar enunciados como "existen propiedades F e individuos x tales que Fx" estaríamos concediendo realidad a los predicados como un tipo de objeto. Dada su interpretación de los cuantificadores en conjunción con su concepción de la ontología, cuantificar sobre predicados los entifica o, en términos quineanos, los reifica. Citando distintos pasajes del *corpus* quineano, Hylton nos habla sobre la reificación de los predicados en Quine: "Quine has consistently argued that treating predicate letters as quantifiable variables we are committing ourselves to a range of entities which those variables range over. On some accounts, it is attributes or properties to which we are committing ourselves" (2007: p. 268).

Para Quine reificar un predicado es inaceptable, pues con ello atentamos en contra de la distinción concepto/objeto. Esta distinción sostiene que los conceptos son esencialmente predicativos, no podemos aludir a un concepto mediante el uso de un nombre, ya que los nombres sólo refieren a objetos. Sólo podemos aludir a un concepto mediante una expresión predicativa, no saturada que requiere estar unida al nombre de un objeto para llegar a tener sentido completo. Dada la naturaleza incompleta de los conceptos (dependiente, no sustancial), no podemos, en la metafísica quineana, cuantificar sobre predicados y reificarlos como si fueran objetos.

Por las razones apuntadas, Quine restringe la regimentación de las teorías a la lógica de primer orden, a pesar del poder inferencial y expresivo de las lógicas de segundo orden. Comprendemos entonces que, para Quine, lo que hay son objetos y decir que un objeto existe en la filosofía quineana quiere decir que podemos razonar acerca de ese objeto aludiendo a expresiones predicativas (conceptos) utilizando la lógica de primer orden con identidad. En esta paráfrasis lógica, el objeto en cuestión es el valor de una variable.

Como resultado de asumir esta distinción, para la filosofía quineana el catálogo ontológico se compone exclusivamente de objetos, los cuales constituyen el dominio del Universo y sobre ellos varían los cuantificadores existenciales. En dicho catálogo, todos los existentes son objetos en el mismo sentido, son valores de variables. A esto se refiere Quine cuando dice que la vieja y buena palabra *existir* tiene un solo sentido. Podemos concluir que Quine esgrime un criterio unívoco de la existencia puesto que los cuantificadores no son ambiguos ni la idea de la existencia que expresan:

> We have all been prone to say, in our commonsense usage of 'exist', that Pegasus does not exist, meaning simply that there is no such entity at all. If Pegasus existed he would indeed be in space and time, but only because the word 'Pegasus' has spatio-temporal connotations, and not because 'exists' has spatio-temporal connotations. If spatio-temporal reference is lacking when we affirm the existence of the cube root of 27, this is simply because a cube root is not a spatio-temporal kind of thing, and not because we are being ambiguous in our use of "exist" (Quine, 1948: p.2).

En consecuencia, para la ontología quineana los objetos abstractos (como los conjuntos y demás objetos matemáticos) existen en el mismo sentido que los objetos físicos del sentido común (como los lápices y los cerdos) y que las entidades teóricas no observables postuladas por la ciencia (como los electrones): "The variables of quantification in natural science range over physical objects and over numbers, functions and over sets. All these are assumed in the only sense I understand" (Quine, 1991: p. 242). Aquí la noción de existencia es unívoca, pues la cuantificación interpretada *à* la Quine funge como árbitro de legitimidad ontológica. Ser un objeto sólo quiere decir ser asumido y reconocido, en la regimentación de una teoría, como el valor de una variable. Y pensamos a los objetos por medio de conceptos que son expresados en predicados, los cuales constituyen expresiones incompletas, no saturadas y por tanto, expresiones que no pueden ser reificadas.

Observemos que esta distinción entre concepto y objeto, Quine la hereda del análisis russelliano. Se trata de una distinción poderosa que puesta en acción en una notación como la lógica de primer orden le permite a Russell solucionar los enigmas metafísicos. Por esta razón, Quine no solamente la retoma sino que la utiliza para delimitar la elección de la notación canónica. La notación canónica se restringe entonces a la lógica de primer orden, la cual utiliza variables cuantificadas para referir a objetos y no cuantifica sobre o reifica predicados.

ζ . El concepto puro de objeto

Es momento de ahondar en el concepto mismo de objeto, pues si sencillamente afirmamos, como hasta ahora he hecho, que un objeto es el valor de una variable, no podremos avanzar en el entendimiento de este concepto formal. La observación de Henry Laycock apunta este hecho: "it is the variable name 'x' which is to be explicated by reference to the formal concept-object, rather than vice versa"(2004). Aproximémonos entonces al concepto formal de objeto y echemos un vistazo al desarrollo del mismo en la tradición analítica.

En el *Tractatus*, Wittgenstein dice:

> The variable name '*x*' is the proper sign of the pseudo-concept *object*. Wherever the word 'object' ('thing', 'entity', etc.) is rightly used, it is expressed in logical symbolism by the variable name. For example in the proposition 'there are two objects which…' by '(∃ ;*x*, *y*)…'. Whenever it is used otherwise, i.e., as a proper concept word, there arise senseless pseudo-propositions. So one cannot, e.g., say 'There are objects' as one says 'There are books' […] The same holds of the words 'Complex', 'Fact', 'Function', 'Number', etc. They all signify formal concepts and are presented in logical symbolism by variables.(Wittgenstein, 1922: 4.1272).

En el aforismo citado, Wittgenstein distingue los conceptos formales de las palabras concepto y nos dice que el término *objeto* (o *entidad*) es un concepto formal. Se trata de un concepto puramente formal que no posee más contenido empírico que cualquier concepto de la lógica o la aritmética y, por tanto, no involucra la referencia a un actual o a un posible de la misma manera en que las palabras concepto como los términos 'libro' o 'gato' lo hacen. En consecuencia, nos dice Wittgenstein, cuando este concepto es utilizado apropiadamente puede, por su naturaleza formal, ser expresado en el simbolismo de la lógica por medio de una variable.

En la práctica filosófica la naturaleza formal del concepto de objeto no ha sido prolíficamente analizada. A menudo, para explicarlo o definirlo sólo se alude a la expresión que en la lógica formal lo expresa, es decir, a las variables. Posiblemente podemos atribuir esta laguna a la simplicidad del concepto y a la consiguiente dificultad para definirlo. Es Frege quien hace esta observación en *Function and Concept:* "a regular definition of the concept is impossible, since we have here something *too simple* to admit of logical analysis" (1960: p. 32). No obstante, es posible, como sostiene Henry Laycock en *Words Without Object*, arrojar luz sobre este concepto vía su relación con otras nociones semánticas cercanas.

El concepto de objeto en tanto categoría formal se inscribe o forma parte de un marco conceptual, de un conjunto más amplio de elementos que involucran, entre otras, la idea de la forma lógica de los enunciados o creencias (Laycock, 2014). En dicho marco, el concepto de objeto corresponde a la noción de 'sujeto lógico', el cual es entendido como el correlato de una referencia semántica singular y es expresado en el simbolismo lógico por medio de una variable. Si nos acercamos a la noción de sujeto lógico comprenderemos que la noción semántica de unidad, la de singularidad y más específicamente, la de la referencia a lo que podemos identificar y contar como uno están esencialmente ligadas a este concepto formal. Un objeto, entendido en términos formales, se distingue por ser introducido en el discurso por una expresión singular que lo identifica como un individuo, como aquello que puede ser contado como uno. Sobre lo que es un objeto, Strawson (1959) nos dice:

> Anything whatever can be introduced into discussion by means of a singular, definitely identifying substantival expression [….]. Anything whatever can be identifyingly referred to; anything whatever can appear as a logical subject, an 'individual' (1959: 137, 227).

Me gustaría resaltar dos cuestiones del pasaje de Strawson. La primera de ellas apunta que un objeto es la referencia de una expresión singular en tanto que es un individuo, aquello que podemos identificar como uno. *En consecuencia, parecería ser que la cuestión sobre lo que es un objeto en su configuración última es idéntica con la cuestión sobre lo que constituye una unidad, lo que contamos como un individuo*: "the question of the bottom-line constraints upon the pure concept of object, if any, seems to be identical with the question of constraints upon the abstract general notion of a unit, the notion of that which is countable 'as one'" (Laycock, 2014)[15]. La segunda cuestión que sólo quisiera mencionar está relacionada con el principio de identidad. Strawson nos

[15] En el Principia, Russell utiliza como sinónimos los términos individuo y entidad (objeto). Sin embargo, aclara que este último se distingue por tener existencia: "I shall use as synonymous with it the words unit, individual and entity. The first two emphasize the fact that every term is one, while the third is derived from the fact that every term has being, i.e. is in some sense. A man, a moment, a number a class" (1937: p. 43).

dice que un objeto es una referencia identificable, lo que nos recuerda el lema quineano "no hay entidad sin identidad", así como sus observaciones sobre el sinsentido de hablar de un existente que no podemos diferenciar. En suma, nos recuerda la centralidad del principio de identidad para el concepto de objeto.

Ahora bien, otra noción semántica relacionada con el concepto de objeto es su aplicabilidad universal. Dado que se trata de una categoría o concepto con el que podemos referirnos a todo lo existente que sea uno, es decir, a todo lo que sea un individuo, estamos tratando con un concepto máximamente general que es universalmente aplicable. Por esta razón este concepto es representado en el simbolismo formal con una variable; misma que se lee como "algo" (o en inglés: *something)*. El contenido del término 'objeto', por su énfasis en la singularidad y la unidad, es apropiado para comprender cualquier existente y por tanto, para conocer la suma total de "lo que hay" en el Universo. En especial si consideramos, como Quine, que la ontología es un catálogo de individuos.

Lo analizado sobre el concepto de objeto nos deja ver que se trata de una categoría formal lógico-semántica absolutamente austera que comprende nociones esenciales para toda referencia o predicación. En palabras de Laycock: "It is not in short, a view concerning 'what there is' in anything akin to the ways in which biologists and physicists and just plain folk are interested in what there is. As Wittgenstein and Strawson suggest, it is an austerely semantic concept, concerning the essential content of the categories involved in any reference or predication" (2014). Desde la perspectiva quineana, el concepto de objeto condensa nociones semánticas fundamentales para la relación de referencia y, en consecuencia, con él podemos inquirir y poner en claro todo "lo que hay". Se trata de un concepto que forma parte de las herramientas lingüísticas eficaces para indagar lo que hay y que, simultáneamente, está en concordancia con los principios ontológicos, los supuestos y los descubrimientos en materia cognitiva y lingüística de la filosofía naturalizada de Quine.

Hasta este momento de la investigación he apuntado algunas nociones semánticas fundamentales relacionadas con el concepto de objeto; en específico he mencionado la noción de singularidad, la de individuo y la tesis de la aplicabilidad universal. También he hablado antes sobre la centralidad del principio de identidad para este concepto. En su artículo "Object", Laycock sotiene que estas nociones configuran el concepto puro de objeto (en inglés, *the pure concept of object)*, el cual debemos entender como: "something, anything to which one may identifingly refer, which may be counted as one" (2014). Esta caracterización engloba las nociones mencionadas y termina por ensamblar el concepto puro de objeto. Asimismo, con ella se hace claro porqué utilizamos variables cuantificadas para representarlo y porqué ocupan dicho lugar argumental en los enunciados existenciales.

CAPÍTULO 3

EL ARGUMENTO QUINE-PUTNAM EN PERSPECTIVA. ANÁLISIS

En la literatura filosófica que versa sobre la cuestión ontológica de los objetos matemáticos el protagonismo del argumento Quine-Putnam es evidente. Se trata de un argumento simple y poderoso cuya fuerza, como bien apuntaba Putnam, se impone sobre nuestra coherencia intelectual. Son múltiples las razones que promueven esta fuerza y que producen que su conclusión se imponga sobre nuestra inteligencia como una especie de "hechizo lingüístico". Algunas de estas razones, como he revisado, se enmarcan en la filosofía naturalista de Quine y otras también tienen origen en una serie de intuiciones filosóficas y razonamientos ampliamente aceptados y extendidos en la racionalidad contemporánea.

En el comienzo de este apartado me gustaría hacer notar la fuerza del argumento poniendo énfasis en estas intuiciones y razonamientos ampliamente aceptados. Como he apuntado, el argumento Quine-Putnam sostiene que debemos comprometernos con la existencia de las entidades matemáticas debido a que su cuantificación es indispensable para la verdad de nuestras mejores teorías científicas. Sin embargo, la inquietud filosófica e intuición detrás del argumento puede condensarse en la pregunta: ¿cómo explicarnos el tremendo éxito de la ciencia y su magnifica predictibilidad si no suponemos que existen los objetos que postulan nuestras mejores teorías científicas? Cuando una teoría explica un fenómeno natural o un aspecto del Universo de manera satisfactoria y reúne la evidencia suficiente, con poder predictivo, así como con otra serie de virtudes epistémicas significativas para la práctica científica, lo que solemos pensar de inmediato es que existen las entidades que la teoría postula como parte de la descripción del fenómeno natural. Este razonamiento se ve a su vez reforzado por la comprobada indispensabilidad de dichas entidades esto es, si intentamos eliminar tales entidades de la teoría, advertiremos que la teoría resultante es menos atractiva y virtuosa que la original. Lo que significa que nos encontramos con la mejor explicación hasta ahora de un fenómeno natural y, a su vez, sostiene Quine-Putnam, la mejor explicación del éxito de una teoría científica es que existen las entidades que dicha teoría postula.

Lo distintivo del argumento Quine-Putnam es que extiende este razonamiento a las entidades matemáticas, y sostiene, que las entidades teóricas se encuentran a la par de las matemáticas en su estatus ontológico. El mismo razonamiento que nos compromete con la existencia de las entidades teóricas es aplicable a las entidades matemáticas. No podemos esgrimir un doble criterio entre ambos tipos de entidades, además de que en algunos casos, apunta Quine, no podremos ni siquiera distinguir semánticamente entre los componentes matemáticos y las entidades teóricas. Sostener un doble criterio que sólo otorgue un estatus ontológico a las entidades teóricas sería, en palabras de Putnam, una deshonestidad intelectual.

En este capítulo sostendré que la imposibilidad de esgrimir este doble criterio, para evitar lo que Putnam ha llamado una "deshonestidad intelectual", proviene no nada más de la inferencia a la mejor explicación, sino de supuestos paradigmáticos de la filosofía del lenguaje de Quine. Como he revisado en el capítulo anterior, Quine tenía una particular comprensión del lenguaje ordinario, del lenguaje matemático y del lenguaje científico. La filosofía del lenguaje de Quine es parte de un sistema filosófico consumado que involucra saberes del campo de la epistemología, la lógica, la metafísica y la filosofía de la ciencia. Y son estos supuestos sobre el lenguaje, junto con la inferencia a la mejor explicación, los que dan lugar a la imposibilidad de distinguir el compromiso ontológico que debemos sostener con las entidades teóricas del que debemos sostener con las matemáticas. Buscaré revisar dichos supuestos y someterlos a análisis con la finalidad de iluminar la cuestión y los límites del argumento.

Es importante hacer una puntualización respecto al método. No buscaré revisar los supuestos quineanos con el propósito de derribar o rebatir la conclusión del argumento Quine-Putnam. Mi intención última no es mostrar la dispensabilidad de las entidades matemáticas o, en último término, negar su existencia; mi intención es comprender los supuestos quineanos que han guiado nuestra comprensión sobre el conocimiento matemático y científico en el debate y analizar, con base en ello, si la imposibilidad de esgrimir este doble criterio es producto de dichos supuestos que se han filtrado de manera desapercibida en el debate, configurando así nuestra mirada sobre la cuestión. La revisión de los supuestos que están detrás del argumento y el análisis de su coherencia respecto al naturalismo quineano me permitirá señalar posibles lagunas o supuestos incompatibles del argumento Quine-Putnam, comprendiendo de esta manera los limites del argumento y arrojando luz sobre las categorías con las que solemos pensar la cuestión ontológica de los objetos matemáticos y su aplicabilidad. Con este objetivo, sopesaré algunos de los supuestos paradigmáticos explorados en el capítulo anterior.

η. La continuidad lingüística

En distintos escritos, Quine caracteriza a la ciencia como la "búsqueda por las verdaderas y últimas categorías" de la realidad. Quine consideraba que el conocimiento se genera en una serie de prácticas que utilizan el método científico y que, con implicación cognitiva y ejerciendo el principio de revisabilidad, se van perfeccionando en el tiempo, con lo que adquieren con ello una mayor sofisticación y producen mejores y más virtuosas teorías acerca de la realidad. Está claro que para Quine el conocimiento es necesariamente el conocimiento científico y sus límites están dados por el método de la ciencia. Es en la ciencia donde conocemos e identificamos lo que existe, en ella se agota el conocimiento de lo real. Así descrita, a grandes rasgos, esta postura ha recibido el nombre de naturalismo quineano, como hemos explorado al inicio del segundo capítulo.

Ahora bien, en la empresa científica están incluidos tanto el sentido común –del lado más básico del espectro de lo científico —como también está incluida la filosofía, en particular, la metafísica naturalizada, que es, en realidad, el pináculo de la empresa científica. Para Quine, la ciencia no es más que la sofisticación del sentido común del hombre ordinario: “Science is not a substitute for common sense but an extension of it”. Y es en la metafísica naturalizada —la cual Quine concibe como la cumbre de la labor científica— donde se emprende la tarea de elegir la notación canónica y regimentar las teorías científicas. Es en la metafísica donde propiamente nos comprometemos y definimos el catálogo ontológico del Universo.

En este punto es importante notar la extensión que Quine traza entre el sentido común y la filosofía, pues existe un paralelo importante, de hecho simultáneo, que acompaña y es esencial a esta empresa científica y éste es la continuidad que, desde el punto de vista quineano, existe entre el lenguaje natural y el lenguaje científico o en último término, el lenguaje de la lógica de primer orden. En la revisión de la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia comprendimos que para Quine existe una continuidad gradual entre la adquisición del lenguaje natural y el lenguaje científico con el que podemos referirnos a los objetos existentes. En *From Stimulus to Science,* Quine afirma que la labor ontológica es sólo posible gracias a la construcción de un lenguaje virtuoso que, aunque en apariencia artificial, es producto del perfeccionamiento de las capacidades del lenguaje natural. En su teoría lingüística, Quine afirma que el lenguaje científico es una sofisticación del lenguaje natural, resultado del desarrollo de nuestras habilidades cognitivas y lingüísticas para referirnos a los objetos. En dicho *continuum*, las matemáticas no tienen un lugar distintivo, es decir, no poseen una peculiaridad que las distinga como lenguaje independiente con una función cognitiva peculiar y única.

En la revisión de la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia comprendimos también que para Quine la referencia a un objeto existente es un éxito cognitivo que sólo sucede en etapas posteriores del desarrollo lingüístico. Sin embargo, en las etapas precursoras encontramos las estructuras lingüísticas y cognitivas que evolutivamente la hacen posible. Así, por ejemplo, los enunciados subordinados al exhibir una particular estructura interna introducen en el lenguaje el uso de variables que, más tarde, abren la puerta a la cuantificación y que son, a su vez, pieza fundamental del mejor aparato referencial: la notación canónica de la metafísica naturalizada.

En Quine, por tanto, existe una continuidad evolutiva en el desarrollo del lenguaje en el que vamos introduciendo de manera progresiva las herramientas lingüísticas que benefician al aparato referencial. El criterio que guía dicha introducción es manifiestamente pragmatista y conforme nos elevamos a niveles lingüísticos más sofisticados principios como la revisabilidad y las virtudes epistémicas tienen un mayor peso sobre la elección de los dispositivos gramáticos. Así, aquello que en apariencia inició con una teoría conductista social sobre el desarrollo del lenguaje natural ["There is nothing in lingüistic meaning beyond what it is to be gleaned from overt behavior in observable circumstances" (Quine, 1992)] culmina con una labor altamente técnica en la que se elige un marco lingüístico con explícitas ventajas cognitivas reconocidas y racionalmente sopesadas.

Este panorama general da cuenta de aspectos esenciales de la filosofía del lenguaje de Quine, aspectos en los que hemos profundizado en el capítulo anterior. Y es desde esta vista panorámica que comprendemos que para Quine existe una gradación en el lenguaje, pues son las mismas capacidades, es decir, las capacidades del lenguaje natural, las que puestas en acción van incrementando su poder epistémico y rigor hacia la construcción del lenguaje artificial o notación canónica que refiere a las verdaderas categorías y estructuras de la realidad. Comprendido esto, las preguntas que surgen son: En este *continuum* lingüístico, ¿cuál es el lugar de las matemáticas? ¿Qué nos dice Quine en sus textos sobre el lenguaje matemático?

Como primera observación, recordemos que la concepción quineana sobre el lenguaje matemático se configuró en buena medida en un diálogo y posicionamiento frente a la herencia de la filosofía de la ciencia empirista y positivista, en particular, frente al pensamiento de Rudolf Carnap. En *Logical Syntax of Language,* Carnap afirma que los enunciados de la lógica y de las matemáticas son enunciados analíticos, es decir, son enunciados verdaderos en virtud de su significado. La verdad de estos enunciados, sostiene Carnap, es relativa a la elección de un lenguaje o marco lingüístico particular [L-Relativa/L-verdadera]. Dicho lenguaje es elegido de acuerdo con consideraciones externas según su conveniencia, productividad y eficiencia. Lo que quiere decir que la elección de un lenguaje no es una cuestión de justificación y evidencia.

Asimismo, en 1934 Carnap escribió: (i) un enunciado es L-verdadero si y sólo si es una consecuencia lógica del conjunto de enunciados vacíos; (ii) un enunciado es L-falso si y sólo si todos los enunciados son una consecuencia lógica de ellos; iii) un enunciado es analítico si y sólo si es L-verdadera o L-falsa; iv) un enunciado es sintético si y sólo si no es analítico. Por lo tanto, Carnap define los enunciados analíticos como enunciados determinados lógicamente: su verdad depende de las reglas lógicas de inferencia y son independientes de la experiencia. De esta manera, los enunciados analíticos son *a priori* mientras que los sintéticos son *a posteriori*.

En *Two Dogmas of Empirism,* Quine busca negar que la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos sea una distinción filosóficamente relevante, pues considera que el estatus de la lógica y las matemáticas puede ser explicado de otra manera sin apelar de forma innecesaria a la noción de analiticidad: "We can account for putatively *a priori* truths – in particular, for logic and maths— without invoking Carnapian analyticity and without assuming any notion of the *a priori*." (Hylton, 2007). La afirmación central de la crítica quineana apunta que el modo en que introducimos algunas verdades en la práctica científica, ya sea por definición o estipulación, no les otorga un estatus epistemológico radicalmente distinto de cualquier otra verdad del discurso científico, en particular, no les otorga un estatus de inmunidad frente a la experiencia. Incluso, señala Quine, aun si la distinción fuera adecuada, no tendría la relevancia epistemológica que se le ha atribuido en la filosofía y, en realidad, encontraríamos que sólo es válida para algunas verdades triviales: 'I now perceive that the philosophically important question about analyticity and the linguistic doctrine of logical truth is not how to explicate them; it is the question rather of their relevance to epistemology" (Quine, 1986).

Con esta idea sobre la relevancia epistemológica de los enunciados analíticos en mente, Quine cuestiona: "What epistemological difference is there between a change of mind which involves an analytic sentence and one which involves a synthetic sentence?" (Quine, 1986). Para Carnap existían dos tipos de revisiones que daban sentido a la distinción analítico/sintético. Por un lado, la revisión externa que en a la mirada de Carnap estaba relacionada con la elección de un lenguaje particular o un marco lingüístico, elección que dependía de consideraciones pragmáticas como la conveniencia, la productividad y la eficacia de un marco lingüístico para ciertos fines específicos. Este tipo de revisión ocurría entonces independiente a toda noción de justificación y se centraría en los enunciados analíticos: "No language is presupposed, there is no notion of justification in terms of which the change can be evaluated. It can only be judged as being more or less expedient, fruitful, conducive to the aim for the language is intended" (Carnap, 1950). Y, por otro lado, la revisión interna que se centraría en los enunciados sintéticos, pues estaría guiada sobre todo por nociones como la verdad, justificación y evidencia al interior de un marco lingüístico elegido.

La interrogante de Quine deja ver que, desde su punto de vista, aquellas consideraciones pragmáticas que Carnap delimitó para la revisión externa o la elección de un lenguaje como son la productividad, la eficiencia y conveniencia para un fin particular también desempeñan una función fundamental o, mejor dicho, son las mismas que son empleadas en la revisión al interior de un marco lingüístico:

> The sorts of considerations that might lead us to a change from one language to another are not in principle different from the sorts of considerations that might lead us to make a change from one theory within, a language to another theory within the same language: in each case, the must we can say, generally and in the abstract, without detailed examination of the particular case, is that the new theory is more successful in its predictions, or simpler, or more elegant, or more fruitful, than the old, whether the new theory is within the same language of involves adopting a new language. Hence there is no epistemological cleavage between the analytic and the synthetic or between the change of language and a change of theory within a language. Indeed the very distinction between language and theory ceases to be fundamental for a language is no longer conceived as a neutral framework (Hylton, 2007).

Por considerar que ambos enunciados están sometidos al mismo tribunal, a las mismas consideraciones pragmáticas, Quine concluye que la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos es epistemológicamente irrelevante y en *From a Logical Point of View* escribe: “In repudiating such a boundary, I espouse a more thorough pragmatism” (Quine, 1980). Todos los enunciados al ser evaluados están sometidos a las mismas consideraciones, incluso aquellos enunciados considerados analíticos: “Discovering that a certain sentence was originally introduced as a postulate or a definition tells us nothing at all about the way in which evidence now bears on it. Evidence bears on all sentences the same way” (Hylton, 2007).

El lenguaje matemático, considerado por tradición independiente de la experiencia, para Quine está también sometido a las mismas consideraciones que cualquier otro enunciado sintético. El científico toma todos los componentes de su teoría como componentes vulnerables a la desconfirmación con el fin de obtener la mejor explicación de un fenómeno científico y dentro de estos componentes vulnerables, sin duda, se encuentran los componentes matemáticos que son revisables y forman parte de la teoría. Desde la óptica quineana, ningún enunciado es inmune a la experiencia y todo enunciado debe ser sometido al principio de revisabilidad, según las consideraciones y virtudes epistémicas, para obtener la mejor explicación y teoría de un fenómeno natural. Por lo que la distinción carnapiana no juega, a los ojos de Quine, ningún papel epistemológicamente relevante.

Con ello, Quine afirma que la evidencia incide en todos los enunciados del lenguaje científico de la misma manera, sin importar si éstos enunciados fueron introducidos en un principio a través de una definición o estipulación. No obstante, es importante notar que, de acuerdo con Quine, no evaluamos un enunciado por su relación individual con la experiencia, sino por su contribución a un fragmento más o menos amplio de una teoría científica que tomada como una unidad está relacionada con la experiencia: "It is the theory as a whole which is to be evaluated and the criteria are the same sort that we use to evaluate external revisions" (Quine, 1986). La teoría, como comprendimos al revisar el holismo quineano, es evaluada como un todo por su capacidad para lidiar con la experiencia sensorial en contraste con cualquier otra teoría rival. Existe, por lo tanto, un criterio único para todo enunciado de conocimiento: aceptamos un enunciado de conocimiento si éste es parte de una teoría que tomada como un todo nos permite organizar mejor la experiencia sensorial, esto es, conforma nuestra mejor explicación sobre un fenómeno natural.

