UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVARIANTES EN CARACTERÍSTICA PRIMA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

SANDRA LISETT RODRÍGUEZ VILLALOBOS

A S E S O R :
DR. LUIS CRISTÓBAL NÚÑEZ BETANCOURT
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

CIUDAD DE MÉXICO, CDMX., 2020

Datos del Jurado

Datos del alumno:

Sandra Lisett
Rodríguez
Villalobos
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas

Datos del tutor:

Dr.
Luis Cristóbal
Núñez
Betancourt

Datos del sinodal 1:

Dr.
Enrique Javier
Elizondo
Huerta

Datos del sinodal 2:

Dr.
Kenneth Carl
Jeffries

Datos del sinodal 3:

Dra.
Diana
Avella
Alaminos

Datos del sinodal 4:

Dr.
Daniel
Labardini
Fragoso

Datos del trabajo escrito:

Invariantes en característica prima
57 páginas
2020

Agradecimientos

Quiero agradecer a Luis Núñez Betancourt por aceptar ser mi asesor y por hacer del proceso de escribir esta tesis una gran experiencia de crecimiento y aprendizaje. Quiero agradecerle también por todo el apoyo que me ha dado en los últimos años, así como por su paciencia y por creer en mí.

Quiero expresar mi agradecimiento hacia mis padres y hacia mi hermana por apoyarme en todas las aventuras que he decidido emprender en lo que va de mi vida. Así mismo, quiero agradecerles por creer en mí y por siempre estar a mi lado, aún cuando estamos a muchos kilómetros de distancia. Gracias por recordarme tantas veces que no debo dejar que mis miedos me detengan.

También quiero agradecer a todos mis amigos por aceptarme como soy y por todo el apoyo que me han brindado. En particular, quiero agradecerle a Jorge y a Fer por ayudarme a enfrentar los retos con los que me encontré durante la licenciatura y por hacerme reír cuando más lo necesitaba. Adicionalmente, quiero agradecerle a Shalom por hacer de mi tiempo en Guanajuato una experiencia tan bonita.

Gracias a mis sinodales por leer esta tesis y por todas sus correcciones.

Finalmente, quiero agradecer al CIMAT, a la AMC y al ECOES por apoyarme económicamente durante mi tiempo en Guanajuato. Así mismo, quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyarme por medio del proyecto 284598.

Índice general

1

Introducción

Históricamente, el morfismo de Frobenius ha sido ampliamente utilizado para estudiar singularidades en característica prima. En 1969, Ernst Kunz demostró que un anillo Noetheriano de característica prima es regular si y sólo si es reducido y el morfismo de Frobenius es plano [Kun69]. Adicionalmente, Kunz notó que, dado un anillo local $(R, \mathfrak{m}, k)$, la función

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ e &\mapsto \lambda\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}\right), \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{m}^{[p^e]}$ denota la p^e-ésima potencia de Frobenius de $\mathfrak{m}$ y $\lambda\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)$ denota la longitud de $R/\mathfrak{m}^{[p^e]}$, se puede usar para estudiar la regularidad de R [Kun69]. Como consecuencia, se empezó a estudiar el comportamiento cuando $e \to \infty$ de esta función. En 1983, Paul Monsky demostró el siguiente teorema:

Teorema 1.0.1 ([Mon83])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea d la dimensión del anillo. Sean M un R-módulo finitamente generado e I un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Entonces el límite*

$$\mathrm{e}_{HK}(I, M) = \lim_{\mathrm{e}\to\infty} \frac{\lambda\left(M/I^{[p^e]}M\right)}{p^{ed}}$$

existe.

Al límite $\mathrm{e}_{HK}(\mathfrak{m}, R)$ se le llama la multiplicidad de Hilbert-Kunz de R y lo denotamos por $\mathrm{e}_{HK}(R)$. La multiplicidad de Hilbert-Kunz de un anillo R es un invariante de especial interés dado que nos da una forma de medir qué tan lejos está el anillo de ser regular. En particular, tenemos el siguiente teorema de Watanabe-Yoshida:

Teorema 1.0.2 ([WY00])**.** *Sea (R, m, K) un anillo Noetheriano local formalmente no mezclado de característica prima p. Entonces, $\mathrm{e}_{HK}(R) = 1$ si y sólo si R es regular.*

Otros invariantes importantes en característica prima son los F-umbrales, los cuales se obtienen comparando las potencias usuales de un ideal con las potencias de Frobenius. Los F-umbrales fueron inicialmente introducidos para anillos regulares por Mircea Mustață, Shunsuke Takagi y Kei-ichi Watanabe [MTW05]. Dado un anillo Noetheriano de característica prima p y dados dos ideales $\mathfrak{a}, J$ de R tales que $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{J}$, el F-umbral de $\mathfrak{a}$ con respecto a J está dado por

$$c^J(\mathfrak{a}) = \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_{\mathfrak{a}}^J(p^e)}{p^e}$$

donde

$$\nu_{\mathfrak{a}}^{J}(p^e) = \max\{t \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^t \not\subseteq J\}.$$

La existencia de este límite en el caso de un anillo Noetheriano fue demostrada por Alessandro De Stefani, Luis Núñez-Betancourt y Felipe Pérez [DSNBP18].

Bajo ciertas condiciones, los F-umbrales de un ideal I están relacionados con ciertos ideales conocidos como ideales de prueba y denotados por $\tau(I^{\alpha})$ donde $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ [BMS08]. La definición de los ideales de prueba se puede extender a una sucesión de ideales $I_1, ..., I_t$. Los ideales que obtenemos se conocen como ideales de prueba mixtos y dependen de un valor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t_{\geq 0}$. Motivados por la relación entre los F-umbrales y los ideales de prueba, podemos dar una extensión del concepto de los F-umbrales para sucesiones de ideales. El siguiente resultado fue obtenido por la autora en colaboración con Wágner Badilla-Céspedes y Luis Núñez-Betancourt.

Teorema 1.0.3 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano local de característica $p > 0$. Sea $\underline{I} = I_1, ..., I_t$ una sucesión de ideales, y sea $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, ..., I_t \subseteq \sqrt{J}$. Entonces, si*

$$\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e) = \{(a_1, ..., a_t) \in \mathbb{N}^t \mid I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J^{[p^e]}\},$$

el límite

$$\mathrm{Vol}_F^J(\underline{I}) = \lim_{e\to\infty} \frac{|\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)|}{p^{et}},$$

existe. Llamaremos a $Vol_F^J(\underline{I})$ el F-volumen de $\underline{I}$ con respecto a J.

Por otro lado, podemos relacionar los F-umbrales con la multiplicidad de Hilbert-Kunz. En 2018, Luis Núñez-Betancourt e Ilya Smirnov demostraron la siguiente desigualdad:

Teorema 1.0.4 ([NBS20]). *Sea (R, m, k) un anillo Noetheriano local de característica $p > 0$. Sean $f_1, ..., f_l$ parte de un sistema de parámetros de R, $I = (f_1, ..., f_l)$, J un ideal m-primario, y $\overline{R} = R/I$, entonces*

$$\mathrm{e}_{HK}(J) \leq \mathrm{e}_{HK}\left(J\overline{R}\right) \frac{(c^J(I))^l}{l^l}$$

Análogamente, podemos relacionar los F-volúmenes con esta multiplicidad. En colaboración con Luis Núñez-Betancourt y Wágner Badilla-Céspedes, demostramos el siguiente resultado.

Teorema 1.0.5 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano local de característica $p > 0$. Sean $\underline{f} = f_1, ..., f_t$ parte de un sistema de parámetros de R, $I = (\underline{f})$ y $\overline{R} = R/I$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(J, R) \leq \mathrm{e}_{HK}\left(J\overline{R}, \overline{R}\right) \mathrm{Vol}_F^J(\underline{f}).$$

Dedicaremos el capítulo 2 de esta tesis a estudiar otro invariante conocido como la multiplicidad de Hilbert-Samuel. En particular, daremos una demostración de su existencia. Asimismo, hablaremos sobre algunas de sus propiedades que nos serán de utilidad para estudiar la multiplicidad de Hilbert-Kunz.

En el capítulo 3, nos concentraremos en estudiar la multiplicidad de Hilbert-Kunz. Iniciaremos dando una demostración de la existencia de este invariante en el caso en que el ideal es el ideal maximal. Adicionalmente, presentaremos una demostración de la existencia de otro invariante conocido como la F-signatura. Posteriormente, estudiaremos algunas propiedades básicas de la multiplicidad de Hilbert-Kunz. Terminaremos este capítulo dando una demostración del Teorema 1.0.2.

En el capítulo 4, estudiaremos los F-umbrales y los ideales de prueba. Empezaremos dando una demostración de la existencia de los F-umbrales para anillos Noetherianos. Posteriormente, hablaremos sobre los ideales de prueba y veremos cómo se relacionan con los F-umbrales. Asimismo, estudiaremos cómo se relacionan los F-umbrales con la multiplicidad de Hilbert-Kunz. Terminaremos este capítulo estudiando los ideales de prueba mixtos.

Dedicaremos el capítulo 5 a estudiar los F-volúmenes. Presentaremos resultados originales obtenidos en colaboración con Wágner Badilla-Céspedes y Luis Núñez-Betancourt. En la primera parte de este capítulo, demostraremos el Teorema 1.0.3. Tras estudiar algunas propiedades básicas de los F-volúmenes, nos concentraremos en el caso F-puro. En particular, veremos que, en este caso, el F-volumen es la medida de un conjunto en un espacio real. Adicionalmente, demostraremos que los F-volúmenes detectan intersecciones completas F-puras. Finalmente, daremos una demostración del Teorema 1.0.4.

1.1 Notación

A lo largo de esta tesis, $\mathbb{N}$ denota a los enteros no negativos. Si M es un módulo sobre un anillo R, $\lambda_R(M)$ denota la longitud de M y $\mu_R(M)$ denota el mínimo número de generadores de M. Si el anillo es claro del contexto, escribiremos $\lambda(M)$ y $\mu(M)$ respectivamente.

Usualmente denotamos a un anillo local por $(R, \mathfrak{m}, K)$ donde $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de R y K es el campo residual de R. Consideraremos que los anillos graduados son $\mathbb{N}$-graduados y los módulos graduados son $\mathbb{Z}$-graduados. Si R es un anillo graduado, R^+ denota al ideal $\bigoplus_{t\geq 1} R_t$. Si M es un módulo graduado y $t \in \mathbb{N}$, $M(t)$ denota el módulo graduado tal que $M(t)_n = M_{n+t}$.

2

Multiplicidad de Hilbert-Samuel

El objetivo de este capítulo es estudiar la multiplicidad de Hilbert-Samuel. El contenido de este capítulo es material clásico y se puede encontrar en los libros de Eisenbud y Matsumura [Eis95; Mat89].

Definición 2.0.1. Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local, M un R-módulo finitamente generado e I un ideal de colongitud finita en M. Definimos la multiplicidad de Hilbert-Samuel de I en M, denotada por $\mathrm{e}(I, M)$, como

$$\mathrm{e}(I, M) = \lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/I^n M)}{n^d}$$

donde $d = \dim(R)$. Definimos la multiplicidad de Hilbert-Samuel de M, denotada por $\mathrm{e}(M)$, como $\mathrm{e}(M) = \mathrm{e}(\mathfrak{m}, M)$.

Para que esta definición tenga sentido, necesitamos demostrar que el límite en cuestión existe. Notemos que si $g(n) = \sum_{t=0}^{d} a_t n^t \in \mathbb{Q}[n]$ es tal que $g(n) = \lambda(M/I^n M)$ para $n \gg 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/I^n M)}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{d!g(n)}{n^d} = d!a_d.$$

Así, para ver que el límite existe es suficiente probar que $g(n) = \lambda(M/I^n M)$ para $n \gg 0$ para algún $g(n) = \sum_{t=0}^{d} a_t n^t \in \mathbb{Q}[n]$. Con este propósito, definimos la función $H_{I,M} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por

$$H_{I,M}(n) = \lambda\left(I^n M/I^{n+1} M\right).$$

Dado que I es un ideal de colongitud finita en M, M/IM tiene longitud finita. Luego, $R/\operatorname{Ann}(M/IM)$ es Artiniano y, ya que $\sqrt{\operatorname{Ann}(M/IM)} = \sqrt{I + \operatorname{Ann}(M)}$, deducimos que $R/(\operatorname{Ann}(M) + I)$ es Artiniano. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I^n M/I^{n+1} M$ es finitamente generado como $R/(\operatorname{Ann}(M) + I)$-módulo. Como consecuencia, $I^n M/I^{n+1} M$ tiene longitud finita para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $H_{I,M}$ está bien definido.

Si R es un anillo $\mathbb{N}$-graduado y M en un R-modulo $\mathbb{Z}$-graduado tal que $\lambda_{R_0}(M_n)$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$H_M^{gr}(n) = \lambda_{R_0}(M_n).$$

Queremos demostrar que $H_{I,M}(n) = g(n)$ para $n \gg 0$ para algún $g(n) = \sum_{t=0}^{d-1} a_t n^t \in \mathbb{Q}[n]$. Primero demostraremos el siguiente lema:

Lema 2.0.2. *Si $H : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ cumple que existe $f \in \mathbb{Q}[n]$ tal que $H(n+1) - H(n) = f(n)$ para n suficientemente grande, entonces existe $g \in \mathbb{Q}[n]$ tal que $H(n) = g(n)$ para n suficientemente grande. Además, tenemos que $\deg(g) = \deg(f) + 1$.*

Demostración. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(n+1) - H(n) = f(n)$ para todo $n \geq n_0$. Entonces,

$$H(n) = H(n_0) + \sum_{t=0}^{n-n_0-1} f(n_0 + t)$$

para todo $n \geq n_0$. Luego, es suficiente ver que $\sum_{t=0}^{n-n_0-1} f(n_0+t) \in \mathbb{Q}[n]$ y que

$$\deg\left(\sum_{t=0}^{n-n_0-1} f(n_0+t)\right) = \deg(f) + 1.$$

Notemos que si $F_k(n) = \binom{n}{k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_k \in \mathbb{Q}[n]$ y $\deg(F_k) = k$. Así, si $d = \deg(f)$, $f(n_0 + n)$ se puede escribir como

$$f(n_0 + n) = \sum_{k=0}^{d} a_k F_k(n)$$

para algunos $a_k \in \mathbb{Q}$. Como consecuencia, es suficiente demostrar que $\sum_{t=0}^{n-n_0-1} F_k(t) \in \mathbb{Q}[n]$ y que

$$\deg\left(\sum_{t=0}^{n-n_0-1} F_k(t)\right) = k + 1.$$

Tenemos que

$$\sum_{t=0}^{n-n_0-1} F_k(t) = \sum_{t=0}^{n-n_0-1} \binom{t}{k} = \binom{n-n_0}{k+1} = F_{k+1}(n - n_0).$$

Así, existe $g \in \mathbb{Q}[n]$ tal que $H(n) = g(n)$ para n suficientemente grande, a saber,

$$g(n) = H(n_0) + \sum_{t=0}^{n-n_0-1} f(n_0 + t).$$

Además, obtenemos que $\deg(g) = \deg(f) + 1$. $\square$

Ahora podemos demostrar que $H_{I,M}$ se comporta como un polinomio para valores suficientemente grandes de n.

Proposición 2.0.3. *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local, M un R-módulo finitamente generado e I un ideal de colongitud finita en M. Entonces existe $f_{I,M} \in \mathbb{Q}[n]$ de grado estrictamente menor que el número de generadores de I tal que $H_{I,M}(n) = f_{I,M}(n)$ para n suficientemente grande.*

Demostración. Supondremos que $\operatorname{Ann}(M) = 0$. En otro caso, podemos considerar el anillo $R/\operatorname{Ann}(M)$. Notemos que, dado que I es finitamente generado, existen $a_1, \dots, a_l \in I$ tales que $I = (a_1, \dots, a_l)R$. Luego, $\operatorname{gr}_I(R)^+$ es generado como ideal de $\operatorname{gr}_I(R)$ por las clases de $a_1, \dots, a_l$ en I/I^2. Como consecuencia, $\operatorname{gr}_I(R)$ es generado como R/I-álgebra por las clases de $a_1, \dots, a_l$ en I/I^2. Así, pasando a $\operatorname{gr}_I(R)$ y a $\operatorname{gr}_I(M)$ tenemos que es suficiente demostrar la proposición para $H_N^{gr}(n)$ donde N es un R'-módulo graduado finitamente generado tal que N_n tiene longitud finita como R'_0-módulo, y R' es un anillo Noetheriano graduado estándar. Luego, existen $x_1, \dots, x_t \in R_1$ tal que $R'^+ = (x_1, \dots, x_t)R'$. Procederemos por inducción sobre t. Si $t = 0$, entonces $H_N^{gr}(n) = 0$ para todo $n \gg 0$. Luego, podemos tomar $f_N(n) = 0$.

Ahora supongamos que $t > 0$ y que el resultado es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < t$. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow (0 :_N x_t) \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot x_t} N(1) \longrightarrow N/x_tN(1) \longrightarrow 0$$

es exacta. Como consecuencia, obtenemos que $-H^{gr}_{(0:_N x_t)}(t) + H^{gr}_N(t) - H^{gr}_N(t+1) + H^{gr}_{N/x_tN}(t+1) = 0$. Dado que $(0 :_N x_t)$ y N/x_tN son R'/x_tR'-módulos, por la hipótesis de inducción, existen $g_{(0:_N x_t)} \in \mathbb{Q}[n]$ y $g_{N/x_tN} \in \mathbb{Q}[n]$ tales que $H^{gr}_{(0:_N x_t)}(n) = g_{(0:_N x_t)}(n)$ y $H^{gr}_{N/x_tN}(n) = g_{N/x_tN}(n)$ para $n \gg 0$ y tales que $\deg(g_{(0:_N x_t)}) < t-1$ y $\deg(g_{N/x_tN}) < t-1$. Se sigue que $H^{gr}_N(n+1) - H^{gr}_N(n) = g_N(n)$ para $n \gg 0$ donde $g_N = g_{N/x_nN} - g_{(0:_N x_n)}$. Dado que $\deg(g_N) < t-1$, tenemos que existe $f_N \in \mathbb{Q}[n]$ de grado estrictamente menor que t tal que $H^{gr}_N(n) = f_N(n)$ para n suficientemente grande. □

Ahora definimos la función $L_{I,M} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por

$$L_{I,M}(n) = \lambda(M/I^nM).$$

Puesto que la sucesión

$$0 \longrightarrow I^nM/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^nM \longrightarrow 0$$

es exacta para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$L_{I,M}(n+1) - L_{I,M}(n) = H_{I,M}(n).$$

Luego, para n suficientemente grande, tenemos que

$$L_{I,M}(n+1) - L_{I,M}(n) = f_{I,M}(n).$$

Como consecuencia, existe $g_{I,M} \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $L_{I,M}(n) = g_{I,M}(n)$ para $n \gg 0$ y tal que $\deg(g_{I,M}) = \deg(f_{I,M}) + 1$. Por lo tanto, para ver que $\mathrm{e}(I,M)$ está bien definido, sólo necesitamos ver que $\deg(f_{I,M}) = \dim(M) - 1$. Para ello necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.0.4. *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local y sea*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados. Si $I \subseteq R$ es un ideal de colongitud finita en M, entonces

$$f_{I,M} = f_{I,M'} + f_{I,M''} - G$$

para algún $G \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\deg(G) < \deg(f_{I,M'})$ y tal que el coeficiente principal de G es positivo.

Demostración. Dado que $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(M'), \mathrm{Ann}(M'')$, deducimos que I es un ideal de colongitud finita en M' y en M''. Por otro lado, dado que la sucesión

$$0 \longrightarrow (M' \cap (I^nM))/I^nM' \longrightarrow M'/I^nM' \longrightarrow M/I^nM \longrightarrow M''/I^nM'' \longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos que $\lambda((M' \cap (I^nM))/I^nM') - L_{I,M'}(n) + L_{I,M}(n) - L_{I,M''}(n) = 0$. Se sigue que

$$L_{I,M} = L_{I,M'} + L_{I,M''} - f$$

donde $f(n) = \lambda((M' \cap I^nM)/I^nM')$. Notemos que f es igual a un polinomio con coeficientes racionales para toda $n \gg 0$. Puesto que $f(n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, f tiene coeficiente principal positivo. Además, por el Lema de Artin-Reese, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^nM \cap M' = I^{n-m}(I^mM \cap M')$ para $n \geq m$. Se sigue que $(M' \cap I^nM)/I^nM' \subseteq I^{n-m}M'/I^nM'$ para $n \geq m$ y, como consecuencia, obtenemos

$$f(n) \leq L_{I,M'}(n) - L_{I,M'}(n-m)$$

para $n \geq m$. Se sigue que $\deg(f) < \deg(f_{I,M'}) + 1$.

Puesto que $f_{I,M}(n) = L_{I,M}(n+1) - L_{I,M}(n)$ para $n \gg 0$, tenemos que

$$f_{I,M} = f_{I,M'} + f_{I,M''} - G$$

donde $G(n) = f(n+1) - f(n)$. Notemos que G es igual a un polinomio con coeficientes racionales para toda $n \gg 0$. Además, $\deg(G) \leq \deg(f) - 1 < \deg(f_{I,M'})$ y, si a es el coeficiente principal de f, G tiene coeficiente principal $\deg(f)a > 0$. □

Ahora podemos demostrar que $\deg(f_{I,M}) = \dim(M) - 1$.

Teorema 2.0.5. *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local, M un R-módulo finitamente generado, e $I \subseteq R$ un ideal de colongitud finita en M. Entonces,*

$$\deg(f_{I,M}) = \dim(M) - 1.$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\operatorname{Ann}(M) = 0$. En otro caso, podemos considerar el anillo $R/\operatorname{Ann}(M)$. Dado que I es un ideal de colongitud finita en M, I es $\mathfrak{m}$-primario. Luego, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^t \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$. Se sigue que $\mathfrak{m}^{tn} \subseteq I^n \subseteq \mathfrak{m}^n$ y

$$L_{\mathfrak{m},M}(n) \leq L_{I,M}(n) \leq L_{\mathfrak{m},M}(tn)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, deducimos que $\deg(g_{\mathfrak{m},M}) = \deg(g_{I,M})$ y, como consecuencia, $\deg(f_{I,M})$ no depende de la elección del ideal de colongitud finita.

Ahora, dado que $\dim(M) = \dim(R/\operatorname{Ann}(M)) = \dim(R)$, por el Teorema del ideal principal de Krull, existe un sistema de parámetros $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$. Se sigue que $d = \dim(M)$ y $(x_1, \ldots x_d)R$ es un ideal de colongitud finita en M. Así, podemos suponer que $I = (x_1, \ldots, x_d)R$. Por la Proposición 2.0.3, tenemos que $\deg(f_{I,M}) < d$. Luego, $\deg(f_{I,M}) \leq \dim(M) - 1$.

Probaremos que $\dim(M) - 1 \leq \deg(f_{I,M})$ utilizando inducción sobre $\dim(M)$. Si $\dim(M) = 0$, entonces $\dim(R) = 0$. Como consecuencia, $f_{I,M} = 0$ y, por convención, $\deg(f_{I,M}) = -1 = \dim(M) - 1$.

Ahora, supongamos que $\dim(M) > 0$ y que $\dim(M') - 1 \leq \deg(f_{I,M'})$ para todo R-módulo finitamente generado M' tal que $\dim(M') < \dim(M)$. Dado que $\dim(M) = \sup\{\dim(R/Q) : Q \in \operatorname{Ass}(M)\}$ y ya que $\operatorname{Ass}(M)$ es finito, existe un ideal primo $Q \in \operatorname{Ass}(M)$ tal que $\dim(M) = \dim(R/Q)$. Más aún, R/Q es un submódulo de M ya que $Q \in \operatorname{Ass}(M)$. Ahora, si $\dim(R/Q) - 1 \leq \deg(f_{I,R/Q})$, por el Lema 2.0.4, obtenemos que $\deg(f_{I,R/Q}) \leq \deg(f_{I,M})$ y, como consecuencia, $\dim(M) - 1 \leq \deg(f_{I,M})$. Así, podemos suponer que $M = R/Q$. Dado que $\dim(M) > 0$, tenemos que $Q \neq \mathfrak{m}$ y, como consecuencia, $I \not\subseteq Q$. Sea $x \in I - Q$. Entonces x es un no divisor de cero en M y la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

es exacta. Por el Lema 2.0.4, $f_{I,M} = f_{I,M} + f_{I,M/xM} - G$ donde $\deg(G) < \deg(f_{I,M})$. Se sigue que

$$\deg(f_{I,M/xM}) < \deg(f_{I,M}). \tag{2.1}$$

Dado que $x \in \mathfrak{m}$, tenemos que $\dim(M/xM) \geq \dim(M) - 1$. Por otro lado, $\dim(M/xM) < \dim(M)$ ya que $\dim(R/\operatorname{Ann}(M/xM)) \leq \dim(R/(P + xR)) < \dim(R/P)$. Como consecuencia, $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$. Así, por la hipótesis de inducción,

$$\dim(M) - 2 = \dim(M/xM) - 1 \leq \deg(f_{I,M/xM})$$

y, por (2.1), $\dim(M) - 1 \leq \deg(f_{I,M})$. Por lo tanto, $\deg(f_{I,M}) = \dim(M) - 1$. □

Como consecuencia, tenemos el siguiente corolario, el cual afirma que la multiplicidad de Hilbert-Samuel está bien definida.

Corolario 2.0.6. *Si $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano local, M es un R-módulo finitamente generado e I es un ideal de colongitud finita en M, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/I^nM)}{n^d}$$

existe.

