



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**ESTUDIO DEL FLUJO PULSÁTIL DE UN LÍQUIDO
COMPLEJO: MODELO VISCOELÁSTICO
NO LINEAL DE PHAN THIEN TANNER**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:
MARIO IVÁN MARTÍNEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES
DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA
M. EN I. RICARDO MENDOZA VIZCAYA



CIUDAD DE MÉXICO
SEPTIEMBRE, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

P R E S E N T E :

Comunico a usted que el alumno Martínez López Mario Iván con número de cuenta 416118814 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado el día *** a las *** horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	Mtro. Víctor Hugo Villar Marín
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Secretario:	Mtro. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez
Suplente:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	Mtro. Ricardo Mendoza Vizcaya

El título de la tesis que se presenta es:

“ESTUDIO DEL FLUJO PULSÁTIL DE UN LÍQUIDO COMPLEJO:
MODELO VISCOELÁSTICO NO LINEAL DE PHAN THIEN TANNER”

Opción de Titulación: *Examen Profesional*

Aquello que sale del corazón lleva el matiz y el calor de su lugar de origen.

OLIVER WENDELL HOLMES

Recordar qué somos y de dónde venimos, nos define el a dónde vamos y qué seremos.

MARIO IVAN MARTÍNEZ LÓPEZ

DEDICATORIAS

A la mujer que desvelo tras desvelo, enojo tras enojo, éxitos, triunfos y fracasos, estuvo conmigo. Por darme la vida, y demostrarme que no hay ni habrá barrera alguna que te impida seguir adelante. *Patricia López*, mi madre, te amo.

A quien me demostró que siempre hay una motivación por ser siempre mejor día con día en todo lo que se hace, y que así será para el resto de mis días. A ti, hermana *Ivana Martínez*.

A ustedes dos, les agradezco, pero también les dedico este trabajo. Sólo es el inicio de algo grande. Son mi todo. Y todo lo bello de esta vida lo merecen. Eso y mucho más.

Mi familia, quien estando lejos, sin duda alguna el amor, aprecio y apoyo está presente, y que con su experiencia, disciplina, responsabilidad, sabiduría y ánimo alientan a trabajar duro y ser el mejor desde el inicio del día. Mi abuela *Yolanda Villalvazo*, *José Armando Martínez* y mis padrinos *Agustín López* y *Yolanda Carrillo*.

Gloria Torres, vecina, que mejor que nadie, sabe que es más que eso. Es usted de nuestra familia, y siempre lo será por recibirnos con los brazos abiertos, al escucharnos y compartir todo. Gracias, de verdad gracias por todo el apoyo que de todo corazón nos brinda.

A mis grandes amigos, *Ana Paula Serna*, *Patricia Carrasco*, *Josué Villa*, *Alan Alfaro*, *Ruth Méndez*, *Salvador García*. Grandes personas, hermanos, colegas que, siempre su retroalimentación como compañeros y amigos me reforzó siempre.

A una persona muy especial en mi vida, que llegó en mi séptimo semestre para quedarse, *Ximena J. Garfias*, desde ese día que nos leímos, agradecí por tanta atención, tanto cariño, respeto, admiración. Gracias, por tanto, por todo, y por lo que nos falta por compartir.

A mi queridísima fundación *Roberto Pla*, que, en los momentos más complicados de la universidad, su apoyo impulsó mi estancia en la escuela. También, al lugar que me permitió ver la otra cara de la ingeniería, donde aprendí mucho y pude complementar esos conocimientos de la escuela, y que igual me dieron la oportunidad de colaborar allí, el *Instituto Mexicano del Petróleo*.

A cada miembro del jurado que formó parte de la evaluación y formación del futuro profesionista en ingeniería química en este examen. Los doctores *Edtson E. Herrera V.* y *Fausto C. García*, y los maestros *Ricardo M. Vizcaya*, *Víctor H. Villar M.*, y *A. Juvenal G. Gómez*.

Cada comentario y palabra, de verdad fue un gran impulso a la elaboración de este trabajo, y durante toda mi estancia en la universidad en mejorar día con día.

A todos mis *compañeros*, que me permitieron desde lo más profundo, compartirles un poco de mi saber, en justamente, aquellas clases de fenómenos de transporte que llegué a impartir.
Para todos. Gracias.

AGRADECIMIENTOS

Al programa de apoyo a proyectos de investigación e innovación tecnológica (PAPITT) de la Universidad Nacional Autónoma de México, IN115919. *Análisis del flujo pulsátil de sangre humana con hipercolesterolemia, mediante una ecuación constitutiva nueva, caracterización reológica y simulación computacional en venas elásticas e inelásticas.*

A la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Al programa de apoyo a proyectos para innovación y mejoramiento de la enseñanza (PAPIME) de la Universidad Nacional Autónoma de México, PE116519. *Fenómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales y no lineales.*

A la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Al programa de apoyo a proyectos para innovación y mejoramiento de la enseñanza (PAPIME) de la Universidad Nacional Autónoma de México, PE105919. *Material didáctico, aula virtual y blog para apoyo de las asignaturas de matemáticas I y II de la carrera de Ingeniería Química.*

A la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.

Al seminario de investigación de las líneas de investigación: *fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos (LI-FESZ-420415) y reología teórica y reometría de fluidos estructurados (LI-FESZ-570619)* por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.

Este trabajo fue asesorado desde el departamento de ingeniería química en la Universidad de McGill en Montreal, Provincia de Quebec, Canadá, gracias al programa PASPA/DGAPA/UNAM para una estancia de investigación sabática del director de este proyecto, el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia.

ÍNDICE

Nomenclatura y símbolos	X
Resumen	XII
Capítulo I. Introducción	1
1.1 El flujo oscilatorio en la mecánica de fluidos	2
1.1.1 El flujo volumétrico a gradiente de presión pulsátil	2
1.1.2 La potencia pulsátil	3
1.2 El flujo pulsátil y sus variables independientes	4
1.3 Sistemas complejos y la aplicación del flujo pulsátil	5
Capítulo II. Antecedentes	7
2.1 Antecedentes del flujo volumétrico pulsátil	8
2.1.1 Flujo pulsátil de un fluido newtoniano	8
2.1.2 Flujo pulsátil de un fluido no newtoniano inelástico	9
2.1.3 Flujo pulsátil de un fluido no newtoniano viscoelástico	9
2.1.4 Métodos matemáticos del flujo pulsátil	10
2.1.5 Flujo pulsátil experimental	11
2.1.6 Métodos computacionales	12
2.2 Hipótesis	13
2.3 Objetivos	13
2.3.1 Objetivo general	13
2.3.2 Objetivos específicos	13
Capítulo III. Marco teórico	14
3.1 Ecuaciones de continuidad y transporte	15
3.1.1 Modelo de Newton	15
3.1.2 Modelo no newtoniano (no newtoniano generalizado)	16
3.1.3 Modelo viscoelástico de Maxwell (viscoelasticidad lineal)	16
3.2 Ecuaciones de balance de masa y de momento	17
3.2.1 Ecuación de continuidad	17
3.2.2 Ecuación de movimiento	17
3.2.3 Tensor de esfuerzos totales	18
3.2.4 Flujo volumétrico	19
3.2.5 Ecuación de momento modificada por un gradiente de presión pulsátil	19
3.3 Líquidos viscoelásticos y fluidos complejos	19
3.3.1 Ecuación reológica viscoelástica no lineal de Phan Thien Tanner (PTT)	20

Capítulo IV. Sistema físico y modelado matemático	22
4.1 Problema de estudio	23
4.1.1 Geometría	23
4.1.2 Naturaleza reológica del fluido	23
4.1.3 Condiciones de proceso	24
4.1.4 Condiciones biológicas	24
4.1.5 Flujo homogéneo y cortante	24
4.2 Modelado matemático	25
4.2.1 Balances de masa y de transporte	25
4.2.2 Ecuación reológica PTT	25
4.2.3 Flujo volumétrico pulsátil	27
4.2.4 Potencia pulsátil	28
4.3 Aumento en el flujo volumétrico y potencia pulsátil	28
4.4 Resultados analíticos	29
4.4.1 Función lineal del modelo de Phan Thien Tanner	29
4.4.1.1 Aumento en el flujo volumétrico	29
4.4.1.2 Aumento en la potencia pulsátil	29
4.4.2 Función cuadrática del modelo de Phan Thien Tanner	29
4.4.2.1 Aumento en el flujo volumétrico	29
4.4.2.2 Aumento en la potencia pulsátil	30
 Capítulo V. Análisis de resultados	 31
5.1 Función viscosidad aparente	32
5.2 Flujo volumétrico	34
5.3 Potencia pulsátil	35
5.4 Aumento en el flujo volumétrico	36
5.5 Flujo pulsátil de un fluido biológico viscoelástico: sangre humana con hipercolesterolemia .	38
5.6 Conclusiones parciales del flujo volumétrico y de la potencia pulsátil	41
 Capítulo VI. Conclusiones	 43
6.1 Resumen de esta investigación	44
6.2 Conclusiones sobre el modelo	45
6.3 Conclusiones sobre el fluido biológico	46
6.4 Trabajo a futuro.....	46

Apéndice A. Funciones materiales PTT	47
A. A1 Vector velocidad	48
A.A2 Tensores cinemáticos	48
A.A2.1 Gradiente de velocidad	48
A.A2.2 Rapidez de deformación	49
A.A2.3 Tensor de esfuerzos	49
A.A3 Ecuación reológica de PTT	50
A.A3.1 Funciones materiales del modelo PTT	52
Apéndice B. Modelo lineal de PTT	53
B.B1 Modelo lineal de PTT	54
B.B2 Potencia a gradiente de presión constante	55
B.B3 Flujo pulsátil	55
B.B3.1 Aumento de flujo pulsátil del modelo linealizado	56
B.B4 Potencia pulsátil	57
Apéndice C. Modelo cuadrático de PTT	59
C.C1 Modelo cuadrático de PTT	60
C.C2 Potencia a gradiente de presión constante	60
C.C3 Aumento en el flujo volumétrico	61
Apéndice D. Modelo exponencial de PTT	64
D.D1 Modelo exponencial de PTT	65
D.D2 Potencia a gradiente de presión constante	66
D.D3 Aumento en el flujo volumétrico	66
D.D4 Potencia pulsátil	67
Apéndice E. Función estocástica	69
E.E1 Función estocástica: casos particulares	70
E.E2 Función lineal de PTT	72
E.E2.1 Aumento en el flujo volumétrico	72
E.E2.2 Potencia pulsátil	72
E.E3 Función cuadrático PTT	72
E.E3.1 Aumento en el flujo volumétrico	72
E.E3.2 Potencia pulsátil	72
Bibliografía	73

NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

NOTACIÓN GENERAL

a	Radio del capilar [m]
G_0	Modulo elástico [Pa]
L	Longitud del capilar [m]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]

LETRAS GRIEGAS

ε	Parámetro de perturbación [1]
η	Función viscosidad [Pa s]
φ	Función fluidez [1/Pas]
φ_0	Función fluidez a bajo corte [1/Pas]
φ_{app}	Función fluidez aparente [1/Pas]
φ_1	Fluidez a primer orden [1/Pas]
γ_{rz}	Escalar rapidez de deformación [s ⁻¹]
λ	Tiempo estructural [s]
σ_{rz}	Componente rz del tensor de esfuerzos [Pa]
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$	Componentes normales del tensor de esfuerzos [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
θ	Coordenada angular [1]

VECTORES, DIADAS Y TENSORES

\mathbf{V}	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$	Producto diádico del vector de velocidad [m^2/s^2]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
\mathbf{f}	Fuerza de cuerpo [N/m^3]
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos [Pa]
\mathbf{W}	Tensor vorticidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]

OTROS SÍMBOLOS

$()^T$	Transpuesta de una matriz [1]
∇	Operador gradiente [m^{-1}]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [m^{-1}]
∇^2	Operador Laplaciano [m^{-1}]
$\overset{\nabla}{\sigma}$	Derivada convectiva superior del modelo de Maxwell [1/s]
Tr	Traza de una matriz [1]
$\langle \rangle$	Valor promedio [1]

RESUMEN

En la presente tesis de licenciatura, se estudia el flujo volumétrico inducido por un gradiente de presión pulsátil con respecto a un gradiente de presión constante.

Para su estudio, se supone una geometría cilíndrica de longitudes características $r = a$ y $z = L$, con la condición geométrica en la que la relación, $a/L \ll 1$. El flujo y la reología del sistema, son caracterizados con el modelo viscoelástico de Phan Thien Tanner, en donde la forma natural de este modelo, la forma exponencial, ha sido desarrollada en sus versiones lineal y cuadrática.

Esta ecuación contiene dos propiedades materiales las cuales, pueden ser obtenidas mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario, y un parámetro de ajuste que describe la transición de flujo.

Se supone que el sistema es isotérmico, en régimen laminar, efectos inerciales y gravitacionales despreciables, flujo unidireccional y flujo cortante no-homogéneo. El líquido es incompresible y viscoelástico.

A partir de la ecuación de continuidad, el balance de momento y las condiciones de frontera: (i) adherencia de líquido al sólido en la interfase (pared) y (ii) simetría de flujo; se obtienen expresiones analíticas para el flujo volumétrico, fluidez y potencia. A partir de estas consideraciones, se obtienen expresiones analíticas para el aumento de flujo volumétrico y potencia pulsátil para una función estocástica simple (trigonométrica con amplitud M).

Finalmente, las predicciones y bondades del modelo son utilizados para describir sangre con diferentes niveles de colesterol.

Así, el trabajo que presento se conforma por seis capítulos, además de contar de cuatro apéndices. En el capítulo 1 se presenta una introducción del flujo pulsátil, conceptos generales para el aumento del flujo volumétrico y de la potencia pulsátil, además de incluir algunas aplicaciones de este flujo. Para el segundo capítulo, se detallan los antecedentes a este tipo de flujo, además de contribuir en los estudios por investigadores en este tema. Incluyendo también la hipótesis y los objetivos (general y particulares) de este proyecto de investigación.

En el capítulo 3 se discuten los conocimientos básicos para entender el flujo pulsátil. Se empieza con las ecuaciones de continuidad, de transporte, Navier Stokes y la ecuación característica viscoelástica no lineal de Phan Thien Tanner (PTT).

El sistema físico de estudio, las consideraciones matemáticas, físicas y biológicas para el posterior modelado matemático se estudia en el capítulo 4.

Sobre el capítulo quinto, se presenta el modelado matemático y los principales resultados del flujo pulsátil con la ecuación constitutiva de Phan Thien Tanner para los dos casos de estudio, el lineal y el cuadrático.

En el último capítulo se presentan las simulaciones obtenidas mediante el programa *Mathematica*. En este punto se discuten tres tópicos principales sobre los resultados obtenidos: (i) La función viscosidad del modelo PTT, (ii) el flujo volumétrico sin efectos del flujo pulsátil y (iii) el estudio del aumento en el flujo volumétrico y de la potencia pulsátil del modelo PTT para diferentes condiciones materiales del fluido a trabajar. Además, al final del capítulo se incluye un análisis del caso particular de un fluido biológico (sangre humana con hipercolesterolemia y los diferentes niveles de colesterol).

El análisis de resultados, conclusiones y trabajo futuro sobre este tema se discuten al final de estos capítulos trabajados, donde también se analiza el caso particular de un fluido biológico (Sangre humana con diferentes niveles de colesterol).

En los apéndices al final de esta investigación, se detallan los pasos intermedios del modelado matemático desarrollado en el capítulo cinco. En el apéndice A se presentan las funciones materiales del modelo Phan Thien Tanner. En el apéndice B se calcula el flujo volumétrico del modelo PTT para los casos lineal y cuadrático respectivamente. En el apéndice C se calcula el aumento en el flujo volumétrico y la potencia para el caso lineal del modelo PTT. En el apéndice D se calculan las expresiones analíticas para el aumento de flujo y potencia pulsátil para el caso cuadrático. En el apéndice E se presentan casos particulares de la función estocástica y sus resultados correspondientes en el aumento en el flujo volumétrico y en la potencia pulsátil.

Palabras claves: *flujo pulsátil, ecuación constitutiva de PTT, soluciones analíticas, esquema perturbativo, sangre humana, hipercolesterolemia.*

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 EL FLUJO OSCILATORIO EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS

En la historia de la mecánica fluidos, los fluidos no newtonianos juegan un papel importante, debido a que la mayoría de los procesos industriales se desarrollan con base en fluidos de esta naturaleza.

Uno de los problemas básicos en el estudio de los fluidos no newtonianos es concerniente a los flujos oscilantes (*Barnes et al., 1971; Herrera-Valencia et al., 2010, 2016, 2017*).

Existen dos grandes campos en estos tipos de flujos oscilantes: (i) flujo pulsátil y (ii) flujo vibrátil, de los cuales, el flujo pulsátil será el centro del presente trabajo desarrollado.

1.1.1 El flujo volumétrico a gradiente de presión pulsátil

Hablar de un gradiente de presión pulsátil, remite a mencionar que al gradiente de presión de la ecuación de movimiento se le suma una contribución que depende del tiempo, provocando que el flujo sea precisamente de tipo oscilante. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera (*Phan-Thien 1978, 1980a, b; Phan-Thien y Dudek 1982a*):

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 + \nabla p_1 = \nabla p_0 (1 + \alpha n(t)) \quad [1.1]$$

De aquí en adelante, se representará la palabra “Ecuación” por medio de “Ec.”

En la Ec. [1.1] $\nabla p(t)$ es el gradiente de presión pulsátil, ∇p_0 es el gradiente de presión constante, α es un parámetro perturbativo que describe las desviaciones del valor promedio, el cual tiene valor numérico pequeño y se intrduce de manera arbitraria con el fin de obtener una contribución al flujo volumétrico asociados a los mecanismos pulsátiles (α debe ser menor a 1 y diferente de 0), y $n(t)$ es una función estocástica (función aleatoria que depende del tiempo) (*Yaglom 1965*), representando las desviaciones del valor medio del gradiente de presión (*Phan-Thien 1978, 1980a, b; Phan-Thien y Dudek 1982a*).

