



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN PARA VERSIONES DIGITALES DE
TESELACIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
DIEGO FAJARDOROJAS

DIRECTORA
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN: FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE DE 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice General

Introducción	III
1. Espacios de Alexandroff	3
1.1. Espacios de Alexandroff	3
1.2. Gráfica de Conexidad	7
2. Teorema Digital de la Curva de Jordan	17
2.1. El Plano Digital	17
2.2. Teselaciones del Plano	23
2.2.1. Topología Digital en una Teselación	27
2.3. Teorema Digital de la Curva de Jordan	34

Introducción

Uno de los teoremas más célebres en el campo de la topología es el teorema de la curva de Jordan, que establece que una curva simple y cerrada divide al plano real en dos componentes conexas, una de estas componentes es acotada mientras que la otra no lo es. Este teorema fue demostrado en 1887 por Camille Jordan en el tercer tomo de su libro *Cours d'analyse* [6]. El teorema principal que nos incumbe en esta tesis es un teorema en el campo de la topología digital que proporciona una conclusión análoga a la que proporciona el teorema de la curva de Jordan.

El objeto de estudio de la topología digital son las propiedades topológicas de subconjuntos de retículas de puntos en algún espacio euclidiano, ya sea la recta, el plano o un espacio de dimensión mayor. En otras palabras, la topología digital estudia propiedades de los subconjuntos de retículas de puntos que sean análogas a las propiedades topológicas de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Proveer a una retícula de puntos de \mathbb{R}^n de la topología que hereda como subespacio no es interesante si esta topología es la topología discreta, así que usualmente se dota a estos espacios de una topología distinta que capture propiedades como cercanía entre dos puntos de la retícula y conexidad en el espacio. En [11] Kong presenta una monografía que recopila los primeros conceptos y resultados desarrollados en este campo.

En el transcurso de la década de los setentas, Azriel Rosenfeld publicó una serie de artículos [18, 19, 20, 21, 22, 23] en los cuales estudia propiedades de conexidad del conjunto \mathbb{Z}^2 , que a su vez le permiten presentar resultados relativos al procesamiento de imágenes digitales, pensando a cada elemento de \mathbb{Z}^2 como un pixel. Para poder hablar de conexidad, Rosenfeld define dos relaciones de adyacencia en \mathbb{Z}^2 : para $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ los cuatro puntos de la forma $(n, m \pm 1)$ y $(n \pm 1, m)$ son *4-adyacentes* a (n, m) ; mientras que los

cuatro puntos de la forma $(n \pm 1, m \pm 1)$ así como los puntos 4 -adyacentes son 8 -adyacentes a (n, m) . Para $k = 4$ o $k = 8$, un k -camino es una secuencia finita de puntos x_0, \dots, x_n de \mathbb{Z}^2 tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, x_{i-1} es k -adyacente a x_i . Un subconjunto S de \mathbb{Z}^2 es k -conexo si para cualesquiera dos elementos de S existe un k -camino entre ellos. Una k -componente de un subconjunto S de \mathbb{Z}^2 es un subconjunto k -conexo de S que no está contenido propiamente en ningún otro con esta propiedad.

Rosenfeld fue el primero en acuñar el término topología digital en su artículo de 1973 titulado *Arcs and curves in digital pictures* [19]. En este artículo propone una topología en \mathbb{Z}^2 para la cual la noción topológica de conexidad coincide con su concepto de 4 -conexidad. En este mismo artículo Rosenfeld define el concepto de 4 -camino cerrado simple, que es un 4 -camino x_0, \dots, x_n tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$, x_i tiene exactamente dos puntos 4 -adyacentes a él en el camino. Con base en esta definición, Rosenfeld demuestra un teorema digital análogo al teorema de la curva de Jordan, que enunciamos a continuación.

Teorema. *Sea $J \subset \mathbb{Z}^2$ un 4 -camino cerrado simple con al menos cinco puntos. Entonces $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene exactamente dos 8 -componentes.*

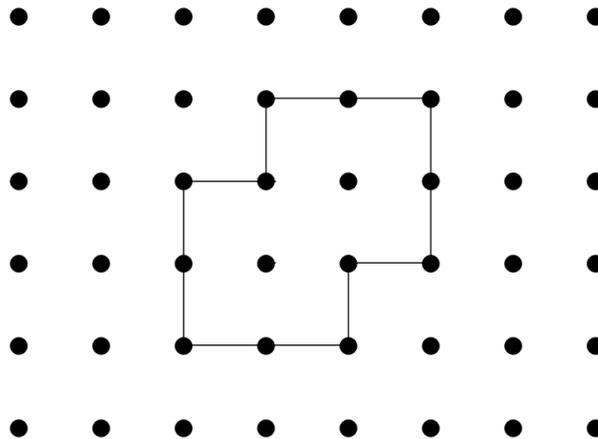


Figura 1: Representación de un 4 -camino cerrado simple en \mathbb{Z}^2 .

Notemos que el teorema anterior no es válido si consideramos un 4-camino cerrado simple con exactamente 4 puntos. Para demostrar su teorema Rosenfeld no hace uso del teorema de la curva de Jordan, ni de alguna otra herramienta topológica, sino de argumentos discretos como es usual en la teoría de gráficas.

En la misma década, Efim Khalimsky desarrolló un enfoque distinto para estudiar propiedades topológicas de los conjuntos \mathbb{Z} y \mathbb{Z}^2 [7, 8], dotándolos de topologías que capturan las propiedades de cercanía entre sus elementos. Estas topologías son las de la recta digital (1.1.1) y el plano digital (2.1.1), respectivamente. Dentro de esta teoría Khalimsky demostró un teorema en el plano digital análogo al teorema de la curva de Jordan (2.1.1). Posteriormente Kong, Kopperman y Meyer [12] probaron que el teorema de Rosenfeld mencionado anteriormente puede ser demostrado a partir del teorema de Khalimsky. En contraste con Rosenfeld, la conexidad en la teoría de Khalimsky es la conexidad topológica usual.

Una manera de definir la topología del plano digital es mediante una relación de equivalencia en \mathbb{R}^2 inducida por una teselación del plano en cuadrados del mismo tamaño (2.2.1), identificando los puntos pertenecientes a una misma arista o a una misma cara de la teselación. Esta forma de construir al plano digital nos motiva a pensar si es posible inducir una topología a partir de cualquier teselación con propiedades análogas a las del plano digital, y si existirá una generalización en este espacio topológico del teorema de la curva de Jordan para el plano digital.

En [5] Grünbaum y Shephard muestran diversos ejemplos de teselaciones del plano, sin embargo en este trabajo nos enfocaremos en una clase particular de teselaciones para las cuales podremos generalizar el teorema de Khalimsky. Esta clase de teselaciones ya ha sido estudiada bajo una perspectiva distinta a la nuestra, por ejemplo, por Renault en [17].

No somos los primeros en preguntarnos si existe un análogo digital del teorema de la curva de Jordan para una retícula de puntos que no estén configurados en una cuadrícula como en el plano digital, de hecho el caso en el que los puntos están configurados en una retícula hexagonal ha sido estudiado por más de un autor. Por ejemplo, en [14] Kopperman da una prueba detallada de un teorema similar al de Rosenfeld en una retícula hexagonal; mientras que en [13] Kong y Roscoe desarrollan una teoría sobre relaciones de adyacencia en \mathbb{Z}^2 y \mathbb{Z}^3 y mencionan que esta misma teoría puede ser

modificada fácilmente para probar un teorema de este tipo en una retícula hexagonal.

Finalmente queremos mencionar el trabajo de Víctor Neumann-Lara y Richard Wilson, quienes en su artículo de 1992, *Digital Jordan curves — a graph-theoretical approach to a topological theorem* [16], demuestran un teorema análogo al teorema de la curva Jordan en el contexto de teoría de gráficas (2.3.3). Este teorema no solo generaliza al teorema de la curva de Jordan para la retícula hexagonal de puntos sino que además, mediante la herramienta de la gráfica de conexidad de un espacio topológico (1.2.3), también tiene como consecuencia el teorema de la curva de Jordan para el plano digital de Khalimsky.

Es precisamente el teorema de Neumann-Lara y Wilson en el que nos apoyamos para presentar nuestra generalización del teorema de Khalimsky. Con el fin de presentar esta generalización definimos versiones digitales de teselaciones del plano que cumplen ciertas condiciones y verificamos que sus gráficas de conexidad cumplan las hipótesis del teorema de Neumann-Lara y Wilson, para poder concluir el teorema en la versión digital de las teselaciones.

Estructura de la Tesis

El objetivo principal de esta tesis es demostrar la generalización del teorema de la curva de Jordan para el plano digital a la cual acabamos de dar prelude. Una de las herramientas principales para poder lograrlo es el concepto de gráfica de conexidad de un espacio topológico (1.2.3). En cierta clase de espacios topológicos la gráfica de conexidad captura completamente la conexidad del espacio subyacente, estos son los espacios de Alexandroff. Por esta razón, el Capítulo 1 está dedicado al estudio de estos espacios: en la Sección 1.1 mostramos algunas de sus propiedades topológicas básicas, mientras que en la Sección 1.2 exponemos a detalle la correspondencia entre la conexidad topológica en un espacio Alexandroff y su gráfica de conexidad, que es de suma importancia para desarrollar el material de la Subsección 2.2.1 y de la Sección 2.3.

El Capítulo 2 contiene todo el material referente a teoremas digitales de la curva de Jordan. En la Sección 2.1 mostramos las características básicas del plano digital y hacemos un recorrido por distintas maneras de entender y

construir su topología, en particular entendemos al plano digital como un espacio cociente del plano real inducido por una teselación. Terminamos esta sección enunciando el teorema de la curva de Jordan para el plano digital de Khalimsky (2.1.1). En la Sección 2.2 definimos el concepto de teselación en el plano real y delimitamos la clase de las teselaciones con las cuales vamos a trabajar; además estudiamos las relaciones que existen entre los vértices, aristas y caras de esta clase de teselaciones. En la Subsección 2.2.1 introducimos el concepto de versión digital de una teselación y estudiamos sus propiedades topológicas. Finalmente, en la Sección 2.3 presentamos nuestro teorema digital de la curva de Jordan para versiones digitales de teselaciones.

Nota Preliminar

En esta breve sección introduciremos definiciones y cuestiones de notación que utilizaremos a través del texto.

Si X es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X .

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X , denotaremos por el símbolo \overline{A} a la cerradura de A en X y por el símbolo $\text{Int } A$ al interior de A en X .

Trabajaremos con \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 dotados de la norma euclidiana. Utilizaremos el símbolo \mathbb{S}^1 para denotar a la esfera unitaria de dimensión 1 y el símbolo \mathbb{B}^2 para denotar al disco cerrado unitario, es decir:

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

$$\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Utilizaremos el símbolo \mathbb{Z}^2 para denotar al plano digital (2.1.1), sin necesidad de mencionar explícitamente su topología cada vez que lo invoquemos.

Si G es una gráfica, entonces denotaremos por V_G y E_G a su conjunto de vértices y aristas, respectivamente.

Omitiremos las definiciones de conceptos de topología básicos, todos los conceptos de topología omitidos pueden ser consultados en [4]. También omitiremos las definiciones de conceptos elementales de teoría de gráficas, los cuales pueden ser consultados en [2].

El resto de la notación será introducida a lo largo del texto.

Capítulo 1

Espacios de Alexandroff

En este capítulo definiremos el concepto de espacio de Alexandroff y estudiaremos algunas de sus propiedades topológicas. Para estudiar su conexidad introduciremos el concepto de gráfica de conexidad de un espacio topológico y mostraremos su relevancia en este tipo de espacios. El material presentado en este capítulo está basado en [1], [9], [14] y [15].

1.1. Espacios de Alexandroff

Un **espacio de Alexandroff** es un espacio topológico X en el cual todo punto x tiene una vecindad más pequeña, que denotaremos por $N(x)$. Una consecuencia inmediata de esta definición es que para todo $x \in X$, $N(x)$ es abierta, de donde podemos concluir que en los espacios de Alexandroff la intersección arbitraria de subconjuntos abiertos es abierta. A su vez, este hecho es una caracterización de los espacios de Alexandroff, como resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- a) X es un espacio de Alexandroff.
- b) La intersección arbitraria de subconjuntos abiertos de X es abierta.
- c) La unión arbitraria de subconjuntos cerrados de X es cerrada.

Demostración. $a) \implies b)$. Sean X un espacio de Alexandroff, $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una colección arbitraria de subconjuntos abiertos de X y $x \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i$. Como X es un espacio de Alexandroff x tiene una vecindad más pequeña $N(x)$, que es abierta. Para todo $i \in \mathcal{I}$, $x \in U_i$, así que $N(x) \subset U_i$. De esta manera, $x \in N(x) \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i$, y concluimos que $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i$ es abierta.

$b) \implies c)$. Sean X un espacio topológico en el cual la intersección arbitraria de subconjuntos abiertos de X es abierta y $\{F_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una colección arbitraria de subconjuntos cerrados de X . Entonces $\{X \setminus F_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X , así que por hipótesis $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} (X \setminus F_i)$ es abierta. Por lo tanto

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} (X \setminus F_i) \right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} F_i$$

es cerrada.

$c) \implies b)$. Sean X un espacio topológico en el cual la unión arbitraria de subconjuntos cerrados de X es cerrada y $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una colección arbitraria de subconjuntos abiertos de X . Entonces $\{X \setminus U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una colección de subconjuntos cerrados de X , así que por hipótesis $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (X \setminus U_i)$ es cerrada. Por lo tanto

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (X \setminus U_i) \right) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i$$

es abierta.

$c) \implies a)$. Sean (X, τ) un espacio topológico en el cual la unión arbitraria de subconjuntos cerrados de X es cerrada y $x \in X$. Por la implicación $c) \implies b)$ X es un espacio en el cual la intersección arbitraria de subconjuntos abiertos de X es abierta. Entonces podemos definir a la vecindad más pequeña de x como

$$N(x) := \bigcap_{\substack{x \in U \\ U \in \tau}} U.$$

Por construcción, para toda vecindad V de x se cumple que $N(x) \subset V$. Además, al ser intersección de abiertos, $N(x)$ es abierta y por lo tanto es una vecindad de x . De esta manera, X es un espacio de Alexandroff. \square

Notemos que del inciso $c)$ de la proposición anterior podemos deducir que la

cerradura de un subconjunto A de X es precisamente la unión de las cerraduras de los elementos de A . También podemos observar que un punto x está en el interior de A si y sólo si $N(x)$ está contenida en A . Por lo tanto, podemos concluir que una topología de Alexandroff está completamente determinada si para todos los puntos x de X conocemos $N(x)$, o si para todos los puntos conocemos $\overline{\{x\}}$. De esta manera, si conocemos la topología de subespacio inducida en cualesquiera dos puntos de un espacio de Alexandroff, entonces la topología queda completamente determinada. En la siguiente figura mostramos las cuatro posibles topologías del conjunto $\{x, y\}$, indicando con un círculo cuando $N(x) = \{x\}$ o $N(y) = \{y\}$.

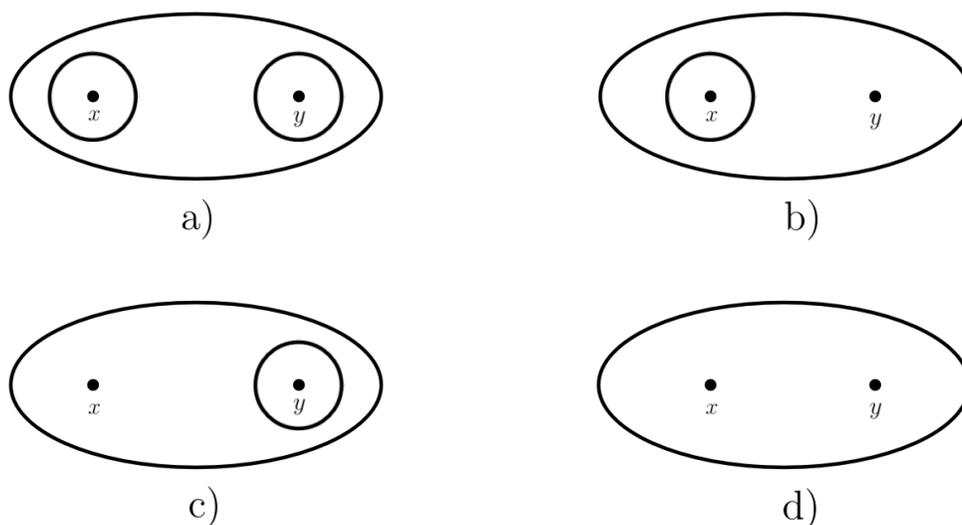


Figura 1.1: Posibles topologías en el conjunto $\{x, y\}$.

