UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

INFLACIÓN ETERNA Y TEORÍAS DE COLAPSO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA
ROSA LAURA LECHUGA SOLIS

TUTOR PRINCIPAL
DR. DANIEL EDUARDO SUDARSKY SAIONZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. YURI BONDER GRIMBERG
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. ELIAS OKON GURVICH
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2020

RESUMEN:

El objetivo de esta tesis es explorar las implicaciones en el problema de inflación eterna basados en el contexto de tratamientos de Gravedad Semiclásica y Teorías de Colapso aplicados a la cosmología inflacionaria. Comenzamos describiendo la teoría estándar de la Mecánica Cuántica a través de sus postulados, más adelante mediante un teorema de lógica presentamos aspectos inconsistentes en esta teoría. Después se menciona una propuesta para tratar de resolver el problema de la medición, se presentan las Teorías de Colapso con localización espontánea y continua. Dado que uno de los objetivo de este trabajo es resaltar la importancia de considerar aspectos interpretativos de la mecánica cuántica en el contexto cosmológico se presenta un capítulo del estudio del modelo cosmológico estándar, en el cual se ahonda en el tema de inflación y se procede al estudio del problema de la inflación eterna. En el capítulo siguiente se presenta el enfoque mediante el cual se enfrenta al problema de la inflación eterna en esta tesis, comenzamos haciendo una crítica a lo propuesto en el tratamiento estándar, más adelante citamos otros trabajos que se han hecho usando Gravedad Semiclásica y Teorías de Colapso, finalmente se presenta una propuesta y se muestra que es prometedora para dar solución al problema de inflación eterna.

Índice general

Capítulo 1

Dificultades conceptuales de la mecánica cuántica

1.1. Mecánica cuántica estándar

En este capítulo se dará un breve repaso de la mecánica cuántica estándar, después se revisarán los problemas que ésta enfrenta actualmente, finalmente se analizarán las teorías de colapso, que surgen como propuesta para resolver el llamado problema de la medición.

1.1.1. Postulados de la Mecánica Cuántica

La estructura matemática y axiomática de la mecánica cuántica estándar se puede escribir a través de los siguientes postulados [1] :

1 **Espacio de Hilbert** Cada sistema físico S está asociado con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, los estados físicos de S son representados por medio de vectores normalizados conocidos como vectores de estado, $|\psi\rangle$ de $\mathcal{H}$. Por otro lado, los observables físicos son representados por medio de operadores autoadjuntos O en $\mathcal{H}$ y al hacer una medición de estos, los posibles resultados estarán dados por sus eigenvalores correspondientes,

$$O\,|o_n\rangle = o_n\,|o_n\rangle\,, \tag{1.1}$$

suponemos por simplicidad que el espectro de O es discreto y no degenerado.

2 **Ecuación de Schrödinger** Para determinar el estado del sistema, $|\psi(t_0)\rangle$ de S, a un tiempo inicial t_0, un conjunto completo de observables que conmutan en S es medido. Entonces, una vez preparado el sistema, S, el vector de estado inicial es el único eigenestado común de tales observables y su evolución temporal quedará determinada por medio de la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \, |\psi(t)\rangle = H \, |\psi(t)\rangle \,, \tag{1.2}$$

esta ecuación se caracteriza por ser lineal y determinista, por ende nos dice cual es el estado del sistema a cualquier tiempo t (una vez que se ha preparado el sistema) si se conoce $|\psi(t_0)\rangle$, siendo H el operador hamiltoniano del sistema.

3 **Probabilidad** La probabilidad de obtener, en una medición de O al tiempo t, el resultado o_n está dada por

$$P[o_n] = |\, \langle o_n| \, |\psi(t)\rangle \,|^2, \tag{1.3}$$

donde $|\psi(t)\rangle$ es el estado de S y t el tiempo en el que se realizó la medición.

4 **Colapso** El efecto de una medición en el sistema S provoca un cambio drástico en el vector de estado, esto es, de $|\psi\rangle$ a $|o_n\rangle$. De manera esquemática se puede leer mediante:

$$|\psi(t)\rangle \quad \rightarrow \quad \text{Medición} \quad \rightarrow \quad |o_n\rangle \,. \tag{1.4}$$

Podemos notar que en esta teoría se tienen dos postulados de evolución, el postulado del colapso y el de la ecuación de Schrödinger, con características matemáticas distintas. Procedemos a revisar las implicaciones que esto tiene.

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial parcial lineal y como es sabido basta dar condiciones iniciales para que su solución quede totalmente determinada. Esta característica matemática implica que la evolución de un sistema gobernado por dicha ecuación será determinista. La solución a (1.2) se escribe como:

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle\,, \tag{1.5}$$

$$U(t,t_0) = \exp -\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}, \tag{1.6}$$

siendo $U(t,t_0)$ el operador de evolución (para el caso en que H es independiente de t) el cual es un operador unitario, característica necesaria para que los vectores de estado preserven la normal y por ende se pueda hacer una teoría probabilística como se indica en el tercer postulado.

Como ya se comentó, otro aspecto relevante en esta ecuación es la linealidad, lo cual significa que si $|\psi(t_1)\rangle$ y $|\psi(t_2)\rangle$ son soluciones de (1.2) también lo será $\alpha\,|\psi(t_1)\rangle + \beta\,|\psi(t_2)\rangle$, siendo α y β números complejos cuya única restricción es que preserven la normalización. El postulado del colapso describe una evolución no lineal del vector de estado pues al hacer una medición sobre el sistema, S, este colapsa de un estado: $\alpha\,|\psi_1(t)\rangle + \beta\,|\psi_2(t)\rangle$, a un estado partícular $|\psi_1(t)\rangle$ o $|\psi_2(t)\rangle$ con probabilidad $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ respectivamente.

Notamos que los dos postulados de evolución son de "naturaleza" distinta, lo cual no sería un conflicto en la teoría si se especificara en qué situaciones empleamos uno o el otro. Sin embargo, notamos que no existe un postulado o indicación en la teoría que nos guíe sobre las situaciones en que podemos hacer uso de la ecuación de Schrödinger o del postulado de colapso.

1.1.2. Matríz de densiad

En el formalismo de la mecánica cuántica descrito previamente se da por hecho que se tiene un sistema que está bien determinado por un vector de estado; $|\psi\rangle$ o bien que se tiene un conjunto de subsistemas (que forman un sistema) descritos por el mismo vector de estado, cuando estemos en alguna de estas dos situaciones diremos que se tiene un estado puro. El operador de densidad para un estado puro se describe como de la siguiente manera:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \,, \tag{1.7}$$

si se expresa a $|\psi\rangle$ como una superposición de estados de una base $\{|\psi_i\rangle\}$,

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle \,, \tag{1.8}$$

con lo cual ρ se escribe como:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{ij} c_i c_j^* |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \,. \tag{1.9}$$

Sin embargo es muy importante saber describir un caso más general, el que describe a un sistema compuesto de subsistemas que no poseen el mismo el mismo estado. En este caso cada estado está etiquetado por $|\psi_i\rangle$ y la población relativa de cada uno de ellos estará dada por p_i. A esta clase de sistemas se le suele denotar mezcla mixta o estado mixto. Es importante notar que las poblaciones relativas p_i, deben satisfacer,

$$\sum_i p_i = 1, \tag{1.10}$$

donde estos p_i son números reales y representan un peso estadístico. Entonces, el operador de densidad se puede definir matemáticamente mediante,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi\rangle \langle\psi| \,, \tag{1.11}$$

siendo ρ es un operador hermitiano que remplaza al vector de estado, es decir toda la información del sistema a la cual podemos acceder está descrita por este operador, que cumple con la siguiente propiedad:

$$Tr(\rho) = 1. \tag{1.12}$$

Para el caso de un estado puro, tendremos en (1.10) únicamente $i = 1$ y por ende $p_1 = 1$, dando como resultado que ρ se escriba simplemente como un proyector: $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$.

Ahora que hemos escrito en este lenguaje la teoría podemos clasificar a los estados en puros y mixtos de acuerdo a las siguientes definiciones. Para estados puros se tiene la condición:

$$\rho^2 = \rho, \tag{1.13}$$

mientras que para un estado mezcla,

$$\rho^2 \neq \rho, \tag{1.14}$$

o siendo más precisos $\rho^2 < 1$.

1.1.3. Mezclas propias e impropias

Mezcla propia

Podemos definir una mezcla propia como un sistema cuyos subsistemas poseen un estado bien definido. Por ejemplo, si se tiene un conjunto de 5 partículas con espín bien definido en z:

$$|+\rangle^{(1)}, |-\rangle^{(2)}, |-\rangle^{(3)}, |+\rangle^{(4)}, |-\rangle^{(5)}, \tag{1.15}$$

el estado que caracteriza a esta mezcla se puede representar de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = |+\rangle^{(1)} \otimes |-\rangle^{(2)} \otimes |-\rangle^{(3)} \otimes |+\rangle^{(4)} \otimes |-\rangle^{(5)}, \tag{1.16}$$

mientras que su matriz de densidad se escribe como:

$$\begin{aligned}
\rho_\psi &= |\psi\rangle\langle\psi| \\
&= \{|+\rangle^{(1)} \otimes |-\rangle^{(2)} \otimes |-\rangle^{(3)} \otimes |+\rangle^{(4)} \otimes |-\rangle^{(5)}\} \\
&\times \{\langle+|^{(1)} \otimes \langle-|^{(2)} \otimes \langle-|^{(3)} \otimes \langle+|^{(4)} \otimes \langle-|^{(5)}\}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Con la finalidad de ver cual de las dos condiciones: (1.13) o (1.14) se satisface, calculamos ρ_ψ^2,

$$\begin{aligned}
\rho_\psi^2 &= |\psi\rangle\langle\psi|\,|\psi\rangle\langle\psi| \\
&= \{|+\rangle^{(1)} \otimes |-\rangle^{(2)} \otimes |-\rangle^{(3)} \otimes |+\rangle^{(4)} \otimes |-\rangle^{(5)}\} \\
&\times \{\langle+|^{(1)} \otimes \langle-|^{(2)} \otimes \langle-|^{(3)} \otimes \langle+|^{(4)} \otimes \langle-|^{(5)}\} \\
&= \rho_\psi,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

lo que indica que se satisface (1.13). Es decir, se trata de un estado puro.

Si ahora, en lugar de considerar a las 5 partículas simultáneamente consideramos el ensamble [1] de una partícula eligiendo una al azar, $2/5$ partes estarán en el estado $|+\rangle$ y $3/5$ en $|-\rangle$, de esta manera escribimos la matriz de densidad estadísitica como:

$$\rho_{estat} = \frac{2}{5} |+\rangle \langle +| + \frac{3}{5} |-\rangle \langle -| \,. \tag{1.19}$$

Al calcular ρ^2_{estat}, encontramos que,

$$\begin{aligned} \rho^2_{estat} &= \left[\frac{2}{5} |+\rangle \langle +| + \frac{3}{5} |-\rangle \langle -| \right] \\ &\times \left[\frac{2}{5} |+\rangle \langle +| + \frac{3}{5} |-\rangle \langle -| \right] \\ &= \left(\frac{2}{5} \right)^2 |+\rangle \langle +| + \left(\frac{3}{5} \right)^2 |-\rangle \langle -| \,, \end{aligned} \tag{1.20}$$

notamos que en este caso $\rho^2_{estat} \neq \rho_{estat}$, es decir, ya no representa un estado puro. Es importante resaltar que la matriz de densidad probabilística o en términos de ensamble no debe considerarse de manera equivalente al de un conjunto de partículas que están representadas en ρ_ψ de manera simultánea.

Mezcla impropia

Una mezcla impropia se puede definir como un sistema con un estado bien definido mientras que sus subsistemas no lo tienen, tal es el caso de un sistema con dos partículas representado a través del singulete:

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |+\rangle^{(1)} |-\rangle^{(2)} - \sqrt{\frac{2}{5}} |-\rangle^{(1)} |+\rangle^{(2)} \,. \tag{1.21}$$

[1] Un ensamble puede pensarse como una colección de posibles resultados al realizar un experimento, cada uno de los cuales tendrá su propio peso.

La matriz de densidad del sistema se escribe como

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= |\phi\rangle\langle\phi| \\ &= \{\sqrt{\frac{3}{5}}\,|+\rangle^{(1)}\,|-\rangle^{(2)} - \sqrt{\frac{2}{5}}\,|-\rangle^{(1)}\,|+\rangle^{(2)}\} \\ &\times \{\sqrt{\frac{3}{5}}\,\langle+|^{(1)}\,\langle-|^{(2)} - \sqrt{\frac{2}{5}}\,\langle-|^{(1)}\,\langle+|^{(2)}\}.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Si calculamos ρ_ϕ^2 encontramos que ,

$$\begin{aligned}\rho_\phi^2 =&\{\sqrt{\frac{3}{5}}\,|+\rangle^{(1)}\,|-\rangle^{(2)} - \sqrt{\frac{2}{5}}\,|-\rangle^{(1)}\,|+\rangle^{(2)}\} \\ &\times \{\sqrt{\frac{3}{5}}\,\langle+|^{(1)}\,\langle-|^{(2)} - \sqrt{\frac{2}{5}}\,\langle-|^{(1)}\,\langle+|^{(2)}\} \\ &= \rho_\phi,\end{aligned} \tag{1.23}$$

es decir, cumple la condición de un estado puro.
Revisamos que ocurre si calculamos la traza sobre la partícula 1, con la finalidad de ignorar los grados de libertad correspondientes a 1. De esta manera obtendremos $\rho_\phi^{red(2)}$, dado por

$$\rho_\phi^{red(2)} = \frac{3}{5}\,|-\rangle^{(2)}\,\langle-|^{(2)} + \frac{2}{5}\,|+\rangle^{(2)}\,\langle+|^{(2)}, \tag{1.24}$$

mientras que,

$$(\rho_\phi^{red(2)})^2 = \frac{9}{25}\,|-\rangle^{(2)}\,\langle-|^{(2)} + \frac{4}{25}\,|+\rangle^{(2)}\,\langle+|^{(2)}, \tag{1.25}$$

notando así que ya no tenemos un estado puro. Si ahora trazamos sobre la partícula 2 tenemos la siguiente matriz de densidad reducida:

$$\rho_\phi^{red(1)} = \frac{3}{5}\,|+\rangle^{(1)}\,\langle+|^{(1)} + \frac{2}{5}\,|-\rangle^{(1)}\,\langle-|^{(1)}, \tag{1.26}$$

la cual tampoco representa un estado puro pues,

$$(\rho_\phi^{red(1)})^2 = \frac{9}{25}\,|+\rangle^{(1)}\,\langle+|^{(1)} + \frac{4}{25}\,|-\rangle^{(1)}\,\langle-|^{(1)}, \tag{1.27}$$

y no se cumple (1.13).

Es importante señalar que, a pesar de parecer idénticas las ecuaciones (1.19) y (1.26) existe una gran diferencia ya que (1.19) describe una situación estadística que se ha escrito en términos de ensambles mientras que la segunda, (1.26), solo describe un sistema en el cual se han ignorado grados de libertad pero no tiene un carácter estadístico. También es importante resaltar que si solo se tuviese un estado como (1.26), sin especificar que representa, carecía de sentido total.

1.1.4. Postulados de la Mecánica Cuántica en términos del operador de densidad

A continuación se enuncian los postulados de la mecánica cuántica a través del formalismo de operador estadísitico.

Espacios de Hilbert Cada sístema físico S está asociado con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, los estados físicos de S son representados por medio de vectores normalizados conocidos como vectores de estado, $|\psi\rangle$ de $\mathcal{H}$, en este caso toda la información del sistema está contenida en ρ, los observables siguen siendo representados por operadores autoadjuntos.

Ecuación de von Neumann Se estudia la evolución de ρ, cuya ecuación de evolución es:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho(t) = [H, \rho(t)], \tag{1.28}$$

donde H es el hamiltoniano del sistema. A esta ecuación se le conoce como ecuación de von Neumann. Al igual que la ecuación de Schrödinger, esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden en t y por consiguiente bastará con dar condiciones iniciales, $\rho(t_0)$, para conocer su solución en todo t, es decir esta ecuación de evolución es determinista.

Probabilidad Al hacer una medición del observable O sobre el sistema S la probabilidad de obtener o_n de todos sus posibles eigenvalores se escribe como

$$\langle O\rangle = Tr(\rho O), \tag{1.29}$$

haciendo uso del teorema espectral, $O = \sum_i a_i \left|a_i\right\rangle \left\langle a_i\right|$ y que $P_i = \left|a_i\right\rangle \left\langle a_i\right|$ podemos escribir

$$P[o_n] = Tr[P_n \rho]. \tag{1.30}$$

Colapso Ahora bien, cuando se realiza una medición y se ha obtiene como resultado el eigenvalor o_n, el operador estadístico experimenta el siguiente cambio:

$$\rho \quad \to \quad \text{Medición} \quad \to \quad \frac{P_n \rho P_n}{Tr[P_n \rho P_n]}, \tag{1.31}$$

que es la expresión equivalente a (1.4) del postulado del colapso.

1.2. El problema de la medición

1.2.1. Tres postulados incompatibles en el problema de la medición

Como se ha dado a conocer en lo anterior, la mecánica cuántica estándar tiene problemas en su construcción, como un intento para solucionarlos se han desarrollado diversas teorías. Sin embargo es de gran importancia saber qué información vamos a preservar de la formulación estándar y cuales son las consecuencias de modificar o quitar ciertos postulados, así como también mantener una estructura lógica, es decir, que sus postulados no se contradigan entre sí, para ello es útil analizar el resultado que enuncia Tim Maudlin en [2], donde se demuestra que las siguientes tres proposiciones son incompatibles:

1a) La función de onda de un sistema es completa, es decir, la función de onda especifica (directa o indirectamente) todas las propiedades físicas de un sistema.

1b) La función de onda siempre evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger.

1c) Las mediciones siempre tienen valores determinados, lo cual significa que al final de una medición el aparato de medición está en un estado determinado. Por ejemplo, para el caso en el que medimos el espín de un electrón, al final de esta medición el dispositivo que la efectúa indica si el espín está $|+\rangle$ y no $|-\rangle$ o $|-\rangle$ y no $|+\rangle$.

En este trabajo se muestra que de adoptar las tres premisas anteriores se llega a una inconsistencia. El autor estudia con detalle tres aspectos fundamentales: resultados, estadística y efecto. Aquí presentamos lo correspondiente a resultados.

El problema de resultados:

Consideramos que se tiene un "buen" aparato de medición de espín en la dirección z. El aparato debe estar construido de tal manera que si está en un estado preparado, $|prep\rangle$ e introducimos un electrón con espín en $|z+\rangle$ (espín en dirección z y hacia arriba) el estado del aparato evolucionará a un estado "$|+\rangle$" y si introducimos un electrón con espín en $|z-\rangle$ (espín en la dirección z hacia abajo) el estado del aparato ahora evolucionará a un estado "$|-\rangle$". Denotando con el subíndice "e" al estado del electrón y con "am" al aparato de medición. La evolución descrita previamente se lee de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &|z+\rangle_e \otimes |prep\rangle_{am} \rightarrow |z+\rangle_e \otimes |+\rangle_{am} \\ &|z-\rangle_e \otimes |prep\rangle_{am} \rightarrow |z-\rangle_e \otimes |+\rangle_{am}\,. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Ahora, queremos analizar que pasa cuando hacemos una medición del espín en la dirección x. Sabemos que el estado en la dirección $|x+\rangle$ toma la forma:

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|z+\rangle_e + |z-\rangle_e], \tag{1.33}$$

con lo cual el estado inicial del sistema "electrón-aparato de medición" pasa a ser

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|z+\rangle_e + |z-\rangle_e] \otimes |prep\rangle_{am}\,. \tag{1.34}$$

Si ahora consideramos como cierto el enunciado 1b) la evolución estará descrita a través del estado S^*,

$$|S^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z+\rangle_e \otimes |+\rangle_{am} + \frac{1}{\sqrt{2}} |z-\rangle_e \otimes |-\rangle_{am} . \tag{1.35}$$

El problema es que ahora se presenta una disyuntiva al intentar mantener como verdaderos 1a) y 1c) simultáneamente. Si queremos considerar como cierto 1a) la función de onda debería dar cuenta de todo hecho físico sobre el aparato de medición, pero leemos a través de (1.34) que no es posible escribir un estado que únicamente describa que el aparato de medición se encuentre en "$|+\rangle$" o solo en "$|-\rangle$ ", pues entran de manera simétrica tanto "$|+\rangle$" como "$|-\rangle$". Si se quisiera sostener 1a) y 1b) como verdaderos tendríamos que apelar a la negación de 1c) pues al hacer mediciones del espín en la dirección z éstas fallarán en dar resultados determinados para los eigenvalores del espín en la dirección x, de esta manera se muestra que no pueden mantenerse como válidos los tres postulados, 1a), 1b) y 1c).

La negación de cada una de las premisas anteriores nos da un posible camino para resolver el problema de la medición. Si se niega 1a) esto significa que la función de onda no captura toda la realidad física, por ende existen otras variables que dan cuenta de esta realidad faltante. A estas teorías se les suele denotar como: Teorías de variables ocultas. Un ejemplo que entra en esta clase es la mecánica de Bohm [3], en la cual las variables "ocultas" corresponden a las posiciones de las partículas, la dinámica de estas nuevas variables está dada por la ecuación de Bohm.

