



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ARCOÍRIS DE MATROIDES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

MARÍA FERNANDA RIVERA OMAÑA

A S E S O R :

DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM



CIUDAD DE MÉXICO, CDMX., 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Datos del Jurado

DATOS DEL ALUMNO:

María Fernanda  
Rivera  
Omaña  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas

DATOS DEL TUTOR:

Dr.  
Juan José  
Montellano  
Ballesteros

DATOS DEL SINODAL 1:

Dr.  
Criel  
Merino  
López

DATOS DEL SINODAL 2:

Dra.  
María del Rocío  
Sánchez  
López

DATOS DEL SINODAL 3:

Dra.  
Amanda  
Montejano  
Cantoral

DATOS DEL SINODAL 4:

Dra.  
Eugenia  
O'Reilly  
Regueiro

DATOS DEL TRABAJO ESCRITO:

Arcoíris de matroides  
74 páginas  
2020

*Dedicado a  
Mi familia.*



# Agradecimientos

Antes que nada quisiera agradecer a mi padres y a mi hermana por todo el apoyo que me han dado tanto en la universidad como en mi vida en general.

A Juancho por toda la ayuda que me dio para acabar esta tesis, por sus enseñanzas y por su apoyo en los últimos dos años.

A mis sinodales por leer este trabajo en tiempos tan extraños.

A mis profesores y ayudantes por su tiempo y trabajo. En especial a Rocío, Gerardo, Páez, Alejandro, Laurita y Marmolejo.

A todos mis amigos de la carrera sin los que hubiera estado perdida durante estos 4 años: Sandra, Diego, Argelia, Julio, Julio, Jorge, Martín, Iván, Fer rosa, Ximenita, Gaby y Fedro. A mis amigos de Canadá quienes hicieron mi intercambio todo lo que fue: Maga, Cami, Danielle, Jamie, Jime y Harry.

Esta tesis se escribió con el apoyo de los proyectos Papiit IN107218 y Conacyt A1-S-12891.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Bases y Conjuntos Independientes . . . . .	3
2.2. Conjuntos Dependientes y Circuitos . . . . .	11
2.3. Función de Rango, Matroide Dual e Hiperplanos . . . . .	15
<b>3. Ejemplos de matroides e hipergráficas</b>	<b>25</b>
3.1. Geometrías Projectivas . . . . .	25
3.2. Diseños . . . . .	29
3.3. Matroides Binarias . . . . .	31
3.4. Hipergráficas . . . . .	35
<b>4. Gráficas Geométricas y su número heterocromático</b>	<b>39</b>
4.1. Orugas . . . . .	39
4.2. Un teorema de Ramsey . . . . .	41
4.3. Árboles generadores planos heterocromáticos . . . . .	44
<b>5. Números heterocromáticos de matroides</b>	<b>53</b>
5.1. Bases . . . . .	53
5.2. Circuitos . . . . .	57
5.3. 3-Circuitos . . . . .	60
5.4. Circuitos Hamiltonianos . . . . .	63
5.5. Sistemas de Steiner . . . . .	66
<b>6. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>





# Capítulo 1

## Introducción

El número heterocromático, anti-Ramsey o arcoíris de una gráfica ha sido estudiado desde que fue introducido en 1973 por Erdős, Simonovits y Sós en [ESS75]. Se considera que los resultados relacionados con el número heterocromático son mas apegados a los problemas tipo Turán que a los teoremas tipo Ramsey. Los resultados tipo Turán buscan encontrar el máximo número de objetos que puede tener cierta estructura que no contenga a una subestructura dada. Los teoremas tipo Ramsey buscan encontrar el mínimo número  $n_k$  de elementos en una estructura que asegure la existencia de una subestructura dada en alguna de las partes de cualquier  $k$ -partición de dicha estructura. Un ejemplo de un resultado tipo Ramsey bien conocido es que 6 es el mínimo entero  $n$  tal que en toda coloración con dos colores (2-partición) de las aristas de una gráfica completa con  $n$  vértices, exista una subgráfica completa monocromática con 3 vértices. Los resultados arcoíris buscan encontrar el mínimo número de colores, en cualquier coloración de los elementos de una estructura dada, que asegure la existencia de una subestructura en particular con todos sus elementos de colores distintos. Este número de colores está relacionado con el número buscado en los problemas tipo Turán. Un ejemplo de este tipo de resultados es que si queremos que cualquier coloración con  $c$  colores de las aristas de una gráfica completa con 6 vértices contengan un ciclo de longitud 3 heterocromático, el mínimo número de colores que se necesitan es  $c = 6$ . Este resultado para gráficas completas de orden  $n$  se encuentra en [ESS75] y fue generalizado para gráficas completas de orden  $n$  y ciclos de longitud  $p$  en [MNL05].

Al igual que en teoría de Ramsey, se han trabajado los números heterocromáticos de gráficas completas buscando como subestructura heterocromática a ciclos, trayectorias, gráficas bipartitas completas, apareamientos, entre otros. También ha habido diversas generalizaciones a este tipo de problemas, por ejemplo, haciendo que la estructura huésped no sea la gráfica completa, o poniendo condiciones

al número de elementos de cada color. Una recopilación de resultados se puede encontrar en [SCK14].

Una forma de ver los problemas de número heterocromático, anti-Ramsey o arcoíris es considerar a los elementos de la estructura huesped como vértices de una hipergráfica, y las hiperaristas de la misma serán definidas por los subconjuntos de elementos de la estructura (vértices de la hipergráfica) que inducen a una subestructura dada. Así, lo que se busca es el mínimo entero  $k$ , tal que en cualquier coloración con  $k$  colores de los vértices de una hipergráfica dada siempre exista una hiperarista heterocromática. En este trabajo ésta será la manera en que consideraremos el problema.

Para una gráfica completa, las bases de la matroide gráfica asociada son los conjuntos de aristas de los árboles generadores. A través de matroides, podemos abordar el problema de buscar el mínimo número de colores necesario para colorear las aristas de una gráfica  $G$  y que  $G$  contenga un árbol generador heterocromático. En una gráfica completa geométrica los conjuntos de aristas de los árboles generadores planos no son bases de una matroide ya que la propiedad de intercambio de bases no se preserva. En este trabajo además de estudiar el número heterocromático de las bases y circuitos de una matroide, también estudiaremos el número heterocromático de los árboles generadores planos de una gráfica geométrica.

En el segundo capítulo se dará una introducción a la teoría de matroides, en el tercer capítulo se verán varias propiedades de algunas estructuras combinatorias que serán de interés para el cuarto y quinto capítulo en los que se hablará del número heterocromático de gráficas geométricas y matroides respectivamente. Los resultados de los capítulos cuatro y cinco se pueden encontrar en [MR13] y [MM18].

## Capítulo 2

# Preliminares

Una matroide es una estructura combinatoria que generaliza la noción de independencia en espacios vectoriales. Dicha estructura consta de diversas familias de algún conjunto. En este capítulo definiremos a una matroide  $M$  sobre un conjunto subyacente  $S$  a partir de sus bases. De esta forma definiremos cuales son los conjuntos independientes, conjuntos dependientes, circuitos, hiperplanos y función rango de la matroide  $M$ . Para cada familia distinta se buscará dar una serie de propiedades que la caractericen. Así veremos como es equivalente definir a una matroide a partir de cualquier familia previa y partiendo de sus propiedades, construir el resto de las familias anteriores. Además se buscará dar ejemplos de matroides definidas a partir de las familias ya mencionadas. Al final del capítulo se definirá la matroide dual  $M^*$  de una matroide  $M$  y veremos algunas de las propiedades que cumplen, en especial, la relación entre sus funciones rango. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en los libros [Wel10] y [Oxl11].

### 2.1. Bases y Conjuntos Independientes

Una matroide  $M$  consiste de un conjunto finito  $S$  al que llamaremos subyacente y una colección no vacía de subconjuntos de  $S$ , llamados bases, tal que cumplen las propiedades que veremos a continuación. Cuando definamos a una matroide a partir de su conjunto de bases utilizaremos la notación  $M = (S, \mathcal{B})$ .

**Definición 2.1** (Bases). Dado un conjunto subyacente  $S$  y  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$  diremos que  $\mathcal{B}$  es un conjunto de *bases* si cumple los siguientes axiomas:

(B1)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ .

(B2)  $\mathcal{B}$  es una anticadena en  $S$  (para todo  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $B_1 \not\subseteq B_2$  y  $B_2 \not\subseteq B_1$ ).

(B3) Para todo  $X, Y \subseteq S$  con  $X \subseteq Y$ , si existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $X \subseteq B_1$  y  $B_2 \subseteq Y$ , entonces existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ .

La siguiente equivalencia de la condición (B3) será usada constantemente.

**Proposición 2.2.**

Si  $\mathcal{B}$  cumple (B1) y (B2) entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(B3) Para todo  $X, Y \subseteq S$  con  $X \subseteq Y$ , si existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $X \subseteq B_1$  y  $B_2 \subseteq Y$ , entonces existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ .

(B3') Para toda  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $b_1 \in B_1$  existe  $b_2 \in B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{B}$ .

*Demostración.*

Supongamos que ocurre (B3) y sea  $x \in B_1$ , claramente podemos suponer  $x \in B_1 \setminus B_2$ . Veamos el caso cuando dados  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ocurre  $|B_1 \setminus B_2| = 1$ . Sean

$$x \in B_1 \setminus B_2 \text{ y } A = B_1 \cap B_2.$$

Ya que  $B_1 \setminus \{x\} \subseteq B_2$  tenemos  $A = B_1 \setminus \{x\}$ . Sea

$$y \in B_2 \setminus A = B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset.$$

Definamos los siguientes conjuntos

$$X = A \cup \{y\} \text{ y } Y = B_1 \cup \{y\} \supseteq B_1$$

donde  $X = (B_1 \cap B_2) \cup \{y\} \subseteq B_2 \cup \{y\} \subseteq B_2$ . Así,  $X \subseteq B_2$  y  $B_1 \subseteq Y$  por lo que podemos usar (B3) para encontrar  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que

$$(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = A \cup \{y\} = X \subseteq B_3 \subseteq Y = B_1 \cup \{y\}$$

Si  $B_1 \cup \{y\} = B_3$ , entonces  $B_1 \subsetneq B_3$ , lo cual no puede ser pues  $\mathcal{B}$  es una anticadena. Así  $B_3 = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ . Dado que  $A = B_1 \setminus \{x\}$  y  $x \in B_1 \setminus B_2$ , se sigue que

$$B_3 = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = A \cup \{y\} = (B_1 \setminus (B_1 \setminus B_2)) \cup \{y\} = B_2 \cup \{y\} = B_2$$

y por lo tanto  $|B_2 \setminus B_1| = |((B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \setminus B_1| = 1$ , además  $B_2 \setminus B_1 = Y$  y  $B_2 = B_3$ . Entonces, dado  $x \in B_1 \setminus B_2$  existe  $y \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ .

Sean  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  distintos y  $x \in B_1 \setminus B_2$ , consideremos los siguientes conjuntos

$$X = B_1 \setminus \{x\} \tag{2.1}$$

y

$$Y = B_2 \cup X = B_2 \cup (B_1 \setminus \{x\}) \tag{2.2}$$

Como  $X \subseteq B_1$  y  $B_2 \subseteq Y$ , entonces por (B3) existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que

$$B_1 \setminus \{x\} = X \subseteq B_3 \subseteq Y = B_2 \cup X \quad (2.3)$$

En vista de la ecuación 2.3  $B_1 \setminus B_3 \subseteq B_1 \setminus (B_1 \setminus \{x\}) = \{x\}$ , por lo que  $|B_1 \setminus B_3| = 1$ . Por la primera parte de la prueba se sigue que  $|B_3 \setminus B_1| = 1$ .

Sea  $y = B_3 \setminus B_1$

**Afirmación 2.3.**  $X = B_3 \cap B_1$ .

Como  $X \subseteq B_1$  y  $X \subseteq B_3$  basta probar que  $B_3 \cap B_1 \subseteq X = B_1 \setminus \{x\}$ . Supongamos que

$$x \in B_3 \cap B_1 \subseteq (B_2 \cup X) \cap B_1 = (B_2 \cap B_1) \cup (X \cap B_1) \subseteq B_2 \cup (B_1 \setminus \{x\}).$$

Como  $x \notin B_1 \setminus \{x\}$ , entonces  $x \in B_2$ , pero por construcción  $x \in B_1 \setminus B_2$ . Por ello  $x \notin B_3 \cap B_1$ , de tal manera que  $B_1 \cap B_3 \subseteq B_1 \setminus \{x\} = X$ . Como  $X = B_1 \cap B_3$ , entonces  $B_3 = X \cup (B_3 \setminus B_1) = X \cup \{y\} = (B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ . Resta probar que  $y \in B_2$ . Notemos que  $y \in B_3 \setminus B_1 \subseteq (B_2 \cup X) \setminus B_1 = (B_2 \cup (B_1 \setminus \{x\})) \setminus B_1 \subseteq B_2$ , por lo tanto  $y \in B_2$ . Así, dado  $x \in B_1 \setminus B_2$  existe  $y \in B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ .

Ahora supongamos (B3') y sean  $X \subseteq Y$  y  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $B_1 \neq B_2$  y  $X \subseteq B_1, B_2 \subseteq Y$ . Tomemos  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B_3$  y que maximice la cardinalidad de  $B_2 \cap B_3$ . Si  $B_3 \subseteq Y$ , ya acabamos. Supongamos entonces que no es así, sea  $x \in B_3 \setminus Y \subseteq B_3 \setminus B_2$ . Por hipótesis existe  $y \in B_2 \setminus B_3$  tal que  $(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Puesto que  $x \notin Y \supseteq X$ , se sigue que  $X \subseteq (B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ . Probaremos que  $B_2 \cap B_3 \subsetneq ((B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \cap B_2$ . Sea  $a \in B_2 \cap B_3$ , entonces  $a \notin B_3 \setminus B_2$ . Puesto que  $x \in B_3 \setminus B_2$ , se sigue que  $x \neq a$ . En consecuencia  $a \in (B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \cap B_2$  y además  $y \in (B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \cap B_2$  pero  $y \notin B_2 \cap B_3$ . Concluimos que  $B_2 \cap B_3 \subsetneq ((B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \cap B_2$ , lo que contradice la maximalidad de  $B_3$ . Por lo tanto  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ .  $\square$

**Corolario 2.4.**

Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , entonces  $|B_1| = |B_2|$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $|B_1| < |B_2|$ . Notemos que  $|B_1 \setminus B_2| > 0$  pues  $B_1 \not\subseteq B_2$ . Si  $b_1 \in B_1 \setminus B_2$  entonces por (B3') existe  $b_2 \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{B}$ . Consideremos  $B'_1 = (B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\}$ . Notemos que  $|B_1| = |B'_1|$  por lo tanto  $|B'_1 \setminus B_2| > 0$ . Podemos seguir haciendo lo anterior hasta que  $B_1^{(n)} \subseteq B_2$ , contradiciendo (B2).  $\square$

Diremos que la matroide  $M = (S, \mathcal{B})$  tiene rango  $n$  si todas las bases tienen cardinalidad  $n$ .

El siguiente es un ejemplo básico de una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$  y puede encontrarse en [BGW03].

**Ejemplo 2.5.**

Veamos que si  $S = [4] = \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces  $\mathcal{B}(M) = \{123, 124, 134\}$ , donde  $abc$  denota el conjunto  $\{a, b, c\}$ , es el conjunto de bases de una matroide.  $\mathcal{B}$  claramente cumple (B1) y (B2).

Resta ver que  $\mathcal{B}$  cumple la propiedad (B3), la chequearemos para  $B_1 = \{123\}$  y  $B_2 = \{124\}$ , el resto de las combinaciones de las bases son análogas.

Si  $b_1 \in B_1 \cap B_2$  la propiedad se sigue directamente. Sea  $b_1 \in B_1 \setminus B_2$ , es decir  $b_1 = 3$ . Proponemos  $b_2 = 4$ . Notemos que  $(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} = B_2 \in \mathcal{B}$  por lo que  $\mathcal{B}$  cumple la propiedad (B3).

Para el siguiente ejemplo necesitaremos recordar las siguientes proposiciones básicas de teoría de gráficas. Las demostraciones se pueden encontrar en [BM76].

**Proposición 2.6.**

Si  $G$  es una gráfica, entonces  $G$  tiene un bosque generador.

**Proposición 2.7.**

Si  $T$  es un árbol generador de  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices, entonces  $|E(T)| = n - 1$ . Además si  $G$  tiene componentes conexas  $G_1, \dots, G_k$  y  $T$  es un bosque generador, entonces  $|E(G)| = n(G_1) + \dots + n(G_k) - k = |V(G)| - k$  donde  $n(G_i) = |V(G_i)|$ .

La siguiente matroide es la mas común definida por una gráfica, sin embargo, no es la única matroide que se puede definir a partir de una gráfica.

**Ejemplo 2.8 (Matroide Gráfica).**

Dada  $G = (V, E)$  una gráfica, proponemos

$$B = \{A \subseteq E \mid G[A] \text{ es un bosque generador de } G\}.$$

Supongamos que  $G$  es conexa, de lo contrario nos fijamos en cada componente conexa. Se sigue de la Proposición 2.6 que  $B \neq \emptyset$  y así (B1) se cumple. Por la Proposición 2.7  $B$  es una anticadena, pues todos los bosques generadores tienen el mismo tamaño por lo tanto (B2) se cumple.

Probaremos (B3) para el caso cuando  $G$  es una gráfica conexa (el caso en el que no es conexa se sigue directamente). Sean  $T_1, T_2$  dos árboles generadores de  $G$  y sea  $a \in E(T_1) \setminus E(T_2)$ . Como  $T_1$  es conexa minimal, entonces  $T_1 \setminus \{a\}$  es acíclica. Además por ser una arista de un árbol  $\omega(T_1 \setminus \{a\}) = 2$  donde  $\omega(H)$  es el número de componentes conexas de la gráfica  $H$ . Como  $T_2$  es conexa y generadora, existe

una arista que conecte a ambas componentes conexas de  $T_1 \setminus \{a\}$ . Sea  $b \in T_2 \setminus T_1$  tal arista, entonces  $(T_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$  es conexa, como  $T_1 \setminus \{a\}$  es acíclica, entonces si  $T_1 \setminus \{a\} \cup \{b\}$  tiene un ciclo, este ciclo debe contener a  $b$  lo cual no puede ocurrir por nuestra elección de  $b$ . Por lo tanto  $T_1 \setminus \{a\} \cup \{b\}$  es un árbol generador. La matroide anterior también es conocida como la matroide de bosques. Para el caso en el que no es conexa nos fijamos en la componente conexa donde tomamos a  $a$ .

A los subconjuntos de las bases de una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$  se les conoce como conjuntos independientes.

**Definición 2.9** (Conjuntos Independientes).

Definiremos la familia de conjuntos *independientes*  $\mathcal{I}$  como

$$\mathcal{I} := \text{low}\mathcal{B} = \{X \subseteq S : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } X \subseteq B\}.$$

De acuerdo con la definición los conjuntos independientes de la Matroide Gráfica vista en el Ejemplo 2.8 son los subárboles de  $G$ . Las siguientes propiedades caracterizan a los conjuntos independientes, si pensamos en los subárboles de una gráfica  $G$  es fácil ver que éstas propiedades se cumplen.

**Teorema 2.10.**

$\mathcal{I}$  es la familia de conjuntos independientes de una matroide  $M$  en  $S$  si y solo si cumple las siguientes propiedades:

- (I1)  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ .
- (I2) Si  $A \subseteq B \in \mathcal{I}$ , entonces  $A \in \mathcal{I}$  ( $\mathcal{I}$  es decreciente).
- (I3) Para todo  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  si  $|I_1| < |I_2|$ , entonces existe  $x \in I_2 \setminus I_1$  tal que  $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ .

*Demostración.*

Veamos que  $\text{low}\mathcal{B}$  cumple con (I1)-(I3). Como para toda  $B \in \mathcal{B}$   $B \neq \emptyset$ , entonces  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .

Sean  $A \subseteq B \in \text{low}\mathcal{B}$ . Por como definimos  $\text{low}\mathcal{B}$  existe  $B' \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq B'$ . En particular  $A \subseteq B'$ , y así podemos concluir  $A \in \text{low}\mathcal{B}$ .

Sean  $I_1, I_2 \in \text{low}\mathcal{B}$  con  $|I_1| < |I_2|$ , entonces existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $I_i \subseteq B_i$  con  $i = 1, 2$ . Considerando  $Y = B_2 \cup I_1$ , obtenemos las siguientes contenciones

$$I_1 \subseteq B_1, B_2 \subseteq Y \text{ y } I_1 \subseteq B_2 \cup I_1 = Y.$$

Por (I3) existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $I_1 \subseteq B_3 \subseteq Y = B_2 \cup I_1$  de manera que

$$B_3 \setminus I_1 \subseteq B_2 \tag{2.4}$$



Dado que  $|B_3| = |B_2|$ ,  $|I_1| < |I_2|$ ,  $I_1 \subseteq B_3$  y  $I_2 \subseteq B_2$  se sigue que  $|B_3 \setminus I_1| > |B_2 \setminus I_2|$ . Esto nos lleva a que existe  $x \in B_3 \setminus I_1$  tal que  $x \notin B_2 \setminus I_2$ . Por la Ecuación 2.4 concluimos  $x \in I_2$ . Así encontramos  $x \in I_2 \cap (B_3 \setminus I_1)$  tal que  $I_1 \cup \{x\} \subseteq B_3$ . Por lo tanto  $I_1 \cup \{x\} \in \text{low } \mathcal{B}$ .

Ahora sea  $\mathcal{S}$  que cumple (I1), (I2) e (I3), definimos

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{S} : B \text{ es maximal en } \mathcal{S}\}$$

y veamos que  $\mathcal{B}'$  cumple con (B1)-(B3). Como  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , entonces (B1) se cumple. Si  $B_1 \subseteq B_2$  con  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$  entonces por maximalidad  $B_1 = B_2$ , de manera que  $\mathcal{B}'$  es una anticadena.

Observemos lo siguiente, si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$  con  $|B_1| < |B_2|$ , como en particular  $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ , entonces existe  $x \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $B_1 \cup \{x\} \in \mathcal{S}$  lo cual no es posible por maximalidad. Por lo tanto  $|B_1| = |B_2|$ .

Para continuar con la prueba necesitaremos de la siguiente proposición.

**Proposición 2.11.**

Si  $I_1, I_2 \in \mathcal{S}$  son tales que  $|I_1| < |I_2|$  entonces existe  $X \subseteq I_2 \setminus I_1$  tal que  $I_1 \cup X \in \mathcal{S}$  y  $|I_1 \cup X| = |I_2|$ .

*Demostración.* Supongamos que no es cierto. Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{S}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$  pero no existe  $X \subseteq I_2 \setminus I_1$  tal que  $I_1 \cup X \in \mathcal{S}$  y  $|I_1 \cup X| = |I_2|$ . Sea  $X_0 \subseteq I_2 \setminus I_1$  tal que  $I_1 \cup X_0 \in \mathcal{S}$  y  $X_0$  maximiza  $|I_1 \cup X|$ . Notemos que  $|X_0| > 0$  pues por (I3), existe un conjunto de un elemento con esa propiedad. Por hipótesis  $|I_1 \cup X_0| < |I_2|$ , y entonces podemos usar (I3) nuevamente para encontrar  $x \in I_2 \setminus (I_1 \cup X_0)$  tal que  $(I_1 \cup X_0) \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ . Esto contradice la maximalidad de  $X_0$  pues  $X_0 \cup \{x\} \subseteq I_2 \setminus I_1$ . ■

Ahora sean  $X \subseteq B_1 \in \mathcal{B}'$ ,  $B_2 \subseteq Y$ ,  $B_2 \in \mathcal{B}'$  tales que  $X \subseteq Y$ . Por como definimos la familia  $\mathcal{B}'$ ,  $X \in \mathcal{S}$ . Por la Proposición 2.11 si suponemos que  $|X| < |B_2|$ , entonces existe  $Z \subseteq B_2 \setminus X$  tal que  $|I| = |B_2|$  si  $I = X \cup Z \in \mathcal{S}$ . Como  $|I| = |B_2|$ , entonces  $I \in \mathcal{B}'$ . De lo contrario existe  $B \in \mathcal{B}'$  tal que  $I \subsetneq B$ . En tal caso  $|B_2| = |I| < |B|$ , lo cual no es posible por la observación anterior. De manera que  $X \cup Z \in \mathcal{B}'$  con  $X \subseteq X \cup Z \subseteq Y$  pues  $Z \subseteq B_2 \subseteq Y$ .