La topología en el inciso a) es la topología discreta mientras que la del inciso d) es la topología indiscreta. Los espacios de los incisos b) y c) son homeomorfos y su topología se conoce como la **topología de Sierpinski**. De la figura anterior podemos deducir que si X es un espacio topológico T_0 , entonces $\{x, y\}$ es conexo si y sólo si $\{x, y\}$ tiene la topología de Sierpinski.

De la definición se puede deducir de inmediato que cualquier subespacio de un espacio de Alexandroff es un espacio de Alexandroff. También es cierto que el producto de dos espacios de Alexandroff X y Y sigue siendo un espacio de

Alexandroff, lo cual se puede verificar notando que para cada $(x, y) \in X \times Y$ su vecindad más pequeña en $X \times Y$ es $N(x) \times N(y)$, donde $N(x)$ y $N(y)$ son las vecindades más pequeñas de x y y en X y Y , respectivamente.

Un primer ejemplo de un espacio de Alexandroff es cualquier espacio topológico de cardinalidad finita. En el transcurso del texto seguiremos trabajando con espacios de Alexandroff, siendo la recta digital nuestro primer ejemplo relevante.

Ejemplo 1.1.1. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$N(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces $\mathcal{B} = \{N(n) | n \in \mathbb{Z}\}$ es la base de una única topología τ_d en \mathbb{Z} . Al espacio (\mathbb{Z}, τ_d) , que denotaremos solamente por \mathbb{Z} , se le conoce como la **recta digital** (o **recta de Khalimsky**), y las vecindades más pequeñas de los puntos se ven como en la siguiente figura.

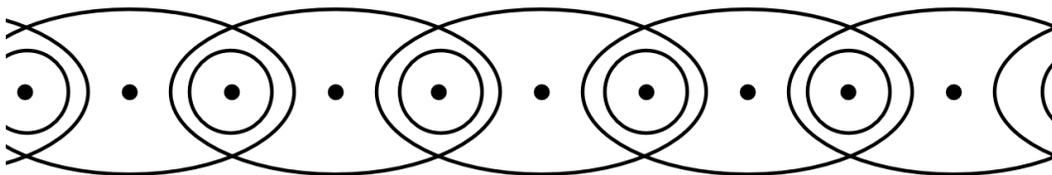


Figura 1.2: Vecindades más pequeñas de los puntos en la recta digital.

La recta digital es un espacio conexo y, a diferencia de la topología discreta en \mathbb{Z} , codifica la cercanía del antecesor y sucesor de cada entero, así que podemos pensar a ésta como un análogo digital de la recta real.

1.2. Gráfica de Conexidad

Consideremos X un espacio topológico. Una manera de estudiar la conexidad de X es a través de su gráfica de conexidad, que codifica la conexidad de $\{x, y\}$ con la topología de subespacio heredada de X . Antes de introducir tal definición, para cada punto $x \in X$ definimos su **conjunto de adyacencia** $\mathcal{A}(x)$ como sigue:

$$\mathcal{A}(x) = \{y \in X \mid x \neq y, \{x, y\} \text{ es conexo}\}.$$

Si $y \in \mathcal{A}(x)$ diremos que y es adyacente a x . Es claro que si y es adyacente a x entonces x es adyacente a y . Esto puede parecer una obviedad pero es importante mencionarlo antes de proporcionar la definición de gráfica de conexidad.

Observación 1.2.1. Sean X es un espacio de Alexandroff y $x, y \in X$ dos puntos cualesquiera. Entonces $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $y \in N(x)$.

Demostración. Recordemos que $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si para toda vecindad U de x , se cumple que $U \cap \{y\} \neq \emptyset$, es decir, si y sólo si para toda vecindad U de x se cumple que $y \in U$. Esto último es cierto si y sólo si $y \in N(x)$, pues $N(x)$ es la vecindad más pequeña que contiene a x . \square

Como podemos apreciar en la Figura 1.1, el conjunto $\{x, y\}$ es conexo si y sólo si $x \in \overline{\{y\}}$ o $y \in \overline{\{x\}}$, que por la observación anterior es equivalente a que y sea un elemento de $(N(x) \cup \overline{\{x\}})$. Resumimos el razonamiento anterior en la siguiente observación.

Observación 1.2.2. En un espacio de Alexandroff se cumple que

$$\mathcal{A}(x) = (N(x) \cup \overline{\{x\}}) \setminus \{x\}.$$

Vale la pena mencionar que los conceptos que estamos definiendo en esta sección sólo son de interés en espacios topológicos que no sean T_1 , pues si X fuera un espacio T_1 el conjunto $\{x, y\}$ sería desconexo.

Definición 1.2.3. Sea X un espacio topológico. La gráfica de conexidad G de X es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a los elementos de X y tal que existe una arista que une a los vértices x y y si y sólo si $y \in \mathcal{A}(x)$.

Por ejemplo, la gráfica de conexidad de un espacio topológico finito con n elementos, dotado de la topología discreta, es la gráfica con n vértices sin ninguna arista; mientras que la gráfica de conexidad de un espacio topológico finito con n elementos, dotado de la topología indiscreta, es la gráfica completa con n vértices.

Si consideramos a la recta digital, podemos observar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}(n) = \{n-1, n+1\}$, de donde podemos deducir que la gráfica de conexidad de la recta digital es un árbol donde cada vértice tiene exactamente dos vértices adyacentes, como ilustra la siguiente figura.



Figura 1.3: Gráfica de conexidad de la recta digital.

El siguiente concepto nos ayudará a entender mejor la relación entre un espacio y su gráfica de conexidad. Para cualesquiera x, y elementos de un espacio topológico X definimos la siguiente relación:

$$x \preceq y \text{ si } x \in \overline{\{y\}}.$$

Esta relación se conoce como el **orden de especialización** en X . A pesar de su nombre, el orden de especialización sólo es una relación reflexiva y transitiva.

Observación 1.2.4. *Sea X un espacio topológico. Entonces el orden de especialización en X es un orden parcial si y sólo si X es T_0 .*

Demostración. El orden de especialización es una relación reflexiva y transitiva, así que basta demostrar que el orden de especialización es una relación antisimétrica si y sólo si X es T_0 .

Procediendo por contrapositiva supongamos que X no es un espacio T_0 . Entonces existen dos elementos de X distintos, x y y , tales que x es un elemento de cualquier vecindad de y y y es un elemento de cualquier vecindad de x . Equivalentemente, x y y son dos elementos distintos tales que $x \in \overline{\{y\}}$ y

$y \in \overline{\{x\}}$, o dicho de otra manera, tales que $x \preceq y$ y $y \preceq x$. Por lo tanto el orden de especialización en X no es una relación antisimétrica.

Por otra parte, supongamos que X es T_0 y consideremos dos elementos x, y de X tales que $x \preceq y$ y $y \preceq x$, es decir, tales que $x \in \overline{\{y\}}$ y $y \in \overline{\{x\}}$. Si $x \neq y$, como el espacio es T_0 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe una vecindad U de x tal que $y \notin U$. Esto último contradiría que $x \in \overline{\{y\}}$ así que podemos concluir que $x = y$ y que el orden de especialización es una relación antisimétrica. \square

La topología de un espacio de Alexandroff queda completamente determinada por su orden de especialización, como mostramos en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.2.5. *Sean X un espacio de Alexandroff y A un subconjunto de X . Entonces A es abierto si y sólo si $A = \{y \in X \mid \exists x \in A, x \preceq y\}$.*

Demostración. Supongamos que A es abierto. La contención $A \subset \{y \in X \mid \exists x \in A, x \preceq y\}$ es inmediata por la reflexividad del orden de especialización. Por otro lado, si $y \in X$ es tal que existe $x \in A$ con $x \preceq y$, entonces tenemos que $x \in \overline{\{y\}}$. Por la Observación 1.2.1 esta contención implica que $y \in N(x)$. Como A es abierto se cumple que $N(x) \subset A$. Así, podemos concluir que $y \in A$ y por lo tanto $A = \{y \in X \mid \exists x \in A, x \preceq y\}$.

Por otra parte, supongamos que $A = \{y \in X \mid \exists x \in A, x \preceq y\}$. Si suponemos además que A no es abierto, entonces existe $a \in A$ tal que $N(a) \not\subset A$, de donde deducimos que existe un $b \in X$ tal que $b \in N(a) \setminus A$. Pero $b \in N(a)$ implica que $a \in \overline{\{b\}}$, es decir, que $a \preceq b$; lo cual contradice nuestra suposición inicial $A = \{y \in X \mid \exists x \in A, x \preceq y\}$. \square

Proposición 1.2.6. *Sean X un espacio de Alexandroff y A un subconjunto de X . Entonces A es cerrado si y sólo si $A = \{y \in X \mid \exists x \in A, y \preceq x\}$.*

Demostración. Recordemos que en un espacio de Alexandroff A es cerrado si y sólo si A es la unión de la cerradura de todos sus puntos. Entonces la proposición queda demostrada por las siguientes igualdades:

$$\{y \in X \mid \exists x \in A, y \preceq x\} = \{y \in X \mid \exists x \in A, y \in \overline{\{x\}}\} = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}. \quad \square$$

Las igualdades mostradas en la prueba anterior nos permiten caracterizar a la cerradura de un subconjunto arbitrario A de un espacio de Alexandroff en términos del orden de especialización.

Observación 1.2.7. Sean X un espacio de Alexandroff y A un subconjunto de X . Entonces

$$\overline{A} = \{y \in X \mid \exists x \in A, y \preceq x\}.$$

En un espacio topológico X , definimos una **trayectoria digital** de x a y como una secuencia de elementos (x_0, x_1, \dots, x_n) de X tales que $x = x_0$, $y = x_n$ y para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ se tiene que x_i y x_{i+1} son adyacentes (es decir, $\{x_i, x_{i+1}\}$ es conexo y $x_i \neq x_{i+1}$). Diremos que X es **digitalmente conexo por trayectorias** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe una trayectoria digital de x a y .

Antes de proporcionar una caracterización de las trayectorias digitales, probaremos el siguiente lema que caracteriza a dos puntos adyacentes en un espacio topológico.

Lema 1.2.8. Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$ dos puntos adyacentes. Entonces existe una función $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{x, y\}$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(2) = y$, considerando a $\{0, 1, 2\}$ con la topología de subespacio heredada por la recta digital.

Demostración. El espacio $\{x, y\}$ es finito, así que es un espacio de Alexandroff. Como x, y son adyacentes $y \in N(x)$ o $x \in N(y)$; supongamos primero que $y \in N(x)$. Entonces definimos $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{x, y\}$ como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0, \\ y & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

La topología de subespacio de $\{0, 1, 2\}$ es $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$; como $y \in N(x)$, las únicas posibles topologías en $\{x, y\}$ son $\{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}$ y $\{\emptyset, \{x, y\}\}$, hecho del cual la continuidad de f se deduce inmediatamente.

Por otra parte, si suponemos que $y \notin N(x)$, se sigue que $x \in N(y)$. En este

caso, definimos $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{x, y\}$ como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} x & \text{si } n \neq 2, \\ y & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Como $x \in N(y)$, las únicas posibles topologías en $\{x, y\}$ son $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$ y $\{\emptyset, \{x, y\}\}$. Como en el caso anterior, la continuidad de f se deduce de inmediato. \square

Proposición 1.2.9. *Si (x_0, x_1, \dots, x_n) es una trayectoria digital en el espacio topológico X entonces existen un intervalo finito I de la recta digital y una función $f : I \rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ continua y suprayectiva.*

Demostración. Sea $I = \{0, 1, \dots, 2n\}$. Por el Lema 1.2.8, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe una función continua $\phi_i : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{x_{i-1}, x_i\}$ tal que $\phi_i(0) = x_{i-1}$ y $\phi_i(2) = x_i$. Observemos que las traslaciones pares en \mathbb{Z} son homeomorfismos, es decir, para cada $m \in \mathbb{Z}$ se cumple que $T_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida para cada $q \in \mathbb{Z}$ como $T_m(q) = q + 2m$, es un homeomorfismo.

Consideremos la colección $\mathcal{C} := \{\{2i - 2, 2i - 1, 2i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$, ésta es una colección localmente finita de subconjuntos cerrados de \mathbb{Z} , que además cumple que $\bigcup \mathcal{C} = I$. Procederemos a definir la función deseada: para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos $f_i : \{2i - 2, 2i - 1, 2i\} \rightarrow \{x_{i-1}, x_i\}$ con regla de correspondencia $f_i = \phi_i \circ T_{-(i-1)}$; f_i es continua al ser composición de funciones continuas. Finalmente definimos $f : I \rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de la siguiente manera

$$f(m) = \begin{cases} f_1(m) & \text{si } m \in \{0, 1, 2\}, \\ f_2(m) & \text{si } m \in \{2, 3, 4\}, \\ \vdots & \\ f_n(m) & \text{si } m \in \{2n - 2, 2n - 1, 2n\}. \end{cases}$$

Veamos que f está bien definida pues si $m = 2i$ para algún $i \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $f_i(m) = f_{i+1}(m) = x_i$, más aún, como \mathcal{C} es una colección localmente finita de cerrados y f restringida a $\{2i - 2, 2i - 1, 2i\}$ es precisamente f_i , el lema del pegado nos garantiza la continuidad de f . Para terminar podemos

verificar la suprayectividad de f directamente de su definición. Por lo tanto podemos concluir que f cumple las propiedades deseadas. \square

También podemos observar que si $I = \{n, n + 1, \dots, n + m\}$ es un intervalo finito de la recta digital y $f : I \rightarrow X$ es una función continua que cumple que para todo $i \in \{0, \dots, m - 1\}$, $f(n + i) \neq f(n + i + 1)$, entonces $(f(n), f(n + 1), \dots, f(n + m))$ es una trayectoria digital en X . De esta manera podemos pensar en las trayectorias digitales como la imagen de un intervalo finito de la recta digital bajo una función continua. Este hecho nos proporciona una analogía más entre la recta real y la recta digital.

Proposición 1.2.10. *Un espacio de Alexandroff es conexo si y sólo si es digitalmente conexo por trayectorias. Además sus componentes conexas son sus componentes conexas por trayectorias digitales. Más aún, sus componentes conexas son abiertas y cerradas.*

Demostración. Sea X un espacio de Alexandroff digitalmente conexo por trayectorias, y supongamos que X no es conexo. Entonces existe $S \subset X$ tal que S es abierto, cerrado y existen $x \in S$ y $y \in X \setminus S$. Por la conexidad digital por trayectorias existe una trayectoria digital (x_0, x_1, \dots, x_n) de x a y . Sea i el último índice tal que $x_i \in S$, como (x_0, x_1, \dots, x_n) es una trayectoria, $\{x_i, x_{i+1}\}$ es conexo; pero $x_i \in S$ y $x_{i+1} \in X \setminus S$, y tanto S como $X \setminus S$ son abiertos y cerrados, de donde concluimos que $\{x_i, x_{i+1}\}$ es desconexo, lo cual es una contradicción.

Sean Y un espacio de Alexandroff conexo y $x \in Y$ un punto arbitrario. Consideremos

$$C_x = \{z \in Y \mid \text{existe una trayectoria digital entre } x \text{ y } z\}$$

la componente conexa por trayectorias digitales de x . Para mostrar que Y es digitalmente conexo por trayectorias, basta demostrar que C_x es abierto y cerrado. Veamos que C_x es abierto: sea $y \in Y$ cualquier punto para el cual existe $z \in C_x$ con la propiedad de que $z \preceq y$. Entonces $z \in \overline{\{y\}} \subset \mathcal{A}(y)$, es decir, $\{z, y\}$ es conexo, y si (x_0, x_1, \dots, x_n) es una trayectoria de x a z entonces $(x_0, x_1, \dots, x_n, y)$ es una trayectoria de x a y . La Proposición 1.2.5 nos permite concluir que C_x es abierto. De manera análoga, la Proposición 1.2.6 nos permite concluir que C_x es cerrado.