A las teorías que optan por negar la premisa 1b) generalmente se les llama Teorías de colapso. Un ejemplo es la teoría de localización espontánea introducida por Ghirardi, Rimini y Weber (GRW) en 1986 [4], en la cual hay episodios en los que la evolución deja de ser lineal, a estos se les denota como "colapsos" en este caso la evolución queda descrita por la ecuación (estocástica) de colapso. Sin embargo existe también el caso en que la evolución es siempre no lineal, muestra de ello es la propuesta por Pearle en 1990 conocida como Teoría de Localización espontánea y continua (CSL).

La teoría que se obtiene al negar 1c) es la de muchos mundos o muchas mentes.

Asociada al conflicto antes descrito, existe una serie de problemas que generan confusión propagándola a diversos contextos, esto es la confusión en: fluctuaciones cuánticas, correlaciones cuánticas y decoherencia.

1.2.2. Fluctuaciones

A continuación se presentan tres definiciones de fluctuaciones que se suelen tomar por sinónimo, lo cual es erróneo.

Fluctuaciones cuánticas: Estas suelen definirse como indeterminaciones del estado cuántico o de la función de onda, pueden atribuirse a la deslocalización de la posición o el momento de una partícula por citar algún ejemplo. Aunque en la literatura también se suele utilizar como sinónimo de incertidumbre.
Es de suma importancia distinguir entre estas fluctuaciones y las que a continuación se enunciarán.

Fluctuaciones estadísticas: Estas fluctuaciones son asociadas a ensambles, cada uno de ellos con un peso asociado w_i. Estas fluctuaciones describen incertidumbres respecto a una colección de ciertos objeto o procesos.

Fluctuaciones de densidad: Hacen referencia a un objeto unico y usualmente extenso sobre el cual varía una cantidad de un punto a otro, como por ejemplo la temperatura asociada a cada punto del universo.

Es importante enfatizar que en la literatura en repetidas ocasiones estas tres definiciones suelen tomarse por sinónimo, sin embargo no puede ser equivalente referirse a la deslocalización de la posición o del momento (pensando en fluctuaciones cuánticas) que a la medida que cuantifica la dispersión o variación de un conjunto de valores dados (haciendo referencia a las fluctuaciones estadísticas). Si se trabajan estos aspectos como equivalentes, se cometen errores conceptuales que se ven reflejados en diversas teorías como más adelante se señalará. Procedemos a revisar un ejemplo [5].

Consideremos un oscilador armónico simple en $1D$ el cual claramente tiene una incertidumbre respecto a la posición. Lo relevante es que a pesar de ello, tal incertidumbre no implica que el estado base no sea simétrico bajo una reflexión respecto al origen, pues la incertidumbre es solo una medida de la dispersión de los resultados al medir repetidas veces la posición, considerando mediciones sobre un ensamble de un sistema partículas preparadas de manera idéntica. Como resultado se tiene que si se rompe la simetría de reflexión de un solo oscilador armónico es porque una medición sobre la posición se ha realizado. En otras palabras, las fluctuaciones cuánticas o incertidumbres no nos indican por sí mismas que algún sistema físico está experimentando un movimiento aleatorio o estocástico

1.2.3. Correlaciones cuánticas

Mediante un ejemplo [5] haremos notar que las funciones de correlación entre dos puntos no deben ser interpretadas como fluctuaciones cuánticas capaces de romper la simetría de un estado.

Ejemplo EPBR: Dado que en la teoría cuántica, una función de dos puntos $\langle \hat{A}(x)\hat{B}(y)\rangle$ es una correlación entre los valores de dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$, asociada con eventos en x y y respectivamente, lo anterior puede parecer que, $\langle \hat{A}(x)\hat{B}(y)\rangle$, generará cierta clase de inhomogeneidad al pensar que hay algo diferente sobre el estado del mundo en x y en y. A través de un ejemplo tipo EPBR se puede visualizar fácilmente qué es lo que realmente ocurre.

Consideremos el decaimiento de una partícula de espín 0 en la dirección de z. El estado que describe al sistema de dos partículas de espín 1/2 es un estado de singulete $|\psi\rangle$, el cual es invariante bajo rotaciones en torno al eje del decaimiento. Se consideran dos vectores perpendiculares a z, los cuales se denotan como $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ y se construyen los operadores A y B que denotan al espín de la partícula 1 en la dirección de $\hat{n}_1$ y al espín de la partícula 2 en la dirección de $\hat{n}_2$. Ahora se busca la correlación entre $\hat{A}$ y $\hat{B}$,

$$\langle\psi| \hat{A}\hat{B} |\psi\rangle \sim \vec{n}_1.\vec{n}_2 = \cos\theta, \tag{1.36}$$

siendo θ el ángulo entre las dos orientaciones. A continuación se revisará que no existe tal rompimiento de la simetría .

Sin mirar con detalle, se podría concluir que la correlación entre $\hat{A}$ y $\hat{B}$ es la responsable del rompimiento de dicha simetría, asumiendo que la correlación de cierta manera significa que la partícula 1 tiene el espín definido a lo largo de la dirección de $\vec{n_1}$ y que la partícula dos tiene el espín bien definido a lo largo de $\vec{n_2}$. Sin embargo, la correlación indicaría eso si se hubiese efectuado una medición de los espines de las partículas. Los resultados sobre una amplia serie de experimentos repetidos darán correlaciones estadísticas entre dos conjuntos de resultados que van como $\cos\theta$. Entonces el estado sigue siendo $|\psi\rangle$, el cual permanece completamente invariante bajo rotaciones y en este ni la partícula 1 ni la partícula 2 tienen una espín bien definido.

1.2.4. Decoherencia:

Antes de empezar a describir las nuevas herramientas y características matemáticas que serán requeridas es importante hacer notar que, para tener una reducción dinámica consistente, se trabaja con un mecanismo de localización al nivel de la función de onda, pues se puede ejemplificar que al trabajar a este nivel con el operador estadístico resultaría inconsistente debido a que estos puede describir al mismo tiempo una infinidad de mezclas estadísticas no equivalentes.
Ejemplo:
Si consideramos el estado en superposición de un macro objeto, tratándolo como un sistema de dos niveles tenemos

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{Aquí}\rangle + |\text{Allá}\rangle], \tag{1.37}$$

eligiendo una base,

$$|\text{Aquí}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad |\text{Allá}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

podemos escribir al estado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] \\ \langle\psi| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1\,0)+(0\,1)\right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

apelando al formalismo del operador matriz de densidad, tendremos que en esta base se expresa como

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Ahora pensemos en la siguiente situación, se consideran N copias idénticas del sistema macroscópico (1.37) y se busca encontrar un mecanismo universal que transforme a nuestro ensamble en una mezcla estadística tal que la mitad de los sistemas esté en $|\text{Aquí}\rangle$ y la otra mitad en $|\text{Allá}\rangle$. Este parece ser un ensamble cuyos sistemas tienen macro propiedades bien definidas. Escribimos el operador estadístico correspondiente

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{Aquí}\rangle\langle\text{Aquí}| + |\text{Allá}\rangle\langle\text{Allá}|]; \tag{1.41}$$

que en términos de la base que se ha elegido se escribe como

$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Notamos que con el propósito de suprimir los estados macroscópicos en superposición se induce una dinámica que genera una evolución en la matriz de densidad de tipo

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

por esta razón algunos autores llegan a considerar que los términos fuera de la diagonal se piensan como elementos de matriz que conectan diferentes estados macroscópicos. La inconsistencia se hace notar cuando nos preguntamos si realmente esta evolución nos está garantizando que se suprime la superposición. La respuesta es no, puesto que, como se indicaba, el operador de una mezcla estadística puede describir al mismo tiempo una infinidad de mezclas estadísticas inequivalentes, que fácilmente se puede ejemplificar tomando en cuenta ahora un estado en el cual la mitad de sus sistemas estén en el estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{Aquí}\rangle + |\text{Allá}\rangle] \tag{1.44}$$

y la otra mitad en

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{Aquí}\rangle - |\text{Allá}\rangle], \tag{1.45}$$

es decir que la probabilidad de obtener cada uno de ellos es de $1/2$. Al calcular su correspondiente matriz de densidad el resultado es

$$\rho'' = \frac{1}{2}[|\text{Aquí}\rangle + |\text{Aquí}\rangle] + \frac{1}{2}[|\text{Allá}\rangle + |\text{Allá}\rangle] \tag{1.46}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.47}$$

que es el mismo operador de densidad que se obtuvo para el estado (1.41). Guiados por esta argumentación consideramos que para asegurarnos que tenemos un tratamiento que no es ambiguo es conveniente trabajar al nivel de la función de onda.

1.3. Teorías de colapso

Como ya se ha mencionado, el problema de la medición en mecánica cuántica sigue siendo un obstáculo para poder considerarla como una teoría fundamental. Usando la caracterización de Penrose [6], se denota al proceso unitario, U y al proceso de reducción, R, en el cual el estado del sistema cambia instantáneamente de forma indeterminista. El proceso U controla la dinámica de un sistema todo el tiempo que este se deja solo, mientras que el proceso R se lleva a cabo cuando se ha realizado una medición sobre el sistema. El problema está en que la teoría no es clara y transparente respecto a cuando usar uno u otro. Aunado a lo anterior no tenemos una manera objetiva de referirnos al proceso

R pues, queda sujeto a qué es una medición, o bien qué se requiere para que alguien o algo sea capaz de realizarla [7]. En la búsqueda de una teoría cuántica clara y lógicamente consistente se han realizado múltiples esfuerzos por parte de físicos y filósofos.

Las teorías de colapso surgen como propuesta para resolver el problema de la medición [1]. Estas tienen una dinámica distinta a la estándar la cual incorpora por sí misma el fenómeno de colapso y a su vez unifica los dos procesos de evolución, R y U. A continuación describiremos dos versiones de esta clase de teorías: teorías de colapso con localización espontánea y teorías de colapso con localización continua.

1.3.1. Teorías de Colapso no relativistas

1.3.2. Mecánica Cuántica con localización espontánea

La primera variante de esta teoría fue llamada Mecánica Cuántica con Localización Espontánea (QMSL por sus siglas en inglés) por Ghirardi, Rimini y Weber [4], inspirados principalmente en dos puntos:

- Que la elección de base en la que se lleve a cabo el colapso garantice una posición definida para un objeto macroscópico
- Que esta nueva dinámica tenga un impacto despreciable sobre los objetos microscópicos, pero que cumpla con uno de nuestros objetivos: erradicar la superposición de distintos estados macroscópicos.

El modelo

A continuación se presenta el modelo de QMSL mediante una serie de supuestos que se hacen para poder dar un modelo consistente que cumpla con los objetivos planteados.

1. Cada partícula de un sistema de n partículas distinguibles experimenta, con una taza λ_i, un proceso de localización espontánea.

2. En el intervalo de tiempo entre dos procesos espontáneos consecutivos del sistema, este evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger como la conocemos de la mecánica cuántica estándar.

3. El proceso espontáneo de localización se describe mediante

$$|\psi\rangle \quad \rightarrow \text{Localización} \rightarrow \quad \frac{|\psi_x^i\rangle}{||\,|\psi_x^i\rangle\,||}, \tag{1.48}$$

siendo

$$|\psi_x^i\rangle = L_x^i\,|\psi\rangle \tag{1.49}$$

y L_x^i es un operador lineal, positivo y autoadjunto en el espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, que representa la localización de la partícula i en la posición x .

4. La densidad de probabilidad de ocurrencia de localización en x se asume de la siguiente manera

$$P_i(x) = ||\,|\psi_x^i\rangle\,||^2 \tag{1.50}$$

y requiere una condición de normalización

$$\int d^3x[L_x^i]^2 = 1. \tag{1.51}$$

5. Los operadores de localización L_x^i se eligen con la siguiente forma

$$L_x^i = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(q_i - x)^2\right), \tag{1.52}$$

donde q_i es el operador de posición de la i-ésima partícula y $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ corresponde a la desviación estándar de una distribución gaussiana.

Ejemplo:

Consideramos un problema unidimensional, una superposición de dos funciones gaussianas, una centrada en la posición $-a$ y la otra alrededor del punto a

$$\psi(z) = \frac{1}{\mathcal{N}}\left[\exp -\frac{\gamma}{2}(z+a)^2 + \exp -\frac{\gamma}{2}(z-a)^2\right], \tag{1.53}$$

siendo $\mathcal{N}$ una constante de normalización. Se asume que la distancia entre dos gaussianas es mucho mayor que la amplitud de localización, mientras que el ancho es mucho menor que esta.

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} << \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \tag{1.54}$$

Se considera una colapso alrededor de a, la función de onda cambia de la siguiente manera

$$\psi(z) \to \psi_a(z) = \frac{1}{\mathcal{N}_{\dashv}}\left[\exp -(2\alpha a^2)\exp -\frac{\gamma}{2}(z+a)^2 + \exp -\frac{\gamma}{2}(z-a)^2\right], \tag{1.55}$$

al realizar este colapso alrededor de la posición $-a$, notamos que la función gaussiana centrada en $-a$ aparece acompañada por un término $\exp -2\alpha a^2$ que la suprime con respecto al otro término (la exponencial centrada en a), esta ultima función (1.55) denotará ahora a una partícula bien localizada alrededor de la posición a. Un argumento similar se da para un colpso que ocurre en torno a a.

Si se considera el caso en el que la perturbación se hace en una región intermedia entre gaussianas, por ejemplo en 0 para este caso. Aquí la de onda no tendrá un cambio puesto que el centro de ambas gaussianas está distante del cero no hay nada que suprimir por ello la reducción a un estado localizado no ocurre. Sin embargo la probabilidad de que tal colapso ocurra viene dada por un factor de $\exp -\alpha a^2$. Entonces concluimos que la reducción es más probable que ocurra en las regiones donde la partícula tiene mayor probabilidad de encontrarse, tal y como sucede en la interpretación estándar de la mecánica cuántica.

Operador estadístico en este modelo

Vamos a considerar una sola partícula, suponemos que sufre un colapso (localización) y por ello su función de onda cambia de

$$|\psi\rangle \to |\psi_x\rangle \tag{1.56}$$

Ahora veamos lo que le sucede a un ensamble de partículas. Tenemos la probabilidad de que la partícula esté más localizada alrededor de la posición x, es decir ahora tendremos un operador de densidad que representa a un ensamble, como el citado en (1.19) ρ_{est}.

$$|\psi\rangle \langle\psi| \rightarrow \int d^3xP(x)\frac{|\psi_x\rangle \langle\psi_x|}{|| \, |\psi\rangle \, ||^2} \tag{1.57}$$

a donde se ha usado (1.48), si además empleamos (1.49) obtenemos

$$|\psi\rangle \langle\psi| \rightarrow \int d^3xL_x^i \, |\psi\rangle \langle\psi| \, L_x^i, \tag{1.58}$$

a esta ultima integral la definimos como $T[|\psi\rangle \langle\psi|]$.
Entonces si el estado inicial es estadístico, el efecto sobre el operador ρ se describe como en la ecuación anterior, esto es

$$\rho \rightarrow T[\rho] \tag{1.59}$$

A continuación se muestra la derivación de la ecuación de evolución para $\rho(t)$. En un intervalo dt, el operador estadístico evoluciona de la siguiente manera: como se había mencionado, el mecanismo de localización temporal es Poisoniano, esto nos dice que existe una probabilidad λ de que ocurra un colapso durante ese intervalo de tiempo (recordamos que λ es el promedio del número de eventos que se tiene en una distribución) en el cual ρ cambia a $T[\rho]$, complementariamente existe una probabilidad $1-\lambda dt$ de que dicho colapso no ocurra y entonces el operador estadístico evolucione de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. A través de la siguiente ecuación se escribe la evolución

$$\rho(t+dt) = (1-\lambda dt)\left[\rho(t) - \frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)]dt\right] + \lambda dt T[\rho(t)], \tag{1.60}$$

lo cual significa que la ecuación dinámica de QMSL estará dada por

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] - \lambda(\rho(t) - T[\rho(t)]) \tag{1.61}$$

que describe la evolución cuántica de una sola partícula que sufre aleatoriamente un proceso de localización.

El postulado 5 de esta nueva teoría nos permite obtener el siguiente resultado:

$$\langle q' | \, T[\rho] \, | q'' \rangle = \exp -\frac{\alpha}{4}(q' - q'')^2 \, \langle q' | \, \rho \, | q'' \rangle \, . \tag{1.62}$$

Notamos que cuando $q' = q''$ obtenemos el siguiente resultado

$$\langle q | \, T[\rho] \, | q \rangle = \langle q | \, \rho \, | q \rangle \, , \tag{1.63}$$

esto nos muestra que la traza se conserva ante un colapso. A continuación se hablará de la teoría con localización continua, conviene hacer uso del cálculo Itô, la cual se detalla en el apéndice C.

1.3.3. Localización espontánea y continua

En el análisis correspondiente a GRW se postula que exista una base preferente de operadores A_i de tal manera que:

- Los objetos macroscópicos estén siempre localizados en el espacio
- La dinámica microscópica no se altere de forma apreciable respecto a la evolución cuántica estándar.
- El aumento de energía del sistema, debido a localizaciones espaciales, no sea detectable.
- Deben conservarse las propiedades de simetría de los sistemas que contienen partículas idénticas.

A continuación veremos cómo en esta teoría de localización espontánea y continua, CSL (por sus siglas en inglés) cumple con los requisitos señalados anteriormente. Procedemos a verificar cuales son los operadores A_i que conformarán la base privilegiada.
Consideramos los siguientes operadores de creación y aniquilación $a^\dagger(y,s)$ y $a(y,s)$ de una partícula en un punto x con componente de espín s que satisfacen las relaciones de conmutación o anticonmutación canónicas. Se define un promedio local del operador de densidad de la siguiente manera

$$N(x) = \sum_s \int d^3y g(y-x) a^\dagger(y,s) a(y,s), \tag{1.64}$$

donde $g(x)$ es una función esféricamente simétrica, real positiva centrada alrededor de $x = 0$, normalizada de tal forma que

$$\int d^3x g(x) = 1, \tag{1.65}$$

y así

$$\int d^3x N(x) = N, \tag{1.66}$$

siendo N el operador total de número. Notamos que los operadores $N(x)$ son autoadjuntos y conmutan entre ellos. Se elige

$$g(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha}{2}(x)^2}, \tag{1.67}$$

donde α es un parámetro tal que $\alpha^-3/2$ representa escencialmente el volumen sobre el cual se toma el promedio de la definición de $N(x)$. Los vectores

$$|q, s\rangle = \mathcal{N} a^\dagger(q_1, s_1) a^\dagger(q_2, s_2) ... a^\dagger(q_n, s_n) |0\rangle , \tag{1.68}$$

están normalizados como eigenestados comunes de los operadores $N(x)$ con eigenvalores

$$n(x) = \sum_{i=1}^{n} g(q_i - x). \tag{1.69}$$

La ecuación de Ito en este caso se escribe como

$$d|\psi(t)\rangle = \left[-\frac{i}{\hbar} H d + \int d^3x N(x) V(x,t) - \gamma \int d^3x N^2(x) dt, \right] \tag{1.70}$$

donde

$$\begin{aligned} << dB(x) >> &= 0 \\ << dB(x) dB(y) >> &= \gamma \delta^3(x-y) dt \end{aligned} \tag{1.71}$$

la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left[-\frac{i}{\hbar} H + \int d^3x N(x) V(x,t) - \gamma \int d^3x N^2(x) dt \right] |\psi(t)\rangle , \tag{1.72}$$

que a su vez puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left[-\frac{i}{\hbar} H + \int d^3x N(x) V'(x,t) - \gamma \int d^3x d^3y N(x) D(x-y) N(y) dt \right] |\psi(t)\rangle \tag{1.73}$$

donde $N(x) = \sum_s a^\dagger(x,s) a(x,s)$ es el operador densidad de número, y $V'(x,s)$ es el nuevo proceso estocástico Gaussiano definido como:

$$V'(x,t) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3y e^{\frac{\alpha}{2}(x-y)^2} V(y,t), \tag{1.74}$$

cuyo **promedio** es cero, mientras que la función de correlación

$$\begin{aligned} \ll V'(x,t_1)V'(y,t_2) \gg &= \gamma D(x-y)\delta(t_1-t_2) \\ &= \gamma \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^{3/2} e^{\frac{\alpha}{4}(x-y)^2}\delta(t_1-t_2) \end{aligned} \tag{1.75}$$

1.3.4. Matriz de densidad en CSL

La ecuación para el operador estadístico en este formalismo se deduce como

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho(t)] + \gamma \int d^3xN(x)\rho(t)x - \frac{\gamma}{2}\int d^3\{N^2,\rho(t)\} \tag{1.76}$$

1.3.5. Cómo funciona CSL

La implicación de este modelo en un sistema macroscópico, asumiendo que el orden de magnitud de la longitud del parámetro $1/\sqrt{\alpha}$ es tal que puede razonablemente admitir que la función de onda de las variables internas de un cuerpo rígido sean localizadas con respecto a $1/\sqrt{\alpha}$
Sea Q la coordenada del centro de masa el centro de masa de un sistema de partículas idénticas, tales que constituyen al cuerpo rígido

$$Q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_i, \tag{1.77}$$

y se escribe

$$q_i = Q + \tilde{q}_i, \tag{1.78}$$

las coordenadas respecto del centro de masa suman cero, de tal manera con son $3N-3$ funciones independientes de las variables internas, las cuales identificamos como r. Las variables internas r, juntas con las coordenadas Q son funciones de q_i. Nosotros consideramos

$$\psi(q,s) = \Psi(Q)\chi(r,s) \tag{1.79}$$

donde

$$\chi(r,s) = \binom{S}{A}\Delta(r,s), \tag{1.80}$$

donde ”S” y ”A”significan simetrización o antisimetrización con respecto a intercambios de los argumentos (q_i, s_i). Las funciones de onda Ψ y χ se normalizan separadamente. La función $\Delta(r,s)$ se asume es angosta (con respecto a $1/\sqrt{\alpha}$), centrada alrededor del valor r_0 de r. Ahora veamos la acción del operador $N(x)$ sobre las funciones de onda, uno encuentra que

$$N(x)\Psi(Q)\chi(r,s) = F(Q-x)\Psi(Q)\chi(r,s) \tag{1.81}$$

donde a función $F(Q-x)$ está dada por

$$F(Q-x) = \sum_i \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha}{2}[Q+\tilde{q}_i(r_0)-x]^2}. \tag{1.82}$$

De acuerdo con la ecuación (1.81) notamos que $N(x)$ actúa solamente sobre el factor Ψ de ψ. Como consecuencia, bajo la suposición que

$$H = H_Q + H_r \tag{1.83}$$

si Ψ y χ satisfacen las ecuaciones

$$d\left|\Psi\right\rangle = \left[-\frac{i}{\hbar}H_Q dt + \int d^3x F(Q-x)dB(x) - \frac{\gamma}{2}\int d^3x F^2(Q-x)dt\right]\left|\Psi\right\rangle \tag{1.84}$$

$$d\left|\chi\right\rangle = \left[-\frac{i}{\hbar}H_r dt\right]\left|\chi\right\rangle \tag{1.85}$$

respectivamente, la función de onda (1.79) satisface la ecuación de Ito (1.70). Se puede concluir que, bajo esas asumsiones, el centro de masa y los movimientos internos se desacoplan en la ausencia de los términos estocásticos en la ecuación (1.79). Además los términos estocásticos no afectan a la estructura interna, mientras que el centro de masa de la función de onda obedece a la ecuación diferencial estocástica.

