



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Colapso termodinámico de hoyos negros

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Carlos García García

TUTOR

Hernando Quevedo Cubillos



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

García
García
Carlos
5537501956
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
305283230

2. Datos del tutor

Dr
Hernando
Quevedo
Cubillos

3. Datos del sinodal 1

Dr
Rodolfo Patricio
Martínez
Romero

4. Datos del sinodal 2

Dr
Lenin Francisco
Escamilla
Herrera

5. Datos del sinodal 3

Dr
Francisco
Nettel
Rueda

6. Datos del sinodal 4

Dr
César Simón
López
Monsalvo

7. Datos del trabajo escrito.

Colapso termodinámico de hoyos negros
59 p
2020

COLAPSO TERMODINÁMICO DE HOYOS NEGROS.

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo analizar sistemas conformados por agujeros negros en el contexto de la termodinámica de hoyos negros. Se propuso una forma matemática de la entropía, deducida a partir del caso simple de un colapso de dos agujeros negros de Schwarzschild, y que posteriormente se usó en otros casos con mayor grado de complejidad. Dicha entropía es no aditiva. Primero se abordaron sistemas sin considerar emisión de radiación, y posteriormente se agregó un término asociado a ésta. Se tomaron casos límite para extraer información física de este tipo de fenómenos, así como los casos intermedios.

La estructura de este trabajo está dada de la siguiente manera:

Primeramente, se introducen los conceptos necesarios, tanto de la formulación relativista de la gravedad, donde, de manera breve se contextualiza el origen de la relatividad especial, y cómo fue haciéndose cada vez más robusta, debido a las contribuciones de distintos personajes hasta llegar a formularse la Teoría General de la Relatividad, mediante el formalismo del cálculo tensorial y de la geometría diferencial.

En el segundo capítulo, se aborda la primera solución a las ecuaciones de Einstein dada por Schwarzschild, dentro de la cual entran en juego las singularidades, el inicio de una larga época de estudio y de interpretaciones. Una de estas interpretaciones es la idea de hoyo negro y horizonte de eventos. Se da la solución de Kerr, donde una nueva variable, además de la masa del hoyo negro, entra a escena: el momento angular del horizonte de eventos. Se habla del teorema de no pelo (*no-hair theorem*), estableciendo que los sistemas donde está presente un hoyo negro, solo pueden estar caracterizados por tres parámetros: la masa, el momento angular y la carga eléctrica.

En el tercer capítulo, se mencionan algunas características de ciertos hoyos negros, las cuales sirven de base para formular las leyes de la termodinámica de hoyos negros, haciendo una correspondencia tanto matemática como física, entre las variables de la termodinámica de laboratorio y las variables de hoyos negros establecidas por el teorema de no pelo.

En el cuarto capítulo, se estudian sistemas de hoyos negros, y aquí se define colapso termodinámico de hoyos negros. Se obtiene una expresión para el momento angular del horizonte de eventos del hoyo negro resultante del colapso termodinámico. También se determina una expresión para la radiación que se pierde durante el proceso del colapso, y la cantidad de radiación máxima que se puede perder en el proceso.

Cabe notar que los resultados obtenidos no dependen de la configuración del sistema a estudiar. Esto es, la manera en que colisionan los hoyos negros es independiente de los resultados obtenidos.

Índice general

Resumen	V
Lista de figuras	IX
1. Introducción a la relatividad general	1
1.1. Métrica, conexión y curvatura	4
1.1.1. Espacio euclideo.	4
1.1.2. Conexión.	6
1.1.3. Curvatura	9
1.2. Ecuaciones de Einstein	10
2. Agujeros Negros	13
2.1. Definición de agujeros negros	13
2.1.1. Solución de Schwarzschild	13
2.1.2. Gravedad superficial de un agujero negro de Schwarzschild.	16
2.2. El agujero negro de Kerr	18
2.2.1. Gravedad superficial de un agujero negro de Kerr	20
2.3. Teoremas de unicidad	21
3. Termodinámica de agujeros negros	23
3.1. Definición de entropía de agujeros negros	23
3.2. Leyes de la termodinámica de agujeros negros	26
4. Colapso termodinámico	27
4.1. Sobre la no aditividad de la entropía	27
4.2. Colapso termodinámico idealizado	27
4.2.1. Colapso termodinámico de dos hoyos negros de Schwarzschild.	28
4.2.2. Colapso termodinámico de dos hoyos negros de Kerr.	29
4.3. Colapso termodinámico con emisión de radiación	35
5. Conclusiones.	41
6. Apéndice	43

Índice de figuras

1.1.	Marco de referencia inercial. La distancia d_{AB} , entre los dos puntos en el sistema xyz , es la misma distancia $d_{A'B'}$ de los puntos en el sistema $x'y'z'$	2
1.2.	Espacio de Minkowski visualizado en tres dimensiones: dos espaciales y una temporal. La distancia, $d_{E_1E_2}$ ó $(s_2 - s_1)^2$, entre los dos puntos en el sistema xyt , es la misma distancia $d_{E'_1E'_2}$, ó $(s'_2 - s'_1)^2$, de los puntos en el sistema $x'y't'$	3
1.3.	Experimento del elevador no local (D'Inverno, 1998). Para el observador, los cuerpos permanecen en reposo (a). Para el observador, los cuerpos parecen juntarse (b).	4
2.1.	Parámetro Δ del espacio-tiempo de Schwarzschild y de las familias del espacio-tiempo de Kerr en función del radio r (O'Neil, 1995).	20
2.2.	Esquemmatización del Proceso de Penrose.	20
4.1.	El momento angular específico por unidad de masa del hoyo negro resultante ϵ_{12} , en función de la masa del Kerr extremo m_2 , como resultado de un colapso de un Schwarzschild ($\epsilon_1 = 0$) y un Kerr extremo ($\epsilon_2 = 1$). Si la masa del estado inicial m_2 aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento del estado inicial ($\epsilon_2 = 1$). Se considera $m_1 = 1$	32
4.2.	El momento angular específico por unidad de masa ϵ_{12} , en un colapso entre un Schwarzschild y un Kerr (no extremo), en función de la masa del Kerr. Conforme la masa del estado inicial (m_2) aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento angular del estado inicial (ϵ_2).	32
4.3.	El momento angular específico por unidad de masa del hoyo negro resultante ϵ_{12} en función de la masa del Schwarzschild m_2 como resultado de un colapso de un Schwarzschild ($\epsilon_2 = 0$) y un Kerr extremo ($\epsilon_1 = 1$). Si la masa del estado inicial m_2 aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento del estado inicial ($\epsilon_2 = 0$). Se considera $m_1 = 1$	33
4.4.	Colapso entre dos Kerr arbitrarios. Conforme la masa del estado inicial (m_2) aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento angular del estado inicial (ϵ_2). Se considera $m_1 = 1$ y $\epsilon_1 = 1/2$	33
4.5.	Colapso entre dos Kerr arbitrarios, cuyo momento angular está en función del momento angular de uno de los hoyos negros del estado inicial. Se toman los siguientes valores del primer hoyo negro de Kerr: $m_1 = 1$, $\epsilon_1 = 1/2$. Los valores máximos del momento angular del estado final (ϵ_{12}) se da cuando el agujero negro del estado inicial es un Kerr extremal. Los valores mínimos se dan cuando el estado inicial es un Schwarzschild.	34

4.6.	El momento angular específico por unidad de masa del hoyo negro del estado final en función de los parámetros de uno de los hoyos negros del estado inicial: $m_1 = 1$ y $\varepsilon_1 = 1/2$. El momento angular del estado final va tendiendo al momento angular del estado inicial (ε_2) conforme m_2 aumenta.	35
4.7.	Emisión de radiación por unidad de masa durante el colapso de un Kerr ($\varepsilon_1 = 1/2$) y otro Kerr arbitrario. La mayor cantidad de radiación ocurre cuando el estado final es un Schwarzschild. Aquí, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $\varepsilon_1 = 1/2$	38
4.8.	Emisión de radiación por unidad de masa durante el colapso de dos Kerr. La máxima pérdida de energía ocurre cuando el estado inicial es un Kerr extremal, y el estado final, un Schwarzschild. Aquí, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $\varepsilon_1 = 1/2$	38
4.9.	Emisión de radiación máxima por unidad de masa durante el colapso de dos hoyos negros idénticos de Kerr. Ecuación 4.46. La cantidad máxima de pérdida de energía (70%) ocurre cuando el estado inicial son dos Kerr extremos y el estado final es un Schwarzschild.	39

T	—	Temperatura (K).
V	—	Volumen.
S	—	Entropía
Ω	—	Velocidad angular
J	—	Momento angular.
Φ	—	Potencial eléctrico
Q	—	Carga eléctrica
M	—	Masa
U	—	Energía interna
κ	—	Gravedad superficial

Constantes universales

c	—	Rapidez de la luz en el vacío.
k	—	Constante de Coulomb
k_B	—	Constante de Boltzmann.
h	—	Constante de Planck.
\hbar	—	Constante de Planck normalizada.
G	—	Constante gravitacional
κ_0	—	$8\pi G/c^4$

Notación

$[g_{ij}]$	—	Elementos de la métrica.
$[\Gamma_{ij}^k]$	—	Elementos de los símbolos de Christoffel de segundo tipo.
$[\Gamma_{ijk}]$	—	Elementos de los símbolos de Christoffel de primer tipo.
$[R_{ijk}^l]$	—	Elementos del tensor de curvatura de Riemann.
$[R_{ij}]$	—	Elementos del tensor de Ricci.
R	—	Escalar de Ricci.
$[G_{ij}]$	—	Elementos del tensor de Einstein.
$[T_{ij}]$	—	Elementos del tensor de energía-momento.
A_H	—	Área del horizonte de eventos
J_H	—	Momento angular del área del horizonte de eventos
Ω_H	—	Velocidad angular del área del horizonte de eventos

Unidades geométricas

q^2	=	kGQ^2/c^4	—	Carga reducida
m	=	GM/c^2	—	Masa reducida
a	=	J/Mc	—	Momento angular específico
j	=	ma		
ε	=	a/m	—	Momento angular específico por unidad de masa.

Capítulo 1

Introducción a la relatividad general

Durante el siglo XIX el electromagnetismo había sido estudiado por varias generaciones. Entre sus principales aportadores destacan nombres como Hans Christian Ørsted, André-Marie Ampère, William Sturgeon, Joseph Henry, Georg Ohm y Michael Faraday. Dichos resultados fueron sintetizados en la teoría electromagnética, formulada por James Clerk Maxwell en 1865. Fue hasta finales de ese mismo siglo, cuando algunas de las implicaciones de dicha teoría comenzaban a utilizarse en la vida diaria como en la iluminación eléctrica, en la distribución de energía, y se vislumbraba ya la comunicación inalámbrica con los experimentos de Hertz de 1888, abriendo camino a dispositivos que masificaban esta tecnología.

Asimismo, durante ese mismo siglo, la termodinámica de Clausius y el formalismo establecido por Gibbs, ahora se tomaba en consideración para el diseño y la construcción de las nuevas máquinas de vapor, así como las herramientas empleadas en las fábricas para aumentar la eficiencia y reducir los costos (Bernal, 1992). Además, había conducido a la creación del motor de combustión interna, que reducía costos en el transporte y por ende, en lo transportado.

A pesar de la importancia que la ciencia tenía a finales del siglo XIX, un cambio relevante se originó, a partir del surgimiento de algunos fenómenos que no se podían explicar desde las teorías físicas clásicas, tales como el arco eléctrico en un tubo de vacío que originaba una luminosidad alargada hacia el extremo negativo (cátodo). A esta luminosidad, William Crookes le dio el nombre de rayos catódicos. Uno de estos tubos (de rayos catódicos) fue adquirido por Konrad von Roentgen y vio un efecto físico fuera de dicho tubo, efecto que actualmente es la consecuencia de los rayos X. Menos de un año después del descubrimiento de los rayos X, Becquerel descubrió la radiactividad al querer asociar los rayos X con la luminosidad generada. En sus investigaciones usó sales y minerales brillantes como el uranio (Bernal, 1992).

A partir del descubrimiento de los rayos X se desarrollaron diversos experimentos que dieron origen a conceptos como el electrón, bautizado así por Johnstone Stoney en 1894. Una vez que se popularizó la idea del electrón, se presentaron incompatibilidades entre la teoría de la radiación de la luz (teoría electromagnética), y las implicaciones de los resultados obtenidos en los experimentos. El problema fue abordado por Planck y con él (entre otros más), se originó el desarrollo de la teoría cuántica. El descubrimiento de Planck llevó a Einstein a dar una explicación teórica de lo que años antes había hecho Hertz en el laboratorio: el efecto fotoeléctrico.

Uno de los triunfos de la teoría electromagnética de Maxwell había sido el hallazgo de que la luz tiene un carácter electromagnético, y ya que todas las ondas conocidas en ese momento requerían un medio material en el cuál las ondas oscilaban, con lo que se postuló la existencia de un medio llamado éter lumínico, que transportaban las ondas electromagnéticas. Con esto en mente, se esperaba que cualquier experimento donde estuviera involucrada la luz, permitiría el movimiento de un cuerpo a través de este éter. Esta idea se vio revertida por los experimen-

tos de Michelson y Morley, que intentaban medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter lumínico, encontrándose que era indetectablemente pequeño (D'Inverno, 1998). Para explicar estos resultados fallidos, Lorentz, Fitzgerald y Poincaré propusieron que cuando los cuerpos inmersos en el éter lumínico, éstos se contraen y además los relojes también inmersos, se hacen más lentos. Estos efectos estaban contenidos en las transformaciones de Lorentz. Estas ecuaciones se pudieron derivar de los postulados de la relatividad especial de Einstein, uno de los cuales era que la rapidez de la luz era constante.

En 1905, Einstein dio a conocer su teoría especial de la relatividad. Los resultados principales de dicha teoría afirmaban que tanto el tiempo como el espacio, en general, eran distintos en marcos de referencia inerciales diferentes, y cuyo caso particular, cuando las velocidades de los objetos eran insignificantes comparadas con la rapidez de la luz, caía en la mecánica de Newton.

En 1908, tres años después de la publicación de la relatividad especial, Hermann Minkowski, quien anteriormente fuera profesor de Einstein (Gutfreund, 2017), mostró que dicha teoría podía ser entendida geoméricamente como un espacio (matemático) de cuatro dimensiones: tres dimensiones espaciales (espacio físico) y una dimensión temporal. Este formalismo que involucraba al espacio y al tiempo en un solo objeto¹, dio origen al concepto del espacio-tiempo. Este espacio matemático de cuatro dimensiones pone en correspondencia una distancia geométrica con dos eventos físicos que ocurren en distintos lugares y en distintos tiempos.

Por supuesto que esta geometría era consistente con los resultados de la relatividad especial. Minkowski recurrió a una herramienta matemática estudiada anteriormente por Gauss y Riemann, que servía para determinar distancias en distintos espacios: la métrica.

En un espacio Euclideo (Figura 1.1), la distancia entre dos puntos es la misma, independientemente del sistema de referencia en donde se mida. Es decir $d_{AB} = d_{A'B'}$, o bien en coordenadas cartesianas:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \quad (1.1)$$

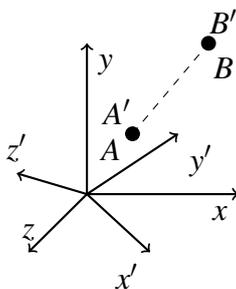


Figura 1.1: Marco de referencia inercial. La distancia d_{AB} , entre los dos puntos en el sistema xyz , es la misma distancia $d_{A'B'}$ de los puntos en el sistema $x'y'z'$.

En un espacio cuadridimensional², la métrica a la que tiempo después se le llamó métrica de Minkowski, satisfacía que la distancia entre dos puntos de este espacio era la misma, independientemente del marco de referencia en donde se midiera, es decir, que $d_{E_1E_2} = d_{E'_1E'_2}$, o bien, como cada punto del espacio de Minkowski estaba dado por (x, y, z, ct) , en coordenadas cartesianas:

¹A diferencia de la mecánica newtoniana donde estaban presentes tres componentes espaciales y una temporal, pero las componentes espaciales estaban en función del tiempo, en la mecánica relativista había no tres, sino cuatro variables mutuamente independientes: las tres del espacio y la del tiempo.