Como cualquier subespacio de un espacio de Alexandroff es también un espacio de Alexandroff, concluimos que las componentes conexas de un espacio de Alexandroff son sus componentes conexas por trayectorias digitales. Por lo anterior, podemos notar que si C es una componente conexa de un espacio de Alexandroff y $x \in C$, entonces para todo $z \in C$ existe una trayectoria de x a z , de manera que $C = C_x$, que por el desarrollo del párrafo anterior sabemos que es abierta y cerrada. \square

Observemos que para cualesquiera dos puntos x, y de un espacio topológico X , x es adyacente a y si y sólo si x y y son adyacentes en su gráfica de conexidad G . Recordemos que, en teoría de gráficas, un **camino** es una secuencia de vértices tales que existe una arista entre cualesquiera dos vértices consecutivos. Entonces podemos observar que existe una trayectoria digital de x a y en X si y sólo si existe un camino de x a y en G . El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de este hecho y de la Proposición 1.2.10.

Corolario 1.2.11. *Sea X un espacio de Alexandroff. Entonces X es conexo si y sólo si su gráfica de conexidad G es conexa.*

Para terminar esta sección proporcionaremos una última definición necesaria para entender el material del siguiente capítulo. Diremos que una trayectoria digital (x_0, \dots, x_n) en un espacio topológico X es un **arco digital** si $n = 1$ o si existe un homeomorfismo de un intervalo finito I de la recta digital en $\{x_0, \dots, x_n\}$. Tal homeomorfismo nos garantiza que en un arco digital, para cualesquiera i, j índices distintos se cumple que $x_i \neq x_j$. Más aún, como en la recta digital para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $|\mathcal{A}(n)| = 2$, entonces tenemos que para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$, $\mathcal{A}(x_i) \cap \{x_0, \dots, x_n\} = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$, mientras que $\mathcal{A}(x_0) \cap \{x_0, \dots, x_n\} = \{x_1\}$ y $\mathcal{A}(x_n) \cap \{x_0, \dots, x_n\} = \{x_{n-1}\}$. Si para cualesquiera x, y elementos de un espacio topológico X existe un arco digital de x a y diremos que X es **digitalmente arco conexo**.

Proposición 1.2.12. *Un espacio de Alexandroff es digitalmente arco conexo si y sólo si es digitalmente conexo por trayectorias.*

Demostración. Como todo arco digital es una trayectoria, todo espacio digitalmente arco conexo es digitalmente conexo por trayectorias. Veamos que la otra implicación también es cierta.

Sean X un espacio de Alexandroff digitalmente conexo por trayectorias, $x, y \in X$ y (x_0, \dots, x_n) una trayectoria de longitud mínima entre estos dos puntos. Afirmamos que (x_0, \dots, x_n) es un arco digital. Si $n = 1$ tenemos el resultado de inmediato. En lo subsecuente trabajaremos con la topología de subespacio inducida en la trayectoria y supondremos que $n \geq 2$. En particular $N(x)$ denotará la vecindad más pequeña de x en la trayectoria.

Supongamos que tenemos índices $i > j$ tales que $\{x_i, x_j\}$ es conexo. Si $i > j + 1$, entonces $(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es una trayectoria entre x y y de menor longitud que (x_0, \dots, x_n) , lo cual contradice la minimalidad de (x_0, \dots, x_n) . Por lo tanto, si $i > j$ y $\{x_i, x_j\}$ es conexo, entonces $i = j + 1$. Esto nos dice que para cada punto de la trayectoria, los únicos puntos en su conjunto de adyacencia son aquellos cuyo índice está a distancia 1 del índice de tal punto.

Veamos que además la topología de la trayectoria es T_0 . Si no lo fuera, existirían $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i > j$ tales que $x_i \in N(x_j)$ y $x_j \in N(x_i)$, lo cual implica que $N(x_i) = N(x_j)$. Entonces tendríamos que x_i y x_j son adyacentes y por lo tanto $i = j + 1$. Más aún, como x_{j+1} es adyacente a x_{j+2} (o en su defecto, x_j es adyacente a x_{j-1}), tenemos que $x_{j+2} \in N(x_{j+1})$ o $x_{j+1} \in N(x_{j+2})$. Si $x_{j+2} \in N(x_{j+1})$, como $N(x_j) = N(x_{j+1})$ tendríamos que x_j y x_{j+2} son adyacentes, lo cual es una contradicción. Por otra parte, si $x_{j+1} \in N(x_{j+2})$, se seguiría que $N(x_j) = N(x_{j+1}) \subset N(x_{j+2})$, llegando de nuevo a la contradicción derivada de que x_j y x_{j+2} sean adyacentes.

Una consecuencia del desarrollo del párrafo anterior es que $N(x_0) = \{x_0\}$ o $N(x_0) = \{x_0, x_1\}$. Supongamos que $N(x_0) = \{x_0\}$. Afirmamos que el homeomorfismo buscado es $f : \{1, 2, \dots, n + 1\} \rightarrow \{x_0, \dots, x_n\}$ con regla de correspondencia $f(i) = x_{i-1}$. En efecto, f es inyectiva ya que todos los puntos de la trayectoria son distintos. También es claro que, por definición, f es suprayectiva. Como los espacios $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ y $\{x_0, \dots, x_n\}$ son espacios de Alexandroff, para probar tanto la continuidad de f como la de su inversa, basta probar que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ se cumple que $N(x_{i-1}) = f(N(i))$. Como $N(x_0) = \{x_0\}$ y $N(1) = \{1\}$, la propiedad anterior se cumple para $i = 1$. Ahora procedemos por inducción sobre i . Supongamos que para todo $k \leq i$, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se cumple que $N(x_{k-1}) = f(N(k))$ y demostremos que la igualdad sigue siendo válida para $i + 1$.

Caso 1. Si $i + 1$ es impar, entonces $N(i + 1) = \{i + 1\}$. Como sabemos que para cada punto de la trayectoria los únicos puntos en su conjunto de adyacencia

son aquellos cuyo índice está a distancia 1, basta mostrar que $x_{i-1} \notin N(x_i)$ y $x_{i+1} \notin N(x_i)$. Por hipótesis, $N(x_{i-1}) = f(N(i)) = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$, así que $x_i \in N(x_{i-1})$; además recordemos que la topología de la trayectoria es T_0 , de donde se sigue que $x_{i-1} \notin N(x_i)$. Más aún, como $x_{i+1} \notin N(x_{i-1})$ y $N(x_i) \subset N(x_{i-1})$, podemos deducir que $x_{i+1} \notin N(x_i)$, y concluir que $N(x_i) = \{x_i\} = f(N(i+1))$.

Caso 2. Si $i+1$ es par, entonces $N(i+1) = \{i, i+1, i+2\}$. De nuevo, sabemos que para cada punto de la trayectoria los únicos puntos en su conjunto de adyacencia son aquellos cuyo índice está a distancia 1, así que basta mostrar que $x_{i-1} \in N(x_i)$ y $x_{i+1} \in N(x_i)$ (esta última contención sólo si $i < n$). Por hipótesis, $N(x_{i-1}) = f(N(i)) = \{x_{i-1}\}$, pero x_{i-1} y x_i son adyacentes así que $x_{i-1} \in N(x_i)$. Si $i < n$ y suponemos que $x_{i+1} \notin N(x_i)$, entonces $x_i \in N(x_{i+1})$, de donde se seguiría que $x_{i-1} \in N(x_i) \subset N(x_{i+1})$, lo cual es una contradicción pues x_{i-1} y x_{i+1} no son adyacentes. Por lo tanto $x_{i+1} \in N(x_i)$ y podemos concluir que $N(x_i) = f(N(i+1))$.

Por otra parte, si $N(x_0) = \{x_0, x_1\}$, entonces el homeomorfismo buscado es $f : \{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{x_0, \dots, x_n\}$ con regla de correspondencia $f(i) = x_i$. La justificación de este hecho es completamente análoga al caso anterior, el único ajuste necesario sería en la base de inducción, que en este caso es cierta pues $N(x_0) = \{x_0, x_1\} = f(N(0))$. \square

Así como las trayectorias digitales corresponden a caminos en la gráfica de conexidad de un espacio, podemos establecer una correspondencia entre los arcos digitales y una clase particular de subgráficas en la gráfica de conexidad: los caminos simples inducidos. Recordemos que, en teoría de gráficas, una **subgráfica inducida** de una gráfica G es una subgráfica que tiene por conjunto de vértices a un subconjunto de los vértices de G y por aristas a todas las aristas de G definidas por los vértices de tal subconjunto. Por otra parte, un **camino simple** es un camino sin vértices repetidos.

Un **camino simple inducido** es una subgráfica inducida que es un camino simple, así como un **ciclo inducido** es una subgráfica inducida que es un ciclo. En el inciso a) de la Figura 1.4 mostramos una representación de una gráfica Q_3 , en el inciso b) mostramos una representación de una subgráfica de ésta que no es inducida, mientras que en los incisos c) y d) mostramos representaciones de subgráficas propias que sí lo son. Para ilustrar el concepto de camino simple inducido destacamos que la subgráfica representada en el

inciso d) es un camino simple inducido, mientras que la del inciso c) no lo es.

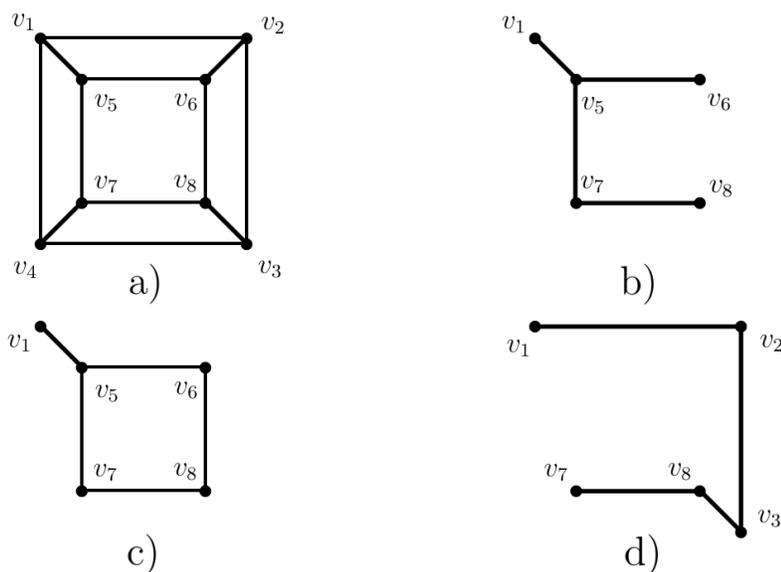


Figura 1.4: Una subgráfica que no es inducida y dos subgráficas propias que sí lo son.

Podemos observar que los caminos simples inducidos provienen de un conjunto de vértices entre los cuales existe un camino simple y no hay conexidad extra, es decir, además de los puntos adyacentes en el camino, un vértice no puede ser adyacente a ningún otro vértice de la subgráfica. Esta es precisamente la observación que hicimos después de definir arco digital, de donde deducimos que todo arco digital se representa como un camino simple inducido en la gráfica de conexidad de un espacio. El recíproco de este hecho también es cierto, como señalamos en la siguiente observación, cuya demostración omitimos debido a que es muy parecida a la demostración de la Proposición 1.2.12.

Observación 1.2.13. *Sea X un espacio topológico. Entonces (x_0, x_1, \dots, x_n) es un arco digital si y sólo si x_0, x_1, \dots, x_n son los vértices de un camino simple inducido en la gráfica de conexidad de X .*

Capítulo 2

Teorema Digital de la Curva de Jordan

En el transcurso de este capítulo expondremos el teorema de la curva de Jordan para el plano digital y desarrollaremos las herramientas necesarias para nuestra generalización de este teorema a versiones digitales de teselaciones del plano real.

2.1. El Plano Digital

En el Capítulo 1 definimos el espacio conocido como la recta digital y dimos un par de razones para pensarla como un análogo digital de la recta real. A su vez, el plano real también tiene un análogo digital al que, predeciblemente, llamamos plano digital.

Ejemplo 2.1.1. El **plano digital** (o **plano de Khalimsky**) es el conjunto \mathbb{Z}^2 dotado de la topología producto inducida por la recta digital.

El plano digital es un espacio de Alexandroff pues es el producto de dos rectas digitales, que son espacios de Alexandroff. Además, como ya mencionamos anteriormente, para cada $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ se cumple que $N(m, n) = N(m) \times N(n)$. Consecuentemente, para puntos $(u, v), (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tenemos

las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
(u, v) \in \overline{\{m\}} \times \overline{\{n\}} &\iff u \in \overline{\{m\}} \wedge v \in \overline{\{n\}} \\
&\iff m \in N(u) \wedge n \in N(v) \\
&\iff (m, n) \in N(u) \times N(v) \\
&\iff (m, n) \in N(u, v) \\
&\iff (u, v) \in \overline{\{(m, n)\}},
\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\overline{\{(m, n)\}} = \overline{\{m\}} \times \overline{\{n\}}$ para cada $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Entonces, recordando que en la recta digital

$$N(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par;} \end{cases}$$

y

$$\overline{\{n\}} = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n\} & \text{si } n \text{ es par;} \end{cases}$$

podemos concluir que en el plano digital:

$$N(n, m) = \begin{cases} \{(n, m)\} & \text{si } n \text{ es impar, } m \text{ es impar,} \\ \{n-1, n, n+1\} \times \{m-1, m, m+1\} & \text{si } n \text{ es par, } m \text{ es par,} \\ \{n\} \times \{m-1, m, m+1\} & \text{si } n \text{ es impar, } m \text{ es par,} \\ \{n-1, n, n+1\} \times \{m\} & \text{si } n \text{ es par, } m \text{ es impar;} \end{cases}$$

y

$$\overline{\{(n, m)\}} = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\} \times \{m-1, m, m+1\} & \text{si } n \text{ es impar, } m \text{ es impar,} \\ \{(n, m)\} & \text{si } n \text{ es par, } m \text{ es par,} \\ \{n-1, n, n+1\} \times \{m\} & \text{si } n \text{ es impar, } m \text{ es par,} \\ \{n\} \times \{m-1, m, m+1\} & \text{si } n \text{ es par, } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

De las igualdades anteriores podemos concluir que si $m, n \in \mathbb{Z}$ son ambos impares, entonces $\{(m, n)\}$ es abierto en \mathbb{Z}^2 , mientras que si $m, n \in \mathbb{Z}$ son

ambos pares, entonces $\{(m, n)\}$ es cerrado en \mathbb{Z}^2 . Si $m, n \in \mathbb{Z}$ son de distinta paridad entonces $\{(m, n)\}$ no es cerrado ni abierto. Si $\{(m, n)\}$ es cerrado o abierto en \mathbb{Z}^2 , entonces diremos que (m, n) es un **punto puro**, en caso contrario diremos que es un **punto mixto**. Recordemos que en un espacio de Alexandroff se cumple que para todo punto x del espacio, $\mathcal{A}(x) = (N(x) \cup \overline{\{x\}}) \setminus \{x\}$. Este hecho aunado a las igualdades proporcionadas en el párrafo anterior nos permiten caracterizar el conjunto de adyacencia de cada punto en \mathbb{Z}^2 : si (n, m) es puro entonces

$$\mathcal{A}(n, m) = \{n-1, n, n+1\} \times \{m-1, m, m+1\} \setminus \{(n, m)\},$$

mientras que si (n, m) es mixto, entonces

$$\mathcal{A}(n, m) = \left((\{n-1, n, n+1\} \times \{m\}) \cup (\{n\} \times \{m-1, m, m+1\}) \right) \setminus \{(n, m)\}.$$

Esta información nos permite conocer la gráfica de conexidad del plano digital. Ilustramos una porción de tal gráfica en la siguiente figura.