De esta manera, el lenguaje de la lógica y de las matemáticas, tradicionalmente asociados con la noción de analiticidad y con el conocimiento *a priori*, están, para Quine, integrados al conocimiento científico en una teoría que se confirma o desconfirma frente al tribunal de la experiencia:

> Mathematics and logic are supported by observation only in the indirect way that those aspects of natural science are supported by observation; namely, as participating in an organized whole which, way up at its empirical edges, squares up with observation. I am concerned to urge the empirical character or logic and mathematics no more than the unempirical character of theoretical physics; it is rather their kinship that I am urging, and a doctrine of gradualism (Quine, 1986).

A los ojos de Quine, el científico recurre al lenguaje matemático con la misma finalidad con la que recurre a cualquier otro lenguaje o componente de una teoría: para organizar de la mejor manera posible la experiencia sensorial. Las matemáticas de una teoría científica son confirmadas o falseadas de la misma manera que cualquier otro componente teórico. La evidencia incide sobre todos los enunciados de la misma manera.

Las consideraciones pragmáticas que guiaban para Carnap la elección de un marco lingüístico guían también, desde el punto de vista quineano, las revisiones que ocurren al interior del marco lingüístico o teoría con la finalidad de construir un sistema de conocimiento virtuoso. A su vez, ningún enunciado es inmune a la experiencia o permanece en el sistema por la sola estipulación o definición. Toda justificación proviene del mismo criterio: la participación en un sistema virtuoso de conocimiento empírico confirmado. En síntesis: ningún enunciado es inmune a la experiencia y todos los enunciados se confirman como componentes de la teoría al confirmarse la misma. Por consiguiente, la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos se torna borrosa o, al menos, epistemológicamente irrelevante.

Como hemos apuntado antes, la única diferencia que Quine encuentra entre los componentes matemáticos y el resto de los componentes es una diferencia de grado: las matemáticas no son inmunes a la experiencia, aparentan ese carácter porque estamos menos dispuestos a revisar dichos componentes en comparación con aquellos que inmediato son alterados cuando una teoría es falseada por un experimento. Por lo general, la revisión de los componentes matemáticos es muy costosa, pues: "mathematics infiltrate all branches of our system of the world, and its disruption would reverberate intolerably" (Quine, 1990). Las matemáticas pertenecen a los componentes más atrincherados, a aquellos que los científicos estarían menos dispuestos a revisar en caso de desconfirmarse la teoría, ya que permean tanto la gramática de la ciencia, como sus distintas ramas. Aunque dicha revisión es factible cuando los beneficios superan los costos en el esfuerzo y la búsqueda por acercarnos al conocimiento de la naturaleza. Como veremos más adelante, para Quine la menor disposición a ser revisadas es lo que ha llevado a la tradición filosófica a afirmar que las matemáticas son los componentes *a priori* de las teorías.

Pues bien, lo que es importante notar en este punto es la concepción quineana del lenguaje, el lugar que ocupan las matemáticas aplicadas en ella y cómo dicha concepción genera la imposibilidad del doble criterio ontológico. Como hemos apreciado, Quine esgrime una concepción unitaria del lenguaje que, simultáneamente, es gradual. No nada más porque son las mismas capacidades del lenguaje natural las que gradualmente se van perfeccionando, sino porque cualquier lenguaje integrado en una teoría científica tiene la misma relevancia epistemológica, es decir, la misma justificación, dado que está sometido a las mismas consideraciones pragmáticas. En último término, el lenguaje matemático está sujeto a la confirmación o falsificación dentro de la teoría concebida como un todo.

Para Quine la característica central del lenguaje es su capacidad como herramienta conceptual para organizar la experiencia sensorial y así acceder al conocimiento de la realidad conforme progresivamente afinamos su capacidad referencial. En esta labor, por tanto, las virtudes epistémicas tienen un papel central, como lo tienen también las observaciones, pues ambas son la vía por la que garantizamos que estamos conociendo un fenómeno natural y planteándonos la mejor teoría acerca de él.

La "continuidad del lenguaje" respecto a las capacidades del lenguaje natural y su gradación, así como su 'homogeneidad epistemológica' —vía la difuminación de la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos y el holismo confirmacional— son aspectos centrales de la filosofía del lenguaje quineana. Y son estos supuestos, junto con la inferencia a la mejor explicación, los que nos llevan a considerar que un doble criterio ontológico entre las entidades matemáticas y las entidades teóricas sería una deshonestidad intelectual. Si comprendemos el recorrido cognitivo del lenguaje a través de la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia, desde sus inicios con el sentido común y el lenguaje natural que surgen en contextos sociales hasta la implementación de la notación canónica como la última de las etapas en la que reificamos los objetos existentes en nuestra búsqueda por conocer las últimas y verdaderas categorías de la realidad, entenderemos el origen de la imposibilidad del doble criterio ontológico.

Después de una investigación naturalista de la práctica científica, Quine comprendió que el científico construye y elige un marco teórico con las mejores herramientas conceptuales, es decir, las que proveen los mayores beneficios para organizar la experiencia sensible y conocer la realidad. Las elecciones en este marco lingüístico, por ejemplo, entre dos hipótesis que compiten, son tomadas considerando virtudes epistémicas como la compatibilidad con creencias o supuestos anteriores, la modestia cognitiva[16], la simplicidad, generalidad, refutabilidad y precisión. Aunque esta última más bien es una virtud pragmática que al igual que el resto de las virtudes epistémicas mencionadas es una *desiderata* para una teoría científica exitosa, pero no es epistémica, pues no

[16] Eventos que han sucedido con anterioridad son más usuales y familiares, por tanto, son mayormente esperados.

es indicativa de la verdad de una teoría (*truth-indicative)*, es decir, “its not likely to improve the conformity between theory and world.” (MacMullin, 1983).

En el segundo capítulo me aproximé desde distintos ángulos de la filosofía quineana al proyecto genético del conocimiento de las últimas y verdaderas categorías de la realidad. Hasta ahora he revisado aquellos supuestos que explican el proceso entre la formulación de una teoría científica y la reificación de los objetos. De esta manera, en el apartado “La notación canónica: la configuración del objeto quineano” comprendí que una vez confirmada una teoría científica como la mejor teoría acerca de un fenómeno natural se emprende la traducción de la teoría a la lógica de primer orden con el fin de conocer los los objetos que componen el mobiliario del Universo. Exploré las razones que hacen de lógica de primer orden el lenguaje adoptado por Quine como método de compromiso ontológico y comprendí que dichas razones son las mismas que cruzan todo el sistema de conocimiento científico. Las consideraciones pragmatistas de Quine que ocurren en el razonamiento experimental del científico permean hasta las últimas capas de la metafísica naturalizada. Y así, una herramienta conceptual —entre ellas, posiblemente un componente matemático— que es adoptada por el científico por sus beneficios epistémicos como parte de una teoría que se confirma en su totalidad se reifica como objeto en la regimentación de la teoría. La génesis de un objeto existente comienza como una herramienta conceptual que integrada a una teoría como un todo incrementa el poder explicativo de la misma o le beneficia epistémicamente y que, dado este proceso cognitivo frente a lo empírico, se vuelve candidato a ser reificado en la regimentación.

Con este método, como he examinado antes, emprendemos el paso definitivo entre los aspectos epistemológicos del proyecto quineano hacia los aspectos ontológicos; los primeros se ocuparían de nuestra relación con el mundo y el conocimiento del mismo y los segundos sobre cómo es el mundo y cuáles son las verdaderas y últimas categorías del mismo. Se trata del paso entrelazado entre las herramientas conceptuales utilizadas por los científicos para formular las mejores explicaciones sobre la naturaleza a la reificación de los objetos existentes que postulan dichas explicaciones.

Hemos apuntado que las consideraciones pragmáticas que llevan a Quine a determinar que la notación canónica es la vía para conocer los objetos postulados por una teoría son las mismas que se sopesan en los estratos más experimentales de la ciencia y es así que la filosofía quineana garantiza que se trata de un método que describe la verdadera y última estructura de la realidad:

> The ancillary activity of analyzing and paraphrasing scientific sentences of ordinary language, so as to abstract out their logical form and explore the formal consequences, is comparable in principle to the activity of the physicist who reworks and rethinks his data and hypotheses in stereotyped mathematical form so as to bring to bear the techniques of tensor analysis or differential equations upon them (Quine, 1980).

El método de regimentación al promover la simplicidad, la clarificación y la reducción continúa la labor de sistematización del científico y maximiza la objetividad en la búsqueda por las categorías de lo real.

En la regimentación, concebida como una labor técnica que se lleva a cabo en un lenguaje artificial, se hace claro cuáles de las herramientas conceptuales utilizadas por los científicos pueden reducirse o eliminarse y cómo algunas de ellas son indispensables, lo que quiere decir que no podemos eliminarlas, pues la teoría resultante sería menos atractiva y exitosa. Esto nos lleva a entender por qué las posiciones ficcionalistas de las matemáticas buscaron nominalizar las teorías científicas para refutar la conclusión del argumento, es decir, por qué buscaron probar la dispensabilidad de los componentes matemáticos de las teorías científicas para rechazar el compromiso ontológico con las entidades matemáticas. Si lográramos nominalizar una teoría científica exitosamente no solo probaríamos a nivel de la notación canónica que su cuantificación no es indispensable, sino que epistemológicamente habríamos podido formular una teoría igual de exitosa y atractiva sin recurrir a dicho lenguaje o aparato conceptual. Y esta posibilidad, siguiendo los supuestos quineanos, reflejaría que este componente (matemático) realmente no describe el mobiliario existente del mundo. Las posiciones ficcionalistas se tomaron muy en serio la lógica de los argumentos de indispensabilidad, como apuntó Hartry Field, asintiendo frente a la validez del razonamiento y buscando, por tanto, negar la existencia de los objetos matemáticos a través de la nominalización de las teorías. Sin embargo, con ello asintieron también a los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana con los que se filtraba también una manera de comprender el conocimiento matemático y científico.

En particular, asintieron a supuestos de la filosofía del lenguaje quineana que se reflejaban a su vez en la filosofía de la ciencia naturalizada de Quine. Asintieron a la concepción unitaria del lenguaje, a su gradación y su 'homogeneidad epistemológica" y son estos supuestos los que determinan una manera particular de concebir el lenguaje matemático; su función cognitiva y epistemológica. Como he analizado, Quine tiene un criterio único de justificación para todo los enunciados:

> Quine argues that the only general account that we can give of justification is that we have reason to accept a sentence if it is part of a theory which, taken as a whole, enables us to deal with sensory experience better than any other that we have. But this criterion applies not only to those sentences, which Carnap counted as synthetic but also to those he counted as analytic. There is thus a single criterion for all knowledge, the supposedly analytic and the supposedly synthetic alike. In this way, we can account for those phenomena, which led philosophers to invoke the idea of the a priori (Hylton, p. 75).

Del pasaje anterior es importante resaltar que, para Quine, cualquier enunciado en un sistema de conocimiento tiene la misma justificación: tenemos razones para aceptar como verdadero un enunciado si es parte de una teoría que, tomada como un todo, nos permite lidiar con la experiencia sensorial mejor que cualquier otra teoría. Resulta claro que para Quine el lenguaje se caracteriza fundamentalmente por una función cognitiva y epistemológica definida, es decir, se trata de un arreglo conceptual que nos permite organizar la experiencia sensible de la mejor manera posible.

De este modo, Quine concibe a los distintos componentes del lenguaje científico como herramientas conceptuales con beneficios epistémicos que forman parte de una teoría que en su totalidad está sujeta a confirmación empírica. Ésta es su concepción del lenguaje científico, que es una extensión de las capacidades del lenguaje natural tal como la ciencia es también una extensión del sentido común. Las matemáticas forman parte de este lenguaje científico y, en último término, del sistema de conocimiento sometido a confirmación. No se distinguen del resto de los componentes en ningún sentido epistemológicamente relevante. La única peculiaridad de los componentes matemáticos es su "atrincheramiento", en otras palabras, su menor susceptibilidad a ser revisadas si la teoría de la cual forman parte es experimentalmente falseada.

La que presento aquí es una caracterización amplia del lenguaje científico según Quine, pero lo importante es que epistemológicamente todo el lenguaje científico tiene la misma justificación y relevancia cognitiva. De este arreglo lingüístico y conceptual surgirán los objetos existentes a través de la reificación en la regimentación de la teoría.

Putnam señala que es una deshonestidad intelectual negar la existencia de objetos matemáticos y comprometerse ontológicamente sólo con aquellos componentes teóricos. Si nos comprometemos con la lógica de los argumentos de indispensabilidad, no podemos esgrimir un doble criterio frente a ambos tipos de componentes. Empero, considero que la imposibilidad de esgrimir este doble criterio no es únicamente resultado de la inferencia a la mejor explicación y de un método objetivo elegido bajo consideraciones pragmáticas en nuestra búsqueda por las últimas y verdaderas categorías del Universo, sino, de alguna manera es presupuesta por Quine, producto en particular de los supuestos que conforman su filosofía del lenguaje. Todo el lenguaje científico posee la misma justificación y guarda la misma relación respecto a la evidencia, es decir, todo el lenguaje —incluido el lenguaje matemático— se define por la misma función epistemológica en un sistema holista de conocimiento. Asimismo, el lenguaje es caracterizado de una manera amplia como un arreglo conceptual virtuoso que nos permite organizar la experiencia sensible. Y son justamente estos beneficios epistémicos asentados en la evidencia o confirmación de la teoría los que consolidarán el carácter indispensable de las herramientas conceptuales postuladas por la misma, comprometiéndonos ontológicamente con ellos como objetos una vez reificada la teoría y admitida la inferencia a la mejor explicación.

Sin embargo, notemos cómo Quine define el lenguaje en términos muy amplios, por no decir vagos, y le asigna la misma función epistémica a todos los componentes de la teoría. Además de que de forma explícita sólo considera al lenguaje matemático distinto en grado y en rigor, y en su proyecto genético afirma que cognitivamente el lenguaje científico es producto del perfeccionamiento de las capacidades del lenguaje natural. En la filosofía quineana el lenguaje matemático no tiene una función cognitiva peculiar distinta del resto del lenguaje.

Por tanto, la imposibilidad de esgrimir un doble criterio ontológico que parece ser resultado de la inferencia a la mejor explicación y de un método objetivo (i.e. el criterio de compromiso ontológico) sometido a las mismas consideraciones que permean todo el sistema de conocimiento científico proviene, a su vez, de una serie de presupuestos sobre el lenguaje, su psicogénesis y su función epistemológica. La suposiciones más fuertes de la concepción lingüística en cuestión son que el lenguaje matemático, por un lado, es una extensión de las capacidades del lenguaje natural y se distingue de él o del resto del lenguaje científico sólo en grado, rigor y sistematicidad y, por otro lado, que posee la misma relevancia epistemológica que cualquier otro componente científico que forma parte de un sistema frente a la experiencia sensible. Son estos supuestos sobre el lenguaje y la comprensión de las herramientas conceptuales desde el holismo y el pragmatismo quineano los que preconfiguran los objetos existentes que se reifican una vez aplicado el método ontológico quineano.

No obstante, debo decir que las investigaciones de W.V.O. Quine nos mostraron un hecho interesante acerca de las matemáticas aplicadas, pues mostraron su indispensabilidad no sólo desde el punto de vista cuantificacional, sino desde la mirada del holismo que comprendió los beneficios epistémicos del lenguaje matemático. Sin embargo, dichos beneficios son concebidos de la misma manera que cualquier otra herramienta conceptual que incremente el potencial epistémico de una teoría. Y éste es un supuesto fuerte de la filosofía del lenguaje de Quine que repercute en su filosofía de la ciencia y, en último término, en la metafísica naturalizada.

Dados estos supuestos paradigmáticos, no podemos asumir que la imposibilidad de sostener un doble criterio ontológico es sólo el resultado arrojado por un método ontológico objetivo elegido bajo las mismas consideraciones pragmáticas que el resto de los componentes científicos. Bajo la mirada quineana esgrimir un doble criterio ontológico sería una deshonestidad intelectual, pero porque desde dicha mirada nos hemos comprometido también con un conjunto de supuestos paradigmáticos que guían nuestro entendimiento sobre el conocimiento matemático y científico y estos supuestos se han filtrado junto con un razonamiento poderoso y ampliamente aceptado como es la inferencia a la mejor explicación. Tal vez es por esta razón que el argumento Quine-Putnam se nos presenta con una tenacidad, como una especie de hechizo filosófico que se impone a nuestra inteligencia.

Podemos profundizar en la observación del apartado anterior y llevarla un paso adelante. Para ello, es necesario contrastar los supuestos paradigmáticos de la filosofía del lenguaje quineana con supuestos centrales del naturalismo filosófico de Quine. Comenzaré por apuntar que tanto la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia como la tesis del holismo confirmacional, conocida como Tesis Duhem-Quine, así como la crítica a la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos que Quine enuncia en *Dos dogmas del empirismo* son tesis surgidas a partir de un estudio naturalista del lenguaje y de la observación e investigación de la práctica científica.

Sin embargo, Quine nunca emprendió un estudio o una investigación naturalista de cómo funcionan las matemáticas aplicadas, asumiendo su parentesco con las capacidades del lenguaje natural y su distancia frente al resto del lenguaje científico sólo en "gradación", pero con la misma relevancia epistemológica. Por supuesto que el lenguaje matemático fue pensado bajo una nueva óptica desde la mirada de la filosofía quineana. Como he explorado, frente a las asunciones positivistas de Carnap, Quine comprendió que el lenguaje matemático era parte de los elementos de una teoría científica que se confirmaban y que, en ese sentido, no eran inmunes a la experiencia. Considero esta hipótesis como uno de los legados significativos de la filosofía quineana en nuestra búsqueda por comprender las verdaderas categorías del Universo que, siguiendo el espíritu del pensamiento de Quine, es una misma con la búsqueda por comprender y mejorar la práctica científica.

Si bien Quine con su crítica a la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos dio un paso significativo en la comprensión de la función del lenguaje matemático en el sistema de conocimiento científico, no emprendió como tal una investigación naturalista sobre cómo funcionan las matemáticas aplicadas. Argumentaré que ésta es una laguna en la filosofía quineana, una faceta incoherente con los principios naturalistas que fundamentan el proyecto filosófico de Quine y con las consiguientes repercusiones que limitan la conclusión del argumento Quine-Putnam. De haber emprendido una investigación naturalista sobre las matemáticas aplicadas posiblemente podríamos, desde la óptica de la filosofía quineana, explicarnos un poco mejor el conocimiento matemático sin catalogar a aquellos fragmentos de las matemáticas que no han encontrado aplicación en las ciencias empíricas como un juego recreativo.

En lo siguiente, no emprenderé un estudio naturalista de las matemáticas aplicadas, no es el objetivo de esta investigación y me temo que sería una magna labor para los límites de la misma, como probablemente lo fue para el proyecto quineano. Considero, no obstante, fundamental llevarlo a cabo si queremos mejorar nuestra búsqueda por conocer las últimas y verdaderas categorías de la realidad. Comparto con Quine la idea, también presente en buena medida en la filosofía de la ciencia contemporánea, que apunta que el conocimiento y la reflexión sobre la práctica científica es imprescindible si buscamos conocer la naturaleza y la realidad.

En su lugar, en lo restante de esta investigación me gustaría mostrar la laguna de la filosofía quineana cuestionando el supuesto que afirma que la diferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural es sólo una diferencia de grado (en rigor, claridad, sistematicidad, etc.) y, con ello, mostrar que las categorías producto de los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana para pensar la práctica matemática y científica son insuficientes, en especial si las contrastamos frente a algunos hechos naturalistas de la práctica científica. Con ello, no buscaré refutar la conclusión del argumento Quine-Putnam, sino comprender cómo los supuestos paradigmáticos detrás del argumento han determinado nuestro entendimiento del conocimiento matemático y científico y, a la luz de esta revisión podremos revalorar los límites del argumento Quine-Putnam.

ι. Lenguaje natural & lenguaje matemático

Como he explorado, Putnam afirma que es una deshonestidad intelectual esgrimir un doble criterio ontológico entre las entidades matemáticas y las entidades teóricas. He argumentado que dicha imposibilidad es producto de supuestos paradigmáticos de la filosofía del lenguaje y de la ciencia quineana; supuestos que tienen que ver con el holismo y con la crítica a la distinción analítico-sintético, entre otros, los cuales intervienen en la configuración de los objetos ontológicamente aceptados. En último término, he apuntado el supuesto protagonista a señalar, que más tarde se traduce en la imposibilidad del doble criterio, es el que afirma que el lenguaje matemático sólo se distingue en grado del lenguaje natural.

Desde la mirada quineana todo el lenguaje científico tiene la misma relevancia epistemológica y es concebido en el mismo sentido: con respecto a los beneficios epistémicos que posee como parte de una teoría que se relaciona de manera virtuosa con la experiencia sensible. En lo siguiente, presentaré una postura alterna que, dada una investigación naturalista de la práctica matemática, considera que el lenguaje matemático es radicalmente distinto al lenguaje natural quizá tanto en las capacidades cognitivas empleadas en uno y otro como en los beneficios epistémicos de cada uno. La postura a la que me refiero está expuesta en la obra *Realizing Reason: A Narrative of Truth and Knowing de* la filósofa Danielle Macbeth.

Ahora bien, la obra de Macbeth contiene tesis metafísicas robustas sobre la filosofía de las matemáticas, la filosofía de la ciencia y del lenguaje. Y aunque debo confesar mi simpatía con algunas de las ideas presentadas en su obra, considero importante aclarar que no es mi interés defender en este trabajo el conjunto de tesis que componen la obra de Macbeth, sino simplemente mostrar una investigación naturalista de la práctica matemática que considero fructífera en tanto que cuestiona el supuesto quineano sobre la continuidad entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Pienso que muchas de sus observaciones e indagaciones sobre la peculiaridad del lenguaje matemático a partir de una investigación naturalista de la práctica matemática son significativas y útiles para contextos independientes de las tesis metafísicas que enmarcan su obra. Desde este lugar presentaré las ideas de Macbeth como una posible vía para acercarnos a comprender la práctica matemática y la aplicabilidad de las matemáticas.

Resulta vital enfatizar que Macbeth elabora una investigación naturalista de la práctica matemática, pues recientemente apunté que una de las lagunas o incoherencias de la filosofía del lenguaje quineana era no haber emprendido una investigación naturalista sobre las matemáticas aplicadas quebrantando así por límite u omisión, uno de los principios cardinales del proyecto y filosofía quineana. Desde luego que tomo en cuenta que Quine emprendió un paso extraordinariamente significativo respecto a Carnap al reformular la función del lenguaje matemático en una teoría científica. No obstante, considero que los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana son insuficientes para comprender la intersección entre la aplicación de las matemáticas y la ontología de dichos objetos. En otras palabras, son insuficientes para concluir irrestrictamente (para todos los casos) la existencia de los objetos matemáticos a partir de su aplicabilidad.

Mencionaré las razones por las cuales considero a la investigación de Macbeth un estudio naturalista sobre la práctica matemática; razones que ella expone explícitamente en su libro y que son compatibles con los principios del naturalismo que a lo largo de su obra Quine proyectó. Dichos supuestos no sólo dan un marco metodológico a la investigación de la filósofa, sino que son puestos en acción a lo largo de la misma y configuran su comprensión sobre la práctica matemática. Enfatizo dicha coherencia con animo de sustentar la validez del proyecto naturalista de Quine y de solventar la laguna que avisto en aspectos cardinales de su filosofía del lenguaje. Como mencioné en la Introducción, el argumento Quine-Putnam es un punto de intersección valioso y más que refutar su conclusión me interesa producir cuestionamientos fructíferos que agudicen nuestra comprensión filosófica sobre el conocimiento matemático y científico.

Desde la introducción, Macbeth nos deja en claro que uno de los pilares que fundamentan su comprensión de la práctica matemática es la racionalidad, entendida como la capacidad humana para autocorregirse y tener una segunda mirada sobre las cosas [en inglés, utiliza la expresión *second thoughts]*:

> The second pillar we need is the pragmatist idea —derived in part from Kant but then developed further in the work of Peirce and Sellars, and assumed also by Frege— that inquiry is, as Sellars puts it "rational, not because it has a foundation but because it is a self-correcting enterprise which can put any claim in jeopardy, though not all at once (Sellars, 1956). Not only is nothing Given as the firm and indubitable foundation for knowledge. The fact that we have no Olympian standpoint, no "God's eyes view" from which to see things as they really are… (Macbeth, 2014)

Como apreciamos en el pasaje anterior, Macbeth hereda del pragmatismo la idea de lo racional no como algo que posee un fundamento firme, sino que se caracteriza por ser una actividad que puede poner en cuestión cualquier afirmación, debido a que en la empresa del conocimiento y en la búsqueda por conocer la naturaleza no hay nada dado. No tenemos acceso a los ojos de Dios para mirar las cosas como son en sí mismas. La idea anterior nos recuerda a la balsa de Neurath, la metáfora predilecta de Quine para ilustrar cómo nos encontramos en el medio de las cosas y desde allí emprendemos la labor del conocimiento. Ningún tablón de la balsa en la que navegamos es fijo o permanente cara al mar de lo real; ningún enunciado es inmune a la experiencia.

Bajo la premisa anterior, es conocida la idea quineana de la ciencia como una empresa en constante revisión que permanente avanza hacia mejores teorías, más predictivas, simples y elegantes. Lo cual integra en Quine la posibilidad de asociar la práctica científica a una historicidad. Sin embargo, Quine no desarrolló esta idea más allá, rumbo a una investigación de la práctica científica particular que integrara una mirada historicista. Macbeth, por el contrario, lleva este principio a sus últimas consecuencias y muestra una línea de simpatía entre el pragmatismo y una comprensión dialéctica de la verdad que ya había sido concebida por filósofos como Peirce y Sellars: “The fact that the pursuit of truth is not only an activity but one with a dialectical history of growth, developed and transformed” (Macbeth, 2014). El conocimiento ocurre en un proceso de crecimiento, de desarrollo, de maduración racional gracias a profundas transformaciones cognitivas:

> This idea, that the rationality of inquiry is manifested in our capacity for self- correction, for second thoughts, directs us, again, to the processes of inquiry as contrasted with their products, and indicates thereby that we need to consider not only our contingency and finitude but also our historicity, that the philosophical understanding we seek must take the form of a narrative of our intellectual maturation. And, again, it must take this form because our knowledge of things as they are in themselves is an essentially late fruit of intellectual inquiry, an achievement of reason that is possible at all only in the wake of profound cognitive transformations (Macbeth, 2014).

Resalto esta diferencia y similitud entre Macbeth y Quine, pues considero que una mirada naturalista, incluso desde el naturalismo quineano, tendría como implicación una investigación de la ciencia y del lenguaje científico como un proceso que se ha desarrollado históricamente, prosperando en la búsqueda por conocer las “verdaderas y últimas categorías de la realidad”.

Como mencioné, Quine no lleva a cabo una investigación naturalista de las aplicaciones de las matemáticas y, sin embargo, su filosofía emprende aseveraciones robustas sobre el lenguaje y sobre la relevancia epistemológica del lenguaje matemático en la ciencia. Muchas de ellas interesantes y que representan un avance respecto al positivismo lógico, pero insuficientes para la comprensión del lenguaje matemático en la ciencia, su aplicación y, en consecuencia, para la ontología. Si asumimos los principios naturalistas propios de la filosofía quineana, así como el espíritu que caracteriza la comprensión quineana de la ciencia, se vuelve vital una investigación naturalista, en todo el sentido del término, del lenguaje matemático aplicado en las ciencias, teniendo siempre presente que: “It is the activity of inquiry, not its products that holds the key to an adequate conception of truth in the exact sciences” (Macbeth, 2014).

