



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Flujo de Curvatura de Gauss

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Alonso García Gascón

TUTOR

Pierre Michel Bayard





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a mis padres
Una fuente de apoyo incondicional*

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que han contribuido con este trabajo apoyándome de todas las maneras posibles. En especial al profesor Pierre Michel Bayard por guiarme y apoyarme durante toda la escritura de esta tesis, le agradezco su gran paciencia y su gran esfuerzo. También, con mucho amor, agradezco a mis padres: María del Carmen Gascón Figueroa e Ismael García Guerrero; a mi hermano: Jacobo García Gascón; a mis abuelos: Luz María Figueroa Gutierrez, Laura Espinosa Guerrero, Mariano RIP y Jose RIP; A mis tíos: Patricia, Soledad, Rita, Ignacio, Mariano, Julio y Hugo Gascón Figueroa. Y a todos mis primos. Sin alguno de los anteriores, esto no hubiera sido posible. Agradezco a Adriana León Montes quien me ayudo a entender y lograr hacer las figuras en esta tesis, con las cuales los argumentos pudieron ser más visuales. De igual manera, agradezco el apoyo que recibí por el proyecto PAPIIT IA106218 "Caracterización espinorial de inmersiones en espacios homogéneos II".

Contenido

1	Introducción	5
2	Desarrollo del problema	7
2.1	Función soporte	7
2.2	Equivalencia de problemas	8
2.3	Descripción de la ecuación principal por medio de la función soporte	10
3	Ecuaciones a estudiar	12
4	Existencia y unicidad del flujo de curvatura de Gauss	12
4.1	Preliminares: espacios de Hölder	12
4.2	Linearización de la ecuación de Monge-Ampère	14
4.3	Existencia y unicidad de soluciones	16
4.3.1	Existencia de soluciones	16
4.3.2	Unicidad del flujo	16
4.4	Estimaciones	18
4.4.1	Estimación para H	20
4.4.2	Estimación para ∇H	21
4.4.3	Estimación para H_t	21
4.4.4	Estimación para $\nabla^2 H$	23
5	Tiempo de vida de la deformación	27
5.1	Conclusión	28
5.2	Más regularidad para las soluciones	29
6	Resultado para el caso en \mathbb{R}^3	30
6.1	Resultado	30
6.2	Ecuaciones de evolución	30
6.3	Estimaciones para las curvaturas principales	33
6.4	Convergencia a encaje suave	35
A	Superficies convexas	44
B	Representación de los puntos frontera de un cuerpo convexo por su función soporte	45
C	Funciones convexas	47
D	Transformada de Legendre	51

Flujo de Curvatura de Gauss

1 Introducción

Este trabajo de tesis trata de describir el comportamiento de las deformaciones de un tipo de variedades bajo una ecuación diferencial parcial. En este contexto hablaremos de la deformación de una hipersuperficie de \mathbb{R}^n estrictamente convexa cuya deformación es en dirección de la normal interior y proporcional a la curvatura de Gauss-Kronecker en cada punto. Se demostrará la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones así como el comportamiento asintótico el cual dice que la hipersuperficie se deformará en un punto. Consideremos $f: M \rightarrow \hat{M}$ una inmersión diferenciable de una M variedad de dimensión n a una variedad Riemanniana \hat{M} de dimensión $k = n + m$. De manera natural la métrica Riemanniana de \hat{M} induce una métrica Riemanniana en M , a saber, para todo $v_1, v_2 \in T_p M$ definimos

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$$

y con esto, f se convierte una inmersión isométrica. En este caso al número m se le llama la codimensión de M en \hat{M} . De aquí en adelante se considerará $M = \mathbb{S}^n$ y $\hat{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ es decir consideramos el caso en donde la codimensión es 1 y tenemos que $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$; así $f(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ define una hipersuperficie. Sean $p \in M$, $\eta \in (T_p M)^\perp$ y $S_\eta: T_p M \rightarrow T_p M$ el operador auto adjunto asociado a la segunda forma fundamental (llamado operador de forma), como $S_\eta: T_p M \rightarrow T_p M$ es simétrico, existe una base ortogonal de vectores propios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ con valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, es decir,

$$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{con } i \in \{1, \dots, n\}.$$

En general si M y \hat{M} son ambas orientables y orientadas, entonces el vector $\eta \in (T_p M)^\perp$ está únicamente determinado eligiendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de orientación de M y $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ base de orientación de \hat{M} . Con todo lo anterior decimos que cada e_i es una dirección principal y que cada λ_i es una curvatura principal de f . Así también, se le llama curvatura de Gauss-Kronecker de f a

$$K = \det(S_\eta) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

y se le llama curvatura media de f a

$$\mathcal{H} = \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar los artículos:

- "Gauss Curvature Flow: The Fate Of The Rolling Stones" de Ben Andrews
- "Deforming a Hypersurface by its Gauss-Kronecker Curvature" de Kaising Tso

con citas [3] y [15] respectivamente. Dado esto podemos enunciar el teorema principal:

Teorema 1.1 *Sea $X_0 := X(\cdot, 0) : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie suave, cerrada y estrictamente convexa. Entonces el problema de evolución*

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(x, t) &= -K(x, t)N(x, t) \\ X(x, 0) &= X_0(x) \end{aligned} \tag{1}$$

tiene una única solución suave

$$X : \mathbb{S}^n \times [0, T^*) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tal que, para todo $t \in [0, T^)$, $X(\cdot, t) : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie convexa y en donde $K(x, t)$ es la curvatura de Gauss-Kronecker y $N(x, t)$ es el vector normal unitario de la hipersuperficie $X(\cdot, t)$ en x . Además $T^* = \frac{V}{\sigma_n}$ en donde V es el volumen encerrado por la hipersuperficie X_0 y σ_n es el área de \mathbb{S}^n . Más aún, $X(\cdot, t')$ está estrictamente encerrada por $X(\cdot, t)$ para $t' > t$, mas precisamente, si $\bar{X}(\cdot, t)$ es el cuerpo convexo acotado por $X(\cdot, t)$ para cualquier t , entonces $\bar{X}(\cdot, t) \subseteq \bar{X}(\cdot, t')$, véase Apéndice A. Además, cuando t tiende a T^* , la hipersuperficie tiende a un punto $q \in \mathbb{R}^{n+1}$. Además en el caso de \mathbb{R}^3 , rescalando alrededor de q , tenemos*

$$\hat{x}(\cdot, t) = \frac{X(\cdot, t) - q}{3(T^* - t)^{\frac{1}{3}}} \longrightarrow \hat{x}(\cdot, T^*)$$

en \mathcal{C}^∞ , cuando $t \longrightarrow T^$ y en donde $\hat{x}(\cdot, T^*) : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un encaje suave de imagen la esfera \mathbb{S}^2 , es decir $\hat{x}(\mathbb{S}^2, T^*) = \mathbb{S}^2$.*

La prueba está basada en la observación de que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1) puede ser reducida a una sola ecuación diferencial parcial de condiciones iniciales para la función soporte de las hipersuperficies $X(\cdot, t)$.

Este trabajo tiene las siguientes etapas:

En el capítulo 1 se desarrollan propiedades de la función soporte de una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} , con ayuda de esto, obtenemos una ecuación diferencial parcial parabólica completamente no lineal de tipo Monge-Ampère equivalente al sistema de ecuaciones (1).

En el segundo capítulo se desarrolla la existencia, el comportamiento y la regularidad de soluciones del flujo de curvatura de Gauss. En el capítulo 3 se estudia el tiempo

de vida y la regularidad para las soluciones del flujo.

Del capítulo 4 en adelante se desarrolla el comportamiento de las soluciones del flujo en el caso de \mathbb{R}^3 ; se dan las ecuaciones de evolución, estimaciones para las soluciones, el re-escalamiento del problema y se demuestra la convergencia al encaje suave de las soluciones a \mathbb{S}^2 .

2 Desarrollo del problema

2.1 Función soporte

De aquí en adelante para cualquier $t \in [0, T^*)$, $X(\cdot, t) : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie suave de \mathbb{R}^{n+1} . Definimos $\Sigma_t := X(\mathbb{S}^n, t)$ para cualquier $t \in [0, T^*)$ dado. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado k si para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$; si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se dice que f es positiva homogénea. Consideramos la función

$$H : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sup_{p \in \Sigma_t} \langle x, p \rangle$$

en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es el producto punto usual. Consideramos

$$\hat{H} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \|x\| H\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

que podemos extender en 0 por $\hat{H}(0) = 0$. Claramente $\hat{H}|_{\mathbb{S}^n} = H$, por lo que es extensión de H en \mathbb{R}^{n+1} denotandola de la misma manera con H . Si $\Sigma_t \in \mathcal{C}^2$ entonces $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. Notemos que para cualquier $\lambda > 0$ tenemos que

$$H(\lambda x) = \lambda H(x)$$

por la homogeneidad del producto punto. Además para $\lambda \geq 0$ y $\mu \geq 0$ y por linealidad del producto punto y propiedades del supremo tenemos que

$$H(\lambda x + \mu y) \leq \lambda H(x) + \mu H(y)$$

así H es una función positiva homogénea de grado 1. Por los apéndices A y B podemos concluir que cuando Σ_t es estrictamente convexa, para cualquier punto $x \in \mathbb{S}^n$ existe un único punto $p(x) \in \Sigma_t$ tal que

$$\sup_{p \in \Sigma_t} \langle x, p \rangle = \langle x, p(x) \rangle;$$

además, tal punto es de la forma

$$p(x) = (\partial_{x_1} H(x), \partial_{x_2} H(x), \partial_{x_3} H(x), \dots, \partial_{x_{n+1}} H(x)).$$

Observación 2.1 Notemos que los eigenvalores del Hessiano de H , es decir,

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, n+1\}},$$

consisten de 0 y los radios principales de curvatura los cuales son los radios de curvatura asociados a las curvas integrales soluciones de las direcciones principales.

Para ver esto describimos el radio principal de curvatura de la hipersuperficie Σ_t por medio de su función soporte. Consideramos $p \in \Sigma_t$ y $\xi \in (T_p \Sigma_t)^\perp$; de acuerdo con la fórmula de Rodriguez (véase [13]), y tomando algún $\frac{1}{R}$ para $R > 0$ como radio de curvatura principal tenemos que

$$dp - Rd\xi = 0;$$

tomando en cuenta que todo $p \in \Sigma_t$ es de la forma $p = DH(\xi)$ (véase apéndice B) se sigue que para cualquier $i \in \{1, \dots, n+1\}$

$$\partial_{\xi_i \xi_j}^2 H d\xi_j - Rd\xi_i = 0$$

de esta manera tenemos que el radio principal de curvatura cumple la ecuación

$$\det \left(\partial_{\xi_i \xi_j}^2 H - R\delta_{ij} \right) = 0; \quad (2)$$

como H es homogénea y

$$\det \left(\partial_{\xi_i \xi_j}^2 H \right) = 0$$

entonces una raíz de (2) es $R = 0$. Suponiendo soluciones no triviales, tenemos que los otros valores de R son raíces de polinomios de la forma

$$R^n + A_1 R^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

en donde A_i es el i -ésimo menor del Hessiano de H . Con lo que se tiene la observación anterior. Para mas detalles véase [13] y [4].

2.2 Equivalencia de problemas

Una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} está completamente determinada por su función soporte. Más precisamente: consideramos $H: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función soporte de la hipersuperficie convexa $\Sigma_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $N: \Sigma_t \rightarrow \mathbb{S}^n$ la transformación de Gauss; así, fijando $z \in \mathbb{S}^n$ tal que z es normal a Σ_t en $N^{-1}(z) = x$ entonces $H(z)$ representa

la distancia con signo del origen al hiperplano soporte que pasa por $x \in \Sigma_t$ con normal $z \in \mathbb{S}^n$. Con esto, buscamos describir el punto $x \in \Sigma_t$ en términos de la función soporte H . El hiperplano soporte que pasa por x con normal z , tiene como ecuación

$$\mathcal{H}_z = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, z \rangle = H(z)\}.$$

Observemos que Σ_t parametrizada por $X(\cdot, t): \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es la superficie envolvente por la familia de hiperplanos $\{\mathcal{H}_u\}_{u \in \mathbb{S}^n}$, así tenemos las dos relaciones

$$\begin{cases} \langle x, z \rangle = H(z) \\ \langle x, v \rangle = dH_z(v) \quad \forall v \in T_z \mathbb{S}^n; \end{cases}$$

en donde la segunda igualdad se sigue por el Apéndice B, además notemos que $x = \text{proy}_z(x) + \text{proy}_{z^\perp}(x)$ las proyecciones ortogonales sobre la recta generada por z y sobre el hiperplano z^\perp respectivamente. Entonces

$$\text{proy}_z(x) = \langle x, z \rangle z = H(z)z;$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \langle \text{proy}_{z^\perp}(x), v \rangle &= \langle x, v \rangle \\ &= dH_z(v) \\ &= \langle \nabla H(z), v \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto $\text{proy}_{z^\perp}(x) = \nabla H(z)$ en donde $\nabla H \in T\mathbb{S}^n$ es el gradiente de H como función definida sobre \mathbb{S}^n . De esta manera

$$x = H(z)z + \nabla H(z),$$

a consecuencia obtenemos la reparametrización de Σ_t

$$\begin{aligned} \chi_H: \quad \mathbb{S}^n &\longrightarrow \Sigma_t \\ z &\longmapsto H(z)z + \nabla H(z). \end{aligned} \tag{3}$$

En particular la regularidad de Σ_t se hereda de la regularidad de H . Y además esta es la inversa de la transformación de Gauss. Por lo tanto la curvatura viene dada por

$$\begin{aligned} K(z) &= \det(dN_x) \\ &= \det(dN_{N^{-1}(z)}) \\ &= \frac{1}{\det(d(\chi_H)_z)}, \end{aligned} \tag{4}$$

pero para cualquier $v \in T_z \mathbb{S}^n$

$$d(\chi_H)_z(v) = dH_z(v)z + H(z)v + d(\nabla H)_z(v).$$

Notese que la parte tangente a \mathbb{S}^n del último término de la expresión anterior es el $(1, 1)$ -tensor Hessiano asociado a H , es decir que para toda $w, v \in T_z\mathbb{S}^n$

$$\langle d(\nabla H)_z(v), w \rangle = \text{Hess}H_z(v, w).$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle d(\chi_H)_z(v), w \rangle &= \langle dH_z(v)z, w \rangle + \langle H(z)z, w \rangle + \text{Hess}H_z(v, w) \\ &= H(z)\langle z, w \rangle + \text{Hess}H_z(v, w) \end{aligned} \quad (5)$$

en donde $\langle dH_z(v)z, w \rangle = 0$ ya que $z \in \mathbb{S}^n$ y $w \in T_z\mathbb{S}^n$. Por lo tanto, sustituyendo (5) en (4) y tomando una marco ortonormal para \mathbb{S}^n tenemos

$$\det(H_{\alpha\beta} + H\delta_{\alpha\beta}) = \frac{1}{K(z)} \quad (6)$$

en donde $H_{\alpha\beta}$ con $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ es el Hessiano de H . Como H es homogénea de grado 1, está únicamente determinada por su restricción al hiperplano $x_{n+1} = 1$ ó $x_{n+1} = -1$, en este caso consideraremos $x_{n+1} = -1$. Así definimos

$$u(x) = H(x_1, x_2, \dots, x_n, -1)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. De esta manera, para cualquier $y = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}(x, -1)$, es decir para y dada por la proyección estereográfica, la ecuación (6) se ve de la forma

$$K(y) = (1 + |x|^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(\det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_{\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}} \right)^{-1} \quad (7)$$

para más detalles de esta cuenta véase el artículo [6, pag.498]. Con esto tenemos que la regularidad y convexidad de la función u es la misma que la de la hipersuperficie Σ_t .

