



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMAS DE EQUIPARTICIÓN:
UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA
DEL HAM SANDWICH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CUAUHTEMOC GOMEZ NAVARRO



DIRECTOR DE TESIS:
DRA. ISABEL ALICIA HUBARD ESCALERA

CIUDAD DE MÉXICO 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi mamá, mi papá y mi abuelita Irene.

Agradecimientos

*El éxito en la vida no consiste en ganar todas tus batallas,
si no en nunca rendirse en las que valen la pena.*

Quiero agradecer a las personas que han aportado a mi formación personal y académica.

A mi mamá, mi papá y mis dos hermanos, por todos los momentos de alegría y felicidad que hemos pasado juntos.

A mi mamá, por todas las enseñanzas y consejos que me han hecho mejor persona. Además, por su cariño, apoyo y comprensión en todo momento.

A mi papá y a mi hermano Dante, por contagiarme su gusto por la ciencia y por motivarme a participar en concursos de matemáticas.

A mi hermano Zenón, porque con él puedo bromear y platicar para pasar momentos muy divertidos.

A todos los entrenadores que tuve en la Olimpiada de Matemáticas de la Ciudad de México, porque fue ahí donde aprendí el gusto por resolver problemas. En especial, a Jorge Garza, por siempre motivarnos a aprender más y por ser la primera persona en hablarme del teorema del Ham Sandwich y de la geometría combinatoria.

A mi asesora, Isabel Hubard, por el tiempo que le dedicó a este trabajo, por sus observaciones, comentarios y correcciones.

A mis sinodales Leonardo Martínez, Javier Bracho, Vinicio Gómez y Juan José Montellano, por tomarse el tiempo de leer esta tesis y por las observaciones que ayudaron a mejorar este trabajo.

A los profesores de los cursos que más disfruté durante la carrera: Isabel Hubard, Juan José Montellano, Vinicio Gómez, Ricardo Strausz, Alejandro Illanes, Alejandro Darío, Javier Páez y Francisco Marmolejo.

A todos mis amigos y familiares por los momentos que han compartido conmigo.

Índice general

Introducción	9
1. Preliminares	13
1.1. Geometría y conjuntos convexos	13
1.2. Teoría de grupos	18
1.3. Topología algebraica	22
1.4. Teoría de la medida	27
2. El teorema del Ham Sandwich	31
2.1. El teorema de Borsuk Ulam	31
2.2. El teorema del Ham Sandwich	38
3. Funciones G equivariantes y el teorema de Dold	43
4. Diagramas de Potencia	51
5. Una generalización del Ham Sandwich	61
5.1. El teorema principal	61
5.2. Observaciones y trabajo futuro	66
Bibliografía	69

Introducción

Este trabajo surge del siguiente resultado de geometría combinatoria.

Si tenemos m puntos azules y n puntos rojos en el plano en posición general (no hay 3 puntos en una misma recta), entonces existe una recta que biseca simultáneamente los dos conjuntos de colores.

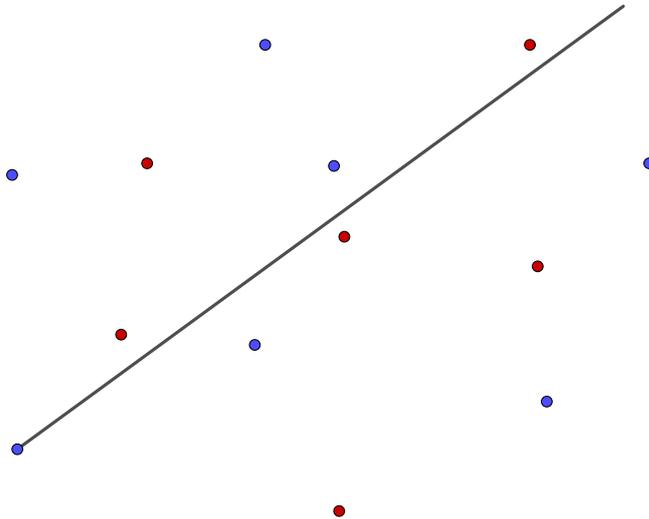


Figura 1: Ejemplo con 7 puntos azules y 6 puntos rojos.

Para demostrar ese resultado, primero supongamos que alguno de m o n es impar, sin pérdida de generalidad m es impar. Sea p cualquier punto azul, veremos que siempre hay una recta que pasa por el punto p y que biseca el conjunto de puntos azules. Nos tomamos cualquier recta l que pase por p , pero no pase por ningún otro punto azul. Si l biseca el conjunto de puntos azules, es la recta que estamos buscando, si no podemos asignarle una dirección a la recta y considerar su lado derecho y su lado izquierdo. Supongamos que el lado derecho tiene más de la mitad de puntos azules. Si empezamos a rotar la recta con centro en p al dar un giro de 180° habremos invertido los lados, así que ahora el lado derecho va tener menos puntos azules que la mitad. Como no hay 3 puntos azules sobre la recta l (o alguna de sus rotaciones), al hacer la rotación los puntos azules van cambiando de lado uno por uno, así que antes de dar el giro de 180° , encontraremos una recta que pase por p y deje la mitad de los puntos azules en cada uno de los lados que determina la recta.

Hemos demostrado que existe una recta l_1 que pasa por un punto p azul y que biseca los puntos azules. Empecemos a rotar la recta l_1 en sentido de las manecillas del reloj con centro en p , hasta intersectar a otro punto azul q , en ese momento cambiemos el centro de rotación a q y sigamos rotando la recta. Continuemos rotando la recta de esa manera, cambiando el centro de rotación cada vez que toquemos otro punto azul, de esta manera obtenemos rectas que siempre van a biseccionar el conjunto de puntos azules, y como m es impar, al dar un giro de 180° tenemos que regresar a la misma recta l_1 pero en sentido contrario. Por el mismo argumento del párrafo anterior, al hacer estas rotaciones, antes de dar un giro de 180° tendremos una recta que también bisecciona los puntos rojos, por lo tanto, esa recta bisecciona ambos conjuntos.

Si ambos números m, n son pares, podemos considerar un punto q (que no sea azul ni rojo), agregar el punto q al conjunto de puntos azules y aplicar las rotaciones anteriores a ese nuevo conjunto. Por el mismo argumento, llegaremos a una recta que bisecciona el conjunto de puntos rojos, además, si la recta pasa por el punto q también biseccionará el conjunto de puntos azules. Si la recta no pasa por q significa que pasa por algún punto azul y alguno de los lados tendrá un punto azul más que el otro, pero como hay una cantidad finita de puntos, podemos trasladar un poco la recta para pasar ese punto azul al lado correspondiente, sin afectar los puntos rojos, así tendremos la recta buscada.

El resultado anterior nos habla sobre encontrar rectas que biseccionen conjuntos finitos de puntos, es decir, rectas que cumplen que los semiplanos definidos por ellas tienen la misma medida con respecto a la medida de contar, definida por la cardinalidad de los conjuntos finitos de puntos.

Ese resultado sigue siendo cierto si ahora consideramos medidas finitas de Borel, y en dimensiones más grandes podemos biseccionar simultáneamente más medidas. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 podemos encontrar hiperplanos que biseccionen simultáneamente 3 medidas finitas de Borel. El teorema del Ham Sandwich nos dice las hipótesis necesarias para que un hiperplano bisecciona simultáneamente varias medidas en dimensiones arbitrarias. De acuerdo a [23] y [27], la versión en \mathbb{R}^3 fue conjeturada por Steinhaus y demostrada por Banach. La versión general para d medidas en \mathbb{R}^d fue demostrada en 1942 por Stone y Tukey [24].

Su nombre se debe a su versión en \mathbb{R}^3 : imaginemos que tenemos un solo sándwich con tres ingredientes: pan, jamón, y queso, el cual lo queremos compartir con nuestra novia, entonces el teorema del Ham Sandwich nos dice que siempre es posible cortar este sándwich con un cuchillo en dos partes, de tal manera que a cada uno de los dos nos toque la mitad de cada uno de los tres ingredientes. En este ejemplo, el pan, jamón y queso son las “medidas” que queremos dividir de manera equitativa, y como el corte es con un cuchillo, estamos dividiendo el sándwich en los dos semiespacios definidos por un hiperplano en \mathbb{R}^3 .

Teorema del Ham Sandwich Sean μ_1, \dots, μ_d medidas finitas de Borel en \mathbb{R}^d , tal que todo hiperplano tiene medida cero para cada μ_i . Entonces, existe un hiperplano h tal que para toda $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ se tiene que $\mu_i(h^+) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d)$, donde h^+ denota el semiespacio positivo definido por h .

Alon y Akiyama [1], con la finalidad de dar un teorema discreto del Ham Sandwich, tomaron conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d , definieron bolas centradas en los puntos y medidas sobre esas bolas, entonces aplicaron el teorema del Ham Sandwich y obtuvieron el siguiente teorema.

Teorema discreto del Ham Sandwich Sean $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos finitos de puntos, ajenos por parejas, tal que la unión $\bigcup_{i=1}^d A_i$ está en posición general. Entonces, existe un hiperplano h que biseca simultáneamente los d conjuntos.

El teorema del Ham Sandwich también ha servido para demostrar otros teoremas de repartición equitativa, como el teorema del collar [10].

El problema de equiparticionar medidas es una línea de investigación muy trabajada en la actualidad y como se verá más adelante se han hecho varias generalizaciones del teorema del Ham Sandwich en los últimos años.

Siguiendo con la analogía de la comida, supongamos que estamos en una fiesta con n niños y queremos repartir un pastel que tiene tres ingredientes diferentes, ¿será siempre posible repartir el pastel (con un cuchillo) entre los n niños, de tal manera que a todos les toque la misma cantidad de cada uno de los ingredientes? ¡La respuesta es sí! Al igual que en el ejemplo del sándwich que compartimos con nuestra novia, queremos repartir tres ingredientes diferentes, pero ahora entre una cantidad arbitraria (y finita) de personas.

La siguiente generalización del teorema del Ham Sandwich es el enunciado matemático que justifica el ejemplo anterior. Fue conjeturado en 1999 por Kaneko y Kano [14], y fue demostrado de manera independiente por Soberón [22], Karasev, Hubard, Aronov [15] y Blagojevic, Ziegler [6].

Teorema principal Sean n y d enteros positivos. Sean μ_1, \dots, μ_d medidas *amigables* en \mathbb{R}^d tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = n$ para toda i . Entonces, existe una teselación convexa de \mathbb{R}^d en n conjuntos C_1, C_2, \dots, C_n tal que $\mu_i(C_j) = 1$ para toda i, j .

Recordemos que en el teorema del Ham Sandwich pedimos que las medidas fueran finitas de Borel. En la demostración del teorema principal también pediremos que las medidas sean finitas, entre otras hipótesis que veremos más adelante. Por esta razón, el teorema principal solo será válido para algunas medidas, a las que llamaremos *medidas amigables*.

Observemos que cuando n es una potencia de 2 se puede demostrar el teorema principal usando el teorema del Ham Sandwich de manera inductiva, sin embargo, demostrarlo para todos los enteros n fue un problema que tardó más de 10 años en resolverse, pero antes de eso se demostraron varios casos particulares.

Ito, Uehara, Yokoyama [13] (en 1998) y Bespamyatnikh, Kirkpatrick, Snoeyink [4] (en 2000) probaron de manera independiente el caso discreto en \mathbb{R}^2 , y Sakai [21] (en 2002) lo probó para medidas en \mathbb{R}^2 . En los tres artículos primero demuestran un lema sobre particiones balanceadas usando un 3-fan y después dan un argumento inductivo para concluir sus resultados.

En 2010 Hubard y Aronov [12] usaron diagramas de potencia para reducir un problema de repartición equitativa (el teorema del pollo picante) a un problema topológico. Después, en 2012 Soberón [22] usa las ideas de [12] y el teorema de Dold [8] para demostrar un lema similar al probado en [13], [4] y [21]. Finalmente, Soberón concluye la demostración del teorema principal con un argumento inductivo.

Por otro lado, Karasev conocía un teorema topológico que Hubard y Aronov necesitaban para resolver un caso particular del teorema del pollo picante (para números de la forma p^k con p primo), de esto nace un nuevo artículo en el año 2014 [15] en donde demuestran ese resultado, y como corolario obtienen el teorema principal.

También, en 2014 Blagojevic y Ziegler [6] usan las ideas de [12] y teoría de obstrucción para demostrar el teorema del pollo picante para números de la forma p^k , con lo cual se tiene otra demostración del teorema principal.

En el 2017 Blagojevic, Robe, Steinmeyer y Ziegler [5] usaron la idea de Alon y Akiyama [1] y el problema de network flow para demostrar el siguiente teorema que es una versión discreta del teorema principal.

Versión discreta del teorema principal Sean n y d enteros positivos y sean A_1, A_2, \dots, A_d conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d tal que la unión $\bigcup_{i=1}^d A_i$ está en posición general. Entonces, se puede particionar $\bigcup_{i=1}^d A_i$ en n conjuntos convexos ajenos por parejas, que equiparticionen simultáneamente a los d conjuntos.

El propósito de esta tesis es demostrar el teorema principal y mostrar las ideas más utilizadas para resolver problemas de repartición equitativa.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos básicos que usaremos en esta tesis, se verán definiciones y resultados de geometría, conjuntos convexos, teoría de grupos, topología algebraica y teoría de la medida.

En el capítulo 2 se demostrará el teorema del Ham Sandwich; se verá que es un corolario de un teorema topológico muy usado en geometría discreta, el teorema de Borsuk Ulam. En ese capítulo también se verán diferentes versiones del teorema de Borsuk Ulam y se demostrará su equivalencia con el lema de Tucker, de esta manera al demostrar el lema de Tucker, se tendrá una demostración combinatoria del teorema de Borsuk Ulam. Por último, se darán corolarios casi directos del teorema del Ham Sandwich.

En la demostración del teorema principal, con la finalidad de aplicar el teorema de Dold, se define una función \mathbb{Z}_p equivariante. Por esta razón, en el capítulo 3 se definirán las funciones G equivariantes y se demostrarán algunos resultados topológicos.

Como se mencionó anteriormente, los diagramas de potencia son una de las herramientas más fuertes que se utilizó para demostrar el teorema principal, ya que en los tres artículos [6], [15], [22], los usan para reducir el teorema principal a un problema topológico. En el capítulo 4 se definirán y demostrarán esos resultados sobre diagramas de potencia. Además, siguiendo [2] y usando diagramas de potencia, veremos como equiparticionar cualquier medida de probabilidad en \mathbb{R}^d .

Finalmente, usando las herramientas vistas en los capítulos anteriores, en el capítulo 5 se verá la demostración de Soberón [22] del teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos todos los conceptos que usaremos a lo largo de la tesis, y empezaremos a familiarizar al lector con algunos resultados matemáticos que usaremos en los siguientes capítulos. El capítulo está dividido en 4 secciones.

En la sección de geometría y conjuntos convexos primero recordaremos algunas definiciones de convexidad para después definir a los complejos simpliciales geométricos y abstractos, los cuales nos ayudarán a definir a los espacios G^{*n} .

El propósito de la sección de teoría de grupos es entender como actúan los grupos finitos sobre los espacios topológicos con los que estaremos trabajando. Además, veremos que trabajar las acciones de grupos con grupos isomorfos a \mathbb{Z}_p nos ayudará a obtener buenos resultados de divisibilidad.

La sección de topología algebraica tiene como principal propósito estudiar la conexidad de los espacios G^{*n} y observar que son espacios con propiedades similares a las esferas. En esa sección también definiremos a las funciones simpliciales y veremos que cada función simplicial induce dos funciones que nos ayudarán a contar el número de Lefschetz de dos maneras distintas, el cual también será definido en esa sección.

En la sección de teoría de la medida definiremos las medidas con las que se estará trabajando en el teorema del Ham Sandwich y en el teorema principal. Después, veremos el significado de integrar una función con respecto a una medida, lo cual nos servirá para entender el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

1.1. Geometría y conjuntos convexos

En esta sección veremos las definiciones geométricas que se usarán en esta tesis y estudiaremos a los *conjuntos convexos*. Estaremos trabajando en el espacio euclidiano \mathbb{R}^d y con su producto punto usual.

Un *hiperplano* en \mathbb{R}^d es un conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d | a \cdot x = b\}$ para algún $a \in \mathbb{R}^d$ no cero, y algún $b \in \mathbb{R}$. A los *semiespacios* definidos por un hiperplano h los denotaremos de la siguiente manera: $h^+ = \{x \in \mathbb{R}^d | a \cdot x \leq b\}$ y $h^- = \{x \in \mathbb{R}^d | a \cdot x \geq b\}$.

Algunas propiedades combinatorias de conjuntos finitos de puntos solo son válidas si suponemos que el conjunto está en *posición general*, como en el teorema discreto del Ham Sandwich. Diremos que un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d está en posición general, si hay a lo más d de esos puntos en un mismo hiperplano.

Un ejemplo de puntos en posición general es la *curva momento*. El conjunto de puntos $(t, t^2, t^3, \dots, t^d)$ es la curva momento de \mathbb{R}^d . Para ver que esta curva está en posición general consideremos un hiperplano h con ecuación $a \cdot x = b$ (con $a = (a_1, \dots, a_d)$). Notemos que cada punto $(t, t^2, t^3, \dots, t^d)$ está sobre el hiperplano h si y solo si $a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d = b$, esto significa que la intersección de la curva momento con el hiperplano h , está dada por las raíces del polinomio $p(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d - b$. Como el polinomio $p(t)$ es de grado a lo más d y no es el polinomio cero, entonces tiene a lo más d raíces, y por lo tanto la curva momento interseca a cada hiperplano en a lo más d puntos.

Cuando estamos trabajando con objetos y los queremos colocar sobre un espacio euclidiano, es muy común colocarlos sobre la curva momento, ya que esta tiene propiedades muy interesantes. Un ejemplo que veremos más adelante es el teorema del collar, en donde colocaremos un collar (objeto con diferentes tipos de perlas, que adorna el cuello y pecho de una persona) sobre una curva momento, con la finalidad de poder aplicar el teorema discreto del Ham Sandwich. Otro ejemplo es la demostración de que todo complejo simplicial abstracto tiene una realización geométrica.

Recordemos que un conjunto C en \mathbb{R}^d es *convexo* si para cada $x, y \in C$, el segmento $xy = \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en C . Un ejemplo de conjunto convexo es un semiespacio $h^+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x \leq b\}$. Para demostrar que h^+ es convexo, queremos ver que para cada $x_1, x_2 \in h^+$ el segmento $x_1 x_2$ está contenido en h^+ , es decir, que para cada $0 \leq t \leq 1$, se tiene que $tx_1 + (1-t)x_2 \in h^+$. Como $x_1, x_2 \in h^+$, entonces $a \cdot x_1 \leq b$ y $a \cdot x_2 \leq b$, entonces para cualquier $0 \leq t \leq 1$, tenemos que $a \cdot (tx_1 + (1-t)x_2) = t(a \cdot x_1) + (1-t)(a \cdot x_2) \leq tb + (1-t)(b) = b$; de esto se sigue que los semiespacios positivos (y de manera análoga los semiespacios negativos) son conjuntos convexos.

Una *teselación* de \mathbb{R}^d es una familia de conjuntos que cubre totalmente a \mathbb{R}^d , no dejan espacios entre ellos, y la intersección de sus interiores es vacía (no se traslapan). Un caso particular que nos interesa son las *teselaciones convexas*, es decir, una teselación con conjuntos convexos. Un ejemplo de teselación convexa es la formada por los semiespacios h^+ y h^- , por lo que en el teorema del Ham Sandwich tenemos una teselación convexa que equiparticiona varias medidas.

En el teorema principal también tenemos una teselación convexa, pero con un mayor número de conjuntos. Como veremos más adelante, esa teselación convexa la obtendremos intersecando semiespacios, por lo cual el siguiente resultado es la propiedad más importante que usaremos de los conjuntos convexos.

Proposición 1.1.1. *La intersección arbitraria de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d es un conjunto convexo.*

Demostración. Sea $\{C_i\}$ una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . Sean $x, y \in \cap C_i$. Por hipótesis x, y están en cada C_i , y como cada C_i es convexo, entonces el segmento xy está en cada C_i , por lo tanto, el segmento xy está en $\cap C_i$. Con esto concluimos que $\cap C_i$ es convexo. \square

En verdad, la proposición anterior es muy importante, ya que si tenemos cualquier conjunto A en \mathbb{R}^d , entonces la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A , es convexo. Por definición, esa intersección está contenida en cualquier convexo que contenga a A , así que esa intersección es el conjunto convexo más pequeño (respecto a la contención) que contiene a A .

Definición 1.1.2. La envolvente convexa de un conjunto A , es la intersección $\cap C_i$ de todos los conjuntos convexos C_i que contienen a A .

A continuación veremos algunas definiciones previas, para después definir a los *complejos simpliciales*.

Definición 1.1.3. Sean v_0, v_1, \dots, v_k puntos en \mathbb{R}^d . Decimos que son afínmente dependientes si existen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos ceros, tal que $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$. En otro caso, diremos que v_0, v_1, \dots, v_k son afínmente independientes.

Por ejemplo, dos puntos son afínmente independientes si son distintos, tres puntos lo son si no están sobre una misma línea, y cuatro puntos son afínmente independientes si no están sobre un mismo plano.

Definición 1.1.4. Un simplejo geométrico σ es la envolvente convexa de un conjunto de puntos A afínmente independientes. Los puntos de A son llamados *vértices* de σ . La *dimensión* de σ es $|A| - 1$, y en este caso, diremos que σ es un $|A| - 1$ simplejo.

Por ejemplo, en \mathbb{R}^d , con $d \geq 2$, un triángulo (no degenerado) es un 2 simplejo. En \mathbb{R}^d , con $d \geq 3$, un tetraedro es un 3 simplejo.

Los simplejos de dimensión cero se llaman *vértices* y los simplejos de dimensión uno se llaman *aristas*. A la envolvente convexa de un subconjunto arbitrario de los vértices de un simplejo σ la llamaremos *cara* de σ , y estas caras son a su vez simplejos. El *interior relativo* de un simplejo σ es el conjunto resultante de borrarle todas sus caras de dimensión más pequeña que la dimensión de σ . Por ejemplo, el interior relativo de un triángulo (un 2 simplejo), es el resultante de borrarle sus 3 vértices y sus 3 aristas.

Notemos que si σ es un simplejo geométrico y x es un punto de σ , entonces existen únicos $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 1$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = x$, donde v_1, \dots, v_k son los vértices de σ . Si tenemos que $\lambda_i \neq 0$ para todo i , entonces diremos que x está en el interior relativo de σ .

Intuitivamente, diremos que un *complejo simplicial geométrico* es un conjunto de simplejos que *se pegan bien*.

Definición 1.1.5. Un complejo simplicial geométrico es una familia no vacía Δ de simplejos que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Cada cara de un simplejo en Δ , es también un simplejo de Δ .
- (ii) La intersección $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de dos simplejos de Δ , es una cara tanto de σ_1 como de σ_2 .

A la unión de todos los simplejos de Δ la denotaremos como $\|\Delta\|$. La dimensión de un complejo simplicial es la mayor de las dimensiones de sus simplejos. El conjunto de vértices de un complejo simplicial Δ es la unión de los vértices de todos sus simplejos, y es denotado por $V(\Delta)$.

Si un espacio topológico X es homeomorfo a $\|\Delta\|$, entonces se dirá que el complejo simplicial Δ es una *triangulación* de X . En la figura 1.1 tenemos una triangulación de un espacio homeomorfo a la bola \mathbb{B}^2 .

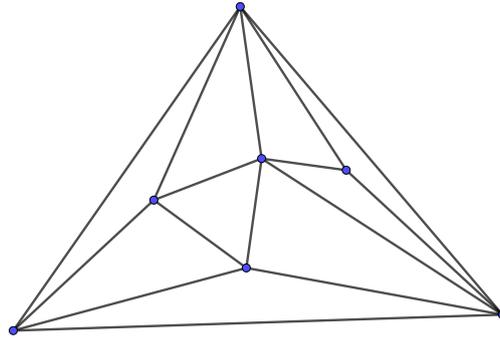


Figura 1.1: Ejemplo de complejo simplicial y triangulación.

Los complejos simpliciales finitos (los que tienen un número finito de vértices) juegan un papel muy importante en la demostración del teorema de Borsuk Ulam y en el teorema de Dold, y en general, son utilizados para conectar a la combinatoria con la topología (como se verá en los siguientes capítulos). Esa conexión se debe a que ciertos complejos simpliciales tienen una estructura muy similar a las esferas o bolas del espacio \mathbb{R}^d , pero tienen la ventaja de ser finitos, así que se pueden dar argumentos más combinatorios. Por ejemplo, un triángulo es un 2 simplejo, pero topológicamente es lo mismo que la envolvente convexa de una esfera \mathbb{S}^1 . También, las bolas \mathbb{B}^d pueden ser trianguladas usando complejos simpliciales, y de esta manera podemos darle un sabor combinatorio a varios resultados topológicos (como el lema de Tucker, que se verá en el siguiente capítulo).

La parte (i) de la definición de complejo simplicial geométrico nos permite darle una estructura combinatoria a cada complejo simplicial geométrico, esos objetos son llamados *complejos simpliciales abstractos*.

Definición 1.1.6. *Un complejo simplicial abstracto es un par (V, K) , donde V es un conjunto y K es una familia no vacía de subconjuntos de V que es cerrada bajo subconjuntos, es decir, si $F \in K$ y $G \subset F$, entonces $G \in K$ (en particular el conjunto vacío está en K). El complejo simplicial será denotado como K y el conjunto V será denotado como $V(K)$. Los elementos de $V(K)$ son llamados vértices, los conjuntos en K son llamados simplejos abstractos y la dimensión de K es $\max\{|F| - 1 : F \in K\}$.*

Para cada complejo simplicial geométrico Δ con vértices $\{v_1, \dots, v_m\}$, podemos definir un complejo simplicial abstracto K con vértices $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, y los simplejos de K serán los conjuntos de vértices de los simplejos geométricos de Δ . En este caso, se dirá que $\|\Delta\|$ es una *realización geométrica* de K . En [18] se demuestra que cada complejo simplicial abstracto K tiene una realización geométrica.