Finalmente, el naturalismo sostiene que el conocimiento filosófico debe guardar coherencia con el conocimiento científico. Como advertí en el capítulo inicial, Quine señala este punto cuando se refiere principalmente a la coherencia con el método científico. No obstante, también se ha apuntado que el naturalismo es la doctrina que sostiene que todo conocimiento debe ser coherente con el punto de vista científico. En ese sentido, la obra de Macbeth es un importante esfuerzo intelectual por integrar la práctica de las matemáticas puras dentro del horizonte científico. Recordemos que para Quine las matemáticas puras permanecen en el terreno de lo recreativo hasta que son aplicadas a lo empírico en una teoría científica. En contraste, la obra de Macbeth busca hacer sentido de la noción de verdad matemática, investigando cómo es posible la extensión del conocimiento matemático si el razonamiento que lo caracteriza es deductivo [“how can one’s mathematical knowledge be extended if one’s reasoning is deductive” (Macbeth, 2014)]. Es innegable que nuestro horizonte científico debe contemplar una explicación adecuada de la práctica de las matemáticas puras, su función en las ciencias empíricas y en nuestro conocimiento de la naturaleza si queremos avanzar en el conocimiento de las últimas y verdaderas categorías de la naturaleza:

> The world of mathematics is not a world apart. We will not have an adequate account of the physical world and our knowledge of it until we understand better than we presently do the role played by mathematics in our accounts of physical phenomena. And it is not likely that we will satisfy ourselves on that score until we have produced accounts of knowledge, truth, and reality that deal adequately with pure mathematics as well (Benacerraf & Putnam, 1964).

Por esta razón, la obra de Macbeth es coherente con los principios naturalistas al avanzar una propuesta filosófica que da cuenta de una noción propia de la práctica matemática (i.e. la verdad matemática) a través del estudio naturalista de tres sistemas matemáticos representativos que se desenvolvieron en momentos históricos puntuales. Enfatizo que para los objetivos de mi investigación no me adentraré en dicha noción de la verdad matemática, ni en otras tesis filosóficas y metafísicas robustas del trabajo de Macbeth, sino exclusivamente buscaré traer al frente una investigación naturalista que cuestiona el supuesto de la filosofía del lenguaje quineana a través de una serie de distinciones lingüísticas reveladoras.

Hasta este momento me parecía importante, por un lado, apuntar la laguna en la filosofía del lenguaje quineana, una vez identificados aquellos supuestos paradigmáticos que nos llevan a la imposibilidad de afirmar el doble criterio ontológico y, por otro lado, dejar en claro la compatibilidad de la investigación de Macbeth con los principios del naturalismo de W.O. Quine. De esta manera, se hacen explícitas en mayor medida las limitaciones de los principios filosóficos quineanos respecto al lenguaje matemático y, simultáneamente, se mantienen vigentes aquellos principios fructíferos de la filosofía de Quine, así como la riqueza y aportación del argumento Quine-Putnam a la filosofía de la matemáticas y de la ciencia.

El supuesto de la filosofía del lenguaje quineana que apunté como uno de los paradigmas del conocimiento matemático que el argumento Quine-Putnam hereda es el que asume la unicidad y gradación entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural. Desde las primeras páginas de su obra, Macbeth apunta la existencia de este supuesto dentro de la tradición de la filosofía analítica:

> Analytic philosophy has always had especially close ties with the sciences and has taken understanding the practice of science as one of its central concerns. Analytic philosophy has also taken as one of its guiding tenets the thought that fundamental philosophical problems can fruitfully be addressed by reflecting on language. Analytic philosophers have nonetheless tended—for contingent, historical reasons that will eventually emerge—to be quite uncritical about language. It has been assumed in particular that the symbolic languages of mathematics differ from natural languages only in their degree of rigor, clarity, and perspicuity, that a sentence of natural language can be translated without losing anything essential into a symbolic language of the appropriate sort (Macbeth, 2014).

En la segunda parte de la cita, Macbeth dice que en la tradición analítica se ha asumido que los lenguajes simbólicos de las matemáticas difieren del lenguaje natural solamente en el grado de rigor, claridad y perspicuidad. Como ha sido comprendido, al explorar los supuestos paradigmáticos y cómo éstos configuran la noción de objeto matemático, este es el caso de la filosofía quineana. A continuación expondré algunas de las ideas de la obra de Macbeth que ponen en cuestión este supuesto a partir de un estudio naturalista del lenguaje matemático.

En *Realizing Reason: A Narrative of Truth and Knowing* Macbeth sostiene que el lenguaje matemático es peculiar y distinto del lenguaje natural y en las primeras páginas describe la primera diferencia entre ambos lenguajes:

> First, whereas natural language is first and foremost a spoken (or signed) language and a medium of communication, the symbolic languages of mathematics—for instance, the language of arithmetic and algebra, and Frege's concept-script—are instead essentially written and serve primarily as a vehicle of reasoning. Spoken natural language is fully intelligible independent of written language; symbolic languages are not (Macbeth, 2014).

El lenguaje natural tiene como medio de comunicación principal la oralidad y su inteligibilidad es independiente del lenguaje escrito, mientras que para el lenguaje matemático la escritura, al menos en algunos momentos históricos, ha jugado una función cognitiva esencial. Más tarde, Macbeth explorará el rol cognitivo de los signos en el lenguaje matemático, pero de inicio señala que si bien la escritura no es necesaria para el lenguaje matemático, históricamente, en algunos sistemas matemáticos particulares, sí ha jugado un rol esencial en el descubrimiento matemático. Lo anterior tiene implicaciones filosóficas importantes.

Retomando el trabajo filosófico de Brandom en *Making Explicit* y de McDowell en *Mind and World,* Macbeth caracteriza de la siguiente manera al lenguaje natural: "is the socially evolved verbal practice into which one is acculturated in childhood and through which one is realized as a rational animal capable of properly intentional action, perception and thought"(Macbeth, 2014). Asimismo, desde su perspectiva el lenguaje natural tiene las siguientes propiedades: es inextricablemente inferencial y referencial, en esencia sensorial, es decir, involucra objetos sensoriales, es histórico y narrativo. Abordemos brevemente cada uno de las propiedades mencionadas.

El lenguaje natural se caracteriza por relaciones referenciales (relaciones intensionales palabra(s)-mundo) y relaciones inferenciales (relaciones intensionales palabra-palabra). Ser iniciado en el lenguaje natural, sostiene Macbeth, es adquirir una comprensión de qué cuenta como una razón para algo, esto es, de los nexos inferenciales entre varios pensamientos expresables en ese lenguaje. A su vez, las relaciones inferenciales y referenciales son ininteligibles una sin la otra, pues las relaciones referenciales son propiamente referenciales sólo bajo el cristal de las relaciones inferenciales relevantes y viceversa, las relaciones inferenciales tienen sentido sólo respecto a las relaciones referenciales relevantes.

Desde esta perspectiva, el lenguaje natural es una red que involucra objetos sensoriales. En el lenguaje natural hablamos de los objetos en nuestros ambientes, de las cosas que nos importan como los animales que somos y que percibimos con nuestros sentidos. Los conceptos de los objetos que constituyen nuestras redes del lenguaje natural son fundamentalmente conceptos de objetos sensoriales; en otras palabras, objetos que se ven, sienten, que posiblemente tienen sabor, olor y sonido singulares.

Incluso, sostiene Macbeth bajo la influencia del trabajo de McDowell, los conceptos más básicos de nuestro lenguaje serían ininteligibles para un ser que careciera de las capacidades sensoriales con las que hemos evolucionado y lo mismo para el escenario alterno: "there might be concepts anchored in sensory capacities so alien to ours that the concepts would be unintelligible to us" (McDowell, 1994). Nuestros conceptos de los objetos, dice Macbeth, van más allá de la experiencia de los mismos. No obstante, no pueden ser comprendidos abstraídos del carácter subjetivo de nuestra particular experiencia. El lenguaje natural no es sólo una acumulación de la tradición histórica, sino una corporeización[17] de una particular perspectiva sensorial del mundo, una que está ineludiblemente enlazada a una forma específica de vida biológica, a un ser único sintiente situado en un punto determinado de la evolución filogenética.

Además, el lenguaje natural es inherentemente narrativo, sostiene Macbeth, pues nos interesa comunicar no sólo lo que acontece, sino lo que pasará después. La capacidad para hablar de lo que acontece requiere que el lenguaje posea dos modos de predicación, como ya lo había apuntado Aristóteles. Para hablar de lo que acontece debemos poder decir qué es lo que es una cosa y cómo es esta cosa, esto es, los atributos que posee: "It is in just this sense that natural language can be said to be essentially narrative: it is addressed not merely to the world but to the world as it unfolds as a story does, over time, and so speaks of kinds of things as doing things, as coming to have this or that property, and as coming to be in this or that relation" (Macbeth, 2014).

[17] Macbeth utiliza el término inglés embodiment.

A su vez, el lenguaje natural también ha tenido una función evolutiva distintiva e importante para el hombre, pues a diferencia de otros organismos, en el proceso de nuestra aculturación lingüística nos convertimos en otro ser, es decir, nos convertimos en animales racionales:

> That this distinction is profoundly misconceived is indicated already by the case of living organisms, which are evolved together with their affordance-rich environments through the process of evolution by natural selection. But we are not ourselves merely biologically evolved. Although we are born merely natural animals, albeit ones with a few distinctive, biologically endowed capacities such as the capacity to imitate, we are transformed in the course of our acculturation into a new sort of being, into rational animals (Macbeth, 2014).

Este proceso evolutivo de aculturación es descrito a grandes rasgos por Macbeth. De él distingue tres posibles etapas: una primera en la que evolucionaron las prácticas sociales gracias a nuestras capacidades de imitación. Una segunda etapa en la que nos asumimos como jugadores de juegos verbales institucionalizados, lo cual dependió plenamente de nuestras habilidades para cooperar y compartir objetivos comunes. Y finalmente, está la transformación en la que los lugares de autoridad se homogeneizaron permitiéndonos sintetizar y unificar el conocimiento de los procedimientos y en la que nos convertimos en seres propiamente racionales capaces de distinguir en principio entre cómo aparentan ser las cosas y cómo son realmente. A su vez, los lenguajes naturales también evolucionan con su uso, puesto que son constitutivamente sociales e históricos.

El mundo que el lenguaje natural nos revela, escribe Macbeth, es inherentemente sensorial y nosotros como seres racionales tenemos la capacidad de percibir y expresar cómo son las cosas con esos objetos y qué es lo que está pasando. Sin embargo, no todo lo que es posible saber del mundo puede ser alcanzado a través del lenguaje natural o desde la perspectiva que el lenguaje natural nos permite obtener. En realidad, finaliza Macbeth: “Indeed, it can seem that nothing that is afforded by natural language properly counts as knowledge” (2014). Y es este punto donde se vuelve necesario distinguir la función cognitiva y la peculiaridad del lenguaje matemático frente al lenguaje natural.

Macbeth lleva a cabo una investigación naturalista e histórica de la práctica matemática, en la que plantea una interpretación del lenguaje matemático basándose en el estudio de tres sistemas o notaciones matemáticas distintas. La primera de ellas está contenida en los *Elementos* de Euclides, la segunda se refiere a los avances en el álgebra y la aritmética hechos por Descartes y, finalmente, en la obra de Gottlob Frege titulada *Begriffsschrift.* Desde la perspectiva de Macbeth, si buscamos entender la práctica matemática, tenemos que mirarla en su funcionamiento, comprender los conceptos y la naturaleza de los conceptos que involucra; entender los modos de razonamiento que operan en ella y la función de las notaciones creadas para elaborar dichos razonamientos.

Una de las tesis cardinales que recorre la extensión de su libro afirma que las notaciones matemáticas son fundamentales para los modos de razonamiento que operan en sistemas matemáticos particulares, pues son sistemas de signos capaces de encarnar[18] y potenciar los razonamientos matemáticos. Lo distintivo de los lenguajes matemáticos, sostiene Macbeth, es que son capaces de formular el contenido de conceptos matemáticos en un sistema escrito de signos que promueve y facilita el razonamiento matemático y, en último término, la verdad y el descubrimiento matemáticos.

Con esta tesis fundamental, a partir de un estudio naturalista de la práctica matemática, Macbeth analiza las distintas revoluciones cognitivas que se han dado en el pensamiento filosófico y matemático e identifica tres etapas que han implicado profundas transformaciones cognitivas, cada una de ellas ha sido producto de una intensa maduración intelectual. Para los fines de esta investigación no me adentraré en estos aspectos de la obra de Macbeth. Lo relevante es comprender las distinciones que traza al principio y a lo largo de su obra para distinguir el lenguaje natural del lenguaje matemático; el rol que juegan las notaciones en ciertos sistemas matemáticos y cómo dicho rol es radicalmente distinto de y difícilmente jugado por el lenguaje natural. Incluso, acota Macbeth, como más tarde comprenderemos, cuando el lenguaje natural es utilizado en las pruebas de las matemáticas puras sigue conservando su función cotidiana, distinta de la que hacen los signos matemáticos en los modos de razonamiento.

De acuerdo con ello, expondré únicamente las distinciones relevantes y una vez hecho esto, mostraré el análisis y lectura de Macbeth de los *Elementos* de Euclides desde la óptica de las distinciones y la tesis macbethiana con la finalidad de mostrar la peculiaridad del lenguaje matemático frente al lenguaje natural.

[18] El término utilizado en inglés es *embody.*

En el segundo capítulo de *Realizing Reason*, titulado “Ancient Greek Diagrammatic Practice", Macbeth expone cuatro casos diferentes en los que se pone en actividad la capacidad de contar[19]:

Caso 1.- Soy un comerciante que vende huevos. Guardo los huevos en cajas de una docena, es decir, cuando tengo doce huevos los guardo en una caja. Y cuando acumulo seis cajas los guardo en un contenedor. Supongamos que ahora tengo tres contenedores, cinco cajas y ocho huevos sueltos. Recibo una entrega con dos cajas, dos contenedores siete huevos. Agrego los dos contenedores a los tres que ya tenía y las dos cajas a las cinco que tenía. Como ahora tengo siete cajas, pongo seis de ellas en un contenedor, que coloco con el resto de los contenedores. Si combino los siete huevos recién recibidos con los huevos sueltos con los que ya contaba antes, veo que ya tengo suficientes como para llenar una caja, así que lo hago y pongo esta nueva caja con la que quedaba después de que completé los seis contenedores y me quedan tres huevos restantes. Finalmente, veo que en mi tienda tengo seis contenedores, dos cajas, y tres huevos sueltos.

Caso 2.- De nuevo soy un comerciante de huevos con tres contenedores, cinco cajas y ocho huevos sueltos, y de nuevo recibo un pedido de dos contenedores, dos cajas y siete huevos. Como tengo ahora un empleado, no tengo que contar los huevos directamente. Sin embargo, me gustaría saber cuántos huevos tengo y para ello, he empleado un sistema de marcas escritas. Para representar cada huevo suelto usaré el signo de gato, una cruz para representar cada caja y diagonales para el caso de los contenedores.
Mi récord inicial debería verse así: ### +++++ ////////
Después de la entrega agrego cada una de las respectivas unidades: #####+++++++///////////////
Ahora, si acomodo los huevos en las cajas y las cajas en los contenedores remplazándo los signos de cada uno mi récord final se vería así:
######++///

[19] La exposición de los casos aquí expuesta es una traducción casi literal de la versión en inglés.

Caso 3.- Debido a que he diversificado mi empresa, ahora vendo huevos, varios tipos de frutas, tres tipos de granos y una gran variedad de especies, he abandonado el uso de diferentes signos para diferentes tipos de cosas. En su lugar, he adoptado una notación numeral que puede ser utilizada para todos, junto con signos que también me ayudarán a identificar qué tipo de cosa estoy contando. Adoptaré la numeración romana: en donde 'I' representa una cosa, 'V' representa cinco, 'X' representa diez, 'L' representa cincuenta, 'C' un centenar, 'D' quinientos y 'M' representa mil. Me ayuda saber que 'V' es una bolsa con cinco cosas, dos bolsas de 'V' caben en una caja de 'X', cinco cajas de 'X' hacen un contenedor de 'L', etc. Igual que antes, tengo tres contenedores, cinco cajas y ocho huevos sueltos. Cada contenedor contiene seis veces XII huevos: XXXXXXIIIIIIIIIIII, es decir, LXXII huevos. Así que el número de huevos en tres contenedores es ese tres veces: CCXVI. Cinco cajas son cinco veces XII: XXXXXIIIIIIIIII o LX. Ahora puedo determinar cuántos huevos hay en tres contenedores, cinco cajas y ocho huevos sueltos: CCLXXVVIIII, esto es, CCLXXXIIII. El nuevo pedido que son, una vez más, dos contenedores, dos cajas y siete huevos tiene CXXXXXXVIIIIIIIII, es decir, CLXXC. Si añadimos el *stock* previo tenemos CCCCLVIIII huevos.

Caso 4.- He aprendido a utilizar el sistema posicional de la numeración arábiga, así como hacer cálculos en dicho sistema. Enfrentado al mismo problema de determinar cuántos huevos tengo en total determino que mi *stock* existente es de tres cartones, cinco cajas y ocho huevos. Por lo que calculo 3 veces 6 veces 12 y 5 veces 12 y 8. Yo sé, pues lo he memorizado, que 3 veces 6 es 18. Para determinar 18 veces 12, escribo 18 debajo del 12 y hago el cálculo en lápiz y papel, que me da como resultado 216. Un cálculo similar me lleva a saber que 5 veces 12 es 60. Así que sumo, de la manera en la que todos aprendimos cuando éramos niños, 216, 60 y 8, lo que me da como resultado 284. La nueva entrega son dos contenedores, dos cajas y siete huevos, y para saber cuántos huevos tengo repito un cálculo similar en papel y con lápiz como el que emprendí para el stock existente. Así calculo que la última entrega tiene 175 huevos. Ahora necesito sumar 284 con 175 huevos, lo cual hago en papel y con lápiz para obtener que tengo 459 huevos en total.

Ahora bien, argumenta Macbeth que, en el primer caso en ningún sentido interesante estoy calculando en términos aritméticos. Más bien estoy trabajando directamente con el *stock*, con los objetos, no con los números. En el segundo caso, en contraste, estoy trabajando con los signos, los cuales ilustran el *stock* y yo puedo manipular los signos, de la misma manera en la que manipulaba el *stock*. Como en el tercer caso los signos no ilustran directamente los huevos, cajas y contenedores, dado que estoy utilizando un sistema de numeración multipropósito, toma un poco más de tiempo llevar el récord, pero aun así los signos de la numeración romana sí son una especie de ilustración de lo que el *stock* contiene y manipulo los signos así como manipulaba antes los objetos, la notación tiene un carácter principalmente inmediato:

> In all three cases literally I add things together (and would similarly literally take things away if instead of receiving a delivery I send off a shipment). To determine how many things is three boxes I write the signs three times, and were I dividing, say, by three, I would look for three occurrences of a sign to separate into three. The notation thus has an immediacy and concreteness that makes it very intuitive and easy to learn (Macbeth, 2014).

En contraste con el sistema posicional de la numeración arábiga, en este sistema los signos no ilustran directamente o representan a los objetos o a las colecciones de objetos. El sistema no es aditivo, pues ‘475’ no quiere decir cuatro, siete y cinco. No sólo son los numerales, sino también su posición nos indica el número al que nos estamos refiriendo. La manera de operar en los signos de la numeración arábiga no imita, en algún sentido, la manera de manipular los objetos concretos. A su vez, las reglas a seguir tampoco son intuitivas. En los casos 1-3 empleamos una notación que está basada en la representación: “Most numeral notation systems were never used for arithmetic or mathematics, but only for representation” (Chrisomalis, 2010). En los tres primeros casos se manipulan los signos como se manipularían los objetos del *stock.* Incluso, en lugar de utilizar la numeración romana, uno bien podría utilizar un abaco:

> Instead of manipulating the signs of Roman numeration, one would manipulate counters in a systematic and highly functional way to achieve the desired arithmetical results. Here again, even more obviously than in the case of our manipulations of Roman numerals, one operates on the counters much as one would operate on the things themselves, and can do because the counters directly stand in for things and collections of things, that is, for eggs, boxes and crates. In all such cases, one operates *on the system of signs* rather than *in the system of signs*, as one does in Arabic numeration (Macbeth, 2014).

En la última de sus afirmaciones Macbeth afirma que el razonamiento que se da en los tres primeros casos y en el último es distinto. En los primeros uno *razona con los signos*, mientras que en la numeración arábiga uno *razona en los signos*: “It is just this distinction that I aim to mark by saying that although one can *reason on* collection of Roman numerals, much as one reasons on an abacus or counting board, one cannot *reason in that system of signs* as one does in Arabic numeration” (Macbeth, 2014).

Los razonamientos con signos, afirma Macbeth, se dan también en el caso de la teoría de nudos, en la que los nudos pueden ser manipulados de acuerdo con los movimientos Reidemeister y las representaciones ilustran directamente a los nudos, es decir, las manipulaciones en el sistema se realizan en el mismo sentido que se haría con los nudos directamente. A partir de esta distinción entre *razonar con los signos* en un sistema y *razonar en los signos del sistema*, Macbeth argumentará que en los *Elementos* de Euclides uno razona en los signos, para ser más específica, uno no razona con los diagramas, sino en los diagramas [“One does not reason in the same way on a diagram in Euclid. Instead one reasons in the diagram as one reasons in the written system of Arabic numeration” (Macbeth, 2014)]. El *razonamiento con los signos* se caracteriza porque los signos ilustran [*picture*] a los objetos, y por tanto, los razonamientos simulan lo que uno seguiría si manipulara los objetos directamente. Más tarde, Macbeth detallará qué es lo distintivo del *razonamiento en los signos* de un sistema.

Antes de adentrarnos en la lectura que Macbeth realiza de los *Elementos* es necesario exponer una segunda distinción que facilitará la comprensión de la diferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural: me refiero a la distinción entre (i) describir o reportar un razonamiento y (ii) mostrar, exhibir o encarnar tal razonamiento en el lenguaje. En la ciencia de las matemáticas puras las verdades se establecen por medio de una demostración, si uno no puede demostrar una afirmación, entonces tiene en sus manos una conjetura y no propiamente conocimiento matemático. En las pruebas de las matemáticas puras uno tiene que poder ver que las cosas son como el matemático argumenta y razona: “a mathematical proof itself carries evidentiary evidence force; the intentions, reliability, and trustworthiness of its autor are irrelevant to its cogency” (Macbeth, 2014). El conocimiento matemático radica en pruebas que se sostienen por sí mismas.

En las matemáticas, en principio, uno siempre tiene que poder ver por uno mismo el camino que el razonamiento sigue, escribe Macbeth. Sin embargo, esto puede significar cosas diferentes según el caso. Supongamos, ejemplifica Macbeth, que tenemos que dividir ochocientos setenta y tres entre diecisiete. Uno podría proceder a llevar a cabo la aritmética mental que después reportaría de la siguiente manera:

Cien veces diecisiete son mil setecientos, así que cincuenta veces diecisiete es la mitad, esto es, ochocientos cincuenta. Tenemos hasta ahora cincuenta. Si agregamos un diecisiete más —de tal manera que ahora tenemos en el conteo total cincuenta y uno— tendríamos como resultado ochocientos sesenta y siete. Esto es menos que ochocientos setenta y tres y no podemos sumar otro diecisiete. Así que el resultado es cincuenta y uno y quedan seis como restante.

Alternativamente, podríamos hacer un cálculo en la numeración arábiga que se vería como la siguiente figura[20]:

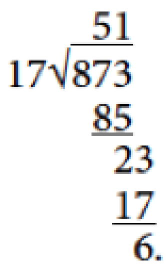

Figura 1. Cálculo [papel y lápiz] en numeración arábiga

En el primer caso, en el caso del lenguaje natural escrito, se hace una descripción del razonamiento, una descripción de los pasos que una persona podría haber seguido para encontrar por medio de la aritmética mental el resultado al problema planteado. Sin embargo, afirma Macbeth: “to say or write that a hundred seventeens is seventeen hundred is not to calculate a product. Even more obviously, to say or write the words ‘add one more seventeen’ is not to add one more seventeen” (Macbeth, 2014). Cuando transmi-

[20] Figura [2.4] tomada del segundo capítulo de Macbeth (2014).

timos estas palabras estamos informando, es decir, reportamos al lector u oyente una descripción de los pasos que seguimos mentalmente en nuestro tren de razonamiento.

En contraste, el cálculo en papel y con lápiz es radicalmente diferente. No es una descripción de un posible tren de razonamiento, sino que muestra un cálculo, lo corporeiza o encarna. Calcular en numeración arábiga no es reportar y reproducir una aritmética mental, sino es un estilo de cómputo distinto. Calcular, en el caso del sistema arábigo, significa utilizar los signos para en ellos llevar a cabo el cómputo:

> Working through this collection of signs in Arabic numeration, or performing the calculation from scratch oneself, just is to calculate. Here we have not a description of reasoning but instead a display of reasoning. One *calculates in* the system of Arabic numeration in a way that is simply impossible in natural language. To one who is literate in this use of the system of written signs, the calculation shows the reasoning; it embodies it (Macbeth, 2014).

El razonamiento que uno emprende en el lenguaje natural no es el mismo que en la numeración arábiga. Uno no puede dividir la palabra *sesenta y nueve* en tres o biseccionar la palabra *línea*, escribe Macbeth, pero uno sí puede dividir el numeral '69' en tres en un cálculo al igual que uno bisecta una línea en geometría. Los numerales arábigos han sido diseñados para operar en ellos, las palabras escritas no, su función es principalmente describir o reportar: "The function of written words is, first and foremost, to record speech. I can tell, by speaking or writing, what happens or what is the case, how I have reasoned or what is true, but the reasoning itself is something different" (Macbeth, 2014). Si bien, como señala Macbeth, en el lenguaje natural podemos describir o reportar un razonamiento matemático. Esto es, a través de sus signos no llevamos a cabo el razonamiento en sí mismo, no son signos diseñados para corporeizar el razonamiento.

Más tarde, Macbeth aporta un segundo ejemplo para profundizar en esta distinción y dar cuenta de la peculiaridad del lenguaje matemático respecto al razonamiento matemático. El ejemplo es la prueba matemática que afirma que no existe un número primo más grande o que la cantidad de números primos es infinita. Dicha prueba es también demostrada por Euclides en la proposición 20 del *Libro IX* de los *Elementos.*

Supongamos que sólo hay una cantidad finita de números primos y que tenemos una lista ordenada de todos ellos. Ahora considera el número que es el producto de todos estos primos más uno. O bien este nuevo número es primo o no lo es. Si es primo, entonces tenemos un número primo que es más grande que todos los enumerados originalmente; y si no es primo entonces, como ninguno de los números de nuestra lista divide este nuevo número sin residuo (porque es el producto de todos esos primos más uno), este nuevo número debe tener un divisor primo más grande que cualquiera de los primos de nuestra lista. De cualquier manera hay un número primo más grande que cualquiera con el que hayamos comenzado. Q.E.D.