2.3 Descripción de la ecuación principal por medio de la función soporte

Ahora consideraremos una función $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ homogénea de grado 1 cuyas restricciones a los hiperplanos $x_{n+1} = 1$ o $x_{n+1} = -1$ sean estrictamente convexas. Por la sección pasada tenemos que tal función determina una hipersuperficie estrictamente convexa cuya función soporte es H . Tenemos el siguiente hecho: Dos funciones soporte difieren por una transformación lineal si y solo si sus superficies

asociadas son idénticas salvo traslaciones. Finalmente si consideramos los puntos en la hipersuperficie Σ_t en donde sus normales exteriores quedan en el hemisferio sur i.e., $x_{n+1} < 0$, tenemos por el apéndice D fórmula (8)

$$\begin{aligned} p^i &= \partial_{x_i} u(x) \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \\ p^{n+1} &= u^*(x) = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i} u(x) - u(x), \end{aligned} \quad (8)$$

en donde a u^* se le llama transformada de Legendre de u y el vector normal a p está dado por

$$(1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} (x_1, \dots, x_n, -1) \quad (9)$$

para más detalles véase apéndice D.

Ahora se deduce el problema equivalente a (1) para la función soporte dada por la hipersuperficie Σ_t . Supongamos que Σ_t es una hipersuperficie estrictamente convexa para alguna $t \in \mathbb{R}^+$ y $X(s, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ para cualquier $s \in \mathbb{S}^n$ (lo cual siempre pasa y se demostrará más adelante). Ahora reparametrizamos Σ_t por la aplicación de Gauss N : consideramos

$$\begin{aligned} M: \quad \mathbb{S}^n &\longrightarrow \Sigma_t \\ z &\longmapsto (N^{-1}(z), t). \end{aligned}$$

Consideramos $s \in \Sigma_t$ y sea $x_t = N(s)$ el vector normal a Σ_t en el punto $s = X(x_t, t)$, el cual existe y está bien definido ya que la hipersuperficie es solución del flujo por lo que es estrictamente convexa y compacta, lo que implica que la transformación de Gauss es difeomorfismo, véase [1] Capítulo 7. Entonces notemos que, para cada t en donde la solución esté definida,

$$\begin{aligned} \partial_t M(x_t) &= \partial_t N^{-1}(x_t) \\ &= \partial_t s \\ &= \partial_t X(x_t, t) \\ &= -K(s)N(s) \\ &= -K(N^{-1}(x_t))x_t. \end{aligned}$$

Así, tomando producto punto con $x_t \in \mathbb{S}^n$, tenemos que

$$\langle \partial_t M(x_t), x_t \rangle = \langle -K(N^{-1}(x_t))x_t, x_t \rangle = -K(N^{-1}(x_t)). \quad (10)$$

Por otra parte notemos que como $x_t \in \mathbb{S}^n$ por la parametrización (3) y ya que $\nabla H_t(x_t) \in T_{x_t} \mathbb{S}^n$ se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \partial_t M(x_t), x_t \rangle &= \langle \partial_t (H(x_t)x_t + \nabla H(x_t)), x_t \rangle \\ &= \langle \partial_t H(x_t)x_t, x_t \rangle + \langle \nabla H_t(x_t), x_t \rangle \\ &= \partial_t H(x_t) \end{aligned}$$

entonces por la ecuación (6) tenemos

$$\begin{aligned} -H_t(x,t) \det(H_{\alpha\beta} + H\delta_{\alpha\beta}) &= 1 \\ H(x,0) &= h(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{S}^n \end{aligned} \quad (11)$$

en donde h es la función soporte para Σ_0 . Así la función soporte para una solución suave de la ecuación principal satisface (11). Por otro lado, tomando $\{M(\cdot, t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ una familia de hipersuperficies de soluciones para (11), la cual podemos suponer por la primera parte de esta sección, entonces existe una parametrización $x = \phi(s, t) \in \mathbb{S}^n$ en donde $s \in \mathbb{S}^n$ tal que $X(s, t) = M(\phi(s, t), t)$ satisface (1). Para más detalle véase el artículo [6, pag.499]. Por lo que las ecuaciones (11) y (1) son equivalentes.

3 Ecuaciones a estudiar

Más generalmente se estudiará una ecuación del tipo

$$\begin{aligned} -H_t \det(H_{\alpha\beta} + H\delta_{\alpha\beta}) &= f(x), \quad f > 0 \\ H(x,0) &= h(x), \quad x \in \mathbb{S}^n, \end{aligned} \quad (12)$$

en donde h es la función soporte de una hipersuperficie estrictamente convexa y en donde $H_{\alpha\beta}$ con $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ es el Hessiano de H con respecto a un campo de marcos ortonormales de \mathbb{S}^n . De aquí sí extendemos H y f a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ como función homogénea de grado 1 y 0, respectivamente, y ponemos $u(x, t) := H(x, -1, t), x \in \mathbb{R}^n$, entonces por lo anterior y la fórmula (7) tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} -u_t \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) &= (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)} f(x, -1), \\ u(x,0) &= h(x, -1) \end{aligned} \quad (13)$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. De la Sección 2.3 se obtiene que cualquier solución suave es necesariamente la función soporte de una hipersuperficie estrictamente convexa. Además, la linearización de (13) en u es una ecuación parabólica. A la ecuación (13) se le llama una ecuación parabólica de Monge-Ampère. El resultado principal para la ecuación con condiciones iniciales (11) está contenido en el teorema principal y la prueba está basada en estimaciones *a priori* de soluciones de (13).

4 Existencia y unicidad del flujo de curvatura de Gauss

4.1 Preliminares: espacios de Hölder

Para lo que resta del trabajo se usarán propiedades de los espacios de Hölder. Se definen los espacios de Banach $C^{k, \alpha}(\mathbb{S}^n)$, con $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0, 1)$, y para $Q = \mathbb{S}^n \times I$

con $I = [a, b]$, se define $\tilde{C}^{k,\alpha}(Q)$ como un espacio de funciones k -diferenciables (en x) y $\left[\frac{k}{2}\right]$ -diferenciables (en t) en donde

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{S}^n)} := \sup_{\substack{|\gamma| \leq k \\ x \in \mathbb{S}^n}} |D^\gamma u(x)| + \sup_{\substack{|\gamma|=k \\ x,y \in \mathbb{S}^n}} \frac{|D^\gamma u(x) - D^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

y

$$\|u\|_{\tilde{C}^{k,\alpha}(Q)} := \sup_{\substack{|\gamma|+2s \leq k \\ (x,t) \in Q}} |D^\gamma \partial_t^s u(x,t)| + \sup_{\substack{|\gamma|+2s=k \\ (x,t),(y,l) \in Q}} \frac{|D^\gamma \partial_t^s u(x,t) - D^\gamma \partial_t^s u(y,l)|}{(|x-y|^2 + |t-l|)^\frac{\alpha}{2}} < \infty,$$

son normas para $C^{k,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ y $\tilde{C}^{k,\alpha}(Q)$ respectivamente y en donde γ es un multi-índice. Cuando $\alpha = 0$ definimos

$$\|u\|_{\tilde{C}^{k,0}(Q)} = \sup_{\substack{|\gamma|+2s \leq k \\ (x,t) \in Q}} |D^\gamma \partial_t^s u(x,t)|.$$

Observación 4.1 *De aquí en adelante se supondrá que tanto f y h en (13) pertenecen a $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ para algún $\alpha \in (0,1)$. f es positiva y h es la función soporte de una hipersuperficie estrictamente convexa $X_0: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Estas son extendidas como funciones homogéneas de grado 0 y 1 sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ respectivamente.*

Teorema 4.1 *Bajo estas suposiciones tenemos que una $\tilde{C}^{2,0}$ -solución de (12) en $Q = \mathbb{S}^n \times [0, T]$, es estrictamente decreciente en t y que sus restricciones a las hipersuperficies $x^i = 1$ o $x^i = -1$ con $i \in \{1, \dots, n+1\}$ son estrictamente convexas.*

Demostración: Para cualquier solución $H \in \tilde{C}^{2,0}(Q)$ de (12) se tiene que

$$-H_t(x,t) = f(x)(K(x,t))^{-1}$$

en donde $K(x,t) > 0$ por la convexidad uniforme y como $f(x) > 0$ tenemos que $-H_t > 0$, es decir $H_t < 0$ con lo que concluimos que las soluciones son estrictamente decrecientes. Además como H está únicamente determinada por sus restricciones a los hiperplanos $x^i = 1$ o $x^i = -1$ con $i \in \{1, \dots, n+1\}$, tomando la restricción $u(x,t) = H(x, -1, t)$ entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$-u_t \det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)} f(x, -1)$$

tenemos entonces por el mismo argumento que $-u_t > 0$ y que

$$\det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) > 0$$

esto dice que las soluciones son decrecientes y estrictamente convexas para cada restricción. ■

4.2 Linearización de la ecuación de Monge-Ampère

Suponiendo que $H \in \tilde{C}^{4,0}$ y diferenciando la ecuación (13) con respecto a $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$Lu_t = 0, \quad (14)$$

en donde

$$L := \left(\frac{1}{u_t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + u^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right), \quad (15)$$

en donde $u^{\alpha\beta}$ es la $(\alpha\beta)$ -ésima entrada de la inversa del Hessiano de u . La fórmula anterior se deduce tomando logaritmo de la ecuación (13) y derivando, con esto tenemos que

$$\log \left(-u_t \det \partial_{x_\alpha x_\beta}^2 u \right) = \log \left((1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)} f(x, -1) \right)$$

entonces

$$\log(-u_t) + \log \det Hess u = -\frac{1}{2}(n+1) \log(1 + |x|^2) + \log f(x, -1).$$

Diferenciando respecto a t , tenemos

$$\frac{1}{u_t} \partial_t u_t + \partial_t (\log \det Hess u) = 0. \quad (16)$$

Recordando la fórmula de la diferencial de $\log \det$ en una matriz H invertible, véase [5],

$$\partial_t \log \det H = \text{Tr}(H^{-1} \partial_t H) \quad (17)$$

obtenemos

$$\frac{1}{u_t} \partial_t u_t + \text{Tr}((Hess u)^{-1} \partial_t (Hess u)) = 0,$$

lo que da

$$\frac{1}{u_t} \partial_t u_t + u^{\alpha\beta} \partial_t \partial_{\alpha\beta}^2 u = 0,$$

es decir

$$\frac{1}{u_t} \partial_t u_t + u^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\beta}^2 u_t) = 0. \quad (18)$$

Además por una cuenta idéntica a la de arriba tenemos que para $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$Lu_\xi = \left(\log(1 + |x|^2)^{-\frac{(n+1)}{2}} f(x, -1) \right)_\xi. \quad (19)$$

Tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.1 u_t y u_ξ satisfacen las ecuaciones parabólicas (14) y (19).

Además, diferenciando una vez más la ecuación (19) en dirección de $\xi \in \mathbb{R}^n$ y definiendo

$$F(x, -1) := (1 + |x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} f(x, -1)$$

tenemos que

$$\partial_\xi \left(\frac{1}{u_t} \right) \partial_\xi u_t + \frac{1}{u_t} \partial_{\xi\xi}^2 u_t + \partial_\xi u^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u_\xi + u^{\alpha\beta} \partial_{\xi\alpha\beta}^3 u_\xi = (\log F)_{\xi\xi}$$

entonces

$$\partial_\xi \left(\frac{1}{u_t} \right) u_{\xi t} + \frac{1}{u_t} \partial_t u_{\xi\xi} + \partial_\xi u^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u_\xi + u^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u_{\xi\xi} = (\log F)_{\xi\xi},$$

y por la Definición 15

$$Lu_{\xi\xi} = \frac{1}{u_t} \partial_t u_{\xi\xi} + u^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u_{\xi\xi}$$

así tenemos que

$$Lu_{\xi\xi} - \left(\frac{u_{\xi t}}{u_t} \right)^2 + \partial_\xi u^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u_\xi = (\log F)_{\xi\xi}. \quad (20)$$

Obtenemos facilmente de (17) que si A es invertible y simétrica,

$$\frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}} (\log \det) (A) = a^{\alpha\beta}$$

en donde $a^{\alpha\beta}$ es el coeficiente de índices α, β de A^{-1} , y por lo tanto

$$u^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}} (\log \det) (D^2 u).$$

Derivando esta última expresión con respecto a ξ , obtenemos

$$\partial_\xi u^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u_\xi = \sum_{\alpha'\beta', \alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{\alpha'\beta'} \partial a_{\alpha\beta}} (\log \det) (D^2 u) \partial_\xi u_{\alpha'\beta'} \partial_\xi u_{\alpha\beta} \leq 0.$$

Esta cantidad es efectivamente negativa por la concavidad de la función $\log \det$ sobre las matrices definidas positivas. Se sigue de la ecuación (20) que

$$Lu_{\xi\xi} \geq (\log F)_{\xi\xi}; \quad (21)$$

con esto podemos observar que $u_{\xi\xi}$ es un tipo de subsolución para el mismo operador parabólico L .

4.3 Existencia y unicidad de soluciones

4.3.1 Existencia de soluciones

Tenemos la existencia de soluciones para tiempos cortos por el artículo [7]: en este se demuestra la existencia a tiempo corto del flujo de la n -ésima raíz de la curvatura de Gauss, que es un caso más general de este flujo. Usaremos este resultado de la forma siguiente:

Teorema 4.2 *Sea $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función soporte de una hipersuperficie estrictamente convexa tal que $h \in C^{2,\alpha}$, entonces el problema (12) tiene una solución $H: \mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. Además el tiempo de existencia ε solamente depende de una cota $C^{2,\alpha}$ de h .*

La prueba de este teorema se basa en el teorema de la función inversa y la teoría de las ecuaciones parabólicas lineales en los espacios de Hölder.