²Posteriormente llamado espacio-tiempo de Minkowski.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 \quad (1.2)$$

En la Figura 1.2 se da una representación en tres dimensiones del espacio de Minkowski y la invariancia de las distancias en este espacio.

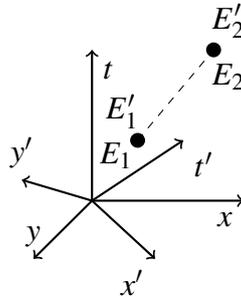


Figura 1.2: Espacio de Minkowski visualizado en tres dimensiones: dos espaciales y una temporal. La distancia, $d_{E_1E_2}$ ó $(s_2 - s_1)^2$, entre los dos puntos en el sistema xyt , es la misma distancia $d_{E'_1E'_2}$, ó $(s'_2 - s'_1)^2$, de los puntos en el sistema $x'y't'$.

Debido al signo negativo asociado con la componente temporal, este espacio de Minkowski no es euclideo, sino pseudo euclideo y es por esta razón que pese a haber invariancia en las distancias de los eventos, las distancias espaciales d_{AB} y $d_{A'B'}$ y las "distancias" temporales $(t_2 - t_1)^2$ y $(t'_2 - t'_1)^2$ no son las mismas, lo cual está de acuerdo con los resultados de la relatividad especial.

La formulación de Minkowski de la relatividad especial, en términos de la métrica, guió a Einstein para generalizar su teoría a otro tipo de movimiento, más allá del movimiento inercial analizado en relatividad especial: el movimiento en caída libre. Este modelo donde el espacio y el tiempo están combinados inseparablemente y donde ocurren todos los sucesos físicos se le llama espacio-tiempo.

El movimiento acelerado había resurgido en las discusiones debido al así llamado principio de Mach, o conjetura de Mach, expresada en 1893. Dicha idea se basaba en la crítica del espacio absoluto de Newton (Gutfreund, 2017). Según Newton, un objeto en rotación, como un planeta o un balde de agua girando, rotan con respecto a un espacio absoluto (D'Inverno, 1998) y la existencia de una fuerza debido a dicha rotación dice qué movimiento es relativo, y cuál es absoluto. La objeción de Mach sobre el espacio absoluto, radicaba en que podría darse la interpretación de que el sistema, un planeta o un balde de agua girando, permanecen en reposo y el resto del universo es el que está rotando. La existencia de una fuerza en el sistema ahora inmóvil, un planeta o un balde de agua girando, sería la manifestación de la rotación de la masa del resto del universo. La conclusión a la que Einstein llegó, fue que un sistema dentro de un campo gravitacional constante, es equivalente a un sistema dentro de un marco de referencia acelerado. Es decir, no puede asegurarse si el sistema está en un campo gravitacional uniforme, o si el sistema está siendo acelerado, ya que un caso es equivalente al otro, esto es conocido como *principio de equivalencia débil*. Sin embargo, si los sistemas de referencia se agrandan lo suficiente como para ser comparables con una fuente apreciable de gravedad (como un planeta), entonces lo que distingue un campo gravitacional de un sistema de referencia acelerado, serán las trayectorias de los cuerpos dentro de cada sistema (Figura 1.3): mientras que en el sistema de referencia acelerado las trayectorias de dos cuerpos serán paralelas (Figura 1.3a), en el sistema de referencia dentro de un campo gravitacional las trayectorias convergerán hacia el centro del

planeta (Figura 1.3b). Con esto, la presencia de un campo gravitacional real se corrobora por la observación de la variación de las trayectorias entre dos cuerpos (o de la variación del campo gravitacional (D’Inverno, 1998) más que la observación de una sola trayectoria. Esta variación de la trayectoria se relaciona con la geodésica, que a su vez está en términos de la métrica, la cual determina la curvatura, en este caso, del espacio-tiempo.



Figura 1.3: Experimento del elevador no local (D’Inverno, 1998). Para el observador, los cuerpos permanecen en reposo (a). Para el observador, los cuerpos parecen juntarse (b).

Otra consideración que tomó en cuenta Einstein, fue la teoría de gravitación universal de Newton, que actúa sobre todos los objetos con masa, y además de la misma manera. Por lo que la curvatura no se ve afectada por ninguna fuerza, salvo, quizás, la gravitacional.

1.1. Métrica, conexión y curvatura

Una vez que Einstein adoptó el formalismo de Minkowski en su teoría especial de la relatividad, tomó esa perspectiva para generalizarla, e hizo uso de la geometría diferencial, recurriendo además, al *cálculo diferencial absoluto*, desarrollado por Elwin Christoffel, Gregorio Ricci-Curbastro y Tullio Levi-Civita, y que posteriormente se le llamaría *cálculo tensorial*. A continuación se expondrán los elementos con los que puede generalizarse la teoría de la relatividad especial, de sistemas inerciales, y que conduce a la teoría general de la relatividad, de sistemas no inerciales.

1.1.1. Espacio euclideo.

Si dos vectores a y b en \mathbb{R}^n (Lebedev, 2003), con base $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, que en general no sea ortonormal, los vectores a y b se expresan como:

$$a = a^k e_k \quad ; \quad b = b^l e_l \quad (1.3)$$

y el producto escalar es:

$$a \cdot b = a^k e_k \cdot b^l e_l = a^k b^l e_k \cdot e_l \quad (1.4)$$

El producto $e_k \cdot e_l$ es el producto escalar definido como:

$$g_{kl} = e_k \cdot e_l \quad (1.5)$$

A g_{kl} se le llama *métrica*. Esto es, la métrica es el conjunto de todos los productos escalares de los elementos de una base coordenada.

En el caso cartesiano en \mathbb{R}^3 donde la base la escribiremos como $\{i_1, i_2, i_3\}$, la métrica está dada por $g_{kl} = \delta_{kl}$, o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

donde

$$i_k \cdot i_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (1.7)$$

Si se quiere operar con vectores, se requiere conocer cuáles son sus componentes. Para ello, se hace uso del producto escalar. Sea x , el vector de interés. En el caso cartesiano, las componentes del vector x se obtienen con el producto escalar:

$$x_k = \mathbf{x} \cdot i_k \quad (1.8)$$

Para el caso más general, las componentes del vector x se obtienen mediante el vector e_k , tal que:

$$x_k = \mathbf{x} \cdot e_k \quad (1.9)$$

Ya que $x = x_j e^j$, entonces:

$$x_k = \mathbf{x} \cdot e_k = (x_j e^j) \cdot e_k = x_j (e^j \cdot e_k) \quad (1.10)$$

y comparando el lado izquierdo con el derecho, entonces debe cumplirse que:

$$e^j \cdot e_k = \delta_k^j \quad (1.11)$$

siendo δ_k^j , la delta de Kronecker. Se dice que la base e_k es recíproca, o *dual*, a la base e^j .

Así como los vectores a y b pueden expresarse en la base e_i (ecuación 1.3), también se pueden expresar en su base dual e^i :

$$a = a_k e^k \quad ; \quad b = b_l e^l \quad (1.12)$$

con lo que el producto escalar es:

$$a \cdot b = a_k e^k \cdot b_l e^l = a_k b_l e^k \cdot e^l \quad (1.13)$$

y se define

$$g^{kl} = e^k \cdot e^l \quad (1.14)$$

o en representación mixta:

$$a \cdot b = a^i e_i \cdot b_j e^j = a^i b_j e_i \cdot e^j = a^i b_j \delta_i^j = a^i b_i \quad (1.15)$$

Análogamente:

$$a \cdot b = a_i e^i \cdot b^j e_j = a_i b^j e^i \cdot e_j = a_i b^j \delta_j^i = a_i b^i \quad (1.16)$$

Los componentes a^i , del vector \mathbf{a} , se llaman componentes *contravariantes* de \mathbf{a} , mientras que los componentes a_i del vector \mathbf{a} , se llaman componentes *covariantes* del vector \mathbf{a} .

Ya que

$$x^j e_i = x_i e^j \quad (1.17)$$

entonces, haciendo el producto escalar por e^j

$$x^j e_i \cdot e^j = x_i e^i \cdot e^j \quad (1.18)$$

$$x^j = x_i g^{ij} \quad (1.19)$$

Análogamente:

$$x_j = x^i g_{ij} \quad (1.20)$$

Y esta es la manera de pasar de componentes contravariantes, a covariantes, y viceversa.

Dado que

$$x_i = (x^j) g_{ji} = (x_k g^{kj}) g_{ji} = g^{kj} g_{ji} x_k \quad (1.21)$$

entonces comparando el lado izquierdo con el lado derecho, debe satisfacerse que :

$$g^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \quad (1.22)$$

es decir, g^{kj} y g_{ji} son inversas una de la otra.

Las ecuaciones 1.3-1.22, son la base de una gran parte de resultados del análisis tensorial elemental.

1.1.2. Conexión.

Las coordenadas de un punto en el espacio determinan la posición de este, de manera única. Sin embargo, dichas coordenadas pueden representarse de distintas maneras. Las coordenadas más conocidas son las cartesianas, las cilíndricas y las esféricas. Sin embargo, dichas coordenadas pueden generalizarse a *coordenadas curvilíneas*, que se caracterizan por los parámetros q^1, q^2 y q^3 .

Las coordenadas más simples, las cartesianas, pueden expresarse en términos de los parámetros $\{q^i\}$:

$$x^i = x^i(q^1, q^2, q^3) \quad (1.23)$$

para $i = \{1, 2, 3\}$

Si un vector arbitrario \mathbf{r} , depende de la posición espacial, este se puede expresar en términos de las coordenadas curvilíneas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) \quad (1.24)$$

Si el vector \mathbf{r} se mueve a lo largo de la línea q^1 , entonces se puede definir:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \quad (1.25)$$

De manera análoga, cuando \mathbf{r} se mueve a lo largo de q^2 y de q^3 , se definen, respectivamente:

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \quad (1.27)$$

A diferencia del caso cartesiano, donde la base $\{e_i\}$ no cambiaba en magnitud ni en dirección, este nuevo conjunto de vectores forman una base $\{\mathbf{r}_i\}$, que en general varían en cada punto del espacio donde están definidos. Sin embargo se sigue cumpliendo que:

$$\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^k = \delta_j^k \quad (1.28)$$

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \quad (1.29)$$

$$g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \quad (1.30)$$

Las ecuaciones 1.25, 1.26 y 1.27 definen una base coordenada.

Por ejemplo, en coordenadas esféricas $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, \varphi)$, la transformación de coordenadas dada por $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$ y $z = r \cos \theta$, genera al vector $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$ dado por:

$$\mathbf{r}(r, \theta, \varphi) = x\mathbf{r} \sin \theta \cos \varphi + y\mathbf{r} \sin \theta \sin \varphi + z\mathbf{r} \cos \theta \quad (1.31)$$

con lo que la base coordenada es:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = x\mathbf{r} \sin \theta \cos \varphi + y\mathbf{r} \sin \theta \sin \varphi + z\mathbf{r} \cos \theta \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} = x\mathbf{r} \cos \theta \cos \varphi + y\mathbf{r} \cos \theta \sin \varphi - z\mathbf{r} \sin \theta \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} = -x\mathbf{r} \sin \theta \sin \varphi + y\mathbf{r} \sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.32)$$

y la métrica está dada matricialmente por:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Del cálculo vectorial se tiene que:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}_i dq^i \quad (1.35)$$

por las definiciones 1.25-1.27.

Entonces se puede expresar, para su uso posterior, y comparando con la ecuación 1.35:

$$dq^i = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i \quad (1.36)$$

Por una parte se puede obtener:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i dq^i \cdot \mathbf{r}_j dq^j = g_{ij} dq^i dq^j \quad (1.37)$$

y por otra parte, si se quiere obtener la derivada de una función vectorial $\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)$, que se puede expresar en componentes contravariantes, en la base $\{\mathbf{r}_i\}$ como $\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) = f^i(q^1, q^2, q^3)\mathbf{r}_i(q^1, q^2, q^3)$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^k} = \frac{\partial (f^i \mathbf{r}_i)}{\partial q^k} = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + f^i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \quad (1.38)$$

Si la derivada de la base \mathbf{r}_i , con respecto a la coordenada q^k , se escribe como:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \equiv \Gamma_{ki}^j \mathbf{r}_j \quad (1.39)$$

donde Γ_{kj}^i es llamado *símbolo de Christoffel de segundo tipo*, o *conexión*.

Se obtiene entonces que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^k} = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + \Gamma_{ki}^j f^i \mathbf{r}_j = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + \Gamma_{kj}^i f^j \mathbf{r}_i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kj}^i f^j \right) \mathbf{r}_i \quad (1.40)$$

La expresión entre paréntesis se llama *derivada covariante* de un tensor contravariante de rango uno, y se denota por:

$$\nabla_k f^i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kj}^i f^j \right) \quad (1.41)$$

Ya que el símbolo de Christoffel se define en la ecuación 1.39, y definiendo $\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} &= \frac{\partial (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_l)}{\partial q^j} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_l + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{lj} \\ \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^l} &= \frac{\partial (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_i)}{\partial q^l} = \mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_{il} \\ \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} &= \frac{\partial (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_j)}{\partial q^i} = \mathbf{r}_{li} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_{ji} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Al final se obtiene

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^l} \right) = \Gamma_{ijl} \quad (1.43)$$

El término Γ_{ijl} se llama *símbolo de Christoffel de primer tipo*.

Se obtiene entonces $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_l = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_l = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$ con lo que los símbolos de Christoffel de primer y segundo tipo se relacionan mediante:

$$\Gamma_{ijl} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} \quad (1.44)$$

y la ecuación 1.43, se puede expresar como:

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{lr} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^l} \right) \quad (1.45)$$

1.1.3. Curvatura

Ya que δ_i^j es un invariante, entonces su derivada es siempre cero, es decir $\partial \delta_i^j / \partial q^k = 0$, pero como $\delta_i^j = r^j \cdot r_i$, entonces:

$$0 = \frac{\partial \delta_i^j}{\partial q^k} = \frac{\partial r^j \cdot r_i}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial r^j}{\partial q^k} \right) \cdot r_i + r^j \cdot \left(\frac{\partial r_i}{\partial q^k} \right) \quad (1.46)$$

$$\left(\frac{\partial r^j}{\partial q^k} \right) \cdot r_i = -r^j \cdot \left(\frac{\partial r_i}{\partial q^k} \right) = -r^j \cdot \Gamma_{ik}^l r_l = -\Gamma_{ik}^l \delta_l^j = -\Gamma_{ik}^j \quad (1.47)$$

es decir:

$$\frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial q^k} = -\Gamma_{ik}^j \mathbf{r}^i \quad (1.48)$$

Anteriormente se obtuvo la derivada covariante de un tensor contravariante, $\nabla_k f^i$. Ahora se obtendrá la derivada covariante de un tensor covariante de rango uno. Para obtenerla, se expresa un vector en términos de sus componentes covariantes, $\mathbf{f} = f_i \mathbf{r}^i$ y teniendo en cuenta 1.48, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^k} = \frac{\partial f_i \mathbf{r}^i}{\partial q^k} = \quad (1.49)$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \mathbf{r}^i + f_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^k} \quad (1.50)$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \mathbf{r}^i - \Gamma_{lk}^i f_i \mathbf{r}^l \quad (1.51)$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \mathbf{r}^i - \Gamma_{ik}^j f_j \mathbf{r}^i \quad (1.52)$$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^j f_j \right) \mathbf{r}^i \quad (1.53)$$

La expresión entre paréntesis se llama derivada covariante de un tensor covariante, y se denota por:

$$\nabla_k f_i = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^j f_j \quad (1.54)$$

De manera similar, se obtiene la derivada covariante de un tensor de segundo rango, a_{ij} :

$$\nabla_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is} \quad (1.55)$$

Con esto, se puede determinar la segunda derivada covariante del tensor v_j :

$$\nabla_k (\nabla_i v_j) = \frac{\partial \nabla_i v_j}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s \nabla_s v_j - \Gamma_{kj}^s \nabla_i v_s \quad (1.56)$$

y si ahora se deriva primero con respecto a k , y luego con respecto a i :

$$\nabla_i (\nabla_k v_j) = \frac{\partial \nabla_k v_j}{\partial q^i} - \Gamma_{ki}^s \nabla_s v_j - \Gamma_{ij}^s \nabla_k v_s \quad (1.57)$$

cuya diferencia representa la curvatura:

$$\nabla_k \nabla_i v_j - \nabla_i \nabla_k v_j = R^l_{jik} v_l \quad (1.58)$$

donde:

$$R^l_{jik} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial q^k} + \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{si} - \Gamma^s_{ji} \Gamma^l_{sk} \quad (1.59)$$

Al tensor R^l_{jik} se le llama *tensor de curvatura de Riemann*. Cuando el espacio es plano, la diferencia expresada en la ecuación 1.58 es igual a cero.