Veamos el caso en el que  $|X| = |B_2|$ . Como ya vimos que todos los elementos de  $\mathcal{B}'$  tienen la misma cardinalidad sabemos que  $|X| = |B_2| = |B_1|$ . Se sigue de que  $X \subseteq B_1$  que  $X = B_1 \in \mathcal{B}'$ , el conjunto buscado.

Por lo tanto  $\mathcal{B}'$  cumple con (B1)-(B3). Así concluimos que (I1)-(I3) caracterizan a  $\mathcal{S}$ . □

La familia de matroides mas sencilla es conocida como la matroide uniforme, en la cual todos los subconjuntos de cardinalidad menor o igual a  $k$  son independientes.

**Ejemplo 2.12** (Matroide Uniforme).

Dado  $S$  un conjunto subyacente de cardinalidad  $n > 0$  y  $r < n$ , definimos a la matroide  $U_r$  por sus conjuntos independientes  $\mathcal{I}$  como sigue:

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq S \mid |A| \leq r\}.$$

A esta matroide la denotaremos por  $U_{n,r}$ . Las propiedades (I1), (I2) e (I3) son inmediatas de la definición.

En la caracterización dada para  $\mathcal{I}$  podemos reemplazar la propiedad (I3). El Corolario 2.4 nos asegura que todas las bases tienen la misma cardinalidad, la propiedad (I3') nos demuestra que los subconjuntos independientes maximales de cualquier subconjunto de  $S$ , tienen la misma cardinalidad.

**Proposición 2.13.**

Una colección  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $S$  que satisface (I1) e (I2), satisface (I3) si y solo si satisface:

**(I3')** Si  $A \subseteq S$ , entonces todos los conjuntos independientes maximales contenidos en  $A$  tienen la misma cardinalidad.

*Demostración.*

Primero supongamos que existen  $A \subseteq S$  y  $Y_1, Y_2 \subseteq A$  conjuntos independientes maximales tales que  $|Y_1| < |Y_2|$ . Por la Proposición 2.11 existe  $X \subseteq Y_2 \setminus Y_1 \subseteq A$  tal que  $Y_1 \cup X \in \mathcal{I}$  y esta contenido en  $A$ , lo que contradice la maximalidad de  $Y_1$ .

Ahora sean  $X, Y \in \mathcal{I}$  tales que  $|X| < |Y|$ . Sin pérdida de generalidad  $|Y| = |X| + 1$ . Sean  $A = X \cup Y$  y  $X' \subseteq A$  tal que  $X \subseteq X'$  y  $X'$  es independiente maximal en  $A$ . Por (I3')  $|X'| \geq |Y| = |X| + 1$  por lo que existe  $x \in X' \setminus X$  tal que  $|\{x\} \cup X| = |Y|$ , de lo contrario  $X$  sería maximal y de cardinalidad menor a  $|Y|$  lo que contradice (I3').  $\square$

El siguiente ejemplo es de una matroide definida sobre una gráfica distinta de la matroide dada en el Ejemplo 2.8. La definimos a través de sus conjuntos independientes.

**Ejemplo 2.14.**

Sea  $G$  una gráfica. Si  $S = V(G)$  e

$$\mathcal{I} = \{J \subseteq S \mid \text{Existe un apareamiento } M' \text{ de } G \text{ que cubre todos los vértices de } J\},$$

entonces  $\mathcal{I}$  son los conjuntos independientes de una matroide  $M$ .

Para ver esto solo resta checar que  $\mathcal{I}$  cumple con (I1), (I2) e (I3). El conjunto vacío es cubierto por el apareamiento vacío por lo que  $\emptyset \in \mathcal{I}$  y por lo tanto  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $I_1 \subseteq I_2$  con  $I_2 \in \mathcal{I}$ . Como existe  $M'$  apareamiento que cubre a  $I_2$ , en particular cubre a todos los vértices de  $I_1$ . Entonces  $I_1 \in \mathcal{I}$ .

Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$  y sean  $M, M'$  apareamientos tales que  $M$  cubre a los vértices de  $I_1$  y  $M'$  cubre a los vértices de  $I_2$ . Si  $M$  cubre algún elemento en  $I_2 \setminus I_1$ , entonces podemos extender a  $I_1$  con ese elemento. Recordemos que  $G[M \triangle M']$  es la unión de ciclos pares cuyas aristas alternan entre  $M$  y  $M'$  o trayectorias alternantes, pues el grado de un vértice en  $G[M \triangle M']$  es 0 si es cubierto por ambos apareamientos en la misma arista incidente, 1 si es cubierto por únicamente un apareamiento, o 2 si es cubierto por ambos apareamientos en aristas distintas. Notemos que  $|I_2 \setminus I_1| > |I_1 \setminus I_2|$  pues  $|I_1| < |I_2|$ . Así, existe una trayectoria alternante  $P$  en  $G[M \triangle M']$  con un extremo  $u$  en  $I_2 \setminus I_1$ , y el otro extremo  $v$  tal que  $v \notin I_1 \setminus I_2$ , de lo contrario habría al menos tantos vértices en  $I_2 \setminus I_1$  como en  $I_1 \setminus I_2$ . Supongamos que  $v \in I_1 \cap I_2$ , entonces el grado de  $v$  es 0 o 2. Por ser el vértice final de una trayectoria alternante su grado en  $G[M \triangle M']$  es 1, una contradicción. Así tenemos que  $v \in I_2 \setminus I_1$  y por lo tanto llegamos a que  $v \in I_2$ . Sea  $M_1$  el apareamiento que se obtiene al cambiar en  $M$  las aristas  $M \cap E(P)$  por las aristas  $M' \cap E(P)$ . Notemos que  $M_1$  cubre a todos los vértices que cubre  $M$  y adicionalmente  $M_1$  cubre a  $v$ , por lo que  $I_1 \cup \{v\} \in \mathcal{I}$ . Así  $\mathcal{I}$  son los conjuntos independientes de  $M$ .

### Observación 2.15.

Si  $G$  es una gráfica y  $S = E(G)$ , entonces el conjunto

$$\mathcal{I} = \{J \subseteq S \mid J \text{ es un apareamiento de } G\}$$

no necesariamente cumple con (I3). Por ejemplo consideremos  $G = P_4$  como se ve en la Figura 2.1,  $v_1v_2, v_3v_4$  y  $v_2v_3$  son dos apareamientos maximales con distinta cardinalidad, ésto no puede ocurrir por el Corolario 2.4.

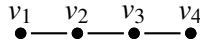


Figura 2.1:  $P_4$

Como fue mencionado, las matroides generalizan la noción de independencia en espacios vectoriales. El siguiente ejemplo muestra como los conjuntos independientes de un espacio vectorial se relacionan con los conjuntos independientes de una matroide definida a partir de una matriz.

### Ejemplo 2.16 (Espacios Vectoriales).

Dada una matriz  $A \in M_{n \times m}[F]$  sobre un campo  $F$ , podemos definir una matroide  $M$  donde  $S$  es el conjunto de vectores columna de  $A$  y  $V \subseteq S$  es independiente si  $V$  es

independiente en el espacio generado por todos los vectores columna de  $S$ . Como el conjunto formado por un vector columna es independiente, entonces  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ . Los conjuntos de vectores independientes son decrecientes por lo que (I2) también se cumple. Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$ , por lo que  $I_1$  tiene menor rango que  $I_2$  por lo que podemos extender a  $I_1$  con un elemento de  $I_2$ .

## 2.2. Conjuntos Dependientes y Circuitos

Al igual que en un espacio vectorial, aquellos conjuntos de una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$  que no son independientes formarán la familia de conjuntos dependientes.

**Definición 2.17** (Conjuntos dependientes).

Denotaremos por  $\mathcal{D}$  a la familia de conjuntos *dependientes* de una matroide  $M$  en un conjunto  $S$ , definida por:

$$\mathcal{D} := \{D \subseteq S \mid D \notin \mathcal{I}\}$$

**Teorema 2.18.**

Los conjuntos dependientes de una matroide  $M$  con un conjunto subyacente  $S$  están caracterizados por las siguientes propiedades:

(D1)  $\emptyset \notin \mathcal{D}$ .

(D2) Si  $D_1 \in \mathcal{D}$  y  $D_1 \subseteq D_2$ , entonces  $D_2 \in \mathcal{D}$  ( $\mathcal{D}$  es creciente).

(D3) Para todo  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  tales que  $D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}$  y  $x \in S$ ,  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $\mathcal{I}$  cumple con (I1),(I2),(I3) y veamos que el conjunto  $\mathcal{D} = \{D \subseteq S \mid D \notin \mathcal{I}\}$  cumple con (D1),(D2),(D3). Las propiedades (D1) y (D2) son consecuencia de las propiedades (I1) y (I2). Veamos que (D3) se cumple.

Sean  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  tales que  $D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}$ . Se sigue directo de la definición de  $\mathcal{D}$  que  $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{I}$ . Si  $D_1 \subseteq D_2$ , entonces  $D_1 = D_1 \cap D_2 \in \mathcal{I}$  lo cual es una contradicción. Análogamente  $D_2 \not\subseteq D_1$ , por lo que son incomparables.

Sea  $x \in S$ , supongamos que  $x \notin D_1 \cap D_2$ , y sin pérdida de generalidad que  $x \notin D_2$ , entonces  $D_2 \subseteq (D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}$ . Como  $\mathcal{D}$  es creciente y  $D_2 \in \mathcal{D}$ ,  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$ . Entonces supongamos que existe  $x \in D_1 \cap D_2$  tal que  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \notin \mathcal{D}$ , por lo que  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$ . Observemos que  $(D_1 \cap D_2) \subseteq D_1 \cup D_2$ , además como son incomparables, existen dos elementos tales que  $d_1 \in D_1 \setminus D_2$  y  $d_2 \in D_2 \setminus D_1$ . Como  $D_i = (D_i \setminus D_j) \cup (D_i \cap D_j)$ , entonces  $D_i \cap D_j \in \mathcal{I}$ . Por lo tanto  $|D_1 \cap D_2| < |(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}|$ . Usando (I3) como en la Proposición 2.11 existe  $I' \subseteq ((D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}) \setminus (D_1 \cap D_2)$  tal que  $|(D_1 \cap D_2) \cup I'| = |(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}|$ . De

esta forma  $I = (D_1 \cap D_2) \cup I' \in \mathcal{I}$  cumple con  $D_1 \cap D_2 \subseteq I \subseteq (D_1 \cup D_2)$  y  $|I| = |(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}|$ . Puesto que  $I \subseteq (D_1 \cup D_2)$  y  $|I| = |(D_1 \cup D_2)| - 1$  se sigue que  $D_1 \subseteq I$  o  $D_2 \subseteq I$  ya que el elemento que falta no puede estar en ambos. Pero esto no es posible pues  $\mathcal{I}$  es decreciente y  $D_i \notin \mathcal{I}$ . Por lo tanto  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$ .

Ahora supongamos que  $\mathcal{D}$  cumple (D1)-(D3) y probaremos que  $\mathcal{I} = \{I \subseteq S : I \notin \mathcal{D}\}$  cumple (I1)-(I3). (I1) se sigue de (D1). Supongamos que  $I_1 \subseteq I_2$  donde  $I_2 \in \mathcal{I}$ . Si  $I_1 \in \mathcal{D}$ , entonces como  $\mathcal{D}$  es creciente  $I_2 \in \mathcal{D}$  lo cual no es posible por lo que  $I_1 \in \mathcal{I}$  y por lo tanto es decreciente.

Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$ . La prueba de que se cumple (I3) lo hacemos por inducción sobre  $|I_1 \setminus I_2|$ . Si  $|I_1 \setminus I_2| = 0$ , sabemos que  $I_1 \subseteq I_2$  por lo que para cualquier  $x \in I_2 \setminus I_1$  tenemos que  $I_1 \cup \{x\} \subseteq I_2 \in \mathcal{I}$ . Supongamos que si  $A, B \in \mathcal{I}$  son tales que  $|A \setminus B| \leq n$ , entonces existe  $x \in B \setminus A$  tal que  $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ . Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|I_1 \setminus I_2| = n + 1$ . Tomemos  $y \in I_1 \setminus I_2$  y consideremos los siguientes conjuntos  $A = I_1 \setminus \{y\}$ ,  $B = I_2$ . Dado que  $A \subseteq I_1$ , entonces  $A \in \mathcal{I}$ . Además  $|A| < |I_1| < |B|$  y  $|A \setminus B| = n$  por nuestra elección de  $y$ . Por hipótesis de inducción existe  $x \in B$  tal que  $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ . Podemos repetir el paso anterior hasta encontrar  $B'$  tal que  $A \subseteq B' \subseteq B \cup A$  y  $|B'| = |B|$ . Así podemos suponer que  $A \cup \{x\} = B'$  y  $|B'| = |B|$ . Observamos que  $|B'| = |A| + 1 = (|I_1| + 1) + 1 = |I_1| + 2$  por lo que existen  $a, b \in B' \setminus I_1$  con  $a \neq b$ . Si  $I_1 \cup \{a\} \in \mathcal{I}$  o  $I_1 \cup \{b\} \in \mathcal{I}$  ya acabamos. Supongamos que  $(I_1 \cup \{a\}), (I_1 \cup \{b\}) \in \mathcal{D}$ . Notemos que  $(I_1 \cup \{a\}) \cap (I_1 \cup \{b\}) = I_1 \notin \mathcal{D}$ , entonces por (D3) tomando a  $y \in S$  como antes tenemos que  $(I_1 \cup \{a\}) \cup (I_1 \cup \{b\}) \setminus \{y\} = (I_1 \cup \{a\} \cup \{b\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{D}$ . Ya que  $a, b \in B'$  concluimos  $(I_1 \cup \{a\} \cup \{b\}) \setminus \{y\} \subseteq B' \in \mathcal{I}$  lo cual no puede ocurrir pues  $\mathcal{I}$  es decreciente. Por lo tanto  $I_1 \cup \{a\} \in \mathcal{I}$  o  $I_1 \cup \{b\} \in \mathcal{I}$ . □

Si los árboles son conjuntos independientes en el ejemplo de una matroide gráfica, entonces los conjuntos dependientes son las subgráficas con ciclos, por lo que los conjuntos dependientes minimales son los ciclos. Se puede generalizar esta noción para matroides, los conjuntos dependientes minimales son llamados circuitos.

**Definición 2.19.**

Definimos el conjunto de *circuitos* de una matroide  $M$  en  $S$  como

$$\mathcal{C} := \text{mín}\{D\} = \{C \in \mathcal{D} \mid C \text{ es minimal en } \mathcal{D}\}$$

Al igual que con las definiciones previas, podemos caracterizar a los circuitos de una matroide  $M$

**Teorema 2.20** (Circuitos).

$\mathcal{C}$  es el conjunto de circuitos de una matroide  $M$  si y sólo si cumplen las siguientes propiedades:

(C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

(C2)  $\mathcal{C}$  es una anticadena.

(C3) Para todo  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  tales que  $C_1 \neq C_2$  y  $x \in S$ , existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ .

*Demostración.*

Primero veamos que si  $\mathcal{D}$  cumple con las propiedades (D1),(D2) y (D3), entonces  $\mathcal{C} = \min\{C \in \mathcal{D} \mid C \text{ is minimal in } \mathcal{D}\}$  cumple con (C1), (C2) y (C3).

Claramente  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  pues  $\emptyset \notin \mathcal{D}$ . Si  $C_1 \subsetneq C_2$  donde  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  se sigue que  $C_2$  no es minimal, lo cual no es posible. Así se cumple (C2). Sean  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  con  $C_1 \neq C_2$ . Podemos ver que  $C_1, C_2 \in \mathcal{D}$  por como lo definimos. Además  $C_1 \cap C_2 \notin \mathcal{D}$ , de lo contrario  $C_1$  y  $C_2$  no serían minimales. Sea  $x \in S$ . Por (D3) concluimos que  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$ . Sea  $C_3 \in \mathcal{D}$  el mínimo conjunto dependiente contenido en  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ . Por elección  $C_3 \in \mathcal{C}$  y es el circuito buscado. Por lo tanto  $\mathcal{C}$  cumple (C1),(C2) y (C3).

Ahora supongamos que  $\mathcal{C}$  satisface (C1), (C2) y (C3) y veamos que

$$\mathcal{D} = \text{upp}(\mathcal{C}) = \{D \subseteq S \mid \exists C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq D\}$$

satisface (D1), (D2) y (D3).

Como  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ , entonces no existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $C \subseteq \emptyset$  por lo que  $\emptyset \notin \mathcal{D}$ . (D2) se sigue de la definición.

Sean  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  tales que  $D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}$  y  $x \in S$ . Por definición existen  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  tales que  $C_i \subseteq D_i$  para  $i = 1, 2$ . Si  $C_1 = C_2$  entonces  $C_1 \subseteq D_1, D_2$ , que resulta en que  $C_1 \subseteq D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}$ , una contradicción. Por lo tanto  $C_1 \neq C_2$ . Ahora podemos usar (C3) y considerar dos casos. Si  $x \notin C_1 \cap C_2$ , entonces existe  $i = 1, 2$  tal que  $C_i \subseteq (D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}$ , por lo tanto  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$ . El otro caso es cuando  $x \in C_1 \cap C_2$ , entonces podemos usar (C3) para encontrar  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ . Por lo tanto  $C_3 \subseteq (D_1 \cup D_2) \setminus \{x\}$ , con lo cual podemos concluir que  $(D_1 \cup D_2) \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$ . Por lo tanto  $\mathcal{D} = \text{upp}(\mathcal{C})$  cumple con (D1), (D2) y (D3).  $\square$

### Proposición 2.21.

Si  $C$  es una familia de subconjuntos de  $S$  que cumple con (C1) y (C2), entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(C3) Para todo  $C_1, C_2 \in C$  tales que  $C_1 \neq C_2$  y  $x \in S$ , existe  $C_3 \in C$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ .

(C3') Para todo  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  tales que  $C_1 \neq C_2$  y  $x \in C_1 \cap C_2$ ,  $y \in C_1 \setminus C_2$  existe  $C_3 \in C$  tal que  $y \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ .

A la segunda propiedad la llamaremos eliminación fuerte.

*Demostración.*

Supongamos que  $C$  cumple con (C3'). Si  $x \in C_1 \cap C_2$  llegamos al resultado tomando  $y \in C_1 \setminus C_2$  arbitraria. Sea  $x \notin C_1 \cap C_2$ , sin pérdida de generalidad  $x \notin C_1$ , entonces  $C_1 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$  y el resultado se sigue.

Ahora supongamos que  $C$  cumple con (C3). Probaremos (C3') por inducción sobre  $|C_1 \cup C_2|$ . Para el caso base supongamos que  $|C_1 \cup C_2| \leq 3$ , sean  $x \in C_1 \cap C_2$  y  $y \in C_1 \setminus C_2$ . Por (C3) existe  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$  y como  $|C_1 \cup C_2| \leq 3$ , entonces  $|C_3| \leq 2$ . Veremos que  $y \in C_3$ . Supongamos que  $y \notin C_3$  por lo tanto  $|C_3| = 1$ . Sea  $z$  al único elemento en  $C_3$  y  $z \in C_i$  para alguna  $i = 1, 2$ . Esto es una contradicción pues  $\mathcal{C}$  es una anticadena. Así  $y \in C_3$



Figura 2.2: Los elementos de  $C_1 \cup C_2$

Sean  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  y supongamos cierto el enunciado para todo  $C_a, C_b \in \mathcal{C}$  tales que  $|C_a \cup C_b| < |C_1 \cup C_2|$ .

Sean  $x \in C_1 \cap C_2$ ,  $y \in C_1 \setminus C_2$ . Por (C3) existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ . Supongamos que  $y \notin C_3$ , entonces  $|C_2 \cup C_3| < |C_1 \cup C_2|$  pues  $y \notin C_3 \cup C_2$  y  $C_2 \cup C_3 \subseteq C_1 \cup C_2$ . Como  $C_3 \subseteq C_2 \cup C_1$ , si  $C_3 \cap (C_2 \setminus C_1) = \emptyset$ , entonces  $C_3 \subseteq C_1$  pero  $C$  es una anticadena por lo que existe  $z \in C_3 \cap (C_2 \setminus C_1)$ . Por hipótesis de inducción para  $z \in C_2 \cap C_3$  y  $x \in C_2 \setminus C_3$  existe  $C_4 \in \mathcal{C}$  tal que  $x \in C_4 \subseteq C_3 \cup C_2 \setminus \{z\}$  de donde  $x \in C_4 \cap C_1$  y como  $y \notin C_3, C_2$ , entonces  $y \in C_1 \setminus C_4$ . Podemos ver que  $|C_1 \cup C_4| < |C_1 \cup C_2|$  pues  $C_1 \subseteq C_1 \cup C_4$  y  $C_4 \subseteq C_3 \cup C_2 \subseteq (C_1 \cup C_2) \cup C_2$ . Además como  $z \in C_3 \cap (C_2 \setminus C_1)$  en particular  $z \notin C_1$ , y por construcción  $z \notin C_4$ , pero  $z \in C_2$ , por lo que la desigualdad es estricta. Notemos que  $x \in C_1 \cup C_4$  y como  $y \notin C_2 \supseteq C_4$ , entonces  $y \in C_1 \setminus C_4$ . Así, podemos usar por última vez la hipótesis de inducción para encontrar  $C_5 \in \mathcal{C}$  tal que  $y \in C_5 \subseteq (C_1 \cup C_4) \setminus \{x\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ . □

Es fácil ver que al agregarle una arista  $a$  a un árbol  $T$  de una gráfica  $G$ ,  $T \cup \{a\}$  a lo más contiene un ciclo. Además si  $T$  es un árbol generador  $T \cup \{a\}$  contiene un único circuito que debe contener a  $a$ . El siguiente lema generaliza este resultado que resulta ser muy útil en algunas de las pruebas que se verán mas adelante.

**Lemma 2.22.**

Si  $A$  es un conjunto independiente de una matroide  $M$  y  $x \in S$ , entonces  $A \cup \{x\}$

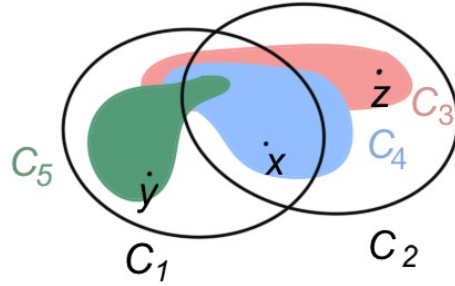


Figura 2.3:  $C_1, C_2, C_3, C_4$  y  $C_5$

contiene a lo más un circuito. Si  $B$  es una base de  $M$  y  $x \in S \setminus B$ , entonces existe un único circuito  $C$  tal que

$$x \in C \subseteq B \cup \{x\}.$$

*Demostración.*

Sean  $A \in \mathcal{I}(M)$  y  $x \in S$ , supongamos que existen dos circuitos  $C_1, C_2$  tales que  $C_i \subseteq A \cup \{x\}$  para  $i = 1, 2$ . Como  $A$  no contiene ningún circuito entonces  $x \in C_1 \cap C_2$ . Por C3 existe  $C_3$  un circuito tal que

$$C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \subseteq A$$

Lo cual es una contradicción pues  $A$  es independiente y por lo tanto no contiene circuitos.

Sea  $B$  una base de  $M$  y  $x \in S \setminus B$ . Como  $B$  es independiente maximal  $B \cup \{x\}$  es dependiente por lo que contiene un circuito que por la parte anterior debe ser único.  $\square$

### 2.3. Función de Rango, Matroide Dual e Hiperplanos

Dada una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$ , la función rango de  $M$  es una función que le asigna a los subconjuntos de  $S$  la cardinalidad de un conjunto independiente maximal contenido en él, los cuales por la Proposición 2.13, siempre tienen la misma cardinalidad.

**Definición 2.23** (Función de Rango).

La *función de rango* de una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$  es una función  $\rho : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{Z}$  que a cada subconjunto de  $S$  le asigna la cardinalidad de un subconjunto independiente maximal contenido en él, es decir si  $A \in \mathcal{P}(S)$ , entonces

$$\rho A = \text{máx}\{|X| \mid X \subseteq A, X \in \mathcal{I}\}.$$



**Teorema 2.24.** Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i)  $\rho$  es la función de rango de  $M$  una matroide en  $S$ .

(ii)  $\rho$  satisface:

(R1)  $\rho\emptyset = 0$ .

(R2) Para  $X \subseteq S$  y  $y \in S$  ocurre  $\rho X \leq \rho(X \cup \{y\}) \leq \rho X + 1$ .

(R3) Si para  $X \subseteq S$ ,  $x, y \in S \setminus X$   $\rho(X \cup \{y\}) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho X$  entonces  $\rho(X \cup \{y\} \cup \{x\}) = \rho X$ .

(iii)  $\rho$  satisface:

(R1')  $0 \leq \rho A \leq |A|$ .

(R2') Si  $A \subseteq B \subseteq S$  entonces  $\rho A \leq \rho B$ .

(R3')  $\rho$  es submodular, es decir,  $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho A + \rho B$ .

*Demostración.*

Primero veremos que si  $\rho$  es la función de rango de  $M$ , entonces satisface (R1)-(R3).

(R1) es claro pues cualquier subconjunto del conjunto vacío no tiene elementos. Sean  $X \subseteq S$  cualquier subconjunto y  $y \in S$ . Todo subconjunto independiente de  $X$  es un subconjunto independiente de  $X \cup \{y\}$ , entonces  $\rho X \leq \rho(X \cup \{y\})$ . Sea  $A \subseteq (X \cup \{y\})$  un subconjunto independiente maximal en  $X \cup \{y\}$ . Si  $y \notin A$ , entonces  $A \subseteq X$  es maximal en  $X$  y por lo tanto  $\rho X = \rho(X \cup \{y\})$ . Ahora supongamos que  $y \in A$ . Notemos que  $A \setminus \{y\} \subseteq X$  es independiente, por lo que  $|A| - 1 = |A \setminus \{y\}| \leq \rho X$ . Por lo tanto  $\rho(X \cup \{y\}) = |A| \leq \rho X + 1$ . Así queda probado (R2).

Para probar (R3) consideremos  $A = X \cup \{x\} \cup \{y\}$  y supongamos que (R3) no se cumple, es decir,  $\rho(X \cup \{y\}) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho X$  y que  $\rho(X \cup \{x\} \cup \{y\}) > \rho X$ . Sea  $Y$  un conjunto independiente maximal en  $X$ . Podemos extender  $Y$  a un conjunto independiente maximal de  $A$ . Como  $\rho X < \rho A$ ,  $Y \cup \{x\}$  ó  $Y \cup \{y\}$  es independiente pues son las dos posibles extensiones. Por lo tanto  $\rho X < \rho(X \cup \{x\})$  ó  $\rho X < \rho(X \cup \{y\})$ , lo que contradice la hipótesis.

Ahora veamos que si  $\rho$  satisface (R1)-(R3), entonces  $\rho$  es la función de rango de una matroide  $M$ . Definimos los conjuntos independientes  $\mathcal{I}(\rho)$  como  $X \in \mathcal{I}(\rho)$  sí y sólo sí  $\rho X = |X|$ . Verifiquemos que  $\mathcal{I}(\rho)$  cumple con (I1)-(I3).

Como  $\rho\emptyset = 0 = |\emptyset|$ , entonces  $\emptyset \in \mathcal{I}(\rho)$ . Sea  $B \subseteq A$  con  $A \in \mathcal{I}(\rho)$ . Supongamos que  $\rho B < |B|$  y consideremos  $A \setminus B = \{c_1, \dots, c_k\}$ , entonces por (R2)

$$\rho(B \cup \{c_1\}) \leq \rho B + 1 < |B| + 1.$$

Podemos continuar usando (R2) hasta obtener

$$\rho A = \rho(B \cup \{c_1\} \cup \dots \cup \{c_k\}) < |B| + k = |A|$$

lo cual no es posible pues por hipótesis  $\rho A = |A|$ . Por lo tanto  $\rho B = |B|$ .

Consideremos  $X, Y \subseteq \mathcal{S}(\rho)$  tales que  $|X| < |Y|$ . Sin pérdida de generalidad  $|X| = |Y| - 1$ . Así podemos escribir a  $X$  y  $Y$  como

$$X = \{x_1, \dots, x_q, y_{q+1}, \dots, y_k\}, Y = \{x_1, \dots, x_q, z_{q+1}, \dots, z_{k+1}\}$$

donde  $z_i \neq y_j$  para  $i \in \{q+1, \dots, k+1\}$  y  $j \in \{q+1, \dots, k\}$ .

Vamos a intentar extender a  $X$  con alguna  $z_i$  fija. Supongamos  $X \cup \{z_i\} \notin \mathcal{S}(\rho)$  para toda  $i \in \{q+1, \dots, k+1\}$ , entonces

$$\rho(X \cup \{z_j\}) = \rho X = \rho(X \cup \{z_i\})$$

para toda  $i, j \in \{q+1, \dots, k+1\}$ . Por (R3)  $\rho(X \cup \{z_i\} \cup \{z_j\}) = \rho X = |X|$  pues  $X \in \mathcal{S}(\rho)$ . Usamos (R3) hasta obtener

$$\rho Y \leq \rho(X \cup \{z_{q+1}\} \cup \dots \cup \{z_{k+1}\}) = |X| < |Y|$$

donde

$$\rho Y \leq \rho(X \cup \{z_{q+1}\} \cup \dots \cup \{z_{k+1}\})$$

es consecuencia de que  $Y \subseteq X \cup \{z_{q+1}\} \cup \dots \cup \{z_{k+1}\}$ . Por lo tanto  $Y \notin \mathcal{S}(\rho)$ , una contradicción. Así  $\rho(P)$  cumple (I1)-(I3) por lo que (i) e (ii) son equivalentes.

Ahora supongamos que  $\rho$  es la función de rango de una matroide  $M$  con un conjunto subyacente  $S$ . Si  $A \subseteq S$ , entonces el subconjunto independiente mas grande de  $A$  tiene cardinalidad a lo mas  $A$ , por lo que (R1') se cumple. Sea  $A \subseteq B \subseteq S$  y sea  $I$  un subconjunto independiente maximal de  $A$ . Se sigue de (I2) que  $I$  también es subconjunto independiente de  $B$ , por lo que  $\rho A = |I| \leq \rho B$ .

Falta ver que  $\rho$  es submodular. Sean  $A, B \subseteq S$  y supongamos que  $\rho(A \cup B) = p$  y  $\rho(A \cap B) = q$ . Tomemos  $X$  un subconjunto independiente de  $A \cap B$  tal que  $|X| = q$ , es decir, que es maximal. Podemos extender  $X$  a un subconjunto independiente maximal  $Y$  de  $A \cup B$ , es decir,  $Y$  es tal que  $X \subseteq Y$ ,  $|Y| = p$  y  $Y \in \mathcal{S}$ . Además existen  $V, W \subseteq Y$  tales que  $Y = X \cup V \cup W$  donde  $V \cap X = \emptyset = X \cap W$ ,  $V \subseteq A \setminus B$  y  $W \subseteq B \setminus A$ . De esta forma por (I2')  $X \cup V$  es independiente en  $A$  y  $X \cup W$  es independiente en  $B$ . La siguiente desigualdad se sigue de lo anterior.

$$\begin{aligned} \rho A + \rho B &\geq |X \cup V| + |X \cup W| \\ &= 2|X| + |V| + |W| \\ &= |Y| + |X| \\ &= \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B). \end{aligned}$$

Resta ver el regreso. Ahora sea  $\rho : \mathcal{S}(S) \rightarrow \mathbb{N}$  una función que satisface (R1')-(R3'). Veamos que entonces satisface (R1), (R2) y (R3). Como  $|\emptyset| = 0$ , entonces  $\rho \emptyset = 0$ .

Sean  $X \subseteq S$  y  $y \in S$ , por (R2') dado que  $X \subseteq X \cup \{y\}$ , entonces  $\rho X \leq \rho(X \cup \{y\})$ , además por (R3')  $\rho(X \cup \{y\}) + \rho(X \cap \{y\}) \leq \rho X + \rho(\{y\})$ . Si  $y \in X$  ocurre  $\rho(X \cup \{y\}) + \rho(\{y\}) \leq \rho X + \rho(\{y\})$  y por lo tanto  $\rho(X \cup \{y\}) \leq \rho X \leq \rho X + 1$ , y si  $y \notin X$  vemos que  $\rho(X \cup \{y\}) \leq \rho X + \rho(\{y\}) \leq \rho X + 1$  y por lo tanto se cumple (R2).

Finalmente sean  $A \subseteq S$  y  $x, y \in S \setminus A$ , y supongamos que  $\rho A = \rho(A \cup \{x\}) = \rho(A \cup \{y\})$ . Como consecuencia de la submodalidad  $\rho(A \cup \{x\} \cup \{y\}) + \rho A \leq \rho(A \cup \{x\}) + \rho(A \cup \{y\}) = 2\rho A$ , además por (R2')  $\rho A \leq \rho(A \cup \{x\} \cup \{y\})$ . Por lo tanto  $\rho(A \cup \{x\} \cup \{y\}) = \rho A$ .  $\square$

Un ejemplo sencillo de una función de rango, es la de la matroide gráfica, para este ejemplo nuevamente es necesaria la Proposición 2.7.

### Ejemplo 2.25.

Sea  $G$  una gráfica y consideremos la matroide asociada como se muestra en el Ejemplo 2.8, su función rango  $\rho : \mathcal{P}(E(G)) \rightarrow \mathbb{Z}$  tiene la siguiente regla de correspondencia para  $A \subseteq E(G)$ :

$$\rho(A) = |V(G[A])| - \omega(G[A])$$

donde  $\omega(G[A])$  denota en número de componentes conexas de la subgráfica inducida por  $A$ . La correspondencia se debe a la Proposición 2.7 la cual demuestra que todo bosque generador de  $G[A]$ , los cuales son los conjuntos independientes máximos contenidos en  $A$ , tienen cardinalidad  $|V(G[A])| - \omega(G[A])$ .

### Ejemplo 2.26.

En el Ejemplo 2.14 la función de rango  $\rho$  esta definida a partir de los apareamientos máximos contenidos en las subgráficas  $H$  de  $G$ . Si denotamos por  $\alpha'(H)$  a la cardinalidad de un apareamiento máximo, entonces

$$\rho(H) = 2\alpha'(H).$$

Respecto al rango de un circuito  $C$  de una matroide  $M$  podemos hacer dos observaciones. Como  $C$  es independiente minimal, entonces el conjunto independiente mas grande contenido en  $C$  es  $C \setminus \{a\}$  para toda  $a \in C$  por lo que  $\rho(C) = |C| - 1$ . De esta observación se sigue que  $|C| - 1 = \rho(C) \leq \rho(S)$  por lo que  $|C| \leq \rho(S) + 1$ .

El siguiente lema se usará para definir la matroide dual a  $M = (S, \mathcal{B})$ . Una vez conociendo a la matroide dual, veremos algunos resultados que serán usados mas adelante.

### Lemma 2.27.

Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_2 \setminus B_1$ , entonces existe  $y \in B_1 \setminus B_2$  tal que  $((B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}) \in \mathcal{B}$

*Demostración.*

Por el Lema 2.22 existe un circuito  $C$  tal que  $x \in C \subseteq B_1 \cup \{x\}$ . Al igual que en la Proposición 2.11 podemos extender el conjunto independiente  $\{x\}$  a un conjunto independiente maximal  $A$  contenido en  $B_1 \cup \{x\}$ . Notemos que  $A \neq B_1$  pues  $x \notin B_1$ . Por (I3') todos los subconjuntos independientes máximos de  $B_1 \cup \{x\}$  tienen la misma cardinalidad y, dado que  $B_1$  es independiente máximo en  $B_1 \cup \{x\}$ , entonces  $|A| = |B_1|$ . Por lo tanto existe un único  $y \in B_1 \setminus A$ . Afirmamos que  $y$  es el elemento buscado. Por construcción  $y \in B_1 \setminus B_2$ , basta checar que  $((B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}) \in \mathcal{B}$ . Veamos que  $y \in C$ . Si  $y \notin C$ , entonces  $C \cap (B_1 \setminus A) = \emptyset$  por lo que  $C \subseteq A$ , pero  $A$  es independiente y por lo tanto no es posible que contenga a un conjunto dependiente. Así  $y \in C$  y de esta forma considerando que  $B_1 \cup \{x\}$  contiene un único circuito  $C$  y  $y \in C$ , entonces  $((B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\})$  no contiene circuitos, se sigue que es independiente, además tiene la misma cardinalidad que una base por lo que  $((B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}) \in \mathcal{B}$ .  $\square$

**Proposición 2.28.**

Sea  $M = (S, \mathcal{B})$  una matroide, podemos definir una nueva matroide en  $S$ ,  $M^*$  con conjunto de bases

$$\mathcal{B}^* = \{S \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

*Demostración.*

Como  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , entonces existe  $B \in \mathcal{B}$  por lo que  $S \setminus B \in \mathcal{B}^*$  y se sigue que  $\mathcal{B}^* \neq \emptyset$ . Además si  $B_1 \subset B_2$  con  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^*$ , entonces  $S \setminus B_2 \subseteq S \setminus B_1$  donde  $S \setminus B_1, S \setminus B_2 \in \mathcal{B}$  por lo que  $S \setminus B_1 = S \setminus B_2$ , es decir  $B_1 = B_2$ . Por lo tanto  $\mathcal{B}^*$  es una anticadena.

Sean  $B_1^* = S \setminus B_1$  y  $B_2^* = S \setminus B_2$  dos elementos de la base y  $x \in B_1^* \setminus B_2^*$ , por lo que  $x \in B_2 \setminus B_1$ . Por el Lema 2.27 existe  $y \in B_1 \setminus B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ . Regresando a  $\mathcal{B}^*$  tenemos que  $y \in B_2^* \setminus B_1^*$  y  $S \setminus (B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} = ((S \setminus B_1) \setminus \{x\}) \cup \{y\} = (B_1^* \setminus \{x\}) \cup \{y\}$   $\square$

A la matroide  $M^*$  la llamaremos la matroide dual de  $M$ . Notemos que por como definimos  $M^*$ , ocurre que  $(M^*)^* = M$ .

A partir de la relación entre las bases de  $M$  y  $M^*$  se puede deducir el siguiente lema que corresponde a la relación entre los conjuntos independientes de  $M^*$  y las bases de  $M$ .

**Lemma 2.29.**

Dados  $M$  una matroide en  $S$  y  $A \subseteq S$ ,  $A$  es independiente en  $M^*$  si y solo si  $S \setminus A$  contiene una base de  $M$ .

*Demostración.*

$A$  es independiente en  $M^*$  si y solo si existe una base  $B^*$  de  $M^*$  tal que  $A \subseteq B^*$ , si y sólo si existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $A \subseteq S \setminus B$  si y solo si  $S \setminus A$  contiene una base de  $M$ .  $\square$

Si  $\rho$  es la función de rango de  $M$ , denotaremos por  $\rho^*$  la función de rango asociada a  $M^*$ . Las siguientes proposiciones exploran la relación entre  $\rho$  y  $\rho^*$ . Como  $(M^*)^* = M$ , se sigue que  $(\rho^*)^* = \rho$

**Proposición 2.30.**

Dados una matroide  $M$  en  $S$  y  $A \subseteq S$ , las funciones  $\rho$  y  $\rho^*$  cumplen:

$$\rho^*(S \setminus A) = |S| - \rho(S) - |A| + \rho(A)$$

*Demostración.*

Definimos  $\lambda : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{Z}$  para  $A \subseteq S$  como

$$\lambda(A) = |A| + \rho(S \setminus A) - \rho(S).$$

Veamos que  $\lambda$  cumple con (R1'), (R2') y (R3'). Dado que  $S \setminus A \subseteq S$  por (R2') obtenemos  $\rho(S \setminus A) \leq \rho(S)$  por lo que  $\lambda(A) = |A| + \rho(S \setminus A) - \rho(S) \leq |A|$ . Ahora sea  $B \subseteq S$  tal que  $A \subseteq B$ . Entonces usando la submodularidad de  $\rho$

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= |A| + \rho(S \setminus A) - \rho(S) \\ &= |A| + (\rho((S \setminus B) \cup (B \setminus A)) + 0) - \rho(S) \\ &= |A| + (\rho((S \setminus B) \cup (B \setminus A)) + \rho(\emptyset)) - \rho(S) \\ &= |A| + (\rho((S \setminus B) \cup (B \setminus A)) + \rho((S \setminus B) \cap (B \setminus A))) - \rho(S) \\ &\leq |A| + (\rho(S \setminus B) + \rho(B \setminus A)) - \rho(S) \\ &= |A| + \rho(S \setminus B) + |B \setminus A| - \rho(S) \\ &= |A| + \rho(S \setminus B) + |B| - |A| - \rho(S) \\ &= |B| + \rho(S \setminus B) - \rho(S). \end{aligned}$$

Nos resta probar la submodularidad de  $\lambda$ . Para esto usaremos la submodularidad de  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} |A| + |B| &= |A| + \rho(S \setminus A) - \rho(S) + (|B| + \rho(S \setminus B) - \rho(S)) \\ &\geq |A \cap B| + |A \cup B| + \rho(S \setminus (A \cap B)) + \rho(S \setminus (A \cup B)) - 2\rho(S) \\ &= \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lambda$  es la función de rango de una matroide  $M(\lambda)$ . Observemos que  $A \in \mathcal{I}(M(\lambda))$  si y solo si  $|A| = \lambda(A)$  si y solo si  $|A| = |A| + \rho(S \setminus A) - \rho(S)$  si y solo si  $\rho(S \setminus A) = \rho(S)$  si y solo si  $S \setminus A$  contiene una base de  $M$ . Por el Lema 2.29 esto ocurre si y solo si existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $A \subseteq S \setminus B$  si y solo si  $A \in \mathcal{I}$ . Por lo tanto  $\lambda = \rho^*$ , y podemos concluir que

$$\rho^*(S \setminus A) = \lambda(S \setminus A) = |S \setminus A| + \rho(A) - \rho(S) = |S| - \rho(S) - |A| + \rho(A).$$

□

Usando el resultado anterior probaremos el siguiente teorema.

**Teorema 2.31.**

Sea  $M$  una matroide en  $S$ . Sean  $A \in \mathcal{I}$  y  $A^* \in \mathcal{I}^*$  dos conjuntos independientes de  $M$  y  $M^*$  respectivamente. Si  $A \cap A^* = \emptyset$ , entonces existen bases  $B \in \mathcal{B}$  y  $B^* \in \mathcal{B}^*$  tales que  $A \subseteq B$ ,  $A^* \subseteq B^*$  y  $B \cap B^* = \emptyset$ .

*Demostración.*

Por la Proposición 2.30  $(\rho^*)^* = \rho$ . Por ser  $A^*$  independiente en  $M^*$ ,  $\rho^*(A^*) = |A^*|$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho(S \setminus A^*) &= |S| - \rho^*(S) - |A^*| + \rho^*(A^*) \\ &= |S| - \rho^*(S) - |A^*| + |A^*| \\ &= |S| - \rho^*(S) \\ &= \rho(S). \end{aligned}$$

Para el último paso basta notar que el orden de una base de  $M$  es el orden en  $S$  menos el orden de una base de  $M^*$ .

Como  $A \cap A^* = \emptyset$ , entonces  $A \subseteq S \setminus A^*$  por lo que podemos agrandar a  $A$  hasta llegar a un conjunto independiente maximal de  $S \setminus A^*$ , es decir, existe  $B$  independiente tal que  $A \subseteq B \subseteq S \setminus A^*$  y  $\rho B = \rho(S \setminus A^*) = \rho(S)$ , por lo tanto  $B$  es una base de  $M$  que contiene a  $A$ , resta notar que  $B^* = S \setminus B$  es una base de  $M^*$  que contiene a  $A^*$  pues  $B \subseteq S \setminus A^*$ .  $B$  y  $B^*$  son las bases buscadas.  $\square$

Así, una vez que ya definimos  $M^*$  podemos ver el siguiente lema el cual es usado varias veces en las pruebas de la sección 2 y 4.

**Lemma 2.32.**

Si  $C$  es un circuito y  $C^*$  es un cocircuito, es decir, un circuito de  $M^*$ , entonces  $|C \cap C^*| \neq 1$ .

*Demostración.*

Sean  $C$  un circuito y  $C^*$  un cocircuito. Supongamos que  $|C \cap C^*| = 1$ , es decir existe  $a \in S$  tal que  $C \cap C^* = \{a\}$ . Por el Lema 2.29 existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq S \setminus C^* \setminus \{a\}$ , pues  $C^* \setminus \{a\} \in \mathcal{I}^*$ . Se sigue que  $C^* \setminus \{a\} \subseteq S \setminus B$ . Por lo tanto  $C \cap (S \setminus B) = \emptyset$ , ya que  $C$  y  $C^*$  eran ajenos con excepción de en  $a$ . Concluimos que  $C \subseteq B$ , lo cual no es posible pues  $C$  es dependiente y por lo tanto no esta contenido en una base.  $\square$

En un espacio vectorial, un plano es un subconjunto del espacio cuya dimensión es menor a la del espacio vectorial. En una matroide de rango  $r$ , un  $r'$ -plano es un subconjunto maximal de  $S$  de rango  $r'$ .

**Definición 2.33.**

Diremos que  $X \subseteq S$  es un  $r'$ -plano si  $\rho X = r'$  y para todo  $a \notin X$  tenemos que  $\rho(X \cup \{a\}) = \rho(X) + 1$ .

Diremos que  $X$  es un hiperplano de una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$ , si es un  $r - 1$ -plano, donde  $r$  es el rango de  $M$ . Podemos caracterizar a los hiperplanos de  $M$  a partir de los circuitos de  $M^*$ .

**Proposición 2.34.**

$H$  es un hiperplano de una matroide  $M$  si y sólo si  $S \setminus H$  es un circuito de  $M^*$ .

*Demostración.*

Supogamos que  $H$  es un hiperplano de  $M$ . Por la Proposición 2.30

$$\begin{aligned} \rho^*(S \setminus H) &= |S| - \rho(S) - |H| + \rho(H) \\ &= |S| - |H| - 1 \\ &= |S \setminus H| - 1. \end{aligned}$$

Para ver que  $S \setminus H$  es un circuito de  $M^*$ , basta ver que para todo  $x \in S \setminus H$ ,  $(S \setminus H) \setminus \{x\}$  es independiente en  $M^*$ , es decir, su rango es igual a su cardinalidad. Sea  $x \in S \setminus H$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho^*((S \setminus H) \setminus \{x\}) &= \rho(S \setminus (H \cup \{x\})) \\ &= |S| - \rho(S) - |H \cup \{x\}| + \rho(H \cup \{x\}) \\ &= |S| - \rho(S) - |H| - 1 + \rho(H) + 1 \\ &= |S \setminus H| - 1 - 1 + 1 \\ &= |S \setminus H| - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $S \setminus H$  es un circuito de  $M^*$ .

Ahora sea  $S \setminus H$  un circuito de  $M^*$ . Veremos que  $H$  es un hiperplano de  $M$ . Como  $S \setminus H$  es un circuito de  $M^*$ , entonces  $\rho^*(S \setminus H) = |S \setminus H| - 1$  y para toda  $x \in S \setminus H$  tenemos que  $\rho^*((S \setminus H) \setminus \{x\}) = |S \setminus H| - 1$  y entonces

$$\begin{aligned} \rho(H) &= \rho(S \setminus (S \setminus H)) \\ &= |S| - \rho^*(S) - |S \setminus H| + \rho^*(S \setminus H) \\ &= |S| - \rho^*(S) - 1 \\ &= \rho(S) - 1. \end{aligned}$$

Además si  $x \notin H$ ,

$$\begin{aligned}
 \rho(H \cup \{x\}) &= \rho(S \setminus (S \setminus H \cup \{x\})) \\
 &= |S| - \rho^*(S) - |S \setminus (H \cup \{x\})| + \rho^*(S \setminus (H \cup \{x\})) \\
 &= |S| - \rho^*(S) - |S \setminus (H \cup \{x\})| + \rho^*((S \setminus H) \setminus \{x\}) \\
 &= |S| - \rho^*(S) - (|S \setminus H| - 1) + |S \setminus H| - 1 \\
 &= \rho(S).
 \end{aligned}$$

Por lo que  $H$  es un hiperplano de  $M$ . □

**Teorema 2.35.**

Una colección  $\mathcal{H}$  de subconjuntos de un conjunto subyacente  $S$ , es el conjunto de hiperplanos de una matroide  $M$  sí y sólo sí cumple las siguientes tres propiedades:

(H1)  $S \notin \mathcal{H}$ .

(H2) Si  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  distintos, entonces  $H_1 \not\subseteq H_2$ .

(H3) Si  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  y  $x \notin H_1 \cup H_2$ , entonces existe  $H_3 \in \mathcal{H}$  tal que  $\{x\} \cup (H_1 \cap H_2) \subseteq H_3$ .

*Demostración.*

Por la proposición anterior podemos ver que los circuitos y los hiperplanos son duales, dicho esto, la prueba es análoga a la prueba del Teorema 2.20. □

De forma similar a como definimos hiperplano en la Definición 2.33, vamos a definir una colínea.

**Definición 2.36.**

Dada una matroide  $M$  de rango  $r$ , un conjunto  $A$  es un *plano* o *conjunto cerrado* si es maximal con respecto a su rango, es decir para todo  $a \notin A$   $\rho(A \cup \{a\}) > \rho(A)$ . Además a un  $(r-2)$ -plano lo llamaremos una colínea.

**Definición 2.37.**

Una matroide de rango  $r$  es *pavimentada* si no hay circuitos de cardinalidad menor a  $r$ .





## Capítulo 3

# Ejemplos de matroides e hipergráficas

En este capítulo se presentarán algunas estructuras combinatorias que serán de interés en este trabajo. Las geometrías proyectivas y los diseños son clases especiales de matroides definidas por sus hiperplanos. Las matroides binarias engloban varios ejemplos de matroides muy estudiados como la matroide definida en el Ejemplo 2.16. Las hipergráficas son de nuestro interés puesto que a partir de ellas se define el número hetrocromático de las bases o circuitos de una matroide.

### 3.1. Geometrías Proyectivas

Las geometrías proyectivas definen una clase de matroides que serán estudiadas a lo largo de este trabajo. A continuación algunas de las propiedades básicas de las geometrías proyectivas son estudiadas. Los resultado de esta sección se pueden encontrar en [Kár76].

El *plano* es un conjunto de puntos  $\Sigma = \{P_1, \dots\}$  y sus líneas son subconjuntos de  $\Sigma$ .

#### **Definición 3.1.**

Un *plano proyectivo* finito de orden  $q$  es un plano que satisface las siguientes condiciones:

- (A1) Si  $P, Q \in \Sigma$  con  $P \neq Q$ , entonces existe una única línea  $l$  tal que  $P, Q \in l$ , a la cual denotaremos por  $\overline{PQ}$
- (A2) Si  $g \subseteq \Sigma$  y  $l \subseteq \Sigma$  son líneas distintas, entonces existe un único  $P \in \Sigma$  tal que  $P \in g \cap l$ .

(A3) Existen cuatro puntos que determinan dos a dos, 6 líneas distintas.

(A4) Existe una línea que consiste de  $q + 1$  puntos con  $q > 1$ .

**Observación 3.2.**

Bajo (A1) y (A2) las siguientes condiciones son equivalentes

(A3) Existen cuatro puntos que determinan dos a dos, 6 líneas distintas.

(A3') Existen cuatro puntos tales que no hay tres puntos colineales.

Esta observación es consecuencia de (A1) y (A2) ya que dados cuatro puntos el máximo número de líneas distintas es  $\binom{4}{2} = 6$

**Proposición 3.3.**

En un plano que cumple las condiciones (A1), (A2) y (A3) siempre existe una línea que consiste de 3 puntos.

*Demostración.*

Consideremos un plano que cumple las condiciones (A1), (A2) y (A3). Sea  $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  un conjunto formado por los cuatro puntos dados en (A3'). Por (A1) podemos definir las siguientes líneas:

$$L_1 = \overline{P_1P_2}, L_2 = \overline{P_1P_3}, L_3 = \overline{P_1P_4}, L_4 = \overline{P_2P_3}, L_5 = \overline{P_2P_4} \text{ y } L_6 = \overline{P_3P_4}.$$

Notemos que  $L_1 \cap L_6 \notin S$  y por (A2)  $L_1 \cap L_6 \neq \emptyset$ . Por lo que existe otro punto en  $L_1 \cap L_6$  que no está en  $S$ . Por lo tanto  $L_1$  y  $L_6$  contienen al menos 3 puntos. Lo mismo se puede probar para  $L_2, L_5$  y  $L_3, L_4$ .  $\square$

Si el plano contiene únicamente las líneas descritas anteriormente obtenemos el plano de Fano que se verá a continuación.

**Ejemplo 3.4** (El plano de Fano).

Un ejemplo muy común de una geometría proyectiva finita es la representada en la Figura 3.1 llamada el Plano de Fano, donde además de las rectas que se ven en la imagen, el círculo también es una línea. En total hay 7 puntos y 7 líneas.

Veamos que Fano es un plano proyectivo finito, donde  $q = 2$ . Las propiedades (A1) y (A2) se pueden comprobar fácilmente. Para (A3) nos tomaremos  $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ , se puede checar que hay 5 rectas del dibujo determinados por los puntos y el círculo. Para el último punto solo resta notar que cualquier línea consta de  $3 = 2 + 1$  puntos.

Las siguientes propiedades básicas serán necesarias en el siguiente capítulo.

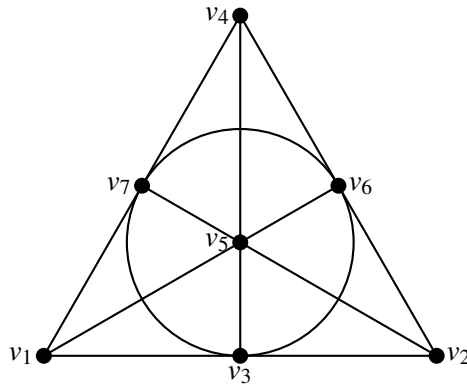


Figura 3.1: Plano de Fano

**Proposición 3.5.**

Algunas propiedades de los planos proyectivos finitos de orden  $q$  son las siguientes:

1. Si  $l, g$  son líneas distintas, entonces  $|l \cap g| = 1$ .
2. Existen cuatro líneas tales que tres no tienen un punto en común.
3. Toda línea contiene al menos tres puntos y cada punto está contenido en al menos tres líneas.
4. Toda línea consiste de  $q + 1$  puntos.
5. Hay  $q + 1$  líneas que pasan por cada punto.
6. El plano contiene  $q^2 + q + 1$  puntos.
7. El plano contiene  $q^2 + q + 1$  líneas.

*Demostración.*

1. Supongamos que  $P, Q$  son dos puntos en las líneas  $l$  y  $g$ . Por (A1)  $l = g$ .
2. Sean  $\{P_1, \dots, P_4\}$  los cuatro puntos que satisfacen (A3). Las líneas buscadas son  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}$ ,  $\overline{P_3P_4}$  y  $\overline{P_4P_1}$ . Supongamos que  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}$  y  $\overline{P_3P_4}$  tienen un punto en común,  $x$ . Los puntos en  $\{P_1, \dots, P_4\}$  determinan 6 líneas, entonces cada dos puntos distintos determinan una línea distinta. Las líneas  $\overline{P_1P_2}$  y  $\overline{P_2P_3}$  tienen a los puntos  $P_2$  y  $x$  en común. Entonces para que  $\overline{P_1P_2} \neq \overline{P_2P_3}$  se tiene que  $x = P_2$ , pues de lo contrario por (A1) las líneas serían iguales.

y los puntos en  $\{P_1, \dots, P_4\}$  a lo más podrían determinar 5 líneas. Ahora consideraremos a  $\overline{P_2P_3}$  y  $\overline{P_3P_4}$ , nuevamente tienen en común a los puntos  $P_3$  y  $x = P_2$  por lo tanto  $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ , una contradicción.

3. Sea  $l$  una línea y consideremos el cuadrilátero  $C = \{P_1, \dots, P_4\}$  dado en (A3). Por ser cuadrilátero  $|l \cap C| \leq 2$ .

Ahora supongamos que  $|l \cap C| = 2$ , sin pérdida de generalidad  $P_3, P_4 \in l$ . Como las líneas determinadas por  $P_3P_4$  y  $P_1P_2$  tienen intersección no vacía por (A1), entonces  $\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_3P_4} \in l$  y además es en un punto distinto de  $P_3, P_4$ . Por lo que  $l$  contiene al menos tres puntos.

Supongamos que  $|l \cap C| = 1$  y sea  $P_4 \in l$ , entonces  $\overline{P_1P_2}$  y  $\overline{P_2P_3}$  cada una determina un punto distinto en  $l$ .

Finalmente supongamos que  $|l \cap C| = 0$ .  $\overline{P_4P_1}, \overline{P_4P_2}, \overline{P_4P_3}$  intersectan a  $l$  en un punto cada una. Supongamos  $\overline{P_4P_1} \cap l = \overline{P_4P_2} \cap l$ . Dado que  $\overline{P_4P_1} \neq \overline{P_4P_2}$ , las líneas se intersectan en  $P_4 \in C$ , lo cual no es posible pues supusimos que  $|l \cap C| = 0$ . Por lo tanto  $l$  contiene al menos tres puntos.

4. Sea  $l'$  cualquier línea y  $l = \{P_1, \dots, P_{q+1}\}$  la línea dada en (A4), con  $l \neq l'$ . A causa de (A2)  $l \cap l' = P_j$  y debido a (3) existe otro punto en  $l$ , digamos  $P_r$ , que no está en  $l'$  o si no por (A1)  $l = l'$ . Tomemos un nuevo punto  $P_k \in l$  con  $P_k \neq P_j$  (el cual existe por (3)). Podemos observar que la línea que conecta a  $P_k$  y  $P_r$  contiene otro punto distinto  $P_{k,r}$ . Consideremos  $l_i$  las líneas que conectan  $P_i$  con  $P_{k,r}$ . Cada línea intersecta a  $l'$  en un punto, resta probar que se intersectan con  $l'$  en puntos distintos. Supongamos lo contrario, es decir  $l_i \cap l' = l_j \cap l' = P$  para  $i \neq j$ , entonces  $P, P_{k,r} \in l_i, l_j$ , lo cual implica por (A1) que  $l_i = l_j$ , y como resultado  $P_i = P_j$  lo cual no puede ocurrir pues  $l$  tenía exactamente  $q+1$  puntos. Por lo tanto  $l_i \cap l' \neq l_j \cap l'$  y podemos concluir que  $l'$  contiene al menos  $q+1$  puntos. Para mayor claridad ver Figura 3.2.

5. Es el dual del 4.

6. Sea  $P_s$  un punto del plano. Cada punto del plano distinto de  $P_s$  es un punto de una línea que pasa por  $P_s$ . Basta contar el número de puntos distintos que están sobre todas las líneas que concurren en  $P_s$ . Por 5 hay  $q+1$  líneas que pasan por  $P_s$ , y por 4 cada línea contiene  $q+1$  puntos de los cuales  $q$  puntos son distintos de  $P_s$ . Por lo que en total hay  $(q+1)q+1 = q^2+q+1$  puntos.

7. Es el dual del 5.

□

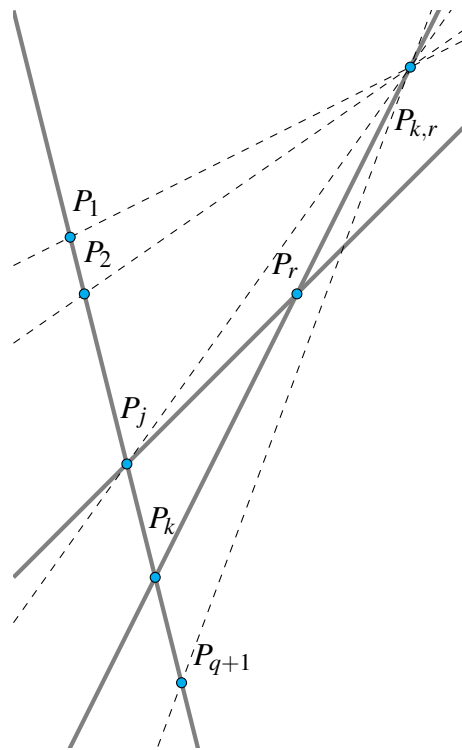


Figura 3.2: La construcción descrita en 4.

## 3.2. Diseños

### Definición 3.6.

Un *diseño de bloque incompleto balanceado* (Balanced incomplete block design o BIBD) denotado por  $D(b, v, r, k, \lambda)$  en un conjunto subyacente  $S$  con  $|S| = v$  es una familia de  $b$  subconjuntos de  $S$  llamados bloques que cumple:

1. Cada bloque tiene orden  $k$ .
2. Si  $x \in S$ , entonces  $x$  está en  $r$  bloques.
3. Si  $x, y \in S$  son tales que  $x \neq y$  entonces  $\{x, y\}$  esta contenido en exactamente  $\lambda$  bloques

Notemos que el parámetro  $r$  queda determinado por los parámetros  $v, \lambda$  y  $k$ .

**Lemma 3.7.**

Si  $D(b, v, r, k, \lambda)$  es un diseño de bloque incompleto balanceado, entonces

$$r = \lambda \frac{v-1}{k-1}.$$

*Demostración.*

Vamos a contar cuantas formas hay de escoger dos elementos y un bloque donde estén dichos elementos. Hay  $\binom{v}{2}$  de fijar dos elementos de  $S$ , los cuales están en  $\lambda$  bloques distintos. Así hay  $\lambda \binom{v}{2} = \lambda \frac{v(v-1)}{2}$  formas de escoger dos elementos y un bloque que los contenga.

También podemos fijar un elemento de  $S$ , el cual esta en  $r$  bloques distintos. Cada bloque contiene  $(k-1)$  elementos distintos del elemento que ya fijamos. En total nos quedan  $\frac{vr(k-1)}{2}$  formas de escoger los elementos y bloque deseados. Por lo tanto

$$\lambda \frac{v(v-1)}{2} = \frac{vr(k-1)}{2}$$

y así

$$\lambda(v-1) = r(k-1).$$

□

Podemos generalizar la tercera propiedad.

**Definición 3.8.**

Para  $t > 1$ , un  $t$ -diseño (t-design) en un conjunto  $S$  con  $|S| = v$ , denotado por  $t - (v, k, \lambda)$ , es una familia de  $b$  subconjuntos de  $S$  llamados bloques que cumplen las propiedades (1) y (2) descritas anteriormente. Además  $t - (v, k, \lambda)$  cumple que todo subconjunto de  $S$  de orden  $t$  está contenido en exactamente  $\lambda$  bloques.

Nosotros nos vamos a enfocar en una clase de t-diseños en particular llamados sistemas de Steiner.

**Definición 3.9.**

Un *sistema de Steiner* denotado por  $S(d, k, n)$  es un  $d - (n, k, 1)$  diseño. Esto significa que en total hay  $n$  elementos, y cada uno de los subconjuntos de cardinalidad  $d$  esta contenido en un único bloque el cual contiene  $k$  elementos.

Para lo siguiente, recordemos que una matroide es pavimentada si no tiene circuitos de orden menor a su rango.

A través de un sistema de Steiner  $S(d, k, n)$  podemos definir una nueva matroide  $M$  con conjunto subyacente  $S$ , donde los hiperplanos de la matroide son los bloques del sistema de Steiner. Veremos que la matroide  $M$  es pavimentada. Esta idea se

puede generalizar a diseños de bloque balanceados incompletos. La matroide resultante es llamada diseño de matroide (matroid design), la propiedad de pavimentada se puede perder en diseños de bloque balanceados incompletos.

**Teorema 3.10.**

Si  $S(d, k, n)$  es un sistema de Steiner en un conjunto subyacente  $S$  con  $k < n$ , los bloques del sistema son los hiperplanos de una matroide  $M$  pavimentada.

*Demostración.*

Tenemos que ver que el conjunto de bloques del sistema  $S(d, k, n)$  cumplen las propiedades (H1), (H2) y (H3). Denotaremos por  $\mathcal{H}$  al conjunto de bloques. Como no hay bloque de tamaño  $n$ , entonces  $S \notin \mathcal{H}$ . Supongamos que existen  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  son tales que  $H_1 \subseteq H_2$ , al tener la misma cardinalidad podemos concluir que  $H_1 = H_2$ . Sean  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  y  $x \notin H_1 \cap H_2$ . Nuevamente como  $H_1, H_2$  son distintos  $|H_1 \cap H_2| < d$ , entonces  $|(H_1 \cap H_2) \cup \{x\}| \leq d$ . Si es necesario rellenamos al conjunto  $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$  hasta que tenga exactamete  $d$  elementos. Por lo que existe un bloque  $H_3$  que lo contiene. Por lo tanto  $\mathcal{H}$  es el conjunto de bloques de una matroide  $M$ . Para calcular el rango de dicha matroide, tomemos un hiperplano  $A$  y  $x \notin A$ .  $A \cup \{x\}$  contiene una base  $B$ . Además todo subconjunto  $X$  de  $A \cup \{x\}$  con cardinalidad menor a  $d + 1$  puede ser extendido con elementos de  $A$ , a un conjunto de cardinalidad  $d$ . Por lo que  $X$  esta contenido en un bloque o hiperplano y como consecuencia no es una base. Por lo tanto  $|B| = d + 1$ , así el rango de  $M$  es  $d + 1$ .

Resta ver que  $M$  es pavimentada. Supongamos que existe un circuito  $C$  tal que  $|C| \leq d$ . Entonces está contenido en un hiperplano  $H$ . Si es necesario podemos agregar elementos hasta obtener  $X$  tal que  $C \subseteq X$  y  $|X| = d$ . Así  $X$  genera un hiperplano  $H$  tal que si  $x \notin H$  vemos que  $\rho(X \cup \{x\}) = d + 1 = |X \cup \{x\}|$ , lo cual no es posible pues contiene a un circuito. Por lo tanto  $M$  es pavimentada.  $\square$

El Plano de Fano es un ejemplo de un Sistema de Steiner  $S(2, 3, 7)$ . Los hiperplanos de Fano son las líneas donde cada línea tiene 3 puntos. En total hay 7 puntos y cada 2 puntos definen una línea.

### 3.3. Matroides Binarias

Una matroide  $M$  en  $S$  es representable sobre un campo  $F$  si existe un  $F$ -espacio vectorial  $V$  y un mapeo  $\phi : S \rightarrow V$  que preserva la función rango. A la función  $\phi$  se le llama una representación de  $M$ .

**Definición 3.11.**

Una matroide  $M$  es *binaria* si puede ser representada en  $GF(2)$



La siguiente proposición será usada para dar una caracterización de matroides binarias. Para demostrar dicha proposición, requeriremos los siguientes lemas.

**Lemma 3.12.**

Sea  $M$  una matroide en  $S$  e  $I$  un conjunto independiente de  $M$ . Si  $x \in I$  entonces existe un circuito  $C^*$  de  $M^*$  tal que  $C^* \cap I = \{x\}$

*Demostración.*

Como  $I \in \mathcal{I}$ , se puede extender a una base  $B$  de  $M$  tal que  $x \in B$ .  $S \setminus B = B^*$  es una base de  $M^*$  que no contiene a  $x$ , por el Lema 2.22 existe un circuito de  $M^*$   $C^* \subseteq B^* \cup \{x\} \subseteq (S \setminus B) \cup \{x\}$  que contiene a  $x$ , por lo que  $C^*$  es el circuito buscado.  $\square$

**Lemma 3.13.**

Dados  $M$  una matroide,  $C$  un circuito de  $M$  y  $a, b$  dos elementos distintos de  $C$ , existe un circuito  $C^*$  de  $M^*$  tal que los únicos elementos de  $C$  contenidos en  $C^*$  son  $a$  y  $b$ .

*Demostración.* Como  $C$  es un conjunto dependiente minimal,  $C \setminus \{a\}$  es independiente, entonces existe una base  $B$  de  $M$  que contiene a  $C \setminus \{a\}$ .  $B^* = S \setminus B$  es una base de  $M^*$  que contiene a  $a$  pero no contiene a  $b$ . Por el Lema 2.22, dado que  $b \in C \setminus \{a\} \subseteq B$  existe un único circuito  $C^*$  de  $M^*$  contenido en  $B^* \cup \{b\}$  tal que  $b \in C^*$ . Notemos que  $C \cap C^* \subseteq \{a, b\}$  ya que  $C \setminus \{a\} \subseteq B$  y  $C^* \subseteq (S \setminus B) \cup \{b\}$ . Por el Lema 2.32 vemos que  $|C \cap C^*| \neq 1$ , y entonces  $C \cap C^* \neq \{b\}$ . Por lo tanto  $C \cap C^* = \{a, b\}$ .  $\square$

**Proposición 3.14.** Dada  $M$  una matroide, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) Si  $C$  es un circuito y  $C^*$  un cocircuito de  $M$ ,  $|C \cap C^*|$  es par.
- (b) La diferencia simétrica de cualquier colección de circuitos de  $M$  es la unión de circuitos disjuntos.
- (c) Si  $C_1, C_2$  son circuitos distintos, entonces  $C_1 \triangle C_2$  contiene un circuito  $C$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $M$  cumple con (a) y sean  $C_1, \dots, C_k$  una colección de circuitos de  $M$ . Denotaremos por  $A$  a la diferencia simétrica de  $C_1, \dots, C_k$ . Si  $A = \emptyset$ , entonces  $A$  es la unión vacía de circuitos. Adicionalmente podemos suponer que  $A$  no contiene circuitos de cardinalidad uno, de lo contrario, si  $x_1$  es un circuito de cardinalidad 1 en  $A$  definimos  $A_1 = A \triangle \{x_1\}$ . Consideremos  $x \in A$ . Probaremos que  $A$  contiene un circuito. Supongamos que  $A$  es independiente. Sea  $C^*$  el circuito de  $M^*$  dado por el

Lema 3.12 con  $x \in A$ . Por (a) para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $|C_i \cap C^*|$  es par. Veamos que  $|A \cap C^*|$  es par. Primero notemos que

$$\begin{aligned} |A \cap C^*| &= |(C_1 \Delta \dots \Delta C_k) \cap C^*| \\ &= |(C_1 \cap C^*) \Delta \dots \Delta (C_k \cap C^*)|. \end{aligned}$$

Así, para demostrar que  $|A \cap C^*|$  es par, basta probar que  $|X \Delta Y|$  es par si  $X, Y$  son dos conjuntos pares. Por definición

$$\begin{aligned} |X \Delta Y| &= |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| \\ &= |X \setminus Y| + |Y \setminus X|. \end{aligned}$$

Si  $X \cap Y$  es par, entonces  $X \setminus Y$  y  $Y \setminus X$  son pares. Si  $X \cap Y$  es impar, entonces  $X \setminus Y$  y  $Y \setminus X$  son impares. Por lo tanto  $|X \Delta Y|$  es par. El resultado se puede extender por inducción para probar que  $|A \cap C^*|$  es par, lo que contradice que  $C^* \cap A = \{x\}$ . Por lo tanto  $A$  contiene un circuito  $C$ .

Si  $A = C$  hemos acabado. Supongamos que  $A \neq C$  y consideremos  $A_1 = C \Delta C_1 \Delta \dots \Delta C_k$ . Podemos repetir el argumento anterior en  $A_1$  y encontrar un circuito  $C^{(1)}$  contenido en  $A_1$ . Notemos que  $A$  es finito y  $A_1 = A \setminus C$  por lo que eventualmente va a existir  $A_n = C^{(n)}$  y por lo tanto se cumple (b).

La implicación de (b) a (c) es trivial. Supongamos que (c) se cumple pero (a) no. Tomemos el menor contraejemplo, es decir,  $C$  y  $C^*$  circuitos de  $M$  y  $M^*$  respectivamente, tales que  $|C \cap C^*|$  es el menor natural que es impar. Por el Lema 2.32  $|C \cap C^*| \neq 1$  por lo que  $|C \cap C^*| \geq 3$  y existen  $a, b, c \in C \cap C^*$  elementos distintos. Por el Lema 3.13 para  $M^*$  existe  $C_1$  un circuito de  $M^*$  tal que  $C^* \cap C_1 = \{a, c\}$ . Dado que  $a \in C \cap C_1$  y  $b \in C \setminus C_1$ , por (C3') existe  $C_2$  un circuito de  $M$  tal que

$$b \in C_2 \subseteq (C \cup C_1) \setminus \{a\}.$$

Tomaremos  $C_2$  tal que  $C \cup C_2$  sea minimal. Nuevamente como  $b \in C \cap C_2$  y  $a \in C \setminus C_2$  usaremos (C3') para encontrar  $C_3$  tal que

$$a \in C_3 \subseteq (C \cup C_2) \setminus \{b\},$$

de donde  $a \in C \cap C_3$  y  $b \in C \setminus C_3$  y por (C3') existe  $C_4$  tal que

$$b \in C_4 \subseteq (C \cup C_3) \setminus \{a\}.$$

Por lo tanto

$$C \cup C_4 \subseteq C \cup C_3 \subseteq C \cup C_2$$

y

$$b \in C_4 \subseteq C \cup C_3 \subseteq C \cup C_2 \subseteq (C \cup C_1) \setminus \{a\}.$$

Por la minimalidad de  $C \cup C_2$ ,  $C \cup C_2 \subseteq C \cup C_4$ . Así,

$$C \cup C_2 = C \cup C_4 = C \cup C_3,$$

de donde se sigue que  $C_3 \setminus C = C_2 \setminus C$ .

Ahora supongamos que existe  $c \in C_2 \Delta C_3 = (C_3 \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C_3)$  tal que  $c \notin C$ . Entonces  $c \in C_3 \setminus C_2$  o  $c \in C_2 \setminus C_3$ . Sin pérdida de generalidad  $c \in C_3 \setminus C_2$ , con lo que llegamos a una contradicción con que  $c \in C_3 \setminus C = C_2 \setminus C$ . Por lo tanto  $C_2 \Delta C_3 \subseteq C$ .

Por (c) existe un circuito  $D$  tal que

$$D \subseteq C_2 \Delta C_3 \subseteq C.$$

Como consecuencia de (C2)

$$C = C_2 \Delta C_3 = D,$$

por lo que  $C \setminus C_2 = C_3 \cap C$ . Considerando que  $C_3 \setminus C = C_2 \setminus C$  obtenemos que

$$C \Delta C_2 = (C \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C) = (C_3 \cap C) \cup (C_3 \setminus C) = C_3$$

Recordemos que  $C_1 \cap C^* = \{a, c\} \subseteq C \cap C^*$ , entonces se sigue que

$$\begin{aligned} |C_2 \cap C^*| &\leq |((C \cup C_1) \setminus \{a\}) \cap C^*| \\ &= |((C \cup C_1) \cap C^*) \setminus \{a\}| \\ &= |((C \cap C^*) \cup (C_1 \cap C^*)) \setminus \{a\}| \\ &= |(C \cap C^*) \setminus \{a\}| \\ &< |C \cap C^*|. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba

$$|C_3 \cap C^*| < |C \cap C^*|,$$

además  $C_3$  y  $C_4$  son no vacíos pues  $b \in C_2 \cap C^*$  y  $a \in C_3 \cap C^*$ . Así dado que  $|C \cap C^*|$  era mínimo impar,  $|C_3 \cap C^*|$  y  $|C_2 \cap C^*|$  son pares. Como  $C_3 = C \Delta C_2$ , entonces  $C$  es la unión ajena de  $C \cap C_3$  y  $C \cap C_2$ . De esta forma  $C \cap C^*$  es la unión ajena de  $(C \cap C_3) \cap C^*$  y  $(C \cap C_2) \cap C^* = (C_2 \cap C^*) \setminus (C_3 \cap C_2 \cap C^*)$  (esto se ilustra en la Figura 3.3.)

Si  $|(C \cap C_3) \cap C^*|$  es par, como  $|C_3 \cap C^*| = |(C \cap C_3) \cap C^*| + |C_3 \cap C_2 \cap C^*|$ , entonces  $|C_3 \cap C_2 \cap C^*|$  es par y como  $|C_2 \cap C^*| = |(C \cap C_2) \cap C^*| + |C_3 \cap C_2 \cap C^*|$  es par, entonces  $|(C \cap C_2) \cap C^*|$  es par. Por lo tanto  $|C \cap C^*| = |(C \cap C_3) \cap C^*| + |(C \cap C_2) \cap C^*|$  es par. Si  $|(C \cap C_3) \cap C^*|$  es impar, entonces  $|C_3 \cap C_2 \cap C^*|$  es impar por lo que  $|(C \cap C_2) \cap C^*|$  es impar y por lo tanto  $|C \cap C^*| = |(C \cap C_3) \cap C^*| + |(C \cap C_2) \cap C^*|$  es par. Por lo tanto  $|C \cap C^*|$  es par, una contradicción.  $\square$

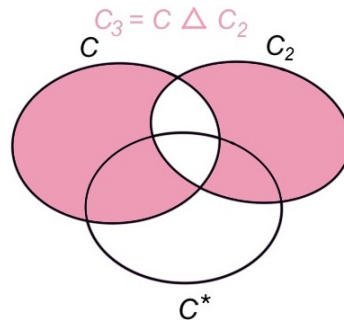


Figura 3.3: Diagrama de los conjuntos  $C$ ,  $C^*$  y  $C_2$

El siguiente teorema usa la proposición anterior para caracterizar a las matroides binarias. Su prueba no será presentada aquí pero se puede encontrar en [Wel10].

**Teorema 3.15.**

Dada  $M$  una matroide, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) Si  $C$  es un circuito y  $C^*$  un cocircuito de  $M$ ,  $|C \cap C^*|$  es par.
- (b) La diferencia simétrica de cualquier colección de circuitos de  $M$  es la unión de circuitos disjuntos.
- (c) Si  $C_1, C_2$  son circuitos distintos, entonces  $C_1 \Delta C_2$  contiene un circuito  $C$ .
- (d)  $M$  es binaria.

### 3.4. Hipergráficas

Las hipergráficas son una generalización de gráficas donde se permite tener aristas que contengan a más de 2 vértices. Las definiciones de esta sección se encuentran en [Ber79].

**Definición 3.16.**

Dado  $V$  un conjunto finito y  $E = \{E_i | i \in I\}$  una familia de subconjuntos de  $V$  diremos que la pareja  $H = (V, E)$  es una *hipergráfica* si

1. Para toda  $i \in I$  tenemos que  $E_i \neq \emptyset$ .
2.  $\bigcup_{i \in I} E_i = V$ .

Diremos que  $V$  es el conjunto de vértices de  $H$  y  $E$  su conjunto de aristas.

A continuación daremos las definiciones análogas para hipergráficas de conceptos básicos de gráficas.

**Definición 3.17.**

Una hipergráfica *simple*  $H = (V, E)$  es una hipergráfica donde para toda  $i \in I$  sucede que  $|E_i| > 1$  y para todas  $i, j \in I$  donde  $i \neq j$  tenemos que  $E_i \neq E_j$ .

**Definición 3.18.**

Una hipergráfica *k-uniforme* es una hipergráfica tal que toda arista  $E_i$  con  $i \in I$  tiene cardinalidad  $k$ .

**Ejemplo 3.19.**

La pareja  $H = (V, E)$  donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$  es una hipergráfica. Una representación de  $H$  se puede ver en la figura 3.4

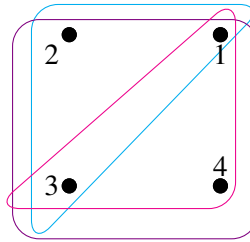


Figura 3.4:  $H$

Notemos que  $H$  no es uniforme pues  $|\{1, 2, 3\}| \neq |\{1, 2, 3, 4\}|$

**Definición 3.20.**

El *grado* de un vértice  $v \in V$  se define como  $d_H(v) = |\{i \mid v \in E_i\}|$

**Definición 3.21.**

Una hipergráfica es *d-regular* si para todo  $v \in V$  sucede que  $d_H(v) = d$

El teorema de Euler se generaliza a hipergráficas *k-uniformes*, su prueba es análoga a la prueba correspondiente a gráficas.

**Proposición 3.22.**

Si  $H = (V, E)$  es una hipergráfica *k-uniforme* y *simple*, entonces

$$\sum_{v \in V} d_H(v) = k|E|.$$

*Demostración.*

Por cada  $v \in V$  contamos las aristas adyacentes a  $v$ , que en total son  $d_H(v)$ . Por ser regular cada arista esta en  $k$  vértices, por lo que son contadas  $k$  veces. Así se sigue que  $\sum_{v \in V} d_H(v) = k|E|$ .  $\square$

Con el fin de ver coloraciones heterocromáticas mas adelante, es necesario dar las siguientes definiciones que serán de gran importancia en los capítulos 3 y 4.

**Definición 3.23.**

Una  $t$ -coloración de una hipergráfica  $H = (V, E)$  es una función  $\phi : V(H) \rightarrow [t]$  suprayectiva.

Dada una estructura, las coloraciones heterocromáticas buscan subestructuras donde todos los elementos tienen colores distintos. Es por esto que a veces son conocidas como coloraciones arcoíris.

**Definición 3.24.**

Una  $t$ -coloración  $\phi$  de  $H = (V, E)$  es *heterocromática* si existe  $e \in E$  tal que  $|\phi[V[e]]| = |V[e]|$ , esto es, todos los vértices de  $e$  tienen distinto color. Diremos que la hiperarista  $e$  es heterocromática.

Una forma de ver los problemas tipo Ramsey es como problemas de coloración de vértices de una hipergráfica  $H$ , donde buscamos el máximo número de colores en que siempre exista alguna hiperarista monocromática, es decir, con todos sus vértices del mismo color. Si queremos pensarlo con particiones buscamos el máximo número de partes de una partición del conjunto de vértices tal que siempre exista una hiperarista contenida en una de las partes.

Los problemas de número heterocromático son problemas de coloración de vértices de una hipergráfica  $H$ , y se busca el mínimo número de colores tal que siempre exista alguna hiperarista heterocromática, es decir, con todos los vértices de diferentes colores. Análogamente, buscamos el mínimo número de partes en que se puede particionar al conjunto de vértices de tal forma que siempre exista un hiperarista con todos sus vértices en distintas partes.

En general, en ambos casos la hipergráfica  $H$  la definimos en términos de una estructura diferente, como pueden ser una gráfica u otra hipergráfica distinta.

Los vértices de la hipergráfica  $H$  los definimos dependiendo de los elementos que se está coloreando en la estructura original, ya sean aristas, hiperaristas, vértices u otros elementos. A las hiperaristas de  $H$  las definimos a partir de esas subestructuras de la estructura original que se busca que sea monocromática o heterocromática (arcoíris), algunos ejemplos de dichas subestructuras son subgráficas completas, ciclos, árboles, entre otros.

**Definición 3.25.**

El número *anti-Ramsey* o *heterocromático* de una hipergráfica  $H$  es el mínimo natural  $t$  tal que toda  $t$ -coloración de  $H$  es heterocromática y lo denotaremos por  $hc(H)$ . El concepto de número heterocromático se introdujo en [ABNL92].

**Observación 3.26.**

Toda  $|V(H)|$ -coloración de  $H$  es heterocromática por lo que  $hc(H) \leq |V(H)|$ . Además si  $H'$  es una subhipergráfica generadora de  $H$ , entonces  $hc(H) \leq hc(H')$  pues cualquier coloración heterocromática de  $H$  induce una coloración heterocromática de  $H'$ .

Para el siguiente ejemplo hay que definir el número anti-ramsey  $ar(n, G)$ . Dados una gráfica  $G$  y  $n \geq |V(G)|$ , definimos  $ar(n, G)$  como el mayor entero tal que existe una coloración de las aristas de la gráfica completa  $K_n$  con  $ar(n, G)$  colores y que no contenga una copia de  $G$  heterocromática.

**Ejemplo 3.27.**

Sea  $K_n$  una gráfica completa y  $G$  una gráfica con  $m \leq n$  vértices. Consideremos  $H = (V(K_n), E')$  donde  $E' = \{E(G') \mid G' \leq K_n \text{ y } G' \cong G\}$ . Podemos ver que  $hc(H) = ar(n, G) + 1$  pues si existe una arista heterocromática en  $H$ , entonces existe una subgráfica de  $K_n$  heterocromática e isomorfa a  $G$  y análogamente al revés.

**Definición 3.28.**

Dada una hipergráfica  $H = (V, E)$ , una  $t$ -transversal de su conjunto de aristas es un subconjunto  $X$  de  $V$  tal que para toda  $e \in E$   $|X \cap e| \geq t$ .

Denotaremos por  $\tau$  la cardinalidad mínima de una 2-transversal del conjunto de aristas de una hipergráfica. Dado que una 2-transversal atraviesa 2 veces a cada hiperarista, se puede dar una coloración sin aristas heterocromáticas con  $n - \tau + 1$  colores, mas adelante se definirá dicha coloración.

Un ejemplo de una 2-transversal es el siguiente. Sea  $G = (V(G), E(G))$  una gráfica conexa, no completa. Podemos definir  $H$  la hipergráfica del conjunto de árboles generadores asociada a  $G$  como la hipergráfica cuyos vértices son las aristas de  $G$  y  $e \subseteq E(G)$  es una hiperarista de  $H$  si  $e$  es el conjunto de las aristas de un árbol generador. Sean  $u, v$  dos vértices no adyacentes. El conjunto de las aristas incidentes a  $u$  o a  $v$  es una 2-transversal, no necesariamente mínima, de  $H$ .

## Capítulo 4

# Gráficas Geométricas y su número heterocromático

En este capítulo estudiaremos coloraciones del conjunto de aristas de gráficas geométricas. Se presentará un resultado tipo Ramsey que será usado para encontrar el número anti-Ramsey de la hipergráfica de árboles generadores planos de gráficas completas geométricas con a lo más un vértice dentro de la envolvente convexa.

### 4.1. Orugas

Las siguientes definiciones son necesarias para hablar de gráficas geométricas.

**Definición 4.1.**

Un punto  $p$  es una *combinación convexa* de un conjunto  $P = \{p_0, \dots, p_n\}$  de puntos en el plano si existen reales  $0 \leq \alpha_0, \dots, \alpha_n$  tales que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$  y  $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i p_i$ .

**Definición 4.2.**

La *envolvente convexa* o *cerradura convexa* de un conjunto de puntos  $P$  en el plano, es el conjunto de puntos  $p$  tales que  $p$  es una combinación convexa de  $P$ .

**Definición 4.3.**

Una colección de puntos  $P$  en el plano se dice que están en *posición general* si no hay tres puntos de  $P$  colineales. Además se dice que los puntos en posición general están en *posición convexa* si no hay punto que pueda ser expresado como combinación convexa de los demás.

**Definición 4.4.**

Dado  $P$  un conjunto de puntos en posición general en el plano, una gráfica *geométrica* con vértices en  $P$  es una gráfica  $G$  dibujada en el plano tal que todas sus aristas son segmentos de línea recta.



Las siguientes subgráficas de una gráfica geométrica, serán de interés en el futuro.

**Definición 4.5.**

Un *árbol plano* de una gráfica geométrica  $G$ , es un árbol de  $G$  que no se autointersecta. Un ejemplo de un árbol plano se puede encontrar en la Figura 4.1

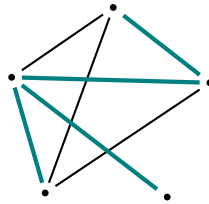


Figura 4.1: Gráfica geométrica  $G$  con árbol plano

**Definición 4.6.**

Una *oruga*  $R$ , es un árbol que consta de una trayectoria llamada cuerpo y sus patas son hojas que salen del cuerpo. Un ejemplo de una oruga se puede ver en la Figura 4.2.

Dados  $P$  un conjunto de puntos en posición general, una *oruga geométrica*  $R$  es una oruga cuyo cuerpo esta compuesto por aristas de la frontera de la envolvente convexa de  $P$  y tal que para cualquier pata  $e$  de  $R$  la recta que contiene a  $e$  no interseca a  $R$  en ningún punto que no este en  $e$ . Un ejemplo de una oruga geométrica se puede ver en la Figura 4.3.

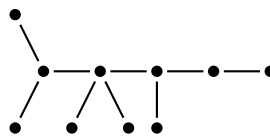


Figura 4.2: Oruga

Dado un conjunto de puntos  $P$  denotaremos por  $CH(P)$  la frontera de la envolvente convexa de  $P$ , al que nos referiremos como casquete convexo. En la Figura 4.5 se encuentra un ejemplo de un casquete convexo en azul.

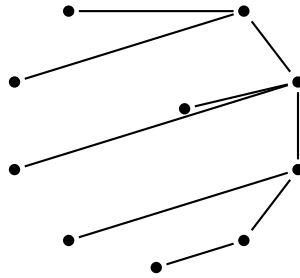


Figura 4.3: Oruga Geométrica

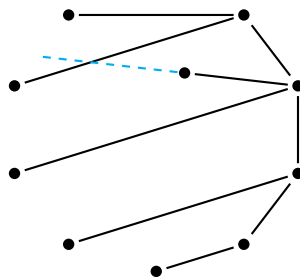


Figura 4.4: Oruga No Geométrica

## 4.2. Un teorema de Ramsey

El siguiente teorema se encuentra en [KPTV98]. Es el único teorema tipo Ramsey que veremos.

**Teorema 4.7** (Károlyi et al).

Si las aristas de una gráfica geométrica completa finita son coloreadas de dos colores, entonces existe un árbol generador plano monocromático.

*Demostración.*

Sea  $P$  el conjunto de vértices de una gráfica geométrica completa finita  $G$  cuyas aristas están coloreadas de color rojo y azul por la función  $c : E(G) \rightarrow \{a, r\}$ . Podemos suponer que no hay ningún vértice con misma coordenada  $x$  por lo que podemos numerar a  $P$  dependiendo de su coordenada  $x$  de menor a mayor. Supongamos que  $\{p_1, \dots, p_n\}$  es tal numeración. La prueba será por inducción sobre  $n$ . El caso base cuando  $n = 1, 2$  es trivial. Supongamos cierto para cuando tenemos menos de  $n$  vértices.

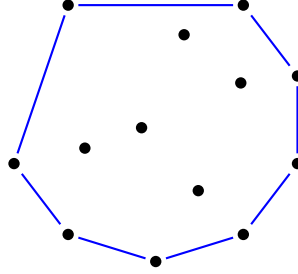


Figura 4.5: Ejemplo de un casquete convexo en azul.

Primero nos vamos a enfocar en las aristas de  $\text{CH}(P)$ . Si hay dos aristas con colores distintos, podemos suponer que el vértice con una arista en  $\text{CH}(P)$  roja y una arista en  $\text{CH}(P)$  azul es  $p_n$ . Si consideramos a la subgráfica inducida por  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  podemos usar la hipótesis de inducción para encontrar un árbol plano generador monocromático y restaría agregar la arista en  $\text{CH}(P)$  del color correspondiente. El árbol restante seguirá siendo plano pues la arista agregada estaba en la frontera de la envolvente convexa, además de que fue extendido a ser un árbol generador de  $G$ . Supongamos, entonces, que todas las aristas de  $\text{CH}(P)$  son de color rojo.

Para cada  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  definimos las subgráficas  $K_i^l$  y  $K_i^r$  como

$$K_i^l = G[\{p_1, \dots, p_i\}] \text{ y } K_i^r = G[\{p_i, \dots, p_n\}]$$

Por hipótesis de inducción para cada  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  podemos encontrar  $T_i^l$  y  $T_i^r$ , árboles generadores geométricos monocromáticos de  $K_i^l$  y  $K_i^r$  respectivamente. Notemos que si existe  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  tal que  $c(T_i^l) = c(T_i^r)$ , entonces al unirlos podemos extender los dos árboles a árboles generadores pues únicamente se intersectan en  $p_i$  por lo que  $T_i^l \cup T_i^r$  continua siendo árbol. Resta ver que sea plano. Como  $T_i^l$  y  $T_i^r$  están contenidos en las envolventes convexas de  $K_i^l$  y  $K_i^r$ , las cuales únicamente se intersectan en  $p_i$ . Veamos entonces que  $T_i^l \cup T_i^r$  no se autointersectan. Esta construcción se puede ver en la Figura 4.6

Nos podemos preguntar por el color de  $T_2^r$  y  $T_{n-1}^l$ . Supongamos que  $T_2^r$  es de color rojo, notemos que  $p_1$  tiene una arista en el casquete convexo que conecta a  $p_1$  con algún vértice en  $\{p_2, \dots, p_n\}$ , por lo que al unir esta arista podemos expandir a  $T_2^r$  a un árbol generador rojo. Por lo tanto  $T_2^r$  es azul y  $T_2^l$  es rojo. Análogamente se demuestra que  $T_{n-1}^l$  es azul y  $T_{n-1}^r$  es rojo. En la Figura 4.7 se pueden ver estas construcciones.

Si nos fijamos en la secuencias de árboles izquierdos  $\{T_2^l, \dots, T_{n-1}^l\}$  y derechos  $\{T_2^r, \dots, T_{n-1}^r\}$  se concluye que existe  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  tal que  $T_i^l$  es rojo y  $T_i^r$  es

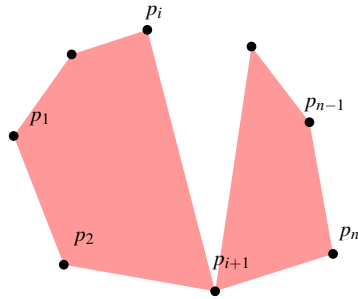


Figura 4.6:  $T_{i+1}^r$  y  $T_{i+1}^l$  rojos

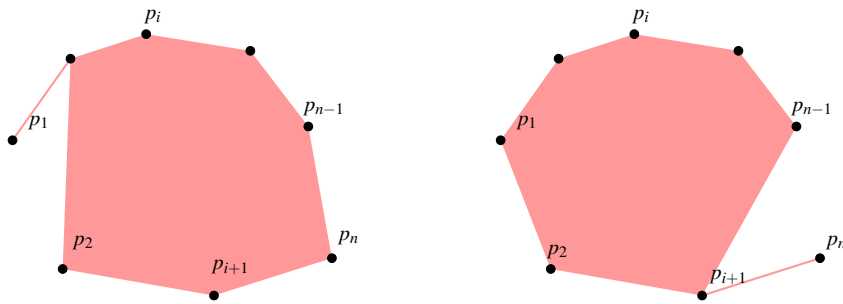


Figura 4.7:  $T_2^r$  y  $T_{n-1}^l$

azul pero  $T_{i+1}^l$  es azul y  $T_{i+1}^r$  es rojo, es decir, hay un paso donde se cambia de colores. Notemos que  $K_i^l$  y  $K_{i+1}^r$  tienen envolventes convexas ajenas por lo que  $T_i^l$  y  $T_{i+1}^r$  no se intersectan en ninguna arista. Además si nos fijamos en la recta que separa a  $K_i^l$  y  $K_{i+1}^r$  existe una arista  $a$  de la envolvente convexa que no esta en ninguno de los dos árboles y que intersecta a dicha recta. Proponemos  $T = T_i^l \cup T_{i+1}^r \cup \{a\}$ . Es monocromático pues  $T_i^l$  y  $T_{i+1}^r$  eran rojas por elección y  $a$  es roja por estar en la envolvente convexa.  $T$  es un árbol pues  $T_i^l$  y  $T_{i+1}^r$  son ajenos. Como  $a$  esta en la envolvente convexa de  $P$ ,  $a$  no intersecta a las aristas de  $T_i^l$  y  $T_{i+1}^r$  las cuales tampoco se intersectan mutuamente pues sus envolventes convexas eran ajenas por lo tanto es un árbol plano. Esta construcción se puede ver en la Figura 4.8

□

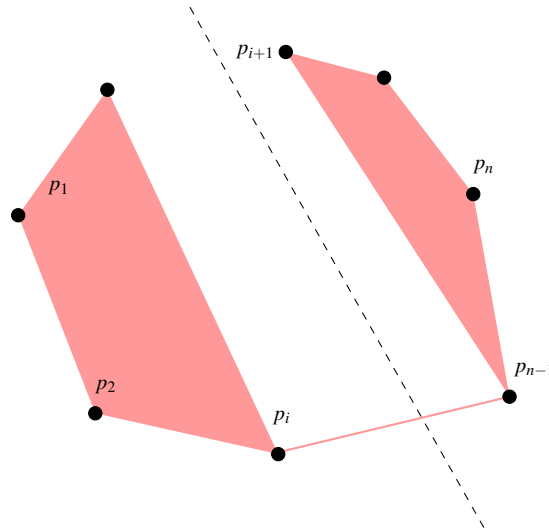


Figura 4.8:  $T_i^l$  y  $T_{i+1}^r$

### 4.3. Árboles generadores planos heterocromáticos

El siguiente teorema se encuentra en [UG11] y establece una condición necesaria y suficiente para que el complemento de un árbol generador plano en una gráfica geométrica contenga otro árbol generador plano. De aquí en adelante las orugas geométricas y las estrellas serán estructuras indeseables.

#### Teorema 4.8.

Sea  $R$  un árbol generador plano de una gráfica geométrica completa  $G$ . El complemento de la gráfica  $R^c$  contiene un árbol generador plano sí y sólo sí  $R$  no es una estrella o una oruga geométrica.

En el siguiente ejemplo hay una oruga geométrica en verde, pero el complemento no contiene un árbol generador plano. Si el complemento contuviera un árbol generador plano  $T$ , entonces  $T$  contendría a la arista  $v_6v_2$  o a la arista  $v_6v_4$ . En ambos casos, no habría una arista incidente en  $v_1$  o  $v_4$  correspondientemente.

El siguiente lema fue probado por García et al. en [GHH<sup>+</sup>02]. Si consideramos la hipergráfica definida por el conjunto de aristas de los árboles generadores planos, el siguiente lema nos da una 2-transversal de dicha hipergráfica.

#### Lemma 4.9.

Sea  $P$  un conjunto con  $|P| \geq 3$  y cuyos puntos están en posición convexa en el

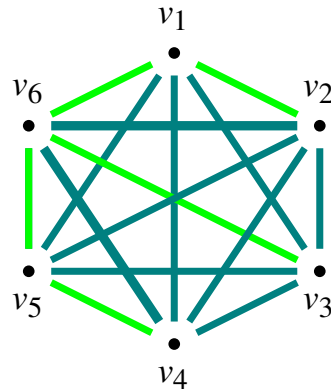


Figura 4.9: Oruga geométrica cuyo complemento no contiene un árbol generador plano.

plano. Si  $R$  es un árbol generador plano de la gráfica geométrica completa con conjunto de vértices  $P$ , entonces al menos dos aristas de  $R$  están en  $CH(P)$

Los siguientes resultados se encuentran en el artículo [MR13].

Denotaremos por  $i(P)$  el número de puntos de  $P$  que no se encuentran en la frontera de la cerradura convexa de  $P$ .

**Lemma 4.10.**

Sean  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano tales que  $i(P) = 1$  y  $w$  el único punto de  $P$  en el interior de la cerradura convexa. Sean  $u$  y  $v$  puntos en el casquete convexo tales que satisfacen que el ángulo sustentado por los segmentos de recta  $uw$  y  $wv$  contienen el mayor número de puntos en el lado en que dicho ángulo es menor a  $\frac{\pi}{2}$ . Si  $Q$  es el conjunto formado por las aristas de  $CH(P)$  junto con  $uw$  y  $wv$ , entonces cualquier árbol generador plano  $R$  de la gráfica geométrica completa con vértices  $P$ , contiene al menos dos aristas en  $Q$ .

*Demostración.*

Sea  $G$  una gráfica geométrica completa con conjunto de vértices  $P$  tales que  $i(P) = 1$ . La prueba será por inducción sobre la cardinalidad de  $P$ . Si  $P$  tiene 4 puntos, entonces tres de ellos están en posición convexa y el cuarto punto está dentro de la cerradura convexa (como se ve en la Figura 4.10.) Sabemos que todo árbol generador de  $G$  debe tener 3 aristas pues  $|G| = 4$ , además  $G$  tiene en total 6 aristas de las cuales 5 están en  $Q$  por lo que la proposición se cumple.

Supongamos cierto para todo  $P' \subsetneq P$  y  $i(P') = 1$ ; y sea  $T$  un árbol generador de  $G$ . Por ser generador sabemos que hay una arista de  $T$  que toca a  $v$  y otra que toca a

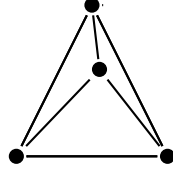


Figura 4.10: Caso base cuando  $|P| = 4$

$u$ , si ambas aristas esta en  $Q$  hemos acabado. Por lo que sin pérdida de generalidad existe una arista  $e = ux \in T$  diagonal a  $CH(P)$  que no esta en  $Q$ . Podemos observar que  $e$  no puede atravesar a  $wv$  o  $wu$  en algún punto distinto de  $u$  o  $v$ . Supongamos que  $ux$  y  $wv$  se cruzan (ver Figura 4.11). Notemos que el lado en que el ángulo sustentado por los segmentos de recta  $uw$  y  $wx$  es menor a  $\frac{\pi}{2}$  contiene a todos los puntos contenidos en el área delimitada por  $uw$  y  $wv$  del lado del ángulo menor a  $\frac{\pi}{2}$  y además contiene al punto  $v$ , una contradicción a la elección de  $v$  y  $w$ . Por lo tanto  $e$  no intersecta a los segmentos de recta  $wv$  y  $wu$  con la excepción de en los puntos  $u$  o  $v$ .

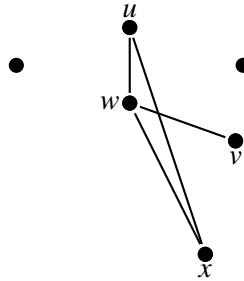


Figura 4.11: La diagonal  $e$  cruzando a la arista  $wv$ .

Consideremos  $(P^+, P^-)$  un bipartición de  $P$  donde  $P^+$  es el conjunto de puntos de  $P$  a la derecha de  $e$  junto con los puntos de  $e$  y  $P^-$  los puntos a la izquierda de  $e$ . Notemos que  $P^+, P^- \neq \emptyset$  pues  $e$  es una diagonal de  $P$  y por lo tanto no está contenida en el casquete convexo. Por la observación anterior  $e$  no contiene a  $w$  y además sabemos por hipótesis que  $w$  es un punto interior de  $P$ . Se sigue así que  $w$  es un punto interior de  $P^+$  o un punto interior de  $P^-$ . Sin pérdida de generalidad  $w$  esta en el interior de  $P^+$ .

Como  $P^+ \subseteq P$  y  $P^- \neq \emptyset$ , entonces  $|P^+| < |P|$ . Además notemos que se hereda la propiedad de que los segmentos de recta  $uw$  y  $wv$  que contienen el mayor número de puntos de  $P^+$  en el lado en que dicho ángulo es menor a  $\frac{\pi}{2}$ . Si  $Q^+$  es el conjunto

formado por las aristas de  $CH(P^+)$  junto con  $uw$  y  $wv$ , por inducción, el subárbol  $R \cap P^+$  de  $R$  contiene dos aristas de  $Q^+$ . Notemos que de éstas dos aristas al menos una debe de estar en  $Q$  pues hay una única arista en  $Q^+ \setminus Q = e$ .

Para  $P^-$  denotaremos  $Q^-$  al conjunto de las aristas de la frontera de  $CH(P^-)$ . Por el Lema 4.9 existen dos aristas del subárbol  $R \cap P^-$  en  $Q^-$ . Nuevamente observamos que  $Q^- \setminus Q = e$  por lo que de las dos aristas anteriores al menos una es una arista de  $Q$ . Concluimos así que al menos dos aristas de  $Q$  están en  $R$ .  $\square$

Los siguientes dos teoremas nos ayudarán a encontrar el mínimo número de colores necesario para que toda coloración de una gráfica geométrica completa con conjunto de vértices  $P$  en posición general y con  $i(G) \leq 1$  tenga un árbol generador plano heterocromático.

**Teorema 4.11.**

Si  $c$  es una  $\binom{n}{2} - n + 2$ -coloración de las aristas de  $G$ , una gráfica geométrica completa con  $n \geq 3$  vértices, entonces  $G$  tiene un árbol generador plano heterocromático.

*Demostración.*

Sea  $X$  un conjunto heterocromático de aristas con exactamente un representante de cada color. Sea  $Y$  el complemento de  $X$ . Como  $(X, Y)$  es una partición de las aristas, el Teorema 4.7 nos asegura la existencia de un árbol generador plano de  $G$  contenido propiamente en  $X$  o en  $Y$ . Como  $|X| = \binom{n}{2} - n + 2$ , entonces  $|Y| = \binom{n}{2} - (\binom{n}{2} - n + 2) = n - 2$  por lo que  $Y$  no contiene un árbol generador de  $G$  pues todo árbol generador tiene  $n - 1$  aristas. Por lo tanto  $X$  contiene un árbol generador plano el cual debe ser heterocromático por nuestra elección de  $X$ .  $\square$

**Teorema 4.12.**

Sea  $G$  una gráfica geométrica completa con conjunto de vértices  $P$  donde  $|P| \geq 3$  e  $i(P) = 1$ . Si  $c$  es una  $\binom{n}{2} - n + 1$ -coloración de las aristas de  $G$ , entonces  $G$  tiene un árbol generador plano heterocromático.

*Demostración.*

Nuevamente tomamos a  $X$  como un conjunto de aristas heterocromático de tamaño  $\binom{n}{2} - n + 1$  y consideramos  $Y$  el complemento de  $X$ . Volveremos a contar las aristas de  $Y$  pero en este caso  $|Y| = \binom{n}{2} - (\binom{n}{2} - n + 1) = n - 1$  que es el número de aristas que tiene todo árbol generador de  $G$ , por lo que  $Y$  es un árbol generador de  $G$  o todo árbol generador de  $G$  tiene una aristas en  $X$ . En el segundo caso podemos volver a usar el Teorema 4.7 para asegurar la existencia de un árbol generador plano heterocromático contenido en  $X$ . Supongamos pues que  $Y$  es un árbol generador plano de  $G$ . Por el Teorema 4.8,  $Y^c = X$  contiene un árbol generador plano si  $Y$  no es una oruga geométrica o una estrella.



Supongamos que  $Y$  es una oruga geométrica, y sea  $y = uv$  una arista en el cuerpo de la oruga, es decir  $u$  y  $v$  tienen al menos otro vecino distinto de  $v$  y  $u$  respectivamente. Esta arista existe si suponemos que  $Y$  no es una estrella. Como  $X$  contiene todos los colores, existe una arista  $x \in X$  con el mismo color que la arista  $y$ . Intentaremos evitar orugas geométricas al intercambiar  $y$  con  $x$ , pues por nuestra elección de  $y$  que se encuentra entre dos aristas distintas en  $Y$ , al agregar una nueva arista no hay forma de obtener una estrella.

Supongamos que  $S = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$  es una oruga geométrica. Como al quitar y separamos el cuerpo de la oruga  $Y$  en dos partes,  $x$  debe estar en el cuerpo de la nueva oruga. La única forma que esto ocurra es si  $Y$  y  $S$  son trayectorias sobre la frontera del casquete convexo cuya unión es toda la frontera como se ilustra en la Figura 4.12. Además si suponemos que la oruga  $Y$  tienen una pata, como la recta definida por ésta arista no debe intersectar a la oruga  $Y$ , entonces intersecta a  $x$  por lo que  $S$  no sería una oruga, por lo tanto  $Y$  no contiene patas. Se sigue que  $S$  tampoco contiene patas. Como consecuencia  $Y$  no es un árbol generador pues  $i(P) = 1$  y así el vértice dentro del casquete convexo no es cubierto por ninguna arista de  $Y$ , una contradicción. Por lo tanto  $Y^c$  contiene un árbol generador.

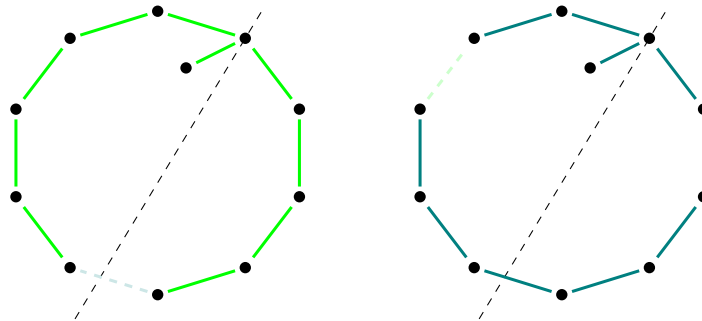


Figura 4.12: Las orugas  $Y$  y  $S$

Ahora supongamos que  $Y$  es una estrella. Tenemos dos casos dependiendo de la posición del vértice central; en la frontera del casquete convexo o dentro del casquete convexo. Para el primer caso escogamos  $y \in Y$  la arista que cubre al vértice en el interior del casquete convexo de  $P$ . Nuevamente sabemos que existe  $x \in X$  con el mismo color que  $y$ . Consideremos  $S = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ . Si el resultado no es una oruga o una estrella habremos acabado, por lo tanto supongamos lo contrario. Claramente  $S$  no puede ser una estrella, pues  $Y$  era una estrella generadora y no hay forma de obtener una nueva estrella generadora al cambiar una arista. Supongamos que  $S$  es una oruga geométrica generadora. Si  $|P| = 4$ , existe una arista  $c$  entre dos

vértices en el casquete convexo que no esta contenida en  $CH(P)$  al intercambiar  $y$  con  $x$ , la recta que contiene a la arista  $x$  intersecta a  $c$  como se ve en la Figura 4.13.

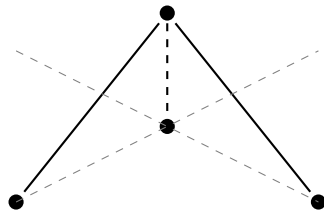


Figura 4.13: Las dos posibles rectas que contienen a  $x$ .

Supongamos ahora que  $|P| > 4$ , y consideremos la triangulación  $T$  definida por las aristas de  $CH(P)$  junto con las aristas de  $S$  las cuales son las diagonales que van del vértice central a cada uno de los vértices en  $CH(P)$ , (la Figura 4.14 muestra dicha triangulación). Para que  $x$  no intersecte a la estrella, un extremo de  $x$ ,  $v$ , debe ser uno de los vértices del triángulo de  $T$  que contiene al vértice interior. En este caso la recta que contiene a  $x$  intersecta a la arista opuesta  $v$  por lo que  $S = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$  no es una oruga geométrica.

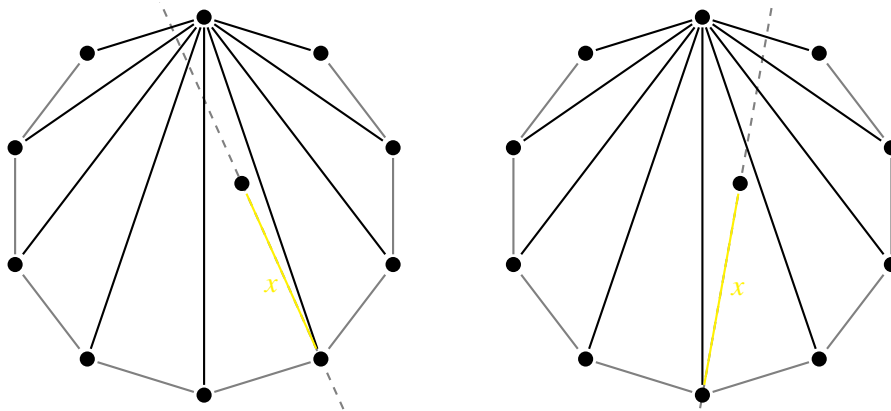


Figura 4.14: Triangulación  $T$ .

Resta el caso en el que  $Y$  es una estrella cuyo vértice central es el punto en el interior del casquete convexo de  $P$ . Sean  $y \in Y$  una arista cualquiera y  $S = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ . Es claro que  $S$  no es una estrella. Recordemos que hay al menos 3 puntos sobre la frontera del casquete convexo. Como  $Y$  es una estrella generadora al remover  $y$  quedan al menos 2 aristas adyacentes al vértice central por lo que  $S$

tampoco puede ser una oruga geométrica.

Por lo tanto  $Y^c = X$  contiene un árbol generador que por la elección de  $X$ , debe ser heterocromático.  $\square$

Ahora vamos a definir la hipergráfica  $H(G)$  de los árboles generadores de una gráfica geométrica  $G$ . Los vértices de  $H(G)$  son las aristas de  $G$  y las hiperaristas de  $H(G)$  son los árboles generadores geométricos de  $G$ . Nos interesará calcular el número heterocromático de  $H(G)$ ,  $hc(H(G))$ . Como fue definido en la Definición 3.25,  $hc(H(G))$  es el menor natural  $t$  tal que toda  $t$ -coloración de los vértices de  $H(G)$  contiene una hiperarista heterocromática, es decir, el menor natural  $t$  tal que toda  $t$ -coloración de las aristas de  $G$  contiene un árbol generador plano heterocromático.

El siguiente teorema reúne las cotas obtenidas anteriormente para  $hc(H(G))$  para  $G$  una gráfica completa geométrica con conjunto de vértices  $P$  en posición general tales que  $i(P) \in \{0, 1\}$ .

**Teorema 4.13.**

Sean  $P$  un conjunto con  $n \geq 4$  vértices en posición general y  $G$  una gráfica geométrica completa cuyos vértices son los puntos de  $P$ . Consideremos  $H = H(G)$  la hipergráfica de los árboles generadores planos de  $G$ . Si  $i(P) \in \{0, 1\}$ , entonces

$$hc(H(G)) = n(H(G)) - \tau(H(G)) + 2,$$

donde  $n(H(G)) = |E(G)|$  y  $\tau(H(G))$  es la menor cardinalidad de una 2-transversal de las aristas de  $H(G)$ .

*Demostración.*

Sea  $S$  una 2-transversal mínima de los árboles generadores planos de  $G$ , es decir una doble transversal de las hiperaristas de  $H$ . Consideremos la coloración  $c$  de  $H$  que le asigna color 1 a todos los vértices de  $S$  y un color distinto a cada uno del resto de los vértices. La coloración  $c$  usa  $n(H) - \tau(H) + 1$  colores y como  $S$  es doble transversal, no hay aristas heterocromáticas. Por lo tanto  $hc(H) \geq n(H) - \tau(H) + 2$ .

Ahora veamos el caso cuando  $i(P) = 0$ . Por el Teorema 4.11  $hc(H) \leq \binom{n}{2} - n + 2$  pues toda  $\binom{n}{2} - n + 2$ -coloración de la gráfica completa asociada contiene un árbol generador plano heterocromático. En el Lema 4.9 se demuestra que cuando  $i(P) = 0$  todo árbol generador plano contiene dos aristas en  $CH(P)$ . Se sigue que para toda hiperarista de  $H$ , siempre existen dos vértices provenientes de aristas de  $CH(P)$ . Por lo tanto  $n = |CH(P)| \geq \tau(H)$ . Concluimos que  $hc(H) \geq n(H) - \tau(H) + 2 \geq \binom{n}{2} - n + 2$ .

Ahora, supongamos  $i(P) = 1$ . Entonces por el Teorema 4.12  $hc(H) \leq \binom{n}{2} - n + 1$ . Nuevamente obtenemos una doble transversal de las aristas de  $H$  en el Lema 4.10 con

$(n-1)+2 = n+1$  vértices, por lo tanto  $\tau(H) \leq n+1$   $hc(H) \geq n(H) - \tau(H) + 2 \geq \binom{n}{2} - (n+1) + 2 = \binom{n}{2} - n + 1$ . Por lo tanto  $hc(H) \geq n(H) - \tau(H) + 2$ .  $\square$

En el futuro sería interesante estudiar el número heterocromático de árboles generadores planos de una gráfica con vértices en posición general con más de un vértice en el interior de la envolvente convexa. Parte de la dificultad en estudiar este problema es encontrar una doble transversal. El caso cuando hay un punto en el interior de la envolvente convexa resulta ser más difícil que cuando los puntos están en posición convexa, pues las aristas de la envolvente convexa no son suficientes para formar una doble transversal de la segunda configuración de puntos. Una pregunta abierta que queda es si al tener una doble transversal de una gráfica geométrica  $G$ , el número heterocromático será  $hc(H(G)) = n(H(G)) - \tau(H(G)) + 2$ . En esta ocasión el valor exacto de una doble transversal coincide con  $n(H(G)) - \tau(H(G)) + 2$  que en general es una cota superior del número heterocromático. Es natural preguntarse si siempre ocurre esto.



## Capítulo 5

# Números heterocromáticos de matroides

Los resultados de este capítulo vienen de [MM18]. En este capítulo presentaremos el número heterocromático para diversas estructuras de una matroide. Algunos resultados únicamente se conoce para tipos específicos de matroides, en especial para las matroides proyectivas y los diseños. Es importante tener presentes algunas de las definiciones dadas en la sección de hipergráficas.

### 5.1. Bases

La primera hipergráfica que estudiaremos es la que viene de las bases de una matroide. Una coloración heterocromática de ésta hipergráfica será una coloración heterocromática de las bases de una matroide. Para la matroide gráfica, esto será una coloración con un árbol generador heterocromático.

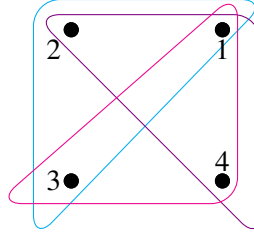
#### **Definición 5.1.**

Vamos a definir la *hipergráfica de bases* asociada a una matroide  $M = (S, \mathcal{B})$ , como  $B(M) = (S, \mathcal{B})$ , es decir, los vértices son los elementos de  $M$  y las hiperaristas son las bases de  $M$ .

#### **Ejemplo 5.2.**

Recordando el Ejemplo 2.5  $S = [4]$  y  $\mathcal{B} = \{123, 124, 134\}$ . La hipergráfica asociada se encuentra en la Figura 5.1

El siguiente teorema se encuentra en [MR13]. Este resultado no da una 2-transversal en concreto, más adelante se encontrará una 2-transversal que se usará para mejorar el resultado.

Figura 5.1: La hipergráfica de bases asociada a  $M = (S, \mathcal{B})$ **Teorema 5.3.**

Sea  $M$  una matroide con rango  $r \geq 2$  con conjunto subyacente  $S$  donde  $|S| = m$ . Supongamos que  $\tau$  es el mínimo tamaño de una 2-transversal del conjunto de bases de  $M$ , entonces  $\text{hc}(B(M)) = m - \tau + 2$

*Demostración.*

Supongamos que existe una coloración con  $m - \tau + 2$  colores y sin bases heterocromáticas. Tomemos  $X$  un subconjunto de  $S$  con exactamente  $m - \tau + 2$  colores distintos y sea  $Y$  su complemento. Nuevamente calcularemos la cardinalidad de  $Y$ ,  $|Y| = |S \setminus X| = m - (m - \tau + 2) = \tau - 2$ . Como  $\tau$  es el tamaño de una 2-transversal mínima y  $|Y| < \tau$ , entonces existe  $B \in \mathcal{B}(M)$  tal que  $|Y \cap B| \leq 1$ . Por hipótesis  $B$  no es heterocromática por lo que su intersección con  $Y$  es de cardinalidad 1, de lo contrario  $B$  estaría contenida en un conjunto heterocromático.  $B$  está contenido en  $X$  con la excepción de un elemento  $y = Y \cap B$  para el cual existe  $x \in X \cap B$  con el mismo color que  $y$ .

Sea  $Z = Y \cup \{x\}$ , entonces  $|Z| = |Y| + 1 = \tau - 1$ . Nuevamente  $Z$  no puede ser una doble transversal de las bases. Sea  $B'$  una base tal que  $|Z \cap B'| \leq 1$ . Notese que si fueran ajenas entonces  $B' \subseteq E \setminus (Y \cup \{x\}) \subseteq X$  por lo que  $B'$  sería heterocromática. Como  $B'$  y  $B$  son bases, entonces tienen la misma cardinalidad, por lo tanto

$$|B' \setminus Z| = |B'| - 1 > |B| - 2 = |B \setminus \{x, y\}|,$$

además  $B' \setminus Z$  y  $B \setminus \{x, y\}$  son conjuntos independientes por ser subconjunto de bases. Por (I3) existe  $z \in B' \setminus Z \subseteq X$  tal que  $(B \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$  es un conjunto independiente. Puesto que  $B \cup \{z\}$  no es independiente, la segunda parte del Lema 2.22 nos asegura que existe un único circuito contenido en  $B \cup \{z\}$  que por lo anterior debe contener a  $x$  o a  $y$ , supongamos que contiene a  $x$ . Notemos que  $(B \cup \{z\}) \setminus \{x\}$  no contiene ningún circuito y  $|(B \cup \{z\}) \setminus \{x\}| = |B|$ , entonces  $(B \cup \{z\}) \setminus \{x\}$  es una base heterocromática de  $M$ .

Para la otra desigualdad basta observar que si coloreamos una 2-transversal de color 1 y los elementos que quedan de distintos colores, no hay bases heterocromáticas.  $\square$

**Lemma 5.4.**

Sea  $M$  una matroide de rango  $r$  y  $B(M)$  la hipergráfica de bases asociada, entonces el complemento de una colínea es una 2-transversal.

*Demostración.*

Supongamos que existe  $L$  una colínea tal que  $L^c$  no es una 2-transversal de  $\mathcal{B}$ , es decir existe  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $|A \cap L^c| \leq 1$ . Como consecuencia existe  $a_1 \in A$  tal que para toda  $a \in A \setminus \{a_1\}$  ocurre que  $a \notin L^c$ . Se sigue que  $A \setminus \{a_1\} \subseteq (L^c)^c$ , de forma que  $A \subseteq L \cup \{a_1\}$ . Como  $L$  es un  $r-2$  plano, entonces  $\rho(A) \leq \rho(L \cup \{a_1\}) = r-1$  lo cual no es posible pues  $A \in \mathcal{B}$  y por lo tanto  $\rho(A) = r$ .  $\square$

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 5.3 con la diferencia de que ya se conoce una 2-transversal del conjunto de bases.

**Teorema 5.5.**

Si  $M$  es una matroide de rango  $r$  con  $n$  elementos entonces  $\text{hc}(B(M)) = t_2 + 2$ , donde  $t_2$  es el tamaño de la colínea más grande.

*Demostración.*

Si  $L$  es una colínea de tamaño  $t_2$ , podemos colorear a  $S \setminus L$  de color 1 y a  $L$  de colores  $\{2, \dots, t_2 + 1\}$ , por la observación anterior  $S \setminus L$  es una 2-transversal de  $B(M)$ , por lo que para toda  $B \in \mathcal{B}$ ,  $B$  tiene dos elementos de  $S \setminus L$  los cuales tienen el mismo color y por lo tanto la hiperarista asociada con  $B$  no es heterocromática, como consecuencia  $\text{hc}(B(M)) \geq t_2 + 2$ .

Ahora consideremos una  $(t_2 + 2)$ -coloración, queremos encontrar una hiperarista de  $B(M)$  heterocromática. Sea  $L$  una colínea máxima, por la equivalencia (R1') del Teorema 2.24  $t_2 = |L| \geq \rho(L) = r - 2$ , entonces  $t_2 + 2 \geq r$ . Sea  $A$  un conjunto de  $M$  con exactamente un elemento de cada color. Observemos que  $\rho(A) \leq |A| = t_2 + 2 \leq r$ , asimismo dado que  $L$  es una colínea máxima y  $|A| = t_2 + 1 > t_2$ , se puede concluir que  $r - 2 < \rho(A) \leq r$ .

Si  $\rho(A) = r$ , entonces  $A$  contiene una base heterocromática por construcción. Supongamos  $\rho(A) = r - 1$ . Entonces existe un hiperplano  $H$  que contiene a  $A$ . Podemos tomar  $a \notin H$ . Como  $H$  es un hiperplano  $\rho(H \cup \{a\}) = r$ , con esta idea en mente queremos construir una base heterocromática apartir de  $A$  y  $a$ . Para esto definimos  $B$  el conjunto de elementos de  $A$  tales que los colores de  $B$  no son el mismo que  $a$ , es decir tomamos  $a'$  en  $A$  tal que  $a$  y  $a'$  tienen el mismo color y  $B = A \setminus \{a'\}$ . Dado que los colores en  $A$  no se repetían, los colores en  $B$  tampoco. Además  $B \cup \{a\}$  tiene todos los colores. Basta checar que  $\rho(B \cup \{a\}) = r$ . Como



$B \subseteq H$ , entonces  $\rho(B) \leq r - 1$ , además  $|B| = t_2 + 1 > t_2$  por lo que  $\rho(B) > r - 2$ . Por lo tanto  $\rho(B) = r - 1$ . Podemos concluir que  $\rho(B \cup \{a\}) = r$ , pues  $a \notin H$ . Por lo tanto existe una arista heterocromática y  $\text{hc}(B(M)) \leq t_2 + 2$ .  $\square$

A continuación veremos dos ejemplos donde se usa este resultado para colorear una gráfica completa y una rueda.

**Ejemplo 5.6.**

Sabemos que los árboles generadores de  $K_n$  contienen  $n - 1$  aristas, por lo que  $\rho(K_n) = n - 1$ . Buscamos las colíneas mas grandes, que serían planos de rango  $n - 3$  con el mayor número de aristas posibles. Esto se encuentra en  $K_{n-2} \leq K_n$ , pues sus árboles generadores tienen  $n - 2 - 1 = n - 3$  aristas y son maximales con respecto al número de aristas. Para calcular el número heterocromático basta substituir

$$\begin{aligned} \text{hc}(B(K_n)) &= t_2 + 2 = \binom{n-2}{2} + 2 \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{4}{2} \\ &= \frac{n^2 - 5n + 10}{2} \\ &= \binom{n}{2} - 2n + 5. \end{aligned}$$

Haremos el ejemplo cuando  $n = 5$ , entonces  $\text{hc}(B(K_5)) = \frac{5(4)}{2} - 10 + 5 = 5$ . Una coloración de  $K_5$  con  $\text{hc}(B(K_5))$  colores se puede ver en la Figura 5.2, asimismo en la Figura 5.3 se ve una 4-coloración de  $K_5$  sin árboles generadores heterocromáticos, pues cualquier árbol generador cubre a  $v_2$  y a  $v_3$ , pero todas las aristas adyacentes a estos vértices son azules, por lo que todo árbol generador tiene al menos dos aristas azules. El conjunto de vértices de las hipergráficas asociadas a las coloraciones anteriores junto con una hiperarista también se muestran en las figuras correspondientes.

**Ejemplo 5.7.**

Para las ruedas  $W_n$  si buscamos una subgráfica máxima de  $W_n$  que tenga árboles generadores de tamaño  $n - 3$  se puede ver que  $t_2 = 2n - 5$ . Ahora podemos encontrar el número heterocromático.

$$\text{hc}(W_n) = (2n - 5) + 2 = 2n - 3$$

Si  $n = 5$ , entonces  $\text{hc}(W_5) = 7$ . En la Figura 5.4 se da una 7-coloración de  $W_5$ .

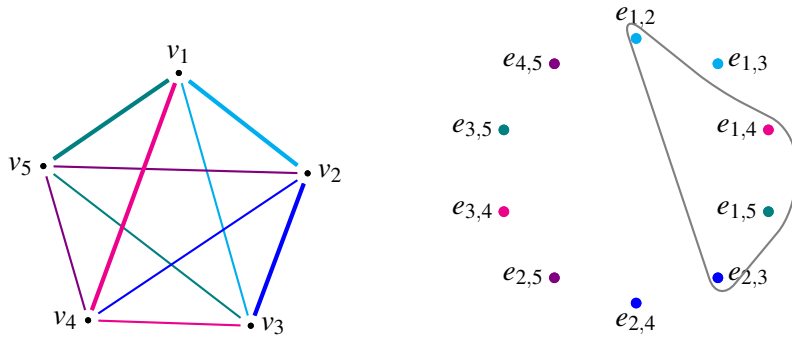


Figura 5.2:  $K_5$  y una arista de  $B(K_5)$  coloreadas con 5 colores

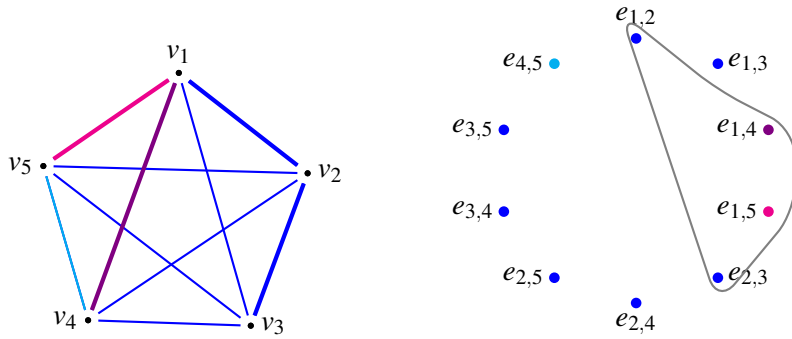


Figura 5.3:  $K_5$  y una arista de  $B(K_5)$  coloreadas con 4 colores sin bases heterocromáticas

Coloreando con una coloración adecuada podemos ver que con 6 colores no hay árboles heterocromáticos. En la Figura 5.5 se da una coloración de  $W_5$  sin árboles generadores heterocromáticos. Cualquier árbol generador de  $W_5$  tiene que tener una arista en  $v_1$  y una arista en  $v_5$  pero todas las aristas incidentes a éstos vértices son del mismo color.

## 5.2. Circuitos

Al igual de como definimos una hipergráfica para las bases de una matroide, ahora vamos a definir una hipergráfica para los circuitos de  $M$ .

**Definición 5.8.**

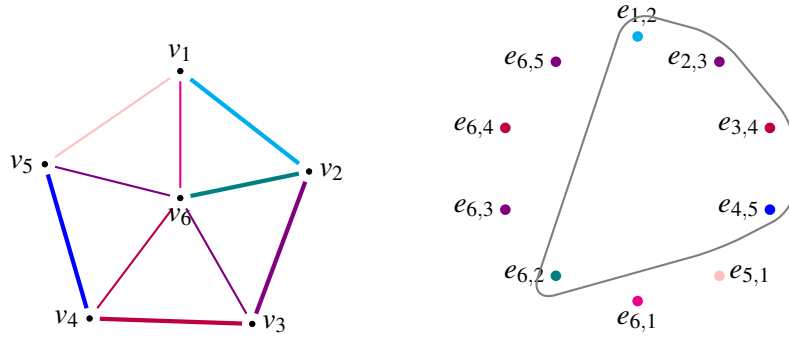


Figura 5.4:  $W_5$  y una arista de  $B(W_5)$  coloreadas con 6 colores

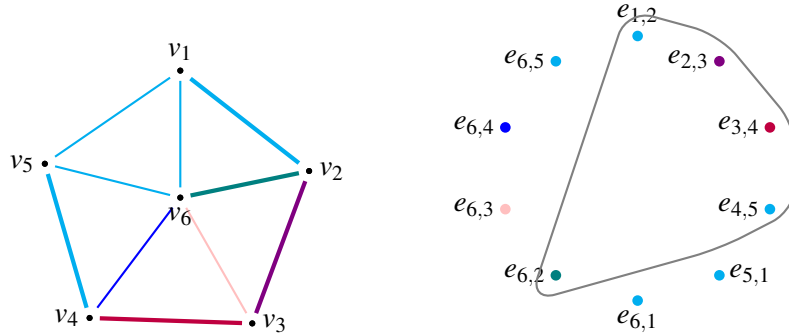


Figura 5.5:  $W_5$  y una arista de  $B(W_5)$  coloreadas con 6 colores sin bases heterocromáticas

Si  $S$  es el conjunto subyacente de una matroide  $M$  con conjunto de circuitos  $\mathcal{C}$ , definimos la *hipergráfica de circuitos*  $C(M)$  con conjunto de vértices  $S$  y donde  $E \subseteq S$  es una hiperarista de  $C(M)$  sí y solo sí  $E \in \mathcal{C}$ .

El siguiente lema se usa para acotar el número heterocromático de los circuitos junto con el Lema 2.32, el Lema 2.29 y la Proposición 2.30 los cuales se pueden consultar en el capítulo 1.

**Lemma 5.9.**

Si  $M = (S, \mathcal{B})$  es una matroide de rango  $r$ ,  $C^*$  es un cocircuito y  $\mathcal{B}' = \{B \setminus C^* \mid B \in \mathcal{B}\}$  entonces

$$M' = (S \setminus C^*, \mathcal{B}') := M \setminus C^*$$

es una matroide de rango  $r - 1$ .

*Demostración.*

Para encontrar el rango de  $M'$  primero veamos que  $\rho(M \setminus C^*) \geq r - 1$ . Sea  $x \in C^*$ , entonces  $C^* \setminus \{x\} \in \mathcal{I}^*$  y por el Lema 2.29 existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq (S \setminus C^*) \cup \{x\}$ , es decir  $B \setminus \{x\} \subseteq S \setminus C^*$ . Por lo tanto  $B \setminus \{x\}$  es independiente en  $M \setminus C^*$  y  $\rho(B \setminus \{x\}) \geq r - 1$ , por lo que podemos concluir que  $\rho(M \setminus C^*) \geq r - 1$ .

Mostraremos que no hay conjuntos independientes de tamaño  $r$ , para esto veremos que toda base  $B$  de  $M$  cumple con  $|B \cap C^*| \geq 1$ . Sea  $B$  una base de  $M$ . Supongamos que  $B \cap C^* = \emptyset$ , es decir  $B \subseteq S \setminus C^*$ , por el Lema 2.29  $C^*$  es independiente en  $M^*$ , una clara contradicción. Por lo tanto las bases a lo más tienen orden  $r - 1$ .  $\square$

**Teorema 5.10.**

Si  $M$  es una matroide sin lazos de rango  $r$  con  $|S| = n$  y  $M \neq U_{n,n}$ , entonces  $\text{hc}(C(M)) = r + 1$ .

*Demostración.*

Para demostrar  $\text{hc}(C(M)) \leq r + 1$  queremos ver que toda  $r + 1$  coloración de  $C(M)$  contiene un circuito heterocromático. Consideremos una  $r + 1$ -coloración de  $C(M)$ , podemos colorear con  $r + 1$  colores pues si  $n < r + 1$ , entonces  $n = r$  y por lo tanto  $M = U_{n,n}$ . Nuevamente vamos a tomar un conjunto heterocromático con exactamente  $r + 1$  colores,  $A$ . Como tiene  $r + 1$  elementos, entonces  $A$  no es independiente, es decir, contiene un circuito el cual debe ser heterocromático.

Ahora vamos a demostrar  $\text{hc}(C(M)) > r$  por inducción sobre  $r$ . Si  $r = 1$  notemos que el circuito mas pequeño tiene exactamente dos elementos pues  $M$  no tiene lazos. Basta colorear a  $S$  del color 1 para evitar circuitos heterocromáticos. Supongamos que si  $M'$  es una matroide de rango  $r' < r$ , entonces  $\text{hc}(C(M')) > r'$ , es decir que existe una  $r'$ -coloración sin circuitos heterocromáticos. Sean  $M$  una matroide de rango  $r$  y  $C^*$  un cocircuito mínimo. Por el Lemma 2.32 si coloreamos a  $C^*$  de color  $r$  todo circuito que intersekte a  $C^*$  tendrá dos elementos de color  $r$ . Solo resta colorear los circuitos que no intersectan a  $C^*$ . Consideremos  $M' = M \setminus C^*$ , por el Lema 5.9  $M'$  es una matroide de rango  $r - 1 < r$ . Por la hipótesis de inducción podemos colorear a  $M'$  con los colores  $\{1, \dots, r - 1\}$  sin que contenga circuitos heterocromáticos. De esta forma podemos colorear a  $M$  sin circuitos heterocromáticos con  $r$  colores.  $\square$

De la Proposición 2.30 se sigue que dado  $M$  una matroide, el rango de la matroide dual  $M^*$  es  $\rho^*(S) = |S| - \rho(S)$ . Sabiendo el rango de  $M^*$ , es natural preguntarse por el número heterocromático de los cocircuitos de  $M$ .

**Corolario 5.11.**

Si  $M$  es una matroide de rango  $r$  con  $n$  elementos sin colazos y que no es  $U_{0,n}$ , entonces  $\text{hc}(C^*(M)) = r^* + 1 = n - r + 1$ .

### 5.3. 3-Circuitos

**Definición 5.12.**

Dada una matroide  $M$ , definimos la *hipergráfica de 3-circuitos*  $C_3(M)$  como la subhipergráfica de  $C(M)$  donde únicamente consideramos las hiperaristas de orden 3, es decir, las hiperaristas que vienen de circuitos de orden 3.

El siguiente ejemplo muestra una gráfica  $H$  en la Figura 5.6 y su respectiva hipergráfica de circuitos e hipergráfica de 3-circuitos en la Figura 5.7, los cuales son ciclos y 3-ciclos correspondientemente. Podemos ver que no siempre son iguales.

**Ejemplo 5.13.**

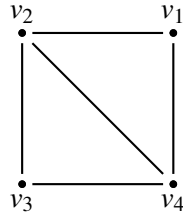


Figura 5.6: Gráfica  $H$

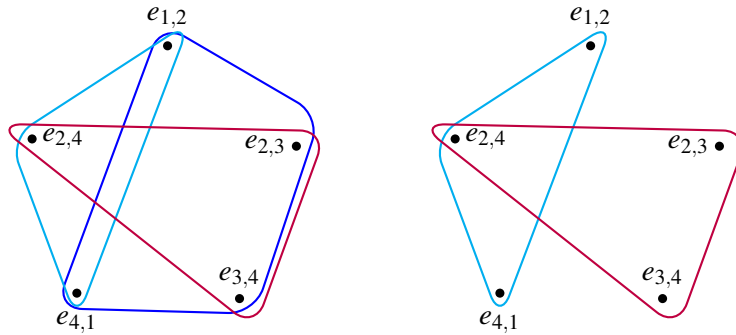


Figura 5.7: Hipergráfica de circuitos de  $H$  y de 3-circuitos

El número heterocromático de 3-circuitos para matroides proyectivas se puede calcular con base en su orden. La prueba general es por inducción, el primer resultado es la base de dicha inducción.

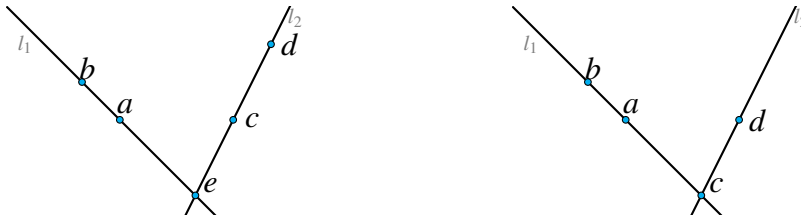


Figura 5.8:

**Teorema 5.14.**

Considerando el plano proyectivo de orden  $q$ ,  $PG(2, q)$ , se tiene que

$$\text{hc}(C_3(PG(2, q))) = 4.$$

*Demostración.*

Notemos que la  $r + 1$ -coloración dada en el Teorema 5.10 en particular no tiene 3-circuitos heterocromáticos, además  $\rho(PG(2, q)) = 2 + 1 = 3$ . Por lo tanto  $\text{hc}(C_3(PG(2, q))) \geq r + 1 = 4$ .

Resta ver que toda 4-coloración tiene un 3-circuito heterocromático. Sabiendo que  $\text{hc}(C(PG(2, q))) = 4$ , podemos asegurar que existe algún circuito heterocromático. Tenemos dos casos respecto al rango de  $C$  ya que  $\rho(C) > 1$ . Si  $\rho(C) = 2$ , entonces por la minimalidad de  $C$  respecto a su dependencia,  $|C| = 3$  en cuyo caso acabamos. Supongamos que  $\rho(C) = 3$ , es decir  $C$  es un 4-circuito con  $C = \{a, b, c, d\}$ . Por la Definición 3.1 (A1) de geometría proyectiva hay dos rectas distintas  $l_1$  y  $l_2$  tales que  $a, b \in l_1$  y  $c, d \in l_2$ . De nuevo por la Definición 3.1 (A2) sabemos que  $l_1$  y  $l_2$  se intersectan en un único punto  $e$ . Como  $\{a, b, c, d\}$  forman un circuito de rango 3, no hay 3 puntos de  $C$  colineales, de lo contrario los tres puntos colineales formarían un conjunto dependiente contenido en  $C$  (el caso en el que  $e = c$  se puede ver en la Figura 5.8). Por lo tanto  $e \notin C$ . Además  $\{a, b, e\}$  y  $\{c, d, e\}$  son 3-circuitos pues son colineales por como definimos a  $e$ . Resta notar que existe un conjunto  $\{a, b, e\}$  o  $\{c, d, e\}$  heterocromático dado que  $\{a, b, c, d\}$  era heterocromático y  $e$  tiene únicamente el mismo color que algún elemento de  $C$ . Por lo tanto hay un 3-circuito heterocromático. □

Denotaremos por  $PG(r-1, q)$  a una geometría proyectiva de rango  $r$  y orden  $q$ . El teorema general para los 3-circuitos de una matroide proyectiva utiliza la cota previamente probada para circuitos en general, la cual se encuentra en la sección anterior. Esto prueba que si  $M$  es una matroide proyectiva, con  $\text{hc}(C(M))$  colores siempre existe un 3-circuito heterocromático.

**Teorema 5.15.**

La geometría proyectiva de rango  $r$ ,  $PG(r-1, q)$ , tiene número heterocromático de 3-circuitos  $hc(C_3(PG(r-1, q))) = r+1$ .

*Demostración.*

Nuevamente podemos usar el Teorema 5.10 para obtener  $hc(C_3(PG(r-1, q))) \geq r+1$ . La prueba para obtener la otra cota será por inducción sobre el rango de  $M$ , donde el caso base es el Teorema 5.14.

Empecemos por tomar  $A$  un conjunto heterocromático donde los  $r+1$  colores de nuestra coloración son representados una única vez. Como hay exactamente  $r+1$  elementos en  $A$ , entonces  $A$  no puede ser independiente, pues tiene más elementos que cualquier base. Sea  $C$  un circuito contenido en  $A$ , existe pues  $A$  es dependiente. Notemos que como  $C \subseteq A$ , entonces  $C$  debe ser heterocromático y  $|C| \leq r+1$ . Supongamos que  $C$  no es un 3-circuito y además supongamos que  $C$  tiene menos de  $r+1$  elementos. Sea  $F$  el plano mínimo que contiene a  $C$ . Nos gustaría poder usar la hipótesis de inducción en la restricción de  $M$  a  $F$ . Como  $F$  es un plano de una geometría proyectiva,  $F$  es isomorfo a una geometría proyectiva en un espacio vectorial de dimensión  $|C|-1$  y por lo tanto la matroide asociada tiene rango  $|C|-1$  donde  $|C| < r$ . Además la restricción a  $F$  esta coloreada con al menos  $|C|$  colores. Por inducción existe un 3-circuito heterocromático.

Supongamos entonces que  $|C|$  tiene exactamente  $r+1$  elementos, es decir  $C = \{e_1, \dots, e_{r+1}\}$ . Como estamos en una geometría proyectiva por (A1) en la Definición 3.1 existe una única línea  $L$  que pasa por  $e_1, e_2$ . Por otro lado también consideramos el mínimo plano  $H$  que contiene a  $e_3, \dots, e_{r+1}$ . Como es generado por  $r-1$  elementos que son independientes,  $H$  es un hiperplano. Si  $|H \cap L| \geq 2$ , entonces por la unicidad de  $L$ ,  $L \subseteq H$ . Esto es una contradicción pues  $\rho(e_1, \dots, e_{r+1}) = r$  y como consecuencia  $\{e_1, e_2\} \not\subseteq H$ . Por lo tanto  $|H \cap L| = 1$ , llamaremos al punto en esta intersección  $a$ . Veremos que  $a \notin \{e_1, e_2\}$ . Supongamos que  $a = e_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $\{e_i\} \cup \{e_3, \dots, e_{r+1}\}$  es un conjunto independiente de rango  $r$  contenido en un hiperplano  $H$ , lo cual no es posible. Si  $a \in \{e_3, \dots, e_{r+1}\}$ , entonces  $e_1, e_2, a$  son colineales por lo que  $\{e_1, e_2, a\}$  es un conjunto dependiente de menor cardinalidad que  $C$ , lo que contradice la minimalidad de  $C$ . Por lo tanto  $a \notin C$ .

Como  $a \notin C$ ,  $R = \{e_1, e_2, a\}$  y  $S = \{a, e_3, \dots, e_{r+1}\}$  son conjuntos dependientes. Ya que  $C$  era heterocromático se sigue que  $a$  a lo mas puede tener el mismo color que un  $e_j$  con  $j \in \{1, \dots, e_{r+1}\}$  por lo que  $R$  o  $S$  son conjuntos heterocromáticos. Si  $R$  es heterocromático entonces  $R$  es el 3-circuito buscado. Por el caso anterior, si  $S$  es heterocromático, entonces  $S$  contiene un 3-circuito heterocromático. Por lo tanto  $hc(C_3(PG(r-1, q))) \leq r+1$ .  $\square$

## 5.4. Circuitos Hamiltonianos

La siguiente definición generaliza los ciclos hamiltonianos en gráficas, los cuales son ciclos que recorren todos los vértices, es decir, son ciclos que tienen tamaño  $n$  que es el rango de la matroide gráfica más uno.

### Definición 5.16.

Dada una matroide de rango  $r$ , llamaremos a un circuito  $C$  de orden  $r + 1$  *hamiltoniano*, además las matroides que contengan algún circuito hamiltoniano serán referidas como matroides hamiltonianas.

Al igual de como definimos una hipergráfica que solo contenga información de los 3-circuitos, vamos a definir una hipergráfica que tenga por aristas los circuitos hamiltonianos de una matroide.

### Definición 5.17.

Dada una matroide  $M$ , definimos la *hipergráfica de circuitos hamiltonianos* denotada por  $HC(M)$  como la subhipergráfica de  $C(M)$  cuyas hiperaristas son las asociadas a circuitos hamiltonianos.

### Observación 5.18.

Todas las gráficas con un ciclo hamiltoniano son matroides hamiltonianas.

En los siguientes dos ejemplo de matroides veremos un ejemplo que no contiene circuitos hamiltonianos y otro ejemplo de una matroide distinta de las ya mencionadas con un circuito hamiltoniano.

### Ejemplo 5.19.

No todas las matroides son hamiltonianas. Por ejemplo si consideramos la matroide gráfica definida por un moño  $G$  el cual se ilustra en la Figura 5.9. Los circuitos de  $G$  son ciclos de tamaño 3, a saber  $\mathcal{C}(M(G)) = \{235, 145\}$ , mientras que la gráfica es de orden 5 por lo que  $r = 4$ .

La gráfica de circuitos correspondiente está en la Figura 5.10.

**Ejemplo 5.20.** Un ejemplo de una matroide con un circuito hamiltoniano es la matroide binaria generada por la siguiente matriz  $M$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\{(1, 0), (2, 0)\}$  es un subconjunto dependiente minimal de las columnas de  $M$  de orden 2, mientras que la dimensión del espacio generado por las columnas de  $M$  es 1. Por lo tanto  $M$  contiene un circuito hamiltoniano.



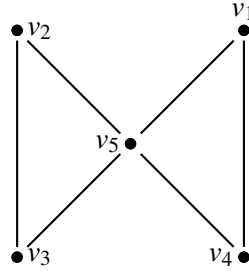


Figura 5.9: Gráfica de un moño  $G$

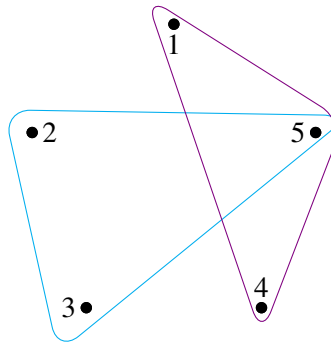


Figura 5.10: La hipergráfica de circuitos de  $G$ , un moño.

A continuación encontraremos el número heterocromático de  $CH(M)$ , en el caso de matroides que vienen de diseños o nuevamente del plano proyectivo. Para esto requeriremos varios lemas previos.

Diremos que una matroide  $M$  es simple, si no tiene circuitos de orden 1 o 2.

**Lemma 5.21.**

Sea  $M$  una matroide en un conjunto  $S$  binaria, simple, de rango  $r$ , distinta de  $U_{r-1,r}$  y con al menos un circuito Hamiltoniano. En cualquier  $r+1$ -coloración de  $S$ , si  $M$  contiene un circuito Hamiltoniano heterocromático, entonces contiene un circuito heterocromático de orden menor a  $r+1$ .

*Demostración.*

Sean  $C$  el circuito hamiltoniano que  $M$  contiene,  $a \in S \setminus C$  y  $b \in C$ .  $(C \setminus \{b\}) \cup \{a\}$  no es independiente pues  $|(C \setminus \{b\}) \cup \{a\}| = r+1$  por lo que contiene un circuito  $C''$  que necesariamente contiene a  $a$ , de lo contrario  $C'' \subsetneq C$ . Supongamos  $|C''| = |C|$

Por el Teorema 3.15, como  $M$  es binaria  $C\Delta C''$  es la unión disjunta de circuitos. Dado que  $a \in C\Delta C''$ , entonces existe  $C' \subsetneq C\Delta C''$  tal que  $a \in C'$ . Supongamos que  $C \cap C'' = \{x\}$ . Puesto que  $C'' \subsetneq (C \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ ,  $C'' \subseteq \{x, a\}$ , lo cual no es posible pues  $M$  no es simple. Por lo tanto  $|C \cap C''| > 1$ . Resta notar que  $|C'| \leq |C\Delta C''| = |C \cup C''| - |C \cap C''| \leq (r+2) - 2 = r < |C|$ .

Supongamos que  $C'$  no es heterocromático, entonces como  $C$  si es heterocromático y  $C' \subsetneq C\Delta C'' \subseteq C \cup \{a\}$ , existe  $a' \in C' \cap C$  distinto de  $a$  pero con el mismo color. Ahora consideraremos  $C\Delta C'$  la cual nuevamente es la unión disjunta de circuitos. Como  $a' \in C \cap C'$ , entonces  $a' \notin C\Delta C'$  pero  $a \in C\Delta C''$  ya que  $a \notin C$ . Por lo tanto existe un nuevo circuito  $D \subseteq C\Delta C'$  tal que  $a \in D$  y  $D$  es heterocromático pues el color de  $a$  es el único que se repetía. Además por un argumento análogo al anterior  $|C \cap C'| > 1$  y entonces concluimos que

$$|D| \leq |C \cup C'| - |C \cap C'| = |C \cup C'| - |C \cap C'| = r + 2 - 2 = r < |C|.$$

Por lo tanto  $D$  es el circuito buscado.  $\square$

**Lemma 5.22.**

Sea  $M$  una matroide de rango  $r$  con al menos un circuito hamiltoniano. Si  $\kappa$  es el orden del hiperplano de mayor cardinalidad en  $M$ , entonces  $\text{hc}(\text{HC}(M)) > \kappa + 1$ .

*Demostración.*

Sea  $H$  un hiperplano de cardinalidad  $\kappa$ . Veamos que  $H^c$  es una 2-transversal del conjunto de los circuitos hamiltonianos. De esta forma al colorear a la 2-transversal de un único color y el complemento,  $H$ , de colores distintos, obtendríamos una  $\kappa + 1$ -coloración sin circuitos hamiltonianos.

Sea  $C$  un circuito hamiltoniano. Para toda  $a \in C$  sabemos que  $C \setminus a$  es una base de  $M$ , por lo que  $|C \cap H| \leq r - 1$  pues de lo contrario  $H$  contendría una base de  $M$ . Como  $(H^c \cap C) \cup (H \cap C) = C$ , entonces  $|H^c \cap C| = |C| - |H \cap C| \geq r + 1 - (r - 1) = 2$ . Por lo tanto  $H^c$  es una doble transversal.  $\square$

**Teorema 5.23.**

El número heterocromático de circuitos hamiltonianos de  $PG(2, q)$ , una geometría proyectiva de orden  $q > 1$ , es  $\text{hc}(\text{HC}(PG(2, q))) = q + 3$ .

*Demostración.*

Buscamos un circuito heterocromático de orden 4, para ésto partiremos de un 3-circuito heterocromático, es decir, una línea  $L$  con  $\{a, b, c\} \subseteq L$  donde  $\{a, b, c\}$  es un conjunto heterocromático. El Teorema 5.14 nos asegura su existencia pues  $q + 3 > 1 + 3 = 4$ . Por la Proposición 3.5 inciso 4, hay exactamente  $q + 1$  puntos en  $L$  por lo que en  $L$  hay a lo más  $q + 1$  colores representados. Como nos faltan 2 colores, existen dos puntos  $d, e \notin L$  con los colores restantes. Por (A1) podemos

considerar la línea  $L'$  generada por  $d$  y  $e$ , además ya que son líneas distintas, por (A2),  $L$  y  $L'$  se intersectan en exactamente un punto  $x$ . Tomemos dos elementos de  $u, v \in \{a, b, c\}$  tales que  $u, v \neq x$  como se ve en la Figura 5.11, entonces el conjunto  $\{u, v, d, e\}$  es el buscado. Es heterocromático por construcción y es un circuito porque consta de  $4 > r = 2 + 1 = 3$  puntos no colineales.

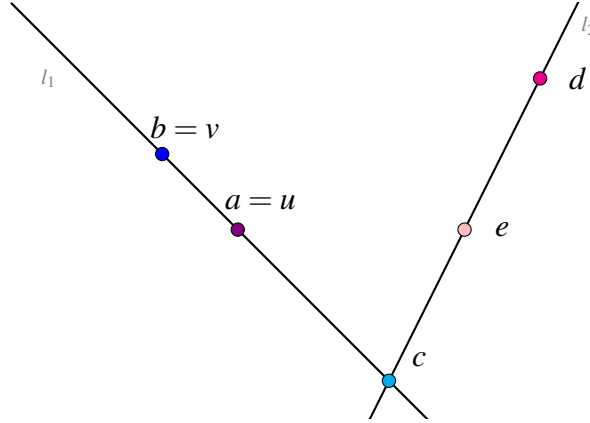


Figura 5.11: Las líneas  $L$  y  $L'$

□

## 5.5. Sistemas de Steiner

Antes de empezar los resultados correspondientes a sistemas de Steiner, hay que recordar algunas de las cosas vistas en el capítulo 2. En un sistema  $S(d, k, n)$  los subconjuntos de cardinalidad  $d$  definen un único bloque que son los hiperplanos de nuestra matroide. Cada bloque contiene  $k$  elementos y en total hay  $n$  elementos en  $M$ .

### Teorema 5.24.

Dado un sistema de Steiner  $S(t, k, n)$  donde  $2 \leq t \leq k < n$ , si  $n > (t + 1)(k + 1 - t)$ , entonces la matroide asociada tiene un circuito Hamiltoniano.

#### Demostración.

Primero notemos que el rango de la matroide asociada es  $t + 1$  pues los subconjuntos de  $t$  elementos definen un único hiperplano. Sea  $T = \{a_1, \dots, a_t\}$  un subconjunto de  $t$  elementos y sea  $B$  el único bloque que lo contiene. Podemos extender  $T$  a un conjunto independiente al tomar  $b \notin B$  y como  $T$  define al plano, tenemos que

$\rho(T \cup \{b\}) \geq \rho(T)$ . Además por ser hiperplano  $\rho(T \cup \{b\}) = t + 1$ . Por lo tanto  $T \cup \{b\}$  es una base. Buscamos seguir extendiendo  $T \cup \{b\}$  para obtener un circuito hamiltoniano. De esta forma buscamos  $c \notin T \cup \{b\}$  tal que al agregar  $c$ , el único circuito en  $T \cup \{b, c\}$ , que existe por el Lema 2.22, sea de tamaño  $t + 2$ , es decir, Hamiltoniano.

Para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$  definimos el bloque  $B_i$  como el único bloque que contiene a el subconjunto  $(T \setminus \{x_i\}) \cup \{b\}$  de cardinalidad  $t$ . Hay  $t$  distintos bloques definidos de esta manera, cada uno de cardinalidad  $k$ . Además dos a dos se intersectan en al menos  $t - 1$  elementos de  $T$ . Por lo tanto  $|B \cup \bigcup_{i=1}^t B_i| \leq (t + 1)(k - (t - 1)) = (t + 1)(k + 1 - t)$ . Por hipótesis  $n > |B \cup \bigcup_{i=1}^t B_i|$  por lo que existe  $z \notin B \cup \bigcup_{i=1}^t B_i$ . Como  $z$  no está en ninguno de los hiperplanos que contienen a los puntos de  $T \cup \{b\}$  cualquier subconjunto propio que contenga a  $z$  será independiente, por lo que  $T \cup \{b, z\}$  es un circuito Hamiltoniano.  $\square$

**Teorema 5.25.**

Si  $M$  es una matroide pavimentada de rango  $r$  que viene de un sistema de Steiner  $S(r - 1, q, n)$ , donde  $r$  es impar, entonces  $\text{hc}(\text{HC}(M)) = q + 2$ .

Antes de dar la prueba veremos un pequeño ejemplo en el plano de Fano, que es un sistema de Steiner  $S(3 - 1, 3, 7)$ .

**Ejemplo 5.26.**

Como  $r = 3$  es impar podemos usar el teorema anterior para calcular el número antiramsey de los circuitos hamiltonianos  $\text{hc}(\text{HC}(M)) = q + 2 = 3 + 2 = 5$ . Veremos que la 4-coloración dada en la Figura 5.12 no contiene circuitos hamiltonianos heterocromáticos. Un circuito hamiltoniano del plano de Fano es un conjunto de 4 puntos donde 3 no son colineales. Supongamos que en nuestra coloración hay un circuito heterocromático  $C$ . Como  $p_1, p_2, p_3$  tienen el mismo color  $C$  únicamente contiene a alguno de éstos. Si  $C$  contiene a  $p_1$  debe contener a  $p_7$  pues tiene que tener uno de cada color, y como no queremos 3 puntos colineales, entonces  $C$  no contiene a  $p_5$ . Como  $p_4$  y  $p_6$  son los únicos puntos que quedan de su color  $C$  contiene a ambos, pero esto no es posible pues  $p_1, p_4$  y  $p_6$  son colineales. El caso donde  $p_3 \in C$  es análogo. Supongamos que  $p_2 \in C$ , como  $p_4$  y  $p_7$  son los únicos puntos de su color, entonces ambos están en  $C$ , pero esto no es posible pues  $p_2, p_4$  y  $p_7$  son colineales. Por lo tanto no hay circuitos hamiltonianos heterocromáticos.

En la Figura 5.13, hay una 5 coloración del plano de Fano donde el circuito hamiltoniano es  $\{p_1, p_3, p_4, p_7\}$ .

*Demostración del teorema 5.25.*

Todos lo hiperplanos vienen de bloques de tamaño  $q$ , entonces por el Lemma 5.22

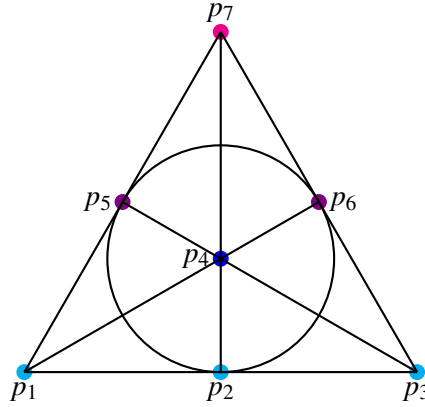


Figura 5.12: Plano de Fano sin circuitos hamiltonianos heterocromáticos

$\text{hc}(\text{HC}(M)) > q + 1$ , es decir  $\text{hc}(\text{HC}(M)) \geq q + 1 + 1$ . Si definimos  $h = \text{hc}(\text{HC}(M)) - 1$ , el mínimo entero tal que  $M$  no tiene un circuito hamiltoniano heterocromático, se sigue de la observación que  $h \geq q + 1$ . Tomemos una coloración con  $h$  colores, tal que no tenga circuitos hamiltonianos heterocromáticos. Al igual que en otras pruebas nos tomaremos  $A$  un subconjunto heterocromático con  $h$  elementos.

Nos interesará analizar los subconjuntos de  $A$  con  $r + 2$  elementos. Si tomamos un subconjunto de orden  $r + 1$ , entonces es dependiente y contienen un circuito. Además por hipótesis no hay circuitos hamiltonianos por lo que el orden de éste circuito a lo mas es  $r$ . Se sigue de que es pavimentada que el orden del circuito es exactamente  $r$  por lo que podemos encontrar un hiperplano que contiene al circuito. Para trabajar mejor con los subconjuntos de orden  $r + 2$  de  $A$ , por cada subconjunto  $\{x_1, \dots, x_{r+2}\}$  vamos a definir una digráfica donde los vértices serán los  $r + 2$  elementos y por cada elemento  $x_i \in \{x_1, \dots, x_{r+2}\}$ , nos fijaremos en los  $r + 1$  vértices restantes. Por la discusión previa sabemos que existe un hiperplano  $H$  que contiene al circuito de orden  $r$  previamente encontrado, por lo que sabemos que al menos  $r$  elementos de los  $r + 1$  restantes están en  $H$ . Si los  $r + 1$  elementos restantes están en  $H$  colocaremos una flecha de  $x_i$  a cualquier vértice distinto. Si existe  $x_j \neq x_i$  tal que  $x_j \notin H$ , entonces en la digráfica habrá una flecha de  $x_i$  señalando a  $x_j$ , (para ilustrar mejor la digráfica checar Figura 5.14). De esta forma aseguramos que todos los vértices tengan exgrado 1 y como  $r + 2$  es impar, podemos asegurar la existencia de una trayectoria dirigida de longitud 2. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $x_{r+1}x_{r+2}$  y  $x_{r+2}x_r$  son flechas de ésta digráfica. Por como definimos la digráfica concluimos que  $\{x_1, \dots, x_r\}$  están en un hiperplano  $H_1$  y  $\{x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}\}$  están en otro hiperplano  $H_2$ . Pero  $\{x_1, \dots, x_{r-1}\} \subseteq H_1 \cap H_2$

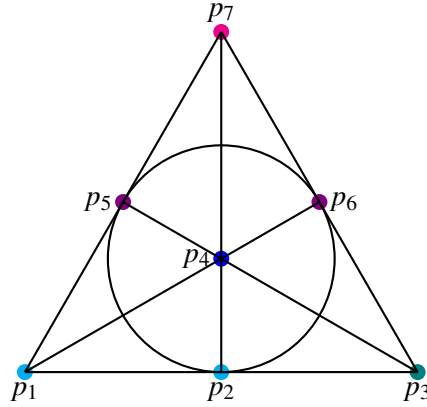


Figura 5.13: Plano de Fano con un circuito hamiltoniano heterocromático

donde  $\{x_1, \dots, x_{r-1}\}$  es independiente pues tiene orden  $r-1$  y  $M$  es pavimentada, por lo que  $H_1 = H_2$  pues como estamos en un Sistema de Steiner  $S(r-1, q, n)$ ,  $r-1$  puntos definen un único bloque que es un hiperplano de  $M$ . Por lo tanto por cada subconjunto de  $r+2$  elementos de  $A$  siempre hay  $r+1$  puntos en un hiperplano.

Considerando la propiedad anterior de  $A$ , tenemos dos casos. Cada subconjunto de  $r+2$  puntos están en un hiperplano o existe un subconjunto de  $r+2$  puntos donde  $r+1$  puntos están en un hiperplano pero el último punto no lo está. Para el primer caso veremos que todos los puntos están en un único hiperplano. Sean  $S = \{x_1, \dots, x_{r+2}\}$  un conjunto de  $r+2$ , que están en un hiperplano  $H_1$ , y sea  $w$  un punto distinto de los anteriores. Si consideramos el conjunto  $R = \{x_1, \dots, x_{r+1}, w\}$  de  $r+2$  puntos nuevamente hay un hiperplano  $H_2$  que los contienen. Además  $S \cap R$  tienen  $r-1$  puntos en común por lo que existe un único bloque que los contiene ya que estamos en el sistema  $S(r-1, q, n)$  y por lo tanto  $R$  y  $S$  están contenidos en el mismo hiperplano. Por lo tanto  $H_1 = H_2$  y hay  $|A|$  puntos heterocromáticos en un hiperplano por lo que si  $q$  es el tamaño de todos los hiperplanos  $h = |A| \leq q$ .

Supongamos que ocurre el segundo caso. Sean  $S = \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$  y  $x_{r+2}$  tales que los puntos de  $S$  están sobre un hiperplano  $H_1$  pero  $x_{r+2} \notin H_1$ . Volvemos a tomar un punto  $w \in A$  y sea  $B = \{x_1, \dots, x_r, x_{r+2}, w\}$ . Por la primera observación existen  $r+1$  puntos de  $B$  en un hiperplano  $H_2$ . De estos  $r+1$  puntos,  $r-1$  deben ser puntos de  $S$  pues  $|B \setminus S| = 2$ . Por lo tanto, como  $H_1$  y  $H_2$  comparten  $r-1$  puntos, entonces  $H_1 = H_2$ . Así  $w \in H_2$  o  $x_{r+2} \in H_2$  pero  $x_{r+2} \notin H_2 = H_1$ . Concluimos que  $w \in H_1$  y por lo tanto todos los puntos de  $A$  con excepción de  $x_{r+2}$  están en un hiperplano, por lo que  $h-1 = |A| - 1 \leq q$ .

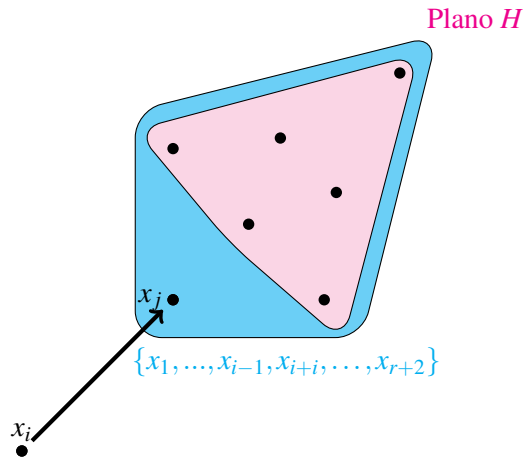


Figura 5.14: Digráfica asociada a un conjunto de  $r+2$  elementos

□

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo se buscó presentar el número heterocromático para bases y circuitos de matroides y gráficas geométricas. A lo largo del trabajo se demostró el número para bases y circuitos de una matroide. Además se dio el número arcoíris de 3-circuitos para matroides proyectivas y de circuitos hamiltonianos para matroides proyectivas y Sistemas de Steiner. Así mismo se acotó el número heterocromático de gráficas completas geométricas y se dio explícitamente para gráficas completas geométricas con vértices en posición convexa o con a lo mas un punto interior.

Algunos de los problemas abiertos que quedan son los siguientes:

1. Encontrar el número heterocromático de árboles generadores planos en gráficas geométricas completas con vértices en posición general.
2. Encontrar el número heterocromático de árboles generadores planos para otras familias de gráficas geométricas como son las gráficas bipartitas geométricas.
3. Acotar el número heterocromático de circuitos hamiltonianos de matroides hamiltonianas
4. Analizar el número heterocromático de las hipergráfica definidas por los hiperplanos de una matroide.





# Bibliografía

- [ABNL92] Jorge L. Arocha, Javier Bracho, and Víctor Neumann-Lara. On the minimum size of tight hypergraphs. *J. Graph Theory*, 16(4):319–326, 1992.
- [Ber79] Claude Berge. *Graphs and hypergraphs*. North-Holland, 1979.
- [BGW03] Alexandre V. Borovik, I. M. Gelfand, and Neil White. *Coxeter Matroids*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.
- [BM76] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory With Applications*. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1 edition, 1976.
- [ESS75] P. Erdős, M. Simonovits, and V. T. Sós. Anti-Ramsey theorems. In *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II*, pages 633–643. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. 1975.
- [GHH<sup>+</sup>02] A. García, C. Hernando, F. Hurtado, M. Noy, and J. Tejel. Packing trees into planar graphs. *J. Graph Theory*, 40:172–181, 2002.
- [Kár76] F. Kárteszi. *Introduction to Finite Geometries*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976. Translated from the Hungarian by L. Vekerdí, North-Holland Texts in Advanced Mathematics, Vol. 2.
- [KPTV98] Gy. Károlyi, J. Pach, G. Tóth, and P. Valtr. Ramsey-type results for geometric graphs, i. *Discrete Comput Geom*, 18:247–255, 1998.
- [MM18] Criel Merino and Juan José Montellano-Ballesteros. Some heterochromatic theorems for matroids. *Discrete Mathematics*, 341(10):2694–2699, 2018.
- [MNL05] Juan José Montellano-Ballesteros and Víctor Neumann-Lara. An anti-Ramsey theorem on cycles. *Graphs Combin.*, 21(3):343–354, 2005.

- [MR13] Juan José Montellano-Ballesteros and Eduardo Rivera-Campo. On the heterochromatic number of hypergraphs associated to geometric graphs and to matroids. *Graphs and Combinatorics*, 29:1517–1522, 2013.
- [Oxl11] James Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 2 edition, 2011.
- [SCK14] Fujita Shinya, Magnant Colton, and Ozeki Kenta. Rainbow generalizations of ramsey theory - a dynamic survey. *Theory and Applications of Graphs*, 0(1), 2014.
- [UG11] V. Urrutia-Galicia. *Algunas propiedades de gráficas geométricas*. División de ciencias básicas e ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2011.
- [Wel10] D.J.A Welsh. *Matroid Theory*. Dover Publ, 2010.