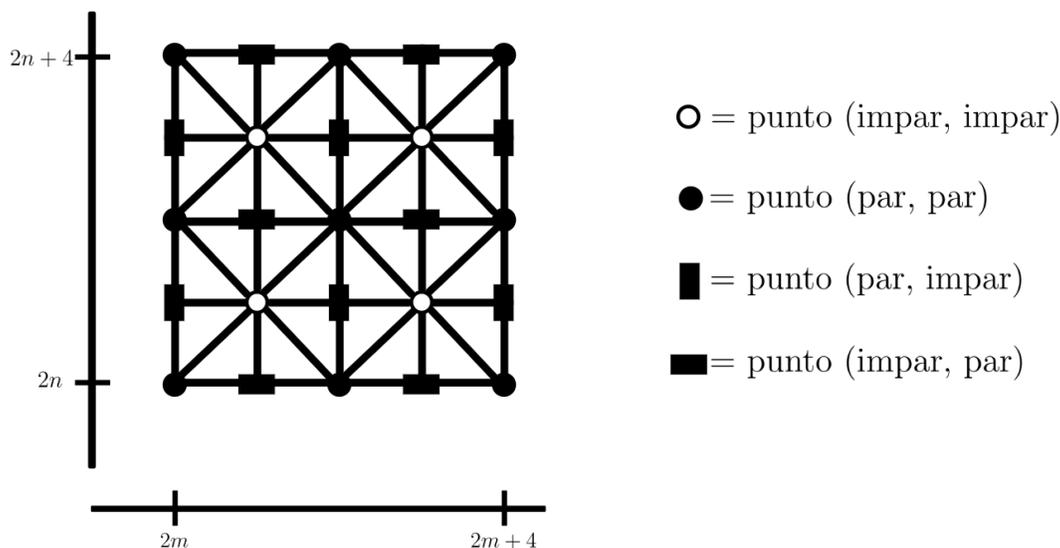


Figura 2.1: Gráfica de conexidad del plano digital.

Otra manera de caracterizar tanto a la recta como al plano digital es como

un espacio cociente de su análogo continuo. Para entender a la recta digital de esta manera definimos la función $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ con regla de correspondencia

$$q(x) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{si para algún } n \in \mathbb{N}, x \in (2n, 2n + 2), \\ 2n & \text{si para algún } n \in \mathbb{N}, x = 2n, \end{cases}$$

y dotamos a \mathbb{Z} de la topología cociente inducida por esta función. Esta topología es precisamente la topología de la recta digital. De manera equivalente, podemos pensar en la recta digital como el conjunto de clases de equivalencia en \mathbb{R} inducidas por la función q , es decir, los puntos son conjuntos de la forma $(2n, 2n + 2) \cup \{2n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Pensar a la recta digital de esta forma también es conveniente, pues los puntos abiertos en \mathbb{Z} corresponden a clases de equivalencia que son abiertas como subconjuntos de \mathbb{R} , mientras que los puntos cerrados corresponden a clases de equivalencia que son cerradas como subconjuntos de \mathbb{R} . En la siguiente figura ilustramos esta descripción de la recta digital.

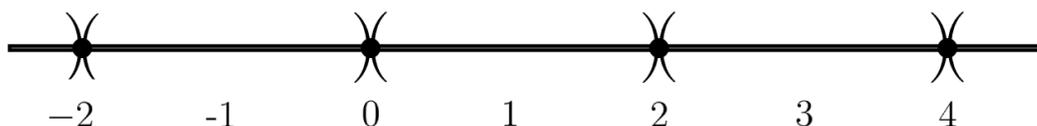


Figura 2.2: Porción de la recta digital como clases de equivalencia de \mathbb{R} .

Para entender al plano digital como espacio cociente del plano real definimos la función $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ con regla de correspondencia

$$p(x, y) = \begin{cases} (2n + 1, 2m + 1) & \text{si para algunos } n, m \in \mathbb{N}, \\ & (x, y) \in (2n, 2n + 2) \times (2m, 2m + 2), \\ \\ (2n, 2m + 1) & \text{si para algunos } n, m \in \mathbb{N}, \\ & x = 2n, y \in (2m, 2m + 2), \\ \\ (2n + 1, 2m) & \text{si para algunos } n, m \in \mathbb{N}, \\ & x \in (2n, 2n + 2), y = 2m, \\ \\ (2n, 2m) & \text{si para algunos } n, m \in \mathbb{N}, \\ & x = 2n, y = 2m, \end{cases}$$

y dotamos a \mathbb{Z}^2 de la topología cociente inducida por esta función. Esta topología es la misma que la del plano digital. Como hicimos con la recta real, podemos pensar al plano digital como el conjunto de clases de equivalencia en \mathbb{R}^2 inducidas por la función p . Notemos que en este caso, las clases definidas por p son conjuntos de la forma $(2n, 2n+2) \times (2m, 2m+2)$, $\{2n\} \times (2m, 2m+2)$, $(2n, 2n+2) \times \{2m\}$ o $\{2n\} \times \{2m\}$, con $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$; es decir, las clases de equivalencia son el interior, las aristas (sin vértices) y los vértices, respectivamente, de un rectángulo de la forma $[2n, 2n+2] \times [2m, 2m+2]$. Bajo esta correspondencia, los puntos abiertos corresponden a las clases que son el interior de tales rectángulos, los puntos mixtos a las clases que son las aristas y los puntos cerrados a las clases que son los vértices. En la Figura 2.3 ilustramos esta descripción del plano digital.

Teniendo en mente la representación del plano digital de la Figura 2.3, la gráfica de conexidad del plano digital que representamos en la Figura 2.1 es fácil de visualizar. La representación de la Figura 2.3 también es útil para recordar la vecindad más pequeña y la cerradura de un punto en el plano digital.

Antes de poder enunciar el teorema de la curva de Jordan para el plano digital, necesitamos definir el análogo digital de una curva de Jordan, lo cual hacemos a continuación. Decimos que un subconjunto J del plano digital

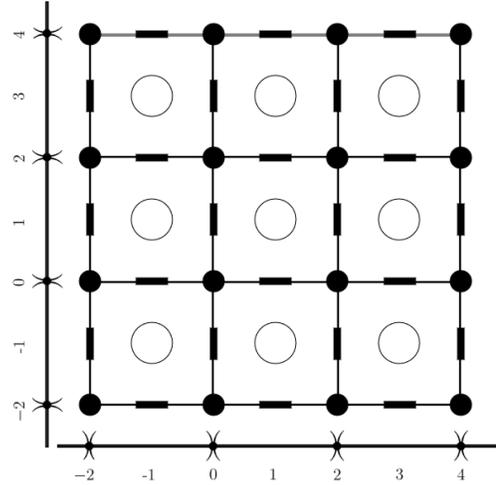


Figura 2.3: Porción del plano digital como clases de equivalencia de \mathbb{R}^2 .

es una **curva de Jordan en el plano digital** si $|J| \geq 4$ y si para todo $j \in J$ se cumple que $J \setminus \{j\}$ es un arco digital. Esta definición es consistente en pensar a los arcos digitales como análogos de arcos continuos, pues si a una curva de Jordan usual le quitamos un punto, el espacio resultante es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$. Pedimos que $|J| \geq 4$ precisamente para que el teorema de la curva de Jordan para el plano digital sea cierto; notemos que si no pidiéramos esta hipótesis el conjunto $J_0 := \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ sería una curva de Jordan en el plano digital, sin embargo $\mathbb{Z}^2 \setminus J_0$ es conexo.

Recordemos que en un arco digital no puede haber conexidad entre puntos que no tengan índices consecutivos. Por esta razón, ni un arco digital ni una curva de Jordan en el plano digital pueden ir de un punto abierto a uno cerrado pasando por un punto mixto como paso intermedio, es decir, no pueden tener subespacios homeomorfos al espacio J_0 que definimos en el párrafo anterior. Intuitivamente esto tiene sentido cuando pensamos al plano digital como en la Figura 2.3: cuando un arco sale del interior de un cuadrado pasa por una arista o un vértice de éste, pero no por una arista y luego un vértice de éste.

A continuación enunciamos el teorema de la curva de Jordan para el plano digital. Este teorema es un resultado de Khalimsky y su demostración puede ser consultada en [9].

Teorema 2.1.1. *Sea J una curva de Jordan en el plano digital. Entonces $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

2.2. Teselaciones del Plano

En esta sección introduciremos los conceptos necesarios referentes a teselaciones del plano real para poder enunciar y demostrar nuestra generalización del teorema de la curva de Jordan para el plano digital.

Definición 2.2.1. *Una **teselación del plano** (o simplemente **teselación**) $\mathcal{T} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de subconjuntos cerrados y conexos de \mathbb{R}^2 llamados **teselas**, tales que:*

- a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathbb{R}^2$,
- b) si $i \neq j$, entonces $\text{Int}(T_i) \cap \text{Int}(T_j) = \emptyset$.

Dada una teselación $\mathcal{T} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, a los puntos del plano que sean elementos de tres o más teselas les llamaremos **vértices**. Si $i, j \in \mathbb{N}$ son índices distintos tales que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in T_i \cap T_j, (x, y) \text{ no es un vértice}\} \neq \emptyset$, entonces cada componente conexa del conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in T_i \cap T_j, (x, y) \text{ no es un vértice}\}$$

recibe el nombre de **arista**. Finalmente, al interior de una tesela le llamaremos **cara**. Si un vértice, una arista o una cara están contenidos en una tesela T , diremos que es un vértice, arista o cara de la tesela, respectivamente.

Para los propósitos de este trabajo nos interesa enfocarnos en una clase particular de teselaciones, de manera que cuando hablemos de una teselación, además de a) y b) de la definición anterior, pediremos que cumpla las siguientes condiciones:

- c) \mathcal{T} es una colección localmente finita (es decir, cada punto del plano tiene una vecindad que intersecta sólo a un número finito de elementos de \mathcal{T}),
- d) para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n es homeomorfa al disco unitario cerrado,
- e) cada arista de la teselación es homeomorfa al intervalo $(0, 1)$,

f) si dos teselas distintas se intersectan, entonces su intersección es la unión ajena de un conjunto finito de vértices y aristas.

Ejemplo 2.2.1. La familia $\{[2n, 2n + 2] \times [2m, 2m + 2] \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$, que está estrechamente relacionada con la representación del plano digital ilustrada en la Figura 2.3, es una teselación del plano. Es importante recalcar que en este ejemplo las caras, aristas y vértices de la teselación son los puntos abiertos, mixtos y cerrados, respectivamente, del plano digital.

Proposición 2.2.2. *En una teselación toda tesela intersecta sólo a un número finito de teselas.*

Demostración. Sean \mathcal{T} una teselación y $T \in \mathcal{T}$ una tesela. Sabemos que, al ser T una tesela, T es homeomorfa a un disco cerrado, de donde se sigue que ∂T es homeomorfa a \mathbb{S}^1 ; en particular se sigue que ∂T es compacta. Luego, como \mathcal{T} es una colección localmente finita, para cada $x \in \partial T$ existe una vecindad abierta U_x tal que U_x intersecta sólo a un número finito de teselas. Para cada $x \in \partial T$, sea \mathcal{T}_x el conjunto de teselas cuya intersección con U_x es no vacía; por el argumento anterior sabemos que $|\mathcal{T}_x| < \infty$. Después, $\{U_x\}_{x \in \partial T}$ es una cubierta abierta de ∂T , que es compacta, así que existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \partial T$ tal que $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ es una subcubierta finita de ∂T . Entonces como toda tesela que intersecte a T intersecta a ∂T y a su vez toda tesela que intersecte a ∂T intersecta a $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, podemos concluir que el conjunto de teselas que intersectan a T está contenido en $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}_{x_i}$, y este último es un conjunto finito. \square

Observación 2.2.3. *Sean \mathcal{T} una teselación y S, T dos teselas tales que $S \cap T \neq \emptyset$. Entonces $S \cap T = \partial S \cap \partial T$.*

Demostración. Recordemos que toda tesela es un subconjunto cerrado. Este hecho junto con la condición b) en la definición de teselación nos permiten concluir que $S \cap T = \partial S \cap \partial T$. \square

Sea $\mathcal{T} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una teselación. Supongamos que existen una tesela T y un punto x en su frontera que no sea elemento de ninguna otra tesela. Como $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \setminus \{T\}$ es una colección localmente finita de subconjuntos cerrados

de \mathbb{R}^2 , su unión es un conjunto cerrado que no tiene por elemento a x , así que existe una vecindad V de x tal que para cualquier tesela S distinta de T , $S \cap V = \emptyset$. A su vez, como $x \in \partial T$, se tiene que existe un punto $y \in V \cap \text{Ext } T$, de manera que $y \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, contradiciendo que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathbb{R}^2$. El razonamiento anterior nos permite concluir que la frontera de cada tesela es la unión ajena de sus aristas y sus vértices; más aún, podemos concluir que cada tesela es la unión ajena de su cara, sus aristas y sus vértices.

Lema 2.2.4. *En una teselación toda tesela tiene al menos un vértice.*

Demostración. Sea \mathcal{T} una teselación. Procediendo por contradicción supongamos que existe $T \in \mathcal{T}$ tal que T no tiene vértices. Entonces ∂T es la unión ajena de sus aristas. Como dos teselas con intersección no vacía se intersectan en un conjunto finito de aristas y vértices, concluimos de la Proposición 2.2.2 que T es la unión ajena de un conjunto finito de aristas. Como cada arista es homeomorfa a $(0, 1)$, si T tiene al menos dos aristas, entonces concluimos que ∂T es disconexa, lo cual es una contradicción pues ∂T es homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Por otra parte si T tiene una única arista entonces ∂T es homeomorfa a $(0, 1)$, esto también es una contradicción. \square

Proposición 2.2.5. *En una teselación toda tesela tiene al menos dos vértices.*

Demostración. Sea \mathcal{T} una teselación. Procediendo por contradicción y teniendo en cuenta el Lema 2.2.4, supongamos que existe $T \in \mathcal{T}$ tal que T tiene exactamente un vértice v . Entonces $\partial T \setminus \{v\}$ es la unión ajena de las aristas de T . Por otra parte, como ∂T es homeomorfa a \mathbb{S}^1 , $\partial T \setminus \{v\}$ es homeomorfa a $(0, 1)$. Como en la proposición anterior, si T tuviera al menos dos aristas entonces $\partial T \setminus \{v\}$ sería disconexa, lo cual contradiría el enunciado anterior. Por lo tanto T tiene exactamente una arista.

Sea S la única tesela distinta de T que intersecta a T en $\partial T \setminus \{v\}$. Tanto T como S son cerradas, así que $S \cap T$ es un subconjunto cerrado. Como $\partial T \setminus \{v\} \subset S \cap T$ y teniendo en cuenta que S y T son teselas, se sigue que $\partial T \subset S \cap T = \partial S \cap \partial T \subset \partial S$. Luego, tanto ∂T como ∂S son homeomorfas a \mathbb{S}^1 , y es un hecho conocido que \mathbb{S}^1 no tiene subconjuntos propios homeomorfos a sí mismo, de manera que $\partial T = \partial S$. Después, por teorema de la curva de Jordan tenemos que las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial T$ son, por una parte $\text{Int}(S)$ y $\text{Ext}(S)$, y por la otra $\text{Int}(T)$ y $\text{Ext}(T)$. Como $\text{Int}(T) \cap \text{Int}(S) = \emptyset$,

se sigue que $\text{Int}(T) = \text{Ext}(S)$. Pero como tanto S como T son homeomorfas a un disco cerrado, tenemos que $\text{Int}(T)$ es acotado mientras que $\text{Ext}(S)$ no lo es, lo cual es una contradicción. \square

Observación 2.2.6. *En una teselación toda tesela tiene la misma cantidad de vértices que de aristas.*

Demostración. En efecto: sean \mathcal{T} una teselación y T es una tesela. Sabemos que T tiene un conjunto finito de vértices, digamos $\{v_1, \dots, v_n\}$. Como ∂T es homeomorfa a \mathbb{S}^1 entonces $\partial T \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ es homeomorfa a una unión ajena de una familia $\{A_1, \dots, A_n\}$ de n subconjuntos homeomorfos a $(0, 1)$. Afirmamos que cada uno de estos es una arista. Sabemos que cada arista es un conjunto conexo, de manera que no puede intersectar a más de un A_i pues éstos serían una separación de la arista. Por lo tanto cada arista está completamente contenida en algún A_i . De la misma manera, ningún A_i puede contener a más de una arista, pues éstas serían una separación de A_i ; como sabemos que ∂T es la unión ajena de los vértices y las aristas de T podemos concluir que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es el conjunto de aristas de T . \square

El análisis anterior también nos permite observar que cada arista está delimitada por dos vértices; diremos que tales vértices son los vértices de la arista.