El punto clave de la Ec. [1.1] es cuantificar el efecto que tiene el gradiente de presión pulsátil en el flujo volumétrico pulsátil, $Q(t)$, y hacer una comparación con el flujo volumétrico a gradiente de presión constante, Q_0 (*Phan-Thien 1978, 1980a, b; Phan-Thien y Dudek 1982a*).

Una de las maneras de aislar el efecto de la contribución pulsátil de la Ec. [1.1], y realizar la comparación entre ambos flujos volumétricos, a gradiente de presión pulsátil y a gradiente de presión constante, es por medio de la siguiente expresión (*Barnes et al., 1971*)

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 \quad [1.2]$$

El parámetro $I(\%)$, se conoce como *aumento de flujo*, y cuantifica precisamente esa comparación entre los flujos a gradiente de presión pulsátil y a gradiente de presión constante (*Phan-Thien 1978, 1980a, b; Phan-Thien y Dudek 1982a*). En la Ec. [1.2] los paréntesis significan un promedio de tipo temporal.

La expresión matemática para el promedio temporal del flujo volumétrico, tiene la forma:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} Q(t) dt \quad [1.3]$$

Donde ω representa la frecuencia angular, la cual se define como la inversa del periodo.

1.1.2 La potencia pulsátil

La energía asociada al flujo pulsátil puede ser cuantificada a través del trabajo por unidad de tiempo.

La potencia pulsátil, se define como el producto del flujo volumétrico pulsátil y el esfuerzo en la pared pulsátil.

Matemáticamente tiene la forma siguiente (*Herrera-Valencia et al., 2010, 2016, 2017*):

$$P(t) = Q(t) \sigma_w(t) \quad [1.4]$$

En la Ec. [1.4], $\sigma_w(t)$ es el esfuerzo en la pared pulsátil, el cual, se obtiene del balance de la ecuación de movimiento y del gradiente de presión (*Herrera-Valencia et al., 2010, 2016, 2017*).

De acuerdo a este balance, la expresión analítica es:

$$\sigma_w(t) = \frac{1}{2} (-\nabla p(t)) a \quad [1.5]$$

De la misma manera que en el flujo volumétrico, el efecto del gradiente de presión pulsátil puede ser comparado con el gradiente de presión constante (*Herrera-Valencia et al., 2010, 2016, 2017*) mediante una expresión equivalente a la Ec. [1.2]. Esta expresión es

$$I_E (\%) = \frac{\langle P(t) \rangle - P_0}{P_0} \times 100 \quad [1.6]$$

1.2 EL FLUJO PULSÁTIL Y SUS VARIABLES INDEPENDIENTES

Las principales conclusiones de las Ecs. [1.2] y [1.6], en los diferentes tipos de flujo inelástico, viscoelástico lineal y no lineal son (*Bird et al., 2002; Davis et al. 1978; De Andrade Lima and Rey 2005, 2006*):

1. La eficiencia depende de la amplitud de las perturbaciones en el gradiente de presión pulsátil, así como de la frecuencia angular y de las propiedades materiales de los líquidos (viscosidades a corte bajo, alto y tiempos de relajación).
2. Para que existan aumentos en los dos sistemas (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared) el líquido analizado debe ser adelgazante al corte, es decir, la función viscosidad debe cambiar por efecto de la rapidez de deformación.
3. El máximo obtenido en las curvas resonantes (eficiencia contra gradiente de presión) está determinado por un acoplamiento de las propiedades viscoelásticas del fluido analizado.
4. Experimentalmente, se demostró que para algunos valores de frecuencia, la eficiencia aumenta mientras que para otros decrece.

Así, en este trabajo de investigación, versa en estudiar el efecto del gradiente de presión pulsátil en el flujo volumétrico y compararlo con un gradiente de presión constante, a través de las Ecs. dadas con anterioridad ([1.1]-[1-6]).

1.3 SISTEMAS COMPLEJOS Y LA APLICACIÓN DEL FLUJO PULSÁTIL

El flujo volumétrico, y su variación con el flujo pulsátil, tiene una aplicación muy importante en el estudio de sistemas complejos de gran aplicación médica y de la ingeniería química.

Debido a ello, surge la necesidad de emplear modelos reológicos que permitan caracterizar cualquier tipo de fluido no newtoniano (en este caso, fluidos complejos)

a. Flujo pulsátil sanguíneo.

El flujo de sangre humana es un problema de actualidad debido a su compleja reología. La premisa es entender como es que ésta suspensión biológica fluye en el sistema circulatorio humano (*Herrera-Valencia et al. 2010, 2016, 2017*).

b. Flujo pulsátil en sangre humana con diferentes patologías.

El flujo y la reología de la sangre se ve afectada por diferentes trastornos alimenticios, como son: (i) hipercolesterolemia, (ii) hipoglucemia, (iii) diabetes, (iv) cirrosis hepática, (v) cáncer, entre otras (*Moreno et al. 2013, 2015; Apostolidis y Beris 2015*).

c. Extracción terciaria de petróleo.

Debido a la creciente crisis de petróleo en México, la extracción de crudo en los yacimientos petroleros es de suma importancia en nuestro presente y futuro. En este campo, los líquidos complejos (sistemas micelares) han sido utilizados en la recuperación de petróleo.

La extracción de cantidades adicionales de petróleo puede ser inducida (al ser inyectados) mediante fracturas hidráulicas en la formación de rocas. Recientemente, líquidos complejos basados en agentes tensoactivos catiónicos han sido escogidos para los procesos de fractura de rocas en yacimientos de petróleo porque, pueden mejorar las extracciones de cantidades adicionales de petróleo en comparación con los líquidos poliméricos (*Berret 1997; Rey y Herrera et al. 2012*).

d. Fibras artificiales.

Otra impactante manifestación biológica del flujo pulsátil es la que se presenta en la seda producida por las arañas (*Rey y Herrera-Valencia et al. 2010, 2016, 2017*). Este increíble proceso ha sido estudiado ampliamente por los científicos de todo el mundo.

El proceso de la formación de la seda de la araña consiste en un líquido viscoelástico que está conformado por 9 proteínas, después de esto, el líquido se transforma en un cristal líquido nemático, es decir una sustancia que presenta fases entre el sólido y el líquido y que bajo fuerzas externas se orientan las partículas materiales (*Rey y Herrera-Valencia et al. 2012; De Andrade Lima y Rey 2005, 2006*).

El tercer paso es un gel y por último se deshidrata la sustancia, donde se obtiene un hilo biológico capaz de superar al polímero sintético más resistente creado por el hombre (Kevlar). Una de las desventajas del Kevlar es que su síntesis se lleva a cabo a temperaturas cercanas a los 450 °C y como disolvente se usa el ácido sulfúrico, siendo altamente contaminante.

En vista de la potencial aplicación de flujos pulsátiles en sistemas complejos como son: (i) líquidos poliméricos, (ii) cristales líquidos, (iii) sistemas micelares etc., es de vital importancia su entendimiento para una posible aplicación tecnológica o transferencia de tecnología.

De esta forma, la investigación presente va en la dirección de entender estos sistemas físicos, bajo aplicación de un modelo matemático nuevo, aprovechando las propiedades materiales del fluido.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

2.1 ANTECEDENTES DEL FLUJO VOLUMÉTRICO PULSÁTIL

2.1.1 Flujo pulsátil de un fluido newtoniano

El flujo pulsátil fue estudiado primeramente empleando la ecuación constitutiva reológica de Newton (*Bird et al. 2002; Barnes et al. 1971*).

Utilizando esta ecuación constitutiva, se demostró que no existe un aumento en el flujo volumétrico.

Esto, se puede verificar empleando las Ecs. [1.1] y [1.2]. El aumento en el flujo volumétrico queda definido como:

$$I(\%) = \frac{\left\langle \pi \frac{a^3}{4} \varphi_0 \sigma_w (1 + \alpha n(t)) \right\rangle - \pi \frac{a^3}{4} \varphi_0 \sigma_w}{\pi \frac{a^3}{4} \varphi_0 \sigma_w} \times 100 = \alpha \langle n(t) \rangle \times 100 \quad [2.1]$$

Si la función estocástica $n(t)$ es modelada con una función trigonométrica simple, por ejemplo, $n(t) = M \sin(\omega t)$ o $n(t) = M \cos(\omega t)$ (ver apéndice E), el aumento de flujo I , es cero, debido a que el promedio de la función estocástica $n(t)$ es cero.

$$\langle n(t) \rangle = \langle M \cos(\omega t) \rangle = M \left(\frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) dt \right) = 0 \quad [2.2]$$

Es decir, el aumento en el flujo volumétrico es cero. De la misma manera, la potencia asociada al flujo pulsátil, puede ser expresada de la siguiente manera:

$$I_E(\%) = \frac{\left\langle \pi \frac{a^3}{4} \varphi_0 \sigma_w^2 (1 + \alpha n(t))^2 \right\rangle - \pi \frac{a^3}{4} \varphi_0 \sigma_w^2}{\pi \frac{a^3}{4} \varphi_0 \sigma_w^2} \times 100 = (2\alpha \langle n(t) \rangle + \alpha^2 \langle n^2(t) \rangle) \times 100 \quad [2.3]$$

El promedio de la función estocástica es cero, sin embargo, el promedio del cuadrado de la función estocástica es diferente de cero, es decir:

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle M^2 \sin^2(\omega t) \rangle = M^2 \left(\frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \right) = \frac{M^2}{2} \quad [2.4]$$

Así, la potencia asociada al flujo pulsátil, es diferente de cero.

Esto demuestra que en el sistema de flujo pulsátil es siempre diferente de cero y por lo tanto positiva, lo que implicaría que no existe una ventaja de tipo energético en este sistema de flujo. La energía asociada a este aumento de flujo y por supuesto, de potencia es:

$$I_E (\%) = 50M^2\alpha^2 \quad [2.5]$$

2.1.2 Flujo pulsátil de un fluido no newtoniano inelástico

Las investigaciones realizadas en este campo de la mecánica de los fluidos, se han basado inicialmente en fluidos no newtonianos inelásticos (*Bird et al. 2002; Phan-Thien 1978*). En estas primeras investigaciones, estos autores demostraron que las propiedades no newtonianas en el flujo pulsátil inducen un cambio drástico en el flujo volumétrico y por lo tanto en el aumento de flujo. Phan Thien (1978) demostró que utilizando un modelo de ley de potencia, el aumento de flujo volumétrico $I_Q (\%)$ y la potencia pulsátil $I_E (\%)$, son diferentes de cero. Las investigaciones sobre este sistema utilizando diferentes ecuaciones reológicas inelásticas, predicen que los siguientes puntos importantes del flujo volumétrico:

- a) Las curvas resonantes que básicamente se obtienen cuando se gráfica el aumento de flujo en función del esfuerzo en la pared son función de las propiedades reológicas del sistema.
- b) El aumento de $I_Q(\%)$ es una consecuencia de las propiedades adelgazantes al corte del sistema, es decir cuando *el fluido decrece su viscosidad por efecto de la rapidez con la que es deformado o por el esfuerzo*.
- c) Las propiedades materiales del sistema: (i) tiempos característicos, (ii) propiedades materiales elásticas (módulo de corte G_0), solo modifican las formas de las curvas y el valor del esfuerzo en la pared en donde se obtiene el máximo.
- d) El máximo de estas curvas, se debe a un acoplamiento entre las propiedades inelásticas en fluidos inelásticos y viscoelásticas en fluidos con características viscosas y elásticas.
- e) La forma matemática de la función estocástica y la amplitud modifican el máximo de las curvas resonantes.

2.1.3 Flujo pulsátil de un fluido no newtoniano viscoelástico

La mayoría de los fluidos de interés en ingeniería química contienen partes viscosas y elásticas, es decir son viscoelásticos. Tienen la característica de disipar energía (viscosidad) y almacenar energía (elasticidad). Muchos autores han empleado diferentes ecuaciones reológicas con el fin de incorporar la elasticidad en el flujo pulsátil (*Barnes et al., 1971*).

Todos estos modelos han permitido estudiar el efecto de la elasticidad y su rol preponderante en el flujo pulsátil. Los estudios teóricos y numéricos han demostrado que mecanismos externos a los adelgazantes, solo modifican los perfiles de velocidad y no representan una contribución importante en el aumento de flujo (*Manero y Mena 1979*).

En esta primera aproximación, se puede enfatizar que la elasticidad no es un mecanismo primario en el aumento de flujo, y el aumento se debe a un efecto de las propiedades adelgazantes y a la fuerza macroscópica empleada en la deformación continua e irreversible del sistema (*Manero y Mena 1979; Phan-Thien 1978, 1980a, b*).

La mayoría de estos trabajos, han empleado las siguientes ecuaciones reológicas inelásticas basadas en el modelo generalizado de Newton: (i) Ley de potencia, (ii) Ellis, (iii) Carreau-Yasuda, (iv) Plástico de Bingham (*Phan-Thien 1978, Phan-Thien y Dudek 1982a*).

En algunos de los modelos viscoelásticos (basados en extensiones del modelo viscoelástico de Maxwell) se acoplan efectos viscosos y elásticos, como bien el nombre lo indica. Algunos de estos modelos son: (i) Maxwell, (ii) Tanner, (iii) White-Metzner, (iv) Oldroyd-B, (v) Goddard-Miller, etc. (*Barnes et al. 1971; Manero y Mena 1979*).

2.1.4 Métodos matemáticos del flujo pulsátil

Desde un punto de vista matemático, el flujo pulsátil ha sido investigado empleando métodos directos analíticos (*Phan-Thien 1978*) y numéricos (*Barnes et al. 1971; Manero y Mena 1979*). Para algunas ecuaciones simples inelásticas, la solución de ellas consiste en encontrar el flujo volumétrico pulsátil y calcular su promedio, ésto con el fin de obtener una expresión analítica (*Bird et al. 2002; Herrera-Valencia 2016*).

Cuando el sistema presenta ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, se utilizan métodos perturbativos, los cuales consisten en expandir las variables dinámicas en una serie de potencias alrededor de un parámetro perturbativo (*Phan-Thien 1978, 1980a, b; Phan-Thien y Dudek 1982a*).

Recientemente, los trabajos por Herrera et al. (2017), desarrollaron un método perturbativo combinado con una serie de Taylor con el fin de obtener expresiones analíticas del aumento de flujo y de la potencia pulsátil.

Otros autores, han empleado métodos numéricos basado en diferencias finitas (*Barnes et al., 1971; Manero y Mena 1979*) y métodos más sofisticados tomando como punto de partida el cálculo variacional como son los métodos de Galerkin y elemento finito (*De Andrade Lima y Rey 2005,2006*).

En este punto, muchos trabajos se han basado en utilizar paquetes comerciales como COMSOL-MULTIPHYSICS con el fin de obtener una interfaz que describa los procesos de transferencia de momento, energía y masa (*De Andrade Lima y Rey 2005,2006*).

2.1.5 Flujo pulsátil experimental

Barnes et al. (1969) presentaron una disertación teórica y experimental acerca del flujo pulsátil. Como fluido de estudio utilizaron una disolución de poliacrilamida, la cual, es un polímero de alto peso molecular.

Los resultados experimentales estuvieron basados en consideraciones de fluidos débilmente elásticos (es decir, en donde los mecanismos viscosos son dominantes sobre los elásticos) y las propiedades materiales de las ecuaciones reológicas de estado, fueron extraídos directamente de datos reométricos. Para su trabajo experimental, utilizaron los siguientes valores de amplitud, radio del cilindro y frecuencia: (i) $\varepsilon = 0.2$, (ii) $\omega = 0.88$ rad/s y (iii) $R = 0.16$ cm, y concentraciones de 1.5 y 8 % en porcentaje masa. Sus predicciones teóricas demostraron la misma tendencia que la parte experimental pero cuantitativamente hubo una diferencia por un factor de 2 con los experimentos. Esta discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales fue asociada a los efectos elásticos del flujo en la poliacrilamida.

Por esta razón, Walters y Townsend estudiaron el mismo sistema, pero caracterizado con una ecuación reológica de estado corrotacional de cuatro constantes tipo Oldroyd-B. Sus predicciones fueron similares a las de Barnes (*et al., 1971*). Sus cálculos demostraron que el flujo volumétrico depende de la amplitud de la perturbación y que para un valor crítico del gradiente de presión se observan aumentos considerables en el flujo volumétrico (*Barnes et al. 1971*). Además, el aumento, es una función de la frecuencia para un gradiente de presión constante.

Por otra parte, y en la misma línea, Barnes (*et al.*, 1971) estudiaron el mismo problema, utilizando datos viscométricos para alimentar su modelo. Las conclusiones principales de su trabajo con base en el modelo para un fluido no newtoniano inelástico fueron:

1.- A bajas frecuencias, los resultados experimentales con una disolución de poliacrilamida demostraron que el flujo volumétrico perturbado decrece conforme aumenta la frecuencia de las pulsaciones

2.- A frecuencias altas, la eficiencia aumenta conforme la frecuencia de las pulsaciones lo hace. De acuerdo con esto, existen discrepancias entre los resultados teóricos con el modelo viscoelástico de cuatro constantes propuesto por Walters y Townsend y los resultados teóricos-experimentales de Barnes et al (1971).

2.1.6 Métodos computacionales

Los métodos computacionales empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido de gran interés, con el fin de obtener resultados más precisos en la obtención del aumento en el flujo volumétrico y la potencia pulsátil (Ecs. [1.1] y [1.4]). Townsend resolvió el flujo pulsátil como un problema de valor inicial mediante un algoritmo computacional basado en un esquema perturbativo y utilizando un método numérico tipo Runge-Kutta clásico de cuarto orden.

