UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Un acercamiento al invariante cardinal h.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

René Lenardo Ahumada Lemus

TUTOR:

Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Ciudad Universitaria, Cd.Mx. Octubre 2020.

Datos del alumno
Ahumada Lemus René Leonardo
5526894080
Universidad Nacional Autónoma de México.
Facultad de Ciencias
Matemáticas
099015424

Datos del tutor
Dr.Rodrigo Jesús
Hernández Gutiérrez

Sinodal 1
Dr. David
Meza Alcántara

Sinodal 2
Dr. Osvaldo
Guzmán González

Sinodal 3
Dr. David
Fernández Bretón

Sinodal 4
Dr. Miguel Ángel
Mota Gaytán

Datos del trabajo escrito
Un acercamiento al invariante cardinal h
93p
2020

Agradecimientos

Agradezco a mi familia y amigos. En particular a mis abuelitos Paula y Leo por la paciencia y calma transmitida durante estos y aquellos años. A Violeta mi madre agradezco mi existencia, alimentación y buena salud, entre tantas cosas no-numerables. A René mi padre por la heredada sonrisa y la ligereza para observar el mundo desde las alturas. A Pablo, hermano, compañero, amigo, por su importante presencia de la A a la Z en los episodios de esta aventura llamada vida. A Aurora por el rizomático lado V de las cosas. A mis tíos, tías, primos y primas por darle color y brillo a tantos momentos de ayer y hoy. A Elvis tan atinados presentes, a Marina y Emiliano lejos pero siempre cerca.

Académicos:

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez por haber aceptado dirigir este trabajo en un momento en el que todo se veía tenebroso. Fué muy agradable encontrar claridad en las explicaciones de los temas de este trabajo y en cualquier cosa que pregunté incluidas tonterias (ja), así como la guía en todos los sentidos. También ha servido para mi como fuente de motivación además de una gratificante convivencia de inicio a fin de este trabajo, también agradezco la oportunidad de ser su ayudante, así como su buena disposición para continuar trabajando ante cualquier inclemencia, como las veces que hubo que conseguir lugares de trabajo alternativos a causa de huelgas o distintas situaciones que se presentaron durante el proceso, incluida la crisis sanitaria a causa del COVID-19, también quisiera agradecer al Dr. Ángel Tamariz quien en repetidas ocasiones nos prestó su cubículo para continuar con el trabajo.

Agradezco también a mis sinodales los doctores: David Meza Alcántara, Osvaldo Guzmán González, David Fernández Bretón, Miguel Ángel Mota Gaytán, por su cuidadosa lectura, observaciones, correcciones, enseñanzas y por su buena disposición para los trámites y todo lo relacionado con este trabajo.

A la gente de la Facultad de ciencias:

Agradezco a Damián Real, Juan Flores y Germán Medina por su compañia y amistad, a Germán Medina también le agradezco estos años de ayudantía que han servido mucho en mi formación. En general agradezco a toda la gente que he podido conocer en la Facultad por sus curiosas formas de vivir, por tanta ociosidad y creatividad derrochada en aulas, areas verdes, campo de fútbol. Agradezco las retas nocturnas en la canchita y a todos sus integrantes: Damián, Lenin, Mene, Bragui, Lucenjov, Gil, Isacson, Edgar, Profe, Iván, Raúl, Erwin, Pato, Gorras, Rax, etc, agradezco, baile, amor y abundante esparcimiento, por todo eso que encuentro igual de necesario para la vida. A la UNAM por todo lo que he podido vivir y aprender aquí, mágnifico lugar de expansión, oasis, jardín epicúreo y más.

Para cerrar con broche de oro: Con amor agradezco a Erandi Sosa, con quién he compartido este proceso y con quien ha resultado la vida muy agradable y de quien también he aprendido mucho, espero que siga así. !Gracias por estos tiempos!

Índice general

0. Preliminares **11**

1. Compactación de Čech-Stone **15**

1.1. Definición de βX 15

1.2. Equivalencia de compactaciones. 18

1.3. El espacio de ultrafiltros. 23

1.4. $\beta\omega$ no es metrizable. 31

2. Invariantes Cardinales. **35**

2.1. Base para ω^*. 35

2.2. Los invariantes $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{t}$. 38

2.3. Axioma de Martin 42

2.4. Ultrafiltros y el cardinal $\mathfrak{p}$. 49

2.5. Familias casi ajenas. 56

3. El invariante $\mathfrak{h}$ **63**

3.1. Familias aplastantes 63

3.2. Número de distributividad. 72

3.3. Árbol matriz base para $[\omega]^\omega$ 77

3.4. Número de Novák 83

Bibliografía **89**

Introducción

A fines del siglo XIX, *Georg Cantor* estableció que la cardinalidad de los números naturales es menor a la cardinalidad del continuo en símbolos, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Este resultado representa el nacimiento de la *Teoría de conjuntos* y con ella, interesantes cuestionamientos sobre cardinalidad y sus repercusiones. Por ejemplo el mismo *Cantor* se preguntó cuál es la cardinalidad exacta de $\mathfrak{c}$; aunque se sabe que él mismo conjeturó que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ no pudo dar la demostración. Esta conjetura es lo que actualmente conocemos como hipótesis del continuo o CH y asegura que solamente hay 2 tipos de infinito que pueden caracterizar a los conjuntos infinitos de numeros reales, a saber $\aleph_0$ o $\aleph_1$.

Posteriormente los trabajos de *Gödel* y *Cohen* demuestran que CH es independiente a los axiomas de ZFC; es decir desde ZFC no se puede probar ni su veracidad, ni su negación, lo cual nos deja abierta la pregunta sobre la cardinalidad de $\mathfrak{c}$. Notemos que si CH falla, existen cardinales mayores que $\aleph_1$ que pueden ser candidatos para caracterizar la cardinalidad de $\mathfrak{c}$.

Hagamos la siguiente pregunta: Dada una propiedad que se cumple en colecciones de conjuntos de reales de cardinalidad $\aleph_0$. ¿ Es siempre posible extender dicha propiedad a colecciones de cardinalidad $\mathfrak{c}$?

La respuesta es que no siempre es posible y la definición de *invariante cardinal del continuo* comprende a este tipo de propiedades. Ahora si consideramos una propiedad P que se cumple para colecciones de conjuntos de cardinalidad $\aleph_0$ y no se cumple para colecciones de cardinalidad $\mathfrak{c}$, la pregunta obligada sería: ¿Para colecciones de que tamaño se dejó de cumplir P? la respuesta nos la dará el mínimo cardinal mayor que $\aleph_0$ donde no pasa P. Así un *invariante cardinal del continuo* es el mínimo cardinal mayor que $\aleph_0$ y menor que $\mathfrak{c}$ en el cual falla P.

Usualmente cada invariante cardinal se denota con una letra que hace referencia en el idioma inglés a la propiedad P de la que se esté tratando. Mencionemos algunos ejemplos conocidos.

i) Una colección «numerable» de conjuntos nunca densos no cubren la recta real. (*Teorema de la categoría de Baire*
ii) La unión de una colección «numerable» de conjuntos de Lebesgue con medida 0, tiene medida 0.
iii) Dada una colección «numerable» de sucesiones de números reales existe una sucesión que eventualmente domina a cada una de las anteriormente dadas.

Notemos que los enunciados anteriores se vuelven falsos si cambiamos la palabra «numerable» por «de cardinalidad $\mathfrak{c}$», esto nos sugiere de nuevo dos casos:

1) Si se cumple CH entonces $\mathfrak{c} = \aleph_1$ y cada uno de los enunciados de $i), ii), iii)$ fallan en el cardinal $\aleph_1$.

2) Si CH falla entonces existen cardinales entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$, se puede probar que es consistente con ZFC que cualquier cardinal entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$ sea el cardinal donde fallan los enunciados anteriores.

Por ejemplo es consistente que $\mathfrak{c} = \aleph_2$ y los enunciados fallen para colecciones de cardinalidad $\aleph_1$ y también es consistente que $\mathfrak{c} = \aleph_2$ y los enunciados se cumplan para colecciones de cardinalidad $\aleph_1$. Esto implica que decidir exactamente en qué cardinal entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$ fallan los enunciados anteriores no es posible desde ZFC.

Así cada uno de los enunciados de $i), ii), iii)$ determina un *invariante cardinal*, en este orden se denotan $cov(\mathcal{B}), add(\mathfrak{L}), \mathfrak{b}$.

El objetivo de esta tesis es estudiar al invariante cardinal $\mathfrak{h}$ y dicho estudio se puede abordar desde la topología general o desde la teoría de conjuntos, en este trabajo abordaremos ambas perspectivas.

A continuación daremos una breve reseña del camino seguido en este en trabajo:

El *capítulo 0*, es un capítulo de preliminares que consta de una lista de los resultados y definiciones que fuimos utilizando en el desarrollo de las pruebas de esta tesis, pero que no son necesariamente parte del contenido central.

En el *capítulo 1*, dimos la definición de compactación y algunos ejemplos. Después introdujimos una caracterización de la compactación de Čech-Stone. En la segunda parte del capítulo 1, presentamos el concepto de filtro, ultrafiltro y algunos resultados conocidos que nos serían útiles para definir el espacio de Stone de $\wp(X)$, como el conjunto de ultrafiltros en X y dotarlo de una topología, ver *Definiciones 1.44 y 1.45.* Probamos que el espacio de Stone de X, es cero dimensional, compacto y Hausdorff. Esto permite definir la compactación $e : X \to st(X)$ y verificar que dicha compactación es la de Čech-Stone de ω o bien $\beta\omega$. Por último vemos que $\beta\omega$ no es metrizable, probando que el residuo de $\beta\omega$ denotado ω^*, no es primero numerable.

En el *capítulo 2*, dimos una base para ω^*. Para el estudio de $\mathfrak{h}$, resultó natural y en cierta medida necesario revisar algunos de los invariantes cardinales cercanos a $\mathfrak{h}$ como $\mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}, \mathfrak{m}$ y algunas de sus relaciones. En la sección 2.4 se ilustra la conexión entre el espacio de ultrafiltros y el cardinal $\mathfrak{p}$, expusimos algunos resultados conocidos alrededor de la definición de P-punto, también introducida en esta sección y sugerimos una lista de artículos recientes para un futuro estudio. Para finalizar este capítulo, y pensando en abordar el último capítulo donde estudiaremos $\mathfrak{h}$, fue necesario incluir una sección dedicada a las familias casi ajenas, necesarias para iniciar el tercer capítulo con la definición de familia aplastante.

En las secciones 3.1 y 3.2 del *capítulo 3*, tomamos las siguientes variantes conocidas de $\mathfrak{h}$, comenzando con $\mathfrak{h}_1$: el mínimo cardinal tal que existe una familia aplastante, $\mathfrak{h}_2$: el mínimo tama*ñ*o de una colección de familias MAD sin refinamiento común y $\mathfrak{h}_3$: el mínimo cardinal de una familia de abiertos densos no vacíos cuya intersección es vacía y verificamos que dichas definiciones son equivalentes. En la sección 3.3 estudiamos la construcción del árbol mátriz base de altura $\mathfrak{h}$, dada por *Balcar, Pelant y Simon* en [1] . Por último en 3.4 estudiamos la versión topológica del árbol mátriz base también en [1] , conocida como número de Novák, revisamos algunas desigualdades entre estas nociones y terminamos dando una lista de desigualdades consitentes con ZFC que involucran a $\mathfrak{h}$ y $n(\omega^*)$ pero que desafortunadamente rebasan los objetivos de esta tesis.

Capítulo 0

Preliminares

Lema 0.1 *(Kuratowski-Zorn) Sea* $\mathbb{P}$ *un orden parcial, si todo* $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{P}$ *totalmente ordenado tiene cota superior en* $\mathbb{P}$*, entonces* $\mathbb{P}$ *tiene elementos maximales.*

Definición 0.2 *Para cualquier conjunto* X*, nos referiremos a su cardinalidad o número de elementos con* $|X|$*.*

Definición 0.3 *Si* X *es un conjunto y* κ *un cardinal infinito definimos:*
i) $[X]^{<\kappa} = \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}$*, el conjunto de subconjuntos de* X *de cardinalidad menor que* κ*.*
ii) $[X]^{\leq\kappa} = \{A \subseteq X : |A| \leq \kappa\}$*, el conjunto de subconjuntos de* X *de cardinalidad menor o igual que* κ*.*
iii) $[X]^{\kappa} = \{A \subseteq X : |A| = \kappa\}$*, el conjunto de subconjuntos de* X *de cardinalidad igual a* κ*.*

Definición 0.4 *Una relación* $\leqslant$ *en un conjunto* $\mathbb{P}$ *es un pre-orden si es reflexiva y transitiva. Al par* $(\mathbb{P}, \leqslant)$ *le llamaremos conjunto pre-ordenado.*

Definición 0.5 *Una relación* $\leqslant$ *en un conjunto* $\mathbb{P}$ *es un orden parcial o simplemente un orden, si* $\leqslant$ *es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Al par* $(\mathbb{P}, \leqslant)$ *le llamaremos conjunto parcialmente ordenado u orden simplemente.*

Definición 0.6 *Una relación se llama de equivalencia en* A *si es reflexiva, simétrica y transitiva, la denotaremos* $(\sim)$ *es decir,* $a \sim b$ *significa que* a *y* b *son equivalentes según* $(\sim)$*.*

Definición 0.7 *Dado* A *un conjunto y una relación de equivalencia, se define la clase de equivalencia de* $a \in A, [a] = \{x \in A : x \sim a\}$ *ver* [14] *p*,70.

Definición 0.8 *Dado un preorden $\leq$ en un conjunto A, se define la relación:* $a \sim b$ *si* $a \leq b$ *y* $b \leq a$.

Lema 0.9 *Si definimos* $(\sim)$ *como en 0.8. Entonces* $(\sim)$ *es una relación de equivalencia.*

Prueba : 1) Veamos que $(\sim)$ es reflexiva en A, si tomamos $a \in A$, se sigue que $a \leq a$ ya que $\leq$ es reflexiva pues $(A, \leq)$ es un preorden.

2)Veamos que $(\sim)$ es simétrica en A, tomemos $(a \sim b)$ y veamos que $(b \sim a)$. De la definición 0.8, se sigue que $(a \leq b)$ y $(b \leq a)$ por tanto $(b \leq a)$ y $(a \leq b)$, es decir que $(b \sim a)$ por lo tanto $(\sim)$ es simétrica.

3)Veamos que $(\sim)$ es transitiva en A, para esto tomemos $(a \sim b)$,$(b \sim c)$. De 0.8 se sigue que $(a \leq b)$, $(b \leq c)$ y de la transitividad de $\leq$ en A, se sigue que $(a \leq c)$, también tenemos que $(c \leq b)$, $(b \leq a)$, es decir $(c \leq a)$. Esto implica que $(a \sim c)$ lo que verifica que $(\sim)$ es transitiva.
De lo anterior se concluye que $(\sim)$ en A, es una relación de equivalencia.■

Definición 0.10 *Dado un preorden $\leq$ en A definimos una relación en el conjunto de las clases de equivalencia, diciendo que* $[a] \leq [b]$ *si* $a \leq b$.

Lema 0.11 *El preorden definido en 0.10, está bien definido. Es decir si tenemos* $c, d \in A$ *con* $a \sim c$ *y* $b \sim d$ *entonces* $[(a \leq b) \Leftrightarrow (c \leq d)]$.

Prueba : $\Rightarrow$) Supongamos que $a \leq b$ y veamos que $c \leq d$. Como $b \sim d$ entonces $(a \leq b \leq d)$ y como $a \sim c$ se sigue que $c \leq a$ es decir $(c \leq a \leq b \leq d)$. Esto verifica la ida.
($\Leftarrow$ Supongamos $(c \leq d)$ y veamos que $(a \leq b)$. Como $(a \sim c)$ entonces $(a \leq c \leq d)$, como $(b \sim d)$ entonces $(a \leq c \leq d \leq b)$. Esto verifica la vuelta. ■

Teorema 0.12 *Si* $(A, \leq)$ *es un un preorden entonces* $(A/\sim, \leq)$ *es un orden, ver* [14] *Sección 4.5, Ej.1 p.88.*

Prueba : Para probar que $(A/\sim, \leq)$ es un orden, hay que verificar que la relación $\leq$ en $(A/\sim)$ es:
1) Reflexiva, tomemos $[a] \in (A/\sim)$, de la definición 0.8 se sigue que $[a] \leq [a] \Leftrightarrow a \leq a$, esto se cumple pues por hipótesis $\leq$ es reflexiva ya que $(A, \leq)$ es un preorden.

2) Antisimétrica, para esto tomemos $[a], [b] \in (A/\sim)$ tales que $[a] \leq [b] \wedge [b] \leq [a]$. De la definición 0.8 se sigue que si $[a] \leq [b]$ entonces $a \leq b$ y si $[b] \leq [a]$ entonces

$b \leq a$. De lo anterior tenemos que $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$, aplicando la definición 0.8 tenemos que $(a \sim b)$ y del *Lema 0.9* se sigue que $[a] = [b]$. Esto verifica que $\leq$ es antisimétrica.

3)Transitiva, para esto tomemos $[a], [b], [c] \in (A/\sim)$ tales que $[a] \leq [b] \wedge [b] \leq [c]$, aplicando la definición 0.8, a ambos casos tenemos que $(a \leq b) \wedge (b \leq c)$. Esto implica que $(a \leq c)$ y de la definición 0.8, concluimos que $[a] \leq [c]$ lo que verifica que $\leq$ en $(A/\sim)$ es transitiva.

De 1),2) y 3) se sigue que $(A/\sim, \leq)$ es un orden ■

Definición 0.13 *Dados $(S, \leq_s)$,$(T, \leq_t)$ órdenes parciales. Si existe $f : S \longrightarrow T$ biyectiva tal que $x \leq_s y$, si y solo si, $f(x) \leq_t f(y)$. Entonces f es un isomorfismo de orden y por tanto $(S, \leq_s) \simeq (T, \leq_t)$ son isomorfos.(respecto al orden)*

Definición 0.14 *Dado (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$ decimos que $(X, \tau \upharpoonright Y)$ es la topología relativa a Y. También decimos que $U \subseteq Y$ es un abierto en $(\tau \upharpoonright Y) \Leftrightarrow \exists V \subseteq X$ en τ con $U = V \cap Y$.*

Proposición 0.15 $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$.

Prueba : *De las siguientes desigualdades $|2^\omega| \leq |\omega^\omega| \leq |(2^\omega)^\omega| = |2^{\omega \times \omega}| = |2^\omega|$ y el teorema* Cantor-Schröder-Bernstein *tenemos lo querido, $|\omega^\omega| = |2^\omega|$.*■

Definición 0.16 *Dado X un espacio topológico* Hausdorff *y $A \subseteq X$. Decimos que $p \in X$ es un punto de acumulación de A, si se cumple alguna de las siguientes condiciones. (* proposición 1.3.3 *página 24,* [11]*)*

1) si para todo U abierto con $p \in U$ se cumple que que $(U \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset$, ó bien
2) si para todo U abierto básico con $p \in U$ se tiene que $(U \cap A)$ es infinito.

Lema 0.17 1) *y* 2) *son equivalentes.*

Prueba : 2) $\Rightarrow$ 1) Como $(U \cap A)$ es infinito entonces $(U \cap A) \setminus \{p\}$ es distinto del vacío.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $(U \cap A)$ es finito, como cada punto es cerrado entonces $(U \cap A)$ es unión finita de cerrados $(U \cap A) \subseteq (F \cup \{p\})$ con $p \notin F$. Como F es cerrado entonces $(X \setminus F)$ es abierto así tenemos $V = ((X \setminus F) \cap U)$ es abierto y $p \in V$. Por 1) $(V \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset$. Ahora tomemos la igualdad anterior $V =$

$((X \setminus F) \cap U)$ y notemos que si la intersectamos con A y le quitamos $\{p\}$ tenemos que $((V \cap A) \setminus \{p\}) = (((X \setminus F) \cap U) \cap A) \setminus \{p\} = ((A \cap U) \cap (X \setminus F)) \setminus \{p\} = ((A \cap U) \setminus F) \setminus \{p\} = (A \cap U) \setminus (F \cup \{p\}) = \emptyset$, pues $(U \cap A) \subseteq (F \cup \{p\})$. Así por 1) tenemos que $(V \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset$ y por la cadena de igualdades $(V \cap A) \setminus \{p\} = \emptyset$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $(U \cap A)$ es infinito.$\blacksquare$

Lema 0.18 *(Bolzano-Weierstrass)Cada conjunto infinito numerable en un compacto tiene un punto de acumulación, ver 3.2, página 229 en* [9].

Lema 0.19 *Las siguientes contenciones se cumplen:*
i) $(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B)$
ii) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B)$

Prueba : *i)* Sea $p \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ entonces $(p \in A \wedge p \in C)$ y $p \notin (B \cap C)$, es decir $(p \notin B \vee p \notin C)$. De aqui se desprenden dos casos:
1) $(p \in A \wedge p \in C)$ y $(p \notin C)$, este caso queda descartado por ser contradictorio.
2) $(p \in A \wedge p \in C)$ y $(p \notin B)$, este caso implica que $p \in (A \setminus B)$, así se verifica *i)*.

Para *ii)* Sea $p \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ entonces $p \in (A \setminus C)$ esto implica que $(p \in A \wedge p \notin C)$. También sabemos que $p \notin (B \setminus C)$ esto implica que $(p \notin B \vee p \in C)$. De lo anterior tenemos lo siguiente $(p \in A \wedge p \notin C)$ y $(p \notin B \vee p \in C)$ así tenemos dos casos:

1) $(p \in A \wedge p \notin C)$ y $p \in C$, este caso queda descartado por ser contradictorio.
2) $(p \in A \wedge p \notin C)$ y $(p \notin B)$, esto implica que $p \in (A \setminus B)$, así se verifica *ii)*.$\blacksquare$

La siguiente definición se puede consultar en [15] .

Lema 0.20 ([15] *página 110). Si α es ordinal, entonces $\alpha = \beta + m$ donde β es límite o $\beta = 0$ y $m \in \omega$. Esta expresión es única.*

Definición 0.21 *Si α es un ordinal tal que $\alpha = \beta + m$ con β límite o $\beta = 0$ y $m \in \omega$. Diremos que α es par si m es par. En otro caso si m es impar entonces diremos que α es impar.*

Definición 0.22 *Sea $f : A \to B$ una función y $b \subseteq B$ denotamos a la imágen inversa de $b \subseteq B$ bajo f, como $f^{\leftarrow}[b] = \{x \in A : \exists y \in b, f(x) = y\}$.*

Capítulo 1

Compactación de Čech-Stone

1.1. Definición de βX

Definición 1.1 *Dado X un espacio topológico, lo llamaremos de Tychonoff, si para todo $x \in X$ y toda vecindad V de x existe $f : X \longrightarrow \mathbb{I}$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in (X \setminus V)$, donde $\mathbb{I} = [0, 1]$.*

Teorema 1.2 *Sea X de Tychonoff. Si $Y \subseteq X$ entonces Y es de Tychonoff*

Prueba: Sea $F \subseteq Y$ cerrado relativo tal que $y \notin F$. Como $Y \subseteq X$ existe $F' \subseteq X$ tal que $F' \cap Y = F$. Como X es de *Tychonoff* existe f tal que $f(y) = 0$ y $f[X \setminus F'] \subseteq \{1\}$. Si consideramos $g = (f \restriction Y)$, se cumple que Y es de *Tychonoff*.■

Definición 1.3 *Sea I un conjunto de índices. Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $\prod_{i\in I} X_i$ el producto cartesiano de los $\{X_i : i \in I\}$. Consideremos $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ la proyección del producto topológico en su j-ésimo factor, con $j \in I$. Así la base para la topología de Tychonoff esta dada a partir de $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ tomando $U_j \subseteq X_j$ abierto y le aplicamos la imagen inversa de π_j que escribiremos $\pi_j^{\leftarrow}[U_j]$ (definición 0.22). Así tendremos que $\pi_j^{\leftarrow}[U_j] \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ corresponde a la intersección de un número finito de indices $F \subseteq I$, en símbolos la base para la topología producto la podemos escribir como $\mathcal{B} = \{\bigcap_{j\in I} \pi_j^{\leftarrow}[U_j] : F \subseteq I$ finito, para toda $j \in F$ donde U_j es abierto en $X_j\}$. Notemos que la topología dada por dicha base es la mínima tal que cada $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ es continua.*

Definición 1.4 *Al producto topológico de copias de $\mathbb{I}$ lo llamaremos cubo de Tychonoff, en simbolos:*

$$\prod_{i\in I} X_i$$

donde I es un conjunto arbitrario de indices y $X_i = \mathbb{I}$, a este producto lo denotaremos como $\mathbb{I}^I$. Observemos que este producto es compacto ya que $\mathbb{I}$ es compacto y el producto de compactos es compacto.

Teorema 1.5 *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios de Tychonoff. Entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es de Tychonoff.*

Prueba: Sea $x \in \prod_{i\in I} X_i$ y V vecindad de x, asumamos sin pérdida de generalidad que V es un abierto básico de x, es decir existe $J \subseteq I$ finito tal que para todo $j \in J$ hay un abierto $V_j \subseteq X_j$ tal que $V = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{\leftarrow}[V_j]$. Notemos que $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ es la proyección definida en 1.3. Como los X_i son de *Tychonoff* para cada j existe una función continua $f_j : X_j \longrightarrow \mathbb{I}$ tal que $f_j(x_j) = 0$ y $f_j[X_j \setminus V_j] \subseteq \{1\}$. Definamos $F : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \mathbb{I}, F(y) = \max\{f_j(y_j) : j \in J\}$. Veamos que F así definida es continua, para esto tomemos $(a, b) = U \subseteq \mathbb{I}$ abierto con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Notemos que basta con demostrar que la preimagen de U bajo F es un abierto en $\prod$.
Para esto tomemos $y \in \prod_{i\in I} X_i$ tal que $F(y) \in (a, b)$, es decir $a < F(y) < b$, así $y \in F^{\leftarrow}[U]$. A continuación definamos W abierto tal que $y \in W \subseteq F^{\leftarrow}[U]$. Dado $j \in J$ se tiene que $f_j(y_j) \leq F(y) < b$ así $f_j(y_j) \in (-\infty, b)$. Como J es finito existe $k \in J$ tal que $f_k(y_k) = F(y)$ por tanto $a < f_k(y_k) < b; f_k(y_k) \in (a, b)$.
Caso 1: Si $j \in J \setminus \{k\}; f_j(y_j) \in (-\infty, b)$; Como f_j es continua, existe $W_j \subseteq X_j$ abierto con $y_j \in W_j$ tal que $f_j[W_j] \subseteq (-\infty, b)$.
Caso 2: Si $j = k : f_k(y_k) \in (a, b)$; Como f_k es continua existe $y_k \in W_k \subseteq X_k$ tal que $f_k[W_k] \subseteq (a, b)$.
De lo anterior definimos $W = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{\leftarrow}[W_j]$ abierto.

Afirmación 1.6 *Se cumple lo siguiente:*
i) $y \in W$.
ii) Para todo $z \in W$ se cumple que $F(z) \in U$.

Prueba: Para *i*), de la definición de W tenemos que $\bigcap_{j\in J} \pi_j^{\leftarrow}[W_j] \subseteq W$. Si $y_j \in W_j$ y le aplicamos $\pi_j^{\leftarrow}$ tenemos que $\pi_j^{\leftarrow}(y_j) \subseteq \pi_j^{\leftarrow}[W_j] \subseteq W$ así $y \in W$.
Para ii) Si $z \in W$ entonces $z \in \bigcap_{j\in J} \pi_j^{\leftarrow}[W_j]$ es decir $z_j = \pi_j(z) \in W_j$
Caso 1: Si $j \in J \setminus \{k\}; f_j(z_j) \in (-\infty, b)$; Como f_j es continua, existe $W_j \subseteq X_j$ abierto con $z_j \in W_j$ tal que $f_j[W_j] \subseteq (-\infty, b)$.
Caso 2: Si $j = k : f_k(z_k) \in (a, b)$; Como f_k es continua existe $z_k \in W_k \subseteq X_k$ tal que $f_k[W_k] \subseteq (a, b)$. Así $a < f_k(z_k) \leq F(z)$. Notemos que en ambos casos $F(z) < b$. Como J es finito existe $i \in J$ tal que $F(z) = f_i(z_i)$ así $f_i(z_i) < b$, de donde $a < F(z) = f_i(z_i) < b$ por lo tanto $F(z) \in (a, b) = U$.

Por último sabemos que para toda $j \in J$, tenemos que $f_j(x_j) = 0$ y $F(x)$ está definida como el máximo de estas j entradas donde todas son 0, así tenemos que $F(x) = 0$. Sea $y \in \prod \setminus V$ como $y \notin V$ existe algún indice $i \in J$ tal que $y_i \notin V_j$ tal que $f_i(y_i) = 1$ por la definición de las f_i, también sabemos que para toda $j \in J$ tenemos que $f_j(y_j) \in \mathbb{I} = [0, 1]$ así $f_j(y_j) \leq 1$ y es el máximo, así $F(y) = 1$. Por tanto $\prod$ es de *Tychonoff*$\blacksquare$.

Definición 1.7 *Dada $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos, si cumple ser continua, biyectiva y con inversa continua diremos que es un* homeomorfismo *de X en Y.*

Definición 1.8 *Dada $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos, si cumple ser continua, inyectiva y tal que $f : X \longrightarrow f[X]$ tiene inversa continua, diremos que es un* encaje *de X en Y.*

Proposición 1.9 *Sea $F : X \longrightarrow F[X]$ biyectiva. Si F es cerrada, entonces F tiene inversa continua.*

Prueba: Sea $U \subseteq X$ abierto. Veamos que $F[U]$ es abierto en $F[X]$. Notemos que $F[U] = F[X \setminus (X \setminus U)] = F[X] \setminus F[X \setminus U]$, por la biyectividad de F. Como U es abierto, $X \setminus U$ es cerrado y como F es cerrada, $F[X \setminus U]$ es cerrado. Así $F[X \setminus (X \setminus U)] = F[U]$ es abierto es decir F tiene inversa continua ver [11] pág.32.

Teorema 1.10 *Sea X espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*
i) X es de Tychonoff.
ii)Existe un cardinal κ tal que X puede ser encajado en $\mathbb{I}^\kappa$

Prueba: $ii) \Rightarrow i)$ En el teorema 1.2 vimos que $\mathbb{I}^\kappa$ es*Tychonoff* para cualquier κ, es decir que todo subespacio X de un cubo de *Tychonoff* es de *Tychonoff*. Para $i) \Rightarrow ii)$ Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{I})$ formado por las funciones continuas que van de $X \longrightarrow \mathbb{I}$, notemos que este conjunto se relaciona con κ ya que el número de funciones de este tipo, pueden corresponder a cualquier cardinal, ya que la compacidad se preserva en productos de cualquier tamaño, esto nos servirá para ver que X se puede encajar en un cubo $\mathbb{I}^{\mathcal{A}}$ de *Tychonoff*. Para esto definimos la función $e : X \longrightarrow \mathbb{I}^{\mathcal{A}}$ donde $e(x)_f = f(x)$ con $(x \in X, f \in \mathcal{A})$. Veamos que efectivamente e es un encaje.

Afirmación 1.11 *e es continua.*

Prueba: De la *definición 1.3* de producto topológico se tiene que e es continua, notemos que para toda $f \in \mathcal{A}, \pi_f \circ e$ es continua, $\pi_f \circ e = \pi_f(e(x)) = (e(x))_f = f(x)$, como $f \in \mathcal{A}$ es continua. ver [11] .

Afirmación 1.12 *e es inyectiva.*

Sean x y y puntos distintos. Como X es de *Tychonoff* y los puntos son cerrados, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $0 = f(x) \neq f(y) = 1$ lo cual implica también que $e(x) \neq e(y)$ por tanto e es inyectiva.

Afirmación 1.13 *$e : X \longrightarrow e[X]$ es una función cerrada.*

Sea $F \subseteq X$ un cerrado arbitrario, tomemos un punto arbitrario $e(x) \in e[X] \setminus e[F]$. Entonces $x \notin F$ y existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) = 0$ y $f[F] \subseteq \{1\}$. Consideremos $\pi_f : \mathbb{I}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{I}$ la proyección sobre el f-ésimo factor. Así $U = \pi_f^{\leftarrow}[[0,1)]$ es un abierto en $\mathbb{I}^{\mathcal{A}}$ y contiene $e(x)$ ya que $e(x)_f = 0 = f(x)$ de la definición de e. Ahora tomemos un punto $e(p) \in U \cap e[X]$, así $e(p) \in U = \pi_f^{-1}[[0,1)]$, si le aplicamos la proyección tenemos que $\pi_f \circ e(p) \in [0,1)$ de donde $f(p) < 1$. De la definición de f deducimos que $p \notin F$. De la inyectividad de e sabemos que $e(p) \notin e[F]$ lo que implica que $U \cap e[X]$ es una vecindad para $e(p)$ en $e[X]$ que no intersecta a $e[F]$. Es decir el complemento de $e[F]$ contiene a la vecindad abierta $U \cap e[X]$ para $e(x)$ arbitrario por tanto $e[F]$ es cerrado, así e es cerrada y por la proposición 1.9, toda f cerrada y biyectiva tiene inversa continua. Así concluimos que e es un homeomorfismo sobre su imagen y por tanto un encaje.$\blacksquare$

En adelante pensaremos a los espacios de *Tychonoff* como subespacios de cubos de *Tychonoff.*

Definición 1.14 *Dado un espacio topológico X de Tychonoff. Al encaje $e : X \longrightarrow \mathbb{I}^{\mathcal{A}}$ le llamaremos la compactación Čech-Stone de X.*

A la cerradura de $e[X]$ en $\mathbb{I}^{\mathcal{A}}$ la denotaremos βX. Usualmente al encaje e lo pensamos como la inclusión y decimos que βX es la compactación de *Čech-Stone* de X.

1.2. Equivalencia de compactaciones.

Definición 1.15 *$D \subseteq X$ es denso si para todo $U \subseteq X$ abierto, se tiene que $D \cap U$ es no vacía.*

Definición 1.16 *En general para cualquier X diremos que $i : X \longrightarrow K$, con K compacto es una compactación si cumple:*
a) i es continua.
b) i es inyectiva.
c) $i^{\leftarrow} : i[X] \longrightarrow X$ es continua.
d) $i[X]$ es densa en K.