Finalmente hagamos hincapié en lo siguiente: así como una arista está determinada por dos vértices, también lo está por las dos caras de las cuales es intersección. De manera similar, una cara está determinada por su frontera, es decir, por las aristas y los vértices de la tesela de la cual es interior. También, a un vértice lo determinan tanto las caras que inciden en él como las aristas que lo hacen. Entonces podemos hablar de las caras y aristas de un vértice, de los vértices y aristas de una cara y de las caras y vértices de una arista. A los conjuntos de caras, aristas y vértices de una teselación \mathcal{T} los denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ y $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}$, respectivamente. Por último, si v es un vértice a los conjuntos de aristas y caras de v los denotaremos por \mathcal{A}_v y \mathcal{C}_v , respectivamente. De manera análoga podemos establecer notación para los vértices y aristas de una cara y para las caras y vértices de una arista.

2.2.1. Topología Digital en una Teselación

En la Sección 2.1 proporcionamos una manera de construir el plano digital a partir de la teselación del Ejemplo 2.2.1: tomamos como elementos del plano digital a las caras, aristas y vértices de la teselación y los dotamos con la topología cociente en \mathbb{R}^2 que resulta de identificar a los puntos de una misma cara, arista o vértice. Esta construcción se puede generalizar de forma natural a cualquier teselación \mathcal{T} .

Definición 2.2.7. *Sea \mathcal{T} una teselación. Al conjunto $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} := \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{V}_{\mathcal{T}}$ dotado de la topología cociente en \mathbb{R}^2 que resulta de identificar a los puntos de una misma cara, arista o vértice le llamaremos la **versión digital de \mathcal{T}** .*

De acuerdo a la definición anterior, el plano digital es la versión digital de la teselación del Ejemplo 2.2.1.

Sea \mathcal{T} una teselación. Como la cerradura de cualquier punto en \mathbb{R}^2 es el mismo punto, podemos decir que la cerradura de cualquier vértice de la teselación es el mismo vértice. La cerradura de una arista de \mathcal{T} está compuesta por la arista y sus dos vértices, ya que éstos están contenidos en la frontera de una tesela y la frontera de una tesela es homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Con un argumento como el anterior podemos afirmar que la cerradura de una cara es la tesela en la cual está contenida, es decir, tal cerradura está compuesta por la cara, sus vértices y sus aristas.

Teniendo en cuenta el párrafo anterior podemos describir la cerradura de cualquier elemento x de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$:

$$\overline{\{x\}} = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}, \\ \{x\} \cup \mathcal{V}_x & \text{si } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \\ \{x\} \cup \mathcal{V}_x \cup \mathcal{A}_x & \text{si } x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}. \end{cases}$$

Además de la cerradura de un elemento arbitrario de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ también podemos describir su vecindad más pequeña, cuya existencia y descripción especificamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.8. *Sea \mathcal{T} una teselación. Entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es un espacio de Alexandroff.*

Demostración. Sean $\mathcal{T} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una teselación, $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ la función

cociente asociada a $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ y $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ un elemento arbitrario.

Si $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}$ y U es una vecindad abierta de x , entonces $q^{-1}(U)$ es una vecindad abierta y saturada de $q^{-1}(x)$. Como x es un vértice sabemos que está en la cerradura de sus aristas y sus caras, así que $q^{-1}(U)$ intersecta a cada una de las aristas y caras de x ; más aún, como $q^{-1}(U)$ es una vecindad saturada entonces $q^{-1}(U)$ contiene a todas las aristas y caras de x , es decir, $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x) \subset q^{-1}(U)$. Ahora veamos que $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$ es abierto. Sea $y \in q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$. Si y es elemento de una cara de x , entonces esa cara es un abierto que se queda contenido en $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$. Si y es elemento de una arista de x entonces existen dos teselas, digamos S y T , que tienen a x como vértice en común y tales que $y \in S \cap T$ y para cualquier otra $R \in \mathcal{T}$, $y \notin R$. Como $\mathcal{T} \setminus \{T, S\}$ es una colección localmente finita de cerrados, su unión es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^2 (Teorema 1.1.11. en [4]), así que

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ T_n \notin \{S, T\}}} T_n \right)$$

es una vecindad abierta de y , que además se queda contenida en $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$. Por último, si $y = q^{-1}(x)$ entonces consideramos al conjunto \mathcal{S} de teselas que contienen a y , recordemos que \mathcal{S} es un conjunto finito. Como en el argumento anterior $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{T \in (\mathcal{T} \setminus \mathcal{S})} T \right)$ es una vecindad abierta de y que se queda contenida en $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$. Por lo tanto $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$ es un abierto tal que $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x) \subset q^{-1}(U)$. Como U es un abierto arbitrario de x en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ podemos concluir que $(\{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x)$ es la vecindad abierta más pequeña de x en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$.

Si $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ y U es una vecindad abierta de x , entonces $q^{-1}(U)$ es una vecindad abierta y saturada de $q^{-1}(x)$. Como x es una arista sabemos que está en la cerradura de sus caras, así que $q^{-1}(U)$ intersecta a las dos caras de x . Más aún, como $q^{-1}(U)$ es una vecindad saturada entonces $q^{-1}(U)$ contiene a las dos caras de x , es decir, $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{C}_x) \subset q^{-1}(U)$. Usando los mismos argumentos que en el caso anterior podemos concluir que $q^{-1}(\{x\} \cup \mathcal{C}_x)$ es abierto en \mathbb{R}^2 . Como U es un abierto arbitrario de x en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ podemos concluir que $(\{x\} \cup \mathcal{C}_x)$ es la vecindad abierta más pequeña de x en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$.

Para terminar, si $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ entonces $\{x\}$ es abierto en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ pues por definición

todas las caras son abiertas en \mathbb{R}^2 . De esta manera queda demostrado que $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es un espacio de Alexandroff. \square

Resumiendo el teorema anterior, todo elemento $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ tiene una vecindad más pequeña, que describimos a continuación:

$$N(x) = \begin{cases} \{x\} \cup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x & \text{si } x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}, \\ \{x\} \cup \mathcal{C}_x & \text{si } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \\ \{x\} & \text{si } x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}. \end{cases}$$

Recordemos que en la Observación 1.2.2 destacamos que en un espacio de Alexandroff podemos conocer el conjunto de adyacencia de cualquier elemento si conocemos su cerradura y su vecindad más pequeña. Por lo tanto para $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x & \text{si } x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}, \\ \mathcal{V}_x \cup \mathcal{C}_x & \text{si } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \\ \mathcal{V}_x \cup \mathcal{A}_x & \text{si } x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}. \end{cases}$$

Esta información nos permite conocer la gráfica de conexidad de cualquier versión digital de una teselación. Por ejemplo, las relaciones de adyacencia que acabamos de obtener pueden ser verificadas para la gráfica de conexidad del plano digital que ilustramos en la Figura 2.1, las cuales obtuvimos con la construcción del plano digital como producto de dos rectas digitales.

En la Figura 2.4 ilustramos una porción de la teselación del plano con hexágonos regulares del mismo tamaño y la gráfica de conexidad de su versión digital. En esta gráfica representamos con puntos blancos a los vértices de la gráfica que corresponden a las caras de la teselación, con puntos negros a los vértices de la gráfica que corresponden a los vértices de la teselación y con rectángulos negros a los vértices de la gráfica que corresponden a las aristas de la teselación. También podemos teselar al plano con triángulos equiláteros del mismo tamaño; la gráfica de conexidad de la versión digital de esta teselación también está representada por la gráfica de conexidad de la Figura 2.4, solo que en este caso los puntos blancos corresponden a los vértices de la teselación, los puntos negros corresponden a las caras de la teselación y los rectángulos negros siguen representando a las aristas de la teselación.

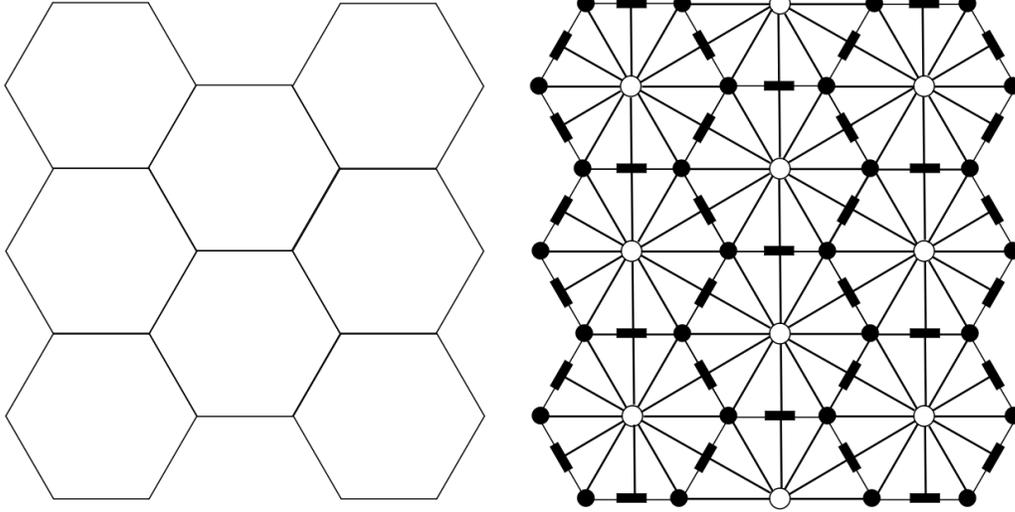


Figura 2.4: Porción de la teselación del plano con hexágonos regulares y la gráfica de conexidad de su versión digital.

En la Figura 2.5 proporcionamos otro ejemplo, ilustrando una porción de una teselación del plano con cuadrados y hexágonos y la gráfica de conexidad de su versión digital. Como en la Figura 2.4, representamos con puntos blancos a los vértices que corresponden a las caras de la teselación, con puntos negros a los vértices que corresponden a los vértices de la teselación y con rectángulos negros a los vértices que corresponden a las aristas de la teselación.

Definición 2.2.9. *Sea G una gráfica. Decimos que G es una gráfica plana si existe una función $\psi : V_G \cup E_G \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ que cumpla las siguientes condiciones:*

- 1) *la imagen de cada elemento de V_G es un singulete,*
- 2) *la imagen de cada elemento de E_G es un subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo a $(0, 1)$,*
- 3) *para cualesquiera dos elementos distintos del conjunto $V_G \cup E_G$, x y y ,*

$$\psi(x) \cap \psi(y) = \emptyset,$$

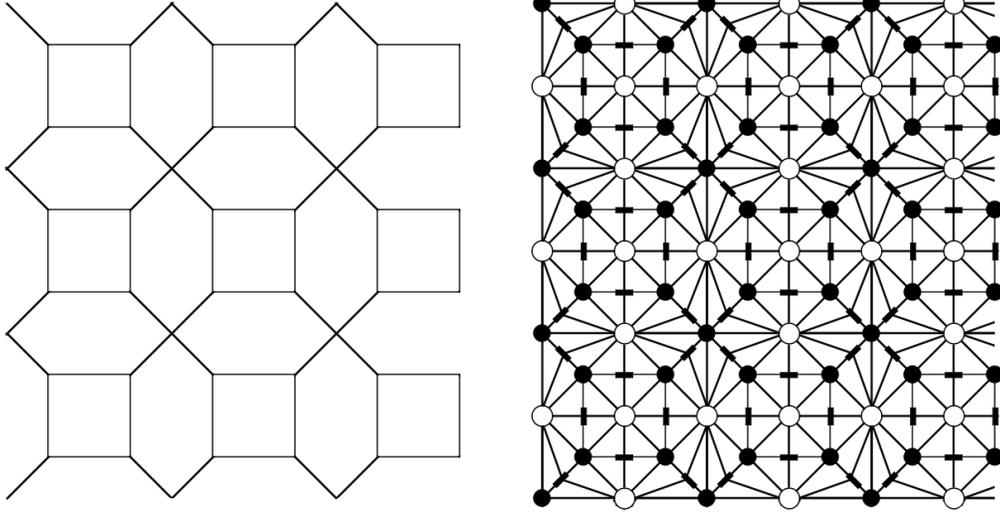


Figura 2.5: Porción de una teselación del plano con hexágonos y cuadrados y la gráfica de conexidad de su versión digital.

4) si v y w son los vértices de la arista e , entonces

$$\overline{\psi(e)} = \psi(e) \cup \psi(v) \cup \psi(w).$$

En esta situación, decimos que $|G| = \psi(V_G \cup E_G)$ es una realización geométrica plana de G .

Notemos que en los ejemplos ilustrados en las Figuras 2.4 y 2.5 la gráfica de conexidad es una gráfica plana. Este siempre es el caso para la gráfica de conexidad de la versión digital de una teselación.

Lema 2.2.10. *Sea \mathcal{T} una teselación. Entonces la gráfica de conexidad de $\mathcal{V}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, con la topología de subespacio heredada por $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, es una gráfica plana.*

Demostración. Sea H la gráfica de conexidad de $\mathcal{V}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. Recordemos que el conjunto de vértices de H es el conjunto $V_H = \mathcal{V}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. Sabemos que en H ningún vértice de la teselación es adyacente a otro vértice, así como ninguna arista de la teselación es adyacente a otra arista. Es decir, las aristas

de H siempre denotan la adyacencia entre una arista de la teselación y sus dos vértices.

Para cada $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, sea $x_A \in A$ un punto fijo. Si $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}$ es un vértice de $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, entonces definimos $I_{x_A, x}$ como la componente conexa de $A \setminus \{x_A\}$ que tiene por extremos a x_A y a x . Por construcción, $\{x_A, x\} \cap I_{x_A, x} = \emptyset$. Como A es una arista de la teselación, entonces $I_{x_A, x}$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$ y además

$$\overline{I_{x_A, x}} = I_{x_A, x} \cup \{x_A, x\}.$$

Más aún, si $(x_A, x) \neq (x_B, y)$ entonces $I_{x_A, x} \cap I_{x_B, y} = \emptyset$ pues sabemos que dos aristas distintas de una teselación no se intersectan.

Por lo anterior, la función $\psi : V_H \cup E_H \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}, \\ \{x_A\} & \text{si } x = A \text{ para alguna } A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \\ I_{x_A, z} & \text{si } x \in E_H, \text{ donde } A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \text{ y } z \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}} \\ & \text{son los vértices de } x, \end{cases}$$

demuestra la planaridad de H . □

Proposición 2.2.11. *Sea \mathcal{T} una teselación. Entonces la gráfica de conexidad de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es una gráfica plana.*

Demostración. Sean G la gráfica de conexidad de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ y H la gráfica de conexidad de $\mathcal{V}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. H es una subgráfica de G y por el Lema 2.2.10 conocemos una función $\psi : V_H \cup E_H \rightarrow |H|$ biyectiva del conjunto de vértices y aristas de H a una realización geométrica plana $|H|$ de H . Queremos extender la función ψ a una función $\phi : V_G \cup E_G \rightarrow |G|$ biyectiva del conjunto de vértices y aristas de G a una realización geométrica plana $|G|$ de G . Con este fin en mente, basta definir $\phi(x)$ cuando $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ o cuando x es una arista de G que denota la adyacencia entre una cara de la teselación y uno de sus vértices o entre una cara de la teselación y una de sus aristas.