Esta prueba, nos dice Macbeth, no depende de ningún sistema de signos escritos, ni de la capacidad para escribir. En su lugar, depende, de nuestra capacidad para reflexionar sobre ideas, para razonar e inferir. En contraste con ella, la numeración arábiga es en esencia escrita, si bien la función de la escritura puede ser llevada a cabo imaginativamente en lugar de ser realmente realizada en un papel y con un lápiz. Éste no es el caso de la prueba de que no existe un primo más grande es distinta:

> Although the words clearly do convey the line of reasoning, the proof is not in the words (whether spoken or written); it is not the words that one attends to in the proof that there is no largest prime, but instead the relevant ideas, central among them the idea of a number that is the product of a collection of primes plus one. The task of the proof is to think through what follows in the case of such a number. *The words do not display the reasoning but only describe it* (Macbeth, 2014).

De acuerdo con Macbeth, en la prueba mencionada las palabras del lenguaje natural no encarnan el razonamiento, no pensamos la prueba en los signos del lenguaje natural escrito, sino que los signos de este lenguaje más bien reportan una serie de ideas matemáticas relevantes; ideas centrales como la idea de un número que es el producto de una colección de números primos más uno. La tarea de la prueba es pensar qué se infiere a partir de ese número. En cambio, cuando hacemos un cálculo en la numeración arábiga el razonamiento no es meramente reportado con los signos del lenguaje, sino que razonamos en los signos, y utilizamos el sistema de signos escritos como una corporeización del razonamiento.

Macbeth apunta que no todos los sistemas de signos escritos se empalman con el razonamiento o lo soportan de esta manera. Se trata de una distinción muy sutil, pero filosóficamente fructífera. A su vez, en una nota a pie de página comenta que el razonamiento de la mayoría las pruebas de teoremas que se encuentran contenidas en los libros de texto de matemáticas son razonamientos descritos por el lenguaje más que razonamientos mostrados o corporeizados. Macbeth atribuye esto a una transformación en la práctica matemática que se originó en el siglo XIX en Alemania, en donde se trató de 'limpiar' los conceptos matemáticos de toda influencia de los signos escritos. Si esto es así, ¿por qué Macbeth le otorga peso filosófico a la distinción trazada e investiga la función cognitiva de los sistemas escritos en el razonamiento matemático? Macbeth considera que aunque en las matemáticas contemporáneas no haya un lenguaje matemático particular en el cual razonar, la investigación y el análisis de algunos sistemas matemáticos representativos deja ver que el lenguaje matemático tiene y ha tenido una función peculiar que facilita el razonamiento matemático:

> But it also seems clear that at least some of the systems of signs that have been devised in mathematics—paradigm among them, Euclidean diagrams, Arabic numeration, and the symbolic language of Descartes' algebra—are enormously powerful vehicles of mathematical reasoning. Although it is manifestly possible to discover significant mathematical results, that is, solutions to mathematical problems and proofs of theorems, independent of any system of written signs within which to work, it is also evident that such systems of signs are developed in mathematics and can enable results that could not (or could not so easily) be discovered without them. Systems of written marks seem, then, to be neither essential nor irrelevant to mathematical practice, at least if it is taken overall (Macbeth, 2014).

En *The Nature of Mathematics*, Philiph Jourdain sostiene que los signos del lenguaje matemático no sólo son una abreviatura del lenguaje natural como han pensado filósofos como Thurston, Benacerraf (1973), el segundo Wittgenstein y más tarde, Quine. De acuerdo con Jourdain la ciencia de las matemáticas ha requerido a las mentes más brillantes para proveerlas de una notación que permita incluso a los menos dotados reproducir los más complicados teoremas: "Each improvement in notation seems, to the uninitiated, but a small thing; and yet, in a calculation, the pen sometimes seems to be more intelligent than the user". Si bien sostiene que la notación matemática no es necesaria para la práctica de las matemáticas, Jourdain también apunta un beneficio epistémico de la notación que no sólo está relacionado con los beneficios propios de los signos como abreviatura del lenguaje natural.

Macbeth sostiene que este beneficio epistémico se debe a que la notación encarna una parte del razonamiento matemático relevante: "The collection of signs in a good mathematical notation does not merely record results as on the documentist view; it can actually embody the relevant bit of mathematical reasoning, put the reasoning itself before our eyes in a way that is simply impossible in written natural language”(Macbeth, 2014).

La antigua prueba de que no existe un número primo más grande no es una prueba esencialmente escrita. Lo mismo sucede con los sistemas de signos que en sus inicios fueron diseñados para matemáticas que ya existían, pues hubiera sido imposible diseñar dicha notación sin conocer al menos una parte relevante de las matemáticas que la notación captura (Macbeth, 2014). Sin embargo, argumenta Macbeth, es claro que al menos algunos de los sistemas de signos paradigmáticos de la práctica matemática, entre ellos los diagramas euclideanos, la notación arábiga y el lenguaje simbólico del álgebra de Descartes, son magníficos y poderosos vehículos de razonamiento matemático.

Si bien es cierto que es posible descubrir resultados matemáticos, solucionar problemas y pruebas de teoremas de manera independiente a cualquier lenguaje escrito, es también evidente que las matemáticas contienen sistemas de signos que han sido desarrollados y que potencian el razonamiento matemático, lo que a su vez facilita descubrimientos que difícilmente habrían sido logrados sin ellos.

A continuación expondré uno de los sistemas matemáticos que Danielle Macbeth considera que muestra un uso particular del lenguaje matemático. Esto con el objetivo de ejemplificar la distinción entre el uso del lenguaje que solamente reporta o describe un razonamiento relevante y aquel que encarna el razonamiento y, a su vez, lo facilita. Expondré la lectura de los *Elementos* de Euclides que Macbeth propone y con ella su tesis sobre el razonamiento diagramático en Euclides. Es importante tener en cuenta que Macbeth emprende la lectura de otros sistemas de signos que han sido paradigmáticos en la historia de la práctica matemática, pero para los limites de esta investigación me limitaré al caso euclideano con el propósito de clarificar la distinción y desde ahí, más tarde, retomaré el análisis de los supuestos de la filosofía del lenguaje quineana.

Los *Elementos* comienzan con una serie de definiciones, postulados y nociones comunes. No obstante, advierte Macbeth, no debemos tomar tales definiciones en el sentido de las matemáticas modernas, pues en Euclides éstas no funcionan como premisas para llevar a cabo inferencias. Más bien son una especie de propedéutico para la práctica de la geometría. No pertenecen como tal a la geometría, sino a la antecámara de la geometría: “They provide a preamble to the actual work of mathematics (Burnyeat, 2000), one that amounts to a “constitution for Euclid’s subject matter” (Reed 1995) and enables one thereby “to ‘read’ or interpret diagrams which relate the parts of figures to one another” (Reed, 1995). Se trata más bien de un preámbulo de observaciones que no pertenecen como tal al sistema, en el que se establecen los puntos de inicio y las inferencias a partir de ellas, sino que su función es en todo caso preparar el terreno para establecer los puntos fijos.

De acuerdo con la tradición aristotélica, las definiciones atienden la naturaleza esencial de las cosas. En el caso de Euclides, la naturaleza esencial de lo geométrico está dada por las partes en relación. Por tanto, las definiciones establecen qué partes de la relación son requeridas para que algo sea un objeto geométrico particular o en el caso de una parte, qué partes en relación son requeridas para obtener una propiedad particular o relación de entidades geométrica. El sistema euclideano nos dice, por ejemplo, que un triángulo es una figura rectilínea comprendida por tres líneas, en la que rectilínea, figura y línea han sido previamente definidas. Las definiciones de las propiedades son dadas en términos de la relación de las partes: nos dice qué es para una línea ser recta (es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella). Y finalmente, las definiciones sobre qué quiere decir estar en una relación particular son dadas también en términos de la relación de las partes, por ejemplo, qué es que dos círculos se toquen.

Dado que la naturaleza de dichas entidades es un “todo conformado de partes” se trata de entidades que son icónicamente representables. Macbeth apunta que posiblemente fue Kant el primero en notar esta propiedad de las entidades geométricas: “Los dibujos de las entidades geométricas muestran en su composición los conceptos constitutivos que constituyen toda la idea” (Kant, 1754, 251; AK 2:278).

En el *Libro I*, Euclides afirma algunos postulados y nociones comunes. Por ejemplo, por las definiciones ya conocemos que los extremos de una línea son puntos y en los postulados afirma que podemos “dibujar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto”. También conocemos que dos líneas paralelas son dos líneas rectas en un plano que nunca se intersectan sin importar cuánto se extiendan, y ahora se postula que si una línea recta al incidir sobre dos rectas hace ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas de forma indefinida se encontrarán eventualmente si son extendidas lo suficiente. Otras nociones comunes establecen propiedades fundamentales como la igualdad, esto es, si las cosas que sean iguales a una tercera son iguales entre sí, si a cosas iguales se añaden cosas iguales, las totales son iguales, cosas que coinciden entre si son iguales entre si y el todo es mayor que la parte.

La cuestión, apunta Macbeth es: "whether these postulates and common notions function as premises from which to reason or instead as rules or principles according to which to reason" (2014). En este punto, Macbeth se pregunta si los postulados y las nociones comunes que son introducidos como prefacio a las demostraciones funcionan, en realidad, como premisas o como reglas de construcción e inferencia: "Do they function to provide starting points for reasoning or do they instead govern one's passage, in the *kataskeue,* from one construction to another, and in the *apodeixis* from one judgement to another?" (Macbeth, 2014). Para Macbeth se trata más bien de la segunda opción. En las demostraciones del sistema euclideano, las nociones comunes y los postulados no son tratados como premisas, antes funcionan, aunque sólo de manera implícita, como reglas que norman lo que puede ser dibujado en el diagrama y lo que puede ser inferido dado que algo es verdadero. Al respecto Macbeth afirma: "They provide the rules of the game, not its opening positions" (Macbeth, 2014).

Para comprender esta observación, consideremos tres de los postulados de los *Elementos,* los cuales norman lo que puede ser dibujado en el curso de la construcción de un diagrama: (1) se puede trazar una línea recta desde un punto a otro; (2) se puede extender un segmento de línea recta continuamente; (3) si tienes un punto y un segmento de línea o distancia, entonces un círculo puede ser producido con ese punto como centro y la distancia como radio. En cada caso, los puntos de inicio, ya sean puntos o líneas, deben ser provistos para poder aplicar el postulado en cuestión. Y nada de lo que se construye en el diagrama puede hacerse, en principio, si no es permitido por alguno de estos postulados. Sin embargo, una vez que se ha demostrado, por ejemplo, una figura geométrica –un triángulo equilátero ésta puede ser utilizada en la construcción de diagramas, sin ningún paso o construcción intermedia, de la misma manera en que funcionan los postulados, como reglas que gobiernan las construcciones.

Las nociones comunes a su vez norman los movimientos que uno puede hacer durante la *apodeixis*. Norman lo que puede ser inferido: (1) si dos cosas son iguales a una tercera, entonces podemos inferir que son iguales entre sí; (2) si a cosas iguales se añaden cosas iguales, entonces se infiere que las totales son iguales; (3) si de cosas iguales se sustraen otras iguales, entonces los restantes son iguales. Estas nociones comunes que tienen la forma de condicionales generalizados, una vez demostrados, pueden funcionar en demostraciones subsecuentes como reglas de inferencia.

Sin embargo, escribe Macbeth, no todo lo que sucede en el curso de una demostración euclideana está normado por una regla explícita, sea primitiva o derivada. Para ilustrar este punto Macbeth ofrece dos ejemplos, el primero menos interesante que el segundo. (i) Euclides hace (explícita o implícitamente) varias inferencias que son válidas; entre ellas, infiere que de dos cosas que no son iguales una es mayor a la otra, a pesar de que tal regla nunca es explícitamente enunciada. Tales reglas son aceptadas, apunta Macbeth, porque no pertenecen a las matemáticas en particular, sino que son parte de nuestra comprensión del lenguaje natural.

Ahora bien, acerca del segundo caso Macbeth comenta: "It is well known that in order to follow a demostration in Euclid, one must read various things off the relevant diagrams. For example, as we have already seen, given two lines that intersect in a diagram, Euclid assumes that there is a point at their intersection. The point of intersection seems simply to "pop up" in the diagram as drawn, and hence is henceforth available to one in the course of one's reasoning" (2014). En este pasaje, Macbeth apunta que para seguir las demostraciones euclideanas debemos ser capaces de leer varios elementos de los diagramas relevantes y, entre ellos, poder asumir aquellos elementos que emergen del diagrama durante el curso del razonamiento y que pueden ser utilizados en los razonamientos subsecuentes.

Macbeth apunta que este tipo de elementos que emergen en el curso de las demostraciones son significativos para comprender el conocimiento matemático en Euclides y por esta razón expondrá algunas de las demostraciones pertenecientes a los *Elementos* en las que ocurre. En este sentido, expondré uno de los casos, el cual se refiere a la proposición primera del *Libro I* de los *Elementos* en la que se demuestra la construcción de un triángulo equilátero dada una línea recta.

La demostración comienza con el *ekthesis*, allí se establece el punto de inicio: sea dada una línea recta AB. A continuación Euclides, afirma un enunciado de lo que se construirá: construir sobre AB un triángulo equilátero ABC. Euclides proporciona entonces el *kataskeue*:

[C1] Con centro en A y distancia AB, describimos el círculo BCD (si bien Euclides no lo menciona, este paso es por el postulado 3).

[C2] Con centro en B y distancia BA describimos el círculo ACE (*idem* respecto al postulado 3).

[C3] Desde el punto C, en que los círculos se cortan uno a otro, a los puntos A, B, trazamos las líneas rectas CA y CB (este punto es por el postulado 1 bajo la asunción de que hay tal punto C).

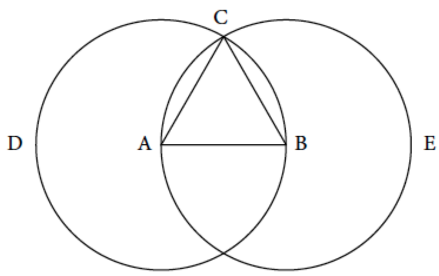

Figura 2. El diagrama de la proposición I.1 de los Elementos.

El diagrama que resulta es mostrado en la figura superior. A continuación, Euclides proporciona la *apodeixis:*

[A1] Puesto que A es el centro del círculo BCD entonces AC es igual a AB [esto dada la definición del círculo que no es explícitamente mencionada].

[A2] Puesto que B es el centro del círculo ACE, entonces BC es igual a BA [*idem* respecto a la definición del círculo].

[A3] Puesto que AC = AB y BC = BA, podemos inferir que AC = BC dado que las cosas iguales a una tercera son iguales entre sí [dada la noción común 1].

[A4] Puesto que AB, BC y AC son iguales entre sí, el triángulo ABC es equilátero [dada la definición de lo que es un triángulo equilátero].

El triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre el segmento AB.

Ahora bien, una vez expuesta la demostración ahondemos en la lectura de Euclides que Macbeth plantea. En el curso de la demostración, nos dice Macbeth, un punto emerge [*pops ups*] de la intersección de los dos círculos dibujados, luego un triángulo emerge a partir del radio de ambos círculos y esto sucede en la demostración sin más:

> This sort of thing is, furthermore, ubiquitous in ancient Greek geometrical practice. One simply reads the relevant geometrical objects off the diagrams, apparently without any explicitly stated warrant for doing so. Although nothing can be put into a diagram that is not licensed by one of the given postulates or by a previous construction, there seems to be no stated rules governing what, in the way pop-up objects, can be taken out of it (Macbeth, 2014).

La lectura de los diagramas euclideanos que Macbeth emprende pone énfasis en estos objetos emergentes, pues de acuerdo con su interpretación éstos distinguen el razonamiento matemático en Euclides de otros usos matemáticos de un diagrama. Asimismo, distinguen uno de los usos del lenguaje matemático frente al lenguaje natural. Exploremos brevemente la comparación que Macbeth plantea entre ambos usos de un diagrama matemático, para después profundizar en el razonamiento propio del sistema de signos euclideano.

Para comprender lo distintivo del razonamiento matemático en el sistema de signos euclideano, Macbeth ilustra otros usos de diagramas matemáticos que engloba bajo el término de *picture proof.* Entre ellos, menciona a los diagramas de Venn, o diagramas de Euler, y señala que lo característico de ellos es que muestran la información con la que se comienza la prueba (los puntos de inicio), así como la información que se quiere descubrir. En el caso de los diagramas de Euler uno dibuja iconos de objetos de un cierto tipo, es decir, círculos que representan una colección de objetos y los dibuja en relaciones espaciales que son homomórficas a relaciones de inclusión y exclusión en colecciones.

Por ejemplo, si todas las ballenas son mamíferas, entonces se dibuja un círculo que representa al conjunto de las ballenas dentro de otro círculo que representa al conjunto de animales mamíferos. Si ningún pez es mamífero, entonces se dibuja un círculo representativo de dicho conjunto fuera del círculo de lo mamífero, sin ningún cruce o superposición. Después se procede a leer en el diagrama cuál es la relación entre la colección de ballenas y de peces: los iconos relevantes están totalmente disociados, así que se infiere que ninguna ballena es pez. La inferencia que procede de las premisas sobre las ballenas, mamíferos y peces a la conclusión sobre las ballenas y peces está validada por el diagrama.

En ese caso se trata de un razonamiento basado en el diagrama: “Reasoning using Euler diagrams provides a paradigm of what we might mean by diagram-based inference” (Macbeth, 2014). En el diagrama de Euler, se dibujan los contenidos de las premisas del silogismo de tal manera que si se cambia el foco perceptivo, también se puede leer la conclusión válida. En otras palabras, uno dibuja la información inicial de tal manera que sirve implícitamente para visualizar el resultado deseado. El cambio de percepción de lo que visualizamos a partir de la información inicial nos permite hacer explícito el contenido implícito. Visto de una manera miramos la información inicial y visto desde otra, visualizamos la conclusión:

> What is characteristic of picture proofs, at least those that concern us here, is that they formulate information in a way that allows one to see in the display both the information with which one began and that aims to discover. Looked one way, one sees the starting point, and looked another, one sees the desired result. The display encodes the starting point in a way that makes the result implicit in that encoding; to make it explicit one needs only to shift one's visual focus a bit (Macbeth, 2014).

Ahora, se pregunta Macbeth: "Do diagrams in Euclidean demonstrations function in the same way as the basis for an inference?"(2014). En general no, responde. El razonamiento euclideano no está meramente *basado en el diagrama* (o se trata de un *razonamiento con el diagrama*), como en el caso del diagrama de Euler. Incluso en aquellos casos en los que el diagrama es concebido icónicamente, pues si se hallara basado sólo en el diagrama, no podríamos comprender estos objetos emergentes que surgen en el curso de la demostración y que son esenciales para comprender la fuerza e inteligibilidad de las demostraciones euclideanas.

El *razonamiento* en Euclides no está basado en el diagrama, sino que más bien es *propiamente diagramático*, uno *razona en el diagrama* de la geometría euclidiana, actualizando en cada etapa del razonamiento alguna potencialidad del diagrama: "Diagrams serve in ancient Greek geometrical practice as a medium of reasoning by enabling the display of the contents of the concepts of various sorts of geometrical figures as they matter to diagrammatic reasoning" (Macbeth, 2014). Demostrar una verdad o una construcción en la práctica matemática griega quiere decir encontrar un diagrama construido según las reglas establecidas en los postulados y en demostraciones anteriores que muestren el camino a seguir desde el punto de inicio hasta el destino final. Descubrir dicho diagrama es revelar la conexión que existe entre los conceptos dadas las definiciones, los postulados y las nociones comunes. Sin embargo, tal conexión no está dada, es sólo en el diagrama una vez que ha sido actualizado múltiples veces en cada una de las etapas del razonamiento que se actualiza la potencialidad de los puntos de inicio y somos capaces de descubrir un elemento nuevo. Lo anterior explica que los diagramas de Euclides, a diferencia de los diagramas de Euler, nos entreguen conocimiento matemático.

Ahora, si el razonamiento en Euclides es propiamente diagramático, se debe a la naturaleza y estructura de los signos que conforman el sistema. En particular, se debe a que los signos pueden ser vistos de una manera u otra al interior del diagrama según el foco perceptivo en los distintos niveles de articulación que el sistema erige. Esto es un diagrama euclideano, nos dice Macbeth; es un todo compuesto de partes (intermedias) que son a su vez un todo de partes (primitivas). Gracias a esta estructura uno puede reconcebir las partes intermedias en nuevos todos, pues lo que los diagramas muestran son los contenidos de conceptos de partes que recombinados con otras partes de conceptos facilitan nuevos elementos emergentes que no se encontraban en los puntos iniciales más que de una forma potencial no actualizada.

En las *picture proofs* uno simplemente requiere hacer un cambio en el enfoque perceptivo para hacer explícito en el diagrama lo que ya estaba implícito, en donde los elementos tienen más bien una función icónica en la que se ilustra una colección de objetos tal y como se hacía en el uso del lenguaje de la numeración romana. En contraste, en los diagramas euclideanos uno *razona en el diagrama* y no *con el diagrama.* En las demostraciones del sistema euclideano lo que parecería ser el radio de un círculo más tarde, es el lado de un triángulo equilátero.

Sin embargo, se pregunta Macbeth, ¿cómo es que el icono de una cosa puede convertirse en el icono de otra? Esto es algo radicalmente distinto de lo que sucede en las *picture proofs*, y en el diagrama de Euler en particular: "The iconic significance of the drawn circle is fixed and unchanging throughout the course of the reasoning. If the lines one draws in a Euclidean diagram had this same sort of iconic significance, the reasoning would clearly stall because in that case no new points or figures could pop up" (Macbeth, 2014). En algunos diagramas matemáticos, como es el caso de las *picture proofs* y los diagramas euclideanos, sucede algo similar al fenómeno familiar del dibujo del pato/conejo de Wittgenstein, un dibujo que es el icono de un pato visto desde una manera y el icono de un conejo visto desde otra:

> Much as in the case of the duck/rabbit drawing, and by contrast with Euler diagram, various collections of lines and points in a Euclidean diagram are icons of, say circles, or other particular sorts of geometrical figures, only when viewed a certain way, only when, as Kant would think of it, the manifold display (or portion of it) is synthesized under some particular concept, say that of a circle, or of a triangle (Macbeth, 2014).

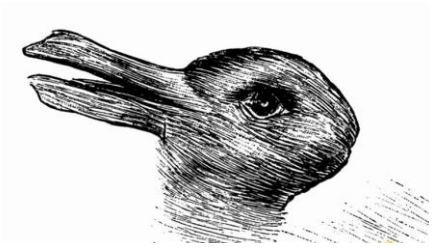
Figura 3. Pato/conejo

En el pasaje anterior, Macbeth nos recuerda que los diagramas euclideanos poseen la peculiaridad de encarnar, mediante un sistema de signos articulados en diferentes niveles, razonamientos matemáticos que buscan probarse un nuevo conocimiento. Es este potencial —que es actualizado en el curso del razonamiento en el que de pronto una línea es vista como el radio de un círculo y más tarde como el lado de un triángulo, lo que distingue al sistema de signos de Euclides frente a los yermos diagramas de Euler—.

La capacidad de reconfigurar los todos como partes de donde emergen estos nuevos elementos o como Macbeth la nombra, la capacidad de perceptualmente hacer un *re-gestalt* a las colecciones de puntos, líneas, etc., está dada por la naturaleza de los signos del sistema y por la estructura del mismo. Se trata de un sistema de signos articulado en tres niveles: “Not only are icons of various geometrical figures constructed out of parts. Those icons are combined in turn in larger wholes” (Macbeth, 2014). En un primer nivel están las partes primitivas: puntos, líneas, ángulos, áreas y sus correspondientes iconos. En un segundo nivel, sostiene Macbeth, se encuentran los conceptos de objetos geométricos, los cuales son la materia de la geometría y son todos conformados de las partes primitivas. Entre estos conceptos de objetos geométricos se encuentran los puntos como partes finales de las líneas, los puntos de intersección, los centros de los círculos, ángulos que están limitados por líneas que también son partes y algunas figuras. Finalmente, en el último nivel hallamos el diagrama como un todo que no es en sí mismo una figura geométrica, pero sí un todo en el cual distinguimos varios objetos del segundo nivel.

En la exposición de la demostración se ha visto que ésta incluye un diagrama y un texto: el *kataskeue* y el *apodeixis.* El primero contiene información sobre la construcción del diagrama y está centrado en aquello que puede ser construido en el diagrama dados los postulados y las demostraciones anteriores. El *apodeixis,* en cambio, está centrado en lo que puede leerse como legítimo en el diagrama, dadas las definiciones, las nociones comunes y los teoremas demostrados con anterioridad. Generalmente se piensa, escribe Macbeth, que este último es la prueba. Sin embargo, de acuerdo con la interpretación aquí presentada el *apodeixis* no es la prueba, sino sólo el fragmento de texto que provee las instrucciones sobre cómo varias porciones del diagrama construido deben ser leídas, construidas o analizadas en el transcurso de la demostración. El diagrama es más bien el *topos,* el sitio donde acontece el razonamiento, pues no se trata de un razonamiento basado en el diagrama, sino un razonamiento diagramático: "Not in the words but the construction… is the vehicle for the execution of the proof" (Knorr, 1975).

Las construcciones, afirma Macbeth, son el punto de inicio para el razonamiento en la antigua práctica del razonamiento diagramático. Es en la construcción y no en la definición como en otros sistemas, donde se formulan los contenidos de los conceptos de la geometría "in a mathematical tractable way, in a way enabling one to reason rigorously in the system of signs to conclusions about those concepts" (Macbeth, 2014). Y las construcciones euclideanas muestran cómo un sistema de signos puede exhibir el contenido matemático de una manera en que el lenguaje natural no puede, potenciando el razonamiento matemático y el descubrimiento de nuevos elementos gracias a la naturaleza de los signos y la estructura del sistema: "It is by means of constructions, diagrams, that, as ancient Greek mathematicians realized, it is possible to discover and explore the myriad necessary relationships that obtain among geometrical concepts, from the most obvious to the very subtle" (Macbeth, 2014).

Como he mencionado, Macbeth apunta que si buscamos entender la práctica matemática tenemos que mirarla en su funcionamiento, comprender los conceptos y la naturaleza de los mismos, sus modos de razonamiento y la función de los signos y del lenguaje en la que se lleva a cabo. En esta investigación he expuesto simplemente algunas de las distinciones que traza en su obra para comprender la peculiaridad del lenguaje matemático frente al lenguaje natural. Asimismo, he expuesto algunos de los argumentos que esgrime para sostener la diferencia entre ambos lenguajes. Recapitulemos brevemente algunas de las distinciones que hasta ahora hemos expuesto para desde ahí retomar el análisis de los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana.

En primer lugar, Macbeth distingue entre *reportar o describir un razonamiento* y *encarnarlo* [*'embodying a chain of reasoning'*]. Como he mencionado, Macbeth dice que las pruebas de las matemáticas contemporáneas suelen emplear el lenguaje natural para reportar o describir una cadena de razonamiento matemático. No obstante, escribe, éste no es el único uso que se le ha dado al lenguaje dentro de las matemáticas, pues existen sistemas matemáticos para los cuales se ha diseñado una notación que potencia y facilita el razonamiento matemático gracias a la naturaleza y configuración de sus signos, así como a la estructura del lenguaje.