Si se contrae dicho tensor en su índice contravariante, con su último índice covariante, se obtiene el tensor de Ricci:

$$R_{ij} = R^k_{ijk} \quad (1.60)$$

Si el tensor de Ricci se multiplica por la métrica, de tal manera que se contraiga, se obtiene el escalar de Ricci, o escalar de curvatura:

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad (1.61)$$

Una de las propiedades del tensor de curvatura es que:

$$\nabla_i \left(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right) = 0 \quad (1.62)$$

Al tensor dentro del paréntesis se le conoce como *tensor de Einstein*:

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \quad (1.63)$$

con lo que

$$\nabla_i G^{ij} = 0 \quad (1.64)$$

El tensor de Einstein G^{ij} , será fundamental en la construcción de la relatividad general.

1.2. Ecuaciones de Einstein

Para describir fenómenos que ocurren en la naturaleza, hay que considerar sistemas de referencia. Son aquellos sistemas de coordenadas que permite fijar la posición de las partículas en el espacio, además se requiere de un sistema de relojes fijos en él, que sirven para indicar el tiempo. Dentro de estos sistemas de referencia, existen algunos donde un cuerpo se mueve sin que sobre él actúen fuerzas exteriores, moviéndose el cuerpo a velocidad constante. Estos sistemas de referencia se llaman inerciales (L. D. Landau, 1992); cuando el sistema de referencia no satisface estas condiciones, se llama no inercial.

El principio de relatividad de Galileo dice que todas las leyes de la naturaleza son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. Este principio, además de la mecánica newtoniana en sistemas inerciales, fue la guía para la relatividad especial.

Por otra parte, los campos gravitacionales tienen la propiedad de que todos los cuerpos se mueven de la misma manera, independiente de su masa y mientras las condiciones iniciales sean las mismas. Esta propiedad da la posibilidad de establecer una analogía entre el movimiento

de un cuerpo en un campo gravitacional y el movimiento de un cuerpo que no está en algún campo externo, pero considerado desde el punto de vista de un sistema de referencia no inercial. Con esto, las propiedades de movimiento en un sistema de referencia no inercial, son las mismas como aquellas en un sistema inercial en presencia de un campo gravitacional. Es decir, un sistema de referencia no inercial es equivalente a un cierto campo gravitacional. Esto es llamado principio de equivalencia (L. D. Landau, 1992).

Para el caso de los sistemas no inerciales, que por el principio de equivalencia, son sistemas provistos de gravedad, la guía sería la ley de gravitación universal de Newton. Debido a las complicaciones encontradas al intentar generalizar la relatividad especial, y seguir una perspectiva del electromagnetismo, se partió de la siguiente hipótesis:

A diferencia de la relatividad especial, donde la métrica es plana, en general, la métrica del espacio-tiempo no es plana. Las líneas de mundo³ de cuerpos cayendo, en un campo gravitacional, son simplemente las geodésicas de la métrica del espacio-tiempo curvo.

Siguiendo la ley de la gravitación de Newton, expresada como ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \quad (1.65)$$

donde está presente la idea de que el campo gravitacional se manifiesta debido a la densidad de materia. En la relatividad general debería estar presente también esta misma idea.

Uno de los resultados obtenidos en relatividad especial, es el *4-momento*:

$$p = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (mc, mv_x, mv_y, mv_z) \quad (1.66)$$

es decir, dicha expresión, que depende de la masa, que a la vez es fuente del campo gravitacional, está en términos de la energía y del momento, entonces la fuente de campo gravitacional puede estar en términos de un objeto dependiente del 4-momento. Dicho objeto se define como:

$$T^{ij} = \rho_0 u^i u^j \quad (1.67)$$

El tensor T^{ij} generaliza al 4-momento y es llamado *tensor de energía-momento*. Siendo ρ_0 la densidad de masa propia y u^k , la 4-velocidad. Ambos conceptos son propios de la relatividad especial.

En general, el tensor de energía-momento T^{ij} puede expresarse en términos de cualquier fuente de campo gravitacional.

El tensor T^{ij} tiene la propiedad de que:

$$\nabla_i T^{ij} = 0 \quad (1.68)$$

Ya que la distribución de materia determina la geometría del espacio (D'Inverno, 1998), se puede proponer que las ecuaciones 1.64 y 1.68 son proporcionales, es decir, que:

$$\nabla_i G^{ij} = \kappa_0 \nabla_i T^{ij} \quad (1.69)$$

$$G^{ij} = \kappa_0 T^{ij} \quad (1.70)$$

³Una línea de mundo está compuesta por puntos en el espacio-tiempo, de tal manera que los puntos de esta línea determinan las coordenadas de la partícula en cada momento de tiempo (L. D. Landau, 1992).

siendo κ_0 , un factor de proporcionalidad⁴.

En términos explícitos del tensor de Einstein, se tiene la ecuación tensorial:

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R = \kappa_0 T^{ij} \quad (1.71)$$

y esta expresión representa las ecuaciones de campo de Einstein.

Un caso de interés para el análisis posterior de hoyos negros, es el caso del vacío, es decir cuando no hay materia ni campos gravitacionales, es decir, cuando el tensor de energía-momento se anula, y en este caso las ecuaciones de Einstein son:

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R = 0 \quad (1.72)$$

Ya que la derivada covariante de la métrica g^{ij} es cero, es decir $\nabla_i g^{ij} = 0$, entonces la ecuación 1.69 también satisface:

$$\nabla_i (G^{ij} + \Lambda g^{ij}) = \kappa_0 \nabla_i T^{ij} \quad (1.73)$$

o bien

$$G^{ij} + \Lambda g^{ij} = \kappa_0 T^{ij} \quad (1.74)$$

y en términos del tensor de curvatura:

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R + \Lambda g^{ij} = \kappa_0 T^{ij} \quad (1.75)$$

siendo Λ un factor de proporcionalidad, cuya importancia radica en que las soluciones de las ecuaciones de Einstein con este término pueden describir al universo como un todo. Esta constante es llamada *constante cosmológica*. Si la curvatura que se expresa en términos de Λ es positiva, el espacio es esférico y finito (universo cerrado); si la curvatura es negativa, el espacio es infinito (universo abierto) (Weingard, 1979).

La constante Λ es introducida en el contexto de la cosmología, y en este trabajo no hará falta su presencia.

⁴Para que haya consistencia con la Ley de Gravitación de Newton, este factor de proporcionalidad debe ser $\kappa_0 = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Capítulo 2

Agujeros Negros

Después de la publicación de la teoría general de la relatividad, dada por Einstein el 25 de Noviembre de 1915, él mismo determinó, con esta teoría, la *anomalía de la precesión de la órbita de Mercurio* (D’Inverno, 1998). Sin embargo, dada la complejidad de las ecuaciones de campo de esta teoría, el mismo Einstein no pensaba que las soluciones exactas llegarían a conocerse pronto. En Enero de 1916, un par de meses después de la publicación, el astrónomo Karl Schwarzschild envió a Einstein una solución exacta a dichas ecuaciones. Es en esta solución de Schwarzschild donde comienza el estudio de unos objetos astrofísicos particulares denominados hoyos negros. Estos objetos son la motivación de este trabajo, ya que el conocimiento sobre ellos es aún incompleto. Por otra parte, el interés en estos objetos radica en la posible conexión con una hipotética teoría de gravedad cuántica (Alvarez et al., 2008).

2.1. Definición de agujeros negros

2.1.1. Solución de Schwarzschild

Un espacio-tiempo plano y esféricamente simétrico, tiene la forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.1)$$

La solución de Schwarzschild es una solución estacionaria¹ de un campo, con una distribución de masa esféricamente simétrica y en el vacío. Sin embargo, a diferencia de la métrica de Minkowski, la de Schwarzschild se considera una métrica en un espacio-tiempo que no es plano, por lo que debe modificarse, pero manteniendo la simetría esférica. Es conveniente escribir este espacio-tiempo como (Carmeli, 1977):

$$ds^2 = -e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.2)$$

donde ν y λ son parámetros auxiliares para obtener una solución. Entonces la métrica es:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} -e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

¹Una solución es estacionaria cuando los elementos de la métrica no dependen del tiempo. Si además no hay términos cruzados en las diferenciales temporales, por ejemplo $dt d\theta$, se dice que la métrica es estática.

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} -e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Usando la ecuación 1.45 se obtienen los símbolos de Christoffel de segundo tipo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

siendo

$$\nu' = \frac{d\nu}{dr} \quad ; \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dr} \quad ; \quad \dot{\nu} = \frac{d\nu}{dt} \quad ; \quad \dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.6)$$

El tensor de Einstein puede expresarse como $G_i^j = R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R$, y los elementos del tensor de Einstein no nulos son:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \\ G_0^1 &= -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \\ G_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \\ G_2^2 = G_3^3 &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si se considera la ecuación 1.71 en el vacío, es decir cuando $T^{ij} = 0$, entonces se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= 0 \\ e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} &= 0 \implies \dot{\lambda} = 0 \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sumando la primera y la tercera ecuación se llega a que $\nu' + \lambda' = 0$, o bien $\nu + \lambda = f(t)$. Si los elementos de la métrica no dependen del tiempo, es decir, si $f(t) = 0$ entonces $\nu + \lambda = 0$. Integrando la tercera ecuación, se obtiene

$$\frac{r}{K} = \frac{1}{1 - e^\nu} \quad (2.9)$$

con lo que:

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{K}{r} \quad (2.10)$$

donde K es una constante de integración, que se obtiene al considerar la gravitación newtoniana.

Por una parte, se tiene que $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\lambda} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{\nu} = \lim_{r \rightarrow \infty} (1 - K/r) = 1$, es decir, a grandes distancias la métrica se hace plana. Por otra parte, mediante la ley de gravitación de Newton a grandes distancias del centro de masa, se obtiene la aceleración radial $a_{rad} = -GM/r^2$.

Ya que $-c^2\Gamma_{00}^1$ representa la aceleración radial (Carmeli, 1977), es decir:

$$a_{rad} = -c^2\Gamma_{00}^1 = -c^2 \frac{\nu'}{2} e^{\nu} e^{-\lambda} = -c^2 \left(\frac{e^{\lambda} - 1}{2r} \right) \left(1 - \frac{K}{r} \right) e^{-\lambda} = -c^2 \frac{K}{2r^2} \left(1 - \frac{K}{r} \right) \quad (2.11)$$

entonces para grandes distancias:

$$-c^2 \frac{K}{2r^2} \left(1 - \frac{K}{r} \right) \rightarrow -c^2 \frac{K}{2r^2} = -G \frac{M}{r^2} \quad (2.12)$$

con lo que $K = 2GM/c^2 = 2m$, siendo $m = GM/c^2$

Finalmente la solución de Schwarzschild es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.13)$$

Para valores de r mayores que un cierto valor r_0 , si ocurre que $r_0 > 2m$, se puede determinar el tiempo medido por un observador a una distancia fija $r > r_0$, y en ausencia de rotación, es decir, cuando $dr = d\theta = d\phi = 0$, y en la solución de Schwarzschild se tendrá el incremento del tiempo propio² $d\tau = ds/c$:

$$d\tau = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} dt \quad (2.14)$$

donde dt es el incremento del tiempo coordenado, es decir, el tiempo propio de un observador a una distancia infinita del objeto. Ya que $r > 2m > 0$, entonces $0 < (1 - 2m/r)^{1/2} < 1$, entonces $d\tau < dt$. Es decir, el tiempo experimentado por un observador a la distancia r fluye más lentamente que el tiempo experimentado por el observador a una distancia infinita.

Como se aprecia en la forma de dicha solución, hay un problema con los valores de r , en $r = 0$ y $r = 2m$. Es decir, en dicha solución hay dos singularidades que podrían deberse, o bien a una cuestión matemática intrínseca a las coordenadas, o bien una cuestión física, donde la estructura del espacio-tiempo, en efecto, tiene singularidades. El valor $r_S = 2m$, se denomina *radio de Schwarzschild*.

La teoría de evolución estelar (D'Inverno, 1998), dice que estrellas cuya masa es del orden de la del Sol, puede alcanzar un estado de equilibrio final como una enana blanca o una estrella de neutrones, pero para masas mucho más grandes la estrella se contraerá a tal grado de que los efectos gravitacionales superarán otras fuerzas internas. Si dicha contracción continúa hasta que la superficie de la estrella alcanza el valor del radio de Shwarschild, o incluso más, este objeto compacto se convertirá en un *hoyo negro*. Estos objetos densos poseén una frontera establecida por $r = 2m$, llamado *horizonte de eventos* y representa la frontera de todos los eventos que pueden ser medidos, en principio, por observadores exteriores. Un hoyo negro es una región del espacio-tiempo causalmente desconectada del infinito.

²El tiempo propio es el medido por un reloj que se mueve junto con un objeto dado (L. D. Landau, 1992).

2.1.2. Gravedad superficial de un agujero negro de Schwarzschild.

Ya que la 4-aceleración está dada por la derivada covariante de la 4-velocidad, u^μ :

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu u^\beta u^\alpha \quad (2.15)$$

la magnitud de la aceleración propia es:

$$a^\mu a_\mu = a^2 \quad (2.16)$$

Un observador alrededor de un hoyo negro (observador estacionario), es aquel donde $dr = d\theta = d\phi = 0$, con lo que su 4-velocidad es:

$$u^\mu = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0 \right) = \left(\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right) \quad (2.17)$$

Y el único componente de la 4-aceleración en la solución de Schwarzschild, es (Carmeli, 1977):

$$a^1 = \frac{du^1}{d\tau} + \Gamma_{00}^1 (u^0)^2 \quad (2.18)$$

donde $\Gamma_{00}^1 = m/r^2(1 - 2m/r)$, y como $u^1 = 0$ y $u^0 = (1 - 2m/r)^{-1/2}$, entonces:

$$a^1 = \frac{m}{r^2} \quad (2.19)$$

y

$$a_1 = g_{11}a^1 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{m}{r^2} \right) \quad (2.20)$$

entonces

$$a^2 = a^1 a_1 = \left(\frac{m}{r^2} \right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (2.21)$$

y la aceleración propia es

$$a = \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} \quad (2.22)$$

De esta última ecuación se puede notar que la aceleración de una partícula prueba en el horizonte de eventos, es decir, en $r = 2m$, medida por un observador estacionario, tiende a infinito. Mientras que esa aceleración medida por un observador en el infinito ($r \rightarrow \infty$), es igual a $a = m/r^2$, que es la aceleración debido a la gravedad de la teoría de Newton³. Es decir, la aceleración medida por un observador en el infinito, es la aceleración debido a la gravedad:

$$g_\infty = \frac{m}{r^2} \quad (2.23)$$

³Ya que la energía potencial M_1gr es igual a la energía potencial gravitacional GM_1M_2/r , es decir $M_1gr = GM_1M_2/r$, es decir $g = GM_2/r^2$

Si el mismo observador en el infinito, quisiera determinar la aceleración de una partícula que flota en el horizonte de eventos, $r = 2m$, se tiene $g_\infty = m/(2m)^2 = 1/4m$. A esta cantidad se le llama **gravedad superficial** del hoyo negro, y se denota por κ . Es decir, la gravedad superficial de un hoyo negro de Schwarzschild es $\kappa = 1/4m$.