Ejemplo 1.17 *$e[X]$ es denso en $\overline{e[X]}$, con la compactación de Čech-Stone*

Definición 1.18 *Sea X de Tychonoff. Sean $i_1 : X \longrightarrow K_1$, $i_2 : X \longrightarrow K_2$, compactaciones. Diremos que son equivalentes si existe $h : i_1\overline{[X]} \longrightarrow i_2\overline{[X]}$ homeomorfismo, tal que $i_2 = h \circ i_1$*

Antes de enunciar el objetivo de esta sección, veamos algunos ejemplos de compactaciones de distintos espacios topológicos. Los puntos a verificar en cada caso serán:
a) i es continua.
b) i es inyectiva.
c) $i^{\leftarrow} : i[X] \longrightarrow X$ es continua.
d) $i[X]$ es densa en K. (*Definición 1.16.*)

Observación 1.19 *Si Y es un espacio topológico con la topología discreta, todo subconjunto de Y es un abierto y cualquier función con dominio Y es continua i.e, dada $f : Y \longrightarrow X$, si $U \subseteq X$ entonces $f^{\leftarrow}[U]$ es un abierto en Y para cualquier X espacio topológico.*

Teorema 1.20 *$Y \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado, ver* [20] *pág.50.*

Ejemplo 1.21 *Consideremos $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}$ y definamos $i : \omega \longrightarrow K$ como $i(n) = \frac{1}{n+1}$. Veamos que i es un encaje y K una compactación de ω.*

Notemos que K es compacto ya que es una sucesión convergente. Ahora por la *Observación 1.19* i cumple a). Si tomamos $n, m \in \omega$ distintos, también $i(n) = \frac{1}{n+1}$ será distinto de $i(m) = \frac{1}{m+1}$, por tanto se cumple b). Para ver que $i^{\leftarrow} : i[\omega] \longrightarrow \omega$ es continua basta con que $i : \omega \longrightarrow i[\omega]$ sea abierta, para esto tomemos $U \subseteq \omega$ abierto no vacío, queremos ver que $i[U]$ es abierto en $i[\omega]$. Consideremos el abierto $V = \bigcup_{n \in U} I_{n+1}$ en $\mathbb{R}$ donde $I_{n+1} = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ así $V \cap i[\omega] = \left[\bigcup_{n \in U} I_{n+1}\right] \cap i[\omega] = \{\frac{1}{n+1} : n \in U\} = i[U]$ abierto en $i[\omega]$ por lo que se cumple c). Por último dada la convergencia de $\frac{1}{n+1}$ cualquier vecindad alrededor del 0 intersecta a la imagen de i, esto implica que $i[\omega]$ es denso en K, por lo que cumple d) por tanto i es un encaje de ω en K, es decir, una compactación de ω en K.■

Teorema 1.22 *Dado $A \subset \mathbb{C}$, decimos que $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, si para toda sucesión convergente $z_m \longrightarrow z_0$ de puntos en A, entonces las imágenes $f(z_m) \rightarrow f(z_0)$ también convergen en $\mathbb{C}$, ver* [20] *pag.45.*

Ejemplo 1.23 *Sea $K = \{\ \check{x} \in \mathbb{C} : \parallel \check{x} \parallel = 1\}$, el conjunto de vectores de norma 1 en el plano complejo. Veamos que K es una compactación del intervalo $(0, 1)$. Consideremos la función dada por $i : (0, 1) \rightarrow K$ donde $i(x) = exp(2\pi\mathbf{i}x)$ con $\mathbf{i}^2 = -1$ y veamos que cumple las condiciones de la* Definición 1.16*. Notemos que K así definido es acotado pues los vectores que constituyen al conjunto tienen norma 1. Si nos fijamos en el complemento de K veremos que $\mathbb{C} \setminus K$ es abierto, así K es cerrado y por tanto compacto. Como i esta dada por la función exponencial entonces es continua y se cumple a), ver* [24] *pag*,1.

Notemos que i así definida, toma valores en el intervalo $(0, 1)$ y les asocia unívocamente valores en la circunferencia unitaria de la forma: (r, θ) donde $r = 1$ y $\theta \in (0, 2\pi)$ así se cumple b). Si tomamos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ en $(0, 1)$ y nos fijamos en $i(\{\frac{1}{n}\})$ corresponderá a una sucesión convergente z_m en K que converge a $x = (1, 0)$ y por el *Teorema 1.22*, para toda vecindad del 0 en K, tenemos que $i(\{\frac{1}{n}\}) \cap V \neq \emptyset$ así $i[(0, 1)]$ es densa en K por lo que se cumple d). Para c) habrá que ver que para todo abierto básico $(a, b) \subseteq (0, 1)$, $i[(a, b)]$ será un abierto en K, esto sucede pues cada $i[(a, b)]$ será un arco abierto en la circunferencia unitaria K. Por tanto i es un encaje y una compactación del $(0, 1)$ en K.■

Definición 1.24 *Dada una función $s : n \rightarrow A$, donde $n \in \omega$ y $a \in A$, definimos la concatenación $s^\frown a = s \cup \{\langle n, a\rangle\}$*

Ejemplo 1.25 *El compacto de Pelczynski es una compactación de ω.*

A continuación explicaremos como construir el compacto de Pelczynski, en símbolos $K = C \cup \{p_s : s \in 2^{<\omega}\} \subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, este conjunto está conformado por dos partes:

1) C es el conjunto de *Cantor* construido de manera usual.
2) El conjunto $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$ corresponde a las sucesiones finitas de ceros y unos, ordenadas en un árbol conocido como el *Árbol binario completo* y nos servirá para enumerar un número finito de niveles del conjunto de Cantor, haciendo corresponder

los nodos del *Árbol binario completo* con un número finito de niveles del conjunto de Cantor, de la siguiente manera.

Los nodos del *Árbol binario completo* $2^{<\omega}$ se pueden describir de la siguiente forma: El nivel 0 de $2^{<\omega}$ corresponde al conjunto $\emptyset$. El nivel 1 está conformado por 2 nodos: a la izquierda el 0 y a la derecha el 1. El nivel 2 esta conformado por los hijos del nodo 0: 00 y 01 y los hijos del nodo 1: 10 y 11. Notemos que este procedimiento podemos continuarlo ω pasos; es decir dado un nodo s en el nivel n, tendrá 2 hijos en el nivel $n+1$ que son: $s^\frown 0$ y $s^\frown 1$, en general el nivel n es el conjunto 2^n.

Dicho lo anterior, enumeramos un número finito de niveles del conjunto de *Cantor* con los nodos del árbol $2^{<\omega}$. Definimos K como la intersección de una familia $\{K_n : n \in \omega\}$ de compactos para cada $n \in \omega$, escribimos $K_n = C_n \bigcup \{p_s : s \in \bigcup_{m \leq n} 2^m\}$. Aquí el conjunto de *Cantor* está dado por la intersección de la familia $C = \bigcap\{C_n : n \in \omega\}$.

En el Paso 0 definimos K_0. Partimos en tres partes iguales a $I = [0,1] = I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, extraemos el intervalo abierto intermedio $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ así $C_0 = I_0 \cup I_1$ y $p_\emptyset = \frac{1}{2}$ el punto medio de I, en representación del intervalo extraído y correspondiente al nivel 0 del *Árbol binario completo*. Por último para construir K_0 agreguemos a C_0 el punto $p_\emptyset$ i.e $K_0 = C_0 \cup \{p_\emptyset\}$.
Los niveles siguientes se construirán aplicando el mismo algoritmo. Para el paso 1; tomemos $C_0 = I_0 \cup I_1$ y partimos cada intervalo de manera análoga al paso 0, obtendremos así $I_0 \supseteq I_{00} \cup I_{01}$ y $I_1 \supseteq I_{10} \cup I_{11}$. Definimos $C_1 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$ agregamos los puntos medios: p_0, p_1 de I_0 y I_1 respectivamente y obtenemos: $K_1 = C_1 \cup \{p_\emptyset, p_0, p_1\}$. En los siguientes pasos definimos intervalos y puntos medios de manera similar.
$K_2 = C_2 \cup \{p_\emptyset, p_0, p_1, p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}\}$
.
.
.
$K_n = C_n \cup \{p_s : s \in \bigcup_{m \leq n} 2^m\}$

Notemos que $C_n = \bigcup\{I_s : s \in 2^{n+1}\}$ es unión de estos I_s intervalos ajenos 2 a 2. Definamos K_{n+1} suponiendo que ya tenemos K_n; para cada $s \in 2^{n+1}$ tendremos que $I_s = [a,b]$ es partido en tres intervalos $I_{s^\frown 0} = \left[a, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right]$, $I_{s^\frown 1} = \left[\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, b\right]$, ambos intervalos cerrados extremos y $U_s = U_x = I_s \setminus (I_{s^\frown 0} \cup I_{s^\frown 1})$ el intervalo abierto intermedio extraído, p_s el punto medio de I_s. Así definimos $C_{n+1} = \bigcup\{I_s :$

$s \in 2^{n+2}\}$ y $K_{n+1} = C_{n+1} \bigcup \{p_s : s \in \bigcup_{m \leq n+1} 2^m\}$. Finalmente nuestro conjunto queda definido como $K = \bigcap_{n\in\omega} K_n$.

Notemos que $K \subseteq I$ es acotado. Cada K_n es cerrado y K es la intersección de los K_n entonces K es cerrado y por tanto compacto.
Definimos $i : \omega \longrightarrow \{p_s : s \in 2^{<\omega}\}$ como una enumeración. Por lo tanto, i es biyectiva y continua por la *observación 1.19*, así elementos distintos de ω corresponden a sucesiones distintas de ceros y unos y viceversa. Entonces se cumple a) y b).
Para c) veamos que $i : \omega \longrightarrow \{p_s : s \in 2^{<\omega}\}$ es abierta. Sea $x \in (a, b) = U \subseteq \omega$ un abierto, $i(x) = p_s$. Definamos $U_x = I_s \backslash (I_{s^\frown 0} \cup I_{s^\frown 1})$, observemos que U_x es el intervalo abierto extraído de I_s para formar K_s. Consideremos el abierto $V = \bigcup\{U_x : x \in U\}$. Así la intersección de $V \cap i[\omega] = \{i(x) : x \in U\} = i[U]$ es abierto.
Para d) veamos que $i[\omega]$ es densa en K; bastará con probar que para todo $U \subseteq K$ abierto se cumple que $i[\omega] \cap U \neq \emptyset$. Sea $U = (a, b) \cap K$ abierto básico no vacío tal que $x \in U$. Caso 1) si $x \in \{p_s : s \in 2^{<\omega}\}$ entonces $x \in U \cap i[\omega]$. Caso 2) si $x \notin \{p_s : s \in 2^{<\omega}\}$. Entonces $x \in C$, notemos que para todo $n \in \omega$ y para todo $s \in 2^n$ el intervalo I_s tienen longitud $3^{-|s|} = 3^{-n}$ pues en cada nivel se extrae un tercio abierto de cada intervalo cerrado. Consideremos la distancia $M = min\{x - a, b - x\} > 0$, así por la construcción de C existe m tal que $3^{-m} < M$. Sea $t \in 2^{<m}$ con $x \in I_t$.

Afirmación 1.26 *$I_t \subseteq (a, b)$.*

Sea $y \in I_t$ entonces $d(x, y) < 3^{-m}$. Caso i) si $y < x$ entonces $d(x, y) = x - y < 3^{-m} < M < x - a$, así $x - y < x - a$ por tanto $y > a$. Caso ii) si $x < y$ entonces $d(x, y) = y - x < 3^{-m} < M < b - x$ así $y - x < b - x$ entonces $y < b$. De i) y ii) tenemos que $a < y < b$ es decir $y \in (a, b) \cap I_t$ es decir $p_t \in i[\omega] \cap U$, así en ambos casos (1 y 2) tenemos que $i[\omega] \cap U \neq \emptyset$, por lo que se cumple d). ■

Definición 1.27 *Sea X un espacio topológico, diremos que $Z \subseteq X$ es un conjunto cero, si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $Z = f^{\leftarrow}(0)$ y al conjunto de los conjuntos cero de X, lo denotaremos Z(X).*

Ejemplo 1.28 *El conjunto $\emptyset$ es un conjunto cero de cualquier espacio topológico.*

Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in X, f(x) = 1$, entonces $f^{\leftarrow}(0) = \emptyset$.■

Ejemplo 1.29 *Todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es un conjunto cero de $\mathbb{R}$.*

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ cerrado no vacío y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = d(x, A) = inf\{d(x, y) : y \in A\}$ entonces $\bar{A} = f^{\leftarrow}(0)$.■

Ejemplo 1.30 *Todo subconjunto de ω es un conjunto cero.*

Sea $A \subseteq \omega$, $f : \omega \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \notin A$. Así $A = f^{\leftarrow}(0)$.■

Teorema 1.31 *Sea X de Tychonoff. Sea $i : X \longrightarrow K$ una compactación y $e : X \longrightarrow \beta X$ la compactación de Čech-Stone de X. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

a) i, e son compactaciones equivalentes.
b) si $A, B \in Z(X)$ son ajenos entonces las cerraduras de $i[A]$, $i[B]$ son ajenas en K.

Prueba : Ver *Teorema 4.6, pag.73* en [12] .■

Como todo subconjunto de ω es conjunto 0, *ver ejemplo 1.30*, tenemos el siguiente caso cuando $X = \omega$.

Corolario 1.32 *Sea $i : \omega \longrightarrow \kappa$ una compactación y sea $e : \omega \longrightarrow \beta\omega$ la compactación de Čech-Stone de ω. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*
a) i, e son compactaciones equivalentes.
b) si $A, B \subseteq \omega$ son ajenos entonces las cerraduras de $i[A]$, $i[B]$ son ajenas en K.

Prueba : La prueba se sigue del *Teorema 1.31.*

1.3. El espacio de ultrafiltros.

Definición 1.33 *Un filtro en un conjunto X, es un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ que cumple las siguientes propiedades:*
i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
ii) $X \in \mathcal{F}$.
iii) si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
iv) si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Observemos que en este trabajo X es numerable y usualmente X será igual a ω.

Observación 1.34 *Si $\mathcal{F}$ es filtro y $A \in \mathcal{F}$ entonces $(X \setminus A) \notin \mathcal{F}$*

Prueba : Si $A \in \mathcal{F}$ y $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$ (por *iii) de 1.33*) lo que contradice la definición de filtro.

Definición 1.35 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro.*
i) $\mathcal{F}$ es ultrafiltro si para todo $\mathcal{G} \subseteq \wp(X)$ filtro, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
ii) $\mathcal{F}$ es primo si para todo $A, B \in \wp(X)$, si $A \cup B \in \mathcal{F}$ entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$

Lema 1.36 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Los siguientes enunciados son equivalentes.*
a) $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.
b) $\mathcal{F}$ es primo.
c) Para todo $A \subseteq X$ sucede que $A \in \mathcal{F}$ ó $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$

Prueba :$b) \Rightarrow c)$ Sea $\mathcal{F}$ un filtro primo y $A \in \wp(X)$ arbitrario. Como $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es primo; $A \in \mathcal{F}$ ó $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$.
$c) \Rightarrow a)$ Supongamos que para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathcal{F}$ ó $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$ y supongamos que existe $\mathcal{G}$ filtro, tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Sea $B \in (\mathcal{G} \setminus \mathcal{F})$ entonces $B \in \mathcal{G}$ pero $B \notin \mathcal{F}$. Como $B \notin \mathcal{F}$ entonces $(X \setminus B) \in \mathcal{F}$ como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ entonces $(X \setminus B) \in \mathcal{G}$. Es decir, que $B \in \mathcal{G}$ y $(X \setminus B) \in \mathcal{G}$ por tanto está su intersección, es decir $\emptyset \in \mathcal{G}$. Esto es una contradicción, por lo tanto no existe tal $\mathcal{G}$.

$a) \Rightarrow b)$ Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro y $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Afirmación 1.37 *Para todo $C \in \mathcal{F}$ se tiene que $C \cap A \neq \emptyset$ ó para todo $C \in \mathcal{F}$ se tiene que $C \cap B \neq \emptyset$.*

Prueba : De lo contrario supongamos que, $[\exists C_0(C_0 \cap A = \emptyset)]$ y $[\exists C_1(C_1 \cap B = \emptyset)]$.
Como $A \cup B \in \mathcal{F}$ y $C_0, C_1 \in \mathcal{F}$ entonces $[(A \cup B) \cap (C_0 \cap C_1)] \in \mathcal{F}$.
Pero $[(A \cup B) \cap (C_0 \cap C_1)] = [A \cap (C_0 \cap C_1)] \cup [B \cap (C_0 \cap C_1)] = [(A \cap C_0) \cap C_1] \cup [(B \cap C_1) \cap C_0] = [(\emptyset \cap C_1)] \cup [(C_0 \cap \emptyset)] = \emptyset$.
Entonces $\emptyset \in \mathcal{F}$, lo que contradice la definición de filtro.
Supongamos sin pérdida de generalidad que para todo $C \in \mathcal{F}$ sucede que $C \cap A \neq \emptyset$ y consideremos el conjunto $\mathcal{G} = \{D \subseteq X : \exists C \in \mathcal{F}(C \cap A \subseteq D)\}$. Veamos que $\mathcal{G}$ así definido es el filtro generado por $\mathcal{F}$ y A.
1)$\mathcal{G}$ es filtro.
i) Si $D \in \mathcal{G}$ existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $(C \cap A) \subseteq D$ por hipótesis $C \cap A \neq \emptyset$ por tanto $D \neq \emptyset$ así $\emptyset \notin \mathcal{G}$.
ii) Como $X \in \mathcal{F}$ y $X \cap A \subseteq X$ entonces $X \in \mathcal{G}$.
iii) Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{G}$. Entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ tales que $(C_1 \cap A) \subseteq D_1$ y $(C_2 \cap A) \subseteq D_2$. Así $(C_1 \cap C_2) \cap A \subseteq D_2 \cap D_1 \in \mathcal{G}$.
iv) Sean $D \in \mathcal{G}$ y $B \subseteq X$ arbitrario con $D \subseteq B$ por definición $\exists C(C \cap A) \subseteq D$ entonces $C \cap A \subseteq B$ por lo tanto $B \in \mathcal{G}$.
Por lo anterior $\mathcal{G}$ es filtro.

2) Veamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Sea $C \in \mathcal{F}$, siempre se tiene que $(C \cap A) \subseteq C$ entonces $C \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
3)Veamos que $A \in \mathcal{G}$. Como $X \in \mathcal{F}$ y $X \cap A \subseteq A$ entonces $A \in \mathcal{G}$.
Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro y 2), tenemos que; $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, por 3) $A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$ lo que implica que $A \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es primo. ■

Corolario 1.38 *Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro en X y $k \in \omega$ tal que $\bigcup_{i=0}^{k} A_i \in \mathcal{U}$ con $i \in \{0, .., k\}$ entonces existe $j \in \{0, .., k\}$ tal que $A_j \in \mathcal{U}$.*

Prueba : Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro en X entonces $\mathcal{U}$ es primo (*lema 1.36*). Vamos por inducción; si $k = 0$, tenemos que $\bigcup_{i=0}^{k} A_i \in \mathcal{U}$ es solamente un uniendo por tanto $A_0 \in \mathcal{U}$. Supongamos que siempre que $\bigcup_{i=0}^{n} B_i \in \mathcal{U}$ entonces existe $j \in n$ tal que $B_j \in \mathcal{U}$. Ahora bien si tenemos $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i \in \mathcal{U}$ quisieramos que exista $j \in n+1$ tal que $A_j \in \mathcal{U}$. Notemos que $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = (\bigcup_{i=0}^{n} A_i) \cup A_{n+1}$ como $\mathcal{U}$ es primo tenemos dos casos que $\bigcup_{i=0}^{n} A_i \in \mathcal{U}$ ó $A_{n+1} \in \mathcal{U}$. Si $A_{n+1} \in \mathcal{U}$ terminamos, si no entonces por hipótesis sabemos que en $(\bigcup_{i=0}^{n} A_i)$ existe $j \in n$ tal que $A_j \in \mathcal{U}$ por tanto en cualquier caso existe $j \in i$ tal que $A_j \in \mathcal{U}$. ■

Lema 1.39 *Para todo X y para todo $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ filtro, existe $\mathcal{G}^*$ ultrafiltro en $\wp(X)$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}^*$.*

Prueba : Consideremos $\mathcal{E} = \{\mathcal{G} \subseteq \wp(X) \text{ filtro: } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$. Notemos que $\mathcal{E}$ es distinto del vacío, pues al menos está $\mathcal{F}$. Para encontrar un elemento maximal en $\mathcal{E}$ es decir un ultrafiltro en $\mathcal{E}$ nos ayudaremos del *Lema 0.1.* (*Kuratowski-Zorn*), para esto será necesario verificar que $\mathcal{E}$ así definido cumple las condiciones para la aplicación del *Lema 0.1.*

Notemos que $\mathcal{E}$ es un conjunto parcialmente ordenado por «$\subseteq$» pues «$\subseteq$» como relación de orden es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Tomemos $C \subseteq \mathbb{P}$ totalmente ordenado y veamos lo siguiente:

1) Consideremos $\bigcup C$ y veamos que es un filtro según las condiciones de la *Definición 1.33.*
i) Notemos que todo $\mathcal{G} \in \mathcal{E}$ es filtro por tanto $\emptyset \notin \bigcup C$
ii)igualmente X está en algún $\mathcal{G} \in C$ por tanto $X \in \bigcup C$.
iii) Si $A, B \in \bigcup C$ existen $\mathcal{G}_0$ $\mathcal{G}_1 \in \mathcal{C}$ filtros tales que $A \in \mathcal{G}_0$ y $B \in \mathcal{G}_1$, por el orden total en C tenemos que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ó $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ así tenemos que $A, B \in \mathcal{G}_2$ por tanto $A \cap B \in \mathcal{G}_2$ así $A \cap B \in \bigcup C$.

iv) Sea $A \in \bigcup C$ y $B \subseteq X$ con $A \subseteq B$ existe $\mathcal{G} \in C$ tal que $A \in \mathcal{G}$ y como $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{G}$ por lo que $B \in \bigcup C$. Así $\bigcup C$ es filtro y por definición para todo $C \in \mathcal{E}$ se tiene que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ por tanto $\bigcup C \in \mathcal{E}$.

2) Veamos que $\bigcup C$ es cota superior. Sabemos que si $\mathcal{G} \in C$ entonces $\mathcal{G} \subseteq \bigcup C$ y por el *Lema 0.1*(*Kuratowski-Zorn*) existe $\mathcal{G}^*$ elemento maximal en $\mathcal{E}$.
Para ver que $\mathcal{G}^*$ es un ultrafiltro. Tomemos $\mathcal{G}$ un filtro en X tal que $\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}$ como $\mathcal{G}^* \in \mathcal{E}$ entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{G} \in \mathcal{E}$ y como $\mathcal{G}^*$ es maximal en $\mathcal{E}$ entonces $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}$. Así, $\mathcal{G}^*$ es un ultrafiltro. ■

Ejemplo 1.40 *Sea X un conjunto infinito.*
a) Para todo $x \in X, \mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$. Notemos que $\mathcal{F}_x$ es primo, por tanto es ultrafiltro. A los filtros de esta forma los llamaremos ultrafiltros fijos.
b)$Fr = \{A \subseteq X : X \setminus A$ es finito$\}$. A este filtro se le conoce como filtro de Fréchet.

Observación 1.41 *Fr no es ultrafiltro*

Si Fr es ultrafiltro entonces es primo. (*ver lema 1.36.*) Para cualquier X, si consideramos $X = (a \cup b)$ con $|a| = |b| = |X|$. Tenemos que $(a \cup b) \in Fr$, pues $X \setminus (a \cup b) = \emptyset$ pero tanto $(X \setminus a)$ como $(X \setminus b)$ son infinitos, por lo que no están en Fr. Esto implica que Fr no es primo por lo tanto tampoco es ultrafiltro. Si $X = \omega$. Consideremos $a = \{2n : n \in \omega\}$ y $b = \{2n+1 : n \in \omega\}$. Así $a \cup b = \omega \in Fr$ pues $\omega \setminus (a \cup b) = \emptyset$ es finito, pero $(\omega \setminus b) = a$ y $(\omega \setminus a) = b$ no están en Fr pues ambos conjuntos son infinitos. Por tanto Fr no es primo y tampoco ultrafiltro.

Definición 1.42 *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en ω es libre si $Fr \subseteq \mathcal{U}$.*

Proposición 1.43 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. $\mathcal{U}$ es libre si y solo si para todo $x \in X, \mathcal{F}_x$ es distinto de $\mathcal{U}$.*

Prueba : $\Rightarrow$) Supongamos $\mathcal{U}$ es libre y que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F}_x = \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es libre extiende al filtro de Fréchet; $Fr \subseteq \mathcal{U}$ entonces $Fr \subseteq \mathcal{F}_x$. Sea $A = X \setminus \{x\}$ así $X \setminus A = \{x\}$ finito por tanto $A \in Fr$ pero $A \notin \mathcal{F}_x$ lo cual es contradictorio.
($\Leftarrow$ Si $\mathcal{U}$ no es libre entonces $Fr \nsubseteq \mathcal{U}$ i.e existe $B \in Fr$ tal que $B \notin \mathcal{U}$; si $B \in Fr$ entonces $(X \setminus B)$ es finito y por c) de *lema 1.36* $(X \setminus B) \in \mathcal{U}$, es decir el conjunto $(X \setminus B) = \{a_0, a_1 .... a_k\}$ finito está en $\mathcal{U}$ entonces $\bigcup_{i=0}^{k} \{a_i\} \in \mathcal{U}$ y como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro entonces es primo(*ver corolario 1.38*). Así tenemos que para algún $j \in \{0, ..., k\}$ se tiene que $\{a_j\} \in \mathcal{U}$. Para ver que $\mathcal{F}_{a_j} = \mathcal{U}$, veamos primero que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_{a_j}$. Sea $A \in \mathcal{U}$ como $\{a_j\} \in \mathcal{U}$ entonces $\emptyset \neq \{a_j\} \cap A \subseteq \{a_j\}$, así $\{a_j\} \cap A = \{a_j\}$ así tenemos que

$a_j \in A$ por tanto $A \in \mathcal{F}_{a_j}$ así se cumple $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_{a_j}$ y como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro tenemos que $\mathcal{U} = \mathcal{F}_{a_j}$ lo que es una contradicción. ■

Definición 1.44 *El espacio de Stone de $\wp(X)$ es el conjunto de los ultrafiltros en X, que denotaremos St(X).*

A continuación definamos la topología de $St(X)$.

Definición 1.45 *Para cada $A \in \wp(X)$ definamos $\widehat{A} = \{p \in St(X) : A \in p\}$*

Lema 1.46 *Para todo X.*
a) $\widehat{\emptyset} = \emptyset$,
b) $\widehat{X} = St(X)$
c) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$
d) $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$
e) $\widehat{X \setminus A} = St(X) \setminus \widehat{A}$

Prueba : a) Si $\widehat{\emptyset} \neq \emptyset$, entonces existe $p \in St(X)$ tal que $\emptyset \in p$, lo que contradice la definición de filtro. (*ver 1.33*) Por tanto $\widehat{\emptyset} = \emptyset$.
b) $\subseteq$) Por definicion tenemos que $\widehat{X} \subseteq st(X)$. $\supseteq$) Si $p \in St(X)$, siempre tenemos que $X \in p$. (definición *1.33*). Es decir $p \in \widehat{X}$.
c) $\subseteq$) Si $p \in \widehat{A \cup B}$ entonces $A \cup B \in p$, como p es ultrafiltro es primo (*lema 1.36*) por tanto $A \in p$ ó $B \in p$. Si $A \in p$ entonces $p \in \widehat{A}$. Si $B \in p$ entonces $p \in \widehat{B}$ en cualquier caso se cumple que $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$.
$\supseteq$) Si $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$ entonces $A \in p$ ó $B \in p$. Supongamos que $A \in p$, notemos que $A \subseteq A \cup B$. Por *(definición 1.33,iv))* de filtro, tenemos que $A \cup B \in p$ así $p \in \widehat{A \cup B}$.
d) $\subseteq$) Si $p \in \widehat{A \cap B}$ tenemos que $A \cap B \in p$. Como en particular $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, aplicando *(definición 1.33,iv))* de filtro en ambos casos, tenemos que $A \in p$ y $B \in p$ por tanto $p \in \widehat{A}$ y $p \in \widehat{B}$, por lo tanto $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$.
$\supseteq$) Si $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$ tenemos que $A \in p$ y $B \in p$, si aplicamos la *(definición 1.33,iii))* de filtro, tenemos que $A \cap B \in p$ entonces $p \in \widehat{A \cap B}$.
e) $\subseteq$) Si $p \in \widehat{X \setminus A}$ entonces $(X \setminus A) \in p$. Supongamos que $A \in p$, como $(X \setminus A) \in p$ entonces $A \cap (X \setminus A) \in p$ pero $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ esto implica que $\emptyset \in p$ y esto que contradice la *definicion 1.33, i*); por tanto $A \notin p$ así $p \notin \widehat{A}$ entonces $p \in st(X) \setminus \widehat{A}$.
$\supseteq$) Si $p \in St(X) \setminus \widehat{A}$ entonces $p \in St(X)$ y $p \notin \widehat{A}$ es decir que $A \notin p$ como p es ultrafiltro entonces $(X \setminus A) \in p$, (*lema 1.36*) así $p \in \widehat{X \setminus A}$.

Definición 1.47 *Un conjunto de $St(X)$ es abierto si es unión de elementos del conjunto $\{\widehat{A} : A \subseteq X\}$*

Lema 1.48 *Dados $A, B \subseteq X$, si $\widehat{A} = \widehat{B}$ entonces $A = B$.*

Prueba : Supongamos que $A \neq B$ y $\widehat{A} = \widehat{B}$. Si $A \neq B$ podemos decir sin pérdida de generalidad que $(A \setminus B) \neq \emptyset$, consideremos $\mathcal{F} = \{C \subseteq X : A \setminus B \subseteq C\}$ veamos que es un filtro; i) Si $\emptyset \in \mathcal{F}$ existe $C \subseteq X$ tal que; $\emptyset = (A \setminus B) \subseteq C$ esto implica que $A = B$ lo q contradice nuestra hipótesis, por lo tanto $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
ii) Si $(A \setminus B) \neq \emptyset$ se tiene que $B \subseteq A \subseteq X$ por tanto $(A \setminus B) \subseteq X$, así $X \in \mathcal{F}$.
iii) Dados $C_0, C_1 \in \mathcal{F}$ se tiene que $(A \setminus B) \subseteq C_0$ y $(A \setminus B) \subseteq C_1$ así $(A \setminus B) \subseteq C_0 \cap C_1 = C_2$ así $C_2 \in \mathcal{F}$.
iv) Sean $C \in \mathcal{F}$ y $D \subseteq X$ arbitrario con $C \subseteq D$ tenemos que $(A \setminus B) \subseteq D$ así $D \in \mathcal{F}$.

De las condiciones anteriores se sigue que $\mathcal{F}$ es un filtro y por *Lema 1.39* es posible extender $\mathcal{F}$ a un ultrafiltro $\mathcal{F}^*$ así tenemos que $(A \setminus B) \in \mathcal{F}^*$ entonces $\mathcal{F}^* \in \widehat{A \setminus B}$, como $\emptyset \notin \mathcal{F}$ tampoco está en $\mathcal{F}^*$. Esto implica que $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ lo que contradice la hipótesis.

Corolario 1.49 *$\widehat{A} \neq \emptyset$ si y solo si $A \neq \emptyset$.*

Prueba : $\Rightarrow$) Si $\widehat{A} \neq \emptyset$ existe $p \in \widehat{A}$ es decir $A \in p$. Como p es filtro $A \neq \emptyset$ *por i) de la definición de filtro.*
($\Leftarrow$ Para demostrar la contrapuesta del regreso, veamos que si $\widehat{A} = \widehat{\emptyset}$ entonces $A = \emptyset$. Por *1.46*, sabemos que, $\widehat{\emptyset} = \emptyset$ y por *1.48*, si $\widehat{A} = \widehat{\emptyset}$ entonces $A = \emptyset$.

Definición 1.50 *Un espacio X es cero dimensional; si para todo U abierto y para todo $p \in U$, existe V abierto y cerrado con $p \in V \subseteq U$.*

Lema 1.51 *Para todo $A \subseteq X$, $\widehat{A}$ es abierto y cerrado por (lema 1.46, e))*

Teorema 1.52 *Para todo X el espacio St(X) cumple ser: 1) cero dimensional, 2) Hausdorff, 3) compacto.*

Prueba : 1) Para ver que *St(X)* es *cero dimensional* bastará con ver que que la colección $\mathcal{B}(X) = \{\widehat{A} : A \subseteq X\}$ es de cerrado abiertos *(lema 1.51)* y que $\mathcal{B}(X)$ sea base para St(X); para ser base debe cumplir:([11],pág,12)
(B1) Dados $\widehat{A}, \widehat{B}$ y $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$ veamos que existe $\widehat{C}$ tal que $p \in \widehat{C}$ y $\widehat{C} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$. Dado que $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$.*(lema 1.46 d)* entonces $A \cap B \in p$, si tomamos $C = A \cap B$ entonces $C \in p$, por lo tanto $p \in \widehat{C}$.
(B2) Para todo $p \in St(X)$ existe $U \subseteq X$ tal que $p \in \widehat{U}$. Por definición para todo $p \in st(X)$ se tiene que $X \in p$, si tomamos $X = U$ entonces $U \in p$, por tanto $p \in \widehat{U}$. Así $\mathcal{B}(X)$ es base para $st(X)$.

2) *St(X)* es de *Hausdorff*. Sean $p, q \in$ *St(X)* distintos. Notemos que si $p \neq q$, entonces $\exists Y(Y \in p \wedge Y \notin q)$ ó $(Y \in q \wedge Y \notin p)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\exists Y(Y \in p \wedge Y \notin q)$. Ahora bien como q es filtro siempre se tiene que $X \in q$, notemos que $X = Y \cup (X \setminus Y)$, como q es un ultrafiltro sabemos que es primo *(lema 1.36)* y como $X \in q$ entonces $Y \in q$ ó $(X \setminus Y) \in q$, pero supusimos que $Y \notin q$ entonces $(X \setminus Y) \in q$ así $q \in \widehat{X \setminus Y} = St(X) \setminus \widehat{Y}$ (definición *1.45 y lema 1.46 e)*), así $Y \in p$ entonces $p \in \widehat{Y}$, por último notemos que $\widehat{Y}$ y $St(X) \setminus \widehat{Y}$ son abiertos ajenos que separan a (p y q) por lo tanto *St(X)* es de *Hausdorff*.