4.3.2 Unicidad del flujo

Para esta parte y en adelante usaremos el principio del máximo y el principio de comparación para operadores no lineales parabólicos. Para esto tomamos $\Omega = D \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $T > 0$, definimos

$$\begin{aligned} B\Omega &= D \times \{0\} \\ S\Omega &= \partial D \times (0, T) \\ C\Omega &= \partial D \times \{0\} \end{aligned}$$

que se llaman el fondo, el lado y la esquina del dominio Ω respectivamente además a $\mathcal{P}\Omega = B\Omega \cup S\Omega \cup C\Omega$ se le llama la frontera parabólica de Ω .

Ahora consideremos un operador no lineal

$$\begin{aligned} P: \quad \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \text{Sym}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, z, p, r, \tau) &\mapsto P(X, z, p, r, \tau). \end{aligned}$$

Se dice que P es parabólico en el punto (X, z, p, r, τ) si la matriz P_r/P_τ en este punto es definida positiva. Aquí P_r denota la matriz $\left(\frac{\partial P}{\partial r_{ij}}\right)_{i,j}$ y P_τ la función $\frac{\partial P}{\partial \tau}$. Si u es una función suficientemente diferenciable definimos la aplicación

$$x \mapsto Pu(x) := P(x, u(x), Du(x), D^2u(x), -u_t(x)).$$

Decimos que P es parabólico con respecto a u si P es parabólico en todo punto de la forma $(x, u(x), Du(x), D^2u(x), -u_t(x))$. Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.2 Supongamos que existe $k \geq 0$ tal que para todo $(X, p, r, \tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \text{Sym}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ y cualquier $z_1 \geq z_2$

$$P(X, z_1, p, r, \tau - kz_1) \leq P(X, z_2, p, r, \tau - kz_2)$$

en donde P es parabólico en $(X, z_i, p, r, \tau - kz_i)$ para $i = 1$ o 2 . Si $u, v \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con P parabólico con respecto a u o v , y si $Pu \geq Pv$ en $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ con $u \leq v$ en $\mathcal{P}\Omega$ entonces

$$u \leq v \text{ en } \Omega.$$

Corolario 4.2 Supongamos $u, v \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si P es parabólica con respecto a u o v y $Pu > Pv$ en $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ con $u < v$ en $\mathcal{P}\Omega$, entonces $u < v$ en Ω .

Para detalles consultar [12] capítulo 14 sección 1.

Usando el principio del máximo y el principio de comparación enunciados arriba, podemos demostrar las siguientes propiedades:

Proposición 4.1 Sea H_1 y H_2 dos soluciones $\tilde{C}^{2,0}$ positivas de (12) en $Q = \mathbb{S}^n \times [0, T]$. Supongamos que $H_1(x, 0) \leq H_2(x, 0)$. Entonces, para $t > 0$, $H_1(x, t) \leq H_2(x, t)$, de hecho $H_1(x, t) < H_2(x, t)$ a menos que $H_1 = H_2$ en Q .

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos $H_\varepsilon(x, t) = (1 + \varepsilon)H_2(x, \delta t)$ en donde $\delta = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{n+1}}$. Entonces $H \equiv H_\varepsilon$ es solución del problema (12) con condición inicial $h = (1 + \varepsilon)h_2$ en donde $h > h_1$ ya que, como $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$h = H(x, 0) = (1 + \varepsilon)H_2(x, 0) > H_1(x, 0) = h_1.$$

Consideremos el conjunto

$$E = \{(x, t) : H(x, t) = H_1(x, t)\}$$

y suponemos $E \neq \emptyset$, entonces existe $t_1 = \min \{t : (x, t) \in E\}$ y sin pérdida de generalidad, suponemos que H y H_1 son iguales en $((0, -1), t_1) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$. Consideramos la restricción al hiperplano $x_{n+1} = -1$, recordando que $H(x, -1, t) = u(x, t)$, se tiene entonces que

$$u(0, t_1) = u_1(0, t_1)$$

y por hipótesis

$$u(x, t) \geq u_1(x, t) \quad \text{con } (x, t) \in \partial B_1 \times (0, t_1) \cup B_1 \times \{0\}.$$

Y con esto, como las soluciones son decrecientes, tenemos que

$$Pu_1(x, t) \geq Pu(x, t) \quad \text{con } (x, t) \in B_1 \times (0, t_1)$$

con P el operador parabólico no lineal dado por (13) y por Teorema 4.3.2 tenemos que

$$u \geq u_1 \quad \text{en } \overline{B_1} \times [0, t_1)$$

pero $u(0, t_1) = u_1(0, t_1)$ y por lo tanto

$$u(x, t) = u_1(x, t) \quad \text{en } \overline{B_1} \times [0, t_1)$$

lo cual es una contradicción ya que $t < t_1$ y t_1 era el tiempo mínimo en cumplir esta propiedad. Por lo tanto $E = \emptyset$. Y así $H(x, t) > H_1(x, t)$ para cualquier $(x, t) \in Q$. Y como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(x, t) = H_2(x, t)$$

se tiene que $H_2(x, t) \geq H_1(x, t)$ para cualquier $(x, t) \in Q$. Por último, suponiendo que $H_1 = H_2$ en $((0, -1), t_1) \in \mathbb{S}^n \times [0, T)$, por un argumento análogo al anterior se sigue que $H_1 = H_2$ en Q . ■

Por la Sección 4.3.1 existen soluciones a la ecuación (12) y por lo tanto a la ecuación (1).

Observación 4.2 *Nótese que la proposición anterior nos dice que las soluciones de (1) son únicas y decrecientes con el tiempo.*

Corolario 4.1 *Existe una única solución $\tilde{C}^{2,0}$ de (1) en $Q = \mathbb{S}^n \times [0, T^*)$ con $T^* > 0$ maximal.*

Demostración: Por la Sección 4.3.1 sabemos que la ecuación (1) tiene una solución para un tiempo corto, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que la solución existe en $[0, \varepsilon)$. Tomamos T^* tiempo maximal en el cual la solución está definida. Supongamos que está definida en $[0, T^*)$; por la existencia de soluciones para tiempo corto las soluciones existen en $[0, T^* + \varepsilon')$ lo cual es una contradicción ya que T^* era el tiempo maximal de existencia. Por lo tanto existe una solución $\tilde{C}^{2,0}$ de (1) en $Q = \mathbb{S}^n \times [0, T^*)$ con $T^* > 0$ maximal. Además si las soluciones son $\tilde{C}^{2,0}$ entonces son únicas y decrecientes con el tiempo por la Observación 4.2. ■

4.4 Estimaciones

En esta sección se darán estimaciones sobre las soluciones del problema (12), se supondrá a priori cierta regularidad para describir el comportamiento de las soluciones. Estas estimaciones jugarán un papel fundamental para estudiar las soluciones sobre un tiempo largo.

Proposición 4.2 *Sea K_0 la curvatura de Gauss-Kronecker de $X_0 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y sea $\delta = \min K_0 > 0$. Entonces, para una solución $\tilde{C}^{4,0}$, H , de 12 en Q , se tiene que*

$$-H_t \geq \delta \quad \text{en } \mathbb{S}^n \times [0, T].$$

Demostración: Sea $\delta' \in (0, \delta)$. Suponemos que $-H_t(y, t) - \delta' = 0$ para algún $(y, t) \in Q$. Sea t_1 el primer tiempo que tiene tal propiedad. Podemos suponer que (y, t_1) es el punto $((0, \dots, 0, -1), t_1)$. Y como en la demostración anterior, consideramos la restricción u de H al hiperplano $x_{n+1} = -1$, así u está únicamente determinada, y la convexidad uniforme de las soluciones en la restricción asegura la parabolicidad de la ecuación. Entonces la función

$$w = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}(u_t + \delta')$$

satisface $w \leq 0$ en $\partial B_1 \times [0, t_1) \cup B_1 \times \{0\}$ y

$$Lw = \delta' u^{\alpha\beta} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}(1 + |x|^2) - x_\alpha x_\beta}{(1 + |x|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \geq 0$$

en $B_1 \times [0, t_1)$ ya que $|x| \leq 1$. Expliquemos como obtener la expresión de Lw : tenemos por definición

$$\begin{aligned} Lw &= \frac{1}{u_t} \partial_t w + u^{\alpha\beta} (\partial_{x_\alpha x_\beta}^2 w) \\ &= \frac{1}{u_t} (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} u_{tt} + u^{\alpha\beta} (\partial_{x_\alpha x_\beta}^2 w) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \partial_{x_\beta x_\alpha}^2 w &= \partial_{x_\beta} \left((1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} x_\alpha (u_t + \delta') + (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} u_t \alpha \right) \\ &= \left(-(1 + |x|^2)^{-\frac{3}{2}} x_\alpha x_\beta + (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \delta_{\alpha\beta} \right) (u_t + \delta') + \\ &\quad (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} x_\beta u_{\alpha t} + (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} u_{\alpha\beta t}, \end{aligned}$$

además como supusimos que $-H_t(y, t) - \delta' = 0$ entonces $u_{tt} = 0$. Lo que implica

$$\begin{aligned} Lw &= ((1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} (u_t + \delta') \delta_{\alpha\beta} - (1 + |x|^2)^{-\frac{3}{2}} x_\alpha x_\beta (u_t + \delta') + \\ &\quad (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} x_\beta u_{\alpha t} + (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} u_{\alpha\beta t}) u^{\alpha\beta} \\ &= u^{\alpha\beta} \left((1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \delta' \delta_{\alpha\beta} - (1 + |x|^2)^{-\frac{3}{2}} x_\alpha x_\beta \delta' \right) \\ &= \delta' u^{\alpha\beta} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}(1 + |x|^2) - x_\alpha x_\beta}{(1 + |x|^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Como L es un operador parabólico, por principio de comparación $w \leq 0$ en $B_1 \times [0, t_1]$. Más aun, por principio fuerte del máximo y como $w(0, t_1) = 0$ concluimos que

$$w = 0 \text{ en } B_1 \times [0, t_1]$$

lo cual es una contradicción ya que t_1 era el primer tiempo tal que $w = 0$. Por lo tanto $-H_t \geq \delta$ en $\mathbb{S}^n \times [0, T]$ como se quería. \blacksquare

El siguiente teorema dice que si la solución $H \in \tilde{C}^{2,0}(Q)$ es acotada por abajo entonces está uniformemente acotada en $\tilde{C}^{2,0}(\bar{Q})$.

Teorema 4.3 *Supongamos que $H \in \tilde{C}^{2,0}(Q)$ es solución de (12). Si $H \geq r$ para algún $r > 0$ y es suave para $t > 0$, entonces existe un $C > 0$ tal que*

$$\|H\|_{\tilde{C}^{2,0}(\bar{Q})} \leq C.$$

En donde C solamente depende de $\sup K_0, \inf K_0, \|h\|_{C^{2,0}(\mathbb{S}^n)}, \|f\|_{C^{2,0}(\mathbb{S}^n)}$ y r .

Demostración: El objetivo de esta prueba es acotar

$$\|H\|_{\tilde{C}^{2,0}(Q)} = \sup_{(x,t) \in Q} \{|H(x,t)|, |D^1 H(x,t)|, |D^2 H(x,t)|, |\partial_t H(x,t)|\}.$$

Y la demostración se basa en acotar sobre Q cada término en el siguiente orden:

1. H ;
2. $D^1 H = \nabla H$;
3. $\partial_t H = H_t$;
4. $D^2 H = \nabla^2 H$.

4.4.1 Estimación para H

Primero que nada, tenemos el siguiente resultado del artículo [6]:

Proposición 4.3 *Sea M hipersuperficie compacta, convexa y de clase \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^{n+1} . Sea K la curvatura de Gauss definida para una función en \mathbb{S}^n . Entonces*

$$\text{diam}(M) \leq C(n) \left(\int_{\mathbb{S}^n} \frac{1}{K} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left[\inf_{u \in \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\langle u, w \rangle}{K(w)} \right]^{-1}.$$

Con la proposición anterior, como las soluciones del flujo son hipersuperficies de \mathbb{R}^{n+1} compactas convexas y por hipótesis de clase \mathcal{C}^2 , sabemos que las cotas de K_0 controlan el diámetro de M_0 , además las soluciones H son decrecientes en el tiempo y de esta forma podemos encontrar un $R > 0$ tal que $H \leq R$ en Q .