Observación 2.0.7. *Dado que $L_{I,M}(n+1) - L_{I,M}(n) = H_{I,M}(n)$, tenemos que*

$$e(I, M) = \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!\lambda(I^nM/I^{n+1}M)}{n^{d-1}}.$$

Notemos que $\mathrm{e}(I, M) \geq 0$ ya que $\lambda(M/I^nM) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.0.8. *Si $\{M_n\}_n$ es una filtración I-estable, entonces existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$I^tM \subseteq M_t = I^{t-t_0}M_{t_0} \subseteq I^{t-t_0}M$$

para toda $t \geq t_0$. Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/I^{n-t_0}M)}{n^d} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/M_n)}{n^d} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/I^nM)}{n^d}$$

y, como consecuencia,

$$e(I, M) = \lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/M_n)}{n^d}.$$

2.1 Propiedades

Ahora podemos estudiar algunas propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Samuel. Primero veamos que es aditiva para sucesiones exactas cortas.

Teorema 2.1.1. *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local, $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados, e I un ideal de colongitud finita en M. Entonces, $e(I, M) = e(I, M') + e(I, M'')$.*

Demostración. Puesto que $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(M'), \mathrm{Ann}(M'')$, deducimos que I es un ideal de colongitud finita en M' y en M''. Por otro lado, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M'/(I^nM) \cap M' \longrightarrow M/I^nM \longrightarrow M''/I^nM'' \longrightarrow 0.$$

Luego, $\lambda(M/I^nM) = \lambda(M'/(I^nM) \cap M') + \lambda(M''/I^nM'')$. Por el Lema de Artin-Reese, $\{I^nM \cap M'\}_n$ es I-estable. Por la observación 2.0.8, $e(I, M) = e(I, M') + e(I, M'')$. □

Antes de continuar nuestro estudio de las propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Samuel, demostraremos el siguiente lema:

Lema 2.1.2. *Sea M un R-módulo de longitud finita y Q un ideal primo minimal de R, entonces $\lambda_{R_Q}(M_Q)$ es igual al número de factores $\simeq R/Q$ en una filtración prima de M.*

Demostración. Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ una filtración prima de M. Ahora, si $(R/P)_Q \neq 0$, entonces $P \subseteq Q$ y, dado que Q es minimal, $P = Q$. Luego, si $M_{i+1}/M_i = R/P$, entonces

$$(M_{i+1}/M_i)_Q = \begin{cases} 0 \text{ si } P \neq Q \\ k(Q) \text{ si } P = Q \end{cases}$$

donde $k(Q) = (R/Q)_Q$. Como consecuencia, todo factor de la filtración

$$0 = (M_0)_Q \subseteq (M_1)_Q \subseteq \ldots \subseteq (M_n)_Q = M_Q$$

es simple o 0. Por lo tanto, $\lambda_{R_Q}(M_Q)$ es igual al número de factores $\simeq R/P$ en una filtración prima de M. $\square$

Terminamos este capítulo demostrando algunas propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Samuel. Decimos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es *no mezclado* si $\dim(R) = \dim(R/Q)$ para todo $Q \in \operatorname{Ass}(R)$. Notemos que si $(R, \mathfrak{m}, K)$ es no mezclado, entonces $\operatorname{Ass}(R) = \operatorname{Min}(R)$.

Proposición 2.1.3. *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local y M un R-módulo finitamente generado.*

1. *Si R es un dominio, entonces*
$$\mathrm{e}(M) = \operatorname{rank}(M)\,\mathrm{e}(R).$$
2. *Si dim(M)=d, entonces $\mathrm{e}(M) \in \mathbb{N}_{>0}$.*
3. *Tenemos una fórmula de asociatividad:*
$$\mathrm{e}(M) = \sum_{\substack{Q \in \operatorname{Min}(R) \\ \dim(R/Q) = \dim(R)}} \lambda_{R_Q}(M_Q)\,\mathrm{e}(R/Q)$$
4. *Si R es no mezclado y $\mathrm{e}(R) = 1$, entonces R es un dominio.*
5. *Si $f \in \mathfrak{m}$ es un no divisor de cero en R, entonces $\mathrm{e}(R/fR) \geq \mathrm{e}(R)$.*

Demostración.

1. Primero consideramos el caso en que $M = R^{\oplus t}$. En este caso, tenemos que
$$M/\mathfrak{m}^n M \simeq (R/\mathfrak{m}^n)^{\oplus t}.$$
Así, $\lambda(M/\mathfrak{m}^n M) = t\lambda(R/\mathfrak{m}^n) = \operatorname{rank}(M)\lambda(R/\mathfrak{m}^n)$. Ahora, si M es un R-módulo finitamente generado y $t = \operatorname{rank}(M)$, entonces existe una sucesión exacta
$$0 \longrightarrow R^{\oplus t} \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow M/\varphi(R^{\oplus t}) \longrightarrow 0$$
tal que $\operatorname{rank}(M/\varphi(R^{\oplus t})) = 0$. Por el Teorema 2.1.1, $\mathrm{e}(M) = \mathrm{e}(R^{\oplus t}) + \mathrm{e}(M/\varphi(R^{\oplus t}))$. Notemos que $M/\varphi(R^{\oplus t})$ es un módulo de torsión finitamente generado y, como consecuencia, $\operatorname{Ann}(M) \neq 0$. Así, $\dim(R/\operatorname{Ann}(M)) < \dim(R)$. Luego, $\mathrm{e}(M/\varphi(R^{\oplus t})) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{e}(M) = \mathrm{e}(R^{\oplus t}) = \operatorname{rank}(M)\,\mathrm{e}(R)$.

2. Sea $d = \dim(R)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k(n) = \binom{n}{k}$. Primero demostraremos que si $f \in \mathbb{Q}[n]$ es tal que $f(n) \in \mathbb{Z}$ para $n \gg 0$, entonces
$$f(n) = \sum_{t=0}^{\deg(f)} b_t F_t(n)$$
para algún $b_t \in \mathbb{Z}$. Procederemos por inducción sobre $\deg(f)$. Si $\deg(f) = 0$, entonces $f(n) = c = cF_0(n)$. Ahora supongamos que $\deg(f) > 0$ y que el resultado es cierto para todo $g \in \mathbb{Q}[n]$ tal que $\deg(g) < \deg(f)$. Sea $G(n) = f(n+1) - f(n)$. Entonces $G \in \mathbb{Q}[n]$, $G(n) \in \mathbb{Z}$ para $n \gg 0$, y $\deg(G) = \deg(f) - 1$. Por hipótesis de inducción,
$$G(n) = \sum_{t=0}^{deg(f)-1} b_t F_t(n)$$

para algún $b_t \in \mathbb{Z}$. Como vimos en la demostración del Lema 2.0.2,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} G(k) \\ &= f(0)F_0(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{deg(f)-1} b_t F_t(k) \\ &= f(0)F_0(n) + \sum_{t=0}^{\deg(f)-1} b_t F_{t+1}(n). \end{aligned}$$

Como consecuencia, el coeficiente de x^d en $g_{\mathfrak{m},M}$ es igual a $\frac{a}{d!}$ para algún $a \in \mathbb{Z}$. Puesto que $\deg(g_{\mathfrak{m},M}) = \dim(M) = d$, obtenemos que $a \neq 0$. Dado que $g_{\mathfrak{m},M}(n) = \lambda(M/\mathfrak{m}^n M)$ para $n \gg 0$, se sigue que $a > 0$. Más aún, $\mathrm{e}(M) = \lim_{n\to\infty} \frac{d!\lambda(M/\mathfrak{m}^n M)}{n^d} = a$. Por lo tanto, $\mathrm{e}(M) \in \mathbb{Z}_{>0}$.

3. Sea $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ una filtración prima de M. Por el Teorema 2.1.1, tenemos que

$$\mathrm{e}(M) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}(M_i/M_{i-1}).$$

Por el Lema 2.1.2 y ya que $\mathrm{e}(R/P) = 0$ si $\dim(R/P) \neq \dim(R)$,

$$\mathrm{e}(M) = \sum_{\substack{Q\in \mathrm{Min}(R) \\ \dim(R/Q)=\dim(R)}} \lambda_{R_Q}(M_Q)\,\mathrm{e}(R/Q).$$

4. De (2) y (3) obtenemos que R sólo tiene un ideal primo asociado Q y $\lambda_{R_Q}(R_Q) = 1$. Por lo tanto, R_Q es un campo y R es un dominio.

5. Dado que f es un no divisor de cero, la sucesión

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot f} R \longrightarrow R/fR \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego, la sucesión

$$0 \longrightarrow R/(\mathfrak{m}^n : f) \xrightarrow{\cdot f} R/\mathfrak{m}^n \longrightarrow R/(\mathfrak{m}^n + fR) \longrightarrow 0$$

es exacta. Como consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda(R/(\mathfrak{m}^n + fR)) &= \lambda(R/\mathfrak{m}^n) - \lambda(R/(\mathfrak{m}^n : f)) \\ &= \lambda((\mathfrak{m}^n : f)/\mathfrak{m}^n) \\ &\geq \lambda(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n). \end{aligned}$$

Dado que f es un no divisor de cero, $\dim(R/fR) = \dim(R) - 1$. Por lo tanto, si $d = \dim(R)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(R/fR) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!\lambda(R/(\mathfrak{m}^n + fR))}{n^{d-1}} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!\lambda(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n)}{n^{d-1}} = \mathrm{e}(R). \end{aligned}$$

□

3

Multiplicidad de Hilbert-Kunz y F-Signatura

A lo largo de este capítulo todos los anillos son Noetherianos y tienen característica prima p. A partir de ahora $F : R \to R$ denota el endomorfismo de Frobenius, el cual está definido por $F(r) = r^p$. Así, para $e \in \mathbb{N}$, $F^e : R \to R$ está dado por $F^e(r) = r^{p^e}$. Denotamos al ideal $F^e(I)R$ por $I^{[p^e]}$. Si R es un dominio y L es una clausura algebraica de su campo de fracciones, R^{1/p^e} denota el conjunto

$$\left\{ x \in L \,\middle|\, x^{p^e} \in R \right\},$$

el cual es un subanillo de L.

Si R es reducido y $P_1, \ldots, P_n$ son los primos minimales de R, entonces el morfismo natural

$$R \to \bigoplus_{i=1}^{n} R/P_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{\operatorname{frac}(R/P_i)}$$

es inyectivo. Luego, si $\kappa = \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{\operatorname{frac}(R/P_i)}$, podemos considerar el conjunto

$$\left\{ x \in \kappa \,\middle|\, x^{p^e} \in R \right\},$$

el cual es un subanillo de κ. Denotamos a este anillo por R^{1/p^e}. Si $r \in R$, utilizamos r^{1/p^e} para denotar al único elemento $x \in R^{1/p^e}$ tal que $x^{p^e} = r$.

Observación 3.0.1. *La función $g : R \to R^{1/p^e}$ dada por*

$$g(r) = r^{1/p^e}$$

es un isomorfismo de anillos.

Dado que $R \subseteq R^{1/p^e}$, podemos considerar R^{1/p^e} como R-módulo. Si R^{1/p^e} es finitamente generado como R-módulo para cada $e \in \mathbb{N}$, decimos que R es *F-finito*.

Otro concepto que juega un papel importante en este capítulo es el rango libre maximal de un R-módulo finitamente generado, el cual definimos ahora:

Definición 3.0.2. Sea M un R-módulo finitamente generado. Definimos el rango libre maximal de M como el máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una función suprayectiva R-lineal $M \to R^n$. Lo denotamos por $\operatorname{frk}_R(M)$, o $\operatorname{frk}(M)$ si el anillo es claro del contexto.

Nuestro principal objetivo en este capítulo es demostrar el siguiente teorema que fue demostrado originalmente por Monsky en el caso de la multiplicidad de Hilbert-Kunz [Mon83] y por Tucker en el caso de la F-signatura [Tuc12].

Teorema 3.0.3 ([Mon83; Tuc12])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un dominio Noetheriano local F-finito y sea $d = \dim(R)$. Entonces, los límites*

$$\mathrm{e}_{HK}(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{\mu_R\left(R^{1/p^e}\right)}{\left[K^{1/p^e} : K\right] p^{ed}} \quad \& \quad \mathrm{s}(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{\mathrm{frk}_R\left(R^{1/p^e}\right)}{\left[K^{1/p^e} : K\right] p^{ed}}$$

existen. Llamamos a $\mathrm{e}_{HK}(R)$ la multiplicidad de Hilbert-Kunz de R y a $\mathrm{s}(R)$, la F-signatura de R.

Para demostrar lo anterior, primero necesitamos estudiar algunas propiedades del rango libre maximal, así como algunas propiedades de los anillos F-finitos. Después de demostrar dicho resultado, extenderemos la definición de la multiplicidad de Hilbert-Kunz a módulos finitamente generados sobre anillos Noetherianos locales. Posteriormente discutiremos algunas propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Kunz. Finalmente, concluimos este capítulo con un criterio para determinar si un anillo local es regular.

3.1 Rango libre maximal

Dado que cada homomorfismo suprayectivo sobre un módulo libre escinde, $\mathrm{frk}_R(M)$ es el rango máximo de un sumando directo libre de M. Adicionalmente, tenemos el siguiente resultado clásico que caracteriza al rango libre maximal.

Proposición 3.1.1. *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local y M un R-módulo finitamente generado. Si $M \simeq R^{\oplus t} \oplus M'$ donde $\varphi(M') \subseteq \mathfrak{m}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M', R)$, entonces $t = \mathrm{frk}_R(M)$.*

Demostración. Sea $N = \{x \in M \mid \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)\ \varphi(x) \in \mathfrak{m}\}$ y sea $\psi : M \to R^{\oplus t} \oplus M'$ un isomorfismo donde $\varphi(M') \subseteq \mathfrak{m}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M', R)$. Queremos demostrar que $\psi(N) = \mathfrak{m}^{\oplus t} \oplus M'$. Si $\psi(x) \notin \mathfrak{m}^{\oplus t} \oplus M'$, existe un morfismo proyección π tal que $\pi \circ \psi(x) \notin \mathfrak{m}$ y, como consecuencia, $x \notin N$. Ahora, si $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$, $\varphi \circ \psi^{-1}(\mathfrak{m}^{\oplus t} \oplus M') = \varphi \circ \psi^{-1}(\mathfrak{m}^{\oplus t}) + \varphi \circ \psi^{-1}(M') \subseteq \mathfrak{m}$. Deducimos que $\psi(N) = \mathfrak{m}^{\oplus t} \oplus M'$. Se sigue que $M/N \simeq K^{\oplus t}$ y $t = \lambda_K(M/N)$. Así, si $M \simeq R^{\oplus s} \oplus M_0$ es otra descomposición en suma directa tal que $\varphi(M_0) \subseteq \mathfrak{m}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M_0, R)$, entonces $s = t = \lambda_R(M/N)$. Ahora, por la observación anterior, existe una descomposición en suma directa $M \simeq R^{\mathrm{frk}_R(M)} \oplus M_1$ donde M_1 no tiene sumandos directos libres. Luego, tenemos que $\varphi(M_1) \subseteq \mathfrak{m}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M_1, R)$. Por lo tanto, $t = \mathrm{frk}_R(M)$. ☐

El siguiente lema nos da algunas desigualdades que serán útiles para demostrar la existencia de la multiplicidad de Hilbert-Kunz y de la F-signatura

Lema 3.1.2. *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un dominio Noetheriano local y sea M un R-módulo finitamente generado. Entonces,*

$$\mathrm{frk}_R(M) \le \mathrm{rank}_R(M) \le \mu_R(M).$$

Demostración. Sea $k = \mathrm{frac}(R)$. Para ver la primera desigualdad, notemos que si $M \simeq R^{\mathrm{frk}_R(M)} \oplus N$, $M \otimes k = k^{\oplus\, \mathrm{frk}_R(M)} \oplus (N \otimes_R k)$. Luego, obtenemos que $\mathrm{rank}_R(M) = \dim_k(M \otimes_R k) \ge \mathrm{frk}(M)$.

Para la segunda desigualdad, notemos que existe un homomorfismo suprayectivo $\varphi : R^{\oplus \mu_R(M)} \to M$. Dado que el funtor $\_ \otimes k$ es exacto por la derecha, el homomorfismo $\varphi \otimes 1_k : k^{\oplus \mu_R(M)} \to M \otimes_R k$ es suprayectivo. Se sigue que $\mathrm{rank}_R(M) = \dim_k(M \otimes_R k) \le \dim_k(k^{\oplus \mu_R(M)}) = \mu_R(M)$. ☐

Notemos que si $M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces tenemos que $\mu(M) \le \mu(M') + \mu(M'')$. En el siguiente lema demostramos una desigualdad similar para $\mathrm{frk}_R(\_)$.

Lema 3.1.3 ([PT18, Lema 2.1])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local.*

1. *Si M_1 y M_2 son R-módulos finitamente generados, entonces $\operatorname{frk}(M_1 \oplus M_2) = \operatorname{frk}(M_1) + \operatorname{frk}(M_2)$.*

2. *Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta corta de R-módulos finitamente generados, entonces*
$$\operatorname{frk}(M'') \leq \operatorname{frk}(M) \leq \operatorname{frk}(M') + \mu(M'').$$

Demostración.

1. Sabemos que $M_1 \simeq R^{\operatorname{frk}(M_1)} \oplus N_1$ donde $\varphi(N_1) \subseteq \mathfrak{m}$ para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(N_1, R)$. De igual forma, $M_2 \simeq R^{\operatorname{frk}(M_2)} \oplus N_2$ donde $\varphi(N_2) \subseteq \mathfrak{m}$ para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(N_2, R)$. Luego,
$$M_1 \oplus M_2 = R^{\operatorname{frk}(M_1)+\operatorname{frk}(M_2)} \oplus (N_1 \oplus N_2).$$
Adicionalmente, si $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(N_1 \oplus N_2)$, entonces $\varphi(N_1 \oplus N_2) = \varphi(N_1) + \varphi(N_2) \subseteq \mathfrak{m}$. Así, por la Proposición 3.1.1, $\operatorname{frk}(N_1 \oplus N_2) = \operatorname{frk}(N_1) + \operatorname{frk}(N_2)$.

2. Para obtener la primera desigualdad, notemos que existe un homomorfismo suprayectivo $M'' \to R^{\oplus \operatorname{frk}(M'')}$. Como consecuencia, tenemos un homomorfismo suprayectivo $M \to R^{\oplus \operatorname{frk}(M'')}$. Se sigue que $\operatorname{frk}(M'') \leq \operatorname{frk}(M)$.

   Para demostrar la segunda desigualdad, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $M' \subseteq M$ y $M'' = M/M'$. Sea n el rango máximo de un sumando directo libre común de M y M'. Entonces, $M = R^{\oplus n} \oplus N$ y $M' = R^{\oplus n} \oplus N'$ donde $R^{\oplus n}$ es un submódulo común de M y M', y $N' \subseteq N$. Notemos que, si existe $\varphi \in \operatorname{Hom}(N, R)$ tal que $\varphi(N') = R$, entonces existe $\psi : R \to N'$ tal que $\varphi \circ \psi = Id_R$. Como consecuencia, N' y N tienen un sumando directo libre común, lo cual es una contradicción. Así, para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(N, R)$ tenemos que $\varphi(N') \subseteq \mathfrak{m}$. Sea $\Psi : N \to R^{\oplus \operatorname{frk}(N)}$ una función suprayectiva R-lineal. Entonces, $\Psi(N') \subseteq \mathfrak{m}^{\oplus \operatorname{frk}(N)}$ y, como consecuencia, Ψ induce una suryección R-lineal $\overline{\Psi} : N/N' \to K^{\oplus \operatorname{frk}(N)}$. Dado que $M'' = M/M' = N/N'$, $\overline{\Psi}$ induce una suryección R-lineal $\widetilde{\Psi} : M''/\mathfrak{m}M'' \to K^{\oplus \operatorname{frk}(N)}$. Se sigue que $\mu(M'') \geq \operatorname{frk}(N)$. Como consecuencia, tenemos que $\operatorname{frk}(M) = n + \operatorname{frk}(N) \leq \operatorname{frk}(M') + \mu(M'')$.

□

3.2 Anillos F-finitos

Si M es un R-módulo, M^{1/p^e} denota el R-módulo obtenido restringiendo escalares por medio de F^e. Es decir, M^{1/p^e} es igual a M como grupo y $r \cdot m = r^{p^e} m$. Notemos que M^{1/p^e} es un $R^{1/p}$-módulo con la operación $r^{1/p} \cdot m = rm$.

El siguiente resultado relaciona $\mu_R(\_)$ y $\lambda_R(\_)$ cuando $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano local F-finito.

Lema 3.2.1. *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local F-finito y sea M un R-módulo finitamente generado. Si M tiene longitud finita, entonces M^{1/p^e} tiene longitud finita y*
$$\lambda_R\left(M^{1/p^e}\right) = \left[K^{1/p^e} : K\right] \lambda_{R^{1/p^e}}\left(M^{1/p^e}\right) = \left[K^{1/p^e} : K\right] \lambda_R(M).$$

En particular,
$$\begin{aligned}
\mu_R\left(M^{1/p^e}\right) &= \lambda_R\left(M^{1/p^e}/\mathfrak{m}M^{1/p^e}\right) \\
&= \lambda_R\left(\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right)^{1/p^e}\right) \\
&= \left[K^{1/p^e} : K\right] \lambda_R\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right).
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ una filtración de M tal que $M_{i+1}/M_i \simeq K$. Entonces, $0 = M_0^{1/p^e} \subseteq M_1^{1/p^e} \subseteq \ldots \subseteq M_n^{1/p^e} = M^{1/p^e}$ es una filtración de M^{1/p^e} tal que $(M_{i+1}/M_i)^{1/p^e} \simeq K^{1/p^e}$. Se sigue que $\lambda_{R^{1/p^e}}(M^{1/p^e}) = n = \lambda_R(M)$. Dado que λ es aditiva, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_R\left(M^{1/p^e}\right) &= \sum_{i=1}^{\lambda_R(M)} \lambda_R\left(K^{1/p^e}\right) \\
&= \lambda_R(M)\lambda_K\left(K^{1/p^e}\right) \\
&= \left[K^{1/p^e} : K\right]\lambda_R(M).
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición relaciona $\operatorname{rank}_R\left(R^{1/p^e}\right)$ y $\left[K^{1/p^e} : K\right]$.

Proposición 3.2.2 ([Kun76])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un dominio Noetheriano local F-finito de dimensión d. Entonces,*

$$\operatorname{rank}_R(R^{1/p^e}) = \left[K^{1/p^e} : K\right] p^{ed}.$$

Demostración. Primero supongamos que R es completo. Sea $x_1, \ldots, x_d$ un sistema de parámetros de $\mathfrak{m}$. Entonces, por el Teorema de estructura de Cohen [Coh46], R es una extensión finita del anillo regular local $A = K[[x_1, \ldots, x_d]]$. Dado que R es F-finito, K^{1/p^e} es un K-espacio vectorial de dimension finita y A es F-finito. Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de K^{1/p^e} sobre K. Luego, tenemos que

$$\left\{u_i x_1^{a_1/p^e} \cdots x_d^{a_d/p^e} \;\middle|\; i \in \{1, \ldots, n\}, 0 \leq a_1, \ldots, a_d \leq p^e - 1\right\}$$

es una base libre para A^{1/p^e} sobre A y, como consecuencia, $\operatorname{rank}_A(A^{1/p^e}) = [K^{1/p^e} : K]p^{ed}$. Por otro lado, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
A^{1/p^e} \arrow[r] & R^{1/p^e}
\end{tikzcd}$$

donde todos los homomorfismos son inyectivos. Tomando producto tensorial con $W^{-1}A$, donde $W = A - \{0\}$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{frac}(A) \arrow[r] \arrow[d] & W^{-1}R \arrow[d] \\
W^{-1}A^{1/p^e} \arrow[r] & W^{-1}R^{1/p^e}
\end{tikzcd}$$

donde todos los homomorfismos son inyectivos dado que $W^{-1}A$ es un A-módulo plano. Dado que $W^{-1}R$ es una extensión módulo-finita de $\operatorname{frac}(A)$, $W^{-1}R$ es un dominio y $\operatorname{frac}(A)$ es un campo, tenemos $W^{-1}R$ es un campo. Luego, $W^{-1}R = \operatorname{frac}(R)$. Análogamente, tenemos que $W^{-1}A^{1/p^e} = \operatorname{frac}(A^{1/p^e})$. Se sigue que

$$\operatorname{rank}_A(R)\operatorname{rank}_R\left(R^{1/p^e}\right) = \operatorname{rank}_A\left(R^{1/p^e}\right) = \operatorname{rank}_A\left(A^{1/p^e}\right)\operatorname{rank}_{A^{1/p^e}}\left(R^{1/p^e}\right).$$

Puesto que $\operatorname{rank}_A(R) = \operatorname{rank}_{A^{1/p^e}}(R^{1/p^e})$, tenemos que $\operatorname{rank}_R(R^{1/p^e}) = \operatorname{rank}_A(A^{1/p^e})$.

Si R no es completo, consideramos un ideal primo minimal P de $\widehat{R}$ tal que $\dim(\widehat{R}/P) = \dim(\widehat{R})$ y consideramos $L = \widehat{R}_P$. Dado que $\widehat{R}$ es reducido, L es un campo. Entonces, si $k = \operatorname{frac}(R)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
L \otimes_k k^{1/p^e} &\simeq L \otimes_k \left(k \otimes_R R^{1/p^e}\right) \simeq L \otimes_R R^{1/p^e} \\
&\simeq L \otimes_{\widehat{R}} \left(\widehat{R} \otimes_R R^{1/p^e}\right) \simeq L \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}^{1/p^e} \simeq L^{1/p^e}.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\operatorname{rank}_L(L^{1/p^e}) = \operatorname{rank}_k(k^{1/p^e}) = \operatorname{rank}_R(R^{1/p^e})$. Puesto que $L = \operatorname{frac}(\widehat{R}/P)$ y $\widehat{R}/P$ es completo, tenemos que $\operatorname{rank}_R(R^{1/p^e}) = [K^{1/p^e} : K]p^{ed}$. $\square$

3.3 Existencia de la multiplicidad de Hilbert-Kunz y de la F-signatura

Antes de demostrar la existencia de la multiplicidad de Hilbert-Kunz y de la F-signatura, necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 3.3.1 ([Mon83, Lema 1.1]). *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local y M un R-módulo finitamente generado. Entonces existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que*

$$\lambda_R\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) \leq Cp^{e\dim(M)}$$

para todo $e \in \mathbb{N}$.