Sea $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, sabemos que existe una única tesela T de la cual C es cara y también sabemos que $\mathcal{A}(C) = \mathcal{V}_C \cup \mathcal{A}_C$. Sea $\gamma : \mathbb{B}^2 \rightarrow T$ el homeomorfismo entre \mathbb{B}^2 y T que existe ya que T es una tesela. Consideremos al

conjunto $\gamma^{-1}(\mathcal{V}_C) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, que está contenido en \mathbb{S}^1 pues γ es un homeomorfismo y $\mathcal{V}_C \subset \partial T$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que w_1, \dots, w_n están enumerados en el sentido de las manecillas del reloj. Entonces también podemos enumerar al conjunto $\gamma^{-1}(\mathcal{A}_C) = \{B_1, \dots, B_n\}$ denotando por B_1 al arco delimitado por w_1 y w_2 y enumerando a los demás en el sentido de las manecillas del reloj. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos $A_i := \gamma(B_i)$, gracias a que γ es un homeomorfismo podemos asegurar que $\mathcal{A}_C = \{A_1, \dots, A_n\}$. Respetando la notación del Lema 2.2.10, sabemos que existe un punto $x_{A_i} \in A_i$ tal que $\psi(A_i) = \{x_{A_i}\}$. Definimos $b_i := \gamma^{-1}(x_{A_i})$, que es un elemento de $\mathbb{S}^1 \setminus (\gamma^{-1}(\mathcal{V}_C))$.

Para cada $w \in \{w_1, \dots, w_n, b_1, \dots, b_n\}$ denotamos por L_w al intervalo abierto entre w y $(0, 0)$, es decir, $L_w := \{tw \mid t \in (0, 1)\}$. Entonces, si consideramos a la familia

$$\mathcal{L}_C := \{L_w \mid w \in \{w_1, \dots, w_n, b_1, \dots, b_n\}\},$$

es claro que los elementos de \mathcal{L}_C son ajenos dos a dos y cada uno está contenido en $\text{Int } \mathbb{B}^2$.

Definimos $x_C := \gamma(0, 0)$. Como $(0, 0) \in \text{Int } \mathbb{B}^2$ se cumple que $x_C \in C$. Ahora consideramos a la familia $\gamma(\mathcal{L}_C) = \{\gamma(L) \mid L \in \mathcal{L}_C\}$, esta es una familia de arcos delimitados por x_C y cada uno de los puntos del conjunto $\{v_1, \dots, v_n, x_{A_1}, \dots, x_{A_n}\}$. Así, podemos denotar a cada arco $\gamma(L)$ de $\gamma(\mathcal{L}_C)$ como $M_{x_C, v}$, donde v es el elemento de $\{v_1, \dots, v_n, x_{A_1}, \dots, x_{A_n}\}$ que, junto con x_C , delimita a $\gamma(L)$. Por cómo construimos a $M_{x_C, v}$ es claro que $M_{x_C, v} \cap \{x_C, v\} = \emptyset$.

Como γ es un homeomorfismo, estos arcos son ajenos dos a dos pues los elementos de \mathcal{L}_C lo son, y están contenidos en C ya que los elementos de \mathcal{L}_C están contenidos en $\text{Int } \mathbb{B}^2$. Esto último nos asegura que si D es otra cara de la teselación, entonces los elementos de $\gamma(\mathcal{L}_C)$ y $\gamma(\mathcal{L}_D)$ son ajenos dos a dos y que los elementos de $\gamma(\mathcal{L}_C)$ no intersectan a ∂T . Por último observemos que si $M_{x_C, v} \in \gamma(\mathcal{L}_C)$ entonces

$$\overline{M_{x_C, v}} = M_{x_C, v} \cup \{x_C, v\}.$$

Por lo anterior, la función $\phi : V_G \cup E_G \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in V_H \cup E_H, \\ \{x_C\} & \text{si } x = C \text{ para alguna } A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}, \\ M_{x_C, v} & \text{si } x \in E_G \setminus E_H, \text{ donde } C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \text{ y } v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}} \\ & \text{son los vértices de } x, \\ M_{x_C, x_A} & \text{si } x \in E_G \setminus E_H, \text{ donde } C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \text{ y } A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \\ & \text{son los vértices de } x, \end{cases}$$

demuestra la planaridad de G . □

Si G es la gráfica de conexidad de la versión digital de una teselación $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, entonces la realización geométrica plana de G que construimos en la proposición anterior es a su vez una nueva teselación del plano. A esta teselación se le conoce como la **subdivisión baricéntrica** de \mathcal{T} y, a pesar de no ser una perspectiva en la que profundizaremos en este texto, ha sido estudiada por diversos autores, como en [3] y [24].

2.3. Teorema Digital de la Curva de Jordan

En esta sección expondremos nuestra generalización del teorema de la curva de Jordan para el plano digital, en el mismo tenor en el que generalizamos la construcción del plano digital a partir de una teselación. Para lograr este fin nos apoyaremos fuertemente en la gráfica de conexidad de la versión digital de una teselación.

Para empezar podemos generalizar la definición de una curva de Jordan en el plano digital, lo cual hacemos a continuación. Sea \mathcal{T} una teselación, diremos que un subconjunto J de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es una **curva de Jordan digital** si $|J| \geq 4$ y si para todo $j \in J$ se cumple que $J \setminus \{j\}$ es un arco digital.

Recordemos que en la Observación 1.2.13 destacamos que $J \setminus \{j\}$ es un arco digital en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ si y sólo si $J \setminus \{j\}$ es un camino simple inducido en la gráfica de conexidad de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$. Entonces J es una curva de Jordan digital en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ si y sólo si J es un ciclo inducido de longitud mayor que tres en la gráfica de conexidad de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$. Motivados por lo anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Sea G una gráfica. Una curva de Jordan en el sentido de teoría de gráficas es un ciclo inducido de longitud mayor que tres.*

Sean G una gráfica y x un vértice de G . Teniendo en cuenta la correspondencia entre un espacio topológico y su gráfica de conexidad, denotaremos por $\mathcal{A}(x, G)$ a la subgráfica inducida por los vértices de G adyacentes a x . Decimos que G es **localmente hamiltoniana** si para cada vértice x de G , $\mathcal{A}(x, G)$ tiene un ciclo hamiltoniano.

A continuación presentamos un lema, seguido de la demostración del teorema que funge como piedra angular de nuestra generalización. Es un teorema de Neumann-Lara y Wilson, y la demostración que exponemos es la que proporcionan los autores en [16].

Lema 2.3.2. *Sea G una gráfica conexa y localmente hamiltoniana. Supongamos que $J \subset G$ es una curva de Jordan en el sentido de teoría de gráficas. Entonces*

$$H = \bigcup_{x \in V_J} (\mathcal{A}(x, G) \setminus J)$$

tiene a lo más dos componentes conexas.

Demostración. Como J es una curva de Jordan en el sentido de teoría de gráficas, para cada $x \in V_J$, $|V_{\mathcal{A}(x, G)} \cap V_J| = 2$. Además, como G es localmente hamiltoniana, $\mathcal{A}(x, G)$ tiene un ciclo hamiltoniano. Los dos hechos anteriores nos permiten concluir que $\mathcal{A}(x, G) \setminus J$ tiene a lo más dos componentes conexas.

Supongamos que $x, y \in V_J$ son dos vértices adyacentes. Entonces cada componente conexa de $\mathcal{A}(x, G) \setminus J$ intersecta a $\mathcal{A}(y, G) \setminus J$. Podemos ver esto enumerando los vértices de $\mathcal{A}(x, G)$, $V_{\mathcal{A}(x, G)} = \{y = v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de manera que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, v_i sea adyacente a v_{i+1} y v_n sea adyacente a v_0 . Notemos que $\{v_1, v_n\} \cap V_J = \emptyset$ pues v_1 y v_n son adyacentes a x y a y , y J es una curva de Jordan. Además, $\{v_1, v_n\} \subset V_{\mathcal{A}(y, G)}$ y si $\mathcal{A}(x, G) \setminus J$ tiene dos componentes conexas entonces v_1 y v_n están en componentes distintas. Por un argumento de simetría, también es cierto que cada componente conexa de $\mathcal{A}(y, G) \setminus J$ intersecta a $\mathcal{A}(x, G) \setminus J$. Esto implica que $(\mathcal{A}(x, G) \setminus J) \cup (\mathcal{A}(y, G) \setminus J)$ tiene a lo más dos componentes conexas.

Si numeramos a los vértices de J , $V_J = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de manera que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, x_i sea adyacente a x_{i+1} y x_n sea adyacente a x_0 , y repetimos el argumento del párrafo anterior para las parejas x_0 y x_1 , x_1 y x_2 ,

\dots, x_n y x_0 entonces podemos concluir que

$$H = \bigcup_{x \in V_J} (\mathcal{A}(x, G) \setminus J)$$

tiene a lo más dos componentes conexas. \square

Teorema 2.3.3. *Sea G una gráfica conexa y localmente hamiltoniana. Supongamos que $J \subset G$ es una curva de Jordan en el sentido de teoría de gráficas. Entonces*

- a) *el complemento en G de J tiene a lo más dos componentes conexas en G , y*
- b) *si G es plana, entonces el complemento de J tiene exactamente dos componentes conexas en G .*

Demostración. a) Por el Lema 2.3.2, sabemos que el conjunto

$$H = \bigcup_{x \in V_J} (\mathcal{A}(x, G) \setminus J)$$

tiene a lo más dos componentes conexas. Como G es una gráfica conexa, para cada $v \in V_G \setminus V_J$ existe un camino más corto de v a J . Tal camino sólo intersecta a J en su último vértice, y el penúltimo vértice es un elemento de V_H . Por lo tanto, cada vértice de $G \setminus J$ está en la misma componente conexa de $G \setminus J$ que algún vértice de H . Como H tiene a lo más dos componentes conexas, entonces $G \setminus J$ tiene a lo más dos componentes conexas.

b) Por hipótesis G es una gráfica plana, de manera que existe una función $\psi : V_G \cup E_G \rightarrow |G| \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ que cumple las condiciones de la Definición 2.2.9. Consideremos a la realización geométrica $|J|$ de J , en otras palabras, $|J| = \psi(V_J \cup E_J)$. Como J es un ciclo inducido, $\bigcup |J|$ es una curva de Jordan (en el sentido usual) en \mathbb{R}^2 ; así que por el teorema de la curva de Jordan usual $\mathbb{R}^2 \setminus (\bigcup |J|)$ tiene dos componentes conexas C_1 y C_2 . Más aún, sabemos que C_1 es acotada mientras que C_2 no lo es.

Recordemos que ψ es una función biyectiva, que para cada $e \in E_G$, $\psi(e)$ es homeomorfa a $(0, 1)$ y que para cualesquiera aristas distintas $e_1, e_2 \in E_G$ se cumple que $\psi(e_1) \cap \psi(e_2) = \emptyset$. Además, \mathbb{R}^2 es la unión ajena de C_1, C_2 y $\bigcup |J|$. Esto implica que $|G| \subset \mathcal{P}(C_1) \cup \mathcal{P}(C_2) \cup \mathcal{P}(\bigcup |J|)$. Si consideramos las

intersecciones dos a dos de los conjuntos $\mathcal{P}(C_1)$, $\mathcal{P}(C_2)$ y $\mathcal{P}(\bigcup |J|)$, todas estas tienen por único elemento al conjunto vacío. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} V_G \cup E_G &= \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) \cup \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_2)) \cup \psi^{-1}\left(\mathcal{P}\left(\bigcup |J|\right)\right) \\ &= \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) \cup \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_2)) \cup (V_J \cup E_J), \end{aligned}$$

donde la anterior es una unión ajena.

Introducimos la siguiente notación:

$$I(J) := \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) \cap V_G, \quad O(J) := \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_2)) \cap V_G.$$

Supongamos que $I(J) = \emptyset$. Sabemos que $E_J \cap \psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) = \emptyset$. Además, $\psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) \cap V_G = \emptyset$, así que podemos inferir que $\psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) = \emptyset$.

Ahora construimos una gráfica Γ con conjunto de vértices $V_\Gamma = V_G \cup \{p\}$, donde $p \notin V_G$ y conjunto de aristas $E_\Gamma = E_G \cup \{\{p, w\} \mid w \in V_J\}$. Veamos que Γ es una gráfica plana. En efecto, como $\bigcup |J|$ es una curva de Jordan, $C_1 \cup (\bigcup |J|)$ es homeomorfo a un disco cerrado. También, $\psi^{-1}(\mathcal{P}(C_1)) = \emptyset$, así que podemos imitar la construcción del punto x_C y los conjuntos $M_{x_C, v}$ en la Proposición 2.2.11 para concluir la existencia de un punto $x_p \in C_1$ y conjuntos $M_{x_p, w} \subset C_1$ tales que la función $\phi : V_\Gamma \cup E_\Gamma \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida como

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in V_G \cup E_G, \\ \{x_p\} & \text{si } x = p, \\ M_{x_p, w} & \text{si } x \in E_\Gamma \setminus E_G, \text{ donde } p \text{ y } w \in V_J \\ & \text{son los vértices de } x, \end{cases}$$

demuestra la planaridad de Γ .

Sean $x, y, z \in V_J$ vértices consecutivos, es decir, x y z son adyacentes a y . Como J es un ciclo inducido de longitud mayor que tres, x no es adyacente a z . Luego, $\mathcal{A}(y, G)$ tiene un ciclo hamiltoniano y x, z son dos vértices no adyacentes que pertenecen a éste, así que existen dos caminos en $\mathcal{A}(y, G)$ que se intersectan únicamente en x y z . Consideremos un vértice (distinto de x y z) en cada uno de estos de estos caminos, digamos a y b . Entonces,

si consideramos a los conjuntos de vértices $\{p, a, b\}$ y $\{x, y, z\}$ de Γ podemos notar que Γ contiene una subdivisión de una gráfica bipartita completa $K_{3,3}$, lo cual contradice al teorema de Kuratowski ya que Γ es una gráfica plana. La contradicción anterior nos permite concluir que $I(J) \neq \emptyset$. De la misma manera se puede demostrar que $O(J) \neq \emptyset$.

Para terminar, consideremos vértices $v_1 \in I(J)$ y $v_2 \in O(J)$ y supongamos que existe un camino simple $P \subset G \setminus J$ entre v_1 y v_2 . Por definición de $I(J)$ y $O(J)$, $\psi(v_1) \in C_1$ y $\psi(v_2) \in C_2$. Por otro lado, $|P| = \psi(V_P \cup E_P)$ es tal que $|P| \subset \mathcal{P}(C_1) \cup \mathcal{P}(C_2)$ y al ser P un camino simple, $\bigcup |P|$ es una trayectoria en $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup |J|$ entre $\psi(v_1)$ y $\psi(v_2)$. Entonces $\psi(v_1)$ y $\psi(v_2)$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup |J|$. Esto es una contradicción ya que C_1 y C_2 son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup |J|$. Por lo tanto v_1 y v_2 están en distintas componentes conexas de $G \setminus J$ y por lo tanto $G \setminus J$ tiene al menos dos componentes conexas. Finalmente, por el inciso *a*) tenemos el resultado deseado. \square

Bajo las hipótesis del teorema anterior, nos referiremos al conjunto $I(J)$ como el **interior** de $V_G \setminus V_J$ y al conjunto $O(J)$ como el **exterior** de $V_G \setminus V_J$.

Teniendo en cuenta el trabajo que hemos desarrollado en el transcurso del texto resulta natural pensar en verificar si la gráfica de conexidad de la versión digital de una teselación cumple las hipótesis del Teorema 2.3.3. Esto da pie a la generalización del teorema de la curva de Jordan para el plano digital que presentamos a continuación.

Teorema 2.3.4. *Sean \mathcal{T} una teselación y $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ una curva de Jordan digital. Entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} \setminus J$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Demostración. Sea G la gráfica de conexidad de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, veamos que G cumple las hipótesis del Teorema 2.3.3. Sabemos que existe una función cociente $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ que induce la topología en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$. En particular q es continua y de la conexidad de \mathbb{R}^2 podemos deducir que $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es conexa; también sabemos que $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es un espacio de Alexandroff, así que por el Corolario 1.2.11 se sigue que G es conexa. Además, recordemos que en la Proposición 2.2.11 probamos que G es una gráfica plana.

Basta mostrar que G es una gráfica localmente hamiltoniana. En el Teorema 2.2.8 caracterizamos $\mathcal{A}(x)$ para cualquier $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, así que si x es un vértice de G tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{A}(x, G) = \begin{cases} \mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x & \text{si } x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}, \\ \mathcal{V}_x \cup \mathcal{C}_x & \text{si } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \\ \mathcal{V}_x \cup \mathcal{A}_x & \text{si } x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}. \end{cases}$$

Si $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}$, entonces sabemos que al menos tres teselas se intersectan en x . Por cada una de estas teselas hay exactamente dos aristas cuyo vértice es x , este hecho nos permite deducir que si consideramos a todas las aristas que tienen por vértice a x , las cuales son una cantidad finita, y las enumeramos en el sentido de las manecillas del reloj, entonces cada dos aristas consecutivas determinan una cara que tiene por vértice a x (y ninguna de estas caras está determinada por dos pares distintos de aristas). También sabemos que cada arista de x está determinada por exactamente dos caras de x . Finalmente sabemos que, en la gráfica de conexidad, no hay dos aristas adyacentes y tampoco hay dos caras adyacentes. Entonces la subgráfica inducida por $\mathcal{A}_x \cup \mathcal{C}_x$ es un ciclo donde los vértices correspondientes a las aristas y a las caras están intercalados.

Si $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ la situación es aún más simple ya que x tiene exactamente dos vértices y dos caras, y ambos vértices son vértices de ambas caras, así que la subgráfica inducida por $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{C}_x$ es un ciclo con cuatro vértices. Por último, si $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ recordamos el análisis que hicimos en la Proposición 2.2.11 donde probamos que los vértices y aristas de x están intercalados en ∂C , de donde podemos concluir de la subgráfica inducida por $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{A}_x$ es también un ciclo.

En cualquier caso, demostramos que $\mathcal{A}(x, G)$ es un ciclo y entonces podemos afirmar que G es localmente hamiltoniana. Además sabemos que como J es una curva de Jordan digital, entonces J , vista como subgráfica de G , es una curva de Jordan en el sentido de teoría de gráficas. De esta manera, estamos en la situación descrita por las hipótesis del Teorema 2.3.3 y podemos concluir que $G \setminus J$ tiene exactamente dos componentes conexas en G .

Para terminar recordemos que $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es un espacio de Alexandroff, así que el Corolario 1.2.11 nos permite concluir que como $G \setminus J$ tiene exactamente dos componentes conexas en G , entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} \setminus J$ tiene exactamente dos componentes conexas. Más aún, este corolario nos asegura que las componentes conexas de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} \setminus J$ son precisamente los vértices de las componentes conexas de $G \setminus J$, con J vista como subgráfica de G . Es decir, las componentes conexas de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} \setminus J$ son su interior $I(J)$, que es acotado, y su exterior $O(J)$, que

no lo es. □

En [10] Khalimsky, Kopperman y Meyer presentan una aplicación del estudio de la topología del plano digital, y en particular del teorema de la curva de Jordan para el plano digital: el procesamiento de imágenes digitales. En esta publicación trabajan con un subconjunto finito y conexo del plano digital, es decir un subconjunto finito de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ con \mathcal{T} la teselación del Ejemplo 2.2.1, y a cada pixel de una pantalla le asocian un elemento de $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, pues para $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ existe un automorfismo de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ que manda a C_1 en C_2 . En el transcurso de ese trabajo estudian las propiedades de los subconjuntos conexos del plano digital y de sus fronteras, en particular se enfocan en el caso en el que estas últimas son curvas de Jordan en el plano digital, y qué información codifican los unos de las otras. Si bien no es la intención del presente trabajo ahondar en esta dirección, a continuación mostramos que resultados de esta naturaleza también son válidos en el contexto más general de versiones digitales de teselaciones.

Lema 2.3.5. *Sean \mathcal{T} una teselación y $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ una curva de Jordan digital tal que $J \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \emptyset$. Entonces, para todo $x \in J$ se cumple que $\mathcal{A}(x) \cap I(J) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean $x \in J$ y G la gráfica de conexidad de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$. Procederemos por contradicción. Supongamos que $\mathcal{A}(x) \cap I(J) = \emptyset$ y sean x_0 y x_1 los dos puntos adyacentes a x en J (si x es un vértice entonces x_0 y x_1 son aristas y si x es una arista entonces x_0 y x_1 son vértices). Es claro que x_0 y x_1 no son adyacentes. Sabemos que la subgráfica inducida por $\mathcal{A}(x)$ es un ciclo con al menos cuatro elementos, así que existen dos caminos contenidos en $\mathcal{A}(x, G)$ que sólo se cortan en x_0 y x_1 . Sean a y b vértices de cada uno de estos caminos, distintos de x_0 y x_1 . Como $\mathcal{A}(x) \cap I(J) = \emptyset$, entonces, con excepción de x_0 y x_1 , los vértices de los caminos mencionados anteriormente están contenidos en $O(J)$. En particular, $a, b \in O(J)$.

\mathcal{T} es una teselación así que, G es una gráfica plana. Consideremos a la subgráfica H de G inducida por los vértices $V_H := I(J) \cup J$, que también es una gráfica plana. Como $\mathcal{A}(x) \cap I(J) = \emptyset$, x es vértice de exactamente dos caras de la subgráfica H , pues $\mathcal{A}(x) \cap (I(J) \cup J) = \{x_0, x_1\}$. Sea C la cara acotada de tal subgráfica de la cual x es vértice (la otra cara es la cara exterior de la subgráfica inducida por los vértices de J). Entonces tenemos que $\bigcup |C|$ es homeomorfa a un disco cerrado y $\{\psi(x_0), \psi(x), \psi(x_1)\} \subset \partial(\bigcup |C|)$.

Ahora construimos una gráfica Γ con conjunto de vértices $V_\Gamma = V_G \cup \{p\}$, donde $p \notin V_G$ y conjunto de aristas $E_\Gamma = E_G \cup \{\{p, w\} \mid w \in V_C\}$. Veamos que Γ es una gráfica plana. En efecto, $\bigcup |C|$ es homeomorfa a un disco cerrado y $\{\psi(x_0), \psi(x), \psi(x_1)\} \subset \partial(\bigcup |C|)$, así que podemos imitar la construcción del punto x_C y los conjuntos $M_{x_C, v}$ en la Proposición 2.2.11 para concluir la existencia de un punto $x_p \in \bigcup |C|$ y conjuntos $M_{x_p, w} \subset C_1$ tales que la función $\phi : V_\Gamma \cup E_\Gamma \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida como

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in V_G \cup E_G, \\ \{x_p\} & \text{si } x = p, \\ M_{x_p, w} & \text{si } x \in E_\Gamma \setminus E_G, \text{ donde } p \text{ y } w \in V_C \\ & \text{son los vértices de } x, \end{cases}$$

demuestra la planaridad de Γ .

Por otra parte, si consideramos a los conjuntos de vértices $\{p, a, b\}$ y $\{x_0, x, x_1\}$ de Γ podemos notar que Γ contiene una subdivisión de una gráfica bipartita completa $K_{3,3}$, lo cual contradice al teorema de Kuratowski. La contradicción anterior nos permite concluir que $\mathcal{A}(x) \cap I(J) \neq \emptyset$. \square

Proposición 2.3.6. *Sean \mathcal{T} una teselación y $J \subset \mathcal{D}_\mathcal{T}$ una curva de Jordan digital. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- a) J es cerrado.
- b) $I(J)$ y $O(J)$ son abiertos.
- c) J es denso en ninguna parte.
- d) $I(J) \cup O(J)$ es denso.
- e) $J \cap \mathcal{C}_\mathcal{T} = \emptyset$.
- f) $J = \partial(I(J))$.

Demostración. a) \implies b). $I(J) \cup O(J)$ es el complemento de J , así que es abierto. Además es un espacio de Alexandroff así que por la Proposición 1.2.10, al ser $I(J)$ y $O(J)$ las componentes conexas de $I(J) \cup O(J)$, son abiertas y cerradas en $I(J) \cup O(J)$; como este último es abierto podemos concluir que cada una es abierta en $\mathcal{D}_\mathcal{T}$.

$b) \implies c)$. Procederemos por contrapositiva, supongamos que existe un elemento $x \in \text{Int}(\overline{J})$, es decir x es tal que $N(x) \subset \overline{J}$. En particular tenemos que $x \in \overline{J}$ y como este último es cerrado tenemos que $\overline{\{x\}} \subset \overline{J}$, de donde se sigue que $\mathcal{A}(x) \cup \{x\} \subset \overline{J}$. Entonces podemos afirmar que \overline{J} no es una curva de Jordan ya que en la gráfica de conexidad de $\mathcal{A}(x) \cup \{x\}$, al haber al menos un vértice, una arista y una cara que son adyacentes, hay subgráficas que son ciclos de longitud 3. Por lo tanto J no es cerrado, así que $I(J) \cup O(J)$ no es abierto, lo cual implica que $b)$ no puede ser cierto.

$c) \implies d)$. De nuevo procederemos por contrapositiva. Supongamos que $I(J) \cup O(J)$ no es denso. Como \mathcal{D}_τ es la unión ajena de $I(J)$, $O(J)$ y J , entonces existe un punto $x \in J$ tal que $N(x) \cap (I(J) \cup O(J)) = \emptyset$. Por lo tanto $N(x) \subset J$, es decir $x \in \text{Int}(J)$ y por lo tanto $\text{Int}(\overline{J}) \neq \emptyset$.

$d) \implies e)$. Una vez más procedemos por contrapositiva. Sea $x \in J \cap \mathcal{C}_\tau$, entonces $N(x) = \{x\} \subset J$ y como $J \cap (I(J) \cup O(J)) = \emptyset$, concluimos que $N(x) \cap (I(J) \cup O(J)) = \emptyset$. De esta manera $I(J) \cup O(J)$ no puede ser denso.

$e) \implies f)$. Primero veamos que J es cerrado. Como ningún elemento de J es una cara, todos sus elementos son vértices y aristas. Además sabemos que ninguna arista es adyacente a otra así como ningún vértice es adyacente a otro. De esta manera, los elementos de J son vértices y aristas intercalados. Sabemos que la cerradura de un vértice es el mismo vértice y que la cerradura de una arista es la arista junto con sus dos vértices; como las aristas y los vértices están intercalados entonces los dos vértices de cada arista en J son elementos de J . Por lo tanto la cerradura de cada elemento de J está contenida en J y, como \mathcal{D}_τ es un espacio de Alexandroff, lo anterior basta para asegurar que J es cerrado.

Lo anterior nos permite utilizar la implicación $a) \implies b)$ para inferir que $I(J)$ y $O(J)$ son abiertos. De aquí concluimos que $\partial(I(J)) = \overline{(I(J))} \setminus I(J)$ y que $I(J) \cup J$ es un cerrado que contiene a $I(J)$, ya que \mathcal{D}_τ es la unión ajena de J , $I(J)$ y $O(J)$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\partial(I(J)) = \overline{(I(J))} \setminus I(J) \subset (I(J) \cup J) \setminus I(J) = J.$$

Así, es suficiente demostrar que $J \subset \partial(I(J))$. Como $I(J)$ y J son conjuntos ajenos basta demostrar que para todo $x \in J$, $N(x) \cap I(J) \neq \emptyset$. Sea $x \in J$, el Lema 2.3.5 nos asegura que $\mathcal{A}(x) \cap I(J) \neq \emptyset$. Por hipótesis, x no puede ser

una cara de la teselación.

Si x es una arista de la teselación, entonces los elementos de $N(x)$ son x y sus dos caras; mientras que los de $\mathcal{A}(x)$ son las dos caras y los dos vértices de x . Sabemos que J e $I(J)$ son ajenos, y que los dos vértices de x son elementos de J . Por lo tanto $\mathcal{A}(x) \cap I(J)$ debe contener al menos a una de las caras de x , lo cual implica que $N(x) \cap I(J) \neq \emptyset$. Finalmente, si x es un vértice de la teselación entonces $\mathcal{A}(x) \subset N(x)$ y por lo tanto $N(x) \cap I(J) \neq \emptyset$. De aquí concluimos que $J \subset \partial(I(J))$.

$f) \implies a)$. Esto es claro pues sabemos que la frontera de cualquier subconjunto en un espacio topológico siempre es cerrada. \square

Notemos que la proposición anterior nos provee de una clase de curvas de Jordan digitales para las cuales $I(J)$ siempre tiene por elemento a una cara de la teselación. Esto es fácil de ver, pues si J es una curva de Jordan cerrada en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, entonces $I(J)$ es abierto, así que para todo $x \in I(J)$, $N(x) \subset I(J)$, y ya sea que x sea un vértice, una arista o una cara, $N(x)$ siempre contiene a una cara de la teselación.

Lo anterior no siempre es el caso. Si J es una curva de Jordan digital compuesta solamente por aristas y caras de una teselación, entonces no podemos asegurar que $I(J)$ contenga alguna cara de la teselación. Esta situación la ilustramos para la teselación del plano en hexágonos regulares en la Figura 2.6. En esta figura dibujamos una línea punteada que intersecta a todos los elementos de una curva de Jordan digital compuesta solamente por aristas y caras de una teselación. También dibujamos una línea negra gruesa que intersecta a todos los elementos de su interior, ninguno de los cuales es una cara de la teselación.

Podemos proporcionar una condición suficiente para que el interior $I(J)$ de una curva de Jordan digital compuesta solamente por aristas y caras contenga a una cara de la teselación. Para lograr esto, consideremos la siguiente proposición dual a la Proposición 2.3.6. Su demostración es análoga a la de esta última.

Proposición 2.3.7. *Sean \mathcal{T} una teselación y $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ una curva de Jordan digital. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

a) J es abierto.

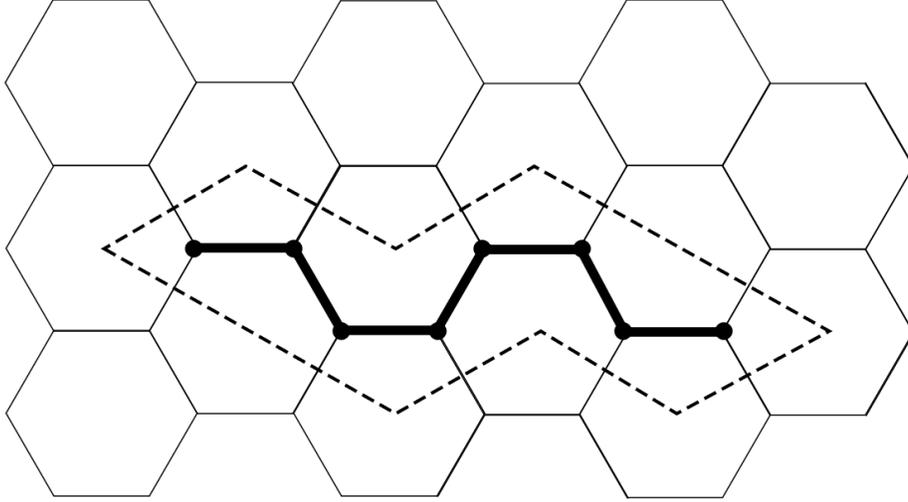


Figura 2.6: Porción de la teselación del plano con hexágonos regulares y una curva de Jordan digital junto con su interior.

- b) $I(J)$ y $O(J)$ son cerrados.
- c) $J \cap \mathcal{V}_{\mathcal{T}} = \emptyset$.

En vista de esta proposición, si J es una curva de Jordan digital abierta en $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, entonces $I(J)$ es cerrado, así que para todo $x \in I(J)$, $\overline{\{x\}} \subset I(J)$, y ya sea que x sea un vértice, una arista o una cara, $\overline{\{x\}}$ siempre contiene a un vértice de la teselación. Así, $I(J)$ contiene a un vértice de la teselación. De la misma manera, podemos concluir que $O(J)$ contiene a un vértice de la teselación.

La curva de Jordan digital J ilustrada en la Figura 2.6 cumple lo anterior, pero su interior no contiene a ninguna cara de la teselación. Intuitivamente, esto sucede porque las caras de J están muy amontonadas. En la siguiente observación proveemos una restricción para que éste no sea el caso.

Observación 2.3.8. Sean \mathcal{T} una teselación y $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ una curva de Jordan digital abierta. Si para toda $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap J$ se cumple que para todo $x \in \mathcal{V}_C$, $C_x \not\subset J$, entonces $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap I(J) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap I(J) = \emptyset$. Entonces, como J es abierta, se sigue de la Proposición 2.3.7 que $(\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \setminus J) \subset O(J)$. Como $O(J)$ es cerrado, esto implica que para toda $C \in (\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \setminus J)$, $\{C\} \subset O(J)$.

Sea $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$, el cual existe pues J es abierta. Como el interior y el exterior de J son conjuntos ajenos y $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap I(J) = \emptyset$, por el párrafo anterior podemos concluir que $\mathcal{C}_x \subset J$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap I(J) \neq \emptyset$. \square

En la observación anterior podemos cambiar los roles de $I(J)$ y $O(J)$ para concluir que las mismas hipótesis implican que $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap O(J) \neq \emptyset$.

Como mencionamos en la introducción, en [14] Kopperman prueba un teorema similar al teorema de la curva de Jordan para una retícula formada por puntos en el centro de cada hexágono de la teselación del plano con hexágonos regulares. Kopperman dota a esta retícula de la siguiente relación de adyacencia: dos puntos son 6-adyacentes si los hexágonos que los contienen comparten una arista. También, considerando a los puntos de su retícula como vértices de una gráfica con aristas dadas por la relación de adyacencia anterior, define como 6-curva de Jordan a una subgráfica que sea un ciclo inducido.

A continuación haremos una formulación equivalente del teorema de Kopperman y mostraremos que es una consecuencia de la Observación 2.3.8. Consideremos a \mathcal{T} la teselación del plano con hexágonos regulares. Pensaremos a las caras de la teselación como los puntos de la retícula de Kopperman. Consecuentemente, decimos que dos caras $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ son **6-adyacentes** si $\mathcal{A}_{C_1} \cap \mathcal{A}_{C_2} \neq \emptyset$. Ahora, recordemos que un ciclo inducido es un ciclo en el cual no existe conectividad extra entre sus vértices. Como cada vértice de la teselación hexagonal tiene tres caras, podemos proporcionar la definición correspondiente a la 6-curva de Jordan para la retícula de puntos como sigue: $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es una **6-curva de Jordan** si J es una curva de Jordan digital abierta que cumple las hipótesis de la Observación 2.3.8. Con la terminología que acabamos de introducir, estamos listos para probar el teorema de Kopperman.

Teorema 2.3.9. *Sean \mathcal{T} la teselación del plano con hexágonos regulares y $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ una 6-curva de Jordan. Entonces $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$, $O(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ y éstos son conjuntos 6-conexos.*

Demostración. $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ y $O(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ por la Observación 2.3.8. Además, sabemos que $I(J)$ es conexo. Como $I(J)$ es cerrado, para toda $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$ se cumple que $\mathcal{V}_C \cup \mathcal{A}_C \subset I(J)$. Más aún, para toda $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$, se cumple que $\mathcal{C}_A \cap I(J) \neq \emptyset$. En efecto, si existiera $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$ tal que $\mathcal{C}_A \cap I(J) = \emptyset$, entonces como $O(J)$ es cerrado se seguiría que $\mathcal{C}_A \subset J$, por lo que cada cara de A tendría una arista en común con 3 caras de J , lo cual contradice que J sea una 6-curva de Jordan. Por último, es útil destacar que si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $\mathcal{V}_{C_1} \cap \mathcal{V}_{C_2} \neq \emptyset$ implica $\mathcal{A}_{C_1} \cap \mathcal{A}_{C_2} \neq \emptyset$.

Veamos que lo anterior basta para probar que $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ es 6-conexo. Como $I(J)$ es un espacio de Alexandroff conexo, sabemos por las Proposiciones 1.2.10 y 1.2.12 que $I(J)$ es digitalmente arco conexo. Así, para cualesquiera $C_1, C_2 \in I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ existe un arco digital $\alpha_0 = (x_0 = C_1, x_1, \dots, x_n = C_2)$ en $I(J)$ de C_1 a C_2 , con α_0 de longitud mínima. Como α_0 es de longitud mínima, a lo más hay tres elementos consecutivos de una misma tesela en α_0 , pues esta es la longitud más corta de un arco de cualquier elemento de una tesela a otro elemento de la misma.

Sea $m_0 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i \leq k : x_{2i} \in \alpha_0, x_{2i} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}\}$. Si $m_0 = \frac{n}{2}$, entonces α_0 va de una cara a la siguiente pasando por una arista o vértice en común. Como mencionamos anteriormente si $C, D \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $\mathcal{V}_C \cap \mathcal{V}_D \neq \emptyset$ implica $\mathcal{A}_C \cap \mathcal{A}_D \neq \emptyset$, así que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que α_0 va de una cara a la siguiente pasando por una arista en común. Con esta convención, es claro que α_0 corresponde a un 6-camino simple entre C_1 y C_2 .

Supongamos que $m_0 \neq \frac{n}{2}$. En particular se cumple que $0 \leq m_0 < n - 1$, ya que si $m_0 = n - 1$ habría dos caras consecutivas en α_0 . En esta situación, x_{m_0} es una cara de la teselación y x_{m_0+2} no lo es. Notemos que $x_{m_0+1} \notin \mathcal{A}_{x_{m_0}}$ ya que de lo contrario se seguiría que $x_{m_0+2} \in \mathcal{V}_{x_{m_0}}$, contradiciendo que α_0 es un arco digital. Por lo tanto $x_{m_0+1} \in \mathcal{V}_{x_{m_0}}$, $x_{m_0+2} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{A}_{x_{m_0}}$ y $x_{m_0+1} \in \mathcal{V}_{x_{m_0+2}}$. Sea $C_{x_{m_0+2}} \in \mathcal{C}_{x_{m_0+2}} \cap I(J)$. De nuevo, como α_0 es un arco digital podemos concluir que $C_{x_{m_0+2}} \notin \alpha_0$ y $x_{m_0+3} \in \mathcal{V}_{C_{x_{m_0+2}}}$. Entonces $\{x_{m_0+1}, x_{m_0+2}, x_{m_0+3}\} \subset \overline{\{C_{x_{m_0+2}}\}}$, lo cual implica que $x_{m_0+4} \notin \overline{\{C_{x_{m_0+2}}\}}$.

Para $i \in \{0, \dots, n\}$, sea

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq m_0 + 2, \\ C_{x_{m_0+2}} & \text{si } i = m_0 + 2. \end{cases}$$

De esta manera, $\alpha_1 := (y_0, y_1, \dots, y_n)$ es un arco digital de C_1 a C_2 en $I(J)$ y si definimos $m_1 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i \leq k : y_{2i} \in \alpha_0, y_{2i} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}\}$ entonces $m_1 > m_0$. Como $n < \infty$, es suficiente aplicar este argumento un número finito de veces para concluir que n es par y para construir un arco digital α de C_1 a C_2 en $I(J)$ que vaya de una cara a la siguiente pasando por una arista o vértice en común. Una vez más podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que α va de una cara a la siguiente pasando por una arista en común. Con esta convención, es claro que α corresponde a un 6-camino simple entre C_1 y C_2 . Por lo tanto, $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ es 6-conexo. El mismo razonamiento, intercambiando los roles de $I(J)$ y $O(J)$, demuestra la 6-conexidad de $O(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. \square

Finalmente, podemos ver que el teorema de Rosenfeld que presentamos en la introducción también se puede deducir a partir de la Observación 2.3.8. Empezamos considerando al plano digital $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$. Recordemos que Rosenfeld trabaja con una retícula cuadrículada dotada de las relaciones de k -adyacencia descritas en la introducción, con $k \in \{4, 8\}$.

Como hicimos con la telesación hexagonal, pensaremos a las caras del plano digital como los puntos de la retícula de Rosenfeld. Consecuentemente, decimos que dos caras $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ son **4-adyacentes** si $\mathcal{A}_{C_1} \cap \mathcal{A}_{C_2} \neq \emptyset$ y decimos que son **8-adyacentes** si $\mathcal{V}_{C_1} \cap \mathcal{V}_{C_2} \neq \emptyset$. También definimos el concepto que corresponde a un 4-camino simple cerrado con al menos cinco puntos: $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ es una **4-curva de Jordan** si J es una curva de Jordan digital abierta tal que $|\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap J| \geq 5$ y para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap J$, $|\mathcal{A}_C \cap J| = 2$. Es fácil ver que las dos condiciones anteriores implican que J cumple las hipótesis de la Observación 2.3.8. Entonces, podemos enunciar el teorema de Rosenfeld como sigue.

Teorema 2.3.10. *Sean $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ el plano digital y $J \subset \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ una 4-curva de Jordan. Entonces $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$, $O(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ y éstos son conjuntos 8-conexos.*

Demostración. $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ y $O(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ por la Observación 2.3.8. Además, sabemos que $I(J)$ es conexo. Como $I(J)$ es cerrado, para toda $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$ se cumple que $\mathcal{V}_C \cup \mathcal{A}_C \subset I(J)$. Más aún, para toda $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$, se cumple que $\mathcal{C}_A \cap I(J) \neq \emptyset$. En efecto, si existiera $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \cap I(J)$ tal que $\mathcal{C}_A \cap I(J) = \emptyset$, entonces como $O(J)$ es cerrado se seguiría que $\mathcal{C}_A \subset J$, por lo que cada cara de A tendría una arista en común con 3 caras de J , lo cual es una contradicción.

Veamos que lo anterior basta para probar que $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ es 8-conexo. Como

$I(J)$ es un espacio de Alexandroff conexo, sabemos por las Proposiciones 1.2.10 y 1.2.12 que $I(J)$ es digitalmente arco conexo. Así, para cualesquiera $C_1, C_2 \in I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ existe un arco digital $\alpha_0 = (x_0 = C_1, x_1, \dots, x_n = C_2)$ en $I(J)$ de C_1 a C_2 , con α_0 de longitud mínima. Como α_0 es de longitud mínima, a lo más hay tres elementos consecutivos de una misma tesela en α_0 , pues esta es la longitud más corta de un arco de cualquier elemento de una tesela a otro elemento de la misma. Sea $m_0 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i \leq k : x_{2i} \in \alpha_0, x_{2i} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}\}$. Si $m_0 = \frac{n}{2}$, entonces α_0 corresponde a un 8-camino simple entre C_1 y C_2 , ya que α_0 va de una cara a la siguiente pasando por una arista o vértice en común.

Supongamos que $m_0 \neq \frac{n}{2}$. En particular se cumple que $0 \leq m_0 < n - 1$, ya que si $m_0 = n - 1$ habría dos caras consecutivas en α_0 . En esta situación, x_{m_0} es una cara de la teselación y x_{m_0+2} no lo es. Notemos que $x_{m_0+1} \notin \mathcal{A}_{x_{m_0}}$ ya que de lo contrario se seguiría que $x_{m_0+2} \in \mathcal{V}_{x_{m_0}}$, contradiciendo que α_0 es un arco digital. Por lo tanto $x_{m_0+1} \in \mathcal{V}_{x_{m_0}}$, $x_{m_0+2} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{A}_{x_{m_0}}$ y $x_{m_0+1} \in \mathcal{V}_{x_{m_0+2}}$. Sea $C_{x_{m_0+2}} \in \mathcal{C}_{x_{m_0+2}} \cap I(J)$. De nuevo, como α_0 es un arco digital podemos concluir que $C_{x_{m_0+2}} \notin \alpha_0$ y $x_{m_0+3} \in \mathcal{V}_{C_{x_{m_0+2}}}$. Entonces $\{x_{m_0+1}, x_{m_0+2}, x_{m_0+3}\} \subset \overline{\{C_{x_{m_0+2}}\}}$, lo cual implica que $x_{m_0+4} \notin \overline{\{C_{x_{m_0+2}}\}}$.

Para $i \in \{0, \dots, n\}$, sea

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq m_0 + 2, \\ C_{x_{m_0+2}} & \text{si } i = m_0 + 2. \end{cases}$$

De esta manera, $\alpha_1 := (y_0, y_1, \dots, y_n)$ es un arco digital de C_1 a C_2 en $I(J)$ y si definimos $m_1 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i \leq k : y_{2i} \in \alpha_0, y_{2i} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}\}$ entonces $m_1 > m_0$. Como $n < \infty$, es suficiente aplicar este argumento un número finito de veces para concluir que n es par y para construir un arco digital α de C_1 a C_2 en $I(J)$ que vaya de una cara a la siguiente pasando por una arista o vértice en común. Este arco digital corresponde a un 8-camino simple entre C_1 y C_2 , pues la 8-conexidad captura la adyacencia entre dos caras que tengan al menos un vértice en común. Por lo tanto, $I(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ es 8-conexo. El mismo razonamiento, intercambiando los roles de $I(J)$ y $O(J)$, demuestra la 8-conexidad de $O(J) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. \square

Bibliografía

- [1] P. Alexandroff, *Diskrete Räume*, Rec. Math., vol. 2(44), no. 3 (1937), 501–519.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer-Verlag, London, 2008.
- [3] A.W.M. Dress and D. Huson, *On tilings of the plane*, Geometriae Dedicata, vol. 24 (1987), 295–310.
- [4] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlín, 1989.
- [5] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [6] M. C. Jordan, *Cours d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [7] E. Khalimsky, *Applications of Connected Ordered Topological Spaces in Topology*, Conference of Math. Departments of Povolsia, 1970.
- [8] E. Khalimsky, *Ordered Topological Spaces*, Naukova Dumka Press, Kiev, 1977.
- [9] E. Khalimsky, R. Kopperman, and P. R. Meyer, *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology and its Applications, vol. 36 (1990), 1-17.
- [10] E. Khalimsky, R. Kopperman, and P. R. Meyer, *Boundaries in Digital Planes*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, vol. 3, no. 1 (1990), 27-55.

- [11] T. Y. Kong, *Digital Topology* in: Davis L.S. (eds) *Foundations of Image Understanding*, The Springer International Series in Engineering and Computer Science, vol. 628, Springer, Boston, MA, 2001.
- [12] T. Y. Kong, R. Kopperman, and P. R. Meyer, *A topological approach to digital topology*, The American Mathematical Monthly, vol. 98, no. 10 (1991), 901-917.
- [13] T. Y. Kong and A. W. Roscoe, *A theory of binary digital pictures*, Computer Vision, Graphics and Image Processing, vol. 32 (1985), 221-243.
- [14] R. Kopperman, *The Khalimsky Line as a Foundation for Digital Topology* in: O YL., Toet A., Foster D., Heijmans H.J.A.M., Meer P. (eds) *Shape in Picture*, NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol. 126, Springer, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [15] E. Melin, *Connectedness and continuity in digital spaces with the Khalimsky topology*, Uppsala University, Department of Mathematics, Uppsala, 2003.
- [16] V. Neumann-Lara and R. G. Wilson, *Digital Jordan curves — a graph-theoretical approach to a topological theorem*, Topology and its Applications, vol. 46 (1992), 263-268.
- [17] D. Renault, *The uniform locally finite tilings of the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, vol. 98 (2008), 651-671.
- [18] A. Rosenfeld, *Connectivity in digital pictures*, Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 17, no. 1 (1970), 146-160.
- [19] A. Rosenfeld, *Arcs and curves in digital pictures*, Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 20, no. 1 (1973), 81-87.
- [20] A. Rosenfeld, *Adjacency in digital pictures*, Information and Control, vol. 26 (1974), 24-33.
- [21] A. Rosenfeld, *A characterization of parallel thinning algorithms*, Information and Control, vol. 29 (1975), 286-291.
- [22] A. Rosenfeld, *A converse to the Jordan curve theorem for digital curves*, Information and Control, vol. 29 (1975), 292-293.

- [23] A. Rosenfeld, *Digital topology*, The American Mathematical Monthly, vol. 86, no. 8 (1979), 621-630.
- [24] N. Van Cleemput, *Generation of Structures in Chemistry and Mathematics*, Ghent University, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Ghent, 2012.