Una cuestión que surge es la relacionada con el hecho de que, para ciertos valores de r , puede estar presente una singularidad. Sin embargo puede ser que para ciertos valores de r , la métrica tenga una divergencia, pero que no sea una singularidad física, sino matemática. Para esto, se requiere solamente determinar para qué valores de r , la curvatura diverge. En el caso de Schwarzschild, la única singularidad física se da para $r = 0$, que es el valor de r donde la curvatura diverge.

Podría haber hoyos negros sin horizonte de eventos, y a estos hoyos negros se les conoce como *singularidades desnudas*. En tal situación, sí sería posible observar lo que ocurre en la superficie del hoyo negro mismo desde alguna región alejada de éste. Sin embargo, la *hipótesis de censura cósmica*, conjeturada por Roger Penrose en 1969, prohíbe dichas singularidades desnudas, al menos están prohibidas para materia usual.

Los hoyos negros no son conceptualmente nuevos dentro de la física, sin embargo la teoría que respalda su existencia fuera de la imaginación, es la relatividad general.

A continuación se narrará una breve historia del concepto de hoyos negros:

La primera mención que se hace respecto a la idea de hoyo negro, fue dada por John Mitchell en un artículo enviado a la Royal Society en 1783, donde describe un objeto cuya velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz. Posteriormente, Laplace también menciona esta idea en 1796. Ambos tenían en mente la gravitación newtoniana, así como la teoría de la luz corpuscular, también de Newton.

Años después, en el ámbito de la astronomía, en 1838, Friedrich Bessel (1784-1846) calculó la distancia a la que se encontraba la estrella Sirius (Asimov, 1978). Le interesaba medir el movimiento que experimentaba dicha estrella. Ya que medía su posición regularmente, se dio cuenta que había más de un movimiento, mismo que alteraba la posición que él esperaba. Sabía que la posición de Sirius que él observaba, estaba modificada debido a la rotación de la Tierra alrededor del Sol. Sin embargo, existía este otro movimiento, más lento, que nada tenía que ver con efectos de la Tierra.

Bessel estudió dicho movimiento anómalo, y encontró que Sirius estaba moviéndose en una órbita alrededor de algo. Calculó, además, que le tomaba 50 años en completar su órbita. Bessel se preguntaba lo que originaba dicha trayectoria, pues la masa de Sirius es dos veces y medio la masa del Sol, y sin embargo, no podía observar al objeto responsable. Concluyó que ese otro objeto tenía que ser lo suficientemente grande como para ser una estrella, y además, orbitaban una alrededor de la otra. Así, una se llamó Sirius A, y su compañera, Sirius B.

Desde la superficie solar, y hasta su centro, hay 695 200 km de distancia; desde la superficie de Sirius B, estaría la misma cantidad de masa que el Sol, pero hasta su centro habrían 24 000 km. Si alguien estuviera en la superficie de Sirius B, el empuje gravitacional sería 840 veces la que se experimentaría si se estuviera sobre la superficie del Sol, y 23 500 veces si se estuviera en la superficie de la Tierra. Con esto, la gravedad superficial de Sirius B es mayor que la del Sol. Sirius B, por sus características térmicas y de masa, está dentro de las estrellas llamadas *enanas blancas*. Pero ¿qué pasa si una enana blanca es muy masiva? Entra aquí lo que Subrahmanyan Chandrasekhar estudió en la década de 1930, y cuyo resultado fue lo que hoy en día se conoce como límite de Chandrasekhar, donde la degeneración cuántica de los electrones no es capaz de contrarrestar la fuerza de gravedad. Dicho límite, es del orden de 1.4 masas solares.

Si los electrones se van, entonces los neutrones se acercan cada vez más hasta colapsarse y

formar una *estrella de neutrones*. Ya que los neutrones son más pequeños que los átomos, entonces las estrellas de neutrones son más pequeñas que las enanas blancas (que están formadas por átomos).

Para que un objeto salga de un planeta o estrella, requiere una velocidad mínima, que depende de la gravedad superficial, y del radio del planeta o estrella. Dicha velocidad se llama velocidad de escape. En la Tierra, es del orden de 11km/s, en Júpiter es del orden de 60km/s, en el Sol es de 617km/s. Para Sirius B (una enana blanca), es de 3400km/s. Si consideramos una estrella de neutrones con la masa del Sol, sería de 192 360 km/s. Mientras el objeto colapse cada vez más, su velocidad de escape va ir aumentando, hasta alcanzar la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz o más, y cuando eso ocurra, la luz no podrá abandonar dicho planeta o estrella, y ya que nada se mueve más rápido que la luz, entonces nada saldrá de dicho objeto celeste. Para un objeto que tuviera la masa del Sol, el radio de Schwarzschild sería de 3km. Un objeto con estas características, es llamado *hoyo negro*. Hoyo negro de Schwarzschild, si solo tiene como parámetro la masa; hoyo negro de Reissner-Nordstrom, si tiene masa y carga eléctrica; hoyo negro de Kerr, si tiene masa y momento angular; hoyo negro de Kerr-Newman, si tiene masa, carga eléctrica y momento angular.

En 1939, Robert Oppenheimer y H. Snyder publicaron un artículo describiendo a los hoyos negros como: "Cuando todas las fuentes termonucleares de energía son agotadas, una estrella suficientemente pesada colapsará. A menos que algo, de alguna manera pueda reducir la masa de la estrella al orden de la del Sol, esta contracción continuará indefinidamente... hasta que el objeto corte comunicación con el resto del universo."

Surge ahora una cuestión, y es que si nada escapa de los hoyos negros, ni siquiera la luz, y por ende tampoco radiación, acaso gravitacional, entonces, ¿sería posible detectar su presencia? En principio, la respuesta sería no, y la existencia de estos objetos quedaría solo como objetos teóricos, sin más.

Sin embargo, en la década de 1970, Stephen Hawking muestra, debido a efectos cuánticos, que después de todo, los hoyos negros pueden perder masa debido a lo que actualmente se conoce como radiación de Hawking. A esto se le conoce como *evaporación de hoyo negro*.

2.2. El agujero negro de Kerr

En 1963, Roy Kerr da una solución de las ecuaciones de Einstein para un modelo en rotación. Entre 1967 y 1968, Robert Boyer y Richard Lindquist introducen un sistema de coordenadas que generaliza la métrica de Schwarzschild, y que son usadas para reescribir la métrica, previamente dada por Kerr.

Las funciones empleadas en la métrica de Kerr, son:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ & \text{y} \\ \Delta &= r^2 - 2mr + a^2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde $a = J/Mc$, y J es el momento angular.

Entonces

$$\frac{\Delta}{r^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{a^2}{r^2} \tag{2.25}$$

Con esto, Δ/r^2 es una generalización de $1 - 2m/r$, mientras que ρ^2 es una generalización de r^2 . La métrica de Kerr, en coordenadas de Boyer-Lindquist, es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt \quad (2.26)$$

de tal manera que si $a = 0$, se obtiene la métrica de Schwarzschild 2.13.

Tabla 2.1: Comparación de los elementos de distintas métricas del espacio tiempo (O'Neil, 1995).

Métrica	Minkowski	Schwarzschild	Kerr (Boyer-Lindquist)
g_{tt}	-1	$-(1 - \frac{2m}{r})$	$-(1 - \frac{2mr}{\rho^2})$
g_{rr}	1	$(1 - \frac{2m}{r})^{-1}$	$\frac{\rho^2}{\Delta}$
$g_{\theta\theta}$	r^2	r^2	ρ^2
$g_{\phi\phi}$	$r^2 \sin^2 \theta$	$r^2 \sin^2 \theta$	$[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}] \sin^2 \theta$
$g_{ij} \quad i \neq j$	0	0	0, excepto $g_{\phi t} = g_{t\phi} = -\frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2}$

Al comparar las distintas métricas, puede notarse la progresiva ampliación de términos y casos particulares de la subsecuente métrica, como se muestra en la Tabla 2.1.

Hay tres tipos de familias de espacio-tiempo de Kerr, determinadas por:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (2.27)$$

$a^2 < m^2$, llamado espacio-tiempo de Kerr rotando lentamente.

$a^2 = m^2$, llamado espacio-tiempo de Kerr extremo

$m^2 < a^2$, llamado espacio-tiempo de Kerr rotando rápidamente.

La familia de Kerr lento, tiene dos raíces reales en 2.27, y dada la métrica 2.26, estas raíces se traducen como singularidades de la métrica. Dichas singularidades están dadas por:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}; \quad m^2 \geq a^2 \quad (2.28)$$

por lo tanto, el hoyo negro tiene dos horizontes de eventos: r_+ , llamado horizonte de eventos exterior, y r_- , llamado horizonte de eventos interior.

La familia de Kerr extremo tiene una raíz real en $r = m$. Un hoyo negro extremo de Kerr, es aquel cuyo momento angular coincide con su masa, es decir que $a = m$ y como $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$, entonces $r = m$. Físicamente, los dos horizontes de eventos se juntan formando uno solo y su momento angular es el máximo que puede tener para que siga siendo un hoyo negro. Al sobrepasar este límite de momento angular, desaparecen sus horizontes de eventos y se convierte en una singularidad desnuda.

La familia de Kerr rápido no tiene raíces reales, es decir no tiene singularidades en la métrica. Esto quiere decir que no es posible la existencia de un hoyo negro.

En la figura 2.1, se muestran las singularidades de las métricas de Schwarzschild y de Kerr, en términos del parámetro Δ .

Otra diferencia entre un hoyo negro de Schwarzschild y de Kerr, además del número de horizonte de eventos, es que un hoyo negro de Kerr tiene una región de donde puede extraerse energía, debido a la rotación misma del hoyo negro. Esta región, llamada **ergosfera**, está situada fuera de los dos horizontes de eventos r_+ y r_- , coincidiendo con estos, solo en los polos⁴ del

⁴Los polos norte y sur son los que pasan por el eje de rotación del hoyo negro.

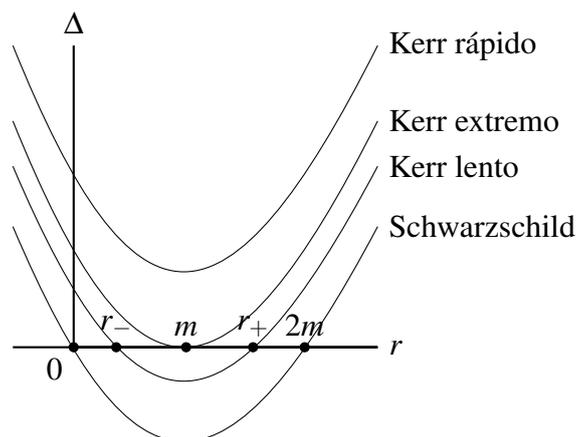


Figura 2.1: Parámetro Δ del espacio-tiempo de Schwarzschild y de las familias del espacio-tiempo de Kerr en función del radio r (O'Neil, 1995).

hoyo negro. En la ergosfera es posible extraer energía (L. D. Landau, 1992) mediante el *proceso de Penrose*, donde un objeto material entra a la ergosfera y aquí se divide en dos partes, con la posibilidad de que una de esas partes atravesase el horizonte de eventos, y la otra parte salga hacia el infinito. Esta parte saliente, tiene una mayor energía que el objeto que entró inicialmente. Este proceso genera una pérdida de energía rotacional en el hoyo negro. Dicha pérdida se traduce en extracción de energía del hoyo negro, transferida al objeto que salió hacia el infinito. Hay que precisar que la ergosfera no es un tipo de horizonte de eventos, sino una región donde todo lo que está dentro, deja su estado estático. Por esta razón, la delimitación de la ergosfera se le llama *límite estático*.

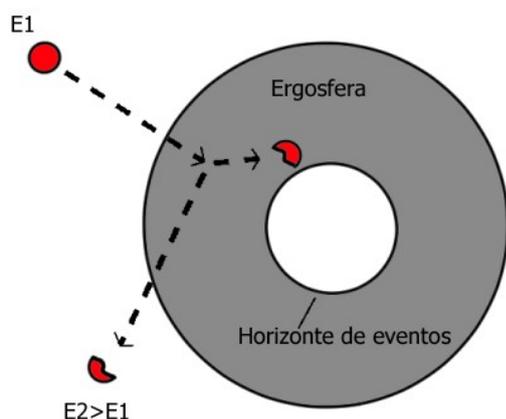


Figura 2.2: Esquematización del Proceso de Penrose.

2.2.1. Gravedad superficial de un agujero negro de Kerr

Así como en un agujero negro de Schwarzschild se obtuvo la gravedad superficial mediante la 4-aceleración, y considerando la medición de la aceleración en el horizonte de eventos desde el infinito, puede obtenerse que la gravedad superficial de un hoyo negro de Kerr, está dada por:

$$\kappa = \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2mr_+} \quad (2.29)$$

siendo r_+ , el definido en la ecuación 2.28.

2.3. Teoremas de unicidad

En las dos soluciones a las ecuaciones de Einstein vistas previamente, la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kerr, están presentes hoyos negros asociados que dependen solo de la masa (Schwarzschild), así como de la masa y del momento angular (Kerr). Surge entonces la pregunta: ¿existen otras métricas cuyas singularidades dependan de otros parámetros además de la masa y del momento angular? Una primera respuesta, es la generalización de la métrica de Kerr a la métrica de Kerr-Newman, donde:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + q^2 \quad (2.30)$$

siendo $q^2 = kGQ^2/c^4$ y Q es la carga eléctrica. Sin embargo, sigue la pregunta en pie.

Con las tres métricas, hasta ahora se puede afirmar que un hoyo negro tiene tres propiedades que pueden ser medidas por un observador que se encuentra fuera del hoyo negro (observador externo). Estas propiedades son: la masa, la carga y el momento angular del hoyo negro.

Así como la métrica de Schwarzschild es la única solución a las ecuaciones de Einstein que es estática y en el vacío, con un horizonte de eventos (Teorema de Israel), la métrica de Kerr, es la única solución a las ecuaciones de Einstein que es estacionaria, axisimétrica y en ausencia de materia. Estas soluciones dependen solo de los parámetros masa y momento angular. A este resultado se le conoce como teorema de Carter-Robinson. Estos teoremas fueron ampliados por Robinson al considerar la presencia de un campo electromagnético, y con esto se agregó el parámetro carga eléctrica. Estos teoremas se agrupan en lo que se conoce como teorema de no pelo: los hoyos negros estacionarios están caracterizados por los parámetros masa, momento angular y carga eléctrica.

El teorema de no pelo (no-hair theorem), establece que un hoyo negro en un espacio-tiempo que satisfaga las ecuaciones de Einstein en el vacío y estacionarias, está totalmente caracterizado por su masa m , por su momento angular específico a , y por su carga eléctrica q . Este resultado es parecido a un sistema termodinámico en equilibrio que está descrito por un pequeño conjunto de variables de estado (Heusler, 1996), y para comprender su comportamiento dinámico se requiere de una cantidad de información considerablemente mayor.