3) *St(X)* es compacto. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de abiertos para *St(X)*, podemos suponer que $\mathcal{C}$ es un subconjunto de elementos de la base $\mathcal{B}(X)$ (*ver* [11]*, Engelking, pag 123.*) i.e. $\bigcup \mathcal{C} = St(X)$, queremos ver que a $\mathcal{C}$ se le puede extraer una subcubierta finita $S = \{\widehat{S}_i : i \in \{1, ..., n\}\}$. Supongamos lo contrario es decir, ninguna cubierta finita cubre a *St(X)* i.e para toda $S \subseteq \mathcal{C}$ finita se tiene que $\bigcup_{i=1}^n \widehat{S}_i \neq St(X)$. Consideremos $V_S = (St(X) \setminus \bigcup_{i=1}^n \widehat{S}_i) = (\widehat{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n \widehat{S}_i) = (\bigcap_{i=1}^n \widehat{X} \setminus \widehat{S}_i)$ está colección es no vacía ya que hay elementos de $St(X)$ sin cubrir por $(\bigcup_{i=1}^n \widehat{S}_i)$.
Notemos que el *lema 1.48* nos dice que si $\widehat{A} = \widehat{B}$ entonces $A = B$, esto justifica que la operación «poner gorro» es inyectiva y su inversa «quitar gorro» está bien definida, dicho lo anterior tomemos $V_S = (\bigcap_{i=1}^n \widehat{X} \setminus \widehat{S}_i)$ le aplicamos «quitar gorro» y definimos $A_S = (\bigcap_{i=1}^n X \setminus S_i) \subseteq X$, observemos también que $\widehat{A_s} = V_S \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{F} = \{B \subseteq X : \exists S \subseteq \mathcal{C}$ finita $A_S \subseteq B\}$ y veamos que es un filtro.
$i)$ Sabemos que $\widehat{A_S} = V_S \neq \emptyset$, por *Corolario 1.49* tenemos que $A_S \neq \emptyset$ por lo que $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
$ii)$ si $B = X, A_S \subsetneq X$ por tanto $X \in \mathcal{F}$.
$iii)$ Si $E, F \in \mathcal{F}$ existen subcubiertas;
$S = \left\{\widehat{S}_i : i \in \{1, .., n\}\right\} \subseteq E$ y $S' = \left\{\widehat{S}'_i : i \in \{1, .., m\}\right\} \subseteq F$ finitas, tales que $A_S \subseteq E$ y $A_{S'} \subseteq F$, para $i \in \{1, .., m\}$ sea $S_{n+i} = S'_i$, así $A_S \cap A_{S'} = (\bigcap_{i=1}^n X \setminus S_i) \cap (\bigcap_{i=1}^m X \setminus S'_i) = (\bigcap_{i=1}^{n+m} X \setminus S_i) = A_{S \cup S'} = A_S \cap A_{S'} \subseteq E \cap F$ así $E \cap F \in \mathcal{F}$.
$iv)$ Sean $A \in \mathcal{F}$ y D arbitrario con $A \subseteq D \subseteq X$ entonces $A_S \subseteq D$ así $D \in \mathcal{F}$. Por las condiciones vistas $\mathcal{F}$ es un filtro. Ahora por (*lema 1.39*) existe $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, notemos que $\mathcal{G} \in St(X)$, sea $\widehat{V_0} \in \mathcal{C}$ y $S_0 = \{\widehat{V_0}\}$. Veamos que $\mathcal{G} \notin V_0$. Sabemos que $A_{S_0} \in \mathcal{F}$ pues $A_{S_0} \subseteq A_{S_0}$ como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ entonces $A_{S_0} \in \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{G} \in \widehat{A_{S_0}}$ así $\mathcal{G} \notin \bigcup S_0 = \widehat{V_0}$. Como $\mathcal{C}$ es cubierta de $St(X)$ tenemos que $\mathcal{G} \in \widehat{V}$ para alguna $\widehat{V} \in \mathcal{C}$ lo que contradice que $\mathcal{G} \notin \bigcup S_0 = \widehat{V_0}$, por lo tanto $St(X)$ es compacto.■

Definición 1.53 $e : X \to St(X)$*, queda definida como:*
$e(p) = \mathcal{F}_p = \{A \subseteq X : p \in A\}$ *el ultrafiltro fijo generado por* p*.*

Consideremos X con la topología discreta. Entonces X es un espacio de *Tychonoff*.

Teorema 1.54 $e : X \to St(X)$ *es la compactación de Čech-Stone.*

Prueba : Del resultado anterior sabemos que $St(X)$ es compacto, ahora solo falta verificar los siguientes puntos:

1) e es una compactación.

2) e es la de Čech-Stone.

Para 1) de acuerdo a la *definición 1.16*, habrá que verificar lo siguiente:
a) e es continua.
b) e es inyectiva.
c) $e^{\leftarrow} : e[X] \longrightarrow X$ es continua.
d) $e[X]$ es densa en $St(X)$.

a) Si X está equipado con la topología discreta cualquier subconjunto de X es un abierto, en este caso $X = \omega$, así se cumple lo querido.(*Observación 1.19*)
b) Tomemos $p, q \subseteq X$ distintos. $e(p) = \mathcal{F}_p = \{A \subseteq X : p \in A\}$ y $e(q) = \mathcal{F}_q = \{A \subseteq X : q \in A\}$. Como $p \neq q$ se tiene que $\mathcal{F}_p \neq \mathcal{F}_q$ pues $\{p\} \in \mathcal{F}_p$ pero $\{p\} \notin F_q$ pues $p \neq q$ por lo que se cumple b).
c) Bastará con ver que $e : X \to e[X]$ es abierta. Sea $V \subseteq X$ un abierto, todo subconjunto en X es un abierto ya que tiene la topología discreta, veamos que $e[V]$ es un abierto en $e[X]$. Para esto notemos que si $q \in V$ entonces $e(q) = \mathcal{F}_q$. Veamos primero que $\{\mathcal{F}_q\} = \widehat{\{q\}} \cap \{\mathcal{F}_p : p \in X\}$.

Afirmación 1.55 $\{\mathcal{F}_q\} = \widehat{\{q\}} \cap \{\mathcal{F}_p : p \in X\}$

$\subseteq$) Como $\mathcal{F}_q$ es el filtro generado por q, sabemos que al menos $\{q\} \in \mathcal{F}_q$ entonces $\mathcal{F}_q \in \widehat{\{q\}}$ y $\mathcal{F}_q \in \{\mathcal{F}_p : p \in X\} = e[X]$, es decir $\mathcal{F}_q \in \{\mathcal{F}_p : p \in X\} \cap \widehat{\{q\}}$ como queremos.
$\supseteq$) Tomemos un elemento del lado derecho de la igualdad es decir un $\mathcal{F}_p \in e[X] \cap \widehat{\{q\}}$. Notemos que si $\mathcal{F}_p \in \widehat{\{q\}}$ implica que $\{q\} \in \mathcal{F}_p$ entonces $p \in \{q\}$ por lo tanto $p = q$ y $\mathcal{F}_p \in \{\mathcal{F}_q\}$. De la afirmación concluimos que $\{e(q)\}$ es un abierto en $e[X]$ para todo $q \in V$ lo que implica que $e[V] = \bigcup_{q \in V} \{e(q)\}$ es un abierto en $e[X]$, ya que es unión abiertos.

d) Para esto hay que ver que todo U abierto no vacío de *St(X)* intersecta a $e[X] = \{\mathcal{F}_p : p \in X\}$.Tomemos $\widehat{A} \subseteq U$ abierto básico tal que $A \subseteq X$, sabemos que si $\widehat{A} \neq \emptyset$

entonces $A \neq \emptyset$(*ver lema 1.49*). Sea $p \in A$ entonces $A \in \mathcal{F}_p$ entonces $\mathcal{F}_p \in \widehat{A} \subseteq U$ y $\mathcal{F}_p \in e[X]$ por definición. Así $\mathcal{F}_p \in \widehat{A} \subseteq U \cap e[X]$ por lo que $e[X]$ es densa en *St(X)*.

De los incisos anteriores se sigue que e es un encaje en $St(X)$ y sabemos que $St(X)$ es compacto, así e cumple 1).

Afirmación 1.56 *Si* $A \subseteq X$ *entonces* $\overline{e[A]} = \widehat{A}$.

Prueba : Sea $A \subseteq X$, sabemos que $e[A] = \{\mathcal{F}_p : p \in A\}$. Sea $p \in A$ entonces $A \in \mathcal{F}_p$ entonces $\mathcal{F}_p \in \widehat{A}$; esto implica que $e[A] \subseteq \widehat{A}$. Notemos también que $\widehat{A}$ es cerrado por lo tanto $\overline{e[A]} \subseteq \widehat{A}$ (*ver* [11] *1.1.1 inciso ii),p.*). Nos falta demostrar que $\overline{e[A]} \supseteq \widehat{A}$. Tomemos $\mathcal{U} \in \widehat{A}$, para ver que $\mathcal{U} \in \overline{e[A]}$ hay que ver que para todo abierto básico con $\mathcal{U} \in \widehat{B}$ sucede que $e[A] \cap \widehat{B} \neq \emptyset$. Tenemos que $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ y $\mathcal{U} \in \widehat{B}$, si $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ entonces $A \in \mathcal{U}$, analogamente como $\mathcal{U} \in \widehat{B}$ entonces $B \in \mathcal{U}$ esto implica que $A \cap B \in \mathcal{U}$ (*por iii), de la definicón 1.33 de filtro*) y como $\mathcal{U}$ es un filtro $A \cap B \neq \emptyset$, entonces tomemos $q \in A \cap B$, como $q \in A$ entonces $A \in \mathcal{F}_q$ y $\mathcal{F}_q \in e[A]$. Ahora como $q \in B$ entonces $B \in \mathcal{F}_q$ así $\mathcal{F}_q \in \widehat{B}$ por lo que $e[A] \cap \widehat{B} \neq \emptyset$. Esto prueba que $\mathcal{U} \in \overline{e[A]}$.

2) Del inciso 1) sabemos que e es una compactación de X, para ver que es la compactación de *Čech-Stone* falta verificar que dados $A, B \subseteq X$ ajenos, se cumple que $\overline{e[A]} \cap \overline{e[B]} = \emptyset$. (*condición b) corolario 1.32.*)

De *la afirmación 1.56* sabemos que para $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $\overline{e[A]} \cap \overline{e[B]} = \widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B} = \widehat{\emptyset} = \emptyset$. Finalmente de 1) y 2) se concluye que $e : X \to St(X)$, es la compactación de *Čech-Stone* de X.■

1.4. $\beta\omega$ no es metrizable.

Definición 1.57 *Sea* $e : \omega \to St(\omega)$ *y* $St(\omega) = \beta\omega$ *como en la definición 1.53 y* $X = \omega$, $e[\omega] = \{\mathcal{F}_p : p \in \omega\}$ *consta de los ultrafiltros fijos. El residuo de* ω*, es denotado como* $\omega^* = \beta\omega \setminus e[\omega]$*, consta de los ultrafiltros libres.*

El siguiente *Lema* nos será de utilidad mas adelante.

Lema 1.58 *Sea* $A \subseteq X$. *Entonces* $\widehat{A} \cap X^* \neq \emptyset$ *si y sólo si* A *es infinito.*

Prueba : $\Rightarrow$) Por contrapuesta, supongamos que $A = \{a_0, .., a_k\}$ es finito. Entonces tenemos que $\widehat{A} = \bigcup_{k=0}^{n} \widehat{\{a_k\}}$. Para cada k tenemos $\widehat{\{a_k\}} = \{\mathcal{F}_{a_k}\}$ es el ultrafiltro fijo generado por $\{a_k\}$. Esto implica que $\widehat{A} = \{\mathcal{F}_{a_i} : i \in \{0, ...n\}\}$ son todos ultrafiltros fijos así $\widehat{A} \cap X^* = \emptyset$, pues en X^* sólo hay ultrafiltros libres.

($\Leftarrow$ Supongamos que A es infinito y consideremos $\mathcal{F} = \{C \subseteq X : (A \setminus C) \text{ es finito}\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ cumple la definición de filtro.
i) Si $C = \emptyset$, tenemos que $(A \setminus \emptyset) = A$, como A es infinito. Esto implica que $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
ii) Si $C = X$, entonces $(A \setminus X) = \emptyset$ es finito. Por lo tanto $X \in \mathcal{F}$.
iii) Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, entonces tanto $(A \setminus C_1)$ como $(A \setminus C_2)$ son conjuntos finitos por hipótesis. Por las leyes de *De Morgan* tenemos que $(A \setminus (C_1 \cap C_2)) = (A \setminus C_1) \cup (A \setminus C_2)$ es finito también pues es unión de conjuntos finitos. Por lo tanto $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$.
iv) Sean $C \in \mathcal{F}$ y $B \subseteq X$ con $C \subseteq B$. Como $C \in \mathcal{F}$ entonces $(A \setminus C)$ es finito y como $C \subseteq B$ entonces $(A \setminus C) \supseteq (A \setminus B)$ es finito, esto implica que $B \in \mathcal{F}$.
Hemos visto que $\mathcal{F}$ es filtro. Notemos que $Fr \subseteq \mathcal{F}$ y *por lema 1.39*, sabemos que existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro, tal que $Fr \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, por lo tanto $\mathcal{U} \in X^*$(es ultrafiltro libre). Por último, como $A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ es decir, $\mathcal{U} \in \widehat{A}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in \widehat{A} \cap X^*$. ■
En la sección *1.3* enunciamos la caracterización de $\beta\omega$ y probamos que el espacio de *Stone* cumple esta caracterización. Recordemos que en *1.21* y *1.25* dimos algunos ejemplos de compactaciones, veamos que dichas compactaciones no son $\beta\omega$, para esto la proposición *1.59* implica que ω^* no es primero numerable y por lo tanto no es un espacio métrico, esto implica también que los ejemplos vistos en *1.21 y 1.25* no son la compactación de *Čech-Stone*, pues en dichos ejemplos sus respectivos espacios son métricos.

Proposición 1.59 *$\beta\omega$ no es metrizable.*

Notemos que todo espacio métrico es primero numerable, es decir que todo punto tiene base numerable: Si M es un espacio topológico y d una métrica compatible con M, i.e, (M, d) es un espacio métrico. Sea $x \in M$, para $\epsilon > 0$, definimos $B(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$. Entonces se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} B(x, 2^{-n}) = \{x\}$. Veamos que esto no pasa en ω^*.

Lema 1.60 *Sea $\mathcal{U}_0 \in \omega^*$ y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos tales que $\mathcal{U}_0 \in U_n$ para todo $n \in \omega$. Entonces existe $\mathcal{U}_1 \in \omega^* \setminus \{\mathcal{U}_0\}$ tal que $\mathcal{U}_1 \in U_n$ para todo $n \in \omega$.*

Para probar 1.60 empezemos con la siguiente construcción. Por recursión construimos $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \wp(\omega)$ infinitos. Para n=0: $\mathcal{U}_0 \in U_0$ entonces existe $A_0 \subseteq \omega$ tal que $\mathcal{U}_0 \in \widehat{A_0} \subseteq U_0$. Para n+1: Sea $A_{n+1} \subseteq \omega$ tal que $\mathcal{U}_0 \in \widehat{A_{n+1}} \subseteq (U_0 \cap U_1 \cap ... \cap U_n \cap U_{n+1}) \cap (\widehat{A_0} \cap \widehat{A_1} \cap ... \cap \widehat{A_n})$. Por inducción sobre n, sabemos que $\mathcal{U}_0 \in \widehat{A_n}$

Propiedad 0. Para todo $n \in \omega$, $\mathcal{U}_0 \in \widehat{A_{n+1}} \subseteq \widehat{A_n}$.

Propiedad 1. Para todo $n \in \omega$, A_n es infinito.

Prueba : Supongamos que no, es decir existe $A_n = \{k_1, ..., k_r\} = \{k_1\} \cup \{k_2\} \cup ... \cup \{k_r\}$ finito, por hipótesis $\mathcal{U}_0 \in \widehat{A_n}$, entonces $A_n \in \mathcal{U}_0$, esto implica que $\{k_1\} \cup \{k_2\} \cup ... \cup \{k_r\} \in \mathcal{U}_0$. Como $\mathcal{U}_0$ es ultrafiltro entonces es primo (*lema 1.36*), por tanto existe $s \in r+1 = \{0, ..., r\}$ tal que $\{k_s\} \in \mathcal{U}_0$. Veamos que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{F}_{k_s}$, para esto tomemos $B \in \mathcal{U}_0$. Como $\{k_s\} \in \mathcal{U}_0$ entonces por *iii) y i) de la definición de filtro* tenemos que $\emptyset \neq \{k_s\} \cap B \in \mathcal{U}_0$, notemos que $\mathcal{U}_0 \cap B = \{k_s\}$, es decir $k_s \in B$, lo que implica que $B \in \mathcal{F}_{k_s}$. Esto prueba que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{F}_{k_s}$ y como $\mathcal{U}_0$ es ultrafiltro, se sigue que $\mathcal{U}_0 = \mathcal{F}_{k_s}$. Esto es una contradicción pues $\mathcal{U}_0 \in \omega^*$. (no es ultrafiltro fijo)

Propiedad 2. Para todo $n \in \omega$, $A_{n+1} \subseteq A_n$.

Prueba : Notemos que $\widehat{A_{n+1}} \setminus \widehat{A_n} = \emptyset$ si y solo si $A_{n+1} \setminus A_n = \emptyset$. La conclusión se sigue de la *Propiedad 0*, i.e, $\widehat{A_{n+1}} \subseteq \widehat{A_n}$ y por el *Corlolario 1.49* tenemos que $A_{n+1} \subseteq A_n$.

Definimos la familia $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ por, $x_0 = min(A_0)$ en el paso base y para $x_{n+1} = min(A_{n+1} \setminus \{x_0, ..., x_n\})$. Notemos que $A_{n+1} \setminus \{x_0, ..., x_n\}$ es no vacío pues A_{n+1} es infinito, así x_{n+1} está bien definido.

Propiedad 3. Para todo $n \in \omega$, $\widehat{A} \cap \omega^* \subseteq \widehat{A_n}$.

Prueba : Sea $p \in \widehat{A} \cap \omega^*$ y fijemos $n \in \omega$. Como $p \in \widehat{A}$ entonces $A \in p$. Como $p \in \omega^*$ entonces p es ultrafiltro libre es decir $Fr \subseteq p$. Notemos que $(\omega \setminus \{x_k : k < n\}) \in Fr$, pues $(\omega \setminus (\omega \setminus \{x_k : k < n\}))$ es finito. Así $(\omega \setminus \{x_k : k < n\}) \in p$. Ahora por *iii*) de la definición de filtro, tenemos que $A \setminus \{x_k : k < n\} = A \cap (\omega \setminus \{x_k : k < n\}) \in p$, también tenemos que $A \setminus \{x_k : k < n\} \subseteq A_n$, por la definición de A y *Propiedad 2*, finalmente por *iv*) de la definición de filtro $A_n \in p$ entonces $p \in \widehat{A_n}$.

Por la *Propiedad 3* y la definición de $\widehat{A}_n$ se tiene lo siguiente.

Propiedad 4. $\widehat{A} \cap \omega^* \subseteq \bigcap_{n \in \omega} U_n$

Prueba : del *Lema 1.60.* Consideremos $B, C \subseteq \omega$ tales que, $B = \{x_n \in A : n$ es par $\}$, $C = \{x_n \in A : n$ es impar $\}$, con A como en la definición de arriba. Notemos que B y C así definidos son conjuntos ajenos, del *Lema 1.48* se sigue que como $B \cup C = A$ entonces $\widehat{B \cup C} = \widehat{B} \cup \widehat{C} = \widehat{A}$ y como $B \cap C = \emptyset$, entonces $\widehat{B \cap C} = \widehat{B} \cap \widehat{C} = \widehat{\emptyset} = \emptyset$. Ahora bien tomemos $\mathcal{V}_1 \in \widehat{B} \cap \omega^*$ y $\mathcal{V}_2 \in \widehat{C} \cap \omega^*$. Entonces $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$, sabemos también que $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \widehat{A}$, pues $\widehat{A} = \widehat{B} \cup \widehat{C}$. De la *Propiedad 3* se sigue que $\widehat{A} \subseteq \bigcap_{n \in \omega} \widehat{A}_n$ esto implica que $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \bigcap_{n \in \omega} \widehat{A}_n$, de la *Propiedad 0* sabemos que $\mathcal{U}_0 \in \bigcap_{n \in \omega} \widehat{A}_n$. Como $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$ podemos deducir que $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{U}_0$ ó $\mathcal{V}_2 \neq \mathcal{U}_0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{U}_0$. De lo anterior podemos afirmar que los ultrafiltros $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{U}_0 \in \bigcap_{n\in\omega} \widehat{A}_n$ por último de la construcción de $\widehat{A_n}$ sabemos que $\widehat{A}_{n+1} \subseteq U_0 \cap ... \cap U_{n+1}$, así $\bigcap_{n\in\omega} \widehat{A}_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Esto verifica el *lema 1.60* es decir, $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{U}_0$ y están en $\bigcap_{n\in\omega} U_n$■.

Capítulo 2

Invariantes Cardinales.

2.1. Base para ω^*.

Definición 2.1 *Para $A \subseteq \omega$ definimos, $A^* \subseteq \omega^*$ como $A^* = \widehat{A} \cap \omega^*$.*

Notemos que la definición 2.1 de ω^* es equivalente a la definición 1.45 pues $\omega^* = \widehat{\omega} \cap \omega^* = \beta\omega \cap \omega^* = \omega^*$.

Afirmación 2.2 $\mathcal{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$ *es base de* ω^*.

Prueba : De la definición 2.1 tenemos que $A^* = \widehat{A} \cap \omega^*$. Vimos ya en el *Teorema 1.52* que $\{\widehat{A} : A \subseteq \omega\}$ es base de $\beta\omega$ y $\omega^* \subseteq \beta\omega$. Así los ultrafiltros que cumplen la definición 2.1, forman una base de la topología relativa a ω^*. (*Definición 0.14*)$\blacksquare$

A continuación enunciamos algunas propiedades de la base de ω^*, observemos que estas propiedades son análogas a las vistas en *Lema 1.46*.

Lema 2.3 *1)* $\emptyset^* = \emptyset$
2)$(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$
3)$(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$
4)$(\omega \setminus A)^* = (\omega^* \setminus A^*)$
5)$A^* \neq \emptyset$ *si y sólo si* A *es infinito.*

Prueba :
1) $\emptyset^* = (\omega^* \cap \widehat{\emptyset}) = (\omega^* \cap \emptyset) = \emptyset$. (Definición 2.1, y Lema 1.46.)
2)$(A \cup B)^* = \omega^* \cap (\widehat{A \cup B}) = \omega^* \cap (\widehat{A} \cup \widehat{B}) = (\omega^* \cap \widehat{A}) \cup (\omega^* \cap \widehat{B}) = A^* \cup B^*$.
3)$(A \cap B)^* = \omega^* \cap (\widehat{A \cap B}) = (\omega^* \cap \widehat{A}) \cap (\omega^* \cap \widehat{B}) = A^* \cap B^*$. Los pasos se siguen de aplicar la *Definición 2.1* reiteradamente.

4)$(\omega \setminus A)^* = \widehat{(\omega \setminus A)} \cap \omega^* = (\widehat{\omega} \cap \omega^*) \setminus (\widehat{A} \cap \omega^*) = (\omega^* \setminus A^*)$.
5)De la definición 2.1 tenemos el siguiente enunciado: $(\widehat{A} \cap X^*) \neq \emptyset$ si y solo si A es inifinito, esto se cumple por el lema 1.58, por lo que se cumple 4). ■

Definición 2.4 *Orden con la casi contención.*
Si $A, B \in [\omega]^\omega$ *diremos que:*

i) $A \subseteq^* B$, *A está casi contenido en B, si* $|A \setminus B| < \omega$.
ii) A, B *son casi ajenos si* $|A \cap B| < \omega$.

Observación 2.5 $\langle \wp(\omega), \subseteq^* \rangle$ *es un preorden, es decir, la relación* $\subseteq^*$ *es reflexiva y transitiva sobre* $\wp(\omega)$.

Prueba : Para ver que la *casi contención* es reflexiva, notemos que $A \subseteq^* A$, pues $(A \setminus A) = \emptyset$ es finito. Para ver que la *casi contención* es transitiva, tomemos $A, B, C \in \langle \wp(\omega), \subseteq^* \rangle$. Hay que ver que si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* C$ entonces $A \subseteq^* C$. Por hipótesis tenemos que $(A \setminus B)$ es finito y $(B \setminus C)$ es finito, como la unión de finitos es finita tenemos que $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ es finito. Para demostrar que $A \subseteq^* C$, bastará con que $(A \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Supongamos lo contrario es decir $\exists x(x \in [(A \setminus C)] \bigwedge x \notin [(A \setminus B) \cup (B \setminus C)]$. Ahora si $x \notin [(A \setminus B) \cup (B \setminus C)]$, hay que considerar los siguientes casos $(x \notin A \vee x \in B) \bigwedge (x \notin B \vee x \in C) = (x \notin A \wedge x \notin B) \bigvee (x \notin A \wedge x \in C) \bigvee (x \in B \wedge x \notin B) \bigvee (x \in B \wedge x \in C)$. Notemos que por hipótesis $x \in (A \setminus C)$ por lo que los dos primeros casos no se dan pues tendríamos que $(x \in A \wedge x \notin A)$ lo que es absurdo igual que el caso donde $(x \in B \wedge x \notin B)$ y del caso restante y la hipótesis tendríamos $(x \in C \wedge x \notin C)$ lo cual tampoco es posible. Como en todos los casos llegamos a una contradicción se cumple que $(A \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ finito. Así $A \subseteq^* C$, esto implica que la *casi contención* es transitiva. ■

Por último notemos que la *casi contención* no es antisimétrica, razón por la que no es un orden parcial en $\wp(\omega)/fin$. Para convencernos de esto consideremos los siguientes conjuntos $a = \omega$ y $b = (\omega \setminus \{0\})$, afirmamos que $a \subseteq^* b$ pues $\omega \setminus (\omega \setminus \{0\}) = \{0\}$ es finito. También se cumple que $b \subseteq^* a$, pues $(\omega \setminus \{0\}) \setminus \omega = \emptyset$ es finito, pero $b = (\omega \setminus \{0\}) \neq \omega = a$. Por lo que la *casi contención* no es antisimétrica. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.6 $A =^* B$ *si y solo si* $A \subseteq^* B$ *y* $B \subseteq^* A$

Definición 2.7 *Para todo* $A \subseteq \omega$, *definimos la clase de equivalencia de A como*

$[A] = \{X \subseteq \omega : X =^* A\}$. *En particular, si* $s \subseteq \omega$ *es finito entonces* ($s =^* \emptyset$) *es decir* $[\emptyset] = \{s \subseteq \omega : s$ *es finito* $\}$.

Observemos que de la Definición 2.7 *y* el Teorema 0.12 *se induce un orden parcial con la casi contención en el conjunto de las clases de equivalencia que denotaremos* $\wp(\omega)/fin$.

Lema 2.8 $A^* \subseteq B^*$ *si y sólo si* $A \subseteq^* B$.

Prueba : A continuación utilizaremos las propiedades del *Lema 2.3*, $A^* \subseteq B^* \Leftrightarrow (A^* \setminus B^*) = (A \setminus B)^* = \omega^* \cap (\widehat{A \setminus B}) = \emptyset \Leftrightarrow |A \setminus B| < \omega \Leftrightarrow A \subseteq^* B$.■

Lema 2.9 *El conjunto de los cerrado-abiertos en* ω^* *ordenado con la casi contención y* ($\wp(\omega)/fin$) *visto como el conjunto de las clases de equivalencia de subconjuntos de* ω *(Definición 2.7), ordenado con la contención son isomorfos como orden parcial, ver* Definición 0.13.

Prueba : Bastará con ver que la función: $[A] \longmapsto A^*$, «poner estrella» a los elementos de $\wp(\omega)/fin$ es un isomorfismo que respeta el orden. En *2.7* definimos la clase de equivalencia para todo $A \subseteq \omega, [A] = \{X \subseteq \omega : X =^* A\}$. Ahora $[A] \neq [B]$ si y sólo si existe $X \subseteq \omega$ tal que ($A =^* X \neq^* B$) ó ($B =^* X \neq^* A$), sin pérdida de generalidad podemos suponer que ($A =^* X \neq^* B$), esto implica que $(A \subseteq^* X) \wedge (X \subseteq^* A)$ pero $(X \not\subseteq^* B) \vee (B \not\subseteq^* X)$. De lo anterior se desprenden dos casos:

Caso 1) Supongamos que $(A \subseteq^* X) \wedge (X \subseteq^* A)$ y $X \not\subseteq^* B$. Como $X \not\subseteq^* B$ entonces $(X \setminus B)$ es infinito. Ahora consideremos la siguiente partición de $(X \setminus B) = [(X \setminus B) \cap A] \cup [(X \setminus B) \cap (\omega \setminus A)]$, notemos que $[(X \setminus B) \cap (\omega \setminus A)] \subseteq (X \setminus A)$ es finito por hipótesis. Ahora veamos que el uniendo restante $[(X \setminus B) \cap A] = (X \cap A) \subseteq (A \setminus B)$. Ahora podemos ver a $(X \setminus B) \subseteq (A \setminus B) \cup (X \setminus A)$ como $(X \setminus B)$ es infinito y $(X \setminus A)$ finito se deduce que $(A \setminus B)$ es infinito, por lo que $A \not\subseteq^* B$.

Caso 2) Supongamos $(A \subseteq^* X) \wedge (X \subseteq^* A)$ y $B \not\subseteq^* X$. De las hipótesis se sigue que $(A \setminus X)$ es finito y $(B \setminus X)$ infinito. Análogamente consideremos la siguiente partición de $(B \setminus X) = [(B \setminus X) \cap A] \cup [(B \setminus X) \cap (\omega \setminus A)]$. Observemos que el primer uniendo $[(B \setminus X) \cap A] \subseteq ((B \cap A) \setminus X) \subseteq (A \setminus X)$ es finito por hipótesis, notemos que esto obliga a que el uniendo restante sea infinito, es decir $[(B \setminus X) \cap (\omega \setminus A)] \subseteq (B \setminus (X \cap A)) \subseteq (B \setminus A)$ esto implica que $B \not\subseteq^* A$.

Por último, de los casos 1) y 2) se sigue que $A \neq^* B$ y del *Lema 2.8* se sigue que $A^* \neq B^*$. Esto prueba que la función «poner estrella»: $[A] \longmapsto A^*$ es inyectiva módulo fin, así su inversa: $A^* \longmapsto [A]$ está bien definida. Notemos que $\wp(\omega)/fin$ está ordenado por la *casi contención*, igual que $\{A^* : A \subseteq \omega\}$ por la *contención*, por lo que la función «poner estrella» respeta el orden, *Lema 2.8*. Así «poner estrella» es un isomorfismo de orden, en simbolos $Clo(\omega^*, \subseteq) \cong (\wp(\omega)/fin, \subseteq^*)$.■

Por último mencionemos que usando esta biyección se pueden definir operaciones en $\wp(\omega)/fin$, que se comportan como en el *Lema 2.3*, desafortunadamente esto se sale de los objetivos de este trabajo.

2.2. Los invariantes $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{t}$.

Definición 2.10 *Sea $F \subseteq [\omega]^\omega$, decimos que F es* centrada, *si para todo $S \in [F]^{<\omega}$ con $S \neq \emptyset$, se tiene que $|\bigcap S| = \omega$.(ver definición 0.2)*

Notemos que si F es centrada y tomamos $a \in F$ tenemos que $|\bigcap\{a\}| = |a| = \omega$, esto implica que todo elemento de una familia centrada es infinito.

Definición 2.11 *a es una pseudointersección de F, si a es un conjunto infinito y $a \subseteq^* x$ para todo $x \in F$.*

Definición 2.12 $\mathfrak{p}$ $=min\{|F| : F \subseteq [\omega]^\omega$ *es centrada y no tiene pseudointersección*$\}$.

Definición 2.13 *Una torre es una familia $F = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ que cumple las siguientes dos condiciones donde κ es un ordinal.*
1) $A_\beta \subseteq^* A_\alpha$ $(\forall \alpha \leq \beta < \kappa)$.
2) F no tiene pseudointersección.

Definición 2.14 $\mathfrak{t} = min\{|F| : F$ *es torre.*$\}$

Veamos que $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{t}$ están bien definidos, para esto veamos que existen familias de conjuntos en $\wp(\omega)$ con tales características.

Lema 2.15 *Existe una torre.*

Prueba : Construyamos por recursión una familia $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ indexada por ordinales que cumpla la *Definición 2.13*.
Para el paso base tomemos $A_0 = \omega$.
Para el paso sucesor supongamos A_α construida con $\alpha \in OR$ y construyamos $A_{\alpha+1}$.
Tenemos 2 casos:
$i)$Si A_α es finito, hacemos $A_\alpha = A_{\alpha+1}$.

ii)Si A_α es infinito, escojamos una partición en conjuntos ajenos infinitos de la siguiente forma $A_\alpha = B \cup C$ y definimos $A_{\alpha+1} = B$. Notemos que de esta definición se sigue que $A_{\alpha+1} \subseteq^* A_\alpha$ y $A_\alpha \nsubseteq^* A_{\alpha+1}$ pues $(A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}) = C$ es infinito.
Si $\beta \in OR$ es límite tenemos dos casos:
a)$\{A_\alpha : \alpha \in \beta\}$ tiene pseudointersección $B \subseteq \omega$. Sea $A_\beta = B$
b)$\{A_\alpha : \alpha \in \beta\}$ no tiene pseudointersección. Sea $A_\beta = \emptyset$.

Una vez enumerados los casos posibles para cada tipo de ordinal afirmemos lo siguiente.

Afirmación: Existe $\beta \in OR$ con A_β finito.
Si negamos la *Afirmación* se sigue que A_β nunca es finito para todo $\beta \in OR$, en otras palabras existe una cadena de conjuntos todos distintos de la forma $A_\beta \subseteq^* ... \subseteq^* A_1 \subseteq^* A_0$. Veamos por inducción que para todo $\beta \in OR$, si $\alpha < \beta$ entonces $A_\alpha \neq A_\beta$.

Para $\beta + 1 \in OR$, de la construcción tenemos que $A_{\beta+1} \subseteq^* A_\beta$. Veamos que $A_{\beta+1} \neq A_\alpha$, si $\alpha \leq \beta$. De lo contrario tendríamos que $A_\beta \subseteq^* A_\alpha = A_{\beta+1}$, esto implica que $A_\beta =^* A_{\beta+1}$, lo que contradice el caso *ii*) de la construcción de $\{A_\alpha : \alpha \in \beta\}$.

Sea β es un ordinal límite, como A_β es infinito, estamos en el caso *a*) donde A_β es una pseudointersección de $\{A_\alpha : \alpha \in \beta\}$. Entonces tenemos una cadena $A_\beta \subseteq^* ... \subseteq^* A_1 \subseteq^* A_0$ de elementos todos casi distintos si $\alpha \leq \beta$. Si suponemos lo contrario tenemos que $A_\alpha = A_\beta$ para algún $\alpha < \beta$ esto en particular implica que $A_\alpha \subseteq^* A_{\alpha+1}$ y de la construcción sabemos que $A_{\alpha+1} \subseteq^* A_\alpha$ de donde se sigue que $A_\alpha =^* A_{\alpha+1}$, pero esto contradice la definición de $A_{\alpha+1}$.

Esto prueba que $A_\alpha \neq A_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in OR$, pero esto implicaría que $\{A_\alpha : \alpha \in OR\} \subseteq \wp(\omega)$ tiene tantos elementos como la clase de los ordinales lo cual es contradictorio. Así se cumple *la afirmación*. Por lo anterior existe $\beta \in OR$ tal que A_β es finito. Fijémonos en $\gamma = \min\{\beta \in OR : A_\beta \text{ es finito}\}$.

Si $\gamma = \beta + 1$, se descarta el inciso *ii*), aplicando el inciso *i*) se sigue que $A_{\beta+1} = A_\beta$, pero esto contradice la minimalidad de γ. Por lo tanto no es posible que γ sea sucesor, entonces γ es límite y como A_γ es finito por *definición de* γ entonces A_γ no es pseudointersección, *Definición 2.11*. Por el caso b) se sigue que $A_\gamma = \emptyset$. Esto verifica que $\{A_\alpha : \alpha \in \gamma\} \subseteq [\omega]^\omega$ es torre. Esto completa la prueba del *Lema 2.15*. ■

Lema 2.16 *Toda torre es centrada.*

Prueba : Consideremos las siguientes familias de conjuntos, sean $T = \{F \subseteq [\omega]^{\omega} : F$ es torre $\}$ y $P = \{F \subseteq [\omega]^{\omega} : F$ es centrada sin pseudointersección$\}$. Veamos que $T \subseteq P$. Sea $F = \{A_\alpha : \alpha < \gamma\} \in T$ entonces cumple 1) y 2) de la *definición 2.13.* Para $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n < \gamma$ y considerando $\beta = max\{\alpha_1, ...\alpha_n\}$. De 1) se sigue que $A_\beta \subseteq^* A_{\alpha_i}$ con $i \in \{1, .., n\}$ i.e $(A_\beta \setminus A_{\alpha_1}), (A_\beta \setminus A_{\alpha_2}), ..., (A_\beta \setminus A_{\alpha_n})$ son todos conjuntos finitos y como la unión de conjuntos finitos es finita y usando las leyes de *De Morgan* tenemos que $\bigcup_{i=1}^{n}(A_\beta \setminus A_{\alpha_i}) = (A_\beta \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i})$ es finito, entonces $A_\beta \subseteq^* (\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i})$ y por *Lema 2.8* tenemos $A_\beta^* \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i})^*$. Como A_β es infinito esto implica que $\emptyset \neq A_\beta^*$ y como $A_\beta^* \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i})^*$ se sigue que $(\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i})^* \neq \emptyset$ y por el *Lema 2.3,5)* tenemos que $(\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i})$ es infinito. Por lo tanto toda $F \in T$ es centrada y por 2) de 2.13, no tiene pseudointersección, esto implica que $T \subseteq P$.■

Corolario 2.17 $\mathfrak{t}$ *y* $\mathfrak{p}$ *están bien definidos.*

Prueba : Del *Lema 2.15* sabemos que existe una torre y del *Lema 2.16* sabemos que toda torre es centrada, es decir existen familias centradas sin pseudointersección. Por lo tanto $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{p}$ están bien definidos. ■

Lema 2.18 $\omega < \mathfrak{p} \leq \mathfrak{t} \leq \mathfrak{c}$.