4.4.2 Estimación para ∇H

Por el apéndice de funciones convexas Proposición C.4 sabemos que si una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, se cumple que

$$\|\nabla f\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{2\|f\|_{L^\infty(\Omega')}}{\text{dist}(K, \partial\Omega')}$$

para cualquier $K \subset\subset \Omega' \subset \Omega$. Así, suponemos que $f = H$ es solución de (12), luego tomando la restricción al hiperplano $x_{n+1} = -1$ sabemos que $u = H|_{(x_1, x_2, \dots, x_n, -1, t)}$ es solución de (13) y además es convexa, por lo que para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(\Omega')}}{\text{dist}(K, \partial\Omega')}$$

para cualquier compacto $K \subset\subset \Omega' \subset \Omega$. Suponemos un compacto K tal que $\frac{1}{2R} \leq \text{dist}(K, \Omega')$ entonces, como $H \leq R$ en Q ,

$$|\nabla u| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(\Omega')}}{\text{dist}(K, \partial\Omega')} \leq 4R$$

y como podemos hacerlo para cualquier restricción tenemos que

$$|\nabla H| \leq 4R.$$

4.4.3 Estimación para H_t

Ahora estimamos $-H_t$. Sea K la curvatura de Gauss. Por la Proposición 4.2 tenemos que

$$-H_t \geq \delta = \min K_0 > 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{S}^n \times [0, T]$$

es decir, se tiene una cota uniforme por abajo dada por la curvatura de la superficie inicial, entonces solamente basta acotar $-H_t$ por arriba. Para esto consideramos

$$\varphi(x, t) = \frac{-H_t(x, t)}{H(x, t) - r'}$$

en donde $r' < r$ es dada. Primero supongamos que φ alcanza su máximo sobre Q en el punto $(0, 0, \dots, 0, -1, t_1)$ para $t_1 > 0$, de otra manera solamente hacemos una rotación para que lo alcance en ese punto y como es una transformación lineal continua entonces se mantienen las cotas. Mediante un cambio de coordenadas podemos asumir que $(u_{\alpha\beta})$ es diagonal en este punto y notemos que al restringirnos al hiperplano $(x_1, x_2, \dots, -1, t)$ y tomando en cuenta que $H(x_1, x_2, \dots, x_n, -1, t) = u(x, t)$

$$\varphi(x, t) = \frac{-u_t(x, t)}{u(x, t) - r'}.$$

Como φ alcanza su máximo en este punto tenemos que

$$\partial_{x_\alpha} \varphi(0, t_1) = 0, \quad (22)$$

por lo mismo observemos que

$$\partial_t \varphi(0, t_1) \geq 0 \quad (23)$$

y también, en sentido de matrices, tenemos que

$$0 \geq \partial_{x_\alpha x_\beta}^2 \varphi(0, t_1)$$

con $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$. Equivalentemente tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -u_{t\alpha} + u_t u_\alpha (u - r')^{-1} \\ 0 &\leq -u_{tt} + u_t u_t (u - r')^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

y además, en sentido de matrices,

$$\begin{aligned} 0 &\geq -u_{t\alpha\beta} + (u - r')(u_{t\alpha} u_\beta + u_{t\beta} + u_t u_\alpha) \\ &\quad + (u - r')^{-1} u_t u_{\alpha\beta} + 2(u - r')^{-2} (-u_t) u_\alpha u_\beta \\ &\quad + (u_t - (u - r')^{-1} u_t u) \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (25)$$

en el punto $(0, 0, \dots, 0, -1, t_1)$. Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{1}{u_{\alpha\alpha}}$ y sumando sobre todas las α tenemos que

$$0 \geq \frac{(n+1)u_t}{u - r'} + \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}} \right) (-u_t) \left(\frac{u}{u - r'} - 1 \right)$$

equivalentemente tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}} &\leq \frac{-(n+1)}{u - r'} u_t \left(\frac{1}{-u_t} \right) \frac{u - r'}{r'} \\ &= \frac{n+1}{r'} \end{aligned}$$

así tenemos que

$$-u_t \leq \frac{1}{(u_{11} \cdots u_{nn})} \quad (26)$$

$$\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}} \right)^n \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(n+1)^n}{n^n r'^n} \\ &\leq C_1 \end{aligned}$$

ya que $r' < r$ y r está dado. Por lo tanto

$$-u_t \leq C_1$$

en el punto $(0, 0, \dots, 0, -1, t_1)$. Ahora tenemos que $\varphi(x, t) \leq \varphi(0, t_1)$ porque supusimos que alcanzaba el máximo allí; con esto

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{-H_t(x, t)}{H(x, t) - r'} \\ &\leq \frac{-u_t(0, t_1)}{u(0, t_1) - r'} \\ &\leq \frac{C_1}{u(0, t_1) - r'} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} -H_t(x, t) &\leq \frac{C_1(H(x, t) - r')}{u(0, t_1) - r'} \\ &\leq \frac{C_1(R - r')}{u(0, t_1) - r'}, \end{aligned}$$

es decir, tomando $C = \frac{C_1(R - r')}{u(0, t_1) - r'}$,

$$-H_t \leq C \text{ en } Q. \tag{28}$$

4.4.4 Estimación para $\nabla^2 H$

Por lo explicado al final de la subsección 2.1 estimar $\nabla^2 H$ es equivalente a estimar el máximo radio de curvatura de la hipersuperficie determinada por la solución al flujo $H(x, t)$. Asumimos que su máximo R se alcanza en el polo sur, es decir en el punto $(0, -1, t_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, T]$ con tiempo $t_1 > 0$ en dirección de γ . Asumimos que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son las direcciones principales en este punto y $\gamma = (1, 0, \dots, 0)$. En otras palabras $H_{\alpha\beta}$ es diagonal en $(0, 0, \dots, 0, -1, t_1)$ y $H_{11} = R$. Consideramos la esfera determinada por

$$\tilde{H}(x) = R|x|^2$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como $\tilde{H}_{ij} = R$ o 0 entonces

$$\tilde{H}_{ij} - H_{ij} \geq 0$$

y considerando $u = H|_{(x_1, x_2, \dots, x_n, -1, t)}$ y $\tilde{u} = \tilde{H}|_{(x_1, x_2, \dots, x_n, -1, t)}$, las restricciones al hiperplano $x_{n+1} = -1$, tenemos que $\partial_{11}^2 \tilde{u} \geq \partial_{11}^2 u$ en \mathbb{R}^n . Sea $(x, t) \in \{(x, t) \in Q: x_{n+1} = -1\}$ definimos

$$\varphi(x, t) = \partial_{11}^2 u(x, t) \frac{(1 + |x|^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + |x|^2 - x_1^2}$$

tenemos entonces que $0 \geq \varphi - R$ y φ alcanza su máximo R en $(0, t_1)$. Tenemos que para φ en $(0, t_1)$

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= 0; \\ \varphi_{\alpha\beta} &\leq 0; \\ \varphi_t &\geq 0.\end{aligned}$$

con esto observamos que

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_\alpha = (u_{11})_\alpha \\ 0 &\geq (u_{11})_{11} + 3R \\ 0 &\geq (u_{11})_{\beta\beta} + R, \beta > 1 \\ 0 &\leq \varphi_t = u_{11t}.\end{aligned}$$

En general para soluciones a (13) tenemos por la ecuación (21) de la Sección 4.2 que

$$Lu_{11} \geq (\log f)_{11}.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{u_t} u_{t11} + u^{\alpha\beta} \partial_{x_\alpha x_\beta}^2 u_{11} = \frac{(u_{11})_t}{u_t} + u^{\alpha\alpha} (u_{11})_{\alpha\alpha} \geq (\log f)_{11}.$$

Por lo tanto

$$\frac{(u_{11})_t}{u_t} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}} \geq (\log f)_{11} - \frac{1}{2}(n+1).$$

Por la fórmula anterior aplicada al punto $(0, t_1)$ y como $0 \leq \varphi_t = u_{11t}$ y $(\log f)_{11} > 0$ tenemos que

$$\frac{1}{2}(n+1) \geq (\log f)_{11} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}} - \frac{(u_{11})_t}{u_t} \geq - \sum_{\alpha=1}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}}$$

pero

$$- \sum_{\alpha=1}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}} = - \left(\frac{(u_{11})_{11}}{u_{11}} + \sum_{\alpha=2}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}} \right)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{(u_{11})_{11}}{u_{11}} + \sum_{\alpha=2}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}}\right) &\geq \frac{3R}{u_{11}} - \sum_{\alpha=2}^n \frac{(u_{11})_{\alpha\alpha}}{u_{\alpha\alpha}} \\
&\geq \frac{3R}{u_{11}} + \sum_{\alpha=2}^n \frac{R}{u_{\alpha\alpha}} \\
&\geq R \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}}
\end{aligned}$$

en $(0, t_1)$. Ahora mostramos que en $(0, t_1)$

$$R \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}} \geq (n-1)R^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{u_{11} \cdots u_{nn}}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Esto porque por la desigualdad aritmética-geométrica tenemos que

$$\left(\frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}}\right)^{n-1} \geq \frac{1}{u_{22} \cdots u_{nn}}$$

con además $u_{11} = R$ (ya que $\varphi = R$ en $(0, t_1)$). Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
R \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{u_{\alpha\alpha}} &\geq (n-1)R^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{u_{11} \cdots u_{nn}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\geq (n-1)R^{\frac{n}{n-1}} \delta^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

en donde esto último lo tenemos ya que, por (4.2), $-u_t$ tiene una cota uniforme por abajo y la cota es δ . Así

$$\frac{1}{2}(n+1) \geq (n-1)R^{\frac{n}{n-1}} \delta^{\frac{1}{n-1}},$$

lo que implica

$$R^{\frac{n}{n-1}} \leq \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-1} \delta^{\frac{1}{1-n}}$$

y por lo tanto

$$R \leq C\delta^{-\frac{1}{n}}$$

en el punto $(0, t_1)$ en la dirección γ . Este resultado lo tenemos, por la misma cuenta, para la restricción a cualquier hiperplano $x_i = -1$ para $i \in \{0, \dots, n+1\}$ y cualquier dirección γ_i . Además tomamos

$$\tilde{R} = \max_{\substack{t=0 \\ p, \xi \in \mathbb{S}^n}} R(p, \xi)$$

es decir, el máximo radio principal de curvatura para cualquier punto y dirección en la hipersuperficie inicial X_0 , como las soluciones son decrecientes en el tiempo cualquier radio principal está acotado por \tilde{R} , a consecuencia

$$R \leq C\delta^{-\frac{1}{n}} + \tilde{R}. \quad (29)$$

Con esto tenemos que

$$\|H\|_{\tilde{C}^{2,0}(\bar{Q})} \leq C$$

en donde C solamente depende de $\sup K_0, \inf K_0, \|h\|_{C^{2,0}(\mathbb{S}^n)}$ y $\|f\|_{C^{2,0}(\mathbb{S}^n)}$ como se quería. ■

Observación 4.3 *Obtuvimos de la Sección 4.4.4 la existencia de una constante $C > 0$ tal que*

$$u_{\alpha\beta} \leq C \quad (30)$$

en sentido de matrices. Por otro lado, por (28) y por Proposición 4.2 existen $C_1, \delta > 0$ tales que

$$\delta \leq -u_t \leq C_1.$$

De la ecuación parabólica (13) sobre u deducimos que $\det(D^2u)$ es acotada por abajo por una constante positiva; pero esta cota y (30) implican fácilmente que $u_{\alpha\beta}$ es también acotado por abajo por una constante positiva, es decir existe $c > 0$ tal que

$$u_{\alpha\beta} \geq c \quad (31)$$

también en sentido de matrices. Así para $\sigma \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\sigma| = 1$ tenemos que

$$\delta C^{-1} \leq -u_t u^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta \leq C_1 c^{-1},$$

y por lo tanto existe $\mu > 0$ tal que

$$\mu^{-1} \leq -u_t u^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta \leq \mu,$$

es decir la Ecuación (13) es uniformemente parabólica.

Observación 4.4 *La desigualdad (29) no depende de r^{-1} . Esto nos dice que la curvatura de Gauss para cualquier hipersuperficie solución de (1) tiene cota positiva uniforme por abajo.*

Obtuvimos estimaciones C^2 de las soluciones en el Teorema 4.3. A consecuencia de estas estimaciones podemos obtener estimaciones $C^{2,\beta}$ de las soluciones: es consecuencia de las estimaciones de Evans y Krylov; para estas estimaciones en general se puede consultar [12]. Tenemos

Teorema 4.4 *Supongamos $H(x,t) \in \tilde{C}^{4,0}(Q)$ solución de (2) y $H \geq r > 0$. Entonces, para todo $t > 0$, $\exists C > 0$ y $\beta > 0$ tal que para $Q_t = \mathbb{S}^n \times [t, T]$,*

$$\|H_t\|_{C^{0,\beta}(\overline{Q}_t)} + \|\nabla^2 H\|_{C^{0,\beta}(\overline{Q}_t)} \leq C.$$

En donde β y C solamente dependen de $\mu, \|f\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^n)}$ y t .

5 Tiempo de vida de la deformación

Queremos aproximar el tiempo de vida de la solución. Para esto definimos, para cualquier $u: \mathbb{R}^n \times (0, s) \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase \mathcal{C}^2 ,

$$\begin{aligned} \phi_u: \mathbb{R}^n \times (0, s) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, t) &\longmapsto (u_1, \dots, u_n, x^i u_i - u) \end{aligned}$$

en donde $u_i = \partial_{x_i} u$. Desarrollando la matriz, es fácil observar que

$$\det(D\phi_u) = -u_t \det\left(\{u_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \{1,\dots,n\}}\right).$$

Supongamos que u es solución de (13) la cual determina una hipersuperficie estrictamente convexa para todo $t \in [0, T]$. Sea $E \subset \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} < 0\}$ y

$$E' = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{(x_1, \dots, x_n, -1)}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} \in E \right\}.$$

Por (8) tenemos que $\phi_u(E' \times \{0\}) \subset \Sigma_t$ ya que todas sus imágenes están dadas por la transformada de Legendre la cual puede ser vista como la función soporte de cada hipersuperficie Σ_t , véase Apéndice D. Así el volumen entre $\phi_u(E' \times \{0\})$ y $\phi_u(E' \times \{t\})$ está dado por

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\phi_u(E')} d\mu(\Sigma_t) &= \int_0^t \int_{E'} \left((-u_t \det\left(\{u_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \{1,\dots,n\}}\right)) \right) dx_1 \cdots dx_n dt \\ &= \int_0^t \int_{E'} (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}(n+1)} f(x, -1) dx_1 \cdots dx_n dt \\ &= t \int_E f d\sigma \end{aligned}$$

ya que u es solución del problema (13) y en donde $d\sigma$ el elemento de superficie en \mathbb{S}^n . Así el volumen de la deformación decrece linealmente. Además, nótese que la ecuación anterior es la forma integral de (12). Ahora, si tomamos $E = \mathbb{S}^n$ entonces

$$vol(t) = V_0 - t \int_{\mathbb{S}^n} f \quad (32)$$

en donde $vol(t)$ es el volumen de la hipersuperficie en t y V_0 es el volumen inicial. En el caso $f = 1$ entonces

$$vol(t) = V_0 - \sigma_n t;$$

por esto, observamos que si $t \rightarrow \frac{V_0}{\sigma_n}$ entonces $vol(t) \rightarrow 0$ para soluciones de (1). Esto tiene consecuencias importantes como se verá en la siguiente demostración.