Capítulo 3

Termodinámica de agujeros negros

3.1. Definición de entropía de agujeros negros

El área del horizonte de eventos de un hoyo negro de Kerr, está dada por

$$A = 4\pi (r^2 + a^2) = 8\pi m r_+ = 8\pi m \left(m + \sqrt{m^2 - a^2} \right) \quad (3.1)$$

donde $m \equiv GM/c^2$ y $a = J/Mc$. Entonces, como el área depende tanto de la masa como del momento angular, la diferencial de dicha área es (Raine, 2010).

$$dA = 8\pi \left[2mdm + (m^2 - a^2)^{1/2} dm + m (m^2 - a^2)^{-1/2} (mdm - ada) \right] \quad (3.2)$$

o factorizando el término $1/(m^2 - a^2)^{1/2}$, puede expresarse como:

$$dA = \frac{8\pi}{(m^2 - a^2)^{1/2}} \left[2m (m^2 - a^2)^{1/2} dm + (m^2 - a^2) dm + m (mdm - ada) \right] \quad (3.3)$$

$$= \frac{8\pi}{(m^2 - a^2)^{1/2}} \left[2m (m^2 - a^2)^{1/2} dm + 2m^2 dm - a^2 dm - amda \right] \quad (3.4)$$

$$= \frac{8\pi}{(m^2 - a^2)^{1/2}} \left[2m \left(m + (m^2 - a^2)^{1/2} \right) dm - a^2 dm - amda \right] \quad (3.5)$$

y por la definición 2.28:

$$dA = \frac{8\pi}{(m^2 - a^2)^{1/2}} \left[2mr_+ dm - a^2 dm - amda \right] \quad (3.6)$$

Debido a que

$$am = \left(\frac{J}{Mc} \right) \left(\frac{GM}{c^2} \right) = \frac{JG}{c^3} \equiv j \quad (3.7)$$

entonces

$$dj = d(am) = adm + mda \quad (3.8)$$

o bien

$$da = \frac{dj - adm}{m} \quad (3.9)$$

entonces

$$amda = am \left(\frac{dj - adm}{m} \right) = adj - a^2 dm \quad (3.10)$$

y la diferencial de área es:

$$dA = \frac{8\pi}{(m^2 - a^2)^{1/2}} [2mr_+ dm - a^2 dm - adj + a^2 dm] \quad (3.11)$$

$$= \frac{8\pi}{(m^2 - a^2)^{1/2}} [2mr_+ dm - adj] \quad (3.12)$$

y al factorizar el término $2mr_+$, se tiene que:

$$dA = \frac{8\pi (2mr_+)}{(m^2 - a^2)^{1/2}} \left[dm - \frac{a}{2mr_+} dj \right] \quad (3.13)$$

estableciéndose la velocidad angular:

$$\omega \equiv \frac{a}{2mr_+} \quad (3.14)$$

y la gravedad superficial dada en la ecuación 2.29:

$$\kappa \equiv \frac{(m^2 - a^2)^{1/2}}{2mr_+} \quad (3.15)$$

entonces la expresión se ve como:

$$dA = \frac{8\pi}{\kappa} [dm - \omega dj] \quad (3.16)$$

o bien:

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \omega dj \quad (3.17)$$

La ecuación 3.17 es utilizada¹ para demostrar que:

$$m = \frac{\kappa}{4\pi} A + 2\omega j \quad (3.18)$$

y puede corroborarse al sustituirse los términos del lado derecho de la igualdad por 3.1, las definiciones 3.14 y 3.15, y $j = ma$, obteniéndose el lado izquierdo, es decir, m . A la ecuación 3.18 se le llama ecuación de Smarr. De manera más general (Smarr, 1973), considerando los demás parámetros según el teorema de no pelo:

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \omega dj + \phi dq \quad (3.19)$$

Donde ϕdq es la energía requerida para extraer un electrón del horizonte de eventos con un potencial eléctrico Φ , hacia el infinito. Por analogía con el caso anterior, donde ω es al potencial eléctrico, como j es a la carga eléctrica. En este sentido, se va a interpretar ωdj como la energía

¹Demostrado por Smarr

necesaria para extraer el momento angular del horizonte de eventos del agujero negro, dada una velocidad angular ω .

Una característica de los horizontes de eventos es que, si dos hoyos negros se unen formando un solo hoyo negro, el área del horizonte de eventos del hoyo negro final, será mayor o igual que la suma de las áreas de los dos hoyos negros iniciales (Bardeen et al., 1973).

Otra característica de los hoyos negros, es que la gravedad superficial κ , es constante sobre el horizonte de eventos.

Con estas tres propiedades del horizonte de eventos de un hoyo negro, más la hipótesis de censura cósmica, Jacob Bekenstein (Hawking and Penrose, 1996) hizo una correspondencia entre el área del horizonte de eventos $A/4$ y la entropía del área del horizonte de eventos S_{BH} ; la masa del hoyo negro m , con la energía interna U_{BH} ; la gravedad superficial $\kappa/2\pi$, y la temperatura T_{BH} del horizonte de eventos del hoyo negro.

Con esta analogía, la ecuación 3.19 tiene la forma matemática de la primera ley de la termodinámica:

$$dU_{BH} = T_{BH}dS_{BH} - \text{trabajo} \quad (3.20)$$

donde $m \rightarrow U_{BH}$, $\kappa/2\pi \rightarrow T_{BH}$ y $A/4 \rightarrow S_{BH}$.

Hay que notar el parecido entre la fórmula de Smarr 3.18, y la relación de Euler:

$$U = TS + \sum XY \quad (3.21)$$

presente en la termodinámica clásica (Callen, 1985), siendo X alguna variable termodinámica intensiva, y Y , alguna variable termodinámica extensiva.

Así, la ecuación de Smarr 3.19 tiene la misma forma matemática que la ecuación de Euler.

De esta manera se obtienen, por analogía, las leyes de la termodinámica para hoyos negros, expresadas en términos de la gravedad superficial, κ , y del área del horizonte de eventos, A .

Desde el punto de vista matemático, hay congruencia entre el formalismo de la termodinámica clásica y el de la termodinámica de hoyos negros. Sin embargo, desde el punto de vista físico, hay al menos un problema, ya que, si bien se puede ver la correspondencia física entre la masa m y la energía U , no hay correspondencia física entre la temperatura de laboratorio y la gravedad superficial κ . Si se considera un hoyo negro como un cuerpo que no podría emitir radiación, es decir, su temperatura sería cero entonces esto último abandonaría la correspondencia entre las dos situaciones. Dicho problema fue resuelto por Hawking en 1975 quien, tomando en cuenta efectos cuánticos llegó a la conclusión de que un hoyo negro emite radiación, llamada *radiación de Hawking*, dada por $T_H = \kappa/2\pi$, que da sustento físico a la correspondencia entre temperatura y κ . Ahora, si se considera la evaporación del hoyo negro, el área del horizonte de eventos desaparecería eventualmente, y con este, su entropía, con lo que se abandonaría la analogía entre la entropía de la termodinámica clásica y la de hoyos negros. Sin embargo, en un proceso donde la entropía de termodinámica clásica decrece ($dS < 0$) debido a la pérdida de materia en los alrededores, y que entra a un hoyo negro (Wald, 1984), el área del horizonte de eventos aumentaría $dA > 0$; así mismo, en un proceso de evaporación (radiación de Hawking), el área del horizonte disminuye ($dA < 0$), mientras la entropía de materia fuera del hoyo negro aumenta ($dS > 0$). Con esto, se introduce la entropía generalizada S_{gen} :

$$S_{gen} = S + \frac{Ak_{BC}^3}{4G\hbar} \quad (3.22)$$

con esto, una disminución en la entropía S , de los alrededores del hoyo negro, está compensada por un aumento en el área del horizonte de eventos A , del hoyo negro, y viceversa. Además,

teniendo en cuenta que la tasa de evaporación del hoyo negro es menor conforme la masa de este aumenta, entonces se puede establecer que la entropía generalizada, S_{gen} , satisface que $dS_{gen} \geq 0$, para cualquier proceso físico.

Manteniendo la analogía con la termodinámica clásica, la tercera ley para hoyos negros, sugiere que no es posible que el horizonte de eventos se desvanezca. De ser así, significaría la existencia de una singularidad desnuda, lo que sería contradictorio con la hipótesis de censura cósmica. Es decir, la censura cósmica da sustento a la tercera ley de hoyos negros, y la tercera ley de hoyos negros da sustento a la censura cósmica.

Cabe mencionar que la radiación de Hawking es una magnitud medida desde regiones muy alejadas del hoyo negro (desde el infinito). En regiones cercanas al horizonte de eventos sí podría medirse una temperatura, pero es debido al efecto Unruh, que es la existencia de radiación, debido a la presencia de una aceleración, y por el principio de equivalencia, debido a la presencia de un campo gravitacional. Esto es, un observador acelerado observará un baño térmico, mientras que un observador inercial no lo hará.

3.2. Leyes de la termodinámica de agujeros negros

Teniendo en cuenta las propiedades de los hoyos negros previas, desde el punto de vista tanto matemático como físico, es posible establecer una correspondencia entre la termodinámica de laboratorio y la termodinámica de hoyos negros.

Ley cero de hoyos negros Sea un hoyo negro estacionario. La gravedad superficial κ tiene el mismo valor sobre el horizonte de eventos. Es decir, la aceleración debido a la gravedad en el horizonte de eventos, es constante.

Primera Ley de hoyos negros Dado un hoyo negro estacionario, se verifica que:

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \omega_H d j_H + \phi dq \quad (3.23)$$

donde ω es la velocidad angular del horizonte de eventos del hoyo negro, j_H , es el momento angular del horizonte de eventos, ϕ , el potencial eléctrico, y q , la carga eléctrica.

Segunda Ley de hoyos negros Para cualquier proceso físico, la entropía de un sistema que contenga un hoyo negro, nunca decrece, es decir:

$$dS_{gen} \geq 0 \quad (3.24)$$

donde $S_{gen} = S + \frac{Ak_{BC}^3}{4G\hbar}$.

Tercera Ley de hoyos negros No puede ocurrir que el horizonte de eventos se desvanezca, esto es, $\kappa \neq 0$.

Capítulo 4

Colapso termodinámico

4.1. Sobre la no aditividad de la entropía

Como se mencionó anteriormente, las leyes de la termodinámica de hoyos negros, surgen por las similitudes, tanto matemáticas como físicas, entre las variables termodinámicas y las variables de hoyos negros. Sin embargo, una cuestión que difiere entre las dos termodinámicas, es que, en sistemas de termodinámica clásica, la entropía es una variable aditiva, es decir $S_{12} = S_1 + S_2$. La entropía es una función homogénea de grado 1. Mientras que la entropía de hoyos negros es proporcional al área del horizonte de eventos, y esta entropía es una función homogénea de grado 2, para el caso de Schwarzschild. Para el caso más amplio, el de Kerr-Newman, la entropía es una función no homogénea, y la entropía es una variable no aditiva, esto es, $S_{12} \neq S_1 + S_2$.

4.2. Colapso termodinámico idealizado

Se define *colapso termodinámico*, al análisis del colapso gravitacional de uno o más objetos astrofísicos compactos, en el que se considera solamente el estado inicial y el estado final, desde la perspectiva termodinámica.

A diferencia de los colapsos gravitacionales entre dos hoyos negros, donde los análisis giran alrededor de la radiación gravitacional y otras variables gravitacionales, en este trabajo se analizarán sistemas de hoyos negros, desde el punto de vista de la termodinámica de hoyos negros. Concretamente, se abordará la entropía del sistema en su estado final S_{12} , en términos de la entropía de los estados iniciales S_1 y S_2 .

Se considera estado inicial del sistema, a dos hoyos negros dentro de los reservorios necesarios para que se cumplan las condiciones de equilibrio, lo suficientemente alejados uno del otro, de tal manera que la entropía de cada uno de ellos no se vea afectada por el otro hoyo. La entropía de cada hoyo negro se denota por S_1 y S_2 .

Se considera estado final del sistema, a un solo hoyo negro formado por los dos hoyos negros del estado inicial. La entropía de este estado final se denota por S_{12} .

Dadas las condiciones anteriores, se considera **colapso termodinámico de hoyos negros**, a la unión de dos (o más) hoyos negros en estados iniciales, y cuyo estado final sea un solo hoyo negro.

Ya que la entropía es una ecuación fundamental termodinámica, es decir, se puede determinar toda la información termodinámica del sistema, y dado el teorema de no pelo, donde un sistema que contenga un hoyo negro, está totalmente caracterizado por los parámetros masa,

momento angular, y carga eléctrica. Entonces, la entropía como ecuación fundamental depende, a lo más, de estos tres parámetros.

4.2.1. Colapso termodinámico de dos hoyos negros de Schwarzschild.

El primer sistema a estudiar, será un sistema de dos hoyos negros de Schwarzschild sin emisión de radiación y masa aditiva. Es decir, las suposiciones iniciales son las siguientes:

- *El sistema en el estado inicial, está compuesto por dos hoyos negros de Schwarzschild con entropías S_1 y S_2 , respectivamente. El estado final del sistema es un solo hoyo negro de Schwarzschild con entropía S_{12} .*

- *Durante el proceso, que va del estado inicial al estado final del sistema, no hay emisión de radiación.*

- *No habrá pérdidas ni ganancias en la masa, cuyo valor en el estado final será igual a $m_{12} = m_1 + m_2$, donde m_1 es la masa del hoyo negro 1, m_2 la masa del hoyo negro 2, y m_{12} , la masa del hoyo negro resultado del colapso.*

La entropía de un hoyo negro de Schwarzschild, está dada por:

$$S_{Sch} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A_{Sch} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} \left(16\pi \left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 \right) = \frac{4\pi k_B GM^2}{\hbar c} \quad (4.1)$$

o más brevemente considerando unidades geométricas $m \equiv GM/c^2$ y que $k_B = \hbar = c = G = 1$:

$$S_{Sch} = 4\pi m^2 \quad (4.2)$$

Una forma de abordar un sistema de dos hoyos negros de Schwarzschild, es suponiendo la forma matemática de la entropía de dicho sistema, y ver la forma que adopta la masa m .

Si suponemos alguna forma matemática para la entropía, por ejemplo que la entropía del estado final es aditiva, es decir que:

$$S_{12} = S_1 + S_2 \quad (4.3)$$

entonces, ya que la entropía de un solo hoyo negro de Schwarzschild, está dada por la ecuación 4.1, la entropía del estado final es:

$$4\pi m_{12}^2 = 4\pi m_1^2 + 4\pi m_2^2 \quad (4.4)$$

o bien

$$m_{12}^2 = m_1^2 + m_2^2 \quad (4.5)$$

Pero ya que la masa es aditiva, por hipótesis, es decir $m_{12} = m_1 + m_2$, se tiene que $m_{12}^2 = (m_1 + m_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2$, y comparando este resultado con la ecuación 4.5, concluimos que en la ecuación 4.5 habría pérdidas de masa ($2m_1m_2$), lo cuál violaría la suposición hecha inicialmente sobre la aditividad de la masa. Si suponemos otras formas matemáticas no extensivas de la entropía, por ejemplo:

$$S_{12} = S_1 + S_2 + f \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \quad (4.6)$$

siendo f un parámetro, entonces, en general, la masa sería no aditiva, lo que violaría la hipótesis de aditividad de masa. Solo cuando $f = \frac{2\sqrt{S_1 S_2}}{S_1 S_2} (S_1 + S_2)$, la masa permanece aditiva y es en este caso cuando las dos formas matemáticas de la entropía son equivalentes.

Otra manera de abordar el problema, es suponer la forma matemática de la masa, y determinar cómo tendría que ser la forma matemática de la entropía del estado final del sistema.

Considerando la entropía de un hoyo negro de Schwarzschild (ecuación 4.1), y considerando la aditividad de la masa $m_{12} = m_1 + m_2$, se obtiene la forma matemática de la entropía del hoyo negro resultante S_{12} :

$$S_{12} = 4\pi m_{12}^2 \quad (4.7)$$

$$= 4\pi (m_1 + m_2)^2 \quad (4.8)$$

$$= 4\pi (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2) \quad (4.9)$$

$$= 4\pi m_1^2 + 4\pi m_2^2 + 2(4\pi m_1 m_2) \quad (4.10)$$

$$= 4\pi m_1^2 + 4\pi m_2^2 + 2\sqrt{(4\pi m_1^2)(4\pi m_2^2)} \quad (4.11)$$

$$= S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \quad (4.12)$$

es decir

$$S_{12} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$$

o de forma equivalente

$$(4.13)$$

$$S_{12}^{1/2} = S_1^{1/2} + S_2^{1/2}$$

y esta es la forma matemática de la entropía del estado final que se tomará en este y los demás casos por analizar.

Se considera inicialmente la segunda propuesta, ya que es más prudente decir que la masa es aditiva, por leyes de conservación, al menos en este primer análisis, donde no se considera emisión de radiación durante el colapso termodinámico, que proponer una forma matemática de la entropía, de entre la gran cantidad de formas matemáticas posibles que podría tener la entropía en el estado final.