Prueba : Para ver que $\omega < \mathfrak{p}$ será suficiente con tomar una familia F centrada con cardinalidad ω y ver que siempre podemos construirle una pseudointersección $A = \{x_n : n \in \omega\}$, esto lo haremos por recursión. Sea $F = \{A_\alpha : \alpha < \omega\}$ centrada. En el paso base nos fijamos en $x_0 = min(A_0)$, para el siguiente paso tomamos $x_1 = min((A_0 \cap A_1) \setminus \{x_0\})$. Para el paso inductivo tomamos $x_{n+1} = min\,[(\bigcap_{i=0}^{n} A_i) \setminus \{x_0, ..., x_n\}]$. Notemos que el conjunto $A = \{x_n : n \in \omega\}$ así construido está bien definido pues como F es centrada tenemos que $(\bigcap_{i=0}^{n} A_i)$ es infinito y $\{x_0, x_1..., x_n\}$ es un conjunto finito.

Ahora bien para probar que $A = \{x_n : n \in \omega\}$ es una pseudointersección de F debemos verificar: 1) A es infinito y 2) $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \omega$.

Para 1) sea $x_{m+1} = min(A_0 \cap A_1 ... \cap A_m \setminus \{x_0, ..., x_m\})$ como en la construcción de A. Es decir x_{m+1} es el minímo tal que $x_{m+1} \in (A_0 \cap A_1 ... \cap A_m)$ y $x_{m+1} \neq x_k$ con $k \in \{1, ..m\}$. Esto asegura que cada x_{m+1} es distinto de los $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ tomados en los pasos anteriores. Por lo que $A = \{x_n : n \in \omega\}$ es infinito.

Para 2) hay que verificar que $(A \setminus A_n)$ es finito para cada $n \in \omega$. Notemos que de la construcción de $A = \{x_i : i \in \omega\}$ se sigue que $A_n \supseteq \{x_{n+1} : n \leq \kappa + 1\}$. Para

convencernos de esto fijémonos en $(n \leq k+1)$ y tomemos algún $k+1$, escojamos como antes $x_k = x_{r+1} = min\,[(\bigcap_{i=0}^{r} A_i) \setminus \{x_0, .., x_r\}]$, es decir x_{r+1} es el mínimo en $(\bigcap_{i=0}^{r} A_i)$ y distinto de $\{x_0, .., x_r\}$ esto para toda n.
Esto asegura que $x_{k+1} \in A_n$. Por lo tanto $A_n \supseteq \{x_k : n \leq k+1\}$. Ahora observemos que $(A \setminus A_n) \supseteq \{x_n : n \in \omega\} \setminus \{x_{k+1} : n \leq k+1\} = \{x_0, ...x_n\}$ finito. Por lo tanto $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \omega$.

Finalemente de 1) y 2) se sigue que A es una pseudointersección de F. Así concluimos que $\omega < \mathfrak{p}$.

Para la segunda desigualdad, el *Lema 2.16*, afirma que toda torre es centrada sin pseudointersección y de la *definición 2.12* se sigue que $\mathfrak{p}$ es la mínima cardinalidad de una familia de este tipo. Esto implica que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$.

Para la tercera desigualdad, sabemos que una torre es una familia $T = \{A_\alpha : \alpha \in \beta\} \subseteq \wp(\omega)$ entonces $|T| \leq |\wp(\omega)| = \mathfrak{c}$. Existe una torre de tamaño $\mathfrak{c}$ ■

La prueba del siguiente resultado se dió en 2017, debido al trabajo de *Shelah y Malliaris*, cuestión fuera del alcance de este trabajo, sin embargo es posible consultar la prueba en [19] o [25]

Teorema 2.19 *(Malliaris-Shelah)* $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$.

Lema 2.20 *Si* $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *es una torre, entonces* $cof(\kappa) \geq \mathfrak{t}$.

Prueba : Sea $\lambda < \mathfrak{t}$. Supongamos que existe $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ cofinal, entonces para todo $\alpha < \kappa$ existe $\beta_\alpha < \lambda$ tal que $f(\beta_\alpha) > \alpha$. Esto implica que $A_{f(\beta_\alpha)} \subseteq^* A_\alpha$. Como $\lambda < \mathfrak{t}$ entonces la familia $\{A_{f(\beta_\alpha)} : \beta_\alpha < \lambda\}$ tiene pseudointersección A, es decir $A \subseteq^* A_{f(\beta_\alpha)} \subseteq^* A_\alpha$, lo cual es contradictorio pues $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una torre, por lo tanto f no es cofinal. ■

Corolario 2.21 $\mathfrak{t}$ *es regular.*

Prueba : Del *Lema 2.20* se sigue que $cof(\mathfrak{t}) \geq \mathfrak{t}$. Esto implica que $\mathfrak{t}$ es regular. ■

Corolario 2.22 $\mathfrak{p}$ *es regular*

Prueba : Del *Teorema 2.19* sabemos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$. Esto implica que $\mathfrak{p}$ es regular. ■

2.3. Axioma de Martin

Definición 2.23 *Sea* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un orden parcial. Decimos que* $D \subseteq \mathbb{P}$ *es denso en* $\mathbb{P}$ *si y solo si para todo* $p \in \mathbb{P}$ *existe* $q \in D$ *tal que* $q \leq p$*, léase «*q *extiende a* p*».*

Ejemplo: Sean $\mathbb{O}_X = \{U \subseteq X : U$ es abierto no vacío$\}$ y $X = \mathbb{R}$. Sea $D = \{(p, q) : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Entonces D es denso en $(\mathbb{O}_X, \subseteq)$.

Definición 2.24 *Dados* $p, q \in (\mathbb{P}, \leq)$*. Si no existe* $r \in \mathbb{P}$ *tal que* $r \leq p$ *y* $r \leq q$*, en simbolos* $p \perp q$*, diremos que* p *y* q *son incompatibles.*

Definición 2.25 *Dado* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un orden parcial. A una colección* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ *de elementos incompatibles dos a dos, le llamaremos anticadena.*

Definición 2.26 *Dado* $(\mathbb{P}, \leq)$ *un orden parcial, diremos que tiene la condición de la cadena contable ó simplemente la* ccc *si y solo si toda anticadena tiene cardinalidad numerable.*

Definición 2.27 *Sea* G *un subconjunto no vacío de* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *un orden parcial. Consideremos las siguientes condiciones.*

i)Si $p \in G$ *y* $p \leq q$*, entonces* $q \in G$*.*
ii)Para toda $p, q \in G$*, existe* $r \in G$ *tal que* $r \leq p$ *y* $r \leq q$*.*
iii)Si $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathbb{P}$ *es una familia de densos, entonces para todo* $\alpha < \kappa$ *se tiene que* $(G \cap D_\alpha) \neq \emptyset$*.*

Si G *cumple i) y ii) entonces* G *es filtro, si además se cumple iii) entonces* G *es filtro* $\mathcal{D}$*-genérico. Es bueno mencionar que la presente definición es una generalización de la definición 1.33 utilizada para describir el espacio de ultrafiltros.*

A continuación enunciaremos el *Axioma de Martin* ó simplemente (MA), por sus siglas en inglés.

Definición 2.28 $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ *es el siguiente enunciado: Dada* $\mathcal{D}$ *una familia de subconjuntos densos de un orden parcial* $\mathbb{P}$*, con* $|\mathcal{D}| \leq \kappa$*, existe un filtro* $\mathcal{D}$*-genérico.*

Definición 2.29 *i)*$MA(\kappa)$ *establece que* $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ *es verdadero para todo orden parcial* $\mathbb{P}$ *con la ccc. ii)*MA *establece que* $MA(\kappa)$ *es verdadero para todo* $\kappa < \mathfrak{c}$*.*

En el inciso d) del siguiente lema, veremos que $MA(\lambda)$ falla, si $\lambda \geq \mathfrak{c}$.

De ahora en adelante utilizaremos el conjunto constituido por las funciones de dominio ω e imagen un subconjunto de ω, usualmente denotado $\omega^\omega = \{f$ es función: $dom(f) = \omega, im(f) \subseteq \omega\}$. Cabe mencionar que $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$, ver *Proposición 0.15.*

Lema 2.30 *Veamos que los siguientes enunciados son verdaderos.*
a)Para todo $\mathbb{P} \neq \emptyset$. En ZFC se cumple $MA_{\mathbb{P}}(\omega)$, aún cuando $\mathbb{P}$ no tiene la ccc.
b)$MA(\mathfrak{c})$ es falso en ZFC.
c)$MA(\kappa) \Rightarrow MA(\lambda)$ si $\lambda \leq \kappa$.
d)Para todo $\lambda \geqslant \mathfrak{c}$, $MA(\lambda)$ falla.

Prueba : Para probar a), tomemos un orden parcial $\mathbb{P}$ y $\mathcal{D}$ una familia numerable de densos en $\mathbb{P}$, fijémos $p \in \mathbb{P}$ y veamos que existe un G filtro en $\mathbb{P}$ tal que $p \in G$ y $G \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Tomamos una lista de los densos $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$. Usando axioma de elección y recursión sobre ω, escojamos $r_n \in \mathbb{P}$ para todo $n \in \omega$. En el paso base tomemos $r_0 = p \in G$. Notemos que para todo $n \in \omega$ existe $r_{n+1} \in D_n$ tal que $r_{n+1} \leq r_n$, pues D_n es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n\, [r_n \leq q]\}$, veamos que cumple las condiciones de la definición 2.24 para ser un filtro $\mathcal{D}$-génerico.

i) Si $q \in G$ entonces $q \in \mathbb{P}$ y existe $n \in \omega$ tal que $r_n \leq q$. Ahora si $q \leq s$ entonces $(r_n \leq q \wedge q \leq s)$ así se sigue que $(r_n \leq s)$ por tanto $s \in G$.

ii) Tomemos $q, s \in G$, como $q \in G$ existe $a < \omega$ tal que $r_a \leq q$. Análogamente como $s \in G$ existe $b < \omega$ tal que $r_b \leq s$. Ahora consideremos $m=$ máx$\{a, b\}$ entonces tenemos que $(r_m \leq r_a \leq q) \wedge (r_m \leq r_b \leq s)$ como queríamos.

iii) Sea $n \in \omega$, se sigue que $r_n \leq r_n$ por lo tanto $r_n \in G$ y $G \cap D_n \neq \emptyset$.

Así de i), ii), iii) se sigue la existencia de un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Para probar b) es necesario verificar que $MA_{\mathbb{P}}(\mathfrak{c})$ falla. Para esto consideremos el orden parcial dado por el conjunto de las funciones $f : X \longrightarrow Y$, con $X, Y \subseteq \omega$ subconjuntos finitos, denotado por $Fn(\omega, \omega)$ y lo ordenaremos con la contención invertida es decir $\mathbb{P} = \langle Fn(\omega, \omega), \supseteq \rangle$. Si G es un filtro en $\mathbb{P} = \langle Fn(\omega, \omega), \supseteq \rangle$, se cumple que dadas $p, q \in G$, como p y q son funciones compatibles coinciden en la intersección de sus dominios. Es decir $p, q \in Fn(\omega, \omega)$ son compatibles si existe $r \in \mathbb{P} = \langle Fn(\omega, \omega), \supseteq \rangle$ tal que extiende a p y q es decir $p, q \subseteq r$ así $p \cup q \subseteq r$. Si $n \in dom(p) \cap dom(q)$ implica que existe $a \in \omega$ tal que $p(n) = a$ y si $n \in dom(q)$ entonces existe $b \in \omega$ tal que $q(n) = b$. Así $(n, a), (n, b) \in r$, como r es función se sigue que $r(n) = a = b$. De lo anterior *concluimos:* Si $n \in dom(p) \cap dom(q)$ entonces $p(n) = q(n)$.

Afirmación: Si G es un filtro genérico, entonces $f_G = \bigcup G$ es una función, como cada $p \in G$ es una función, los elementos de $\bigcup G$ son pares ordenados. Sea $(n, m) \in \bigcup G$ entonces existe $p \in G$ tal que $p(n) = m$. Si existe $(n, k) \in \bigcup G$ entonces existe $q \in G$ tal que $(n, k) \in q$ es decir $q(n) = k$. Como p, q son compatibles, por lo dicho en el párrafo anterior esto implica que $p(n) = q(n) = k$, esto implica que $k = m$. Por lo tanto $\bigcup G$ es función. Así $dom(\bigcup G) = \bigcup_{p\in G} dom(p), im(\bigcup G) = \bigcup_{p\in G} im(p)$. Así la unión de esas funciones, es la función $f_G = \bigcup G$ cuyo dom $(f_G) \subseteq \omega$ y cuya im$(f_G) \subseteq \omega$.

Queremos que f_G cumpla ciertas «propiedades deseadas». En este caso queremos convencernos de que $MA_{\mathbb{P}}(\mathfrak{c})$ falla, para esto consideraremos los conjuntos: 1) $D_i = \{q \in \mathbb{P} : i \in dom(q)\}$, con $i \in \omega$ y 2) $E_h = \{q \in \mathbb{P} : q \nsubseteq h\}$, con $h \in \omega^\omega$. Veamos que ambos conjuntos son densos en $\mathbb{P}$.

Para 1) tomemos cualquier función $p \in \mathbb{P}$ y veamos que existe $q \in D_i$ tal que $q \leq p$, sea $s = dom(p)$, tenemos dos casos, donde $i \in dom(p)$ ó donde $i \notin dom(p)$, en el primer caso tendríamos que $p \in D_i$ y como la relación $\subseteq$ en $\mathbb{P}$ es reflexiva, tenemos que $(p \leq p)$. Ahora si $i \notin dom(p)$ simplemente definimos $q = p \cup \{(i, 0)\}$ entonces $(q \supseteq p)$, $q \leq p$ es decir, «q extiende a p» con $q \in D_i$. Notemos que esto lo podemos hacer para cualquier $p \in \mathbb{P}$, esto muestra que D_i es denso en $\mathbb{P}$.

Para 2) tomando $p \in \mathbb{P}$ podemos escoger una $i \in (\omega \setminus dom(p))$ y $j \in (\omega \setminus \{h(i)\})$ y definir $q = p \cup \{(i, j)\}$ notemos que $(p \subseteq q)$ es decir «q extiende a p» y como $(i, j) \in (q \setminus h)$ entonces $q \nsubseteq h$.

Observemos lo que sucede si G intersecta a todos los densos en 1) y 2) respectivamente.

i) Si $G \cap D_i \neq \emptyset$ esto implica que existe $p \in G \cap D_i$. Entonces $i \in dom(p)$ para todo $i \in \omega$. Como $p \subseteq \bigcup G = f_G$, $i \in dom(f_G)$. Así dom$(f_G) = \omega$ por lo que $f_G \in \omega^\omega$.

ii) Ahora si G intersecta a E_h, para $h \in \omega^\omega$, entonces existe $p \in G \cap E_h$ por lo que $p \nsubseteq h$, es decir existe $(i, j) \in (p \setminus h)$. Como $p \subseteq \bigcup G = f_G$ entonces $(i, j) \in (f_G \setminus h)$. Por lo tanto $h \neq f_G$. Si esto pasa para toda $h \in \omega^\omega$ tendríamos que $f_G \notin \omega^\omega$

Notemos que *i)* y *ii)* nos llevan a una contradicción que sucederá, sólo si existe un filtro G que intersecte a los densos de 1) y 2). Dicho filtro lo obtendremos de aplicar el Axioma de Martin, para esto nos encargaremos de verificar que en $\mathbb{P}$ se cumplen las condiciones suficientes para su aplicación. En 1) y 2) vimos que ambos conjuntos son densos, esto nos será de utilidad al declarar la familia de densos, que nos llevará a la contradicción buscada.

Antes veamos que $\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega)$ tiene la ccc. Esto sucede pues $X, Y = \omega$ tenemos que $\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega) = \{p$ función: $dom(p) \subseteq X, im(p) \subseteq Y$ y dom(p) es finito $\}$, esto implica que $Fn(\omega, \omega) \subseteq \{X \subseteq \omega \times \omega : X$ es finito$\}$ es numerable, por lo tanto tiene la ccc.
Consideremos la familia de densos $|\mathcal{D}| = \mathfrak{c}$, dada como resultado de unir las familias de densos en 1) y 2) respectivamente: $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \omega\} \cup \{E_h : h \in \omega^\omega\}$. Esto completa las condiciones para aplicar MA.

Supongamos que $MA(\mathfrak{c})$ es verdadero, es decir existe G filtro $\mathcal{D}$-genérico, que intersecta los ω densos D_i para todo $i \in dom(p)$, esto implica que $f \in \omega^\omega$ y de intersectar a los $\mathfrak{c}$ densos E_h, para toda $h \in \omega^\omega$, esto implica que $f_G \nsubseteq h$ para toda $h \in \omega^\omega$, esto implica que en este caso $f_G \notin \omega^\omega$. Así se sigue que $f_G \neq f_G$, lo cual es contradictorio, por lo que concluimos que $MA(\mathfrak{c})$ falla.

Para probar c) sean $\lambda \leq \kappa$ cardinales infinitos y suponemos $MA(\kappa)$. Se sigue que dada $\mathcal{D}$ una una familia de densos con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ existe un G filtro $\mathcal{D}$-genérico. Notemos que si $(\lambda \leq \kappa)$ y tomamos una familia de densos con $|\mathcal{D}| \leq \lambda \leq \kappa$, el mismo G filtro nos sirve para $MA(\lambda)$ pues $(\lambda \leq \kappa)$. Es decir que si $MA(\kappa)$ se cumple entonces $MA(\lambda)$ también se cumple.

Para probar d), sabemos del inciso b) que $MA(\mathfrak{c})$ falla. Ahora si $\lambda \geq \mathfrak{c}$, de la contrapositiva de c) tenemos que si $MA(\mathfrak{c})$ falla entonces $MA(\lambda)$ también falla.■

Teorema 2.31 *Para cualquier κ cardinal regular no numerable, es consistente que $MA + \mathfrak{c} = \kappa$, ver* [18] *página 364.*

Definición 2.32 *$\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ es σ-centrado si podemos escribir $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathbb{P}_n$ y para toda $n \in \omega$ y $\{q_i : i \leq k < \omega\} \subseteq \mathbb{P}_n$, existe $r \in \mathbb{P}_n$ tal que $r \leq q_i$, para todo $i \leq k$.*

Proposición 2.33 *Si $\mathbb{P}$ es σ-centrado entonces tiene la ccc.*

Prueba : Como $\mathbb{P}$ es σ-centrado tenemos que $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathbb{P}_n$, si $\mathbb{P}$ no tiene la ccc, entonces podemos tomar $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ anticadena no numerable, es decir que $\mathcal{A} \cap \mathbb{P} = \mathcal{A} \cap (\bigcup \{\mathbb{P}_n : n \in \omega\})$, podemos ver a $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} \{\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_n\}$, notemos que el lado derecho de la igualdad es una unión numerable de numerables, la cual sabemos es numerable. Ahora, si $\mathcal{A}$ es no numerable entonces existe $n \in \omega$ tal que $n \in (\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_n)$ no numerable. Tomemos $q, s \in \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_n$, como $\mathbb{P}$ es σ-centrado, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que

$(r \leq q, s)$. Esto implica que (q y s) son compatibles pero $q, s \in \mathcal{A}$ es decir (q y s) son incompatibles, lo cual es contradictorio. ■

Del lema 2.30 sabemos que $MA(\mathfrak{c})$ falla. Así podemos definir el mínimo cardinal donde (MA) falla, como en la siguiente definición.

Definición 2.34 $\mathfrak{m}$= *min*$\{\kappa : MA(\kappa)$ *falla*$\}$.

Teorema 2.35 $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$

Prueba : Supongamos que $\kappa < \mathfrak{m}$ y probemos que $\kappa < \mathfrak{p}$. Para esto tomemos una familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ centrada y veamos que tiene pseudointersección K. Para esto usaremos el Axioma de Martin, empezaremos definiendo $\mathbb{P} = \{p = (S_p, W_p) : S_p \in [\omega]^{<\omega}, W_p \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\}$. Intuitivamente entenderemos a p como una condición de $\mathbb{P}$ que «dice algo» de K : S_p como una aproximación interna finita hacia K, es decir $S_p \subseteq K$ y el W_p promete que para todo $Z \in W_p, (K \setminus S_p) \subseteq Z$ ó equivalentemente $(K \setminus Z) \subseteq S_p$, esto garantiza que $K \subseteq^* Z$.

Lo dicho anteriormente nos da una idea intuitiva de como funcionará nuestro orden. Definamos formalmente, el orden parcial que describe las ideas anteriores.

Diremos que $q \leq p$ («q dice mas que p» ó « q extiende a p») si y solo si se cumple lo siguiente:

a) $S_q \supseteq S_p$ («q es mejor aproximación que p»)

b) $W_q \supseteq W_p$ («q promete más que p»)

c) $\forall Z \in W_p, [(S_q \setminus S_p) \subseteq Z]$ («q no rompe la promesa hecha por p»)

Veamos que $\leq$ así definido es efectivamente un orden parcial.($\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.)

1) $\leq$ es reflexiva. Para toda condición $p \in \mathbb{P}$ se cumple que
a) $S_p \subseteq S_p$,
b) $W_p \subseteq W_p$,
c) $\forall Z \in W_p \, [(S_p \setminus S_p) \subseteq Z]$ pues $(S_p \setminus S_p) = \emptyset$.

2) $\leq$ es antisimétrica.
Supongamos que para $p, q \in \mathbb{P}$, se cumple $(p \leq q) \wedge (q \leq p)$ entonces tenemos:
a) $S_p \subseteq S_p \wedge S_q \subseteq S_p$ esto implica que $S_q = S_p$.

b) $W_p \subseteq W_q \wedge W_q \subseteq W_p$ esto implica que $W_q = W_p$. Por lo tanto $p = q$.

3) $\leq$ es transitiva.
Tomemos $p, q, r \in \mathbb{P}$ condiciones tales que $(p \leq q) \wedge (q \leq r)$. Veamos que $p \leq r$.
Como $(p \leq q) \wedge (q \leq r)$ entonces se cumple:
a) $S_p \supseteq S_q$
b) $W_p \supseteq W_q$
c) $\forall Z \in W_q, [(S_p \setminus S_q) \subseteq Z]$
$\bigwedge$
a') $S_q \supseteq S_r$
b') $W_q \supseteq W_r$
c') $\forall Z \in W_r, [(S_q \setminus S_r) \subseteq Z]$. (Respectivamente).

Así de a) y a') tenemos a") $S_p \supseteq S_q \supseteq S_r$.
De b) y b') tenemos b") $W_p \supseteq W_q \supseteq W_r$.

Por último hay que verificar que se cumple c")$\forall Z \in W_r, [S_p \setminus S_r \subseteq Z]$, para esto supondremos verdaderas las condiciones c) y c'). De c) tenemos que para todo $Z \in W_q, [(S_p \setminus S_q) \subseteq Z]$ y de c') tenemos que para todo $Z \in W_r, [(S_q \setminus S_r) \subseteq Z]$.

Como es usual tomemos $Z_0 \in W_r$ y veamos que si $n \in (S_p \setminus S_r)$ es decir $n \in (S_p$ y $n \notin S_r$ entonces $n \in Z_0$. Notemos que si $n \in S_p$, puede pasar que $n \in S_q$ ó $n \notin S_q$. Si $n \in S_q$ como $n \notin S_r$ tenemos que $n \in (S_q \setminus S_r)$, aplicando c') tenemos que $(S_q \setminus S_r) \subseteq Z_0$. Ahora si $n \notin S_q$ tenemos que $n \in (S_p \setminus S_q)$, de b') tenemos que $W_r \subseteq W_q$ así si $Z_0 \in W_r$ entonces $Z_0 \in W_q$, aplicando c) se sigue que $(S_p \setminus S_q) \subseteq Z_0$, esto implica que $n \in Z_0$. Así en ambos casos $n \in Z_0$, por lo tanto se cumple c").
Notemos que a"), b") y c") son condiciones suficientes para que $p \leq r$, por lo que $\leq$ es transitiva.

Por último de 1), 2) y 3) se concluye que el conjunto $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ así definido, es un orden parcial.

Como queremos aplicar *el Axioma de Martin* a $\mathbb{P}$, hay que verificar que cumple las condiciones requeridas de acuerdo a la *definición 2.29.*

Observación: Si $S_q = S_p$ entonces c) se cumple por vacuidad. Ahora si $S_q = S_p$ entonces p y q son compatibles: la condición $(S_p, W_p \cup W_q)$ extiende a p y q.

Veamos que esto implica que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Para esto veamos que $\mathbb{P}$ es σ-centrado, después la *proposición 2.33*, justifica lo querido. Sea $[\omega]^{<\omega} = \{S^n : n < \omega\}$ y $\mathbb{P}_n =$

$\{p \in \mathbb{P} : S_p = S^n\}$ el conjunto de las condiciones en $\mathbb{P}$, tales que en la primer entrada tienen el valor S^n. Fijémos $n \in \omega$ y tomemos $p, q \in \mathbb{P}_n$, así tenemos que $p = (S^n, W_p)$ y $q = (S^n, W_q)$. De la observación anterior, se sigue que la condición $(S^n, W_p \cup W_q) \in \mathbb{P}$ y extiende a p y q. Así $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

Veamos que $D_n = \{p \in \mathbb{P} : |S_p| \geq n\}$ es denso en $\mathbb{P}$, por inducción sobre $n \in \omega$. Tomemos $p \in \mathbb{P}$ y veamos que existe $r \in D_n$ tal que $r \leq p$. Sea $p = (S_p, W_p)$. Si $n = 0$, hacemos $r = p$ y tenemos que $r \leq p$.

Por hipótesis de inducción, supongamos que D_{n-1} es denso, entonces existe $q = (S_q, W_q) \in D_{n-1}$ tal que $(q \leq p)$. Como $q \in D_{n-1}$ entonces $n - 1 \leq |S_q|$. Notemos también que $W_p \subseteq \mathcal{A}$ centrada, por lo que $|\bigcap W_p| = \omega$, esto nos permite tomar $\{t\} \in (\bigcap W_p \backslash dom(q))$, ya que el $dom(q)$ es finito. Ahora definamos $r = (S_q \cup \{t\}, W_q)$. Veamos que $r \leq q$, para esto será suficiente con verificar a), b), c) de $\mathbb{P}$.

De la definición de r tenemos a) $S_q \subseteq S_q \cup \{t\}$, como $W_q = W_r$ se cumple b) y por último notemos que $(S_r \setminus S_q) = \{t\} \subseteq \bigcap W_q$, por lo que para todo $Z \in W_q, (S_r \setminus S_q) \subseteq Z$, se cumple c). Esto implica que $r \leq q \leq p$, así $r \leq p$, además $|S_r| = |S_q| + 1 \geq (n - 1) + 1 = n$, por lo que $r \in D_n$. Esto verifica que D_n es denso en $\mathbb{P}$.

Para $A \in \mathcal{A}$, consideremos el conjunto $E_A = \{p \in \mathbb{P} : A \in W_p\}$. Veamos que es denso, para esto dado $p \in \mathbb{P}$, sea $q = (S_p, W_p \cup \{A\})$. Veamos que $q \leq p$, para esto basta ver que se cumple a), b), c) de $\mathbb{P}$. Como $S_p = S_q$ se cumple a), como $W_q = W_p \cup \{A\} \supseteq W_p$ se cumple b) y como $(S_p \setminus S_q) = \emptyset \subseteq Z$, para todo $Z \in W_p$ se cumple c). Entonces $q \in E_A$ y E_A es denso. Notemos que con esto hemos terminado de verificar las condiciones suficientes para aplicar *el Axioma de Martin.*
Como $|\mathcal{A}| = \kappa < \mathfrak{m}$ entonces el conjunto $\mathcal{D} = \{E_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{D_n : n \in \omega\}$ es denso y cumple $|\mathcal{D}| = \kappa$. Aplicando $MA(\kappa)$ existe un G filtro $\mathcal{D}$-genérico, como D_n es denso para todo $n \in \omega$, al conjunto de todas las aproximaciones finitas elegidas por el filtro G, lo denotaremos $K_G = \{\bigcup S_p : p \in G\}$.

Veamos que $|K_G| = \omega$. Sea $n \in \omega$, existe $p \in G \cap D_n$ como $p \in D_n$ entonces $|S_p| \geq n$, como $S_p \subseteq K_G$, se sigue que $|S_p| \leq |K_G|$ y por definición $n \leq |K_G|$. Además $K_G \subseteq \omega$ por lo que $|K_G| = \omega$. Al momento tenemos que K_G es infinito, para concluir que K_G es una pseudointersección de $\mathcal{A}$, nos falta verificar que para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $|K_G \setminus A| < \omega$.

Sea $p \in G \cap E_A$, como $p \in E_A$ entonces $A \in W_p$, veamos que $(K_G \setminus S_p) \subseteq A$. Tomemos $n \in (K_G \setminus S_p)$ entonces existe $q \in G$ tal que $n \in S_q$, como $p, q \in G$ existe

$r \in G$ tal que ($r \leq p, q$) es decir $S_q \subseteq S_r$. Así $n \in S_r$ entonces $n \in S_r$ y $n \notin S_p$ entonces $n \in (S_r \setminus S_p) \subseteq Z$, para todo $Z \in W_p$, esto por c) de $r \leq p$.
Como $A \in W_p$ entonces $n \in A$. Esto implica que $(K_G \setminus S_p) \subseteq A$ ó equivalentemente $(K_G \setminus A) \subseteq S_p$, por lo que $(K_G \setminus A)$ es finito, es decir que $K_G \subseteq^* A$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Esto verifica que K_G es una pseudointersección de $\mathcal{A}$, lo que implica que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$. ■

Corolario 2.36 *(MA) implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.*

En el *Teorema 2.35* vimos que a cualquier familia de tamaño menor que $\mathfrak{c}$, es posible construirle una pseudointersección usando el *Axioma de Martin* entonces $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$ y como (MA) falla en $\mathfrak{c}$ entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.■

2.4. Ultrafiltros y el cardinal $\mathfrak{p}$.

Recordemos que en el *lema 1.60*, probamos que $\beta\omega$ no es metrizable. Como cada espacio métrico es primero numerable, para todo $x \in M$ con $\epsilon > 0$, es posible definir una familia $B(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$ tal que se cumpla que $\bigcap_{n\in\omega} B(x, 2^{-n}) = \{x\}$. Justamente la prueba del *lema 1.60*, se redujo a verificar que esto no es posible en ω^*, pues cualquier colección numerable de abiertos con intersección no vacía, tiene mas de un punto en su intersección, por lo que ω^* no es primero numerable y por tanto no es metrizable. En la presente sección nos ocuparemos de responder la siguiente pregunta: ¿Es posible en ($\kappa > \omega$) pasos, asegurar que $\bigcap_{\kappa\geq\omega}\{A_\alpha : \alpha \leq \kappa\} = \{p\}$, con $p \in \omega^*$?

Definición 2.37 *$\mathcal{B}$ es una base local en p, si para todo $p \in V$ abierto, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $p \in U \subseteq V$.*

Definición 2.38 *Dado X espacio topológico y $p \in X$, decimos que X tiene una base linealmente ordenada en p, si existe un cardinal ($\kappa \geq \omega$) y $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una base local en p, que ademas cumple que si $\alpha < \beta < \kappa$ entonces $U_\beta \subseteq U_\alpha$.*

Lema 2.39 *Sea X un espacio topológico, $p \in X$, $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ base linealmente ordenada en p y $f : \lambda \to \kappa$ cofinal, entonces $\{U_{f(\alpha)} : \alpha < \lambda\}$ es base linealmente ordenada en p.*

Prueba : Sea $p \in V$ un abierto, como $\mathcal{B}$ es base local de p, existe $\beta \in \kappa$ tal que $p \in U_\beta \subseteq V$ y como $f : \lambda \to \kappa$ es cofinal existe $\alpha \in \lambda$ tal que $f(\alpha) \geqslant \beta$, esto implica que $U_{f(\alpha)} \subseteq U_\beta \subseteq V$. Así $p \in U_{f(\alpha)} \subseteq V$.■

De la *Afirmación 2.2* se sigue que el conjunto $\{A^* : A \subseteq \omega\}$ es una base para ω^*.

Lema 2.40 *Sea $p \in \omega^*$ con una base linealmente ordenada. Existe $\kappa \geq \omega$ cardinal regular y $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq p$ que cumple:*
1) $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq p$ es torre.
2) $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq p$, genera al ultrafiltro libre $p \in \omega^*$, i.e, para todo $B \in p$ existe $\alpha \in \kappa$ tal que $A_\alpha \subseteq^* B$.

Prueba : Supongamos que existe $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que cumple:

$\cdot$) Ser base local: para todo W abierto en ω^* con $p \in \omega^*$ y $p \in W$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $p \in U_\alpha \subseteq W$.
$\cdot\cdot$) Para todo $\alpha < \beta < \kappa$ se tiene que $U_\beta \subseteq U_\alpha$.

Ahora del *lema 2.39*, supongamos sin pérdida de generalidad que κ es regular. Construyamos por recursión una familia $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ que cumpla lo querido en el *lema 2.40.*

La hipótesis de inducción:
a) Para todo $(\beta < \kappa), \{A_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq p$. Cumple que si $\alpha < \beta < \gamma$ entonces $A_\gamma \subsetneq^* A_\alpha$.
b)Para todo $\alpha < \beta$ se tiene $A^*_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Paso β. Por hipótesis de inducción tenemos que para todo α con $A_\alpha \in p$ entonces $p \in A^*_\alpha$. Definimos $f : \beta \longrightarrow \kappa$, para cada $\alpha \in \beta$, tenemos que $p \in A^*_\alpha$ y por el *lema 2.39*, existe $f(\alpha) \in \kappa$ tal que $p \in U_{f(\alpha)} \subseteq A^*_\alpha$. Como κ es regular existe $\gamma \in \kappa$ tal que $\gamma \geq f(\alpha)$, para todo $\alpha \in \beta$ entonces tenemos que $U_\gamma \subseteq U_{f(\alpha)} \subseteq A^*_\alpha$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\gamma > \beta$ entonces $U_\gamma \subseteq U_\beta$. Sabemos también que el conjunto $\{A^* : A \subseteq \omega\}$ es base de ω^*, por tanto existe $B \subseteq \omega$ tal que $p \in B^* \subseteq U_\gamma$. Por el *lema 1.60*, existen al menos $p, q \in U_\gamma$ distintos, lo que nos permite suponer que $B^* \subseteq U_\gamma \setminus \{q\}$. Esto asegura que $B^* \subsetneq U_\gamma$. Así en el paso β, definimos $A_\beta = B$. Veamos que se cumplen a) y b) de la hipótesis de inducción.

De la construcción anterior tenemos que $A^*_\beta \subsetneq U_\gamma \subseteq A^*_\alpha$, para $\alpha < \beta$. Esto implica que $A^*_\beta \subsetneq A^*_\alpha$, aplicando el *lema 2.8*, tenemos $A_\beta \subsetneq^* A_\alpha$, por lo que se cumple a). Para b) sabemos que $A^*_\beta \subseteq U_\gamma \setminus \{q\} \subsetneq U_\gamma \subseteq U_\beta$. Esto completa la construcción.

Dicho lo anterior veamos que se cumplen 1) y 2) del *lema 2.40*

Para 2) tomemos $B \in p$ entonces $p \in B^*$, esto es posible ya que p es un ultrafiltro, como $\mathcal{B}$ es base local existe $U_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $p \in A^*_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq B^*$ y del *lema 2.8*, se sigue que $A_\alpha \subseteq^* B$.

Para terminar la prueba de 1) del *lema 2.40*, falta verificar que $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ no tiene pseudointersección. Tomemos $C \subseteq \omega$ y supongamos que C es pseudointersección, como p es un ultrafiltro tenemos dos casos: i) $C \in p$ ó ii) $(\omega \setminus C) \in p$.

Caso $i)$ Si $C \in p$ entonces $p \in C^*$ por b) de la hipótesis de inducción, tenemos que existe $\beta < \kappa$ tal que $p \in A^*_\beta \subseteq U_\beta \subseteq C^*$ entonces $A^*_\beta \subseteq C^*$ y por el *lema 2.8* tenemos que $A_\beta \subseteq^* C$. Ahora si C es pseudointersección de $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ esto implica que $C \subseteq^* A_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$.

Notemos que si $\beta < \alpha$ entonces $A_\alpha \subsetneq^* A_\beta$, así tenemos que $C \subseteq^* A_\alpha \subsetneq^* A_\beta$ y del caso $i)$ sabemos que $A_\beta \subseteq^* C$, por lo que $C =^* A_\beta =^* A_\alpha$, lo cual es contradictorio por lo dicho en a) de la hipótesis de inducción.

Caso $ii)$ Si $(\omega \setminus C) \in p$ entonces $p \in (\omega \setminus C)^* = (\omega^* \setminus C^*)$. Notemos que $(\omega^* \setminus C^*)$ es un abierto en ω^*. Por b) de la construcción existe $\alpha < \kappa$ tal que $p \in A^*_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq (\omega^* \setminus C^*)$. Esto implica que $A^*_\alpha \subseteq (\omega^* \setminus C^*)$ entonces $A^*_\alpha \cap C^* = \emptyset$, el inciso 5) del *lema 2.3*, implica que $(A_\alpha \cap C)$ es finito. Notemos que $C = (A_\alpha \cap C) \cup (C \setminus A_\alpha)$, como $(A_\alpha \cap C)$ es finito, entonces $(C \setminus A_\alpha)$ infinito, por lo tanto $C \nsubseteq^* A_\alpha$.

De $i)$ y $ii)$ se sigue que C no es pseudointersección de $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$. Esto verifica 1) del *lema 2.40* y concluye la prueba del mismo. ■

La moraleja del *lema 2.40* es: si queremos un ultrafiltro $p \in \omega^*$ con una base linealmente ordenada, tendrá que ser generado por una una torre. Esto motiva el siguiente teorema.

Teorema 2.41 *Si* $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$, *existe un ultrafiltro generado por una torre.*

Prueba : Enumeramos $[\omega]^\omega = \{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y construyamos por recursión una familia $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq [\omega]^\omega$ que cumpla:
1) Para todo $\alpha < \beta < \mathfrak{c}, (A_\beta \subsetneq^* A_\alpha)$.
2) Para todo $\alpha < \mathfrak{c}, (A_\alpha \subsetneq^* B_\alpha) \vee (A_\alpha \cap B_\alpha) =^* \emptyset$.

Para el paso base hacemos $A_0 = B_0$ y por vacuidad se cumple 1). Para 2) como $A_0 = B_0$ entonces $(A_0 \setminus B_0) = \emptyset$ esto implica que $A_0 \subseteq^* B_0$.
Para el paso $0 < \gamma < \mathfrak{c}$. Definimos A_γ de la siguiente forma:

Caso $i)$ Para todo $\alpha < \gamma, (A_\alpha \cap B_\gamma)$ infinito.
Consideremos $L = \{A_\alpha \cap B_\gamma : \alpha < \gamma\} \subseteq [\omega]^\omega$ y veamos que está ordenado con la casi contención, es decir que para $\alpha < \beta < \gamma, (A_\beta \cap B_\gamma \subseteq^* A_\alpha \cap B_\gamma)$. Bastará con verificar

la siguiente contención $(A_\beta \cap B_\gamma) \setminus (A_\alpha \cap B_\gamma) \subseteq (A_\beta \setminus A_\alpha)$, donde $(A_\beta \setminus A_\alpha)$ es finito por hipótesis, notemos que dicha contención se cumple ya que es una instancia del inciso $i)$ del *Lema 0.19*. Esto verifica que L esta ordenada con la casi contención.

Para $\alpha < \gamma$. Como $\gamma < \mathfrak{t} = \mathfrak{c}$. Existe una pseudointersección de L que llamaremos A_γ. Es decir, $A_\gamma \subseteq^* (A_\alpha \cap B_\gamma) \subseteq B_\gamma$, por tanto $A_\gamma \subseteq^* B_\gamma$, se verifica 2). También se cumple $A_\gamma \subseteq^* (A_\alpha \cap B_\gamma) \subseteq A_\alpha$, por tanto $A_\gamma \subseteq^* A_\alpha$, se verifica 1).

Para el caso $ii)$ existe $\alpha_0 < \gamma$ donde $(A_{\alpha_0} \cap B_\gamma)$ es finito.
Definimos $L = \{A_\alpha \setminus B_\gamma : \alpha < \gamma\}$. Veamos que $L \subseteq [\omega]^\omega$, para esto observemos la siguiente igualdad $A_{\alpha_0} = (A_{\alpha_0} \cap B_\gamma) \cup (A_{\alpha_0} \setminus B_\gamma)$, por definición tenemos que A_{α_0} es infinito, $(A_{\alpha_0} \cap B_\gamma)$ es finito, así la igualdad obliga que $(A_{\alpha_0} \setminus B_\gamma)$ sea infinito.

Si $\alpha_0 < \alpha$. Observemos la siguiente igualdad $A_\alpha = (A_\alpha \setminus B_\gamma) \cup (A_\alpha \cap B_\gamma)$, ahora como A_α es infinito y $(A_\alpha \cap B_\gamma)$ finito, para justificar esto último, basta con notar que por el orden en el caso $i)$ tenemos que $(A_\alpha \cap B_\gamma) \setminus (A_{\alpha_0} \cap B_\gamma) \subseteq (A_\alpha \setminus A_{\alpha_0})$, de esta igualdad sabemos $(A_\alpha \setminus A_{\alpha_0})$ es finito y $(A_{\alpha_0} \cap B_\gamma)$ es finito, por lo tanto $(A_\alpha \cap B_\gamma)$ es finito como queríamos. Aclarado lo anterior esto obliga a que en este caso también $(A_\alpha \setminus B_\gamma)$ es infinito.

Si $\alpha < \alpha_0$. Tenemos que $(A_{\alpha_0} \setminus B_\gamma) \setminus (A_\alpha \setminus B_\gamma) \subseteq (A_{\alpha_0} \setminus A_\alpha)$ se cumple por ser instancia del inciso $ii)$ de *Lema 0.17* y del orden con la casi contención en L, sabemos que $(A_{\alpha_0} \setminus A_\alpha)$ es finito y $(A_{\alpha_0} \setminus B_\gamma)$ es infinito ya que $(A_{\alpha_0} \cap B_\gamma)$ es finito por hipótesis del caso $ii)$. Esto obliga a que $(A_\alpha \setminus B_\gamma)$ sea infinito. Así $L \subseteq [\omega]^\omega$.

Ahora probemos que L que cumple el orden con la casi contención. Para esto hay que verificar que $(A_\alpha \setminus B_\gamma) \subseteq^* (A_{\alpha_0} \setminus B_\gamma)$. Esto se reduce a probar que $(A_\alpha \setminus B_\gamma) \setminus (A_{\alpha_0} \setminus B_\gamma) \subseteq (A_\alpha \setminus A_{\alpha_0})$ finito. Notemos que esta contención se cumple por ser instancia del inciso $ii)$ del *Lema 0.19*.

Como $\gamma < \mathfrak{c} = \mathfrak{t}$, definimos la pseudointersección A_γ de L. Entonces se sigue que $A_\gamma \subseteq^* (A_\alpha \setminus B_\gamma)$ para todo $\alpha < \mathfrak{t}$. Por lo tanto $A_\gamma \subseteq^* (A_\alpha \setminus B_\gamma) \subseteq A_\alpha$. Esto verifica 1).
Para 2) tenemos que $A_\gamma \subseteq^* (A_0 \setminus B_\gamma) = (A_0 \cap (\omega \setminus B_\gamma)) \subseteq (\omega \setminus B_\gamma)$ por lo tanto $A_\gamma \subseteq^* (\omega \setminus B_\gamma)$ es decir $A_\gamma \setminus (\omega \setminus B_\gamma)$ es finito por lo tanto $A_\gamma \cap B_\gamma$ es finito.

Ahora consideremos $\mathcal{U} = \{B \in [\omega]^\omega : \exists \alpha < \mathfrak{c}(A_\alpha \subseteq^* B)\}$ y veamos que cumple:
a) $\mathcal{U}$ es filtro.
b) $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

c) $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es torre.

Para a) veamos que $\mathcal{U}$ cumple las condiciones de filtro.

i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Si $\emptyset \in \mathcal{U}$ existe $\alpha < \mathfrak{c}$, tal que $A_\alpha \subseteq^* \emptyset$ es decir que $(A_\alpha \setminus \emptyset) = A_\alpha$ es finito, lo cual es contradictorio pues A_α es infinito.

ii) $\omega \in \mathcal{U}$, como $A_0 \subseteq^* \omega$ entonces $\omega \in \mathcal{U}$.

iii) Dados $C, D \in \mathcal{U}$ existen $\alpha < \beta$ tales que $A_\alpha \subseteq^* C$ y $A_\beta \subseteq^* D$ es decir $(A_\alpha \setminus C)$ y $(A_\beta \setminus D)$ son ambos conjuntos finitos y como $A_\beta \subseteq^* A_\alpha$ entonces $(A_\alpha \setminus C) \cup (A_\beta \setminus D) = A_\beta \setminus (C \cap D)$ es finito. Esto implica que $A_\beta \subseteq^* (C \cap D)$, por lo tanto $(C \cap D) \in \mathcal{U}$.

iv) Dado $J \in \mathcal{U}$ y $B \subseteq \omega$ tal que $J \subseteq B$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $A_\alpha \subseteq^* J$ entonces $A_\alpha \subseteq^* B$. Así $B \in \mathcal{U}$.

De las condiciones i), ii), iii) y iv) se sigue que $\mathcal{U}$ es un filtro.

Para b) verifiquemos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, bastará con mostrar que para todo $B \in [\omega]^\omega$ se cumple alguna de las siguienes condiciones: $(B \in \mathcal{U}) \vee (\omega \setminus B) \in \mathcal{U}$, ver *Lema 1.36*. Verifiquemos los siguientes casos:

Caso 1) B es finito, notemos que $A_0 \subseteq^* (\omega \setminus B)$ pues $(A_0 \setminus (\omega \setminus B)) = A_0 \cap B \subseteq B$ es finito. Así $(\omega \setminus B) \in \mathcal{U}$.
Caso 2) B es infinito, existe $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $B_\gamma = B$.
Caso 2a) $A_\gamma \subseteq^* B_\gamma$ entonces $B_\gamma \in \mathcal{U}$.
Caso 2b) $A_\gamma \cap B_\gamma =^* \emptyset$ entonces $A_\gamma \cap B_\gamma = A_\gamma \setminus (\omega \setminus B_\gamma)$ es finito. Por lo tanto $A_\gamma \subseteq^* (\omega \setminus B_\gamma)$, así $(\omega \setminus B_\gamma) \in \mathcal{U}$.

Para c) supongamos que $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ no es torre, esto implica que existe $B \subseteq \omega$ que es pseudointersección de $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es decir que $B \subseteq^* A_\alpha$ para todo $\alpha < \mathfrak{c}$. Notemos que por el inciso b) tenemos 2 casos:

1) $B \in \mathcal{U}$, entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $A_\alpha \subseteq^* B$, por el orden en $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tenemos que $A_{\alpha+1} \subseteq^* A_\alpha$ y de lo dicho anteriormente $A_\alpha \subseteq^* B$ juntando los enunciados tenemos que $A_{\alpha+1} \subseteq^* A_\alpha \subseteq^* B$ y como B es pseudointersección $B \subseteq^* A_{\alpha+1}$. Esto implica que $A_{\alpha+1} =^* A_\alpha$ lo cual es contradictorio pues $\alpha < \alpha + 1$, por lo tanto $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ no tiene pseudointersección.

2) $(\omega \setminus B) \in \mathcal{U}$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $A_\alpha \subseteq^* (\omega \setminus B)$ es decir $A_\alpha \setminus (\omega \setminus B) = (A_\alpha \cap B)$ es finito, como B es pseudointersección tenemos que $B \subseteq^* A_\alpha$ es decir que $(B \setminus A_\alpha)$ es

finito. Ahora como la unión de finitos es finita tenemos que $B = (A_\alpha \cap B) \cup (B \setminus A_\alpha)$ es finito, lo cual es contradictorio, pues si B es pseudointersección no puede ser finito.

De 1) y 2) se cumple c). $\blacksquare$

Ahora responderemos afirmativamente, a la pregunta que motivó la presente *sección*, para esto consideremos $\mathcal{U} = \{B \in [\omega]^\omega : \exists \alpha < \mathfrak{c}(A_\alpha \subseteq^* B)\}$ ultrafiltro como en la prueba del *Teorema 2.41*.

Notemos que:
$\bullet$) Para todo $\alpha < \kappa$, $(A_\alpha \in \mathcal{U})$ entonces $\mathcal{U} \in A^*_\alpha$.
$\bullet\bullet$) Si $\mathcal{V} \in (\bigcap_{\alpha<\kappa} A^*_\alpha)$ entonces $\mathcal{V} \in A^*_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$, de manera equivalente $A_\alpha \in \mathcal{V}$. Dicho lo anterior veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Para esto tomemos $B \in \mathcal{U}$ entonces existe $\beta < \kappa(A_\beta \subseteq^* B)$ es decir que $(A_\beta \setminus B)$ es finito entonces $(\omega \setminus (A_\beta \setminus B))$ es cofinito.

Ahora veamos que se cumple la siguiente contención a la que llamaremos:
$(\star)$ $A_\beta \cap (\omega \setminus (A_\beta \setminus B)) \subseteq B$. Tomemos $p \in A_\beta \cap (\omega \setminus (A_\beta \setminus B))$ tenemos que $(p \in A_\beta \wedge p \in \omega)$ y $p \notin (A_\beta \setminus B)$ es decir $p \notin A_\beta$ ó $p \in B$, tenemos los siguientes casos:

i) $(p \in A_\beta \wedge p \notin A_\beta)$, es contradictorio.
ii) $(p \in A_\beta \wedge p \in B)$ entonces $p \in (A_\beta \cap B) \subseteq B$, por este caso se cumple $(\star)$.

Notemos que $A_\beta \in \mathcal{V}$ por $\bullet\bullet$). Sabemos que $(A_\beta \setminus B)$ es finito entonces $(\omega \setminus (A_\beta \setminus B))$ es cofinito por lo tanto $(\omega \setminus (A_\beta \setminus B)) \in \mathcal{V}$, pues $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro libre y extiende a los cofinitos *ver Definición 1.42*. Así tenemos que $A_\beta \in \mathcal{V}$ y $(\omega \setminus (A_\beta \setminus B)) \in \mathcal{V}$ entonces por el inciso *iii*) de la *Definición 1.33* de filtro tenemos que $A_\beta \cap (\omega \setminus (A_\beta \setminus B)) \in \mathcal{V}$ y por $(\star)$ se sigue que $A_\beta \cap (\omega \setminus (A_\beta \setminus B)) \subseteq B$, del inciso *iv*) de la *Definición 1.33* de filtro se sigue que $B \in \mathcal{V}$. Esto prueba $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, por último como son ultrafiltros se sigue que $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.
De $\bullet\bullet$) y $\bullet$) se sigue que $(\bigcap_{\alpha<\kappa} A^*_\alpha) = \{\mathcal{U}\}$.

Motivación: En el *Teorema 2.41*, probamos que es consistente la existencia de ultrafiltros con base linealmente ordenada. Es natural preguntarse si es consistente que no existan ultrafiltros con base linealmente ordenada, si esto fuese verdadero tendríamos que el enunciado: «tener base linealmente ordenada», (hablando de ultrafiltros libres), sería un enunciado independiente.

Definición 2.42 *Un filtro $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es un P-filtro, si para todo $\{A_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{F}$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que es pseudointersección de $\{A_n : n < \omega\}$.*

Ejemplo: F_r es P-filtro y ω es pseudointersección de F_r, pues, $B \in F_r \Leftrightarrow (\omega \setminus B)$ es finito $\Leftrightarrow (\omega \subseteq^* B)$.

Definición 2.43 *Un P-punto es un ultrafiltro P-filtro.*

Teorema 2.44 *Todo ultrafiltro con base linealmente ordenada es un P-punto.*

Prueba : Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro con base linealmente ordenada. Por el *Lema 2.40* $\mathcal{U}$ tiene una base $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que es torre. De *2.20* sabemos que $\omega < \mathfrak{t} \leq cof(\kappa)$. Sea $\{B_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$. Entonces para cada $n \in \omega$ existe $\alpha_n \in \kappa$ con $A_{\alpha_n} \subseteq^* B_n$. Tomemos $\beta = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Como $\omega < cof(\kappa)$ entonces existe $\beta \in \kappa$. Esto implica que $A_\beta \subseteq^* A_{\alpha_n} \subseteq^* B_n$ para toda $n \in \omega$. Así A_β es pseudointersección de $\{B_n : n < \omega\}$.■

Teorema 2.45 (ZFC) *Para cada $A \subseteq \omega$ infinito, existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \in A^*$ que no es P-punto.*

Prueba : Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, una partición en conjuntos infinitos. Notemos que:
i) Para todo $n \in \omega$, $A_n^* \neq \emptyset$. *Ver inciso 5), Lema 2.3.*
ii) Para todo $n \in \omega$, $A_n^* \subseteq A^*$. Como $(A_n \setminus A) = \emptyset$, esto implica que $A_n \subseteq^* A$ y por *lema 2.8* tenemos lo querido $A_n^* \subseteq A^*$.
iii) Para todo $n \neq m$, $A_n^* \cap A_m^* = \emptyset$, con $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Como $A_n \cap A_m = \emptyset$ entonces $A_n \cap A_m =^* \emptyset$ y por *lema 2.8*, tenemos lo querido $A_n^* \cap A_m^* = \emptyset$.

Del *Lema 0.17*, tenemos que todo conjunto infinito numerable en un compacto tiene un punto de acumulación. Ahora como A^* es compacto, existe $\mathcal{U} \in A^*$ punto de acumulación de la familia $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de ultrafiltros, ver *Definición 0.16*. Notemos que para todo $B \in \mathcal{U}$ se tiene que $\mathcal{U} \in B^*$ y $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\} \cap B^*$ es infinito.

Observación: Para todo $n \in \omega$, $(\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U})$. Por *ii*), si $\kappa \in \omega$, $m \neq k$ y $A_k \in \mathcal{U}_k$ entonces $A_k \notin \mathcal{U}_m$ y por lo tanto $(\mathcal{U}_m \notin A_k^*)$, entonces $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\} \cap A_k^* = \{\mathcal{U}_k\}$ es finito. Por tanto U_κ no satisface la *Definición 0.16* que implica que $\mathcal{U}$ es punto de acumulación de $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$.

Afirmación: $\mathcal{U}$ no es un P-punto.
Para cada $n \in \omega$, sea $B_n \in (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_n)$ así $\{B_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$, veamos que no tiene pseudointersección. Para esto supongamos existe $B \in \mathcal{U}$ pseudointersección

de $\{B_n : n < \omega\}$ es decir que $B \subseteq^* B_n$ ó equivalentemente $B^* \subseteq B_n^*$, para todo $n \in \omega$. Como $B_n \notin \mathcal{U}_n$ entonces $\mathcal{U}_n \notin B_n^*$ en consecuencia $\mathcal{U}_n \notin B^*$ por lo tanto $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\} \cap B^* = \emptyset$. Esto contradice que $\mathcal{U}$ es un punto de acumulación, ver *definición 0.16* ■
La prueba del siguiente *Corolario*, se sigue directamente del *Teorema 2.45.*

Corolario 2.46 *(ZFC)Existen ultrafiltros que no tienen base linealmente ordenada.*

A continuación mencionaremos, algunos resultados, referentes a esta sección, que no abordaremos debido a que se salen de los objetivos de este texto, al lector interesado se le sugieren las siguientes referencias.

Teorema 2.47 *(Shelah,78) Hay un modelo en ZFC sin P-puntos en ω^*, ver* [10] , [26] , [7] , [6]

Teorema 2.48 *(Chodounsky, Guzmán) En el modelo de Silver no hay P-puntos, ver* [6]

Corolario 2.49 *En los modelos de los Teoremas 2.47 y 2.48, no existen ultrafiltros con base linealmente ordenada.*

Teorema 2.50 *CH implica que todo P-punto es generado por una torre.*

Teorema 2.51 *(Balcar, Frankiewicz, Mills) Es consistente que cada ultrafiltro contenga una torre, ver* [2].

Teorema 2.52 *(Brendle, Farkas, Verner) Dados $(\omega < \lambda < \kappa)$ regulares, existe una extensión de forcing donde $\mathfrak{t} = \lambda$, $\mathfrak{c} = \kappa$ y hay un P-punto sin torres, ver* [5] .

En el modelo del *Teorema 2.52* no existen ultrafiltros con base linealmente ordenada por razones diferentes a *2.47* y *2.48.*

2.5. Familias casi ajenas.

Definición 2.53 *Una familia $\mathcal{A}$ es casi ajena si:*
1) Para todo $A \in \mathcal{A}$, A es infinito.
2) Para todo $A, B \in \mathcal{A}$, si $A \neq B$ entonces $A \cap B$ es finito.

Ejemplo 2.54 *Una familia de conjuntos infinitos ajenos por pares, es casi ajena.*

Ejemplo 2.55 *Existe una familia casi ajena $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ con $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$.*

Prueba : Dada $f \in \omega^\omega$, definimos $A_f = \{f \restriction n : n \in \omega\}$. Sea $\mathcal{A}' = \{A_f : f \in \omega^\omega\}$.

Observación: Para $f \in \omega^\omega$ y $n \in \omega$ tenemos, $(f \restriction n) \subseteq (\omega \times \omega)$, así $(f \restriction n) \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$. Entonces $A_f \subseteq [\omega \times \omega]^{<\omega}$.

Veamos que la familia $\mathcal{A}'$ es casi ajena, para esto basta verificar 1) y 2) de la *Definición 2.53.*
Para 1) hay que ver que A_f es infinita. Si $n \neq m$ entonces $|f \restriction n| = n$ y $|f \restriction m| = m$ por lo tanto $(f \restriction n) \neq (f \restriction m)$. Así $|A_f| = \omega$.

Para 2) tomemos $f \neq g \in \omega^\omega$, hay que verificar que $A_f \cap A_g$ es finito. Definamos $m = min\{i : f(i) \neq g(i)\}$.
Bastará con verificar que se cumple la siguiente igualdad de conjuntos.

Afirmación: $A_f \cap A_g = \{f \restriction n : n \leq m\}$.
$\subseteq$) Tomemos $(f \restriction r) \in A_f \cap A_g$ y veamos que $r \leq m$. De lo contrario $m < r$ y $A_f \ni (f \restriction r) = \{(0, f(0)), (1, f(1)), ..., (m, f(m)), ...\}$. Como $(f \restriction r) \in A_f \cap A_g$ existe $A_g \ni (g \restriction k) = \{(0, g(0), (1, g(1)), ..., (m, g(m)), ...\}$ tal que $(f \restriction r) = (g \restriction k)$, por lo que $k = dom(g \restriction k) = dom(f \restriction r) = r$. Entonces $(f \restriction r) = (g \restriction k)$ son iguales entrada a entrada, es decir $(m, f(m)) = (m, g(m))$. Esto contradice la definición de m, por lo tanto $r \leq m$.

$\supseteq$) Sea $n \leq m$ veamos que $(f \restriction n) \in A_f \cap A_g$, por definición $(f \restriction n) \in A_f$, si $i < m$ entonces $f(i) = g(i)$ es decir $f(0) = g(0), f(1) = g(1), ..., f(n-1) = g(n-1)$ es decir que $(f \restriction n) = (g \restriction n) \in A_g$. Por lo tanto $(f \restriction n) \in A_f \cap A_g$.

Notemos que la *Afirmación* implica que si $f \neq g$ entonces $A_f \neq A_g$.

La doble contención verifica la igualdad querida y comprueba 2) de la *Definición 2.53*, por lo tanto $\mathcal{A}'$ es casi ajena.

Sea $\varphi : [\omega \times \omega]^{<\omega} \longrightarrow \omega$ inyectiva.

Si $f \in \omega^\omega$ y $n \in \omega$,$(f \restriction n) \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$. Entonces $\varphi(f \restriction n) \in \omega$.
Ahora consideremos $\mathcal{A} = \{\varphi[A_f] : f \in \omega^\omega\}$ y veamos que cumple 1) y 2) de la *Definición 2.53.*
Para 1) veamos que cada elemento en $\mathcal{A}$ es infinito.
Sea $f \in \omega^\omega$ y consideramos $n \in \omega$, $A_f = \{(f \restriction n) : n \in \omega\}$ entonces como dijimos antes si $n \neq m$ entonces $(f \restriction n) \neq (f \restriction m)$. Como φ es inyectiva tenemos que $\varphi(f \restriction n) \neq \varphi(f \restriction m)$. Por lo tanto $\varphi[A_f] = \{\varphi(f \restriction n) : n \in \omega\}$ es infinito.

Para 2) tomamos $f \neq g \in \omega^\omega$ y veamos que $\varphi[A_f] \cap \varphi[A_g]$ es finito, para esto notemos que la igualdad $\varphi[A_f] \cap \varphi[A_g] = \varphi[A_f \cap A_g]$ se cumple si φ es inyectiva. De 1) y 2) se sigue que $f \neq g$ implica $\varphi[A_f] \neq \varphi[A_g]$. Entonces $\mathcal{A} = \{\varphi[A_f] : f \in \omega^\omega\}$ es una familia casi ajena con $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$. ■

En el siguiente *Corolario* utilizaremos la familia $\mathcal{A}$ del *Ejemplo 2.55* para acotar por abajo el número de ultrafiltros.

Corolario 2.56 *Para todo $A \subseteq \omega$ infinito, $|A^*| \geq \mathfrak{c}$*

Prueba : Tomemos una familia casi ajena como en el *Ejemplo 2.55*, es decir $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia *casi ajena*, con $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$, dada por $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Sea $h : \omega \longrightarrow A$ biyectiva, mediante h «encajaremos» a la familia casi ajena $\mathcal{A}$ en A . Así veremos que la cardinalidad de $\mathfrak{c} \leq |A^*|$. Para esto consideremos el conjunto de las imágenes de h dado por $\mathcal{A}' = \{h[A_\alpha] : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Sea $h[A_\alpha] = B_\alpha$ para todo $\alpha < \mathfrak{c}$.
Veamos que $\mathcal{A}'$ cumple lo siguiente:

1) Sea $\alpha < \mathfrak{c}$, por hipótesis A_α es infinito, entonces $h[A_\alpha] = B_\alpha$ es infinito y por el *Lema 2.3 inciso 5)* se sigue que $B_\alpha^* \neq \emptyset$.

2) Para todo $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$. Por hipótesis $(A_\alpha \cap A_\beta)$ es finito. Como h es inyectiva $h[A_\alpha \cap A_\beta] = h[A_\alpha] \cap h[A_\beta] = B_\alpha \cap B_\beta$ es finito. Por último utilizando el *Lema 2.3 inciso 5)* se sigue que $B_\alpha^* \cap B_\beta^* = \emptyset$.

3)Para todo $\alpha < \mathfrak{c}$. Como h es biyectiva se sigue $h[A_\alpha] \subseteq A$ es decir $B_\alpha \subseteq A$ y como $(B_\alpha \setminus A) = \emptyset$ entonces $B_\alpha \subseteq^* A$. Por último del *Lema 2.8* se sigue que $B_\alpha^* \subseteq A^*$.

Notemos que 1), 2), 3) implica que A^* es partido en al menos $\mathfrak{c}$ conjuntos ajenos, pues $\{B_\alpha^* : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una familia ajena por pares, de conjuntos no vacíos, contenida en A^*. Por lo tanto $|A^*| \geq \mathfrak{c}$. ■

Observación 2.57 *Es verdad que no hemos calculado $|\omega^*|$ pues este cálculo, se sale del alcance de esta tesis, pero es posible consultar directamente en* [23] *donde B.Pospíšil establece que $|\omega^*| = 2^{\mathfrak{c}}$.*

Lema 2.58 *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ casi ajena infinita numerable. Existe $B \in [\omega]^\omega \setminus \mathcal{A}$, tal que $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi ajena.*

Prueba : Por recursión definimos $B = \{b_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ infinito.

Sea $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$. Paso 0, $b_0 = min(A_0)$, como $\mathcal{A}$ es infinita numerable y distinta del vacío existe $b_0 \in A_0$. Ahora supongamos definido $b_0, b_1, ..b_n$ y definamos el Paso $n+1$.

Para $i \in \{0, ..., n\}$, sea m_i tal que $A_i \cap A_{n+1} \subseteq m_i$. Escojamos $b_{n+1} \in \omega$ que cumpla:
a) Para todo $i \in \{0, ..., n\}, b_{n+1} > m_i$,
b) Para todo $i \in \{0, ..., n\}, b_{n+1} > b_i$,
c) $b_{n+1} \in A_{n+1}$.

Por b) tenemos que B es infinito. Esto verifica 1) de la *Definición 2.53*.

Afirmación: Para $i \in \{0, ..., n\}$ veamos que $b_{n+1} \notin A_i$.
Por c) se tiene que $b_{n+1} \in A_{n+1}$, afirmamos que $b_{n+1} \notin A_i$. De lo contrario tenemos que $b_{n+1} \in A_i$ entonces $b_{n+1} \in A_i \cap A_{n+1} \subseteq m_i$ por lo tanto $b_{n+1} < m_i$, esto contradice a). Por lo que se cumple la *Afirmación*.
De la afirmación se sigue que $A_n \cap B \subseteq \{b_i : i \leq n\}$ para todo $n \in \omega$.

Veamos que $\{B\} \cup \mathcal{A}$ cumple 2) de la *Definición 2.53*.
Caso i) $A_n, A_m \in \mathcal{A}$ por hipótesis tienen intersección finita.
Caso ii) $A_n \in \mathcal{A}$ y B, de la *Afirmación* sabemos que $|A_n \cap B| \leq |\{b_i : i \leq n\}|$ finito.

De 1) y 2) tenemos que $\{B\} \cup \mathcal{A}$ es casi ajena. Esto completa la prueba del *Lema 2.57*.■

Definición 2.59 *A una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ casi ajena, infinita y maximal con la contención, la llamaremos familia MAD, por sus siglas en ingles «Maximal Almost Disjoint».*

El *Lema 2.58* implica que una familia casi ajena infinita numerable, no es MAD.

Observación 2.60 *Sea $\mathcal{M}$ una familia MAD en A. Si $B \subseteq A$ infinito entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $M \cap B$ es infinito.*

Prueba : De lo contrario tendríamos que existe $B \subseteq A$ infinito, tal que para toda $M \in \mathcal{M}$ se tiene que $(B \cap M)$ es finito, entonces $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es familia casi ajena y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{B\}$. Esto implica que $\mathcal{M}$ no es MAD en A, lo cual es contradictorio.■

En el siguiente ejemplo queremos resaltar el caso poco interesante, de cuando una familia casi ajena finita, es maximal con la contención y justificar la importancia de pedir en la *Definición 2.59* que las familias casi ajenas sean infinitas.

Ejemplo 2.61 *Sea $\omega = (\bigcup_{i<n} A_i)$, una partición de ω en un número finito $n \in \omega$, de partes cada una infinita. Entonces si tomamos un $B \in [\omega]^\omega$, dado que B es infinito, necesariamente existe $j \in n$ tal que $|A_j \cap B| = \omega$. Esto implica que si hacemos $\{B\} \cup (\bigcup_{i<n} A_i)$ está familia ya no es casi ajena, pues no se cumple* 2) de la Definición 2.53. *Por lo tanto $\{A_i : i < n\}$ es una familia finita que es casi ajena maximal.*

Lema 2.62 *Para toda familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ casi ajena, existe $\mathcal{M} \subseteq [\omega]^\omega$ que es MAD con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.*

Prueba : La prueba se sigue de la aplicación del *Lema 0.1 (Kuratowski-Zorn)* sobre el conjunto $\mathbb{P} = \{\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ es casi ajena$\}$, ordenado con la contención. Veamos que cumple las condiciones necesarias para la aplicación del *Lema 0.1.*

1)$\mathbb{P}$ es un orden parcial por estar ordenado con la contención.(reflexiva, antisimétrica y transitiva). Notemos que $\mathbb{P}$ es no vacío, pues almenos $\mathcal{A} \in \mathbb{P}$.

2)Toda cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ tiene cota superior. Tomemos una cadena $\mathcal{C}$ de elementos de $\mathbb{P}$ por definición sabemos que para toda $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Esto implica que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{P}$.

Veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es casi ajena.
i) Tomemos $A \in \bigcup \mathcal{C}$, por definición existe $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{B}$ y como $\mathcal{B}$ es casi ajena entonces A es infinito.

ii) Tomemos $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$, por definición existen $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{C}$ tales que $A \in \mathcal{B}_0$ y $B \in \mathcal{B}_1$. Como $\mathcal{C}$ es cadena se tiene que pasa una de las siguientes opciones: $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ ó $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$. Esto implica que $A, B \in \mathcal{B}_1$ y como $\mathcal{B}_1$ es casi ajena se sigue que $A \cap B$ es finito. Esto verifica que $\bigcup \mathcal{C}$ es casi ajena.

Una vez verificadas las condiciones 1) y 2) aplicamos el *Lema 0.1 (Kuratowski-Zorn)* y aseguramos la existencia de $\mathcal{M}$ familia maximal en $(\mathbb{P}, \subseteq)$. Esto implica que $\mathcal{M}$ es maximal en el sentido de la *Definición 2.59.* ■

Definición 2.63 $\mathfrak{a} = min\{\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{A}$ *es MAD* $\}$

La prueba del siguiente *Corolario* se sigue del *Lema 2.62* y el *Ejemplo 2.55.*

Corolario 2.64 *Existe una MAD de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Corolario 2.65 *Si $A \subseteq \omega$ es infinito, existe $\mathcal{M} \subseteq [A]^{\omega}$ familia MAD de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Prueba : En el *Ejemplo 2.55* justificamos la existencia de una familia $\mathcal{A}$ casi ajena de tamaño $\mathfrak{c}$, después en el *Corolario 2.56* vimos como «encajar» la familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ obtenida en el *Ejemplo 2.55* en cualquier $A \subseteq \omega$. Esto mediante la biyección $h : \omega \longrightarrow A$ nos fijamos en las imágenes dadas por $\mathcal{A}' = \{h\,[A_\alpha] : \alpha < \mathfrak{c}\}$, la familia $\mathcal{A}'$ obtenida de esta forma, será casi ajena de tamaño $\mathfrak{c}$, por último usando el *Lema 2.61* es posible extender $\mathcal{A}'$ a una familia $\mathcal{M}$ que sea maximal. ■

Corolario 2.66 $\omega < \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$.

Prueba : La primera desigualdad se sigue del *Lema 2.58* y para la segunda desigualdad notemos que una familia MAD puede ser a lo más de tamaño $\mathfrak{c}$ pues $|\mathcal{A}| \leq |\,[\omega]^{\omega}\,| = \mathfrak{c}$. ■

A continuación probaremos que $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{a}$. No sin mencionar que la manera usual de la prueba según las referencias conocidas, ([8] , [19]), se hace probando que $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{b}$, después se prueba que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, donde el invariante cardinal $\mathfrak{b}$ denota al minímo cardinal necesario para la existencia de una familia de funciones en ω^{ω} no acotada. Dado que abordar el cardinal $\mathfrak{b}$ se sale de los objetivos de este trabajo, tomaremos el siguiente camino: Probaremos que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$ y usando el resultado de *Malliaris-Shelah*, donde se verifica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$, ver [19] , tendremos como consecuencia el resultado querido.
En este orden comencemos con el siguiente teorema.

Teorema 2.67 $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$.

Prueba : Sea $\omega < \kappa < \mathfrak{p}$. Como es usual tomaremos $\kappa < \mathfrak{p}$ y veremos que $\kappa < \mathfrak{a}$. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia casi ajena infinita, veamos que no es maximal.

Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ sea $B_F = \omega \setminus \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in F\}$, consideremos $\mathcal{B} = \{B_F : F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$.
Observación 1. $|\mathcal{B}| \leq |\,[\kappa]^{<\omega}\,| = \kappa$

Observación 2. Para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $|B_F| = \omega$. Sea $\beta \in (\kappa \setminus F)$. Enumeramos $F = \{\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_i\}$. Para $j \leq i$, sea $n_j = max(A_{\alpha_j} \cap A_\beta)$ y $n = max\{n_j : j \leq i\} + 1$ así $(A_\beta \setminus n) \cap A_{\alpha_j} = \emptyset$ para toda $j \leq i$.
Notemos que $(A_\beta \setminus n) \subseteq (\omega \setminus A_{\alpha_j})$ entonces por las leyes de *De Morgan* se sigue que $(A_\beta \setminus n) \subseteq \bigcap_{j \leq i}(\omega \setminus A_{\alpha_j}) = (\omega \setminus \bigcup_{j \leq i} A_{\alpha_j})$. Dicho de otra forma $(A_\beta \setminus (\omega \setminus \bigcup_{j \leq i} A_{\alpha_j}) \subseteq$

n. Esto implica que $A_\beta \subseteq^* (\omega \setminus \bigcup_{j \leq i} A_{\alpha_j})$ es decir $A_\beta \subseteq^* B_F$ por lo tanto B_F es infinito.

Observación 3. $\mathcal{B}$ es centrada. Tomemos una cantidad finita de elementos de F digamos $F_1, F_2, ..., F_n \in [\kappa]^{<\omega}$ y les asignamos su respectivo $B_{F_1}, B_{F_2}, .., B_{F_n}$ con $i \leq n$, si nos fijamos en su intersección tenemos $B_{F_1} \cap B_{F_2} \cap .. \cap B_{F_n} = (\omega \setminus \bigcup A_{j \in F_1}) \cap (\omega \setminus \bigcup A_{j \in F_2}) \cap .... \cap (\omega \setminus \bigcup A_{j \in F_n}) = \omega \setminus [(\bigcup A_{j \in F_1}) \cup (\bigcup A_{j \in F_2}) \cup .. \bigcup (A_{j \in F_n})] = \omega \setminus \bigcup \{A_j : j \in F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n\} = B_{F_1 \cup ... \cup F_n}$, de la *Observación 2*, sabemos que este conjunto es infinito.

Ahora como $\mathcal{B}$ es centrada de tamaño menor que $\mathfrak{p}$ tiene pseudointersección, sea B pseudointersección de $\mathcal{B}$.

Afirmación.$\{B\} \cup \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia casi ajena. Por definición de pseudo interesección, B es infinito y se cumple 1) de la *Definición 2.53.* Para 2) si tomamos $A, B \in \mathcal{A}$ por hipótesis tienen intersección finita, si $A_\alpha \in \mathcal{A}$ y B, tenemos que $F = \{\alpha\} \in [\kappa]^{<\omega}$. Como B es pseudointersección tenemos que $B \subseteq^* B_F$ es decir $B \setminus (\omega \setminus A_\alpha) = B \cap A_\alpha$ es finito. Así en ambos casos la intesección es finita.$\blacksquare$

Esto verifica el *Teorema 2.67* y como dijimos antes se cumple también el siguiente *Corolario.*

Corolario 2.68 $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{a}$

Para la prueba del siguiente *Corolario.* Recordemos que en el *Corolario 2.36* vimos que MA implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ y del *Teorema 2.67* sabemos que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$, entonces el *Axioma de Martin* implica que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

Corolario 2.69 *MA implica que* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

Capítulo 3

El invariante $\mathfrak{h}$

Para este capítulo, tomamos algunas de las variantes conocidas del invariante $\mathfrak{h}$. De [13], capítulo 8, tomamos $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$. A su vez de [4] tomamos la definicion de $\mathfrak{h}_3$. En adelante nos ocuparemos de verificar que estas definiciones son equivalentes entre si.

3.1. Familias aplastantes

En ésta sección daremos las definiciones de $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ y veremos como se relacionan entre si.

Definición 3.1 $\mathfrak{M} = \{\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ *es MAD*$\} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$

Definición 3.2 *Una familia* $\mathfrak{H} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathfrak{M}$ *es* aplastante *si cumple:*
i) Para todo $\alpha < \kappa$*,* A_α *es MAD con* $|A_\alpha| = \mathfrak{c}$
ii) Para todo $x \in [\omega]^\omega$ *existe* $\alpha < \kappa$ *y existen* $a, b \in A_\alpha$ *distintos, tales que* $(x \cap a)$ *y* $(x \cap b)$ *son infinitos.*

Como mención aclaratoria en la *Definición 3.2* la palabra «aplastante» proviene de la traducción directa del inglés «shattering» utilizada en [13].

Antes de continuar quiero agradecer a mis sinodales Osvaldo Guzmán y David Fernández, que detectaron errores en la prueba de el siguiente teorema, que ya han sido corregidos.

Teorema 3.3 *Existe una familia aplastante de tamaño* $\mathfrak{c}$.

Prueba : Recordemos que $\mathfrak{M} = \{\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{A}$ es $MAD\ \} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$, tomemos el subconjunto de las familias MAD de cardinalidad $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{M}$, en símbolos $\mathfrak{M}_\mathfrak{c} = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{M} : |\mathcal{A}| = \mathfrak{c}\}$.

Veamos que $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ tiene al menos $\mathfrak{c}$ elementos.
Por el *Corolario 2.64* existe una familia MAD de tamaño $\mathfrak{c}$, así $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ no es un conjunto vacío, entonces tomemos $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$, $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ tenemos que $A_\alpha \in \mathcal{A}$ es un conjunto infinito, podemos obtener una familia MAD de tama*ño* $\mathfrak{c}$ de subconjuntos de A_α ver *Corolario 2.64*, en símbolos: $\mathcal{A}_\alpha = \{A_{\alpha,\beta} : \beta < \mathfrak{c}\} \subseteq [A_\alpha]^\omega$.

Dicho lo anterior definamos para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.
$\mathcal{M}_\alpha = \{A_\beta : \alpha \neq \beta < \mathfrak{c}\} \cup \{A_{\alpha,\beta} : \beta < \mathfrak{c}\}$. Notemos que cada uniendo es casi ajeno pues proviene de la familia casi ajena $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$.

Veamos que para todo $\alpha < \mathfrak{c}$, $\mathcal{M}_\alpha$ es familia MAD, *Definición 2.53.*

1) Si $A \in \mathcal{M}_\alpha$ entonces $A \in \{A_\beta : \alpha \neq \beta < \mathfrak{c}\}$ ó $A \in \{A_{\alpha,\beta} : \beta < \mathfrak{c}\}$, en cualquier caso A es infinito pues ambas son familias casi ajenas.

2) Si tomamos $A \neq B \in \mathcal{M}_\alpha$, pueden suceder los siguientes casos:

i) A, B ambos en el mismo uniendo. Como cada uniendo es familia casi ajena tenemos que $(A \cap B)$ es finito.

ii) A está en un uniendo y B en el otro uniendo. En este caso supongamos sin pérdida de generalidad que $A \in \{A_\beta : \beta \neq \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $B \in \{A_{\alpha,\beta} : \beta < \mathfrak{c}\}$, entonces tenemos que $A = A_\beta$ para algún $\beta < \mathfrak{c}$ y $B = A_{\alpha,\gamma}$ para algún $\gamma < \mathfrak{c}$ así tenemos que $A \cap B = A_\beta \cap A_{\alpha,\gamma} \subseteq A_\beta \cap A_\alpha$ pues $A_{\alpha,\gamma} \subseteq A_\alpha$. Por definición de $\mathcal{A}$ se sigue que $A_\beta \cap A_\alpha$ es finito. Esto verifica que $\mathcal{M}_\alpha$ es MAD.

Afirmación 1. Para todo $\alpha < \mathfrak{c}$, $\mathcal{M}_\alpha \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$.
Esto se cumple pues $\{A_{\alpha,\beta} : \beta < \mathfrak{c}\}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ por definición.

Afirmación 2. Para todo $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$, $\mathcal{M}_\alpha \neq \mathcal{M}_\beta$. Por definición sabemos que $A_\beta \in (\mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{M}_\beta)$. Esto verifica la afirmación 2 e implica que en $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ hay almenos $\mathfrak{c}$ familias MAD de tamaño $\mathfrak{c}$.

Afirmación 3. $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ es aplastante.
Para esto veamos que se cumple *i*) y *ii*) de la *Definición 3.2.*
Notemos que *i*) se cumple directamente de la definición de $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$.

Para *ii*) tomemos un $x \in [\omega]^\omega$ cualquiera y vamos a construirle una $\mathcal{A}_x$ que cumpla *ii*), para esto sea $x = (y \cup z)$, una partición en conjuntos infinitos.
Ahora consideremos $B = (\omega \setminus x) \cup z$, notemos que B es infinito, pues z es infinito.

Entonces por *Corolario 2.64* existe $\{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq [B]^\omega$ familia MAD de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Dicho lo anterior definimos $\mathcal{A}_x = \{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{y\}$. Veamos que es casi ajena.
Caso 1) si tomamos $A, C \in \{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ por definición provienen de una MAD. Esto implica que $(A \cap C)$ es finito.
Caso 2) Veamos que $y \subseteq \omega$ es ajeno a B_α para todo $\alpha < \mathfrak{c}$. Sabemos que y es infinito por hipótesis pues $x = (y \cup z)$ es una partición y por definición de $B = (\omega \setminus x) \cup z$ tenemos que $\{y\}$ es ajeno a B y por lo tanto también a su casi partición $\{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.
Por lo tanto $\mathcal{A}_x$ es familia casi ajena.

A continuación enumeramos tres propiedades que nos ayudarán terminar la prueba de que $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ es aplastante.

1) $\mathcal{A}_x \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$.
Esto se cumple directamente de la definición de $\mathcal{A}_x$.

2) $|x \cap y| = \omega$.
Por definición $x = (z \cup y)$ es una partición en conjuntos infinitos, así $y \subseteq x$ entonces $y = (x \cap y)$ es infinito.

3) Existe $\beta < \mathfrak{c}$, con $|x \cap B_\beta| = \omega$.
De la definición de B sabemos que $z \subseteq B$ es infinito. Como $\{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una MAD en B existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $(B_\beta \cap z)$ es infinito y como $(B_\beta \cap z) \subseteq (B_\beta \cap x)$ entonces $(B_\beta \cap x)$ es infinito también y se verifica 3).

Por último de 1), 2) y 3), se sigue que $\mathcal{A}_x \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ y se verifica la *Afirmación 3:* $\mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ es aplastante.

Notemos que de la prueba de la *Afirmación 3* se sigue que la familia $\{\mathcal{A}_x : x \subseteq \omega\}$ tiene tamaño a lo mas $\mathfrak{c}$ y es aplastante, pero no es claro que la cardinalidad de $\{\mathcal{A}_x : x \subseteq \omega\}$ sea de tamaño exactamente $\mathfrak{c}$, entonces tomemos $\mathfrak{M}^*_\mathfrak{c}$ de tamaño $\mathfrak{c}$ tal que $\{\mathcal{A}_x : x \subseteq \omega\} \subseteq \mathfrak{M}^*_\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$. Esto asegura que $\mathfrak{M}^*_\mathfrak{c}$ es una familia aplastante de tamaño $\mathfrak{c}$. ■

Definición 3.4 $\mathfrak{h}_1$ *se define como el mínimo cardinal de una familia* aplastante.

La prueba del siguiente *Corolario* se sigue del *Teorema 3.3.*

Corolario 3.5 $\mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{c}$.

Definición 3.6 *La relación $\mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}_1$ en $\mathfrak{M}$, indica que $\mathcal{A}_0$ refina a $\mathcal{A}_1$, es decir que para todo $A \in \mathcal{A}_0$ existe $B \in \mathcal{A}_1$ con $A \subseteq^* B$.*

Recordemos que en la *Observación 2.5,* vimos que la $\subseteq^*$ es un pre-orden. En el siguiente *lema* veremos que análogamente $\sqsubseteq$ también lo es.

Lema 3.7 *La relación $\sqsubseteq$ es un pre-orden en $\mathfrak{M}$*

Prueba : Según la *Definición 0.4*, hay que verificar que $\sqsubseteq$ cumple 1) es reflexiva y 2) es transitiva en $\mathfrak{M}$.

Para 1) tomamos $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{M}$, para $A \in \mathcal{A}_0$ hay que ver que existe $B \in \mathcal{A}_0$ tal que $A \subseteq^* B$, esto se cumple pues podemos tomar $B = A$ y tenemos que $(A \setminus A) = \emptyset$ finito. Así $A \sqsubseteq A$ por lo tanto $\sqsubseteq$ es reflexiva.
Para 2) tomamos $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{M}$ tales que $\mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_1 \sqsubseteq \mathcal{A}_2$, por hipótesis sabemos que para todo $A \in \mathcal{A}_0$ existe $B \in \mathcal{A}_1$ tal que $(A \setminus B)$ es finito y para todo $B \in \mathcal{A}_1$ existe $D \in \mathcal{A}_2$ tal que $(B \setminus D)$ es finito. Entonces $(A \setminus B) \cup (B \setminus D) = ((A \cup B) \setminus D) = (A \setminus D) \cup (B \setminus D) \supseteq (A \setminus D)$ es finito. Por tanto $A \subseteq^* D$ con $A \in \mathcal{A}_0$ y $D \in \mathcal{A}_2$ arbitrarios. Esto implica que $\mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}_2$, así $\sqsubseteq$ es transitiva.

De 1) y 2) se sigue que $\sqsubseteq$ en $\mathfrak{M}$ es un pre-orden.■

Por último recordemos que en la *Observación 2.5*, vimos que la casi contención no es antisimétrica, de manera similar la relación $\sqsubseteq$ tampoco. Esto implica que $\sqsubseteq$ no es un orden, según la *definición 0.5*. Sin embargo es posible probar el siguiente lema, antes de enunciar el *Lema* haremos la siguiente *Observación* que nos será de utilidad.

Observación 3.8 *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena y $B, C \in \mathcal{A}$, si se cumple que $(B \cap C)$ es infinito, entonces $B = C$. De lo contrario tendríamos $B, C \in \mathcal{A}$ distintos, con intersección infinita, lo cual contradice la condición* 2) *de la* Definición 2.53 *, que dice que si $B, C \in \mathcal{A}$ y $B \neq C$ entonces $C \cap B$ es finito.*

Lema 3.9 *Si $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in \mathfrak{M}$ cumplen que $\mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_1 \sqsubseteq \mathcal{A}_0$. Entonces existe una biyección $f : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}_0$ se tiene que $A =^* f(A)$.*

Prueba : Definamos $f : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1$. Dado $A \in \mathcal{A}_0$, $f(A)$ se define como el único elemento $B \in \mathcal{A}_1$ tal que $A \subseteq^* B$.

Veamos que $f : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ está bien definida. Supongamos que dado $A \in \mathcal{A}_0$ existen $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_1$ tales que $A \subseteq^* B_1$ y $A \subseteq^* B_2$. Como $\mathcal{A}_1 \sqsubseteq \mathcal{A}_0$ para $B_1 \in \mathcal{A}_1$ existe $A_B \in \mathcal{A}_0$ tal que $B_1 \subseteq^* A_B$ y para $B_2 \in \mathcal{A}_1$ existe $A_C \in \mathcal{A}_0$ tal que $B_2 \subseteq^* A_C$.

Juntando lo anterior tenemos $A \subseteq^* B_1 \subseteq^* A_B$ y $A \subseteq^* B_2 \subseteq^* A_C$. Notemos $A_C, A_B, A \in \mathcal{A}_0$ donde $\mathcal{A}_0$ es familia casi ajena.
Veamos que los conjuntos $(A_B \cap A)$, $(A_C \cap A)$ no son finitos.
Sabemos que $A \subseteq^* B_1 \subseteq^* A_B$, de la transitividad de la $\subseteq^*$(*Observación 2.5*), se sigue que $(A \setminus A_B)$ es finito y $A = (A \setminus A_B) \cup (A \cap A_B)$ es infinito, entonces $(A \cap A_B)$ es infinito.
Para ver que $(A_C \cap A)$ no es finito, de manera similar, sabemos que $A \subseteq^* A_C$ escribimos $A = (A \setminus A_C) \cup (A \cap A_C)$ y como A es infinito entonces $(A \cap A_C)$ es infinito. Ahora como $A_C, A_B, A \in \mathcal{A}_0$ y sus intersecciones no son finitas no queda otra opción que $A = A_B = A_C$, así tenemos que $A \subseteq^* B_1 \subseteq^* A \subseteq^* B_2 \subseteq^* A$ entonces $B_1 \subseteq^* B_2$ y $B_2 \subseteq^* B_1$, en consecuencia $B_2 = B_1$. Esto verifica que f está bien definida.
Veamos que $A =^* f(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}_0$. Sea $A \in \mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}_1$ para $A \in \mathcal{A}_0, f(A) \in \mathcal{A}_1$ es decir existe $B \in \mathcal{A}_1$ tal que $A \subseteq^* f(A) = B$. Como $\mathcal{A}_1 \sqsubseteq \mathcal{A}_0$ existe $C \in \mathcal{A}_0$ tal que $f(A) \subseteq^* C$. Juntando lo anterior tenemos $A \subseteq^* f(A) \subseteq^* C$. Como $A, C \in \mathcal{A}_0$ y $(A \cap C)$ es infinita, por lo dicho en la *Observación 3.9*, no hay mas opción que $A = C$. Esto implica que $A \subseteq^* f(A) \subseteq^* A$ por lo tanto $A =^* f(A)$.

Para ver que $f : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ es biyectiva, verifiquemos que cumple:
$i)$ inyectiva
$ii)$ sobre.

Para $i)$ tomemos $A_1 \neq A_2 \in \mathcal{A}_0$, de la definición de f se sigue que $f(A_1) =^* A_1$ y $f(A_2) =^* A_2$ entonces $f(A_1) \neq f(A_2)$ como queremos. De lo contrario tenemos que $A_1 =^* f(A_1) =^* f(A_2) =^* A_2$ lo cual es contradictorio pues $A_1 \neq^* A_2$.

Para $ii)$ tomamos $B \in \mathcal{A}_1$, como $\mathcal{A}_1 \sqsubseteq \mathcal{A}_0$ existe $A \in \mathcal{A}_0$ tal que $B \subseteq^* A$ y como $\mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}_1$ para $A \in \mathcal{A}_0$ existe $C \in \mathcal{A}_1$ tal que $A \subseteq^* C$, de ambos refinamientos tenemos $B \subseteq^* A \subseteq^* C$ y como $B, C \in \mathcal{A}_1$, de la *Observación 3.8* se sigue que $B = C$. Por lo tanto $f(A) = B = C$ por la definición de f.

De $i), ii)$ se verifica el *Lema 3.9*.$\blacksquare$

Lema 3.10 *Sea $\mathfrak{H} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$ una familia aplastante. Entonces $\mathfrak{H}$ no tiene cota inferior en el orden $\sqsubseteq$.*

Prueba : Sea $\mathfrak{H} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia aplastante y supongamos que tiene como cota-$\sqsubseteq$ inferior una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ que es MAD. Sea $x \in \mathcal{A}$, como $\mathfrak{H}$ es aplastante, por $ii)$ de *la definición 3.1* para $\beta < \kappa$ existen $a \neq b \in A_\beta$ tales que

$|x \cap a| = \omega = |x \cap b|$. Como $\mathcal{A}$ es cota-$\sqsubseteq$ inferior de $\mathfrak{H}$, para $x \in \mathcal{A}$ existe $c \in A_\beta$ tal que $x \subseteq^* c$ es decir $(x \setminus c)$ es finito. Ahora podemos escribir a $x = (x \setminus c) \cup (x \cap c)$. Como x es infinito y $(x \setminus c)$ finito entonces $(x \cap c)$ es infinito. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c \neq b$ y observemos que $(x \cap b) = (x \cap b \cap c) \cup (x \cap b \setminus c)$, por hipótesis $(x \cap b)$ es infinito. También sabemos que $(x \cap b \setminus c) \subseteq (x \setminus c)$ finito, por lo que $(x \cap b \cap c)$ es infinito, por último notemos que $(x \cap b \cap c) \subseteq (b \cap c)$. Esto implica que $(b \cap c)$ es infinito y contradice que A_β es MAD, pues $b, c \in A_\beta$ y no cumplen $ii)$ de la *Definición 2.53*.■

Definición 3.11 *Sea $\mathfrak{h}_2$ el mínimo tamaño de un subconjunto $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ sin cota inferior en el orden $\sqsubseteq$.*

Corolario 3.12 $\mathfrak{h}_2 \leq \mathfrak{h}_1$

Prueba : Sea $\mathfrak{H} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_1\}$ una familia aplastante, por *Lema 3.10* no tiene cota inferior en el orden $\sqsubseteq$. Entonces de la definición de $\mathfrak{h}_2$ se sigue que $|\mathfrak{H}| \geq \mathfrak{h}_2$. Esto implica que $\mathfrak{h}_1 \geq \mathfrak{h}_2$.■

Lema 3.13 *Sea $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in \mathfrak{M}$. Existe $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ con $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}_0$, $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}_1$.*

Prueba : Consideremos $\mathcal{B} = \{A_0 \cap A_1 : A_0 \in \mathcal{A}_0, A_1 \in \mathcal{A}_1\} \setminus [\omega]^{<\omega}$ y veamos que cumple lo siguiente:

i) $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$

ii) $\mathcal{B}$ es casi ajena.

iii) $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$

Para *i)* tomamos $C \in \mathcal{B}$, por definición existen $A_0 \in \mathcal{A}_0$ y $A_1 \in \mathcal{A}_1$ con $C = A_0 \cap A_1$ entonces $C \subseteq A_0$ así $(C \setminus A_0)$ es finito, entonces $C \subseteq^* A_0$. Esto implica que $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}_0$. De manera análoga $C \subseteq A_1$ así $(C \setminus A_1)$ es finito, entonces $C \subseteq^* A_1$. Esto implica que $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}_1$.

Para *ii)* veamos que $\mathcal{B}$ cumple 1) y 2) de la *Definición 2.53*.

Para 1) basta con mencionar que todos los elementos de $\mathcal{B}$ son infinitos por *Definición*.

Para 2) procederemos por contradicción, sean $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{B}$ y supongamos que $(C_1 \cap C_2)$ es infinita. Entonces $C_1 = (A_0^1 \cap A_1^1)$ y $C_2 = (A_0^2 \cap A_1^2)$ con $A_1^2, A_1^1 \in \mathcal{A}_1$ y

$A_0^1, A_0^2 \in \mathcal{A}_0$, así $(C_1 \cap C_2) = (A_0^1 \cap A_1^1) \cap (A_0^2 \cap A_1^2) = (A_0^1 \cap A_0^2) \cap (A_1^2 \cap A_1^1)$ en particular $(C_1 \cap C_2) \subseteq (A_0^1 \cap A_0^2)$ y $(C_1 \cap C_2) \subseteq (A_1^1 \cap A_1^2)$, entonces de la *Observación 3.9*, se sigue que $A_0^1 = A_0^2$ y $A_1^2 = A_1^1$. Ahora sin pérdida de generalidad utilizamos que $A_0^1 = A_0^2$, $A_1^2 = A_1^1$ para reescribir $(C_1 \cap C_2) = (A_0^1 \cap A_0^2) \cap (A_1^2 \cap A_1^1) = (A_0^1 \cap A_1^1)$ así tenemos que $(C_1 \cap C_2) = (A_0^1 \cap A_1^1) = C_1$, así $C_1 = C_2$. Notemos que esto contradice la hipótesis. Por lo tanto si $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ tal es que $C_1 \neq C_2$ entonces $(C_1 \cap C_2)$ es finita.

Para *iii*) hay que verificar que $\mathcal{B}$ es MAD. Sea $X \subseteq \omega$ infinito, como $\mathcal{A}_0$ es MAD existe $A_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que $X \cap A_0$ es infinito, ver *Observación 2.59.* Notemos que $(X \cap A_0) \subseteq \omega$ es infinito y como $\mathcal{A}_1$ es MAD existe $A_1 \in \mathcal{A}_1$ tal que $(X \cap A_0) \cap A_1$ es infinito. Entonces para $X \subseteq \omega$ existe $(A_0 \cap A_1) \in \mathcal{B}$ tal que $X \cap (A_0 \cap A_1)$ es infinito. Esto implica que $\mathcal{B}$ es MAD, ver *Observación 2.59.* Así $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ y se completa la prueba del *Lema 3.13*$\blacksquare$
Notemos que $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$. De hecho $\mathcal{B}$ es el ínfimo de $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\}$, en símbolos $\mathcal{B} = (\mathcal{A}_0 \wedge \mathcal{A}_1)$. La prueba de este comentario la omitiremos ya que no la utilizaremos.

El siguiente *Corolario* se sigue del *Lema 3.13.*

Corolario 3.14 *Sea* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ *con* $|\mathfrak{N}| < \omega$. *Entonces* $\mathfrak{N}$ *tiene cota inferior en el orden* $\sqsubseteq$.

Teorema 3.15 $\omega < \mathfrak{h}_2$

Prueba : Para esto tomaremos una familia $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ de tamaño ω y veremos que tiene cota inferior en el orden $\sqsubseteq$.

Tomemos $\mathfrak{N} = \{\mathcal{A}_n : n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{M}$ y definamos por recursión:
$\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0$ en el paso base.
En el siguiente paso $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \wedge \mathcal{A}_1$ como en *Lema 3.13*, de la misma manera definimos $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 \wedge \mathcal{A}_3$ hasta definir $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n \wedge \mathcal{A}_{n+1}$.

Notemos que de esta forma hemos construido la cadena $\mathcal{B}_{n+1} \sqsubseteq \mathcal{B}_n \sqsubseteq ... \sqsubseteq \mathcal{B}_1 \sqsubseteq \mathcal{B}_0$ donde además $\mathcal{B}_n \sqsubseteq \mathcal{A}_n$ para toda $n \in \omega$.

Ahora definamos $\mathfrak{R} \subseteq ([\omega]^\omega)^\omega$ de tal forma que $c \in \mathfrak{R}$ si y solo si cumple lo siguiente:
i) $c : \omega \longrightarrow [\omega]^\omega$.
ii) Para todo $n \in \omega$, $c(n) \in \mathcal{B}_n$.
iii) Para todo $n \in \omega$, $c(n+1) \subseteq^* c(n)$

Ahora utilicemos $\mathfrak{R}$, para definir $P = \{A \subseteq \omega : A$ es infinito y existe $c \in \mathfrak{R}$ tal que A es pseudointersección de $\{c(n) : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega\}$.

Por último utilicemos P, para definir $Z = \{\mathcal{A} \subseteq P : \mathcal{A}$ es casi ajena e infinita $\} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$. Ordenamos Z con la contención.

Ahora aplicaremos el *Lema 0.1 (Kuratowski-Zorn)*, al conjunto Z, para esto será necesario verificar las siguientes condiciones.

1) Veamos que $Z \neq \emptyset$. Sea $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{B}_0$. Fijamos $n \in \omega$ y recursivamente escogemos $A(n,i) \in \mathcal{B}_i$ donde $A(n,0) = A_n$ y $A(n,i+1) \in \mathcal{B}_{i+1}$ con $A(n,i+1) \subseteq^* A(n,i)$ y definamos $c : \omega \longrightarrow [\omega]^\omega$ por $c(i) = A(n,i)$ entonces $c \in \mathfrak{R}$. Por definición $A(n,\omega)$ es pseudointersección de $\{c(n) : n \in \omega\}$. Por lo tanto $A(n,\omega) \in P$. Entonces $\{A(n,\omega) : n \in \omega\} \subseteq P$. Ahora veamos que $\{A_n : n \in \omega\}$ es casi ajena según la *Definición 2.53*.
i) $A(n,\omega)$ es infinito pues es pseudointersección.
ii) Si $n \neq m \in \omega$ entonces $A(n,\omega) \subseteq^* A_n$ y $A(m,\omega) \subseteq^* A_m$, como $A_n, A_m \in \mathcal{A}_0$ entonces $(A_m \cap A_n)$ es finito y por lo tanto $(A(n,\omega) \cap A(m,\omega))$ es finito también.
De lo anterior tenemos que $\{A(n,\omega) : n \in \omega\} \in Z$.

2) Como Z está ordenado por la contención, es un orden parcial.

3) Como Z está ordenado por la contención, si tomamos una cadena $C \neq \emptyset$ de elementos de Z, veamos que $\bigcup C$ es una cota superior, por el orden en Z, condición necesaria para la aplicación del *Lema 0.1*.

i) Veamos que $\bigcup C \in Z$,
Para que se cumpla $\bigcup C \in Z$, debemos verificar la siguiente contención $\bigcup C \subseteq P$ (*definición de Z*). Sea $x \in \bigcup C$ entonces existe $c \in C$ tal que $x \in c$ y como $c \in Z$ entonces $c \subseteq P$ entonces $x \in P$. Esto verifica la contención querida.

ii) Veamos que $\bigcup C$ es casi ajena.
Sean $a, b \in \bigcup C$ distintos, entonces existen $c_1, c_2 \in C$ tales que $a \in c_1$ y $b \in c_2$, como C es cadena, sin pérdida de generalidad pensemos que $c_1 \subseteq c_2$ entonces $a, b \in c_2$ y como c_2 es casi ajena y a, b son distintos entonces $(a \cap b)$ es finita. Esto verifica la condición 2) de familia casi ajena *2.53*.

Para la condición 1), tomemos $x \in \bigcup C$ entonces existe $c \in C$ tal que $x \in c$. Como c es casi ajena entonces x es infinito. De las condiciones 1) y 2) se sigue que $\bigcup C$ es casi ajena.

iii) Por último veamos que $\bigcup C$ es infinita. Sea $c \in \bigcup C$ entonces $c \in Z$ por lo tanto c es infinita por la *definición de Z* y como $c \subseteq \bigcup C$ entonces $\bigcup C$ también es infinita. Ahora de $i), ii), iii)$ se sigue que $\bigcup C \in Z$ es casi ajena e infinita.

Ahora por lo dicho en 1), 2) y 3), es posible aplicar el *Lema 0.1* que justifica la siguiente afirmación.

Afirmación 3.16 *Existe $\mathcal{M}^*$ maximal en Z.*■

Ahora vamos a ver que $\mathcal{M}^*$ es cota inferior de $\{A(i) : i \in \omega\}$ con el orden $\sqsubseteq$. Para esto probaremos las siguientes dos afirmaciones.

Afirmación 3.17 *Para todo $i \in \omega$, $\mathcal{M}^* \sqsubseteq \mathcal{B}_i$.*

Prueba : Como $\mathcal{M}^* \in Z$ entonces $\mathcal{M}^* \subseteq P$. Si $A \in \mathcal{M}^*$ por definición de P, existe $c \in \mathfrak{R}$ tal que A es pseudointersección de $\{c(n) : n \in \omega\}$. En particular $A \subseteq^* c(i) \in \mathcal{B}_i$.■

De la afirmación 3.17, se sigue que $\mathcal{M}^* \sqsubseteq \mathcal{A}_i$ para todo $i \in \omega$.

Afirmación 3.18 *$\mathcal{M}^*$ es MAD.*

Prueba : Para esto tomemos $X \subseteq \omega$ infinito y supongamos que $(X \cap A)$ es finito para todo $A \in \mathcal{M}^*$. Como $\mathcal{B}_0$ es MAD existe $c_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $(c_0 \cap X)$ es infinito. Como $\mathcal{B}_1$ es MAD existe $c_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $c_1 \cap (c_0 \cap X)$ es infinito. A su vez como $\mathcal{B}_2$ es MAD existe $c_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $c_2 \cap (c_1 \cap c_0 \cap X)$ es infinito. Continuando este proceso tenemos que para $(c_n \cap ... \cap c_2 \cap c_1 \cap c_0 \cap X)$ infinito existe $c_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1}$ tal que $c_{n+1} \cap (c_n \cap ... \cap c_2 \cap c_1 \cap c_0 \cap X)$ es infinito. Nos fijamos en $S = \{c_n \cap ... \cap c_2 \cap c_1 \cap c_0 \cap X : n \in \omega\}$. Notemos que S es centrada pues es decreciente y ordenada por la $\subseteq^*$. Como $(\omega < \mathfrak{p})$ por *Lema 2.18*, S tiene pseudointersección A.

Veamos que $A \in P$. Definimos $c \in \mathfrak{R}$ como $c(n) = c_n$, para todo $n \in \omega$ está bien definida pues, como $c_n \in \mathcal{B}_n$ y $c_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1}$ tenemos que $c_{n+1} \subseteq^* c_n$. Como A es pseudointersección de S, para todo $n \in \omega$ tenemos que $A \subseteq^* c_n$, por lo tanto $A \in P$. Ahora si hacemos $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}^* \cup \{A\}$, también es casi ajena, pues por hipótesis tenemos que $(X \cap A)$ es finito para todo $A \in \mathcal{M}^*$ y A es infinito, condiciones necesarias para ser familia casi ajena *2.53.* Así $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}^* \cup \{A\} \supsetneq \mathcal{M}^*$. Esto es contraditorio pues $\mathcal{M}^*$ es maximal. Por lo tanto $(X \cap A)$ es infinito para alguna $A \in \mathcal{M}^*$.
Lo anterior implica que $\mathcal{M}^*$ es la cota inferior buscada para $\{A(i) : i \in \omega\}$ con el orden $\sqsubseteq$.■

El siguiente *Corolario*, es el resultado de lo visto hasta el momento, en el siguiente orden: *Teorema 3.15*,*Corolario 3.12*,*Corolario 3.5*.

Corolario 3.19 $\omega < \mathfrak{h}_2 \leq \mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{c}$.

En la siguiente sección definiremos otra variante del cardinal $\mathfrak{h}$ que denotaremos $\mathfrak{h}_3$ y veremos que $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_3$.

3.2. Número de distributividad.

Definición 3.20 *Sea $\mathcal{D} \subseteq [X]^\omega$ y consideremos las siguientes condiciones.*
i) Para todo $d \in \mathcal{D}$ y $b \in [\omega]^\omega$ con $b \subseteq^* d$ entonces $b \in \mathcal{D}$.
ii) Para todo $x \in [X]^\omega$ existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $d \subseteq^* x$.

$\cdot$) Si $\mathcal{D}$ cumple i) diremos que es abierto.
$\cdot\cdot$) Si $\mathcal{D}$ cumple ii) diremos que es denso en X.
$\cdots$) Si $\mathcal{D}$ cumple i) y ii) diremos que $\mathcal{D}$ es abierto denso.

Nota: Si un conjunto es denso en ω, simplemente le llamaremos denso.

Definición 3.21 *Sea $\mathfrak{h}_3$ es el mínimo tamaño de una familia $\mathfrak{H} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$ tal que todo $D \in \mathfrak{H}$ es abierto denso y ($\bigcap \mathfrak{H} = \emptyset$).*

Notemos que si $\mathfrak{H} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$ es de tamaño menor que $\mathfrak{h}_3$ según la definición 3.21 se sigue que su intersección es no vacía. A continuación veremos que se cumple algo mas fuerte véase *Lema 3.23*. Antes enunciaremos el siguiente *Lema* que nos será de utilidad en la prueba del *Lema 3.23*.

Lema 3.22 *Sean X, Y infinitos numerables y $h : X \to Y$ una biyección. Supongamos que $\mathcal{D} \subseteq [X]^\omega$ abierto denso en X. Entonces el conjunto $F_\alpha = \{h[d] : d \in D\}$ es abierto denso en Y.*

Lema 3.23 *Si $\mathfrak{H}$ es una familia no vacía de abiertos densos y $|\mathfrak{H}| < \mathfrak{h}_3$, entonces $\bigcap \mathfrak{H}$ es abierto denso.*

Prueba : Como $|\mathfrak{H}| < \mathfrak{h}_3$, de la *Definición 3.21* se sigue que ($\bigcap \mathfrak{H} \neq \emptyset$). Veamos que ($\bigcap \mathfrak{H}$) es abierto denso, según la *Definicion 3.20.* Sea $\mathfrak{H} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una enumeración de tamaño $\kappa < \mathfrak{h}_3$.

i) Sea $d \in (\bigcap \mathfrak{H})$ es decir $d \in D_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$. Sea $b \in [\omega]^\omega$ tal que $b \subseteq^* d$. Como $d \in D_\alpha$ y D_α es abierto, entonces $b \in D_\alpha$, para todo $\alpha < \kappa$. Por lo tanto $b \in (\bigcap \mathfrak{H})$ entonces ($\bigcap \mathfrak{H}$) es abierto.

ii) $(\bigcap \mathfrak{H})$ es denso. Tomaremos $x \in [\omega]^\omega$ y encontraremos un $e \in (\bigcap \mathfrak{H})$ tal que $e \subseteq^* x$. Para cada $\alpha < \kappa$ consideremos el conjunto $E_\alpha = \{e \in [\omega]^\omega : \exists d \in D_\alpha, e =^* (d \cap x)\}$. Veamos que E_α es abierto denso en x, según la *Definicion 3.20.*

a) Veamos que E_α es abierto. Sea $y \in [\omega]^\omega$ tal que $y \subseteq^* e$ con $e \in E_\alpha$. Entonces existe $d \in D_\alpha$ tal que $e =^* (d \cap x)$ entonces $y \subseteq^* (d \cap x) \subseteq d$. Como D_α es abierto y $d \in D_\alpha$ entonces $y \in D_\alpha$. Ahora probaremos $y \cap x =^* y$. Como $y \subseteq^* d \cap x \subseteq x$ entonces $(y \subseteq^* x)$. Notemos que como $(y \cap x) \subseteq y$ entonces $(y \cap x) \subseteq^* y$. Para completar la casi igualdad falta ver que $y \subseteq^* (y \cap x)$. Esto se cumple, pues de lo anterior tenemos que $(y \subseteq^* x)$ es decir $(y \setminus x)$ es finito y $(y \setminus y) = \emptyset$. Por lo tanto $y \setminus (y \cap x) = (y \setminus y) \cup (y \setminus x)$ es finito, así tenemos que $y \subseteq^* (y \cap x)$. Antes vimos que también se cumple que $(y \cap x) \subseteq^* y$, de ambas casi contenciones se sigue que $y =^* (y \cap x)$ con $y \in D_\alpha$ por lo tanto $y \in E_\alpha$. Esto confirma que E_α es abierto.

b) Veamos que E_α es denso en x. Tomemos $a \in [x]^\omega$ como D_α es denso existe $d \in D_\alpha$ tal que $d \subseteq^* a$. Como $d = (d \cap a) \cup (d \setminus a)$ es infinito, entonces $(d \cap a)$ es infinito. Sea $e = (d \cap x)$ y veamos que $e \subseteq^* a$. Como $d \subseteq^* a$ entonces $(d \setminus a) \cap x = (d \cap x) \setminus a$ es finito, por lo tanto $e \subseteq^* a$. Para terminar solo falta verificar que e es infinito. Como $a \subseteq x$ entonces $(d \cap a) \subseteq (d \cap x)$ y como $(d \cap a)$ es infinito entonces $(d \cap x)$ es infinito. Así e es infinito y $e \subseteq^* a$ esto verifica que E_α es denso en x.

Ahora utilizaremos lo anterior para probar que $(\bigcap \mathfrak{H})$ denso, inciso *ii*) de la *Definición 3.20*).
Sea $h : x \to \omega$ una biyección y notemos que $F_\alpha = \{h[d] : d \in E_\alpha\}$ es abierto denso por el *Lema 3.22* con $|F_\alpha| < \mathfrak{h}_3$. Entonces existe $z \in \bigcap_{\alpha<\kappa} F_\alpha$. Sea $e^* = h^{-1}(z)$. Entonces para $(\alpha < \kappa)$, $e^* \in E_\alpha$. Fijamos $\alpha < \kappa$, por definición de E_α existe $d_\alpha \in D_\alpha$ con $e^* =^* (d_\alpha \cap x)$. Como D_α es abierto y $e^* \subseteq^* d_\alpha$ entonces $e^* \in D_\alpha$ para $(\alpha < \kappa)$ es decir $e^* \in \bigcap \mathfrak{H}$. Como $z \subseteq \omega$ es infinito, $e^* \subseteq dom(h) = x$ infinito es decir $e^* \subseteq x$ por lo tanto $e^* \subseteq x = (\bigcap \mathfrak{H})$ es denso.

De *i*) y *ii*) se sigue $(\bigcap \mathfrak{H})$ es abierto denso. ■

Esta versión de $\mathfrak{h}$ coincide con la noción de distributividad utilizada en [16] , 2,8, p,10. Ahora vamos a comparar $\mathfrak{h}_3$ con otros invariantes cardinales.

Lema 3.24 $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{h}_3$

Prueba : Sea $\kappa < \mathfrak{t}$ infinito, tomemos una familia de abiertos densos $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Definamos por recursión, una sucesión $\langle t_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$ decreciente ordenada con la $\subseteq^*$ de la siguiente forma.

1) En el paso base $t_0 = \omega$.
2) En el paso α sucesor definimos $t_{\alpha+1} \subseteq^* t_\alpha$ con $t_{\alpha+1} \in \mathcal{D}_\alpha$ ya que $\mathcal{D}_\alpha$ es denso.
3) Si $\lambda \leq \kappa$ es un ordinal límite. Entonces t_λ es pseudoitersección de $\{t_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es decir $t_\lambda \subseteq^* t_\alpha$.

Notemos que la definición de $\langle t_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$ garantiza la condición 1) de la *Definición de torre, 2.13*, pero la condición 2) no se cumple pues t_κ es pseudointersección.
Sea $\alpha < \kappa$. Como $t_\kappa \subseteq^* t_{\alpha+1}$ y como $t_{\alpha+1} \in \mathcal{D}_\alpha$ es abierto entonces $t_\kappa \in \mathcal{D}_\alpha$. Así $t_\kappa \in \bigcap\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es no vacía. Esto prueba que cualquier familia de tamaño κ de abiertos densos, con $\kappa < \mathfrak{h}_3$ tiene intersección no vacía. ■

Estamos listos para verificar el objetivo de ésta sección. A continuación probaremos que $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1$.

Lema 3.25 *Si $\mathcal{A}$ es MAD, entonces $\mathcal{A}\downarrow = \{x \in [\omega]^\omega : \exists A \in \mathcal{A}(x \subseteq^* A)\}$ es abierta densa.*

Prueba : *a*) Veamos que $\mathcal{A}\downarrow$ es abierta. Sea $x \in \mathcal{A}\downarrow$ y $b \in [\omega]^\omega$ tal que $b \subseteq^* x$. Como $x \in \mathcal{A}\downarrow$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \subseteq^* A$. Como $x \subseteq^* A$ y $b \subseteq^* x$ entonces $b \subseteq^* x \subseteq^* A$, por la transitividad de $\subseteq^*$ tenemos que $b \subseteq^* A$, por lo que $b \in \mathcal{A}\downarrow$. Esto implica que $\mathcal{A}\downarrow$ es abierta.

b) Veamos que $\mathcal{A}\downarrow$ es densa. Sea $b \in [\omega]^\omega$, como $\mathcal{A}$ es *MAD* existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $(A \cap b)$ es infinito (*Observación 2.59*). Así se cumple que $(A \cap b) \subseteq A$. Sea $x = (A \cap b)$. Como $(A \cap b) \subseteq A$ y $(A \cap b)$ es infinito entonces $(A \cap b) \in \mathcal{A}\downarrow$. Como $(A \cap b) \subseteq b$ entonces $(A \cap b) \subseteq^* b$, es decir $x \in \mathcal{A}\downarrow$ y $x \subseteq^* b$. Por lo tanto $\mathcal{A}\downarrow$ es densa.

De *a*) y *b*) se sigue que $\mathcal{A}\downarrow$ es abierta densa. ■

Observación 3.26 *Si $\mathcal{D}$ es familia abierta densa existe $\mathcal{A}$ casi ajena infinita con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.*

Prueba : Tomemos $x \in \mathcal{D}$ y partámoslo en conjuntos infinitos $x = \bigcup\{x_n : n \in \omega\}$. Sea $\mathcal{A} = \{x_n : n \in \omega\}$ como $x_n \subseteq x$, $x \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es abierta entonces $x_n \in \mathcal{D}$ para cada $n \in \omega$. Entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$. ■

Observación 3.27 *Si $\mathcal{D}$ es familia abierta densa y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ casi ajena infinita, entonces $\mathcal{A}\downarrow \subseteq \mathcal{D}$.*

Prueba : Sea $x \in \mathcal{A}\downarrow$ entonces existe $A \in \mathcal{A}$ con $x \subseteq^* A$. Como $A \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es abierta entonces $x \in \mathcal{D}$.■

Lema 3.28 *Sea $\mathcal{D}$ una familia abierta densa con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ casi ajena. Entonces existe $\mathcal{M}$ familia MAD con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$. Además $\mathcal{M} \downarrow \subseteq \mathcal{D}$.*

Prueba : Sea $\mathcal{D}$ una familia abierta densa con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ casi ajena. Consideremos el conjunto $P = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D} : \mathcal{B}$ es casi ajena y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$. Verifiquemos las siguientes condiciones necesarias para la aplicación del *Lema de Zorn.*
1) $P \neq \emptyset$, pues al menos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ es casi ajena.
2) Como P está ordenado por la contención es un orden parcial.
3) Tomemos $\mathcal{C}$ una cadena de elementos en P. Veamos que $\bigcup \mathcal{C} \in P$. Para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$.

Veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es familia casi ajena según la *Definición 2.53.*
$i)$ Tomamos $x \in \bigcup \mathcal{C}$ entonces existe $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tal que $x \in \mathcal{B}$ y como $\mathcal{B}$ es casi ajena entonces x es infinito.
$ii)$ Tomamos $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ distintos, entonces existen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ tales que $x \in \mathcal{B}_1$ y $y \in \mathcal{B}_2$. Como $\mathcal{C}$ es cadena sin pérdida de generalidad pensemos que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, así tenemos que $x, y \in \mathcal{B}_2$ y como $\mathcal{B}_2$ es familia casi ajena entonces $(x \cap y)$ es finita.

Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C} \in P$ y es cota superior de $\mathcal{C}$.

Las condiciones $1), 2), 3)$ son suficientes para la aplicación del *Lema 0.1* que justifica la existencia de una familia $\mathcal{A}^*$ maximal en P, es decir $\mathcal{A}^*$ es familia casi ajena y maximal entre las familias casi ajenas infinitas contenidas en $\mathcal{D}$.

Afirmación 3.29 *$\mathcal{A}^*$ es maximal con respecto a todas las familias casi ajenas, no sólo con respecto a las incluidas en $\mathcal{D}$.*

Prueba de la Afirmación 3.29 Por hipótesis tenemos que $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{D}$. Tomemos $x \in [\omega]^\omega$, como $\mathcal{D}$ es denso existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $d \subseteq^* x$. Como $\mathcal{A}^*$ es maximal con respecto a las familias casi ajenas infinitas contenidas en $\mathcal{D}$ existe $A \in \mathcal{A}^*$ tal que $(d \cap A)$ es infinito. Notemos que $(d \cap A) \subseteq d$ y $d = (d \cap x) \cup (d \setminus x)$, como $(d \setminus x)$ es finito entonces $(d \cap x)$ es infinito. Entonces $(d \cap A) \subseteq^* (d \cap x) \subseteq x$. De la transitividad de la casi contención se sigue que $(d \cap A) \subseteq^* x$. Ahora escribamos a $(d \cap A) = ((d \cap A) \cap x) \cup ((d \cap A) \setminus x)$. Como $(d \cap A) \subseteq^* x$ entonces $((d \cap A) \setminus x)$ es finito, entonces $((d \cap A) \cap x)$ es infinito. Como $(x \cap (d \cap A)) \subseteq (x \cap A)$, esto implica que $(x \cap A)$ es infinito con $A \in \mathcal{A}^*$. Por lo tanto $\mathcal{A}^*$ es MAD en $[\omega]^\omega$, no solo en $\mathcal{D}$.

Por último usando el *Lema 3.25*, se sigue que si $\mathcal{A}^*$ es casi ajena maximal en P, entonces $\mathcal{A}^* \downarrow$ es abierta densa, entonces $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}^* \downarrow \subseteq \mathcal{D}$, ver *Observación 3.27*■

A continuación probaremos dos *lemas* que nos ayudaran a concluir esta sección.

Lema 3.30 $\mathfrak{h}_3 \leq \mathfrak{h}_2$.

Prueba : Para esto veremos que si $\kappa < \mathfrak{h}_3$ entonces $\kappa < \mathfrak{h}_2$.
Sea $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq \mathfrak{M}$, veremos que tiene refinamiento común. Por el *Lema 3.23* tenemos que $\mathcal{D}_\kappa = \bigcap\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es abierto denso. Por la *Observación 3.26* existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_\kappa$ casi ajena infinita y por el *Lema 3.28*, existe $\mathcal{M}$ casi ajena maximal con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_\kappa$. Entonces para todo $\alpha \in \kappa$ se sigue que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_\alpha = (\mathcal{A}_\alpha) \downarrow$. Ahora si $x \in \mathcal{M}$ existe $a \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $x \subseteq^* a$. Esto implica que $\mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{A}_\alpha$. Por lo tanto $\kappa < \mathfrak{h}_2$.■

Lema 3.31 *Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$. Entonces existe $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ tal que $\mathcal{M} \sqsubset \mathcal{A}$.*

Prueba : Sea $A \in \mathcal{A}$. Por el *Corolario 2.64* obtenemos $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq [A]^\omega$ familia MAD de tamaño $\mathfrak{c}$. Entonces definimos $\mathcal{M} = (\mathcal{A} \setminus \{A\}) \cup \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. La prueba de que $\mathcal{M}$ es MAD de tamaño $\mathfrak{c}$ es análoga a la prueba del *Teorema 3.3* ■

Lema 3.32 $\mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{h}_3$.

Prueba : Veremos que si $\kappa < \mathfrak{h}_1$ entonces $\kappa < \mathfrak{h}_3$. Sea $\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de familias abiertas densas, veamos que $\bigcap\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es no vacía. Por el *Lema 3.27* tenemos que existe $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\alpha$ familia casi ajena. Por el *Lema 3.28* existe $\mathcal{M}_\alpha$ MAD con $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{M}_\alpha \subseteq (\mathcal{M}_\alpha)\downarrow \subseteq \mathcal{D}_\alpha$.

Por *el Lema 3.31* existe $\mathcal{N}_\alpha \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ tal que $\mathcal{N}_\alpha \sqsubseteq \mathcal{M}_\alpha$. Sea $x \in \mathcal{N}_\alpha$ entonces existe $y \in \mathcal{M}_\alpha$ tal que $x \subseteq^* y$. Como $\mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\alpha$ y $\mathcal{D}_\alpha$ es abierta entonces $x \in \mathcal{D}_\alpha$. Entonces $\mathcal{N}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\alpha$. Consideremos $\mathfrak{H} = \{\mathcal{N}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ con $\kappa < \mathfrak{h}_1$, entonces $\mathfrak{H}$ no es aplastante. Notemos $\mathfrak{H}$ cumple $i)$ de la *Definición 3.2* de familia aplastante, entonces no cumple la condición $ii)$. Por lo tanto existe $x_0 \in [\omega]^\omega$ tal que para todo $\alpha < \kappa$ y para todo $a, b \in \mathcal{N}_\alpha$ distintos se tiene que $(x_0 \cap b)$ es finito ó $(x_0 \cap a)$ es finito.

Veamos que $x_0 \in \bigcap\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Fijamos $\alpha \in \kappa$, como $\mathcal{N}_\alpha$ es MAD existe $a_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ con $(x_0 \cap a_\alpha)$ infinito. Ahora por hipótesis no se cumple $ii)$ de la *Definición 3.2* y $(x_0 \cap a_\alpha)$ es infinito. Por lo tanto si tomamos $b \in \mathcal{N}_\alpha$ distinto de a_α entonces $(x_0 \cap b)$ es finito.

Afirmamos que $x_0 \subseteq^* a_\alpha$. Sabemos que $(x_0 \cap a_\alpha)$ es infinito, falta verificar que $(x_0 \setminus a_\alpha)$ es finito. De lo contrario $(x_0 \setminus a_\alpha)$ es infinito y como $\mathcal{N}_\alpha$ es MAD existe $c \in \mathcal{N}_\alpha$ tal que $c \cap (x \setminus a_\alpha)$ es infinito. Notemos que $c \cap (x \setminus a_\alpha) \subseteq (c \cap x_0)$. Esto implica que $(c \cap x_0)$ es infinito. Si tomamos $t \in c \cap (x \setminus a_\alpha)$ entonces $t \in c$ y $t \notin a_\alpha$ entonces c, a_α son distintos, con $(x_0 \cap a_\alpha)$ infinito y $(x_0 \cap c)$ infinito. Esto contradice el incumplimento de *ii*) de la *Definición 3.2*. Por lo tanto $(x_0 \setminus a_\alpha)$ es finito y se cumple que $x_0 \subseteq^* a_\alpha$, como queríamos. Por último como $a_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\alpha$, y $x_0 \subseteq^* a_\alpha$ con $\mathcal{D}_\alpha$ abierto, entonces $x_0 \in \mathcal{D}_\alpha$ y como α es arbitrario tenemos que $x_0 \in \bigcap\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Esto implica que $\kappa < \mathfrak{h}_3$.■

El siguiente *Corolario* es el resultado de juntar: *Lema 3.24*, *Lema 3.30*, *Lema 3.12*, *Lema 3.32*, *Corolario 3.5*.

Corolario 3.33 $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{h}_3 \leq \mathfrak{h}_2 \leq \mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{h}_3 \leq \mathfrak{c}$.■

El *Corolario 3.33* nos permite dar la *Definición 3.34*, donde se establece la igualdad entre las variantes de $\mathfrak{h}$.

Definición 3.34 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3$.

Para finalizar está sección, veremos que $\mathfrak{h}$ es un ordinal regular.

Teorema 3.35 $\mathfrak{h}$ *es un cardinal regular.*

Prueba: Probaremos que $\mathfrak{h}_3$ es regular y como $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{h}$, según la *Definición 3.34* se cumplirá el *Teorema 3.35*. Supongamos que $\mathfrak{h}_3$ no es regular, entonces para $\kappa < \mathfrak{h}_3$ existe una función cofinal $f : \kappa \longrightarrow \mathfrak{h}_3$. De la definición de $\mathfrak{h}_3$ en *3.21*, se sigue que existe una familia de abiertos densos con $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{h}_3$ y $\bigcap \mathfrak{H} = \emptyset$.
Consideremos la enumeración $\mathfrak{H} = \{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_3\}$, como $f : \kappa \longrightarrow \mathfrak{h}_3$ es cofinal, para todo $\beta < \mathfrak{h}_3$ existe $\alpha < \kappa$ tal que $f(\alpha) \geq \beta$. Consideremos el conjunto de abiertos densos enumerados de la siguiente forma $\mathfrak{H}_\alpha = \{\mathcal{D}_\beta : \beta \leq f(\alpha)\}$. Notemos que $\mathfrak{H}_\alpha$ tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{h}_3$ pues $f(\alpha) < \mathfrak{h}_3$, por el *Lema 3.23* se sigue que $\bigcap \mathfrak{H}_\alpha = E_\alpha$ es abierto denso. Sea $\mathfrak{H}' = \{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como $|\mathfrak{H}'| < \mathfrak{h}_3$ entonces $\bigcap \mathfrak{H}'$ es no vacía. Pero $\emptyset = \bigcap \mathfrak{H} = \bigcap \mathfrak{H}' \neq \emptyset$, lo que es contradictorio. Entonces no existe $f : \kappa \longrightarrow \mathfrak{h}_3$ cofinal con $\kappa < \mathfrak{h}_3$. Por lo tanto $\mathfrak{h}$ es un cardinal regular.■

3.3. Árbol matriz base para $[\omega]^\omega$

El objetivo de está sección será estudiar la construcción del *árbol matriz base* para $[\omega]^\omega$, introducido en [1] por *Balcar, Pelant y Simon*. Este árbol es de singular relevancia para nuestro trabajo ya que da una versión del invariante cardinal $\mathfrak{h}$ que utiliza las nociones de familias abiertas densas y distributividad estudiadas en la sección anterior. Cabe mencionar que el invariante cardinal $\mathfrak{h}$, toma este nombre haciendo referencia a la altura del árbol que estudiaremos a continuación. Así la letra $\mathfrak{h}$, proviene del inglés «height» que significa altura.

Comenzaremos con la definición de árbol según [18] .

Definición 3.36 Un árbol *es un orden parcial* $(\mathcal{T}, \leq)$*, con elemento mínimo llamado raíz, cumple que el conjunto de los antecesores de cualquier elemento ó nodo* $t \in \mathcal{T}$*, dado por* $\{s \in \mathcal{T} : s < t\}$ *es un conjunto bien ordenado por* $\leq$*.*

A continuación definiremos las nociones usuales referentes a un árbol $\mathcal{T}$, basadas en [18].

$\star$ Dado un nodo $t \in \mathcal{T}$, definimos $t \downarrow = \{x \in \mathcal{T} : x \leq t\}$ y $t \uparrow = \{x \in \mathcal{T} : x \geq t\}$. Los conjuntos anteriores serán el conjunto de los antecesores de t y el conjunto de los sucesores de t, respectivamente.

$\star$ $ht(t)$ denota *la altura de* t y corresponde al tipo de orden del conjunto de sus antecesores, en símbolos $tipo(t \downarrow)$, se le asigna el ordinal correspondiente al tamaño del conjunto.

$\star$ Dado un ordinal α, llamaremos T_α *al nivel* α-ésimo de $\mathcal{T}$, es decir, $\mathcal{T}_\alpha = \{t \in \mathcal{T} : ht(t) = \alpha\}$

$\star$ $\mathcal{T}$ tiene raíz, si y sólo si, el nivel 0, tiene cardinalidad 1, es decir, $|\mathcal{T}_0| = 1$. En este caso la raíz de $\mathcal{T}$ es el único elemento del nivel $\mathcal{T}_0$.

$\star$ La altura de $\mathcal{T}$ será el mínimo ordinal α tal que $T_\alpha = \emptyset$ y la denotaremos $ht(\mathcal{T})$.

$\star$ A un nodo $s \in \mathcal{T}$, le llamaremos *sucesor inmediato* de un nodo t, si $t \leq s$ y la altura de s es exactamente un nivel arriba de t, es decir, $t \in T_\alpha$ y $s \in T_{\alpha+1}$. Al conjunto de sucesores inmediatos de t los denotaremos $suc_{\mathcal{T}}(t)$.

$\star$ Dos nodos $x, y \in \mathcal{T}$ son compatibles $(x \parallel y)$ si $x \leq y$ ó $y \leq x$. Diremos que son incompatibles $(x \perp y)$, si y sólo si, no son compatibles.

$\star$ Una anticadena es un $A \subseteq \mathcal{T}$, cuyos elementos son incompatibles dos a dos. Notemos que cada nivel de $\mathcal{T}$ es una anticadena.

A la definición anterior le haremos un ajuste que se amolda mejor al árbol que queremos estudiar. Tomaremos un árbol que obedezca al pre orden dado por $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ con la casi contención invertida y elemento máximo ω.

Observación 3.37 *Recordemos que en la* Observación 2.5 *vimos que* $[\omega]^\omega$ *con la* $\subseteq^*$ *no es orden parcial. Si* $X \subseteq [\omega]^\omega$ *y decimos que* $(X, \subseteq^*)$ *es un orden parcial, esto implicará que siempre que* $a, b \in X$ *con* $a \subseteq^* b$ *y* $b \subseteq^* a$ *entonces* $a = b$.

Definición 3.38 *Una rama es un subconjunto* B *de un árbol* $(\mathcal{T}, \leq)$ *cumple:*

i) Con el orden en $\mathcal{T}$, $(B, \leq_\mathcal{T})$ *es un orden total.*

ii) Si $t \in (\mathcal{T} \setminus B)$ *entonces* $B \bigcup \{t\}$ *no es un orden total con* $\leq_\mathcal{T}$.

Definición 3.39 *Una rama cofinal en* $\mathcal{T}$, *es una cadena* $C \subseteq \mathcal{T}$ *tal que* $C \cap \mathcal{T}_\alpha \neq \emptyset$ *para todo* $\alpha < h(\mathcal{T})$.

Definición 3.40 *Un árbol matriz base es una familia* $\mathcal{T} \subseteq \wp([\omega]^\omega)$ *con las siguientes propiedades.*
i) $(\mathcal{T}, \subseteq^*)$ *es un orden, con la* $\subseteq^*$ *invertida.*
ii) $(\mathcal{T}, \subseteq^*)$ *es un árbol con raíz* ω.
iii) Si $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, $\mathcal{T}_\alpha \in \mathcal{M}_\mathfrak{c}$.
iv) $\mathcal{T}$ *es una familia densa.*

La demostración del siguiente teorema está basada en la prueba de *Blass*, ver ([4] , 6,20).

Teorema 3.41 *(Balcar, Pelant, Simon) Existe un árbol matriz base de altura* $\mathfrak{h}$.

Prueba : A continuación daremos la construcción de un árbol $\mathcal{T}$ que cumple las propiedades de la *Definición 3.40*. Sea $\mathcal{H} = \{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ familia de abiertos densos con intersección vacía, esta familia existe por la definición de $\mathfrak{h}_3$ en 3.21. Definimos de la siguiente forma los niveles $\mathcal{T}_\alpha$ del árbol deseado $\mathcal{T}$. En el nivel 0, ponemos a ω como la raíz de $\mathcal{T}$, esto verifica la propiedad *ii*).

Para el paso límite $\alpha < \mathfrak{h}$, el *Lema 3.23* nos dice que como $|\{\mathcal{T}_\beta : \beta < \alpha\}| < \mathfrak{h}_3$ entonces $(\bigcap\{\mathcal{T}_\beta : \beta < \alpha\})$ es abierta densa y por la *Observación 3.27* y *3.26*, sabemos que toda familia abierta densa contiene una de la forma $\mathcal{A}\downarrow$ con $\mathcal{A}$ una familia casi ajena. Por *Lema 3.28* existe una MAD $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \downarrow \subseteq (\bigcap\{\mathcal{T}_\beta \downarrow : \beta < \alpha\})$. Por el *Lema 3.31* existe $\mathcal{M}' \sqsubseteq \mathcal{M}$ con $\mathcal{M}' \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$. Definimos $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{M}'$.

Veamos que $\mathcal{T}_\alpha \sqsubseteq \mathcal{T}_\beta$ si $0 \neq \beta < \alpha$. Sea $\beta < \alpha$ con $\beta \neq 0$ entonces $\mathcal{T}_\alpha \subseteq \mathcal{T}_\alpha \downarrow \subseteq \mathcal{T}_\beta \downarrow$. Ahora si $x \in \mathcal{T}_\alpha$ entonces $x \in \mathcal{T}_\beta \downarrow$ es decir que $x \subseteq^* b$ para algún $b \in \mathcal{T}_\beta$. Esto implica que $\mathcal{T}_\alpha \sqsubseteq \mathcal{T}_\beta$.

Para satisfacer la propiedad *iii*) falta justificar que $\mathcal{T}_\alpha$ es de tamaño $\mathfrak{c}$, basta con recordar que $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{M}'$ y $\mathcal{M}' \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$.
Definamos el nivel sucesor $\alpha+1$ del árbol, con $\alpha = \beta + m$, con $m \in \omega$, como en la *Definición 0.20.*

Subcaso i). Si m es par $\alpha = \beta + 2n$ para $n \in \omega$. Como $(\mathcal{T}_\alpha \downarrow)$ y $\mathcal{D}_{\beta+n}$ son familias abiertas densas, su intersección es abierta densa, por *Lema 3.28* existe una MAD $\mathcal{T}_{\alpha+1} \subseteq (\mathcal{T}_\alpha \downarrow \bigcap \mathcal{D}_{\beta+n})$.
Subcaso ii). Si m es impar $\alpha = \beta + (2n+1)$ para $n \in \omega$. Con estos pasos se asegura que $\mathcal{T}$ es una familia densa.
A un $X \in [\omega]^\omega$ lo llamaremos *activo* en el nivel $\alpha+1$ si y solo si existen $\mathfrak{c}$ miembros $y \in \mathcal{T}_\alpha$ que intersectan a X infinitamente, en simbolos $|\{y \in \mathcal{T}_\alpha : y \cap X \neq^* \emptyset\}| = \mathfrak{c}$.
Consideremos una enumeración de los activos $\mathcal{A}_\alpha = \{X_\gamma : \gamma < \lambda\} = \{X \in [\omega]^\omega : X$ es activo en el nivel $\alpha+1\}$, donde $\lambda \leq \mathfrak{c}$. Esto nos da un buen orden sobre los activos en el nivel $\alpha+1$, en una sucesión indexada con ordinales con tamaño menor o igual a $\mathfrak{c}$.
Definimos la función $f_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \longrightarrow \mathcal{T}_\alpha$, sobre los activos en $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ de manera recursiva.
Para $(\gamma = 0)$, $f_\alpha(X_0)$ es un elemento de $\mathcal{T}_\alpha$ con $f(X_0) \cap X_0$ infinito.
Para $(\gamma > 0)$, supongamos que f_α ya está definida en $\{X_\delta : \delta < \gamma\}$ y escojemos $f_\alpha(X_\gamma)$ un elemento de $\mathcal{T}_\alpha \setminus \{f_\alpha(X_\gamma) : \gamma < \lambda\}$ tal que $f_\alpha(X_\lambda) \cap X_\lambda$ es infinito. Esto implica que f_α es inyectiva.
A continuación partiremos cada $Y \in \mathcal{T}_\alpha$ para formar el nivel $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ que será un refinamiento del nivel $\mathcal{T}_\alpha$. Entonces a cada $Y \in \mathcal{T}_\alpha$ lo partimos en Y' y Y'' conjuntos infinitos tales que $Y = Y' \cup Y''$, de la siguiente forma.
Caso 1. Si existe $X \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $Y = f_\alpha(X)$ entonces $X \cap f_\alpha(X)$ es infinito. Sean $P, Q \in [\omega]^\omega$ ajenos de tal forma que $X \cap f_\alpha(X) = P \cup Q$. Definimos $Y' = P$ y $Y'' = Q \cup (f(X) \setminus X)$.
Caso 2. Si $Y \in \mathcal{T}_\alpha$ y no existe $X \in \mathcal{A}$ tal que $Y = f_\alpha(X)$, tomamos Y' y Y'' conjuntos infinitos ajenos arbitrarios tales que $Y = Y' \cup Y''$.
Definimos $\mathcal{T}_{\alpha+1} = \{Y' : Y \in \mathcal{T}_\alpha\} \cup \{Y'' : Y \in \mathcal{T}_\alpha\}$ y veamos que $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ así definida es una MAD.
1) Por definición sabemos que Y' y Y'' son conjuntos infinitos.
2) Sean $Y, Z \in \mathcal{T}_{\alpha+1}$ con $Y \neq Z$, como $\mathcal{T}_\alpha$ es MAD entonces $Y \cap Z$ es finito y tenemos los siguientes casos: $Y' \cap Z' \subseteq Y \cap Z$, $Y'' \cap Z'' \subseteq Y \cap Z$, $Y' \cap Z'' \subseteq Y \cap Z$, $Y'' \cap Z' \subseteq Y \cap Z$. Como en cada caso la intersección está contenida en $Y \cap Z$ finito, entonces en cada caso la intersección es finita. De 1) y 2) se sigue que $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ es una familia casi ajena.

3) Sea $X \in [\omega]^\omega$ como $\mathcal{T}_\alpha$ es MAD existe $Y \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que $(Y \cap X)$ es infinito, entonces podemos escribir a $(Y \cap X) = (Y' \cap X) \cup (Y'' \cap X)$, partiendo Y como dijimos antes. Por lo tanto un elemento de $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ intersecta a X infinitamente. Por lo que $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ es MAD.
4) Como $|\mathcal{T}_{\alpha+1}| = |\mathcal{T}_\alpha| + |\mathcal{T}_\alpha| = \mathfrak{c}$, esto implica que $\mathcal{T}_{\alpha+1} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$. Además por la construción de $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ sabemos que $\mathcal{T}_{\alpha+1} \sqsubseteq \mathcal{T}_\alpha$. Esto completa la construcción del árbol $\mathcal{T}$.
Para probar la condición *iv*) hacemos la siguiente afirmación.

Afirmación 3.42 *Todo $X \in [\omega]^\omega$ es activo en algún nivel $\alpha + 1$ con α impar.*

Suponiendo verdadera la *Afirmación 3.42*, tenemos que $X \in dom(f_\alpha)$ y $(f_\alpha(X) \cap X)$ es infnito con $f_\alpha(X) = Y$ y $Y \in \mathcal{T}_\alpha$, esto implica que estamos en el Caso 1. Por la construcción tenemos que $Y' \subseteq (Y \cap X)$, $Y' \in \mathcal{T}_{\alpha+1}$ y $Y' \subseteq X$ entonces $(Y' \setminus X) = \emptyset$ es decir $Y' \subseteq^* X$. Esto prueba la condición *iv*).

Prueba de la Afirmación 3.42
Fijamos $X \in [\omega]^\omega$ y veremos que es activo en algún nivel $\alpha + 1$. Para esto tomemos un $X \in [\omega]^\omega$ fijo y le construimos un subárbol binario $T \subseteq \mathcal{T}$(cada nodo en T tiene dos sucesores inmediatos). Así $T \subseteq \mathcal{T}$ tiene $ht(T) = \omega$ y tiene la misma raíz ω de $\mathcal{T}$. Para $n \in \omega$ existe $\alpha(n) \in \mathfrak{h}$ con $T_n \subseteq \mathcal{T}_{\alpha(n)}$. Además pediremos que para todo $Y \in T, (X \cap Y)$ sea infinito.
Construyamos dicho subárbol $T \subseteq \mathcal{T}$ por recursión. En el paso base ponemos ω como raíz del arbol T por lo tanto $\alpha(0) = \omega$. Suponemos construido $T_n = \{Z(n,i) : i < 2^n\}$. Notemos que los $Z(n,i) \cap X$ son conjuntos infinitos y no pueden pertenecer a todas las familias de abiertos densos $\mathcal{D}_\xi$ pues las pedimos con interesección vacía entonces existe $\xi_i < \mathfrak{h}$, tal que $(Z(n,i) \cap X) \notin \mathcal{D}_{\xi_i}$. Si $i < 2^n$ existe $\beta_i = 0$ o β_i límite y $n_i \in \omega$ donde $\xi_i = \beta_i + n_i$. Por el *subcaso i*) $\alpha_i = \beta_i + 2n_i$, así α_i es par y por *Lema 3.28* existe una MAD $\mathcal{T}_{\alpha_i+1} \subseteq (\mathcal{T}_{\alpha_i} \downarrow \bigcap \mathcal{D}_{\beta_i+n_i}) = \mathcal{D}_{\xi_i}$. Como $(Z(n,i) \cap X) \notin \mathcal{D}_{\xi_i}$ entonces $(Z(n,i) \cap X) \notin (\mathcal{T}_{\alpha_{i+1}} \downarrow)$. Esto implica que no existe $a \in \mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ tal que $(Z(n,i) \cap X) \subseteq^* a$, dicho de otra forma $(Z(n,i) \cap X) \nsubseteq^* a$ para todo $a \in \mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ entonces $((Z(n,i) \cap X) \setminus a)$ es infinito. Ahora como $(Z(n,i) \cap X)$ es infinito y $\mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ es MAD existe algún $b \in \mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ tal que $b \cap (Z(n,i) \cap X)$ es infinito y por la misma razón existe $c \in \mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ tal que $c \cap (X \setminus a)$ es infinito. Por lo tanto existen $c, b \in \mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ distintos tales que intersectan a $(Z(n,i) \cap X)$ infinitamente.
Ahora si $\alpha > \alpha_i + 1$, existen $a \neq b \in \mathcal{T}_\alpha$ tales que $a \cap (Z(n,i) \cap X)$ y $b \cap (Z(n,i) \cap X)$ son infinitos. Sea $\alpha(n+1) = max(\{\alpha_i + 1 : i < 2^n\} \bigcup \{\alpha_n\})$. Para cada $i < 2^n$ sean $a_i, b_i \in \mathcal{T}_\alpha(n+1)$ con $(Z(n,i) \cap X) \subseteq^* a_i$ y $(Z(n,i) \cap X) \subseteq^* b_i$ infinitos . Notemos

que como $\alpha(n) < \alpha(n+1)$ tenemos que $a_i \cup b_i \subseteq^* Z(n,i)$. Sean $T_{n+1} = \{a_i : i < 2^n\} \bigcup \{b_i : i < 2^n\})$. Así X intersecta a cada elemento de T_{n+1} infinitamente.

Sabemos que $(\alpha(0) < \alpha(1) < ..... < \alpha(n) < \alpha(n+1) < ...)$. Sea $\lambda = sup\{\alpha(n) : n \in \omega\}$. Como $cof(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} > \omega$ y $\lambda < \mathfrak{h}$ entonces λ es límite entonces $\mathcal{T}_\lambda \sqsubseteq T_{\alpha(n)}$ para todo $n \in \omega$. Sea $T = \{Y_s : s \in 2^{<\omega}\}$ una enumeración tal que $T_n = \{Y_s : s \in 2^n\}$ para todo $n \in \omega$. Para todo $n \in \omega, s \in 2^n, t \in 2^{n+1}$ así tenemos que $Y_t \subseteq Y_s$ si y solo si $t \restriction n = s$ si y solo si $t = s^\frown 0$ o $t = s^\frown 1$. Entonces para $g \in 2^\omega$ definimos $\mathcal{L}_g = \{Y \in \mathcal{T}_\lambda$ para todo $n \in \omega, Y \subseteq^* Y_{g\restriction n}\}$. Por definición de T para todo $n \in \omega$ tenemos que $X \cap Y_{g\restriction n}$ es infinito. Entonces $\{X \cap Y_{g\restriction n} : n \in \omega\}$ está bien ordenado por la casi contención. Como $(\omega < \mathfrak{t})$ existe pseudointersección Z_g. Como $\mathcal{T}_\lambda$ es MAD existe $Y_g \in \mathcal{T}_\lambda$ tal que $Y_g \cap Z_g$ es infinito y $Y_g \cap Z_g \subseteq^* Y_{g\restriction n}$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto $Y_{g\restriction n} \cap Y_g$ es infinito y como $Y_g \in \mathcal{T}_\lambda$, $Y_{g\restriction n} \in \mathcal{T}_{\alpha(n)}$ y $\alpha(n) < \lambda$ entonces $Y_g \subseteq^* Y_{g\restriction n}$ para todo $n \in \omega$. Así $Y_g \in \mathcal{L}_g$ y $Y_g \cap X$ es infinito.

Notemos que si $g \neq g' \in 2^\omega$ son funciones distintas podemos tomar $m \in \omega$ tal que $g(m) \neq g'(m)$ entonces $Y_g \subseteq^* Y_{g\restriction m+1}$ y $Y_{g'} \subseteq^* Y_{g'\restriction m+1}$ donde $Y_{g\restriction m+1}$ y $Y_{g'\restriction m+1}$ son elementos distintos de T_{m+1}. Por lo tanto $Y_g \cap Y_{g'}$ es finito entonces $(Y_g \neq Y_{g'})$. Esto implica que en el conjunto $\{Y_g : g \in 2^\omega\} \subseteq \mathcal{T}_\lambda$ hay $\mathfrak{c}$ nodos que intersectan a X infinitamente, esto prueba que X es activo en $\mathcal{T}_{\lambda+1}$.

Por último como λ es ordinal límite tenemos que $\lambda = \lambda + 0$ y como el 0 es par entonces λ es par y $\lambda + 1$ impar. Esto implica que X es activo en el nivel $\lambda + 2$. Esto prueba la existencia de un árbol matriz base de altura $\mathfrak{h}$. ■

Teorema 3.43 *Todo árbol matriz base es de altura al menos* $\mathfrak{h}$.

Prueba: Supongamos que existe un árbol matriz base con $ht(\mathcal{T}) = \kappa < \mathfrak{h}$ y lleguemos a una contradicción. Sea $\mathfrak{H} = \{\mathcal{T}_\alpha : 0 < \alpha < \kappa\}$. Notemos que por *iii*) de la *Definición 3.40* cada $\mathcal{T}_\alpha \in \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$ entonces $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_\mathfrak{c}$, esto verifica la condición *i*) de la (*Definición 3.2*) y como $|\mathfrak{H}| < \mathfrak{h}_1$, esto obliga a que la condición que falla en $\mathfrak{H}$ es la *ii*) de la *Definición 3.2*. Esto quiere decir que existe $x \in [\omega]^\omega$ tal que si tomamos $a_\alpha, b_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ con $\alpha < \kappa$, sucederá que alguno de $(x \cap b_\alpha)$ ó $(x \cap a_\alpha)$ es finito. De forma similar al *Lema 3.32,* para todo $\alpha < \kappa$ existe $x_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que si $(x \cap x_\alpha)$ es infinito entonces $x \subseteq^* x_\alpha$. Ahora por *iv*) de la *Definición 3.40* existe $y \in \mathcal{T}$ tal que $y \subseteq^* x$. Sea $\beta < \kappa$ tal que $y \in \mathcal{T}_\beta$ entonces $y \subseteq^* x \subseteq^* x_\beta$. Como $y, x_\beta \in \mathcal{T}_\beta$ y $\mathcal{T}_\beta$ es MAD, por *i*) tenemos que $y = x_\beta$ y $y = x$, por lo tanto $y = x_\beta = x$. Ahora como κ es ordinal límite, $\beta + 1 \in \kappa$. Por definición de $x_{\beta+1}$ tenemos que $x_{\beta+1} \subseteq^* x_\beta = x$. Como dijimos anteriormente para todo $\alpha < \kappa$ existe $x_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que $x \subseteq^* x_\alpha$, si hacemos $\alpha = \beta + 1$ se sigue que $x \subseteq^* x_{\beta+1}$ de ambas casi contenciones tenemos que $x_\beta =^* x_{\beta+1}$, pero esto es una contradicción pues $x_\beta \in \mathcal{T}_\beta$ y $x_{\beta+1} \in \mathcal{T}_{\beta+1}$. Por lo tanto $ht(\mathcal{T}) = \mathfrak{h}$. ■

Corolario 3.44 $\mathfrak{h}$ *es el mínimo cardinal* κ *tal que existe un árbol matriz base de altura* κ.

3.4. Número de Novák

En esta sección exploraremos los conceptos topológicos que motivaron a *Balcar, Pelant y Simon* en [1] .

Definición 3.45 *Sea* X *un espacio topológico.*
1) $D \subseteq X$ *es denso si para todo* U *abierto no vacío en* X *se tiene que* $D \cap U \neq \emptyset$.
2) $N \subseteq X$ *es nunca denso (nd) si para todo abierto no vacío* $U \subseteq X$ *existe* V *un abierto no vacío con* $V \subseteq (U \setminus N)$.

Observación 3.46 *Un conjunto es cerrado nunca denso, si y solo si, su complemento es un abierto denso.*

Teorema 3.47 *Teorema de la Categoría de Baire. Sea* X *un espacio topológico compacto o completamente metrizable. Entonces si* $\mathcal{U}$ *es una colección numerable de abiertos densos de* X *se sigue que* $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

El siguiente Corolario es el dual del *Teorema 3.47.*

Corolario 3.48 *Sea* X *un espacio topológico compacto o completamente metrizable sin puntos aislados. Si* $\mathcal{N}$ *es una colección numerable de cerrados nunca densos de* X *entonces* $\bigcup \mathcal{N} \neq X$.

Definición 3.49 *Si* X *es un espacio topológico sin puntos aislados, el número de Novák de X, en simbolos n(X): es el mínimo cardinal* κ *tal que existe una colección* $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *de abiertos densos de X, cuya* $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} = \emptyset$. *Ver* [17] *de donde tomó este nombre, aunque Novák estudió esto en* [21] .

Notemos que dada una famila $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abiertos densos de X, a su intersección la podemos ver como el complemento de la unión de cerrados nunca densos, además si dicha intersección es vacía su complemento es el total X. En símbolos: Si $\emptyset = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ entonces $X = X \setminus \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} = \bigcup\{(X \setminus U_\alpha) : \alpha < \kappa\}$. Esta igualdad se cumple por las leyes de *De Morgan* y la *Observación 3.46.*

Lema 3.50 *n(X) está bien definido cuando X es un espacio T_1 sin puntos aislados y $n(X) \leq |X|$.*

Prueba : Los espacios topológicos T_1, son aquellos donde cada punto es un cerrado. Así $U_P = (X \setminus \{p\})$ es abierto. Como p no es punto aislado, si W es un abierto con $p \in W$ entonces $W \cap U_p = (W \setminus \{p\}) \neq \emptyset$. Si W es un abierto no vacío con $p \notin W$, entonces $W \cap U_p = W$ es no vacío. Entonces U_p es abierto denso, además $\bigcap\{U_p : p \in X\} = \emptyset$, por lo que $n(X) \leq |X|$.■

La prueba del siguiente *Corolario* se sigue directamente del *Teorema de la categoría de Baire 3.46.*

Corolario 3.51 *Si X es compacto o completamente metrizable sin puntos aislados entonces $n(X) \geq \omega_1$* ■

En la literatura posterior al artículo [1] (Balcar, Pelant y Simon), encontramos que a $n(\mathbb{R})$ se le denomina $cov(\mathcal{M})$, como referencia de esto se puede consultar ([4], pág 6, *Definición 2.7*). Además en [3] se pueden consultar resultados de consistencia donde $cov(\mathcal{M})$ puede ser cualquier cardinal entre ω_1 y $\mathfrak{c}$.

J. Mioduszewski preguntó sobre la cardinalidad de $n(\omega^*)$.

Definición 3.52 *En un espacio topológico X, una π-base es una colección $\mathcal{U}$ de abiertos de X tal que para todo $V \subseteq X$ abierto existe $U \in \mathcal{U}$ con $U \subseteq V$. Es conocido que toda base es π-base pero no al revés.*

Ejemplo 3.53 *Sea $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey dada por los abiertos de la forma $[x, x+\epsilon)$. Los conjuntos de la forma $(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n})$ con $q \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, forman una π-base que no es base, pues el mínimo tamaño de una base para $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad no numerable. Ver* [27] *ejemplo 51 p.75.*

Lema 3.54 *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*
a) $\mathcal{A}$ es familia densa, en el sentido de ii) de la Definición 3.20.
b) $\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es π-base en ω^*

Prueba : *a)* $\Rightarrow$ *b)* Como $\mathcal{A}$ es familia densa, para todo $U \subseteq \omega$ existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \subseteq^* U$ entonces $a^* \subseteq U^*$. Así la familia de abiertos $\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es una π-base según la *Definición 3.51.*

b) $\Rightarrow$ *a)* Como $\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es π-base en ω^*, para todo $U \subseteq \omega$ existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^* \subseteq U^*$ entonces $a \subseteq^* U$ por lo que $\mathcal{A}$ es densa. ■

Lema 3.55 *Para $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ casi ajena se cumple lo siguiente:*
a) $\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es familia de abiertos no vacíos, ajenos dos a dos.
b) Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es MAD, entonces $\bigcup\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es abierto denso en ω^*, según la definición 3.45.

Prueba : Para probar a) recordemos que en la *Afirmación 2.2* vimos que $\{a^* : a \subseteq \omega\}$ es base de ω^* y como cada $a \in \mathcal{A}$ es un subconjunto infinito de ω, entonces $\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es una familia de abiertos no vacíos. Ahora si $a, b \in \mathcal{A}$ por definición de $\mathcal{A}$ sabemos que $(a \cap b)$ es finito, entonces $(a \cap b) =^* \emptyset$ y por el *Lema 2.8* $(a \cap b)^* = a^* \cap b^*$ entonces $\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es ajena dos a dos.
Para probar b) tomemos un $a \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ es MAD entonces a es infinito y a^* es un abierto no vacío. Así $\bigcup\{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ es abierto pues la unión de abiertos es un abierto.
Veamos que $(\bigcup\{a^* : a \in \mathcal{A}\})$ es denso. Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío en ω^*. Como las estrellas forman una base, ver *Afirmación 2.2*, existe $c \in [\omega]^\omega$ con $c^* \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{A}$ es MAD existe $b \in \mathcal{A}$ con $(b \cap c)$ infinito entonces $\emptyset \neq (b \cap c)^* \subseteq c^* \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \cap (\bigcup\{a^* : a \in \mathcal{A}\})$ es no vacío. Esto implica que $(\bigcup\{a^* : a \in \mathcal{A}\})$ es denso según la definición 3.45 ■.

Corolario 3.56 *Sea $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ el árbol matriz base como en la definición 3.40. Entonces se cumple lo siguiente.*

a) El conjunto $\{a^* : a \in \mathcal{T}\}$ forma una π-base.
b) Si $\alpha < ht(\mathcal{T})$ entonces $\bigcup\{a^* : a \in \mathcal{T}_\alpha\}$ es un abierto denso.

El siguiente teorema es el *Corolario* 2,10 de [1] .

Teorema 3.57 $\mathfrak{h}_3 \leq n(\omega^*)$.

Prueba : Sea $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < n(\omega^*)\}$ una familia de abiertos densos en el sentido topológico (Definición 3.45) y con intersección vacía. Para $\alpha < n(\omega^*)$, definimos la familia $\mathcal{D}_\alpha = \{A \in [\omega]^\omega : A^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha\}$ y veamos que cumple la siguiente afirmación.

Afirmación 1: Para todo $\alpha < n(\omega^*)$ se cumple que $\mathcal{D}_\alpha$ es abierta densa en $[\omega]^\omega$ como en las nociones conjuntistas de abierto denso *Definición 3.20.*

i) Veamos que $\mathcal{D}_\alpha$ es abierta. Para esto sean $x \in [\omega]^\omega$ y $B \in \mathcal{D}_\alpha$ tal que $x \subseteq^* B$. Recordemos que $x \subseteq^* B$ si y solo si $x^* \subseteq B^*$, ver *Lema 2.8.* Ahora como $B \in \mathcal{D}_\alpha$ entonces $B^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ entonces $x^* \subseteq B^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ así $x^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha$. Entonces $x \in \mathcal{D}_\alpha$. Por lo tanto $\mathcal{D}_\alpha$ es abierta.

ii) Veamos que $\mathcal{D}_\alpha$ es densa. Tomemos un $x \in [\omega]^\omega$. Sabemos que $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < n(\omega^*)\}$ es denso en el sentido topológico *Definición 3.45*, entonces $(\mathcal{U}_\alpha \cap x)$ es no vacío y como $B = \{a^* : a \subseteq \omega\}$ es base para ω^*, ver *Afirmación 2.2* entonces existe $c^* \in B$ tal que $c^* \subseteq (\mathcal{U}_\alpha \cap x) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, por transitividad tenemos que $c^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ entonces $c \in \mathcal{D}_\alpha$ y como $(\mathcal{U}_\alpha \cap x) \subseteq x$ entonces $c^* \subseteq x$. Por lo tanto $\mathcal{D}_\alpha$ es densa. Por *i)* y *ii)* tenemos que $\mathcal{D}_\alpha$ es abierta densa según la *Definición 3.20.*

Por último veamos que $\mathcal{D}_\alpha$ cumple la *Definición 3.21* que corresponde a la definición de $\mathfrak{h}_3$ es decir basta verificar que $\bigcap_{\alpha<n(\omega^*)} \mathcal{D}_\alpha = \emptyset$. Supongamos lo contrario, sea $B \in \bigcap_{\alpha<n(\omega^*)} \mathcal{D}_\alpha$ entonces de la definición de $\mathcal{D}_\alpha$ tenemos que $B^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ para todo $\alpha < n(\omega^*)$. Así tenemos que $\emptyset \neq B^* \subseteq \bigcap_{\alpha<n(\omega^*)} \mathcal{U}_\alpha = \emptyset$. Esto contradice la hipótesis y como $\mathfrak{h}_3$ es el mínimo tamaño de una familia abierta densa con intersección vacía entonces $\mathfrak{h}_3 \leq n(\omega^*)$ como queríamos. ■

De la *Definición 3.34* se sigue que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_3$. Usando el teorema 3.57, se cumple el siguiente *Corolario.*

Corolario 3.58 $\mathfrak{h} \leq n(\omega^*)$.

El siguiente Teorema fue extraído de [1] , *Teorema 3.5*, página 16 y relaciona el número de Novák con $\mathfrak{h}$.

Teorema 3.59 *i) Si* $\mathfrak{h} < \mathfrak{c}$ *entonces* $\mathfrak{h} \leq n(\omega^*) \leq \mathfrak{h}^+$.
ii) Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$ *entonces* $\mathfrak{h} \leq n(\omega^*) \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Prueba : Para probar *i)* será suficiente con probar que $n(\omega^*) \leq \mathfrak{h}^+$ pues la primera desigualdad ya está probada en el *Corolario 3.58* entonces hagamos lo siguiente.
Sea $\mathcal{T}$ un árbol mátriz base de altura $\mathfrak{h}$. Para $a \in \mathcal{T}$, como $\mathfrak{h}^+ \leq \mathfrak{c}$ existe una familia casi ajena $\{a(\beta) : \beta < \mathfrak{h}^+\} \subseteq [a]^\omega$ ver ejemplo 2.55. Para $\beta < \mathfrak{h}^+$ sea $\mathcal{U}_\beta = \bigcup\{a(\gamma)^*$ con $a \in \mathcal{T}, \beta \leq \gamma < \mathfrak{h}^+\}$ se cumple lo siguiente:

(1) $\mathcal{U}_\beta$ es un abierto en ω^*, pues es unión de abiertos básicos.
(2) Para todo $\beta < \mathfrak{h}^+$, $\mathcal{U}_\beta$ es denso en el sentido de la definición 3.45. Sea $b^* \subseteq \omega^*$ un abierto básico. Como $\mathcal{T}$ es denso en el sentido conjuntista existe $a \in \mathcal{T}$ tal que $a \subseteq^* b$ entonces $a^* \subseteq b^*$ y como $a(\beta)^* \subseteq a^*$, entonces $a(\beta)^* \subseteq b^*$. Esto implica que $\mathcal{U}_\beta \cap b^* \neq \emptyset$.
(3) $\bigcap\{\mathcal{U}_\beta : \beta < \mathfrak{h}^+\} = \emptyset$

Para probar (3) sea $p \in \omega^*$. Definimos $A_p = \{\beta < \mathfrak{h}^+ : \exists a \in \mathcal{T} \text{ con } p \in a(\beta)^*\}$. Veamos que $|A_p| \leq \mathfrak{h}$. Dado $\alpha < \mathfrak{h}$ sea $A_{p,\alpha} = \{\beta < \mathfrak{h}^+ : \exists a \in \mathcal{T}_\alpha \text{ con } p \in a(\beta)^*\}$. Notemos que $(A_p = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{h}} A_{p,\alpha})$. Ahora si $\alpha < \mathfrak{h}$ supongamos que $\beta_0, \beta_1 \in A_{p,\alpha}$ entonces existen $a_0, a_1 \in \mathcal{T}_\alpha$ con $p \in a_0(\beta_0)^*$ y $p \in a_1(\beta_1)^*$. Esto implica que $p \in a_0(\beta_0)^* \cap a_1(\beta_1)^* \subseteq a_0^* \cap a_1^*$. Como $a_0, a_1 \in \mathcal{T}_\alpha$ y $\mathcal{T}_\alpha$ es casi ajena entonces $a_0 = a_1$. Entonces $p \in a_0(\beta_0)^* \cap a_0(\beta_1)^*$ y como $\{a_0(\beta) : \beta < \mathfrak{h}^+\}$ es casi ajena entonces $\beta_0 = \beta_1$ lo que implica que $|A_{p,\alpha}| \leq 1$ (puede ser vacío para algunas α). Como $(A_p = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{h}} A_{p,\alpha})$ obtenemos que $|A_p| \leq \mathfrak{h}$ como queríamos.
Sea $\gamma = sup(A_p)$. Como $\mathfrak{h}^+$ es regular y $|A_p| \leq \mathfrak{h}$ entonces $A_p \subseteq \gamma$ y $\gamma < \mathfrak{h}^+$. Sea $\mu \geqslant \gamma + 1$ entonces $\mu \notin A_p$. Entonces si $a \in \mathcal{T}$ tenemos que $p \notin a(\mu)^*$ y por definición de $\mathcal{U}_{\gamma+1}$ se sigue que $p \notin \mathcal{U}_{\gamma+1}$. Esto prueba (3).
Esto ya es suficiente para asegurar que $n(\omega^*) \leq \mathfrak{h}^+$ y completamos la prueba de $i)$

Para probar $ii)$ solo falta verificar que $n(\omega^*) \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Notemos que el *Lema 3.50* implica que $n(\omega^*) \leq |\omega^*|$. Como mencionamos en la *Observación 2.57*, no calcularemos la cardinalidad de ω^* pero es posible consultar [23] donde B. Pospíšil establece que $|\omega^*| = 2^{\mathfrak{c}}$. Entonces $n(\omega^*) \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Esto verifica $ii)$ y completa la prueba del *Teorema 3.59* ■.

El siguiente teorema relaciona una propiedad combinatoria del árbol con el número de Novák.

Teorema 3.60 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*
a) $\mathfrak{h} = n(\omega^*)$
b) Existe un árbol matriz base de ω^* *sin ramas cofinales de altura* $\mathfrak{h}$.

Prueba : $b) \Rightarrow a)$. Sea $\mathcal{T}$ un árbol matriz base de altura $\mathfrak{h}$ para ω^* sin ramas cofinales. Para $\alpha < \mathfrak{h}$ sea $\mathcal{U}_\alpha = \bigcup\{a^* : a \in \mathcal{T}_\alpha\}$ es un abierto denso por *Lema 3.55.* Veamos que $\bigcap_{\alpha<\mathfrak{h}}(\mathcal{U}_\alpha) = \emptyset$. Supongamos lo contrario, existe $p \in \bigcap_{\alpha<\mathfrak{h}}(\mathcal{U}_\alpha)$. Para cada $\alpha < \mathfrak{h}$ existe un único $a(\alpha) \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que $p \in a^*(\alpha)$ pues $p \in \mathcal{U}_\alpha$ y $\mathcal{T}_\alpha$ es casi ajena dos a dos. Pero si $\alpha < \beta < \mathfrak{h}$ entonces $p \in a^*(\alpha) \cap a^*(\beta)$. Entonces $a(\alpha) \cap a(\beta)$ es infinito. Como $\mathcal{T}$ es un árbol entonces $a(\beta) \subseteq^* a(\alpha)$. Por lo tanto $\{a(\alpha) : \alpha < \mathfrak{h}\}$ es una rama cofinal en $\mathcal{T}$, lo cual contradice b).

Veamos que $a) \Rightarrow b)$. Por $a)$ podemos tomar $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ una colección de abiertos densos en el sentido topológico con $(\bigcap_{\alpha<\mathfrak{h}} \mathcal{U}_\alpha = \emptyset)$. Para cada $\alpha < \mathfrak{h}$, sea $\mathcal{D}_\alpha = \{x \in [\omega]^\omega : x \subseteq^* \mathcal{U}_\alpha\}$, la prueba de la siguiente *Afirmación* es análoga a la *Afirmación* hecha en la prueba del *Teorema 3.57*

Afirmación: $\mathcal{D}_\alpha$ es abierta densa.

Entonces $\mathcal{H} = \{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ es una colección de familias abiertas densas. Usando $\mathcal{H}$ hacemos la misma construcción que en el *Teorema 3.41* y obtenemos un árbol matriz base de altura $\mathfrak{h}$. Veamos que no tiene ramas cofinales. Por contradicción supongamos que $\{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ es una rama cofinal, esto implica que si $\alpha < \beta$, $b_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ entonces $b_\beta \subseteq^* b_\alpha$.

Dado $\alpha < \mathfrak{h}$, por *Lema 0.20* sea γ límite y $n \in \omega$ con $\alpha = \gamma + n$. Por el subcaso *ii*) del *Teorema 3.41* tenemos $\mathcal{T}_{\gamma+2n+1} \subseteq \mathcal{D}_{\gamma+n}$. Por lo tanto $b_{\gamma+2n+1} \in \mathcal{D}_\alpha$. Esto implica $(b_{\gamma+2n+1})^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha$. Por lo tanto $\bigcap_{\beta<\mathfrak{h}}(b^*_\beta) \subseteq \bigcap_{\alpha<\mathfrak{h}} \mathcal{U}_\alpha = \emptyset$.

Notemos que la rama $\{b^*_\beta : \beta < \mathfrak{h}\}$ es una familia centrada según la *Definición 2.10*, y como $\{b^*_\beta : \beta < \mathfrak{h}\}$ es una colección de cerrados en ω^* entonces $\bigcap_{\beta<\mathfrak{h}}(b_\beta)^* \neq \emptyset$ por compacidad. Ver [11] 3.1.1, p.123.

Notemos que de manera equivalente la rama $\{b_\beta : \beta < \mathfrak{h}\}$ se puede extender a un ultrafiltro p tal que $p \in \bigcap_{\beta<\mathfrak{h}}(b_\beta)^*$ de la siguiente forma.

Veamos que $\mathcal{F} = \{x \in [\omega]^\omega : b_\beta \subseteq^* x\}$ es un filtro en ω según la *Definición 1.33.*
i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, supongamos que $\emptyset \in \mathcal{F}$ entonces $b_\beta \subseteq^* \emptyset$. Esto contradice la vacuidad de $\emptyset$. Por lo tanto $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
ii) Veamos que $X \in \mathcal{F}$, si $X = \omega$ entonces $b_\beta \subseteq^* \omega$ por lo que $\omega \in \mathcal{F}$.
iii) Tomemos $c, d \in \mathcal{F}$ y veamos que $(c \cap d) \in \mathcal{F}$. Por definición de $\mathcal{F}$ tenemos que $b_\beta \subseteq^* c$ y $b_\gamma \subseteq^* d$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\beta < \gamma$ entonces $b_\gamma \subseteq^* b_\beta$, por transitividad tenemos que $b_\gamma \subseteq^* c$. Ahora por definición de la casi contención tenemos que $(b_\gamma \setminus c)$ y $(b_\gamma \setminus d)$ son finitos entonces $(b_\gamma \setminus c) \cup (b_\gamma \setminus d) = (b_\gamma \setminus (c \cap d))$ es finito. Entonces $b_\gamma \subseteq^* (c \cap d)$ por lo que $(c \cap d) \in \mathcal{F}$.
iv) Sea $s \in [\omega]^\omega$ y $d \in \mathcal{F}$ con $d \subseteq s$ veamos que $s \in \mathcal{F}$. Por definición de $\mathcal{F}$ tenemos que $b_\beta \subseteq^* d$ y como $d \subseteq s$ entonces $b_\beta \subseteq^* s$, por lo que $s \in \mathcal{F}$. Esto prueba que $\mathcal{F}$ es un filtro.

Ahora usando el *Lema 1.39*, tenemos que para $\mathcal{F}$ filtro existe un $p \in \omega^*$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subseteq p$. Para $\beta < \mathfrak{h}$ tenemos que $b_\beta \in \mathcal{F} \subseteq p$ entonces $b_\beta \in p$ entonces $p \in b^*_\beta$ por propiedades de los ultrafiltros (*Definición 1.45 y Afirmación 2.2*). Esto implica que $p \in \bigcap\{b^*_\beta : \beta < \mathfrak{h}\}$, lo cual contradice *a*) y completa la prueba del *Teorema 3.60.*
■

Para finalizar este trabajo queremos mencionar que en la *parte 5.* de [1] se pueden consultar resultados de consistencia en *ZFC* donde los cardinales $\mathfrak{h}$ y $n(\omega^*)$ toman distintos valores. A continuación pondremos una lista de relaciones entre invariantes, que no explicaremos ya que la explicación requiere conocimiento de la técnica de Forcing, herramienta frecuentemente utilizada, para realizar pruebas de consistencia en ZFC, para una introducción a esta herramienta se recomienda [18] .

I. $\mathfrak{h} = \omega_1$.

II. $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$.

III. $\omega_1 < \mathfrak{h} < \mathfrak{c}$.

IV. $\mathfrak{h} < \mathfrak{c}$ y $n(\omega^*) = \mathfrak{h}^+$.

V. $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}^+ < 2^{\mathfrak{c}}$ y $n(\omega^*) = \mathfrak{c}^+$.

VI. $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}^+ < 2^{\mathfrak{c}}$ y $n(\omega^*) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Bibliografía

[1] B. Balcar, J. Pelant and P. Simon. *The space of ultrafilters on N covered by nowhere dense sets.* 1980. Fund Math. 110(1), 11-24.

[2] B. Balcar, R. Frankiewicz and C. Mills. *More on nowhere dense closed P-sets.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Sciences Mathematiques, vol. 28, no. 5-6, pp 295-299. (1980).

[3] T. Bartoszynski and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line* 1st Edition. (1995) ISBN-13: 978-1568810447.

[4] A. Blass. *Combinatorial Cardinal Characteristics of the continuum.* In: Handbook Set theory. Mathew Foreman and Akhiro Kanamori, editors, Springer-Verlag. Berlin. 2010. vol 1, 2230 pp. ISBN-10 1402048432.

[5] J. Brendle, B. Farkas and J. Verner. *Towers in filters, cardinal invariants and Luzin type families.* The Journal of Symbolic Logic. Vol. 83, no. 3, September 2018.

[6] D. Chodousnský and O. Guzmán. *There are no P-points in Silver extensions.* Isr. J. Math. 232, 759-773 (2019).

[7] D. Chodousnský, *On the Katowice Problem.* Thesis. Univerzita Karlova. Praga 2011.

[8] E. K. van Douwen, *The integers and topology.* In: Handbook of set-theoretic topology, 111-167, North-Holland, Amsterdam-New York, 1984.

[9] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc 1966.

[10] L. Edwards. Wimmers, *The Shelah P-point independence theorem.* Israel J. Math, no.1, 28-48. 43(1982) MR 728877.

[11] R. Engelking. *General Topology.* Revised and completed edition. Heldermann Verlag, 1989. Original from the University of Michigan. Digitized, Aug 26. 2011. ISBN, 978388538006-4, 529 pp.

[12] R. Frankiewicz P. Zbierski. *Hausdorff Gaps and Limits.* Elsevier, 2012. ISBN-13: 9780444558541, 314 pp.

[13] J. Halbesein. *Combinatorial set theory.* Springer Monographs in Mathemathics. Springer-Verlag London Limited 2012. ISBN 978-1-4471-2172-5, 453 pp.

[14] F. Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos. Una introducción.* 2da Edición, Sociedad matemática mexicana. 1998, 343 pp.

[15] F. James. *Fundamentals of Real Analysis.* CRC Press. (1991) p. 496. ISBN 0-8247-8453-7.

[16] T. Jech. *Multiple forcing.* Cambridge Tracts in Mathematics, 88. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. viii+136 pp. ISBN: 0-521-26659-9.

[17] A. Kucia and A. Szymański, *Absolute points in $\beta N - N$.* Czech. Math. J.26 (101) (1976), pp. 381-387.

[18] K. Kunen. *Set Theory.* 2011. Revised Edition, 2013. ISBN, 978-1-84890-050-9, 402 pp.

[19] M. Malliaris and S. Shelah *Model-theoretic applications of cofinality spectrum problems.* Isr. J. Math. 220, 947-1014 (2017).

[20] J. E. Marsden and M. J. Hoffman.*Basic Complex Analysis.* 3th Edition Worth Publ Inc; 1999. ISBN-10: 1464152195, 516 pp.

[21] J. Novák, On side points in compact Hausdorff spaces, Proc. Internat. Sympos. in Topology and its Aplications (Budva 1972, Beograd) 1973, p. 184.

[23] B. Pospíšil, *Remark on bicompact spaces.* Ann. of Math.(2) 38 (1937) 845-846.

[24] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* 3th Edition., Mac. Graw-Hill, Inc. 1987 ISBN 0-07-100276-6, 416 pp.

[25] J.Schilhan, *Towers and pseudointersections.* Master's thesis. University of Vienna. 2018.

[26] S. Shelah, *Proper and Improper forcing*, second ed. Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[27] L. A. Steen and J. A. Seebach, *Counterexamples in topology*. Dover Publications INC. New york. (1995) ISBN-13: 978-0-486-68735-3.