Intuitivamente, tenemos que dos simplejos geométricos de la misma dimensión son iguales, ya que uno se puede obtener del otro moviendo continuamente los vértices del simplejo, además, definen el mismo simplejo abstracto. Por esta razón, diremos que dos simplejos geométricos de la misma dimensión son isomorfos.

De manera similar, diremos que dos complejos simpliciales geométricos son isomorfos, si definen el mismo complejo simplicial abstracto, ya que esto significa que tienen los mismos simplejos y las mismas incidencias. Por lo tanto, para nuestros propósitos, las realizaciones geométricas de un complejo simplicial K serán isomorfas, por lo cual a cada realización geométrica de K la denotaremos como $\|K\|$.

En esta tesis nos interesa definir objetos con estructuras similares a la de las esferas, por lo cual le daremos una interpretación geométrica a cada complejo simplicial abstracto, así que trabajaremos con complejos simpliciales abstractos donde cada uno de sus vértices son a su vez simplejos abstractos.

Por ejemplo, el complejo simplicial con vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y con simplejos

$$\begin{aligned} &\{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \\ &\{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_6, v_1, v_3\}, \{v_6, v_1, v_4\}, \{v_6, v_2, v_3\}, \\ &\{v_6, v_2, v_4\}, \{v_5, v_1, v_3\}, \{v_5, v_1, v_4\}, \{v_5, v_2, v_3\}, \{v_5, v_2, v_4\}\} \end{aligned}$$

es un complejo simplicial donde cada uno de sus vértices es un simplejo abstracto. Además, su realización geométrica es la frontera de un octaedro.

Ahora definiremos la *unión de complejos simpliciales*, para eso primero denotemos como $A \uplus B$ al conjunto $(A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$, de esta manera, tenemos que $A \uplus B$ es una unión disjunta, ya que a los elementos de A los estamos etiquetando con el número 1 y a los elementos de B los estamos etiquetando con el número 2.

Dados dos complejos simpliciales abstractos K y L , con conjuntos de vértices $V(K)$ y $V(L)$, podemos definir $K * L$, de la siguiente manera: los vértices de $K * L$ serán $V(K) \uplus V(L)$ y el conjunto de simplejos será $\{F \uplus G : F \in K, G \in L\}$. Con esta definición es claro que $K * L$ es otro complejo simplicial y diremos que es la unión de K y L .

Veamos cómo se ve geoméricamente el complejo simplicial $K * L$. Consideremos $\|K\|$ y $\|L\|$ realizaciones geométricas de K y L tales que $\|V(K)\|$ y $\|V(L)\|$ son ajenos. Entonces, los vértices de $\|K * L\|$ serán la unión de los vértices de $\|K\|$ y de $\|L\|$. Además, los simplejos de $\|K * L\|$ serán las envolventes convexas de la unión de los vértices de σ y τ , para cada σ simplejo geométrico de $\|K\|$ y τ simplejo geométrico de $\|L\|$. Al objeto $\|K * L\|$ le podemos dar una estructura de complejo simplicial abstracto a través de sus caras, ese complejo coincide con la definición combinatoria que dimos de $K * L$.

Si K, L, M son complejos simpliciales, entonces $(K * L) * M$ y $K * (L * M)$ son isomorfos, es decir, la operación $*$ es asociativa. Entonces, dado un complejo simplicial K , podemos aplicarle la operación $*$ n veces, el cual será denotado por K^{*n} .

Por ejemplo, si tenemos un complejo simplicial finito G con $V(G) = \{g_1, g_2\}$ y simplejos $\{\emptyset, \{g_1\}, \{g_2\}\}$, entonces el complejo simplicial $G^{*2} = G * G$ tiene como vértices

$$V(G^{*2}) = \{(g_1, 1), (g_2, 1), (g_1, 2), (g_2, 2)\}$$

y como simplejos a

$$\{\emptyset, \{(g_1, 1), (g_1, 2)\}, \{(g_1, 1), (g_2, 2)\}, \{(g_2, 1), (g_1, 2)\}, \{(g_2, 1), (g_2, 2)\}\}.$$

Combinatoriamente, tenemos que G es la unión de dos vértices y G^{*2} es la gráfica bipartita $K_{2,2}$. La realización geométrica de G^{*2} es un ciclo de longitud 4 (la frontera de un cuadrado), el cual topológicamente es lo mismo que una esfera S^1 .

Análogamente podemos construir $G^{*3} = G^{*2} * G$, que geoméricamente es la frontera de un octaedro, que es isomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 . Observemos que si solo consideramos los simplejos de dimensión 0 y 1 de G^{*3} (es decir, los vértices y las aristas), tendremos a la gráfica tripartita $K_{2,2,2}$.

Si seguimos construyendo los espacios G^{*n} , veremos que G^{*n} geoméricamente es la frontera del politopo cruz n dimensional, el cual es definido como el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$. Es decir, la frontera de los politopos cruz tienen la estructura combinatoria de los complejos simpliciales G^{*n} . Además, si solo consideramos los simplejos de dimensión 0 y 1 de G^{*n} , tendremos a la gráfica n partita $K_{2,2,\dots,2}$.



Figura 1.2: Ejemplos de politopos cruz: cuadrado y octaedro.

En general, si G es un conjunto finito de vértices, el complejo simplicial G^{*n} geoméricamente es un objeto que tiene propiedades topológicas muy parecidas a las esferas, así que serán muy útiles para poder generalizar el teorema de Borsuk Ulam con funciones G equivariantes. Además, si solo consideramos los simplejos de dimensión 0 y 1 de G^{*n} , tendremos a la gráfica n partita con todas sus componentes isomorfas a G .

1.2. Teoría de grupos

La acción de grupos juega un papel muy importante en esta tesis, ya que para poder utilizar el teorema de Dold en la demostración del teorema principal, definiremos una acción libre usando un grupo de orden un número primo. También, en la demostración del teorema de Dold utilizaremos que la cardinalidad de las órbitas es múltiplo del orden del grupo. En esta sección desarrollaremos las definiciones y todas las herramientas necesarias de grupos finitos para poder llegar a esos resultados de acción de grupos.

Una operación binaria sobre un conjunto G , es una función $m : G \times G \rightarrow G$. Por ejemplo, en los números reales, la suma usual $a + b$ es una operación binaria. Un *grupo* es una estructura algebraica con una operación binaria que cumple varios axiomas.

Definición 1.2.1. *Un grupo es un conjunto G (no vacío) con una operación binaria $*$ tal que:*

- (i) *$*$ es asociativa en G : para cada $x, y, z \in G$, $x * (y * z) = (x * y) * z$.*
- (ii) *Hay un elemento $e \in G$, llamado identidad o neutro, tal que para todo $x \in G$, $e * x = x = x * e$.*
- (iii) *Para cada $x \in G$, existe un elemento $y \in G$ (el inverso de x) tal que $x * y = e = y * x$.*

Un ejemplo de grupo es \mathbb{Z}_n , donde la operación binaria es la suma módulo n . En este ejemplo, el 0 es el elemento neutro, y para cada $x \in \mathbb{Z}_n$, el número $n - x$ es el inverso de x .

A partir de este momento vamos a denotar por x^{-1} al inverso multiplicativo de x , y por xy nos referimos a $x * y$. También, aunque la mayoría de las siguientes definiciones son válidas para cualquier grupo, vamos a estar trabajando con grupos finitos.

Dado un grupo G , diremos que $H \subset G$ es un *subgrupo* de G si H es no vacío y es un grupo con la operación inducida por G . Una observación inmediata es que H es un subgrupo de G si es cerrado bajo la operación y para cada $s \in H$, $s^{-1} \in H$.

Para cada $a \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, a^n denotará aplicarle a a la operación n veces, a^{-n} denotará el inverso de a^n y $a^0 = e$. Entonces, para cada $a \in G$, definimos el *subgrupo generado por a* , como el conjunto $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Siempre que tomemos a^n y a^m en el subgrupo generado por a , entonces $a^n a^m = a^{n+m}$, por lo que es cerrado bajo la operación. También, para cada a^n en el subgrupo generado por a , tenemos que a^{-n} también está en el subgrupo generado por a . Por lo tanto, el subgrupo generado por un elemento de G es, en efecto, un subgrupo de G .

Para cada $a \in G$, se define el *orden de a* como el mínimo entero positivo n tal que $a^n = e$, el neutro del grupo. Notemos que un entero positivo m cumple que $a^m = e$ si y solo si m es múltiplo del orden de a . Además, si $a \in G$ con orden n , entonces el conjunto $\{a, a^2, \dots, a^n\}$ es igual al subgrupo generado por a , ya que a partir de ahí los elementos se ciclan. De esto se sigue que la cantidad de elementos del subgrupo generado por a es igual al orden de a . A la cantidad de elementos de un grupo G , se le conoce como el *orden de G* .

Dado un grupo G , $g \in G$ y H un subgrupo de G , definimos gH como el conjunto $\{gs | s \in H\}$. Para cada subgrupo H , el conjunto $\{gH | g \in G\}$ forma una partición de G , y es llamado el conjunto de *clases laterales izquierdas de H* . La cardinalidad de este conjunto es denotada por $[G : H]$ y es llamado el *índice de H en G* .

Uno de los teoremas más importantes en teoría de grupos es el siguiente, y es el resultado base para demostrar todos los teoremas de grupos finitos que involucran divisibilidad.

Teorema 1.2.2 (Lagrange). *Sea H un subgrupo de un grupo finito G , entonces $|G| = [G : H]|H|$.*

Como el orden de a es igual a la cardinalidad del subgrupo generado por a , como corolario directo tenemos que el orden de un elemento divide a la cardinalidad del grupo.

Así, dado un grupo G de orden p un número primo, tenemos que todos sus elementos tienen orden p o 1, pero el único elemento de orden 1 es e . De esto se sigue que hay un elemento g en G que su generado es todo G . Si un grupo G cumple que es igual al subgrupo generado por $g \in G$, se dice que G es un *grupo cíclico*, y que g es un *generador* de G . Como acabamos de ver, todos los grupos de orden un número primo son cíclicos.

Dados dos grupos $(G, \cdot), (H, *)$ diremos que son isomorfos si existe una función biyectiva $f : G \rightarrow H$ tal que para cada $a, b \in G$, $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$. Intuitivamente dos grupos son isomorfos si tienen la misma cardinalidad y la misma estructura de grupo. Es decir, si a tiene orden n en G , entonces $f(a)$ también tiene orden n en H . Si G es cíclico, entonces H también es cíclico.

Uno de los primeros resultados de isomorfismos es que todos los grupos de orden p , un número primo fijo, son isomorfos. Ese resultado es muy intuitivo, ya que todos los elementos diferentes del neutro, tienen orden p . Por esta razón, en muchas ocasiones para referirnos a un grupo de orden primo, solo nos fijamos en el grupo \mathbb{Z}_p con la suma usual de congruencias.

La manera más común en que los grupos interactúan con otros objetos matemáticos es a través de la *acción de grupos*. Intuitivamente una acción de grupos sobre un conjunto X es una reetiquetación de los elementos de X .

Definición 1.2.3. *Sea X un conjunto y G un grupo. Se dice que G actúa sobre X si para cada $g \in G$ hay una función $\alpha_g : X \rightarrow X$ tal que:*

- (i) *Para cada $g, h \in G$, $\alpha_g \alpha_h = \alpha_{gh}$.*
- (ii) *α_e es la función identidad en X .*

Notemos que para cada $g \in G$, las composiciones $\alpha_g \alpha_{g^{-1}}$ y $\alpha_{g^{-1}} \alpha_g$ son la función identidad, por lo tanto, cada función α_g es biyectiva. Esto formaliza la intuición que dimos de acción de grupos.

Ejemplo 1.2.4. *Un ejemplo es un grupo finito G actuando sobre el mismo por la multiplicación a la izquierda: para cada $g, h \in G$ definimos $\alpha_g(h) = gh$. Por definición tenemos que α_e es la función identidad en X , además, (i) se sigue de la asociatividad de la operación en el grupo.*

Un grupo G lo podemos pensar como complejo simplicial: los vértices del complejo serán los elementos del grupo G y sus simplejos todos los subconjuntos unitarios de G y el conjunto vacío. Abusaremos de la notación y a este complejo simplicial también lo denotaremos como G .

En el ejemplo del final de la sección anterior, vimos un complejo simplicial G con $V(G) = \{g_1, g_2\}$ y simplejos $\{\emptyset, \{g_1\}, \{g_2\}\}$, el cual es isomorfo al complejo simplicial \mathbb{Z}_2 . También vimos que geoméricamente, los complejos $G = \mathbb{Z}_2$, $G^{*2} = \mathbb{Z}_2^{*2}$, $G^{*3} = \mathbb{Z}_2^{*3}$ son la unión de dos vértices, la frontera de un cuadrado y la frontera de un octaedro, respectivamente.

Con el ejemplo anterior podemos intuir que dos grupos del mismo orden son isomorfos como complejos simpliciales. Sin embargo, la acción de estos grupos sobre el complejo simplicial que definen no necesariamente tiene que ser la misma. A continuación veremos dos ejemplos de grupos del mismo orden, pero que la acción sobre el complejo simplicial que definen, es distinta.

Ejemplo 1.2.5. *Consideremos el grupo \mathbb{Z}_4 con elementos $\{0, 1, 2, 3\}$. La acción del grupo \mathbb{Z}_4 sobre el complejo simplicial \mathbb{Z}_4 es con la suma usual de congruencias: $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, \dots, 3 + 0 = 3$.*

Ejemplo 1.2.6. *Consideremos el grupo $G = \{a, b, c, d\}$ de orden 4. La acción de G sobre el complejo simplicial G está dada por: $aa = a, ab = b, ac = c, ad = d, ba = b, bb = a, bc = d, bd = c, ca = c, cb = d, cc = a, cd = b, da = d, db = c, dc = b, dd = a$.*

Es fácil verificar que en el ejemplo 1.2.5 los elementos 0, 1, 2, 3 tienen orden 1, 4, 2, 4, respectivamente. Por otro lado, en el ejemplo 1.2.6 los elementos a, b, c, d tienen orden 1, 2, 2, 2, respectivamente. Si el grupo del ejemplo 1.2.6 fuera isomorfo a \mathbb{Z}_4 , sus elementos deberían tener orden 1, 2, 4, 4, lo cual ya vimos que no es cierto. De esto concluimos que los grupos no son isomorfos, y por lo tanto, la acción sobre el complejo simplicial que definen, no es la misma.

La acción del ejemplo 1.2.4 la podemos extender a G^{*n} : para cada $g \in G$ y cada vértice $h \in G^{*n}$ (elemento de alguna de las copias de G), tenemos que $\alpha_g(h)$ también será un vértice gh de G^{*n} (h y gh estarán en la misma copia de G). Para cualquier otro simplejo $\{h_1, \dots, h_m\}$ (donde los h_i son vértices), tendremos que $\alpha_g(\{h_1, \dots, h_m\}) = \{\alpha_g h_1, \dots, \alpha_g h_m\}$ (ver figura 1.3).

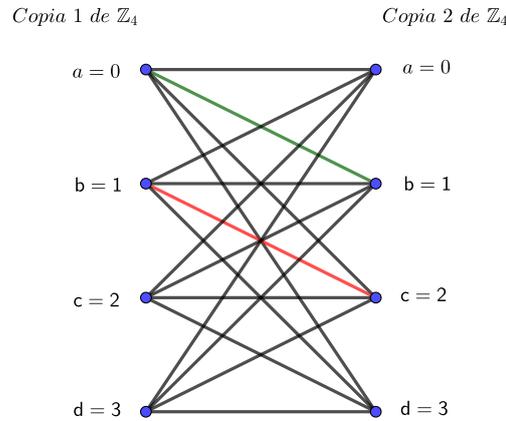


Figura 1.3: En la figura tenemos dos copias isomorfas de \mathbb{Z}_4 y las aristas correspondientes del complejo simplicial \mathbb{Z}_4^{*2} (la figura no muestra la realización geométrica de \mathbb{Z}_4^{*2} , ya que el dibujo no es un complejo simplicial geométrico). Si nos tomamos los vértices b (de la primera copia de \mathbb{Z}_4) y c (de la segunda copia de \mathbb{Z}_4), tenemos que la arista que forman (la arista roja) es un simplejo de \mathbb{Z}_4^{*2} . Si aplicamos la acción con el elemento $d = 3$, tenemos que $db = 3 + 1 = 0 = a$ (con a en la primera copia) y $dc = 3 + 2 = 1 = b$ (con b en la segunda copia), por lo cual $d(\{b, c\}) = \{db, dc\} = \{a, b\}$. En otras palabras, cuando aplicamos la acción con el elemento d , la arista roja es mandada a la arista verde.

Para hacer más ligera la notación, denotaremos por $g(x)$ a $\alpha_g(x)$.

Diremos que una acción de un grupo G sobre un conjunto X es *libre*, si no hay $g \in G \setminus \{e\}$, que tenga puntos fijos. Es decir, para cada $g \neq e$ y para cada $x \in X$, $g(x) \neq x$. Sea p un número primo y consideremos \mathbb{Z}_p actuando sobre un conjunto X . Como \mathbb{Z}_p tiene orden un número primo p , entonces es cíclico, así que sea g un generador. Sea g^k cualquier otro elemento de G , distinto a g y a e , entonces k tiene inverso multiplicativo módulo p , digamos que ese inverso es l (es decir $kl \equiv 1 \pmod{p}$). Si $g^k(x) = x$, entonces por definición de acción de grupos $g^{2k}(x) = g^k g^k(x) = g^k(g^k(x)) = g^k(x) = x$, e inductivamente tendremos que $x = g^{kl}(x) = g(x)$. Por lo tanto, la acción de \mathbb{Z}_p es libre si y solo si su generador g no tiene elementos fijos. Notemos que la demostración funciona para cualquier grupo finito de orden un número primo p .

Ejemplo 1.2.7. Si hacemos actuar el grupo cíclico \mathbb{Z}_p (con p un número primo) sobre el conjunto $X = \{(x_1, \dots, x_p) | x_i \in \mathbb{R}^d\}$, dado por $g(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$, donde g es un generador del grupo \mathbb{Z}_p , tendremos que la acción es libre si y solo si g no tiene puntos fijos. Observemos que si $g(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, entonces $(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$, y por lo tanto, $x_1 = x_2 = \dots = x_p$. Así, si queremos que la acción sea libre, basta con definir la acción sobre un subconjunto de X donde no todos los x_i sean iguales entre sí.

Ejemplo 1.2.8. *La acción de un grupo G sobre el conjunto G^{*n} (con la multiplicación a la izquierda) también es libre: $gh = h$ solo si $g = e$. Además, por definición de G^{*n} , los vértices de un simplejo $\{h_1, \dots, h_m\}$ cumplen que están en diferentes copias de G , así que $g(\{h_1, \dots, h_m\}) = \{g(h_1), \dots, g(h_m)\}$ también será distinto a $\{h_1, \dots, h_m\}$, para g distinto de e . Por lo tanto, esta acción es libre.*

Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto X . Para cada $x \in X$, definimos la *órbita* de x como $Gx = \{g(x) | g \in G\}$, y el *estabilizador* de x como $G_x = \{g \in G | g(x) = x\}$.

Es fácil ver que el estabilizador de cualquier elemento es un subgrupo del grupo G , y que las órbitas forman una partición de X . Además, la cardinalidad de la órbita Gx es igual a $[G : G_x]$. Usando lo anterior y el teorema de Lagrange, tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.2.9. *Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X . Entonces, la cardinalidad de la órbita Gx es un divisor de la cardinalidad de G .*

Por ejemplo, si tenemos una acción de \mathbb{Z}_p sobre un conjunto X , entonces todas las órbitas tendrán tamaño p o 1 . Más aún, si esa acción es libre, entonces para cada elemento $x \in X$ y $g \in \mathbb{Z}_p \setminus \{e\}$, $g(x)$ será distinto de x , así que todas las órbitas serán de tamaño p .

Usando acción de grupos se puede demostrar el siguiente teorema (ver [19]).

Teorema 1.2.10 (Teorema de Cauchy). *Si G es un grupo finito y p es un divisor primo del orden de G , entonces G contiene un elemento de orden p , y por lo tanto, un subgrupo de orden p .*

El teorema de Cauchy es muy importante, ya que si se tiene una acción de un grupo finito G , entonces nos podemos fijar en la acción de algún subgrupo H de orden un número primo, y así asegurar que la acción de H sea libre.

1.3. Topología algebraica

Aunque el propósito de esta tesis es demostrar el teorema del Ham Sandwich y el teorema principal, las herramientas topológicas que veremos en esta sección han sido muy útiles en diferentes áreas de investigación de las matemáticas discretas. De hecho, una gran cantidad de problemas de combinatoria y geometría discreta han sido resueltos usando herramientas de topología algebraica. En esta sección veremos los resultados topológicos que se han usado para resolver problemas de repartición equitativa.

Uno de los temas de mayor interés en la topología algebraica es estudiar los hoyos que tienen los espacios topológicos, ya que estos nos ayudan a identificar espacios con estructuras muy parecidas. El concepto de *conexidad* será fundamental para definir objetos con estructura muy parecida a las esferas, y así dar una generalización del teorema de Borsuk Ulam para funciones G equivariantes.

Definición 1.3.1. *Sea $k \geq 0$ un entero. Un espacio topológico X es k conexo si para cada $l = 0, 1, \dots, k$, cada función continua $f : \mathbb{S}^l \rightarrow X$ se puede extender a una función continua $g : \mathbb{B}^{l+1} \rightarrow X$. Además, diremos que un espacio es -1 conexo si es no vacío.*

La definición nos dice que cada esfera \mathbb{S}^l (con $l = 0, 1, \dots, k$) en el espacio X se puede contraer a un punto de X , así que intuitivamente, un espacio es k conexo si no tiene hoyos de dimensión más pequeña que k .

Un espacio X es 0 conexo si es conexo por trayectorias (y no vacío).

Un ejemplo muy intuitivo e importante es el de la esfera. Aunque puede parecer muy intuitivo que todas las esferas \mathbb{S}^k (con $k < d$) en la esfera \mathbb{S}^d se pueden contraer a un punto, debemos de tener cuidado, ya que la esfera \mathbb{S}^k puede estar encajada de una manera muy extraña, es decir, si imaginamos que tenemos una cuerda (cerrada) enrollada en \mathbb{S}^d , entonces esa cuerda puede estar muy enrollada.

Teorema 1.3.2. *La esfera \mathbb{S}^d es $d - 1$ conexa.*

Demostración. Demostraremos que cada función continua $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^d$, con $k < d$, es homotópica a otra función $g : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^d$ que no es suprayectiva. Recordemos que dos funciones $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^d$ y $g : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^d$ son homotópicas si existe una función continua $F : \mathbb{S}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^d$ tal que $f(x) = F(x, 0)$ y $g(x) = F(x, 1)$. Intuitivamente, esta nueva función g , será una que nos permita desenredar la cuerda, hasta llegar a una esfera \mathbb{S}^k como las que nos imaginamos, entonces esa esfera sí se podrá contraer a un punto.

Como f es continua en una esfera compacta, entonces es uniformemente continua. Usando la continuidad uniforme, sabemos que existe un $\epsilon > 0$ tal que siempre que $\|x - y\| < \epsilon$, entonces $\|f(x) - f(y)\| < 1$. Sea Δ una triangulación de \mathbb{S}^k tal que cada simplejo en Δ tiene diámetro menor que ϵ . Definiremos g sobre cada simplejo de Δ .

Definimos $F : \mathbb{S}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^d$, como

$$F(x, t) = \frac{t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x)}{\|t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x)\|},$$

donde v_1, \dots, v_m son los vértices del soporte de x (el único simplejo que contiene a x en su interior relativo) y $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ es la combinación convexa de x .

Por construcción de Δ todos los $f(v_i)$ y $f(x)$ difieren en menos que 1, así que el segmento $f(v_i)f(x)$ no contiene al origen, por lo que la función F está bien definida y es continua (porque f es continua).

Notemos que $F(x, 0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$, y como las imágenes están sobre la esfera \mathbb{S}^d , entonces $F(x, 0) = f(x)$.

Definimos $g : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^d$, como $g(x) = F(x, 1)$, entonces f es homotópica a g . Como Δ es una triangulación de \mathbb{S}^k y g está encajando la esfera \mathbb{S}^k en la esfera \mathbb{S}^d , entonces para cada simplejo σ de Δ tenemos que $g(\sigma)$ es un simplejo de \mathbb{S}^k encajado en la esfera \mathbb{S}^d , por lo cual $g(\sigma)$ tiene dimensión a lo más $k < d$. De esto concluimos que $g(\sigma)$ está contenido en un hiperplano de \mathbb{R}^{d+1} (que pasa por el origen). Como una unión finita de hiperplanos no puede cubrir la esfera, entonces g no es suprayectiva, y se puede contraer a un punto.

Por lo tanto, \mathbb{S}^d es $d - 1$ conexa. □

Otra manera de identificar los agujeros de un espacio es a través de sus *grupos de homología*. Aunque el estudio de los grupos de homología queda fuera del propósito de esta tesis, los usaremos para caracterizar los problemas de k conexidad (un estudio más profundo del tema puede ser consultado en [11]). Los siguientes resultados (ver [18]) nos ayudarán a conocer la conexidad de los complejos simpliciales G^{*n} , que fueron definidos en la sección de geometría y conjuntos convexos.

Dado un complejo simplicial K , definiremos otro complejo simplicial $sd(K)$ de la siguiente manera: el conjunto de vértices $V(sd(K))$ es el conjunto de vértices $V(K)$ más el conjunto de simplejos de K . Después, ordenamos a los simplejos de K de acuerdo a la contención, entonces, las cadenas (los órdenes totales) son los simplejos de $sd(K)$. Al complejo simplicial $sd(K)$ se le conoce como la *subdivisión baricéntrica* del complejo K . La n subdivisión baricéntrica de K , denotado como $sd^n(K)$, es el complejo simplicial resultante de aplicarle n veces la operación sd , es decir, $sd^n(K) = sd(sd\dots(K))$ (n veces).

Lo que estamos haciendo geoméricamente para definir $\|sd(K)\|$ es lo siguiente: por cada simplejo de $\|K\|$ de dimensión mayor o igual a 1 ponemos un nuevo vértice en el centro del simplejo (en su baricentro), cada uno de esos vértices representará a su respectivo simplejo. Los vértices de $\|sd(K)\|$ son los vértices de $\|K\|$ más los nuevos vértices. Los simplejos de $\|sd(K)\|$ serán las envolventes convexas de los conjuntos $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, donde los σ_i son vértices de $\|sd(K)\|$ y los simplejos que representan los vértices $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ están ordenados de acuerdo a la contención. El complejo simplicial $\|sd(K)\|$ es la realización geométrica del complejo simplicial abstracto $sd(K)$.

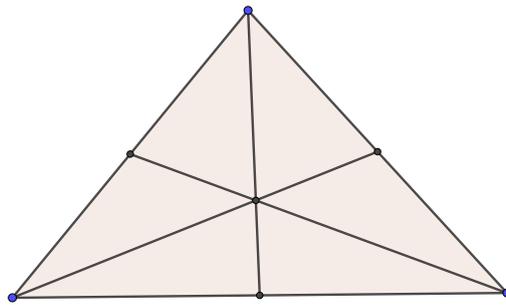


Figura 1.5: Subdivisión baricéntrica de un 2 simplejo o triángulo.

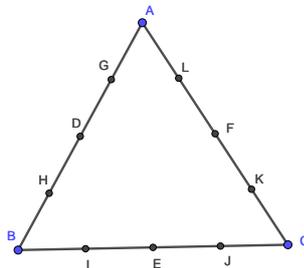


Figura 1.6: $sd^2(\Phi)$, donde Φ es el complejo simplicial con vértices A, B, C y aristas AB, BC, CA .

Como se puede observar, el complejo simplicial $sd^n(K)$ nos va dando triangulaciones más finas del complejo simplicial K . Una de sus principales aplicaciones es para demostrar el teorema

de aproximación simplicial, que enunciamos más adelante.

Diremos que una función $f : V(K) \rightarrow V(L)$ entre dos complejos simpliciales K, L , es una *función simplicial*, si para cada simplejo σ en K , entonces $f(\sigma)$ es un simplejo de L . Es decir, es una función que manda simplejos en simplejos.

Una *aproximación simplicial* de una función $f : \|K\| \rightarrow \|L\|$, es una función simplicial g de los vértices de una subdivisión de K a los vértices de L , que satisface $f(St(v)) \subset St(g(v))$, para cada vértice en la subdivisión de K .

En la figura 1.7 tenemos una función continua f de $\|\Phi\|$ (definido en la figura 1.6) al complejo simplicial de la figura 1.4. La función g es una aproximación simplicial de $V(sd^2(\Phi))$ a los vértices del complejo simplicial de la figura 1.4.

En la figura 1.7 también podemos observar que una aproximación de una función f es una función simplicial g que la podemos obtener moviendo continuamente la función f , es decir, g es homotópica a f .

Notemos que la estrella de F en el complejo simplicial $sd(\Phi)$ es $AC \setminus \{A, C\}$ (donde AC denota el segmento con extremos A y C), entonces si solo hubieramos hecho una subdivisión baricéntrica tendríamos que $f(St(F))$ no estaría contenida en $St(g(F))$, que es el triángulo con vértices $g(A), g(F), g(C)$ menos el segmento con vértices $g(A), g(C)$. Por esta razón fue necesario hacer una segunda subdivisión baricéntrica para obtener una aproximación simplicial de f .

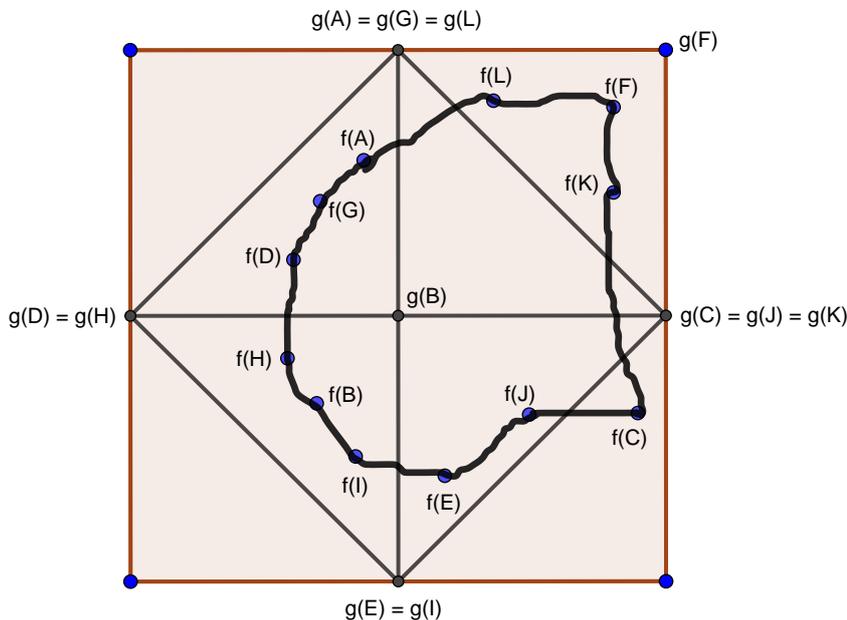


Figura 1.7: En la figura tenemos una aproximación simplicial g de una función continua f . La imagen $f(\|\Phi\|)$ es la curva cerrada de color negro, en donde marcamos de manera explícita la imagen de los vértices de $sd^2(\Phi)$.

Teorema 1.3.5 (Teorema de aproximación simplicial [11]). *Sean K y L complejos simpliciales finitos y $f : \|K\| \rightarrow \|L\|$ una función continua. Entonces, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una aproximación simplicial $g : V(sd^n(K)) \rightarrow V(L)$ de f .*

Con el teorema de aproximación simplicial, cada función continua $f : \|\mathbb{Z}_p^{*(n+1)}\| \rightarrow \|\mathbb{Z}_p^{*n}\|$ se puede convertir en una aproximación simplicial $g : V(L) \rightarrow V(\mathbb{Z}_p^{*n})$, donde L se obtiene de $\mathbb{Z}_p^{*(n+1)}$ a partir de subdivisiones baricéntricas.

Ahora veremos que toda función simplicial entre dos complejos simpliciales, induce dos funciones, una trabaja con las cadenas de simplejos y la otra función involucra grupos de homología.

El conjunto de k cadenas con coeficientes racionales de un complejo simplicial K , denotado por $C_k(K)$, es el espacio vectorial formado por elementos de la forma $a_1\sigma_1 + \dots + a_m\sigma_m$, donde cada σ_i es un simplejo de K de dimensión k , y cada a_i es un número racional. Recordemos que una función simplicial g manda cada simplejo σ en un simplejo $g(\sigma)$, sin embargo, eso no nos garantiza que los simplejos σ y $g(\sigma)$ tengan la misma dimensión.

Entonces, para cada función simplicial g de un complejo simplicial K a un complejo simplicial J , podemos definir otra función $g_{Ck} : C_k(K) \rightarrow C_k(J)$, de la siguiente manera: para cada simplejo σ (de K) de dimensión k , definimos $g_{Ck}(\sigma) = g(\sigma)$ si $g(\sigma)$ también es k dimensional, en otro caso definimos $g_{Ck}(\sigma) = 0$. Después, extendemos la definición de g_{Ck} de manera lineal:

$$g_{Ck}(a_1\sigma_1 + \dots + a_m\sigma_m) = a_1g_{Ck}(\sigma_1) + \dots + a_mg_{Ck}(\sigma_m).$$

La función g también induce una función $g_{Hk} : H_k(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(J, \mathbb{Q})$ en homología: $g_{Hk}([c]) = [g_{Ck}(c)]$.

La fórmula de la traza de Hopf [7] es un teorema que nos dice que podemos calcular el número de Lefschetz de la función g , de dos maneras distintas:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{traza}(g_{Ck}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{traza}(g_{Hk}),$$

donde el número de Lefschetz se define como el lado derecho de la igualdad.

Más adelante estaremos trabajando con los conjuntos de cadenas con coeficientes racionales (que son espacios vectoriales), entonces tiene sentido fijarnos en las bases de esos espacios vectoriales, y calcular $\text{traza}(g_{Ck})$ y $\text{traza}(g_{Hk})$ como la suma de la diagonal de una matriz de representación de g_{Ck} y g_{Hk} , respectivamente.

1.4. Teoría de la medida

Uno de los conceptos fundamentales en las matemáticas y en la vida humana es el de medida. Desde la primaria nos han enseñado a calcular la longitud de un segmento, el área de un polígono o el volumen de un objeto sólido en el espacio, sin embargo, hay objetos geométricos que no podríamos medir en la primaria, y también hay algunos que no sabemos si los podemos medir. La necesidad del hombre por poder medir longitud, área y volumen lo llevaron a dar definiciones precisas de medida.

En esta sección veremos la definición formal de medida y enunciaremos algunos resultados básicos que se ven en cursos de análisis y de teoría de la medida.

Antes de definir *medida*, daremos la siguiente definición para saber qué objetos sí vamos a poder medir.

Definición 1.4.1. *Sea X un conjunto no vacío. Diremos que Σ , un subconjunto de la potencia de X , es una σ -álgebra de X si cumple las siguientes condiciones:*

(i) Σ es no vacío.

(ii) Si $A \in \Sigma$, entonces $A^c \in \Sigma$ (es cerrada bajo complementos).

(iii) Si $A_1, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ (es cerrada bajo uniones numerables).

Una consecuencia directa de (ii) y (iii) es que Σ también es cerrada bajo intersecciones numerables. Aplicando (i), (ii) y que es cerrada bajo intersecciones tenemos que $\emptyset \in \Sigma$, entonces por (ii), $X \in \Sigma$.

Notemos que la potencia de X es una σ -álgebra de X , y contiene a todas las demás σ -álgebras de X .

Un ejemplo muy importante es cuando estamos en un espacio topológico (X, τ) . Recordemos que τ es una topología sobre X , si τ es un subconjunto de la potencia de X que cumple: $X, \emptyset \in \tau$, si $A_1, \dots, A_n, \dots \in \tau$ entonces $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \tau$, dada una colección arbitraria de $A_i \in \tau$ entonces $\cup_i A_i \in \tau$. Dado un espacio topológico (X, τ) , llamaremos σ -álgebra de Borel a la generada por sus abiertos, es decir, la σ -álgebra más pequeña que contiene a sus abiertos. Es denotada por $B(X)$ y sus elementos son llamados borelianos.

Ahora sí, definiremos medida sobre una σ -álgebra.

Definición 1.4.2. *Sea X un conjunto no vacío y Σ una σ -álgebra de X . Una función $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ es una medida, si:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Para cada $A_1, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ familia de conjuntos ajenos dos a dos, tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Además, (X, Σ, μ) (o solo (X, Σ)) es llamado espacio de medida.

Diremos que una medida es *finita* si $\mu(X)$ es finita. Si $\mu(X) = 1$, decimos que es una *medida de probabilidad*. Además, dadas dos medidas μ, ν se dice que μ es *absolutamente continua con respecto a ν* , si y solo si para cada $B \in \Sigma$ con $\nu(B) = 0$, entonces $\mu(B) = 0$.

Dado un conjunto finito X y Σ el conjunto potencia de X , podemos definir una medida que asigne a cada $A \in \Sigma$ el número de elementos de A . Esta medida es conocida como la *medida de contar*. De manera similar, podemos considerar un conjunto finito $S \subset \mathbb{R}^2$, a \mathbb{R}^2 con Σ su conjunto potencia, y definir $\mu(A)$ como la cantidad de elementos que hay en $S \cap A$. Esta medida se conoce como la *medida de contar inducida por el conjunto S* .

Otro ejemplo es la *medida de Lebesgue* [3], la cual es una medida definida en los Borelianos de \mathbb{R}^d que generaliza la noción de longitud, área y volumen. Esta medida en \mathbb{R} cumple que cada intervalo $[a, b]$ mide $b - a$, además, es la única medida que a los rectángulos acotados de \mathbb{R}^d les asigna la noción que tenemos de volumen.

Teorema 1.4.3 (La medida de Lebesgue [3]). *Hay una única medida μ sobre los conjuntos de Borel de \mathbb{R}^d , tal que $\mu([a, b]) = (b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d)$ para cada rectángulo acotado $[a, b] = [b_1 - a_1] \times \dots \times [b_d - a_d]$ en \mathbb{R}^d .*

Una *medida finita de Borel* μ en \mathbb{R}^d es una medida finita en \mathbb{R}^d definida sobre los borelianos de \mathbb{R}^d , esto quiere decir que todos los abiertos y cerrados de \mathbb{R}^d son medibles. Un caso particular interesante es cuando μ es la restricción de la medida de Lebesgue a un subconjunto compacto A de \mathbb{R}^d , esto es, para cada X Lebesgue medible, $\mu(X) = \lambda(X \cap A)$, donde λ representa la medida d dimensional de Lebesgue. Este es el ejemplo que muchas veces ilustra el teorema del Ham Sandwich, ya que si colocamos 2 compactos en \mathbb{R}^2 , entonces el teorema del Ham Sandwich nos dice que existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambas figuras.

Ahora definiremos la integral de una función con respecto a una medida para dar un resultado de convergencia. Primero definiremos la integral de funciones no negativas que toman un número finito de valores (funciones simples), después vamos a generalizar la definición a funciones medibles no negativas usando su aproximación con funciones simples, y finalmente extenderemos la definición a todas las funciones medibles usando la descomposición en la parte positiva y negativa de una función. Todos estos pasos están bien justificados en [3].

Si $(X, \Sigma), (Y, \Gamma)$ son espacios de medida, diremos que $f : X \rightarrow Y$ es una *función medible*, si y solo si para cada $F \in \Gamma$ se tiene que $f^{-1}(F) \in \Sigma$.

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) , diremos que $h : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ es *simple* si existen $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ tal que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una partición de X y $h(A_i) = a_i$, para cada i . Si h es una función simple, diremos que h es *integrable* si siempre que $a_i \neq 0$, entonces $\mu(A_i)$ es finita. En ese caso definimos

$$\int_X h d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

y para cada $B \in \Sigma$ definimos

$$\int_B h d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(B \cap A_i).$$

Para cada función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ medible y no negativa, definimos

$$\int_X f d\mu = \text{Sup} \left\{ \int_X h d\mu \mid h : X \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ es simple y } 0 \leq h(x) \leq f(x) \right\},$$

siempre que ese supremo exista y sea finito.

Recordemos que para cada función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ existen funciones $f^+, f^- : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ no negativas tales que $f = f^+ - f^-$ (a saber, $f^+ = \frac{f + |f|}{2}$ y $f^- = \frac{|f| - f}{2}$). Cuando f sea medible, definimos

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

siempre y cuando existan las integrales de f^+, f^- .

En [20] se dice que dada una medida, f_n converge en casi cualquier parte a f si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ excepto en un conjunto de medida cero. También demuestran el siguiente teorema, que es uno de los teoremas clásicos de convergencia.

Teorema 1.4.4. *El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue* Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^d)$ una sucesión de funciones integrables y $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ otra función integrable tal que $f_n(x) \leq g(x)$ para toda n y para toda x . Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que para toda $x \in X$, $f_n(x)$ converge en casi cualquier parte a $f(x)$. Entonces, f es integrable y $\int f_n d\mu$ converge a $\int f d\mu$.

Como veremos más adelante, el teorema anterior es de gran ayuda cuando se quiere demostrar la continuidad de una función.

Capítulo 2

El teorema del Ham Sandwich

2.1. El teorema de Borsuk Ulam

El teorema de Borsuk Ulam es el teorema topológico más usado para resolver problemas de geometría discreta, además, varias generalizaciones del teorema de Borsuk Ulam (como el teorema de Dold, que se verá en el siguiente capítulo) han servido para generalizar problemas combinatorios (se pueden ver más detalles en [18]). Hay una gran diversidad de demostraciones de este teorema que solo usan herramientas de un área matemática: hay demostraciones combinatorias, geométricas y topológicas.

En esta sección daremos una demostración combinatoria del teorema de Borsuk Ulam, demostrando su equivalencia con el lema de Tucker. Primero veremos diferentes versiones del teorema de Borsuk Ulam y elijiremos el más conveniente para probar su equivalencia con el lema de Tucker.

La versión más conocida del teorema de Borsuk Ulam es la siguiente.

Teorema 2.1.1. *Para cada función continua $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, existe un punto $x \in \mathbb{S}^d$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

El teorema de Borsuk Ulam es muy similar al teorema del valor intermedio, y la siguiente versión hace más intuitiva esta afirmación. Decimos que una función $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es *antipodal* si para todo $x \in \mathbb{S}^d$, $f(-x) = -f(x)$. De esta manera si f es continua y antipodal, y tomamos el caso particular $d = 1$, siempre que tengamos un valor $f(x) > 0$, también tendremos $f(-x) = -f(x) < 0$, así que el teorema del valor intermedio nos diría que el 0 está en la imagen de f .

Teorema 2.1.2. *Para cada función continua y antipodal $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, existe un punto $x \in \mathbb{S}^d$ tal que $f(x) = 0$.*

Para ver que el teorema 2.1.1 implica el teorema 2.1.2, consideremos $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continua y antipodal, entonces 2.1.1 nos dice que existe $x_0 \in \mathbb{S}^d$ tal que $f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0)$, entonces $2f(x_0) = 0$, por lo tanto, $f(x_0) = 0$. Para la otra implicación, consideremos $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continua, y definamos $g : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ como $g(x) = f(x) - f(-x)$, entonces g también es continua, además, $g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$, por lo cual g es antipodal. Por 2.1.2 existe $x_0 \in \mathbb{S}^d$ tal que $g(x_0) = 0$, por lo tanto $f(x_0) = f(-x_0)$. De esto tenemos que el teorema 2.1.1 y el teorema 2.1.2 son equivalentes.

Otras versiones equivalentes del teorema de Borsuk Ulam son las siguientes.

Teorema 2.1.3. *No existe $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ continua y antipodal.*

Teorema 2.1.4. *No existe $f : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ continua tal que f restringida a la frontera de \mathbb{B}^d sea antipodal.*

Demostremos que todas las versiones son equivalentes.

Demostración. Equivalencia de 2.1.2 y 2.1.3 Primero veamos que 2.1.2 implica 2.1.3, por contradicción. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ continua y antipodal, como $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, entonces por 2.1.2, existe $x_0 \in \mathbb{S}^d$ tal que $f(x_0) = 0$. Esto es una contradicción, ya que la imagen de f está contenida en la esfera \mathbb{S}^{d-1} , y el 0 no está en \mathbb{S}^{d-1} .

Ahora supongamos 2.1.3 y demostremos 2.1.2, de nuevo por contradicción. Supongamos que $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua y antipodal tal que no existe $x_0 \in \mathbb{S}^d$ con $f(x_0) = 0$, entonces, podemos definir la función $g : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ como $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$. Como f es continua y antipodal, entonces g es continua y antipodal, lo cual contradice 2.1.3.

Equivalencia de 2.1.3 y 2.1.4 Veamos que 2.1.3 implica 2.1.4, por contrapositiva. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ continua y antipodal en la frontera. Sea $\varphi : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ dada por $\varphi(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_d, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_d^2})$.

Definimos $g : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ como

$$g(x) = \begin{cases} f\varphi^{-1}(x) & \text{si } x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \text{ con } x_{d+1} \geq 0 \\ -f\varphi^{-1}(-x) & \text{si } x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \text{ con } x_{d+1} \leq 0 \end{cases}$$

Como f es continua y antipodal, g también es continua y antipodal.

Para la otra implicación, supongamos que existe $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ continua y antipodal (también lo haremos por contrapositiva). Definamos $g : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$, como $g(x) = f(\varphi(x))$. Como f es continua y antipodal, g también es continua y antipodal. □

Ahora demostraremos el lema de Tucker, para después demostrar que es equivalente al teorema 2.1.4.

Decimos que una triangulación T de la bola \mathbb{B}^d es *antipodalmente simétrica en su frontera* si para cada simplejo σ de T en la frontera de \mathbb{B}^d (\mathbb{S}^{d-1}), entonces $-\sigma$ también es un simplejo de T .

Teorema 2.1.5. El lema de Tucker *Sea T una triangulación de \mathbb{B}^d tal que es antipodalmente simétrica en su frontera. Sea $\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$ una etiquetación de los vértices de T que satisface que $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ para cada vértice en la frontera de \mathbb{B}^d (λ es antipodal en la frontera). Entonces, existe un 1 simplejo (una arista) en T tal que sus dos vértices tienen números opuestos (i y $-i$).*

Demostración. Denotemos por C^d al politopo cruz de dimensión d . Observemos que cada triangulación de C^d se puede obtener primero triangulando C^d con los hiperplanos coordenados y después extendiendo la triangulación (refinar la triangulación). Triangulando de esa manera, tendremos que el signo de las coordenadas del interior relativo de cada simplejo σ es constante. Llamemos triangulación especial a este tipo de triangulaciones.

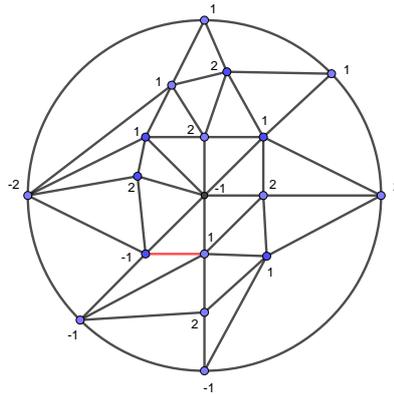


Figura 2.1: Triángulación antipodalmente simétrica en su frontera y una arista roja con sus vértices etiquetados con +1 y -1.

Daremos la demostración con una triangulación especial del politopo cruz de dimensión d . Notemos que al hacer esto no estamos perdiendo generalidad, ya que en toda triangulación de \mathbb{B}^d (antipodalmente simétrica en su frontera), podemos elegir un vértice (en el interior de \mathbb{B}^d) de manera arbitraria, tomarlo como nuestro origen para formar los hiperplanos coordenados, y empezar a mover continuamente los demás vértices hasta llegar a una triangulación especial de C^d (es decir, el signo de las coordenadas del interior relativo de cada simplejo es constante). Además, no usaremos ninguna propiedad de estas triangulaciones especiales, solo estaremos trabajando con ellas para que sea más fácil la notación. Por ejemplo, los vértices de la triangulación de la figura 2.1 se pueden mover continuamente hasta llegar a la triangulación especial de la figura 2.2.

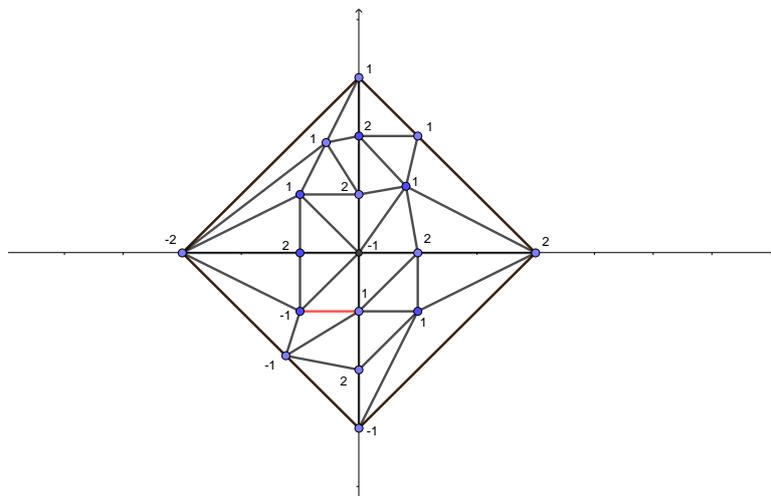


Figura 2.2: Triángulación especial isomorfa a la triangulación de la figura 2.1.

Sea T una triangulación especial de C^d y sea $\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$ una etiquetación antipodal en la frontera.

Daremos una demostración por paridad. Primero definiremos una gráfica sobre un conjunto de simplejos que llamaremos simplejos felices.

Para cada simplejo $\sigma \in T$, denotemos por $\lambda(\sigma)$ al conjunto de las etiquetas de sus vértices. También, definamos al conjunto $S(\sigma)$ de la siguiente manera: siempre que la i ésima coordenada del interior relativo de σ sea distinto de cero, pongamos $+i$ en $S(\sigma)$ si la i ésima coordenada es positiva, o ponemos $-i$ en $S(\sigma)$ si la i ésima coordenada es negativa. En otras palabras, si $x = (x_1, \dots, x_d)$ está en el interior relativo de σ , entonces

$$S(\sigma) = \{+i : x_i > 0, i = 1, \dots, d\} \cup \{-i : x_i < 0, i = 1, \dots, d\}.$$

Un simplejo σ en T es un simplejo feliz, si $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$. Observemos que si σ es un simplejo feliz con $|S(\sigma)| = k$, entonces σ está generado por a lo más k ejes coordenados, por lo cual, su dimensión es a lo más k . Por otro lado, se necesitan al menos k vértices para que la etiquetación $\lambda(\sigma)$ contenga a $S(\sigma)$, por lo cual σ contiene al menos k vértices y su dimensión es al menos $k - 1$. Por lo tanto, un simplejo feliz σ con $|S(\sigma)| = k$, es de dimensión k o de dimensión $k - 1$. Diremos que un simplejo feliz σ (con $|S(\sigma)| = k$) es fácil si la dimensión de σ es $k - 1$ (σ tiene k vértices), y es difícil si la dimensión de σ es k (σ tiene $k + 1$ vértices).

Consideremos una gráfica simple con vértices los simplejos felices, y para cada par de simplejos felices $\sigma, \tau \in T$, ponemos una arista si y solo si pasa alguno de los siguientes dos casos:

- (i) σ, τ son simplejos en la frontera de C^d antipodales ($\sigma = -\tau$)
- (ii) σ es una cara de τ de una dimensión menor ($\dim \sigma = \dim \tau - 1$) tal que $\lambda(\sigma) = S(\tau)$, esto es, la etiquetación de σ es suficiente para hacer feliz a τ .

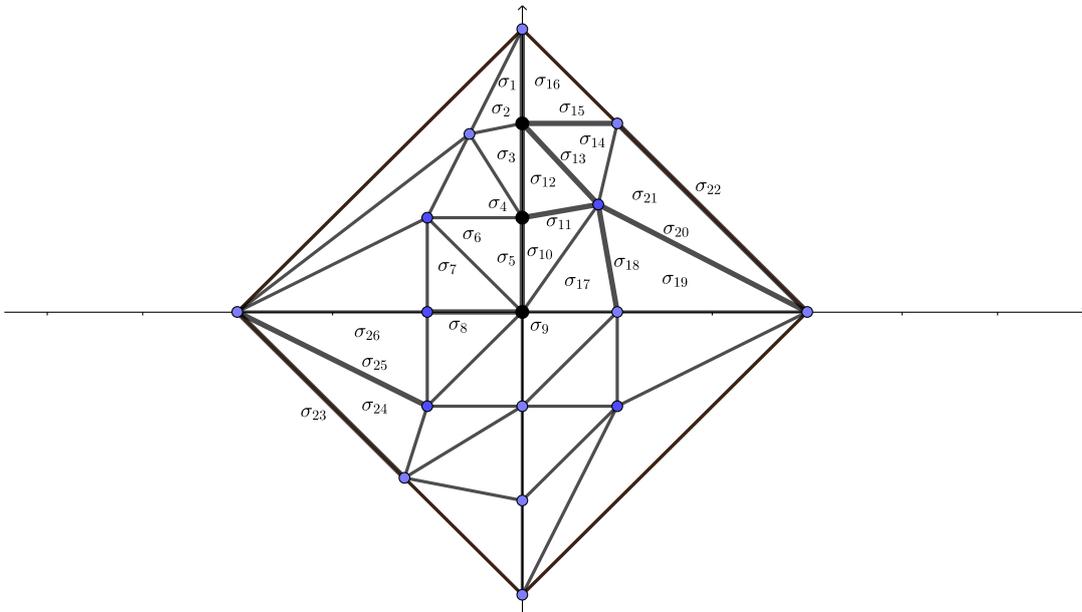


Figura 2.3: En esta figura tenemos etiquetados los simplejos felices de la triangulación especial de la figura 2.2. En este ejemplo $\lambda(\{0\}) = -1$ (con $\{0\} = \sigma_9$), por lo cual el único vecino de $\{0\}$ es el simplejo feliz σ_8 sobre el eje coordenado 1 (el eje x) con etiquetas $-1, 2$.

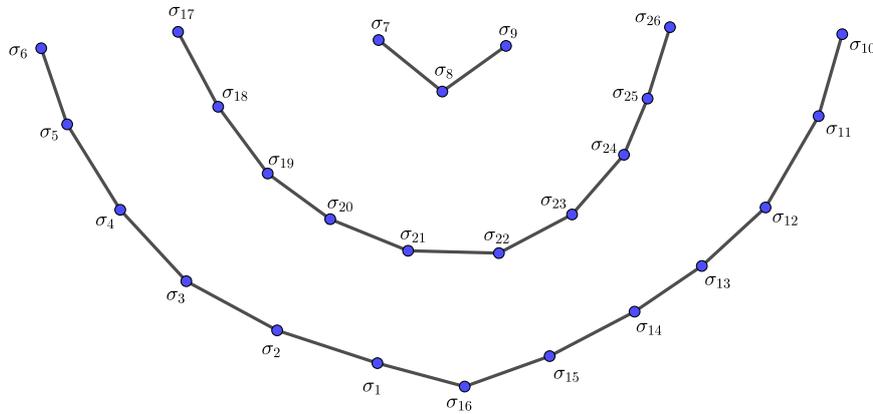


Figura 2.4: Gráfica asociada a la triangulación especial de la figura 2.2 (con las etiquetas de la figura 2.3).

En el ejemplo de la figura 2.2, el simplejo $\{0\}$ es feliz (donde 0 denota al origen) y tiene grado 1 en la gráfica (ver figuras 2.3 y 2.4). Observemos que en general, para cualquier triangulación especial, el simplejo $\{0\}$ es feliz difícil, ya que $S(\{0\}) = \emptyset$. También, como $\{0\}$ no está en la frontera y no tiene caras (porque solo tiene un vértice), entonces sus únicos posibles vecinos son las aristas felices que tienen como vértice al vértice 0, las cuales están sobre los ejes coordenados. Además, si $\lambda(\{0\}) = k$ y σ (una arista feliz) es un vecino de $\{0\}$, entonces $\lambda(\{0\}) = k$ tiene que ser el único elemento de $S(\sigma)$, por lo cual la arista por el 0 que está sobre el k ésimo eje coordenado es el único simplejo feliz conectado con el $\{0\}$. Por lo tanto, $\{0\}$ tiene grado 1 en la gráfica.

Recordemos que cuando sumamos los grados de los vértices, estamos contando cada arista dos veces, por lo cual la suma de los grados de los vértices es dos veces la cantidad de aristas, en particular, tenemos que hay una cantidad par de vértices de grado impar. Demostraremos que si no hay aristas complementarias (aristas que sus dos vértices tienen números opuestos), entonces el $\{0\}$ sería el único de grado impar, lo cual nos daría una contradicción.

Veamos cuáles son los grados de los vértices.

1. Sea σ un simplejo feliz fácil. Esto quiere decir que tenemos las etiquetas justas para que σ sea feliz, por lo cual sus únicos posibles vecinos son $-\sigma$, o los simplejos felices τ tal que σ es cara de τ .

Si σ está en la frontera de C^d , tiene como vecino a $-\sigma$ y solo está conectado con un único simplejo feliz del cual es cara, por lo cual tiene grado 2.

Si σ no está en la frontera, entonces está conectado con dos simplejos felices de los cuales es cara, por lo cual también tiene grado 2 (ver figura 2.5).

2. Sea σ un simplejo feliz difícil. Esto quiere decir que le podemos quitar un número a la etiquetación de σ , y σ seguiría siendo feliz. Notemos que los simplejos difíciles no pueden

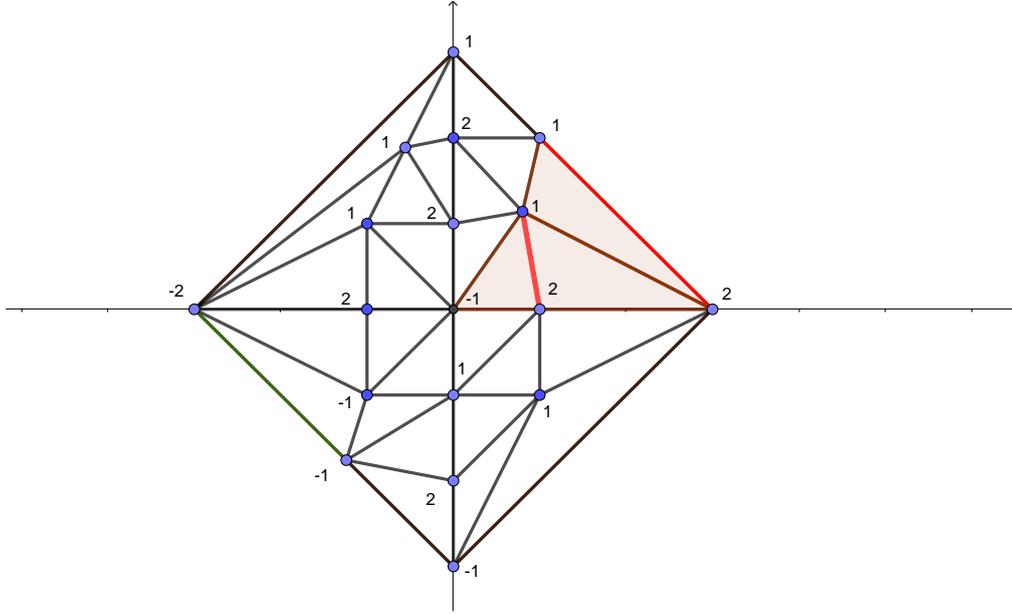


Figura 2.5: En este ejemplo tenemos dos aristas rojas (los simplejos σ_{18} y σ_{22}) que son felices fáciles. Una de esas aristas (σ_{18}) tiene dos triángulos felices como vecinos (σ_{17} y σ_{19}), y la otra arista (σ_{22}) tiene un triángulo feliz (σ_{21}) y una arista verde (σ_{23}) como vecinos.

estar en la frontera: si $|S(\sigma)| = k$, entonces σ está en un hiperplano $k - 1$ dimensional, y por lo tanto, tiene a lo más k vértices, pero los simplejos felices difíciles tienen $k + 1$ vértices.

Si $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$, entonces hay un número de $S(\sigma)$ que aparece dos veces en la etiquetación de σ . Además, si σ es la cara de un simplejo feliz τ de dimensión $k + 1$ (donde $|S(\sigma)| = k$), tenemos que $S(\tau) = S(\sigma) \cup \{i\}$ (donde i no está en $S(\sigma)$), entonces $S(\tau) = \lambda(\sigma) \cup \{i\}$, por lo cual $\lambda(\sigma) \neq S(\tau)$, y por lo tanto, σ no puede estar conectado a τ . Así que solo puede estar conectado a sus dos caras que son simplejos felices (las caras que se forman al quitar uno de los vértices que tienen el número repetido), por lo cual tiene grado 2.

Si $S(\sigma) \neq \lambda(\sigma)$, entonces $\lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$, donde i no está en $S(\sigma)$. Notemos que σ está conectada con una única cara feliz (la formada con los vértices con etiquetas $S(\sigma)$). Además, si σ es cara de un simplejo feliz τ , para que σ y τ sean vecinos en la gráfica, se debe de tener que $S(\sigma) \cup \{i\} = \lambda(\sigma) = S(\tau)$. Entonces, si $-i$ no está en $S(\sigma)$, el simplejo feliz τ que contiene a σ como cara y que cumple que $i \in S(\tau)$, es el único vecino de σ que contiene a σ como cara, por lo que σ tiene grado 2. Si $-i$ sí está en $S(\sigma)$, entonces σ ya no puede tener más vecinos (ya que i y $-i$ no pueden estar simultáneamente en $S(\tau)$), por lo que σ tiene grado 1 y una arista complementaria con números i y $-i$ (ver figura 2.6).

De lo anterior concluimos que todos los vértices en la gráfica tienen grado 1 o 2. Más aún, todos los simplejos felices que tienen grado 1 en la gráfica y que son distintos del $\{0\}$, contienen una arista complementaria. Entonces, si no hay aristas complementarias, el único vértice de grado impar sería el $\{0\}$, lo cual ya vimos que no se puede (debe haber un número par de vértices con grado impar). Por lo tanto, sí hay aristas complementarias. \square

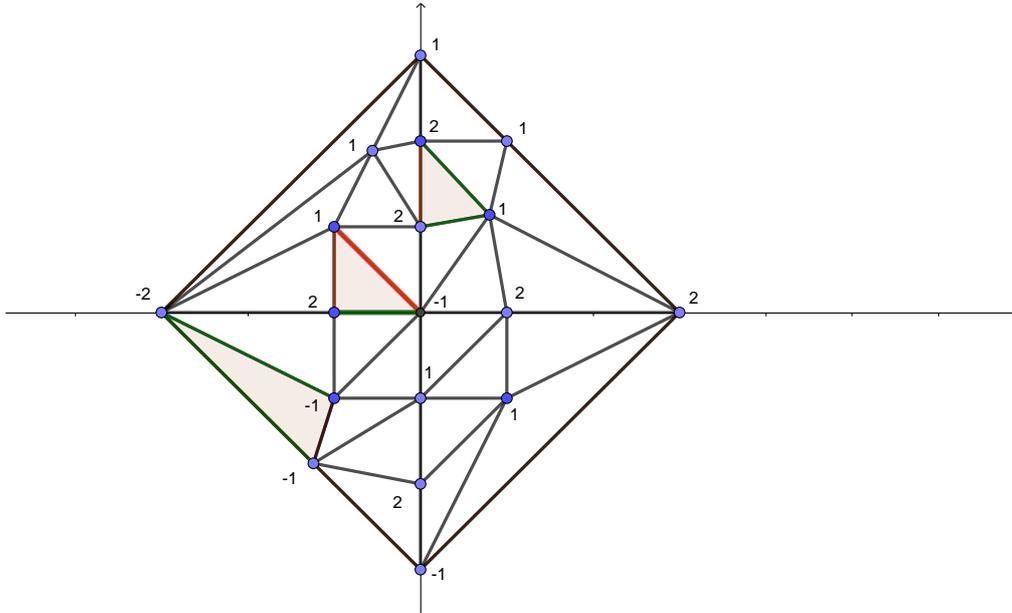


Figura 2.6: En este ejemplo tenemos tres triángulos (los simplejos σ_{12} , σ_7 y σ_{24}) que son felices difíciles. Dos de esos triángulos (σ_{12} y σ_{24}) tienen dos aristas verdes como vecinos (cada uno). El otro triángulo (σ_7) solo tiene una arista verde (σ_8) como vecino, por lo cual ese triángulo contiene una arista roja complementaria.

Observemos que aunque la demostración que acabamos de ver es por contradicción, se puede modificar para que sea una demostración constructiva: empecemos una trayectoria en la gráfica en el vértice $\{0\}$ hasta llegar a otro vértice de grado 1 en la gráfica; de acuerdo a la demostración anterior, cuando lleguemos a un vértice de grado 1 (distinto del vértice $\{0\}$), también encontraremos una arista complementaria.

De hecho, la idea anterior también nos dice que las trayectorias que empiezan y terminan en vértices de grado 1, son trayectorias maximales (trayectorias que no están contenidas en trayectorias con más vértices). Esto quiere decir que las trayectorias maximales son las componentes conexas de la gráfica, es decir, la gráfica es la unión ajena de trayectorias (que ya podíamos intuir por la figura 2.4).

Se puede observar que el lema de Tucker es una versión discreta del teorema 2.1.4. Para ver esto más claro, reformulemos el lema de Tucker usando un complejo simplicial abstracto. Definamos a \diamond^{d-1} como el complejo simplicial abstracto con vértices $V(\diamond^{d-1}) = \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$, y como simplejos a los subconjuntos $F \subset V(\diamond^{d-1})$ que cumplen que no hay $i \in V(\diamond^{d-1})$ tal que i y $-i$ sean ambos elementos de F . Notemos que \diamond^{d-1} coincide con el complejo simplicial G^{*d} cuando $G = \mathbb{Z}_2$ (que fue visto en el capítulo anterior), por lo cual $\|\diamond^{d-1}\|$ es homeomorfo a la frontera del politopo cruz d dimensional, y por lo tanto, homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^{d-1} .

El lema de Tucker nos dice que existe un 1 simplejo con vértices i y $-i$, es decir, siempre hay un simplejo de la triangulación T tal que el conjunto de las etiquetas de sus vértices no es un simplejo de \diamond^{d-1} . Por lo cual, tenemos una reformulación del lema de Tucker.

Teorema 2.1.6. *Sea T una triangulación de \mathbb{B}^d tal que es simétricamente antipodal en su frontera. Entonces, no existe una función simplicial $\lambda : V(T) \rightarrow V(\diamond^{d-1})$ que sea antipodal en la frontera de \mathbb{B}^d .*

Ahora sí, demostraremos que el teorema de Borsuk Ulam es equivalente al lema de Tucker.

Equivalencia del teorema de Borsuk Ulam y el lema de Tucker.

Primero veamos que el teorema de Borsuk Ulam implica el lema de Tucker, probando que el teorema 2.1.4 implica el teorema 2.1.6, por contrapositiva. Si existe una función simplicial $\lambda : V(T) \rightarrow V(\diamond^{d-1})$ antipodal en la frontera, podemos considerar las realizaciones geométricas, y extender λ de manera afín (si $x \in \mathbb{B}^d$ con $x = \sum \alpha_i v_i$, donde las $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$, y las v_i son vértices de la triangulación, entonces $\|\lambda\|(x) = \sum \alpha_i \lambda(v_i)$). De esta manera construimos una función continua de \mathbb{B}^d a \mathbb{S}^{d-1} , antipodal en la frontera, lo cual contradice el teorema 2.1.4.

Para la otra implicación, veamos que el teorema 2.1.5 implica el teorema 2.1.4 por contradicción. Supongamos que existe una función continua $f : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ y antipodal en la frontera de \mathbb{B}^d . Vamos a construir una triangulación T de \mathbb{B}^d (antipodal en su frontera) tal que el diámetro de cada simplejo es menor que algún δ . Para definir esa δ , usaremos la continuidad uniforme de f (f es continua sobre el compacto \mathbb{B}^d) con la métrica infinita ($\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, \dots, |y_d|\}$, donde las y_i son sus coordenadas.) Primero consideremos $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{d}}$, entonces, para cada $y \in \mathbb{S}^{d-1}$ tendremos que $d\varepsilon^2 = 1 = \sum_{i=1}^d y_i^2$, por lo cual, $\|y\|_\infty \geq \varepsilon$.

Por la continuidad uniforme de f , para $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{d}}$, existe una δ tal que siempre que $x, y \in \mathbb{B}^d$ difieran en menos de δ , entonces $\|f(x) - f(y)\|_\infty < 2\varepsilon$. Este es el δ que usaremos como cota para los diámetros de los simplejos de T .

Ahora definamos $\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$. Para cada $v \in V(T) \subset \mathbb{B}^d$, tenemos que $f(v) \in \mathbb{S}^{d-1}$, así que $\|f(v)\| \geq \varepsilon$, por lo que podemos definir $k(v) = \min\{i : |f(v)_i| \geq \varepsilon\}$, entonces definimos

$$\lambda(v) = \begin{cases} +k(v) & \text{si } f(v)_{k(v)} > 0 \\ -k(v) & \text{si } f(v)_{k(v)} < 0 \end{cases}$$

Como f es antipodal en la frontera de \mathbb{B}^d , entonces $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ para cada vértice en la frontera. Por el lema de Tucker, existe una arista con vértices u, v , tal que $i = \lambda(u) = -\lambda(v) > 0$. Entonces, $f(u)_i \geq \varepsilon$ y $f(v)_i \leq -\varepsilon$, por lo cual $\|f(u) - f(v)\|_\infty \geq 2\varepsilon$, lo cual contradice la continuidad uniforme.

Ya hemos demostrado la equivalencia del teorema de Borsuk Ulam con el lema de Tucker, con lo cual tenemos una demostración combinatoria del teorema de Borsuk Ulam.

2.2. El teorema del Ham Sandwich

En esta sección veremos la demostración de la versión general del teorema del Ham Sandwich [24].

En la introducción se demostró la versión discreta en \mathbb{R}^2 , y como el lector recordará, la idea fue que si empezamos a rotar poco a poco una recta que biseque uno de los dos conjuntos, antes de dar la media vuelta, tendremos la recta que biseca ambos conjuntos. Notemos que lo que hicimos es dar un argumento tipo teorema del valor intermedio para conjuntos discretos.

En la versión general queremos encontrar un hiperplano h tal que la medida de h^+ y h^- sea la misma para d medidas finitas de Borel en \mathbb{R}^d . Si empezamos con un hiperplano cualquiera y lo empezamos a rotar poco a poco, la intuición nos dice que en algún momento llegaremos al hiperplano que queremos, sin embargo, argumentar esto ya no es tan sencillo como en el

caso discreto de \mathbb{R}^2 . Ahora necesitaremos un argumento de continuidad que nos permita dar un resultado análogo al teorema del valor intermedio.

Como se mencionó en la sección anterior, el teorema de Borsuk Ulam tiene un parecido al teorema del valor intermedio, por lo cual es el candidato perfecto para demostrar el teorema del Ham Sandwich.

Si a cada elemento $u = (u_1, u_2, \dots, u_d, u_{d+1})$ en la esfera \mathbb{S}^d , distinto de $u_N = (0, 0, \dots, 1)$ y $u_S = (0, 0, \dots, -1)$, le asociamos un hiperplano $h(u)$ con ecuación

$$u_1x_1 + \dots + u_dx_d = u_{d+1},$$

entonces tendremos que $h^-(u) = h^+(-u)$. El problema se reduce a encontrar un $u \in \mathbb{S}^d$ (distinto de $u_N = (0, 0, \dots, 1)$ y $u_S = (0, 0, \dots, -1)$), tal que en cualquiera de las d medidas, $h^+(u)$ y $h^-(u) = h^+(-u)$ midan lo mismo.

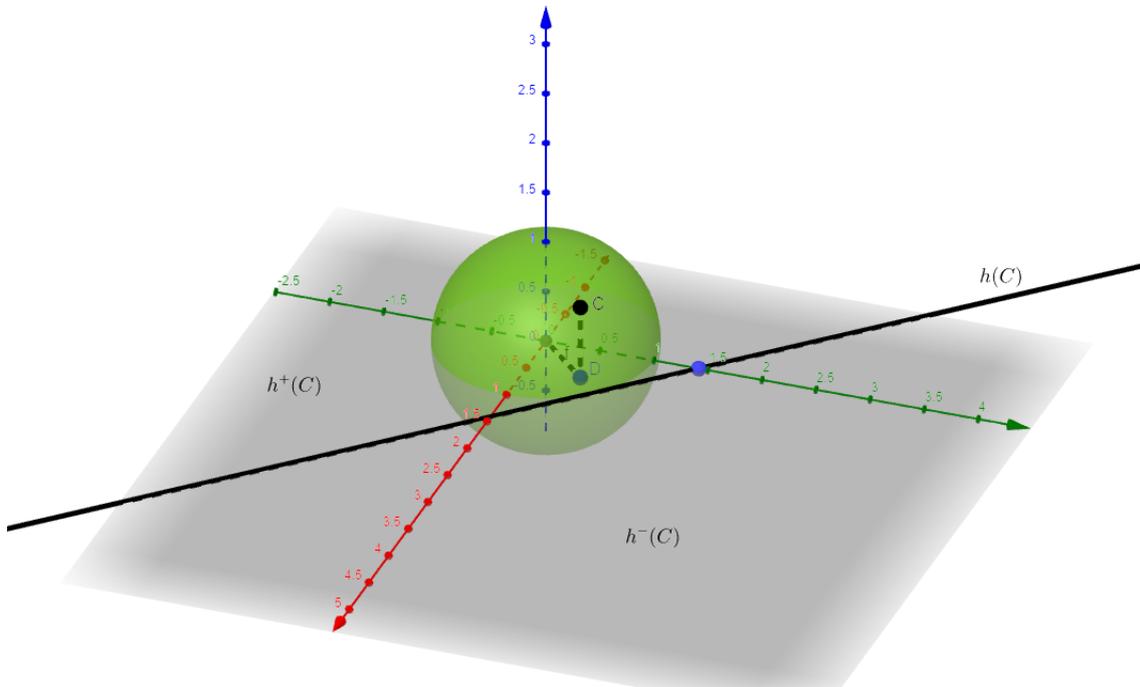


Figura 2.7: Ejemplo para $d = 2$, en donde nos tomamos un punto $C = (u_1, u_2, u_3)$ en la esfera \mathbb{S}^2 y nos fijamos en $D = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ la proyección de C al plano. Entonces, el hiperplano $h(C)$ es ortogonal al vector D y define dos semiespacios $h^+(C)$ y $h^-(C) = h^+(-C)$.

Como podemos ver en la figura 2.7, el hiperplano $h(u)$ asociado a $u = (u_1, u_2, \dots, u_d, u_{d+1})$ es ortogonal al vector (u_1, u_2, \dots, u_d) . Por esta razón, no hemos podido definir un hiperplano para u_N y u_S , ya que geoméricamente, no tiene mucho sentido hablar de los hiperplanos ortogonales al vector $(0, \dots, 0)$.

Recordemos que lo único que nos interesa es demostrar que existe un $u \in \mathbb{S}^d$, tal que en cualquiera de las d medidas, $h^+(u)$ y $h^-(u) = h^+(-u)$ midan lo mismo. Entonces, a cada elemento $u = (u_1, u_2, \dots, u_d, u_{d+1})$ en la esfera \mathbb{S}^d , le podemos asociar el semiespacio

$$h^+(u) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid u_1x_1 + \dots + u_dx_d \leq u_{d+1}\}.$$

Notemos que aunque a los puntos u_N y u_S no les asociamos ningún hiperplano, sí les asociamos un semiespacio, ya que $h^+(u_N) = \mathbb{R}^d$ y $h^+(u_S) = \emptyset$. De hecho, es intuitivo pensar

que $h^-(u_N) = \emptyset$ y $h^-(u_S) = \mathbb{R}^d$. Además, como el conjunto \emptyset siempre tiene medida cero (en cualquier medida), entonces, $h^+(u_N) = \mathbb{R}^d$ y $h^+(-u_N) = h^+(u_S) = \emptyset$ no pueden medir lo mismo.

Por lo tanto, si demostramos que existe un $u \in \mathbb{S}^d$, tal que $h^+(u)$ y $h^-(u) = h^+(-u)$ midan lo mismo en las d medidas, u será distinto de u_N y u_S , por lo que $h(u)$ estará bien definido y será el hiperplano que estamos buscando.

Si tomamos cualquier $u \in \mathbb{S}^d$ y empezamos a cambiar u gradualmente en la esfera, entonces la intuición nos dice que la medida de $h^+(u)$ también cambiará de manera continua. Consideremos cualquier medida μ y supongamos que empezamos con un $u \in \mathbb{S}^d$ tal que

$$\mu(h^+(u)) - \mu(h^-(u)) > 0.$$

Empecemos a mover el punto hasta llegar al punto $-u \in \mathbb{S}^d$, en ese momento tendremos que

$$\mu(h^+(-u)) - \mu(h^-(-u)) = \mu(h^-(u)) - \mu(h^+(u)) < 0.$$

La intuición nos dice que en un momento intermedio existió un punto $v \in \mathbb{S}^d$ tal que

$$\mu(h^+(v)) - \mu(h^-(v)) = 0,$$

es decir, $\mu(h^+(v)) = \mu(h^-(v)) = \mu(h^+(-v))$. Por lo tanto, $h(v)$ sería un hiperplano que biseca la medida μ , es decir, los semiespacios definidos por el hiperplano $h(v)$ miden lo mismo (con la medida μ).

A continuación, definiremos formalmente una función continua sobre la esfera \mathbb{S}^d , y usaremos el teorema de Borsuk Ulam para encontrar un hiperplano que biseque simultáneamente las d medidas.

Teorema 2.2.1. El teorema del Ham Sandwich Sean μ_1, \dots, μ_d medidas finitas de Borel en \mathbb{R}^d , tal que todo hiperplano tiene medida cero para cada μ_i . Entonces, existe un hiperplano h tal que para toda $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ se tiene que $\mu_i(h^+) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d) = \mu_i(h^-)$.

Demostración. Para cada $u = (u_1, u_2, \dots, u_{d+1}) \in \mathbb{S}^d$, asociamos a u el semiespacio

$$h^+(u) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid u_1x_1 + \dots + u_dx_d \leq u_{d+1}\}.$$

Definimos la función $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, dada por

$$f(u) = (\mu_1(h^+(u)), \dots, \mu_d(h^+(u))).$$

Si demostramos que f es continua, entonces por el teorema de Borsuk Ulam tendremos que existe $v \in \mathbb{S}^d$ tal que $f(v) = f(-v)$, esto es,

$$(\mu_1(h^+(v)), \dots, \mu_d(h^+(v))) = (\mu_1(h^+(-v)), \dots, \mu_d(h^+(-v))) = (\mu_1(h^-(v)), \dots, \mu_d(h^-(v))).$$

Por lo tanto, el hiperplano $h(v)$ será el hiperplano que cumple lo que queremos. Así que basta probar que f es continua.

Sea (u_n) una sucesión de puntos en \mathbb{S}^d que converge a u , basta probar que para cada $i \in \{1, \dots, d\}$ se tiene la siguiente convergencia $\mu_i(h^+(u_n)) \rightarrow \mu_i(h^+(u))$. Notemos que si $x \in \mathbb{R}^d$ no está en la frontera de $h^+(u)$, entonces como (u_n) converge a u , tenemos que para toda n suficientemente grande, $x \in h^+(u_n)$ si y solo si $x \in h^+(u)$. Por lo tanto, para toda x que no está en la frontera de $h^+(u)$, $\chi_{h^+(u_n)}(x) \rightarrow \chi_{h^+(u)}(x)$, donde χ denota la función característica. Como todos los hiperplanos tienen medida cero, entonces tenemos una convergencia en casi cualquier parte. Como las funciones características están acotadas por la constante 1 y son integrables, entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\mu_i(h^+(u_n)) = \int \chi_{h^+(u_n)}(x) d\mu_i \rightarrow \int \chi_{h^+(u)}(x) d\mu_i = \mu_i(h^+(u)).$$

Por lo tanto, f es continua. □

Ahora demostraremos la versión discreta del Ham Sandwich que, como el lector ya se puede imaginar, es el teorema que se utiliza para repartir equitativamente conjuntos finitos.

Teorema 2.2.2. *El teorema discreto del Ham Sandwich* Sean $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos finitos de puntos, ajenos por parejas, tal que la unión $\bigcup_{i=1}^d A_i$ está en posición general. Entonces, existe un hiperplano h que biseca simultáneamente los d conjuntos.

Demostración. Por cada punto de $\bigcup_{i=1}^d A_i$, definamos una bola centrada en ese punto con radio ε , donde ε es lo suficientemente pequeño para que cada hiperplano corte a lo más a d de esas bolas (esto se puede hacer porque $\bigcup_{i=1}^d A_i$ está en posición general). Definamos a A_i^ε como la unión de las bolas de los puntos de A_i .

El teorema del Ham Sandwich nos dice que existe un hiperplano h que biseca simultáneamente el volumen de los A_i^ε .

Primero supongamos que todos los A_i tienen cardinalidad impar. En este caso, para que biseque a los A_i^ε , h tiene que cortar a al menos una bola de cada A_i^ε , y como h solo puede cortar a lo más a d de las bolas, entonces interseca a exactamente una bola de cada A_i^ε . Por lo tanto, h pasa por exactamente un punto de cada A_i , y biseca los conjuntos A_i .

Ahora supongamos que hay al menos un A_i con cardinalidad par. Como en el problema de la introducción, para cada A_i con cardinalidad par, agreguemos un punto al conjunto. Aplicamos el caso anterior para encontrar el hiperplano h . Si h pasa por algún punto p de algún A_i con cardinalidad par, entonces alguno de h^+ o h^- tiene un punto más de A_i que el otro, así que tenemos que pasar ese punto p al semiespacio que tenga un punto menos.

Supongamos que hay al menos un punto sobre h que se tiene que pasar a algún semiespacio, sin pérdida de generalidad, a h^+ . Si todos los puntos de $\bigcup_{i=1}^d A_i$ que están en h se tienen que pasar a h^+ , entonces, solo trasladamos un poco el hiperplano (esto se puede porque los A_i son conjuntos finitos). Si no es así, consideremos el conjunto B de puntos en el hiperplano h que no tienen que ser pasados a h^+ , y empezamos a rotar el hiperplano con centro en B para pasar los puntos a h^+ . Después, si es que hay puntos que tienen que ser pasados a h^- , trasladamos un poco (si es que todos los que faltaban tenían que pasarse a h^-) o rotamos un poco con centro en el conjunto de puntos que se tienen que quedar fijos en h . □

Una de las primeras aplicaciones del teorema del Ham Sandwich es para resolver otros problemas de repartición equitativa, como el teorema del collar. Imaginemos que dos ladrones han robado un collar (abierto) con d tipos de perlas diferentes: diamantes, de oro, de plata, etc. Ellos quieren partir el collar en varias partes, para después repartir esas partes de tal manera que a los dos les toque la misma cantidad de perlas de cada uno de los d tipos de perlas (ver figura 2.8). Por supuesto, ellos quieren hacer la menor cantidad de cortes posibles, para que el collar no pierda su valor (además siempre es más bonito tener las cosas completas).

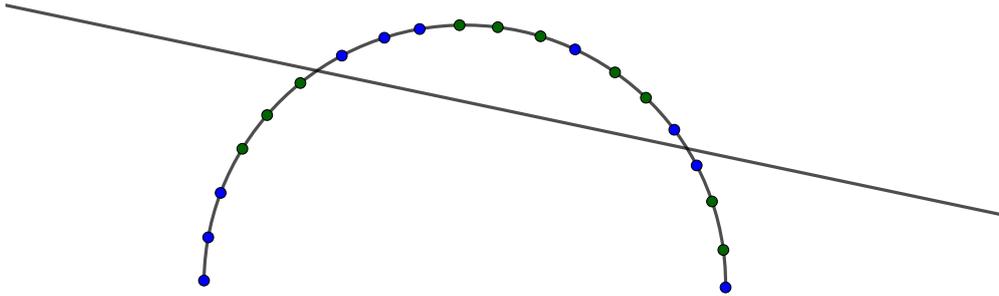


Figura 2.8: Ejemplo de un collar dividido en tres partes (con 2 cortes), donde la parte 1 y 3 le toca a un ladrón y la parte 2 al otro ladrón.

Si colocamos ese collar sobre la curva momento de \mathbb{R}^d , tendremos d conjuntos finitos (uno por cada tipo de perla) en posición general. El teorema discreto del Ham Sandwich nos dice que existe un hiperplano que biseca simultáneamente los d conjuntos. Si los ladrones hacen un corte por cada vez que ese hiperplano intersecó al collar, habrán hecho a lo más d cortes, ya que cada hiperplano pasa por a lo más d puntos de la curva momento. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *El teorema del collar* Cada collar con d tipos de perlas puede ser repartido (de manera equitativa) entre dos ladrones usando a lo más d cortes.

Notemos que si tenemos un collar donde primero estén colocadas todas las perlas del tipo 1, después todas las perlas del tipo 2, y así sucesivamente, es un collar que necesita un corte por cada tipo de perla, es decir, necesita d cortes. Por lo tanto, el teorema anterior nos da una cota óptima del número de cortes.

Capítulo 3

Funciones G equivariantes y el teorema de Dold

En el teorema 2.1.3 se dice que no hay funciones continuas y antipodales $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$. Si definimos una función $\nu : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ tal que $\nu(x) = -x$, entonces $\nu(\nu(x)) = x$, esto quiere decir que ν^2 es la identidad, por lo cual ν puede ser interpretada como una acción de \mathbb{Z}_2 . Observemos que una función antipodal es una función f que conmuta con la función ν , por lo que el teorema 2.1.3 nos dice que no hay funciones continuas $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que conmuten con una acción de \mathbb{Z}_2 . Con la intención de generalizar el teorema de Borsuk Ulam, dado un grupo G actuando en un espacio topológico X , definiremos a las *funciones G equivariantes* como funciones continuas que conmutan con la acción de G .

A partir de ahora supondremos que siempre estamos trabajando con grupos finitos, aunque las definiciones también son válidas para grupos infinitos.

Si G es un grupo actuando sobre un espacio X con las funciones $\Phi = (\varphi_g)_{g \in G}$, entonces diremos que la pareja (X, Φ) es un G espacio.

Por ejemplo, en el capítulo 1 vimos que \mathbb{Z}_p actúa en el espacio $X = \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}^d\}$ dado por $g(x_1, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$, donde g es un generador del grupo \mathbb{Z}_p , por lo que X es un \mathbb{Z}_p espacio.

También vimos que un grupo G actúa sobre él mismo, donde $\varphi_g(h) = gh$, por lo que G es un G espacio. Así mismo, extendimos esa acción al complejo simplicial G^{*n} (donde G es el complejo simplicial con vértices los elementos de G y simplejos los subconjuntos unitarios de G), donde $\varphi_g(\{h_1, \dots, h_m\}) = \{\varphi_g(h_1), \dots, \varphi_g(h_m)\} = \{gh_1, \dots, gh_m\}$, por lo que los espacios G^{*n} son G espacios.

Definición 3.0.1. Si $(X, \Phi), (Y, \Psi)$ son G espacios, una función continua $f : X \rightarrow Y$ es G equivariante si $f\varphi_g = \psi_g f$ para toda $g \in G$.

En otras palabras, $f : X \rightarrow Y$ es G equivariante si para cada $g \in G$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi_g \downarrow & & \downarrow \psi_g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Por ejemplo, todas las funciones antipodales de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d son \mathbb{Z}_2 equivariantes. También, la función identidad de G^{*n} a G^{*n} es una función G equivariante. Una observación inmediata es que la composición de funciones G equivariantes es una función G equivariante.

Ahora, con la finalidad de generalizar el teorema de Borsuk Ulam, definiremos espacios con propiedades parecidas a las esferas, pero trabajando con complejos simpliciales finitos.

Definición 3.0.2. Sea G un grupo finito con $|G| > 1$ y $n \geq 0$. Un $E_n G$ espacio es un G espacio que satisface lo siguiente:

- (i) Es un G complejo simplicial finito (un complejo simplicial finito, donde las funciones $(\varphi_g)_{g \in G}$ son simpliciales).
- (ii) Es n dimensional.
- (iii) Es $n - 1$ conexo.
- (iv) La acción es libre.

Como ya lo imaginabamos todos, los espacios G^{*n+1} son $E_n G$ espacios. Por construcción tenemos que es complejo simplicial finito n dimensional y que las funciones de la acción son simpliciales, además en el capítulo de los preliminares demostramos que es un G espacio con la acción libre, y que es $n - 1$ conexo.

Recordemos que un caso particular de G^{*3} es la frontera de un octaedro (cuando $G = \mathbb{Z}_2$). Sabemos que es un complejo simplicial de dimensión 2 y que es 1 conexo. Además, hay una acción de \mathbb{Z}_2 sobre la frontera del octaedro, donde $\phi(x) = -x$ (el único elemento del grupo \mathbb{Z}_2 diferente del neutro). Esta acción es libre, ya que a cada punto lo estamos mandando a su antípoda. También, la función $\phi(x) = -x$ es simplicial. Por lo tanto, la frontera de un octaedro es un $E_2 \mathbb{Z}_2$ espacio.

También la frontera de un cuadrado es un $E_1 \mathbb{Z}_4$ espacio. Es claro que es un complejo simplicial de dimensión 1 y que es 0 conexo. Además, la rotación por $\frac{\pi}{2}$ (en sentido horario) genera un grupo de rotaciones isomorfo a \mathbb{Z}_4 . Estas rotaciones no fijan a ningún punto (la acción es libre) y mandan simplejos en simplejos (son simpliciales). Por lo tanto, la frontera del cuadrado es un $E_1 \mathbb{Z}_4$ espacio.

Notemos que en la acción de \mathbb{Z}_4 en la frontera del cuadrado, podemos restringir la acción al subgrupo generado por la rotación por π . Este subgrupo es isomorfo a \mathbb{Z}_2 , la acción sigue siendo libre y las rotaciones siguen siendo funciones simpliciales (porque es un subgrupo). Por lo tanto, la frontera del cuadrado también es un $E_1 \mathbb{Z}_2$ espacio.



Figura 3.1: Ejemplo de un $E_2 \mathbb{Z}_2$ espacio y un $E_1 \mathbb{Z}_4$ espacio.

En general, si tenemos un $E_n G$ espacio, para cada subgrupo H de G podemos restringir la acción a H . Como cada $h \in H$ es también un elemento de G , entonces $h \in H$ no tiene elementos fijos, por lo cual la acción también es libre. Por lo tanto, el mismo espacio es un $E_n H$ espacio.

Más aún, si hay una función f que sea G equivariante de K un $E_n G$ espacio a L un $E_m G$ espacio, entonces para cada subgrupo H de G y cada $h \in H$ tenemos que $fh = hf$, es decir, f conmuta con todos los elementos de H . Por lo tanto, la misma función f es H equivariante de K un $E_n H$ espacio a L un $E_m H$ espacio.

Ahora veamos que siempre existe una función G equivariante entre cada dos $E_n G$ espacios. Este resultado nos dice que si existe una función G equivariante de un espacio X a un $E_n G$ espacio, entonces existe una función G equivariante de X a cualquier otro $E_n G$ espacio. De hecho, veremos algo más fuerte, ya que no usaremos todas las hipótesis de los $E_n G$ espacios.

Lema 3.0.3. *Sea G un grupo finito no trivial, X un G espacio $n - 1$ conexo, y K un G complejo simplicial finito de dimensión a lo más n con una acción libre de G . Entonces, existe una función G equivariante de $\|K\|$ a X .*

Como la demostración del lema anterior será constructiva, primero tomaremos un ejemplo (geométrico) para poder visualizar la construcción.

Como la frontera de un octaedro es un complejo simplicial de dimensión 2, con una acción libre de \mathbb{Z}_2 (la generada por la función $\phi(x) = -x$, que es simplicial), y un cuadrado (relleno) es un \mathbb{Z}_2 espacio (con la rotación π , que coincide con la función $\phi(x) = -x$) y es 1 conexo, entonces el lema anterior nos dice que hay una función \mathbb{Z}_2 equivariante de la frontera del octaedro al cuadrado.

Veamos como construir la función \mathbb{Z}_2 equivariante en este ejemplo (vea la figura 3.1 e imagine que el cuadrado está relleno). Primero definiremos la función f sobre los vértices del octaedro. Observemos que $\{A, C\}, \{B, D\}, \{E, F\}$ son las órbitas de los vértices, bajo la acción de la función $\phi(x) = -x$. Como queremos que la función conmute con la acción, nos tomaremos un vértice en cada órbita para definir f , después extenderemos la función en los otros vértices usando la acción de \mathbb{Z}_2 .

Nos tomamos A, B, E vértices en diferentes órbitas y definimos $f(A) = a, f(B) = b, f(E) = c$. Veamos como definir $f(C)$ para que la función f sea antipodal (es decir, para que f conmute con la función $\phi(x) = -x$). Tenemos que $\phi(A) = C$, entonces queremos que $f(C) = f(\phi(A)) = \phi(f(A)) = \phi(a) = c$, así que definamos $f(C) = c$. Análogamente, usando la acción de \mathbb{Z}_2 tenemos que definir $f(D) = d$ y $f(F) = a$. Con esto hemos asegurado que la función f sea \mathbb{Z}_2 equivariante en los vértices del octaedro.

Ahora definamos a la función en las aristas. Primero nos tomamos una arista en cada órbita: AB, BC, CF, FD, AF, FB . Tenemos que $f(A) = a, f(B) = b$ y $\{A, B\}$ es isomorfo a la esfera \mathbb{S}^0 , así que usando que el cuadrado es 1 conexo, sabemos que podemos extender la función de manera continua a la arista AB , el cual será mapeado a $f(A)f(B) = ab$. Análogamente, definiremos $f(BC) = bc, f(CF) = ca, f(FD) = ad, f(AF) = a, f(FB) = ab$. Después, definiremos la función en las demás aristas usando la acción de \mathbb{Z}_2 , y así asegurar que sea \mathbb{Z}_2 equivariante. Por ejemplo, $CD = \phi(AB)$, entonces definiremos $f(CD)$ como $f(\phi(AB)) = \phi(f(AB)) = \phi(ab) = cd$.

Ahora nos tomaremos un triángulo (2 simplejo) en cada órbita, para definir f . Por ejemplo, nos tomamos los triángulos ABE, BCE, CDE, DAE . Como ya tenemos que $f(AB) = ab, f(BE) = bc, f(EA) = ca$ y $\{AB, BE, EA\}$ es isomorfo a la esfera \mathbb{S}^1 , entonces extendemos

f de manera continua al triángulo ABE (porque el cuadrado es 1 conexo), el cual será mapeado al triángulo abc . Análogamente tendremos que $f(BCE) = bc$, $f(CDE) = cd$ y $f(DAE) = dac$. Después, extenderemos la función en los demás triángulos usando la acción. Por ejemplo, definiremos $f(CDF) = f(\phi(ABE)) = \phi(f(ABE)) = \phi(abc) = cda$, análogamente con los demás triángulos. Ya tenemos definida la función f y por construcción es \mathbb{Z}_2 equivariante.

Demostración del lema 3.0.3. Demostraremos por inducción sobre la dimensión de K , es decir, primero definiremos la función f de $\|K\|$ a X sobre los vértices, después en las aristas, en las caras, etc. Notemos que los elementos de $\|K\|$ que están en diferentes órbitas no interactúan entre ellos con la acción de G , así que para asegurar que f sea G equivariante, basta definir la función f sobre cada una de las órbitas de manera independiente.

Elegimos un vértice u en cada órbita y definimos $f(u)$ de tal manera que todos sean distintos entre sí. Después, para cada $\phi \in G$, definimos $f(\phi(u)) = \phi(f(u))$, con lo cual aseguramos que f sea G equivariante sobre los vértices. Ya que tenemos definida la función f sobre los vértices, definiremos f en las aristas, empezando por definirla en aristas que están en diferentes órbitas.

Para cada arista uv ya tenemos definida $f : \{u, v\} \rightarrow \{f(u), f(v)\} \subset X$, además, tenemos que $\{u, v\}$ es isomorfo a \mathbb{S}^0 y X es $n - 1$ conexo, entonces podemos extender f continuamente a la arista uv , el cual será mapeado a $f(u)f(v)$. Después, para cada $\phi \in G$ y cada arista e , definimos $f(\phi(e)) = \phi(f(e))$.

En general, siempre que ya tengamos definida f sobre todos los simplejos de dimensión a lo más $k - 1$, nos tomamos un simplejo de dimensión k en cada una de las órbitas. Como cada simplejo de dimensión k es la envolvente convexa de algunos $k - 1$ simplejos, entonces usando que X es $n - 1$ conexo, podemos extender f de manera continua a los simplejos de dimensión k (uno en cada órbita). Finalmente, usamos la acción de G para definir f sobre los otros simplejos de dimensión k , con lo cual aseguramos que la función sea G equivariante. Con esto se concluye la inducción. □

Motivados por el teorema 2.1.3, nos gustaría probar que no existen funciones G equivariantes de un $E_n G$ espacio a un $E_{n-1} G$ espacio. Para lograrlo, definiremos el G índice.

Definición 3.0.4. Sea X un G espacio. Definimos

$$\text{ind}_G(X) = \text{mín}\{n : \text{hay una función } G \text{ equivariante de } X \text{ a un } E_n G \text{ espacio}\}.$$

Si no existe una función G equivariante de X a algún $E_n G$ espacio, diremos que $\text{ind}_G(X)$ es infinito.

Cuando $G = \mathbb{Z}_2$, el teorema 2.1.3 nos dice que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{S}^d) \geq d$, y como la función identidad en la esfera \mathbb{S}^d es \mathbb{Z}_2 equivariante, tenemos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{S}^d) = d$.

Si en el lema 3.0.3 consideramos el caso particular cuando X es un $E_n G$ espacio, tendremos que para todo complejo simplicial K de dimensión a lo más n con una acción libre del grupo G , $\text{ind}_G(K) \leq n$.

El lema 3.0.3 implica que podemos considerar cualquier $E_n G$ espacio para calcular el índice, en otras palabras, tenemos que los $E_n G$ espacios son isomorfos para nuestros propósitos.

Notemos que si tenemos una función G equivariante $f : X \rightarrow Y$, donde $\text{ind}_G(Y) = n$, entonces tendremos que existe una función $h : Y \rightarrow X_n$ que es G equivariante, donde X_n es un

$E_n G$ espacio; por lo cual la composición $hf : X \rightarrow Y \rightarrow X_n$ también es G equivariante. Por lo tanto, $ind_G(X) \leq ind_G(Y)$. La contrapositiva de lo que acabamos de demostrar, nos da como resultado el siguiente lema.

Lema 3.0.5. *Sea G un grupo finito no trivial. Sean X y Y G espacios tal que $ind_G(X) > ind_G(Y)$. Entonces, no existen funciones G equivariantes de X a Y .*

Sea X_n cualquier $E_n G$ espacio. Como ya habíamos mencionado (con el caso particular de G^{*n}), la función identidad en un $E_n G$ espacio es G equivariante, por lo cual, $ind_G(X_n) \leq n$. Demostraremos que se da la igualdad. Si existiera una función G equivariante f de X_n a un $E_m G$ espacio X_m , con $m \leq n - 1$, como la función inclusión i de X_m a un $E_{n-1} G$ espacio X_{n-1} es G equivariante, entonces la composición fi también sería una función G equivariante de X_n a X_{n-1} . Veremos que no hay funciones G equivariantes de un $E_n G$ espacio a un $E_{n-1} G$ espacio, a este resultado lo llamaremos el teorema de *Borsuk Ulam para G espacios*.

Antes de ver la demostración formal del teorema de *Borsuk Ulam para G espacios*, tomaremos un caso particular, para poder visualizar las ideas de la demostración. Cuando $G = \mathbb{Z}_2$ y $n = 2$, tenemos que no hay funciones \mathbb{Z}_2 equivariantes de $K = (\mathbb{Z}_2)^{*3}$ (la frontera del octaedro) a $L = (\mathbb{Z}_2)^{*2}$ (la frontera del cuadrado).

Veremos que no hay una función \mathbb{Z}_2 equivariante de K a L , donde la acción de \mathbb{Z}_2 es la generada por la función $\phi(x) = -x$, que coincide con la acción de G que definimos para los espacios G^{*n} en el capítulo de los preliminares.

Si existiera una función \mathbb{Z}_2 equivariante de K a L (ver figura 3.1), entonces podríamos convertir esa función en una función simplicial g de los vértices de J (una subdivisión del octaedro) a los vértices de L (el cuadrado), usando el teorema de aproximación simplicial. Por simplicidad supongamos que la subdivisión J es K (en los siguientes pasos veremos que no estamos perdiendo generalidad), es decir, $V(J) = V(K)$.

Ahora encajamos L en K , por ejemplo, los vértices a, b, c, d los podemos pensar como los vértices A, B, C, D , respectivamente. Entonces, tenemos una función g de $V(J) = V(K)$ a $\{A, B, C, D\} \subset V(K)$, que es \mathbb{Z}_2 equivariante y simplicial.

En la sección 1.3 vimos que g induce una función $g_{C_k} : C_k(J) \rightarrow C_k(K)$. Recordemos que $C_k(J)$ es el conjunto de las k cadenas en el complejo simplicial J , es decir, los elementos de la forma $a_1\sigma_1 + \dots + a_m\sigma_m$, con σ_i simplejos de J de dimensión k y a_i números racionales (análogamente para $C_k(K)$). Además, para cada σ_i habíamos definido $g_{C_k}(\sigma_i) = g(\sigma_i)$ si $g(\sigma_i)$ también es de dimensión k , y cero en otro caso. Después extendimos la función g_{C_k} de manera lineal. De manera similar, vimos que la función g induce una función $g_{H_k} : H_k(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(K, \mathbb{Q})$ en homología: $g_{H_k}([c]) = [g_{C_k}(c)]$.

Notemos que como J es una subdivisión de K , entonces, a cada k cadena de K le corresponde una única k cadena de J . Por ejemplo, en la figura 1.6 (de la sección 1.3), la arista AB es una 1 cadena del complejo simplicial Φ ; le corresponde la cadena $AG + GD + DH + HB$, la cual es una 1 cadena del complejo simplicial $sd^2(\Phi)$.

De lo anterior concluimos que g induce una función $g_{C_k} : C_k(J) \rightarrow C_k(J)$ en cadenas, y una función $g_{H_k} : H_k(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(K, \mathbb{Q})$ en homología.

En el capítulo de los preliminares vimos que *el número de Lefschetz* de la función g es:

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{traza}(g_{C_k}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{traza}(g_{H_k}).$$

De hecho, el número de Lefschetz de una función está relacionado con el número de puntos fijos de la función (ver [7] y [11]).

Para calcular el número de Lefschetz, nos tenemos que fijar en los simplejos de dimensión 0, 1 y 2. Veamos qué está pasando con los vértices (0 simplejos). Consideremos $\{A, B, C, D, E, F\}$ una base de $C_0(K)$. En la demostración formal, veremos que simplejos en la misma órbita están aportando lo mismo en la $\text{traza}(g_{C_0})$, y este valor es 1 o 0. Como $\{A, C\}$ es una órbita, entonces tenemos que ambos aportan 1 o ambos aportan 0 en la $\text{traza}(g_{C_0})$, en cualquier caso esa suma es un múltiplo de 2. Análogamente, las otras dos órbitas ($\{B, D\}$ y $\{E, F\}$) están aportando un múltiplo de 2, entonces la $\text{traza}(g_{C_0})$ es múltiplo de 2. Observemos que si tuviéramos una subdivisión más fina de K ($J \neq K$), entonces solo tendríamos más órbitas que también aportarían un número par en la $\text{traza}(g_{C_0})$. De manera análoga tenemos que $\text{traza}(g_{C_1})$ y $\text{traza}(g_{C_2})$ son números pares, por lo cual, el número de Lefschetz $\Lambda(g) = \text{traza}(g_{C_0}) - \text{traza}(g_{C_1}) + \text{traza}(g_{C_2})$ es un número par.

Por otro lado, sabemos que el número de Lefschetz es $\Lambda(g) = \text{traza}(g_{H_0}) - \text{traza}(g_{H_1}) + \text{traza}(g_{H_2})$. Como la imagen de la función g está contenida en el complejo $\{A, B, C, D\}$ y este complejo es de dimensión 1, entonces no tiene agujeros de dimensión 2, por lo cual $\text{traza}(g_{H_2}) = 0$. Como K no tiene agujeros de dimensión 1, entonces $\text{traza}(g_{H_1}) = 0$. Como K es conexo por trayectorias y solo hay una componente conexa, entonces $\text{traza}(g_{H_0}) = 1$, por lo cual el número de Lefschetz es 1, lo cual contradice que es un número par. De esto concluimos que no existe una función continua de $K = (\mathbb{Z}_2)^{*3}$ (la frontera del octaedro) a $L = (\mathbb{Z}_2)^{*2}$ (la frontera del cuadrado), que conmute con la acción de \mathbb{Z}_2 generada por la función $\phi(x) = -x$.

Teorema 3.0.6. (Borsuk Ulam para G espacios) *No hay funciones G equivariantes de un $E_n G$ espacio en un $E_{n-1} G$ espacio.*

Demostración. Empezaremos viendo que es suficiente probar que no hay una función \mathbb{Z}_p equivariante de $(\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ en $(\mathbb{Z}_p)^{*n}$.

Supongamos que hay una función G equivariante f de K un $E_n G$ espacio en L un $E_{n-1} G$ espacio. Anteriormente vimos que para cada subgrupo H de G la función f también es H equivariante de K un $E_n H$ espacio en L un $E_{n-1} H$ espacio. Por el teorema de Sylow, cada grupo finito G tiene un subgrupo H de orden un número primo p que divide el orden de G . Como todos los grupos de orden un número primo son isomorfos, entonces tenemos un subgrupo de G isomorfo a \mathbb{Z}_p . Entonces, con la acción restringida a \mathbb{Z}_p (p divisor primo del orden de G), tenemos que la función f también es \mathbb{Z}_p equivariante.

Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que hay una función \mathbb{Z}_p equivariante f de K un $E_n \mathbb{Z}_p$ espacio en L un $E_{n-1} \mathbb{Z}_p$, con p un número primo. Con el lema 3.0.3 vimos que siempre hay una función \mathbb{Z}_p equivariante entre cada dos $E_n \mathbb{Z}_p$ espacios, entonces tenemos las siguientes funciones \mathbb{Z}_p equivariantes $(\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)} \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^{*n}$. Como la composición de funciones \mathbb{Z}_p equivariantes es también \mathbb{Z}_p equivariante, entonces tenemos una función \mathbb{Z}_p equivariante de $(\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ en $(\mathbb{Z}_p)^{*n}$.

Por lo tanto, es suficiente con probar que no hay una función \mathbb{Z}_p equivariante de $K = (\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ en $L = (\mathbb{Z}_p)^{*n}$.

Resolvamos por contradicción, supongamos que existe una función \mathbb{Z}_p equivariante $f : \|K\| \rightarrow \|L\|$, donde $K = (\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ y $L = (\mathbb{Z}_p)^{*n}$. Por el teorema de aproximación simplicial tenemos una función simplicial $g : V(J) \rightarrow V(L)$, donde J es una subdivisión de K .

Ahora notemos que si en el complejo K nos restringimos a n copias isomorfas a \mathbb{Z}_p , entonces tendremos a L encajado como un subcomplejo de K , por lo cual podemos pensar que la imagen

de g está encajada en $V(K)$, por lo cual escribiremos $g : V(J) \rightarrow V(K)$. Contaremos el número de Lefschetz de g de dos maneras distintas, con la finalidad de llegar a una contradicción.

Sabemos que g induce una función $g_{C_k} : C_k(J) \rightarrow C_k(J)$ (porque a cada k cadena de K le corresponde una única k cadena de J). Por un lado, tenemos que el número de Lefschetz es

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{traza}(g_{C_k}),$$

donde $\text{traza}(g_{C_k})$ es la suma de la diagonal de la matriz $(g_{C_k})_{\beta}^{\beta}$, para cualquier base β de $C_k(J)$.

Consideremos la base de $C_k(J)$ formada por todos los simplejos A que son k dimensionales. Veremos que todos los simplejos de la base que están en la misma órbita, aportan lo mismo en la diagonal. Sea A un simplejo k dimensional y sea ϕA otro simplejo k dimensional en la misma órbita (donde ϕ es un elemento del grupo G). Consideremos tres casos.

Si $g_{C_k}(A) = 0$, entonces la respectiva entrada en la diagonal de la matriz es 0 y $0 = \phi g_{C_k}(A)$. Además, por la G acción tenemos que $0 = \phi g_{C_k}(A) = g_{C_k}(\phi A)$, por lo cual la entrada correspondiente a ϕA también es cero.

Si $g_{C_k}(A) = A$, entonces la entrada correspondiente en la diagonal es 1 y $\phi g_{C_k}(A) = \phi A$. Y por la G acción tenemos que $\phi A = \phi g_{C_k}(A) = g_{C_k}(\phi A)$, por lo cual la entrada correspondiente de ϕA también es 1.

Si $g_{C_k}(A) = B$, con $B \neq A$ otro simplejo de dimensión k , entonces la entrada correspondiente en la diagonal es 0 y $\phi g_{C_k}(A) = \phi B$. Por la G acción tenemos que $\phi B = \phi g_{C_k}(A) = g_{C_k}(\phi A)$, y como en los preliminares vimos que cada ϕ es biyectiva, entonces $\phi B \neq \phi A$. Por lo cual la entrada correspondiente de ϕA también es 0.

Por lo tanto, todos los simplejos de la base que están en la misma órbita aportan lo mismo en la traza, y como cada órbita tiene tamaño p , tenemos que $\text{traza}(g_{C_k})$ es múltiplo de p . De esto concluimos que el número de Lefschetz $\Lambda(g)$ es múltiplo de p .

Por otro lado, tenemos que el número de Lefschetz $\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{traza}(g_{H_k})$, donde $g_{H_k} : H_k(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(K, \mathbb{Q})$. Como $K = (\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ es $n - 1$ conexo, entonces, para cada k entre 1 y $n - 1$, $H_k(K, \mathbb{Q}) = 0$ y $\text{traza}(g_{H_k}) = 0$. Además, recordemos que la imagen de g es $V(L)$ (porque estamos pensando que L está encajado en K), por lo cual g_{H_n} solo depende de $H_n(L, \mathbb{Q})$. Como L es de dimensión $n - 1$, entonces no tiene agujeros de dimensión n , por lo cual $H_n(L, \mathbb{Q}) = 0$ y $\text{traza}(g_{H_n}) = 0$. Finalmente, como K solo tiene una componente conexa (de vértices), entonces $\text{traza}(g_{H_0}) = 1$ y el número de Lefschetz es $\Lambda(g) = 1$, lo cual contradice que es múltiplo de p .

□

Demostraremos un último resultado de G índice, antes de demostrar el teorema de Dold.

Proposición 3.0.7. *Sea G un grupo finito no trivial y X un G espacio $n - 1$ conexo. Entonces, $\text{ind}_G(X) \geq n$.*

Demostración. Sea X_n un $E_n G$ espacio. Como X_n es un G complejo simplicial finito de dimensión a lo más n con una acción libre de G , entonces por el lema 3.0.3, hay una función G equivariante de X_n a X . Pero ya habíamos visto que la contrapositiva del Lema 3.0.5 nos dice que $\text{ind}_G(X_n) \leq \text{ind}_G(X)$. El teorema 3.0.6 nos dice que $\text{ind}_G(X_n) = n$, por lo tanto, $\text{ind}_G(X) \geq \text{ind}_G(X_n) = n$. □

Ahora sí, demostraremos el teorema de Dold usando las herramientas de G índices que acabamos de demostrar.

Teorema 3.0.8. (Teorema de Dold) *Sea G un grupo finito con $|G| > 1$. Sea X un G espacio n conexo, y Y un G espacio de dimensión a lo más n con una acción libre de G . Entonces, no existe una función G equivariante de X a Y .*

Demostración. Como X es n conexo, por la proposición 3.0.7, tenemos que $ind_G(X) \geq n + 1$. Como Y es un G espacio de dimensión a lo más n con una acción libre de G , entonces por el Lema 3.0.3, $ind_G(Y) \leq n$. Entonces, $ind_G(X) \geq n + 1 > n \geq ind_G(Y)$, por lo tanto, por el lema 3.0.5, no puede existir $f : X \rightarrow Y$ que sea G equivariante. \square

Aunque el teorema de Borsuk Ulam es un teorema topológico de continuidad muy poderoso, tiene la desventaja que el dominio de la función tiene que ser una esfera. El teorema de Dold, además de ser un corolario del teorema de Borsuk Ulam para G espacios, tiene la ventaja de trabajar con espacios más generales que las esferas, ya que solo les pedimos restricciones de conexidad y dimensión.

Capítulo 4

Diagramas de Potencia

El propósito de este capítulo es demostrar que para cualquier entero positivo n , existe una teselación convexa de \mathbb{R}^d formada por n conjuntos convexos, que equiparticiona una medida de probabilidad [2]. Más aún, veremos que esa teselación convexa es una generalización de los *diagramas de Voronoi*, y son llamados *diagramas de potencia* (los cuales definiremos a continuación).

Definición 4.0.1. Sea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^d y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ un vector de pesos en \mathbb{R}^n .

a) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos las funciones potencias $h_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h_i(x) = d(x, x_i)^2 - w_i.$$

Además, diremos que $h_i(x)$ es la potencia de x a x_i .

b) Para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, definamos $H_{i,j} = \{x | h_i(x) = h_j(x)\}$, es decir, el conjunto de puntos que tiene igual potencia a x_i y x_j . Notemos que

$$\begin{aligned} H_{i,j} &= \{x | h_i(x) = h_j(x)\} \\ &= \{x | d(x, x_i)^2 - w_i = d(x, x_j)^2 - w_j\} \\ &= \{x | 2(x_i - x_j) \cdot x = w_j - w_i + \|x_i\|^2 - \|x_j\|^2\} \end{aligned}$$

es un hiperplano, y lo llamaremos eje radical de x_i y x_j . Los semiespacios que define, los denotaremos como $H_{i,j}^+ = \{x | h_i(x) \leq h_j(x)\}$ y $H_{i,j}^- = \{x | h_i(x) \geq h_j(x)\}$.

c) El diagrama de potencia $C(S, w)$ es una teselación de \mathbb{R}^d en n conjuntos C_1, \dots, C_n , tal que,

$$x \in C_i \Leftrightarrow h_i(x) \leq h_j(x) \text{ para toda } j.$$

En otras palabras, $C(S, w)$ es una teselación de \mathbb{R}^d , donde cada C_i es el conjunto de puntos x tal que la función potencia $h_i(x)$ es mínima entre todas las funciones potencias. Más aún, como cada C_i es la intersección de todos los semiespacios $H_{i,j}^+ = \{x | h_i(x) \leq h_j(x)\}$, cada $H_{i,j}^+$ es convexo y la intersección de conjuntos convexos es convexo, tenemos que cada C_i es convexo. Por lo tanto, un diagrama de potencia $C(S, w)$ es una teselación convexa de \mathbb{R}^d .

Un caso particular es cuando todos los pesos $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ son iguales a cero. En este caso las funciones potencia están dadas por $h_i(x) = d(x, x_i)^2$, y el diagrama de potencia es una teselación convexa tal que los puntos de los hiperplanos $H_{i,j}$ tienen igual distancia a los puntos x_i, x_j , estos hiperplanos son conocidos como mediatrices. Este ejemplo nos da una teselación convexa conocida como diagrama de Voronoi de los puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. En la figura 4.1 tenemos el diagrama de Voronoi de 7 puntos en el plano.

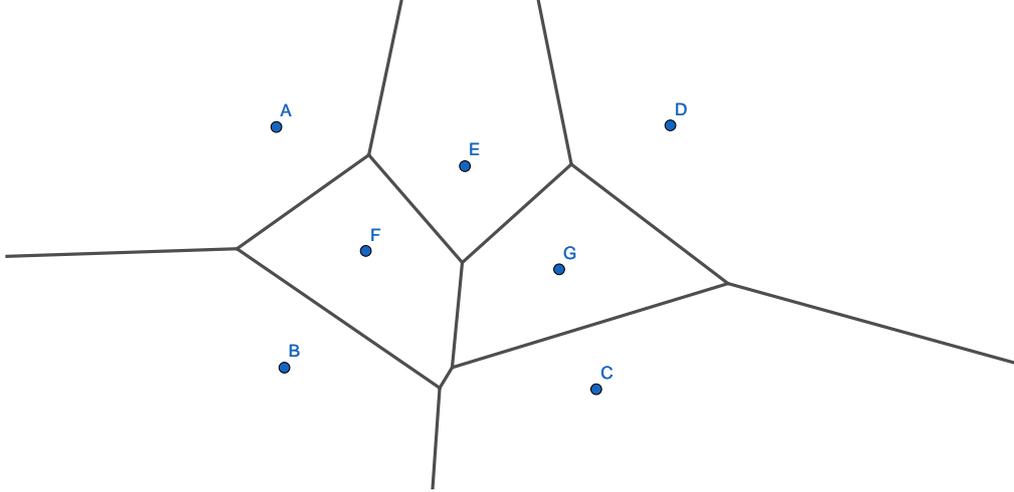


Figura 4.1: Diagrama de Voronoi del conjunto $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, es decir, el diagrama de potencia $C(S, w)$ con $w = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

En los diagramas de Voronoi se sabe que la mediatriz de x_i y x_j es ortogonal a $x_i - x_j$. En los diagramas de potencia, el eje radical de x_i y x_j es

$$H_{i,j} = \{x \mid 2(x_i - x_j) \cdot x = w_j - w_i + \|x_i\|^2 - \|x_j\|^2\},$$

por lo cual $H_{i,j}$ es un hiperplano ortogonal a $x_i - x_j$ y su posición depende únicamente de $w_j - w_i + \|x_i\|^2 - \|x_j\|^2$ (ver figura 4.2).

Lo anterior nos dice que si empezamos con un diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y queremos empezar a ponerle pesos no cero a nuestro diagrama, lo único que estamos haciendo es trasladar (de manera paralela) las mediatrices.

Ahora queremos ver que siempre que tengamos un conjunto finito $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de puntos en \mathbb{R}^d y una teselación convexa formada de intersecar hiperplanos ortogonales a los vectores $x_i - x_j$, podemos encontrar un vector de pesos w tal que el diagrama de potencia $C(S, w)$ es esa teselación convexa.

Lema 4.0.2. *Sea $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ una teselación convexa de \mathbb{R}^d , tal que para cada i existe un punto $x_i \in C_i$; y para cada C_i, C_j con $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, la línea que conecta x_i con x_j es ortogonal a $C_i \cap C_j$. Entonces, C es el diagrama de potencia de $(\{x_1, \dots, x_n\}, w)$, para algún vector de pesos $w \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Primero observemos que siempre que nos tomamos dos puntos x_i y x_j , con $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, tenemos que $C_i \cap C_j$ es ortogonal a $x_i - x_j$, entonces $C_i \cap C_j$ está contenido en el hiperplano $\{x \mid 2(x_i - x_j) \cdot x = r\}$, para algún $r \in \mathbb{R}$. Entonces, si elegimos un w_i de manera

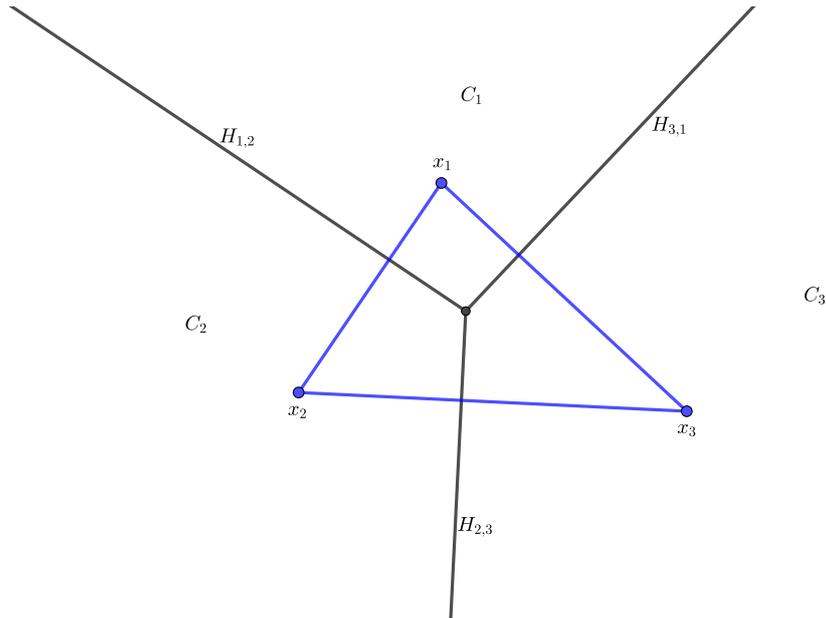


Figura 4.2: Diagrama de potencia $C(S, w)$, con $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $w = (2, 3, 4)$.

arbitraria y después definimos $w_j = r + w_i - \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2$, tendremos que $C_i \cap C_j$ estará contenido en el hiperplano

$$\{x | 2(x_i - x_j) \cdot x = w_j - w_i + \|x_i\|^2 - \|x_j\|^2\} = H_{i,j},$$

es decir, $C_i \cap C_j$ estará contenido en el eje radical de x_i y x_j (con los pesos w_i y w_j).

Usaremos la observación anterior para construir el vector de pesos w . Consideremos dos casos.

Si todos los puntos son colineales, para cada x_i y x_j que sean consecutivos en la recta, usemos la observación para elegir los pesos w_i, w_j tales que $C_i \cap C_j \subset H_{i,j}$. Como todos los puntos son colineales, podemos seguir eligiendo los pesos de manera inductiva y obtener el diagrama de potencia que queremos (ver figura 4.3).

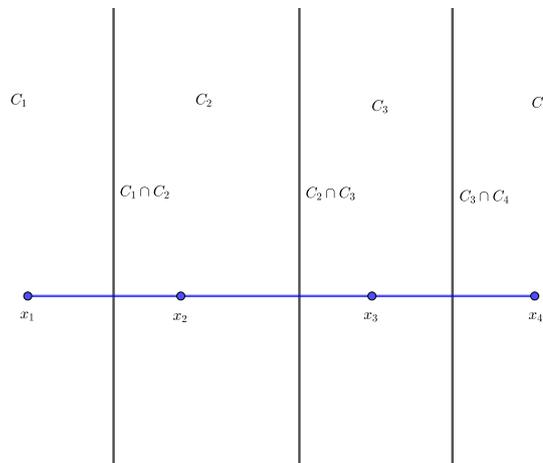


Figura 4.3: Dibujo del caso 1 del lema 4.0.2.

Si no todos los puntos son colineales, consideremos x_i, x_j, x_l tal que $C_i \cap C_j \cap C_l \neq \emptyset$. Sea $w_i \in \mathbb{R}$ cualquier peso asociado a x_i . Por la observación, existen w_j, w_l números reales tales que $C_i \cap C_j \subset H_{i,j}$ y $C_i \cap C_l \subset H_{i,l}$, por lo cual $C_i \cap C_j \cap C_l \subset H_{i,j} \cap H_{i,l}$. Ahora nos gustaría ver que $C_j \cap C_l \subset H_{j,l}$ (con los pesos w_j y w_l). Por definición, todos los puntos de $H_{i,j} \cap H_{i,l}$ tienen igual potencia a x_i, x_j y x_l , en particular tenemos que $H_{i,j} \cap H_{i,l}$ está contenido en el eje radical de x_j y x_l , es decir, $C_i \cap C_j \cap C_l \subset H_{i,j} \cap H_{i,l} \subset H_{j,l}$. De esto se sigue que $H_{j,l}$ es un hiperplano ortogonal a $x_j - x_l$ que contiene a $C_i \cap C_j \cap C_l$. Como $C_j \cap C_l$ también es ortogonal a $x_j - x_l$ y también contiene a $C_i \cap C_j \cap C_l$, entonces $C_j \cap C_l \subset H_{j,l}$.

Esto quiere decir que podemos construir los w_i de manera transitiva, por lo tanto, podemos seguir construyendo los pesos w_i de manera inductiva y obtener el diagrama de potencia que queremos (ver figura 4.4).

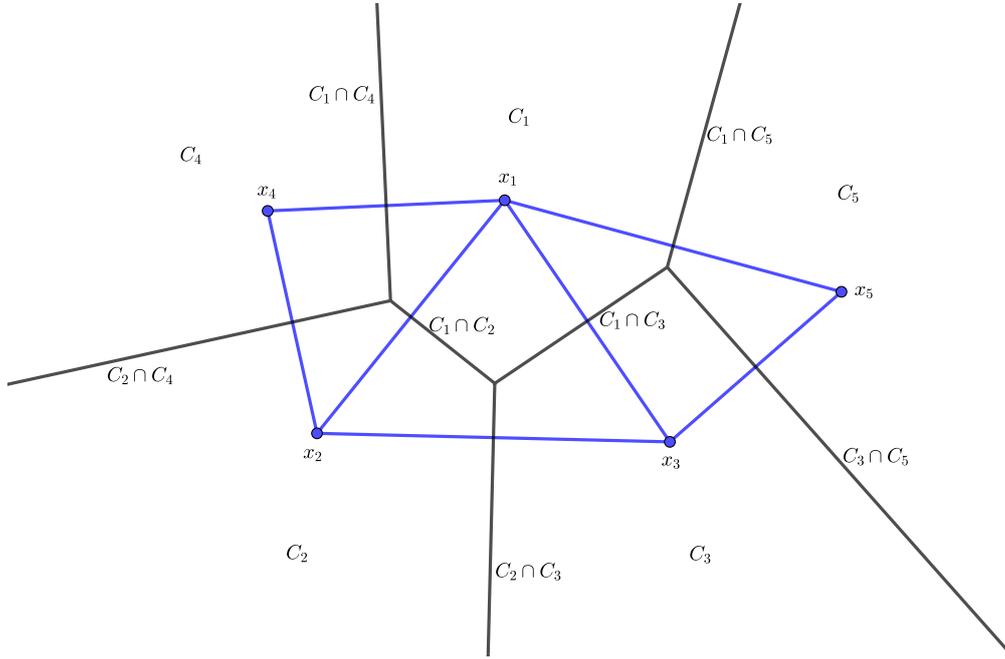


Figura 4.4: Dibujo del caso 2 del lema 4.0.2. En este ejemplo, podemos iniciar definiendo los pesos w_1, w_2, w_3 , usando el argumento del caso 2 con los puntos x_1, x_2, x_3 . Después, podemos definir el peso w_4 , usando el argumento del caso 2 con los puntos x_1, x_2, x_4 . Finalmente, definiremos w_5 , usando el argumento del caso 2 con los puntos x_1, x_3, x_5 .

□

Sea $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^d y μ una medida finita en \mathbb{R}^d tal que $\mu(\mathbb{R}^d) = m$. Diremos que una función $c : S \rightarrow [0, m]$ es una *función de capacidad* (de la medida μ), si $\sum_{s \in S} c(s) = \mu(\mathbb{R}^d) = m$.

Consideremos un conjunto finito $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ de n puntos en \mathbb{R}^d , una medida de probabilidad μ sobre un conjunto convexo y compacto K , y una función de capacidad $c : S \rightarrow [0, 1]$ con $\sum_{s \in S} c(s) = 1$. Aronov, Aurenhammer y Hoffmann [2] probaron que existe un vector de pesos $w \in \mathbb{R}^n$, tal que el diagrama de potencia $C(S, w) = \{C_1, \dots, C_n\}$ tiene vector de capacidad c con la medida μ , es decir, para cada $i = 1, \dots, n$, $\mu(C_i) = c(x_i)$.

Para demostrar este resultado, por el lema 4.0.2, es suficiente encontrar una teselación convexa generada por hiperplanos ortogonales a los segmentos formados por los puntos.

Para esto, demostraremos la existencia de una función $C : K \rightarrow S$ tal que minimice la siguiente integral:

$$\int_K d(x, C(x))^2 d\mu.$$

Primero veamos que si tal función sí existe, entonces se tendrá lo siguiente.

Observación 4.0.3. *Para cada $s, t \in S$, existe un hiperplano H ortogonal a $t - s$ y tal que $\mu(H_{ts} \cap C^{-1}(s)) = 0$ y $\mu(H_{st} \cap C^{-1}(t)) = 0$, donde H_{ts} es el semiespacio acotado por H que contiene a t y H_{st} es el semiespacio acotado por H que contiene a s .*

Demostración. En otras palabras, queremos demostrar que hay un hiperplano H ortogonal a $t - s$ que cumple que $C^{-1}(s)$ se queda contenido en el semiespacio H_{st} (salvo un conjunto de medida cero) y $C^{-1}(t)$ se queda contenido en el semiespacio H_{ts} (salvo un conjunto de medida cero).

Veamos esto por contradicción. Supongamos que no existe tal hiperplano, entonces, sin pérdida de generalidad, tenemos un hiperplano H^1 ortogonal a $t - s$ tal que $\mu(H_{ts}^1 \cap C^{-1}(s)) > 0$. Si empezamos a trasladar (de manera paralela) el hiperplano H^1 hasta llegar a un hiperplano H^2 tal que $\mu(H_{ts}^2 \cap C^{-1}(s)) = 0$ y en todo momento se cumplió que $\mu(H_{st}^1 \cap C^{-1}(t)) = 0$, entonces, tendremos el hiperplano que queremos. En otro caso, tenemos que en algún momento llegamos a un hiperplano H que cumplió que $\mu(H_{ts} \cap C^{-1}(s)) > 0$ y $\mu(H_{st} \cap C^{-1}(t)) > 0$.

El párrafo anterior nos dice que si procedemos por contradicción, existe un hiperplano H ortogonal a $t - s$ tal que $\mu(H_{ts} \cap C^{-1}(s)) > 0$ y $\mu(H_{st} \cap C^{-1}(t)) > 0$. Para cada par de puntos $x_s \in H_{ts} \cap C^{-1}(s)$ y $x_t \in H_{st} \cap C^{-1}(t)$, podemos reasignar x_s a $C^{-1}(t)$ y x_t a $C^{-1}(s)$, reduciendo la suma de las distancias al cuadrado (ver figura 4.5).

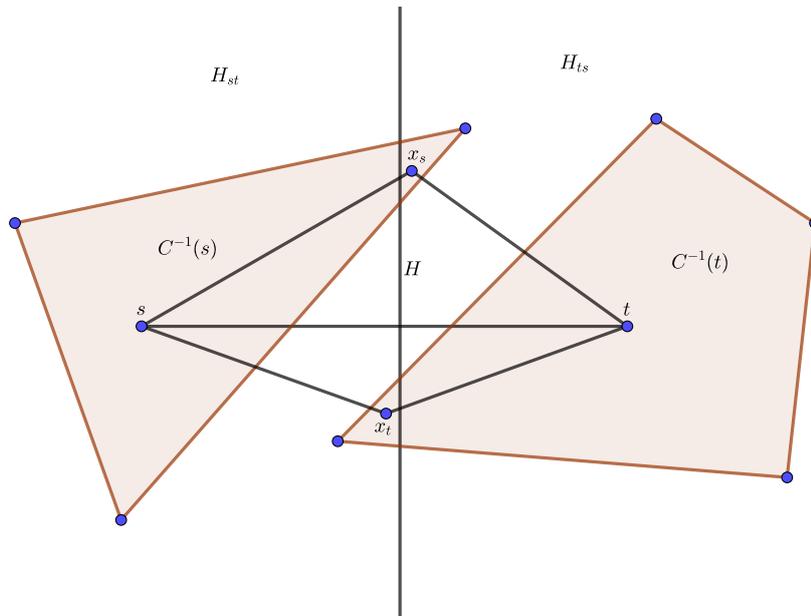


Figura 4.5: Si reasignamos los puntos x_s a $C^{-1}(t)$ y x_t a $C^{-1}(s)$, entonces por el teorema de Pitágoras, $d(x_s, s)^2 + d(x_t, t)^2 > d(x_t, s)^2 + d(x_s, t)^2$, con lo que estamos reduciendo la suma de las distancias al cuadrado.

Entonces, consideremos $A \subset H_{ts} \cap C^{-1}(s)$ y $B \subset H_{st} \cap C^{-1}(t)$ conjuntos de igual medida positiva ($\mu(A) = \mu(B) > 0$), y reasignemos el conjunto A a $C^{-1}(t)$ y el conjunto B a $C^{-1}(s)$, con lo cual tenemos otra función donde la integral es menor, contradiciendo la minimalidad de C .

□

Esta observación implica que si tal C existe, entonces cada $C^{-1}(s)$ es la intersección de a lo más $|S| - 1$ semiespacios, y por lo tanto C induce una teselación convexa.

Teorema 4.0.4. *Sea $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^d y sea K un conjunto convexo y compacto. Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R}^d la cual es cero afuera de K y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Para cada función de capacidad $c : S \rightarrow [0, 1]$ con $\sum_{s \in S} c(s) = 1$, existe al menos una función $C : K \rightarrow S$ de \mathbb{R}^d tal que $\mu(C^{-1}(s)) = c(s)$ y $C^{-1}(s)$ es la intersección de a lo más $n - 1$ semiespacios. Más aún, entre todas esas funciones, existe una que minimiza*

$$\int_K d(x, C(x))^2 d\mu.$$

Demostración. Notemos que si $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ es una teselación convexa de \mathbb{R}^d tal que cada C_i es la intersección de a lo más $n - 1$ semiespacios, entonces, podemos definir $C : K \rightarrow S$ (para hacer ligera la notación, usaremos la misma C para denotar la teselación y la función) de la siguiente manera: si $x \in K$ es tal que $x \in C_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces, $C(x) = x_i$. Por supuesto, no todas las funciones C inducidas por teselaciones convexas de \mathbb{R}^d cumplen que $\mu(C^{-1}(s)) = c(s)$, sin embargo, veremos que existe un subconjunto no vacío (del conjunto de estas teselaciones convexas) que sí cumple lo que queremos.

Como cada semiespacio está determinado por un hiperplano y cada hiperplano en \mathbb{R}^d está determinado por $d + 1$ números reales (usando la ecuación del hiperplano), entonces cada C_i está determinado por $(n - 1)(d + 1)$ números reales. Por lo tanto, la teselación convexa $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ (y su función inducida C) queda determinada por $j = n(n - 1)(d + 1)$ números reales. Además, j números reales determinan n conjuntos, cada conjunto generado por a lo más $n - 1$ hiperplanos, aunque estos conjuntos no necesariamente forman una teselación.

Definiremos una función $f : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$. Usando el argumento del párrafo anterior, tenemos que cada elemento de \mathbb{R}^j determina una colección de n conjuntos $\{C_1, \dots, C_n\}$, donde cada C_i es la intersección de a lo más $n - 1$ semiespacios, y por lo tanto, cada C_i es convexo. Observemos que los conjuntos C_1, \dots, C_n no necesariamente forman una teselación convexa (porque puede ocurrir que la intersección de sus interiores no sea vacía), sin embargo, esto no es ningún problema, ya que más adelante veremos que existe un subconjunto de \mathbb{R}^j que sí cumple esta propiedad. Entonces, abusando de la notación, definiremos f de la siguiente manera:

$$f(C_1, \dots, C_n) = \int_K d(x, C(x))^2 d\mu.$$

Recordemos que queremos estudiar la función f en un subconjunto Π de \mathbb{R}^j que cumpla que $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una teselación convexa de \mathbb{R}^d y la función C cumpla que $\mu(C^{-1}(s)) = c(s)$, para todo $s \in S$. Veremos que Π es compacto y que f es continua en Π . Como todas las funciones continuas con dominio compacto alcanza un mínimo, tendremos la función C que minimiza la integral que queremos.

Veamos como definir Π para que cumpla las propiedades que vimos en el párrafo anterior.

Queremos que $\mu(C^{-1}(s)) = c(s)$, así que definamos la función continua $\varphi : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(C_1, \dots, C_n) = (\mu(C_1), \dots, \mu(C_n))$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^j$ tal que $\varphi(A) = c = (c(x_1), \dots, c(x_n))$, entonces, A es la imagen inversa de un conjunto cerrado bajo una función continua, por lo tanto, A es cerrado.

También, queremos que la intersección de los interiores de cada par de conjuntos C_i sea vacía (para que los conjuntos convexos C_i formen una teselación convexa), por lo cual consideremos la función continua $\psi : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\psi(C_1, \dots, C_n) = \sum_{i \neq j} V(C_i \cap C_j)$, donde V denota el volumen d dimensional. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^j$ tal que $\psi(B) = 0$, por la continuidad de ψ , tenemos que B es un conjunto cerrado. Como μ es cero afuera de K , entonces, existe una constante b tal que $[-b, b]^j$ contiene todas las teselaciones convexas que queremos.

Entonces, definamos $\Pi = A \cap B \cap [-b, b]^j$. Como c es una función de capacidad de la medida de probabilidad μ (es decir, $\sum_{s \in S} c(s) = 1$), nos podemos tomar convexas con medidas $c(s)$ trasladando hiperplanos paralelos (ver figura 4.6), por lo que Π es no vacío. Además, Π es cerrado por ser la intersección de tres conjuntos cerrados, y es acotado porque está contenido en $[-b, b]^j$, por lo tanto, Π es compacto. Entonces, restringiremos la función f a Π .

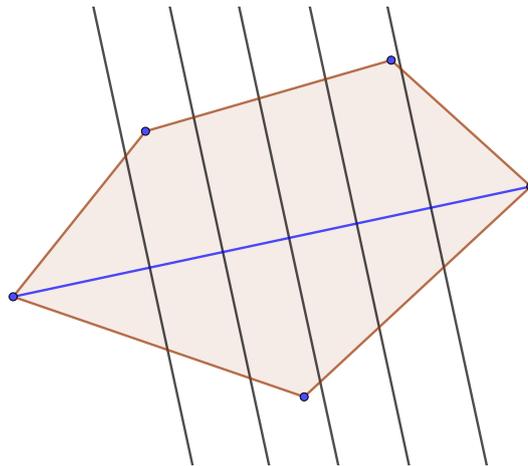


Figura 4.6: En este ejemplo estamos dividiendo el área de un polígono K en 6 conjuntos convexos, trasladando rectas paralelas que son ortogonales a la recta azul.

Veamos que f es continua. Al principio puede parecer un poco extraño que la función f sea continua, ya que puede haber puntos $x \in K$, tal que tengan cambios bruscos en la función $d(x, C(x))^2$, sin embargo, la idea detras de la continuidad de f es que el conjunto de puntos que tienen esos cambios bruscos en la función $d(x, C(x))^2$ tiene medida cero. El argumento es muy similar a la demostración de la continuidad en el teorema del Ham Sandwich. Consideremos (C^i) una sucesión en Π convergiendo a $C = (C_1, \dots, C_n) \in \Pi$. Entonces, para cada $x \in K$ que no esté en los hiperplanos generados por los conjuntos C_1, \dots, C_n , la función $d(x, C^i(x))^2$ converge a $d(x, C(x))^2$. Como la medida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, tenemos una convergencia en casi cualquier parte, ya que la unión finita de hiperplanos tiene medida cero. Además, como K es compacto y S es finito, entonces las funciones $d(x, C^i(x))^2$ están acotadas por la función constante l^2 , donde $l = \sup\{d(x, x_i) | x \in K, x_i \in S\}$. Usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que $f(C_1^i, \dots, C_n^i) = \int_K d(x, C^i(x))^2 d\mu$ converge a $f(C_1, \dots, C_n) = \int_K d(x, C(x))^2 d\mu$. Por lo tanto, f es continua.

Como f es continua y su dominio Π es compacto, entonces f alcanza su mínimo, que es lo que queríamos. \square

Este teorema nos dice que hay una teselación $\{C_1, \dots, C_n\}$ con vector de capacidad c (con la medida μ). Ahora veremos que esa teselación puede ser obtenida de un diagrama de potencia.

Teorema 4.0.5. *Sea $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^d y sea K un conjunto convexo y compacto. Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R}^d la cual es cero afuera de K y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Para cada función de capacidad $c : S \rightarrow [0, 1]$ con $\sum_{x_i \in S} c(x_i) = 1$, existe un vector de pesos $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que el diagrama de potencia $C(S, w)$ cumple que $\mu(C_i) = c(x_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostración. El teorema anterior nos dice que existe una teselación convexa $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ que cumple $\mu(C_i) = c(x_i)$. Por la observación 4.0.3 tenemos que para cada C_i, C_j con $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, $x_i - x_j$ es ortogonal a $C_i \cap C_j$, y por el Lema 4.0.2, existe un vector $w \in \mathbb{R}^n$, tal que el diagrama de potencia $C(S, w) = \{C_1, \dots, C_n\}$. Por lo tanto, este diagrama de potencia cumple lo que queremos. \square

Notemos que cuando la función de capacidad c cumple que $c(x_i) = \frac{1}{n}$, para cada i , entonces el teorema anterior nos dice que existe un diagrama de potencia que equiparticiona la medida.

Observemos que para cada conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en \mathbb{R}^d , cada vector de pesos $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, y cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el vector $v = (w_1 + \alpha, w_2 + \alpha, \dots, w_n + \alpha)$ cumple que $C(S, w) = C(S, v)$. De esta manera, si tenemos un vector w que cumple el teorema 4.0.5, le podemos sumar algún $\alpha \in \mathbb{R}$ (si es necesario), para que se cumpla $w \cdot c = 0$, donde $c = (c(x_1), \dots, c(x_n))$.

Más aún, Aronov y Hubbard [12] probaron que para un diagrama de potencia $C(S, w)$, con $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, la distancia de x_i al punto donde la línea $x_i x_j$ corta a $H_{i,j}$ es $\frac{d(x_i, x_j)^2 - w_j + w_i}{2d(x_i, x_j)}$. De esto se sigue que si $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es otro vector

de pesos que cumple $C(S, w) = C(S, v)$, entonces, $\frac{d(x_i, x_j)^2 - w_j + w_i}{2d(x_i, x_j)} = \frac{d(x_i, x_j)^2 - v_j + v_i}{2d(x_i, x_j)}$,

por lo cual $w_i - w_j = v_i - v_j$ para cada $i, j = 1, \dots, n$. Luego, si fijamos $v_1 = w_1 + \alpha$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos que para cada $i = 2, \dots, n$, $v_i = w_i + v_1 - w_1 = w_i + \alpha$. Por lo tanto, $v = (w_1 + \alpha, w_2 + \alpha, \dots, w_n + \alpha)$. Hemos demostrado el siguiente lema [12].

Lema 4.0.6. *Sean $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d , $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ un vector de pesos en \mathbb{R}^n , y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ otro vector de pesos en \mathbb{R}^n . Entonces, $C(S, w) = C(S, v)$ si y solo si, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y para toda $i = 1, \dots, n$, $v_i = w_i + \alpha$.*

Con el lema anterior, podemos concluir que hay un único vector de pesos w que cumple el teorema 4.0.5 con $w \cdot c = 0$.

Ya sabemos que los teoremas 4.0.4 y 4.0.5 se pueden aplicar para cualquier conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d . De hecho, para cada medida de probabilidad μ , podemos fijar una función de capacidad $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ (es decir, para toda i , $c_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n c_i = 1$) y aplicar los teoremas 4.0.4 y 4.0.5 a cada conjunto finito de n puntos, con la función de capacidad $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Dada una medida finita μ en \mathbb{R}^d con $\mu(\mathbb{R}^d) = m$, diremos que un vector $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ es un *vector de capacidad* de la medida μ , si para toda i , $c_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n c_i = \mu(\mathbb{R}^d) = m$. Es decir, un vector de capacidad de la medida μ es una función de capacidad fija (de la medida μ) que podemos usar para aplicar los teoremas 4.0.4 y 4.0.5 a todos los conjuntos finitos de n puntos.

Una observación interesante es que si empezamos a mover un conjunto de n puntos de manera continua, entonces, el diagrama de potencia que tiene capacidad $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ también cambia de manera continua. A continuación, veremos el problema del *transporte optimal*, que formaliza la idea de continuidad que acabamos de ver.

Sea μ una medida de probabilidad y c un vector de capacidad fijo (para la medida μ). Consideremos el espacio de funciones

$$L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d, \mu) = \left\{ C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : \int d(x, C(x))^2 d\mu(x) < \infty \right\},$$

con la métrica de la distancia de Wasserstein:

$$d_{L_2}(C_1, C_2) = \left(\int d(C_1(x), C_2(x))^2 d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

El problema del *transporte optimal* es una función Γ que asigna a cada conjunto finito S de puntos en \mathbb{R}^d su función C_S que minimiza la integral del teorema 4.0.4. Para cada S , la función C_S es única y Γ es continua [26].

Aronov y Hubard [12] también probaron que si en el teorema 4.0.5 movemos los puntos continuamente, entonces el vector de pesos w que cumple $w \cdot c = 0$, también se mueve continuamente. La idea es que cuando empezamos a mover los puntos continuamente (uno por uno), por la continuidad del transporte optimal, la distancia $\frac{d(x_i, x_j)^2 - w_j + w_i}{2d(x_i, x_j)}$ también cambiará de manera continua, por lo cual, los pesos w_i también cambian de manera continua.

Lema 4.0.7. *Sea n un entero positivo y K un conjunto convexo y compacto. Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R}^d la cual es cero afuera de K , $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ un vector de capacidad positivo (para toda i , $c_i > 0$ y $\sum_{i=1}^n c_i = 1$), y $F_n(\mathbb{R}^d) = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}^d, x_i \neq x_j\}$. Entonces, la función $f : F_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$, que asigna a cada elemento $S \in F_n(\mathbb{R}^d)$ el vector de pesos w tal que el diagrama de potencia $C(S, w)$ tiene vector de capacidad c con $w \cdot c = 0$, es continua.*

Demostración. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in F_n(\mathbb{R}^d)$ y $x^k \in F_n(\mathbb{R}^d)$ una sucesión convergiendo a x , entonces por el problema del transporte optimal, C_{x^k} converge a $C_x = C$ en el espacio $L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d, \mu)$. Demostraremos por contradicción que $f(x^k) = w^k$ converge a $f(x) = w$. Por hipótesis, para toda $\delta > 0$, para toda j y toda k suficientemente grande, $d(x_j^k, x_j) < \delta$. Además, la medida es cero afuera de K , entonces los números $|w_j^k|$ están acotados (porque estamos suponiendo que el vector de capacidad es positivo, por lo cual todos los conjuntos C_i del diagrama de potencia tienen medida positiva). Por lo tanto, existe una subsucesión de w^k que converge a algún $q \neq f(x)$. Sea D la función asociada con el diagrama de potencia $C(x, q)$, entonces,

$$\begin{aligned} \int d(D(x), C(x))^2 d\mu(x) &= \sum_{j,l} d(x_j, x_l)^2 \mu(C_j(x, q) \cap C_l(x, w)) \\ &\geq d(x_{j_0}, x_{l_0})^2 \mu(C_{j_0}(x, q) \cap C_{l_0}(x, w)) > 0, \end{aligned}$$

para algún (i_0, j_0) , lo cual contradice la continuidad del transporte optimal. Por lo tanto, $f_i(x)$ es continua. \square

Recordemos que el caso discreto en \mathbb{R}^2 del teorema del Ham Sandwich (el problema de la introducción), se resolvió encontrando una recta que biseca uno de los dos conjuntos y después moviendo continuamente la recta para llegar a un momento en el que la recta biseque ambos conjuntos. También recordemos que nuestro propósito es demostrar que, dadas d medidas en \mathbb{R}^d , existe una teselación convexa que equiparticiona simultáneamente las d medidas. El teorema 4.0.5 nos garantiza la existencia de un diagrama de potencia que equiparticiona una de las medidas, y usando el lema 4.0.7, nos gustaría empezar a mover los puntos continuamente para ver si logramos llegar a un momento en el que el diagrama de potencia equiparticione simultáneamente las d medidas.

Capítulo 5

Una generalización del Ham Sandwich

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección veremos formalmente la demostración de Soberón del teorema principal [22]; para esto se usará el teorema 4.0.5 del capítulo anterior. En la segunda sección daremos las ideas de la demostración de Karasev, Hubard y Aronov del teorema principal [15], además, se verá como reducir un problema (abierto) de geometría discreta a un problema topológico.

5.1. El teorema principal

Recordemos que en la demostración del teorema 4.0.5 usamos que la medida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, además la medida es finita y $\mu(K) = \mu(\mathbb{R}^d)$, donde K es un conjunto convexo y compacto.

También usamos que μ es una medida de probabilidad, sin embargo, veremos que el teorema 4.0.5 (y por lo tanto el lema 4.0.7) se puede aplicar cuando μ es cualquier medida finita. Supongamos que μ es una medida finita, tal que $\mu(\mathbb{R}^d) = n$ (con n entero positivo). Consideremos un vector de capacidad $c = (c_1, \dots, c_n)$ tal que $\sum_{i=1}^n c_i = n$, queremos ver que hay un diagrama de potencia que tiene capacidad c con la medida μ . Definamos la medida μ^* como $\mu^*(A) = \frac{\mu(A)}{n}$, para cada conjunto medible A . Es inmediato que μ^* es una medida de probabilidad, por lo cual podemos aplicar el teorema 4.0.5 y obtener un diagrama de potencia que tenga vector de capacidad $c^* = (\frac{c_1}{n}, \dots, \frac{c_n}{n})$ con la medida μ^* . Este diagrama de potencia, por definición de μ^* , cumple que tiene vector de capacidad c con la medida μ , que es lo que queremos. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.1.1. *Una medida μ en \mathbb{R}^d es amigable, si es finita, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y existe un conjunto convexo y compacto K tal que $\mu(K) = \mu(\mathbb{R}^d)$.*

Supongamos que tenemos d medidas amigables μ_1, \dots, μ_d en \mathbb{R}^d , tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = n$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. El teorema 4.0.5 nos dice que para cada medida μ_i y cada conjunto de n puntos en \mathbb{R}^d existe un diagrama de potencia asociado a ese conjunto de puntos que equiparticiona la medida μ_i . Nos gustaría probar la existencia de un conjunto de puntos tal que ese diagrama de potencia sea el mismo para las d medidas, y de esa manera tendríamos el teorema principal.

Por el lema 4.0.7, para cada medida μ_i podemos definir una función continua f_i que asocie a cada elemento S de $F_n(\mathbb{R}^d) = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}^d, x_i \neq x_j\}$ el vector de pesos w que hace que el diagrama de potencia $C(S, w)$ equiparticione la medida μ_i (con $w \cdot c = 0$ y $c = (1, 1, \dots, 1)$). Entonces, si definimos la función continua $f = (f_1 - f_2, f_1 - f_3, \dots, f_1 - f_d)$, cualquier cero de esa función nos dará el diagrama de potencia que equiparticiona simultáneamente las d medidas, la cual sabemos es una teselación convexa.

Si tratamos de aplicar el teorema de Dold para encontrar ese cero, no se cumplirán las hipótesis, así que con la finalidad de subirle la conexidad a $F_n(\mathbb{R}^d)$, permitiremos que algunos de los puntos sean iguales, con la condición de que no todos sean el mismo punto simultáneamente (para no obtener una teselación trivial). En otras palabras, queremos extender el dominio de las funciones f_i (y de la función f) al conjunto $X = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}^d\} \setminus \{(x_1, \dots, x_1) | x_1 \in \mathbb{R}^d\}$.

Si tenemos un conjunto de n puntos distintos en \mathbb{R}^d , usando el teorema 4.0.5 (para cada medida μ_i), queremos encontrar el diagrama de potencia que a cada punto le asigna capacidad 1. Si empezamos a mover continuamente ese conjunto de n puntos distintos y hacemos que dos de ellos converjan a un mismo punto, lo más natural sería encontrar el diagrama de potencia (para cada medida μ_i) que asigne capacidad 2 al punto que antes eran dos, y 1 a todos los demás puntos, más aún, si un conjunto de k puntos colapsó a un punto, la intuición nos dice que le asignemos capacidad k a ese nuevo punto.

Por ejemplo, si $n = 5$ y consideramos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ puntos distintos en \mathbb{R}^d , entonces, para cada medida μ_i , queremos encontrar el diagrama de potencia que a cada punto le asigne capacidad 1. Si empezamos a mover continuamente los puntos x_2 y x_4 hasta convertir el punto x_2 en el punto x_1 y el punto x_4 en el punto x_3 , ahora tendremos los puntos $(x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_5)$ y, para cada medida μ_i , queremos encontrar el diagrama de potencia que asigne capacidad 2 al punto x_1 , capacidad 2 al punto x_3 , y capacidad 1 al punto x_5 .

Para cada conjunto $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ de r puntos distintos en \mathbb{R}^d , con $2 \leq r \leq n$, definimos $f_i(S)$ como el vector de pesos w que hace que el diagrama de potencia $C(S, w)$ tenga vector de capacidad c con la medida μ_i , donde c es el vector de capacidad que vimos anteriormente (si un conjunto de k puntos se convirtió en un punto, le asignamos capacidad k a ese punto) y w cumple que $w \cdot c = 0$. Entonces, cada cero de la función $f = (f_1 - f_2, f_1 - f_3, \dots, f_1 - f_d)$ nos dará una teselación convexa $\{C_1, \dots, C_r\}$, con $2 \leq r \leq n$, donde cada C_i mida el mismo entero positivo en las d medidas, aunque no necesariamente equiparticione las medidas. Esas teselaciones convexas son conocidas como particiones *balanceadas*.

A continuación, veremos como definir formalmente la función f . Además, para poder definir acciones de grupos que sean libres, trabajaremos el caso cuando n es un número primo. Con estas ideas podemos demostrar el siguiente Lema [22].

Lema 5.1.2. *Sean p y d enteros positivos con p un número primo. Sean μ_1, \dots, μ_d medidas amigables en \mathbb{R}^d tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = p$, para toda $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Entonces, existe un entero $2 \leq r \leq p$ y una teselación de \mathbb{R}^d en r conjuntos convexos C_1, C_2, \dots, C_r , tal que $\mu_1(C_j) = \mu_2(C_j) = \dots = \mu_d(C_j)$, para toda $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, y estas medidas son todas enteras positivas.*

Demostración. Sea $X = \{(x_1, \dots, x_p) | x_i \in \mathbb{R}^d\} \setminus \{(x_1, \dots, x_1) | x_1 \in \mathbb{R}^d\}$ el espacio de las p -tuplas de vectores de \mathbb{R}^d tal que no son todos el mismo punto, de esta manera tenemos que $X \cong \mathbb{R}^{pd} \setminus \mathbb{R}^d$. Notemos que $x \in X$ puede tener entradas repetidas, entonces, para poder aplicar el teorema 4.0.5 y el lema 4.0.7, necesitamos reducir las p -tuplas a conjuntos sin repeticiones.

Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in X$, sea $S(x) = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ la t -tupla de puntos diferentes en x , en el orden en que aparecen en x . Para cada $1 \leq j \leq t$, sea α_j el número de veces que s_j aparece en x (notemos que cada α_j es un entero positivo), y sea $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$. Para cada medida μ_i y cada $x \in X$ definamos $w = (w_1, \dots, w_t)$ el vector de pesos que hace que el diagrama de potencia $(S(x), w)$ tenga vector de capacidad c en la medida μ_i y con w tal que $w \cdot c = 0$; y para toda $1 \leq j \leq p$ sea $r_j = w_h$ si $x_j = s_h$. Entonces, para cada medida μ_i , definamos la función $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ como $f_i(x) = (r_1, \dots, r_p)$.

Por el lema 4.0.7, cada función f_i es continua en los elementos $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in X$ que cumplen que los p puntos son distintos. Para ver que las funciones también son continuas cuando empezamos a juntar los puntos, probaremos que para cada medida μ_i , cuando dos puntos x_1 y x_2 convergen a un mismo punto p , entonces, los pesos $f_i(x_1) = w_1$ y $f_i(x_2) = w_2$ convergen al mismo vector de pesos. Veamos esto por contradicción. Supongamos que (para alguna medida μ_i) los pesos convergen a dos límites diferentes y que el límite de w_1 es mayor que el límite de w_2 , entonces, $w_1 > w_2$. Sea y el punto donde el hiperplano

$$H_{1,2} = \{x | d(x, x_1)^2 - d(x, x_2)^2 = w_1 - w_2\}$$

corta a la línea x_1x_2 , y sean $u = d(y, x_2)$ y $v = d(x_1, x_2)$. Como $w_1 > w_2$, entonces, $d(y, x_1) = d(y, x_2) + d(x_1, x_2) = u + v$ (en otro caso y está entre x_1 y x_2 , entonces, $d(y, x_1) = v - u$) y $w_1 - w_2$ tiene límite positivo.

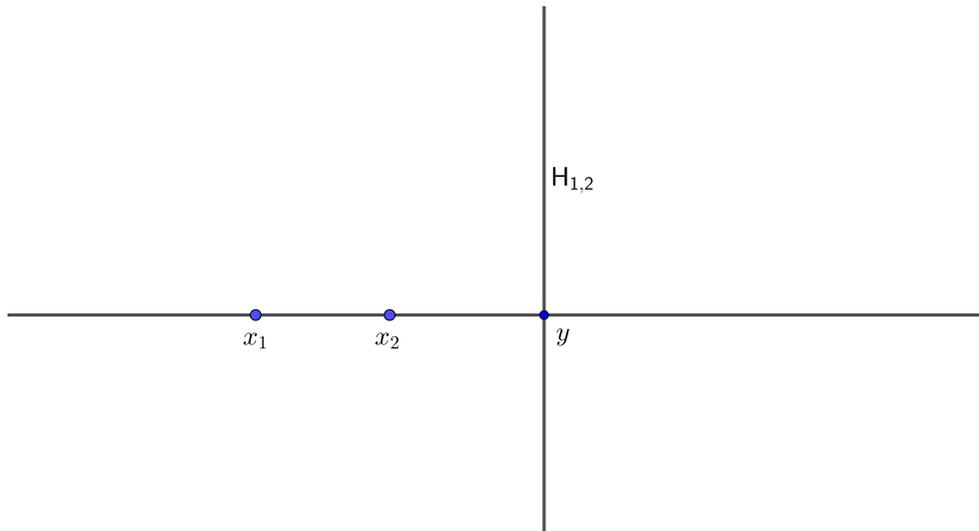


Figura 5.1: En el dibujo, el punto x_2 está entre x_1 y y , por lo cual, $d(y, x_1) = d(y, x_2) + d(x_1, x_2)$.

Como $y \in H_{1,2}$, entonces $w_1 - w_2 = d(y, x_1)^2 - d(y, x_2)^2 = (u + v)^2 - u^2 = v(2u + v)$ tiene límite positivo (en el otro caso $w_1 - w_2 = (v - u)^2 - u^2 = v(v - 2u)$), y como x_1 y x_2 convergen al mismo punto, tenemos que v tiende a cero, por lo cual u tiende a infinito (en el otro caso u tiende a menos infinito, lo cual no es posible porque u es una distancia). Como u tiende a infinito, entonces, $d(p, C_2)$ tiende a infinito, pero esto no es posible porque la medida de C_2 es positiva. Por lo tanto, w_1 y w_2 convergen al mismo peso, y en general, si un conjunto de k puntos convergen a un mismo punto, entonces sus pesos también convergen al mismo peso (porque esos límites son iguales para cada pareja de puntos). De esto concluimos que las funciones f_i son continuas.

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{p(d-1)}$ la función continua definida como $f = (f_1 - f_2, f_1 - f_3, \dots, f_1 - f_d)$. Demostraremos por contradicción que existe un $x \in X$ tal que $f(x) = 0$; para eso usaremos el teorema de Dold.

Primero recordemos que hay una acción de \mathbb{Z}_p en X (ejemplo 1.2.7) dado por $\phi(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$, donde ϕ es un generador de \mathbb{Z}_p . La misma acción se puede aplicar en la imagen de cada f_i (las cuales están contenidas en \mathbb{R}^p), y por lo tanto, en la imagen de f (contenida en $\mathbb{R}^{p(d-1)}$), aplicando la acción en cada p -tupla:

$$\begin{aligned}\phi(f(x)) &= \phi((f_1 - f_2)(x), (f_1 - f_3)(x), \dots, (f_1 - f_d)(x)) \\ &= (\phi((f_1 - f_2)(x)), \phi((f_1 - f_3)(x)), \dots, \phi((f_1 - f_d)(x))).\end{aligned}$$

Veamos que con estas acciones f es \mathbb{Z}_p equivariante. Sea $\phi^k \in \mathbb{Z}_p$ y $x = (x_1, \dots, x_p) \in X$, queremos que $f(\phi^k(x)) = \phi^k(f(x))$. Primero observemos que para cada función f_i , tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}f_i(\phi^k(x)) &= f_i(\phi^k(x_1, \dots, x_p)) = f_i(x_{p-k+1}, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{p-k}) = (r_{p-k+1}, \dots, r_p, r_1, \dots, r_{p-k}) \\ &= \phi^k(r_1, \dots, r_p) = \phi^k(f_i(x_1, \dots, x_p)) = \phi^k(f_i(x)),\end{aligned}$$

es decir, las funciones f_i son \mathbb{Z}_p equivariantes. Entonces, usando que las funciones f_i son \mathbb{Z}_p equivariantes, tenemos que:

$$\begin{aligned}f(\phi^k(x)) &= ((f_1 - f_2)(\phi^k(x)), \dots, (f_1 - f_d)(\phi^k(x))) = (\phi^k((f_1 - f_2)(x)), \dots, \phi^k((f_1 - f_d)(x))) \\ &= \phi^k(f(x)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es \mathbb{Z}_p equivariante.

Por el ejemplo 1.2.7, tenemos que la acción en X es libre, ya que p es un número primo y X no tiene elementos con todas sus coordenadas iguales.

Veamos que si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces, la acción en la imagen de f también es libre. Si no fuera libre, entonces existiría $x \in X$ tal que $\phi(f(x)) = f(x)$. Como la acción está definida sobre cada p -tupla, tenemos que $\phi((f_1 - f_i)(x)) = (f_1 - f_i)(x)$, para cada $i = 2, \dots, d$. Fijemos una $i = 2, \dots, d$, y denotemos por $r^1 = (r_1^1, \dots, r_p^1)$ a $f_1(x)$, y por $r^i = (r_1^i, \dots, r_p^i)$ a $f_i(x)$. Entonces, tenemos que $r_1^1 - r_1^i = r_2^1 - r_2^i = \dots = r_p^1 - r_p^i$, y por el lema 4.0.6, el diagrama de potencia asociado a la medida μ_1 es igual al diagrama de potencia de la medida μ_i (y esto lo podemos hacer para toda $i = 2, \dots, d$). Con esto tendríamos que los d diagramas de potencia son el mismo (y x cumple que $f(x) = 0$), que es lo que queremos probar. En otro caso, supongamos que la acción en la imagen de f también es libre.

Para cada $x \in X$ y cada medida μ_i , tenemos que $r_1 + \dots + r_p = w_1\alpha_1 + \dots + w_i\alpha_i = w \cdot c = 0$, ya que cada α_j es el número de veces que s_j aparece en x . Por lo tanto, podemos pensar que f_i tiene su imagen contenida en \mathbb{R}^{p-1} y que f tiene su imagen contenida en $\mathbb{R}^{(p-1)(d-1)}$.

Si suponemos que no existe $x \in X$ con $f(x) = 0$, entonces, podemos definir $g : X \rightarrow \mathbb{S}^{(p-1)(d-1)-1}$ como $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$, la cual es también \mathbb{Z}_p equivariante. Demostraremos que esta función g contradice el teorema de Dold.

Veamos que $X \cong \mathbb{R}^{pd} \setminus \mathbb{R}^d$ es al menos $pd - d - 2$ conexo. Sea \mathbb{S}^k una esfera en X con $k \leq pd - d - 2$. Consideremos la proyección ortogonal de \mathbb{S}^k sobre el subespacio de dimensión $pd - d$ que es ortogonal a la diagonal \mathbb{R}^d . Si normalizamos tendremos a la esfera \mathbb{S}^k en la esfera \mathbb{S}^{pd-d-1} , la cual sabemos que es $pd - d - 2$ conexo, por lo cual la esfera \mathbb{S}^k sí se podrá contraer a un punto. Por lo tanto, X es al menos $pd - d - 2$ conexo.

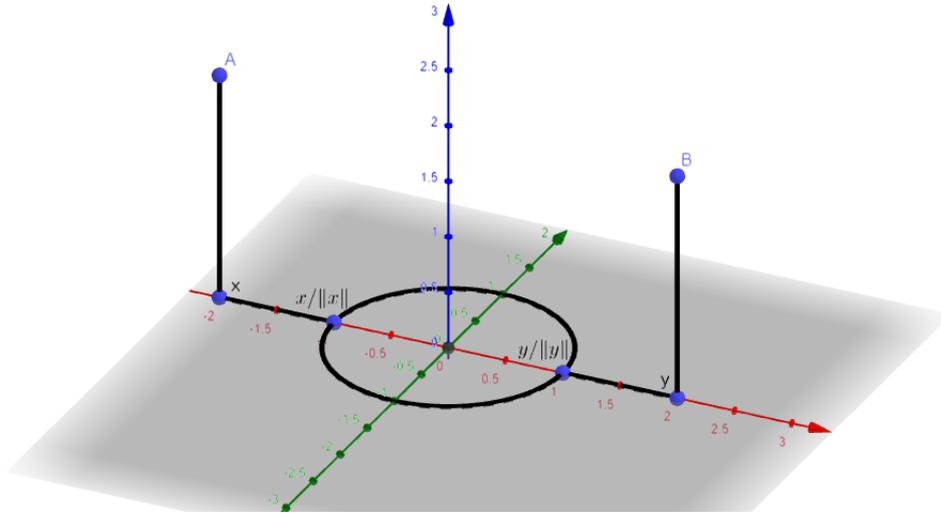


Figura 5.2: Cuando $d = 1$ y $p = 3$, entonces el espacio X es isomorfo a $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}$. En la figura podemos ver a X como el espacio \mathbb{R}^3 menos el eje z (la recta azul). Tenemos a $\{A, B\}$, la esfera \mathbb{S}^0 , encajada en el espacio X . Para contraer esa esfera a un punto, proyectamos los puntos A y B a x y y , después normalizamos a $\frac{x}{\|x\|}$ y $\frac{y}{\|y\|}$. Ahora ya tenemos la esfera \mathbb{S}^0 en la esfera \mathbb{S}^1 , por lo cual ya se puede contraer a un punto.

Como X es al menos $pd - d - 2$ conexo, $\mathbb{S}^{(p-1)(d-1)-1}$ tiene dimensión $(p - 1)(d - 1) - 1$ y $pd - d - 2 \geq (p - 1)(d - 1) - 1$, entonces el teorema de Dold nos dice que no hay funciones \mathbb{Z}_p equivariantes de X en $\mathbb{S}^{(p-1)(d-1)-1}$. Esto es una contradicción, ya que g es una función \mathbb{Z}_p equivariante de X en $\mathbb{S}^{(p-1)(d-1)-1}$. Por lo tanto, existe $x \in X$ con $f(x) = 0$.

Dado el punto $x \in X$ tal que $f(x) = 0$, tenemos que el vector de pesos que hace que el diagrama de potencia con puntos $S(x)$ tenga vector de capacidad c , es el mismo w para las d medidas. Por lo tanto, la teselación convexa $C(S(x), w)$ cumple lo que queremos. □

Como se mencionó en la introducción, el teorema principal para potencias de 2 se obtiene aplicando el teorema del Ham Sandwich de manera inductiva. En general, desde el inicio del problema ya se sabía que si se tenía el teorema principal para números primos, potencias primas o para particiones balanceadas (como el del lema 5.1.2), entonces se podía obtener el teorema principal con argumentos inductivos.

Teorema 5.1.3. Sean n y d enteros positivos. Sean μ_1, \dots, μ_d medidas amigables en \mathbb{R}^d tal que $\mu_i(\mathbb{R}^d) = n$ para toda i . Entonces, existe una teselación convexa de \mathbb{R}^d en n conjuntos C_1, C_2, \dots, C_n tal que $\mu_i(C_j) = 1$ para toda i, j .

Demostración. La demostración se hará por inducción fuerte sobre n .

Para $n = 1$ tenemos que $C_1 = \mathbb{R}^d$ y para $n = 2$ es el teorema del Ham Sandwich.

Supongamos que $n \geq 2$ y que el teorema es cierto para toda $1 \leq k \leq n - 1$. Tenemos dos casos.

Si n no es primo, entonces $n = ab$ con $a, b \leq n - 1$. Por hipótesis de inducción el teorema es cierto para $k = a$, entonces existe una teselación convexa de \mathbb{R}^d en a conjuntos (C_1, \dots, C_a) tal que $\mu_i(C_j) = b$ para cada i, j . Para cada $1 \leq i \leq d$ y para cada $1 \leq j \leq a$, μ_i restringida a C_j es una medida amigable en \mathbb{R}^d , entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción para $k = b$ en cada uno de los convexos (C_1, \dots, C_a) , de esta manera tenemos la teselación convexa buscada de \mathbb{R}^d en $n = ab$ conjuntos convexos.

Si n es primo, aplicamos el Lema 5.1.2, así tenemos una teselación convexa balanceada en $r \geq 2$ conjuntos convexos (C_1, \dots, C_r) , tal que cada C_i mide el mismo entero positivo α_i en las d medidas. Entonces, para cada $1 \leq j \leq r$, aplicamos la hipótesis de inducción con $k = \alpha_j$ en el convexo C_j con las medidas restringidas $\mu_i|_{C_j}$, entonces tenemos la teselación convexa buscada. \square

5.2. Observaciones y trabajo futuro

Ya vimos, de manera formal, la demostración de Soberón del teorema principal. Ahora veamos la idea de la demostración de Karasev, Hubard y Aronov [15], con la finalidad de ver las semejanzas y diferencias que tiene con la demostración de Soberón [22].

La demostración es muy similar a la demostración del problema de la introducción (el caso discreto en el plano): empezaremos con una teselación convexa que equiparticione una de las medidas y empezaremos a mover esa teselación de tal manera que siga equiparticionando esa medida, y queremos ver si en algún momento llegamos a una teselación convexa que también equiparticione las otras $d - 1$ medidas.

Consideremos μ_1, \dots, μ_d medidas amigables de probabilidad en \mathbb{R}^d . El teorema 4.0.5 nos dice que para cada elemento S de $F_n(\mathbb{R}^d) = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}^d, x_i \neq x_j\}$ podemos encontrar un vector de pesos $w \in \mathbb{R}^d$ tal que $C(S, w) = \{C_1, \dots, C_n\}$ es una teselación convexa que equiparticiona la medida μ_1 . Entonces, para cada $i \in \{2, \dots, d\}$ podemos definir la función continua $f_i : F_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$f_i(S) = \left(\mu_i(C_1) - \frac{1}{n}, \dots, \mu_i(C_n) - \frac{1}{n} \right),$$

donde $\{C_1, \dots, C_n\}$ es la teselación convexa que equiparticiona la medida μ_1 .

Observemos que si las funciones f_2, f_3, \dots, f_d tienen un cero en común, entonces tendremos la teselación convexa que equiparticiona simultáneamente las d medidas. Sea $f : F_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^{n(d-1)}$, la función continua definida como $f(S) = (f_2(S), \dots, f_d(S))$. Observemos que de manera similar a la demostración del lema 5.1.2, podemos definir una acción de \mathbb{Z}_n en $F_n(\mathbb{R}^d)$ y en la imagen de f (contenida en $\mathbb{R}^{n(d-1)}$), con la cual f es \mathbb{Z}_n equivariante.

Además, para cada función f_i y cada $S \in F_n(\mathbb{R}^d)$ tenemos que las entradas de $f_i(S)$ suman cero, por lo tanto, podemos pensar a cada f_i con imagen contenida en \mathbb{R}^{n-1} y a f con imagen contenida en $\mathbb{R}^{(n-1)(d-1)}$. Finalmente, podemos concluir por un teorema topológico de Fuchs, Vassiliev y Karasev ([9], [25] y [16]), que nos dice que todas las funciones \mathbb{Z}_n equivariantes de $F_n(\mathbb{R}^d)$ a $\mathbb{R}^{(n-1)(d-1)}$, con n una potencia prima, tienen un cero. Para cualquier entero m , nos fijamos en su factorización prima $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ y aplicamos el resultado para cada $p_i^{\alpha_i}$, como en la inducción de la demostración del teorema 5.1.3.

En la demostración de Karasev, Hubard y Aronov sí se trabaja con el espacio $F_n(\mathbb{R}^d)$ y desde el inicio se busca una teselación convexa que equiparticione las medidas, sin embargo, la demostración del teorema de Fuchs, Vassiliev y Karasev usa herramientas muy avanzadas de topología algebraica.

Por otro lado, Soberón empieza demostrando un resultado de particiones balanceadas (el lema 5.1.2) en el espacio $X \cong \mathbb{R}^{pd} \setminus \mathbb{R}^d$ usando herramientas más sencillas y elegantes (el teorema de Dold), para después concluir inductivamente.

Como hemos visto a lo largo de este trabajo, la idea que más se ha utilizado para resolver problemas de repartición equitativa es dar una solución geométrica que nos reduzca el problema a uno de topología equivariante. Ahora veamos como usar estas ideas para empezar a resolver otros problemas.

De acuerdo a [17], Bárány y Grünbaum conjeturaron lo siguiente: Sea K un polígono convexo en el plano con área 1. Entonces, para cada $t \in [0, \frac{1}{4}]$, existe una pareja de rectas ortogonales que divide a K en 4 polígonos de áreas $t, t, (\frac{1}{2} - t)$ y $(\frac{1}{2} - t)$, en orden cíclico.

Observemos que cuando $t = 0$, el resultado es un corolario directo del teorema del Ham Sandwich. Veamos una idea para $t > 0$. Para cada elemento $u \in \mathbb{S}^1$, consideremos la recta h_u ortogonal a u , que hace que $A = K \cap h_u^+$ tenga área $2t$ (donde h_u^+ es el semiespacio positivo definido por h_u). Después, nos tomamos la única recta l_u ortogonal a h_u , que divide a A en dos polígonos (A_1 y A_2), cada uno con área t . Las rectas h_u y l_u han dividido a K en 4 polígonos: A_1, A_2, B_1 y B_2 (en orden cíclico). Queremos encontrar un $u \in \mathbb{S}^1$, tal que el área de B_1 sea $(\frac{1}{2} - t)$, con lo cual habremos acabado (ver figura 5.3).

Si definimos la función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, como $f(u) = \text{area}(B_1) - (\frac{1}{2} - t)$, el problema es equivalente a encontrar un $u \in \mathbb{S}^1$, tal que $f(u) = 0$.

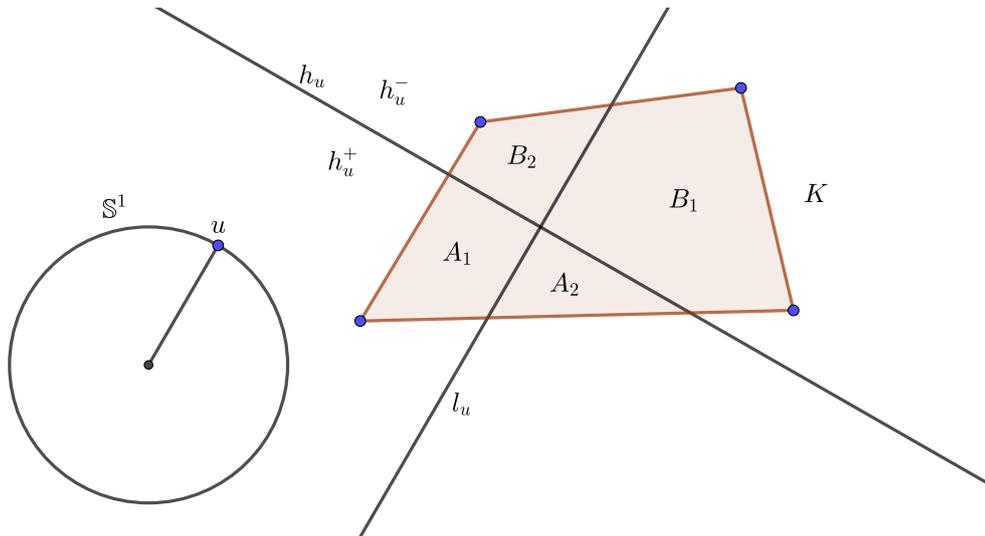


Figura 5.3: En la figura, las rectas h_u y l_u han dividido al polígono convexo K en 4 polígonos: A_1, A_2, B_1 y B_2 . Además, A_1 y A_2 tienen área t , para algún $t \in (0, \frac{1}{4}]$.

Empecemos a mover los puntos $u \in \mathbb{S}^1$ de manera continua. Si empezamos con un $u \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(u) > 0$, cuando empecemos a mover los puntos, nos gustaría llegar a algún punto $v \in \mathbb{S}^1$

tal que $f(v) < 0$, para poder aplicar un resultado similar al teorema del valor intermedio (por ejemplo, algún teorema tipo Borsuk Ulam). Esta podría ser una buena idea para empezar a resolver el problema, sin embargo, el problema sigue sin resolverse.

Aunque los teoremas de repartición equitativa (en particular el teorema principal) son problemas de geometría discreta, se han usado herramientas de diferentes áreas matemáticas para resolverlos. Por ejemplo, en la demostración del teorema principal usamos principalmente herramientas de geometría, topología y teoría de grupos. Cuando estamos resolviendo un problema, voltear a ver otra área matemática puede resolver por completo el problema. Por esta razón, quiero concluir con una de mis frases favoritas:

Me gusta cruzar las fronteras imaginarias que la gente establece entre diferentes áreas, es muy refrescante. Hay montones de herramientas y no sabes cuál de ellas funcionará. Se trata de ser optimista y de intentar conectar cosas.

Maryam Mirzakhani, Medalla Fields 2014.

Bibliografía

- [1] J. Akiyama, N. Alon. Disjoint simplices and geometric hypergraphs. In *Combinatorial Mathematics: Proc. of the Third International Conference, New York 1985*, volume 555 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, pages 1-3, 1989.
- [2] B. Aronov, F. Aurenhammer, F. Hoffmann. Minkowski-type theorems and least-squares clustering, *Algoritmica* 20 (1998), no. 1, 61-76.
- [3] K.B. Athreya, S.N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer, 2006. (pp 25-27, 49)
- [4] S. Bespamyatnikh, D. Kirkpatrick, J. Snoeyink. Generalizing Ham Sandwich cuts to equitable subdivisions. *Discrete Comput. Geom.*, 24:605-622, 2000.
- [5] P.V.M. Blagojevic, G. Rote, J.K. Steinmeyer, G.M. Ziegler. Convex equipartitions of colored point sets, [arXiv:1705.03953v2\[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/1705.03953v2), 2017.
- [6] P.V.M. Blagojevic, G.M. Ziegler. Convex equipartitions via equivariant obstruction theory. *Israel Journal of Mathematics*, 200:49-77, 2014.
- [7] G. Bredon. *Topology and geometry*. Springer-Verlag. 1997.
- [8] A. Dold. Simple proofs of some Borsuk-Ulam results. *Contemp. Math.* 19. 1983
- [9] D.B. Fuks. The mod 2 cohomologies of the braid group (In Russian). *Mat. Zametki.* 5(2)(1970):227-231.
- [10] C.H. Goldberg, D. West. Bisection of circle colorings. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6(1):93-106. 1985. (pp. 57)
- [11] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [12] A. Hubard, B. Aronov. Convex equipartition of volume and surface area, [arXiv:1010.4611v1](https://arxiv.org/abs/1010.4611v1) [math.MG], 2010.
- [13] H. Ito, H. Uehara, M. Yokoyama. 2-dimension Ham Sandwich theorem for partitioning into three convex pieces. In *Discrete and Computational Geometry: Japanese Conference, JCDCG98 Tokyo, Japan, December 9-12, 1998. Revised Papers*, pages 129-157. Springer-Verlag, 2000.
- [14] A. Kaneko, M. Kano. Balanced partitions of two sets of points in the plane. *Comput. Geom. Theor. Appl.*, 13(4):253-261, 1999. (ref: p. 52)

- [15] R. Karasev, A. Hubbard, B. Aronov. Convex equipartitions: The spicy chicken theorem. *Geometriae Dedicata*, 170:263-279, 2014.
- [16] R.N. Karasev. The genus and the category of configuration spaces. *Topology and its applications*. 156(14)(2009):2406-2415.
- [17] G.O.H. Katona, A. Schrijver, T. Szonyi. *Fete of combinatorics and computer science*. Springer. 2010.
- [18] J. Matousek. *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Universitext, Springer-Verlag. 2003.
- [19] J.J. Rotman. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall. 2003. (pp 104)
- [20] G. Roussas. *An introduction to measure theoretic probability*. Elsevier academic press. 2005. (pp. 55, 94)
- [21] T. Sakai. Balanced convex partitions of measures in \mathbb{R}^2 . *Graphs and Combinatorics*, 18:169-192, 2002.
- [22] P. Soberón. Balanced convex partitions of measures in \mathbb{R}^d . *Mathematika* 58(1), 71-76, 2012.
- [23] H. Steinlein. Borsuk antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey. In A. Granas, editor, *Methodes topologiques en analyse non linéaire*, volume 95 of *Colloqu. Sémin. Math. Super., Semin. Sci. OTAN (NATO Advanced Study Institute)*, pages 166-235, Montréal, 1985. Univ. de Montréal Press. (refs: pp. 22, 25, 26, 34, 41, 51, 149).
- [24] A.H Stone, J.W. Tukey. Generalized sandwich theorems. *Duke Math. J.* 9 (1942).
- [25] V.A. Vassiliev. Braid group cohomologies and algorithm complexity (In Russian). *Funkts. Anal. Prilozh.* 22(3)(1988): 15-24. Translation in *Funct. Anal. Appl.* 22(3)(1988):182-190.
- [26] C. Villani. *Optimal transport, old and new*. Springer-Verlag, 2009 (pp. 93-103).
- [27] A. Zardecki, W.A. Beyer . The early history of the Ham Sandwich theorem. *American Mathematical Monthly* 111 (2004), no. 1,58-61.