5.1 Conclusión

Teorema 5.1 *Supongamos f y h como la Observación 4.1 y tales que cumplen la ecuación diferencial parcial (12), es decir*

$$\begin{aligned} -H_t \det(H_{\alpha\beta} + H\delta_{\alpha\beta}) &= f(x) \text{ con } f > 0 \\ H(x, 0) &= h(x) \text{ con } x \in \mathbb{S}^n. \end{aligned}$$

Estas son extendidas como funciones homogéneas de grado 0 y 1 sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ respectivamente. Se tiene que este problema tiene una única solución $H \in \tilde{C}^{2,\beta}(\mathbb{S}^n \times [0, T^))$ con $T^* = \frac{vol(\Sigma_0)}{\int_{\mathbb{S}^n} f}$. Para cada $t \geq 0$ tenemos que $H(\cdot, t): \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ determina una hipersuperficie estrictamente convexa $X: \mathbb{S}^n \times [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ en donde la hipersuperficie $X(\cdot, t): \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ está contenida en el interior de $X(\cdot, t'): \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ para $t' > t$. Más aún, cuando $t \rightarrow T^*$, la hipersuperficie $X(\cdot, t): \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por la solución del flujo se contrae a un punto.*

Demostración: Por el Corolario 4.1 tenemos la existencia de una única solución maximal $H: \mathbb{S}^n \times [0, T^*) \rightarrow (0, +\infty)$ al problema

$$\begin{aligned} -H_t \det(H_{\alpha\beta} + H\delta_{\alpha\beta}) &= f(x), & f > 0 \\ H(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{S}^n; \end{aligned}$$

además, por lo visto en la Sección 5, tenemos $T^* \leq \frac{vol(\Sigma_0)}{\int_{\mathbb{S}^n} f}$. Mostremos por contradicción que la solución maximal está definida hasta el tiempo $\frac{vol(\Sigma_0)}{\int_{\mathbb{S}^n} f}$, i.e. supongamos $T^* < \frac{vol(\Sigma_0)}{\int_{\mathbb{S}^n} f}$. Por la fórmula (32), tenemos, para todo $t \in [0, T^*)$ se cumple que $vol(\Sigma_t) \geq \frac{vol(\Sigma_0)}{\int_{\mathbb{S}^n} f} - T^* > 0$. Además, podemos encontrar una esfera \mathbb{S}_r de radio $r > 0$ independiente de t tal que \mathbb{S}_r está contenida en la región encerrada por Σ_t para

cualquier $t < T^*$. Podemos suponer además la esfera centrada en cero ya que una traslación del origen en \mathbb{R}^{n+1} sólo cambia la función soporte $H(\cdot, t)$ por la adición de un término lineal, y nuestras estimaciones $C^{2,\beta}$ del Teorema 4.4 siguen siendo válidas: existe por lo tanto una cota de la norma de H en $\tilde{C}^{2,\beta}(\mathbb{S}^n \times [\frac{T^*}{2}, T^*])$. El punto crucial es que la cota no depende de $t \in [\frac{T^*}{2}, T^*]$. Ahora, en el teorema de existencia local de una solución, a saber Teorema 4.2, el tiempo de existencia depende solamente de la cota $\tilde{C}^{2,\beta}$ de la condición inicial. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que la solución está definida en $[0, T^* + \varepsilon)$, pero esto es una contradicción ya que supusimos T^* maximal. Hemos probado por lo tanto que $T^* = \frac{\text{vol}(\Sigma_0)}{\int_{\mathbb{S}^n} f}$.

Falta demostrar que la singularidad del flujo de curvatura de Gauss solamente es un punto, es decir que la hipersuperficie $X : \mathbb{S}^n \times [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tiende a un punto cuando $t \rightarrow T^*$. Sea $\bar{X}(t)$ el cuerpo convexo acotado por $X(\cdot, t) : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, como las soluciones son decrecientes tenemos que $\bar{X}(t') \subseteq \bar{X}(t)$ para $t' \geq t$. Suponemos que $\bigcap_{t \geq 0} \bar{X}(t)$ no es un punto y sea

$$\text{diam} \bigcap_{t \geq 0} \bar{X}(t) = d(z_1, z_2) = l,$$

para $z_1, z_2 \in \bigcap_{t \geq 0} \bar{X}(t)$; como el volumen de $\bar{X}(t)$ tiende a cero si t tiende a T^* , la intersección de $\bar{X}(t)$ con algún plano que contiene el segmento $z_1 z_2$ tiene un área que tiende a cero si t tiende a T^* . Entonces, a lo largo de la frontera de la intersección, el cual es un conjunto convexo en \mathbb{R}^{n+1} , debe haber puntos con curvatura arbitrariamente pequeña, lo cual es una contradicción a la Proposición 4.2 en donde se demuestra que la curvatura, en cualquier dirección y tiempo positivo, tiene una cota positiva y uniforme por debajo. Por lo tanto $X : \mathbb{S}^n \times [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tiende a un punto cuando $t \rightarrow T^*$. ■

5.2 Más regularidad para las soluciones

El siguiente resultado puede ser encontrado en [12] y [10]:

Teorema 5.2 *Sea $H \in \tilde{C}^{2,\varepsilon}(\mathbb{S}^n \times [0, T])$ una solución de (2) para $\varepsilon > 0$. Supongamos que $f \in \mathbb{C}^{k,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ (ó analítica). Entonces para $t > 0$, $H \in \tilde{C}^{k+2,\alpha}(\mathbb{S}^n \times [t, T])$ (ó $H(x, t)$ es suave y $H(\cdot, t)$ es analítica para $t > 0$).*

Observación 5.1 *El Teorema 5.1 nos dice que tenemos una solución $H \in \tilde{C}^{2,\beta}(\mathbb{S}^n \times [0, T^*))$; con la suposición que $f \in \mathbb{C}^{k,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ tenemos por el Teorema 5.2 que $H \in \tilde{C}^{k+2,\alpha}(\mathbb{S}^n \times (0, T^*))$. Por otra parte, si suponemos que f es analítica, tenemos que $H(x, t)$ es suave y $H(\cdot, t)$ es analítica para $t > 0$.*

Con lo que queda demostrado el Teorema 1 en el caso de \mathbb{R}^n .

6 Resultado para el caso en \mathbb{R}^3

6.1 Resultado

Ahora hacemos una restricción para el flujo. Nos restringimos al espacio \mathbb{R}^3 . Observaremos que la solución del flujo, a partir de cierto tiempo, es esencialmente una esfera. Formalmente tenemos el resultado siguiente:

Teorema 6.1 *Sea $X_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una hipersuperficie, suave, cerrada y estrictamente convexa. Supongamos que se cumple la ecuación*

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(x, t) &= -K(x, t)N(x, t) \\ X(x, 0) &= X_0(x) \end{aligned} \quad (33)$$

como en el Teorema 1. Entonces rescalando alrededor de q , tenemos

$$\hat{x}(x, t) = \frac{X(x, t) - q}{3(T^* - t)^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \hat{x}(x, T^*)$$

en \mathcal{C}^∞ , cuando $t \rightarrow T^*$ y en donde $\hat{x}(\cdot, T^*)$ es un encage suave $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de imagen la esfera \mathbb{S}^2 .

Observación 6.1 *De aquí en adelante se denotará λ_i las curvaturas principales asociadas a las hipersuperficies solución del flujo de curvatura. Se denotará $h_i^j = g^{jk}h_{ki}$ la transformación de Weingarten en donde g y h son la métrica y la segunda forma fundamental respectivamente, definidas por*

$$g_{ij} = \langle \partial_i X, \partial_j X \rangle$$

y

$$h_{ij} = \langle \partial_{ij}^2 X, N \rangle$$

respecto a coordenadas locales y N el normal unitario que apunta hacia afuera. Además denotamos $\dot{K}^{ij} = \partial_{h_{ij}} K = K(h^{-1})^{ij}$ y $\ddot{K}^{klmn} = \partial_{h_{kl}h_{mn}}^2 K$.

6.2 Ecuaciones de evolución

Usando la notación dada por la Observación 6.1 tenemos

Proposición 6.1 *Se cumplen las siguientes ecuaciones de evolución para la ecuación del flujo de curvatura de Gauss:*

1. $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2Kh_{ij};$

$$2. \frac{\partial}{\partial t} K = \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l K + K^2 \mathcal{H}.$$

$$3. \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} = \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l H + g^{ij} \dot{K}^{klmn} \nabla_i h_{kl} \nabla_j h_{mn} + K \mathcal{H}^2 - K |A|^2$$

en donde $|A|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

Demostración: Supongamos f solución de la ecuación (1). Así primero observamos que:

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= \partial_t \langle \nabla_i f, \nabla_j f \rangle \\ &= \langle \partial_t \nabla_i f, \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_i f, \partial_t \nabla_j f \rangle \\ &= \langle \nabla_i \partial_t f, \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_i f, \nabla_j \partial_t f \rangle \end{aligned}$$

pero tenemos que f es solución al sistema de ecuaciones (1), es decir, $\partial_t f = -NK$ con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= \langle \nabla_i (-KN), \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_i f, \nabla_j (-KN) \rangle \\ &= -(\langle \partial_i KN, \nabla_j f \rangle + \langle K \nabla_i N, \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_i f, N \partial_j K \rangle + \langle \nabla_i f, K \nabla_j N \rangle) \end{aligned}$$

pero $\langle N \partial_j K, \nabla_j f \rangle = \partial_j K \langle N, \nabla_j f \rangle = 0$ ya que $\nabla_i f \in T_p \Sigma_t$ para cualquier $p \in \Sigma_t$, por lo que

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= -K(\langle \nabla_i N, \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_j N, \nabla_i f \rangle) \\ &= -[K \langle \nabla_i \nabla_j f, N \rangle + K \langle N, \nabla_j \nabla_i f \rangle] \\ &= -2Kh_{ij} \end{aligned}$$

y la última igualdad es ya que

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\langle N, \nabla_i \nabla_j f \rangle \\ &= \langle \nabla_i N, \nabla_j f \rangle + \partial_{x_i} \langle N, \nabla_j f \rangle \\ &= \langle \nabla_i N, \nabla_j f \rangle. \end{aligned}$$

De esta forma queda demostrado el inciso (1). Para el (2), primero observamos que

$$\partial_t (h_{ij}) = \nabla_i \nabla_j K - Kh_{im} h_j^m \quad (34)$$

y esto ya que

$$\begin{aligned}
\partial_t h_{ij} &= \partial_t \langle \nabla_i \nabla_j f, N \rangle \\
&= \langle \nabla_i \nabla_j \partial_t f, N \rangle + \langle \nabla_i \nabla_j f, \partial_t N \rangle \\
&= \langle \nabla_i \nabla_j (KN), N \rangle + \langle h_{ij} N, \partial_t N \rangle \\
&= \langle \nabla_i [\nabla_j K \cdot N + K \nabla_j N], N \rangle + \langle h_{ij} N, \partial_t N \rangle \\
&= \langle \nabla_i \nabla_j (K) N, N \rangle + \nabla_j K \langle \nabla_i N, N \rangle + \nabla_i K \langle \nabla_j N, N \rangle \\
&\quad + K \langle \nabla_i \nabla_j N, N \rangle + \langle h_{ij} N, \partial_t N \rangle \\
&= \nabla_i \nabla_j K + K \langle \nabla_i \nabla_j N, N \rangle \\
&= \nabla_i \nabla_j K - K \langle \nabla_j N, \nabla_i N \rangle \\
&= \nabla_i \nabla_j K - K h_{im} h_j^m.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que

$$K = \det h_{ij} \det g^{kl}$$

lo que implica que

$$\log K = \log \det h_{ij} + \log \det g^{kl}$$

por lo tanto tenemos, aplicando la Fórmula (17),

$$\begin{aligned}
\partial_t K &= K \partial_t [\log \det h_{ij} + \log \det g^{kl}] \\
&= K (b^{ij} \partial_t h_{ij} + g^{kl} \partial_t g^{kl})
\end{aligned} \tag{35}$$

en donde $b^{ij} = (h^{-1})^{ij}$ es decir $b^{ij} h_{jk} = \delta_k^i$. Antes de seguir observamos que

$$\partial_t (g^{kl}) = 2K h^{kl} \tag{36}$$

ya que

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t (\delta_i^j) = \partial_t (g^{kl} g_{li}) \\
&= (\partial_t g^{kl}) g_{li} + g^{kl} (\partial_t g_{li})
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\partial_t g^{kl}) g_{li} = -g^{kl} (\partial_t g_{li}).$$

Así por la primera identidad

$$\begin{aligned}
\partial_t (g^{kl}) &= -g^{kl} g^{li} (\partial_t g_{ni}) \\
&= -g^{kl} g^{li} (-2K h_{li}) \\
&= 2K g^{kl} g^{li} h_{li} \\
&= 2K g^{kl} g_{li} h^{li} \\
&= 2K \delta_i^k h^{li} = 2K h^{kl}.
\end{aligned}$$

Entonces por (35) se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_t K &= K(b^{ij}\partial_t h_{ij} + g_{kl}\partial_t g^{kl}) \\ &= K(b^{ij}(\nabla_i \nabla_j K - K h_{im} h_j^m) + g_{kl}\partial_t g^{kl})\end{aligned}$$

distribuyendo, usando la formula (36) y como $b^{ij}h_{jk} = \delta_k^i$ se sigue que

$$\begin{aligned}\partial_t K &= K b^{ij} \nabla_i \nabla_j K - K^2 b^{ij} h_{im} h_j^m + 2K^2 h^{kl} g_{kl} \\ &= K b^{ij} \nabla_i \nabla_j K + 2K^2 \mathcal{H} - K^2 \delta_m^j h_j^m \\ &= K b^{ij} \nabla_i \nabla_j K + 2K^2 \mathcal{H} - K^2 \mathcal{H} \\ &= K b^{ij} \nabla_i \nabla_j K + K^2 \mathcal{H}\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el inciso (2). Para la demostración del inciso (3) véase [11]. \blacksquare

Observación 6.2 *Nótemos que*

$$\mathcal{H}^2 - |A|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 2\lambda_1 \lambda_2 = 2K$$

por lo que

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{H} &= \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H} + g^{ij} \ddot{K}^{klmn} \nabla_i h_{kl} \nabla_j h_{mn} + K(\mathcal{H}^2 - |A|^2) \\ &= \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H} + g^{ij} \ddot{K}^{klmn} \nabla_i h_{kl} \nabla_j h_{mn} + 2K^2 \\ &= \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H} + g^{ij} \ddot{K}(\nabla_i h, \nabla_j h) + 2K^2.\end{aligned}\tag{37}$$

6.3 Estimaciones para las curvaturas principales

Recordemos que $\Sigma_t := X(\mathbb{S}^2, t)$ para cualquier $t \in [0, T^*)$ dado.