4.2.2. Colapso termodinámico de dos hoyos negros de Kerr.

En este sistema se tendrán en consideración las siguientes hipótesis:

- *El sistema en el estado inicial, está compuesto por dos hoyos negros de Kerr con entropías S_1 y S_2 , respectivamente. El estado final del sistema es un solo hoyo negro de Kerr con entropía S_{12} .*

- *Durante el proceso, que va del estado inicial al estado final del sistema, no hay emisión de radiación.*

- *Se supondrá válida la forma de la entropía (4.13).*

La entropía de un hoyo negro de Kerr está dada por:

$$S_{Kerr} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A_{Kerr} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} 8\pi \frac{GM}{c^2} \left(\frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{J^2}{M^2 c^2}} \right) \quad (4.14)$$

o en unidades geométricas $m \equiv \frac{GM}{c^2}$, $a \equiv \frac{J}{Mc}$, además de $k_B = \hbar = c = G = 1$:

$$S_{Kerr} = 2\pi m^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \right) \quad (4.15)$$

por lo que la ecuación 4.13, para este caso de Kerr, tiene la forma:

$$m_{12} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{m_{12}^2}} \right)^{1/2} = m_1 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{m_1^2}} \right)^{1/2} + m_2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{m_2^2}} \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

siendo a_{12} y m_{12} el momento angular específico y la masa del hoyo negro de Kerr resultante, respectivamente.

Sean $\varepsilon_{12} \equiv a_{12}/m_{12}$, $\varepsilon_1 \equiv a_1/m_1$ y $\varepsilon_2 \equiv a_2/m_2$, entonces, por la condición de la ecuación 2.28 ($m^2 \geq a^2$) las ε están acotadas por $-1 \leq \varepsilon \leq 1$.

La ecuación 4.16 toma la forma:

$$m_{12} \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon_{12}^2} \right)^{1/2} = m_1 \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \right)^{1/2} + m_2 \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

cuya solución para ε_{12} es:

$$\varepsilon_{12}^2 = 1 - \left[\frac{\left[m_1 \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \right)^{1/2} + m_2 \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \right)^{1/2} \right]^2}{m_{12}^2} - 1 \right] \quad (4.18)$$

Se considerará el caso donde el estado inicial está conformado por dos hoyos negros de Schwarzschild, que corresponde al límite:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_{12} = \sqrt{\frac{-4(m_1 + m_2)^2 \left[-m_{12}^2 + (m_1 + m_2)^2 \right]}{m_{12}^4}} \quad (4.19)$$

entonces, para que tenga solución real, debe ocurrir que

$$-4(m_1 + m_2)^2 \left[-m_{12}^2 + (m_1 + m_2)^2 \right] \geq 0 \quad (4.20)$$

Para que el estado final resultara un Kerr, se requeriría que la masa del estado final fuera no aditiva, más aún, que hubiera algún tipo de pérdida, debido a la ecuación 4.20, ocasionada por pérdidas de energía, situación que estaría fuera de las hipótesis de este caso, pero que va a ser considerada más adelante.

Sin embargo, el límite cuando $a_i \rightarrow 0$, es decir, cuando no hay momento angular en el estado inicial, que se traduce como un sistema de dos hoyos negros de Schwarzschild, tendría que resultar un solo hoyo negro de Schwarzschild, por conservación del momento angular. Esto es, $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_{12} = 0$, por lo tanto:

$$-4(m_1 + m_2)^2 \left[-m_{12}^2 + (m_1 + m_2)^2 \right] = 0 \quad (4.21)$$

o

$$-m_{12}^2 + (m_1 + m_2)^2 = 0 \quad (4.22)$$

finalmente

$$m_{12} = m_1 + m_2 \quad (4.23)$$

Esto es:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_{12} = 0; \quad \text{siempre que } m_{12} = m_1 + m_2 \quad (4.24)$$

lo que se traduce en la siguiente situación: si el estado inicial está compuesto por dos hoyos negros de Schwarzschild entonces el estado final es un solo Schwarzschild, siempre que $m_{12} = m_1 + m_2$.

Otro caso de interés, es el de hoyos negros de Kerr extremales, es decir, cuando el valor del momento angular es el máximo que puede tener para que siga siendo un hoyo negro, esto ocurre cuando los dos horizontes se juntan en uno sólo. Matemáticamente ocurre cuando $a = m$, o en términos de ε , cuando $\varepsilon \rightarrow 1$. En este siguiente caso, el estado inicial está compuesto por dos agujeros negros de Kerr extremales:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 1} \varepsilon_{12} = \sqrt{1 - \left[\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_{12}^2} - 1 \right]^2} \quad (4.25)$$

que es igual a 1 si la masa es aditiva¹, es decir si $m_{12} = m_1 + m_2$, esto es:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 1} \varepsilon_{12} = \sqrt{1 - \left[\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_{12}^2} - 1 \right]^2} = 1; \quad \text{si } m_{12} = m_1 + m_2 \quad (4.26)$$

Esto es, si el estado inicial está compuesto por dos hoyos negros extremos de Kerr, entonces el estado final resulta un hoyo negro extremo de Kerr, siempre que la masa sea aditiva $m_{12} = m_1 + m_2$.

Análisis de la función ε_{12}

Es de interés saber si existe algún valor del momento angular a_i , de alguno de los hoyos negros iniciales, de tal manera que el momento angular a_{12} del horizonte de eventos final tenga valores extremales. En términos de ε , se quiere encontrar algún valor de ε_i , de tal manera que ε_{12} sea extremal.

La figura 4.1 muestra el colapso de un hoyo negro de Schwarzschild y un hoyo negro de Kerr extremo, conforme la masa del Kerr extremo aumenta, el momento angular del hoyo negro resultante tiende a 1, es decir conforme aumenta la masa del hoyo negro de Kerr extremo, el estado final va tendiendo a ser un Kerr extremo. De manera análoga, al considerarse el colapso entre un Schwarzschild y un Kerr extremo (Figura 4.3), cuando aumenta la masa del Schwarzschild, es decir

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \varepsilon_{12} = 0 \quad (4.27)$$

con lo que el hoyo negro resultante tiende a ser un Schwarzschild ($\varepsilon_{12} = 0$).

Cuando ocurre un colapso entre un Schwarzschild y un Kerr arbitrario (figura 4.2), y cuando la masa del Kerr va incrementándose, el momento angular del hoyo negro resultante está dado por:

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \varepsilon_{12}^2 = \varepsilon_2^2 \quad (4.28)$$

¹Si el estado final resultara un Schwarzschild, entonces la masa $m_{12} = \sqrt{2}/2(m_1 + m_2) < m_1 + m_2$, lo que significaría una pérdida de energía, lo cuál violaría las hipótesis de este caso, pero que se analizará más adelante.

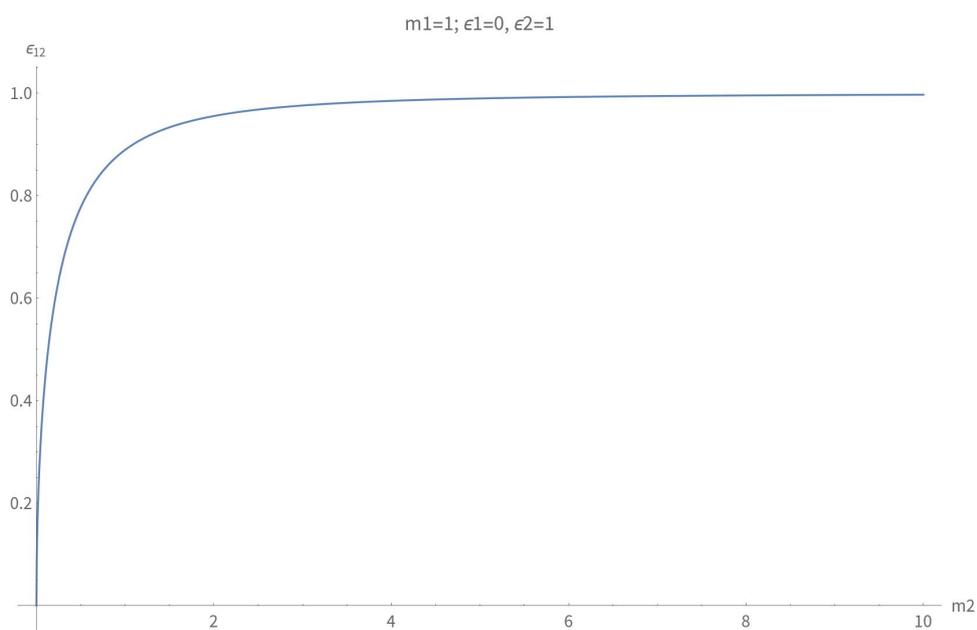


Figura 4.1: El momento angular específico por unidad de masa del hoyo negro resultante ϵ_{12} , en función de la masa del Kerr extremo m_2 , como resultado de un colapso de un Schwarzschild ($\epsilon_1 = 0$) y un Kerr extremo ($\epsilon_2 = 1$). Si la masa del estado inicial m_2 aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento del estado inicial ($\epsilon_2 = 1$). Se considera $m_1 = 1$.

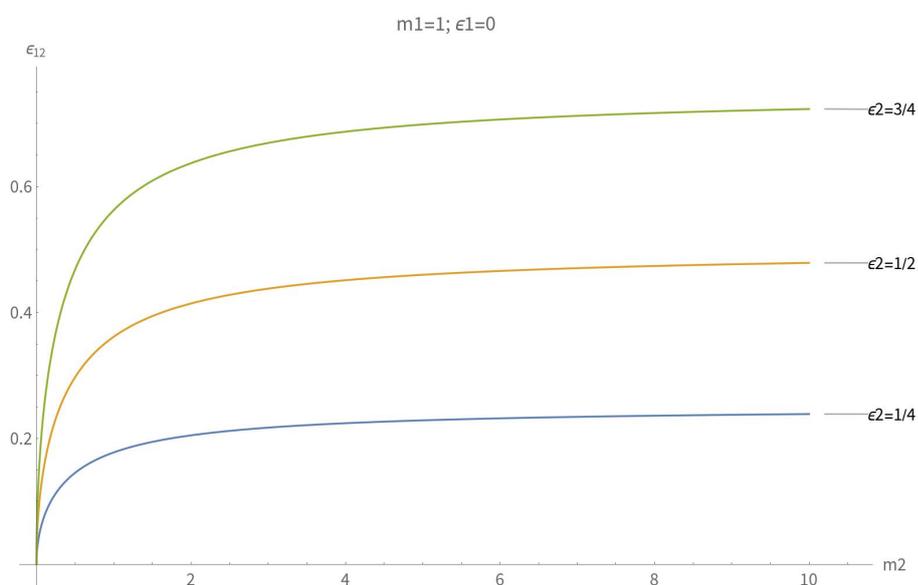


Figura 4.2: El momento angular específico por unidad de masa ϵ_{12} , en un colapso entre un Schwarzschild y un Kerr (no extremo), en función de la masa del Kerr. Conforme la masa del estado inicial (m_2) aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento angular del estado inicial (ϵ_2).

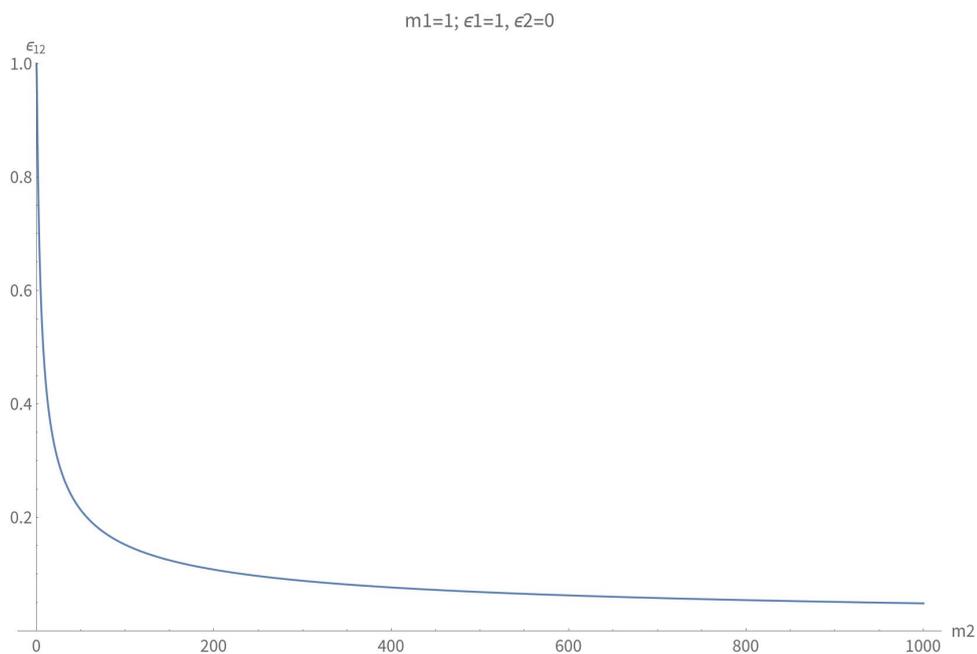


Figura 4.3: El momento angular específico por unidad de masa del hoyo negro resultante ϵ_{12} en función de la masa del Schwarzschild m_2 como resultado de un colapso de un Schwarzschild ($\epsilon_2 = 0$) y un Kerr extremo ($\epsilon_1 = 1$). Si la masa del estado inicial m_2 aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento del estado inicial ($\epsilon_2 = 0$). Se considera $m_1 = 1$.

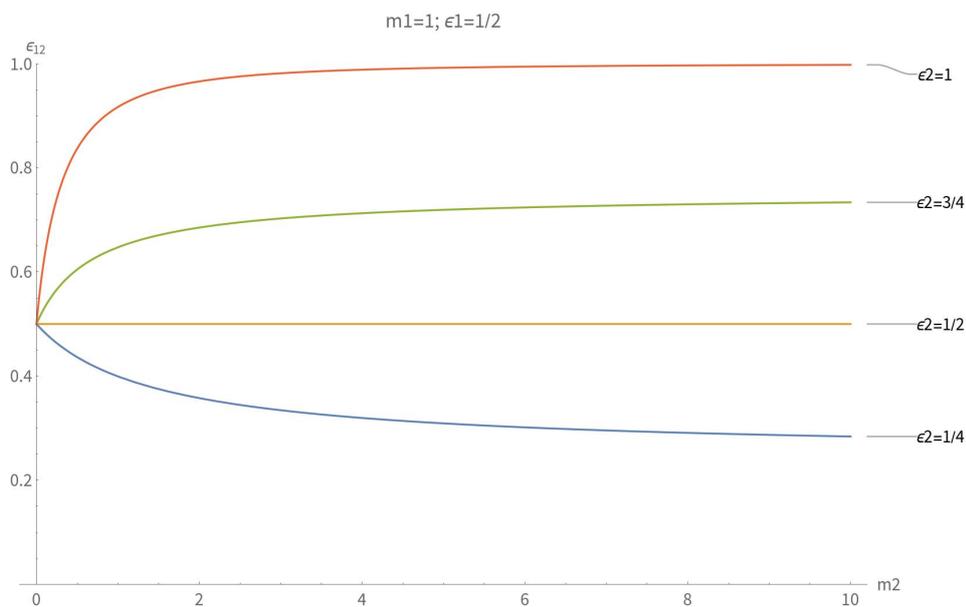


Figura 4.4: Colapso entre dos Kerr arbitrarios. Conforme la masa del estado inicial (m_2) aumenta, el momento angular del estado final tiende al momento angular del estado inicial (ϵ_2). Se considera $m_1 = 1$ y $\epsilon_1 = 1/2$.