Una de las ventajas de éste es su gran estabilidad computacional y versatilidad en las cantidades físicas importantes (amplitud de la perturbación, frecuencia, propiedades materiales de la ecuación constitutiva como son: (i) viscosidades a bajo y a alto corte, tiempos viscoelásticos, etc).

Para el intervalo de frecuencias que utilizaron, Barnes (*et al.*, 1971) y Edwards (*et al.*, 1972) estudiaron la eficiencia y la potencia requerida para el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil. Para caracterizar su fluido, utilizaron dos modelos viscosos (ley de potencia y Ellis) y resolvieron el problema de valor inicial empleando un método de diferencias finitas. Sus principales conclusiones incluyeron, que el aumento en el flujo volumétrico no depende de la frecuencia de las pulsaciones, solamente de su amplitud y del índice del modelo de ley de potencia, asociado con las propiedades adelgazantes del fluido. Sin embargo, la potencia requerida para mantener el flujo pulsátil es siempre positiva, lo que implica que no existe ninguna ventaja de tipo energética en bombear un fluido viscoso mediante un gradiente de presión pulsátil.

Por último, ellos concluyeron que la diferencia entre sus resultados y los de Barnes (*et al.*, 1971) están asociados a las ecuaciones constitutivas que fueron empleadas en los experimentos. Por otra parte, en la mayoría de los trabajos, los efectos inerciales y elásticos son despreciados en el cálculo de la eficiencia. Por esta razón, Davies (*et al.*, 1978) analizaron el flujo a gradiente de presión pulsátil incorporando los mecanismos mencionados anteriormente.

2.2 HIPÓTESIS

El efecto de la incorporación de un gradiente de presión oscilante para un sistema de flujo pulsátil, generará un aumento en el flujo volumétrico respecto a un flujo a gradiente de presión constante, el cual será de diferente magnitud dependiendo del modelo viscoelástico linealizado y cuadrático de Phan Thien Tanner.

2.3 OBJETIVOS

2.3.1 Objetivo general

Estudiar el efecto del gradiente de presión pulsátil en el flujo volumétrico y la potencia de un fluido viscoelástico, caracterizado por la ecuación reológica constitutiva de Phan Thien Tanner.

2.3.2 Objetivos específicos

- a) Obtener expresiones analíticas para el flujo volumétrico y potencia de un fluido modelado con base en la ecuación reológica de Phan Thien Tanner en estado estacionario y a gradiente de presión constante, en los casos lineal y cuadrático.
- b) Calcular los aumentos de flujo volumétrico y potencia de un fluido modelado con la ecuación reológica de Phan Thien Tanner, en los casos lineal y cuadrático.
- c) Calcular los aumentos de flujo volumétrico y potencia pulsátil en función de las propiedades materiales y fuerza macroscópica asociada al flujo pulsátil.
- d) Utilizar datos reométricos de sangre en función del colesterol con el fin de obtener las curvas correspondientes de aumento en el flujo volumétrico.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

3.1 ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y DE TRANSPORTE

En este capítulo se presentarán las bases teóricas para entender el trabajo de investigación de esta tesis de licenciatura. Es importante mencionar que cada referencia citada, así como las ecuaciones y bases toman como referencia a los textos básicos en reología y fenómenos de transporte (*Bird et al., 2002*).

3.1.1 Modelo de Newton

En el fundamento de la ingeniería química se encuentran los fenómenos de transporte, los cuales son caracterizados en tres estudios importantes: (i) momento, (ii) energía y (iii) masa (*Bird et al., 2002*). La transferencia de momento se preocupa por el estudio y su aplicación en la mecánica de fluidos, la cual analiza dos partes fundamentales como la propia mecánica clásica: la cinemática y dinámica de los fluidos. Analizar la dinámica de los fluidos implica conocer las fuerzas superficiales que deforman el elemento de control de forma continua e irreversible.

Enfatizando en la naturaleza del fluido y en las razones por las cuáles éste se mueve, en la primera clasificación se pueden definir los fluidos *newtonianos* y *no newtonianos*.

La definición de fluido newtoniano es aquel en el cual, no importa como la rapidez con la que sea deformado, su función viscosidad permanece constante.

La expresión mas simple que relaciona el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} (parte simétrica del tensor rapidez de deformación) y el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es el modelo tensorial de Newton. Matemáticamente se escribe como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad [3.1]$$

En la Ec. [3.1] se muestra la relación descrita en el párrafo anterior, donde \mathbf{D} representa la parte simétrica del gradiente de velocidad, describiendo el cómo es que la substancia es deformada.

Este es el tensor rapidez de deformación y se representa matemáticamente como un promedio del gradiente de velocidad y la transpuesta de este gradiente de velocidad:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad [3.2]$$

Donde, el desarrollo del gradiente de velocidad, $\nabla\mathbf{V}$, y su transpuesta, $\nabla\mathbf{V}^T$, dependerá del sistema de coordenadas utilizado. Todo fluido que cumpla la Ec. [3.1] se le llamará *fluido newtoniano*.

3.1.2 Modelo no newtoniano (no newtoniano generalizado)

La Ec. [3.1] no puede describir de una manera adecuada a los fluidos no newtonianos. De hecho, al momento de realizar una gráfica entre el tensor de esfuerzos respecto al gradiente de velocidad, para todos los fluidos newtonianos se obtendrá una recta con pendiente igual al valor de su viscosidad. Para los fluidos no newtonianos no ocurre eso, y la diferencia de la geometría para un fluido de esta naturaleza con un newtoniano dependerá en gran medida del esfuerzo aplicado al fluido y su respectiva deformación.

Las expresiones matemáticas para modelar un fluido no newtoniano también dependerán, por supuesto, del tipo de fluido estudiado, debido a que los parámetros y variables que se relacionan son diferentes entre fluidos. Independientemente del modelo para el fluido no newtoniano, la expresión de la viscosidad, μ , es remplazado por la función viscosidad, η .

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} \quad [3.3]$$

En la Ec. [3.3], Π_D se conoce como el segundo invariante del tensor rapidez de deformación y es una medida de la magnitud del tipo de flujo que se analiza (ya sea cortante o extensional). Este elemento se escribe como (*Bird et. al 2002*):

$$\Pi_D = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \quad [3.4]$$

En la Ec. [3.4] el doble producto punto, se conoce como una contracción de tipo tensorial del tensor rapidez de deformación. El resultado de ésta, es un escalar, los cuales son conocidos como elementos invariantes, debido a que no se modifica su valor ante una transformación o rotación del propio fluido.

3.1.3 Modelo viscoelástico de Maxwell (viscoelasticidad lineal)

Una extensión de la ecuación [3.3] es el modelo viscoelástico de Maxwell, en el cual, se combinan las naturalezas viscosas y elásticas del material que se analiza.

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad [3.5]$$

En la Ec. [3.5], λ_0 es la variable que representa un tiempo de relación viscoelástico de Maxwell, y η_0 es la viscosidad cortante a bajas deformaciones. La Ec. [3.5] solamente es válida para deformaciones pequeñas, es decir en el régimen de viscoelasticidad lineal.

3.2 ECUACIONES DE BALANCE DE MASA Y DE MOMENTO

3.2.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad describe la conservación de la materia en un elemento de control, es decir, describe los cambios de la densidad en función de los cambios espaciales del flujo de momento. La expresión matemática en términos diferenciales para la ecuación de continuidad tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad [3.6]$$

Esta expresión puede ser escrita en términos del operador del operador de Stokes, el cual, introduce a la derivada material, considerando los elementos local y convectivo de la propiedad analizada

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad [3.7]$$

Si suponemos que el fluido es incompresible, es decir la densidad no depende del tiempo ni del espacio, la Ec. [3.7] se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad [3.8]$$

La Ec. [3.8] recibe el nombre del *criterio de incompresibilidad*, siendo la forma simplificada de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible, describiendo matemáticamente un campo solenoidal.

3.2.2 Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento es la segunda ley de Newton extendida a un sistema fuera del equilibrio, cuya representación de forma diferencial es:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad [3.9]$$

Los primeros dos términos de la Ec. [3.9] se relacionan con la aceleración del sistema instantánea y convectiva, respectivamente. Del lado derecho de la Ec. [3.9], están las fuerzas que inducen esta aceleración, asociados con la divergencia del tensor de esfuerzo total (fuerzas superficiales) y con las fuerzas de bulto (gravitacionales, eléctricas, magnéticas, etc).

Esta ecuación diferencial parcial no lineal describe las fuerzas que hacen que el elemento de control sea deformado de forma continua e irreversible, tal como la segunda ley de Newton del movimiento.

3.2.3 Tensor de esfuerzos totales

La Ec. [3.9] puede escribirse de una manera equivalente al desarrollar cada término. Por ejemplo, del miembro derecho, el tensor de esfuerzos total, \mathbf{T} , es la suma de una contribución hidrostática y del tensor esfuerzos, que puede ser de naturaleza viscosa o viscoelástica. Esta descripción es, matemáticamente

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad [3.10]$$

En donde \mathbf{I} representa la matriz identidad que da el carácter tensorial al elemento escalar de la presión. La forma matemática de la matriz \mathbf{I} es como sigue:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [3.11]$$

Al substituir las Ecs. [3.10] y [3.11] en la Ec. [3.9] y desarrollando las propiedades de los operadores diferenciales (divergencias) se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad [3.12]$$

Si suponemos que los mecanismos inerciales y gravitacionales son despreciables, la ecuación de balance del momento, se simplifica de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p \quad [3.13]$$

La Ec. [3.13] es punto de partida en el cálculo del flujo volumétrico y del presente análisis del flujo volumétrico y del flujo pulsátil.

3.2.4 Flujo volumétrico

El flujo volumétrico (volumen por unidad de tiempo), se puede calcular mediante la integral de volumen del producto interior entre el vector de velocidad y el vector de superficie. La expresión general para el flujo volumétrico es:

$$Q = \int_V \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad [3.14]$$

3.2.5 Ecuación de momento modificada por un gradiente de presión pulsátil

Las ecuaciones mostradas, desde [3.1] a [3.10] nos permiten obtener, considerando geometrías simples, el flujo de Poiseuille, es decir, el flujo volumétrico a gradiente de presión pulsátil. Para esto, se modifica el tensor de esfuerzos total, dado por la Ec. [3.10], y se introduce una fluctuación en el gradiente de presión pulsátil, dado por la Ec. [1.1]. El tensor de esfuerzos modificado por la perturbación toma la forma:

$$\mathbf{T} = -p(t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} = -p_0(1 + \alpha n(t))\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad [3.15]$$

Al sustituir el tensor total de esfuerzos, y despreciando los mecanismos inerciales y gravitacionales en la ecuación de movimiento, se tiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p_0(1 + \alpha n(t)) \quad [3.16]$$

La cual es semejante a la Ec. [3.13].

3.3 LÍQUIDOS VISCOELÁSTICOS Y FLUIDOS COMPLEJOS

En las secciones 3.1 a la 3.3 se describió, de manera muy general, lo que era un fluido newtoniano y la diferencia entre un fluido inelástico no newtoniano.

La mayoría de los fluidos tiene las dos propiedades importantes, viscosidad y elasticidad. La intención de esta sección es la de introducir uno de los modelos más exitosos en la historia de la mecánica del medio continuo: el modelo de PTT (*Barnes et al. 1971*).

3.3.1 Ecuación reológica visco-elástica no lineal PTT

Para caracterizar nuestro fluido no newtoniano en el siguiente capítulo, se propone la ecuación constitutiva de PTT (*Barnes et al. 1971; Phan-Thien y Tanner 1977*). Ésta se describe como:

$$f(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{G_0\varphi_0} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0\mathbf{D} \quad [3.17]$$

En la Ec. [3.17], $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de esfuerzos viscoelástico, el cual, describe las fuerzas superficiales cortantes y normales que actúan en el elemento de control. $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ es el operador matemático asociado a la derivada codeformacional del tensor de esfuerzos, $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ es la traza del tensor de esfuerzos. El término $1/G_0\varphi_0$ es el tiempo viscoelástico de Maxwell a rapidez de corte bajo, η_0 es la viscosidad a bajo corte. El tensor rapidez de deformación \mathbf{D} es la parte simétrica del tensor espacial gradiente de velocidad $\nabla\mathbf{V}$.

La derivada codeformacional del tensor de esfuerzos ($\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$) se desarrolla como

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\sigma} - \{ \nabla\mathbf{V}^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V} \} \quad [3.18]$$

La Ec. [3.18] describe los cambios del tensor de esfuerzos temporales y espaciales del sistema de flujo. La derivada material del tensor de esfuerzos, se define como:

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\sigma} \quad [3.19]$$

La derivada codeformacional está asociada a la caraterización del tipo de fluido.

La función f , mostrada en la Ec. [3.17], depende de la traza del tensor de esfuerzos, corresponde a la función característica del modelo de PTT, y de manera general, se modela como una expresión exponencial.

$$f(\text{tr}\boldsymbol{\sigma}) = \text{Exp} \left(\varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_0} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \right) \quad [3.20]$$

Versiones más simplificadas del modelo PTT se han utilizado con el fin de obtener resultados analíticos. Los más comunes, el modelo lineal y el modelo cuadrático. Éstos nacen simplemente de desarrollar por medio de la serie de Maclaurin en “n” términos. Así, para obtener los modelos lineal y cuadrático se desarrolla en series para los primeros dos y tres términos, respectivamente.

Este desarrollo se muestra en la Ec. [3.21].

$$f(\text{tr}\boldsymbol{\sigma}) = \text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_0} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}\right) = \begin{cases} \text{Lineal: } 1 + \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_0} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \\ \text{Cuadrático: } 1 + \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_0} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2!} \left(\varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_0} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)^2 \end{cases} \quad [3.21]$$

La función depende de la traza del tensor de esfuerzos. La traza para una matriz de $m \times n$ se define como la suma de los componentes de la diagonal principal de esta matriz. Por tanto, la traza del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = \text{tr} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \quad [3.22]$$

El modelo de PTT fue seleccionado debido a su sencillez matemática en comparación con otros modelos reológicos (*Herrera-Valencia et al., 2016, 2017*).

Por otra parte, este modelo, presenta soluciones analíticas para el perfil de velocidades y flujo volumétrico para un proceso en estado estacionario y flujo cortante, inducido por un gradiente de presión constante. Además, componentes elásticas a través de la primera diferencia de esfuerzos normales (*Phan-Thien y Tanner 1977*).

Todas las propiedades materiales de esta ecuación reológica (como lo son la viscosidad a corte bajo y tiempo de relajación viscoelástico de Maxwell) pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario en flujos controlados y poseen interpretación física. El parámetro de ajuste matemático ε describe la transición de flujo cortante a extensional respectivamente y su valor en los cálculos posteriores es de 0.01 aproximadamente.

CAPÍTULO IV

**SISTEMA FÍSICO Y
MODELADO MATEMÁTICO**

4.1 PROBLEMA DE ESTUDIO

4.1.1 Geometría

En esta sección se describirá las principales restricciones del sistema de estudio, desde un punto geométrico, físico, biológico y matemático. El modelo de estudio es representado por la figura 4.1 (Herrera-Valencia *et al.* 2010, 2016, 2017).

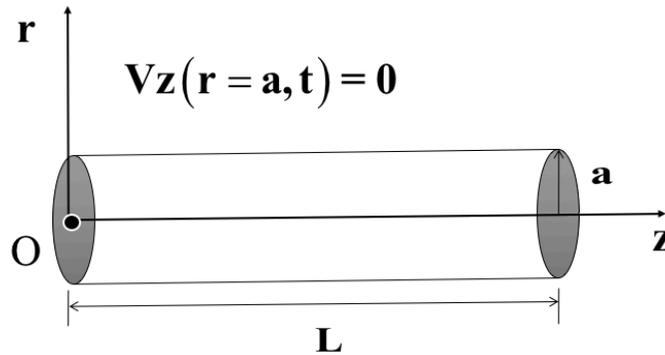


Figura 4.1

Ilustra un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ en donde el fluido se mueve debido a un gradiente de presión pulsátil.

4.1.2 Naturaleza reológica del fluido

El fluido es incompresible, es decir, su densidad permanece constante en el tiempo y en la posición. Además, consideraremos que este es viscoelástico, donde el fluido tiene componentes viscosas asociadas a la disipación y elásticas de recuperación o almacenamiento de la energía. El fluido biológico que se estudia es sangre humana con hipercolesterolemia, existiendo un exceso de colesterol debido a un trastorno alimenticio (condiciones actuales, sobrepeso, sedentarismo etc). Cada dato utilizado en este estudio se obtuvo de pacientes hombres y mujeres, donde se siguieron los protocolos establecidos para la extracción ésta (Herrera-Valencia *et al.* 2010, 2016, 2017).

Un punto importante, es que las ecuaciones analíticas desarrolladas en este trabajo son completamente generales, y pueden ser aplicadas a otros sistemas complejos, tales como los mencionados en la sección 1.3, con la condición de que las propiedades materiales serán diferentes para cada fluido, pero no el modelo matemático.

4.1.3 Condiciones de proceso

1. El proceso es isotérmico. En este tipo de procesos, la temperatura en el sistema es constante, por lo que no hay variación de las propiedades materiales del fluido analizado. Es un hecho que el cuerpo humano tiene una temperatura constante de aproximadamente $T = 37^{\circ}\text{C}$, siendo ésta la referencia a trabajar en el proceso.
2. Los mecanismos inerciales no son tomados en cuenta, debido a que los valores de velocidad son bajos.
3. El flujo pulsátil es modelado introduciendo una función estocástica que representa las fluctuaciones en el gradiente de presión pulsátil. Así, el gradiente de presión se escribe como la Ec. [1.1], $\nabla p(t) = \nabla p(t) (1 + \alpha n(t))$.
4. La función estocástica $n(t)$ es estacionaria, con promedio cero. Matemáticamente $\langle n(t) \rangle = 0$.
5. Los mecanismos gravitacionales son despreciables debido a la geometría del sistema. El fluido se mueve por un gradiente de presión pulsátil.
6. La reología y el flujo del fluido no newtoniano es caracterizado por la ecuación constitutiva viscoelástica no lineal de PTT.