Teorema 6.2 *Sea $X : \mathbb{S}^2 \times [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una solución suave, estrictamente convexa del flujo de curvatura de Gauss. Entonces*

$$\sup_{\Sigma_t} |\lambda_1(p, t) - \lambda_2(p, t)| \leq \sup_{\Sigma_0} |\lambda_1(p, 0) - \lambda_2(p, 0)|.$$

Demostración: Consideramos $Q = \mathcal{H}^2 - 4K = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Notese que por las formulas

$$\begin{aligned}\partial_t Q &= 2\mathcal{H} \partial_t \mathcal{H} - 4\partial_t K \\ &= 2\mathcal{H} \left(\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l K + g^{ij} \ddot{K}(\nabla_i h, \nabla_j h) + 2K^2 \right) - 4 \left(\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l K + K^2 \mathcal{H} \right) \\ &= 2\mathcal{H} \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l K - 4\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l K + 2\mathcal{H} g^{ij} \ddot{K}(\nabla_i h, \nabla_j h).\end{aligned}\tag{38}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_l Q &= \nabla_k \nabla_l (\mathcal{H}^2 - 4K) \\ &= \nabla_k (2\mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H} - 4\nabla_l K) \\ &= 2\nabla_k \mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H} + 2H \nabla_k \nabla_l \mathcal{H} - 4\nabla_k \nabla_l \mathcal{H}\end{aligned}$$

entonces

$$\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l Q = 2\dot{K}^{kl} \nabla_k \mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H} + 2\dot{K}^{kl} \mathcal{H} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H} - 4\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H}$$

por lo tanto

$$\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l Q - 2\dot{K}^{kl} \nabla_k \mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H} = 2\mathcal{H} \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H} - 4\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l \mathcal{H}.$$

y de la formula (38) se deduce que

$$\partial_t Q = \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l Q - 2\dot{K}^{kl} \nabla_k \mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H} + 2\mathcal{H} g^{ij} \ddot{K}(\nabla_i h, \nabla_j h). \quad (39)$$

Ahora consideremos

$$Q_\varepsilon = Q - \varepsilon t,$$

fiemos $T \in (0, T^*)$ y supongamos por contradicción que $Q_\varepsilon : \mathbb{S}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo en (p_0, t) , en un tiempo $t \in (0, T]$. Elegimos coordenadas para Σ_t cerca de $p = X(p_0, t)$ tales que $g_{ij}(p, t) = \delta_i^j$ y $h(p, t)$ es diagonal. Observemos que

$$\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l Q \leq 0$$

ya que $\dot{K}^{kl} = K(h^{-1})^{kl} > 0$ porque $g_{ij}(p, t) = \delta_i^j$ y $\nabla^2 Q \leq 0$ ya que Q_ε alcanza su máximo en (p, t) . Ahora, como $\nabla Q = 0$ en p , entonces

$$\begin{aligned}0 = \nabla_1 Q &= 2\mathcal{H} \nabla_1 \mathcal{H} - 4\nabla_1 K \\ &= 2(\lambda_1 + \lambda_2)(\nabla_1 h_{11} + \nabla_1 h_{22}) - 4\lambda_2 \nabla_1 h_{11} - 4\lambda_1 \nabla_1 h_{22} \\ &= 2\lambda_1 \nabla_1 h_{11} + 2\lambda_1 \nabla_1 h_{22} + 2\lambda_2 \nabla_1 h_{11} + 2\lambda_2 \nabla_1 h_{22} - 4\lambda_2 \nabla_1 h_{11} - 4\lambda_1 \nabla_1 h_{22} \\ &= 2\lambda_1 \nabla_1 h_{11} + 2\lambda_2 \nabla_1 h_{22} - 2\lambda_2 \nabla_1 h_{11} - 2\lambda_1 \nabla_1 h_{22} \\ &= 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\nabla_1 h_{11} - \nabla_1 h_{22}).\end{aligned}$$

Aquí tenemos dos casos. Primero, si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces $Q = 0$ por lo que $Q_\varepsilon < 0$, lo que es imposible ya que supusimos Q_ε máximo en p (en $t = 0$ $Q_\varepsilon = Q \geq 0$). Por lo que $\nabla_1 h_{11} = \nabla_1 h_{22}$ en el punto p . Por la misma cuenta tenemos que

$$0 = \nabla_2 Q = 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\nabla_2 h_{11} - \nabla_2 h_{22})$$

y por un argumento como el anterior $\nabla_2 h_{11} = \nabla_2 h_{22}$ en el punto p . Así

$$\begin{aligned}\dot{K}(\nabla_1 h, \nabla_1 h) &= 2\nabla_1 h_{11} \nabla_1 h_{22} - 2(\nabla_1 h_{12})^2 \\ &= 2(\nabla_1 h_{11})^2 - 2(\nabla_2 h_{11})^2 \\ &= 2(\nabla_1 h_{11})^2 - (\nabla_2 h_{22})^2.\end{aligned}$$

en donde la igualdad de en medio es por Codazzi, a saber $\nabla_1 h_{12} = \nabla_2 h_{11}$, y la ultima igualdad es ya que $\nabla_1 h_{11} = \nabla_1 h_{22}$ en el punto p . Con el mismo argumento se sigue que

$$\dot{K}(\nabla_2 h, \nabla_2 h) = 2(\nabla_2 h_{22})^2 - 2(\nabla_1 h_{11})^2.$$

Así en el punto p , tenemos

$$2Hg^{ij}\ddot{K}(\nabla_i h, \nabla_j h) = 2H(\ddot{K}(\nabla_1 h, \nabla_1 h) + \ddot{K}(\nabla_2 h, \nabla_2 h)) = 0$$

por lo tanto de la ecuación (39) tenemos que

$$\partial_t Q_\varepsilon + \varepsilon = \dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l Q - 2\dot{K}^{kl} \nabla_k \mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H}.$$

Además, como $\partial_t Q_\varepsilon \geq 0$ en (p, t) y

$$\dot{K}^{kl} \nabla_k \nabla_l Q, \quad -2\dot{K}^{kl} \nabla_k \mathcal{H} \nabla_l \mathcal{H} \leq 0$$

obtenemos una contradicción. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{S}^2$ y $t \geq 0$, $\sup_{\Sigma_0} Q_\varepsilon \geq Q_\varepsilon(p, t)$ es decir

$$\sup_{\Sigma_0} Q \geq Q(p, t) - \varepsilon t.$$

Tomando finalmente el límite cuando ε tiende a 0, se deduce que

$$\sup_{\Sigma_0} Q \geq \sup_{\Sigma_t} Q,$$

es decir lo que se quería demostrar. ■

6.4 Convergencia a encaje suave

En esta sección se concluirá el encaje a la esfera de radio 1 para la ecuación del flujo rescalada.

Teorema 6.3 *Sea $X : \mathbb{S}^2 \times [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una solución del flujo de curvatura de Gauss, entonces existe $q \in \mathbb{R}^3$ tal que para cualquier dirección $p \in \mathbb{S}^2$ se cumple*

$$\left| \langle X(p, t) - q, N(p, t) \rangle - \frac{1}{8\pi} \int_{X(\cdot, t)} \mathcal{H} d\mu \right| \leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t),$$

en donde $A(\Sigma_t)$ es el área de la superficie Σ_t , $N(p, t)$ es el vector normal unitario a p en Σ_t y $C = \sup_{\Sigma_0} |\lambda_1(p, 0) - \lambda_2(p, 0)|$.

Para demostrar este consideramos $H : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función soporte de M hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} , definida como

$$H(z') = \sup_{y \in \Sigma_t} \langle y, z' \rangle. \quad (40)$$

Nótese que por la fórmula (2.14) de [2] se tiene que para cualquier $z \in \mathbb{S}^2$

$$h^{-1}(e_z, e_z) = \partial_{\theta}^2 H + H. \quad (41)$$

en donde $e_z(p) = \frac{d}{dt} N^{-1} \gamma(t) \Big|_{t=0}$ en donde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una geodésica tal que $\gamma(0) = z = N(p, t)$ y $N : \Sigma_t \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la aplicación de Gauss. Además tenemos

$$\langle y, N(y) \rangle = H(N(y)) \quad (42)$$

es decir, el supremo en (40) se alcanza en el punto $y \in \Sigma_t$ tal que $N(y) = z'$. Ahora para cada $z' \in \mathbb{S}^2$ definimos

$$w(z') = H(z') + H(-z') \quad (43)$$

la función anchura de M . Dado esto tenemos el siguiente lema:

Lema 6.1 *Sea M una superficie compacta, suave y estrictamente convexa, y definimos $G = \frac{1}{4\pi} \int_M Kx d\mu$. Sea $x \in M$, y $z = N(x)$. Entonces*

$$\langle x - G, z \rangle = \frac{1}{2} w(z) + \frac{1}{4\pi} \int_M \dot{K}(e_z, e_z) \langle N, z \rangle d\mu$$

en donde e_z es como antes.

Demostración: Veremos qué pasa para \mathbb{S}^2 , eligiendo coordenadas angulares $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$ tales que z tiene coordenadas $\theta = 0$. En estos términos definimos

$$q := \frac{3}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H(z') z' d\mu(z'). \quad (44)$$

y calculando la siguiente integral en coordenadas θ y ϕ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle q, z \rangle &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H(z') \langle z, z' \rangle d\mu(z') \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H(\theta, \phi) \sin 2\theta d\theta d\phi, \end{aligned}$$

esto último por la identidad $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$. Ahora nótese que

$$\partial_{\theta\theta}^2 \sin 2\theta + \sin 2\theta = -3 \sin 2\theta$$

y de aquí tenemos que

$$\langle q, z \rangle = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H(\theta, \phi) (\partial_{\theta\theta}^2 \sin 2\theta + \sin 2\theta) d\theta d\phi :$$

ahora nótese que

$$\int_0^\pi H(\theta, \phi) \partial_{\theta\theta}^2 \sin 2\theta d\theta = - \int_0^\pi \partial_\theta H(\theta, \phi) \partial_\theta \sin 2\theta d\theta + H(\theta, \phi) \partial_\theta \sin 2\theta \Big|_0^\pi$$

pero $\partial_\theta \sin 2\theta = 2 \cos 2\theta$, entonces

$$\begin{aligned} H(\theta, \phi) \partial_\theta \sin 2\theta \Big|_0^\pi &= 2s(\pi, \phi) \cos 2\pi - 2s(0, \phi) \cos 0 \\ &= 2H(\pi, \phi) - 2H(0, \phi) \\ &= 2(H(-z) - H(z)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\pi H(\theta, \phi) \partial_{\theta\theta}^2 \sin 2\theta d\theta &= - \int_0^\pi \partial_\theta H(\theta, \phi) \partial_\theta \sin 2\theta d\theta + 2(H(-z) - H(z)) \\ &= \int_0^\pi \partial_{\theta\theta}^2 H(\theta, \phi) \sin 2\theta d\theta + 2(H(-z) - H(z)) \\ &\quad + \partial_\theta H(\theta, \phi) \sin 2\theta \Big|_0^\pi \\ &= \int_0^\pi \partial_{\theta\theta}^2 H(\theta, \phi) \sin 2\theta d\theta + 2(H(-z) - H(z)). \end{aligned}$$

Esto último ya que $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \langle q, z \rangle &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H(\theta, \phi) (\partial_{\theta\theta}^2 \sin 2\theta + \sin 2\theta) d\theta d\phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\partial_{\theta\theta}^2 H(\theta, \phi) + H(\theta, \phi)) \sin 2\theta d\theta d\phi \\ &\quad - \frac{2}{8\pi} \int_0^{2\pi} (H(-z) - H(z)) d\phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\partial_{\theta\theta}^2 H(\theta, \phi) + H(\theta, \phi)) \sin 2\theta d\theta d\phi - \frac{4\pi}{8\pi} (H(-z) - H(z)) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\partial_{\theta\theta}^2 H(\theta, \phi) + H(\theta, \phi)) \sin 2\theta d\theta d\phi - \frac{1}{2} H(-z) + \frac{1}{2} H(z) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} h^{-1}(e_z, e_z) \langle z, z' \rangle d\mu(z') + \frac{1}{2} H(z) - \frac{1}{2} H(-z). \end{aligned}$$

Esto último por (41). Ahora por la formula (42) se sigue que $\langle x, z \rangle = \langle x, v(x) \rangle = H(v(x)) = H(z)$ y por la ecuación (43) se sigue que

$$\begin{aligned}\langle x - q, z \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} h^{-1}(e_z, e_z) \langle z, z' \rangle d\mu(z') + \frac{1}{2}H(z) + \frac{1}{2}H(-z) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_M Kh^{-1}(e_z, e_z) \langle z, N \rangle d\mu + \frac{1}{2}w(z) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_M \dot{K}(e_z, e_z) \langle z, N \rangle d\mu + \frac{1}{2}w(z).\end{aligned}$$

En donde la segunda igualdad fue haciendo el cambio de variable $z' = N(y)$ para $y \in \Sigma_t$ y tomando en cuenta la Fórmula (10), luego, la última igualdad es por la definición de \dot{K} dada en la Observación 6.1, es decir $\dot{K}^{ij} = \partial_{h_{ij}}K = K(h^{-1})^{ij}$. Con esto concluimos el lema. \blacksquare

Ahora demostraremos el Teorema 6.3.

Demostración: Este teorema usa la siguiente identidad para la anchura

$$w(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_t} \dot{K}(e_z(p), e_z(p)) d\mu(p), \quad (45)$$

para e_z como antes. Esto es verdad ya que para el Lema 6.1 tomando $x \in \Sigma_t$ y $z = -N(x)$ entonces tenemos

$$0 = \frac{1}{2}w(-z) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \dot{K}(e_z, e_z) d\mu$$

con lo que

$$w(-z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_t} \dot{K}(e_z, e_z) d\mu$$

pero $w(-z) = w(z)$ con lo cual tenemos (45). Por otra parte si escribimos e_z^\perp para el vector ortogonal unitario en cada punto, entonces

$$\mathcal{H} = \dot{K}(e_z, e_z) + \dot{K}(e_z^\perp, e_z^\perp) \quad (46)$$

y por el Teorema 6.2, tenemos que

$$|\dot{K}(e_z, e_z) - \dot{K}(e_z^\perp, e_z^\perp)| \leq C,$$

como $\dot{K}(e, e)$ yace entre λ_1 y λ_2 para cualquier vector unitario e . Esto da

$$\begin{aligned}|\dot{K}(e_z, e_z) - \dot{K}(e_z^\perp, e_z^\perp)| &= \left| 2\dot{K}(e_z, e_z) - \left(\dot{K}(e_z^\perp, e_z^\perp) + \dot{K}(e_z, e_z) \right) \right| \\ &= |2\dot{K}(e_z, e_z) - \mathcal{H}| \\ &\leq C.\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_t} \dot{K}(e_z, e_z) d\mu - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu \right| &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} (2\dot{K}(e_z, e_z) - \mathcal{H}) d\mu \right| \\ &\leq \frac{C}{4\pi} \left(\int_{\Sigma_t} d\mu \right) \\ &\leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t). \end{aligned}$$

Combinando los últimos resultados y sumando $0 = \frac{1}{2}w(z) - \frac{1}{2}w(z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \langle x - q, z \rangle - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu \right| &\leq \frac{1}{2} \left| w(z) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu \right| + \left| \langle x - q, z \rangle + \frac{1}{2}w(z) \right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{\Sigma_t} (2\dot{K}(e_z, e_z) - \mathcal{H}) d\mu \right| + \left| \langle x - q, z \rangle + \frac{1}{2}w(z) \right| \\ &\leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} |\dot{K}(e_z, e_z) \langle v, z \rangle| d\mu \\ &= \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) + \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} |2(\dot{K}(e_z, e_z) - H)| d\mu + \int_{\Sigma_t} |H| d\mu \\ &\leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) + \frac{1}{2} \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) + \int_{\Sigma_t} |\mathcal{H}| d\mu \\ &= \frac{3}{2} \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) + \int_{\Sigma_t} |\dot{K}(e_z, e_z) - \dot{K}(e_z^\perp, e_z^\perp)| d\mu \\ &\leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) \left(\frac{3}{2} + 4\pi \right) \\ &\leq \frac{\hat{C}}{4\pi} A(\Sigma_t) \end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad es por (45), la última igualdad es por (46) y en la penúltima desigualdad usamos la cota $|\dot{K}(e_z, e_z) - \dot{K}(e_z^\perp, e_z^\perp)| < C$ y que $|\langle z, N \rangle| \leq 1$. Por lo tanto

$$\left| \langle x - q, z \rangle - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu \right| \leq \frac{\hat{C}}{4\pi} A(\Sigma_t) \quad (47)$$

como se quería. ■

Observación 6.3 Si tomamos supremo sobre las $z' = (x, t)$ en la desigualdad (47), tenemos que

$$\left| w(x, t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu \right| \leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t)$$

lo cual nos da una cota para la función anchura, es decir nos dice cómo varía la anchura comparándola con la variación de la curvatura media total.