Macbeth atribuye a razones históricas, propias del desenvolvimiento de la práctica matemática, el que las matemáticas actuales utilicen el lenguaje natural para reportar o describir razonamientos. En particular, nos dice que durante el siglo XIX el desarrollo de la práctica matemática en Alemania optó por eliminar cualquier referencia a un sistema de signos o marcas, buscando en su lugar lo puramente conceptual. Esta búsqueda ha sido asociada, principalmente, al trabajo matemático de Riemann y Dedekind.

A pesar de que históricamente la práctica matemática haya emprendido esta vía y con resultados fructíferos, escribe Macbeth, si echamos un vistazo a algunos de los sistemas matemáticos en los que la notación sí ha jugado un papel fundamental, encontraremos que hay algo distintivo en la relación entre el razonamiento matemático y el lenguaje matemático de estos sistemas. En último término, se trata de un lenguaje que encarna y potencia el razonamiento matemático y por tanto, el descubrimiento matemático. La investigación de Macbeth apuesta por el estudio de estos sistemas, pues considera que revelan cuestiones centrales sobre los razonamientos matemáticos que operan en ellos y más aún, de su estudio se desprenden interesantes implicaciones sobre nociones fundamentales como la verdad matemática. Los tres sistemas que investiga, sistemas en los cuales se *razona en los signos* de los lenguajes diseñados, son, en primer lugar, los diagramas euclideanos, revisados antes aquí; más tarde, el lenguaje simbólico de la aritmética y el álgebra y, por último, pero posiblemente de mayor importancia para la tesis de Macbeth, el trabajo de Gottlob Frege, quien se sitúo en la tradición riemanniana (veáse Tappenden, 2006).

Expuesto panorámicamente, Macbeth argumenta que después de la práctica antigua del razonamiento diagramático, que toca su culmen con el trabajo de Euclides, ocurrieron dos grandes revoluciones cognitivas en la práctica de las matemáticas. La primera de ellas ocurrió gracias al razonamiento en el lenguaje simbólico de la aritmética y el álgebra, a través del cual los matemáticos comenzaron a razonar conscientemente en expresiones de este lenguaje. En este caso, el simbolismo no fue sólo un medio para descubrir resultados, como en el caso de los diagramas euclideanos, sino que una vez avanzada la notación las ecuaciones expresadas en la misma permitieron exhibir patrones discernibles que potenciaron la exploración y el conocimiento matemáticos. El lenguaje del álgebra y de la aritmética planteó una notación que expresaba o exhibía los contenidos de los conceptos en una manera matemáticamente fértil y tratable potenciando el razonamiento matemático en los signos.

Finalmente, describe Macbeth, la segunda revolución abogó por la eliminación de todo simbolismo o signos contingentes:

> The symbolic language that in the seventeenth and eighteenth centuries had opened up a whole new world of mathematics (and physics) was now regarded as providing merely contingent and external perspective on what now appeared to be the real subject of mathematics (…) What matters is not the formula through which we first gain cognitive access to a *function* but the function and, in particular, the intrinsic properties in virtue of which it is the function it is" (Macbeth, 2014).

Y es en esta tradición que Macbeth sitúa el tercer sistema matemático que, no obstante, sí diseña un lenguaje matemático específico, se trata del *Begriffsschrift* de Frege. Al respecto, Macbeth escribe: "All that remains is to introduce the mathematical language that Frege devised for the new mathematical practice of reasoning deductively from concepts that arouse in the nineteenth-century Germany, and to take the needed philosophical lessons from it" (2014).

Para los fines de esta investigación no profundizaré en la lectura de Macbeth sobre el *Begriffsschrift.* Únicamente expondré aquellos elementos relevantes que nos lleven a comprender cómo, en sintonía con lo hasta ahora expuesto, el proyecto fregeano tiene como objetivo: "to formulate content in a written system of signs in a way that enables reasoning in that system of signs" (Macbeth, 2014). Debo apuntar que en contraste con los lenguajes previamente explorados, que buscaron exhibir el contenido matemático articulándolo aritmética o espacialmente, el contenido matemático exhibido en la obra de Frege es articulado inferencialmente. La breve exposición del lenguaje fregeano que emprenderé también me permitirá presentar una idea y distinción de la filosofía de G.W. Leibniz con la que profundizaremos en la comprensión de la peculiaridad del lenguaje matemático.

La tarea del *Begriffsschrift*, una *Conceptografía*, es diseñar un lenguaje en el cual se puedan formar expresiones que refieran a conceptos complejos a partir de signos de conceptos primitivos, haciéndolo de manera que facilite el razonamiento riguroso. Para llevar a cabo dicha tarea, Frege complementó el lenguaje de la aritmética con signos de la lógica que pudieran unir los signos primitivos de la aritmética. Frege describe su labor como la creación de un lenguaje de fórmulas único a partir de la combinación de los símbolos familiares de las matemáticas y los símbolos lógicos que introduce. Y describe el objetivo de su proyecto de la siguiente manera: "to supplement the formula language of arithmetic with symbols for the logical relations in order to produce —at first just for arithmetic— a conceptual notation of the kind I have presented as desirable" (Frege, 1882b: p. 89). En el mismo texto más tarde apunta: "a notation that has simple modes of expressions for the logical relations that are suitable for combining most intimately with a content" (Frege, 1882: p. 88). En su *Begriffsschrift* utiliza viejos conceptos para construir unos nuevos a partir de los signos de la generalidad, negación y el condicional.

Con este proyecto en mente, Frege introduce signos primitivos para propiedades lógicas primitivas y relaciones, los cuales sólo expresan un sentido independiente del contexto de uso. Solamente en el contexto de una proposición y relativo a un análisis entre función y argumento dichas expresiones, sean simples o complejas, designan a un concepto:

> He must radically reconceive how those signs function in the context of the language as a whole. Because the task is not merely to record what is the case if a concept applies but to display its content, Frege needs to begin not with concepts but with the contents of whole judgments, that is, Fregean thoughts that are a function of the senses expressed by the primitive signs, which can then be analyzed into function and argument in various different ways to give different concept words. A function sign, or concept word, so derived can be highly inferentially articulated, that is, express a very logically complex sense. It

> nonetheless designates something simple, namely, a concept conceived as a mapping or law of correlation (Macbeth, 2014).

Recurriré a una idea de la filosofía leibniziana para comprender el pasaje anterior que contiene ideas centrales del proyecto fregeano, como es la reconfiguración de la función de los signos en la que una palabra concepto a pesar de estar inferencialmente articulada de manera compleja y expresar un sentido lógicamente complejo designa algo simple como concepto.

Frege describe su labor en *Begriffsschrift* como la realización de la idea leibniziana de construir un lenguaje que es al mismo tiempo un *calculus ratiocinator* y una *characteristica.* Idea que Leibniz explora en su *Distertación acerca del arte combinatorio* (1666), pero cuyo origen podemos situar en Descartes:

> The discovery of such a language depends upon true philosophy. For without that philosophy it is impossible to number and order all the thoughts of men or even to separate them out into clear and simple thoughts […] If someone were to explain correctly what are the simple ideas in the human imagination out of which all human thoughts are compounded […] I would dare hope for a universal language (CSM III 13; AT 1 81).

La realización de un lenguaje universal, así como existe la numeración arábiga para los números en cualquier idioma, depende, de acuerdo con Descartes, de un análisis adecuado de las ideas complejas en sus elementos más primitivos y simples, que a los ojos de Descartes es una labor propia de la filosofía verdadera.

Macbeth ejemplifica, respecto al lenguaje natural, que la manera en que formamos las palabras a partir de sonidos y de otras palabras no tiene relación alguna sistemática e interna con el modo en que los conceptos significados por tales palabras se componen a partir de ideas o conceptos más simples. Sin embargo, sostiene la idea descartesiana, un sistema de signos escritos podría ser diseñado para dar luz a tal relación (es decir, a la relación entre los conceptos complejos y los más simples de los cuales están compuestos). Al respecto, Macbeth escribe:

> Such a system of written signs would involve simple signs for primitive concepts and complex signs (that is, simple signs in various combinations) for other concepts that would show in their composition how the contents of those (non primitive) concepts depend on, or can be seen to be built up out of the contents of primitive concepts” (2014).

La idea central es que los conceptos muestren los componentes más simples de los que están compuestos y que dicho contenido se exhiba en una composición de signos. La labor entonces no es determinar las condiciones necesarias y suficientes para saber si el concepto las satisface y por tanto, puede ser aplicado, sino exhibir y mostrar el contenido del concepto. Tal como “a drawn circle in a Euclidean diagram displays the content of the concept circle (as the concept is understood in Euclid) and as $c^2 = a^2 + b^2$ displays a relation among arbitrary quantities in the symbolic language of algebra” (Macbeth, 2014). Se trata de mostrar el contenido de conceptos, así como podemos mostrar el contenido del concepto *el producto de la suma de dos enteros elevados al cuadrado* en el álgebra elemental $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ y no solamente decir o reportar el contenido del concepto como en el caso del concepto de *número primo* en el lenguaje natural: “número que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad”.

Sin embargo, éste es sólo uno de los aspectos del lenguaje universal concebido por Leibniz, pues además de mostrar cómo formular los contenidos de conceptos (no primitivos) de una manera sistemática al combinar los signos de los conceptos primitivos, el lenguaje también establecería una serie de reglas de manipulación de los signos en los razonamientos. De esta manera, sería un lenguaje que proveería de una *characteristica*, esto es, de un lenguaje en el cual exhibir los contenidos primitivos de los conceptos, y un *calculus ratiocinator*, un cálculo del razonamiento. En el artículo “Frege’s Begriffsschrift as a lingua characteristica", Korte sintetiza magníficamente la idea central: “because structures of expressions in a *lingua characteristica* characterize structures of concepts, it makes possible to construct a mechanical calculus, a cal*culus ratiocinator*, in which signs could be used as substitutes of concepts, thus turning thinking into calculating” (2010). A su vez, el *calculus ratiocinator*, dice Korte, también necesita de una *characteristica* para expresar premisas desde las cuales las pruebas de los teoremas puedan ser avanzadas.

El lenguaje fregeano, tal como lo concebía el sueño leibniziano de un lenguaje universal, formula y exhibe el contenido inferencialmente articulado de los conceptos. Lo hace inferencialmente porque busca razonar deductivamente a partir de tal contenido. Más aún, como el razonamiento es deductivo, es decir, no es computacional, ni algebraico o diagramático, como en el caso de Euclides, el contenido de los conceptos es mostrado en signos complejos que permiten y potencian el razonamiento deductivo cuando aplicamos las reglas de inferencia. Y así, como en el caso del álgebra elemental cuando introducimos unos signos primitivos para las operaciones básicas, en este caso, en el caso del lenguaje fregeano, introducimos signos primitivos para las relaciones lógicas básicas. Los axiomas y teoremas derivados operan como las reglas que norman las inferencias del sistema. Las definiciones de los conceptos son los puntos de inicio de los que parten las pruebas. Paso a paso, desde las definiciones hasta los teoremas, las pruebas utilizan las reglas de inferencia básicas y derivadas tal y como está codificado por los axiomas y los teoremas. Dado esta estructuración del lenguaje y la naturaleza de los signos:

> The system is once a *characteristica* insofar as the contents of (non-primitive) concepts are set out in complex signs of the language and a *calculus ratiocinator* insofar as all steps in the reasoning are governed by rules, either primitive rules as formulated in axioms of the system or derived rules expressed in theorems derived expressed in theorems derived from theorems (Macbeth, 2014).

De igual forma, los lenguajes del álgebra y la aritmética, así como el lenguaje diseñado por Euclides son sistemas que son una *characteristica* y un *calculus ratiocinator.* En el caso de Euclides, asumiendo sólo algunas construcciones primitivas como establece en sus postulados, como una línea entre dos puntos, un círculo dado un punto y una distancia, sus *Elementos* nos muestran cómo construir sobre esta base figuras más complejas. Un figura trazada en Euclides no solamente nos sirve para ilustrar una entidad geométrica, sino para formular qué significa ser tal entidad a través del razonamiento en un sistema de signos como lo describe el *apodeixis.* El sistema de signos, sostiene Macbeth, a su manera propia es una *characteristica* que establece los contenidos de los conceptos en las figuras trazadas y un *calculus ratiocinator* en el cual razonar diagramáticamente acerca de tales conceptos: "We know already that a drawn circle in a Euclidean diagram iconically displays the content of the concept circle that all points on the circumference are equidistant from a center and hence that one can infer given two (or more) radii of that circle that they are equal in length" (Macbeth, 2014).

El lenguaje del álgebra moderna, sostiene Macbeth, aunque es más sofisticado cognitivamente que el razonamiento del sistema euclideano, pues toma tiempo y práctica comprender los contenidos de los conceptos que están exhibidos en la colección de signos y razonar en ellos, también es una *characteristica* y un *calculus ratiocinator:* "Similarly a complex of signs in the formula language of arithmetic displays, for instance, the content of the concept *sum of two integer squares*, shows what it is to be that in a way enabling calculations, namely a2+b2" (Macbeth, 2014).

Desde las aportaciones fregeanas, Macbeth sostiene que los lenguajes explorados están diseñados para exhibir el contenido matemático, más en específico, para exhibir el contenido de conceptos matemáticos de una manera matemáticamente fértil: de modo que potencien el razonamiento riguroso en los signos para demostrar conclusiones sobre estos conceptos. Es bajo esta tesis que Macbeth distingue entre *razonar con un sistema de signos* y *en un sistema de signos*, afirmando que en el primer caso los signos tienen una función icónica o ilustrativa y el razonamiento se ejerce con ellos como con los objetos del lenguaje natural, mientras que en el segundo caso, dada la naturaleza de los signos y la estructura de la notación, el razonamiento se lleva a cabo en los signos, esto es, los signos encarnan el razonamiento y nos lo exhiben.

Ahora bien, hasta este punto de la investigación hemos revisado las distinciones relevantes de la obra de Macbeth para comprender la distinción que sustenta entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Es importante enfatizar, una vez más, que los sistemas matemáticos que Macbeth estudia son producto de momentos históricos y de la consolidación de transformaciones cognitivas fundamentales. Macbeth apunta que las matemáticas contemporáneas no poseen una notación propia y por ello, recurren al lenguaje natural en la mayoría de las pruebas. No obstante, es posible, si exploramos el razonamiento en el sistema de signos fregeano, aproximarnos a comprender los modos de razonamiento que se llevan a cabo en la práctica matemática, así como su relación con el lenguaje:

> If we are to understand current mathematical practice, we must see it at work, see the modes of reasoning it involves and the nature of the concepts with which it is concerned. And in order to do that we need a system of notation of the sort Jourdain describes, a system of signs capable of embodying those modes of reasoning. We need a *Begriffsschrift*, which, we now know, is just what Frege provides. We can understand current mathematical practice, the nature of that practice as a science, but only by attending to reasoning in the system of signs that Frege provides (Macbeth, 2014).

A su vez, a partir de las conclusiones que generó su investigación naturalista sobre la práctica de las matemáticas, en el último capítulo de su obra, Macbeth avanza un bosquejo y posible camino a seguir sobre el estudio de las aplicaciones de las matemáticas. Al respecto, mencionaré dos ideas centrales[21] del último capítulo titulado *A view from here*.

La primera de ellas: Macbeth comparte la idea de Riemann según la cual las teorías matemáticas son una exploración de lo conceptual; concepción que es parafraseada por Stein en la siguiente frase: "the role of a mathematical theory is to explore conceptual possibilities—to open up the scientific logos in general, in the interest of science in general" (1988). En palabras de Macbeth:

> The view of reality afforded by mathematical language is complex. What mathematical language directly discloses are concepts, concepts of objects, of properties, relations and functions, and finally, concepts of mathematical structures, of whole systems of (kinds of) objects in particular sorts of relations. […] Through its work of clarifying the senses of the concept words and thereby providing us cognitive access to the concepts those words signify, the science of mathematics provides the language that can serve in turn as the medium of the physicist's cognitive engagement with physical reality (Macbeth, 2014).

De esta manera, las teorías matemáticas al explorar las posibilidades conceptuales y acceder al conocimiento de ideas y conceptos matemáticos, describen posibles estados de cosas, propiedades, relaciones, funciones, estructuras y sistemas. Para sostener tal concepción, Macbeth además esgrime las distinciones fregeanas entre sentido [*Sinn*] y referencia [*Bedeutung*] y concepto y objeto. Desde la mirada de Frege, tanto las palabras conceptos como los nombres de objetos expresan sentidos, son cognitivamente significativas y designan o buscan designar algo objetivo, que son los conceptos, comprendidos éstos como leyes de correlación, y los objetos. En Frege, la distinción entre sentido [*Sinn*] y referencia [*Bedeutung*] es una distinción ortogonal a la división entre concepto y objeto, pues tanto los nombres de objetos como las palabras concepto expresan sentidos y designan a objetos y a conceptos respectivamente.

Sin embargo, desde la perspectiva de Macbeth, si bien, la distinción entre sentido [*Sinn*] y referencia [*Bedeutung*] se aplica a cualquier tipo de lenguaje como para Frege,

[21] Ambas ideas están relacionadas con los supuestos metafísicos de Macbeth que desarrolla lúcidamente a lo largo de su obra. Me gustaría que lo expuesto hasta ahora lo comprendiéramos como una posible vía para acercarnos al estudio del razonamiento matemático y la relación del mismo con el lenguaje, teniendo en cuenta que respecto a los supuestos más metafísicos sería necesario emprender una investigación más profunda sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos. No obstante, debo reconocer que la investigación que Macbeth avanza es filosóficamente lúcida, así como la coherencia que sostiene respecto un paradigma que sintetiza avances filosóficos cuya maduración ha tomado de las mejores mentes.

la distinción entre concepto y objeto sirve en todo caso para demarcar y diferenciar dos tipos de lenguaje fundamentalmente distintos: el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Retomando a Frege, pero llevando un paso más allá la distinción ortogonal y sus implicaciones filosóficas, Macbeth nos dice que tenemos dos modos intencionales de dirigirnos a la realidad, fundamentalmente diferentes; uno que está mediado por el lenguaje natural y nos revela directamente aspectos de la realidad y otro, que está mediado por un lenguaje matemático intencionalmente desarrollado. En el segundo caso, escribe Macbeth, nuestra relación cognitiva con la realidad no es directa, sino que ocurre en dos pasos.

Primero, en las matemáticas, "one achieves cognitive grasp of the concepts of modern mathematics, concepts of reason, through the clarification of the senses of the concept words"(Macbeth, 2014). Se trata de la exploración y el conocimiento a través de la clarificación del sentido de lo que conceptualmente describe los posibles estados de las cosas. Después, en las ciencias empíricas, se utilizan tales conceptos y razonamientos, tanto la *characterisica* como el *calculus ratiocinator*, en conocer y descubrir cómo es que las cosas de hecho son. Se trata de un paso doble del que Frege ya había hablado en su artículo "Función y objeto*",* pero que Macbeth, como he dicho, lleva más lejos. Ahondemos brevemente. En 1891, Frege escribe:

> With a concept it takes one more step to reach the object that with a proper name, and the last step may be missing –i.e., the concept may be empty- without the concept word's ceasing to be scientifically useful. I have drawn the last step from concept to objet horizontally in order to indicate that it takes place on the same level, that objects and concepts have the same objectivity. (Macbeth, 2014)

En esta cita, Frege describe este doble paso que Macbeth utiliza luego para comenzar a esbozar una posible comprensión de la aplicabilidad de las matemáticas. No obstante, frente a la distinción ortogonal fregreana, Macbeth dice:

> If, as I have suggested, both the "concept words" and the "object names" of natural language are object involving, that is, revelatory of objects with their properties and relations, and mathematical language instead discloses (mathematical) concepts with their properties and relations, Frege's schema is not quite right. There are no mathematical, or logical, objects, and the only (Fregean) concepts there are are mathematical and logical ones. (When we use the 'word' concept in relation to natural language, very often what we seem to mean is something like Fregean sense.) But there is something right both

about the idea that concepts and objects have the same objectivity and about the idea that with concepts it takes one more step to reach the object (Macbeth, 2014).

La distinción entre objeto y concepto en realidad demarca la diferencia entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Las palabras concepto y los nombres de objeto del lenguaje natural hablan sobre o involucran objetos empíricos, mientras que el lenguaje matemático más bien habla sobre conceptos matemáticos. No existen objetos matemáticos, los únicos objetos que existen son los objetos empíricos o más bien lo que existe en la realidad empírica (Macbeth, 2014).

No obstante, en la ciencia nos acercamos al conocimiento de la realidad empírica por medio del lenguaje matemático y esto requiere los dos pasos mencionados por Frege. El matemático se ocupa de los conceptos matemáticos, su tarea es "to grasp them in their pure form and to understand various logical properties and relations." (Macbeth, 2014) Pues es claro que los matemáticos no son quienes emprenden el segundo paso hacia el terreno de la realidad empírica, ésa es labor de los físicos y científicos. Los matemáticos descubren verdades objetivas sobre los conceptos matemáticos, sostiene Macbeth, y al hacer esto descubren cómo es que las cosas podrían ser, es decir, descubren posibles estados de las cosas. Los físicos emprenden el siguiente paso y utilizan estos conceptos para descubrir cómo es que de hecho las cosas son.

Entonces, como he apuntado, Macbeth utiliza la distinción concepto/objeto de manera particular, pues argumenta que en el fondo esta distinción demarca el lenguaje matemático del lenguaje natural. Al inicio de este apartado mencioné algunas de las características que atribuye a cada uno de los lenguajes, al lenguaje matemático y al lenguaje natural. También, a lo largo de esta sección he mencionado las distinciones que delinea para comprender y caracterizar la peculiaridad de un uso del lenguaje matemático. Para cerrar mencionaré solamente algunos puntos que distinguen a cada uno de estos lenguajes de acuerdo con lo hasta ahora desarrollado por Macbeth.

El lenguaje natural, escribe Macbeth, no fue inventado o diseñado. No obstante, evoluciona, y al hablarlo en comunidad lo mantenemos vivo. Se trata de un lenguaje que involucra objetos empíricos, involucra al mundo y por ello, McDowell pensaba que la realidad [*Bedeutung*] que revela el lenguaje natural tiene tipo de prioridad sobre el sentido [*Sinn*] a través del cual es revelada. El lenguaje natural involucra relaciones referenciales entre las palabras-y-el-mundo y relaciones inferenciales entre-palabra-y-palabra; de esta manera, produce una imagen sobre el mundo. Pero como señala McDoweell (1994), en el lenguaje natural el sentido [*Sinn*] y la referencia [*Bedeutung*] están inextricablemente ligadas. En síntesis, el lenguaje natural involucra objetos, es sensorial y narrativo.

En el lenguaje matemático, en cambio, sí es posible trazar una diferencia entre el sentido [Sinn] y la referencia [*Bedeutung*]. De hecho, argumenta Macbeth, es gracias al lenguaje matemático fregeano que podemos trazar la distinción entre sentido y referencia, pues hubiera sido imposible afirmarla a partir del lenguaje natural. El lenguaje matemático es un lenguaje inventado o diseñado, fue creado conscientemente como producto de un esfuerzo intelectual y cognitivo, generalmente a manos de un individuo brillante. Y esta condición no habla sobre un lenguaje matemático particular, sino sobre la capacidad de un matemático para comprender conceptos e ideas matemáticas a través de los sentidos en razonamientos matemáticos, en ocasiones, gracias a la creación de una notación o un sistema de signos. Ahora bien, a grandes rasgos estas son algunas de las diferencias que Macbeth atribuye a cada uno de estos lenguajes. Sin embargo, la que principalmente me gustaría rescatar tiene que ver con la relación que Macbeth apunta entre el razonamiento matemático y lenguaje matemático o sistema de signos.

Me gustaría sostener, dado lo hasta ahora explorado, que la investigación de Macbeth acierta en comprender uno de los usos del lenguaje matemático respecto a las ideas y los conceptos propiamente matemáticos. En *Realizing Reason,* Macbeth muestra un uso del lenguaje matemático según el cual, debido a la naturaleza de sus signos y estructura lingüística, éste exhibe el contenido de conceptos de una manera matemáticamente fértil y encarna en los signos el razonamiento matemático, potenciando el descubrimiento matemático. Dicho uso concluye la singularidad del lenguaje matemático respecto al lenguaje natural, es decir, los distingue no solamente por una diferencia de rigor y grado, como asume la filosofía del lenguaje quineana.

K. Quine & Macbeth: una revisión de las categorías

El objetivo de este último apartado es vislumbrar panorámicamente los supuestos del pensamiento quineano que revisé a lo largo de la investigación, comprender cómo se engarzan para afirmar la conclusión del argumento Quine-Putnam y sopesarlos frente a los descubrimientos y la propuesta del estudio naturalista de Macbeth. Esto con la finalidad de señalar aquellos supuestos incoherentes con el naturalismo, la insuficiencia de las categorías producidas por el pensamiento quineano y poder comprender el problema de la aplicabilidad de las matemáticas y su ontología.

Retomemos brevemente los supuestos clave detrás de Quine-Putnam. El primero es el criterio de compromiso ontológico y la poderosa inferencia que conlleva: debemos comprometernos ontológicamente con las entidades indispensables para la verdad de nuestras mejores teorías científicas. La mejor explicación de la verdad de una teoría científica, concebida en términos pragmáticos en Quine, es que existen en el mundo las entidades postuladas por la descripción sobre el mundo que la teoría emprende. Sin embargo, este método y razonamiento arroja como resultado que debemos sostener el mismo compromiso ontológico tanto para los objetos teóricos como para los matemáticos, pues ambos forman parte del mobiliario del Universo y existen en el mismo sentido. Recordemos que para Quine el término *existir* tiene una única acepción. Este primer supuesto recurre de forma explícita a un razonamiento y a una intuición filosófica importante y que, desde mi punto de vista, debemos mantener todo el tiempo en la mira, la inferencia a la mejor explicación. Como he mencionado antes, en buena medida la fuerza del argumento de indispensabilidad proviene de esta inferencia que ejerce sobre nuestra inteligencia una especie de hechizo filosófico.

Es debido a esta inferencia que Putnam escribe que sostener un doble criterio (a *double razor*, en inglés) sería una deshonestidad intelectual. En esta investigación he sostenido que la imposibilidad de afirmar el doble criterio ontológico no solamente es producto de un método objetivo y de la inferencia a la mejor explicación, sino de una serie de supuestos epistemológicos y de la filosofía del lenguaje quineana que están a la base de la configuración de lo que es un objeto existente. Los supuestos relevantes que intervienen en dicha configuración son: (i) la crítica a la distinción analítico/sintético que tiene como resultado la asunción según la cual ningún enunciado es inmune a la experiencia, o lo que es lo mismo, que todo enunciado es permeable a la experiencia; (ii) el holismo confirmacional según el cual ningún enunciado se confirma de forma individual, sino que es solamente la teoría, como un todo o fragmentos más amplios de ella, la que se confirma en su totalidad; (iii) el lenguaje científico es una continuación de las capacidades del lenguaje natural y es caracterizado de forma somera por Quine como una serie de herramientas conceptuales que poseen beneficios epistémicos respecto a la totalidad de la teoría, las cuales nos permiten organizar de la mejor manera posible la experiencia sensorial; (iv) el concepto 'puro' de objeto desde el punto de vista quineano.