4.1.4 Condiciones biológicas

1. El hematocrito que es básicamente el plasma compuesto por sales y minerales permanece constante.
2. No existen otras patologías en la sangre de tal manera que intervenga en el desarrollo matemático de la misma, el intercambio de minerales, proteínas, etc, se desprecia del presente análisis.

4.1.5 Flujo homogéneo y cortante

En el flujo homogéneo las variables dinámicas del sistema no dependen de la posición, por lo que los gradientes de éstas son cero. Esto es, $\nabla \mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}$. Por otra parte, en el flujo cortante el vector velocidad solo tiene una componente, es decir, las demás son cero.

En particular, en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) el vector velocidad toma la forma:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r,t)) \quad [4.1]$$

En este caso, los tensores gradiente de velocidad y transpuesta del tensor gradiente de velocidad se escriben en la siguiente forma matricial:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \nabla \mathbf{V}^T = \frac{\partial V_z}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [4.2a, b]$$

Al reemplazar el par de Ecs. [4.2a, b] en la Ec. [3.2] se obtiene la expresión para el tensor rapidez de deformación:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \{\nabla\mathbf{V}\}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [4.3]$$

4.2 MODELADO MATEMÁTICO

4.2.1 Balances de masa y de transporte

En esta sección se presenta las ecuaciones simplificadas de continuidad, transporte y reológica lineal y cuadrática de PTT, bajo las consideraciones citadas en la sección 4.1. La ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad [4.4]$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) = \nabla_z p (1 + \varepsilon n(t)) \quad [4.5]$$

4.2.2 Ecuación reológica PTT

La ecuación constitutiva de PTT (Ec. [3.20]) en forma tensorial y con las restricciones antes mencionadas se escribe como:

$$\text{Exp} \left(\varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_0} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right) \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{G_0 \phi_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} - (\nabla\mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V}) \right\} = 2\eta_0 \mathbf{D} = \eta_0 (\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad [4.6]$$

Al sustituir los tensores gradiente espacial del campo de velocidades, su transpuesta, tensor de esfuerzos (Ecs. [4.2a, b] y [4.3].) en la Ec. [4.6] y después, igualando las entradas de las matrices, se tienen las siguientes componentes que son iguales debido a la simetría del tensor de esfuerzos para el componente “rz”.

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zr} - \lambda_0 \left(\sigma_{rr} \gamma_{zr}\right) = \eta_0 \gamma_{zr} \quad [4.7]$$

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{rz} - \lambda_0 \left(\gamma_{zr} \sigma_{rr}\right) = \eta_0 \gamma_{zr} \quad [4.8]$$

Las Ecs. [4.7] y [4.8] son iguales debido a la simetría del tensor de esfuerzos.

Las ecuaciones anteriores son la base del presente análisis y son punto de partida en el esquema perturbativo.

Para simplificar los cálculos y que podamos obtener una expresión analítica para el modelo de PTT, se supondrá que los cambios temporales de las componentes del tensor de esfuerzos, son pequeños por lo que nos centraremos más en la elasticidad del sistema a través de la primera diferencia de esfuerzos normales.

Uno de los parámetros fundamentales del análisis del fenómeno físico, que por supuesto, en el análisis matemático, es la función de fluidéz, la cual se representa como una función del esfuerzo cortante “rz”.

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \varphi(\sigma_{rz}) \sigma_{rz} \quad [4.9]$$

Esta función de fluidéz, tomará formas diferentes dependiendo el modelo para PTT, el lineal y el cuadrático (bajo la idea de que éstos dos nacen del modelo exponencial):

$$\varphi(\sigma_{rz}) = \varphi_0 \text{Exp}\left(2\varepsilon \left(\frac{\lambda_0}{\eta_0}\right)^2 \sigma_{rz}^2\right) = \begin{cases} \text{Lineal: } \varphi_0 \left(1 + 2\varepsilon \left(\frac{\lambda_0}{\eta_0}\right)^2 \sigma_{rz}^2\right) \\ \text{Cuadrático: } \varphi_0 \left(1 + 2\varepsilon \left(\frac{\lambda_0}{\eta_0}\right)^2 \sigma_{rz}^2 + 2\varepsilon^2 \left(\frac{\lambda_0}{\eta_0}\right)^4 \sigma_{rz}^4\right) \end{cases} \quad [4.10]$$

Las Ecs. mostradas en [4.10] representan los resultados más importantes del presente análisis y estas son punto de partida del siguiente capítulo que consistirá en el modelado matemático del flujo a gradiente de presión pulsátil, para encontrar el flujo volumétrico y su respectivo aumento del flujo con la introducción de la *función de fluidez* (Barnes et al. 1971; Herrera-Valencia et al., 2016, 2017).

4.2.3 Flujo volumétrico pulsátil

En esta sección, se deduce la expresión para el modelo linealizado del PTT. Al expandir la exponencial hasta el término lineal, se tiene la siguiente expresión para el escalar rapidez de deformación.

La función fluidez del modelo PTT lineal, a partir de la Ec.[4.10] tiene la forma de:

$$\varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_0 \left(1 + 2 \frac{\varepsilon}{G_0^2} \sigma_{zr}^2 \right) \quad [4.11]$$

En la Ec. [4.11] φ_0 , es la fluidez a bajo corte; G_0 , es el módulo elástico de corte, y ε es un parámetro matemático asociado al tipo de flujo pulsátil que se analiza.

El flujo volumétrico se puede calcular con la siguiente expresión analítica (Barnes et al 1971; Bird et al., 2002)

$$Q = -\pi \int_0^a \frac{\partial V_z}{\partial r} r^2 dr \quad [4.12]$$

Considerando mecanismos inerciales y gravitacionales despreciables de la ecuación del balance de momento, se tiene lo siguiente (Phan-Thien 1978, 1980a, b; Herrera-Valencia et al., 2016, 2017):

$$\nabla_z p(t) = \nabla_z p_0 (1 + \alpha n(t)) = \nabla_z p_0 (1 + \alpha n(t)) \quad [4.13]$$

Al introducir en el gradiente de presión en la componente z de la ecuación de movimiento, e integrar con respecto a la coordenada radial r y aplicando la condición de frontera de que el esfuerzo debe ser finito, se tiene lo siguiente (Phan-Thien 1978, 1980a, b; Herrera-Valencia et al., 2016, 2017):

$$\sigma_{zr}(t) = -\sigma_w(t) \frac{r}{a} \quad [4.14]$$

Cuyo concepto se conoce en realidad como una condición de frontera, *deslizamiento en la pared*.

Estas expresiones al ser sustituidas en la expresión para el flujo volumétrico, el caudal para un fluido no newtoniano tiene la forma de

$$Q(t) = \pi \frac{a^3}{4} \phi_{app} \sigma_w \quad [4.15]$$

Otra ecuación relacionada al flujo pulsátil es la parte análoga a la expresión matemática de la función de fluidez es la fluidez aparente asociada al flujo pulsátil. Ésta se calcula mediante la integración del esfuerzo cortante como función del tiempo.

$$\phi_{app}(t) = \left(\frac{1}{\sigma_w^4(t)} \int_0^{\sigma_w^4(t)} d\sigma_{rz}^4 \right) \phi_{ss} \quad [4.16]$$

4.2.4 Potencia pulsátil

La potencia trabajo por unidad de tiempo, puede ser calculada mediante el producto del flujo volumétrico y el esfuerzo transitorio en la pared, es decir (*Phan-Thien 1978, 1980a,b; Herrera-Valencia et al., 2016, 2017*):

$$P(t) = \sigma_w(t) Q(t) = \frac{\pi a^3}{4} \phi_{app}(t; \alpha) \sigma_w^2(t) \quad [4.17]$$

4.3 Aumento en el flujo volumétrico y potencia pulsátil

A partir de los resultados obtenidos en esta sección, se calculará el aumento en el flujo volumétrico y la potencia pulsátil, por lo que se tiene lo siguiente:

$$I_x = \frac{\langle Y(t) \rangle - Y_0}{Y_0}; X = \{L, C\}, Y(t) = (Q(t), P(t)), Y_0 = (Q_0, P_0) \quad [4.18]$$

En la siguiente sección se muestra el modelado matemático del flujo volumétrico y potencia en los casos lineal y cuadrático del modelo PTT (*Phan-Thien 1978, 1980a, b; Herrera-Valencia et al., 2016, 2017*)

4.4 Resultados analíticos

A continuación se presentan los resultados del aumento en el flujo volumétrico y potencia pulsátil tras el uso del modelo de PTT, en los casos lineal y cuadrático, dadas por las Ecs. [3.21]. Es importante mencionar que como función estocástica se utilizó una función de naturaleza trigonométrica, donde ésta toma la forma

$$n(t) = M \text{Cos}(\omega t). \quad [4.19]$$

Los detalles de los cálculos matemáticos se encuentran en los apéndices al final de este trabajo. En este punto, nos centraremos en las discusiones básicas del flujo volumétrico y la potencia.

4.4.1 Función lineal del modelo de PTT

4.4.1.1 Aumento en el flujo volumétrico

$$I_L (\%) = (10^2) \frac{\frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \left(\frac{3}{2} (\alpha M)^2 \right) \quad [4.20]$$

4.4.1.2 Aumento en la potencia pulsátil

$$E_L (\%) = 10^2 \frac{\left(1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 \right) \frac{1}{2} (\alpha M)^2 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \frac{3}{2^3} (\alpha M)^4}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \quad [4.21]$$

4.4.2 Función cuadrática del modelo de PTT

4.4.2.1 Aumento en el flujo volumétrico

$$I_C (\%) = 100 \frac{\left(\frac{4\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 + 10 \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \right) \frac{(\alpha M)^2}{2} + 5 \frac{3}{2^2} \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \frac{(\alpha M)^4}{2}}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \quad [4.22]$$

4.4.2.2 Aumento en la potencia pulsátil

$$E_c (\%) = 10^2 \frac{\left(1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2\right) \left(\frac{1}{2} (\alpha M)^2\right) + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \left(\frac{3}{2^3} (\alpha M)^4\right)}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \quad [4.23]$$

En el siguiente capítulo se presentarán las predicciones de las Ecs. mostradas con anterioridad, las cuales son punto de partida en las simulaciones, análisis de resultados y conclusiones.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 FUNCIÓN VISCOSIDAD APARENTE

En esta sección se presentan los resultados del flujo pulsátil a orden cero y primer orden.

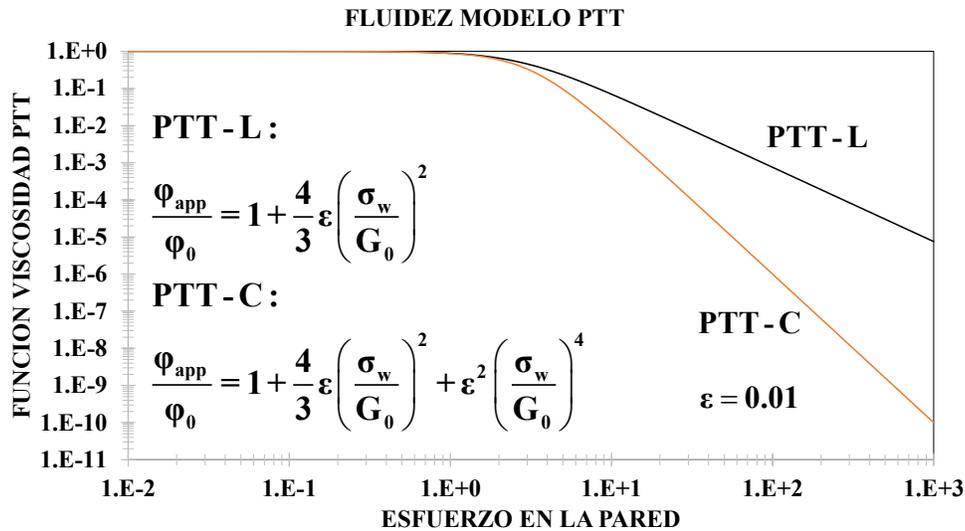


Figura 5.1

Función viscosidad para el modelo PTT en el caso lineal (PTT-L) y cuadrático (PTT-C).

La figura 5.1 simula la función viscosidad en función de la fuerza motriz asociada al esfuerzo en la pared.

Matemáticamente, la viscosidad muestra un comportamiento constante a bajos esfuerzos en la pared, mientras que para un esfuerzo crítico en la pared, la función viscosidad decrece monótonamente en toda la ventana de observación. Es claro que tanto el sistema lineal como el cuadrático presentan el mismo comportamiento matemático.

Físicamente, y en términos de la estructura, el sistema a bajos esfuerzos en la pared presenta una estructura constante, mientras que para un esfuerzo crítico, el número de entrecruzamiento físicos decrece por efecto de las fuerzas superficiales asociadas al corte. En este punto, la estructura o el sistema se orienta y desestructura por efecto del flujo.

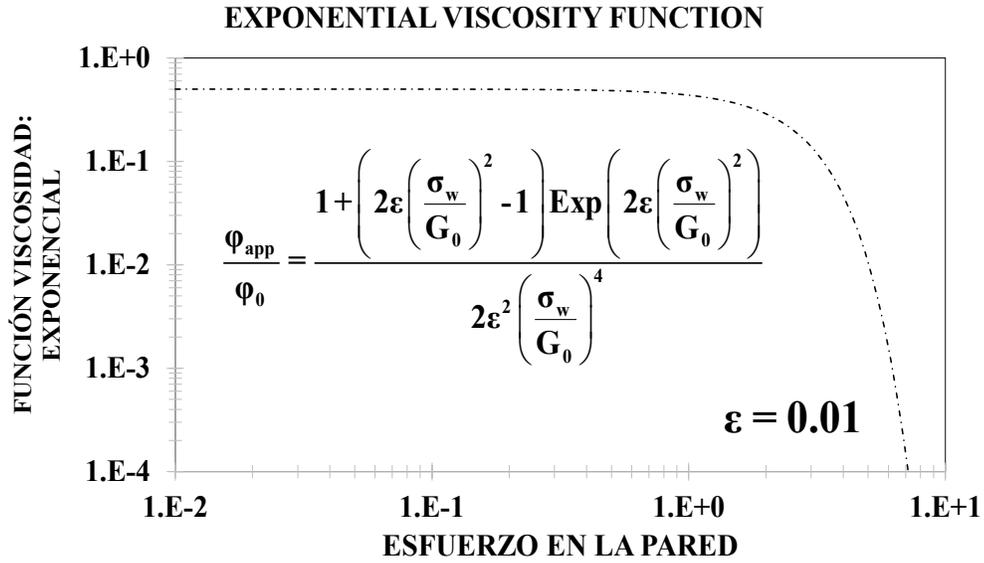


Figura 5.2

Función viscosidad para el modelo PTT en el caso exponencial.

En la figura 5.2 se ilustra el comportamiento de la función viscosidad contra el esfuerzo en la pared para el modelo exponencial de PTT.

Como en el caso lineal y cuadrático, este modelo exponencial presenta una zona constante a bajos esfuerzos en la pared, y aun esfuerzo crítico el fluido presenta una zona adelgazante tipo ley de potencia. Es claro que el efecto de incluir más términos en el modelo de PTT, induce que el fluido sea más adelgazante al corte.

Nótese, que el modelo exponencial induce a una inconsistencia física, debido que, si el esfuerzo crece, la viscosidad tiende a cero, es decir que su límite sería el fluido de Euler o inviscido. Es claro que, si tomamos el límite, cuando el esfuerzo en la pared está cerca del cero, se tiene lo siguiente.

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow 0} \varphi_{app} \cong \varphi_0 \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1\right) \left(1 + 2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} + O\left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2}\right)\right)}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} = \varphi_0 \frac{1 + 4\varepsilon^2 \frac{\sigma_w^4}{G_0^4} - 1}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} = \varphi_0 \quad [5.1]$$

A esfuerzos en la pared altos, la fluidez aparente tiende a cero:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \varphi_{app} = \lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1\right) \text{Exp}\left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2}\right)}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} \rightarrow \infty \quad [5.2]$$

5.2 FLUJO VOLUMÉTRICO

MODELOS PTT: LINEAR CUADRÁTICO Y EXPONENCIAL

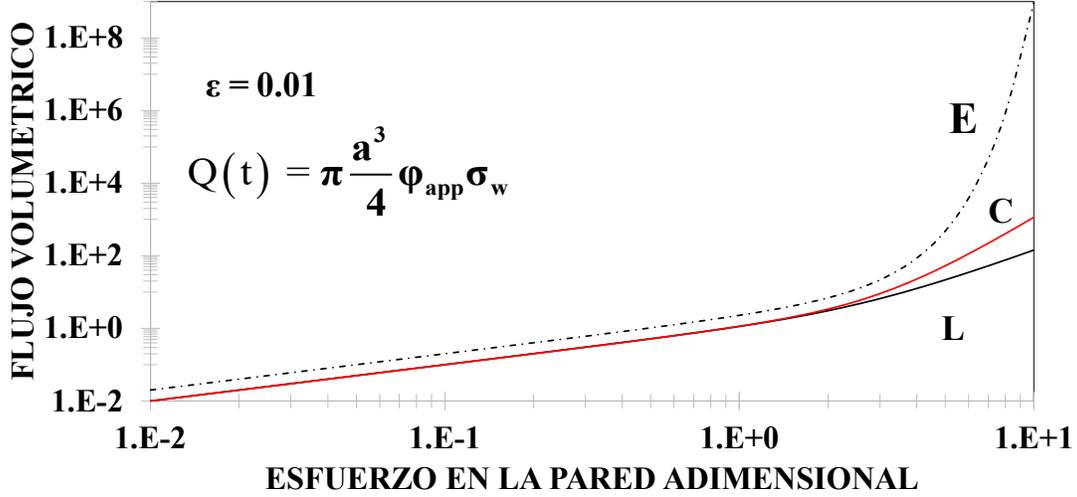


Figura 5.3

Flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en los casos:
(a) Lineal, (b) Cuadrático, y (c) Exponencial respectivamente.

La figura 5.3 se ilustra el comportamiento de la función viscosidad vs esfuerzo en la pared para el modelo exponencial de PTT. Como en el caso lineal y cuadrático, este modelo exponencial presenta una zona constante a bajos esfuerzos en la pared, y aun esfuerzo crítico el fluido presenta una zona adelgazante tipo ley de potencia. Es claro que el efecto de incluir más términos en el modelo de PTT, induce que el fluido sea más adelgazante al corte. Nótese, que el modelo exponencial induce a una inconsistencia física, debido que, si el esfuerzo crece, la viscosidad tiende a cero, es decir que su límite sería el fluido de Euler o inviscido. Es claro que; si tomamos el límite, cuando el esfuerzo en la pared está cerca del cero, se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow 0} \varphi_{app} \cong \varphi_0 \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \left(1 + 2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} + O \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right) \right)}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} = \varphi_0 \frac{1 + 4\varepsilon^2 \frac{\sigma_w^4}{G_0^4} - 1}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} = \varphi_0 \quad [5.3]$$

A esfuerzos en la pared altos, la fluidez aparente tiende a cero

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \varphi_{app} = \lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} \rightarrow \infty \quad [5.4]$$

5.3 POTENCIA PULSÁTIL

MODELOS PTT: LINEAR Y CUADRÁTICO

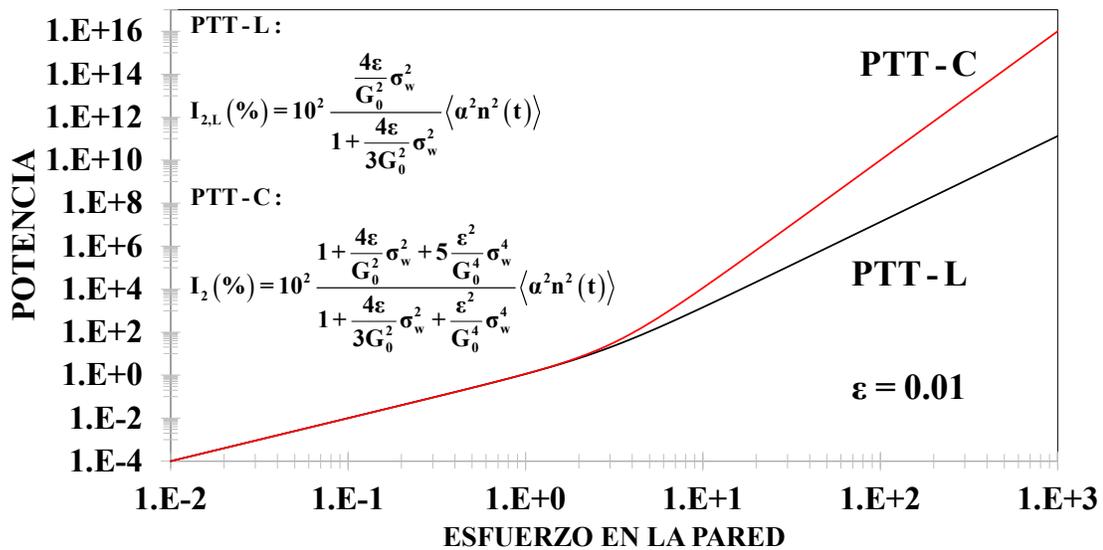


Figura 5.4

Ilustra el trabajo irreversible en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en los casos: (a) Lineal, (b) Cuadrático, y (c) Exponencial.

La figura 5.4 ilustra el trabajo irreversible o potencia del líquido viscoelástico de PTT. En todos los casos, el sistema a bajos esfuerzos en la pared, muestra un comportamiento lineal con pendiente positiva, mientras que, a un esfuerzo crítico, la potencia asociada al sistema aumenta lo que se induce en el cambio de pendiente. Físicamente, al aumentar la fuerza motriz a través del esfuerzo en la pared, la energía irreversible aumenta.

En la figura 5.5 se ilustra la disipación viscosa en función del esfuerzo en la pared, para el modelo exponencial de PTT.

Es claro que, el sistema presenta el mismo comportamiento matemático y físico si embargo, a un esfuerzo en la pared crítico la disipación aumenta en forma exponencial a valores muy grandes. Para valores muy grandes de esfuerzos en la pared, termino exponencial implica que la disipación viscosa sea una función no acotada. Matemáticamente, esto es correcto, pero físicamente no tendría ningún sentido físico.

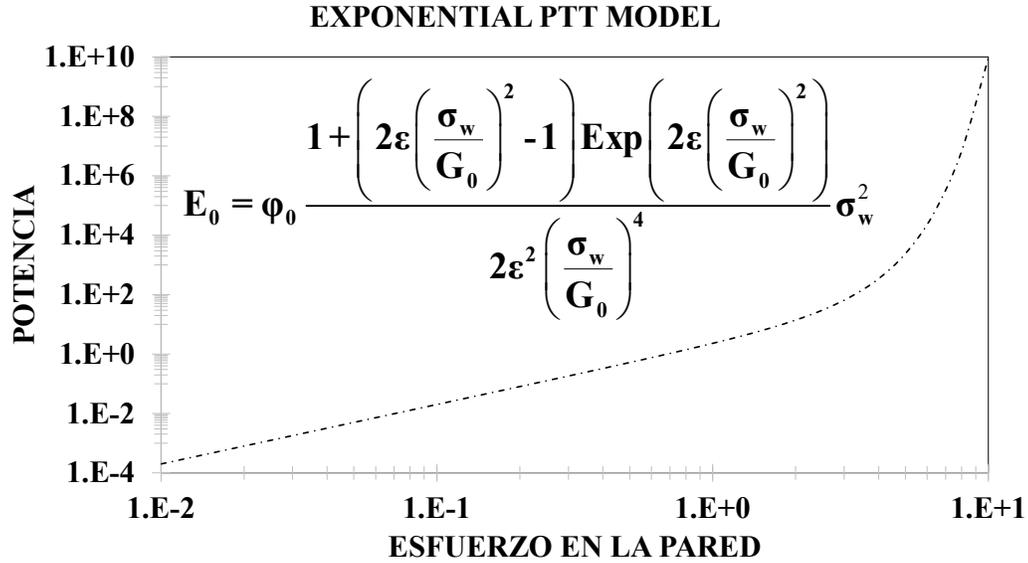


Figura 5.5

Ilustra el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en los casos: (a) Lineal, (b) Cuadrático, y (c) Exponencial.

5.4 AUMENTO EN EL FLUJO VOLUMÉTRICO

En esta sección se presentan los resultados del flujo pulsátil para los modelos linealizado, cuadrático de PTT.

En la figura 5.6 se ilustra el aumento de flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared. En el caso del núcleo linealizado de PTT. Se observa que a bajos esfuerzos en la pared, el sistema presenta una primera meseta cercana a cero, y que para un esfuerzo crítico, este experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un segundo valor crítico en el cual, el aumento de flujo volumétrico es independiente del esfuerzo en la pared. Físicamente, el aumento en el flujo volumétrico se debe principalmente por efecto de los mecanismos adelgazantes al corte por efecto del flujo.

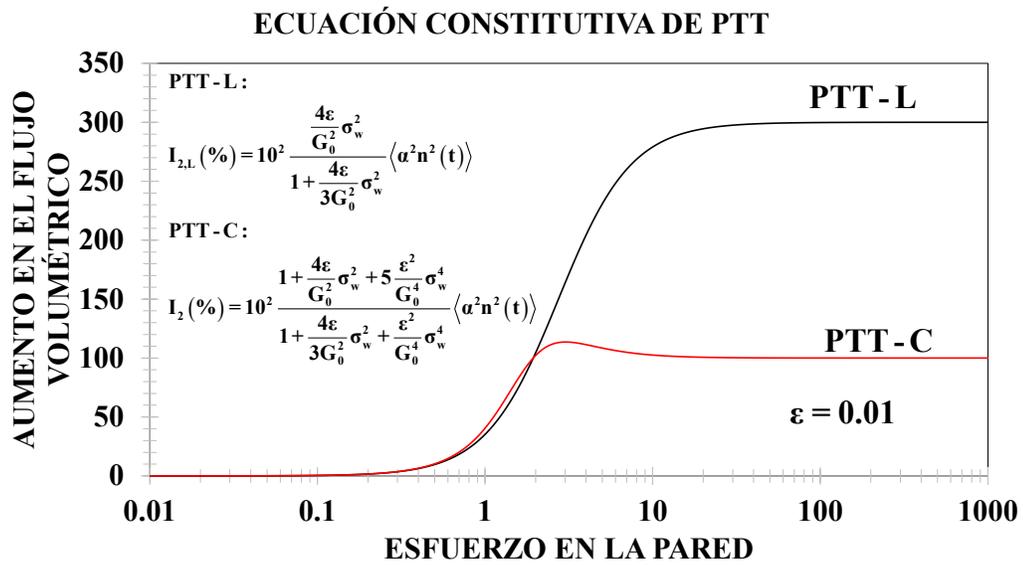


Figura 5.6a

Flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en los casos: (a) Lineal, (b) Cuadrático, y (c) Exponencial.

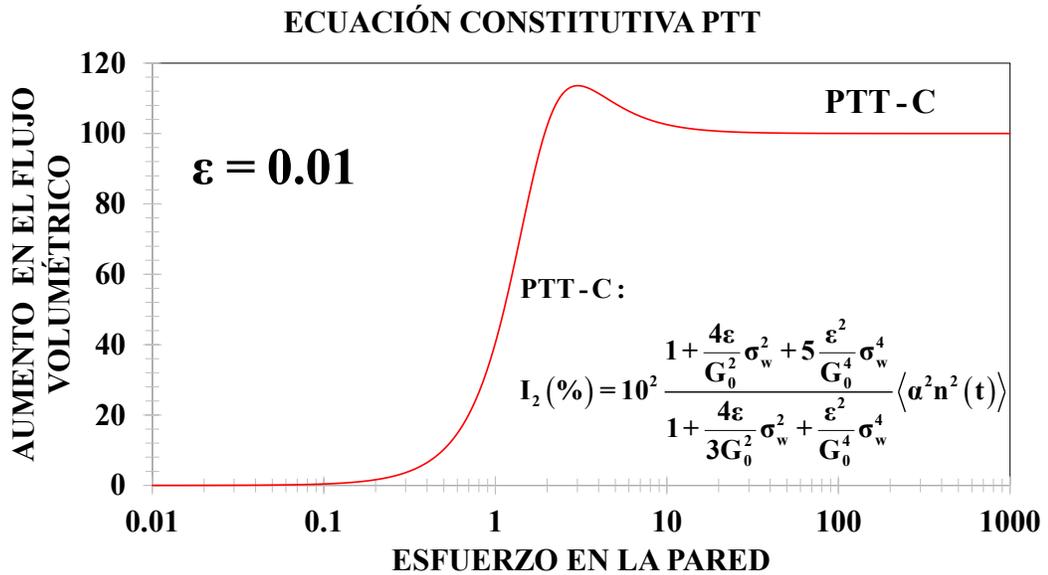


Figura 5.6b

Ilustra el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en los casos: (a) Lineal, (b) Cuadrático, y (c) Exponencial respectivamente.

En el caso cuadrático, se observa un decremento considerable en el flujo. A esfuerzos en la pared bajos, se aprecia una meseta a esfuerzos en la pared bajos, seguido de un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo.

A un segundo valor crítico, el sistema experimenta un decremento en el flujo seguido de un comportamiento constante, en donde el aumento es independiente del esfuerzo de la pared.

Nótese que el caso lineal no presenta un máximo como en el cuadrático, mientras que dos conclusiones físicas importantes se pueden deducir de las figuras 5.5a y 5.5.b:

- a) Los mecanismos adelgazantes son los causantes del aumento en el flujo volumétrico
- b) El efecto más pronunciado en el flujo volumétrico se observa en la zona de adelgazamiento al corte del sistema.
- c) En el modelo cuadrático, se observa un valor máximo el cual, ha sido encontrado en otros sistemas físicos.

5.5 FLUJO PULSÁTIL DE UN FLUIDO BIOLÓGICO VISCOELÁSTICO: SANGRE HUMANA CON HIPERCOLESTEROLEMIA

En esta sección, se analiza el aumento en la fluidez a través de datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia (alto contenido en colesterol).

Los datos y protocolos experimentales fueron realizados bajo estrictos criterios de higiene y seguridad los cuales fueron descritos a detalle y empleados en esquemas perturbativos y analíticos (*Herrera-Valencia et al. 2016, 2017*).

A partir de pruebas experimentales reométricas en estado estacionario y no estacionario, se obtienen los siguientes valores numéricos para el módulo de corte G_0 . Los datos obtenidos fueron de pacientes que presentaban trastornos alimenticios con el contenido de colesterol en la sangre. Los ajustes matemáticos fueron hechos con el modelo de Maxwell unimodal y el modelo BMP (*Herrera-Valencia et al. 2016, 2017*).

Los resultados numéricos son mostrados en la tabla 5.1.

En todo los casos el valor de la constante ϵ del modelo de PTT fue de 0.01 (valor entre 0 y 1).

Contenido de colesterol Total / Propiedades Materiales	Modulo Elástico	Viscosidad a bajo corte
$\epsilon = 0.01$	G_0	η_0
Colesterol Bajo 300 mg/dL	1.487	0.0113
Colesterol Medio 174 mg/dL	1.472	0.023
Colesterol Alto 114 mg/dL	1.834	0.046

Tabla 5.1

Datos de sangre con colesterol bajo, medio y alto. Los datos fueron obtenidos por Moreno et al. (2015) mediante mediciones reológicas en estado estacionario y no estacionario respectivamente.

En la figura 5.6 se ilustra el comportamiento del flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para sangre humana con diferentes valores de concentración de colesterol.

En todos los casos, a esfuerzos en la pared bajos, el aumento en el flujo volumétrico muestra un comportamiento constante y cercano al valor cero. Sin embargo, para un esfuerzo crítico, se observa un incremento monótono creciente hasta un segundo valor crítico de esfuerzo en la pared, en donde el aumento en el flujo es independiente del esfuerzo en la pared.

Nótese, que la meseta a esfuerzos en la pared altos, esta determinado por el contenido de colesterol por lo que, el máximo y el menor aumento se obtienen con la concentración de colesterol mayor y menor respectivamente.

En la figura 5.7 se observa el aumento en el flujo en función del esfuerzo en la pared para el modelo cuadrático de PTT. El comportamiento es similar al de la figura 5.6, a excepción de que se observa un máximo a un cierto valor crítico, el cual está determinado por las propiedades viscosas y elásticas del sistema. Este máximo en las curvas resonantes ha sido investigado con otras ecuaciones constitutivas viscoelásticas no lineales y se ha asociado a los mecanismos del sistema a través de las propiedades materiales de la ecuación reológica que se empleen (*Herrera et al., 2016, 2017*).

En la figura 5.8 se presenta el aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared, para colesterol medio y diferentes valores de amplitud asociada a la fuerza motriz. El comportamiento es similar a los descritos en las figuras anteriores, salvo que al aumentar la amplitud la curva, ésta se amplifica y el máximo aumenta. Es importante resaltar que el efecto de la amplitud es observable en promedios del cuadrado en la función estocástica, y la forma matemática del ruido modifica drásticamente el aumento en el flujo volumétrico y la potencia pulsátil (*Herrera-Valencia et al., 2016, 2017*).

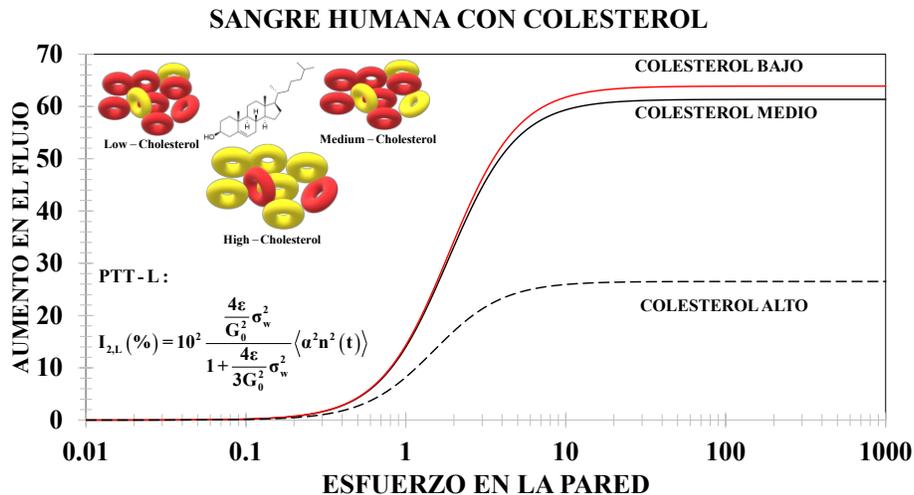


Figura 5.6

Ilustra el aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en el caso lineal para datos de Sangre con colesterol bajo, medio y alto.

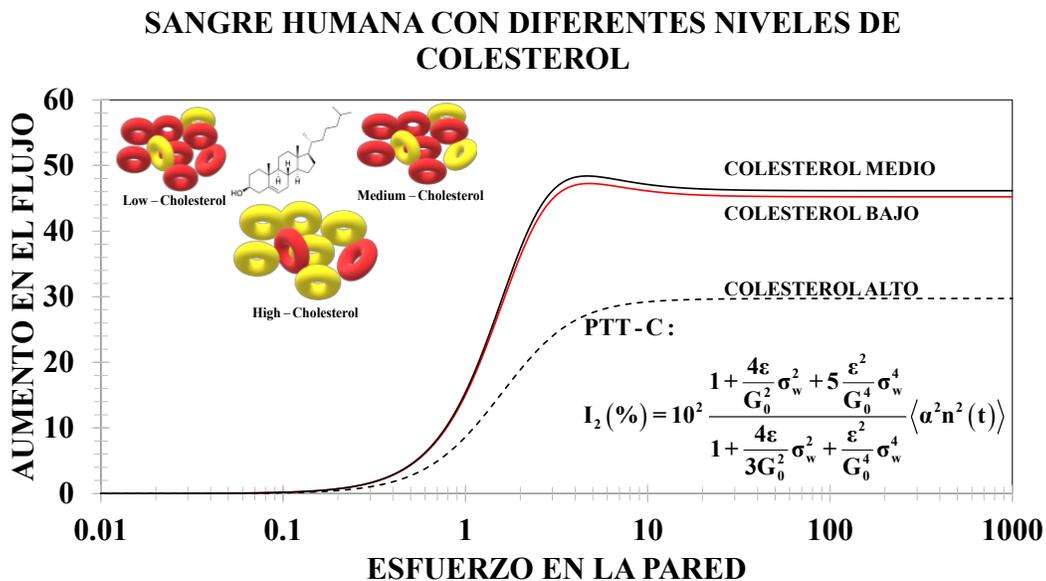


Figura 5.7

Ilustra el aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de PTT en el caso lineal para datos de Sangre con colesterol bajo, medio y alto.

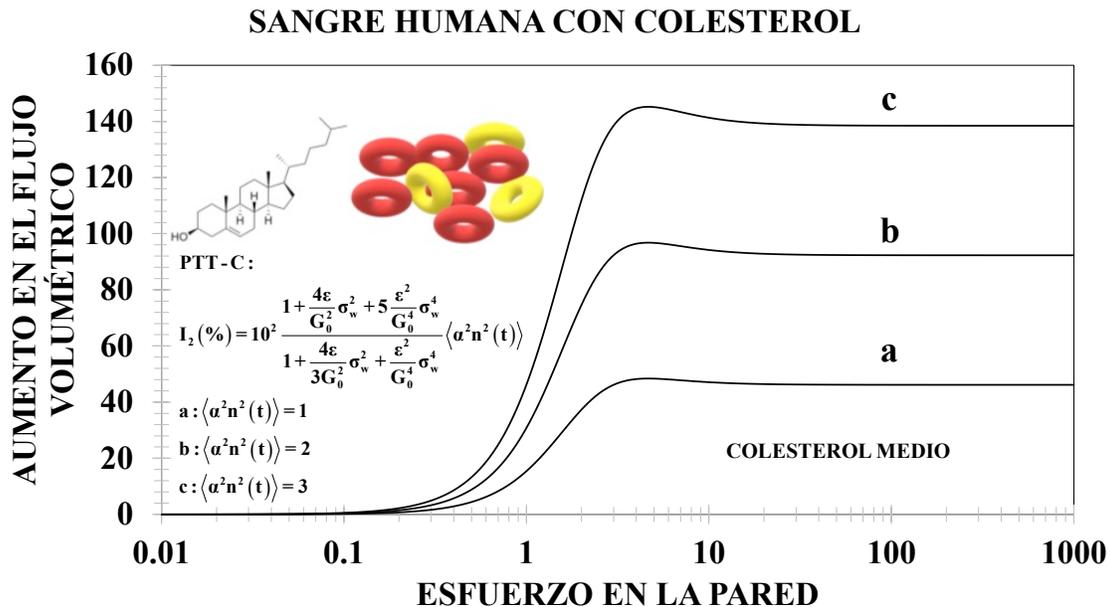


Figura 5.8

Ilustra el aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de Phan-Thien Tanner en el caso lineal para datos de Sangre con colesterol bajo, medio y alto.

5.6 CONCLUSIONES PARCIALES DEL FLUJO VOLUMÉTRICO Y DE LA POTENCIA PULSÁTIL

En la sección anterior se presentaron las simulaciones del aumento de flujo y potencia pulsátil en función del esfuerzo en la pared de un líquido viscoelástico, caracterizado con el modelo PTT lineal (PTT-L) y cuadrático (PTT-C).

Como conclusiones a estos desarrollos mediante el software Mathematica, se puede decir que:

- a) Se obtuvo una expresión analítica para la viscosidad aparente para la ecuación constitutiva del modelo PTT en los casos en donde la exponencial ha sido desarrollada en su contribución lineal y cuadrática.
- b) El modelo cuadrático presenta un comportamiento más adelgazante que el lineal, por lo que esto presenta una ventaja para el ajuste de datos experimentales.
- c) El aumento en el flujo volumétrico y potencial pulsátil muestran tres zonas características: (i) una primera zona constante, (ii) una zona intermedia en donde el fluido experimenta constantes cambios en la viscosidad debido al adelgazamiento.
- d) El aumento en el flujo volumétrico y potencia pulsátil muestran una zona terminal en donde sus valores son independientes del esfuerzo en la pared respectivamente.

- e) En el caso cuadrático se observa un máximo seguido de un comportamiento decreciente y finalmente una segunda meseta.
- f) El máximo obtenido en el modelo cuadrático puede tener una implicación biológica importante, puesto que representará una condición de máximo flujo. Esto se explica por la resistencia del fluido, provocando que sea baja debido a la organización de los eritrocitos en el sistema de flujo. (Herrera-Valencia et al. 2010, 2016, 2017).

Finalmente, en la figura 5.9 se presenta un resumen cualitativo de los resultados importantes en esta investigación asociada a esta tesis de licenciatura.

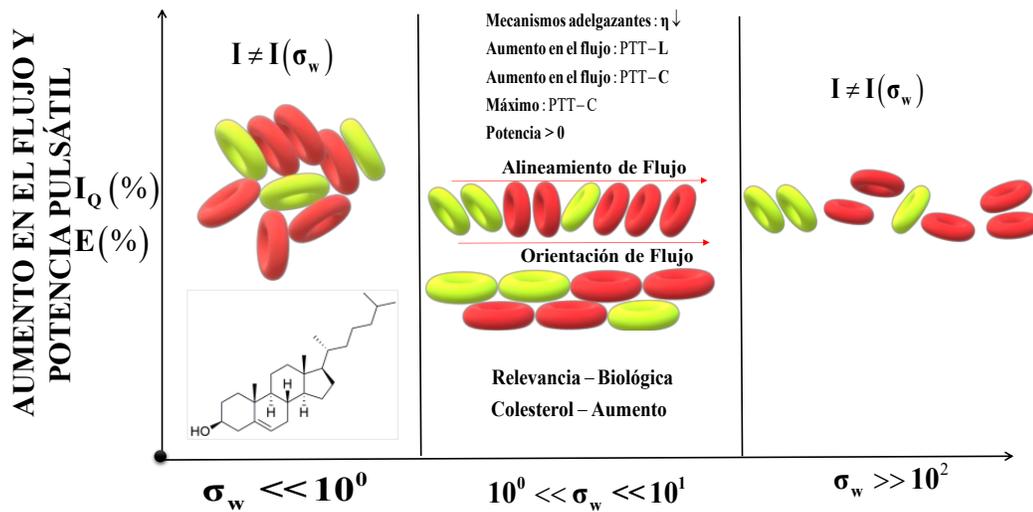


Figura 5.9

Aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para el modelo de Phan-Thien Tanner en el caso lineal para datos de Sangre con colesterol bajo, medio y alto.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

6.1 RESUMEN DE ESTA INVESTIGACIÓN

En este trabajo se plasma el uso de un modelo matemático que permite analizar un fluido de interés, y que, debido a su estructura matemática, el operarlo mediante integraciones o derivaciones resulte sencillo a tal forma de trabajar con un polinomio.

De la misma forma, la incorporación de variaciones mediante pulsaciones al mecanismo por el cual el fluido se mueve y sus implicaciones al flujo volumétrico, es de gran utilidad este tipo de ecuaciones reológicas cuyas propiedades materiales caracterizan el tipo del fluido, además de poder modelar, matemáticamente hablando, en diferentes grados y/o órdenes, la ecuación analizada de PTT.

Esto permite que los sistemas donde se aplica el flujo volumétrico sean modelados mediante expresiones que muestren más bondades, tal como lo fue el desarrollo del modelo PTT cuadrático tras mostrar un mayor flujo.

En esta investigación, se estudia el flujo volumétrico inducido por un gradiente de presión pulsátil con respecto a aquel a gradiente de presión constante. Para su estudio, se supone una geometría cilíndrica de longitudes características $r = a$ y $z = L$, con la condición geométrica $a/L \ll 1$. El flujo y la reología del sistema, son caracterizados con el modelo viscoelástico de Phan-Thien Tanner en los casos, en donde la exponencial ha sido desarrollada en sus versiones lineal y cuadrática respectivamente. Esta ecuación de estado contiene dos propiedades materiales las cuales, puede ser obtenidas mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario respectivamente, y un parámetro de ajuste que esta describe la transición de flujo. Se establece que el sistema es isotérmico, régimen laminar, efectos inerciales y gravitacionales despreciables, fluido unidireccional y flujo cortante no-homogéneo. El líquido es incompresible y viscoelástico. A partir de la ecuación de continuidad, balance de momento y las condiciones de frontera: (i) Adherencia de líquido al sólido en la interfase (pared) y (ii) simetría de flujo, se obtienen expresiones analíticas para el flujo volumétrico, fluidez y potencia. A partir de estas consideraciones, se obtienen expresiones analíticas para el aumento de flujo volumétrico y potencia pulsátil para una función estocástica simple (trigonométrica con amplitud M). Finalmente, las predicciones y bondades del modelo son utilizados para describir sangre con diferentes niveles de colesterol.

6.2 CONCLUSIONES SOBRE EL MODELO PTT

- a) A orden cero, la viscosidad del modelo PTT describe una primera meseta en donde la viscosidad es constante e independiente del esfuerzo en la pared.
- b) El modelo PTT no predice una segunda zona newtoniana como en otros modelos. A un esfuerzo crítico, el flujo volumétrico y la potencia pulsátil son independientes de la fuerza motriz asociada al esfuerzo en la pared.
- c) En flujo cortante simple, el modelo PTT lineal y cuadrático muestra un comportamiento adelgazante al corte a través de la función viscosidad
- d) La elasticidad del sistema de flujo puede ser evaluado mediante la primera diferencia de esfuerzos normales.
- e) El modelo cuadrático a comparación del caso lineal mostrará un mayor aumento en el flujo volumétrico. Esto se comprueba geoméricamente con las pendientes.
- f) La reología y el flujo en el sistema de flujo pulsátil puede ser caracterizada mediante dos propiedades materiales y un parámetro matemático de ajuste.
- g) El efecto que tiene el gradiente de presión pulsátil sobre el sistema es disminuir la viscosidad y esto se observa con el cambio en la pendiente.
- h) En el régimen de bajas deformaciones no existen aumentos en el flujo, debido a que no existe un cambio en la viscosidad
- i) El mecanismo que permite el aumento en el flujo volumétrico y potencia pulsátil, es el adelgazante, Si un líquido no presenta adelgazamiento, su aumento en el flujo volumétrico es cero.
- j) El efecto de la amplitud a través de $n(t) = M\cos(\omega t)$, decrece o incrementa el valor de la meseta en el flujo volumétrico o potencia pulsátil y solo es observable en los promedios de potencias pares de la función estocástica, i.e., $\langle n^2(t) \rangle$, $\langle n^4(t) \rangle$, etc.
- k) El aumento en el flujo volumétrico en el caso cuadrático decrece en comparación con el modelo linealizado PTT, esto es una consecuencia de que las contribuciones de segundo orden y superiores son pequeñas.
- l) El modelo cuadrático muestra un máximo en el aumento en el flujo en función del esfuerzo en la pared. Este máximo, ha sido detectado en flujo pulsátil sanguíneo con diferentes aproximaciones (*Herrera-Valencia et al. 2010, 2016, 2017*).
- m) Las contribuciones de orden superior al cuadrático en el modelo Phan-Thien-Tanner, deben provocar una reducción en el aumento en el flujo volumétrico por lo las contribuciones lineales y cuadráticas del modelo PTT poseen la física necesaria (adelgazante al corte, primera diferencia a esfuerzos normales, elástico, etc.) para describir estos sistemas de flujo.

6.3 CONCLUSIONES SOBRE EL FLUIDO BIOLÓGICO

I. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que el flujo pulsátil con datos de sangre humana con contenido de colesterol bajo, medio y alto, demuestra que el máximo aumento se obtiene con la mayor cantidad de colesterol.

II. El menor aumento, se obtiene con el mínimo contenido de colesterol.

III. Esto implicaría que la relación entre el colesterol y el aumento de flujo pulsátil no es directa, es decir, la mayor cantidad de colesterol no implica el menor flujo y el menor colesterol no implica el mayor flujo sanguíneo.

IV. El flujo pulsátil del corazón se puede interpretar como un mecanismo de defensa de éste ya que al tener mayor concentración de colesterol en la sangre el corazón adapta las pulsaciones de tal manera que disminuye su viscosidad, desde el punto de vista ingenieril el corazón regula su funcionamiento de acuerdo a la viscosidad de la sangre.

6.4 TRABAJO A FUTURO

Este trabajo puede ser extendido de manera natural tomando en cuenta las variaciones del fluido analizado, pues las diferentes tipos de enfermedades (cirrosis hepática, leucemia, diabetes) provoca que las propiedades materiales del líquido cambien directamente con estas anomalías. Por último, el modelado de estos sistemas implica el uso de herramientas matemáticas y físicas como son, métodos perturbativos, métodos asintóticos y métodos numéricos basados en elemento volumen finito e híbridos utilizando software especializado en fluidos no Newtonianos (COMSOL, ANSYS FLUENT).

El modelo de PTT posee la física necesaria capturar la dinámica de flujo lineal y no lineal del flujo pulsátil de un líquido complejo tomando como punto de partida los fenómenos de transporte y reología como herramientas de caracterización de materia blanda.

Los resultados obtenidos mediante el modelado teórico y simulación computacional representan un esfuerzo permanente de propuestas que impacten en áreas de interés para la ingeniería química y interrelación con otras ciencias como la biología, medicina, física y biología experimental.

APÉNDICE A

FUNCIONES MATERIALES PTT

A continuación se desarrollan explícitamente, las funciones materiales del modelo PTT que fueron utilizadas en el capítulo 2. Suponiendo estado estacionario, y que el fluido se deforma continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil, el vector velocidad solo depende de una coordenada, la cual corresponde al eje radial. El fluido incompresible, considerando que la densidad de este fluido no cambia ni con el tiempo ni con la posición. Además, el proceso es isotérmico.

A. A1 VECTOR VELOCIDAD

El vector de velocidad tiene una componente diferente de cero, en el eje coordenado z, eje donde se lleva a cabo el flujo del fluido. El resto de las componentes son cero.

$$\mathbf{V}=[V_r, V_\theta, V_z]=[0,0,V_z(r)] \quad [A.1]$$

En la Ec. [A.1] la componente z solo depende del eje coordenado r. A partir de este vector se construyen los tensores de segundo orden: (i) gradiente de velocidad, (ii) transpuesta del tensor gradiente de velocidad, y (iii) tensor rapidez de deformación.

A.A2 TENSORES CINEMÁTICOS

A.A2.1 Gradiente de velocidad

El tensor gradiente espacial de la velocidad en coordenadas cilíndricas está dado por la siguiente expresión matemática:

$$\nabla \otimes \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [A.2]$$

Como se trata de un flujo cortante simple, el gradiente de velocidad solo tiene una componente fuera de la diagonal principal. Esto puede demostrarse simplemente analizando hacia dónde se distribuye el flujo del fluido, y claro, en qué eje éste está fluyendo (representado esto matemáticamente por la Ec. [A.1])

A partir del tensor gradiente espacial de velocidades (Ec. [A.2]) se calcula la transpuesta de este arreglo en matriz, dado como:

$$(\nabla \otimes \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.3}]$$

A partir de las Ecs. [A.2] y [A.3] se construye el tensor rapidez de deformación.

A.A2.2 Rapidez de deformación

El tensor rapidez de deformación se calcula por medio de la Ec. [3.2], con uso de las Ecs. [A.2] y [A.3]. Tras estas sustituciones se obtiene la representación asociada a los cambios de forma de un elemento de control:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{V} + \nabla \otimes \mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.4}]$$

A.A2.3 Tensor de esfuerzos

Para un fluido viscoelástico, la forma más general del tensor de esfuerzos, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad [\text{A.5}]$$

Los elementos fuera de la diagonal principal (los triángulos superior e inferior) de la Ec. [A.5] son los esfuerzos cortantes que están asociados al flujo del material de manera continua e irreversiblemente. Los elementos en la diagonal principal, están relacionados a las componentes elásticas.

Para facilitar los cálculos, se define la siguiente variable para representar al escalar rapidez de deformación, la cual se introduce tanto en la Ec. [A.4] y en la Ec. [A.5]

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad [A.6]$$

A.A3 ECUACIÓN REOLÓGICA DE PTT

La ecuación tensorial en términos de matrices se puede expresar de la siguiente forma

$$\text{Exp}(\varepsilon \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \eta_0 (2\mathbf{D}) = \eta_0 (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad [A.7]$$

La Ec. [A.7] se puede simplificar asumiendo las consideraciones de la sección previa a A.A1. Bajo esas suposiciones se obtiene

$$\text{Exp}(\varepsilon \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{\sigma} - \lambda_0 (\nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}) = \eta_0 (2\mathbf{D}) = \eta_0 (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad [A.8]$$

Sustituyendo las matrices en la ecuación tensorial, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\varepsilon \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \lambda_0 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ \eta_0 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad [A.9]$$

Simplificando los productos tensoriales de la Ec. [A.9] reduce la expresión a

$$\text{Exp} \left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0} \right) \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \lambda_0 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} \sigma_{rr} & 0 & \gamma_{zr} \sigma_{zr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rr} \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rz} \gamma_{zr} \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad [A.10]$$

Al realizar la suma de las matrices de 3x3 de la Ec. [A.10]

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rr} \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} \sigma_{rr} & 0 & \gamma_{zr} \sigma_{zr} + \sigma_{rz} \gamma_{zr} \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.11}]$$

Así que, al multiplicar, del miembro izquierdo de la Ec. [A.11] la forma del modelo de PTT por la matriz al esfuerzo y restar con el producto del tiempo de relajación con la matriz correspondiente a los esfuerzos se obtiene

$$\begin{pmatrix} \text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{rr} & 0 & \text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zr} - \lambda_0 (\sigma_{rr} \gamma_{zr}) \\ 0 & \text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{rz} - \lambda_0 \gamma_{zr} \sigma_{rr} & 0 & \text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zz} - \lambda_0 (\gamma_{zr} \sigma_{zr} + \sigma_{rz} \gamma_{zr}) \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.12}]$$

Del miembro derecho de la Ec. [A.12] también se multiplica el elemento de la viscosidad por cada componente de la matriz, donde, al realizar este producto, se obtienen, en ambos miembros de la ecuación, dos matrices del mismo tamaño de 3x3.

Así, igualando las entradas de las ecuaciones, obtenemos las siguientes expresiones algebraicas más sencillas.

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zr} - \lambda_0 (\sigma_{rr} \gamma_{zr}) = \eta_0 \gamma_{zr} \quad [\text{A.13}]$$

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{rz} - \lambda_0 (\gamma_{zr} \sigma_{rr}) = \eta_0 \gamma_{zr} \quad [\text{A.14}]$$

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zz} - \lambda_0 (\gamma_{zr} \sigma_{zr} + \sigma_{rz} \gamma_{zr}) = 0 \quad [\text{A.15}]$$

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{rr} = 0 \quad [\text{A.16}]$$

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad [\text{A.17}]$$

A.A3.1 Funciones materiales del modelo PTT

Es claro que las Ecs. [A.13] y [A.14] son iguales, pues tienen las mismas estructuras algebraicas, debido a la simetría del tensor de esfuerzos $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$, por lo que solamente debe de tomarse una de estas ecuaciones:

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zx} = \eta_0 \gamma_{zx} \quad [\text{A.18}]$$

A partir de la Ec. [A.15] obtenemos la componente zz del tensor de esfuerzos:

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \sigma_{zz} = 2\lambda_0 \gamma_{zx} \sigma_{zx} \quad [\text{A.19}]$$

Para el modelo de PTT exponencial, se desarrolla por medio de la serie de McLaurin:

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \cong 1 + \varepsilon \frac{\sigma_{zz}}{G_0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\sigma_{zz}}{G_0}\right)^2 + O(\varepsilon^2) \quad [\text{A.20}]$$

Combinando la Ec. [A.20] con las Ecs. [A.18] y [A.19]

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{G_0} \sigma_{zz}\right) \sigma_{zx} = \eta_0 \gamma_{zx} \quad [\text{A.21}]$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{G_0} \sigma_{zz}\right) \sigma_{zz} = 2\lambda_0 \gamma_{zx} \sigma_{zx} \quad [\text{A.22}]$$

Dividiendo la Ec. [A.18] entre la Ec. [A.19] se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zz} = \frac{2}{G_0} (\sigma_{zx})^2 \quad [\text{A.23}]$$

Sustituyendo en la exponencial del modelo de PTT, se tiene lo siguiente:

$$\text{Exp}\left(\varepsilon \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{G_0}\right) \cong 1 + 2\varepsilon \frac{\sigma_{zx}^2}{G_0^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\sigma_{zx}^4}{G_0^2} + O(\varepsilon^2) \quad [\text{A.24}]$$

En el apéndice B se obtendrá el flujo volumétrico del modelo PTT para un fluido que es cortado por un gradiente de presión pulsátil, en los casos del modelo: (i) Lineal y (ii) Cuadrático.

APÉNDICE B

MODELO LINEAL DE PTT

B.B1 MODELO LINEAL DE PTT

En esta sección, se deduce la expresión para el modelo linealizado del modelo exponencial de PTT. Al expandir la exponencial hasta el término lineal por medio de las series de McLaurin, se tiene la siguiente expresión para el escalar rapidez de deformación:

$$\frac{dV_z}{dr} = \varphi(\sigma_{zr}) \sigma_{zr} \quad [B.1]$$

La función fluidez del modelo PTT, toma la forma:

$$\varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_0 \left(1 + 2 \frac{\varepsilon}{G_0^2} \sigma_{zr}^2 \right) \quad [B.2]$$

En la Ec. [B.2], φ_0 es la fluidez a bajo corte, G_0 es el módulo elástico de corte, y ε es un parámetro matemático asociado al tipo de flujo que se analiza. El flujo volumétrico se puede calcular con la siguiente expresión que involucra el escalar rapidez de deformación:

$$Q = -\pi \int_0^a \frac{\partial V_z}{\partial r} r^2 dr \quad [B.3]$$

Considerando mecanismos inerciales y gravitacionales despreciables de la ecuación del balance de momento, se tiene la expresión para el esfuerzo cortante debido al gradiente de presión:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{2} \nabla_z p r = \left(\frac{1}{2} \nabla_z p a \right) \frac{r}{a} = (\sigma_{zr}|_{r=a}) \frac{r}{a} \quad [B.4]$$

La ecuación anterior, puede expresarse en términos del esfuerzo en la pared:

$$\sigma_{zr} = -\sigma_w \frac{r}{a} \quad [B.5]$$

Al sustituir la Ec. [B.5] en la Ec. [B.4], y enseguida, sacando algunos términos constantes de la integración, la expresión del flujo volumétrico queda como

$$Q = \pi \frac{a^3}{\eta_0 \sigma_w^3} \int_0^{-\sigma_w} \left(1 + 2 \frac{\varepsilon}{G_0^2} \sigma_{zr}^2 \right) \sigma_{zr}^3 d\sigma_{zr} \quad [B.6]$$

Al integrar la Ec. [B.6], se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{\text{app}} \sigma_w \quad [\text{B.7}]$$

En donde la fluidez del modelo PTT linealizado se define como:

$$\varphi_{\text{app}} = \varphi_0 \left(1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right) \quad [\text{B.8}]$$

B.B2 POTENCIA A GRADIENTE DE PRESIÓN CONSTANTE

La potencia asociada al flujo volumétrico se obtiene al multiplicar, el flujo volumétrico y el esfuerzo en la pared. Esto es:

$$P_0 = Q_0 \sigma_w = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{\text{app}} \sigma_w^2 \quad [\text{B.9}]$$

B.B3 FLUJO PULSÁTIL

El flujo pulsátil se ha estudiado en el campo de los fenómenos de transporte y reología, modificando el gradiente de presión, es decir, introduciendo una perturbación de tipo estocástica. Esta ecuación tiene una forma semejante a la mostrada en la serie de Ecs. [B.4]-[B.5], donde la diferencia está precisamente en la introducción de la variable de perturbación.

$$\sigma_{zr}(t) = \frac{1}{2} \nabla_z p (1 + \alpha n(t)) r = \left(\frac{1}{2} \nabla_z p(t) a \right) \frac{r}{a} = \left(\sigma_{zr}(t) \Big|_{r=a} \right) \frac{r}{a} \quad [\text{B.10}]$$

La ecuación anterior puede expresarse en términos del esfuerzo en la pared, en función del tiempo, como contribución a un efecto perturbatorio.

$$\sigma_{zr}(t) = -\sigma_w(t) \frac{r}{a} \quad [\text{B.11}]$$

Al sustituir la Ec. [B.10] en la Ec. [B.3], bajo la condición del esfuerzo en la pared (Ec. [B.11]), y repitiendo los cálculos matemáticos para el flujo volumétrico tal se hizo para obtener la expresión [B.7], se obtiene lo siguiente:

$$Q(t) = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{app}(t; \alpha) \sigma_w(t) \quad [B.12]$$

La cual, puede notarse la gran similitud con la Ec. [B.7].

B.B3.1 Aumento de flujo pulsátil del modelo linealizado

El aumento en el flujo linealizado se obtiene mediante la siguiente expresión analítica

$$I_L(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad [B.13]$$

Al sustituir los flujos volumétricos pulsátil a gradiente de presión pulsátil [B.12], y del flujo a gradiente de presión constante [B.7],

$$I_L(\%) = 100 \frac{\left\langle \varphi_0 \left(1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 (1 + \alpha n(t))^2 \right) \sigma_w (1 + \alpha n(t)) \right\rangle - \varphi_0 \left(1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right) \sigma_w}{\varphi_0 \left(1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right) \sigma_w} \quad [B.14]$$

Simplificando,

$$I_L(\%) = 100 \frac{\left\langle \left(1 + \alpha n(t) + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 (1 + \alpha n(t))^3 \right) \right\rangle - \left(1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right)}{\left(1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right)} \quad [B.15]$$

Al desarrollar los binomios al cuadrado y al cubo generados en esta expresión:

$$I_L(\%) = 100 \frac{\left\langle \left(1 + \alpha n(t) + \frac{4\epsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 (1 + 3\alpha n(t) + 3\alpha^2 n^2(t) + \alpha^3 n^3(t)) \right) \right\rangle - \left(1 + \frac{4\epsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right)}{\left(1 + \frac{4\epsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right)} \quad [B.16]$$

Operando términos semejantes

$$I_L (\%) = 100 \frac{\alpha \langle n(t) \rangle + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \left(3 \langle \alpha n(t) \rangle + 3 \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle + \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle \right)}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \quad [B.17]$$

En forma matricial, se tienen las contribuciones a ordenes cero, primer, segundo y tercero para el aumento del flujo volumétrico del modelo PTT lineal:

$$\begin{pmatrix} I_{L0} (\%) \\ I_{L1} (\%) \\ I_{L2} (\%) \\ I_{L3} (\%) \end{pmatrix} = \frac{10^2}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \alpha n(t) \rangle \\ \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle \\ \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle \end{pmatrix} \quad [B.18]$$

La matriz de la Ec. [B.18] nos da la contribución a diferentes ordenes con respecto al parámetro perturbativo α .

B.B4 POTENCIA PULSÁTIL

La potencia, donde física y matemáticamente se define como el trabajo por unidad de tiempo, puede ser calculada mediante el producto del flujo volumétrico y el esfuerzo transitorio en la pared.

Esto es

$$P(t) = \sigma_w(t) Q(t) = \frac{\pi a^3}{4} \varphi_{app}(t; \alpha) \sigma_w^2(t) \quad [B.19]$$

El cambio en la potencia debido al gradiente de presión pulsátil puede ser cuantificado de la siguiente manera (semejante a la expresión para el aumento del flujo volumétrico):

$$E_L (\%) = \frac{\langle P(t) \rangle - \langle P_0 \rangle}{P_0} = \frac{\langle \sigma_w(t) Q(t) \rangle - \langle \sigma_w Q_0 \rangle}{\sigma_w Q_0} \quad [B.20]$$

Sustituyendo el esfuerzo en la pared y el flujo volumétrico, se tiene la siguiente expresión analítica

$$E_L (\%) = 10^2 \frac{\left\langle (1 + \alpha n(t))^2 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 (1 + \alpha n(t))^4 \right\rangle - \left(1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right)}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \quad [\text{B.21}]$$

Desarrollando la expresión, se tiene los siguientes términos

$$E_L (\%) = 10^2 \frac{\left(2 + \frac{16\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right) \langle \alpha n(t) \rangle + \left(1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 \right) \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle + \left(\frac{16\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \right) \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \langle \alpha^4 n^4(t) \rangle}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \quad [\text{B.22}]$$

En forma matricial, se tienen las contribuciones de la potencia a primer, segundo, tercero y cuarto orden respectivamente:

$$\begin{pmatrix} E_{L1} (\%) \\ E_{L2} (\%) \\ E_{L3} (\%) \\ E_{L4} (\%) \end{pmatrix} = \frac{10^2}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \begin{pmatrix} 2 + \frac{16\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha n(t) \rangle \\ \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle \\ \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle \\ \langle \alpha^4 n^4(t) \rangle \end{pmatrix} \quad [\text{B.23}]$$

Es importante notar que la potencia pulsátil contiene un término de cuarto orden, en contraste con el aumento de flujo volumétrico que solo tiene elementos hasta de tercer orden.

APÉNDICE C

MODELO CUADRÁTICO PTT

C.C1 MODELO CUADRÁTICO DE PTT

El modelo cuadrático de PTT se obtiene al desarrollar la exponencial hasta el termino cuadrático por medio del uso de las series de McLaurin.

$$\text{Exp}\left(2\varepsilon \frac{\sigma_{rz}^2}{G_0^2}\right) \cong 1 + \frac{2\varepsilon}{G_0^2} \sigma_{rz}^2 + \frac{1}{2!} \frac{4\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_{rz}^4 + O(\varepsilon^2)$$

[C.1]

El flujo volumétrico para este desarrollo del modelo toma la forma:

$$Q_0 = \pi \frac{a^3}{\eta_0 \sigma_w^3} \int_0^{-\sigma_w} \left(1 + 2\varepsilon \left(\frac{\sigma_{rz}^2}{G_0^2} \right)^1 + 2\varepsilon^2 \left(\frac{\sigma_{rz}^2}{G_0^2} \right)^2 \right) \sigma_{rz}^3 d\sigma_{rz}$$

[C.2]

El resultado de la integral en la Ec. [C.2] da como resultado la expresión para el flujo volumétrico a un gradiente de presión constante

$$Q_0 = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{\text{app}} \sigma_w$$

[C.3]

Entonces la fluidez aparente en el caso cuadrático se define como:

$$\varphi_{\text{app}} = \varphi_0 \left(1 + \frac{4\varepsilon^1}{3G_0^2} \sigma_w^{2(1)} + \frac{\varepsilon^2}{G_0^{2(2)}} \sigma_w^{2(2)} \right)$$

[C.4]

C.C2 POTENCIA A GRADIENTE DE PRESIÓN CONSTANTE

La potencia asociada al flujo volumétrico se obtiene de la misma forma que se obtiene para el modelo PTT lineal, solo que se sustituyen las expresiones correspondientes al modelo cuadrático. Esto queda de la siguiente manera:

$$P_0 = Q_0 \sigma_w = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{\text{app}} \sigma_w^2$$

[C.5]

C.C3 AUMENTO EN EL FLUJO VOLUMÉTRICO

El aumento en el flujo volumétrico se calcula con la misma expresión que en el caso lineal, y debido a esto, el elemento para el gradiente de presión pulsátil es la misma. De esta manera, el aumento para el flujo volumétrico para el modelo cuadrático está dada por la siguiente expresión (semejante a la ecuación para el aumento del flujo volumétrico lineal):

$$I_C (\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad [C.6]$$

Por lo que al sustituir el flujo volumétrico pulsátil y el flujo volumétrico a gradiente de presión constante, se llega al aumento del flujo volumétrico:

$$I_C (\%) = 100 \frac{\left\langle \left(1 + \alpha n(t) + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 (1 + \alpha n(t))^3 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 (1 + \alpha n(t))^5 \right) \right\rangle - \left(1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\alpha^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \right)}{1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\alpha^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \quad [C.7]$$

Repetiendo los mismos cálculos desarrollados para el modelo PTT lineal:

$$I_C (\%) = 100 \frac{\left\{ \left(1 + \frac{4\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 + 5 \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \right) (\alpha n(t)) + \left(\frac{4\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 + 10 \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \right) (\alpha n(t))^2 \right.}{\left. + \left(\frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + 10 \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \right) (\alpha n(t))^3 + 5 \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 (\alpha n(t))^4 + (\alpha n(t))^5 \right\}}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \quad [C.8]$$

El desarrollo matricial para el modelo cuadrático PTT es:

$$\begin{pmatrix} I_{C0}(\%) \\ I_{C1}(\%) \\ I_{C2}(\%) \\ I_{C3}(\%) \\ I_{C4}(\%) \\ I_{C5}(\%) \end{pmatrix} = \frac{10^2}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2}\sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4}\sigma_w^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4\varepsilon}{G_0^2}\sigma_w^2 + 5\frac{\varepsilon^2}{G_0^4}\sigma_w^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\varepsilon}{G_0^2}\sigma_w^2 + 10\frac{\varepsilon^2}{G_0^4}\sigma_w^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5\frac{\varepsilon^2}{G_0^4}\sigma_w^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \alpha n(t) \rangle \\ \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle \\ \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle \\ \langle \alpha^4 n^4(t) \rangle \\ \langle \alpha^5 n^5(t) \rangle \end{pmatrix} \quad [C.9]$$

De la misma manera que en el caso lineal del modelo PTT, el caso cuadrático tiene las siguientes observaciones:

- El caso cuadrático es analítico como en el modelo lineal
- El caso cuadrático tiene dos contribuciones nuevas a ordenes cuatro y quinto.
- Obsérvese que, las contribuciones a ordenes superiores al segundo son muy pequeñas.
- En particular si $\varepsilon = 1$, se analiza un caso que se aleja del problema perturbativo de baja amplitud.

El cambio en la potencia debido al gradiente de presión pulsátil puede ser cuantificado de la siguiente manera:

$$E_C(\%) = \frac{\langle P(t) \rangle - \langle P_0 \rangle}{P_0} = \frac{\langle \sigma_w(t) Q(t) \rangle - \langle \sigma_w Q_0 \rangle}{\sigma_w Q_0} \quad [C.10]$$

Al sustituir la potencia pulsátil promedio con el modelo cuadrático de PTT y la potencia en estado estacionario, para obtener un análogo al modelo lineal de PTT, se tiene:

$$E_c (\%) = 10^2 \frac{\left(1 + 2\langle \alpha n(t) \rangle + \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle\right) + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \left(1 + 4\langle \alpha n(t) \rangle + 6\langle \alpha^2 n^2(t) \rangle + 4\langle \alpha^3 n^3(t) \rangle + \langle \alpha^4 n^4(t) \rangle\right) + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \left(1 + \langle \alpha n(t) \rangle + \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle + \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle + \langle \alpha^4 n^4(t) \rangle + \langle \alpha^5 n^5(t) \rangle + \langle \alpha^6 n^6(t) \rangle\right)}{1 + \frac{4\alpha}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\alpha^2}{G_0^4} \sigma_w^4}$$

[C.11]

Finalmente, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E_{C1} (\%) \\ E_{C2} (\%) \\ E_{C3} (\%) \\ E_{C4} (\%) \end{pmatrix} = \frac{10^2}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \begin{pmatrix} 2 + \frac{16\varepsilon}{3G_0^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha n(t) \rangle \\ \langle \alpha^2 n^2(t) \rangle \\ \langle \alpha^3 n^3(t) \rangle \\ \langle \alpha^4 n^4(t) \rangle \end{pmatrix}$$

[C.12]

APÉNDICE D

MODELO EXPONENCIAL PTT

D.D1 MODELO EXPONENCIAL DE PTT

En esta sección, se deduce la expresión para el modelo exponencial del PTT. Al expandir la exponencial hasta el término lineal, se tiene la siguiente expresión para el escalar rapidez de deformación:

$$\frac{dV_z}{dr} = \varphi(\sigma_{zr}) \sigma_{zr} \quad [D.1]$$

La función fluidez del modelo exponencial de PTT, es entonces:

$$\varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_0 \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_{zr}^2}{G_0^2} \right) \quad [D.2]$$

El flujo volumétrico para el desarrollo del modelo exponencial es:

$$Q_0 = \frac{\pi a^3}{\eta_0 \sigma_w^3} \frac{G_0^4}{4\varepsilon^2} \int_0^{2\varepsilon(\sigma_w^2/G_0^2)} \left(\text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_{zr}^2}{G_0^2} \right) \right) 2\varepsilon \frac{\sigma_{zr}^2}{G_0^2} d 2\varepsilon \frac{\sigma_{zr}^2}{G_0^2}; \quad [D.3]$$

Al resolver la integral por el método de integración por partes, donde, el elemento desarrollada del miembro derecho de la Ec. [D.2] se define como la variable “x”, se tiene como respuesta:

$$Q_0 = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{\text{app}} \sigma_w \quad [D.4]$$

En donde la fluidez aparente tiene la siguiente expresión analítica:

$$\varphi_{\text{app}} = \varphi_0 \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} \quad [D.5]$$

La Ec. [D.5] tiene el siguiente límite asintótico a esfuerzos en la pared bajos,

$$\begin{aligned} \text{Lim}_{\sigma_w \rightarrow 0} \varphi_{\text{app}} &\cong \varphi_0 \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \left(1 + 2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} + O \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right) \right)}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} \\ &= \varphi_0 \frac{1 + 4\varepsilon^2 \frac{\sigma_w^4}{G_0^4} - 1}{4\varepsilon^2 \sigma_w^4 / G_0^4} = \varphi_0 \end{aligned} \quad [\text{D.6}]$$

D.D2 POTENCIA A GRADIENTE DE PRESIÓN CONSTANTE

La potencia en el caso exponencial, se obtiene al multiplicar, de la misma forma que en el apéndice B y C, el flujo volumétrico del modelo exponencial de PTT y el esfuerzo en la pared:

$$P_0 = Q_0 \sigma_w = \pi \frac{a^3}{4} \varphi_{\text{app}} \sigma_w^2 \quad [\text{D.7}]$$

D.D3 AUMENTO EN EL FLUJO VOLUMÉTRICO

El aumento en el flujo volumétrico en el caso exponencial, se calcula con la misma expresión que en los casos lineal y cuadrático:

$$I_E (\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad [\text{D.8}]$$

Por lo que al sustituir el flujo volumétrico pulsátil y el flujo volumétrico a gradiente de presión constante, este aumento queda como:

$$I_E (\%) = 100 \frac{\left\langle \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2(t)}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2(t)}{G_0^2} \right)}{2\varepsilon^2 \frac{\sigma_w^4(t)}{G_0^4}} \right\rangle - \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)}{2\varepsilon^2 \frac{\sigma_w^4}{G_0^4}}}{\frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)}{2\varepsilon^2 \frac{\sigma_w^4}{G_0^4}}} \quad [\text{D.9}]$$

Simplificando la Ec. [D.9] se tiene la siguiente expresión analítica:

$$I_E (\%) = 100 \frac{\left\langle \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2(t)}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2(t)}{G_0^2} \right)}{\sigma_w^4(t)} \right\rangle - \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)}{\sigma_w^4}}{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)} \quad [D.10]$$

El aumento en el flujo volumétrico en el caso exponencial del modelo PTT, no puede obtenerse en forma analítica debido a que es un modelo complejo, por lo que su integración sería de forma numérica. En este punto, se programará la función en la paquetería de Mathematica 8.0 (ver capítulo 5).

D.D4 POTENCIA PULSÁTIL

La potencia pulsátil para el modelo exponencial de PTT tiene la siguiente forma matemática:

$$P(t) = \sigma_w(t) Q(t) = \frac{\pi a^3}{4} \varphi_{\text{app}}(t; \alpha) \sigma_w^2(t) \quad [D.11]$$

El cambio en la potencia debido al gradiente de presión pulsátil puede ser cuantificado de la misma forma que para el modelo lineal y cuadrático.

$$E_E (\%) = \frac{\langle P(t) \rangle - \langle P_0 \rangle}{P_0} = \frac{\langle \sigma_w(t) Q(t) \rangle - \langle \sigma_w Q_0 \rangle}{\sigma_w Q_0} \quad [D.12]$$

Por lo que, el aumento para la potencia pulsátil es:

$$I_E (\%) = 100 \frac{\left\langle \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2(t)}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2(t)}{G_0^2} \right)}{\sigma_w^3(t)} \right\rangle - \frac{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)}{\sigma_w^3}}{1 + \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} - 1 \right) \text{Exp} \left(2\varepsilon \frac{\sigma_w^2}{G_0^2} \right)} \quad [D.13]$$

Observaciones importantes del modelo exponencial.

- a) Este modelo presenta soluciones analíticas para el flujo en un tubo en el caso lineal, cuadrático y exponencial.
- b) El aumento en el flujo volumétrico y la potencia pulsátil (Ecs. [D.10] y [D.13]), se deben de resolver numéricamente.
- c) El modelo exponencial contiene como casos particulares, a los modelos lineal y cuadrático deducidos en los apéndices anteriores, por medio de una expansión en serie de McLaurin.

APÉNDICE E

FUNCIÓN ESTOCÁSTICA

E.E1 FUNCIÓN ESTOCÁSTICA: CASOS PARTICULARES

En esta sección se estudian los casos particulares de la función estocástica asociada al flujo pulsátil. Su poniendo que esta, puede ser expresada mediante una función trigonométrica simple, tal como $n(t) = M\cos(\omega t)$, en donde M es la amplitud de la función estocástica.

El promedio puede ser calculado mediante la siguiente integral promedio

$$\langle n(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \text{Sen}(\omega t) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\text{Sen}(2\pi) - \text{Sen}(0)}{2\pi} = 0$$

[E.1]

La Ec. [E.1] implica que el promedio de una función trigonométrica es cero. Por otra parte, el promedio del cuadrado de la función trigonométrica, se puede expresar como

$$\begin{aligned} \langle n^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T M^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} M^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{M^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt \\ &= \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\omega t)) d\omega t \right) = \frac{M^2}{2} \left(1 + \frac{\text{Sen}(4\pi) - \text{Sen}(0)}{4\pi} \right) \\ &= \frac{M^2}{2} (1 + 0) = \frac{M^2}{2} \end{aligned}$$

[E.2]

Por lo que el promedio del cuadrado de la función estocástica es diferente de cero y es igual al cuadrado de la amplitud dividida por un factor numérico 2.

$$\begin{aligned} \langle n^3(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T M^3 \cos^3(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} M^3 \cos^3(\omega t) dt = \frac{M^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t) \cos(\omega t) d\omega t \\ &= \frac{M^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \text{Sen}^2(\omega t)) \cos(\omega t) d\omega t = \frac{M^3}{2\pi} \left(\text{Sen}(\omega t) - \frac{1}{3} \text{Sen}^3(\omega t) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{M^3}{2\pi} \left(\text{Sen}(2\pi) - \text{Sen}(0) - \frac{1}{3} (\text{Sen}^3(2\pi) - \text{Sen}^3(0)) \right) \\ &= \frac{M^3}{2\pi} \left(0 - 0 - \frac{1}{3} (0 - 0) \right) = \frac{M^3}{2\pi} \end{aligned}$$

[E.3]

De la misma manera, el valor promedio de la cuarta potencia de la función estocástica, se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\langle n^4(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T M^4 \text{Cos}^4(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} M^4 \text{Cos}^4(\omega t) dt = \frac{M^4}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Cos}^2(\omega t))^2 dt \\
&= \frac{M^4}{2^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \text{Cos}(2\omega t))^2 d\omega t \right) = \frac{M^4}{2^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2\text{Cos}(2\omega t) + \text{Cos}^2(2\omega t)) d\omega t \right) \\
&= \frac{M^4}{2^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\text{Cos}(2\omega t) + \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}(4\omega t)) \right) d\omega t \right) \\
&= \frac{M^4}{2^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\text{Cos}(2\omega t) + \frac{1}{2}\text{Cos}(4\omega t) \right) d\omega t \right) \\
&= \frac{M^4}{2^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\text{Sen}(4\pi) - \text{Sen}(0)}{2\pi} + \frac{1}{8} \frac{\text{Sen}(8\pi) - \text{Sen}(0)}{2\pi} \right) \\
&= 3 \frac{M^4}{2^3}
\end{aligned}$$

[E.4]

Finalmente, el promedio de la quinta potencia de la función estocástica, se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\langle n^5(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T M^5 \text{Cos}^5(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} M^5 \text{Cos}^5(\omega t) dt = \frac{M^5}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Cos}^2(\omega t))^2 \text{Cos}(\omega t) d\omega t \\
&= \frac{M^5}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \text{Sen}^2(\omega t))^2 \text{Cos}(\omega t) d\omega t = \frac{M^5}{2\pi} \left(\text{Sen}(\omega t) - \frac{2}{3} \text{Sen}^3(\omega t) + \frac{1}{5} \text{Sen}^5(\omega t) \right) \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{M^5}{2\pi} \left(\text{Sen}(2\pi) - \text{Sen}(0) - \frac{2}{3} (\text{Sen}^3(2\pi) - \text{Sen}^3(0)) + \frac{1}{5} (\text{Sen}^5(2\pi) - \text{Sen}^5(0)) \right) \\
&= \frac{M^5}{2\pi} \left(0 - 0 - \frac{2}{3} (0 - 0) + \frac{1}{5} (0 - 0) \right) = 0
\end{aligned}$$

[E.5]

Nótese que para una función estocástica elevada a una potencia par es diferente de cero, mientras que, para una potencia impar es cero. Aplicando, a los resultados del aumento en el flujo volumétrico y la potencia pulsátil se tiene lo siguiente

E.E2 FUNCIÓN LINEAL DE PTT

E.E2.1 Aumento en el flujo volumétrico

$$I_L (\%) = (10^2) \frac{\frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \left(\frac{3}{2} (\alpha M)^2 \right) \quad [E.6]$$

E.E2.2 Potencia pulsátil

$$E_L (\%) = 10^2 \frac{\left(1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 \right) \frac{1}{2} (\alpha M)^2 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \frac{3}{2^3} (\alpha M)^4}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2} \quad [E.7]$$

E.E3 FUNCIÓN CUADRÁTICA PTT

E.E3.1 Aumento en el flujo volumétrico

$$I_C (\%) = 100 \frac{\left(\frac{4\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 + 10 \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \right) \frac{(\alpha M)^2}{2} + 5 \frac{3}{2^2} \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4 \frac{(\alpha M)^4}{2}}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \quad [E.8]$$

E.E3.2 Potencia pulsátil

$$E_C (\%) = 10^2 \frac{\left(1 + \frac{8\varepsilon}{G_0^2} \sigma_w^2 \right) \left(\frac{1}{2} (\alpha M)^2 \right) + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 \left(\frac{3}{2^3} (\alpha M)^4 \right)}{1 + \frac{4\varepsilon}{3G_0^2} \sigma_w^2 + \frac{\varepsilon^2}{G_0^4} \sigma_w^4} \quad [E.9]$$

El caso exponencial del modelo de Phan-Thien Tanner no tiene una expresión de tipo analítico por lo que su solución puede obtenerse mediante métodos numéricos o aproximados.

BIBLIOGRAFÍA

- Apostolidis AJ, Beris AN (2015) The effect of cholesterol and triglycerides on the steady state rheology of blood. *Rheol Acta* 1: 1-13.
- Barnes HA, Towsend P, Walters K (1971) On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 10: 517-527.
- Bird RB, Stewart E, Lighfoot EN (2002) *Transport Phenomena, Second Edition*. John Wiley and Sons, Inc.
- Casualli J, Clermont JR, Von Ziegler A, Mena B (1990) The oscillating die: a useful concept in polymer extrusion. *J Polym Eng Sci* 30: 1551-1556.
- Chen J, Lu X (2006) Numerical investigation of the non-Newtonian pulsatile blood flow in a bifurcation model with a non-planar branch. *J Biomech* 39: 818-832.
- Davies JM, Bhumiratana S, Bird RB (1978) Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 3: 237-259.
- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2005) Pulsatile Poiseuille flow of discotic mesophases. *Chem Eng Sci* 60: 6622-6636.
- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2006) Pulsatile flows of Leslie-Ericksen liquid crystals. *J Non-Newton Fluid Mech* 135: 32-45.
- Del Rio JA, De Haro ML, Castrejón-Pita JR (1998) Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E*. 58 (5) 6323.
- Edwards MF, Nellist DA, Wilkinson WL (1972) Pulsating flows of non-Newtonian fluids in pipes. *Chem Eng Sci* 27: 545-553.
- EL-Shahed M (2003) Pulsatile flow of blood through a stenosed porous medium under periodic body acceleration. *Appl Math Comput* 138: 479-488.
- Ghasemi SE, Hatami M, Hatami J, Sahebi SAR, Ganji DD (2016) An efficient approach to study the pulsatile blood flow in femoral and coronary arteries by Differential Quadrature Method. *Physica A* 443: 406-414.
- Herrera-Valencia EE, Calderas F, Medina-Torres L, Pérez Camacho M, Moreno L, Manero O (2017) On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood, *Rheol. Acta* **56**: 387.
- Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas F, Pérez-Camacho M, Medina-Torres L, Manero O (2016) Simultaneous pulsatile flow and oscillating wall of a non-newtonian liquid- Korea-Aust. *Rheol. J.* **28**: 281.
- Herrera EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010) Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.
- Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009) Effect of random longitudinal vibration on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol Acta* 48:779-800
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2001) Viscous dissipation of a power law fluid in an oscillatory pipe flow. *Rev Mex Fís* 47: 351-356.
- Lin Y, Han Tan GW, Phan-Thien N, Cheong Khoo B (2015) Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspension in tubes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 202: 13-17.

- Massoudi M, Phuoc TX (2008) Pulsatile flow of blood using a modified second-grade fluid model. *Comput Math Appl* 56:199–211.
- Mena B, Manero O, Binding DM (1979) Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. Interesting effects and applications. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 5: 427-448.
- Moreno L, Calderas F, Sánchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sánchez-Solís A, Manero O (2015) Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. *Korea-Aust Rheol J* 27: 1-10.
- Moreno L, Calderas F, Sánchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sánchez-Solis A, Manero, O (2013) La sangre humana desde el punto de vista de la reología. *Materiales Avanzados*. 20, 33-37.
- Moyers-Gonzalez MA, Owens RG (2010) Mathematical modelling of the cell-depleted peripheral layer in the steady flow of blood in a tube. *Biorheology* 47: 39-71.
- Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2009) On the high frequency oscillatory tube flow of healthy human blood. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 163: 45-61.
- Nandakumar N, Sahu KC, Anand M (2015) Pulsatile flow of a shear-thinning model for blood through a two-dimensional stenosed channel. *Eur J Mech B-Fluid* 49: 29–35.
- Owens RG (2006) A new micro structure-based constitutive model for human blood. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 140: 57-70.
- Phan-Thien N, Tanner RI (1977) A new constitutive equation derived from network theory. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2:353-365.
- Phan-Thien N (1978) On pulsating flow of polymeric fluids. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 4: 167-176.
- Phan-Thien N (1980a) Flow enhancement mechanism of a pulsating flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 19: 285-290.
- Phan-Thien N (1980b) The effects of longitudinal vibration on pipe flow of a non-Newtonian fluid. *Rheol Acta* 19: 539-547.
- Phan-Thien N, Dudek J (1982a) Pulsating flow of a plastic fluid. *Nature* 296: 843-84.
- Sousa PC, Pinho FT, Alves MA, Oliveira MSN (2016) A review of hemorheology: Measuring techniques and recent advances. *Korea-Aust Rheol J* 28: 1-22.
- Yaglom AM (1965) An introduction to the theory of stationary random functions, translated by Silverman RA. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.