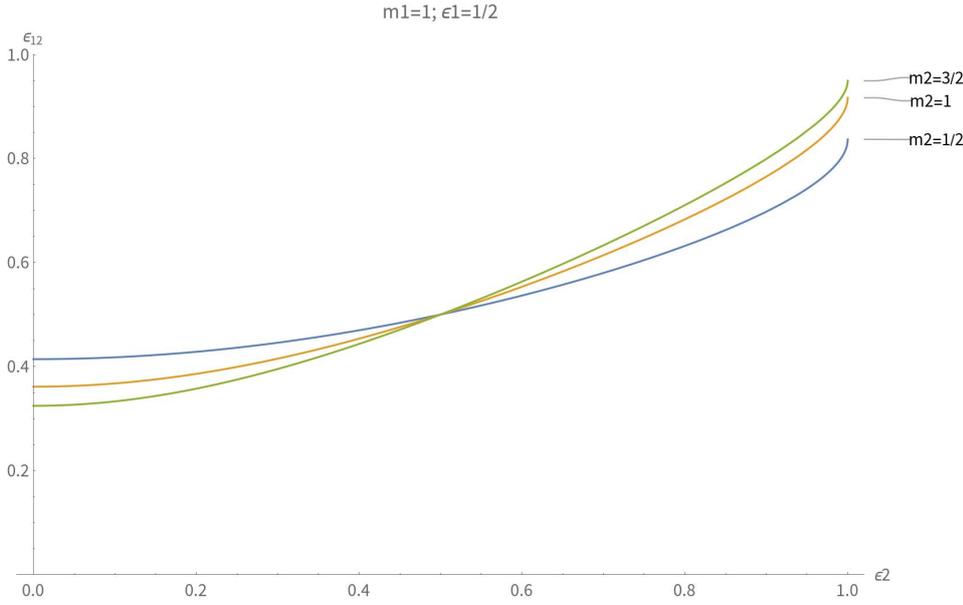


Figura 4.5: Colapso entre dos Kerr arbitrarios, cuyo momento angular está en función del momento angular de uno de los hoyos negros del estado inicial. Se toman los siguientes valores del primer hoyo negro de Kerr: $m_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 1/2$. Los valores máximos del momento angular del estado final (ε_{12}) se da cuando el agujero negro del estado inicial es un Kerr extremal. Los valores mínimos se dan cuando el estado inicial es un Schwarzschild.

es decir, mientras la masa del hoyo negro de Kerr aumenta, el hoyo negro del estado final, tiende a ser un hoyo negro de Kerr del estado inicial ($\varepsilon_{12} \rightarrow \varepsilon_2$).

Ahora bien, cuando hay un colapso entre dos Kerr arbitrarios (figura 4.4), y mientras la masa de uno de los Kerr aumenta, entonces el hoyo negro resultante será²:

$$\lim_{m_i \rightarrow \infty} \varepsilon_{12}^2 = \varepsilon_i^2 \quad (4.29)$$

es decir, cuando la masa del Kerr i aumente, el hoyo negro del estado final tenderá a ser el hoyo negro de Kerr i ($\varepsilon_{12} \rightarrow \varepsilon_i$).

Esto último da consistencia al modelo de la entropía que se está empleando.

Ahora bien, en un colapso entre dos Kerr arbitrarios, se puede observar (figura 4.5), que el valor mínimo del momento angular del estado final ocurre cuando uno de los hoyos negros del estado inicial es un Schwarzschild ($\varepsilon_2 = 0$), mientras que su valor máximo ocurre cuando uno de los hoyos negros del estado inicial es un Kerr extremo ($\varepsilon_2 = 1$). Todos estos cortes intersectan en $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, es decir, independiente del valor de la masa, cuando colapsan dos Kerr idénticos, el Kerr resultante es del mismo tipo que los del estado inicial, siempre y cuando la masa sea aditiva. Previamente se obtuvieron dos casos particulares (los límites 4.24 y 4.26): el colapso de dos Schwarzschild, resulta un Schwarzschild; el colapso de dos Kerr extremos, resulta en un Kerr extremo.

Estos resultados pueden observarse de forma más general en la figura 4.6.

²Por simetría se puede tomar tanto la masa m_1 como m_2 . En la figura 4.4 se tomó la masa m_2 .

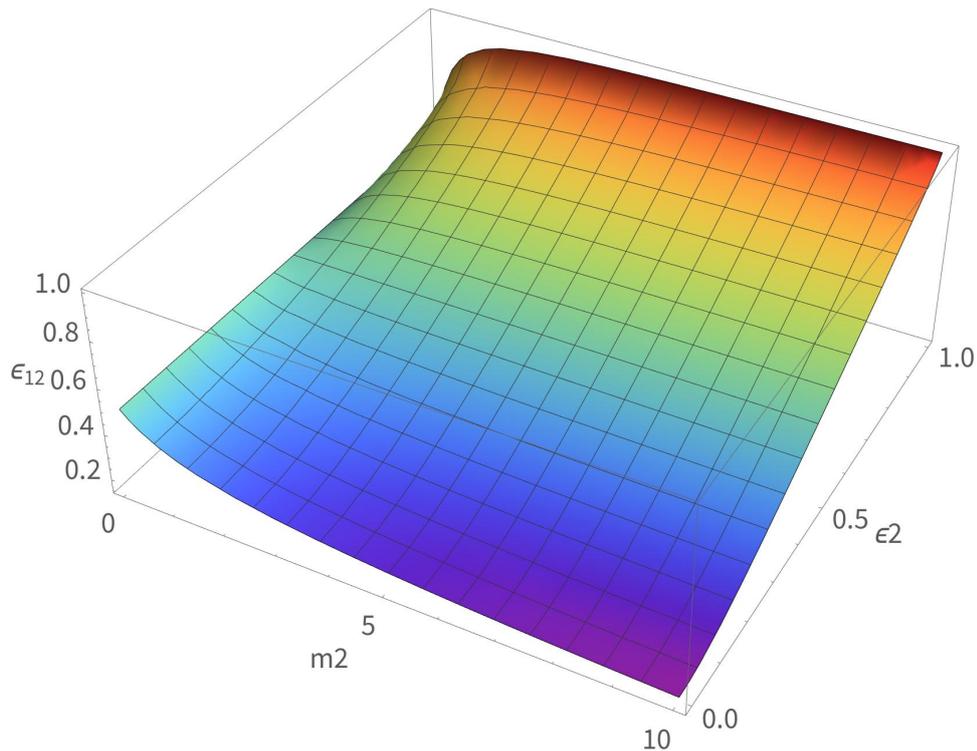


Figura 4.6: El momento angular específico por unidad de masa del hoyo negro del estado final en función de los parámetros de uno de los hoyos negros del estado inicial: $m_1 = 1$ y $\epsilon_1 = 1/2$. El momento angular del estado final va tendiendo al momento angular del estado inicial (ϵ_2) conforme m_2 aumenta.

4.3. Colapso termodinámico con emisión de radiación

En los casos anteriores, no se consideró la emisión de radiación durante el colapso termodinámico, es decir, en el proceso desde el estado inicial hasta el estado final, se había omitido emisión por radiación.

El caso de un sistema de dos hoyos negros de Schwarzschild, considerando radiación, ya ha sido abordado (Siino, 2013). En dicho trabajo, se considera una colisión totalmente frontal de dos hoyos negros ³ de Schwarzschild idénticos (misma masa), y considerando el teorema del área de horizonte de eventos de hoyos negros. La forma matemática del modelo que usan, es $m_1 + m_2 = m_{tot} + E$. Siendo E , la energía emitida en forma de radiación, después del colapso. Llegan a la conclusión de que la emisión de energía, debido a radiación, es menor que 29% de la energía total.

Para el caso de un sistema, cuyo estado inicial está formado por dos hoyos negros de Kerr, teniendo en cuenta radiación, se considera que el sistema en el estado final, ha perdido energía m_{rad} , debido a la radiación.

$$m_{12}^2 = (m_1 + m_2)^2 - m_{rad}^2 \quad (4.30)$$

Considerando el modelo para de la entropía 4.13:

$$S_{12}^{1/2} = S_1^{1/2} + S_2^{1/2} \quad (4.31)$$

³El caso de colisión totalmente frontal ha sido motivo de numerosas investigaciones para bajas y altas energías (Siino, 2013).

o bien:

$$S_{12} = \left(S_1^{1/2} + S_2^{1/2} \right)^2 \quad (4.32)$$

el lado izquierdo de la igualdad, expresado explícitamente como la entropía de Kerr (ecuación 4.15):

$$2\pi m_{12}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2} \right) = \left(S_1^{1/2} + S_2^{1/2} \right)^2 \quad (4.33)$$

y al definirse:

$$A^2 \equiv \frac{1}{2\pi} \left(S_1^{1/2} + S_2^{1/2} \right)^2 \quad (4.34)$$

entonces se tiene:

$$m_{12}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2} \right) = A^2 \quad (4.35)$$

es decir:

$$m_{12}^2 = \frac{A^2}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2}} \quad (4.36)$$

Considerando la ecuación 4.30, se tiene que:

$$(m_1 + m_2)^2 - m_{rad}^2 = \frac{A^2}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2}} \quad (4.37)$$

y despejando m_{rad}^2 :

$$m_{rad}^2 = (m_1 + m_2)^2 - \frac{A^2}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2}} \quad (4.38)$$

Esta función determina la cantidad de radiación perdida durante el colapso termodinámico. Cuando dos hoyos negros de Schwarzschild colapsan, se tiene que:

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} m_{rad}^2 = (m_1 + m_2)^2 \left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2}} \right)$$

y ya que $m_{rad}^2 \geq 0$, entonces:

$$1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2}} \geq 0 \implies \epsilon_{12}^2 \leq 0 \implies \epsilon_{12}^2 = 0$$

Esto es, en un colapso entre dos Schwarzschild, el estado final resulta ser un Schwarzschild, y no hay emisión de radiación, es decir $m_{rad} = 0$.

La ecuación 4.38 puede normalizarse:

$$\frac{m_{rad}^2}{(m_1 + m_2)^2} = 1 - \frac{A^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2})} \quad (4.39)$$

Y cuando la masa del segundo hoyo negro tiende a infinito:

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{m_{rad}^2}{(m_1 + m_2)^2} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{A^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2})} \right) \quad (4.40)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \epsilon_{12}^2} - \sqrt{1 - \epsilon_2^2}}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_{12}^2}} \quad (4.41)$$

de tal manera, que si se trata de un hoyo negro de Kerr extremo ($\epsilon_2 = 1$) y resulta un Kerr extremo ($\epsilon_{12} = 1$), entonces no habrá pérdida por radiación. Esto se debe a que al aumentar su masa, dicho hoyo negro va contrarestando la aportación del otro hoyo negro (ϵ_1) en el colapso, obteniéndose solamente un hoyo negro de Kerr extremo que es básicamente el mismo hoyo del estado inicial que el del estado final. De manera análoga, si se trata de un hoyo negro de Schwarzschild ($\epsilon_2 = 0$), y resulta un Schwarzschild ($\epsilon_{12} = 0$), entonces tampoco habrá pérdida de energía debido a radiación, por la misma razón que el caso anterior.

Cuando se hace un análisis de máximos y mínimos, puede obtenerse que la ecuación 4.38 tiene un único punto extremal, que es $\epsilon_{12} = 0$, es decir cuando el estado final es un agujero negro de Schwarzschild. Al evaluarse en la ecuación 4.39, se obtiene la radiación máxima:

$$\frac{(m_{rad}^{(max)})^2}{(m_1 + m_2)^2} = 1 - \frac{A^2}{2(m_1 + m_2)^2} \quad (4.42)$$

Esto ocurre cuando $\epsilon_{12} = 0$, es decir, cuando el estado final es un Schwarzschild, y esta situación representa la cantidad máxima de radiación que se pierde en el proceso desde el estado inicial hasta el estado final.

En la figura 4.7, se muestra que cuando el estado final resulta ser un Schwarzschild ($\epsilon_{12} = 0$), la emisión de radiación es máxima. Cuando uno de los hoyos negros del estado inicial es un Kerr extremo ($\epsilon_2 = 1$) y el estado final es un Schwarzschild ($\epsilon_{12} = 0$), la emisión de radiación es máxima (zona roja-naranja de la figura 4.8). De la misma figura 4.8, puede observarse que cuando uno de los hoyos negros del estado inicial es un Schwarzschild ($\epsilon_2 = 0$) y el estado final resulta un Schwarzschild ($\epsilon_{12} = 0$), la emisión de radiación es un máximo local, de tal manera que cuando los dos hoyos negros del estado inicial son Schwarzschild, ese máximo local es cero, como se observa más claramente en la figura 4.7, donde el máximo local ($\epsilon_{12} = 0$) va acercándose al valor cero conforme ϵ_2 va tendiendo a cero.

Cuando se considera el estado inicial conformado por dos hoyos negros de Kerr idénticos, es decir, misma masa y mismo momento angular, se tiene que $S_1 = S_2$, y dada la definición 4.34, se obtiene que:

$$A^2 = \frac{2}{\pi} S_1 \quad (4.43)$$

Ya que la entropía de un hoyo negro de Kerr está dada por 4.15, es decir $S_1 = 2\pi m_1^2 (1 + \sqrt{1 - \epsilon_1^2})$, entonces:

$$A^2 = \frac{2}{\pi} 2\pi m_1^2 \left(1 + \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \right) = 4m_1^2 \left(1 + \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \right) \quad (4.44)$$

con lo que la energía de radiación máxima, por masa total, al cuadrado (4.42), es:

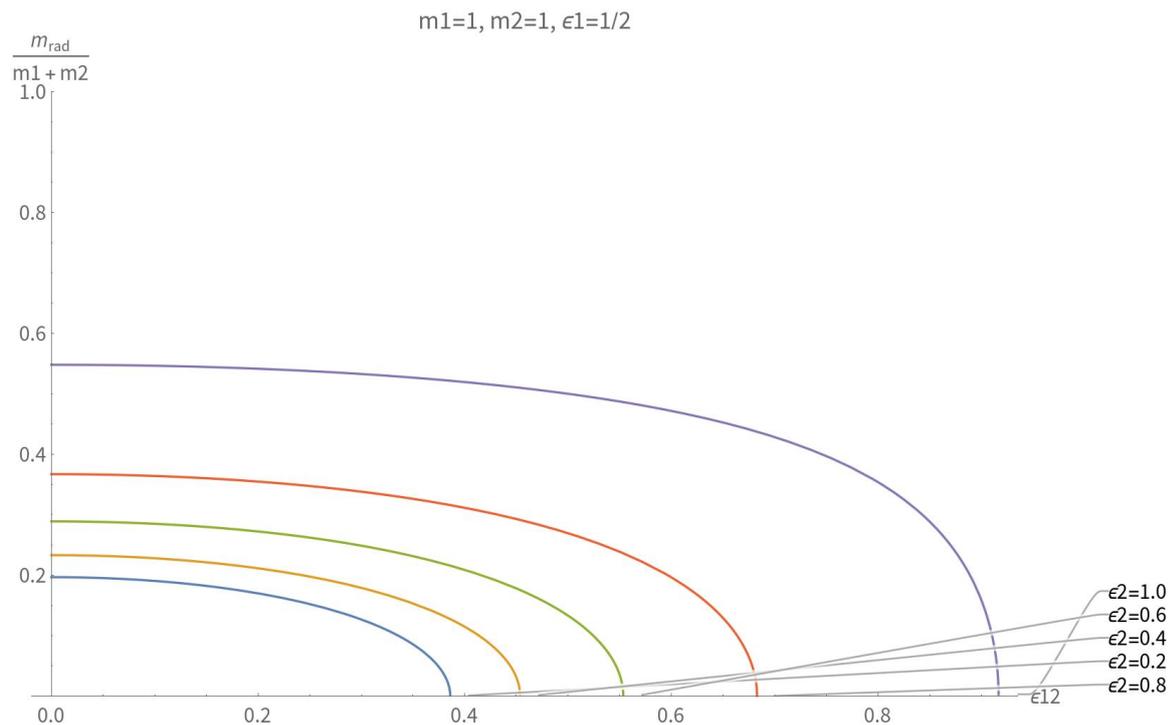


Figura 4.7: Emisión de radiación por unidad de masa durante el colapso de un Kerr ($\epsilon_1 = 1/2$) y otro Kerr arbitrario. La mayor cantidad de radiación ocurre cuando el estado final es un Schwarzschild. Aquí, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $\epsilon_1 = 1/2$.