Corolario 6.1 Para $(T^* - t) \leq \frac{1}{3(8C)^3}$, $X(\cdot, t)$ está contenida entre dos esferas concéntricas centradas en $q(t)$ con radio $r_- \leq r_+$ que satisfacen

$$\frac{r_+}{r_-} \leq 1 + 8C(3(T^* - t))^{\frac{1}{3}}.$$

Demostración: Definimos

$$r_- = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu - \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t)$$

y

$$r_+ = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu + \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t).$$

Como la solución es convexa y además por la Observación 6.3

$$w(x, t) \leq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) + \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu$$

la hipersuperficie solución Σ_t está contenida en la región encerrada por la esfera de radio r_+ . Nótese que se tiene también que

$$w(x, t) \geq \frac{C}{4\pi} A(\Sigma_t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d\mu$$

por lo que podemos concluir que la esfera de radio r_- está contenida en la región encerrada por la hipersuperficie solución Σ_t . Por lo anterior el área de Σ_t es menor o igual que el área de $\mathbb{S}_{r_+}^2$, es decir, tenemos que

$$A(\Sigma_t) \leq 4\pi r_+^2. \quad (48)$$

Ahora notemos que por definición

$$r_- - r_+ = -2A(\Sigma_t) \frac{C}{4\pi}$$

y como además

$$\frac{2C}{4\pi} A(\Sigma_t) \leq 2Cr_+^2$$

se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2Cr_+^2 - \frac{2C}{4\pi} A(\Sigma_t) \\ &= 2Cr_+^2 - r_+ + r_-. \end{aligned}$$

Ahora notemos que $2Cr_+^2 - r_+ + r_- = 0$ si $r_+ = \frac{1 \pm (1-8Cr_-)^{\frac{1}{2}}}{4C}$ en donde está bien definido solamente si $1 - 8Cr_- \geq 0$ equivalentemente si

$$\frac{1}{8C} \geq r_-. \quad (49)$$

Con lo que tenemos que

$$r_+ \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 8Cr_-}}{4C}$$

por lo tanto

$$r_+ \leq \frac{2r_-}{1 + \sqrt{1 - 8Cr_-}}$$

y ya que por (49) tenemos que $8Cr_- \in [0, 1]$ entonces

$$r_+ \leq r_-(1 + 8Cr_-)$$

por lo tanto

$$\frac{r_+}{r_-} \leq 1 + 8Cr_- \leq 1 + 8C(3(T^* - t))^{\frac{1}{3}}$$

ya que

$$r_- \leq \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (3(T^* - t))^{\frac{1}{3}} \quad (50)$$

por lo que se tiene el resultado. ■

Observación 6.4 Tomando en cuenta que $r_- \leq r_+$ (por definición), el corolario anterior dice que si $(T^* - t) \leq \frac{1}{3(8C)^3}$ tenemos que

$$1 \leq \frac{r_+}{r_-} \leq 1 + 8C(3(T^* - t))^{\frac{1}{3}},$$

y por lo tanto que

$$\frac{r_+}{r_-} \xrightarrow{t \rightarrow T^*} 1.$$

A consecuencia podemos tomar un rayo L que pasa por q e intersecta a $B_{r_-}(q)$, Σ_t y $B_{r_+}(q)$ en q_1 , q_2 y q_3 respectivamente, ver figura (1); entonces como $r_- \leq d(q, \Sigma_t) \leq r_+$ con $r_- \sim_{T^*} r_+$ (por lo anterior), se tiene que

$$d(q, q_2) \sim_{t \rightarrow T^*} r_-, r_+.$$

Como el rayo fue arbitrario esto sucede para cualquier punto q_2 de Σ_t , lo que da la idea intuitiva que Σ_t se redondea cuando $t \rightarrow T^*$: se dice que Σ_t converge a "un punto redondo". Daremos a continuación una descripción más precisa de este fenómeno, usando un rescalamiento adecuado del flujo.

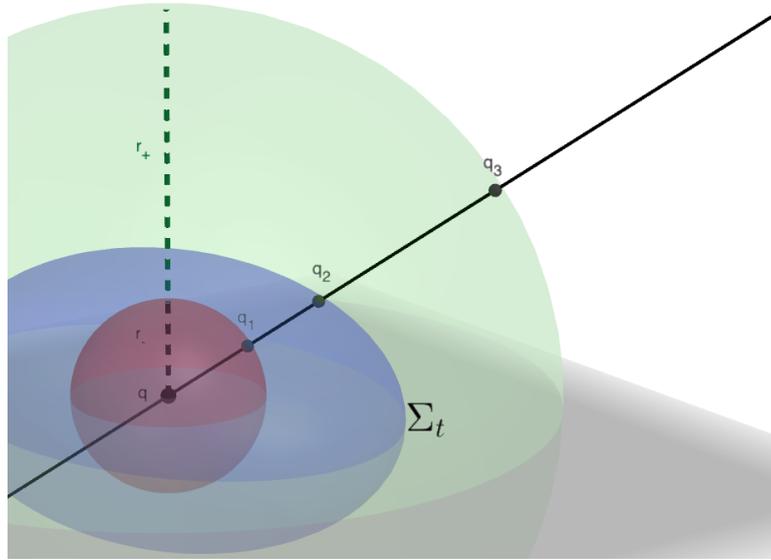


Figure 1: Convergencia

Consideramos el rescalamiento para que el centro de las esferas sea $q = \int_{\Sigma_t} xK(x,t)dx$ y con un factor de tiempo $(3(T^* - t))^{\frac{1}{3}}$ es decir

$$\tilde{X}(p,t) = \frac{X(p,t) - q}{(3(T^* - t))^{\frac{1}{3}}}; \quad (51)$$

la regularidad del encaje \tilde{X} la hereda de la del encaje X . Queremos demostrar que

$$\tilde{X}(\cdot, t) \longrightarrow \tilde{X}_{T^*}$$

en \mathcal{C}^∞ a un encaje suave $\tilde{X}_{T^*}: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y que $\tilde{X}_{T^*}(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$. Además definimos el nuevo parámetro para el tiempo

$$\tau(t) = -\frac{1}{3} \log \left(1 - \frac{t}{T^*} \right)$$

y con esto tenemos que $\tau \longrightarrow \infty$ si $t \longrightarrow T^*$. Además por la Sección 5.2 si suponemos que $f \in \mathbb{C}^{k,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ (ó analítica) entonces $X \in \tilde{\mathcal{C}}^{k+2,\alpha}(\mathbb{S}^n \times [t, T^*])$ (ó $X(\cdot, t)$ es suave y $X(\cdot, t)$ es analítica para $t > 0$). Con lo anterior podemos obtener el resultado siguiente que nos explica que la imagen de la solución límite es la esfera unitaria. Para la demostración de este teorema véase [2].

Teorema 6.4 Para $T^* - t \leq \min \{C_0 C^{-3}, \frac{T^*}{2}\}$ existen constantes positivas C_1 y C_2

$$\left| K(p,t) - (3(T^* - t))^{-\frac{2}{3}} \right| \leq C_1 C^{\frac{1}{2}} (T^* - t)^{-\frac{1}{2}}$$

y para cualquier vector unitario $e \in TX(\cdot, t)$

$$\left| h(e, e) - (3(T^* - t))^{\frac{1}{3}} \right| \leq C_2 C^{\frac{1}{2}} (T^* - t)^{-\frac{1}{6}}$$

en donde C_0, C_1 y C_2 son constantes.

Como conclusión de este teorema y ya que

$$\tilde{K}(p, t) = K(p, t) (3(T^* - t))^{\frac{2}{3}}$$

en donde \tilde{K} es la curvatura de Gauss del reescalamiento, podemos decir que

$$\left| \tilde{K}(p, t) - 1 \right| = \left| K(p, t) (3(T^* - t))^{\frac{2}{3}} - 1 \right| \leq C_1 C^{\frac{1}{2}} (T^* - t)^{\frac{1}{6}}.$$

de aquí vemos que si $t \rightarrow T^*$ tenemos que $\tilde{K}(p, \cdot) \rightarrow 1$ por lo tanto, en el límite, tenemos que la curvatura es constante e igual a 1. Además, como la hipersuperficies solución son estrictamente convexas y compactas, el encaje converge a una esfera de radio 1. Luego los argumentos son como en el artículo [2, p.168] esto es: notemos que solo han sido controladas las propiedades geométricas (y no las parametrizaciones). Por lo que solo tenemos que la función soporte asociadas a las hipersuperficies solución rescaladas \tilde{H}_τ tiende a una función soporte H_∞ en \mathcal{C}^∞ . En donde H_∞ es la función soporte de una hipersuperficie compacta y estrictamente convexa. Luego, como $\tilde{K}(p, \cdot) \rightarrow 1$ tenemos que H_∞ es la función soporte de una esfera de radio 1 (tiende a una hipersuperficie compacta con curvatura constante 1) y además que $H_\infty = 1$. Así se tienen las siguientes conclusiones:

- $\tilde{H}_\tau \rightarrow H_\infty$ si $\tau \rightarrow \infty$ exponencialmente en \mathcal{C}^∞ . Es decir, existe $\delta > 0$ y constantes C_k para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\tilde{\nabla}^{(k)}(\tilde{H} - H_\infty)|^2 \leq C_k e^{-\delta\tau}.$$

- La parametrización de la hipersuperficie solución \tilde{X}_τ converge exponencialmente con exponente δ en \mathcal{C}^∞ a una inmersión \tilde{X} con imagen igual a la esfera unitaria.
- Se prueba que para la primera forma fundamental asociada a las soluciones del flujo rescalado \tilde{g} se cumple

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} \log \tilde{g}(u, u) \right| \leq C e^{-\delta\tau}$$

para u vector en el tangente diferente de cero. Con lo que las longitudes de los vectores bajo la métrica del rescalamiento están controladas y con esto también muestra que \tilde{X} es no degenerado cuando $\tau \rightarrow \infty$.

Por lo que tenemos lo que queríamos demostrar.

A Superficies convexas

En la siguiente sección hablaremos siempre de subconjuntos de \mathbb{R}^n . El punto de este apéndice es dar de manera general los conceptos para la teoría de superficies convexas, por lo que se dará una lista de las definiciones y conceptos importantes. Para profundizar, ver [4], [14] y [8]. Dicho esto tenemos:

Definición A.1 *Un hiperplano está dado por la ecuación*

$$\langle x, u \rangle = h$$

para alguna h constante y $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definición A.2 *Un conjunto se llama convexo si cualesquiera par de puntos en él, pueden unirse por una línea completamente contenida en el conjunto.*

Definición A.3 *Un conjunto convexo cerrado y acotado se llama cuerpo convexo.*

Le diremos hipersuperficie convexa al conjunto de puntos frontera (en sentido topológico) de un cuerpo convexo.

Definición A.4 *Un conjunto convexo cerrado que no es todo el espacio es llamado un cono convexo con vértice S si contiene al menos un punto además de S , y si para cualquier punto p del conjunto, la línea que une a S con p está dentro del cuerpo convexo.*

Además tenemos las siguientes propiedades que se darán sin demostración, estas pueden ser consultadas en [4], [14] y [8].

Proposición A.1 *Cualquier cuerpo convexo n -dimensional es homeomorfo a la n -bola, en donde la hipersuperficie convexa dada por el cuerpo es homeomorfa a la n -esfera.*

Proposición A.2 *La intersección arbitraria de conjuntos convexas es de nuevo un convexo. La imagen de la proyección de cualquier conjunto convexo hacia cualquier plano de dimensión menor es un conjunto convexo.*

De manera análoga hablaremos sobre planos soporte y planos cota para cuerpos convexas; estas definiciones pueden ser dadas para un conjunto cerrado en general.

Definición A.5 *Un hiperplano es llamado hiperplano cota de un cuerpo convexo si éste está completamente contenido en el interior de uno de los semiespacios definidos por el hiperplano.*

Definición A.6 *Un hiperplano es llamado plano soporte de un cuerpo convexo si es un hiperplano cota y su intersección con el cuerpo convexo es no vacía.*

Observación A.1 *Una propiedad importante es que un cono tiene al menos un hiperplano soporte en el vértice.*

Y por último, tenemos la siguientes proposiciones importantes:

Proposición A.3 *Cualquier punto de una hipersuperficie convexa tiene intersección no vacía con algún plano soporte.*

de igual manera se cumple un tipo de recíproco, a saber

Proposición A.4 *Si un conjunto cerrado convexo con puntos interiores tiene la propiedad de que para cualquier punto en su frontera pasa un plano soporte, entonces el conjunto es un cuerpo convexo.*

para ver la prueba consultar [4] página 36.

B Representación de los puntos frontera de un cuerpo convexo por su función soporte

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ entonces hay exactamente un hiperplano soporte orientado E de K en dirección de w tal que el semiespacio positivo de E (en donde w indica la dirección positiva) y K son disjuntos. La ecuación de este plano esta dada por la ecuación

$$\sum_{k=1}^n x_k w_k = H(w)$$

para $x \in K$; y en este caso H es llamada función soporte de K .

Sea $u_0 \in \mathbb{S}^n$ una dirección fija y H la función soporte asociada al cuerpo convexo K , así tenemos al plano soporte de K en u_0 dado por la ecuación

$$\langle x, u_0 \rangle = H(u_0). \quad (52)$$

La intersección de K con el plano soporte (52) es un cuerpo convexo \tilde{K} de dimensión a lo más $n - 1$; el objetivo es describir la función soporte de la intersección \tilde{K} . Nótese que cualquier $x \in K$ satisface que para cualquier dirección $u \in \mathbb{S}^n$

$$\langle x, u \rangle \leq H(u). \quad (53)$$

Para demostrar esto consideramos $v \in \mathbb{S}^n$ como una dirección arbitraria, $h > 0$ y definimos a $u = u_0 + hv$. Por las ecuaciones (52) y (53) tenemos que

$$\langle x, v \rangle \leq \frac{H(u_0 + hv) - H(u_0)}{h};$$

tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ tenemos que

$$\langle x, v \rangle \leq \frac{\partial H}{\partial v}(u_0). \quad (54)$$

Esto significa que el cuerpo K está contenido en la intersección de los subespacios definidos por la ecuación (54) para cualquier $v \in \mathbb{S}^n$. Por otro lado, tenemos que cualquier punto de esta intersección cumple la desigualdad

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u_0) \leq H(v). \quad (55)$$

vease [4] página 23. Así, de las Ecuaciones (54) y (55) se sigue (53) haciendo $u = v$ como se quería demostrar. Esto nos dice que cada punto que satisface (54) pertenece también a K .

Además, se puede ver que cualquier punto que satisface (54) pertenece también al plano soporte (52). Por lo que concluimos que los puntos en \tilde{K} son exactamente los puntos que cumplen (54). Y además para cualquier $u \in \tilde{K}$ se cumple que $H(u) = \nabla H_{u_0}(u)$, véase [4] capítulo 17. En resumen tenemos el resultado siguiente:

Proposición B.1 *Si H es la función soporte de un cuerpo convexo K . Entonces, para cada dirección $u_0 \in \mathbb{S}^n$ definimos como función soporte*

$$\begin{aligned} \tilde{H}: \tilde{K} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \nabla H_{u_0}(u) \end{aligned}$$

en donde \tilde{K} es intersección de K con sus planos soporte.

Si el plano soporte correspondiente a la dirección u_0 tiene solamente un punto en común con K entonces $\tilde{H} = \frac{dH}{du}(u)|_{u_0}$, como función soporte de un punto, debe ser una función lineal. Así H es diferenciable en cualquier dirección en $u \in K$. Más aun, para cualquier $u \in K$ y para cualquier $x \in \tilde{K}$, es decir, en la intersección de K con el plano soporte, se cumple que

$$\langle x, u \rangle = \nabla H_{u_0} u = \langle \nabla H(u_0), u \rangle.$$

Por lo tanto para cada $u \in K$ y cada x en la intersección de K y el plano soporte es de la forma

$$x = \nabla H(u). \quad (56)$$

Tenemos la siguiente definición

Definición B.1 Un hiperplano soporte es llamado regular si tiene solamente un punto en común con el cuerpo convexo. De otra forma es llamado singular.

Con esto tenemos

Teorema B.1 Sea K un cuerpo convexo con hiperplanos soportes regulares entonces sus funciones soportes son continuamente diferenciables y $x = \nabla H(u)$ para x en la frontera del cuerpo convexo.

C Funciones convexas

Ahora definiremos y daremos resultados de funciones convexas, con el fin de entender más la función soporte.

Definición C.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto convexo. Una función $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en Ω si para cualesquiera $x, y \in \Omega$ y para cualquier $t \in [0, 1]$

$$u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y). \quad (1)$$

Notemos que esta definición solamente tiene sentido si Ω es convexo. Ahora daremos una definición más general.

Definición C.2 Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que u es convexa si puede ser extendida a una función convexa en todo \mathbb{R}^n .

Observación C.1 • La función $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ puede tomar valor infinito.

- Una función convexa es continua en su dominio de definición.

Con esto damos un concepto importante para este tipo de funciones y algunas de sus propiedades.

Definición C.3 Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Se define la subdiferencial de u en $x \in \Omega$ como

$$\partial u(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle \quad \forall z \in \Omega\}.$$

Nótese que $\partial u(x)$ es convexo y cerrado. Geométricamente podemos interpretar a $p \in \partial u(x)$ como un punto tal que su función afín definida como

$$l_{x,p}(z) := u(x) + \langle p, z - x \rangle$$

toca a u debajo de x , es decir que

$$l_{x,p} \leq u \quad \text{en } \Omega$$

y

$$l_{x,p}(x) = u(x).$$

A $l_{x,p}(\Omega)$ se le conoce como *plano soporte* de u en x . Luego, si denotamos $|A|$ como la cardinalidad del conjunto A tenemos

Definición C.4 Una función es estrictamente convexa en Ω si para cualquier $x, z \in \Omega$ con $x \neq z$ y $p \in \partial u(x)$ se cumple que

$$u(z) > u(x) + \langle p, z - x \rangle.$$

Geométricamente esta desigualdad nos dice que $|l_{x,p}(\Omega) \cap u(\Omega)| = 1$.

Con estas definiciones podemos dar propiedades importantes de las funciones convexas y sus subdiferenciales.

Proposición C.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Si u es diferenciable en $x \in \Omega$ entonces $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\}$, en particular para cualquier $z \in \Omega$ se cumple que

$$u(z) \geq u(x) + \langle \nabla u(x), z - x \rangle.$$

Tenemos también el recíproco del resultado anterior:

Proposición C.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Si se cumple que $|\partial u(x)| = 1$ entonces u es diferenciable en x .

Para los detalles véase [8]. Luego, una propiedad importante es

Proposición C.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Si $K \subset \Omega$ es compacto entonces $\partial u(K)$ es compacto.

Y con esto tenemos una proposición importante

Proposición C.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces u es localmente Lipchitz en Ω y

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{2\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega')}}{\text{dist}(K, \partial\Omega')}$$

para cualquier $K \subset\subset \Omega' \subset \Omega$.

Demostración: Primero demostraremos que es localmente Lipchitz. Sea $B_r(x) \subset \Omega$ y consideramos el conjunto $\partial u\left(\overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}\right)$. Luego por Lema C.3 sabemos que $\partial u\left(\overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}\right)$ es acotado; por lo tanto existe $R > 0$ tal que

$$\partial u\left(\overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}\right) \subset B_R(0).$$

Ahora sean $y, z \in \overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}$ y consideramos $p \in \partial u(y) \subset B_R(0)$. Entonces

$$\begin{aligned} u(z) &\geq u(y) + \langle p, z - y \rangle \\ &\geq u(y) - R|z - y| \end{aligned}$$

esto es

$$u(y) - u(z) \leq R|z - y|.$$

Con el mismo argumento considerando $q \in \partial u(x) \subset B_R(0)$ tenemos que

$$u(z) - u(y) \leq R|z - y|$$

por lo tanto

$$|u(z) - u(y)| \leq R|z - y|$$

por lo que u es Lipchitz con constante de Lipchitz R en $B_{\frac{r}{2}}(x)$. Es decir u es localmente Lipchitz y esto implica que u es diferenciable en $\bar{\Omega}$ casi donde sea (aquí formalmente se dice que $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ en sentido débil o $u \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$). Ahora consideramos $K \subset \subset \Omega' \subset \Omega$, consideramos $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$, fijando $x \in K$ tomamos $z = x + \delta v$ para alguna $|v| = 1$. Definimos

$$K_\delta := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, K) \leq \delta\} \subset \subset \Omega$$

nótese que como u es continua en Ω entonces es acotada en K_δ . Por lo tanto, como $x, z \in K_\delta$, entonces para cualquier $p \in \partial u(x)$

$$\begin{aligned} \delta \langle p, v \rangle &\leq u(z) - u(x) \\ &\leq 2\|u\|_{L^\infty(K_\delta)} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|p| = \sup_{|v|=1} \langle p, v \rangle \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(K_\delta)}}{\delta} \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(K_\delta)}}{\text{dist}(K, \partial\Omega)}$$

para cualquier $p \in \partial u(x)$ y $x \in K$. Nótese que probamos que $\partial u(K)$ es acotado, para ver que es cerrado se hace un argumento estándar de sucesiones y usando las desigualdades anteriores con lo que tendríamos la proposición C.3. Ahora, como

habíamos probado que u es diferenciable en Ω casi donde sea, por la proposición C.1 sabemos que $p = \nabla u$ en los puntos donde u es diferenciable. Así, en esos puntos se cumple que

$$|\nabla u| \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(K)}}{\text{dist}(K, \partial\Omega)}$$

para casi todo $x \in K$ lo que prueba lo que se quería.

D Transformada de Legendre

Consideramos Ω hipersuperficie de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Omega\}$$

que es la gráfica de una función $f \in \mathcal{C}^s(\Omega)$ con $s \geq 2$, tal que $Df \neq 0$. Sabemos que

$$T_{(x, f(x))}\mathcal{G} = \{(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : w - f(x) = Df(x) \cdot (v - x)\}$$

equivalentemente los puntos $(v, w) \in T_{(x, f(x))}\mathcal{G}$ cumplen que

$$w - Df(x) \cdot v = f(x) - Df(x) \cdot x. \quad (2)$$

Ahora definimos la función

$$\xi := Df(x) = \phi(x),$$

claramente $\phi \in \mathcal{C}^{s-1}(\Omega; (\mathbb{R}^n)^*)$. De aquí en adelante se supondrá que la función

$$\phi : \Omega \longrightarrow \Omega^* := \phi(\Omega)$$

es globalmente invertible, por lo que es un \mathcal{C}^{s-1} difeomorfismo y denotaremos $\phi^{-1} = \psi$. Con esto definimos una función dual $f^* : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f^*(\xi) := \xi \cdot x - f(x) \quad (3)$$

en donde $x = \psi(\xi)$. A la fórmula (3) se llama *transformada de Legendre de f*. Así los puntos $(v, w) \in T_{(x, f(x))}\mathcal{G}$ cumplen que

$$\begin{aligned} w - \xi \cdot v &= f(x) - \xi \cdot x \\ &= -f^*(\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Definiendo

$$n := \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \right)$$

y

$$d(n) = \frac{f^*(\xi)}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}$$

tenemos que $d(n) = n \cdot (v, w)$ en donde $d(n)$ es la distancia orientada del origen a $T_{(x, f(x))}\mathcal{G}$. Ahora, para identificar Ω con Ω^* , definimos $d : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(0) = 0$ y $d(y) = |y|d\left(\frac{y}{|y|}\right)$ para $y \neq 0$ así, d es positiva homogénea y claramente

es extensión de la función anterior. Con esto podemos escribir para $(\xi, -1) \in \mathbb{S}^n$, es decir, para $(\xi, -1)$ tales que $\sqrt{1 + |\xi|^2} = 1$

$$f^*(\xi) = d((\xi, -1)). \quad (5)$$

Ahora, si f es convexa o cóncava entonces la función d es la función soporte H de la hipersuperficie \mathcal{G} , véase [9], y por (5) podemos escribir $f^*(\xi) = H((\xi, -1)) = u(\xi)$ en donde esta notación es la definida al final de la Sección 4.2 . Por lo que podemos interpretar a la transformada de Legendre de la función f como la función soporte de la hipersuperficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dada por la ecuación $z = f(x)$. Por otro lado, dada f^* tenemos

$$\begin{aligned} f^*(\xi) &= \xi \cdot x - f(x) \\ &= \xi_i x^i - f(\psi(\xi)) \end{aligned}$$

por lo que

$$df^*(\xi) = d\xi_i \psi^i(\xi) + \xi_i d\psi^i(\xi) - \partial_{x_i} f(\psi(\xi)) d\psi^i(\xi) \quad (6)$$

como $\xi = Df(x)$ entonces $\partial_{x_i} \xi = \partial_{x_i} f(x) = \partial_{x_i} f(\psi(x))$ por lo que

$$\xi_i d\psi^i(\xi) - \partial_{x_i} f(\psi(\xi)) d\psi^i(\xi) = \partial_{x_i} f(x) d\psi^i(\xi) - \partial_{x_i} f(\psi(\xi)) d\psi^i(\xi) = 0$$

por lo tanto, de la ecuación (6)

$$df^*(\xi) = \partial_{\xi_i} f^*(\xi) d\xi^i = \psi_i(\xi) d\xi^i$$

y como ϕ es difeomorfismo podemos concluir que

$$\partial_{\xi_i} f^*(\xi) = \psi_i(\xi). \quad (7)$$

ahora, como $x = \psi(\xi)$ por la fórmula (3) y (7)

$$\begin{aligned} x &= Df^*(\xi) \\ z = f(x) &= \xi \cdot x - f^*(\xi). \end{aligned} \quad (8)$$

Observación D.1 *El cálculo anterior nos dice que x y f pueden ser obtenidas de ξ y f^* de la misma manera que ξ y f^* fue obtenida de x y f , en otras palabras la transformación $(x, f) \mapsto (\xi, f^*)$ es una involución.*

Con respecto a la hipersuperficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una interpretación geométrica de (8) dice que \mathcal{G} puede ser visto como la envolvente de sus planos tangentes $T_q \mathcal{G}$ para $q \in \mathcal{G}$ descritos por (4). Para más detalles véase la interpretación geométrica de la transformada de Legendre para hipersuperficies de \mathbb{R}^{n+1} ; [9, Pag.11].

Referencias

- [1] ABATE, M., AND TAVENA, F. *Curves and Surfaces*. Springer, 2012.
- [2] ANDREWS, B. Contraction of convex hypersurfaces in euclidean space. *Calc. Var.* 2 (1994), 151–171.
- [3] ANDREWS, B. Gauss curvature flow: The fate of the rolling stones. *Inventiones mathematicae* 138 (1999), 151–161.
- [4] BONNENSEN, T., AND FRENCH, W. *Theory of convex bodies*. BCS Associates, 1987.
- [5] BÄR, C. *Elementary Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] CHENG, S. Y., AND YAU, S. T. On the regularity of the solutions of the n-dimensional minkowski problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 29 (1976), 495–516.
- [7] CHOW, B. Deforming convex hypersurfaces by the nth-root of the gaussian curvature. *Differential Geometry* 22 (1985), 117–138.
- [8] FIGALLI, A. *The Monge-Ampère equation and its applications*. European Mathematical Society.
- [9] GIAQUINTA, M., AND HILDERBRANDT, S. *Calculus of variations II*. Springer-Verlag, 1996.
- [10] GUANCHANG, D. *Nonlinear Partial Differential Equations of Second Order*. Translations of Mathematical Monographs, 1991.
- [11] HUISKEN, G. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *Differential Geometry* 20 (1984), 237–266.
- [12] LIEBERMAN, M. G. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Cientific, 1966.
- [13] POGORELOV, A. *The Minkowski Multidimensional Problem*. V. H. Winston and Sons, 1978.
- [14] ROCKAFELLAR, R. *Convex analysis*. Princeton University Press, 1972.
- [15] TSO, K. Deforming a hypersurface by its gauss-kronecker curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 38 (1985), 867–882.