Demostración. Notemos que si $\mathfrak{m}$ es generado por t elementos, entonces $\mathfrak{m}^{tp^e} \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$. Se sigue que

$$\lambda_R\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) \leq \lambda_R\left(M/\mathfrak{m}^{tp^e}M\right).$$

Por lo visto en el capítulo 2, el Teorema 2.0.5 implica que existe $\sum\limits_{i=0}^{\dim(M)} a_i n^i \in \mathbb{Q}[n]$ tal que

$$\lambda_R(M/\mathfrak{m}^{tp^e}M) = \sum_{i=0}^{\dim(M)} a_i t^i p^{ei}$$

para todo $e \gg 0$. Por lo tanto,

$$\lambda_R\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\dim(M)} |a_i| t^i\right) p^{e\dim(M)}$$

para todo $e \gg 0$.

$\square$

Observación 3.3.2. *Notemos que existe una filtración $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_t = K^{1/p}$ tal que $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$ para algún α_i de forma que $\alpha_i^p \in K_{i-1}$ y el polinomio mínimo de α_i sobre K_{i-1} es $x^p - \alpha_i^p$. Dado que $[K_i : K_{i-1}] = p$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$, se sigue que $[K^{1/p} : K] = p^t$. Como consecuencia, $[K^{1/p^e} : K] = p^{et}$ para todo $e \in \mathbb{N}$.*

Ahora podemos demostrar el resultado principal de este capítulo. Este teorema fue demostrado originalmente por Monsky en el caso de la multiplicidad de Hilbert-Kunz [Mon83] y por Tucker en el caso de la F-signatura [Tuc12]. La demostración que presentamos aquí fue dada por Polstra y Tucker [PT18].

Teorema 3.3.3 ([Mon83; Tuc12; PT18]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un dominio Noetheriano local F-finito y sea $d = \dim(R)$. Entonces, los límites*

$$\mathrm{e}_{HK}(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{\mu_R\left(R^{1/p^e}\right)}{[K^{1/p^e} : K]\, p^{ed}} \quad \& \quad \mathrm{s}(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{\operatorname{frk}_R\left(R^{1/p^e}\right)}{[K^{1/p^e} : K]\, p^{ed}}$$

existen.

Demostración. Sea $p^\gamma = [K^{1/p} : K]p^d$. A lo largo de esta prueba $\nu(\_)$ denota $\mu(\_)$ o $\operatorname{frk}(\_)$. Para cada $e \in \mathbb{N}$, sea $s_e = \frac{\nu_R(R^{1/p^e})}{[K^{1/p^e}:K]p^{ed}} = \frac{\nu_R(R^{1/p^e})}{p^{e\gamma}}$. Por los Lemas 3.1.2, 3.2.1, and 3.3.1, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{frk}_R\left(R^{1/p^e}\right) \leq \mu_R\left(R^{1/p^e}\right) = \left[K^{1/p^e} : K\right]\lambda_R\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}\right) \leq \left[K^{1/p^e} : K\right]Cp^{ed}$$

para toda $e \in \mathbb{N}$. Luego, la sucesión $\{s_e\}_e$ está acotada por abajo por 0 y por arriba por C. Por lo tanto, $s^+ = \limsup_{e\to\infty} s_e$ y $s^- = \liminf_{e\to\infty} s_e$ son finitos.

Por la Proposición 3.2.2, tenemos que $p^\gamma = \operatorname{rank}_R(R^{1/p})$. Luego, existe una función R-lineal inyectiva $f : R^{\oplus p^\gamma} \to R^{1/p}$. Como consecuencia, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R^{\oplus p^\gamma} \longrightarrow R^{1/p} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $M = R^{1/p}/f(R^{\oplus p^\gamma})$. Aplicando el funtor exacto $(\_)^{1/p^e}$, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \left(R^{1/p^e}\right)^{\oplus p^\gamma} \longrightarrow R^{1/p^{e+1}} \longrightarrow M^{1/p^e} \to 0.$$

Así, ya que μ es subaditiva y por el Lema 3.1.3, se sigue que

$$\nu_R\left(R^{1/p^{e+1}}\right) \leq p^\gamma \nu_R\left(R^{1/p^e}\right) + \mu_R\left(M^{1/p^e}\right).$$

Notemos que M es un módulo de torsión. Además, M es finitamente generado como R-módulo ya que R es F-finito. Así, $\operatorname{Ann}(M) \neq 0$ y $\dim(M) < d$. Luego, por el Lema 3.2.1 y por el Lema 3.3.1, existe $D \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
\mu_R\left(M^{1/p^e}\right) &= \left[K^{1/p^e} : K\right]\lambda_R\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) \\
&\leq \left[K^{1/p^e} : K\right]Dp^{e\dim(M)} \\
&\leq \left[K^{1/p^e} : K\right]p^{e(d-1)}D \\
&\leq p^{e(\gamma-1)}D
\end{aligned}$$

para $e \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\nu_R\left(R^{1/p^{e+1}}\right) \leq p^\gamma \nu_R\left(R^{1/p^e}\right) + p^{e(\gamma-1)}D$$

y, dividiendo por $p^{(e+1)\gamma}$, obtenemos

$$s_{e+1} \leq s_e + D'\frac{1}{p^e}$$

donde $D' = \frac{D}{p^\gamma}$. Por inducción, tenemos que

$$s_{e+e'} \leq s_e + \frac{D'}{p^e}\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{e'-1}}\right) \leq s_e + \frac{2D'}{p^e}$$

para $e, e' \in \mathbb{N}$. Para cada e, tomando $\limsup\limits_{e'\to\infty}$, obtenemos

$$s^+ \leq s_e + \frac{2D'}{p^e},$$

y, tomando $\liminf\limits_{e\to\infty}$, tenemos que $s^+ \leq s^-$. Por lo tanto, $\lim\limits_{e\to\infty} s_e$ existe. □

Observación 3.3.4. *Por el Lema 3.2.1, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_{HK}(R) &= \lim_{e\to\infty} \frac{\mu_R\left(R^{1/p^e}\right)}{\left[K^{1/p^e}:K\right] p^{ed}} \\
&= \lim_{e\to\infty} \frac{\left[K^{1/p^e}:K\right] \lambda_R\left(R/m^{[p^e]}R\right)}{\left[K^{1/p^e}:K\right] p^{ed}} \\
&= \lim_{e\to\infty} \frac{\lambda_R\left(R/m^{[p^e]}R\right)}{p^{ed}}.
\end{aligned}$$

Ahora queremos demostrar que

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\lambda_R\left(M/m^{[p^e]}M\right)}{p^{ed}}$$

existe para cualquier R-módulo finitamente generado M donde $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo local de dimensión d. Con este objetivo, veremos que la demostración de este hecho se reduce al caso en el que $R = M$ y $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un dominio local F-finito. Para ver esto necesitamos algunos resultados adicionales, empezando con el siguiente lema.

Lema 3.3.5 ([Tuc12, Lema 3.3])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo reducido Noetheriano local de dimensión d y sean $P_1, \ldots, P_n$ los primos minimales de R tales que $\dim(R/P_i) = d$. Si M y N son R-módulos finitamente generados tales que $M_{P_i} \simeq N_{P_i}$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces existe $C \in R_{>0}$ tal que*

$$\left|\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) - \lambda\left(N/\mathfrak{m}^{[p^e]}N\right)\right| \leq Cp^{e(d-1)}$$

para todo $e \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $W = R - \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Entonces, tenemos que $W^{-1}R \simeq \prod_{i=1}^{n} R_{P_i}$. Ya que $M_{P_i} \simeq N_{P_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se sigue que $W^{-1}M \simeq W^{-1}N$. Por otro lado, dado que

$$W^{-1}\operatorname{Hom}_R(M, N) \simeq \operatorname{Hom}_{W^{-1}R}(W^{-1}M, W^{-1}N),$$

existe $\phi \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ tal que $W^{-1}\phi$ es un isomorfismo. Como consecuencia, tenemos que $W^{-1}\operatorname{coker}(\phi) = 0$. Dado que M es un R-módulo Noetheriano, tenemos que $\operatorname{coker}(\phi)$ es finitamente generado y, como consecuencia, existe $w \in W$ tal que $w \in \operatorname{Ann}(\operatorname{coker}(\phi))$. Así, $\dim(\operatorname{coker}(\phi)) < \dim(R)$. Por el Lema 3.3.1, $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]} \otimes \operatorname{coker}(\phi)) \leq Cp^{e(d-1)}$ para algún $C \in \mathbb{R}_{>0}$. Por otro lado, dado que la sucesión

$$M \xrightarrow{\phi} N \longrightarrow \operatorname{coker}(\phi) \longrightarrow 0$$

es exacta, la sucesión

$$M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M \xrightarrow{\widetilde{\phi}} N/\mathfrak{m}^{[p^e]}N \longrightarrow \operatorname{coker}(\phi)/\mathfrak{m}^{[p^e]}\operatorname{coker}(\phi) \longrightarrow 0$$

también es exacta. Se sigue que

$$\lambda\left(N/\mathfrak{m}^{[p^e]}N\right) - \lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) \leq \lambda\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]} \otimes \operatorname{coker}(\phi)\right) \leq Cp^{e(d-1)}.$$

Análogamente, considerando $\psi \in \operatorname{Hom}_R(N, M)$ tal que $W^{-1}\psi$ es un isomorfismo, obtenemos

$$\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) - \lambda\left(N/\mathfrak{m}^{[p^e]}N\right) \leq Dp^{e(d-1)}$$

para algún $D \in \mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto,

$$\left|\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M\right) - \lambda\left(N/\mathfrak{m}^{[p^e]}N\right)\right| \leq \text{máx}\{C, D\}p^{e(d-1)}.$$

□

El siguiente resultado también nos será útil para estudiar las propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Kunz, las cuales analizaremos en la siguiente sección. Recordemos que, dadas dos funciones f, g de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, escribimos $f(n) = O(g(n))$ si existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(n)| \leq Cg(n)$ para todo $n \gg 0$.

Proposición 3.3.6 ([Mon83]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de dimensión d y sea*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados. Entonces,

$$\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[q^e]}M\right) = \lambda\left(M'/\mathfrak{m}^{[q^e]}M'\right) + \lambda\left(M''/\mathfrak{m}^{[q^e]}M''\right) + O\left(p^{e(d-1)}\right)$$

para todo $e \in \mathbb{N}$.

Demostración. Considerando una extensión fielmente plana de la misma dimensión, podemos suponer que R es un anillo local completo con campo residual algebraicamente cerrado. Así, podemos suponer que R es F-finito.

Supongamos que R es reducido. Sea Q un primo minimal de R. Notemos que R_Q es un campo ya que es un anillo local reducido cero-dimensional. Así, dado que la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_Q \longrightarrow M_Q \longrightarrow M''_Q \longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos que $M_Q \simeq (M' \oplus M'')_Q$. Por el Lema 3.3.5,

$$\begin{aligned}\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[q^e]}M\right) &= \lambda\left((M' \oplus M'')/\mathfrak{m}^{[q^e]}(M' \oplus M'')\right) + O\left(p^{e(d-1)}\right)\\ &= \lambda\left(M'/\mathfrak{m}^{[q^e]}M'\right) + \lambda\left(M''/\mathfrak{m}^{[q^e]}M''\right) + O\left(p^{e(d-1)}\right).\end{aligned}$$

Si R no es reducido, consideramos $e' \in \mathbb{N}$ tal que $(\text{Nil}(R))^{[p^{e'}]} = 0$, donde $\text{Nil}(R)$ denota el nilradical de R. Entonces, ya que R es F-finito, podemos considerar la sucesión (3.1) como una sucesión de $R^{[p^{e'}]}$-módulos finitamente generados. Notemos que el ideal maximal de $R^{p^{e'}}$ es

$$\left\{x^{p^{e'}} \,\middle|\, x \in \mathfrak{m}\right\}.$$

Ya que $R^{p^{e'}}$ es reducido, podemos aplicar el caso anterior para obtener

$$\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[p^{e+e'}]}M\right) = \lambda\left(M'/\mathfrak{m}^{[p^{e+e'}]}M'\right) + \lambda\left(M''/\mathfrak{m}^{[p^{e+e'}]}M''\right) + O\left(p^{e(d-1)}\right).$$

Finalmente, puesto que $O\left(p^{e(d-1)}\right) = O\left(p^{(e+e')(d-1)}\right)$, se sigue el resultado. □

Ahora podemos demostrar la existencia del límite

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\lambda_R\left(M/m^{[p^e]}M\right)}{p^{ed}}.$$

Teorema-Definición 3.3.7 ([Mon83]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de dimensión d y M un R-módulo finitamente generado. Entonces, el límite*

$$\alpha = \lim_{e\to\infty} \frac{\lambda_R\left(M/m^{[p^e]}M\right)}{p^{ed}}$$

existe. Llamamos a α la multiplicidad de Hilbert-Kunz de M y la denotamos por $\mathrm{e}_{HK}(M)$.

Demostración. Considerando una extensión fielmente plana de la misma dimensión, podemos suponer que R es un anillo local completo con campo residual algebraicamente cerrado. Así, podemos suponer que R es F-finito.

Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ una filtración prima de M donde $M_t/M_{t-1} \simeq R/P_t$ para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$. Por la Proposición 3.3.6, tenemos que

$$\lambda\left(M/\mathfrak{m}^{[q^e]}M\right) = \sum_{t=1}^{n} \lambda\left((R/P_t)/\mathfrak{m}^{[q^e]}(R/P_t)\right) + O\left(p^{e(d-1)}\right)$$

para todo $e \in \mathbb{N}$. Así, es suficiente demostrar la afirmación para el caso en que $M = R/P$ donde P es un ideal primo de R. Dado que $\lambda_R((R/P)/\mathfrak{m}^{[q^e]}(R/P)) = \lambda_{R/P}((R/P)/\mathfrak{m}^{[q^e]}(R/P))$ y $\dim(R/P) \leq \dim(R)$, podemos suponer que R es un dominio F-finito y $M = R$. Por lo tanto, el resultado se sigue del Teorema 3.3.3. ☐

3.4 Propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Kunz

La multiplicidad de Hilbert-Kunz satisface muchas de las propiedades que demostramos para la multiplicidad de Hilbert-Samuel. Por ejemplo, la Proposición 3.3.6 tiene la siguiente consecuencia que es el resultado análogo al Teorema 2.1.1.

Corolario 3.4.1 ([Mon83]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local y*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados. Entonces, $\mathrm{e}_{HK}(M) = \mathrm{e}_{HK}(M') + \mathrm{e}_{HK}(M'')$.

Observación 3.4.2. *Supongamos que $\dim(M) < \dim(R)$ y consideremos M como un $R/\operatorname{Ann}(M)$-módulo. Entonces, por el Teorema 3.3.7, el límite*

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\lambda_R\left(M/m^{[p^e]}M\right)}{p^{e\dim(R/\operatorname{Ann}(M))}}$$

existe. Se sigue que $\mathrm{e}_{HK}(R) = \lim\limits_{e\to\infty} \frac{\lambda_R(M/m^{[p^e]}M)}{p^{ed}} = 0$.

El siguiente teorema da una cota inferior para la multiplicidad de Hilbert-Kunz de un anillo Noetheriano local.

Teorema 3.4.3 ([Kun69, Proposición 3.2]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de dimensión d. Entonces, para cada $e \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) \geq p^{ed}$. Como consecuencia, $\mathrm{e}_{HK}(R) \geq 1$.*

Demostración. Considerando una extensión fielmente plana de la misma dimensión, podemos suponer que R es un anillo local completo con campo residual algebraicamente cerrado. Así, podemos suponer que R es F-finito. Si P es un primo minimal de R tal que $\dim(R/P) = \dim(R)$, entonces $\lambda(R/m^{[p^e]}) \geq \lambda((R/P)/(\mathfrak{m}^{[p^e]}(R/P)))$. Como consecuencia, podemos considerar que R es un dominio local F-finito de dimensión d. Por la Proposición 3.2.2, $\operatorname{rank}_R(R^{1/p^e}) = p^{ed}$. Por el Lema 3.1.2, tenemos que $\mu_R(R^{1/p^e}) \geq p^{ed}$. Adicionalmente, por el Lema 3.2.1, $\mu_R(R^{1/p^e}) = \lambda_R(R/\mathfrak{m}^{[p^e]})$. Por lo tanto, $\lambda_R(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) \geq p^{ed}$. ☐

En el siguiente resultado, presentamos algunas otras propiedades de la multiplicidad de Hilbert-Kunz que también satisface la multiplicidad de Hilbert-Samuel (Proposición 2.1.3).

Proposición 3.4.4. *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local y M un R-módulo finitamente generado.*

1. *Si R es un dominio, entonces*
$$\mathrm{e}_{HK}(M) = \operatorname{rank}(M)\,\mathrm{e}_{HK}(R).$$
2. *Tenemos una fórmula de asociatividad:*
$$\mathrm{e}_{HK}(M) = \sum_{\substack{Q \in \operatorname{Min}(R) \\ \dim(R/Q) = \dim(R)}} \lambda_{R_Q}(M_Q)\,\mathrm{e}_{HK}(R/Q).$$
3. *Si R es no mezclado y $\mathrm{e}_{HK}(R) = 1$, entonces R es un dominio.*
4. *Si $f \in \mathfrak{m}$ es un no divisor de cero en R, entonces $\mathrm{e}_{HK}(R/fR) \geq \mathrm{e}_{HK}(R)$.*

Demostración.

1. Primero consideramos el caso en que $M = R^{\oplus t}$. En este caso, tenemos que
$$M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M \simeq (R/\mathfrak{m}^{[p^e]})^{\oplus t}.$$
Así, $\lambda(M/\mathfrak{m}^{[p^e]}M) = t\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) = \operatorname{rank}(M)\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]})$.
Ahora, si M es un R-módulo finitamente generado, por el Lema 3.3.5, es suficiente probar que $M_P \simeq R_P^{\oplus \operatorname{rank}(M)}$ para $P = \{0\}$. Si $L = \operatorname{frac}(R)$, entonces $R_P = L$ y $M_P \simeq L \otimes_R M$. Dado que $\operatorname{rank}(M) = \dim_L(L \otimes_R M) = \dim_L(M_P)$, tenemos que $M_P \simeq R_P^{\oplus \operatorname{rank}(M)}$.
2. Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ una filtración prima de M. Por el Corolario 3.4.1, tenemos que
$$\mathrm{e}_{HK}(M) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}_{HK}(M_i/M_{i-1}).$$
Por el Lema 2.1.2 y ya que $\mathrm{e}_{HK}(R/P) = 0$ si $\dim(R/P) \neq \dim(R)$, obtenemos
$$\mathrm{e}_{HK}(M) = \sum_{\substack{Q \in \operatorname{Min}(R) \\ \dim(R/Q) = \dim(R)}} \lambda_{R_Q}(M_Q)\,\mathrm{e}_{HK}(R/Q).$$
3. Notemos que si $Q \in \operatorname{Min}(R)$ es tal que $\dim(R/Q) = \dim(R)$, entonces $\mathrm{e}_{HK}(R/Q)$ tiene el mismo valor si consideramos R/Q como R-módulo y si consideramos R/Q como R/Q-módulo. Así, de (2) y por el Teorema 3.4.3, tenemos que R sólo tiene un ideal primo asociado Q y $\lambda_{R_Q}(R_Q) = 1$. Como consecuencia, R_Q es un campo y R es un dominio.
4. Notemos que $(\mathfrak{m}^{[p^e]} + f^k R)/(\mathfrak{m}^{[p^e]} + f^{k+1}R)$ es imagen homomorfa de $R/(m^{[p^e]} + fR)$ como R-módulo. Como consecuencia, deducimos que
$$\lambda_R\left((\mathfrak{m}^{[p^e]} + f^k R)/(\mathfrak{m}^{[p^e]} + f^{k+1}R)\right) \leq \lambda\left(R/(m^{[p^e]} + fR)\right)$$
para cada $k \in \{1, \ldots, p^e - 1\}$. Se sigue que
$$\lambda_R\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}\right) \leq p^e \lambda_R\left(R/(\mathfrak{m}^{[p^e]} + fR)\right)$$
ya que $f^{p^e} \in \mathfrak{m}^{[p^e]}$. Dado que f es un no divisor de cero, $\dim(R/fR) = \dim(R) - 1$. Por lo tanto, si $d = \dim(R)$,
$$\mathrm{e}_{HK}(R) = \lim_{e \to \infty} \frac{\lambda\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)}{p^{ed}} \leq \lim_{e \to \infty} \frac{\lambda\left(R/(m^{[p^e]} + fR)\right)}{p^{e(d-1)}} = \mathrm{e}_{HK}(R/fR).$$

□

3.5 Multiplicidad de Hilbert-Kunz y anillos regulares

Comenzaremos esta sección estudiando la longitud de $R/m^{[p^e]}$ en el caso de un anillo regular.

Observación 3.5.1. *Si f es un no divisor de cero en R y $\dim(R) = 1$, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow R/f^n R \xrightarrow{\cdot f} R/f^{n+1}R \longrightarrow R/fR \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego, obtenemos que

$$\lambda(R/f^{n+1}R) = \lambda(R/f^n R) + \lambda(R/fR).$$

Así, por inducción, tenemos que $\lambda(R/f^n R) = n\lambda(R/fR)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ahora supongamos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo regular. Dado que R es regular, $\mathfrak{m}$ es generado por una sucesión regular $x_1, \ldots, x_d$ donde $d = \dim(R)$. Notemos que si $d = 1$, entonces $\mathfrak{m}^{[p^e]} = x_1^{p^e} R$ y x_1 es un no divisor de cero en R. Por la Observación 3.5.1, tenemos que $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) = p^e \lambda(R/\mathfrak{m}) = p^e$. Supongamos que $d > 1$ y que $\lambda(S/\mu^{[p^e]}) = p^{e \dim(S)}$ para todo anillo regular local (S, μ, K) tal que $\dim(S) < d$. Consideremos el anillo $A = R/(x_d)$. Entonces A es regular y $\dim(A) = \dim(R) - 1$. Luego, por inducción, $\lambda(R/(\mathfrak{m}^{[p^e]} + x_d R)) = p^{e(d-1)}$. Dado que x_d es un no divisor de cero en $R/(x_1, \ldots, x_{d-1})^{[p^e]}$, por la Observación 3.5.1, $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) = p^e \lambda(R/(\mathfrak{m}^{[p^e]} + x_d R))$. Se sigue que $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) = p^{ed}$. Por lo tanto, si $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo regular local, $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) = p^{ed}$ para cada $e \geq 1$. En 1969, Kunz demostró la siguiente caracterización de los anillos regulares locales en característica prima p.

Teorema 3.5.2 ([Kun69, Teorema 2.1, Teorema 3.3])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local. Entonces R es regular si y sólo si para algún $e \geq 1$ (equivalentemente, para todo $e \geq 1$), $\lambda_R(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) = p^{ed}$. Adicionalmente, R es regular si y sólo si R es reducido y plano como R^p-módulo.*

El Teorema 3.5.2 implica que si $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo regular local, entonces $\mathrm{e}_{HK}(R) = 1$. Por el Teorema 3.4.3, esto significa que R tiene multiplicidad de Hilbert-Kunz mínima. Queremos demostrar que bajo ciertas condiciones, el converso es verdadero. Para esto, necesitamos estudiar la longitud de $R/I^{[p^e]}$ para cualquier ideal $\mathfrak{m}$-primario I. Empezamos con el siguiente lema.

Lema 3.5.3 ([Han02; WY00])**.** *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local, I un ideal $\mathfrak{m}$-primario y J un ideal tal que $I \subseteq J$. Entonces,*

$$\lambda\left(R/I^{[p^e]}\right) \leq \lambda\left(J/I\right) \lambda\left(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}\right) + \lambda\left(R/J^{[p^e]}\right).$$

En particular, si $J = R$, entonces $\lambda(R/I^{[p^e]}) \leq \lambda(R/I)\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^e]})$.

Demostración. Sea

$$I = J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots \subseteq J_n = J$$

una filtración de $I \subseteq J$ tal que $J_i/J_{i-1} \simeq K$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $n = \lambda(J/I)$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $x_i \in J_i$ tal que $J_i = J_{i-1} + x_i R$ y $J_{i-1} : x_i = \mathfrak{m}$. Se sigue que $J_i^{[p^e]} = J_{i-1}^{[p^e]} + x_i^{p^e} R$ para todo $e \in \mathbb{N}$. Así, para cada $e \in \mathbb{N}$ tenemos una filtración

$$I^{[p^e]} = J_0^{[p^e]} \subseteq J_1^{[p^e]} \subseteq \ldots \subseteq J_n^{[p^e]} = J^{[p^e]}$$

donde $J_i^{[p^e]}/J_{i-1}^{[p^e]} = R/(J_{i-1}^{[p^e]} : x_i^{p^e})$. Puesto que $J_{i-1} : x_i = \mathfrak{m}$, tenemos que $\mathfrak{m}^{[p^e]} \subseteq J_{i-1}^{[p^e]} : x_i^{p^e}$. Luego, $R/(J_{i-1}^{[p^e]} : x_i^{p^e})$ es imagen homomorfa de $R/\mathfrak{m}^{[p^e]}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como consecuencia, obtenemos que $\lambda(J_i^{[p^e]}/J_{i-1}^{[p^e]}) \leq \lambda(R/m^{[p^e]})$. Por lo tanto,

$$\lambda\left(R/I^{[p^e]}\right) \leq \lambda(J/I)\lambda\left(R/m^{[p^e]}\right) + \lambda\left(R/J^{[p^e]}\right).$$

□

Cuando R es regular, podemos calcular $\lambda(R/I^{[p^e]})$ para cualquier ideal $\mathfrak{m}$-primario I.