Los supuestos i-iv asumen una mirada determinada sobre las matemáticas y sobre los objetos matemáticos que he revisado con anterioridad. El lenguaje matemático no es inmune a la experiencia, esto es que se confirma con el resto de los componentes de una teoría científica y está sometido al principio de revisabilidad durante la contrastación empírica. Lo único que lo distingue respecto a otras herramientas conceptuales científicas es su atrincheramiento en la práctica de la revisabilidad científica. La caracterización quineana del lenguaje matemático, de los enunciados matemáticos y, en último término, de los objetos matemáticos es homogénea respecto a otros elementos teóricos y herramientas conceptuales. Es decir, todas las herramientas conceptuales científicas son (bajo el supuesto (ii)) adoptadas por los beneficios epistémicos que aportan a una teoría que posee virtudes epistémicas y se confirma en su totalidad. A su vez, todas tienen la misma relevancia epistemológica dado el supuesto (i).

Los supuestos mencionados configuran homogéneamente a ambos tipos de objetos asumiendo su homogeneidad epistemológica, su permeabilidad frente a la experiencia y continuidad lingüística. Por tanto, la imposibilidad del doble criterio ontológico, lo que para Putnam es parte de nuestra coherencia intelectual, en realidad, es producto y es presupuesta por la concepción quineana, por supuestos propios de la filosofía y la epistemología quineana. Con este enfoque, he emprendido una revisión de los supuestos quineanos. Después de todo, no podemos asumir la deshonestidad de un doble criterio si la imposibilidad del mismo proviene de las asunciones paradigmáticas detrás del argumento. No obstante, no perdamos de vista que esto no cuestiona la inferencia a la mejor explicación. Con estas observaciones en mente, emprendí una revisión y un análisis de los supuestos paradigmáticos que configuran el conocimiento científico y matemático en W.V. O. Quine.

Dado el análisis de los supuestos, hice notar que (i) & (ii) provenían de una investigación naturalista de la práctica científica. Noté también el significativo avance que representaba (i) frente al positivismo, pues implicaba una mirada de las matemáticas como herramienta conceptual sometida al principio de revisabilidad y sujeta a la confirmación empírica igual que el resto de los componentes de la teoría. Esta mirada resulta más fiel a ciertos aspectos de la práctica científica y, por tanto, nos acerca un paso más a la comprensión de la aplicabilidad de las matemáticas, su función en la práctica científica y, en consecuencia, al conocimiento de las verdaderas y últimas categorías del Universo. En esta investigación puse particular atención a (iii), a la filosofía de lenguaje quineana, en la que me pareció encontrar una serie de supuestos controvertidos con una laguna importante respecto a la investigación naturalista de la aplicabilidad y el lenguaje de las matemáticas. Si la imposibilidad de afirmar un doble criterio es también producto de los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana resulta fundamental emprender una revisión, un análisis y una valoración de los mismos.

De estos supuestos enfoqué mi atención en la continuidad del lenguaje que Quine esgrime. Por este motivo revisé la construcción de los objetos quineanos desde el punto de vista lingüístico desde la Teoría de la Psicogénesis de la Referencia hasta el concepto puro de objeto. En el recorrido se aclaró lo siguiente: el lenguaje científico es producto del perfeccionamiento de las habilidades del lenguaje natural y en este continuum el lenguaje matemático no tiene una función cognitiva y epistémica peculiar frente al lenguaje natural. No obstante, como apunté recientemente, Quine no emprendió una investigación sobre el lenguaje matemático más allá de su posicionamiento frente a la tradición del positivismo lógico. Lo cual es una laguna en el pensamiento quineano, incoherente con los principios del naturalismo y que, en última instancia, repercute en las categorías del argumento Quine-Putnam desde las cuales pensamos el conocimiento matemático y científico.

Dados los resultados arrojados por la exégesis recurrí a la propuesta de Danielle Macbeth, quien cuestiona el *continuum* entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, uno de los supuestos fundamentales de la filosofía quineana, y sostiene además que se trata de un supuesto común a buena parte de la tradición analítica. En *Realizing Reason* la filósofa esgrime una serie de distinciones lingüísticas que caracterizan la peculiaridad del lenguaje matemático frente al lenguaje natural. A grandes rasgos, como he explorado, Macbeth sostiene que no todos los sistemas de signos se empalman con el razonamiento o lo soportan de la manera en que lo hacen las notaciones propias de los sistemas matemáticos expuestos en su obra.

Los sistemas matemáticos que explora (el euclideano, el algebraico y el aritmético y, finalmente, el fregeano) se caracterizan por crear una notación, un lenguaje matemático que no solamente reporta o describe un razonamiento, como lo hace el lenguaje natural, sino que encarna el razonamiento y exhibe los contenidos primitivos de conceptos matemáticos de una manera fértil, potenciando así el razonamiento y el descubrimiento matemáticos. En otras palabras, se trata de lenguajes que crean una *characterística*, es decir, una notación que exhibe a través de sus signos y su articulación el contenido primitivo de conceptos matemáticos. En este sentido, el lenguaje matemático en los sistemas explorados, de acuerdo con Macbeth, no busca determinar las condiciones necesarias y suficientes de un concepto para saber si el contenido los satisface y puede ser aplicado, sino que busca, a través de la notación, formular y exhibir el contenido primitivo del concepto. Por ejemplo, el concepto *la suma de dos íntegros al cuadrado* es exhibido por una notación con la expresión $a^2 + b^2$ que potencia el razonamiento y facilita el cálculo. A su vez, como la estructura de las expresiones de la *lingua characterística* caracteriza estructuras de conceptos, se hace posible construir un cálculo mecánico, un *calculus ratiocinator,* en el que los signos sustituyen a los conceptos y convierten así el razonamiento y el pensamiento en un cálculo (Korte, 2010). Por ello, el lenguaje también establecería una serie de reglas de manipulación de los signos en los razonamientos configurando el *calculas ratiocinator.*

Con esta mirada conceptual del lenguaje matemático, analizando los conceptos matemáticos, su naturaleza, los modos de razonamiento de la práctica matemática y la función de los signos y el lenguaje en ella, Macbeth comparte con Riemann la perspectiva según la cual el rol de las matemáticas en la ciencia es explorar la posibilidad conceptual y abrir el *logos* del científico. El lenguaje matemático nos habla de y revela conceptos matemáticos, conceptos de objetos, de propiedades, de la relaciones, de funciones y, finalmente, conceptos de estructuras matemáticas. Esto lo lleva a cabo al clarificar los sentidos de las palabras-concepto suministrando el lenguaje que sirve al físico para implicarse cognitivamente con la realidad. Desde la óptica de la investigación de Macbeth, el matemático con su práctica adquiere un entendimiento de los conceptos en su forma pura y comprende así las relaciones entre los mismos, sus propiedades lógicas y de necesidad.

Esta óptica involucra la distinción fregeana entre sentido y referencia; distinción que, como he mencionado, es ortogonal a la distinción entre concepto y objeto. No obstante, como he apuntado previamente, Macbeth la lleva un paso más lejos y afirma que si bien todo lenguaje posee un sentido y una referencia, la distinción entre concepto y objeto demarca la diferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural. No existen propiamente hablando los objetos matemáticos, existen sólo los objetos empíricos o más bien, existe sólo la realidad empírica y existen los conceptos matemáticos que describen posibles estados de las cosas a través de la descripción de relaciones, funciones, propiedades, patrones y estructuras (Macbeth, 2014).

Mediante la exposición del trabajo de Macbeth busqué por un lado, cuestionar el supuesto paradigmático de la filosofía quineana que afirma la continuidad entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático y, por otro, apuntar la laguna dentro de la filosofía quineana respecto al estudio del lenguaje en las matemáticas puras y aplicadas, su incoherencia con los principios naturalistas y la insuficiencia de las categorías producidas para comprender la aplicabilidad de las matemáticas y sus aspectos en la práctica científica, de los diferentes roles que juegan en las distintas ramas de la ciencia.

En este punto de la investigación me enfocaré en el último aspecto. En mostrar por qué las categorías quineanas son insuficientes para comprender la aplicabilidad de las matemáticas y aspectos básicos de la práctica científica. Apuntaré, en cambio, las ventajas de la propuesta de Macbeth, buscando respetar aquellos principios y supuestos quineanos funcionales y sustentados en la investigación de la práctica científica. Espero que la totalidad del análisis en retrospectiva deje en claro la riqueza del argumento de indispensabilidad Quine-Putnam, que lo exhiba como un punto de intersección valioso para el naturalismo en el que se engarzan diferentes supuestos paradigmáticos sobre nuestra concepción del conocimiento científico y matemático. Y que muestre cómo el principio de revisabilidad, paradigmático en el pensamiento naturalista y que acompaña fielmente al espíritu científico, puede ser también ejercido sobre el argumento y la filosofía quineana, manteniéndose vigentes aquellos supuestos y tesis que nos revelan conocimiento sobre la ciencia y sobre las búsqueda humana por últimas y verdaderas categorías del Universo.

Son bien conocidos los beneficios epistémicos de las matemáticas en el mundo de la ciencia, que en el argumento Quine-Putnam quedan englobados bajo el término *indispensabilidad*. Como he explorado, Quine concibe al lenguaje matemático como una serie de herramientas conceptuales que en el conjunto de la teoría organizan de la mejor manera posible la experiencia. A la pregunta, "¿por qué las leyes de la naturaleza las expresamos en lenguaje matemático y no en el lenguaje natural?" Quine respondería que se trata de un lenguaje con mayores beneficios y virtudes epistémicas frente al mar de la realidad empírica. No obstante, ser trata de un lenguaje continuo con el lenguaje natural; simplemente es un lenguaje que ha sido perfeccionado aumentando su rigor, sistematicidad y perspicuidad. A su vez, dado el criterio de compromiso ontológico y la inferencia a la mejor explicación, Quine respondería que la mejor explicación de la funcionalidad y el éxito de las teorías científicas que involucran el uso del lenguaje matemático es la existencia de los objetos matemáticos.

El enfoque de Macbeth comparte de manera amplia la caracterización quineana del lenguaje matemático aplicado en la ciencia, en el que se trata de un conjunto de herramientas conceptuales con beneficios epistémicos que están sometidas a la confirmación empírica junto con otros elementos teóricos. Sin embargo, su investigación naturalista sobre la práctica matemática, las distinciones que aporta y la comprensión de aspectos fundamentales de la misma le permite, en contraste con la filosofía quineana, formular una propuesta sobre cómo funciona el lenguaje de las matemáticas puras y, a partir de ahí, un posible planteamiento acerca de cómo funcionan las matemáticas aplicadas. Macbeth defiende la peculiaridad del lenguaje matemático frente al lenguaje natural, y bajo esta tesis, su propuesta comprende, en cierta medida[22], algunos conceptos de las matemáticas puras, el razonamiento que opera en las matemáticas y la función de los signos y el lenguaje.

Al investigar la relación entre el razonamiento matemático y los signos del lenguaje y su articulación, atendiendo a sistemas matemáticos que han surgido en la historia de la práctica, Macbeth avanza una serie de distinciones que iluminan parte del funcionamiento y la naturaleza conceptual de las matemáticas puras. Su investigación, en la que las distinciones fregeanas también juegan un rol fundamental, da cuenta de cómo en las matemáticas se construye una *lingua característica* y un *calculus ratiocinator*, a través del cual el pensamiento se vuelve cálculo y cómo el razonamiento y el descubrimiento matemáticos se ven potenciados dentro de esta configuración.

Algo que considero fundamental, en contraste con la filosofía quineana, es lo que denominaré *trazabilidad* y que asocio al poder explicativo de una teoría que busque dar cuenta de las matemáticas, de su faceta pura y práctica. Se trata de un punto que solamente introduciré a grandes rasgos, pues considero requiere mayor desarrollo. La teoría de Macbeth permite trazar un seguimiento entre la práctica de las matemáticas puras y las matemáticas aplicadas, esto es, su mirada de las matemáticas puras esgrime una serie de distinciones y categorías que abren paso, a su vez, a una propuesta sobre cómo funcionan las matemáticas aplicadas. Las categorías bajo las cuales Macbeth piensa a las matemáticas no solamente comprenden los beneficios epistémicos del lenguaje matemático frente al razonamiento y la verdad matemática en su vertiente pura, sino que permiten comprender parte de los beneficios epistémicos del lenguaje matemático en la práctica científica. La funcionalidad de su enfoque conceptual permite concebir parte de la historia por la que las matemáticas son aplicables a la naturaleza. Los sistemas matemáticos estudiados por Macbeth crean una notación de signos que es capaz de exhibir el contenido primitivo de conceptos matemáticos de una manera que fértil para el razonamiento y el descubrimiento matemáticos. Como he apuntado, para Macbeth el lenguaje matemático habla sobre conceptos de propiedades, relaciones, fun-

[22] No pretendo presentar la propuesta de Macbeth como la última palabra sobre el lenguaje matemático, sino más bien como una propuesta iluminadora, entre otras, que puede ser el punto de inicio, junto con más investigaciones, en nuestra búsqueda por comprender los conceptos matemáticos, el razonamiento matemático, la función del lenguaje matemático y la verdad matemática frente a las categorías quineanas.

ciones y estructuras. Y de esta manera, clarificando su sentido y las relaciones entre los mismos, conoce los posibles estados de las cosas, proporcionando al científico el lenguaje y el razonamiento de lo matemático para conocer lo que de hecho sucede.

Por supuesto que el éxito y la funcionalidad de las matemáticas no se limitan a estos beneficios de corte lingüístico, se requieren de mayores aportaciones para entender porqué es el lenguaje predilecto por la naturaleza y el reino de lo vivo. Pero es claro que la propuesta de Macbeth posee trazabilidad, esto es, su propuesta tiene la capacidad de explicar fenómenos de la aplicabilidad de las matemáticas y sus beneficios epistémicos para la práctica científica a partir de la comprensión del funcionamiento y la operación de las matemáticas en su vertiente pura. No defenderé que la *tratazabilidad* es una virtud epistémica, es decir, que es indicativa de la verdad de una teoría (*truth-indicative*) y que incrementa la conformidad entre la realidad y la teoría. Sin embargo, me parece que es una virtud pragmática, una *desiderata* para una teoría que busque comprender la aplicabilidad de las matemáticas. Como noté antes, gracias a una cita de Benacerraf y Putnam (1964), el mundo de las matemáticas no es un mundo aparte. Y no tendremos una mirada adecuada del mundo físico y de nuestro conocimiento sobre él hasta que comprendamos el rol que juegan las matemáticas en nuestras teorías sobre los fenómenos naturales. Es posible que esto no suceda, sostienen ambos filósofos, hasta que no comprendamos como parte de esta mirada a las matemáticas en su vertiente pura.

Una acotación que es importante señalar es que no solamente estoy diciendo que la propuesta teórica de Macbeth incluye una historia sobre las matemáticas en su vertiente pura, frente a la limitada filosofía quineana en este terreno. Es bien conocida la óptica de Quine sobre las matemáticas puras, tildadas de “juegos recreativos” hasta que son utilizados por el científico en su laboratorio, donde obtienen su relevancia epistémica y más tarde, ontológica. Lo que principalmente busco apuntar con la noción de *trazabilidad* es notar cómo por medio de las categorías de la investigación de Macbeth comprendemos que parte de los beneficios epistémicos de las matemáticas aplicadas se encuentran enraizados[23] en aspectos fundamentales de la práctica de las matemáticas puras, en su funcionamiento y operación, en aspectos cognitivos de la práctica, en la

[23] Tengo la impresión que el término inglés “grounded” denota de manera más precisa esta relación.

naturaleza del lenguaje y en la naturaleza de los conceptos propiamente matemáticos. De esta manera, nos encontramos con una teoría que presenta categorías para lidiar de una mejor manera y comenzar a comprender, aunque sea parcialmente, lo que Eugene Wigner ha llamado "the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences" (1960). Desde luego que se requiere una investigación más exhaustiva en las que se reconozcan las lagunas y brechas explicativas a las que aún nos enfrentamos cuando se trata de conocer la naturaleza de estos conceptos, sus fuentes y límites. Sin embargo, en concordancia con el espíritu naturalista de Quine, me parece que en el camino podemos optar por aquellas teorías que esgriman categorías con mayor poder explicativo, que construyan coherencia y trazabilidad entre ambas esferas de las matemáticas (en su vertiente pura y aplicada) y, finalmente, se comprometan con una explicación naturalista sobre los conceptos de las matemáticas puras.

En este camino también podríamos tomar como linterna un supuesto que, a la luz del naturalismo, me parece adecuado sustentar: la razón humana y su desarrollo no son necesariamente opuestos a la naturaleza, aunque no se reduzcan únicamente a ella. La razón y nuestra cognición son también producto de la naturaleza y de la evolución humana. Nuestro sistema perceptivo, cerebro y cuerpo llevan miles de años habitando y percibiendo las "matemáticas de la naturaleza"; sus patrones, relaciones, estructuras, redes y posibilidades. Las matemáticas humanas, empero, tienen su propio desarrollo histórico, sus prácticas matemáticas específicas. Podemos, en realidad, comprender dicho desarrollo con un camino por acercarnos a la complejidad de lo percibido en la naturaleza y de las posibilidades conceptuales que esta experiencia evolutiva y actual genera.

En este sentido, además de transformar nuestras categorías y cuestionar los supuestos para comprender la práctica matemática desde un punto de vista naturalista, tendremos que concebir a la razón como una de las manifestaciones de la evolución natural. Deberemos investigar, bajo este paradigma de la razón, las fuentes y los factores que constriñen y potencian la exploración y el descubrimiento de aquellos conceptos racionales que se ocupan de describir los posibles estados de las cosas. Posibles estados que formalizados en un lenguaje permiten a los científicos descubrir los estados de la realidad y las últimas y verdaderas categorías del Universo. Con esto en mente, podríamos también tomar en cuenta la observación que el físico teórico Leonard Susskind hace en su curso *Ecuaciones diferenciales en acción*, sobre cómo las intuiciones que hemos desarrollado, a su vez, no son suficientes para comprender el reino de lo cuántico o de los hoyos negros y cómo frente a ello recurrimos a un lenguaje con beneficios epistémicos:

> Why does mathematics work? Sometimes I think to myself, how could it not work? The world has some coherence to it. Things just don't randomly happen. How do you describe things that don't randomly happen? If they don't randomly happen, you have to have some kind of quantitative framework for explaining what happens. So, on the one hand, I can't imagine a world that didn't work according to some kind of laws and those laws being written mathematically. On the other hand, I also can't quite understand why mathematics works. So Eugene (Wigner) asked a very difficult question. And he didn't know the answer, and I think I don't know the answer, either. But here's what I would say. Not why does mathematics work, but why do we need mathematics to explain physics? Why is it so hard to explain physics in the English language? And the reason is because, yes, we may have evolved as a species on mathematical abilities, but we evolved them in the context of rather ordinary things. The ordinary things would be how stones move when you throw them. When it comes to waves, we have some perspective about what a wave is because we see water making waves and so forth. […] But every time we enter into a new range of parameters we make things smaller than anything than we grew up with. In other words, we go to the quantum world. Or we go to the world of very heavy things and dense things. In other words, we go to the world of black wholes. We suddenly find that the intuitions and the concepts that we evolved with are not sufficient to understand. An example: we use higher dimensional spaces all the time. We sometimes think, for example, that space itself might be more than 3 dimensions. But we can't visualize more than 3 dimensions. We evolved in a world of 3 dimensions. And it's not that we are not smart enough, it's that the neural architecture of the brain itself evolved in a world of 3 dimensions. […] If we think of a space of 7 dimensions or whatever, how would be describe it if can't visualize it? We describe it by pure mathematics. We say a 3 dimensional world is described by a bunch of points that are labeled by x, y & z, that's an abstraction. I can visualize 3 dimensions on my head, but I use x, y & z to describe them mathematically. Now, I go to 4 dimensions or 5 dimensions or n dimensions. I can't close my eyes and see a 5 dimensional world. But I can add two more letters of the alphabet. I can add w & v.. And now I have a 5 dimensional space. How do I work with it? I work with it using algebra and using abstract mathematics. […] Eventually, a person with a strong mathematical background begins to develop math intuitions for things (Susskind, 2015).

La anterior es sólo una observación a tomar en cuenta, junto con las emitidas previamente en el marco del naturalismo, sobre los beneficios epistémicos de las matemáticas frente a los límites de nuestra percepción y el lenguaje natural cuyas intuiciones están más bien relacionadas con los objetos empíricos y la experiencia cotidiana.

En esta investigación he buscado desvelar aquellos supuestos fundamentales que han guiado nuestra comprensión e intuiciones del conocimiento matemático y científico, y he presentado la propuesta de Macbeth con la finalidad de que, en conjunto, reconsideremos, bajo el principio de revisabilidad, las categorías según las cuales pensamos la aplicabilidad de las matemáticas y concluimos la ontología de los objetos matemáticos. Categorías y supuestos que dirigen nuestra búsqueda por las últimas y verdaderas categorías de la realidad, dado que la filosofía y la ciencia son parte de una misma labor.

Ahora bien, exploremos una vez más, aunque brevemente, las categorías expuestas por el análisis, esta vez frente a hechos de la práctica científica. Presentaré puntualmente tres escenarios en los que las herramientas matemáticas son utilizadas de diversas maneras para describir fenómenos naturales. Esto me permitirá al final evaluar de manera concreta la propuesta de Macbeth frente a las categorías quineanas y, a su vez, mostrar las limitaciones de ambos, abriendo paso a las brechas explicativas y preguntas concretas que la investigación naturalista de la práctica matemática y científica podría plantearse.

A continuación presentaré dos usos de componentes matemáticos en teorías científicas o explicaciones sobre fenómenos naturales en los que es claro que no podemos ejercer un uso irrestricto del criterio de compromiso ontológico para los objetos matemáticos indispensables. En la literatura sobre la aplicabilidad de las matemáticas abundan usos de los componentes matemáticos que no necesariamente implican compromiso ontológico. Entre ellos puedo mencionar la idealización, la explicación asintótica (Batterman, 2001), la explicación matemática (Mancosu, 2008) y usos de modelos matemáticos que parecerían sólo exhibir algunos aspectos clave de los sistemas físicos, pero que son exitosos y funcionales (Urquhart, 2008). Entre las ventajas de las categorías de Macbeth frente a las categorías quineanas está que por medio de ellas podemos encarar de mejor manera el hecho de que las teorías científicas emplean los componentes matemáticos con una diversidad de funciones. La propuesta conceptual de Macbeth parecería dar cuenta de las diferentes funciones que tienen las matemáticas en la práctica científica, así como de los beneficios epistémicos del lenguaje y el razonamiento matemático sin compromiso ontológico frente a los fenómenos naturales.

Comenzaré por introducir brevemente el uso de un modelo matemático que parecería exhibir sólo algunos de los aspectos clave del sistema físico que busca describir, pero que, no obstante, es exitoso y funcional. En el artículo “The Boundary Between

Mathematics and Physics*"*, Alasdair Urquhart describe que lo que los físicos llaman 'la teoría del campo medio' [*mean field model*] se refiere a dos categorías del modelo matemático. La primera queda ejemplificada por el modelo de campo molecular propuesto por Pierre Weiss (1907) en la que una colección activa de un conjunto amplio de variables microscópicas es remplazada por una cantidad microscópica que representa una media o un promedio. La segunda es utilizada por el modelo de interacción que han descrito Husimi y Kac, entre otros, en la que variables microscópicas (como el *spin*) interactúan con un número ilimitado de otras variables microscópicas. Ambas categorías son un ejemplo de modelos matemáticos que sólo exhiben algunos aspectos fundamentales del sistema físico, es decir, modelan aspectos cualitativamente fundamentales del fenómeno a estudiar, pero los valores numéricos que arrojan no son, de hecho, coherentes con las mediciones físicas y no obstante, permiten una comprensión del fenómeno natural. A decir verdad, son estos aspectos cualitativos los que nos hacen pensar que el modelo avanza matemáticamente por el camino correcto:

> The empirical phenomenon to be explained is the spontaneous magnetization of ferromagnetic materials. If we cool a sample of such material, while subjecting it to a magnetic field, then there is a sharply defined critical temperature at which a phase transition takes place. If we turn the external field off above the critical temperature, the material no longer exhibits magnetic properties. However if we turn it off below the critical temperature, the material retains a residual magnetic field, a phenomenon called 'spontaneous magnetization'. Spontaneous magnetization appears as a collective property of large numbers of ferromagnetic atoms. Weiss (1907) proposed the simplified model of a 'molecular field' representing the magnetic force *n* produced by the collection of atoms and postulated the self consistent equation n=tahn (n/T), where T is the variable representing the temperature. This model does exhibit some of the key features of the physical system it is intended to depict. It shows a phase transition at a critical temperature, and in general its qualitative features show that we are mathematically on the right track, even though the numerical values we obtain are not in accord with physical measurements. In spite of this, it is the usual starting point for workers in statistical mechanics investigating a new system (Urquhart, 2008).

Como apunta la cita, las matemáticas empleadas en este caso permiten modelar matemáticamente aspectos cualitativos del fenómeno; en particular, permiten comprender las distintas fases y el fenómeno empírico de la magnetización espontánea. Esto, a pesar de no tener poder predictivo sobre los valores numéricos que arroja, dado que no coinciden con las mediciones físicas. La incoherencia con los valores numéricos nos lleva a pensar que no es necesario comprometernos ontológicamente con todos los objetos matemáticos implicados en el modelo, a pesar de tratarse del modelo más poderoso para comprender el fenómeno de la magnetización espontánea.

El segundo ejemplo es una explicación matemática en la que se apela de manera esencial a un hecho matemático y, no obstante, no podemos, sostiene Mancosu (2008), asumir una teoría causal de la explicación, ni es claro que podamos comprometernos ontológicamente con los objetos matemáticos indispensables para la explicación. Se trata más bien de una explicación que requiere que comprendamos cómo es que los hechos geométricos representan o modelan la situación física en cuestión; en otras palabras, requieren de una teoría sobre cómo las matemáticas se aplican a los fenómenos empíricos:

> There also appear to be physical explanations that are non-causal. Suppose that a bunch of sticks are thrown into the air with a lot of spin so that they twirl and tumble as they fall. We freeze the scene as the sticks are in free fall and find that appreciably more of them are near the horizontal than near the vertical orientation. Why is this? The reason is that there are more ways for a stick to be near the horizontal than near the vertical. To see this, consider a single stick with a fixed midpoint position. There are many ways this stick could be horizontal (spin it around in the horizontal plane), but only two ways it could be vertical (up or down). This asymmetry remains for positions near horizontal and vertical, as you can see if you think about the full shell traced out by the stick as it takes all possible orientations. This is a beautiful explanation for the physical distribution of the sticks, but what is doing the explaining are broadly geometrical facts (Lipton, 2004: pp. 9-10).

Las matemáticas tienen diversos usos y funciones en casi todas las ramas de la ciencia; en esta ocasión sólo he mencionado un par que están particularmente asociados a los modelos matemáticos y las explicaciones geométricas. Probablemente estos representan solamente un lado del espectro de los usos mencionados, pero aun así son interesantes, pues en ellos podemos notar la particular y poco explorada relación que establece el razonamiento científico con el lenguaje matemático. Relación que puede ser abordada desde las categorías planteadas por el enfoque de Macbeth; trataré esta cuestión al final, junto con el análisis de las categorías.