Para una partícula el tiempo de colapso será de la edad del universo, alrededor de $10^{17}s$. Sin embargo para un cuerpo del orden de 10^{23} partículas, la función de onda se colapsará en una millonésima de segundo. Entonces al estar trabajando con un cuerpo macroscópico, como en este análisis, la localización se dará en una fracción de una millonésima de segundo.

Concluimos esta sección, donde hemos presentado una propuesta para resolver el problema de la medición, haciendo notar que la importancia de introducir aspectos interpretativos de la Mecánica Cuántica es tanto de carácter filosófico como físico pues como mostraremos más adelante que de no considerarlos conlleva a que se presenten serios problemas en la cosmología, razón por la cual procedemos a una revisión del modelo cosmológico actual.

Capítulo 2

Cosmología

La cosmología es el área de la física que se dedica al estudio del universo a gran escala, en esta sección haremos un breve repaso del modelo cosmológico actual, adentrándonos en el tema de principal interés: el de la inflación eterna.

2.1. Principio cosmológico

El principio cosmológico generaliza las ideas de Copérnico sugiriendo que ningún lugar en el universo ocupa un lugar privilegiado, es decir, a grandes escalas el universo es homogéneo e isótropo. Este principio que puede ser visto como una postura filosófica tiene un fuerte respaldo en las observaciones.

Sin ser muy rigurosos podemos decir que homogeneidad significa que a un "instante de tiempo dado" cada punto del "espacio" luce como cualquier otro punto. Una definición precisa se lee de la siguiente manera [8]: Un espacio-tiempo (M, g_{ab}) [1], se dice que es homogéneo (espacialmente) si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies espaciales Σ_t que están foliando dicho espacio-tiempo de tal manera que para cada t (donde t es un parámetro que caracteriza la foliación) y para cuales quiera dos puntos p, $q \in \Sigma_t$ existe una isometría del espacio-tiempo métrico, g_{ab}, la cual lleva p a q.
La definición para el concepto de isotropía es la siguiente: un espacio-tiempo se

[1] Siendo M una variedad suave, dotada de una métrica Lorentziana, g_{ab}, que representa al espacio tiempo.

dice que es isótropo (espacialmente) si está cubierto por un conjunto de curvas temporales $\{C_a\}$ y $\forall \alpha$, $\forall p \in C_\alpha$, $\forall v_1^a, v_2^a \in T_p$, de longitud 1 y ortogonales a C_α, si existe un difeomorfismo que deja a p fijo y lleva a v_1^a en v_2^a y a su vez deja la métrica invariante. A estas curvas $\{C_\alpha\}$ se les conoce como observadores co-móviles. Entonces si un espacio tiempo es homogéneo e isótropo se tienen las siguientes implicaciones

Las curvas correspondientes a los observadores co-móviles son ortogonals a las hipersuperficies de homogeneidad, Σ_t.

Las superficies de homogeneidad son a su vez isótropas

La tres métrica h_{ab} inducida por la métrica espcio-temporal en g_{ab}, en las hipersuperficies de homogeneidad Σ_t es una métrica de curvatura constante.

A continuación se listan 3-métricas de curvatura constante que son proporcionales a una de las siguientes tres métricas, h_{ab}:

1. La métrica espacial Euclídea:

$$h_{ab} = dx_a dx_b + dy_a dy_b + dz_a dz_b \tag{2.1}$$

o bien,

$$d^2\sigma = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.2}$$

2. La métrica de la 3-esféra unitaria

$$h_{ab} = d\chi_a d\chi_b + \sin^2(\chi)[d\theta_a d\theta_b + \sin^2(\theta) d\varphi_a d\varphi_b] \tag{2.3}$$

también escrita como

$$d^2\sigma = d\chi^2 + \sin^2(\theta)[d\theta^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2] \tag{2.4}$$

3. La métrica de la 3-hipérbola unitaria

$$h_{ab} = d\chi_a d\chi_b + \sinh^2(\chi)[d\theta_a d\theta_b + \sin^2(\theta) d\varphi_a d\varphi_b] \tag{2.5}$$

también escrita como

$$d^2\sigma = d\chi^2 + \sinh^2(\theta)[d\theta^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2] \qquad (2.6)$$

Introducimos a continuación la definición de tiempo cósmico. Dada una hipersuperficie de homogeneidad Σ_0 definimos la función de tiempo cosmológico, denotada por t, es decir al punto $p \in M$ se le asigna el valor $t(p)$, el cual denota el tiempo propio medido por un observador co-móvil que pasa por $p \in M$ desde que cruza la hipersuperficie Σ_0.
Con lo anterior usando el tiempo cósmico como coordenada y considerando las coordenadas espaciales de Σ_0 también en $p \in M$, podemos considerar a la variedad diferencial que usaremos para describir el espacio-tiempo como $\mathbf{r} \times \Sigma_0$, de esta manera la métrica toma la siguiente forma

$$dS^2 = -dt^2 + a^2[d\chi^2 + \sin k^2(d\theta^2 + Sin^2(\theta)d\varphi^2)], \qquad (2.7)$$

donde se ha usado notación unificada, $\sin k(\chi) \in \{\chi, \sin(\chi), \sin h(\chi)\}$, para los casos $k = 0, k = 1, k = -1$, respectivamente y a se conoce como el factor de escala. Notamos que para un t constante, a unicamente puede depender de t para que obtengamos una $3-$métrica homogénea e isótropa, también es importante señalar que $a(t)$ nos indica cómo cambia la separación entre observadores có-moviles.
Con esta métrica denotamos un universo homogéneo e isótropo pero que evoluciona en el tiempo.
La métrica espacio-temporal también puede ser escrita como

$$dS^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) \right], \qquad (2.8)$$

esta se conoce como la métrica de Friedman-Lêmaitre-Robertson-Waker (FLRW)

2.2. Cinemática

A continuación definiremos términos cinemáticos en el contexto cosmológico, tales como corrimiento al rojo, ley de Huble, distancia luminosa y angular.

2.2.1. Corrimiento al rojo (redshift)

Gracias a la simetría del espacio-tiempo no se pierde generalidad al consideremos una señal luminosa que se emite al tiempo $t = t_1$ en una dirección radial por un observador co-móvil en t_1 y recibida por otro observador con coordenada r_2. Al ser una señal luminosa, es decir nula, podemos escribir

$$dS^2 = 0 = -dt^2 + a(t)^2 \frac{1}{1-kr^2} dr^2 \tag{2.9}$$

que implica

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2 dr}}, \tag{2.10}$$

considerando una segunda señal ahora emitida en $t_1 + \delta_1 t$ y recibida en $t_2 + \delta_2 t$ se obtiene similarmente

$$\int_{t_1+\delta_1 t}^{t_2+\delta_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1+}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2 dr}}, \tag{2.11}$$

con lo anterior tenemos las siguientes igualdades

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_2}^{t_2+\delta_2} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta_1} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.12}$$

que implica

$$\int_{t_2}^{t_2+\delta_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta_1} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.13}$$

que en el límite de intervalos cortos se puede escribir como

$$\frac{\delta_1 t}{a(t_1)} = \frac{\delta_2 t}{a(t_2)} \tag{2.14}$$

considerando δt como el tiempo (donde t es el tiempo propio que miden estos observadores), entre dos crestas de una onda y usando que $\lambda = c/f$ y en este caso hacemos $c = 1$ y $f = 1/\delta t$ podemos escribir lo anterior como

$$\frac{\lambda_1}{a(t_1)} = \frac{\lambda_2}{a(t_2)}, \tag{2.15}$$

el cambio de longitud de onda nos da información directa sobre el cambio en el factor de escala. Podemos escribir la expresión anterior en términos de la frecuencia de emisión de un fotón, ω_1 que será observado con una frecuencia menor ω_2 al estar el universo expandiéndose, entonces tenemos:

$$\frac{\omega_1}{a(t_1)} = \frac{\omega_2}{a(t_2)} \tag{2.16}$$

y a su vez

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}, \tag{2.17}$$

para facilitar el análisis la expresión anterior la reescribiremos como

$$\frac{\omega_{obs}}{\omega_{em}} = \frac{a_{obs}}{a_{em}}, \tag{2.18}$$

Los cosmólogos suelen hablar en términos del “redshift” entre dos eventos, el cual definen como el cociente del cambio en longitud de onda

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \tag{2.19}$$

se sigue que

$$z + 1 = \frac{a_{obs}}{a_{em}}. \tag{2.20}$$

Si consideramos que las observaciones tienen lugar hoy, es decir $a_{obs} = a_0$, la expresión anterior se escribe como

$$z + 1 = \frac{a_0}{a_{em}}. \tag{2.21}$$

El “redshift” de un objeto nos habla de cual era el factor de escala cuando esta señal fue emitida.

Si ahora usamos que la frecuencia ω es proporcional a la energía de un fotón, encontramos

$$z + 1 = \frac{\omega_{em}}{\omega_{obs}} = \frac{E_{em}}{E_{obs}} = \frac{a_0}{a_{em}} \tag{2.22}$$

si ahora consideramos una señal luminosa muy cercana al tiempo actual, t_0,se puede escribir

$$a_{em} = a(t_0 - \Delta t) \approx a(t_0) - \frac{da}{dt}\Delta t \tag{2.23}$$

de tal manera que lo anterior también se puede escribir en términos de la frecuencia

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{da}{dt}\frac{\Delta t}{a_0}. \tag{2.24}$$

Para una señal luminosa la "distancia recorrida", que puede definirse dada una hipersuperficie espacial, σ y dados dos puntos. Podemos identificar a σ y 2 puntos con lo siguiente: dos observadores comoviles (observador emisor y observador receotor) en una hipersuperficie de $t = cte$, σ caracterizada por ser la hipersuperficie correspondiente al momento en que el observador receptor recibe la señal, dicha distancia puede expresarse como
$D = a\Delta\sigma = \Delta t$, donde σ hace referencia a la hipersuperficie, con lo que

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{da/dt}{a_0}D \tag{2.25}$$

2.2.2. Ley de Hubble

Es importante hacer la siguiente observación, en este contexto el "redshift" de un objeto no se refiere al efecto Doppler convencional, $-\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\omega}{\omega} = V$, en este caso es la expansión del espacio y no la velocidad relativa entre observadores la que lo produce. Sin embargo cuando se obsrvan galaxias a distancias que son pequeñas comparadas con, lo que se conoce como radio de Hubble H_0 y el radio de la curvatura espacial, la expansión del universo luce similar al de un conjunto de galaxias que se mueve de tal manera que unas se apartan de las otras y el "redshift" se vuelve muy similar al caso del efecto Doppler. Por lo anterior se suele pensar a su vez en el redshift en términos de la velocidad $V = z$. De esta manera para distancias que satisfacen lo anterior podemos escribir la expresión (2.25) mediante lo que se conoce como "La ley de Hubble"

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = V = \frac{da}{dt}\frac{\delta t}{a_0}D = H_0 D, \tag{2.26}$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y su valor al día de hoy se denota por H_0. La ley antes mencionada fue descubierta empíricamente por el astrónomo E.Hubble en 1929, esta ley fue el primer resultado observacional que da cuenta de la expansión del universo. Mediante esta ley determinó el valor de la constante que lleva su nombre,$H_0 = 100km/s.MpC$. la cual proporciona una escala de tiempo, conocido como tiempo de Hubble T_H, hoy, $T_{H_0} = H_0^{-1}$ y una escala de distancia, llamada “radio de Hubble” R_H hoy, $R_{H_0} = c \times H_0^{-1}$.

2.2.3. Distancia luminosa

En el espacio Euclidiano hay distintas formas de inferir la distancia a un objeto; comparando por ejemplo el brillo aparente con la luminosidad intrínseca, o su aparente velocidad angular con su velocidad transversal intrínseca, o bien su tamaño angular con su extensión física. Para cada uno de esos casos se ha definido una clase de distancia que es lo que se podría inferir si el espacio fuese Euclidiano y no se estuviese en expansión.
La distancia luminosa se define de tal manera que se satisface

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F} \tag{2.27}$$

donde $L \equiv$la luminosidad absoluta de la fuente y $F \equiv$es el flujo medido por un observador (la energía por unidad de tiempo por unidad de área del detector). La definición anterior está inspirada en que para el espacio plano, para una fuente a una distancia d el flujo sobre la lumiosidad es solo uno sobre el área, A de una esfera centrada alrededor de la fuente, $F/L = 1/4\pi d^2$. En un universo tipo FLRW, el flujo será diluido. La conservación de los fotones nos habla de que los fotones emitidos por la fuente pasarán eventualmente a través de la esfera a una distancia comovil $r = r_0$,del emisor. Pero el flujo se diluye por dos efectos adicionales: el ”redshift” individual de los fotones por un factor de $1 + z$ y los fotones que golpean la esfera con menor frecuencia, dado que dos fotones emitidos con un tiempo de diferencia δt serán medidos a un tiempo $(1+z)\delta t$ de diferencia. Entonces nosotros tendremos $\frac{F}{L} = \frac{1}{(1+z)^2 A}$, siendo A el área de una esfera $A = 4\pi(a_0 r_0)^2$ de tal manera que obteneos que

$$d_L = (1 + z) r_0 a_0 \tag{2.28}$$

La ecuación anterior que denota la distancia luminosa se puede medir debido a que hay fuentes astrofísicas conocidas, es decir se conoce su luminosidad intrínseca. Al estar tratando con fotones, tendremos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)}dt = \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}dr \equiv \Psi_k(r_0), \tag{2.29}$$

con lo cual si $k = 0$ se tiene $\Psi_k(r_0) = r_0$, con $k = 1$ se encuentra $\Psi_k(r_0) = \arcsin(r_0)$, mientras que para $k = -1$ el resultado es $\Psi_k(r_0) = \text{arcsinh}(x_0)$. Ahora para determinar el miembro izquierdo de (2.29) hacemos un cambio de variable, para reescribir la expresión en términos de z, de esta manera con $z = a_0/a(t) - 1$ tenemos $dz = -(a_0/a(t)^2)\dot{a}dt = -(a_0/a(t))H(t)dt$,de tal forma que

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)}dt = \frac{1}{a_0}\int_0^{z_e} \frac{1}{H(z)}dz, \tag{2.30}$$

obteniendo así

$$r_0 = \Psi_k^{-1}[\frac{1}{a_0}\int_0^{z_e} \frac{1}{H(z)}dz], \tag{2.31}$$

que combinando con (2.28) se obtiene

$$d_L = (1+z)a_0\Psi_k^{(-1)}[a_0^{-1}\int_0^{z} H(z)^{-1}dz] \tag{2.32}$$

esta ultima expresión nos indica que si tenemos datos de z y d_L, es decir conocemos el redshift y la luminosidad intrínseca de los objetos se podría tener información sobre $H(z)$.

Los astrónomos saben medir las cantidades L y F a partir de ahí pueden calcular la expresión (2.27). Si independientemente mide distintos redshifts, por ejemplo a un conjunto de supernovas, y para cada uno de estos mide su correspondiente d_L puede obtener información sobre la función $H(z)$

2.2.4. Distancia angular

Consideramos un objeto cuya longitud física sea L y esté orientado de manera ortogonal a nuestra línea de visión sobre la intersección del cono de luz pasado y una hipersuperficie a $t = T$. El valor de la coordenada radial se puede escribir como R_T cuando tomamos nuestra línea de mundo como origen de las coordenadas espaciales, sea $\delta\theta$ el ángulo que subtiende L en el cielo. Vemos que $L = a(T)R_T\delta\theta$

La distancia ángular se suele denotar por $D_A = L/\delta\theta$. Por otro lado podemos considerar las geodésicas radiales nulas, cuyos extremos están en $t = T_0$ y en L, de esta manera tenemos

$$\int_T^{T_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \Psi_k(R_T) \tag{2.33}$$

Si usamos $H = \dot{a}/a$ y hacemos dos cambios de variable obtenemos

$$\Psi_k(R_T) = \int_{T_T}^{T_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0}\int_0^{z_T} \frac{dz}{H(z)}, \tag{2.34}$$

de esta manera podemos compararla ecuación anterior (2.33) y obtenemos

$$D_A = a(T)\Psi_k^{-1}\left[(1/a_0)\int_0^{z_T} \frac{dz}{H(z)}\right]. \tag{2.35}$$

Lo que se mide es $D_A = L/\delta\theta$

2.2.5. Horizonte de partícula

Ahora consideremos la máxima distancia desde la cual un observador comovil en $r = 0$ y $t = t_f$ puede recibir señales luminosas

$$\int_0^{t_f} \frac{1}{a(t)}dt = \int_0^{r_e} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}dr = \Psi_k(r_e). \tag{2.36}$$

La distancia espacial en t_f estará dada por

$$D = a(t_f)\Psi_k(r_e) = a(t_f)\int_0^{t_f} \frac{1}{a(t)}dt, \tag{2.37}$$

si la integral que se muestra a continuación converge en el límie inferior, entonces D representa una distancia finita que se denotará como D_{HP}

$$\int_0^{t_f} \frac{1}{a(t)}dt, \tag{2.38}$$

esta distancia es conocida como distancia de horizonte de partícula y lo será siempre y cuando el límite inferior de integración sea el inicio del universo, en este caso se tiene $t = 0$.
Como en la siguiente sección veremos, podemos considerar tres situaciones para el universo, con el caso $k = 0$.

A.1) Universo lleno de polvo, en este caso se encontrará que $a(t) = At^{2/3}$, para este resultado tendremos que

$$D_{HP}(t_f) = 3t_f, \tag{2.39}$$

notamos que con este valor para $a(t)$ se obtiene que

$$H(t_f) = \frac{2}{3}t_f^{-1} \tag{2.40}$$

$$R_H(t_f) = H(t_f)^{-1} = \frac{3}{2}t_f \tag{2.41}$$

A.2) Universo lleno de radiación, mostraremos que $a(t) = At^{1/2}$, para lo cual el horizonte de partícula es

$$D_{HP}(t_f) = 2t_f, \tag{2.42}$$

mientras que

$$H(t_f) = \frac{1}{2}t_f^{-1} \tag{2.43}$$

$$R_H(t_f) = H(t_f)^{-1} = 2t_f \tag{2.44}$$

B) Universo lleno de constante cosmológica, para el cual se obtiene $a(t) = C \exp Ht$, donde $H = \sqrt{\Lambda/3}$, se encuentra que

$$D_{HP} = \frac{1}{H}[\exp H(t_f - t_i) - 1], \tag{2.45}$$

para este caso se tiene que

$$H(t_f) = H \tag{2.46}$$

$$R_H(t_f) = \frac{1}{H} \tag{2.47}$$

De los resultados anteriores podemos notar que para los casos A.1) y A.2) el radio de Hubble es del mismo orden de magnitud que D_{HP}, mientras que para el caso B) son muy distintos.
Es importante señalar que en general el radio de Hubble $R_H(t_f) = H(t_f)^{-1}$ nos da idea de la escala eficiente de interacciones causales pero no es un horizonte de partícula. También es relevante enfatizar que el horizonte está dado por la ecuación (2.45).
Ya que hemos estudiado los aspectos básicos de cinemática continuamos nuestro estudio dando paso a revisar la dinámica.