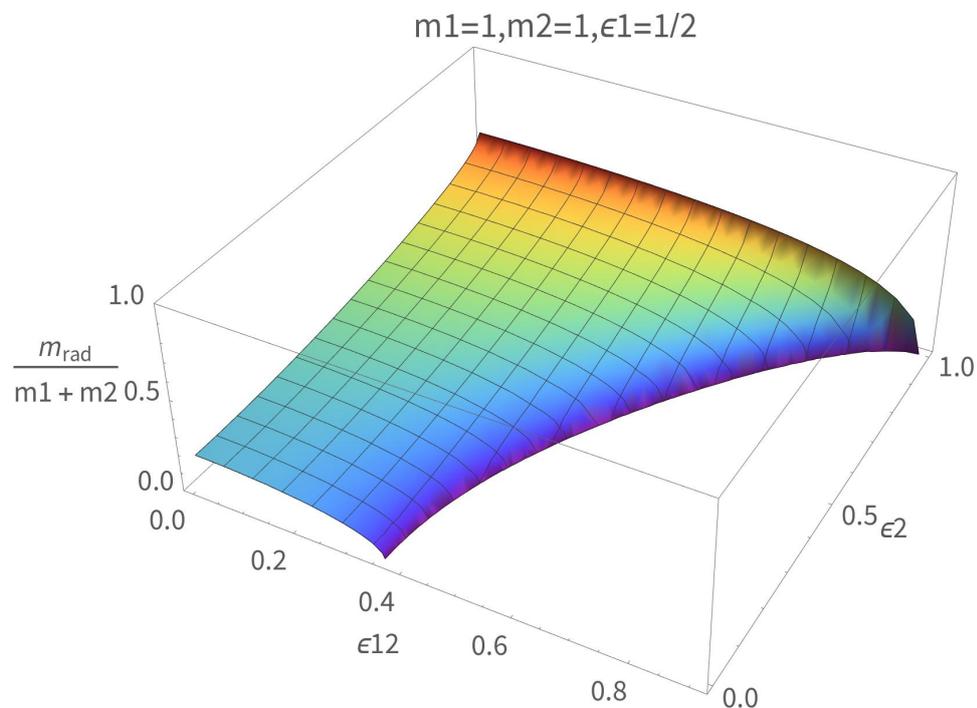


Figura 4.8: Emisión de radiación por unidad de masa durante el colapso de dos Kerr. La máxima pérdida de energía ocurre cuando el estado inicial es un Kerr extremal, y el estado final, un Schwarzschild. Aquí, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $\epsilon_1 = 1/2$.

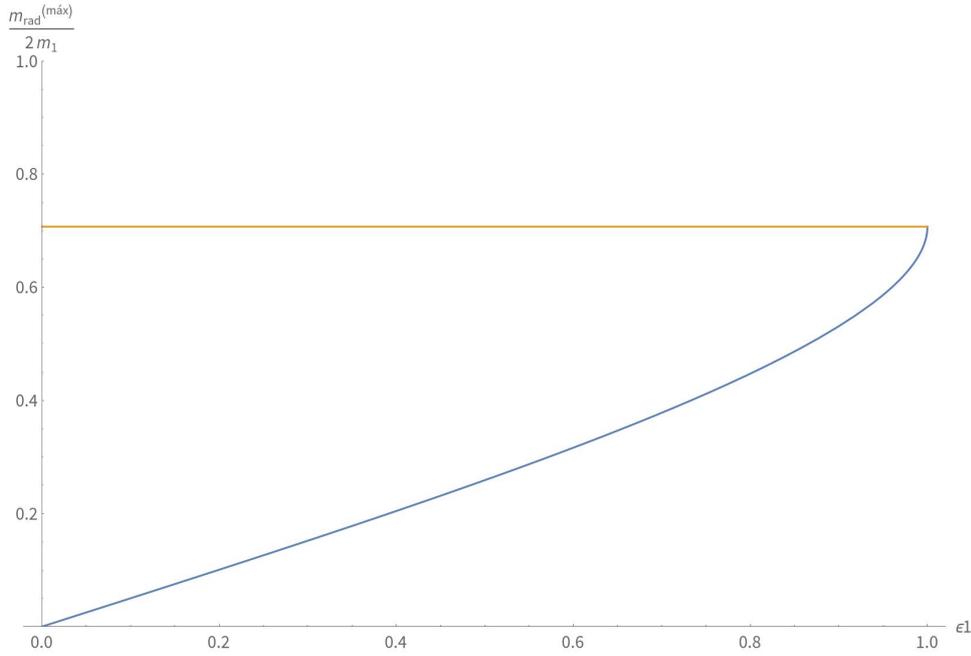


Figura 4.9: Emisión de radiación máxima por unidad de masa durante el colapso de dos hoyos negros idénticos de Kerr. Ecuación 4.46. La cantidad máxima de pérdida de energía (70 %) ocurre cuando el estado inicial son dos Kerr extremos y el estado final es un Schwarzschild.

$$\frac{(m_{rad}^{(max)})^2}{(2m_1)^2} = 1 - \frac{4m_1^2 (1 + \sqrt{1 - \epsilon_1^2})}{2(2m_1)^2} \quad (4.45)$$

$$\implies \frac{(m_{rad}^{(max)})^2}{(2m_1)^2} = 1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \epsilon_1^2})}{2} \quad (4.46)$$

De la ecuación 4.46 se puede ver que cuando $\epsilon_1 = 0$, la radiación máxima por masa total, es 0; mientras que al evaluar en $\epsilon_1 = 1$, la radiación máxima por masa total, es 0.707. Ambas situaciones:

$$0 \leq \frac{m_{rad}^{(max)}(\epsilon_{12} = 0)}{2m_1} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0.707 \quad (4.47)$$

Esto es, existe una cota inferior y una cota superior para la emisión máxima de radiación, una vez colapsados los hoyos negros de Kerr (o de Schwarzschild si $\epsilon_i \rightarrow 0$) del estado inicial. Es decir, la pérdida máxima de energía debido a la emisión de radiación es, al menos 0 % y a lo más 70 %.

En el caso de un colapso de dos Schwarzschild con misma masa ($\epsilon_i \rightarrow 0$), y cuyo resultado es un Schwarzschild ($\epsilon_{12} = 0$), se tiene que $m_{rad}^{(max)} = 0$, es decir, no hay pérdidas de energía debido a radiación, como ya se sabía previamente.

Cuando colapsan dos Kerr extremos ($\epsilon_i = 1$), y cuyo resultado es un Schwarzschild ($\epsilon_{12} = 0$), entonces se da el caso de emisión máxima de radiación, que es del 70 %.

Estos casos extremos, y los casos intermedios, se pueden observar en la figura 4.9.

Capítulo 5

Conclusiones.

Desde la introducción de los hoyos negros en las ecuaciones de la física, estos se han estudiado con distintos análisis, y empleando herramientas matemáticas cada vez más sofisticadas para tener, de esta manera, un mejor entendimiento de lo que ocurre con estos objetos físicos.

Los resultados obtenidos en este trabajo, no han requerido de un aparato matemático de gran envergadura, sin embargo, los resultados mismos son de interés para vislumbrar lo que, bajo las condiciones indicadas, ocurre en un sistema de hoyos negros, analizados desde el enfoque de la termodinámica de hoyos negros. A este proceso le hemos llamado colapso termodinámico, y consiste esencialmente, en el colapso gravitacional de hoyos negros en un estado inicial, y cuya unión resulta en un solo hoyo negro, considerado como estado final.

Cabe destacar que los todos los resultados obtenidos en este análisis, son independientes de la configuración del sistema en cuestión, es decir, la manera en que colisionan los hoyos negros, es irrelevante en la obtención de los resultados. Estos resultados son los mismos para colisiones totalmente de frente, colisiones debido a desviaciones gravitacionales y su consecuente colapso, o cualquier otra forma en que pudieran colisionar.

A partir de un sistema de hoyos negros de Schwarzschild, se obtuvo la forma matemática de la entropía del sistema a estudiar, con la suposición de la aditividad de la masa y sin pérdidas de energía durante el colapso. La misma forma de la entropía se utilizó para extender el análisis a otros casos más complejos, como un sistema de dos hoyos negros de Kerr, y un sistema de dos hoyos negros de Kerr con emisión de radiación. Para un sistema de hoyos negros de Kerr, se obtuvo una expresión de la pérdida de energía debido a la radiación emitida. También se obtuvo una expresión donde se indicaba la cantidad máxima de energía disipada, debido a la radiación.

Los resultados más importantes, en el caso de dos hoyos negros de Kerr sin pérdidas por radiación, son los siguientes:

- En un colapso de dos hoyos negros de Kerr extremos, el único resultado posible, es un Kerr extremo.
- Si colapsa un hoyo negro de Kerr extremo y uno no extremo, el momento angular del hoyo negro en el estado final, tiene un valor máximo.
- El momento angular del hoyo negro del estado final, tiene su mínimo valor cuando colapsa un Kerr no extremo y un Schwarzschild.

En un colapso cuando se considera pérdida de energía debido a radiación, los resultados más importantes son:

- Si colapsan dos hoyos negros de Kerr extremos, y el hoyo negro del estado final es un Schwarzschild, entonces la emisión de radiación es máxima e igual a 70 %.
- Si colapsan dos hoyos negros de Schwarzschild, y el estado final es otro Schwarzschild, no hay emisión de radiación.
- Si colapsan dos hoyos negros de Kerr arbitrarios, la emisión de radiación es máxima cuando el hoyo negro del estado final es un Schwarzschild. Dicha radiación está comprendida entre 0 % y 70 %.

Para finalizar, es posible que lo hecho en este trabajo pueda dar lugar a un análisis de lo que ocurre durante el proceso del estado inicial al estado final desde la perspectiva aquí planteada. También podría modificarse el caso aquí tratado y hacerlo cada vez menos idealizado y así, aproximarse a una situación más precisa. Otra posible manera de abordar el problema es, estableciendo la forma matemática de la entropía, ver cómo se vería la masa y a partir de eso hacer análisis como los realizados aquí. Podría considerarse también, como un estudio más completo, la entropía de la radiación involucrada.

Capítulo 6

Apéndice

Equilibrio termodinámico.

Un importante concepto dentro de la termodinámica de laboratorio, es el de equilibrio termodinámico, que son estados donde los parámetros intensivos permanecen constantes. En este apartado, se intentará definir un estado en equilibrio para el caso de un hoyo negro.

Las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Einstein se pueden asociar a un fenómeno termodinámico en sí, ya que las variables termodinámicas sobrevivientes son variables independientes del tiempo, cuyos candidatos más viables son magnitudes que satisfacen leyes de conservación (Callen, 1985), en este caso de hoyos negros, los parámetros masa, momento angular y carga eléctrica.

Una manera de determinar matemáticamente el equilibrio térmico, análogo a la termodinámica de laboratorio, es procediendo como en la termodinámica no extensiva de Tsallis (Abe and Martínez, 2001).

Cuando se tiene la situación donde no hay emisión de radiación durante el colapso termodinámico, entonces la masa es aditiva:

$$m_{12} = m_1 + m_2 \quad (6.1)$$

Dada la entropía 4.13, se tiene que:

$$0 = \frac{1}{2} S_{12}^{-1/2} dS_{12} = \frac{1}{2} S_1^{-1/2} \frac{\partial S_1}{\partial m_1} dm_1 + \frac{1}{2} S_1^{-1/2} \frac{\partial S_2}{\partial m_2} dm_2 \quad (6.2)$$

es decir:

$$0 = S_1^{-1/2} \frac{\partial S_1}{\partial m_1} dm_1 + S_1^{-1/2} \frac{\partial S_2}{\partial m_2} dm_2 \quad (6.3)$$

ya que el equilibrio térmico está caracterizado por la maximización de la entropía total cuando la energía interna total está fija. Esto último corresponde a que:

$$0 = dm_1 + dm_2 \quad (6.4)$$

con lo que:

$$S_1^{-1/2} \frac{\partial S_1}{\partial m_1} = S_1^{-1/2} \frac{\partial S_2}{\partial m_2} \quad (6.5)$$

y debido a que $\partial S/\partial m = 1/T$, y $T = \kappa/2\pi$, se llega a una situación que podría corresponder al equilibrio térmico de hoyos negros:

$$\kappa_1^2 S_1 = \kappa_2^2 S_2 \quad (6.6)$$

donde κ_i es la gravedad superficial del hoyo negro i .

Con las otras variables, según el teorema de no pelo, y considerando que:

$$\frac{\partial S}{\partial J} = -\frac{2\pi\omega}{\kappa} \quad (6.7)$$

y

$$\frac{\partial S}{\partial q} = -\frac{2\pi\phi}{\kappa} \quad (6.8)$$

entonces:

$$\frac{\omega_1^2}{\kappa_1^2 S_1} = \frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2 S_2} \quad (6.9)$$

y

$$\frac{\phi_1^2}{\kappa_1^2 S_1} = \frac{\phi_2^2}{\kappa_2^2 S_2} \quad (6.10)$$

Ahora, para que existan estos equilibrios desde el punto de vista físico, la única posibilidad de que la gravedad superficial y al mismo tiempo sus entropías sean iguales (6.6); que las velocidades angulares, la gravedad superficial y a la vez las entropías sean iguales (6.9); que los potenciales eléctricos, la gravedad superficial a la vez que sus entropías sean idénticas (6.10), es que el estado de equilibrio sea un sólo hoyo negro con una sola gravedad superficial, una velocidad angular, un potencial eléctrico y una sola entropía. Si se considera esto, entonces un **estado en equilibrio** es un solo hoyo negro, con lo que, un **proceso cuasiestático**, visto como una sucesión de estados en equilibrio, en este contexto, son hoyos negros individuales como resultado de colapsos sucesivos de hoyos negros por pares.

Cabe aclarar que, al ser un caso muy idealizado, donde no hay radiación durante el colapso gravitacional de hoyos negros, es decir, la condición 6.1, entonces las situaciones de equilibrio 6.6, 6.9 y 6.10 son válidas solamente dentro de esta idealización.

Bibliografía

- Abe, S. and Martínez, S. (2001). Nonextensive thermodynamic relations. *Physics Letters A*.
- Alvarez, J. L., Quevedo, H., and Sanchez, A. (2008). Unified geometric description of black hole thermodynamics. *Physical Review D*, 77(8).
- Asimov, I. (1978). *How did we find out about black holes*. Wlaker and Company.
- Bardeen, J. M., Carter, B., and Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31(2):161–170.
- Bernal, J. D. (1992). *La ciencia en nuestro tiempo*. Editorial Patria.
- Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. John Wiley and sons, 2 edition.
- Carmeli, M. (1977). *Group theory and general relativity. Representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field*. McGraw-Hill Inc.
- D’Inverno, R. (1998). *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press.
- Gutfreund, H. (2017). *Formative years of relativity. The history and meaning of Einstein’s Princeton Lectures*. Princeton University Press.
- Hawking, S. and Penrose, R. (1996). *The nature of space and time*. Princeton University Press.
- Heusler, M. (1996). *Black hole uniqueness theorems*. Cambridge University Press.
- L. D. Landau, E. M. L. (1992). *Teoría clásica de los campos*. Reverté.
- Lebedev, L. P. (2003). *Tensor Analysis*. World Scientific Publishing.
- O’Neil, B. (1995). *The Geometry of Kerr Black Holes*. AK Peters Ltd.
- Raine, D. T. (2010). *Black Holes: an introduction*. Imperial College Press, 2 edition.
- Siino, M. (2013). Head-on collision and merging entropy of black holes: Reconsideration of hawking’s inequality. *International Journal of Modern Physics D*, 22(07):1313.
- Smarr, L. (1973). Mass formula for kerr black holes. *Physical Review Letters*, 30(2):71–73.
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press.
- Weingard, R. (1979). Some philosophical aspects of black holes. *Synthese*, 42(1):191–219.