Para finalizar, presentaré el tercer escenario. Se trata, una vez más de una explicación matemática. No obstante, esta explicación, a diferencia de las anteriores, ha sido utilizada para argumentar a favor de la existencia de los objetos matemáticos. Presentaré el caso junto con el argumento. Al final, retomaré los tres escenarios y los analizaré frente a las categorías quineanas y las propuestas por Macbeth.

Según lo revisado hasta ahora entendemos que para el argumento de indispensabilidad no son relevantes los distintos roles que juegan los componentes matemáticos en la ciencia. El argumento de indispensabilidad clásicamente formulado simplemente concluye que debemos creer en la existencia de los objetos matemáticos a partir del rol *indispensable* que desempeñan en nuestras mejores teorías científicas. La noción de indispensabilidad suele ser interpretada en términos de la cuantificación sobre entidades matemáticas de nuestras mejores teorías científicas. Así, la cuantificación es el único criterio de legitimidad ontológica y no está bajo el dominio del argumento distinguir si una entidad matemática juega un rol explicativo en una teoría o si sólo interviene en la idealización de alguna condición o fenómeno natural. Si podemos mostrar la eliminabilidad de algunas entidades de una teoría científica, estaremos mostrando su dispensabilidad y, en consecuencia, reduciremos sus compromisos ontológicos. Es bajo esta aserción, que comprendemos los esfuerzos filosóficos, como los proyectos nominalistas, que se empeñan en mostrar la eliminabilidad de las entidades matemáticas en nuestras mejores teorías científicas.

El debate en torno al argumento de indispensabilidad en su formulación clásica, escribe Alan Baker, difícilmente precisa los distintos roles que juegan las matemáticas en la ciencia. Tanto Maddy (1992) como Baker (2009) aseguran que este desinterés por distinguir los roles que juegan las matemáticas en las ciencias, así como por investigar naturalistamente cómo funcionan las matemáticas aplicadas, podemos atribuirlo a la postura archiholista de Quine. De acuerdo con Baker, este descuido filosófico de las particularidades de la práctica de las matemáticas aplicadas ha hecho susceptible al argumento de indispensabilidad a una serie de objeciones que no son ontológicamente significativas:

> This lack of concern for how mathematics works has left the classic Indispensability Argument open to a variety of objections that draw parallels between aspects of applied mathematics and other facets of scientific theorizing, which seem less ontologically serious. Maddy (1992) has argued that episodes from the history of science show that scientists do not in general take a holistic attitude to their theories insofar as they do not treat all posits as being on a par. Maddy also points to idealized concrete posits such as frictionless slopes and continuous fluids, which may play a crucial role in scientific theorizing yet to which we are not temped to accord any ontological status (Baker, 2009).

Este pasaje apunta que las algunas objeciones al argumento de indispensabilidad se originan en el desinterés del naturalismo quineano por investigar puntualmente el rol de las matemáticas aplicadas. En varios textos, Baker (2005; 2009) sostiene que podemos atribuir esta debilidad al holismo quineano, mas no todos los platonistas son holistas. En contraste, Baker —quien es un realista matemático— sostiene que debemos comprometernos ontológicamente sólo con aquellos objetos matemáticos que juegan un rol explicativo indispensable en una teoría científica.

Baker está interesado en el rol que juegan las matemáticas en las explicaciones de los fenómenos puramente físicos y en los compromisos ontológicos de estas explicaciones. En otras palabras, Baker busca investigar la liga que existe entre explicación matemática y la ontología y su investigación está guidada por dos preguntas. La primera de ellas cuestiona: ¿tienen las matemáticas un rol explicativo en la ciencia? Naturalmente muchas explicaciones científicas hacen uso de las matemáticas como herramienta, pero Baker se refiere a aquellos casos en los que el componente matemático es explicativo. Este punto, nos remite a la segunda pregunta: ¿cuál es exactamente el propósito científico para el cual las matemáticas son indispensables? Baker responde que en las ciencias las matemáticas son indispensables no por una cuestión de cuantificación sobre nuestras mejores teorías científicas, sino por su indispensabilidad para las propias explicaciones científicas. A su parecer, esta pregunta abre la puerta a los realistas científicos quienes a partir de una indispensabilidad particular, la indispensabilidad explicativa, pueden argumentar a favor de la existencia de los objetos matemáticos

Baker busca solventar la debilidad del argumento de indispensabilidad soslayando el holismo y enfocándose en la indispensabilidad explicativa de las matemáticas. De esta manera, formula una versión del argumento de indispensabilidad más robusta:

(1) Debemos creer racionalmente en la existencia de cualquier entidad que juegue un rol *explicativo* indispensable en nuestras mejores teorías científicas.

(2) Los objetos matemáticos juegan un rol *explicativo* indispensable en la ciencia.

(3) Por tanto, debemos creer racionalmente en la existencia de objetos matemáticos.

A diferencia del argumento de indispensabilidad clásico, en este argumento Baker se compromete ontológicamente sólo con los objetos matemáticos que son explicativamente indispensables. Al insertar la palabra *explicativo* en la primera premisa, el argumento mejorado de Baker, por un lado, restringe la atención a los casos en los que los objetos matemáticos poseen un rol explicativo y, por otro lado, se compromete ontológicamente con los objetos matemáticos por medio de la inferencia a la mejor explicación. Si el componente matemático tiene un rol explicativo en una teoría o hipótesis científica, debemos comprometernos ontológicamente con él. Baker defiende esta tesis por medio del estudio de un caso que a su parecer constituye el ejemplo de una explicación matemática indispensable de un fenómeno puramente físico: el caso de los cicádidos y los números primos.

A continuación, emprenderé la exposición del caso de los cicádidos que Baker extrae de la biología evolutiva con el fin de mostrar cómo, de acuerdo con Baker, por medio de la inferencia a la mejor explicación, debemos comprometernos ontológicamente con los objetos matemáticos que juegan un rol explicativo indispensable

Los cicádidos son una superfamilia de insectos del orden Homoptera conocidos popularmente como cigarras o chicharras. Son reconocidos en Norte América por su particular canto, el cual emiten al frotar sus alas contra sus cuerpos y cuya frecuencia de vibración puede alcanzar los 86 Hz. Aproximadamente 2500 especies de cigarras han sido clasificadas, y quedan aún varias por describir. Según la especie, tienen un ciclo vital que dura entre 2 y 17 años. En la primera parte de su ciclo de vida las ninfas de las cigarras viven enterradas debajo de los árboles de cuyas raíces obtienen nutrientes hasta el momento de su nacimiento cuando emergen adultas. Algunos investigadores consideran que las cigarras poseen dos relojes biológicos distintos, uno que guía su gestación en su etapa ninfal mientras se desarrollan enterradas y otro, fotosensible, que regula su comportamiento adulto.

Existen tres especies de cicádidos del género *Magicicada* con un ciclo de vida insólitamente inusual y que, por su extraña naturaleza, ha sido objeto de estudio de la biología evolutiva en repetidas ocasiones. Las ninfas de las *Magicicada* permanecen enterradas por un larguísimo periodo, de 13 o 17 años dependiendo el área geográfica, para luego nacer ya siendo adultas. A pesar de que las ninfas no crecen todas al mismo ritmo debajo de la tierra, se sincronizan para su nacimiento; algunas están prestas a emerger casi en el mismo momento que se cumplen los 17 años y otras más precoces esperan por más de un año antes de nacer. Asombrosamente, el nacimiento de las cigarras es simultáneo entre todos los miembros de una misma área. Después de un periodo de gestación de 13 o 17 años, las cigarras emergen adultas durante las mismas semanas de la primavera, se aparean y mueren unos días después para dar lugar al siguiente ciclo que se repite indefinidamente.

Los biólogos han encontrado fascinante y misterioso el ciclo de vida de estas especies y han buscado explicaciones a las siguientes características del fenómeno:

(i) La insólitamente larga duración del ciclo de vida de las cigarras periódicas, en particular la de su etapa ninfal que dura 13 o 17 años.

(ii) La presencia de dos ciclos de vida distintos en cada una de las especies, cuya duración varía de acuerdo con la región en la que se desarrollan.

(iii) La emergencia periódica y cíclica de las cigarras.

(iv) La sincronicidad de sus nacimientos.

(v) Que el número de años de duración del ciclo de vida de las cigarras sean números primos

De acuerdo con Baker, (i) y (ii) tratan del rango temporal del ciclo de vida de las *Magicicada* y son explicables en términos de constreñimientos ecológicos y del medioambiente. Simon (1996) sugiere que los cambios estacionales en las hormonas o los aminoácidos vegetales de su dieta regulan los relojes biológicos de las ninfas. Así, para explicar (i) & (ii), los biólogos han teorizado que la duración del ciclo de vida de las *Magicicada* se debe tanto a la escasez de nutrientes para el desarrollo de las ninfas como a las bajas temperaturas que prevalecen por buena parte del año. Estas circunstancias ambientales poco propicias causan que la maduración de las ninfas tome tan largo tiempo y explican también que una misma especie tenga dos ciclos de vida distintos dependiendo de la región de su gestación; los ciclos de vida de las cigarras del sur de Norteamérica son más cortos en comparación con las cigarras norteñas que habitan temperaturas inferiores.

En cambio, (iii) y (iv) tratan de la coordinación del ciclo de vida entre diferentes individuos y son explicables en términos de "leyes biológicas". Debido a que las cigarras permanecen en su estadio de ninfas por largos periodos de tiempo, resulta ventajoso para el apareamiento de la especie tener un periodo fijo en el cual emerjan simultáneamente todas las cigarras adultas. En otras palabras, la sincronización maximiza las oportunidades de apareamiento y garantiza que las futuras generaciones nacerán también al mismo tiempo. Se dice que es una "ley biológica" porque es aplicable, en principio, a cualquier organismo con un ciclo de vida largo y una etapa adulta corta.

Ahora bien, siguiendo el texto de Baker, resta por explicar: *¿por qué son primos los números de años que dura el ciclo de vida de las cigarras?* En palabras de Baker: "Given a synchronized, periodic life-cycle, is there some evolutionary advantage to having a period that is prime? If so, this would help explain why 13 and 17 are favoured cycle periods for each of the three species of the genus *Magicicada"* (Baker, 2005). Para explicar la ventaja evolutiva de los ciclos primos, los biólogos han propuesto dos hipótesis. La primera hipótesis, atribuida a Goles, Schulz y Markus, se centra en la importancia de los depredadores de cigarras. Esta hipótesis plantea un periodo en el pasado evolutivo de las *Magicicada,* en el cual las cigarras poseían ciclos de una duración distinta a 13 o 17 años. Las cigarras con estos ciclos eran atacadas por depredadores que también poseían ciclos periódicos, pero más cortos, por ejemplo, ciclos de 1, 2, 3, 4, 6 y 12 años. La razón de su vulnerabilidad se debía a la duración de sus ciclos de vida, que coincidían con los ciclos cortos de los depredadores. Evidentemente, apuntan los biólogos, es ventajoso para estas especies de cigarras encontrarse lo menos posible con sus depredadores. Por tanto, concluyen, la frecuencia de intersección entre las cigarras y sus depredadores es minimizada cuando el periodo de ciclo de vida de la cigarra es primo: "For example, a prey with a 12-year cycle will meet —every time it appears— properly synchronized predators appearing every 1, 2, 3, 4, 6, 12 years, whereas a mutant with a 13-year period has the advantage of being subject to fewer predators." (Baker, 2005: p. 230).

Una segunda hipótesis planteada por el biólogo Yoshimura (1997) se refiere a la hibridación de especies similares. Para los insectos periódicos es crucial tener suficientes oportunidades de apareamiento y evitar aparearse con subespecies que poseen ciclos de distinta duración. Por ejemplo, si una población hipotética de cigarras con ciclos de vida de 15 años se apareara con cigarras de un ciclo de vida más corto, de 10 años por ejemplo, su descendencia posiblemente poseería un ciclo de entre 12 y 13 años. Esta población nacería después de las cigarras que nacen cada 10 años y antes de las que nacen cada 15, es decir, sus oportunidades de apareamiento serían limitadas, lo mismo que la supervivencia de su subespecie. Dada esta observación, Yoshimura considera una etapa putativa en el pasado evolutivo de las *Magicicada* en la cual las cigarras poseían distintos ciclos de vida, en un rango de 14 a 18 años, y demuestra cómo aquellas con un ciclo de vida de 17 años se intersectarían menos con las cigarras de otros periodos, evitando así una descendencia con oportunidades de apareamiento limitadas. De acuerdo con Baker, Yoshimura "explícitamente conecta este resultado con el hecho de que 17 es un número primo" (Baker, 2005).

De las explicaciones matemáticas de estas dos hipótesis, por medio del argumento de indispensabilidad mejorado, Baker concluye la existencia de los números primos. Recordemos que en el argumento de indispensabilidad mejorado, Baker sostiene por un lado, que en la ciencia algunos objetos matemáticos juegan un rol explicativo indispensable y, por otro lado, que debemos creer en la existencia de cualquier entidad que juegue un rol explicativo indispensable en nuestras mejores teorías científicas. Hasta ahora he expuesto las dos hipótesis con las que los biólogos se han explicado por qué el número de años que dura el ciclo de vida de las *Magicicada* son números primos. Mas queda aún por mostrar la explicación matemática de estas dos hipótesis y por qué los objetos matemáticos de las mismas juegan un rol indispensable.

Los fundamentos de ambas hipótesis podemos situarlos en la teoría de los números; la rama de las matemáticas que investiga las propiedades y complejas relaciones de los números enteros y las de los elementos de dominios enteros. Ambas hipótesis trazan un nexo entre la propiedad de ser un número primo y la minimización de la intersección entre distintas especies (en el caso de la hipótesis sobre los depredadores) o subespecies (en el caso de la hipótesis de cigarras con distintos ciclos de vida). Es decir, en el primer caso la hipótesis plantea que la frecuencia de intersección entre las cigarras y sus predadores es minimizada cuando los años que dura el ciclo de vida de las cigarras es un número primo. En el segundo caso, la hipótesis plantea que las cigarras con un ciclo de vida primo, de 17 años, se intersectarían menos con otras subespecies con ciclos de vida de distinta duración. Baker (2005; 2009) señala que el nexo entre la propiedad primo y la minimización de la frecuencia de intersección involucra la noción del mínimo común múltiplo (m.c.m.). El mínimo común múltiplo de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo común de ellos, en otras palabras, el m.c.m. de dos números naturales m y n es el número más pequeño entre el cual m y n se dividen exactamente. Por ejemplo, el m.c.m de 4 y 10 es 20.

Ahora bien, exploremos el nexo que señala Baker con la segunda hipótesis, la que se refiere a las subespecies de cigarras con ciclos distintos. Asumamos que *m* y *n* son los periodos del ciclo de vida en años de dos subespecies de cigarras, *Cm* y *Cn*. Si *Cm* y *Cn* se intersectan en un año en particular, entonces el año de su siguiente intersección será dado por el m.c.m. de *m* y *n*. Así, el m.c.m es el número de años que hay entre cada intersección. Si observamos que una cigarra tiene un ciclo vital de cuatro años y otra subespecie de 10 años, sabemos, aplicando la definición anterior, que cada 20 años estas dos subespecies de cigarras se intersectarán. Los biólogos aseguran que la frecuencia de las intersecciones entre dos subespecies es menor cuando el número de años que uno de los dos ciclos vitales es un número primo. Lo anterior lo explican matemáticamente por medio de la noción de números coprimos y por medio del lemma a y el lemma b:

Dos números son **coprimos** si no tienen otro divisor común más que 1.

Lemma a: el mínimo común múltiplo de *m* y *n* es máximo sii *m* y *n* son coprimos.

Lemma b: un número, *m*, es coprimo con cada número $n>2m$, $n \neq m$ sii *m* es primo.

El lemma a implica que la frecuencia de la intersección entre *m* y *n* es minimizada cuando *m* y *n* son coprimos. Y el lemma b nos indica el paso de la noción de coprimo a la de un número primo.

De manera semejante, la hipótesis de los depredadores se explica matemáticamente por medio de los lemmas a y b. De acuerdo con esta hipótesis los depredadores tienen ciclos cortos de 1, 2, 3, 4, 6 y 12 año. Por lo tanto, bastará mostrar que los ciclos con números primos como años maximizan el m.c.m relativo a cada uno de los números menores de los ciclos cortos de los depredadores. Baker lo apunta más formalmente: "We need to show that for a given prime, *p,* and for any pair of numbers, *m* and *n,* both less than *p,* the lcm of *p* and *m* is greater than the lcm of *n* and *m.* But this follows directly from Lemmas a and b" (Baker, 2005: p. 232).

Las dos hipótesis mencionadas recurren a hechos y constreñimientos ecológicos, a leyes biológicas y a lemmas de la teoría de los números. Pero lo central del caso de las cigarras, para el argumento mejorado de Baker, es que el componente matemático de estas hipótesis es explicativo y esencial para la explicación de este fenómeno natural. En palabras de Baker: "In particular, it explains why prime periods are evolutionary advantageous in this case. Thus this application of mathematics yields 'explanatory power'"

(Baker, 2005: p. 232). Con este estudio de caso, Baker nos presenta evidencia a favor de la segunda premisa del argumento de indispensabilidad mejorado, pues éste prueba que algunos objetos matemáticos juegan un rol explicativo indispensable en la ciencia. Siguiendo el argumento de indispensabilidad mejorado, debido a la inferencia a la mejor explicación, debemos comprometernos ontológicamente con aquellos objetos que jueguen un rol explicativo indispensable en nuestra mejores teorías científicas.

En el caso de las cigarras, los números primos tienen un rol explicativo innegable; por medio de ellos nos explicamos de la mejor manera posible la naturaleza y la duración de los ciclos de vida de las cigarras, así como por qué son ventajosos los ciclos con números primos como años de duración. La tesis central que defiende Baker (2005; 2009) es que el caso de estudio de los cicádidos es un ejemplo de una explicación matemática indispensable de un fenómeno puramente físico. Por lo que podemos concluir, sostiene Baker, aplicando el argumento de indispensabilidad mejorado, que debemos creer racionalmente en la existencia de estos objetos matemáticos abstractos.

Ahora bien, si utilizamos las categorías y los supuestos quineanos para comprender el caso de los cicádidos entendemos que los componentes matemáticos, en tanto que son parte de una teoría científica total, están sujetos a confirmación empírica, al igual que otros componentes teóricos, por ejemplo, aquellos que pertenecen a la biología evolutiva. Esto sin importar si los matemáticos fueron introducidos por medio de una definición, puesto que tienen la misma relevancia epistemológica. Las matemáticas, desde el punto de vista quineano, no son inmunes a la experiencia; se trata de herramientas conceptuales que el científico obtiene de un repertorio de lo que previamente se consideraba un "juego recreativo" de la razón y, que no obstante, resultan herramientas conceptuales altamente fructíferas para organizar la experiencia de la mejor manera posible. El lenguaje matemático por sus cualidades de mayor rigor, sistematicidad y claridad frente al lenguaje natural es la herramienta predilecta del científico. La teoría, como un conjunto de hipótesis, es formulada frente a sus rivales y al tratarse de la mejor explicación del fenómeno natural, dadas sus virtudes epistémicas (poder explicativo, simplicidad, etc.), es adoptada como verdadera. ¿Qué sucede con los componentes matemáticos provenientes del juego recreativo de las matemáticas puras? No sólo son adoptados por la teoría por sus beneficios epistémicos respecto a la totalidad de la teoría, sino que la mejor explicación de tales beneficios y de la alta capacidad organizativa de la experiencia empírica que poseen, es que existen como objetos que forman parte del fenómeno natural a describir. De esta manera, se reifican como objetos aquellos componentes que aumentaron la capacidad explicativa, el poder predictivo, la simplicidad de la teoría, entro otros.

Desde el punto de vista tradicional, es debido al holismo que no podemos esgrimir un doble criterio ontológico frente a los objetos matemáticos y aquellos objetos teóricos. Y, como he apuntado, es la inferencia a la mejor explicación la que ejerce toda su fuerza sobre nuestra inteligencia inclinando nuestra intuición filosófica a creer que la mejor explicación del éxito y verdad de esta teoría es la existencia de los números primos (en tanto entidades con un rol indispensable para la explicación). En esta investigación, sin embargo, he cuestionado que el holismo sea el único supuesto quineano que hace del doble criterio ontológico una "deshonestidad intelectual". A él se añade la crítica quineana a la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos, que hace de todos los enunciados epistémicamente homogéneos y revisables frente a la experiencia. Y el supuesto que afirma la continuidad entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural. Todos estos supuestos, a la mirada quineana, convierten a cualquier herramienta conceptual benéfica para la totalidad de una teoría en un mismo tipo de categoría que más tarde será reificada en la regimentación de la teoría en caso de probarse indispensable.

No perdamos de vista que ante este escenario, la intuición filosófica que proviene de la inferencia a la mejor explicación sigue ejerciendo su fuerza absoluta. Y bajo este escenario concluimos, sin lugar a dudas, la existencia de los objetos matemáticos. Frente al éxito de la teoría científica desde luego que nuestra intuición nos hace pensar que tales objetos existen en la naturaleza y, dados los supuestos quineanos, negar tal posibilidad es una deshonestidad intelectual. Si bajo esta inferencia aceptamos la existencia de los objetos teóricos, no podemos negar esta propiedad a los objetos matemáticos que cooperan en el mismo sentido, que son el mismo tipo de categoría, con la misma génesis lingüística y epistémica, en último término, con los mismos beneficios epistémicos que contribuyen al poder predictivo, éxito y atractivo de una teoría científica.

¿Por qué las matemáticas puras son una herramienta altamente fructífera para organizar con beneficios epistémicos la experiencia? La respuesta de W. V. O. Quine es porque, por un lado, se trata de una herramienta conceptual que posee mayor claridad, rigor y sistematicidad frente al lenguaje natural y, por otro lado, porque existen tales objetos en el Universo y el lenguaje matemático, dada su gradación frente al lenguaje natural, tiene cualidades con capacidad referencial respecto a estos objetos. Recordemos, a su vez, que para Quine una teoría científica es una teoría producida en el tiempo como la mejor explicación disponible hasta ese momento en la búsqueda por conocer las últimas y verdaderas categorías del Universo, búsqueda que configura la labor científica que acontece bajo una visión pragmatista de la verdad.

Frente a esta respuesta hay una cuestión importante que surge a la luz de la duda. La mirada quineana no nos entrega un cuadro completo del panorama, en especial si estamos comprometidos con el naturalismo. En este panorama, desde la óptica quineana, no comprendemos cómo es que un matemático puede acceder a conocer desde un juego recreativo lo que más tarde, según el punto de vista de la génesis del conocimiento científico, son objetos que intervienen en fenómenos físicos y naturales. Puede que esto no parezca una crítica al panorama dibujado por la filosofía quineana, pues finalmente en nuestra búsqueda humana por las últimas y verdaderas categorías de la realidad aún no tenemos una respuesta a esta pregunta independientemente de la filosofía quineana. Esto es, en este punto de la historia humana, aún no comprendemos cómo el matemático obtiene un conocimiento que no sólo es aplicable con éxito al estudio de la naturaleza, sino que, posiblemente, existe y proviene de ella. Sin embargo, los supuestos de la filosofía quineana no permiten "al interior del marco", por utilizar una expresión positivista, plantear esta pregunta. Por fortuna, la capacidad humana de dudar sobresale a cualquier sistema o filosofía particular. Bajo el marco de la filosofía quineana no comprendemos la aplicabilidad de las matemáticas y no comprendemos de manera cabal si hay algo propio de las matemáticas puras, de su lenguaje, razonamiento y funcionamiento que posibilita su aplicación a las ciencias naturales. Esto es lo que previamente he llamado *trazabilidad*.

Como he hecho notar, la investigación naturalista de Macbeth permite trazar una conexión entre ambas esferas, enraizando los beneficios epistémicos de las matemáticas aplicadas en teorías científicas en aspectos cualitativos y propios de la naturaleza conceptual, el lenguaje y el funcionamiento de las matemáticas puras. En algún sentido la *trazabilidad*, como *desiderata* y virtud pragmática, podría relacionarse con las condiciones de posibilidad asociadas a la tradición kantiana. Esta conexión puede resultar profundamente fructífera e interesante. Sin embargo, como he mencionado antes, los conceptos matemáticos y el lenguaje matemático, al menos su génesis, no tienen porqué limitarse solamente a la razón, o mejor dicho, no tienen por qué oponerse al desarrollo evolutivo de la naturaleza convirtiéndose en condiciones de posibilidad antinaturales.

La investigación de Macbeth, al explorar el nexo entre lenguaje matemático y razonamiento, provee de una serie de categorías desde las cuales se puede pensar el problema de la aplicabilidad. En el caso de los cicádidos expuesto por Baker entendemos cómo se conjugan en el razonamiento científico una serie de hipótesis que combinan leyes biólogicas provenientes de la teoría de la evolución con razonamientos matemáticos que utilizan el lenguaje matemático de las matemáticas puras, en específico, de la teoría de los números, la rama de las matemáticas que investiga las propiedades y complejas relaciones de los números enteros y de los elementos de los dominios enteros. De esta manera, se establece como hipótesis que la frecuencia de intersección entre el ciclo biológico de las cigarras y sus depredadores es minimizada cuando la duración del periodo de vida de los insectos protagonistas es un número primo. Esta hipótesis establece un nexo matemático entre la propiedad de ser primo y la minimización de la intersección a través del concepto del mínimo común múltiplo. Los conceptos en cuestión, propios de la teoría de los números (el concepto de número primo, entre otros), son utilizados para probar la hipótesis y son funcionales pues exhiben por medio del lenguaje matemático el contenido primitivo de cada concepto de una manera que resulta matemáticamente fértil y potencia en su articulación el razonamiento hasta la afirmación de la hipótesis en cuestión. En último término, se trata de conceptos que están siendo aplicados a la estructura del tiempo y a la aparición y desenvolvimiento de ciclos vitales y ritmos biológicos de diferentes seres vivos, de organismos pulsantes.

El planteamiento de Macbeth presenta una serie de ventajas frente a la formulación quineana. El enfoque conceptual nos permite comenzar a comprender por qué las matemáticas son un lenguaje epistémicamente poderoso aplicable a fenómenos naturales y cómo es que en la labor científica se conjuga el razonamiento científico, el razonamiento matemático y el uso del lenguaje matemático. Las categorías de Macbeth, frente a las quineanas, nos permiten comprender el uso de componentes matemáticos en los que no es necesario el compromiso ontológico. Ejemplos de estos usos son los primeros dos escenarios expuestos, me refiero al modelo de la teoría del campo de medio, en el que sólo se reflejan aspectos cualitativos clave del sistema físico, así como la explicación geométrica de la distribución de las varitas lanzadas en el aire. Otros casos han sido apuntados por Penelope Maddy (1992) en *Indispensability and practice* quien estudia casos en la historia de la ciencia en los que son postuladas entidades concretas idealizadas sin compromiso ontológico y que, no obstante, juegan roles importantes en el teorizar científico. Entre ellas, Maddy menciona la postulación de pendientes sin fricción o fluidos continuos que son altamente funcionales para las teorías que las postulan.