2.3. Dinámica

La dinámica del universo se rige por las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G T_{ab}, \tag{2.48}$$

para la métrica de FLRW y en este caso para describir a la materia del universo se considera un fluido perfecto, que se describe a través del siguiente tensor

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + P(g^{ab} + u^a u^b), \tag{2.49}$$

siendo u^a la 4-velocidad del elemento del fluído, ρ la densidad y P la presión. Al calcular las ecuaciones de Einstein se obtienen

1. Ecuación de Friedman
$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{2.50}$$

2. $$\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3P) \tag{2.51}$$

3. Combinando 1 y 2 se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a^2} = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3P) \tag{2.52}$$

4. Ahora combinando 1 y 3 se encuentra

$$\frac{d(a^3\rho)}{dt} = -P\frac{d(a^3)}{dt} \tag{2.53}$$

esta ultima ecuación puede escribirse también como $dE = -PdV$.

Si definimos la densidad crítica como $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$ la ecuación de Friedman puede escribirse de la siguiente manera

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{2.54}$$

o bien

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_c) \tag{2.55}$$

a partir de la ultima ecuación podemos notar que se obtiene lo siguiente

$$\rho = \rho_c \rightarrow k = 0 \tag{2.56}$$

$$\rho < \rho_c \rightarrow k = -1 \tag{2.57}$$

$$\rho > \rho_c \rightarrow k = 1 \tag{2.58}$$

Los casos para los cuales la ecuación de Friedman tiene una solución exacta son los siguientes

a) Universo lleno de polvo, $P = 0$ con lo cual para 4 se tiene

$$\rho = C/a^3 \tag{2.59}$$

y para la ecuación de Friedman

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}C/a^3, \tag{2.60}$$

cuya solución es:

$$a(t) = At^{2/3}, \tag{2.61}$$

donde $A = \frac{3}{2}\sqrt{8\pi G/3}$.

b) Universo lleno de radiación, $P = \frac{1}{3\rho}$, resultando para 4:

$$\rho = C/a^4, \tag{2.62}$$

mientras que la ecuación 1 es

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} C/a^4, \tag{2.63}$$

y su solución es la siguiente

$$a(t) = Bt^{1/2}, \tag{2.64}$$

con $B = 16\pi G/3$.

c) Universo lleno de constante cosmológica. En este caso las ecuaciones de Einstein se escriben de la siguiente manera

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} \equiv 8\pi G T^{\Lambda}_{ab} \tag{2.65}$$

Comparando $-\Lambda g^{ab}/8\pi G$ con (2.49) encontramos que la condición en este caso es $P \equiv -\rho =$ con lo cual la ecuación de Friedman resulta

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.66}$$

resolviendo por separación de variables para el caso $k = 0$ se obtiene la solución:

$$a(t) = A \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t, \tag{2.67}$$

con $H = \sqrt{\Lambda/3}$, se escribe como

$$a(t) = A \exp Ht. \tag{2.68}$$

2.4. Historia térmica

Consideramos el universo con distintos componentes materiales, de los cuales se habló en la sección anterior, asuminos que no hay flujos de energía entre ellos.

La densidad crítica hoy se define como está dada por

$$\rho_c^0 \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1{,}9 \times 10^{-29} h^2 gr/cm^3, \tag{2.69}$$

de manera estándar se usa $\Omega = \rho/\rho_c$.A continuación describiremos qué ocurre cuando cada uno de estos componentes es dominante.

Polvo: Para este caso $P = 0$, con lo que

$$\rho_{pol} = \rho_{pol}^0 (a_0/a)^3. \tag{2.70}$$

La materia visible que se describe a través de este componente contribuye a la densidad media con $\rho_{vis}^0 = 2 \times 10^{-31} gr/cm^3$, se estima que hay unas 10 veces más materia oscura en galaxias, de esta manera tendremos $\rho_{mat}^0 \approx 3 \times 10^{-30} gr/cm^3$, es deir $\Omega_{Mat}^0 = \rho_{Mat}^0/\rho_c^0 \approx 0{,}15h^{-2}$

Radiación: Para este componente hemos obtenido $P \equiv \frac{1}{3\rho}$ con lo cual

$$\rho_{Rad} = \rho_{Rad}^0 (a_0/a)^4. \tag{2.71}$$

Si consideramos que la radiación está en equilibrio término, de la Ley de Stefan Boltzmann tendremos: $\rho = \kappa T^4$, donde $\kappa = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3}$. Esto significa que mientras la expansión preserve el equilibrio términco, $T \propto 1/a$. La radiación conocida como: radiación cósmica (CMB, por sus siglas en inglés) tiene hoy una temperatura de $T = 2{,}7K^0$ con lo cual $\rho_{Rad}^0 = 4 \times 10^{-34} gr/cm^3$, es decir $\Omega_{Rad}^0 = \rho_{Rad}^0/\rho_c^0 \approx 10^{-5}h^{-2}$ INSERTARÉ IMAGEN

Podemos notar que hoy, $\rho_{Rad}^0 \approx 10^{-4}\rho_{Mat}^0$, como se tiene que

$$\frac{\rho_{Rad}^0}{\rho_{mat}} \approx \frac{1}{a}. \tag{2.72}$$

Cuando $a/a_0 = 10^4$ se tenía igualdad, antes dominaba la radiación.
Se usa como vela estándar (objetos de los cuales se conoce la luminosidad intrínseca) a las supernovas Ia, se toma la relación entre d_L y z. Usamos la ecuación

$$d_L = (1+z)a_0\Psi_k^{(-1)}[a_0^{-1}\int_0^z H(z)^{-1}dz] \tag{2.73}$$

y expandiendo en serie $H(z) = H_0 + H_0' z + ...$, se ajusta a los datos y se ve que $H_0' < 0$, lo cual nos indica que la tasa de expansión era más lenta en el pasado, contrario a lo que se esperaría, razón por la cual se propone la contribución de una constante cosmológica pequeña.

Tomando en cuenta las contribuciones a la densidad y usando la ecuación de Friedman se encuentra

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\rho^0_{Mat}(a_0/a)^2 + \rho^0_{Rad}(a_0/a)^4 + \rho^0_{\Lambda}\right) \\ (\frac{H}{H_0})^2 &= \Omega^0_{mat}(a_0/a)^3 + \Omega^0_{rad}(a/a_0)^4 + \Omega^0_{\lambda} + \Omega^0_k(a_0/a)^2, \end{aligned} \tag{2.74}$$

donde $\Omega_k \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$. Considerando $a_0 = a$ tenemos de la ecuación de Friedman

$$1 = \Omega^0_{mat} + \Omega^0_{rad} + \Omega^0_{\Lambda}. \tag{2.75}$$

Usando lo anterior en (2.73) se tiene entonces:

$$\begin{aligned} d_L =& (1+z) a_0 \Psi_k^{(-1)} \Big[(a_0 H_0)^{-1} \\ & \times \int_0^z \left(\Omega^0_k (1+z)^2 + \Omega^0_{mat}(1+z)^3 + \Omega^0_{rad}(1+z)^4 + \Omega^0_{\Lambda}\right)^{1/2} dz.\Big] \end{aligned} \tag{2.76}$$

Después del inicio de la materia ocurre el desacople. Cuando $T \geq 3000K$ había demasiados fotones con energías del orden de $10eV$ de manera que no podían existir átomos. La matera ordinaria y la radiación forman un plasma de núcleos, electrones, fotones en equilibrio término. Cuando la temperatura desciende a $T \approx 3000K$ se forman átomos, a partir de este rango para T los fotones se propagan sin impedimento. Este momento es cuando se emite el CMB, lo anterior ocurre cuando $a_0/a = 1100$.

Más adelante, cuando $T \approx 10^9 K$, fotones destruyen los núcleos. cuando la temperatura desciende de $T \approx 10^9 K$ se forman núcleos más complejos, esto se conoce como Nucleosíntesis cosmológica.

2.4.1. Evolución de estructura

Algo ignorado hasta ahora es que el universo no es totalmente homogéneo e isótropo, tiene estructura y evoluciona.

Caracterización y estadística

Basados en el libro de [8] damos a conocer el estudio de la evolución de la estructura cosmológica se suele usar un tratamiento perturbativo, se escribe a la métrica como

$$g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + \delta g_{ab} \tag{2.77}$$

y al tensor de energía moménto como

$$T_{ab} = T_{ab}^{(0)} + \delta T_{ab}, \tag{2.78}$$

donde el fondo está caracterizado por $g_{ab}^{(0)}$ y $T_{ab}^{(0)}$, que corresponden al caso homogéneo e isótropo, mientras que las perturbaciones δg_{ab} y δT_{ab} corresponden a las inhomogeneidades y a las anisotropías que representan la estructura.
Para dar un tratamiento preciso se consideran dos espacio-tiempos, $\{M_1, g_{ab}^{(0)}, T_{ab}^{(0)}\}$ para describir al espacio de fondo y $\{M_2, g_{ab}, T_{ab}\}$ para el espacio tiempo que contempla mas anisotropías e inhomogeneidades. Para definir las perturbaciones usamos un difeomorfismo $\Phi : M_1 \to M_2$, que mapea tensores de M_1 a M_2 mediante $\Phi^*(g_{ab}^{(0)})$ y $\Phi^*(T_{ab}^{(0)})$. De esta manera las perturbaciones se definen como tensores en M_2 dados por $\delta g_{ab} \equiv g_{ab} - \Phi^*(g_{ab}^{(0)})$ y $\delta T_{ab} \equiv T_{ab} - \Phi^*(T_{ab}^{(0)})$. Dado que no hay una unica manera de elegir un difeomorfismo surge un problema, pues la separación depende de este, este problema se conoce como elección de norma. Gracias a la alta simetría del fondo hay varias soluciones que resultan convenientes, de cierta manera se restringe el mapeo $\Phi : M_1 \to M_2$, por ejemplo restringir a que Φ conecte a puntos con el mismo valor de un escalar, como por ejemplo la traza T_a^a de T_{ab}, hecho que implicaría que

$$\delta T_a^a = \delta g^{ab} \Phi^*(T_{ab}^{(0)}) + \Phi^*(g^{(0)ab}) \delta T_{ab} = 0. \tag{2.79}$$

Es usual llevar las coordenadas elegidas en M_1 a M_2 con el mismo Φ, de esta manera se verán igual las componentes de la métrica de fondo en M_1 y M_2, a pesar de ello esto no determina que puntos de una variedad son mapeados en otra. Sin embargo podemos pensar que después de haber llevado la métrica de fondo y las coordenadas M_2, obtenemos

$$g_{ab}^{(0),\Phi} \equiv \Phi^*(g_{ab}^{(0)}) = g_{\mu\nu}^{(0)}(x)(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b, \tag{2.80}$$

después se realiza un cambio de coordenadas. Las nuevas componentes serán distintas a las de la métrica en M_1 y al compararlas interpretamos su diferencia como la contribución extra δg_{ab}, este cambio debe ser pequeño para que sea considerada una perturbación. Las ecuaciones perturbadas de Einstein son

$$G_{ab}[g] - G[\Phi^*(g^{(0)})] = 8\pi G\delta T_{ab}. \tag{2.81}$$

Perturbaciones clásicas

Para cocnentrarnos en el tratamiento de las perturbaciones en el caso cosmológico con $k = 0$ [9]. La métrica no perturbada se escribe como

$$g^{(0)}_{ab} = -dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{2.82}$$

a la perturbación más general la escribimos como

$$\delta g_{ab} = \delta_{00}dt^2 + \delta g_{0i}(dtdx^i + dx^i dt) + \delta g_{ij}dx^i dx^j. \tag{2.83}$$

Escribimos las perturbaciones en términos de las componentes como

$$\delta g_{00} = -E \tag{2.84}$$

$$\delta g_{0i} = a(t)[\frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i(x, T)] \tag{2.85}$$

con $\partial G_i/\partial x^i = 0$ y

$$\delta g_{ij} = a^2(t)[A(x, t)\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i(x, t)}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j(x, t)}{\partial x^i} + D_{ij}(x, t)], \tag{2.86}$$

con $\partial C_i/\partial x^i = 0$, $\partial D_{ij}/\partial x^i = 0$, $\forall j$ y $\sum_i D_{ii} = 0$.
E, F, A, B se conocen como escalares, mientras que G_i, C_i como vectoriales y D_{ii} como tensoriales. Será conveniente escribir las expresiones en términos del tiempo conforme, $d\eta = dt/a$, con lo cual la métrica toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} g_{ab} =& a^2(\eta)\left[-(1+E)d\eta^2 + (\frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i)(d\eta dx^i + dx^i d\eta)\right. \\ &\left. + \left((1+A)\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^i} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij}\right) dx^i dx^j\right] \end{aligned} \tag{2.87}$$

Nos concentramos en perturbaciones escalares eligiendo el difeomorfismo de tal manera que implementamos la Norma de Newton $F = B = 0$ y $E \equiv 2\varphi$, $A = -2\psi$ con lo cual obtenemos

$$g_{ab} = a^2(\eta)\left[-(1+2\varphi)d\eta^2 + (1-2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right]. \tag{2.88}$$

Las ecuaciones perturbadas a primer orden dan lo siguiente:

Componente $i \neq j$: $\partial_{ij}(\varphi - \psi) = 0$, que con condiciones a la frontera implica $\varphi = \psi$, se conoce como potencial Newtoniano.

Componente 00: $\nabla^2\psi - 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\psi) = 4\pi G a^2 \delta\rho$

Componente ii $\psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\psi = 4\pi G a^2 \delta P$,

donde $' \equiv \frac{\partial}{\partial\eta}$, $\nabla^2 \equiv \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$

Caracterización espectral

Resulta conveniente trabajar en términos de transformadas de Fourier ciertas cantidades, que denotaremos como χ, dependientes de $(\vec{x}, \eta)$, como por ejemplo $\delta\rho$, ψ, entre otras. Estas cantidades se escriben como:

$$\chi(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \chi_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}.\vec{x}}. \tag{2.89}$$

En nuestro universo los coeficientes toman valores determinados, pero en los análisis se consideran como representantes de un ensamble de "posibles universos" y se caracterizan las distribuciones estadísticas de los valores, de esta manera definimos $\mathcal{P}_\chi(\eta, k)$ el espectro de la χ mediante la expresión

$$\overline{\chi_{\vec{k}}\chi^*_{\vec{k'}}} = \delta^3(\vec{k} - \vec{k'})\mathcal{P}_\chi(\eta, k), \tag{2.90}$$

donde la línea representa el promedio sobre dicho ensamble de universos.
Es importante enfatizar que este promedio se ha hecho sobre una colección de ensambles, es el análogo a (1.20), su carácter es estadísitico.
Harrison y Zeldovich argumentaron que el espectro para perturbaciones de la

densidad relativa $\delta^\rho(\eta, \vec{x}) \equiv \frac{\delta\rho(\eta,\vec{x})}{\rho}$, que es una cantidad adimensional, debería tener en el pasado remoto la forma $\mathcal{P}_\delta(\eta, k) = Ak^{n-3}L_0^n$, donde A es una constante adimensional, L_0 una longitud característica con n muy pequeño.
Resulta interesante estudiar el caso $n = 0$ y $\mathcal{P}_\delta(\eta, k) = Ak^{-3}$, pues notamos que al considerar $n = 0$ se tiene $L_0^0 = 1$ lo cual significa que se tiene un espectro que es invariante de escala.
El dato más remoto que se conoce sobre la estructura del universo es el CMB. Si se asume que las fluctuaciones primordiales están caracterizadas por $\mathcal{P}_\delta^{HZ}(\eta, k) = Ak^{-3}$ y se estudia cómo evolucionan durante el periodo dominado por radiación teniendo en cuenta la física del plasma de bariones, electrones, fotones, así como las perturbaciones de materia oscura considerada como polvo, se observan datos detallados del CMB provistos por PLANK, COBE, entre otros.
Lo que se detecta en las observaciones son los fotones del CMB emitidos de la ultima superficie de dispersión (LSS) que corresponden a una temperatura local $T \approx 3000K$, estos son sujetos a corrimiento al rojo por parte de la expansión cosmológica hasta $T \approx 2{,}7K$ y corrimiento al rojo por la salida del potencial Newtoniano debido a la distribución de materia. A su vez existe un efecto de variación de temperatura local que afecta las abundancias relativas de átomos y fotones. Se tiene que $\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \frac{1}{3}\psi(\eta, \vec{x})$, donde θ, ϕ corresponden a los ángulos polar y azimutal de las coordenadas esféricas y con $\psi(\eta_D, \vec{x}_D)$ nos referimos al potencial Newtoniano en la intersección de la LSS con nuestro cono pasado de luz.
Este mapa se caracteriza en términos de su expansión en armónicos esféricos

$$\frac{\delta T}{T_0} = \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{2.91}$$

De esta manera los coeficientes están dados por:

$$\alpha_{lm} = \frac{1}{3} \int d\Omega^2 \psi(\eta_D, \vec{x}_D) Y_{lm}^*(\theta, \phi). \tag{2.92}$$

Las mediciones de $\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi)$ nos dan un mapa detallado del cual se extraen los coeficientes α_{lm}. El estudio se centra en la cantidad

$$C_l = \frac{1}{2l+1}\sum_m |\alpha_{lm}|^2, \tag{2.93}$$

es decir, un promedio sobre las orientaciones de las magnitudes cuadradas de los coeficientes.

Hasta aquí se ha dado un breve repaso del modelo cosmológico hasta antes de 1980, procedemos a revisar algunos problemas que tenía este modelo y cómo se dio solución a estos.

2.4.2. Problemas del modelo cosmológico estándar

i **Horizontes** En el modelo cosmológico estándar el universo temprano está dominado por radiación, el horizonte de partículas tiene un tamaño distinto al de la superficie en que se emite el CMB, no existe explicación alguna de por qué puntos en el cielo se ven tan similares, por ejemplo al medir la temperatura en distintas regiones.

ii **Planitud** Acorde a la ecuación de Friedman $|\Omega^0 - 1| = |k|/(H_0\dot{a})^2$ y si el universo en algún momento no tenía exactamente $\Omega = 1$, entonces su evolución $d(|\Omega^0 - 1|)/dt = -(2/H_0^2)\ddot{a}/(\dot{a}^3)$, como usualmente $\ddot{a} < 0$ esta diferencia debe crecer con el tiempo. En el caso plano es un “repulsor” en el espacio de fases. Se requiere un ajuste muy fino en el universo temprano para no estar hoy muy lejos.

iii **Reliquias molestas** De acuerdo a las teorías de gran unificación (GUT) las transiciones de fases en el universo temprano tuvieron que dejar una alta densidad de defectos topológicos tipo ”monopolos” la pregunta es por qué no se ven, si tendrían que verse como enormes masas interaccionando fuertemente con la materia ordinaria.

2.4.3. Motivación al modelo inflacionario

La inflación se considera un elemento fundamental en el pilar del modelo cosmológico actual. Se considera que inicialmente, ”un parche” del universo, pequeño y altamente homogéneo comenzó a inflarse. Se piensa que existe un tiempo pequeño entre el régimen de Planck (para el cual se dice, se requeriría una teoría cuántica de la gravedad que describiera de manera fundamental la geometría del espacio-tiempo) y el periodo inflacionario, en este periodo de tiempo se supone es valido dar una caracterización clásica del espacio-tiempo.
En esta pequeña región el horizonte de partícula incluye la distancia recorrida por la luz antes del periodo de inflación. Fata el cálculo
Este periodo de expansión acelerada, con $\dot{a} < 0$, resuelve los problemas de naturalidad, pues durante inflación $\dot{a}$ crece rápidamente, con lo cual $\Omega = 1$ pasa a ser un atractor, los horizontes de partícula se vuelven arbitrariamente grandes y se disuelven las reliquias. El mayor éxito de este modelo es que da cuenta de la generación natural de estructura.

2.5. Modelo inflacionario

El modelo cosmológico actual más aceptado entre los cosmólogos es el que incluye el periodo de inflación como descripción del universo temprano, dicha época se caracteriza por ser un periodo de expansión acelerada, uno de sus mayores éxitos se basa en poder explicar las inhomogeneidades primordiales del que representan las semillas cósmicas de estructura. A continuación se presenta un breve estudio sobre inflación eterna desde el modelo de ”slow-roll”.
El modelo cosmológico se describe por medio de la acción de Einsten-Hilbert,

$$S = \int dx^4 \left\{ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}(\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi^2) \right\}, \tag{2.94}$$

en el modelo de ”slow-roll” el sector de materia queda caracterizado por un campo escalar, el campo de inflatón ϕ. El espacio de fondo está descrito por una métrica de FRW (Friedman-Robertson-Walker) cuyo elemento de línea es

$$dS^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j]. \tag{2.95}$$

La acción descrita en (2.94) posee dos variables dinámicas, la métrica g y el campo clásico, ϕ, al variar con respecto a la primera obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein, al variar respecto a la segunda encontramos

$$\nabla^a \nabla_a \phi_0 - m^2 \phi_0 = 0, \tag{2.96}$$

En términos de coordenadas, considerando que la derivada covariante sobre un campo escalar se reduce a una derivada parcial y usando el hecho de que la diferencia entre dos operadores derivada ∇_a, $\widetilde{\nabla}_a$ está totalmente caracterizada por medio de un campo tensorial $(1, 2)$,

$$(\nabla_a - \widetilde{\nabla_b})\, \omega_c = \Gamma^{c}{}_{ab}\, \omega_c \tag{2.97}$$

para el caso en que no hay torsión. Con lo anterior la ecuación (2.96) se reduce a

$$g^{ab}[\partial_a(\partial_b \phi_0) - \Gamma^{c}{}_{ab}(\partial_c \phi_0)] - m^2 \phi_0 = 0. \tag{2.98}$$

Para (2.95) los símbolos de Christoffel asociados son

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\eta}{}_{xx} = \Gamma^{\eta}{}_{yy} = \Gamma^{\eta}{}_{zz} = \Gamma^{\eta}{}_{\eta\eta} = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \equiv \mathcal{H}(\eta) \\ &\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{para otros casos,} \end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma^{x}{}_{x\eta} = \Gamma^{y}{}_{y\eta} = \Gamma^{z}{}_{z\eta} = \mathcal{H}(\eta) \\ &\Gamma^{x}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{y}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{z}{}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{para otros casos,} \end{aligned} \tag{2.100}$$

donde " $'$ " denota derivada con respecto de η y $\mathcal{H}(\eta)$ es el parámetro de Hubble en términos del tiempo conforme. Entonces, al escribir la ecuación (2.98) considerando (2.99) y (2.100), obtenemos:

$$[\partial_n^2 - 2\mathcal{H}(\eta)\partial_n - a^2(\eta)m^2]\phi_0 = 0, \tag{2.101}$$

donde se ha tomado en cuenta la definición del modo cero del campoo, ϕ_0, i.e, que es independiente de la posición.

2.5.1. Slow-roll:

El mecanismo de Slow-roll consiste en asumir que al comienzo de inflación, el potencial de inflatón, que en este caso corresponde a $V(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2$, es grande pero bastante plano. El campo escalar rueda lentamente (de aquí el nombre de slow-roll) a lo largo de este potencial, de tal manera que la constante de Hubble decrece lentamente, y el universo experimenta una época de expansión exponencial.
De considerar las ecuaciones relevantes de Einstein, escritas en tiempo físico, se tiene

$$3H(t)^2 = 4\pi G\left[\left(\frac{d\phi_0}{dt}\right)^2 + 2V(\phi_0)\right] \tag{2.102}$$

De la ecuación de Klein-Gordon, escrita también en tiempo físico, se tiene

$$\frac{d^2\phi_0}{dt^2} + 3H(t)\frac{d\phi_0}{dt} + \frac{\partial V}{\partial\phi_0} = 0 \tag{2.103}$$

Una solución de estas ecuaciones representa una situación de slow-roll, es decir, podemos leer de (2.103) la ecuación para un oscilador amortiguado, donde el término que funge como amortiguador, es $H(t)$, es decir, la expansión juega el papel de una fuerza de fricción. Conforme avance el tiempo el potencial y esta fuerza de fricción estarán en equilibrio, entonces tendremos lo que se conoce como la condición de Slow-roll $d^2\phi_0/dt^2 = 0$. Lo cual corresponde a

$$\frac{d\phi_0}{dt} = -\frac{1}{3H(t)}\frac{\partial V}{\partial\phi_0}. \tag{2.104}$$

Si suminos que el potencial es ”muy plano”, de manera que $\left(\frac{d\phi_0}{dt}\right)^2 << V$, con $V \approx cte$, tendremos que

$$H = H_I = \sqrt{\frac{8\pi GV}{3}}, \tag{2.105}$$

en estas condiciones la expansión es exponencial, $a(t) = C\exp H_I t$.
Ahora, se reescriben las ecuaciones (2.102) y (2.103) en términos de tiempo

conforme, $d\eta = (dt/a)$ [2], obteniendo así

$$3\mathcal{H}(\eta)^2 = 4\pi G\left[\left(\frac{d\phi_0}{d\eta}\right)^2 + 2a^2V(\phi_0)\right], \tag{2.106}$$

$$\frac{d^2\phi_0}{d\eta^2} + 2\mathcal{H}(\eta)\frac{d\phi_0}{d\eta} + \frac{\partial V}{\partial\phi_0} = 0. \tag{2.107}$$

Escrito en términos de η la condición de Slow-roll se traduce a

$$\frac{d^2\phi_0}{d\eta^2} = \mathcal{H}(\eta)\frac{d\phi_0}{d\eta}, \tag{2.108}$$

a partir de esta condición se implica que

$$\frac{d\phi_0}{d\eta} = -\frac{a^2(\eta)}{3\mathcal{H}(\eta)}\frac{\partial V}{\partial\phi_0}, \tag{2.109}$$

sustituyendo el correspondiente valor de V se encuentra que

$$\frac{d\phi_0}{d\eta} = -\frac{a^2m^2\phi_0}{3\mathcal{H}(\eta)}, \tag{2.110}$$

y la ecuación (2.105) se escribe como

$$\mathcal{H}(\eta) = a(\eta)\sqrt{\frac{8\pi GV}{3}} = a(\eta)H_I \tag{2.111}$$

notando así que $a(\eta) = \frac{-1}{H_I(\eta-\eta_0)}$, expresión que es válida para η, tales que $-\tau < \eta < \eta_0$, $\eta_0 < 0$, régimen donde empieza y termina inflación. El factor de escala $a(\eta)$ escrito como en la expresión anterior es una aproximación, pues en principio H_I es variable debido a que el potencial V va cambiando a lo largo de inflación, considerando lo anterior el factor de escala iría como $a(\eta) = \left(\frac{-1}{H_I\eta}\right)^{1+\epsilon}$ Ahora escribiendo en términos de $\mathcal{H}$ el parámetro de slow-roll $\epsilon = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}$, se considera muy pequeño, $\epsilon \ll 1$ durante el periodo de inflación, ya que se supone el potencial cambia muy lentamente en este periodo.

[2] De la definición para η se tiene $\frac{d^2\phi_0}{dt^2} = \frac{1}{a^2}\frac{d^2\phi_0}{d\eta^2} - H(t)\frac{d\phi_0}{dt}$ y $H(t) = \frac{1}{a(\eta)}\mathcal{H}(\eta)$

2.5.2. Perturbaciones cosmológicas

Luego se consideran las perturbaciones:

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi(\eta, \vec{x}) \tag{2.112}$$

siendo $\delta\phi(\eta, \vec{x}) << \phi_0(\eta)$ con la métrica perturbada

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2\psi)d\eta^2 + (1-2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \tag{2.113}$$

con $\psi(\eta, \vec{x}) << 1$. El tratamiento usual consta de describir a $\delta\phi$ y a ψ en términos de nuevas variables que escribimos de la siguiente manera

$$u \equiv \frac{a\psi}{4\pi G\phi_0} \tag{2.114}$$

$$\nu \equiv a(\delta\phi + \frac{\dot{\phi}_0}{H}\psi), \tag{2.115}$$

después se realiza la cuantización de las perturbaciones en términos de operadores de creación y aniquilación,

$$\hat{\nu}(x, \eta) = \sum_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} \nu_k(\eta) \exp i\vec{k}.\vec{x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \nu^*_k(\eta) \exp -i\vec{k}.\vec{x} \right) \tag{2.116}$$

se eligen modos tales que en $\eta \to -\infty$, se comporten como soluciones de frecuencia positiva, esto significa

$$\nu_k(\eta) = \frac{exp(-ik\eta)}{\sqrt{2}k} \left(1 - \frac{1}{k\eta}\right), \tag{2.117}$$

dando lugar al vacío de Bunch-Davies, que se define por Se calcula la función de dos puntos

$$\langle 0| \hat{\nu}(x, \eta)\hat{\nu}(y, \eta) |0\rangle \tag{2.118}$$

expresión de la cual podemos extraer el ”Power spectrum”

$$\langle 0| \hat{\nu}(x, \eta)\hat{\nu}(y, \eta) |0\rangle = \int d^3k \exp ik(x-y)P(k), \tag{2.119}$$

dando como resultado $P(k) = Ck^{-3}$. Notemos que este resultado nos habla sobre las correlaciones cuánticas entre dos operadores. No se ha contemplado ningún ensamble en el análisis como es en el caso de la ecuación (2.90) donde se está trabajando con un ensamble de posibles universos. La ecuación aquí presente nos habla sobre la correlación entre dos operadores en distintos puntos, mientras que la antes citada nos habla de probabilidades en un ensamble de posibles universos. Es importante tener en mente la distinción entre dos objetos similares pero conceptualmente distintos.

2.5.3. El problema de la emergencia de estructura

Como hemos mencionado, uno de los mayores éxitos del periodo inflacionario es que puede dar cuenta de las primeras anisotropías observadas en el CMB (cosmic microwave radiation) necesarias para el surgimiento de estructura cósmica. Sin embargo algunas cuestiones que surgen a partir de este formalismo son las siguientes: Si empezamos con un estado homogéneo e isótropo en qué momento se rompió la simetría para poder dar cuenta de las inhomogeneidades. Si estamos trabajando con la dinámica de un sistema cerrado no se rompen estas simetrías, algunas propuestas que se han hecho para dar solución al conflicto han sido las siguientes: decir que las correlaciones rompen la simetría, pero en el capítulo anterior se ha mostrado que este no es el caso. Otra posible respuesta ha sido usar argumentos basados en el mecanismo de decoherencia, que se ilustró en el capitulo precedente no puede dar solución.

2.5.4. Gravedad semiclásica con colapsos

La teoría de Gravedad semiclásica se aplica en un régimen en el cual no se involucra el régimen de Planck, esta teoría intenta resolver los problemas que se confrontan al intentar describir el espacio-tiempo asociado con un cuerpo macroscópico descrito en términos cuánticos, que está en una superposición de estados localizados en dos regiones distantes [10]. Un trabajo relevante en esto es [11] considera tal experimento y afirma que la gravedad semiclásica no es viable. El argumento está basado en la siguiente dicotomía:

1. Si no hay colapsos cuánticos entonces la gravedad semiclásica entra en conflicto con su experimento.

2. Si hay colapsos cuánticos, las ecuaciones semiclásicas son inconsistentes.

En el último punto el problema es que el colapso generalmente estaría asociado con la falla de un lado de las ecuaciones de Einsten, pues el valor esperado del tensor de energía momento tendría divergencias al momento del colapso. La propuesta que se ha dado [12] es trabajar con Gravedad semiclásica no como una teoría fundamental, sino como una descripción aproximada con un domino limitado de aplicabilidad. Consideramos a las ecuaciones de gravedad semiclásica antes y después del colapso pero no durante. Para que el enfoque esté bien descrito debe comentarse con un formalismo bien definido que incluya una manera de unir las descripciones antes y después del colapso. Una propuesta concreta de lo anterior se muestra en [12] donde ha desarrollado el siguiente enfoque para trabajar a la Gravedad semiclásica incorporando teorías de colapso. Se trabaja con un modelo llamado "Semiclassical Self-consistent configuration" (SSC) en el cual un sistema se describe a través del siguiente conjunto de cantidades

$$\{g_{\mu\nu}(x), \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x), \mathcal{H}, |\xi\rangle \in \mathcal{H}\} \tag{2.120}$$

Diremos que representa un SSC si y solo si $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$ y $\mathcal{H}$ corresponden a una teoría cuántica de campos sobre un espacio-tiempo que satisface

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] = 8\pi G \langle\xi| \hat{T}_{\mu\nu}[g(x), \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x)] |\xi\rangle \,, \tag{2.121}$$

para todos los puntos x en el espacio-tiempo. Es decir estamos basándonos en una teoría de gravedad semiclásica, la cual no consideramos una teoría fundamental pero sí una teoría efectiva.

La construcción de un SSC no es trivial. Pues de alguna manera se debe dar un ansatz, se debe proponer la métrica adecuada del espacio-tiempo, construir la teoría cuántica, encontrar un estado apropiado, $|\xi\rangle \in \mathcal{H}$, que sea compatible con la configuración seleccionada del espacio tiempo.

A través del enfoque de SSC se busca dar cuenta de la transición de un universo simétrico a uno con el estado actual: inhomogéneo y anisótropo. Pero para dar cuenta de dicha transición es necesario elemento extra que se debe consdierar y es el colapso cuántico de las funciones de onda de los campos de materia. La propuesta, al incorporar las teorías CSL es poder explicar esta transición considerando la evolución unitaria normal, característica de teoría cuántica de campos estándar pero suplementada por el colapso cuántico, el cual se ha planteado puede predecir de alguna manera de los grados de libertad gravitacionales. En est trabajo consideran que cualquier estado puede entenderse como un SSC partícular, razón por la cual la transición de un estado a otro, mediado por el colapso se puede leer como

$$\text{SSC-I} \rightarrow \text{SSC-II} \tag{2.122}$$

La idea detrás de esta propuesta es considerar en un espacio de Hilbert asociado una SSC-I que describa la transición $|\xi^{(I)} \rightarrow |\zeta\rangle\rangle$, con $|\xi^{(I)}\rangle$, $|\zeta\rangle_{target}$ en un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}^{(I)}$. Notemos que $\{g^{(I)}, \hat{\varphi}^{(I)}, \hat{\pi}^{(I)}, \mathcal{H}^{(I)}, |\xi\rangle^{I}_{target}\}$ no representa un SSC, pues diremos que $|\zeta\rangle_{target}$ no es físico. Este estado representa una caracterización del estado en el cual el colapso tomará a los campos de materia. Se necesita conectar al estado $|\xi^{(I)}\rangle$ con otro estado $|\xi\rangle^{(II)}$ que "vive" en un nuevo espacio de Hilbert, $\mathcal{H}^{(II)}$ para este se tiene $\{g^{(II)}, \hat{\varphi}^{(II)}, \hat{\pi}^{(II)}, \mathcal{H}^{(II)}, |\xi\rangle^{II}\}$.
En este trabajo, estudian estas transiciones en el contexto inflacionario, considerando a SSC-I como el estado homogéneo e isótropo que toma lugar en un tiempo correspondiente a pocos e-foldings de haber iniciado la inflación. En este caso se necesita un estado, $|\xi^{(I)}\rangle \in \mathcal{H}^{(I)}$ tal que el valor de su tensor de energía moménto sea el adecuado cerca de Sitter, este es el modo cero, excitado.

$$|\xi^{(I)}\rangle = \mathcal{F}(\hat{a}^{(I)\dagger})\,|0^{(I)}\rangle\,, \tag{2.123}$$

concretamente se considera $\xi_0^{(I)} \equiv \langle \hat{a}_0^{(I)} \rangle$, que corresponde a un estado coherente, $\mathcal{F}$ una función genérica que actua sobre los operadores $\hat{X}$, $\mathcal{F} \propto \exp(\hat{X})$. Para este caso partícular los estados con solo el modo cero exitado, las componentes

00 e ij de las ecuaciones de Einstein se simplifican a las siguientes

$$3\mathcal{H}^{2(I)} = 4\pi G\left((\dot{\phi}^{2(I)}_{\xi,0}) - a^{2(I)}m^2(\phi^{2(I)}_{\xi,0})\right) \tag{2.124}$$

$$\mathcal{H}^{2(I)} + 2\dot{\mathcal{H}}^{(I)} = -4\pi G\left((\dot{\phi}^{2(I)}_{\xi,0}) - a^{2(I)}m^2(\phi^{2(I)}_{\xi,0})\right), \tag{2.125}$$

aquí $(\dot{\phi}^{2(I)}_{\xi,0}) \equiv \langle\xi^{(I)}| : (\partial_\eta\hat{\phi}^{(I)})^2 : |\xi^{(I)}\rangle$ y $(\phi^{2(I)}_{\xi,0}) \equiv \langle\xi^{(I)}| : \hat{\phi}^{(I)2}(\eta) : |\xi^{(I)}\rangle$ son funciones de η, ":" indican "normal ordering". La ecuación (2.124) es análoga a las que se obtienen en el contexto de teoría clásica de campos, con los cuadrados de los escalares del campo y las derivadas en el tiempo remplazadas por los correspondientes operadores. El teorema de Ehrenfest garantiza las ecuaciones de movimiento para el valor del campo de inflatón. En general las "relaciones clásicas"

$$(\dot{\phi}^{2(I)}_{\xi,0}) = (\dot{\phi}^{(I)}_{\xi,0})^2 \tag{2.126}$$

$$(\phi^{2(I)}_{\xi,0}) = (\phi^{(I)}_{\xi,0})^2 \tag{2.127}$$

no se mantendrán. Sin embargo, si se considera un estado $|\xi\rangle$ que está angostamente centrado alrededor de una configuración clásica del campo, $\phi^{(I)}_{\xi,0}(\eta)$ y $\pi^{(I)}_{\xi,0}(\eta)$, aquí se toma un "estado que es altamente coherente" ($\hat{a}^{(I)}_0|\xi^{(I)}\rangle = \xi^{(I)}_0|\xi^{(I)}\rangle$, con $\xi^{(I)}_0 \in \mathbb{C}$), para los cuales las relaciones clásicas se mantienen.

2.5.5. Nuevo tratamiento en las semillas de estructura

En el artículo [13] se muestra un tratamiento consistente para describir las primeras anisotropías a partir de un enfoque que incorpora gravedad semiclásica y teorías de colapso. Se trabaja con la métrica perturbada para describir el espacio-tiempo de manera clásica

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2\psi)d\eta^2 + (1-2\varphi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \tag{2.128}$$

donde está trabajando con la normal de Newton y se han ignorado perturbaciones vectoriales y tensoriales. Al campo escalar se le dará un tratamiento cuántico, aunque veremos que será equivalente tratarlo de manera clásica. El campo se descompone de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_0(x) + \hat{\delta\phi}(x), \tag{2.129}$$

se trabaja sobre la fluctuación del campo de inflatón, $\delta\phi(\vec{x}, \eta)$. Se perturba la acción hasta segundo orden en las fluctuaciones escalares del campo, haciendo un cambio de variable auxiliar $\hat{y}(x) = a\hat{\delta}\phi(x)$.

Nos concentramos en los modos individuales del campo:

$$y(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k}[y(\vec{k}) \exp i\vec{k}.\vec{x}], \tag{2.130}$$

$$\pi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k}[\pi(\vec{k}) \exp i\vec{k}.\vec{x}] \tag{2.131}$$

en lo anterior se ha omitido la dependencia en η, las expresiones anteriores satisfacen el corchete de Poisson, al realizar la cuantización pasará a ser el conmutador y separando a los modos en casos simétrico y antisimétrico se tiene que los modos pasan a ser una colección independiente de osciladores armónicos modificados, cada uno evoluciona de manera independiente. Introducimos por conveniencia para el futuro estos operadores:

$$\hat{X}_k = \sqrt{d^3\vec{k}}\hat{y}(\vec{k}) \tag{2.132}$$

$$\hat{P}_k = \sqrt{d^3\vec{k}}\hat{\pi}(\vec{k}), \tag{2.133}$$

donde d^3k representa un volumen "infinitesimal" en el espacio de las k's alrededor de $\vec{k}$ y (2.132), (2.133) satisfacen las reglas de conmutación. En el tratamiento antes hecho está incluido el modo cero del campo, del cual se dará un análisis más detallado en el siguiente capítulo.

Antes de proceder a revisar qué ocurre cuando se incorpora colapso, se calculan los valores de expectación cuando unicamente se tiene una evolución unitaria, dada por el hamiltoniano del sistema H_k, para la cual se satisface:

$$\frac{d}{d\eta} \langle\psi, \eta| \hat{A} |\psi, \eta\rangle = -i \langle\psi, \eta| [\hat{A}, \hat{H}] |\psi, \eta\rangle . \tag{2.134}$$

Para el operador de campo $\hat{X}$ y el operador moménto del campo, $\hat{P}$ se tienen las siguientes iguakdades:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta}\langle\hat{X}\rangle &= \langle\hat{P}\rangle - \frac{\hat{X}}{\eta}\\ \frac{d}{d\eta}\langle\hat{P}\rangle &= -k^2\langle\hat{X}\rangle + \frac{\langle P\rangle}{\eta}\end{aligned} \tag{2.135}$$

$$\begin{aligned}\frac{d2}{d\eta^2}\langle\hat{X}\rangle &= -\left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)\langle\hat{X}\rangle\\ \frac{d2}{d\eta^2}\langle\hat{P}\rangle &= -k^2\langle\hat{P}\rangle\end{aligned} \tag{2.136}$$

Para las ecuaciones de segundo grado se hace el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}Q &\equiv \langle\hat{X}^2\rangle\\ R &\equiv \langle\hat{P}^2\rangle\\ S &\equiv \langle[\hat{XP} + \hat{PX}]\rangle\end{aligned} \tag{2.137}$$

y se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta}Q &= S - \frac{2Q}{\eta}\\ \frac{d}{d\eta}R &= -k^2 S + \frac{2R}{\eta}\\ \frac{d}{d\eta}S &= 2[R - k^2 Q]\end{aligned} \tag{2.138}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}Q = &- C_1\frac{1}{k^2}e^{2ik\eta}\left(1 + \frac{i}{k\eta}\right)^2 - C_2\frac{1}{k^2}e^{-2ik\eta}\left(1 - \frac{i}{k\eta}\right)^2\\ &+ C_3\frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{1}{(k\eta)^2}\right),\end{aligned} \tag{2.139}$$

$$R = C_1 e^{2ik\eta} + C_2 e^{-2ik\eta} + C_3, \tag{2.140}$$

$$S = -2iC_1\frac{1}{k}e^{2ik\eta}\left(1 + \frac{i}{k\eta}\right) + 2iC_2\frac{1}{k}e^{-2ik\eta}\left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) + C_3\frac{2}{k^2\eta}. \tag{2.141}$$

Con condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} Q(-\mathcal{T}) &= 1/2k \\ R(-\mathcal{T}) &= k/2 \\ S(-\mathcal{T}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.142}$$

En el enfoque propuesto se trabaja con las ecuaciones semiclasicas de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle\xi| \hat{T}_{\mu\nu} |\xi\rangle, \tag{2.143}$$

las ecuaciones semiclasicas de Einstein a primer orden son

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}, \tag{2.144}$$

a partir de las cuales se obtiene $\psi = \varphi$ y en el enfoque de "slow-roll" con las aproximaciones correspondientes obtenemos

$$-k^2\psi(\eta, \vec{k}) = \frac{4\pi G \phi_0'(\eta)}{a} \pi(\eta, \vec{k}), \tag{2.145}$$

debido a que en [12] se ha mostrado que a pesar de tratar de manera cuántica al modo cero del campo de inflatón este tiene un comportamiento clásico, es equivalente darle un tratamiento clasico, como se hace en [13], con lo cual la ecuación anterior se puede reescribir como: al traducir a su versión cuántica tenemos

$$-k^2\psi(\eta, \vec{k}) = \frac{4\pi G \phi_0'(\eta)}{a} \langle \pi(\eta, \vec{k}) \rangle \tag{2.146}$$

A continuación procedemos a revisar lo obtenido por las observaciones. Los satelites miden la temperatura que se detectando la radiación de microondas de cuerpo negro un número de veces repetidas . Si ν es la frecuencia de un pico del espectro, entonces se tiene la siguiente relación: $\Delta T/\bar{T} = \delta\nu/\nu \simeq \frac{1}{3}\psi$. La cantidad $\Delta T(\theta, \varphi)/\bar{T}$ es función de las coordenadas en la 2-esféra celeste. Esta función expresada en términos de los armónicos esféricos se lee como

$$\Delta T(\theta, \varphi)/\bar{T} = \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{2.147}$$

$$\alpha_{lm} = \int d^2\Omega \left(\Delta T(\theta, \varphi)/\bar{T}\right) Y^*_{lm}(\theta, \varphi), \tag{2.148}$$

estos coeficientes a su vez se pueden leer como

$$\alpha_{lm} = c \int d^2\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \int d^3k \exp(i\vec{k}.\vec{x}) \frac{1}{k^2} < \hat{\pi}(\vec{k}, \eta) >, \tag{2.149}$$

donde $c \equiv -\frac{4\pi G\dot{\phi}_0(\eta)}{3a}$ y $\eta = \eta_0$. Como notamos α_{lm} depende de $< \hat{\pi}(\vec{k}, \eta) >$, que es una cantidad bien definida en nuestro tratamiento, tiene una dependencia estocástica, lo que significa que depende de una función aleatoria. Este mecanismo estocástico ocurre porque las teorías de colapso nos dan un ensamble de posibles universos con distintas posibilidades de realización
A partir de la ecuación (2.149) y de $\exp i\vec{k}.\vec{x} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\hat{k})$ se tiene

$$\alpha_{lm} = i^l 4\pi c \int d^3k j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{k}) \frac{1}{k^2} < \hat{\pi}(\vec{k}, \eta) >, \tag{2.150}$$

siendo R_D el radio cómovil de "last scattering", $\vec{x} = \vec{R_D}(\sin(\theta)\sin(\varphi), \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$ y $\vec{k} = k\hat{k}$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{|\alpha_{lm}|}^2 &= (4\pi c)^2 \int d^3k j_l^2(kR_D) |Y_{lm}(\hat{k})|^2 \frac{1}{k^4} f(k) \\ &= (4\pi c)^2 \int_0^\infty dk j_l(kR_D)^2 \frac{1}{k^2} f(k), \end{aligned} \tag{2.151}$$

notando que $f(k) = \alpha k$, con α es una constante, el resultado se vuelve independiente de R_D. Esto se refiere a que el espectro es invariante de escala. En ese caso,

$$\overline{|\alpha_{lm}|}^2 = (4\pi c)^2 \alpha \int_0^\infty dx j_l^2(x) \frac{1}{x} = (4\pi c)^2 \alpha \frac{l}{2l(l+1)} \tag{2.152}$$

para que esto pueda ser válido, es necesario que se satisfaga

$$\overline{< \hat{\pi}(k) >^2} \simeq k \tag{2.153}$$

A continuación se introducen las teorías de Colapso con localización continua, CSL, las cuales describen el colapso hacia uno u otro de los estados del operador $\hat{A}$ con una tasa de colapso λ.

Al incorporar la teoría de CSL la ecuación dinámica ahora estará dada por la ecuación de Lindblad:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[\hat{H}, \rho(t)] - \frac{\lambda}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \rho(t)]], \tag{2.154}$$

usando esto la ecuación correspondiente al moménto estará dada por:

$$\overline{\langle P \rangle}^2 = \overline{\langle P^2 \rangle} - \frac{1}{2(A + A^*)}. \tag{2.155}$$

Cuando en [13] se trata usando CSL al operador momento como operador de colapso, $\hat{A} = \hat{P}$ se encuentra

$$\overline{\langle \hat{P} \rangle}^2 = \frac{\lambda k^2 \mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2} - \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2}}}, \tag{2.156}$$

el cual se anula para $\lambda = 0$, siendo $\mathcal{T}$ el tiempo conforme al inicio de la época de inflación. Para que el espectro sea invariante de escala, es necesario que el término dominante va como

$$\lambda = \tilde{\lambda}/k, \tag{2.157}$$

con $\tilde{\lambda}$ un parámetro de dimensiones de tiempo^{-1}. De manera similar cando en [13] se trata usando CSL al operador campo como operador de colapso, $\hat{X}$, tenemos el siguiente espectro

$$\overline{\langle \hat{P} \rangle}^2 = \frac{\lambda \mathcal{T}}{2} - \frac{\sqrt{k^4 + 4\lambda}}{\sqrt{k^2 - 2i\lambda} + \sqrt{k^2 + 2i\lambda}}, \tag{2.158}$$

que para el caso $\lambda = 0$ la expresión se anula. El requerimento para que este espectro sea invariante de escala es que se satisfaga que el término dominante vaya como

$$\lambda = \tilde{\lambda} k, \tag{2.159}$$

es en este ultimo caso en el que basaremos nuestro análisis.
Procedemos a revisar las estimaciones de magnitud que justificarán las aproximaciones que se harán en este trabajo. Empezamos diciendo que las fluctuaciones de temperatura van como

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3}\psi \approx 10^{-5} \tag{2.160}$$

Considerando el término dominante en (2.158) tenemos que

$$\overline{\langle P \rangle^2} \approx \frac{\lambda \tilde{k} \mathcal{T}}{2}, \tag{2.161}$$

que se puede reescribir como

$$\left[\frac{\Delta T}{T}\right]^2 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{4\pi G \phi_0'}{3a}\right]^2 \tilde{\lambda} \mathcal{T} \mathcal{I}, \tag{2.162}$$

donde $\mathcal{I}$ representa una suma de modos k, $\mathcal{I} = \int_{10^{-3}}^{10^2} dk/k \approx 11{,}5$, los límites de integración representan el rango observado para k, $10^{-3} Mpc^{-1} < k < 10^2 Mpc^{-1}$.
Como se ha discutido en [14], el efecto en el periodo de reheating está dado por

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \approx \frac{1}{\epsilon} \frac{V}{M_p^4} \tilde{\lambda} \mathcal{T} \mathcal{I}. \tag{2.163}$$

De las observaciones se tiene que $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \sim 10^{-10}$. La desviación de la planitud del espectro nos indica que $\epsilon \approx 10^{-2}$. Con $V^{1/4}$ pensado por la escala de GUT $\approx 10^{15} GeV \approx 10^{-4} M_p$ y tomando $\mathcal{I} \approx 10$ se puede concluir que $\tilde{\lambda}\mathcal{T}$ es del orden de $10^3 \gg 1$.

Ahora que se ha revisado el modelo cosmológico actual y cómo se han dado propuestas alternativas al modelo estándar para poder explicar la emergencia de estructura, damos paso al estudio de un problema que surge de no considerar aspectos interpretativos de la Mecánica Cuántica: el de la inflación eterna. Primero revisaremos la versión “estándar” de este problema y más adelante haremos una crítica a esta.

Capítulo 3

Inflación eterna

3.1. ¿Qué es la inflación eterna?

En la década de 1980, un conjunto de cosmólogos, entre los que se encuentran los profesores Steinhardt, Linde, Guth [15] [16] [17] mediante una serie de trabajos argumentaron que las fluctuaciones del campo de inflatón podían conducir al problema de inflación eterna. A continuación daremos a conocer este enfoque, basándonos en el trabajo de Linde de 1986 [16]. Consideramos la acción de Einstein-Hilbert (2.94). Las ecuaciones de evolución del campo estarán dadas a través de (2.101) y la ecuación de Friedmann para un universo permeado de una constante cosmológica:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}(\frac{1}{2}\dot{\phi_0}(t)^2 + \frac{m^2}{2}\phi_0(t)^2). \tag{3.1}$$

Para $\phi_0 > M_p$, las soluciones a las ecuaciones (2.101) y (2.101), se aproximan rápidamente al régimen asintótico, estas son:

$$\phi_0 = \phi_{in} - \frac{mM_p}{2\sqrt{3\pi}t}, \tag{3.2}$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(\frac{2\pi}{M_p^2}(\phi_{in}^2 - \phi_0^2(t))\right), \tag{3.3}$$

estas ecuaciones han sido escritas en términos del tiempo físico, $dt = ad\eta$ y se ha usado la identificación $G = M_p^2$. A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene un tiempo crítico, $t_{crit} < 2\sqrt{3\pi}\phi/mM_p$, en el cual el campo permanece sin cambios y el universo se expande cuasi-exponencialmente $a(t + t_{crit}) \simeq a(t)\exp{(Ht_{crit})}$, donde

$$H = \frac{2\sqrt{\pi}m\phi_0}{\sqrt{3}M_p} \tag{3.4}$$

$H >> t_{crit}^{-1}$ para $\phi_0 >> M_p$. Esta expansión cuasi-exponencial hace que el universo sea localmente homogéneo e isótropo. Sin embargo, también la inflación es capaz de crear fluctuaciones de origen cuántico, $\delta_{quan}\phi(x)$ sobre el campo clásico ϕ_0. Estas fluctuaciones serán generadas durante un tiempo $\Delta t = H^{-1}$, en la teoría aquí presente las fluctuaciones se consideran como una distribución de perturbaciones del campo clásico $\delta_{quan}\phi(x)$ con una amplitud independiente del tiempo

$$|\delta_{quan}\phi_0(x)| \sim \frac{H(\phi_0)}{\sqrt{2}\pi} \sim \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m\phi_0}{\pi M_p}, \tag{3.5}$$

y con una longitud de onda inicial $\Delta l \sim H^{-1}$. Más tarde estas longitudes de onda crecerán con $a(t)$, pero a su vez se tendrán nuevas perturbaciones con la "nueva" longitud de onda $\Delta l \sim H^{-1}$. Las inhomogeneidades del campo ϕ_0 dan lugar a perturbaciones en la densidad $\delta_{quan}\rho(x)$.
Durante un tiempo $\Delta t = H^{-1}$ el promedio del campo ϕ_0 decrece por

$$\Delta\phi_0 = \frac{1}{4\pi}M_p^2\phi_0^{-1} \tag{3.6}$$

de las ecuaciones (3.5) y (3.6) se sigue que

$$|\delta_{quan}\phi_0| \lesssim \Delta\phi_0 \qquad \text{si} \qquad \phi_0 \lesssim (M_p/3)(M_p/m)^{1/2} \tag{3.7}$$

y en este caso domina el campo clásico. Cuando

$$|\delta_{quan}\phi_0| \gtrsim \Delta\phi_0 \qquad \text{si} \qquad \phi_0 \gtrsim, (M_p/3)(M_p/m)^{1/2}, \tag{3.8}$$

domina el comportamiento cuántico, donde $M_p \lesssim \phi_0 \lesssim 10^5 M_p$. Esto significa que la región $M_p \lesssim \phi_0 \lesssim M_p(M_p/m)$ en la cual la inflación ocurre, se divide en dos subregiones:

- Para $\phi_0 \lesssim (M_p/3)(M_p/m)^{1/2} \sim 100M_p$, la evolución del campo escalar ϕ_0 en todos los puntos será descrita por la ecuación (3.2).

- Para $\phi_0 \gtrsim (M_p/3)(M_p/m)^{1/2} \sim 100M_p$, solo el promedio del campo ϕ_0 (promediado sobre la coordenada inicial del volumen del universo(no especifican pero supongo que realmente se refiere al comienzo del periodo de inflación) obedece la ecuación (3.2) y el rol de las fluctuaciones juega un papel importante.

En este trabajo consideran un dominio del universo de tamaño $\Delta l \gtrsim O(H^{-1}(\phi_0))$ que contiene suficiente campo homogéneo, $\phi_0 >> (M_p/3)(M_p/m)^{1/2}$. De acuerdo al teorema del "no pelo" para el espacio de Sitter, la inflación en tal dominio es independiente de lo que ocurre fuera de esta región. Basados en lo anterior, los autores de estre trabajo señalan que tal dominio puede considerarse como un "pocket-universo" o mini-universo inflacionario. Después de un tiempo típico $\Delta t = H^{-1}$ el tamaño de este dominio crecerá e veces, su volumen crecerá e^3 veces, este se convertirá en 27 mini-universos de tamaño $O(H^{-1})$ al dividir por $O(e^3)$, estos mini-universos contienen al campo $\phi_0 - \Delta\phi_0 + \delta_{quan}\phi_0(x)$. Como la longitud de onda típica del campo $\delta_{quan}\phi_0(x)$ que se genera durante el intervalo de tiempo $\Delta t = H^{-1}$ es $O(H^{-1})$ y la amplitud de $\delta_{quan}\phi_0$ es $O(H)$, el valor del campo ϕ_0 aproximadamente en la mitad de los mini-universos de tamaño $O(H^{-1})$ decrecerá por un factor de $O(H)$, mientras que en otra mitad del dominio el campo crecerpa como $\phi_0 + \delta_{quan}\phi_0(x) - \Delta\phi_0 \approx \phi_0 + O(H)$. El volumen físico del universo ocupado por el crecimiento del campo durante cada intervalo $\Delta t = H^{-1}$ crece $O(e^3/2)$ veces. Entonces, pensando que el promedio del campo ϕ_0 decrece debido a que rueda lentamente hacia el mínimo de energía potencial (3.2), el volumen físico del universo se llena con un permanente crecimiento del campo ϕ_0, se incrementa como $\exp{(3 - \ln 2)Ht} \gtrsim \exp{4m\phi_0 t/M_p}$, y el volumen físico de los mini-universos, en el cual el campo ϕ_0 no decrece, crece casi tan rapido como $\frac{1}{2}\exp{3Ht}$. Esto genera la siguiente consecuencia:

Los mini-universos de longitud inicial $l \gtrsim O(H^{-1})$ contienen el campo $\phi_0 \gtrsim (M_p/3)(M_p/m)^{1/2}$ reproducirán infinitamente otros mini-universos con:

$$\phi_0 \gtrsim (M_p/3)(M_p/m)^{1/2} \tag{3.9}$$

Este proceso ocurriría sin fin dando lugar a lo que se conoce como inflación eterna.

Capítulo 4

El enfoque desarrollado en esta tesis

4.1. Crítica a Inflación eterna

En este capítulo analizaremos los detalles que se asumen en la historia de inflación eterna. El autor menciona que la inflación en capaz de crear fluctuaciones de origen cuántico, $\delta_{quan}\phi(x)$, las cuales asume son fluctuaciones estocásticas, cuyos valores cambian de un punto a otro, pues hace referencia a que éstas se consideran como una distribución de perturbaciones del campo clásico. A continuación resaltamos inconsistencias en este modelo

> En la sección **2.1.6** se discutió sobre la importancia de poder diferenciar entre tres tipos de fluctuaciones, de manera particular se enfatizo en la diferencia entre **Fluctuaciones cuánticas** y **Fluctuaciones estadísticas**. Recordamos que las primeras hacen referencia a indeterminaciones de estados cuánticos o de la función de onda. En este caso no estamos hablando de un aspecto estocástico como en el caso de las Fluctuaciones estadísticas, en el cual sí pensamos que existe una colección de procesos, cada uno con un peso distinto de probabilidad de ocurrencia. Si el autor menciona que la inflación es capaz de crear fluctuaciones de origen cuántico, de acuerdo a la definición de esta, no existirá carácter estocástico en este proceso, sin lo cual la inflación eterna no podría llevarse a cabo.

> Otro aspecto por resaltar detrás de su enfoque es que al considerar erroneamente a las fluctuaciones cuánticas como estocásticas supone que estas tendrán valores distintos de un punto a otro. Notemos que el modo responsable de la inflación es el modo cero del campo de inflatón, el cual por definición es independiente de la posición. Esto significa que aun en el supuesto de tener una fluctuación de tipo estocástica, lo que ocurra en un punto se verá idéntico a lo que ocurra en otro. Al ser ϕ_0 independiente de la posición no existe otra opción. La noción de considerar el espacio dividido en dos regiones y pensar que en cada una de ellas sucederán distintas cosas para el campo ϕ_0 también es erróneo pues este no puede cambiar de una región a otra, ya que por definición no depende de la posición.

Hasta aquí, habiendo señalado los puntos anteriores no existiría posibilidad de que algo, como el problema de inflación eterna surgiera, pues con lo antes descrito no hay posibilidad alguna de que esto ocurra. Sin embargo es necesario notar que esta no puede ser la historia final, pues como ya se mencionó en **3.5.5**, para que podamos hablar de formación de estructura es indispensable introducir las Teorías de Colapso, sin este elemento no es posible dar cuenta del rompimiento de la homogeneidad e isotropía. Entonces, al entrar el colapso en esta teoría, entra en juego también el carácter estocástico que lleva en su naturaleza. En este marco podríamos considerar la posibilidad de atribuir una distribución que cambie su valor de un punto a otro, pero recordemos que el periodo de inflación es descrito por el modo cero del campo de inflatón, que por definición no depende de la posición.

4.2. Consideraciones y objeciones

Antes de mostrar nuestra propuesta al problema de inflación eterna, comentaremos sobre el trabajo [18], donde el Dr. Gabriel León en 2017, propone dar solución al problema de inflación eterna con el enfoque que incorpora SSC más Teorías de Colapso espontáneo con localización continua, CSL.
En la referencia mencionada, el autor también reconoce que para dar cuenta de la formación de estructura es necesario optar por el tratamiento que incorpora Teorías de Colapso. Basado en el trabajo [13] elige que el operador de colapso sea el operador momento, la motivación que el autor tiene en mente es que este operador íntimamente relacionado con el potencial Newtoniano,

$$\psi_k = \left(\frac{\epsilon_1}{2}\right)^{1/2} \frac{H}{M_P k^2} a \left\langle \delta\hat{\dot{\phi}}_k \right\rangle , \tag{4.1}$$

donde ϵ_1 es el parámetro de Slow-roll. Sin embargo esto implicaría, por el resultado en [18] que la taza de colapso vaya como $\lambda = 1/k$.
El autor argumenta que la incertidumbre del modo cero del campo de inflatón es cero. Trata separadamente al modo $k = 0$ de los modos $k \neq 0$.

4.3. Propuesta de solución a inflación eterna

En esta sección daremos a conocer nuestra propuesta de inflación eterna. Comenzamos señalando que en [18] se trabaja con la expresión $\lambda = 1/k$ la cual no estaría definida para el modo cero del campo, el autor trabaja de manera independiente a los modos $k \neq 0$ y $k = 0$, pues argumenta que la incertidumbre del modo cero del campo de inflatón es cero. De ser cierto lo anterior, por el principio de Heisenberg implicaría que la incertidumbre del momento fuese infinita, hecho que impide proceder a un análisis basado en el colapso del operador $\delta\hat{\dot{\phi}}_k$.

Si bien concordamos con el autor de [18] en que la descripción oficial está basada en el error conceptual de identificar incertidumbres cuánticas con fluctuaciones estocásticas, de manera que sin un mecanismo tipo colapso no hay razón para pensar que el valor medio del modo cero del campo se mueva de una manera diferente que el generado por la ecuación de Schrödinger, y para este caso esté regido esencialmente por el teorema de Ehrnfest, pensamos que hay otro problema más: tomando en cuenta el hecho de que el modo cero del campo de inflatón, ϕ_0 es independiente de la posición, por definición, no es lógico pensar que el campo ϕ_0 se pueda a comportar de manera distinta en distintas regiones. El comportamiento del modo cero debe ser el mismo en cualquier punto del espacio.

Ahora bien, como también se mencionó en la sección (**2.5.3**) al atender el problema de formación de semillas de estructura es necesario introducir colapsos para que tenga sentido el romper la homogeneidad e isotropía, y así generar las anisotropias primordiales que como hemos visto, para ser viables empíricamente, han de estar caracterizadas estadísticamente por un espectro (2.159) que sea invariante de escala. Hemos visto en [13] que si se adopta la propuesta de que el operador que genera el colapso espontáneo es el operador ligado la campo cuántico mismo (y no al momento conjugado) entonces este requerimiento implica que el la taza de colapso, λ deba ir como

$$\lambda = \tilde{\lambda} k, \tag{4.2}$$

siendo k el modo del campo.

Como podemos notar, bajo estas condiciones en el caso del modo $k = 0$ no existirán colapsos, al no existir estos, el tratamiento que se le da a este modo sigue siendo el tratamiento usual, a través del cual no se genera tal problema como el de inflación eterna, ya que su comportamiento (en contraste con el de otros modos) seguirá siendo el generado por la ecuación de Schrödinger.
A primera vista parecería que estas consideraciones resuelven totalmente el problema pero lamentablemente dicha conclusión no es completamente adecuada. El problema se complica cuando consideramos la existencia de modos que son de longitud de onda tan larga que efectivamente se podría considerar que pudiesen tener efectos locales indistinguibles del modo cero. En nuestra opinión y tratándose particularmente de sus efectos gravitacionales, dichos modos corresponderían a aquellos que tiene longitud de onda física $\lambda_{fis}(k, \eta)$ (no confundir la longitud de onda con la tasa de colapso) mayor que el horizonte de partícula al momento de interés η, para estos el potencial Newtoniano es esencialmente constante en función de x de tal manera que la métrica se puede escribir como

$$\begin{aligned} g_{ab} &= a^2(\eta)[-(1 + 2\psi(\eta))d\eta^2 + (1 - 2\psi(\eta))\delta_{ij}dx^i dx^j] \\ &= a^2(\eta)(1 - 2\psi(\eta))[-(1 + 2\psi(\eta))(1 - 2\psi(\eta))^{-1}d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j] \\ &= \tilde{a}^2(\tilde{\eta})[-d\tilde{\eta}^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j], \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde la nueva variable de tiempo conforme es $d\tilde{\eta} = [(1+2\psi(\eta))(1-2\psi(\eta))^{-1}]^{1/2}d\eta$ y redefinimos al factor de escala como $\tilde{a} = a(1 - 2\psi)^{1/2}$. De esta manera los modos con k suficientemenete pequeño podrían contribuir de manera efectiva a controlar lo que usualmente se atribuye al modo cero, es decir, el comportamiento del factor de escala aplicado a la región de interés conectada causalmente, que es la región dentro de nuestro horizonte de partícula.
El autor [18] considera relevantes los modos con k más pequeños que R_H como se hace en otras situaciones de inflación eterna. Cabe notar que R_H sirve para diferenciar situaciones en que hay o no hay equilibrio térmico en un fluido y no necesariamente aplica para consideraciones cuánticas, de hecho en la referencia [19] se muestra que puede haber correlaciones que incluso exceden el tamaño

del horizonte.

Como ya mencionamos, nos interesan los efectos de los modos k con:

$$\lambda_{fis}(k,t) = a(t)\frac{2\pi}{k} \gg \frac{1}{H_I}[e^{H_I(t-t_I)} - 1] \sim \frac{1}{H_I}[e^{H_I(t-t_I)}], \tag{4.4}$$

donde en la última estimación nos hemos concentrado en una época relativamente bien adentrada dentro del régimen inflacionario (después de un par de e- folds) en lugar de solo el inicio donde el tamaño del Horizonte sería cero (al menos en nuestro análisis que en realidad tendría que ser levemente modificado).

Tomando que el factor de escala en tiempo cósmico esa dado durante el régimen e inflacionario en una buena aproximación como $a(t) = Ce^{H_I t} = -1/(H_I\eta)$ tenemos que los modos relevantes serian aquellos que

$$\frac{2\pi}{k} \gg \frac{1}{H_I a(t_f)}[e^{H_I(t-t_I)}] = \frac{1}{H_I a(t_f)}[\frac{e^{H_I t}}{e^{H_I t_I}}] = \frac{1}{H_I a(t)}[\frac{Ce^{H_I t}}{Ce^{H_I t_I}}] = \frac{1}{H_I}[\frac{1}{Ce^{H_I t_I}}] = \mathcal{T} \tag{4.5}$$

donde en la última linea se usó de que al inicio de inflación se tiene $a(t_I) = \frac{1}{H_I\mathcal{T}}$. De manera que los modos relevantes son los que satisfacen

$$k \ll k_{crit} = \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \tag{4.6}$$

y son por lo tanto los mismos en todo momento. Esta conclusión podría parecer extraña hasta que uno nota que tanto el Horizonte de Partícula como la longitud de onda física de de un modo de longitud de onda co-móvil de un modo de k escalan de la misma manera a causa de la expansión cósmica.

El siguiente punto es tratar de estimar el desplazamiento del valor esperado del campo asociado con el colapso dichos modos. Esto es un asunto no trivial. Como ya dijimos a falta de colapso no hay desplazamiento del valor de expectación mas allá del dado por la ecuación de Schrödinger y que esperamos este reflejando reflejado en este caso por las ecuaciones clásicas dado el teorema de Ehrenfest.

Par llevar a cabo esta estimación hacemos uso del análogo a la ecuación (70) del articulo [13], (2.155), pero para las variables de campos asociados con cada modo k. Esta ecuación nos indica que $\overline{\langle X \rangle^2} = \overline{\langle X^2 \rangle^2} - \frac{1}{16|ReA'(\eta)|}$, que como sabemos se anula en el caso sin colapso. Dicha ecuación se obtiene al analizar la ecuación diferencial que proviene de la teoría de CSL.

Usando que $\delta\phi = a^{-1}y$ y que hemos usado en el análisis del modo de Fourier de este campo $\tilde{\hat{y}}_{\vec{k}} = \hat{X}(\vec{k})$, y trabajado con la variable de medida no cero $\hat{X}_{\vec{k}} = \sqrt{d^3k}\hat{X}(\vec{k})$ (donde d^3k representa un volumen "infinitesimal" en el espacio de las k's alrededor de $\vec{k}$). Entonces procedemos a hacer la estimación deseada de la siguiente manera. Asumimos que los desplazamientos en las variables ("discretas") $\hat{X}_{\vec{k}}$ son estadísticamente independiente (dado que los procesos estocásticos de la dinámica CSL se suponen independientes para cada modo), asi que

$$\overline{\langle\delta\phi\rangle^2} = a^{-2}\overline{\langle y_k\rangle^2} = a^{-2}\sum_{k<k_{crit}}\overline{\langle y_k\rangle^2} = a^{-2}\int_0^{k_{crit}} d^3k\overline{\langle X(k)\rangle^2} \tag{4.7}$$

Ahora estimamos esta última cantidad considerando que esta bien representada por el más evidente cambio que ocurre en la evolución del sistema cuando se introducen los efectos de CSL (ya que sabemos que si estos efectos generadores de los colapsos espontáneos la cantidad de interés seria cero). Se trata de la la adición de la solución del término inhomogeneo en la ecuación de evolución y correspondiente a la incertidumbre extra en X dada por el orden de magnitud de Q en la ecuación (99) del articulo [13] es decir, $Q = \frac{\lambda\eta}{2k^2}$.

$$\overline{\langle\delta\phi\rangle^2} = a^{-2}\int_0^{k_{crit}} 4\pi k^2 dk|Q| = a^{-2}\int_0^{k_{crit}} 4\pi k^2 dk\frac{\lambda|\eta|}{2k^2} = 2\pi a^{-2}|\eta|\int_0^{k_{crit}} dk\lambda \tag{4.8}$$

Finalmente escribimos $\lambda = k\tilde{\lambda}$, nosotros encontramos

$$\overline{\langle\delta\phi\rangle^2} = 2\pi\tilde{\lambda}a^{-2}|\eta|\int_0^{k_{crit}} kdk = \pi\tilde{\lambda}a^{-2}|\eta|k_{crit}^2 = \pi\tilde{\lambda}H_I^2|\eta|^3(\frac{2\pi}{\mathcal{T}})^2 \tag{4.9}$$

Notamos que el efecto es muy chico para $|\eta| < \mathcal{T}$ y se hace más pequeño a medida que avanza la inflación (recordando que η es negativo y crece hacia $\eta = 0$ (terminándose la época inflacionaria claramente de que esto último suceda). Calculando el desplazamiento cuántico del campo, derivamos 4.9 y multiplicamos por $d\eta$ encontramos

$$\frac{d}{d\eta}\sqrt{\overline{\langle\delta\phi\rangle}}d\eta = \frac{3H_I}{\mathcal{T}}\sqrt{\pi^3\tilde{\lambda}}|\eta|^{1/2}d\eta \tag{4.10}$$

Comparando con el desplazamiento clásico del campo es decir del valor esperado de $d\phi$ resultante de la parte estándar de la dinámica y considerado en las discusiones de infación eterna, sección 3.1,

$$d\phi = -\frac{a(\eta)^2 m^2\phi_0}{3\mathcal{H}(\eta)}d\eta \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{d}{d\eta}\sqrt{\overline{\langle\delta\phi\rangle}}d\eta}{\dot{\phi}_0(\eta)d\eta} &= 9(8/6)^{3/2}\pi^{9/4}\frac{\sqrt{\tilde{\lambda}}|\eta|^{3/2}}{\mathcal{T}}\frac{m\phi_0^2}{M_p^3} \\ &= 9(8/6)^{3/2}\pi^{9/4}\sqrt{\mathcal{T}\tilde{\lambda}}\left(\frac{|\eta|}{\mathcal{T}}\right)^{3/2}\left(\frac{m}{M_p}\right)\left(\frac{\phi_0^2}{M_p^2}\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde se ha escrito a H_I en términos de la masa de Planck $M_p \sim 10^{19}GeV$, $H_I = \sqrt{8\pi m^2\phi_0^2/6M_p^2}$. Notamos que $\tilde{\lambda}\mathcal{T}$ es del orden de 10^3, entonces $\sqrt{10^3} = 10\sqrt{10} \sim 30$. Se suele considerar que la masa del campo m es del orden de GUT, con lo cual podemos notar que $\left(\frac{m}{M_p^3}\right) \ll 1$, si tomamos el punto de vista que por consistencia, evitando entrar al régimen de gravedad cuántica (de la escala de Planck), tendremos que $\left(\frac{\phi_0^2}{M_p^2}\right) \ll 1$, con lo cual podemos concluir que

$$\frac{\frac{d}{d\eta}\sqrt{\overline{\langle\delta\phi\rangle}}d\eta}{\dot{\phi}_0(\eta)d\eta} \ll 1 \tag{4.13}$$

notamos que este enfoque es verdaderamente prometedor para ofrecer una resolución satisfactoria al problema de la inflación eterna, que por cierto, ha sido uno de los más fuertes argumentos usados en contra de la idea de inflación y el motivo por el que algunos de los mas entusiastas defensores iniciales de dicha idea hayan optado por abandonarla (citaré papers recientes de Steinhardt).

Claramente el tratamiento ofrecido aquí despierta varias incógnitas, entre ellas algunas del tipo general como, cual es la manera de hacer totalmente compatible una teoría de colapso espontáneo no solo con la relatividad especial sino también con la general [20], [21], [22], [23]. Otros problemas parecen un tanto mas técnicos, como de donde sale el factor k, refiriéndonos a la ecuación (4.2) del trabajo [13] .

En este sentido vale la pena mencionar que hemos tratado de encontrar si la expresión (4.2) puede provenir de principios geométricos, algunos cálculos que hasta el momento hemos realizado se encuentran en el apéndice: escalares de curvatura.

Capítulo 5

Conclusiones

El tema central en este trabajo fue dar a conocer la importancia de considerar aspectos interpretativos en la Mecánica Cuántica en el contexto cosmológico. Motivados en reconocer que la Mecánica Cuántica estándar no es una teoría satisfactoria para dar cuenta de las semillas de estructura, pues se ha mostrado que es necesario incorporar Teorías de Colapso Objetivo, analizamos el problema de inflación eterna basados en el contexto de Gravedad Semiclásica y teorías de colapso. Revisamos los estudios básicos del problema de Inflación eterna, publicados principalmente en la década de 1980 por Steinhardt, Linde, Guth, entre otros. Resaltamos que el error común de considerar fluctuaciones cuánticas como fluctuaciones estadísticas conlleva a un problema como es el de la Inflación Eterna. Estudiamos a su vez un trabajo que reconoce que el tratamiento para este problema debe darse en un contexto de Gravedad Semiclásica y Teorías de Colapso. Sin embargo objetamos algunos puntos de dicho artículo: que la incertidumbre del modo cero sea cero, lo cual conllevaría a tener una incertidumbre infinita para el momento, debido al principio de Heisenberg; comparar modos con λ_{fs} suficientemente grande con el modo cero usando el radio de Hubble, el cual es de utilidad cuando se analizan interacciones o procesos en que el asunto central es la presencia o no de equilibrio térmico, lo cual no se tiene en inflación. Nuestro trabajo hace énfasis en que por definición el modo cero del campo de inflatón no depende de la posición, teniendo como consecuencia que incluso un mecanismo estocástico no podría significar que cosas en una posición sean distintas en otra. También hacemos un estudio de los modos con λ_{fis} suficientemente grande (cuyo comportamiento es similar al modo cero del campo) comparando con el horizonte de partícula, el cual sí nos da una idea de las regiones que estuvieron casualmente conectadas. Finalmente mostramos que la taza entre el desplazamiento cuántico y clásico del campo es muy pequeña para estos modos, resultado que es verdaderamente prometedor para dar una resolución satisfactoria al problema de inflación eterna.

El resultado de esta tesis, junto con su precursor inmediato, el trabajo del Dr. Gabriel León [18] en cuanto a la inflación eterna representa después de las modificaciones dramáticas respecto a la generación de ondas gravitacionales primordiales durante inflación [24], [25], el segundo cambio verdaderamente dramático, resultado de los análisis basados en la incorporación de Teorías de Colapso a dicha situación.

Apéndice A

Cálculo de escalares

En este apéndice vamos a explorar posibilidades de relacionar con cantidades geométricas el factor k, que aparece de manera prominente en determinar la taza de colapso. Existen trabajos previos que sugieren que el colapso cuántico está vinculado con la geometría del espacio-tiempo [26], [27]. Aquí se explora a través de distintos escalares de curvatura para la métrica perturbada de FLRW si es posible hallar relación entre estas cantidades y k, (2.158).
Consideramos la 4-métrica perturbada de FLRW, cuyo elemento de linea está dado por

$$ds^2 = a(\eta)^2[-(1 + 2\psi(\eta, x)) + (1 - 2\psi(\eta, x))\delta_{ij}dx^i dx^j], \tag{A.1}$$

considerando $\psi(\eta, x) = \psi_k(\eta)e^{ikx} + \psi_{-k}(\eta)e^{-ikx}$ y tomando que $\psi_k(\eta) = \psi_{-k}(\eta)$. Entonces tenemos

$$\psi(\eta, x) = \psi_k(\eta) \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \tag{A.2}$$

que puede escribirse de la forma considerando $\psi(\eta, x) = \psi_k(\eta)e^{ikx} + \psi_{-k}(\eta)e^{-ikx}$ y tomando que $\psi_k = \psi_{-k}$. Entonces tenemos

$$\psi(\eta, x) = 2\psi_k \cos kx, \tag{A.3}$$

si hacemos la identificación $\psi_k(\eta) = \varepsilon\varphi(\eta)/2$, siendo $\varepsilon << 1$ tenemos

$$ds^2 = a(\eta)^2[-(1 + 2\varepsilon\varphi(\eta) \cos kx) + (1 - 2\varepsilon\varphi(\eta) \cos kx)\delta_{ij}dx^i dx^j], \tag{A.4}$$

no confundir φ con el empleado en la sección 2.5.6 matricialmente la métrica se lee

$$(g_{ab}) = a(\eta)^2 \begin{pmatrix} -(1+2\varepsilon\varphi\cos kx) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\varepsilon\varphi\cos kx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\varepsilon\varphi\cos kx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\varepsilon\varphi\cos kx \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

donde se ha omitido escribir la dependencia φ respecto de η y su inversa está dada por:

$$(g^{ab}) = \frac{1}{a(\eta)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+2\epsilon\varphi\cos kx)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\epsilon\varphi\cos kx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-2\epsilon\varphi\cos kx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-2\epsilon\varphi\cos kx} \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

El determinante de la métrica correspondiente es:

$$\begin{aligned} det(g_{ab}) = g = & -a(\eta)^8 + 16\varepsilon^4 a(\eta)^8\varphi(\eta)^4\cos^4(kx) \\ & - 16\varepsilon^3 a(\eta)^8\varphi(\eta)^3\cos^3(kx) \\ & + 4\varepsilon a(\eta)^8\varphi(\eta)\cos(kx) \end{aligned} \tag{A.7}$$

por ende

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} = & [a(\eta)^8 - 16\varepsilon^4 a(\eta)^8\varphi(\eta)^4\cos^4(kx) \\ & + 16\varepsilon^3 a(\eta)^8\varphi(\eta)^3\cos^3(kx) \\ & - 4\varepsilon a(\eta)^8\varphi(\eta)\cos(kx)]^{1/2} \end{aligned} \tag{A.8}$$

Aproximando a primer orden en ε la expresión anterior tenemos

$$\sqrt{-g(o_2)} \simeq a(\eta)^4(1-2\varphi(\eta)\varepsilon\cos kx) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{A.9}$$

aproximando a segundo orden se encuentra

$$\sqrt{-g(o_3)} \simeq a(\eta)^4(1-2\varphi(\eta)\varepsilon\cos kx - 2\varepsilon^2\varphi(\eta)^2\cos^2(kx)) + O(\varepsilon^2) \tag{A.10}$$

A continuación calcularemos el promedio de algunos escalares de curvatura sobre una hipersuperficie:

$$< R >= \frac{1}{^{(3)}V} \int_0^L dz \int_0^L dy \int_0^L dx \sqrt{-g} R \tag{A.11}$$

donde R denota al escalar en turno y $^{(3)}V$

$$^{(3)}V = \int_0^L dz \int_0^L dy \int_0^L dx \sqrt{-h} \tag{A.12}$$

el volumen de una hipersuperficie espacial. Este volumen a primer orden en ε está dado por

$$^{(3)}V(\varepsilon^2) \simeq \frac{a^3 L^2 (kL - 3\varepsilon\varphi \sin(kL))}{k}, \tag{A.13}$$

mientras que a segundo orden la expresión correspondiente se denota como:

$$^{(3)}V(\varepsilon^3) = \frac{a^3 \left(kL \left(3\varepsilon^2\varphi^2 + 4\right) + 3\varepsilon\varphi \sin(kL)(\varepsilon\varphi\cos(kL) - 4)\right)}{4k} \tag{A.14}$$

La expansión del escalar de Ricci a primer orden está dada por:

$$\begin{aligned} ^{(4)}R(\varepsilon^2) \simeq & \frac{6a''(\eta)}{a(\eta)^3} - \frac{2\varepsilon}{a(\eta)^3} [6\varphi(\eta)a''(\eta)\cos(kx) + 12a'(\eta)\varphi'(\eta)\cos(kx) \\ & + k^2 a(\eta)\varphi(\eta)\cos(kx) + 3a(\eta)\varphi''(\eta)\cos(kx)] \\ & + O\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

buscamos el promedio para $^{(4)}R(\varepsilon^2)^\alpha$ como se mostro en (A.11):

$$\begin{aligned} <^{(4)} R(\varepsilon^2)^\alpha > &= \frac{1}{^{(3)}V} \int_0^L dz \int_0^L dy \int_0^L dx \sqrt{-g(o_2)}^{(4)} R(\varepsilon^2) \\ &= \frac{2^\alpha 3^{\alpha-1} a(\eta)^4}{a''(\eta)} \left(\frac{a''(\eta)}{a(\eta)^3}\right)^\alpha \frac{1}{a^3(kL - 3\varepsilon\varphi\sin(kL))} \\ &\times \left[3kLa''(\eta) - \varepsilon \sin(kL) \left(6(\alpha+1)\varphi(\eta)a''(\eta)\right.\right. \\ &\left.\left. +12\alpha a'(\eta)\varphi'(\eta) + \alpha a(\eta)(3\varphi''(\eta) + k^2\varphi(\eta))\right)\right] \end{aligned} \tag{A.16}$$

si consideramos $L \to \infty$, se tiene:

$$\lim_{L\to\infty} <^{(4)} R(\varepsilon^2)^\alpha >= 2^\alpha 3^{\alpha-1} a^4 \left(\frac{a^4(\eta)}{a''(\eta)^3}\right) \tag{A.17}$$

La expansión del escalar de Ricci al cuadrado a primer orden está dada por:

$$
\begin{aligned}
{}^{(4)}R^2(\varepsilon^2) \simeq \frac{36a''(\eta)^2}{a(\eta)^6} - \frac{24\varepsilon}{a(\eta)^6}[k^2 a(\eta)\varphi(\eta)a''(\eta)\cos(kx) \\
+ 3a(\eta)a''(\eta)\varphi''(\eta)\cos(kx) + 6\varphi(\eta)a''(\eta)^2\cos(kx) \\
+ 12a'(\eta)a''(\eta)\varphi'(\eta)\cos(kx)] + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

Nuevamente mediante la expresión (A.11) obtenemos el promedio para $< ({}^{(4)}R^2(\varepsilon^2))^\alpha >$ y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
< ({}^{(4)}R^2(\varepsilon^2))^\alpha > = -\frac{3^{2\alpha-1}4^\alpha a(\eta)^4}{a''(\eta)a^3(kL - 3\varepsilon\varphi\sin(kL))}\left(\frac{a''(\eta)^2}{a(\eta)^6}\right)^\alpha \\
\times [3a''(\eta)(2(2\alpha+1)\varepsilon\varphi(\eta)\sin(kL) - kL) \\
+24\alpha\varepsilon a'(\eta)\varphi'(\eta)\sin(kL) \\
+2\alpha\varepsilon a(\eta)\sin(kL)\left(3\varphi''(\eta) + k^2\varphi(\eta)\right)]
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

tomando el límite $L \to \infty$ se encuentra

$$
\lim_{L\to\infty} < ({}^{(4)}R^2(\varepsilon^2))^\alpha > = 3^{2\alpha}4^\alpha \frac{a^4(\eta)}{a^2 a''(\eta)}\left(\frac{a''(\eta)^2}{a(\eta)^6}\right)^\alpha \tag{A.20}
$$

La expansión del escalar $R_{ab}R^{ab}$ a primer orden es:

$$
\begin{aligned}
{}^{(4)}R_{ab}R^{ab}(\varepsilon^2) \simeq & \frac{12\left(a(\eta)^2a''(\eta)^2 + a'(\eta)^4 - a(\eta)a'(\eta)^2a''(\eta)\right)}{a(\eta)^8} \\
& - \frac{12\varepsilon}{a(\eta)^8}\left(2a(\eta)^3a''(\eta)\varphi''(\eta)\cos(kx) + 4a(\eta)^2\varphi(\eta)a''(\eta)^2\cos(kx)\right. \\
& +k^2a(\eta)^2\varphi(\eta)a'(\eta)^2\cos(kx) - a(\eta)^2a'(\eta)^2\varphi''(\eta)\cos(kx) \\
& +4\varphi(\eta)a'(\eta)^4\cos(kx) + 6a(\eta)^2a'(\eta)a''(\eta)\varphi'(\eta)\cos(kx) \\
& \left.-4a(\eta)\varphi(\eta)a'(\eta)^2a''(\eta)\cos(kx)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

Hallamos el promedio y encontramos

$$
\begin{aligned}
<^{(4)} R_{ab}R^{ab}(\varepsilon^2)^\alpha >= &\frac{12^\alpha k a(\eta)^4 \left(\frac{a(\eta)^2 a''(\eta)^2 + a'(\eta)^4 - a(\eta)a'(\eta)^2 a''(\eta)}{a(\eta)^8}\right)^\alpha}{a^3(kL - 3\varepsilon\varphi\sin(kL))} \\
&\times L - \frac{1}{k\left(a(\eta)^2 a''(\eta)^2 + a'(\eta)^4 - a(\eta)a'(\eta)^2 a''(\eta)\right)} \\
&\times \varepsilon \sin(kL)\big(2\alpha a(\eta)^3 a''(\eta)\varphi''(\eta) + 2(2\alpha+1)\varphi(\eta)a'(\eta)^4 \\
&- 2(2\alpha+1)a(\eta)\varphi(\eta)a'(\eta)^2 a''(\eta) \\
&+ a(\eta)^2\left(\alpha a'(\eta)\left(6a''(\eta)\varphi'(\eta) - a'(\eta)\varphi''(\eta)\right)\right. \\
&\left.+\varphi(\eta)\big(2(2\alpha+1)a''(\eta)^2 + \alpha k^2 a'(\eta)^2\big)\right)\big)
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

Analizando el caso $L \to \infty$ se encuentra

$$
\lim_{L\to\infty} <^{(4)} R_{ab}R^{ab}(\varepsilon^2)^\alpha >= 12^\alpha \left(\frac{a(\eta)^2 a''(\eta)^2 + a'(\eta)^4 - a(\eta)a'(\eta)^2 a''(\eta)}{a(\eta)^7}\right)^\alpha
\tag{A.23}
$$

El promedio para Kretschmann, k a primer orden es:

$$
\begin{aligned}
<^{(4)} K(\varepsilon^2)^\alpha >= &\frac{1}{k\left(a(\eta)^2 a''(\eta)^2 + 2a'(\eta)^4 - 2a(\eta)a'(\eta)^2 a''(\eta)\right)} \\
&\times 3^{\alpha-1} a(\eta)^4 \left(\frac{4a(\eta)^2 a''(\eta)^2 + 8a'(\eta)^4 - 8a(\eta)a'(\eta)^2 a''(\eta)}{a(\eta)^8}\right)^\alpha \\
&\times \frac{kL^2}{a^3 L^2 (kL - 3\varepsilon\varphi\sin(kL))} \\
&\big(a(\eta)^2 a''(\eta)\left(3a''(\eta)(kL - 2(2\alpha+1)\varepsilon\varphi(\eta)\sin(kL))\right. \\
&\left.+\ 2\alpha\varepsilon a(\eta)\sin(kL)\big(k^2\varphi(\eta) - 3\varphi''(\eta)\big)\right) \\
&+ 6a'(\eta)^4(kL - 2(2\alpha+1)\varepsilon\varphi(\eta)\sin(kL)) \\
&- 6a(\eta)a'(\eta)^2\left(a''(\eta)(kL - 2(2\alpha+1)\varepsilon\varphi(\eta)\sin(kL))\right. \\
&\left.+\alpha\varepsilon a(\eta)\sin(kL)\big(k^2\varphi(\eta) - \varphi''(\eta)\big)\right) - 12\alpha\varepsilon a(\eta)^2 a'(\eta)a''(\eta)\varphi'(\eta)\sin(kL)\big)
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

Cuando $L \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{L\to\infty} <^{(4)} K(\varepsilon^2)^\alpha >= \\
&3^{\alpha-1}\left(\frac{4a(\eta)^2a''(\eta)^2+8a'(\eta)^4-8a(\eta)a'(\eta)^2a''(\eta)}{a(\eta)^4}\right)^\alpha \\
&\times \frac{6(1-a(\eta)a'(\eta)^2)}{a(\eta)^2a''(\eta)^2+2a'(\eta)^4-2a(\eta)a'(\eta)^2a''(\eta)}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

El escalar de Weyl en serie, a segundo orden, se escribe como:

$$W(\varepsilon^3) \simeq \frac{16\varepsilon^2k^4\varphi(\eta)^2\cos^2(kx)}{3a(\eta)^4} + O\left(\varepsilon^3\right) \tag{A.26}$$

elevando el resultado anterior a la potencia 1/2 encontramos

$$\sqrt{W(\varepsilon^3)} = \frac{4\varepsilon k^2\varphi(\eta)\cos kx}{\sqrt{3}a(\eta)^2}, \tag{A.27}$$

promediamos haciendo uso de la expresión:

$$< \sqrt{W(\varepsilon^3)} >= \frac{1}{^{(3)}V(\varepsilon^3)}\int_0^L dz\int_0^L dy\int_0^L dx\sqrt{-g(\varepsilon^3)}\sqrt{W(\varepsilon^3)}, \tag{A.28}$$

obteniendo como resultado

$$\begin{aligned}
<\sqrt{W(\varepsilon^3)} >= &\frac{8a(\eta)^2k^2\varepsilon\varphi(\eta)}{3\sqrt{3}a^3} \\
\times &\frac{4\varepsilon^2\varphi(\eta)^2-2+2\varepsilon\cos kL\varphi(\eta)-\frac{4}{3}\varepsilon^2\sin kL\varphi(\eta)^2+6\varepsilon kL\varphi(\eta)/\sin kL}{kL(4+3\varepsilon^2\varphi^2)/\sin kL+3\varepsilon\varphi(\varepsilon\varphi\cos kL-4)}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

si pensamos que la caja en la que estamos integrando tiene un volumen, tal que $L \to \infty$, obtenemos

$$< W(\varepsilon^3)^{1/2} >= \frac{16\varepsilon^2k^2(\eta)\varphi^2(\eta)}{\sqrt{3}a}, \tag{A.30}$$

expresión a partir de la cual podemos despejar k y tenemos:

$$k = \frac{3^{1/4}a^{1/2} < W(\varepsilon^3)^{1/2} >^{1/2}}{4\varepsilon a(\eta)\varphi(\eta)} \tag{A.31}$$

Considerando
$$-k^2\psi(\eta,\mathbf{k}) = \frac{4\pi G\phi_0'(\eta) < \hat{\pi}(\mathbf{k},\eta) >}{a}, \tag{A.32}$$
la ecuación (A.31) se escribe como
$$k^{-1} = \frac{3^{1/4}a^{1/2} < W(\varepsilon^3)^{1/2} >^{1/2}}{4a(\eta)4\pi G\phi_0'(\eta) < \hat{\pi}(\mathbf{k},\eta) >} \tag{A.33}$$

Apéndice B

Conceptos matemáticos

Definición B.0.1. Un espacio métrico es un conjunto, M y una función real valuada $d(.,.)$ en $M \times M$ que satisfacen

(i) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

la función d es llamada una métrica de M.

Definición B.0.2. Una secuencia de elementos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio métrico $\langle M, d\rangle$ se dice que converge a un elemento $x \in M$, si $d(x, x) \to 0$ como $n \to \infty$.

Definición B.0.3. Una secuencia de elementos $\{x_n\}$ de un espacio métrico $\langle M, d\rangle$ se dice que es una secuencia de Cauchy si $(\forall \epsilon > 0)(\exists N) n, m \geq N$ implica $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Definición B.0.4. Espacio vectorial: Un espacio vectorial, o espacio linea, V sobre un campo K, es un conjunto en el cual dos operaciones, adición y multiplicación por un elemento de K, llamado escalar, son definidad. Los elementos $\mathbf{v} \in V$ llamados vectores satisfacen las siguientes propiedades

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

(ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

(iii) Existe el vector 0 tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(iv) Para cada $\mathbf{u}$, existe $-\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$.

(vi) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.

(vii) $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$.

(viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

en lo anterior $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $c, d \in K$, con 1 el elemento unidad de K.

Definición B.0.5. Mapeo Lineal: Dados V, W espacios vectoriales sobre K, entonces si $f : V \times W$ es un mapeo lineal si

1. $f(a\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Definición B.0.6. Dados (V, n), (W, m) espacios vectoriales sobre K, donde n y m denotan las dimensiones de los espacios, respectivamente. El conjunto de mapeos lineales entre V y W con las operaciones: $f(a\mathbf{w} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{w}) + f(\mathbf{v})$ y $(cf)(\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$, denotado como $\mathcal{L}(V, W)$ forman un espacio vectorial de dimensión $Dim(\mathcal{L}(V, W))$. Bajo la situación $Dim(\mathcal{L}, k) = Dim(V)$, al espacio vectorial $(\mathcal{L}, k)$ se le conoce como espacio dual de V, denotado por V^*

Definición B.0.7. Espacio normado: Un espacio lineal normado, es un espacio vectorial V, sobre un campo R, o C y una función, $||.|| : V \to$ R, la cual satisface

(i) $||\mathbf{v}|| \geq 0 \forall \mathbf{v} \in V$

(ii) $\mathbf{v} = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = 0$

(iii) $||\alpha\mathbf{v}|| = |\alpha|||\mathbf{v}||\forall\mathbf{v} \in V y \alpha \in \mathrm{R} \text{ o } \mathrm{C}$

(iv) $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||\forall\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Definición B.0.8. Sea $V = V(m, K)$ un espacio vectorial con una base $\mathbf{e_i}$ y sea g un espacio vectorial $g : V \rightarrow V^*$, podemos definir el producto interno entre dos vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ de V mediante

$$g(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \equiv < g\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} > \tag{B.1}$$

Definición B.0.9. Espacio de Hilbert: Un espacio de Hilbert, H es un espacio vectorial complejo con producto interno, tal que toda secuencia de Cauchy converge en el espacio [28], [29].

Apéndice C

Integral de Itô

La integral de Itô desarrollada por Kiyoshi Itô para el cálculo de procesos estocásticos, ha sido de gran utilidad en el área de matemáticas financieras y ecuaciones diferenciales estocásticas. A continuación, basados en [30] presentamos conceptos preliminares para poder dar a conocer su definición .

Definición C.0.1. σ-álgebra: Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{F}$ es una σ-algebra si se cumple

i El conjunto vacío pertenece a $\mathcal{F}$,

ii Siempre que un conjunto A pertenezca a $\mathcal{F}$, su complemento A^c también pertenecerá a $\mathcal{F}$,y

iii Siempre que una secuencia de conjuntos $A_1, A_2, ...$ pertenezcan a $\mathcal{F}$, entonces la unión $U_{N=1}^{\infty} A_n$ también pertenece a $\mathcal{F}$

Definición C.0.2. Espacio de probabilidad: Sea Ω un conjunto no vacío, F una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. Una medida de probabilidad P es una función que, a cada conjunto $A \in \mathcal{F}$, asigna un número en $[0, 1]$, llamada la probabilidad de A y se escribe $\mathrm{P}(A)$. Nosotros requerimos

i $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, y

ii siempre que $A_1, A_2, ...$ sea una secuencia de conjuntos discontinuos en $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathrm{P}\left(U_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n). \tag{C.1}$$

Al triplete $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ se le llama un espacio de probabilidad.

Definición C.0.3. Sea Ω un conjunto no vacío. Sea T un número fijo positivo se asume que para cada $t \in [0, T]$ existe una $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}(t)$. Se asume además que si $s \leq t$ entonces cada conjunto en $\mathcal{F}(s)$ está también en $\mathcal{F}(t)$. Entonces nosotros las nombramos: una colección de $\sigma-$algebras $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Definición C.0.4. Proceso Martingala Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, sea T un número fijo positivo, sea $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, un filtro de $\sigma-$álgebras de $\mathcal{F}$. Consideramos un proceso estocástico $M(t)$, $0 \leq t \leq T$.

i si $\mathrm{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] = M(s), \forall 0 \leq s \leq t \leq T$,

nosotros decimos que este proceso es martingala. No tiene tendencia a subir o bajar.

Integral de Itô: Consideramos un número fijo positivo T y se busca dar sentido a

$$\int_0^T \Delta(t) dW(t). \tag{C.2}$$

Los ingredientes básicos de esta construcción son el movimiento Browniano $W(t)$, $t \geq 0$, en conjunto con un filtro $\mathcal{F}$, $t \geq 0$, para este movimiento Browniano. Daremos el integrando $\Delta(t)$ adaptado a un proceso estocástico. La razón para hacerlo es que $\Delta(t)$ será eventualmente a posición que sr tome en un tiempo t, y eso típicamente depende de la trayectoria valor activo hasta el momento t. Todo lo que dependa de la ruta de un proceso aleatorio es en sí mismo aleatorio. Todos los incrementos en el movimiento Browniano después de un tiempo t son independientes de $\mathcal{F}(t)$, como Δt es $\mathcal{F}(t)$-medible, también debe ser independiente de estos futuros incrementos Brownianos. Las posiciones que toman los valores activos pueden dependender de su historial, pero deben ser independientes de los incrementos futuros del movimiento browniano que los impulsa. El problema al que se enfrenta dar sentido a esta integral es que las trayectorias del movimiento browniano no pueden diferenciarse en el tiempo, entonces se define

$$\int_0^T \Delta(t)dg(t) = \int_0^T \Delta(t)g'(t)dt, \tag{C.3}$$

donde el lado derecho de la igualdad anterior, es una integral ordinaria (integral de Lebesgue) con respecto al tiempo. No trabaja directamente integrando el movimiento Browniano. A continuación se muestra una versión de este trabajo, de integral de Itô, aplicado a las teorías de colapso.

C.1. Integral de Itô en teorías de colapso

En un espacio de Hilbert vamos a considerar un proceso Markoviano $|\psi_B(t)\rangle$ que satisface la siguiente ecuación, que se conoce como ecuación de Itô,

$$d\left|\psi\right\rangle = \left[Cdt + \mathbf{A}.d\mathbf{B}\right]\left|\psi\right\rangle, \tag{C.4}$$

el primer término corresponde a la parte hamiltoniana de la ecuación de Schrödinger estándar, siendo C un operador hermitiano. El segundo término en la ecuación representa un ruido que se ha agregado, en donde $\mathbf{A} = \{A_i\}$ es un conjunto de operadores y $\mathbf{B} = \{B_i\}$ es un conjunto de procesos de movimiento browniano, estos obedecen lo siguiente

$$<< dB_i >>= 0 \quad , \quad << dB_i dB_j >>= \gamma\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})dt, \tag{C.5}$$

γ es una constante real que se define como la volatilidad. En este caso estamos presentando el caso discreto, sin embargo i puede ser continuo, en ese caso la suma se remplaza por una integral y la delta de Kronecker se convierte en una delta de Dirac.

Bibliografía

[1] A. Bassi and G. Ghirardi. Dynamical Reduction Models, *Physics Reports* **379**, 257-426 (2003).

[2] T. Maudlin. Three measurments problems. Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1995).

[3] T. Norsen. Foundatons of Quantum Mechanics. Springer, (2017).

[4] T. Weber G. C. Ghirardi, A. Rimini. Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. PHYSICAL REVIEW D, 34(2), (1986).

[5] E.Okon D.Sudarsky G.R.Bengochea, G.León. Can the quantum vacuum fluctuations really solve the cosmological constant problem?, *The european physical journal C* (2020).

[6] R. Penrose. The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics. Oxford Landmark Science, (1989).

[7] A. Becker. What is Real. Basic Books, Nueva York (2018).

[8] R. Wald. General Relativity. The University of Chicago Press, Chicago (1984).

[9] S. Weinberg. Cosmology. Oxford, New York (2008).

[10] D. Sudarsky. Spontaneous Collapse Theories and Cosmology. Editors: Allori, V., Bassi, A., Drr, D., Zanghi, N., Do Wave Functions jump? Perspectives of the Work of Gian Carlo Ghirardi, Springer 2020 (en prensa).

[11] C. D. Geiker D. N. Page. Indirect evidence for quantum gravity. Physical Review Letters, (1981).

[12] D.Sudarsky A.Diez. Towards a formal description of the collapse approach to the inflationary origin of the seeds of cosmic structure, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **045** (2012).

[13] D.Sudarsky P. Cañate, P.Pearle. Continuos spontaneus localization wave function collapse model as a mechanism for the emergence of cosmological asymmetries in inflation, *Physical Review D* **87** (2013).

[14] D. Sudarsky A. Perez, H. Sahlmann. On the quantum origin of the seeds of cosmic structure. Classical and quantum gravity, (2006).

[15] P. J. Steinhardt A. Albrecht. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking, *Physical Review Letters* d**48** (1982).

[16] A.D. Linde. Eternal Chaotic Inflation , *Modern Physics letters* **2** (1986). pages 81–85.

[17] A. Guth. Inflationary universe: A possible solution to thehorizon and flatness problems, *Physical Review* d**23** (1981).

[18] G.León. Eternal inflation and the quantum birth of cosmic structure **77** (2017).

[19] R. Wald. Correlations beyond the horizon. Gen.Rel.Grav. 24 1111-1116, The Origin of Structure in the Universe, (1992).

[20] D.A. Albert Y, Aharonov. Is the usual notion of time evolution adequate for quantum mechanical system? II Relativistic considerations, *Physical Review D* **29** (1984).

[21] W.C. Myrvold. On peaceful coexistence: is the collapse postulate incompativle with relativity?, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **33** (2002).

[22] Roderich Tumulka. The Point Processes of the GRW Theory of Wave Function Collapse, *Reviews in mathematical physics* **21** (2009).

[23] D. Bedingham. Relativistic state reduction model, *Journal of Physics* (2011).

[24] S.J. Landau G. León, L. Kraiselburd. Primordial gravitational waves and the collapse of the wave function. Physics Review D, 92, (2015).

[25] E. Okón D. Sudarsky León García, A. Majhi. Reassessing the link between B-modes and inflation. Physics Review D, 96, (2017).

[26] L. Diósi. A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics. PHYSICAL REVIEW D, 120(16), (1987).

[27] R. Penrose. On gravity's role in Quantum State Reduction. Gen. Rel. Grav., 28(581), (1996).

[28] M. Nakahara. Geometry, Topology and Physics. Institute of physics publishing, London (2003).

[29] M. Reed B. Simon. Functional Analysis. Academic Press, San Diego (1980).

[30] S. E. Shreve. Stochastic calculus for finance. Springer, New York (2000).