Proposición 3.5.4. *Sean $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano regular local de dimensión d e I un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Entonces, para cada $e \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda\left(R/I^{[p^e]}\right) = p^{ed}\lambda(R/I).$$

Demostración. Sea

$$I = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \ldots \subseteq J_n = R$$

una filtración tal que $J_i/J_{i-1} = K$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Teorema 3.5.2, R^{1/p^e} es un R-módulo plano. Luego, tomando producto tensorial con R^{1/p^e}, obtenemos una filtración de R^{1/p^e}

$$IR^{1/p^e} = J_0R^{1/p^e} \subseteq J_1R^{1/p^e} \subseteq \ldots \subseteq J_nR^{1/p^e} = R^{1/p^e}$$

tal que $J_iR^{1/p^e}/J_{i-1}R^{1/p^e} \simeq (R/m^{[p^e]})^{1/p^e}$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que λ es aditiva, tenemos que

$$\lambda\left(\left(R/I^{[p^e]}\right)^{1/p^e}\right) = \lambda(R/I)\lambda\left(\left(R/m^{[p^e]}\right)^{1/p^e}\right).$$

Por el Teorema 3.5.2, $\lambda(R/I^{[p^e]}) = \lambda(R/I)p^{ed}$. □

Notemos que en este caso, si $d = \dim(R)$

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\lambda\left(R/I^{[p^e]}\right)}{p^{ed}} = \lambda(R/I).$$

Este límite existe bajo condiciones más débiles. El siguiente resultado fue demostrado originalmente por Monsky [Mon83], y su demostración es similar a la demostración que presentamos en la Sección 3.3.

Teorema 3.5.5 ([Mon83])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de dimensión d. Sea M un R-módulo finitamente generado, y sea I un ideal m-primario. Entonces, el límite*

$$\mathrm{e}_{HK}(I, M) = \lim_{e\to\infty} \frac{\lambda(M/I^{[p^e]}M)}{p^{ed}}$$

existe.

Antes de demostrar el resultado principal de esta sección, necesitamos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.5.6 ([HY02])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de dimensión d y sea J un ideal tal que $\dim(R/J) = 1$ y tal que $\operatorname{height}(J) = d - 1$. Supongamos que $x \in R$ es un no divisor de cero en R/J y que $I = J + xR$. Supongamos además que R_P es regular para cada primo minimal P de J. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(I, R) \geq \lambda(R/I).$$

Demostración. Sea $e_0 \in \mathbb{N}$ y sea $y = x^{p^{e_0}}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos una sucesión exacta

$$A/y^i A \xrightarrow{\cdot y} A/y^{i+1}A \to A/yA \to 0,$$

donde $A = R/J^{[p^e]}$. Luego, tenemos que $\lambda(A/y^m A) \leq m\lambda(A/yA)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$\mathrm{e}(y, A) = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda(A/y^m A)}{m} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{m\lambda(A/yA)}{m} = \lambda(A/yA),$$

ya que $\dim(A) = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{HK}(I, R) &= \lim_{e\to\infty} \frac{\lambda\left(R/I^{[p^e]}\right)}{p^{ed}} = \lim_{e\to\infty} \frac{\lambda\left(R/(J^{[p^e]} + x^{p^e}R)\right)}{p^{ed}} \\ &\geq \lim_{e\to\infty} \frac{\mathrm{e}\left(x^{p^e}, R/J^{[p^e]}\right)}{p^{ed}} = \lim_{e\to\infty} \frac{\mathrm{e}\left(x, R/J^{[p^e]}\right)}{p^{e(d-1)}}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.1.3(3), obtenemos

$$\mathrm{e}_{HK}(I, R) \geq \lim_{e\to\infty} \frac{1}{p^{e(d-1)}} \sum_{P\in\mathrm{Min}(R/J)} \mathrm{e}(x, R/P)\lambda_{R_P}\left(R_P/J_P^{[p^e]}\right).$$

Dado que $\mathrm{height}(J) = d - 1$, para todo $P \in \mathrm{Min}(R/J)$ tenemos que $\dim(R_P) = d - 1$. De la Proposición 3.5.4, deducimos que

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{HK}(I, R) &\geq \lim_{e\to\infty} \frac{1}{p^{e(d-1)}} \sum_{P\in\mathrm{Min}(R/J)} \mathrm{e}(x, R/P)p^{e(d-1)}\lambda_{R_P}(R_P/J_P) \\ &= \sum_{P\in\mathrm{Min}(R/J)} \mathrm{e}(x, R/P)\lambda_{R_P}(R_P/J_P). \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.4.4(3) y la Observación 3.5.1, se sigue que

$$\mathrm{e}_{HK}(I, R) \geq \mathrm{e}(x, R/J) = \lambda(R/(J + xR)) = \lambda(R/I).$$

□

Decimos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es *formalmente no mezclado* si $\dim(\widehat{R}) = \dim(\widehat{R}/Q)$ para todo primo asociado Q de $\widehat{R}$. Watanabe y Yoshida [WY00, Teorema 1.5] demostraron que si un anillo local no mezclado R es tal que $\mathrm{e}_{HK}(R) = 1$, entonces es regular. La demostración que veremos fue dada por Huneke y Yao [HY02].

Teorema 3.5.7 ([WY00; HY02])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local formalmente no mezclado. Si $\mathrm{e}_{HK}(R) = 1$, entonces R es regular.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que R es completo. Entonces R es no mezclado y, por el Teorema 3.4.4 (3), R es un dominio.

Sea $d = \dim(R)$. Afirmamos que existe un primo P tal que $\dim(R/P) = 1$ y R_P es regular. Para ver esto, supongamos que para todo ideal primo P de R tal que $\dim(R/P) = 1$, tenemos que R_P no es regular. Dado que el locus singular de R es cerrado y distinto de $\mathrm{Spec}(R)$, existe $f \neq 0$ tal que f está en la intersección de todos los ideales primos P de R tal que $\dim(R/P) = 1$. Ya que f es un no divisor de cero en R, tenemos que $\dim(R/fR) = d - 1$. Sean $g_1, \ldots, g_{d-1} \in R$ tales que sus clases forman un sistema de parámetros de R/fR y sea Q un primo minimal de $(g_1, \ldots, g_{d-1})R$. Se sigue que $\dim(R/Q) = 1$ y $f \notin Q$, una contradicción. Por lo tanto, existe un ideal primo P tal que $\dim(R/P) = 1$ y R_P es regular. Dado que la intersección de las potencias simbólicas de P es cero y R es completo, por el Lema de Chevalley, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^{(n)} \subsetneq \mathfrak{m}^{[p]}$. Sea $J = P^{(n)}$. Sea $x \in \mathfrak{m}^{[p]}$ tal que $x \notin P$ y sea $I = J + Rx$. Tenemos que $I = J + Rx \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$. Además, ya que I satisface las hipótesis del Teorema 3.5.6, se sigue que

$$\mathrm{e}_{HK}(I, R) \geq \lambda(R/I).$$

Luego, por el Lema 3.5.3, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda(R/I) &\leq \lambda(\mathfrak{m}^{[p]}/I) e_{HK}(R) + e_{HK}(\mathfrak{m}^{[p]}, R) \\
&= \lambda(\mathfrak{m}^{[p]}/I) + e_{HK}(\mathfrak{m}^{[p]}, R) \\
&\leq \lambda(\mathfrak{m}^{[p]}/I) + \lambda(R/\mathfrak{m}^{[p]}) = \lambda(R/I).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p]}) = \mathrm{e}_{HK}(\mathfrak{m}^{[p]}, R)$. Dado que

$$\mathrm{e}_{HK}(\mathfrak{m}^{[p]}, R) = \lim_{e \to \infty} \frac{\lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^{e+1}]})}{p^{ed}} = \lim_{e \to \infty} \frac{p^d \lambda(R/\mathfrak{m}^{[p^{e+1}]})}{p^{(e+1)d}} = p^d \, \mathrm{e}_{HK}(R) = p^d,$$

se sigue que $\lambda(R/m^{[p^e]}) = p^d$. Por el Teorema 3.5.2, R es regular. $\square$

4

Ideales de prueba y F-umbrales

En este capítulo estudiaremos otro invariante importante en característica prima, el F-umbral, cuya existencia está dada por el siguiente resultado.

Teorema-Definición 4.0.1 ([DSNBP18, Teorema 3.4])**.** *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $I, J \subseteq R$ dos ideales tales que $I \subseteq \sqrt{J}$. Entonces, si $\nu_I^J(p^e) = \max\left\{t \in \mathbb{N} \,\middle|\, I^t \not\subseteq J^{[p^e]}\right\}$, el límite*

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}$$

existe. Llamamos a $\lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}$ el F-umbral de I con respecto a J y lo denotamos por $c^J(I) = \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}$.

Además, definiremos los ideales de prueba y demostraremos que los F-umbrales están relacionados con estos ideales. Finalmente, veremos cómo se relacionan los F-umbrales con la multiplicidad de Hilbert-Kunz. En particular, estudiaremos el siguiente resultado.

Proposición 4.0.2 ([NBS20])**.** *Supongamos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ parte de un sistema de parámetros para R, $I = (\underline{f})$, y $\overline{R} = R/I$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(J; R) \leq \mathrm{e}_{HK}(J\overline{R}; \overline{R}) \frac{c^J(I)^t}{t!}$$

para todo ideal $\mathfrak{m}$-primario J tal que $I \subseteq J$.

4.1 F-umbrales

Antes de definir los F-umbrales, probaremos un lema que nos será de utilidad.

Lema 4.1.1 ([DSNBP18, Lema 3.2])**.** *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p y sea $I \subseteq R$ un ideal. Entonces para cada $r \geq (\mu(I) + s - 1)p^e$, tenemos que $I^r = I^{r-sp^e}(I^{[p^e]})^s$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre s.

Supongamos que $I = (f_1, \ldots, f_t)R$ donde $t = \mu(I)$. Sea $r_0 \geq \mu(I)p^e$. Notemos que

$$I^{r_0} = \left(f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t} \,\middle|\, a_1 + \cdots + a_t = r_0\right) R.$$

Si $a_1, \ldots, a_t < p^e$, entonces $a_1 + \cdots + a_t < \mu(I)p^e$. Así, si $a_1 + \cdots + a_t = r_0$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $a_j \geq p^e$ y, como consecuencia, $f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t} \in I^{[p^e]} I^{r_0 - p^e}$. Puesto que $I^{r_0-p^e} I^{[p^e]} \subseteq I^{r_0-p^e} I^{p^e}$, se sigue que $I^{r_0} = I^{r_0-p^e} I^{[p^e]}$. Por lo tanto, si $s = 1$, para cada $r \geq (\mu(I) + s - 1)p^e$, tenemos que $I^r = I^{r-sp^e}(I^{[p^e]})^s$.

Ahora, supongamos que $s \geq 1$ y que si $r \geq (\mu(I) + s - 1)p^e$, entonces $I^r = I^{r-sp^e}(I^{[p^e]})^s$. Sea $r \geq (\mu(I) + (s+1) - 1)p^e = (\mu(I) + s)p^e$. Entonces, $r \geq (\mu(I) + s - 1)p^e$ y, por hipótesis de inducción, $I^r = I^{r-sp^e}(I^{[p^e]})^s$. Adicionalmente, $r - sp^e \geq \mu(I)p^e$, por lo que $I^{r-sp^e} = I^{(r-sp^e)-p^e} I^{[p^e]} = I^{r-(s+1)p^e} I^{[p^e]}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I^r &= I^{r-sp^e} \left(I^{[p^e]}\right)^s \\ &= I^{r-(s+1)p^e} I^{[p^e]} \left(I^{[p^e]}\right)^s \\ &= I^{r-(s+1)p^e} \left(I^{[p^e]}\right)^{s+1}. \end{aligned}$$

□

Los F-umbrales se originan al comparar las potencias usuales de un ideal con las potencias de Frobenius de otro utilizando la siguiente definición.

Definición 4.1.2. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Dados dos ideales $I, J \subseteq R$ tales que $I \subseteq \sqrt{J}$, definimos

$$\nu_I^J(p^e) = \max\left\{ t \in \mathbb{N} \,\middle|\, I^t \not\subseteq J^{[p^e]} \right\}.$$

Si $\{t \in \mathbb{N} \mid I^t \not\subseteq J^{[p^e]}\} = \emptyset$, definimos $\nu_I^J(p^e) = 0$.

Observación 4.1.3. *Si $J \neq R$ e $I \neq 0$, entonces $\{t \in \mathbb{N} \mid I^t \not\subseteq J^{[p^e]}\} \neq \emptyset$ para toda e. Por otro lado, si $I = \{0\}$ o $J = R$, se sigue que $\nu_I^J(p^e) = 0$ para toda e y, como consecuencia, $c^J(I) = 0$.*

El siguiente lema nos permite comparar $\nu_I^J(p^{e_1+e_2})$ con $\nu_I^J(p^{e_1})$.

Lema 4.1.4 ([DSNBP18, Lema 3.3])**.** *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $I, J \subseteq R$ dos ideales tales que $I \subseteq \sqrt{J}$. Entonces,*

$$\frac{\nu_I^J(p^{e_1+e_2})}{p^{e_1+e_2}} \leq \frac{\mu(I) + \nu_I^J(p^{e_1})}{p^{e_1}}$$

para todo $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por el Lema 4.1.1 con $s = \nu_I^J(p^{e_1})$, tenemos que

$$\begin{aligned} I^{p^{e_2}\left(\mu(I)+\nu_I^J(p^{e_1})\right)} &= I^{p^{e_2}\mu(I)} \left(I^{[p^{e_2}]}\right)^{\nu_I^J(p^{e_1})} \\ &\subseteq I^{[p^{e_2}]} \left(I^{[p^{e_2}]}\right)^{\nu_I^J(p^{e_1})} \\ &= \left(I^{[p^{e_2}]}\right)^{\nu_I^J(p^{e_1})+1} \\ &= \left(I^{\nu_I^J(p^{e_1})+1}\right)^{[p^{e_2}]} \\ &\subseteq \left(J^{[p^{e_1}]}\right)^{[p^{e_2}]} \\ &= J^{[p^{e_1+e_2}]}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\nu_I^J(p^{e_1+e_2}) \leq p^{e_2}\left(\mu(I) + \nu_I^J(p^{e_1})\right).$$

Dividiendo entre $p^{e_1+e_2}$, obtenemos

$$\frac{\nu_I^J(p^{e_1+e_2})}{p^{e_1+e_2}} \leq \frac{\mu(I) + \nu_I^J(p^{e_1})}{p^{e_1}}.$$

$\square$

Ahora demostraremos el teorema que nos permitirá definir los F-umbrales.

Teorema 4.1.5 ([DSNBP18, Teorema 3.4])**.** *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $I, J \subseteq R$ dos ideales tales que $I \subseteq \sqrt{J}$. Entonces el límite $\lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}$ existe.*

Demostración. Por el Lema 4.1.4, para todo $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\frac{\nu_I^J(p^{e_1+e_2})}{p^{e_1+e_2}} \leq \frac{\mu(I)}{p^{e_1}} + \frac{\nu_I^J(p^{e_1})}{p^{e_1}}.$$

Se sigue que

$$\limsup_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} = \limsup_{e_2\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^{e_1+e_2})}{p^{e_1+e_2}} \leq \frac{\mu(I)}{p^{e_1}} + \frac{\nu_I^J(p^{e_1})}{p^{e_1}}.$$

Como consecuencia,

$$\limsup_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} \leq \liminf_{e_1\to\infty} \left(\frac{\mu(I)}{p^{e_1}} + \frac{\nu_I^J(p^{e_1})}{p^{e_1}}\right) = \liminf_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}.$$

Por lo tanto, el límite $\lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}$ existe. $\square$

Definición 4.1.6. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $I, J \subseteq R$ dos ideales tales que $I \subseteq \sqrt{J}$. Definimos el F-umbral de I con respecto a J por

$$c^J(I) = \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}.$$

Observación 4.1.7. *Supongamos que R es un anillo Noetheriano de característica prima p y que $I, J \subseteq R$ son dos ideales tales que $I \subseteq \sqrt{J}$. Sea $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $I^\ell \subseteq J$. Entonces,*

$$I^{\ell\mu p^e} = (I^{\mu p^e})^\ell \subseteq (I^{[p^e]})^\ell = (I^\ell)^{[p^e]} \subseteq J^{[p^e]}.$$

Así, obtenemos que $\nu_I^J(p^e) \leq \ell\mu p^e$ y $\frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} \leq \ell\mu$. Por lo tanto, $c^J(I) \leq \ell\mu$.

Más adelante, estudiaremos los F-umbrales en mayor detalle en el caso en que el anillo es regular y F-finito. Para ello, utilizaremos ideales de prueba.

4.2 Ideales de prueba

El concepto de ideal de prueba de un anillo fue inicialmente introducido por Hochster y Huneke [HH90] como parte de su teoría de clausura hermética. Posteriormente, Hara y Yoshida [HY03] definieron los ideales de prueba para pares (R, I^c) donde R es un anillo que cumple ciertas propiedades, $I \neq \{0\}$ un ideal y $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. La definición que utilizaremos de ideal de prueba fue introducida por Blickle, Mustaţă y Smith [BMS08].

En esta sección, trabajaremos con anillos Noetherianos, de característica prima, regulares y F-finitos.

Observación 4.2.1. *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Por el Teorema 3.5.2 tenemos que R^{1/p^e} es un módulo finitamente generado y localmente libre sobre R. Por otro lado, tenemos que $R^{1/p^e} \otimes R/J \simeq \left(R/J^{[p^e]}\right)^{1/p^e}$ para todo ideal $J \subseteq R$. Como consecuencia, F es fielmente plano. Así, si $u \in R$, deducimos que $u \in J$ si y sólo si $u^p \in J^{[p]}$.*

Para construir los ideales de prueba necesitaremos la siguiente definición.

Definición 4.2.2. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea I un ideal en R, e un entero positivo y $q = p^e$. Entonces, $I^{[1/q]}$ denota al ideal más pequeño J tal que $I \subseteq J^{[q]}$. Por convención, tomaremos $I^{[1/p^0]} = I$.

Para ver que $I^{[1/q]}$ está bien definido, basta ver que si $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de ideales de R, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda^{[q]} = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda)^{[q]}$. Para ello utilizaremos el siguiente lema clásico (ver por ejemplo, [BMS08]).

Lema 4.2.3. *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea P un módulo proyectivo y finitamente generado sobre R. Entonces, si $\{J_i\}_i$ es una familia de ideales de R, tenemos que*

$$\bigcap_i J_i P = \left(\bigcap_i J_i\right) P.$$

Demostración. Primero supongamos que $P = R^{\oplus t}$. Entonces,

$$\bigcap_i J_i P = \bigcap_i J_i^{\oplus t} = \left(\bigcap_i J_i\right)^{\oplus t} = \left(\bigcap_i J_i\right) P.$$

Si P no es libre, dado que P es proyectivo, existe un módulo libre N tal que $N \simeq M \oplus P$ para algún submódulo M de N. Luego,

$$\bigcap_i J_i M \oplus \bigcap_i J_i P = \bigcap_i (J_i(M \oplus P)) = \left(\bigcap_i J_i\right)(M \oplus P) = \left(\bigcap_i J_i\right) M \oplus \left(\bigcap_i J_i\right) P.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\bigcap_i J_i P = \left(\bigcap_i J_i\right) P.$$

$\square$

Puesto que R^{1/p^e} es un módulo finitamente generado y proyectivo sobre R, se sigue que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda R^{1/q} = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda) R^{1/q}$. Por lo tanto, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda^{[q]} = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda)^{[q]}$ y el ideal $I^{[1/q]}$ está bien definido.

Ahora podemos definir los ideales de prueba.

Definición 4.2.4. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea I un ideal en R y sea $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces definimos el ideal de prueba de I con exponente c como

$$\tau(I^c) = \bigcup_{e>0} (I^{\lceil cp^e \rceil})^{[1/p^e]}.$$

Para ver que $\tau(I^c)$ es un ideal, necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 4.2.5 ([BMS08])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sean I y J ideales de R y sean e y e' enteros positivos.*

1. *Si $I \subseteq J$, entonces $I^{[1/p^e]} \subseteq J^{[1/p^e]}$.*
2. $(I^{[p^{e'}]})^{[1/p^e]} = I^{[p^{e'-e}]} \subseteq (I^{[1/p^e]})^{[p^{e'}]}$.
3. $I^{[1/p^e]} \subseteq (I^{p^{e'}})^{[1/p^{e+e'}]}$.

Demostración.

1. Dado que $I \subseteq J \subseteq (J^{[1/p^e]})^{[p^e]}$, se sigue de la definición de $I^{[1/p^e]}$ que $I^{[1/p^e]} \subseteq J^{[1/p^e]}$.

2. Primero supongamos que $e' \geq e$. Por la Observación 4.2.1, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de R, entonces $I^{[p^{e'}]} \subseteq \mathfrak{a}^{[p^e]}$ si y sólo si $I^{[p^{e'-e}]} \subseteq \mathfrak{a}$. Luego, $(I^{[p^{e'}]})^{[1/p^e]} = I^{[p^{e'-e}]}$. Adicionalmente, dado que $I \subseteq (I^{[1/p^e]})^{[p^e]}$, deducimos que $I^{[p^{e'-e}]} \subseteq (I^{[1/p^e]})^{[p^{e'}]}$.

   Ahora supongamos que $e \geq e'$. Por la Observación 4.2.1, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de R, entonces $I^{[p^{e'}]} \subseteq \mathfrak{a}^{[p^e]}$ si y sólo si $I \subseteq \mathfrak{a}^{[p^{e-e'}]}$. Se sigue que $(I^{[p^{e'}]})^{[1/p^e]} = I^{[p^{e'-e}]}$. Adicionalmente, puesto que

   $$I \subseteq (I^{[1/p^e]})^{[p^e]} = ((I^{[1/p^e]})^{[p^{e'}]})^{[p^{e-e'}]},$$

   obtenemos que $I^{[p^{e'-e}]} \subseteq (I^{[1/p^e]})^{[p^{e'}]}$.

3. Por el inciso 2, tenemos que $I^{[1/p^e]} = (I^{[p^{e'}]})^{[1/p^{e+e'}]}$. Dado que $I^{[p^{e'}]} \subseteq I^{p^{e'}}$, el inciso 1 implica que $I^{[1/p^e]} \subseteq (I^{p^{e'}})^{[1/p^{e+e'}]}$.

□

Lema 4.2.6 ([BMS08])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea I un ideal de R. Si r, r', e, e' son enteros positivos tales que $r/p^e \geq r'/p^{e'}$ y $e' \geq e$, entonces*

$$(I^r)^{[1/p^e]} \subseteq (I^{r'})^{[1/p^{e'}]}.$$

Demostración. Dado que $rp^{e'-e} \geq r'$, se sigue que

$$I^{rp^{e'-e}} \subseteq I^{r'}.$$

Por el Lema 4.2.5 (3), tenemos que

$$(I^r)^{[1/p^e]} \subseteq (I^{rp^{e'-e}})^{[1/p^{e'}]}.$$

Se sigue del Lema 4.2.5 (1) que $(I^r)^{[1/p^e]} \subseteq (I^{r'})^{[1/p^{e'}]}$. □

Supongamos que I es un ideal de R y c es un número real positivo. Puesto que $p\lceil cp^e\rceil \geq cp^{e+1}$, tenemos que $p\lceil cp^e\rceil \geq \lceil cp^{e+1}\rceil$. Luego, $\lceil cp^e\rceil/p^e \geq \lceil cp^{e+1}\rceil/p^{e+1}$ y, como consecuencia, obtenemos que

$$(I^{\lceil cp^e\rceil})^{[1/p^e]} \subseteq (I^{\lceil cp^{e+1}\rceil})^{[1/p^{e+1}]}.$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{e\in\mathbb{Z}_{>0}} (I^{\lceil cp^e\rceil})^{[1/p^e]}$$

es un ideal.

Observación 4.2.7. *Dado que R es Noetheriano, existe $e_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

$$(I^{\lceil cp^e\rceil})^{[1/p^e]} = (I^{\lceil cp^{e_0}\rceil})^{[1/p^{e_0}]}$$

para todo $e \geq e_0$. Se sigue que

$$\tau(I^c) = (I^{\lceil cp^e\rceil})^{[1/p^e]}$$

para $e \gg 0$.

Observación 4.2.8. *Podemos escribir $R = \prod_{i=1}^n R_i$, donde cada R_i es tal que $\operatorname{Spec}(R_i)$ es conexo. Sea $j \in \{1,\ldots,n\}$ y sea P_j un ideal primo de R_j. Si $P = \prod_{i=1}^n I_i$ donde $I_i = R_i$ si $i \neq j$ y $I_j = P_j$, entonces P es un ideal primo de R. Más aún, tenemos que $R_P = R_{j_{P_j}}$. Luego, dado que R es regular, cada $R_{j_{P_j}}$ es regular. Ya que $R_{j_{P_j}}$ es local, $R_{j_{P_j}}$ es un dominio. Por lo tanto, R_j es un dominio F-finito regular.*

Ahora consideremos un ideal J de R. Entonces $J = \prod_{i=1}^n J_i$ donde cada J_i es un ideal de R_i. Además, notemos que

$$\tau(J^c) = \prod_{i=1}^n \tau(J_i^c).$$

Si R es un dominio, definimos $\tau(J^0) = R$ si $J \neq (0)$ y $\tau(J^0) = 0$ si $J = (0)$. Si R no es un dominio, definimos $\tau(J^0) = \prod_{i=1}^n \tau(J_i^0)$.

Observación 4.2.9. *Consideremos $0 < c_1 < c_2$. Entonces, para $e \gg 0$, tenemos que $\tau(I^{c_1}) = (I^{\lceil c_1p^e\rceil})^{[1/p^e]}$ y $\tau(I^{c_2}) = (I^{\lceil c_2p^e\rceil})^{[1/p^e]}$. Puesto que $I^{\lceil c_2p^e\rceil} \subseteq I^{\lceil c_1p^e\rceil}$, por el Lema 4.2.5, tenemos que*

$$\tau(I^{c_2}) \subseteq \tau(I^{c_1}).$$

Ahora estudiaremos la continuidad por la derecha de la colección de ideales de prueba.

Proposición 4.2.10 ([BMS08]). *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea I un ideal de R y c un número real no negativo. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\tau(I^c) = (I^r)^{[1/p^e]}$$

siempre que $c < \frac{r}{p^e} < c + \epsilon$.

Demostración. Primero veamos que existen $\epsilon > 0$ y un ideal $J \subseteq R$ tal que $J = (I^r)^{[1/p^e]}$ siempre que $c < \frac{r}{p^e} < c + \epsilon$. Supongamos lo contrario. Entonces para cada $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, existen $r_m, e_m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que la sucesión $\left\{\frac{r_m}{p^{e_m}}\right\}_m$ es decreciente, converge a c, $e_m \leq e_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ y

$$(I^{r_m})^{[1/p^{e_m}]} \neq (I^{r_{m+1}})^{[1/p^{e_{m+1}}]}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Luego, por el Lema 4.2.6, $(I^{r_m})^{[1/p^{e_m}]} \subseteq (I^{r_{m+1}})^{[1/p^{e_{m+1}}]}$. Dado que R es Noetheriano, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $(I^{r_n})^{[1/p^{e_n}]} = (I^{r_{n+1}})^{[1/p^{e_{n+1}}]}$, lo cual contradice la elección de la sucesión. Por lo tanto, existen $\epsilon > 0$ y un ideal $J \subseteq R$ tal que $J = (I^r)^{[1/p^e]}$ siempre que $c < \frac{r}{p^e} < c + \epsilon$.

Ahora veamos que $J = \tau(I^c)$. Por la Observación 4.2.8, podemos suponer que R es un dominio. Si $I = (0)$, entonces $(I^r)^{[1/p^e]} = (0) = \tau(I^c)$ para todo $\frac{r}{p^e} > 0$. Supongamos $I \neq (0)$. Sea $e > 0$ tal que $\tau(I^c) = (I^{\lceil cp^{e'} \rceil})^{[1/p^{e'}]}$ y $\frac{\lceil cp^{e'} \rceil}{p^{e'}} < c + \epsilon$ si $e' \geq e$. Si $cp^e \notin \mathbb{Z}$, entonces $c < \frac{\lceil cp^e \rceil}{p^e} < c + \epsilon$ y $\tau(I^c) = (I^{\lceil cp^e \rceil})^{[1/p^e]} = J$.

Ahora supongamos que $cp^e \in \mathbb{Z}$. Reemplazando e por un entero positivo suficientemente grande, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\frac{1}{p^e} < \epsilon$. Luego, $c < \frac{cp^e+1}{p^e} < c + \epsilon$. Se sigue que

$$J = (I^{cp^e+1})^{[1/p^e]} \subseteq (I^{cp^e})^{[1/p^e]} = \tau(I^c).$$

Veamos que $I^{cp^e} \subseteq J^{[p^e]}$. Sea $x \in I^{cp^e}$. Para ver que $x \in J^{[p^e]}$ es suficiente ver que $\frac{x}{1} \in J_P^{[p^e]}$ para todo ideal maximal $P \subseteq R$. Como consecuencia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que R es local. Para $e' \geq e$, tenemos que $c < \frac{cp^{e'}+1}{p^{e'}} < c + \epsilon$ y, como consecuencia, $I^{cp^{e'}+1} \subseteq J^{[p^{e'}]}$. Sea $u \in I \setminus \{0\}$. Entonces, $ux^{p^{e'-e}} \in I^{cp^{e'}+1}$ y, como consecuencia, $ux^{p^{e'-e}} \in J^{[p^{e'}]}$ para $e' \geq e$. Luego, para $e' \geq e$, podemos escribir

$$ux^{p^{e'-e}} = \sum_{k=1}^{t} x_{k,e'} u_{k,e'}^{p^{e'-e}}$$

para algunos $x_{k,e'} \in R$, $u_{k,e'} \in J^{[p^e]}$. Por la Observación 4.2.1, R es libre sobre $R^{p^{e'}}$. Sea $\mathfrak{m}_{e'}$ el ideal maximal de $R^{p^{e'}}$. Entonces, $\mathfrak{m}_{e'}R = \mathfrak{m}^{[p^{e'}]}$. Por otro lado, por el Teorema de intersección de Krull existe $e_0 \geq e$ tal que $u \notin \mathfrak{m}_{e_0-e}R$. Luego, u es parte de una base libre de R sobre $R^{p^{e_0-e}}$. Como consecuencia, existe un homomorfismo de $R^{p^{e_0-e}}$-módulos $\varphi : R \to R^{p_0-e}$ tal que $\varphi(u) = 1$. Tenemos que

$$x^{p^{e_0-e}} = \varphi(ux^{p^{e_0-e}}) = \sum_{k=1}^{t} \varphi(x_{k,e_0}) u_{k,e_0}^{p^{e_0-e}}.$$

Sea $\psi : R^{p^{e_0-e}} \to R$ el isomorfismo de anillos tal que $\psi(v^{p^{e_0-e}}) = v$. Luego $x = \sum_{k=1}^{t} \psi(\varphi(x_{k,e_0}))u_{k,e_0}$ y, como consecuencia, $x \in J^{[p^e]}$. Por lo tanto, $J = (I^{cp^e})^{[1/p^e]} = \tau(I^c)$. $\square$

El siguiente corolario es de especial interés.

Corolario 4.2.11 ([BMS08])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea I un ideal de R y c un número real no negativo. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\tau(I^c) = \tau(I^{c'})$ siempre que $c' \in (c, c+\epsilon)$.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.10, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\tau(I^c) = (I^r)^{[1/p^e]}$$

siempre que $c < \frac{r}{p^e} < c + \epsilon$. Sea $c' \in (c, c+\epsilon)$. Entonces existe $e_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\tau(I^{c'}) = (I^{\lceil c'p^e \rceil})^{[1/p^e]}$ para todo $e \geq e_0$. Dado que $\lim_{e\to\infty} \frac{\lceil c'p^e \rceil}{p^e} = c'$, existe $e_1 > e_0$ tal que $c < \frac{\lceil c'p^{e_1} \rceil}{p^{e_1}} < c + \epsilon$. Se sigue que $\tau(I^{c'}) = (I^{\lceil c'p^{e_1} \rceil})^{[1/p^{e_1}]} = \tau(I^c)$. $\square$

El Corolario 4.2.11 motiva la siguiente definición.

Definición 4.2.12. Sea I un ideal de R y c un número real no negativo. Decimos que c es un número de F-salto para I si $\tau(I^c) \neq \tau(I^{c-\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$.

Por convención, consideraremos que 0 es un número de F-salto.

4.3 Números de F-salto y F-umbrales

En esta sección, continuaremos trabajando con anillos Noetherianos, de característica prima, regulares y F-finitos.

Observación 4.3.1. *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sean I, J ideales de R tales que $I \subseteq \sqrt{J}$. Notemos que si $I^{tp} \subseteq J^{[p^{e+1}]}$, entonces $(I^t)^{[p]} \subseteq J^{[p^{e+1}]}$. Por la Observación 4.2.1, deducimos que si $I^{tp} \subseteq J^{[p^{e+1}]}$, entonces $I^t \subseteq J^{[p^e]}$. Así, si $I^t \not\subseteq J^{[p^e]}$, entonces $I^{tp} \not\subseteq J^{[p^{e+1}]}$. Se sigue que*

$$\frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} \leq \frac{\nu_I^J(p^{e+1})}{p^{e+1}}$$

y, como consecuencia, obtenemos

$$c^J(I) = \sup_{e \geq 1} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}.$$

La siguiente proposición y su corolario relacionan los F-umbrales y los números de F-salto.

Proposición 4.3.2 ([BMS08])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $I \neq \{0\}$ un ideal de R. Entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

1. *Dado un ideal $J \subseteq R$ tal que $I \subseteq \sqrt{J}$, tenemos que*

$$\tau(I^{c^J(I)}) \subseteq J.$$

2. *Dado $c \in \mathbb{R}_{>0}$, tenemos que $I \subseteq \sqrt{\tau(I^c)}$ y*

$$c^{\tau(I^c)}(I) \leq c.$$

Demostración.

1. Supongamos que $J \subsetneq R$. Por el Corolario 4.2.11, existe $c' > c^J(I)$ tal que $\tau(I^{c^J(I)}) = \tau(I^{c'})$. Por otro lado, existe $e_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\tau(I^{c'}) = (I^{\lceil c'p^e \rceil})^{[1/p^e]}$ siempre que $e \geq e_0$. Dado que $c' > c^J(I)$ existe $e_1 \geq e_0$ tal que $c' \geq c^J(I) + \frac{1}{p^{e_1}}$. Por la Observación 4.3.1, $c' \geq \frac{\nu_I^J(p^{e_1})+1}{p^{e_1}}$ y, como consecuencia, $\lceil c'p^{e_1} \rceil \geq \nu_I^J(p^{e_1}) + 1$. Se sigue que $I^{\lceil c'p^{e_1} \rceil} \subseteq J^{[p^{e_1}]}$ y, así, $\tau(I^{c'}) = (I^{\lceil c'p^{e_1} \rceil})^{[1/p^{e_1}]} \subseteq J$. Por lo tanto, $\tau(I^{c^J(I)}) \subseteq J$.

2. Sabemos que existe $e_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\tau(I^c) = (I^{\lceil cp^e \rceil})^{[1/p^e]}$ siempre que $e \geq e_0$. Así, $I^{\lceil cp^e \rceil} \subseteq \tau(I^c)^{[p^e]}$ siempre que $e \geq e_0$. Como consecuencia, para todo $e \geq e_0$, tenemos que $\nu_I^{\tau(I^c)}(p^e) \leq \lceil cp^e \rceil$. Por lo tanto,

$$c^{\tau(I^c)}(I) = \lim_{e \to \infty} \frac{\nu_I^{\tau(I^c)}(p^e)}{p^e} \leq \lim_{e \to \infty} \frac{\lceil cp^e \rceil}{p^e} = c.$$

$\square$

Corolario 4.3.3 ([BMS08])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea I un ideal de R. Si $\mathcal{S}$ es el conjunto de números de F-salto, entonces*

$$\mathcal{S} = \{c^J(I) \mid J \text{ es un ideal de } R \text{ tal que } I \subseteq \sqrt{J}\}.$$

Demostración. Si $I = \{0\}$, entonces $\mathcal{S} = \{0\} = \{c^J(I) \mid J$ es un ideal de R tal que $I \subseteq \sqrt{J}\}$. Supongamos que $I \neq \{0\}$. Por la Observación 4.1.3, $c^R(I) = 0$ y $0 \in \mathcal{S}$. Ahora supongamos que $c > 0$ es un número de F-salto y sea $J = \tau(I^c)$. Por la Proposición 4.3.2(2), $I \subseteq \sqrt{\tau(I^c)}$ y $c^J(I) \leq c$. Como consecuencia, $\tau(I^c) \subseteq \tau(I^{c^J(I)})$. Por la Proposición 4.3.2(1), $\tau(I^{c^J(I)}) \subseteq J = \tau(I^c)$. Así, $\tau(I^c) = \tau(I^{c^J(I)})$. Dado que $c^J(I) \leq c$ y c es un número de F-salto, tenemos que $c^J(I) = c$.

Ahora sea $\alpha = c^J(I)$ para algún ideal $J \subsetneq R$. Supongamos que α no es un número de F-salto. Entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $\tau(I^\alpha) = \tau(I^\beta)$. Por la Proposición 4.3.2(1), tenemos que $\tau(I^\beta) = \tau(I^\alpha) \subseteq J$. Así, para $e \gg 0$, tenemos que $(I^{\lceil \beta p^e \rceil})^{[1/p^e]} \subseteq J$ y, como consecuencia, $I^{\lceil \beta p^e \rceil} \subseteq J^{[p^e]}$. Luego, $\nu_I^J(p^e) \leq \lceil \beta p^e \rceil$ para $e \gg 0$. Se sigue que

$$\alpha = c^J(I) = \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} \leq \lim_{e\to\infty} \frac{\lceil \beta p^e \rceil}{p^e} = \beta,$$

una contradicción. Por lo tanto, α es un número de F-salto. □

4.4 F-umbrales y multiplicidad de Hilbert-Kunz

En esta sección, estudiaremos cómo se relacionan los F-umbrales con la multiplicidad de Hilbert-Kunz y algunas consecuencias de esta relación.

Proposición 4.4.1 ([NBS20]). *Supongamos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ parte de un sistema de parámetros para R, $I = (\underline{f})$, y $\overline{R} = R/I$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(J; R) \leq \mathrm{e}_{HK}(J\overline{R}; \overline{R}) \frac{c^J(I)^t}{t!}$$

para todo ideal $\mathfrak{m}$-primario J tal que $I \subseteq J$.

Demostración. Notemos que para cada $e, n \in \mathbb{N}$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}} \longrightarrow R/(I^{n+1} + J^{[p^e]}) \longrightarrow R/(I^n + J^{[p^e]}) \longrightarrow 0.$$

Como consecuencia,

$$\lambda \left(R/(I^{n+1} + J^{[p^e]}) \right) = \lambda \left(R/(I^n + J^{[p^e]}) \right) + \lambda \left(\frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}} \right)$$

para cada $e, n \in \mathbb{N}$. Por definición de $\nu_I^J(p^e)$, tenemos que $I^{\nu_I^J(p^e)+1} \subseteq J^{[p^e]}$. Luego, tenemos que

$$\lambda \left(R/J^{[p^e]} \right) = \sum_{n=0}^{\nu_I^J(p^e)} \lambda \left(\frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}} \right).$$

Por otro lado, notemos que si A_n es el conjunto de monomios de grado n en los f_i, entonces

$$\frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}} = \sum_{f \in A_n} (R/I)\, \overline{f}$$

donde $\overline{f}$ denota la clase de f en $\frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}}$. Se sigue que $\frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}}$ es generado como $R/(I + J^{[p^e]})$-módulo por un conjunto de a lo más $t_n = \binom{n+t-1}{t-1}$ elementos. Así, $\frac{I^n + J^{[p^e]}}{I^{n+1} + J^{[p^e]}}$ es imagen homomorfa de $\left(R/(I + J^{[p^e]}) \right)^{t_n}$.

Deducimos que

$$\begin{aligned}\lambda\left(R/J^{[p^e]}\right) &\leq \sum_{n=0}^{\nu_I^J(p^e)} \binom{n+t-1}{t-1} \lambda\left(R/(I+J^{[p^e]})\right)\\ &\leq \binom{\nu_I^J(p^e)+t}{t} \lambda\left(R/(I+J^{[p^e]})\right)\\ &= \lambda\left(R/(I+J^{[p^e]})\right) \frac{\left(\nu_I^J(p^e)+1\right)\cdots\left(\nu_I^J(p^e)+t\right)}{t!}.\end{aligned}$$

Dividiendo entre p^{et} y tomando límite $e \to \infty$, obtenemos

$$\mathrm{e}_{HK}(J;R) \leq \mathrm{e}_{HK}(J\overline{R};\overline{R}) \frac{c^J(I)^t}{t!}.$$

□

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado en el caso de hipersuperficies.

Corolario 4.4.2 ([NBS20]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea $f \in R$ un parámetro y sea $\overline{R} = R/fR$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(J;R) \leq e_{HK}\left(J\overline{R};\overline{R}\right) c^J(f)$$

para todo ideal $\mathfrak{m}$-primario J tal que $f \in J$.

Por la Observación 4.1.7, se sigue que el Corolario 4.4.2 es un refinamiento del inciso 4 de la Proposición 3.4.4.

Corolario 4.4.3 ([NBS20]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ parte de un sistema de parámetros para R, $I = (\underline{f})$, y $\overline{R} = R/I$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(J;R) \leq e_{HK}\left(J\overline{R};\overline{R}\right) \cdot c^J(f_1)\cdots c^J(f_t)$$

para todo ideal $\mathfrak{m}$-primario J tal que $f \in J$.

Demostración. Notemos que si I' es un ideal de R, entonces $f^t \in (J(R/I'))^{[p^e]}$ siempre que $f^t \in J^{[p^e]}$. Por lo tanto, $c^J_{R/I'}(f) \leq c^J_R(f)$ para todo ideal $\mathfrak{m}$-primario J. Así, el resultado se sigue por inducción del Corolario 4.4.2. □

La Proposición 4.4.1 nos permitirá dar una condición suficiente para que el anillo cumpla la siguiente condición.

Definición 4.4.4. Decimos que un anillo R de característica prima p es F-puro si es reducido y para todo R-módulo M, el homomorfismo de R-módulos $R \otimes M \to R^{1/p} \otimes M$ es inyectivo.

El siguiente teorema, conocido como el Criterio de Fedder, caracteriza cuándo un cociente de un anillo regular es F-puro.

Teorema 4.4.5 ([Fed83, Teorema 1.12]). *Sea $(S, \mathfrak{m})$ un anillo regular local de característica prima p y sea $R = S/I$ donde I es un ideal de R. Entonces, R es F-puro si y sólo si $\left(I^{[p]} : I\right) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$.*

Ahora daremos una condición suficiente para la F-puridad de un anillo utilizando la multiplicidad de Hilbert-Kunz.

Proposición 4.4.6 ([NBS20]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano regular local de característica p. Sea $f \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Entonces,*

$$1 \leq \mathrm{e}_{HK}\,(R/fR)\, c^{\mathfrak{m}}(f).$$

En particular, si $\mathrm{e}_{HK}\,(R/fR) < \frac{p}{p-1}$, entonces R/fR es F-puro.

Demostración. Dado que R es regular, $\mathrm{e}_{HK}(R) = 1$. Luego, por el Corolario 4.4.2,

$$1 \leq \mathrm{e}_{HK}\,(R/fR)\, c^{\mathfrak{m}}(f).$$

Ahora supongamos que $\mathrm{e}_{HK}\,(R/fR) < \frac{p}{p-1}$. Se sigue que $c^{\mathfrak{m}}(f) > \frac{p-1}{p}$. Luego, existe $e > 0$ tal que $\frac{p-1}{p} < \frac{\nu_f^{m}(p^e)}{p^e}$. Así, $p^{e-1}(p-1) < \nu_f^{m}(p^e)$ y, como consecuencia, $f^{p^{e-1}(p-1)} \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$. Por la Observación 4.2.1, tenemos que $f^{p-1} \notin \mathfrak{m}^{[p]}$. Por el Criterio de Fedder, R/fR es F-puro. $\square$

4.5 Ideales de prueba mixtos y sus regiones constantes

Podemos extender la definición de los ideales de prueba para sucesiones de ideales $I_1, \ldots, I_t$. Para ello, trabajaremos con anillos Noetherianos, de característica prima, regulares y F-finitos. Empezaremos fijando un poco de notación.

Notación 4.5.1. Sea R un anillo Noetheriano. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$, y $a = (a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t$. Denotamos $(\lceil a_1 \rceil, \ldots, \lceil a_t \rceil)$ por $\lceil a \rceil$. Escribimos $\underline{I}^a$ para denotar $I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t}$. Finalmente, utilizamos $\mathbf{1}$ para denotar el elemento de $\mathbb{N}^t$ cuyas coordinadas son todas 1.

Definición 4.5.2. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t_{>0}$. Definimos el ideal de prueba mixto de $\underline{I}$ con vector exponente α como

$$\tau(\underline{I}^\alpha) = \bigcup_{e>0} (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]}.$$

Para ver que $\tau(\underline{I}^\alpha)$ es un ideal necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.5.3 ([Pér13]). *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R. Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t), \alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_t) \in \mathbb{Z}^t_{>0}$ y e, e' son enteros positivos tales que $\alpha_i / p^e \geq \alpha'_i / p^{e'}$ para toda $i \in \{1, \ldots, t\}$ y $e' \geq e$, entonces*

$$(I^\alpha)^{[1/p^e]} \subseteq (I^{\alpha'})^{[1/p^{e'}]}.$$

Demostración. Dado que $\alpha_i p^{e'-e} \geq \alpha'_i$ para toda i, se sigue que

$$\underline{I}^{\alpha p^{e'-e}} \subseteq \underline{I}^{\alpha'}.$$

Por el Lema 4.2.5 (3), tenemos que

$$(\underline{I}^\alpha)^{[1/p^e]} \subseteq (\underline{I}^{\alpha p^{e'-e}})^{[1/p^{e'}]}.$$

Se sigue del Lema 4.2.5 (1) que $(\underline{I}^\alpha)^{[1/p^e]} \subseteq (\underline{I}^{\alpha'})^{[1/p^{e'}]}$. $\square$

Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Supongamos que $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ es una sucesión de ideales de R y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{Z}^t_{>0}$. Puesto que $p\lceil \alpha_i p^e \rceil \geq \alpha_i p^{e+1}$ para toda i, deducimos que $p\lceil \alpha_i p^e \rceil \geq \lceil \alpha_i p^{e+1} \rceil$ para toda i. Luego, $\lceil \alpha_i p^e \rceil / p^e \geq \lceil \alpha_i p^{e+1} \rceil / p^{e+1}$ para toda i y, como consecuencia, obtenemos que

$$(\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]} \subseteq (\underline{I}^{\lceil \alpha p^{e+1} \rceil})^{[1/p^{e+1}]}.$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{e \in \mathbb{Z}_{>0}} (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]}$$

es un ideal.

Observación 4.5.4. *Dado que R es Noetheriano, existe $e_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

$$(\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]} = (\underline{I}^{\lceil \alpha p^{e_0} \rceil})^{[1/p^{e_0}]}$$

para todo $e \geq e_0$. Se sigue que

$$\tau(\underline{I}^{\alpha}) = (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]}$$

para $e \gg 0$.

Observación 4.5.5. *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Por la Observación 4.2.8, podemos escribir $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$, donde cada R_i es un dominio F-finito regular. Consideremos una sucesión de ideales $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ de R, y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{Z}^t_{>0}$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$, $I_j = \prod_{i=1}^{n} I_{j,i}$ donde cada $I_{j,i}$ es un ideal de R_i. Además, tenemos que*

$$\tau(\underline{I}^{\alpha}) = \tau(I_{1,1}^{\alpha_1} \cdots I_{t,1}^{\alpha_t}) \times \cdots \times \tau(I_{1,n}^{\alpha_1} \cdots I_{t,n}^{\alpha_t}).$$

Definición 4.5.6. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Supongamos que R es un dominio. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ de R una sucesión de ideales, y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t_{\geq 0}$. Sean $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_\ell}$ las entradas de α distintas de cero donde $i_j < i_{j+1}$ y sea $\beta = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_\ell})$. Sea $J = I_{i_1}, \ldots, I_{i_\ell}$ Si $I_i \neq (0)$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$, definimos

$$\tau(\underline{I}^{\alpha}) = \tau(\underline{J}^{\beta}) = \bigcup_{e>0} (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]}$$

donde consideramos $I_j^0 = R$. Si $I_i = (0)$ para algún i, definimos $\tau(\underline{I}^{\alpha}) = 0$. Si R no es un dominio, definimos $\tau(\underline{I}^{\alpha}) = \tau(I_{1,1}^{\alpha_1} \cdots I_{t,1}^{\alpha_t}) \times \cdots \times \tau(I_{1,n}^{\alpha_1} \cdots I_{t,n}^{\alpha_t})$ donde los $I_{j,i}$ son como en la Observación 4.5.5.

Observación 4.5.7. *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Supongamos que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t) \in \mathbb{R}^t_{>0}$ son tales que $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. Entonces, para $e \gg 0$, tenemos que $\tau(\underline{I}^{\alpha}) = (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]}$ y $\tau(\underline{I}^{\beta}) = (\underline{I}^{\lceil \beta p^e \rceil})^{[1/p^e]}$. Puesto que $\underline{I}^{\lceil \beta p^e \rceil} \subseteq \underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil}$, por el Lema 4.2.5, tenemos que*

$$\tau(\underline{I}^{\beta}) \subseteq \tau(\underline{I}^{\alpha}).$$

Ahora estudiaremos la continuidad por la derecha de la colección de ideales de prueba mixtos.

Proposición 4.5.8 ([Pér13])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t_{\geq 0}$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\tau(\underline{I}^{\alpha}) = (\underline{I}^{r})^{[1/p^e]}$$

siempre que $r = (r_1, \ldots, r_t) \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ y $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ son tales que $\alpha_i < \frac{r_i}{p^e} < \alpha_i + \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Demostración. Primero veamos que existen $\epsilon > 0$ y un ideal $J \subseteq R$ tal que $J = (\underline{I}^{r})^{[1/p^e]}$ siempre que $r = (r_1, \ldots, r_t) \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ y $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ son tales que $\alpha_i < \frac{r_i}{p^e} < \alpha_i + \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. Supongamos lo contrario. Entonces para cada $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, existen $r_m = (r_{m,1}, \ldots, r_{m,t}) \in \mathbb{Z}^t_{>0}$ y $e_m \in \mathbb{Z}_{>0}$

tales que las sucesiones $\left\{\frac{r_{m,i}}{p^{e_m}}\right\}_m$ son decrecientes, la sucesión $\left\{\frac{r_m}{p^{e_m}}\right\}_m$ converge a c, $e_m \leq e_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $(\underline{I}^{r_m})^{[1/p^{e_m}]} \neq (\underline{I}^{r_{m+1}})^{[1/p^{e_{m+1}}]}$. Luego, por el Lema 4.5.3, $(\underline{I}^{r_m})^{[1/p^{e_m}]} \subseteq (\underline{I}^{r_{m+1}})^{[1/p^{e_{m+1}}]}$. Dado que R es Noetheriano, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $(\underline{I}^{r_n})^{[1/p^{e_n}]} = (\underline{I}^{r_{n+1}})^{[1/p^{e_{n+1}}]}$, lo cual contradice la elección de la sucesión. Por lo tanto, existen $\epsilon > 0$ y un ideal $J \subseteq R$ tal que $J = (\underline{I}^r)^{[1/p^e]}$ siempre que $r = (r_1, \ldots, r_t) \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ y $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ son tales que $\alpha_i < \frac{r_i}{p^e} < \alpha_i + \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Ahora veamos que $J = \tau(\underline{I}^\alpha)$. Por la Observación 4.5.5, podemos suponer que R es un dominio. Si $I_j = (0)$ para algún $j \in \{1, \ldots, t\}$, entonces $(\underline{I}^r)^{[1/p^e]} = (0) = \tau(I^\alpha)$ para todo $r = (r_1, \ldots, r_t) \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ y $e \in \mathbb{Z}_{>0}$. Supongamos $I_j \neq (0)$ para toda j. Sea $e > 0$ tal que si $e' \geq e$, entonces $\tau(\underline{I}^\alpha) = (\underline{I}^{\lceil \alpha p^{e'} \rceil})^{[1/p^{e'}]}$ y $\frac{\lceil \alpha_i p^{e'} \rceil}{p^{e'}} < \alpha_i + \epsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, t\}$. Si $\alpha_i p^e \notin \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$, entonces $\alpha_i < \frac{\lceil \alpha_i p^e \rceil}{p^e} < \alpha_i + \epsilon$ y $\tau(\underline{I}^\alpha) = (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]} = J$.

Ahora supongamos que $\alpha_i p^e \in \mathbb{Z}$ para algún $i \in \{1, \ldots, t\}$. Reemplazando e por un entero positivo suficientemente grande, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha_i < \frac{\lceil \alpha_i p^e \rceil + 1}{p^e} < \alpha_i + \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. Se sigue que $J = (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil + \mathbf{1}})^{[1/p^e]} \subseteq (\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]} = \tau(I^\alpha)$. Veamos que $\underline{I}^{\lceil \alpha p^e \rceil} \subseteq J^{[p^e]}$. Sea $x \in I^{\lceil \alpha p^e \rceil}$. Para ver que $x \in J^{[p^e]}$ es suficiente ver que $\frac{x}{1} \in J_P^{[p^e]}$ para todo ideal maximal $P \subseteq R$. Como consecuencia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que R es local. Para $e' \geq e$, tenemos que $\alpha_i < \frac{\lceil \alpha_i p^{e'} \rceil + 1}{p^{e'}} < \alpha_i + \epsilon$ para toda i y, como consecuencia, $I^{\lceil \alpha p^{e'} \rceil + \mathbb{1}} \subseteq J^{[p^{e'}]}$. Sea $u \in I_1 \cdots I_t \setminus \{0\}$. Entonces, $ux^{p^{e'-e}} \in I^{\lceil \alpha p^{e'} \rceil + \mathbb{1}}$ y, como consecuencia, $ux^{p^{e'-e}} \in J^{[p^{e'}]}$ para $e' \geq e$. Luego, para $e' \geq e$, podemos escribir

$$ux^{p^{e'-e}} = \sum_{k=1}^{t} x_{k,e'} u_{k,e'}^{p^{e'-e}}$$

para algunos $x_{k,e'} \in R$, $u_{k,e'} \in J^{[p^e]}$. Por la Observación 4.2.1, R es libre sobre $R^{p^{e'}}$. Sea $\mathfrak{m}_{e'}$ el ideal maximal de $R^{p^{e'}}$. Entonces, $\mathfrak{m}_{e'} R = \mathfrak{m}^{[p^{e'}]}$. Por otro lado, por el Teorema de intersección de Krull existe $e_0 \geq e$ tal que $u \notin \mathfrak{m}_{e_0 - e} R$. Luego, u es parte de una base libre de R sobre $R^{p^{e_0 - e}}$. Como consecuencia, existe un homomorfismo de $R^{p^{e_0 - e}}$-módulos $\varphi : R \to R^{p_0 - e}$ tal que $\varphi(u) = 1$. Tenemos que

$$x^{p^{e_0 - e}} = \varphi(ux^{p^{e_0 - e}}) = \sum_{k=1}^{t} \varphi(x_{k,e_0}) u_{k,e_0}^{p^{e_0 - e}}.$$

Sea $\psi : R^{p^{e_0 - e}} \to R$ el isomorfismo de anillos tal que $\psi(v^{p^{e_0 - e}}) = v$. Luego $x = \sum_{k=1}^{t} \psi(\varphi(x_{k,e_0})) u_{k,e_0}$ y, como consecuencia, $x \in J^{[p^e]}$. Por lo tanto, $J = (I^{\lceil \alpha p^e \rceil})^{[1/p^e]} = \tau(I^\alpha)$. □

Corolario 4.5.9 ([Pér13])**.** *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t_{\geq 0}$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $\tau(I^\alpha) = \tau(I^{\alpha'})$ siempre que $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_t) \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ es tal que $\alpha_i < \alpha'_i < \alpha_i + \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.*

Definición 4.5.10. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t_{\geq 0}$. La región constante del ideal de prueba mixto $\tau(\underline{I}^\alpha)$ es el conjunto

$$\left\{\alpha' \in \mathbb{R}^t_{\geq 0} \mid \tau\left(\underline{I}^{\alpha'}\right) = \tau\left(\underline{I}^\alpha\right)\right\}.$$

Para estudiar las regiones constantes de un ideal de prueba mixto, necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 4.5.11. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales y J un ideal de R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Para cada $e \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e) = \{(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \mid I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J^{[p^e]}\}.$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tales que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J}$, entonces usamos $\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)$ para denotar $\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$.

Definición 4.5.12. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales y J un ideal de R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Tomamos

$$B^J(\underline{I}; p^e) = \bigcup_{a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)} [0, a_1/p^e] \times \ldots \times [0, a_t/p^e].$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tales que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J}$, entonces usamos $B^J(\underline{f}; p^e)$ para denotar $B^J(\underline{I}; p^e)$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$.

Observación 4.5.13. *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales y J un ideal de R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Sea $e \in \mathbb{N}$. Notemos que si $\underline{I}^\alpha \not\subseteq J^{[p^e]}$, entonces existe $f \in \underline{I}^\alpha \setminus J^{[p^e]}$. Luego por la Observación 4.2.1, tenemos que $f^p \in I^{\alpha p} \setminus J^{[p^{e+1}]}$. Así, $\underline{I}^{\alpha p} \not\subseteq J^{[p^{e+1}]}$. Por lo tanto, $\frac{1}{p^e} V_{\underline{I}}^J(p^e) \subseteq \frac{1}{p^{e+1}} V_{\underline{I}}^J(p^{e+1})$. Como consecuencia, $B^J(\underline{I}; p^e) \subseteq B^J(\underline{I}; p^{e+1})$.*

Definición 4.5.14. Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales y J un ideal de R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Tomamos

$$B^J(\underline{I}) = \bigcup_{e>0} B^J(\underline{I}; p^e).$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tal que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J}$, usamos $B^J(\underline{f})$ para denotar $B^J(\underline{I})$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$.

La siguiente proposición nos muestra que $B^J(I)$ es la unión de ciertas regiones constantes.

Proposición 4.5.15 ([Pér13]). *Sea R un anillo Noetheriano, de característica prima p, regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales y sea J un ideal de R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Entonces,*

$$B^J(\underline{I}) = \left\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}^t \mid \tau(\underline{I}^\alpha) \not\subseteq J\right\}.$$

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \frac{1}{p^{e'}}\mathbb{N}^t$ para algún $e' > 0$. Sea $e > e'$ tal que $\tau(\underline{I}^\alpha) = \left(\underline{I}^{p^e\alpha}\right)^{[1/p^e]}$. Notemos que $\tau(\underline{I}^\alpha) \not\subseteq J$ si y sólo si $\underline{I}^{p^e\alpha} \not\subseteq J^{[p^e]}$. Luego, $\tau(\underline{I}^\alpha) \not\subseteq J$ si y sólo si $\alpha \in \frac{1}{p^e}\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)$.

Sea $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_j) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^t$. Primero supongamos que $\beta \in B^J(\underline{I}^\alpha)$. Entonces, existe $e_0 > 0$ tal que $\beta \in B^J(\underline{I}; p^{e_0})$. Como consecuencia, existe $\beta' = (\beta_1', \ldots, \beta_j') \in \frac{1}{p^{e_0}}\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^{e_0})$ tal que $\beta_j \leq \beta_j'$ para todo $j \in \{1, \ldots, t\}$. Luego, $\tau(\underline{I}^{\beta'}) \not\subseteq J$ y dado que $\tau\left(\underline{I}^{\beta'}\right) \subseteq \tau\left(\underline{I}^\beta\right)$, $\tau\left(\underline{I}^\beta\right) \not\subseteq J$.

Ahora supongamos que $\tau\left(\underline{I}^\beta\right) \not\subseteq J$. Por el Corolario 4,5,9, existen $e_1 > 0$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t$ tales que tal que $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, t\}$ y $\tau\left(\underline{I}^\alpha\right) = \tau\left(\underline{I}^\beta\right)$. Luego, $\tau(\underline{I}^\alpha) \not\subseteq J$ y, como consecuencia, existe $e_2 > e_1$ tal que $\alpha \in \frac{1}{p^{e_2}}\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^{e_2})$. Por lo tanto, $\beta \in B^J(\underline{I})$. □

Así, si $(R, \mathfrak{m}, K)$ es local e $I_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$, entonces $B^{\mathfrak{m}}(I)$ es el conjunto

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}^t \mid \tau(\underline{I}^\alpha) = R\right\}.$$

Si además $t = 1$, tenemos que $B^{\mathfrak{m}}(I) = [0, c^{\mathfrak{m}}(I_1))$, por lo que $c^{\mathfrak{m}}(I_1)$ es el primer número de F-salto de I_1 distinto de cero.

5

F-VOLÚMENES

En este capítulo presentaremos resultados originales obtenidos en colaboración con Wagner Badilla-Céspedes y Luis Núñez-Betancourt [BCNBRV19].

Motivados por los ideales de prueba mixtos asociados a una sucesión de ideales $I_1, \ldots, I_t$ y sus regiones constantes, definimos un análogo al F-umbral para sucesiones de ideales. En nuestro resultado principal, describiremos este invariante como un límite de una sucesión convergente.

Teorema-Definición 5.0.1 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales y $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Sea*

$$\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e) = \{(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \mid I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J^{[p^e]}\}.$$

Entonces, el límite

$$\mathrm{Vol}_F^J(\underline{I}) = \lim_{e \to \infty} \frac{|\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)|}{p^{et}}$$

converge, y es llamado el F-volumen de $\underline{I}$ con respecto a J.

En el caso regular, este límite es la suma de los volúmenes de las regiones constantes donde $\tau(I_1^{a_1} \ldots, I_t^{a_t}) \not\subseteq J$.

La demostración del Teorema 5.0.1 se basa en una extensión técnica de las ideas del caso para un ideal [DSNBP18]. Sin embargo, el caso de múltiples ideales no es una simple consecuencia de este caso. Dedicaremos la Sección 5.1 a esta demostración. Además, demostraremos algunas propiedades de los F-volúmenes que extienden aquellas de los F-umbrales.

Si R es un anillo F-puro, el F-volumen es la medida de un conjunto en $\mathbb{R}^\ell$ (ver las Proposiciones 5.2.5 y 5.3.5). En la Sección 5.3, presentaremos este y otros resultados para anillos F-puros. En particular, demostraremos que los F-volúmenes detectan intersecciones completas F-puras.

Teorema 5.0.2 ([BCNBRV19]). *Supongamos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano regular local de característica prima p. Sean $I \subseteq \mathfrak{m}$ un ideal en R, y $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ generadores minimales de I. Entonces, $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{f}) = 1$ si y sólo si I es una intersección completa F-pura.*

En la Sección 5.4, relacionamos el F-volumen y la multiplicidad Hilbert-Kunz. Específicamente, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.0.3 ([BCNBRV19]). *Supongamos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ parte de un sistema de parámetros para R, $I = (\underline{f})$, y $S = R/I$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(JS; S) \geq \frac{\mathrm{e}_{HK}(J; R)}{\mathrm{Vol}_F^J(\underline{f})}$$

para todo ideal $\mathfrak{m}$-primario J, tal que $I \subseteq J$.

En la Observación 5.4.3, relacionamos el Teorema 5.0.3 con un conjetura sobre los F-umbrales y la multiplicidad de Hilbert-Kunz [NBS20]. En particular, mejoramos un estimado dado en resultados previos [NBS20].

5.1 Existencia y definición

En esta sección demostraremos una versión más general del Teorema 5.0.1. Para ello, empezaremos introduciendo un par de definiciones.

Definición 5.1.1. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Una sucesión $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ de ideales en R cuyos términos están indexados por las potencias de la característica es llamada una p-familia si $J_{p^e}^{[p]} \subseteq J_{p^{e+1}}$ para todo $e \in \mathbb{N}$.

Un ejemplo de una p-familia de ideales es la sucesión $J_\bullet = \{J^{[p^e]}\}_{e\in\mathbb{N}}$ de potencias de Frobenius de un ideal J. Existen otras p-familias importantes que se relacionan con varios límites que miden singularidades en característica prima [Tuc12; HJ18].

La siguiente definición extiende la definición 4.5.11 al caso de p-familias.

Definición 5.1.2. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tales que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Para todo $e \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e) = \{(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \mid I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e}\}.$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tal que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J_1}$, usamos $\mathrm{V}_{\underline{f}}^{J_\bullet}(p^e)$ para denotar $\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$. En el caso que la p-familia es $J_\bullet = \{J^{[p^e]}\}_{e\in\mathbb{N}}$ con J un ideal en R, $\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)$ es denotado por $\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$.

Observación 5.1.3. *Dado que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$, para cada $n \in \{1, \ldots, t\}$, existe $\ell_n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n^{\ell_n} \subseteq J_1$. Adicionalmente, tenemos que $I_n^{\mu(I_n)p^e} \subseteq I_n^{[p^e]}$ y, como consecuencia, $I_n^{\mu(I_n)\ell_n p^e} \subseteq J_1^{[p^e]} \subseteq J_{p^e}$. Así, si $I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e}$, entonces $a_n < \mu(I_n)\ell_n p^e$ para todo $n \in \{1, \ldots, t\}$. Luego, $|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| \le p^{et}\prod_{n=1}^t \mu(I_n)\ell_n$ para todo $e \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión $\left\{\frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}}\right\}_{e\in\mathbb{N}}$ está acotada.*

Para demostrar el Teorema 5.0.1, necesitamos introducir notación para describir diferentes objetos.

Notación 5.1.4. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $a = (a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{R}^t$. Denotamos $(\lfloor a_1 \rfloor, \ldots, \lfloor a_t \rfloor)$ por $\lfloor a \rfloor$. Si $b = (b_1, \ldots, b_t) \in \mathbb{R}^t$, escribimos $a \le b$ si $a_i \le b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$ y escribimos $a < b$ si $a_i < b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. Adicionalmente, para cada $x = (x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{R}^t$, escribimos $\widehat{x}^n$ para denotar $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_t)$. Sean $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$. Sea C un subconjunto de $\frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t$. Denotamos al conjunto

$$\bigcup_{x=(x_1,\ldots,x_t)\in C} \left\{ y = (y_1, \ldots, y_t) \in \frac{1}{p^{e_1+e_2}}\mathbb{N}^t : x_i - \frac{1}{p^{e_1}} < y_i \le x_i \right\}$$

por $H_{e_1,e_2}(C)$.

Definición 5.1.5. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $e_1 \in \mathbb{N}$. Sea C un subconjunto de $\frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t$. Decimos que $x \in C$ es un punto frontera de C si $x + \frac{1}{p^{e_1}}\mathbf{1} \notin C$. Denotamos por ∂C al conjunto de puntos frontera en C.

Notación 5.1.6. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tales que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$, y $\mu = \text{máx}\{\mu(I_1), \ldots, \mu(I_t)\}$. Consideramos $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \{1, ..., t\}$, sea $\ell_n = \text{mín}\{\ell \mid I_n^\ell \subseteq J_1\}$. Entonces,

- $\mathcal{B}_n(\underline{I})_{e_1} = \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^{t-1} \cap \left(\prod_{i=1}^{n-1}[0, \mu(I_i)\ell_i] \times \prod_{i=n+1}^{t}[0, \mu(I_i)\ell_i]\right)$
- $\mathcal{B}(\underline{I})_{e_1} = \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t}\left(\prod_{i=1}^{j-1}[0, \mu(I_i)\ell_i] \times \{0\} \times \prod_{i=j+1}^{t}[0, \mu(I_i)\ell_i]\right)\right)$
- $\mathcal{R}_{e_1,e_2} = H_{e_1,e_2}\left(\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})\right)$, y
- $\mathcal{L}_{e_1,e_2} = H_{e_1,e_2}\left(\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) + \frac{1}{p^{e_1}}\{0, \ldots, \mu\}\mathbf{1}\right)$.

Intuitivamente, $\mathcal{R}_{e_1,e_2}$ es el resultado de rellenar el conjunto $\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})$ cuando lo consideramos como un subconjunto de $\frac{1}{p^{e_1+e_2}}\mathbb{N}^t$. De forma similar, podemos pensar a $\mathcal{L}_{e_1,e_2}$ como el resultado de rellenar el subconjunto $\frac{1}{p^{e_1+e_2}}\mathbb{N}^t$ que consiste de los puntos en $\frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t$ que están en el segmento de línea que une $x \in \partial\left(\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)$ con $x + \frac{1}{p^{e_1}}\mu\mathbf{1}$.

Ahora daremos un ejemplo que ilustra las regiones previamente descritas.

Ejemplo 5.1.7. *Supongamos que $R = K[[x, y]]$ donde K es un campo de característica $p = 2$. Consideremos $\mathfrak{m} = (x, y)$, el ideal maximal de R. Sea $\underline{I} = xR, (y^2 + x)R$. Entonces tenemos que*

$$\operatorname{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{m}}(p^{e_1}) = \left(\left([0, 2^{e_1} - 1] \times \left[0, \frac{2^{e_1} - 2}{2}\right]\right) \cup \left(\left[0, \frac{2^{e_1} - 2}{2}\right] \times \left(\frac{2^{e_1} - 2}{2}, 2^{e_1} - 1\right]\right)\right) \cap \mathbb{N}^2.$$

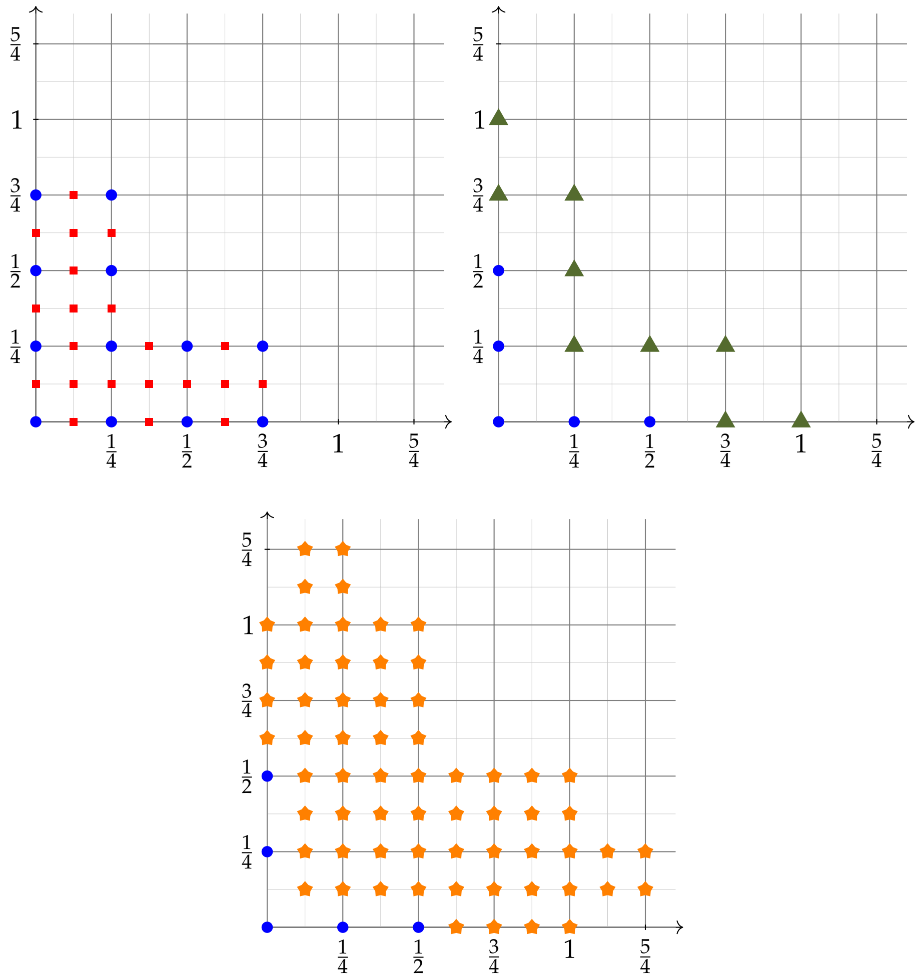
Notemos que $\mu = 1$ y $\ell_1 = \ell_2 = 1$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{m}}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) =& \frac{1}{2^{e_1}}\left(\left(\left(\{2^{e_1} - 1\} \times \left[0, \frac{2^{e_1} - 2}{2}\right]\right)\right.\right. \\ & \cup\left(\left[\frac{2^{e_1} - 2}{2}, 2^{e_1} - 1\right] \times \left\{\frac{2^{e_1} - 2}{2}\right\}\right) \\ & \cup\left(\left\{\frac{2^{e_1} - 2}{2}\right\} \times \left(\frac{2^{e_1} - 2}{2}, 2^{e_1} - 1\right]\right) \\ & \cup\left(\left[0, \frac{2^{e_1} - 2}{2}\right] \times \{2^{e_1} - 1\}\right) \\ & \left.\left.\cup\{(2^{e_1}, 0), (0, 2^{e_1})\}\right) \cap \mathbb{N}^2\right).\end{aligned}$$

Adicionalmente, tenemos las siguientes igualdades

- $\mathcal{R}_{e_1,e_2} = \left(\bigcup_{x\in\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{m}}(p^{e_1})}[0, x_1] \times \cdots \times [0, x_t]\right) \cap \frac{1}{p^{e_1+e_2}}\mathbb{N}^2$,
- $\mathcal{L}_{e_1,e_2} = H_{e_1,e_2}\left(\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{m}}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) + \frac{1}{p^{e_1}}\{0, 1\}\mathbf{1}\right)$.

Las siguientes figuras muestran las regiones de interés en el caso $e_1 = 2, e_2 = 1, \mu = 1$. Los círculos azules representan $\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{m}}(p^{e_1})$. Los círculos azules, junto con los cuadros rojos, representan $\mathcal{R}_{e_1,e_2}$. Los puntos frontera de $\frac{1}{p^{e_1}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{m}}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}$ están representados por los triángulos verdes. Las estrellas naranjas representan los elementos del conjunto $\mathcal{L}_{e_1,e_2}$.



Continuaremos estudiando este ejemplo en el Ejemplo 5.1.13.

Observación 5.1.8. *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea e_1 un entero positivo y sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales. Sea $\phi : \partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) \to \bigcup_{j=1}^{t} \left(\mathcal{B}_j(\underline{I})_{e_1} \times \{j\}\right)$ la función definida por*

$$\phi(x_1, \ldots, x_t) = (\widehat{y}^s, s)$$

donde

$$y = (x_1, \ldots, x_t) - \min\{x_i : i \in \{1, \ldots, t\}\})\mathbf{1}$$

y

$$s = \min\{i \in \{1, \ldots, t\} : x_i = \min\{x_j : j \in \{1, \ldots, t\}\}\}.$$

Notemos que, si $(x_1, \ldots, x_t) \in \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})$, se sigue que $y \in \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})$ y $\widehat{y}^s \in \mathcal{B}_s(\underline{I})_{e_1}$ por la Observación 5.1.3. Por otro lado, si $x = (x_1, \ldots, x_t) \in \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}$, entonces $\min\{x_i : i \in \{1, \ldots, t\}\}) = 0$ y $y = x$. Luego, $\widehat{y}^s \in \mathcal{B}_s(\underline{I})_{e_1}$. Así, ϕ está bien definida. Ahora supongamos $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \phi(z_1, \ldots, z_n)$. Se sigue que $(z_1, \ldots, z_t) - z_s\mathbf{1} = (x_1, \ldots, x_t) - x_s\mathbf{1}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_s \geq x_s$. Entonces, tenemos que $(z_1, \ldots, z_t) = (x_1, \ldots, x_t) + (z_s - x_s)\mathbf{1}$. Si $z_s > x_s$, entonces $z_i \geq x_i + \frac{1}{p^{e_1}}$ y $z_i > 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$. Como consecuencia, $(z_1, \ldots, z_t) \in \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})$ y $(x_1, \ldots, x_t) + \frac{1}{p^{e_1}}\mathbf{1} \in \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}$, *lo cual contradice que* $(x_1, \ldots, x_t) \in \partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)$. *Así,* ϕ *es inyectiva. Por lo tanto, deducimos que*

$$\left|\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)\right| \leq p^{e_1(t-1)} \sum_{n=1}^{t} \left(\prod_{j=1}^{n-1} (\mu(I_j)\ell_j + 1) \prod_{j=n+1}^{t} (\mu(I_j)\ell_j + 1)\right).$$

Ahora empezaremos una serie de lemas necesarios para demostrar el Teorema 5.0.1.

Lema 5.1.9 ([BCNBRV19]). *Sea* R *un anillo Noetheriano de característica prima* p. *Sea* $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ *una sucesión de ideales de* R, *y sea* $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e \in \mathbb{N}}$ *una* p*-familia de ideales en* R *tal que* $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. *Tenemos que*

$$\frac{1}{p^{e_1+e_2}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2}) \subseteq \mathcal{R}_{e_1,e_2} \cup \mathcal{L}_{e_1,e_2}.$$

Demostración. Sea $x = (x_1, \ldots, x_t) \in \frac{1}{p^{e_1+e_2}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2})$ tal que $x \notin \mathcal{R}_{e_1,e_2}$. Por la Observación 5.1.3, $p^{e_1+e_2} x_n \leq \mu(I_n)\ell_n p^{e_1+e_2}$ para cada $n \in \{1, \ldots, t\}$. Así, $p^{e_1} x_n \leq \mu(I_n)\ell_n p^{e_1}$ y $\lceil p^{e_1} x_n \rceil \leq \mu(I_n)\ell_n p^{e_1}$ para cada $n \in \{1, \ldots, t\}$. Por lo tanto, si $x_i = \min\{x_1, \ldots, x_t\}$, deducimos que

$$\frac{1}{p^{e_1}} \left(\lceil p^{e_1} x \rceil - \lceil p^{e_1} x_i \rceil \mathbf{1}\right) \in \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}.$$

Dado que $x \notin \mathcal{R}_{e_1,e_2}$, se sigue que $\frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil + t\mathbf{1} \notin \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})$ para cada $t \in \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}$. Como consecuencia, $\left\{t \in \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{Z} \mid \frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil - t\mathbf{1} \in \left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)\right\}$ está acotado inferiormente por cero. Luego, $\frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil - s\mathbf{1} \in \partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)$ donde

$$s = \text{mín}\left\{t \in \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil - t\mathbf{1} \in \left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)\right\}.$$

Se sigue que existen $a \in \partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right)$ y $r \in \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}$ tales que

$$\frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil - r\mathbf{1} = a.$$

Por otro lado, por el Lema 4.1.1 con $s = p^{e_1} a_1, \ldots, p^{e_1} a_t$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\underline{I}^{p^{e_2}(p^{e_1} a + \mu\mathbf{1})} &= I_1^{p^{e_2}(p^{e_1} a_1 + \mu)} \cdots I_t^{p^{e_2}(p^{e_1} a_t + \mu)} \\
&= I_1^{\mu p^{e_2}} (I_1^{[p^{e_2}]})^{p^{e_1} a_1} \cdots I_t^{\mu p^{e_2}} (I_1^{[p^{e_2}]})^{p^{e_1} a_t} \\
&\subseteq I_1^{[p^{e_2}]} (I_1^{p^{e_1} a_1})^{[p^{e_2}]} \cdots I_t^{[p^{e_2}]} (I_1^{p^{e_1} a_t})^{[p^{e_2}]} \\
&= (I_1^{p^{e_1} a_1 + 1})^{[p^{e_2}]} \cdots (I_1^{p^{e_1} a_t + 1})^{[p^{e_2}]} \\
&\subseteq J_{p^{e_1}}^{[p^{e_2}]} \\
&\subseteq J_{p^{e_1+e_2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos que $0 \leq r \leq \frac{1}{p^{e_1}}\mu$. Más aún, tenemos que

$$x + \frac{1}{p^{e_1}}\mathbf{1} = \frac{1}{p^{e_1}} (p^{e_1} x + \mathbf{1}) > \frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil.$$

Así,

$$\frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil - \frac{1}{p^{e_1}}\mathbf{1} < x \leq \frac{1}{p^{e_1}} \lceil p^{e_1} x \rceil.$$

Se sigue que $x \in H_{e_1,e_2}\left(\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) + \frac{1}{p^{e_1}}\{0, \ldots, \mu\}\mathbf{1}\right)$. $\square$

Lema 5.1.10 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de ideales de R, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Para cada $e_1 \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto A^{e_1} de $\frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t$ tal que*

1. $\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \subseteq A^{e_1}$,
2. $\frac{1}{p^{e_1+e_2}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2}) \subseteq H_{e_1,e_2}(A^{e_1})$ *para todo* $e_2 \in \mathbb{N}$, *y*
3. $\lim_{e_1\to\infty} \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1 t}} = 0$.

Demostración. Por el Lema 5.1.9, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^{e_1+e_2}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2}) &\subseteq \mathcal{R}_{e_1,e_2} \cup \mathcal{L}_{e_1,e_2} \\ &\subseteq H_{e_1,e_2}\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \bigcup \left(\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) + \frac{1}{p^{e_1}}\{0, \ldots, \mu\}\mathbf{1}\right)\right).\end{aligned}$$

Sea $A^{e_1} = \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \bigcup \left(\partial\left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})_{e_1}\right) + \frac{1}{p^{e_1}}\{0, \ldots, \mu\}\mathbf{1}\right)$. Entonces,

$$\left|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})\right| \leq p^{e_1(t-1)}(\mu+1) \sum_{n=1}^{t} \left(\prod_{j=1}^{n-1}(\mu(I_j)\ell_j + 1) \prod_{j=n+1}^{t}(\mu(I_j)\ell_j + 1)\right).$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{e_1\to\infty} \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1 t}} \\ &\leq \limsup_{e_1\to\infty} \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1 t}} \\ &\leq \limsup_{e_1\to\infty} \frac{(\mu+1)\sum_{n=1}^{t}\left(\prod_{j=1}^{n-1}(\mu(I_j)\ell_j+1)\prod_{j=n+1}^{t}(\mu(I_j)\ell_j+1)\right)}{p^{e_1}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\lim_{e_1\to\infty} \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1 t}} = 0.$$

□

Ahora podemos demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.1.11 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Entonces, el límite $\lim_{e\to\infty} \frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}}$ existe.*

Demostración. Para cada $e_1 \in \mathbb{N}$, sea A^{e_1} como en el Lema 5.1.10. Entonces, para cada $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2})| \leq p^{e_2 t}\left(|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})| + \left|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})\right|\right).$$

Dividiendo entre $p^{e_1t+e_2t}$, obtenemos

$$\frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2})|}{p^{e_1t+e_2t}} \leq \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}} + \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1t}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}}.$$

Así,

$$\limsup_{e\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e})|}{p^{et}} = \limsup_{e_2\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1+e_2})|}{p^{e_1t+e_2t}} \leq \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}} + \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1t}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}}.$$

Se sigue que

$$\limsup_{e\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e})|}{p^{et}} \leq \liminf_{e_1\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}} + \lim_{e_1\to\infty} \frac{|A^{e_1} - \frac{1}{p^{e_1t}}\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}} = \liminf_{e_1\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e_1})|}{p^{e_1t}}.$$

Por lo tanto, el límite $\lim_{e\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^{e})|}{p^{et}}$ existe. □

Por el Teorema 5.1.11, podemos definir el F-volumen de una sucesión de ideales con respecto a una p-familia. Justificaremos la elección de este nombre en la Sección 5.3, donde demostraremos que este número es el volumen de cierta región para anillos F-puros.

Definición 5.1.12. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tales que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Definimos el F-volumen de la sucesión $\underline{I}$ con respecto a la p-familia $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ por

$$\operatorname{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I}) = \lim_{e\to\infty} \frac{1}{p^{et}} |\operatorname{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|.$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tales que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J_1}$, usamos $\operatorname{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{f})$ para denotar $\operatorname{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I})$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$. En el caso que la p-familia sea $J_\bullet = \{J^{[p^e]}\}_{e\in\mathbb{N}}$ donde J es un ideal en R, $\operatorname{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I})$ es denotado por $\operatorname{Vol}_F^{J}(\underline{I})$, y lo llamamos el F-volumen de la sucesión $\underline{I}$ con respecto a J.

Terminaremos esta sección dando un ejemplo que muestra que elecciones diferentes de generadores de un ideal no necesariamente dan F-volúmenes iguales. Es decir, si tomamos dos ideales I, J tales que $I \subseteq \sqrt{J}$, e $I = (f_1, \ldots, f_t) = (g_1, \ldots, g_s)$ con $\underline{f} \neq \underline{g}$, entonces, es posible tener que $\operatorname{Vol}_F^J(\underline{f}) \neq \operatorname{Vol}_F^J(\underline{g})$.

Ejemplo 5.1.13. *Tomemos $R = K[[x,y]]$ con K un campo F-finito de característica $p = 2$. Sea $I = (x, y^2) = (x, y^2 + x)$, $\mathfrak{m} = (x, y)$, $\underline{f} = x, y^2$ y $\underline{g} = x, y^2 + x$.*

Calculemos $\operatorname{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{f})$. Notemos que para a, b, $e \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x^a y^{2b} \notin \mathfrak{m}^{[p^e]} &\Leftrightarrow a \leq p^e - 1,\ 2b \leq p^e - 1 \\ &\Leftrightarrow a \leq p^e - 1,\ b \leq \frac{p^e - 1}{2} \\ &\Leftrightarrow a \leq p^e - 1,\ b \leq \left\lfloor \frac{p^e - 1}{2} \right\rfloor = \frac{p^e - 2}{2}. \end{aligned}$$

Luego, $\operatorname{V}_{\underline{f}}^{\mathfrak{m}}(p^e) = [0, p^e - 1] \times \left[0, \frac{p^e-2}{2}\right] \cap \mathbb{N}^2$. Así, $|\operatorname{V}_{\underline{f}}^{\mathfrak{m}}(p^e)| = \frac{p^{2e}}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{f}) &= \lim_{e\to\infty} \frac{|\operatorname{V}_{\underline{f}}^{\mathfrak{m}}(p^e)|}{p^{2e}} \\ &= \lim_{e\to\infty} \frac{p^{2e}}{2p^{2e}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{g})$. *Notemos que* $\mathrm{V}_{\underline{f}}^{\mathfrak{m}}(p^e) \subseteq \mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)$. *Mostraremos que*

$$\mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e) = \mathrm{V}_{\underline{f}}^{\mathfrak{m}}(p^e) \cup \left(\left[0, \frac{p^e-2}{2}\right] \times \left(\frac{p^e-2}{2}, p^e-1\right] \cap \mathbb{N}^2 \right).$$

Dado que $a,\ b \leq p^e - 1$ *si* $(a,b) \in \mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)$, *es suficiente demostrar que* $(\frac{p^e-2}{2}, p^e-1) \in \mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)$, *y que* $(\frac{p^e}{2}, \frac{p^e}{2}) \notin \mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)$.

Tenemos que

$$x^{\frac{p^e-2}{2}}(x+y^2)^{p^e-1} = \sum_{i=0}^{p^e-1} \binom{p^e-1}{i} x^{\frac{p^e-2}{2}+p^e-1-i} y^{2i}.$$

Sin embargo, $2 \nmid \binom{p^e-1}{\frac{p^e}{2}-1}$ *y, así,* $\binom{p^e-1}{\frac{p^e}{2}-1} x^{p^e-1} y^{p^e-2} \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$. *Por lo tanto,* $(\frac{p^e-2}{2}, p^e-1) \in \mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)$. *Más aún,* $x^{\frac{p^e}{2}}(x+y^2)^{\frac{p^e}{2}} = x^{\frac{p^e}{2}} y^{p^e} + x^{p^e} \in \mathfrak{m}^{[p^e]}$. *Luego,* $(\frac{p^e}{2}, \frac{p^e}{2}) \notin \mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)$. *Se sigue que*

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)| &= |\,\mathrm{V}_{\underline{f}}^{\mathfrak{m}}(p^e)| + \frac{p^e}{2} \cdot \frac{p^e}{2} \\ &= \frac{p^{2e}}{2} + \frac{p^{2e}}{4} \\ &= \frac{3}{4} p^{2e}. \end{aligned}$$

Deducimos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{g}) &= \lim_{e\to\infty} \frac{|\,\mathrm{V}_{\underline{g}}^{\mathfrak{m}}(p^e)|}{p^{2e}} \\ &= \lim_{e\to\infty} \frac{3p^{2e}}{4p^{2e}} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5.2 Primeras propiedades

En esta sección discutiremos algunas propiedades de los F-volúmenes.

Proposición 5.2.1 ([BCNBRV19]). *Sea* R *un anillo Noetheriano de característica prima* p. *Sea* $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ *una sucesión de ideales de* R, *y sean* $\mathfrak{a}$, $J \subseteq R$ *dos ideales tales que* $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. *Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.*

(1) Si $J \subseteq \mathfrak{a}$, *entonces* $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{a}}(\underline{I}) \leq \mathrm{Vol}_F^{J}(\underline{I})$.

(2) $\mathrm{Vol}_F^{J^{[p]}}(\underline{I}) = p^t \,\mathrm{Vol}_F^{J}(\underline{I})$.

(3) Sea $\underline{I}_{t-1} = I_1, \ldots, I_{t-1}$. *Entonces,* $\mathrm{Vol}_F^{J}(\underline{I}) \leq \mathrm{Vol}_F^{J}(\underline{I}_{t-1}) c^J(I_t)$.

Demostración.

(1) Dado que $J \subseteq \mathfrak{a}$, se sigue que $\mathrm{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{a}}(p^e) \subseteq \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$ para cada $e \in \mathbb{N}$. Así, $|\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^{\mathfrak{a}}(p^e)| \leq |\,\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)|$. Por lo tanto, $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{a}}(\underline{I}) \leq \mathrm{Vol}_F^{J}(\underline{I})$.

(2) Tenemos que $(J^{[p]})^{[p^e]} = J^{[p^{e+1}]}$. Entonces, $\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J^{[p]}}(p^e) = \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^{e+1})$. Luego, $\frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J^{[p]}}(p^e)|}{p^{et}} = \frac{p^t|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^{e+1})|}{p^{(e+1)t}}$. Por lo tanto, $\mathrm{Vol}_F^{J^{[p]}}(\underline{I}) = p^t \,\mathrm{Vol}_F^J(\underline{I})$.

(3) Sea $a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)$. Entonces, tenemos que $a_t \leq \nu_{I_t}^J(p^e)$. De otra forma, $\underline{I}^a \subseteq J^{[p^e]}$ y, como consecuencia, $a \notin \mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)$, lo cual es una contradicción. Así, $\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e) \subseteq \mathrm{V}_{\underline{I}_{t-1}}^J(p^e) \times \{0, \ldots, \nu_{I_t}^J(p^e)\}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_F^J(\underline{I}) &= \lim_{e\to\infty} \frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)|}{p^{et}} \\
&\leq \lim_{e\to\infty} \frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}_{t-1}}^J(p^e) \times \{0,\ldots,\nu_{I_t}^J(p^e)\}|}{p^{et}} \\
&= \lim_{e\to\infty} \frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}_{t-1}}^J(p^e)|}{p^{e(t-1)}} \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_{I_t}^J(p^e)+1}{p^e} \\
&= \mathrm{Vol}_F^J(\underline{I}_{t-1}) c^J(I_t).
\end{aligned}$$

□

Ahora mostraremos que los F-volúmenes no cambian cuando tomamos clausura entera.

Proposición 5.2.2 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Entonces, $\mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I}) = \mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t)$, donde $\overline{I_1}$ denota la clausura entera de I_1. Como consecuencia, $\mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I}) = \mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(\overline{I_1}, \ldots, \overline{I_t})$.*

Demostración. Dado que $I_1 \subseteq \overline{I_1}$ es una reducción, existe $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\overline{I_1}^n \subseteq I_1^{n-\ell}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto

$$H = \{\beta \in \mathbb{N}^{t-1} \mid \exists \beta_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\beta_1, \beta) \in \mathrm{V}_{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e) \setminus \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)\}.$$

Para todo $\beta \in H$, denotamos por b_β al mayor entero no negativo tal que

$$(b_\beta, \beta) \in \mathrm{V}_{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e) \setminus \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e).$$

Mostraremos que $\mathrm{V}_{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e) \setminus \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e) \subseteq \bigcup_{\beta\in H} (\mathbb{N} \cap (b_\beta - \ell, b_\beta]) \times \{\beta\}$. Sea $(a_1, \ldots, a_t)$ un elemento de $\mathrm{V}_{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e) \setminus \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)$. Entonces, $a = (a_2, \ldots, a_t) \in H$. Tenemos que $\overline{I_1}^{b_a} I_2^{a_2} \cdots I_t^{a_t} \subseteq I_1^{b_a-\ell} I_2^{a_2} \cdots I_t^{a_t}$. Deducimos que $I_1^{b_a-\ell} I_2^{a_2} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e}$. Sin embargo, $I_1^{a_1} I_2^{a_2} \cdots I_t^{a_t} \subseteq J_{p^e}$. Así, $b_a - \ell < a_1 \leq b_a$. Por lo tanto, $(a_1, a) \in \bigcup_{\beta\in H} (\mathbb{N} \cap (b_\beta - \ell, b_\beta]) \times \{\beta\}$.

Adicionalmente,

$$|\mathrm{V}_{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e)| - |\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| = |\mathrm{V}_{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e) \setminus \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| \leq \ell|H| \leq \ell \prod_{i=2}^t |\mathrm{V}_{I_i}^{J_\bullet}(p^e)|,$$

donde la última desigualdad se sigue de que $H \subseteq \mathrm{V}_{I_2, \ldots, I_t}^{J_\bullet}(p^e)$. Puesto que

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\prod_{i=2}^t |\mathrm{V}_{I_i}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{e(t-1)}} = \prod_{i=2}^t \mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(I_i),$$

obtenemos que

$$0 \leq \lim_{e\to\infty} \frac{|\,\mathrm{V}^{J_\bullet}_{\overline{I_1},I_2,\ldots,I_t}(p^e)|}{p^{et}} - \frac{|\,\mathrm{V}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)|}{p^{et}} \leq \lim_{e\to\infty} \frac{\ell \prod_{i=2}^{t} |\,\mathrm{V}^{J_\bullet}_{I_i}(p^e)|}{p^{et}} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Vol}^{J_\bullet}_F(\underline{I}) = \lim_{e\to\infty} \frac{|\,\mathrm{V}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)|}{p^{et}} = \lim_{e\to\infty} \frac{|\,\mathrm{V}^{J_\bullet}_{\overline{I_1},I_2,\ldots,I_t}(p^e)|}{p^{et}} = \mathrm{Vol}^{J_\bullet}_F(\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_t).$$

□

Ahora empezaremos a describir objetos que nos servirán para dar una descripción alternativa de los F-volúmenes. Estas descripciones jugarán un rol importante en las siguientes secciones.

Definición 5.2.3. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tales que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Tomamos

$$B^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e) = \bigcup_{a\in \mathrm{V}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)} [0, a_1/p^e] \times \ldots \times [0, a_t/p^e].$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tal que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J_1}$, usamos $B^{J_\bullet}(\underline{f}; p^e)$ para denotar $B^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e)$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$. En el caso que la p-familia sea $J_\bullet = \{J^{[p^e]}\}_{e\in\mathbb{N}}$ donde J es un ideal en R, $B^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e)$ es denotado por $B^J(\underline{I}; p^e)$.

Observación 5.2.4. *De forma análoga a la Definición 5.1.2, tomamos*

$$\widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e) = \{(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t_{>0} \mid I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e}\},$$

y

$$\widetilde{B}^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e) = \bigcup_{a\in \widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)} [0, a_1/p^e] \times \ldots \times [0, a_n/p^e].$$

Si la p-familia es $J_\bullet = \{J^{[p^e]}\}_{e\in\mathbb{N}}$ con J un ideal de R, denotamos a $\widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)$ y a $\widetilde{B}^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e)$ por $\widetilde{\mathrm{V}}^{J}_{\underline{I}}(p^e)$ y $\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e)$ respectivamente.

Dividiendo $\widetilde{B}^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e)$ en t-cubos de volumen $1/p^{et}$ y contando el número de t-cubos, obtenemos que

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{B}^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e)) = \frac{1}{p^{et}} |\widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e))|.$$

Proposición 5.2.5 ([BCNBRV19])**.** *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Entonces,*

$$\mathrm{Vol}^{J_\bullet}_F(\underline{I}) = \lim_{e\to\infty} \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)|}{p^{et}}.$$

Demostración. Notemos que $\widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e) \subseteq \mathrm{V}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e)$ y

$$\begin{aligned}\mathrm{V}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e) \setminus \widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^e) &= \{(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \mid I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e} \;\&\; \exists i \text{ tal que } a_i = 0\} \\ &\subseteq \{(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \mid \forall i,\, a_i \leq |\,\mathrm{V}^{J_\bullet}_{I_i}(p^e)| - 1 \;\&\; \exists i \text{ tal que } a_i = 0\}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| - |\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| = |\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e) \setminus \widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| \leq \sum_{i=1}^{t} \left(\prod_{i \neq j} |\mathrm{V}_{I_i}^{J_\bullet}(p^e)| \right).$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{e\to\infty} \frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}} - \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}} &\leq \lim_{e\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{t} \left(\prod_{i\neq j} |\mathrm{V}_{I_i}^{J_\bullet}(p^e)| \right)}{p^{et}} \\ &= \sum_{i=1}^{t} \lim_{e\to\infty} \frac{\left(\prod_{i\neq j} |\mathrm{V}_{I_i}^{J_\bullet}(p^e)| \right)}{p^{et}} = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\prod_{i\neq j} |\mathrm{V}_{I_i}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{e(t-1)}} = \prod_{i\neq j} \mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(I_j).$$

Concluimos que

$$\lim_{e\to\infty} \frac{|\mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}} = \lim_{e\to\infty} \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}}.$$

□

Terminaremos esta sección dando una cota superior para el F-volumen en términos de los F-umbrales.

Corolario 5.2.6 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R, y sea $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Sea $c = c^J(I_1 + \cdots + I_t)$. Entonces, $\mathrm{Vol}_F^J(\underline{I}) \leq \frac{c^t}{t!}$.*

Demostración. Sea $I = I_1 + \cdots + I_t$. Para $\alpha, e \in \mathbb{N}$, tenemos que $I^\alpha \not\subseteq J^{[p^e]}$ si y sólo si existe $a = (a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t$ con $a_1 + \cdots + a_t = \alpha$ tal que $\underline{I}^a \not\subseteq J^{[p^e]}$. Así, $\nu_I^J(p^e) = \max\{|a| \mid a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^J(p^e)\}$. Además, para cada $a \in \widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e)$ existe $b \in V_{\underline{I}}^J(p^e)$ tal que $|p^e a| \leq |b|$. Como consecuencia, obtenemos que $\frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} \geq \max\{|a| \mid a \in \widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e)\}$.

Sea $\nu(p^e) = \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e}$. Utilizamos $H(p^e)$ para denotar al conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{R}^t_{\geq 0} \mid x_1 + \ldots + x_t \leq \nu(p^e)\}.$$

Entonces, $\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e) \subseteq H(p^e)$. Luego, $\mathrm{Vol}(\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e)) \leq \mathrm{Vol}(H(p^e)) = \frac{\nu(p^e)^t}{t!}$. Deducimos que

$$\frac{1}{p^{et}} |\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^J(p^e)| \leq \frac{\nu(p^e)^t}{t!}.$$

Dado que $\lim_{e\to\infty} \nu(p^e) = c$, se sigue que $\mathrm{Vol}_F^J(\underline{I}) \leq \frac{c^t}{t!}$. □

5.3 Propiedades para anillos F-puros

En esta sección nos enfocaremos en anillos F-puros. En particular, en la Proposición 5.3.5 demostraremos que el F-volumen es el volumen de un objeto en un espacio real. Además, veremos algunas propiedades que sólo se cumplen en este caso.

Proposición 5.3.1 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales de R, y sea $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Si R es F-puro, entonces*

$$B^J(\underline{I}; p^e) \subseteq B^J(\underline{I}; p^{e+1}).$$

Demostración. Para cada elemento a en $\mathrm{V}^J_{\underline{I}}(p^e)$, tenemos que $\underline{I}^a \not\subseteq J^{[p^e]}$. Dado que R es un anillo F-puro, $(\underline{I}^a)^{[p]} \not\subseteq J^{[p^{e+1}]}$. Como consecuencia, $\underline{I}^{pa} \not\subseteq J^{[p^{e+1}]}$. Así, $pa \in \mathrm{V}^J_{\underline{I}}(p^{e+1})$.

Adicionalmente, si a es un elemento de $\mathrm{V}^J_{\underline{I}}(p^e)$, entonces

$$[0, a_1/p^e] \times \cdots \times [0, a_t/p^e] \subseteq [0, b_1/p^{e+1}] \times \cdots \times [0, b_t/p^{e+1}]$$

para algún $b \in \mathrm{V}^J_{\underline{I}}(p^{e+1})$. Por lo tanto,

$$B^J(\underline{I}; p^e) \subseteq B^J(\underline{I}; p^{e+1}).$$

□

Observación 5.3.2. *Tomando las mismas condiciones que en la Proposición 5.3.1, tenemos que*

$$\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e) \subseteq \widetilde{B}^J(\underline{I}; p^{e+1}).$$

Definición 5.3.3. Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e \in \mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Tomamos

$$B^{J_\bullet}(\underline{I}) = \bigcup_{e \in \mathbb{N}} B^{J_\bullet}(\underline{I}; p^e).$$

Si $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión de elementos de R tales que $f_1, \ldots, f_t \in \sqrt{J_1}$, usamos $B^{J_\bullet}(\underline{f})$ para denotar $B^{J_\bullet}(\underline{I})$ donde $\underline{I} = f_1R, \ldots, f_tR$. En el caso en que la p-familia sea $J_\bullet = \{J^{[p^e]}\}_{e \in \mathbb{N}}$ donde J es un ideal en R, $B^{J_\bullet}(\underline{I})$ se denota por $B^J(\underline{I})$.

Supongamos que $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo Noetheriano regular local F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales. Como vimos en la Proposición 4.5.15, el conjunto $B^{\mathfrak{m}}(\underline{I})$ es la primera región constante de los ideales de prueba mixtos $\tau(I_1^{a_1} \cdots I_t^{a_t})$. Más aún, $B^J(\underline{I})$ es la unión de las regiones constantes cuyos ideales de prueba no están contenidos en J.

Observación 5.3.4. *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. También tenemos que*

$$B^J(\underline{I}) = \bigcup_{e \in \mathbb{N}} \widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e) \bigcup M,$$

donde $M \subseteq \{(x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{R}^t \mid x_i = 0$ para algún $i\}$ es un conjunto de medida cero.

El siguiente resultado justifica en parte el nombre de los F-volúmenes.

Proposición 5.3.5 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Entonces, $B^J(\underline{I})$ es un conjunto medible. Más aún,*

$$\mathrm{Vol}(B^J(\underline{I})) = \lim_{e \to \infty} \frac{1}{p^{et}} |\widetilde{\mathrm{V}}^J_{\underline{I}}(p^e)|.$$

En particular,

$$\mathrm{Vol}^J_F(\underline{I}) = \mathrm{Vol}(B^J(\underline{I})).$$

Demostración. Dado que $\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e)$ es un conjunto medible para toda $e \in \mathbb{N}$, concluimos que $B^J(\underline{I})$ también es medible.

Ahora nos enfocaremos en calcular la medida de $B^J(\underline{I})$. De la Observación 5.2.4, se sigue que

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e)) = \frac{1}{p^{et}} |\widetilde{\mathrm{V}}^J_{\underline{I}}(p^e))|.$$

Puesto que $\widetilde{B}^J(\underline{I}; p^e) \subseteq \widetilde{B}^J(\underline{I}; p^{e+1})$ para cada $e \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$\mathrm{Vol}(B^J(\underline{I})) = \lim_{e\to\infty} \frac{1}{p^{et}} |\widetilde{\mathrm{V}}^J_{\underline{I}}(p^e)|.$$

□

Observación 5.3.6. *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea J un ideal en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. De las Obervaciones 5.2.4 y 5.3.2, obtenemos que la sucesión $\left\{ \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}^J_{\underline{I}}(p^e)|}{p^{et}} \right\}_{e\ \in \mathbb{N}}$ es creciente.*

Observación 5.3.7. *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Para cada $e \in \mathbb{N}$ y $n \in \{1, ..., t\}$, sea $\ell_{e,n} = \min\{\ell \mid I_n^\ell \subseteq J_{p^e}\}$ y consideremos los conjuntos*

- $\mathcal{B}(\underline{I})^e_{e_1} = \frac{1}{p^{e_1}}\mathbb{N}^t \cap \left(\bigcup_{j=1}^t \left(\prod_{i=1}^{j-1} [0, \mu(I_i)\ell_{e,i}] \times \{0\} \times \prod_{i=j+1}^t [0, \mu(I_i)\ell_{e,i}] \right) \right)$
- $\mathcal{L}^e_{e_1,e_2} = H_{e_1,e_2} \left(\partial \left(\frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1}) \cup \mathcal{B}(\underline{I})^e_{e_1} \right) + \frac{1}{p^{e_1}}\{0, \ldots, \mu\}\mathbf{1} \right)$

donde $\mu = \max\{\mu(I_1), \ldots, \mu(I_t)\}$.

Por el Lema 5.1.9, tenemos que

$$\frac{1}{p^{e_1+e_2}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1+e_2}) \subseteq H_{e_1,e_2}\left(\frac{1}{p^{e_1}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1}) \right) \cup \mathcal{L}^e_{e_1,e_2}.$$

En efecto, sea $x \in \frac{1}{p^{e_1+e_2}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_\bullet}_{\underline{I}}(p^{e_1+e_2})$. Supongamos que $x \notin \mathcal{L}^e_{e_1,e_2}$. Entonces existe $y \in \frac{1}{p^{e_1}} \mathrm{V}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1})$ tal que $y_i - \frac{1}{p^{e_1}} < x_i \leq y_i$ para cada i. Dado que $x_i > 0$ para cada i, $y_i > 0$ para cada i. Luego, $y \in \frac{1}{p^{e_1}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1})$ y $x \in H_{e_1,e_2}\left(\frac{1}{p^{e_1}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1}) \right)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{p^{e_1+e_2}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1+e_2}) \subseteq H_{e_1,e_2}\left(\frac{1}{p^{e_1}} \widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1}) \right) \cup \mathcal{L}^e_{e_1,e_2}.$$

Como consecuencia, deducimos que

$$\frac{|\widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1+e_2})|}{p^{(e_1+e_2)t}} \leq \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1})|}{p^{e_1 t}} + \frac{(\mu+1)\sum_{n=1}^t \left(\prod_{j=1}^{n-1} (\mu(I_j)\ell_{e,j} + 1) \prod_{j=n+1}^t (\mu(I_j)\ell_{e,j} + 1) \right)}{p^{e_1}}.$$

Por otro lado, dado que $I_n^{\mu(I_n)\ell_{0,n}p^e} \subseteq J_1^{[p^e]} \subseteq J_{p^e}$, se sigue que $\ell_{e,n} \leq \mu(I_n)\ell_{0,n}p^e$. Así, si

$$u = (\mu+1) \sum_{n=1}^t \left(\prod_{j=1}^{n-1} (\mu(I_j)^2 \ell_{0,j} + 1) \prod_{j=n+1}^t (\mu(I_j)^2 \ell_{0,j} + 1) \right),$$

obtenemos que

$$\frac{|\widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1+e_2})|}{p^{(e_1+e_2)t}} \leq \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}^{J_{p^e}}_{\underline{I}}(p^{e_1})|}{p^{e_1 t}} + \frac{p^{e(t-1)}u}{p^{e_1}}.$$

Ahora introduciremos otra propiedad básica de los F-volúmenes para anillos F-puros.

Proposición 5.3.8 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $J_\bullet = \{J_{p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ una p-familia de ideales en R tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J_1}$. Entonces,*

$$\mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I}) = \lim_{e\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I})}{p^{et}}.$$

Demostración. Para cada $e \in \mathbb{N}$ tenemos que $J_{p^e}^{[p]} \subseteq J_{p^{e+1}}$. Luego, $\mathrm{Vol}_F^{J_{p^{e+1}}}(\underline{I}) \leq \mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}^{[p]}}(\underline{I}) = p^t \cdot \mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I})$. Así,

$$0 \leq \frac{\mathrm{Vol}_F^{J_{p^{e+1}}}(\underline{I})}{p^{(e+1)t}} \leq \frac{\mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I})}{p^{et}},$$

lo cual muestra que la sucesión $\left\{\frac{\mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I})}{p^{et}}\right\}_{e\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente por cero. Como consecuencia, converge a un límite cuando e tiende a infinito.

Notemos que, para cada entero no negativo e,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e) &= \{(a_1,\ldots,a_t) \in \mathbb{N}_{>0}^t \mid I_1^{a_1}\cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e}\}\\ &= \{(a_1,\ldots,a_t) \in \mathbb{N}_{>0}^t \mid I_1^{a_1}\cdots I_t^{a_t} \not\subseteq J_{p^e}^{[p^0]}\}\\ &= \widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_{p^e}}(p^0).\end{aligned}$$

Por la Observación 5.3.7, existe $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (que no depende de e) tal que para cada entero no negativo s,

$$\frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_{p^e}}(p^s)|}{p^{st}} - \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_{p^e}}(p^0)|}{p^{0t}} \leq \frac{p^{e(t-1)}u}{p^0}.$$

Dado que R es F-puro, la sucesión $\left\{\frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J}(p^s)|}{p^{st}}\right\}_{s\geq 0}$ es creciente por la Observación 5.3.6. Como consecuencia,

$$0 \leq \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_{p^e}}(p^s)|}{p^{st}} - |\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_{p^e}}(p^0)| \leq p^{e(t-1)}u.$$

Luego,

$$0 \leq \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_{p^e}}(p^s)|}{p^{st}} - |\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| \leq p^{e(t-1)}u.$$

Tomando el límite sobre s, obtenemos

$$0 \leq \mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I}) - |\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)| \leq p^{e(t-1)}u.$$

Dividiendo entre p^{et}, deducimos que

$$0 \leq \frac{\mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I})}{p^{et}} - \frac{|\widetilde{\mathrm{V}}_{\underline{I}}^{J_\bullet}(p^e)|}{p^{et}} \leq \frac{u}{p^e}.$$

Tomando el límite sobre e, concluimos que

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_F^{J_{p^e}}(\underline{I})}{p^{et}} = \mathrm{Vol}_F^{J_\bullet}(\underline{I}).$$

□

Proposición 5.3.9 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es regular y F-finito. Sean $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t$ una sucesión de ideales en R, J un ideal de R, y $\{J_i\}_i$ una familia de ideales tal que $J = \bigcap_i J_i$ y $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Entonces, $\mathrm{Vol}(B^J(\underline{I})) = \mathrm{Vol}(\bigcup_i B^{J_i}(\underline{I}))$.*

Demostración. Mostraremos que $\bigcup_i \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_i}(p^e) = \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$ para cada entero no negativo e. Afirmamos que $\bigcup_i \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_i}(p^e) \subseteq \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$. En efecto, sea $a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_i}(p^e)$ para algún i. Entonces, $\underline{I}^a \not\subseteq J_i^{[p^e]}$. Dado que $J \subseteq J_i$, se sigue que $\underline{I}^a \not\subseteq J^{[p^e]}$. Así, $a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$.

Ahora demostraremos la otra inclusión. Sea $a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$. Entonces, por el Lema 4.2.3, tenemos que $\underline{I}^a \not\subseteq J^{[p^e]} = (\bigcap_i J_i)^{[p^e]} = \bigcap_i J_i^{[p^e]}$. Como consecuencia, existe i tal que $\underline{I}^a \not\subseteq J_i^{[p^e]}$. Luego, $a \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J_i}(p^e)$.

Adicionalmente, $B^J(\underline{I}; p^e) = \bigcup_i B^{J_i}(\underline{I}; p^e)$ y, así, $B^J(\underline{I}) = \bigcup_i B^{J_i}(\underline{I})$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Vol}(B^J(\underline{I})) = \mathrm{Vol}(\bigcup_i B^{J_i}(\underline{I})).$$

□

Observación 5.3.10. *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión, y sea $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Si tomamos $\alpha \in B^J(\underline{I}; p^e)$, entonces existe $\beta \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$ tal que cada $\alpha_i \leq \frac{\beta_i}{p^e}$. Así, $\lfloor p^e \alpha_i \rfloor \leq \beta$. Dado que $\underline{I}^\beta \not\subseteq J^{[p^e]}$, $\underline{I}^{\lfloor p^e \alpha \rfloor} \not\subseteq J^{[p^e]}$. Por lo tanto, $\lfloor p^e \alpha \rfloor \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$.*

Supongamos que R es un anillo Noetheriano regular y F-finito. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y sea $I = I_1 + \cdots + I_t$. El ideal de prueba mixto satisface la siguiente ecuación

$$\tau(I^\lambda) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_t = \lambda} \tau(I_1^{\alpha_1} \cdots I_t^{\alpha_t}).$$

Motivados por este resultado, obtenemos la siguiente propiedad similar para F-umbrales. Este resultado juega un rol importante para caracterizar las intersecciones completas F-puras en términos del F-volumen.

Proposición 5.3.11 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sea $\underline{I} = I_1, \ldots, I_t \subseteq R$ una sucesión de ideales, y $J \subseteq R$ un ideal tal que $I_1, \ldots, I_t \subseteq \sqrt{J}$. Entonces,*

$$c^J(I_1 + \cdots + I_t) = \sup\{|\theta| \mid \theta \in B^J(\underline{I})\}.$$

Demostración. Sea $\lambda = \sup\{|\theta| \mid \theta \in B^J(\underline{I})\}$ y sea $I = I_1 + \cdots + I_t$.

Dado que $I^{\nu_I^J(p^e)} \not\subseteq J^{[p^e]}$, existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{N}^t$ tal que $I_1^{\alpha_1} \cdots I_t^{\alpha_t} \not\subseteq J^{[p^e]}$ y $|\alpha| = \nu_I^J(p^e)$. Luego, $\frac{1}{p^e}\alpha \in B^J(\underline{I})$. Concluimos que $\frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} \leq \lambda$ para cada e. Así, $c^J(I) \leq \lambda$.

Ahora demostraremos la otra desigualdad. Sea $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\theta < \lambda$. Entonces, existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in B^J(\underline{I}; p^e)$ tal que $\theta = |\alpha|$. Así, $(\lfloor p^e \alpha_1 \rfloor, \ldots, \lfloor p^e \alpha_t \rfloor) \in \mathrm{V}_{\underline{I}}^{J}(p^e)$ para $e \gg 0$ por la Observación 5.3.10. Concluimos que $I_1^{\lfloor p^e \alpha_1 \rfloor} \cdots I_t^{\lfloor p^e \alpha_t \rfloor} \not\subseteq J^{[p^e]}$. Deducimos que $I^{\lfloor p^e \alpha_1 \rfloor + \cdots + \lfloor p^e \alpha_t \rfloor} \not\subseteq J^{[p^e]}$. Luego,

$$\lfloor p^e \alpha_1 \rfloor + \cdots + \lfloor p^e \alpha_t \rfloor \leq \nu_I^J(p^e)$$

para $e \gg 0$. Se sigue que

$$\theta = |\alpha| = \lim_{e\to\infty} \frac{\lfloor p^e\alpha_1 \rfloor + \cdots + \lfloor p^e \alpha_t \rfloor}{p^e} \leq \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_I^J(p^e)}{p^e} = c^J(I).$$

Puesto que esto pasa para $\theta < \lambda$, concluimos que $\lambda \leq c^J(I)$. □

El siguiente resultado nos permite obtener el F-umbral bajo circunstancias especiales.

Proposición 5.3.12 ([BCNBRV19]). *Sea R un anillo Noetheriano de característica prima p. Supongamos que R es F-puro. Sean $I, J \subseteq R$ dos ideales tales que $I \subseteq J$. Sean $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ generadores minimales de I. Si $\mathrm{Vol}_F^J(\underline{f}) = 1$, entonces $c^J(I) = t$.*

Demostración. Mostrarmos que $B^J(\underline{f}) = [0,1)^t$. Es suficiente demostrar que $[0,1)^t \subseteq B^J(\underline{f})$. Procederemos por contradicción. Supongamos que existe $a \in [0,1)^t$ tal que $a \notin B^J(\underline{f})$. Entonces, $H \cap B^J(\underline{f}) = \emptyset$, donde H denota al conjunto $[a_1, 1] \times \cdots \times [a_t, 1]$. Luego, $B^J(\underline{f}) \subseteq [0,1]^t - H$. Se sigue que $\mathrm{Vol}_F^J(\underline{f}) < 1$, y obtenemos una contradicción.

Adicionalmente, por la Proposición 5.3.11, obtenemos que

$$\begin{aligned} c^J(I) &= \sup\{|\theta| \mid \theta \in B^J(\underline{f})\} \\ &= \sup\{|\theta| \mid \theta \in [0,1)^t\} \\ &= t. \end{aligned}$$

□

Antes de demostrar el Teorema 5.0.2, recordaremos otro resultado conocido como el Criterio de Fedder.

Teorema 5.3.13 ([Fed83]). *Si $(R, \mathfrak{m}, K)$ es un anillo regular local de característica prima p, $f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión regular en R y $f = \prod_{i=1}^t f_i$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$S/(f_1, \ldots, f_t)$ es F-puro.*
2. *$S/(f)$ es F-puro.*
3. *$f^{p-1} \notin \mathfrak{m}^{[p]}$.*
4. *$f^{p^e-1} \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$ para todo e.*

Diremos que un ideal I es una *intersección completa* si es generado por una sucesión regular. Así mismo, diremos que I es *F-puro* si R/I es F-puro. Ahora caracterizaremos las intersecciones completas F-puras en términos de los F-voúmenes.

Teorema 5.3.14 ([BCNBRV19]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano regular local de característica prima p. Sea $I \subseteq \mathfrak{m}$ un ideal de R, y sean $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ generadores minimales de I. Entonces, $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{f}) = 1$ si y sólo si I es una intersección completa F-pura.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{f}) = 1$. Entonces, $c^{\mathfrak{m}}(I) = t = \mu(I)$ por la Proposición 5.3.12. Luego, $\mu(I) = c^{\mathfrak{m}}(I) \leq \mathrm{ht}(I) \leq \mu(I)$. Concluimos que $\mathrm{ht}(I) = \mu(I)$. Así, $f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión regular en R. Por lo tanto, I es una intersección completa F-pura.

Para la otra implicación, demostraremos que $[0,1)^t = B^{\mathfrak{m}}(\underline{f})$. Sea $a \in [0,1)^t$. Entonces, $\max\{a_i\} \leq \frac{p^e-1}{p^e}$ para algún $e \in \mathbb{N}$. Dado que I es un ideal F-puro, R/I es un anillo F-puro. Dado que $f_1, \ldots, f_t$ es una sucesión regular en R, tenemos que $\underline{f}^{p^e-1} \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$ por el Teorema 5.3.13. Luego, $(p^e-1, \ldots, p^e-1) \in \mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)$. Concluimos que $a \in B^{\mathfrak{m}}(\underline{f}; p^e) \subseteq B^{\mathfrak{m}}(\underline{f})$. Por lo tanto, $\mathrm{Vol}_F^{\mathfrak{m}}(\underline{f}) = 1$. □

5.4 Relaciones con la multiplicidad de Hilbert-Kunz

En esta sección relacionaremos el F-volumen con la multiplicidad de Hilbert-Kunz. Esto está relacionado con trabajo previo hecho para los F-umbrales y estas multiplicidades [NBS20]. Empezaremos demostrando el Teorema 5.0.3.

Teorema 5.4.1 ([BCNBRV19]). *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano regular local de característica prima p. Sean $\underline{f} = f_1, \ldots, f_t$ parte de un sistema de parámetros para R, $I = (\underline{f})$, y $\overline{R} = R/I$. Entonces,*

$$\mathrm{e}_{HK}(J; R) \leq \mathrm{e}_{HK}(J\overline{R}; \overline{R}) \operatorname{Vol}_F^J(\underline{f})$$

para cualquier ideal $\mathfrak{m}$-primario J, tal que $I \subseteq J$.

Demostración. Sean $I = (\underline{f})$ y $\mathcal{I}_e = (f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t} \mid a \notin \mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e))R$. Entonces, $R/\mathcal{I}_e$ tiene una filtración $0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m = R/\mathcal{I}_e$ donde N_{t+1}/N_t es una imagen homomorfa de R/I y $m = |\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)|$. Dado que $J^{[p^e]}$ es $\mathfrak{m}$-primario, deducimos que

$$\lambda(N_{t+1} \otimes_R R/J^{[p^e]}) \leq \lambda(N_t \otimes_R R/J^{[p^e]}) + \lambda(N_{t+1}/N_t \otimes_R R/J^{[p^e]}).$$

Como consecuencia,

$$\lambda(R/\mathcal{I}_e \otimes_R R/J^{[p^e]}) \leq |\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)| \lambda(R/I \otimes_R R/J^{[p^e]}).$$

Por definición de $\mathcal{I}_e$, tenemos que $\mathcal{I}_e \subseteq J^{[p^e]}$. Luego,

$$\begin{aligned}\lambda(R/J^{[p^e]}) &= \lambda(R/\mathcal{I}_e + J^{[p^e]}) \\ &= \lambda(R/\mathcal{I}_e \otimes_R R/J^{[p^e]}) \\ &\leq |\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)| \lambda(R/I \otimes_R R/J^{[p^e]}) \\ &\leq |\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)| \lambda(R/(I + J^{[p^e]})).\end{aligned}$$

Dividiendo por p^{ed}, donde $d = \dim(R)$, obtenemos que

$$\frac{\lambda(R/J^{[p^e]})}{p^{ed}} \leq \frac{|\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)| \lambda(R/(I + J^{[p^e]}))}{p^{ed}} = \frac{|\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)|}{p^{et}} \cdot \frac{\lambda(R/(I + J^{[p^e]}))}{p^{e(d-t)}} = \frac{|\mathrm{V}_{\underline{f}}^J(p^e)|}{p^{et}} \cdot \frac{\lambda(\overline{R}/J^{[p^e]})}{p^{e(d-t)}}.$$

Tomando el límite $e \to \infty$, obtenemos la desigualdad deseada. □

Ahora recordaremos una conjetura que relaciona la multiplicidad de Hilbert-Kunz y los F-umbrales.

Conjetura 5.4.2 ([NBS20]). Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo Noetheriano local de característica prima p. Sea $I \subseteq R$ un ideal generado por parte de un sistema de parámetros $(f_1, \ldots, f_\ell)$. Sea $\overline{R} = R/I$. Sea J un ideal m-primario. Entonces,

$$\mathrm{e}_{HK}(J) \leq \mathrm{e}_{HK}(J\overline{R}) \frac{(c^J(I))^\ell}{\ell^\ell}.$$

Observación 5.4.3. *La Conjetura 5.4.2 está relacionada con la Proposición 4.4.1 y el Corolario 4.4.3.*

Por el Corolario 5.2.6,

$$\operatorname{Vol}_F^J(\underline{f}) \leq \frac{(c^J(I))^\ell}{\ell!}.$$

Por la Proposición 5.2.1(3), tenemos que

$$\operatorname{Vol}_F^J(\underline{f}) \leq c^J(f_1) \cdots c^J(f_\ell).$$

Por lo tanto, el Teorema 5.4.1 es un refinamiento de los resultados previamente mencionados.

Bibliografía

[BCNBRV19] Wágner Badilla-Céspedes, Luis Núñez-Betancourt y Sandra Rodríguez-Villalobos. "F–Volumes". En: *Preprint: arXiv:1912.03710* (2019).

[BMS08] Manuel Blickle, Mircea Mustaţă y Karen E. Smith. "Discreteness and rationality of F-thresholds". En: *Michigan Math. J.* 57 (2008). Special volume in honor of Melvin Hochster, págs. 43-61. ISSN: 0026-2285. DOI: 10.1307/mmj/1220879396. URL: https://doi.org/10.1307/mmj/1220879396.

[Coh46] I. S. Cohen. "On the structure and ideal theory of complete local rings". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 59 (1946), págs. 54-106. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.2307/1990313. URL: https://doi.org/10.2307/1990313.

[DSNBP18] Alessandro De Stefani, Luis Núñez-Betancourt y Felipe Pérez. "On the existence of F-thresholds and related limits". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 370.9 (2018), págs. 6629-6650. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/tran/7176. URL: https://doi.org/10.1090/tran/7176.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*. Vol. 150. Graduate Texts in Mathematics. With a view toward algebraic geometry. Springer-Verlag, New York, 1995, págs. xvi+785. ISBN: 0-387-94268-8; 0-387-94269-6. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5350-1.

[Fed83] Richard Fedder. "F-purity and rational singularity". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 278.2 (1983), págs. 461-480. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.2307/1999165. URL: https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.2307/1999165.

[Han02] Douglas Hanes. "Bounds on multiplicities of local rings". En: *Comm. Algebra* 30.8 (2002), págs. 3789-3812. ISSN: 0092-7872. DOI: 10.1081/AGB-120005820. URL: https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1081/AGB-120005820.

[HH90] Melvin Hochster y Craig Huneke. "Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem". En: *J. Amer. Math. Soc.* 3.1 (1990), págs. 31-116. ISSN: 0894-0347. DOI: 10.2307/1990984. URL: https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.2307/1990984.

[HJ18] Daniel J. Hernández y Jack Jeffries. "Local Okounkov bodies and limits in prime characteristic". En: *Math. Ann.* 372.1-2 (2018), págs. 139-178. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/s00208-018-1651-6. URL: https://doi.org/10.1007/s00208-018-1651-6.

[Hun13] Craig Huneke. "Hilbert-Kunz multiplicity and the F-signature". En: *Commutative algebra*. Springer, New York, 2013, págs. 485-525. DOI: 10.1007/978-1-4614-5292-8_15. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5292-8_15.

[HY02] Craig Huneke y Yongwei Yao. "Unmixed local rings with minimal Hilbert-Kunz multiplicity are regular". En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 130.3 (2002), págs. 661-665. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/S0002-9939-01-06113-5. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-01-06113-5.

[HY03] Nobuo Hara y Ken-Ichi Yoshida. "A generalization of tight closure and multiplier ideals". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 355.8 (2003), págs. 3143-3174. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/S0002-9947-03-03285-9. URL: https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1090/S0002-9947-03-03285-9.

[Kun69] Ernst Kunz. “Characterizations of regular local rings of characteristic p”. En: *Amer. J. Math.* 91 (1969), págs. 772-784. ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2373351. URL: https://doi.org/10.2307/2373351.

[Kun76] Ernst Kunz. “On Noetherian rings of characteristic p”. En: *Amer. J. Math.* 98.4 (1976), págs. 999-1013. ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2374038. URL: https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.2307/2374038.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*. Second. Vol. 8. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge University Press, Cambridge, 1989, págs. xiv+320. ISBN: 0-521-36764-6.

[Mon83] P. Monsky. “The Hilbert-Kunz function”. En: *Math. Ann.* 263.1 (1983), págs. 43-49. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01457082. URL: https://doi.org/10.1007/BF01457082.

[MPnd] Linquan Ma y Thomas Polstra. “Notes and exercises on F-singularities (preliminary version)”. unpublished. N.D.

[MTW05] Mircea Mustaţă, Shunsuke Takagi y Kei-ichi Watanabe. “F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials”. En: *European Congress of Mathematics*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, págs. 341 -364.

[NBS20] Luis Núñez-Betancourt e Ilya Smirnov. “Hilbert–Kunz multiplicities and F-thresholds”. En: *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)* 26.1 (2020), págs. 15-25. ISSN: 1405-213X. DOI: 10.1007/s40590-018-0226-6. URL: https://doi.org/10.1007/s40590-018-0226-6.

[PT18] Thomas Polstra y Kevin Tucker. “F-signature and Hilbert-Kunz multiplicity: a combined approach and comparison”. En: *Algebra Number Theory* 12.1 (2018), págs. 61-97. ISSN: 1937-0652. DOI: 10.2140/ant.2018.12.61. URL: https://doi.org/10.2140/ant.2018.12.61.

[Pér13] Felipe Pérez. “On the constancy regions for mixed test ideals”. En: *J. Algebra* 396 (2013), págs. 82-97. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.08.021. URL: http://dx.doi.org.proxy.its.virginia.edu/10.1016/j.jalgebra.2013.08.021.

[Tuc12] Kevin Tucker. “F-signature exists”. En: *Invent. Math.* 190.3 (2012), págs. 743-765. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/s00222-012-0389-0. URL: https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1007/s00222-012-0389-0.

[WY00] Kei-ichi Watanabe y Ken-ichi Yoshida. “Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength”. En: *J. Algebra* 230.1 (2000), págs. 295-317. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1006/jabr.1999.7956. URL: https://doi.org/10.1006/jabr.1999.7956.