El camino construido por Quine en la Teoría de la Psicogenésis de la Referencia plantea cómo surgen los objetos matemáticos a partir de la reificación de teorías exitosas en las que las herramientas conceptuales matemáticas tienen beneficios epistémicos que las hacen indispensables. No obstante, he argumentado, este camino deja una serie de brechas explicativas respecto al funcionamiento del lenguaje y el razonamiento matemático respecto a la relación entre las matemáticas puras y aplicadas y, finalmente, respecto a la naturaleza de las matemáticas. En contraste, el enfoque conceptual de Macbeth, como he señalado recientemente, brinda cierta flexibilidad respecto a los compromisos ontológicos de los componentes matemáticos de una teoría. De esta manera, siendo coherentes con el naturalismo y atendiendo a lo que de hecho sucede en la práctica científica, podemos dar cuenta de los distintos roles que juegan los componentes matemáticos en las distintas ramas de la ciencia. En especial si hemos comprendido que el riesgo de cometer una deshonestidad intelectual al sostener un doble criterio ontológico entre las entidades teóricas y las matemáticas, no sólo era producto de la inferencia a la mejor explicación, sino que era producto de los supuestos quineanos, de su epistemología y filosofía del lenguaje, debido a supuestos epistemológicos, pero también por su particular filosofía del lenguaje que homogeneizaron todas las categorías lingüísticas bajo el supuesto de la continuidad del lenguaje y su permeabilidad frente a la experiencia como un todo.

El planteamiento de Macbeth, a través de sus distinciones y categorías presenta una serie de ventajas que nos permiten, por un lado, comenzar a pensar el problema de la aplicabilidad y la relación entre las matemáticas puras y aplicadas (junto con la noción de *trazabilidad*) y, por otro lado, replantearnos el problema ontológico formulando las antiguas preguntas por los objetos matemáticos bajo la luz de la investigación naturalista. De esta manera, podemos investigar y preguntarnos por la naturaleza de los conceptos matemáticos, por sus fuentes y constricciones, tomando en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos: (i) su relación con el lenguaje y el razonamiento matemático; (ii) la historia y la práctica de las matemáticas humanas, con sus particularidades y revoluciones cognitivas; (ii) su aplicabilidad y posible relación con la naturaleza de lo vivo, bajo la comprensión que afirma que los conceptos matemáticos no hablan sobre objetos sino sobre relaciones, funciones, estructuras y patrones que nos permiten describir los posibles estados de las cosas. Es labor científica y por ende, del naturalismo filosófico continuar investigando, sobre esta línea, si parte de los beneficios epistémicos de los conceptos matemáticos radican en la articulación de un lenguaje que potencia el razonamiento propiamente matemático y parte en su naturaleza, como conceptos que hablan sobre relaciones, funciones, estructuras, patrones, propiedades que se encuentran en la naturaleza y que se han desenvuelto junto con nuestra arquitectura neurocognitiva y corporal. Lo anterior explica por qué podemos utilizar el lenguaje matemático con beneficios epistémicos para describir matemáticamente fenómenos en los que el compromiso ontológico no es necesario, pero es exitoso: y otros escenarios en lo que nos inclinemos a pensar que, en nuestra búsqueda por la verdad desde los límites de la racionalidad, nos hemos acercado a las matemáticas de la naturaleza, a sus complejas interrelaciones, funciones y estructuras. Bajo esta mirada, en la búsqueda por las últimas y verdaderas categorías de la realidad la búsqueda por el lenguaje matemático para describir el estado de las cosas se convierte en una cara central de labor científica.

Ahora bien, ante este panorama, ¿qué sucede con la noción de objeto matemático? No olvidemos que Quine avanza en este sentido una noción profundamente interesante y que he revisado en el primer capítulo de esta investigación. Quine encontró en la lógica de primer orden la notación ideal que por medio de las variables cuantificadas posibilitaba la referencia a objetos existentes de cualquier naturaleza. Esto, dado que las expresiones singulares de los enunciados existenciales apelan solamente a las condiciones básicas y universales de cualquier referencia: la unidad y la identidad, identificando como individuo aquello que puede ser contado como uno. Es importante tener en cuenta esta noción quineana, puesto que el concepto de objeto lo pensamos paradigmáticamente bajo la idea de un objeto empírico y nuestras intuiciones en las reflexiones que emprendemos en esta materia están también guiadas por esta dimensión cotidiana. En particular cuando la inferencia a la mejor explicación entra en escena y nos lleva a concluir que la mejor explicación de la verdad de nuestras mejores teorías científicas, en la que los componentes matemáticos son indispensables, es la existencia de estos componentes en la forma de objetos. Ha sido propio de la práctica de las matemáticas puras hablar de objetos matemáticos, lo cual puede tener sentido desde ese particular 'juego del lenguaje'.

No obstante, respecto a la cuestión ontológica que se concluye a partir de su aplicabilidad, he revisado las ventajas que tiene adoptar el enfoque conceptual de las matemáticas, en particular desde el naturalismo, y desde ahí reformular las preguntas ontológicas. Posiblemente no encontremos en la naturaleza a los números primos como objetos, incluso bajo la concepción quineana de lo que es un objeto. La noción quineana de objeto matemático, aunque interesante por sus cualidades referenciales en el ámbito metafísico, es insuficiente para dar cuenta de las cuestiones que surgen en la intersección entre el problema de la aplicabilidad y la ontología. Ahora bien, si existen objetos matemáticos en el sentido que afirma el platonismo en su formulación más ortodoxa, me parece una cuestión que, en este punto de la evolución natural y de la búsqueda humana por conocer a través de labor científica, supera los límites de la razón humana.

CONCLUSIONES

En esta investigación he buscado ejercer el principio de revisabilidad sobre el argumento Quine-Putnam con la finalidad de hacer explícitos los supuestos paradigmáticos que han guiado nuestra concepción del conocimiento matemático y científico. He sostenido que la imposibilidad de sustentar un doble criterio ontológico en Quine-Puntam entre las entidades teóricas y las matemáticas (a *double razor*), no sólo es producto del criterio de compromiso ontológico y de la inferencia a la mejor explicación, sino que es producto de los supuestos paradigmáticos que conforman la epistemología y la filosofía del lenguaje de W. V. O. Quine. Siguiendo esta idea, en el segundo capítulo analicé todos aquellos supuestos que intervienen a lo largo del recorrido en la construcción de una teoría científica hasta la regimentación, hacia la configuración de los objetos que forman parte del mobilario del Universo.

De esta manera, resultó claro que el holismo y el pragmatismo, así como la comprensión quineana del lenguaje en la labor científica, constituían supuestos paradigmáticos que estaban detrás de la configuración de los objetos existentes. Desde la óptica quineana, cualquier elemento o componente en principio conceptual se confirma con la teoría como un todo sin importar si el componente es de índole teórico o matemático, en tanto que forma parte de un arreglo conceptual que posee virtudes pragmáticas que se miden en la confirmación última de la teoría. El lenguaje científico es definido en términos amplios por su capacidad para ordenar la experiencia empírica que "impacta en los bordes de la teoría" (Quine, 1980). Dicho de otra manera, el lenguaje de la ciencia provee a las teorías de las mejores herramientas conceptuales, para que, en suma, la totalidad de la teoría sea capaz de brindar las mejores explicaciones sobre los fenómenos naturales.

No hay duda alguna de los beneficios epistémicos del lenguaje matemático en cualquier teoría científica. Me parece una afirmación que difícilmente puede ser puesta en tela de juicio. Tales beneficios epistémicos a su vez hacen de los componentes matemáticos de una teoría componentes indispensables, cualidad que comprobamos más tarde cuando una vez formulada la teoría cuantificacionalmente buscamos eliminarlos sin que la teoría resultante sea menos atractiva. Y esta comprobación, en Quine, dada la fuerza de la inferencia a la mejor explicación nos lleva a afirmar la existencia de los objetos matemáticos. En este recorrido, tampoco hay duda, como sostiene Field, que la lógica de los argumentos de indispensabilidad es poderosa, la inferencia a la mejor explicación es un razonamiento con una gran fuerza y que además da cuenta de una intuición filosófica interesante y profunda respecto a la aplicabilidad y el virtuosismo de los componentes matemáticos.

No obstante, además de la caracterización general recientemente mencionada, es importante apuntar que detrás de Quine-Putnam hay una serie de supuestos paradigmáticos que uno tras otro nos llevan a asumir que la indispensabilidad de los componentes matemáticos implica comprometernos ontológicamente con ellos. Por ello, he arrojado luz sobre los supuestos paradigmáticos de la filosofía quineana que intervienen en la configuración de los objetos que forman parte del mobiliario del Universo. Y, entre ellos, observo que la filosofía quineana esgrime un supuesto de continuidad entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, apelando únicamente a una diferencia de grado y rigor entre ellos y, al final, caracterizando a ambos en el mismo sentido, por su relevancia epistemológica, como una contribución a una teoría como un todo que se confirma por organizar de la mejor manera posible la experiencia empírica.

Sin embargo, cuestiono: ¿y si antes de la cuestión ontológica, la indispensabilidad de los componentes matemáticos de una teoría científica se debiera a que el lenguaje matemático realiza una función que es insustituible por el lenguaje natural? A su vez, ¿la función cognitiva y epistémica de ambos lenguajes, esto es del lenguaje natural y el lenguaje matemático, es la misma? El análisis mostró la vulnerabilidad del supuesto que afirma el continuo entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural y apuntó la laguna teórica en la filosofía quineana producida por la ausencia de una investigación propiamente naturalista sobre cómo funciona el lenguaje matemático. Quine, como he argumentado, no llevó a cabo una investigación naturalista sobre la aplicabilidad de las matemáticas y sobre el lenguaje matemático. Pero a la luz de una revisión de los supuestos paradigmáticos de Quine nos encontramos que sostiene una mirada vigorosa sobre la función del lenguaje matemático en la ciencia y su continuidad respecto al lenguaje natural.

Como mencioné en momentos previos de la investigación, no es mi propósito mostrar la falsedad del argumento Quine-Putnam, considero que la literatura filosófica ya ha emprendido esta labor desde distintos ángulos, con metodologías de todo tipo. En su lugar, mi intención fue tomar al argumento Quine-Putnam como un punto de intersección entre el problema de la aplicabilidad de las matemáticas y la cuestión ontológica y, por tanto, como un punto enriquecedor que imbuía una serie de supuestos paradigmáticos implícitos que han guiado nuestra comprensión y nuestras intuiciones filosóficas acerca del conocimiento científico y matemático. En esta investigación, busqué desvelar dichos supuestos paradigmáticos y ponerlos bajo la lupa quineana del principio de revisabilidad con el fin de esclarecer nuestra comprensión y conocimiento de la práctica de las matemáticas en la labor científica, después de todo "ningún enunciado es inmune a la experiencia”. Ejercer el principio de revisabilidad sobre los supuestos del argumento me permitió esclarecer ambas cuestiones; la cuestión ontológica y la de la aplicabilidad, conservando, al mismo tiempo, tal como sucede con este método en la revisión de una teoría científica, aquellos supuestos naturalistas y de la filosofía quineana que representaron un avance frente al positivismo y que nos permiten asumir una continuidad entre la labor científica y la filosófica. La iluminación y explicitación de los supuestos que intervienen en la génesis y la configuración última de los objetos existentes me parece resultó esclarecedora.

En el análisis noté que la continuidad entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural, o lo que es lo mismo, la diferencia solamente en grado, rigor y sistematicidad de ambos lenguajes, es un supuesto quineano que pasa desapercibido en el debate del argumento o es abiertamente aceptado por algunos filósofos de la tradición analítica. El análisis mostró la vulnerabilidad de este supuesto y apuntó la laguna teórica producida por la ausencia de una investigación propiamente naturalista respecto a cómo funciona el lenguaje matemático. Frente a este supuesto, presenté los avances de la investigación de Danielle Macbeth, quien cuestiona que se trate de lenguajes que sólo se diferencian en grado, caracterizando, en contraste, cada uno de ellos con una función y un funcionamiento radicalmente distintos. Ambos lenguajes, no obstante, sostiene Macbeth, intervienen en la labor científica. Bajo este marco, la investigación de Macbth estudia tres sistemas matemáticos en los que el lenguaje matemático soporta el razonamiento matemático de una manera cognitivamente peculiar frente al lenguaje natural. Y, a partir de su investigación, Macbeth plantea una serie de distinciones respecto al lenguaje natural, así como categorías para pensar el funcionamiento, la operación y la práctica de las matemáticas. Por su parte, estas categorías y su planteamiento sobre el lenguaje matemático permiten esbozar una posible propuesta respecto a la aplicabilidad de las matemáticas. Tal propuesta no nada más afirma los beneficios epistémicos de las matemáticas, sino que abre el panorama a comprender tales beneficios enraizándolos en aspectos fundamentales de la práctica de las matemáticas (lenguaje, razonamiento, naturaleza conceptual). A través de la noción de *trazabilidad* busqué mostrar una de las ventajas de cuestionar el supuesto de la continuidad lingüística, así como el poder explicativo de las categorías esgrimidas por Macbeth para pensar el conocimiento y aplicabilidad de las matemáticas dentro del naturalismo.

Ahondaré brevemente en lo expuesto en el párrafo anterior. La investigación naturalista de Macbeth sobre la práctica matemática y la peculiaridad del lenguaje matemático, cuyos hallazgos he presentado, nos revela una posible vía de cuestionamiento al supuesto paradigmático de la continuidad lingüística. Macbeth sostiene que uno de los usos distintivos del lenguaje matemático es la articulación de un sistema de signos que exhibe el contenido primitivo de conceptos matemáticos encarnando y potenciando así, a través de una *lingua característica* y un *calculus ratiocinator*, el razonamiento y el descubrimiento matemático. El lenguaje matemático da cuenta del ámbito de lo propiamente matemático, es decir, exhibe el contenido de conceptos matemáticos y por tanto, la distinción entre objeto y concepto en realidad demarca la diferencia entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Las palabras concepto y los nombres de objeto del lenguaje natural hablan sobre o involucran objetos empíricos, mientras que el lenguaje matemático más bien habla sobre conceptos matemáticos. No existen objetos matemáticos, los únicos objetos que existen son los objetos empíricos o más bien lo que existe en la realidad empírica. En la ciencia nos acercamos a la realidad empírica utilizando ambos lenguajes, pero el lenguaje matemático tiene un lugar central. El matemático se ocupa de los conceptos y el descubrimiento matemáticos, comprendiéndolos en su forma pura, así como las relaciones y propiedades lógicas que mantienen entre ellos. Tales conceptos nos hablan, entre otras cosas, de relaciones, funciones, estructuras y patrones; es así como los matemáticos descubren verdades objetivas sobre los conceptos matemáticos, sostiene Macbeth, y al hacer esto descubren cómo es que las cosas podrían ser, es decir, descubren posibles estados de las cosas. Los físicos emprenden el siguiente paso y utilizan estos conceptos para descubrir cómo es que de hecho las cosas son.

He sostenido que si comprendemos, entre otros aspectos clave, la peculiaridad cognitiva del lenguaje frente al razonamiento matemático y al ámbito de lo matemático seguramente tendremos una mirada más nítida de aplicabilidad de las matemáticas a las ciencias empíricas. Es decir, si comprendemos este tipo de aspectos en la práctica de las matemáticas puras, seguramente que el problema de la aplicabilidad dejará de presentarse ante nosotros como un “milagro que ni entendemos, ni nos merecemos” (Wigner, 1960). Desde luego que la comprensión de la aplicabilidad de las matemáticas requiere un paso más allá y su propia investigación naturalista. Pero una de las conclusiones centrales del análisis de los supuestos paradigmáticos nos deja ver que las categorías que la filosofía quineana promueve para pensar y comprender la intersección entre la aplicabilidad y la ontología de los ‘objetos’ matemáticos son insuficientes, en particular a la luz de un naturalismo que de cuenta de manera integral de las matemáticas en su faceta pura y aplicada. Si dirigimos una mirada minuciosa a los supuestos paradigmáticos de Quine entenderemos qué supuestos asumidos que han guiado nuestra comprensión de conocimiento matemático y científico necesitan una revisión e investigación más profunda. De lo contrario, estos supuestos someten nuestra inteligencia a una especie de hechizo filosófico o a una serie de enredos conceptuales. Y son este tipo de supuestos los que desde la base promueven la ya de por sí potente inferencia a la mejor explicación. Ello da lugar a afirmaciones como la deshonestidad intelectual del *double razor* de Putnam. Es necesario, por tanto, cuestionar los supuestos paradigmáticos y afinar las categorías filosóficas con las que comprendemos la práctica matemática para acercarnos con una mayor objetividad a la cuestión y no solamente defender nuestras intuiciones filosóficas sobre el mobiliario del Universo.

Finalmente, me gustaría mencionar otro aspecto revelador del debate del argumento Quine-Putnam. La indispensabilidad de las matemáticas en nuestras mejores teorías científicas da cuenta de un aspecto que más de un científico ha apuntado en la historia de la ciencia, entre ellos R. Feynmann (1965), quien en una de sus conferencias señala que la naturaleza tiene preferencia por ser conocida a través del lenguaje matemático y simplemente, como científicos, no podemos hacer caso omiso ante esta preferencia. Claramente este es el tipo de observaciones que le dan fuerza a la inferencia a la mejor explicación. Sin embargo, la sugerencia, dado el análisis que aquí he llevado a cabo, es que para emprender semejante paso tenemos que contar con una mayor comprensión de la práctica de las matemáticas, su funcionamiento, sus conceptos y en particular la naturaleza de estos conceptos.

Es posible que nos encontremos con casos en los que los conceptos matemáticos parecerían describir la estructura y las últimas y verdaderas categorías del Universo. Esto a la luz del naturalismo no debería resultarnos del todo extraño si asumimos el siguiente supuesto: la razón humana y su desarrollo no son necesariamente opuestos a la naturaleza, aunque no sea posible reducir alguna de ellas en términos de la otra. Las matemáticas humanas tienen su propio desarrollo, la razón aculturada tiene sus propios productos históricos, sus prácticas matemáticas específicas. Y podemos también comprender su desarrollo como un camino por acercarnos a la complejidad de lo percibido en la naturaleza y de las posibilidades conceptuales que esta experiencia evolutiva genera. Sin perder de vista que la razón, como hasta ahora la hemos desarrollado, busca puntos fijos y la naturaleza del conocimiento científico también levanta como bandera insigne la locución latina *caeteris paribus* frente al apabullante mar cósmico de lo complejo y caótico.

No obstante, la razón y nuestra cognición son también producto de la evolución natural y, en el caso del descubrimiento matemático, es la naturaleza misma desenvolviéndose en nosotros junto a la intencionalidad humana. Nuestro sistema perceptivo, cerebro y cuerpo llevan miles de años habitando y percibiendo las "matemáticas de la naturaleza"; sus patrones, estructuras, redes y posibilidades. Y no sólo como experiencia evolutiva (pasada), sino en todo momento el reino de la naturaleza se extiende y pulsa en la cognición humana. Contrario al paradigma bajo el cual se pensó la razón humana desde la filosofía de la Ilustración asumiendo todo tipo de dualidades en el hombre, la naturaleza habita en el cuerpo y en la razón humana, no solamente como una voluntad indomable o instintos "inferiores", sino que con toda su complejidad se presenta en su faceta *nouménica* en el desarrollo y el descubrimiento matemático. Por ello, la importancia de considerar a la práctica de las matemáticas también como un fenómeno natural y la necesidad de transformar y afinar nuestras categorías y supuestos bajo el principio de revisabilidad como frente a cualquier otro fenómeno de la naturaleza.

Con esta reflexión final cierro esta investigación apuntando que, además de transformar nuestras categorías y cuestionar nuestros supuestos para comprender la práctica matemática desde un punto de vista naturalista, tendremos que concebir a la razón como una de las manifestaciones de la naturaleza. Tendremos que investigar, bajo este paradigma de la razón y del naturalismo, las fuentes y los factores que constriñen y potencian la exploración y el descubrimiento de aquellos conceptos racionales que se ocupan de describir los posibles estados de las cosas. Posibles estados que formalizados en un lenguaje permiten a los científicos descubrir los estados de la realidad y las últimas y verdaderas categorías del Universo. Al alba de la ciencia futura parecería ser que la búsqueda por las últimas y verdaderas categorías de la realidad es casi idéntica con la búsqueda por lenguajes y descubrimientos matemáticos que describan los fenómenos de la extraordinaria y compleja naturaleza. Esta coincidencia tiene una doble faceta, es un fenómeno humano, pero también es un fenómeno natural que representa uno de los retos por venir de la investigación científica y filosófica desde el punto de vista naturalista.

BIBLIOGRAFÍA

Aristóteles. 1941. *The Basic Works of Aristotle*. Richard McKeon (ed.). New York: Random House.

Azzouni, J. 1997. "Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis". *Philosophia Mathematica*. 5(3): 193-209.

Baker, A. 2001. "Mathematics, Indispensability and Scientific Progress". *Erkenntnis*. 55(1): 85-116.

—–. 2005. "Are There Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?". *Mind*. 114(454): 223-238.

—–. 2012. "Science-Driven Mathematical Explanation". *Mind*. 121(482): 243-267.

—–. 1998. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Benacerraf, P. 1983a. "What Numbers Could Not Be", en *Benacerraf and Putnam* (1983), pp. 272-294.

——. y Putnam. H. 1983. "Introduction." en Paul Benacerraf y Hilary Putnam (eds.). In *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Brandom, R. 1994. *Making It Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment*. Cambridge. Mass.: Harvard University Press.

Burgess, J. 1983, “Why I Am Not a Nominalist”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(1): 93-105.

Burgess, J. and Rosen, G., 1997. *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*. Oxford: Clarendon.

Chrisomalis, S. 2009. “The Cognitive and Cultural Foundations of Numbers.” en Eleanor Robson y Jacqueline Stedall (eds.). *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

———. 2010. *Numerical Notation: A Comparative History*. Cambridge and New York: Cambridge University Press.

Colyvan, M. 2001. *The Indispensability of Mathematics*, New York: Oxford University Press.

–—. "Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [Edición de la primavera de 2015], Edward N. Zalta (ed.). URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/mathphil-indis/>.

Feynmann, R. 1964. *The Feynmann Lectures on Physics*. California Institute of Technology. (CalTech). URL= <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>

Field, H. 1980. *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*. Oxford: Blackwell.

Frege, G. 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Traducido al inglés con el título *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, por S. Bauer-Mengelberg en J. vanHeijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1967.

Jourdain, P. E. B. 1912. *The Nature of Mathematics.* London: T. C. Y E. C. Jack; and New York: Dodge Publishing Co.

Kant. I. 1787. *Kritik der reinen Vernunft.* Traducido al español por Pedro Ribas con el título *Crítica de la Razón Pura,* Madrid: Taurus. 2005.

Knorr, W. 1975. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht y Boston: D. Reidel.

–—. 1983. “Construction as Existence Proof in Ancient Geometry.” *Ancient Philosophy* 3: 125-48.

Korte, T. 2010. “Frege’s Begriffsschrift as a *lingua characteristica*”. *Synthese* 174: 283-94.

Lakoff, G. & Núñez R. 2000. *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

Leibniz, G. W. 1969. *Philosophical Papers and Letters.* Traducido por Leroy E. Loemker. Dordrecht: Reidel.

MacBeth, D. 2014. *Realizing Reason: A Narrative of Truth and Knowing*. Oxford: Oxford University Press.

Maddy, P. 1990. “Physicalistic Platonism” en A.D. Irvine (ed.). *Physicalism in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, pp. 259-289.

——. 1992. “Indispensability and Practice”. *Journal of Philosophy*. 89(6): 275-289.

——.1995. “Naturalism and Ontology”. *Philosophia Mathematica*. 3(3): 248-270.

——. 1997. *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Mancosu, P. (ed.). 2008. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press

McDowell, J. 1994. Mind and World. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

McMullin. E. 1982. “Values in Science”. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*. Vol. 1982. Volume Two: Symposia and Invited Papers (1982), pp. 3-28.

Parsons, C. 1983. “Quine on the Philosophy of Mathematics”, en *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*. Ithaca, NY: Cornell University Press, pp. 176–205.

Pincock, C. 2009. “Towards a philosophy of applied mathematics” en *New Waves in philosophy of mathematics.* Palgrave Macmillan.

——. 2004. “A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics *Philosophia Mathematica*. 12:135-161.

Platón. 1961. The Collected Dialogues of Plato. Edith Hamilton and Huntington Cairns (eds.). Princeton: Princeton University Press.

Putnam, H. 1979, “Philosophy of Logic” en *Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 323-357.

Quine, W.V O. 1960. *Word and Object*. Cambridge, MA: MIT Press.

——. 1976. “Carnap and Logical Truth” En *The Ways of Paradox and Other Essays*. Cambridge. MA: Harvard University Press, pp. 107–132.

——. 1980a. “On What There Is”. En *From a Logical Point of View*. Cambridge. MA: Harvard University Press, pp. 1-19.

——. 1980b. “Two Dogmas of Empiricism”. En *From a Logical Point of View*. Cambridge. MA: Harvard University Press, pp. 20-46

——. 1981a. “Things and Their Place in Theories”. En *Theories and Things*. Cambridge. MA: Harvard University Press, pp. 1-23.

——. 1981b. “Five Milestones of Empiricism”. En *Theories and Things*. Cambridge. MA: Harvard University Press, pp. 67-72.

——. 1981c. “Success and Limits of Mathematization”. En *Theories and Things*. Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 148-155.

——. 1984. “Review of Parsons'. *Mathematics in Philosophy*,” *Journal of Philosophy*. 81(12): 783-794.

——. 1986. “Reply to Charles Parsons”. En L. Hahn and P. Schilpp (eds.). *The Philosophy of W.V. Quine*, La Salle, ILL: Open Court, pp. 396-403.

——. 1995a. “Scientific vs Mathematical Realism: The Indispensability Argument”, *Philosophia Mathematica*. 3(2): 166-174.

Russell, B. 1903. The Principles of Mathematics. Second edition. London: Bradford y Dickens. 1937.

———. 1905. “On Denoting.” Mind 14: 479-93.

———. 1906. “On ‘Insolubilia’ and Their Solution by Symbolic Logic.” En D. Lackey. *Essays in Analysis*.. New York: George Braziller. 1973.

———. 1908. “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types.” En R. C. Marsh (ed.). *Logic and Knowledge: Essays 1901–1950*. London and New York: Routledge, 1956.

———. 1914. *Our Knowledge of the External World*. London: George Allen and Unwin. 1926.

———. 1918. “The Philosophy of Logical Atomism.” En *Logic and Knowledge: Essays 1901–1950*. R. C. Marsh (ed.). London y New York: Routledge, 1956.

Sober, E. 1993, “Mathematics and Indispensability”, *Philosophical Review*, 102(1): 35-57.

Steiner, M. 1998. *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Tappenden, J. 2006. “The Riemannian Background to Frege’s Philosophy.” En Jose Ferreiro y Jeremy J. Gray (eds.). *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Urquhart, A. 1990. “The Logic of Physical Theory” en Irvine, A.D. *Physicalism in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, pp. 145-154.

Van Fraassen, B. C. 1989. *Laws and Symmetry*. Oxford: Oxford University Press.

von Neumann, J. 1955. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* Traducido por R. T. Beyer. Princeton: Princeton University Press.

Wigner, E. 1967. “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.” Eb *Symmetries and Reflections*. Bloomington: Indiana University Press.

Wittgenstein, L. 1961. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Traducido por D. F. Pears and B. F. McGuinness. London and Henley: Routledge and Kegan Paul.

———. 1976. *Philosophical Investigations*. Traducido por G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell.