



Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Posgrado en Ciencias Físicas.

Dinámica en gases ultrafríos y ondas de Faraday

T E S I S

que para optar por el grado de
Maestro en Ciencias Física

PRESENTA:
Miguel Torres Acosta.

Tutor Principal:
Dr. Santiago Francisco Caballero Benítez, Instituto de Física.
Miembros del Comité Tutor:
Dr. Jorge Amin Seman Harutinian, Instituto de Física.
Dr. Jorge Hirsch Ganievich, Instituto de Ciencias Nucleares.

México, CDMX. (Septiembre) 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	v
Glosario de términos.	vi
Resumen	vii
Abstract	viii
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Motivaciones	2
2. Marco Teórico	6
2.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii	6
2.1.1. Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo.	6
2.1.2. Solución estática y límite de Thomas Fermi.	8
2.1.3. Ecuación amortiguada.	9
2.2. Cruce BCS-BEC. Teoría BCS.	10
2.2.1. Campo medio	10
2.2.2. Ecuación del Gap	13
2.2.3. Ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes	13
3. Resultados	15
3.1. Balance armónico	15
3.2. Patrones de Faraday. Dinámica conservativa.	17
3.2.1. Análisis de estabilidad.	19
3.2.2. Sistemas atrapados.	21
3.3. Patrones de Faraday. Dinámica no conservativa.	22
3.3.1. Análisis de estabilidad.	23
3.3.2. Sistema atrapado	24
3.4. Sistemas fermiónicos. Ecuaciones del Gap.	25
3.5. Excitaciones en sistemas fermiónicos. Solitones Negros.	29
3.6. Excitaciones en sistemas fermiónicos. Solitones Grises.	33
4. Conclusiones	38

A.	40
A.1. Función de onda de muchos cuerpos.	40
B.	42
B.1. Dispersión a bajas energías.	42
C.	44
C.1. Interacciones efectivas.	44
D.	46
D.1. Resonancias de Feshbach.	46
Bibliografía	53

Índice de figuras

1.1.	Vista esquemática de las dimensiones moleculares de los estados resonantes.	2
1.2.	Espectro de excitaciones elementales en un superfluido de ^4He	3
1.3.	Proceso de impresión de fase a un condensado con la forma de cigarro. Esto divide el condensado en dos hemisferios a ambos lados del solitón en la densidad.	5
2.1.	Relación de dispersión para las excitaciones de cuasipartículas.	12
3.1.	Perfil de densidad obtenido haciendo la dinámica de un sistema bidimensional cuadrado en tiempo real. Las distribuciones equivalen a tres tiempos diferentes (aumentando de izquierda a derecha) de la simulación.	17
3.2.	Distribución de momentos obtenida haciendo la dinámica de un sistema bidimensional cuadrado en tiempo real. Las distribuciones equivalen a tres tiempos diferentes (aumentando de izquierda a derecha) de la simulación.	18
3.3.	Distribución en el espacio de momentos para tres diferentes frecuencias de la modulación (0.3π , 0.4π y 0.5π). En cada caso la distribución equivale a el tiempo donde se han formado la dos primeras zonas visibles.	19
3.4.	Zonas donde el condensado se vuelve inestable representado por las franjas grises en cada uno de los casos. Las configuraciones cambian dependiendo la frecuencia externa (0.3π , 0.4π y 0.5π) como se indicó que ocurre en la simulación numérica.	20
3.5.	El perfil de densidad luego de la formación de patrones para un potencial plano en la dimensión más larga, para un configuración rectangular donde se ha hecho pequeña la dimensión transversal. Los parámetros utilizados fueron $\alpha = 0.2$ y $\omega = 0.3\pi$	21
3.6.	El perfil de densidad luego de la formación de patrones para un potencial plano en la dimensión más larga. Se ha colocado una trampa armónica ($\omega_x = 0.002$) manteniendo la configuración rectangular de la figura 3.5 y los mismos parámetros para la simulación. Se observa cómo los patrones surgen ahora envueltos por la forma parabólica de la densidad para el potencial armónico.	21

3.7. Perfil de densidad para el tiempo donde se alcanzan los patrones estacionarios. Estas corresponden a una frecuencia de modulación de la trampa igual a a) $\omega = 0.5\pi$, b) $\omega = \pi$ y c) $\omega = 1.5\pi$ y a los parámetros $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.03$	22
3.8. Distribución de momentos para dos valores de la amplitud de la modulación. A la izquierda $\alpha = 0.05$ y a la derecha $\alpha = 0.2$, estos dos resultados capturan la sensibilidad de la distribución de momentos hacia la introducción de la disipación ($\gamma = 0.03$) una vez alcanzada la distribución estacionaria.	24
3.9. Zonas de inestabilidad obtenidas mediante el método propuesto de balance armónico. Estas corresponden a un valor de $\gamma = 0.01$ (izquierda) y $\gamma = 0.03$ (derecha) para una frecuencia de modulación de 0.3π	24
3.10. Resultados de la dinámica con la ecuación no conservativa bajo confinamiento.	25
3.11. Comportamiento del potencial químico (izquierda) y del valor de gap (derecha) a través del cruce BCS-BEC.	28
3.12. Ocupación de los fermiones contra el cambio de su energía cinética para distintos regímenes del cruce (izquierda). A medida que se entra a el lado BEC la superficie de Fermi se va perdiendo. Correlación de los pares para distintos regímenes del cruce (derecha).	28
3.13. Perfil de densidad en lado BEC ($\eta = 1$) obtenido con las ecuaciones de BdG y su forma analítica.	32
3.14. Perfiles de densidad (izquierda) y parámetro de orden (derecha). Estos equivalen a tres regímenes del cruce: BEC ($\eta = 1$), Unitario ($\eta = 0$) y BCS ($\eta = -1$)	32
3.15. $ v_0 ^2(z)$ para el estado de menor energía con $k_{\perp} = 0$. (a) corresponde al régimen BCS, (b) a el Unitario y (c) al BEC. La descripción analítica en (a) corresponde a $v_o \sim \text{sen}(k_F) \exp(z/\xi_{\text{BCS}})$ con $\xi_{\text{BCS}} = 4.8k_F^{-1}$ lo cual es mayor al valor de $\xi_{\text{pair}} = 3.56k_F^{-1}$ encontrado en los cálculos de campo medio de la sección 3.4.	33
3.16. Distribución espacial para la fase compleja del solitón gris en dependencia a la velocidad. Arriba se muestra el lado unitario con $\eta = 0$ y abajo el lado BEC para ($\eta = 1$)	35
3.17. Perfil de densidad para el solitón gris en dependencia a la velocidad. A la izquierda se muestra el lado Unitario con $\eta = 0$ y a la derecha el lado BEC para ($\eta = 1$)	36
3.18. Distribución espacial para el parámetro de orden superfluido para el solitón gris en dependencia a la velocidad. A la izquierda se muestra el lado Unitario con $\eta = 0$ y a la derecha el lado BEC para ($\eta = 1$).	36
3.19. Velocidades de rompimiento del par ($\frac{v_{sp}}{v_F}$) y del sonido ($\frac{c}{v_F}$) con la variación de la longitud de dispersión.	37
D.1. Cambio en la energía entre el estado resonante y el canal abierto con la variación del campo magnético.	48

Agradecimientos

Agradezco el apoyo económico brindado por CONACYT con mi beca para realizar la maestría. De igual manera los apoyos en equipos y viajes brindados por los proyectos DGAPA-PAPIIT: IN109619 y CONACYT Ciencia-Básica: A1-S-30934.

Glosario de términos.

BCS

Primera teoría microscópica que explica la superconductividad, como un proceso de condensación de pares de fermiones (pares de Cooper). Sus siglas significan Bardeen–Cooper–Schrieffer en honor a los creadores.

BEC

Condensado de Bose-Einstein. Es un estado formado cuando un gas de bosones es enfriado por debajo de su temperatura crítica y una fracción mayoritaria de ellos pasan a ocupar un estado macroscópico.

BdG

Ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes. Permiten la descripción de un gas de pares de fermiones con distribuciones no homogéneas espacialmente y bajo la acción de potenciales externos.

GP

La ecuación de Gross-Pitaevskii. Describe un sistema de bosones interactuantes muy fríos (gas diluido) donde las interacciones a dos cuerpos son controladas mediante un potencial de contacto y este se mantiene por debajo de la temperatura crítica en su estado condensado.

Resumen

En este trabajo se desarrolló la dinámica de la ecuación de Gross Pitaevskii para un arreglo bidimensional cuadrado. La propagación en tiempo imaginario permitió encontrar el estado base y los parámetros para la descripción de sistemas atrapados. Se realizó la evolución en tiempo real tanto de sistemas confinados como sin confinamiento bajo modulación temporal del parámetro de interacción para comparar la existencia, los tiempos de formación y las variaciones de la distribución del espacio de momentos en la formación de patrones de Faraday. Una descripción teórica es realizada para describir las preferencias del sistema hacia ciertas zonas de inestabilidad en el condensado. El resultado es una predicción muy precisa mediante una ecuación de Mathieu, con la que se predijo el ancho y la posición de las zonas. Además fue posible predecir la dependencia de estas zonas con la frecuencia de modulación y las escalas de tiempo desde que se forma la primera zona hasta que los patrones desaparecen. De igual manera se encuentra que el sistema mantiene la formación de dichos patrones si se realiza la dinámica de un sistema atrapado. Se tienen en cuenta los efectos de disipación con el fin de analizar configuraciones cercanas a las observadas en los experimentos.

Para extender el estudio a la dinámica en gases moleculares ultrafríos se consideraron sistemas fermiónicos en el cruce BCS-BEC. En la simulación computacional del sistema se utilizaron las ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes, que forman un sistema autoconsistente. Particularmente se obtienen las soluciones para solitones estáticos (negros) y solitones en movimiento (grises). En el caso estático se calcularon los perfiles de densidad en tres regímenes distintos equivalentes a lado BEC, Unitario y BCS. Aquí se observan cambios en la profundidad de los perfiles, el ancho y las oscilaciones tanto en el perfil de densidad como en el parámetro de orden. El método empleado para resolver el sistema estático sirvió para extender el análisis a solitones moviéndose de manera ideal con una velocidad finita sobre un fondo en reposo. Se observaron las predicciones teóricas de cambios en la profundidad del solitón y la forma constante del valor de la fase, lo cual se conoce por la solución analítica de solitones grises de la ecuación de GP para el lado BEC. Esto permitió extender los resultados hacia otros regímenes donde tanto la profundidad de los solitones como las estructuras de la fase cambian en dependencia de la velocidad.

Abstract

In this work, we performed the dynamics of the Gross Pitaevskii equation for a square two-dimensional array. The propagation in the imaginary time allowed finding the base state and the parameters for the description of trapped systems. Real-time evolution of both confined and non-confined systems was performed under temporal modulation of the interaction parameter to compare the existence, formation times, and variations in the distribution of moment space in the formation of Faraday patterns. A theoretical description helped in understanding the preferences of the condensate towards certain zones of instability. A Mathieu equation was used to predict the width and position of the zones, thus obtaining an accurate prediction. In addition, the dependence of these zones with the modulation frequency and the time scales from when the first zone is formed until the patterns disappear is predicted. In the same way, we found that the system maintains the formation of these patterns if we perform the dynamics of a trapped system. The dissipation effects are taken into account in order to analyze configurations close to those observed in the experiments.

By extending the study to the dynamics in ultra-cold gases, we consider fermionic systems at the BCS-BEC crossover. For the computational simulation of the system, we use the Bogoliubov-de Gennes equations, which form a self-consistent system. We primarily get solutions for static solitons (black) and for moving solitons (gray). In the static case, we calculated the density profiles in three different regimes equivalent to BEC, Unitary, and BCS. Here, we observe changes in the depth, the width, and the oscillations of the density profiles. We also notice changes in the order parameter. The method used to solve the static system also helped us to extend our analysis to solitons ideally moving with a finite speed in a rest background. We confirmed the theoretical predictions of changes in soliton depth and the constant shape of the phase value, which is known from the analytical solution of gray solitons of the GP equation for the BEC side. This allowed us to extend the results to other regimes where both the depth of the solitons and the phase structures change depending on the speed.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La dinámica computacional en gases ultrafríos ha sido una herramienta muy eficaz en el desarrollo de aplicaciones y descripciones de sistemas cuánticos. El alcance y predicción en situaciones reales es lo que ha impulsado principalmente la optimización y generación de métodos para aumentar el poder de cálculo y la extensión a sistemas cada vez más complejos. Esto toma gran importancia en el campo de gases atómicos y moleculares que constituyen una oportunidad para extender la aplicación de los comportamientos cuánticos sujetos a las escalas microscópicas. Las primeras motivaciones con fines prácticos sobre excitaciones elementales y condensación en gases cuánticos se encuentran por primera vez en los estudios sobre superfluidez [1] y en los hallazgos experimentales sobre cuantización en la circulación [2], luego de que un conjunto de autores establecieran las bases de la teoría sobre el espectro de excitaciones elementales en superfluidos [3] y en las predicciones de vórtices [4]. El impacto de estos trabajos impulsó a otros autores a implementar métodos cada vez más precisos, para la descripción teórica, basados en técnicas variacionales y simulaciones de Monte Carlo para la descripción de las relaciones de dispersión y las variables termodinámicas [5]. De igual manera no faltaron las predicciones teóricas en los BEC basadas en modelos de gases ideales no interactuantes e interpretaciones de las excitaciones en gases que interactuaban débilmente [6].

Generalizaciones de estas descripciones se hicieron también [7][8], pero esta vez se tuvieron en cuenta sistemas atrapados. De igual manera, la primera observación de la existencia del BEC en ^{87}Rb [9] y ^{23}Na [10] abrió un nuevo mundo en la búsqueda de nuevas ideas e interpretaciones hacia los sistemas cuánticos de muchos cuerpos. Esto permitió el análisis de muchas de las características de los condensados y favoreció el estudio computacional de la ecuación de GP [7][8], descrita en el marco de interacciones de dos cuerpos mediante un potencial de contacto [11] de onda-s propio de la consideración de gas diluido.

La posibilidad experimental de cambiar la dimensionalidad mediante potenciales ópticos también impulsó la búsqueda de nuevas descripciones en las excitaciones elementales de los BEC. Esto hizo que algunos autores se propusieran configuraciones basadas en la amplificación paramétrica de tales excitaciones mediante patrones de Faraday en condensados. En estos sistemas es interesante el estudio de las propie-

dades de autoconfiguración, las cuales se manifiestan en la evolución temporal de sistemas no lineales, consecuencia de las interacciones interatómicas. La observación de dichos patrones [12] ha permitido corroborar las características amplificadas por modulaciones externas de la trampa o directamente modulando la interacción de onda-s con campos magnéticos propuesta por [13][14], observándose la influencia de la dimensión y los modos transversales en sistemas reales.

1.2. Motivaciones

La primera parte de este trabajo es una guía para la descripción de estos patrones en sistemas reales, donde se realiza la modulación temporal del parámetro de interacción. Esto es realizado mediante la simulación de la ecuación de GP y la implementación de un estudio basado en la teoría de Floquet. La observación de patrones de Faraday también ha despertado interés hacia sistemas fermiónicos desde la primera observación de condensación de Bose-Einstein en un gas molecular, como lo fue en ^{40}K [15] y ^6Li [16]. Los experimentos con gases moleculares son el reflejo del concepto de gases diluidos en sistemas fermiónicos, en ellos se controla la variación de campos magnéticos en mezclas hiperfinas interactuantes mediante onda-s predominantemente, siendo posible al estricto control sobre la relación entre el radio de acción de las fuerzas moleculares y las distancias interatómicas. En el proceso de configuración mediante la manipulación de estos campos externos, las especies atómicas son enviadas hacia canales enlazados resonantes controlados por la resonancia de Feshbach [17][18], estos conforman las nuevas características del sistema y definen las escalas de distancia y energía. En la figura 1.1 (tomada de [19]) se observa como varían las escalas de distancias de los pares a través del cruce. De igual manera las interacciones también pueden cambiar el signo manteniendo la estabilidad sin confinamiento, contrario al sistema homogéneo BEC y el rango de las interacciones está determinado por el valor modular de la longitud de dispersión, el cual puede variar desde regímenes de valor modular pequeño (BEC, BCS) hasta regímenes con longitud de dispersión mayor que la distancia interatómica pero manteniendo el carácter robusto de la condición de gas diluido [20].

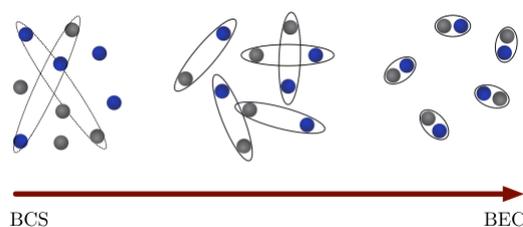


Figura 1.1. Vista esquemática de las dimensiones moleculares de los estados resonantes.

Estas interpretaciones, en conjunto con la continuidad que exhiben las variables termodinámicas, hacen posible que la teoría de Bogoliubov para sistemas con pequeñas fluctuaciones sobre el nivel macroscópico [21] encuentre un punto común con la

descripción de superfluidez para la teoría BCS, abriendo nuevas puertas para las descripciones de campo medio mediante la extensión de la ecuación de GP o analizando el problema de muchos cuerpos mediante un sistema no interactuante de cuasipartículas. Aunque esta interpretación no contempla las descripciones de oscilaciones de baja densidad (fonones) o modos de Anderson, sí describe las excitaciones con gap de la teoría de Landau para el superfluido describiendo la presencia del mínimo rotón (mínimo local en p_0 observado en la figura 1.2 extraída de [22]).

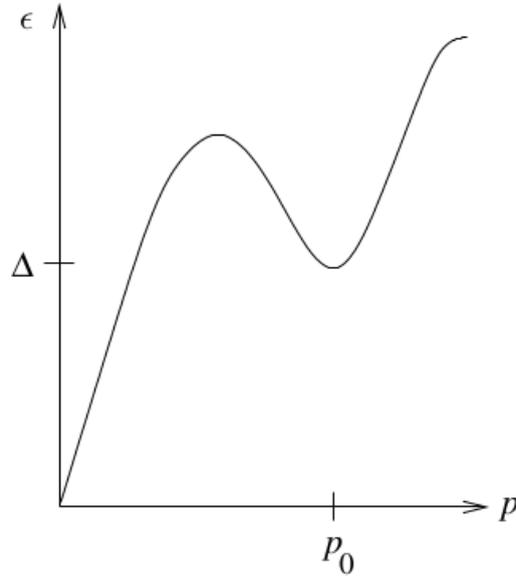


Figura 1.2. Espectro de excitaciones elementales en un superfluido de ^4He .

El mínimo del espectro de excitaciones está determinado por la cantidad Δ , que es la mitad de la energía requerida para romper un par, entonces la relación de dispersión en la vecindad del mínimo tiene la forma [23]:

$$\epsilon_p = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*} \quad (1.1)$$

Los parámetros en la ecuación 1.1 están determinados por las propiedades en cada régimen, de manera muy particular revela el carácter más universal en el régimen Unitario, donde todas las magnitudes están en el orden de las escalas de la teoría BCS. Por ejemplo, los valores del gap en el lado BCS y BEC coinciden con sus respectivos semi valores de energía del enlace molecular, mientras que, en el régimen Unitario los valores están en el orden de la energía de Fermi y la escalas en las longitudes de coherencia son $\xi \sim k_F^{-1}$. De igual manera las mediciones de flujo y velocidades críticas muestran mayores valores, estando en el orden de la velocidad de Fermi [24], esto último se abordará mediante las ecuaciones de campo medio de la teoría BCS, como velocidades límites en la existencia de defectos topológicos.

Encontrar descripciones continuas en el cruce BCS-BEC, que describan a su vez el comportamiento de regímenes más correlacionados hace valorar en diferentes situaciones cuál es la herramienta a utilizar. Nuevas descripciones y modelos han surgido que contemplan, para cierta región de interés, el comportamiento de la relación de dispersión encontrada en las ecuaciones del gap de la teoría BCS. En [25]

por ejemplo, se observa el beneficio de introducir la corrección de Lee-Huang-Yang [26] para vorticidades en condensados rotantes a medida que es dejado el lado BEC y se entra en el cruce BCS-BEC, esta podría ser una de las futuras extensiones de los cálculos realizados en este trabajo, para llevar la dinámica a otros regímenes dentro del cruce y analizar las consecuencias en las variaciones del "breathing mode". De igual manera la idea también consistiría en poder describir el comportamiento de dichos patrones del otro lado de la resonancia correspondiente al lado BCS. Algunas soluciones a este problema pudieran ser encontradas revisando propuestas que introducen otras discusiones para el comportamiento del potencial químico en la descripción de la formación de patrones [27].

La segunda parte de este trabajo fue la introducción a la dinámica en tiempo real para sistemas fermiónicos interactuantes. Primeramente se analizaron las soluciones para un sistema homogéneo [28] como la base para la implementación de futuros defectos topológicos. Estas ecuaciones permiten entender el comportamiento del potencial químico, parámetro de orden superfluido, correlaciones, límites de velocidades en la propagación de los defectos y más importante aún, brinda un comportamiento continuo en la descripción de la relación de dispersión. Esto busca como objetivo la futura implementación de mecanismos que utilicen teorías efectivas, como la teoría funcional de la densidad dependiente del tiempo (TFDDT), para la dinámica de gases fermiónicos [29] y extenderlo a procesos de formación de patrones de Faraday a lo largo del cruce. Recientemente fue probada su aplicabilidad en simulaciones de turbulencias cuánticas [30] lo cual abre nuevas interpretaciones hacia la observación de defectos topológicos.

Los sistemas fermiónicos son sistemas fuertemente interactuantes, por lo que es posible obtener comportamientos de este tipo en sistemas de pocos fermiones. Esto abre todo un nuevo campo en la dinámica y comprensión de fases exóticas en estos nuevos sistemas. Para una futura comprensión de este tipo de dinámica se introducen algunos conceptos y métodos que serán útiles para avanzar hacia esta descripción efectiva, donde se considera una reinterpretación basada en la teoría local de la densidad (LDA) de las ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes para un problema de cuasipartículas [29]. El estudio de excitaciones localizadas como vórtices y muros de dominios hacen que los intereses en gases diluidos aumenten. Estos propician el desarrollo en el control de las propiedades del condensado, la precisión en técnicas para imprimir fases y el desarrollo de metodologías para el rastreo no destructivo de las imágenes, como se puede observar en la realización de los primeros experimentos [31]. La longitud de coherencia en los condensados está determinada por los valores del potencial químico, entonces la forma más o menos empinada de la densidad es una medida del aporte a la energía total de la presión o energía cinética. Esto es una clara manifestación del principio de incertidumbre y determina la resolución óptica de las características o estructuras dentro de los perfiles de densidad.

Los solitones son ondas de materias que se propagan por largas distancias dentro del sistema sin deformación producto a las no linealidades del medio. Solitones oscuros son una consecuencia de los saltos en la fase proporcionados por técnicas de impresión de fase llevadas a cabo por láseres (figura 1.3 tomada de [31]) en condensados con interacciones repulsivas, manifestando un cambio en la densidad caracterizada por las escalas espaciales de la longitud de coherencia.

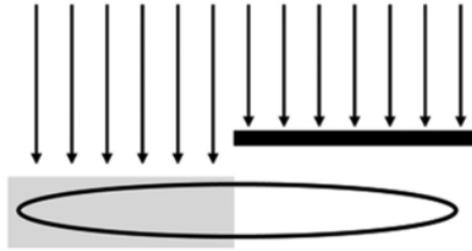


Figura 1.3. Proceso de impresión de fase a un condensado con la forma de cigarro. Esto divide el condensado en dos hemisferios a ambos lados del solitón en la densidad.

La caracterización de estas estructuras está determinada por la forma que desarrolla el cambio de densidad en la dimensión transversal a la división en dos hemisferios debido a las diferentes formas de atrapamiento 3D. Esto abre todo un espectro muy interesante donde se han reportado inestabilidades de serpiente en condensados homogéneos con decaimiento en vórtices y antivórtices, formaciones de líneas de vórtices y turbulencias. El interés de esta investigación se enfoca en los solitones de tipo kink los cuales no presentan estas inestabilidades transversales y son de gran interés en sistemas cuasi-unidimensionales [31]. Recientemente se han mostrado avances en los límites de velocidades y resolución, en [32] las nuevas técnicas hacen posible estabilizar solitones más anchos haciendo más grande la longitud de coherencia, pudiendo detectar solitones con velocidades muy pequeñas en proporción a la velocidad del sonido en el medio. Estos nuevos avances son una motivación a las descripciones teóricas de solitones y muros de dominios tanto en BEC [33] como su extensión a sistemas fermiónicos. Ya varios autores han propuesto nuevas metodologías para la comprensión de estos sistemas fermiónicos como [34][35][36][37], donde estudian excitaciones del parámetro de orden superfluido y describen varios aspectos de interés para la comprensión de la dinámica en tiempo real. Se comenzó analizando el sistema de ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes que se obtiene directamente de la teoría BCS. Este es un sistema infinito, acoplado, y con divergencias introducidas por la definición en sí misma del potencial de contacto de los pares, los cuales son aspectos muy parecidos a tomar en cuenta en las ecuaciones dependientes de tiempo para la aproximación local de la densidad en el superfluido (TDSLDA). Entonces bajo estas características para el sistema acoplado con amplitudes de cuasipartículas, se resuelven las ecuaciones para solitones en reposo (negros) y solitones en movimiento (grises) en un gas ideal en reposo. Esto lleva a una mejor comprensión de los conceptos de cambio de fase, muros de dominios y límites de velocidades establecidos por la velocidad del sonido en el lado BEC y la velocidad de rompimiento del par en el lado BCS.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se muestran algunos conceptos y resultados útiles para entender el desarrollo y los métodos propuestos en el capítulo siguiente. Se comenzó a describir el condensado como un sistema de muchos cuerpos en función de los operadores de campo y se establecieron los límites donde es correcto introducir las consideraciones de Bogoliubov para describir la condensación hacia un estado macroscópico. Se establecen ciertos criterios tomando en cuenta los conceptos de dispersión a bajas energías e interacciones efectivas que permiten describir la interacción de los bosones mediante interacciones efectivas. Se analizan algunas características interesantes en el estado base de los sistemas atrapados y en la dinámica de sistemas disipativos descritos por la ecuación amortiguada de GP, como el potencial químico y las dimensiones del condensado. Posteriormente se describen algunos de los argumentos más importantes en el estudio de gases moleculares, donde se controla la interacción de los pares mediante la resonancia de Feshbach la cual introduce al estudio de campo medio del cruce BCS-BEC mediante la teoría BCS. Por último se introducen los conceptos fundamentales de esta teoría como lo son la formación de pares, transformaciones de Bogoliubov y cuasipartículas y las ecuaciones del gap. Así como la extensión a sistemas dependientes de la posición mediante las ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes.

2.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii

2.1.1. Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo.

Para encontrar la evolución de un sistema de bosones interactuantes se empezará definiendo la densidad lagrangiana válida para la función de onda de muchos cuerpos (Apéndice A.1) considerando la dependencia temporal:

$$\mathcal{L}(\Phi^{(n)}, \nabla\Phi^{(n)}, \dot{\Phi}^{(n)}) = i\hbar\Phi^{*(n)}\partial_t\Phi^{(n)} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Phi^{*(n)}\nabla\Phi^{(n)} - (V_e + V)\Phi^{*(n)}\Phi^{(n)} \quad (2.1)$$

se define el asociado conjugado canónico de la función de onda de muchos cuerpos:

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}^{(n)}} = i\hbar\Phi^{*(n)} \quad (2.2)$$

esto permite determinar la forma de la densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \Pi(\mathbf{r}, t)\dot{\Phi}^{(n)} - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Phi^{*(n)}\nabla\Phi^{(n)} + (V_e(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}))\Phi^{*(n)}\Phi^{(n)} \quad (2.3)$$

que permitirá encontrar el Hamiltoniano teniendo en cuenta:

$$\hat{H}(t) = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

teniendo en cuenta esto, $\hat{H}(t)$ puede ser expresada, siendo consistentes con la descripción inicial de la función de onda de muchos cuerpos sin la dependencia temporal, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_n & \left[\langle n_1, n_2 \dots | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \rangle \sum_i \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right) \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots | n_1, n_2 \dots \rangle + \right. \\ & \left. + \langle n_1, n_2 \dots | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \rangle \sum_{i < j} V_{\text{int}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots | n_1, n_2 \dots \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

utilizando A.1 se escriben ambos términos por separado como:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \sum_i \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{i-1} \mathbf{r}_{i+1} \dots \mathbf{r}_n \rangle \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right) \times \\ & \times \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{i-1} \mathbf{r}_{i+1} \dots \mathbf{r}_n | \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & = \frac{1}{n} \sum_i \int d^3\mathbf{r}_i \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \\ \hat{H}_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_n \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_j) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{i-1} \mathbf{r}_{i+1} \dots \mathbf{r}_{j-1} \mathbf{r}_{j+1} \dots \mathbf{r}_n \rangle \times \\ & \times V_{\text{int}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{i-1} \mathbf{r}_{i+1} \dots \mathbf{r}_{j-1} \mathbf{r}_{j+1} \dots \mathbf{r}_n | \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \hat{\psi}(\mathbf{r}_j) \\ & = \frac{1}{n(n-1)} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int d^3\mathbf{r}_1 \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_j) V_{\text{int}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \hat{\psi}(\mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (2.6)$$

entonces realizando la suma se obtiene la expresión:

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_{\text{int}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \quad (2.7)$$

por consiguiente si se toma $V_{\text{int}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ con $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ (C.1) y se consideran

las variaciones de los operadores bosónicos suaves y el rango de acción de las fuerzas interatómicas pequeño en comparación con el espaciamiento entre partículas:

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

entonces:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) &= [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] = [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}_1] + [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}_2] \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) &= \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + g\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Este resultado puede ser modificado para obtener una ecuación que describa el condensado evitando un problema de modos infinitos con funciones de onda simétricas y las soluciones radiales para los diferentes modos. Para ello se considera la función de onda del condensado tomando en cuenta la máxima población del estado menos energético, como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{r}) &= \hat{a}_0 u_0(\mathbf{r}) + \sum_{i \neq 0} \hat{a}_i u_i(\mathbf{r}) \\ \hat{\psi}(\mathbf{r}) &= \psi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{a}_0^\dagger |N_0\rangle &= \sqrt{N_0 + 1} |N_0 + 1\rangle \\ \hat{a}_0 |N_0\rangle &= \sqrt{N_0} |N_0 - 1\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

tomando el límite termodinámico:

$$\hat{a}_0^\dagger |N_0\rangle \approx \hat{a}_0 |N_0\rangle \approx \sqrt{N_0} |N_0\rangle \quad (2.12)$$

por lo tanto, considerando que la población térmica es nula, la función del condensado es $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N_0} u_0(\mathbf{r})$ y la expresión queda :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + g\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.13)$$

como la ecuación que describe la evolución del condensado.

2.1.2. Solución estática y límite de Thomas Fermi.

La función de onda del condensado cumple la condición de normalización, la cual está determinada por el número de partículas de la siguiente manera:

$$\int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = N \quad (2.14)$$

bajo esta condición se minimiza el funcional de energía de la ecuación 2.8 de la forma $E - \mu N$, obteniendo la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

en esta ecuación el potencial químico es el eigenvalor de energía, diferente a un sistema sin interacciones donde el eigenvalor es por definición la energía por partícula.

Para sistemas atrapados con un gran número de átomos, los cuales tienen interacciones repulsivas, las dimensiones de la nube pueden ser lo suficientemente largas y el sistema encontrarse tan frío como para considerar la energía potencial y de interacción muy superior a la energía cinética. Esto se conoce como la aproximación de Thomas Fermi y da una medida de las dimensiones del sistema. Desde la ecuación 2.15 y bajo esta consideración se tiene que:

$$V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

con la solución

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V(\mathbf{r})}{g} \quad (2.17)$$

los límites de la nube están dados entonces en $V(\mathbf{r}) = \mu$ donde la solución desaparece. Para una trampa potencial de la forma:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2) \quad (2.18)$$

los límites del condensado estarán determinados por la condición:

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.19)$$

2.1.3. Ecuación amortiguada.

Los sistemas reales de muchos átomos manifiestan procesos de amortiguamiento en los experimentos donde crecen las propiedades de excitaciones colectivas. La ecuación general para la dinámica del condensado tomando en cuenta procesos de disipación puede ser escrita de manera compacta de la siguiente manera [38]:

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) = \hat{\mathcal{K}}\psi(\vec{r}, t) \quad (2.20)$$

donde el operador $\hat{\mathcal{K}}$ contiene una parte no hermitiana relacionada con los procesos que llevan el sistema al equilibrio donde se satisface la ecuación 2.15. Para sistemas donde la desviación desde el equilibrio es pequeña se puede escribir la parte no hermitiana de la forma siguiente:

$$-i\lambda \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) - \mu\psi(\mathbf{r}) \right] \quad (2.21)$$

la ecuación general que describe tal sistema con relajación al equilibrio es:

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) = (1 - i\lambda) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.22)$$

esta tiene una solución de la forma:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t}(\psi_g + \delta) \quad (2.23)$$

con ψ_g la solución para el estado base del condensado y δ una excitación coherente con una dependencia $e^{-i\omega_0(\lambda)t}$ donde $\omega_0(\lambda)$ es compleja. Este término contiene la información de amortiguamiento e irá a cero en el equilibrio.

2.2. Cruce BCS-BEC. Teoría BCS.

2.2.1. Campo medio

La consideración de gas diluido para un gas de fermiones permite introducir una descripción de campo medio basada en la teoría BCS en los diferentes regímenes del cruce. Para ello se tomará en cuenta una mezcla equilibrada de estados hiperfinos atómicos $N_\uparrow = N_\downarrow$ que permite la formación de pares entre los diferentes estados. Entonces el sistema es equivalente a uno de bosones compuestos cada uno por dos fermiones. La formación de un par de fermiones es conectada con la creación de un bosón con la siguiente relación entre los operadores [19]:

$$\hat{b}_\mathbf{q}^\dagger = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (2.24)$$

con $g_{\mathbf{k}}$ una función de dos cuerpos. Esta relación tiene implícito el principio de exclusión de Pauli ($\uparrow\downarrow$) y entonces $\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger$ y $\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$ son operadores fermiónicos que anti-conmutan ($\{\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger, \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger\} = 0$) y crean un fermión con momento \mathbf{k} y espín \uparrow y momento $\mathbf{q} - \mathbf{k}$ y espín \downarrow respectivamente. La descripción de la función de onda del estado base BCS puede ser también escrita teniendo en cuenta la relación anterior entre operadores como un estado coherente de bosones:

$$\Pi_{\mathbf{k}}(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle = \Pi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \exp\left(\sum_{\mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger\right) |0\rangle \quad (2.25)$$

donde se ha tenido en cuenta que $(\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger)^2 = 0$.

Para controlar la formación de los estados enlazados es necesaria la introducción de campos magnéticos controlados mediante las resonancias de Feshbach (D.1). El Hamiltoniano que describe un sistema formado por pares en el gas de Fermi tiene la forma:

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad (2.26)$$

En el estudio de este sistema se consideraron excitaciones sobre el estado base del condensado. Esto es posible introduciendo la aproximación de campo medio en conjunto con una descripción de cuasipartículas. Entonces el término de interacción entre pares será descrito tomando en cuenta:

$$\begin{aligned}
 AB &\approx \langle A \rangle B + A \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle, \\
 A &= \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \\
 B &= \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde los $\langle \ \rangle$ son iguales a $\langle \phi | | \phi \rangle$ y representan el valor esperado del operador en el estado BCS con la forma 2.25. Luego:

$$\hat{H}_{MF} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}^* \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger - \Delta^2 \tag{2.28}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\mathbf{k}}^* &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \rangle \\
 \Delta_{\mathbf{k}} &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

esto puede ser escrito de manera más compacta tomando $\hat{\psi}^\dagger = (\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger, \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow})$:

$$\hat{H}_{MF} = -\Delta^2 + \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) + \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^\dagger \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & \mu - \epsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \tag{2.30}$$

Para diagonalizar \hat{H}_{MF} se aplica la transformación de Bogoliubov:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}^* & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = A_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Partiendo de esto, las ecuaciones de campo medio pueden ser descritas teniendo en cuenta las excitaciones del estado base y las relaciones de conmutación quedarán definidas para los nuevos operadores de la forma $\{\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}, \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger\} = 1$ y $A_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^\dagger = I$ bajo la condición que exige el estado base BCS $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$. Con esta regla y considerando que las excitaciones no interactúan o el Hamiltoniano diagonal en la nueva base se puede escribir el tercer término de 2.30 como:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger & \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}^* & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & \mu - \epsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \\ -v_{\mathbf{k}}^* & u_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

donde se ha introducido:

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \\ -v_{\mathbf{k}}^* & u_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Si desarrollamos un poco más la expresión 2.32 llegamos a :

$$\begin{pmatrix} -2|u_{\mathbf{k}}||v_{\mathbf{k}}|\Delta + (\mu - \epsilon_{\mathbf{k}})(|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2) & 0 \\ 0 & 2|u_{\mathbf{k}}||v_{\mathbf{k}}|\Delta - (\mu - \epsilon_{\mathbf{k}})(|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2) \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

donde se ha obligado a que la matriz sea diagonal exigiéndose la condición:

$$2(\epsilon_k - \mu)|u_k||v_k| + |\Delta_k|(|v_k|^2 - |u_k|^2) = 0 \quad (2.35)$$

entonces las amplitudes tendrán la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |u_k|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k - \mu}{\sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2}} \right), \\ |v_k|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k - \mu}{\sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2}} \right), \\ u_k v_k &= \frac{\Delta_k}{2\sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta_k|^2}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

y 2.30 se puede escribir ahora como:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MF} &= -\Delta^2 + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - \mu) + \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger & \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & E_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \\ &= -\Delta^2 + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - \mu - E_{\mathbf{k}}) + \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \\ &= E_{BCS} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \end{aligned} \quad (2.37)$$

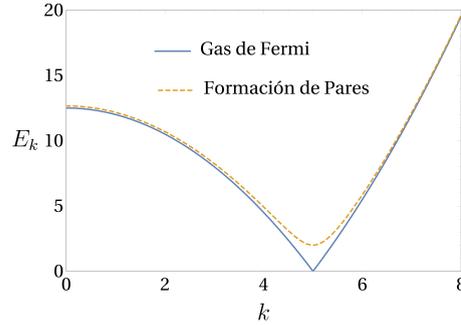


Figura 2.1. Relación de dispersión para las excitaciones de cuasipartículas.

El cambio de operadores fermiónicos a los operadores de cuasipartículas permite entender el estado homogéneo de condensación de pares y a la vez las excitaciones. La creación de una cuasipartícula $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ sobre un estado N expresa que es posible crear un estado con $N+1$ partículas añadiendo una en (\mathbf{k}, σ) o retirando una de $(-\mathbf{k}, -\sigma)$ para un sistema con $N+2$ partículas. Visto de otra manera, estas excitaciones describen huecos para $k < k_F$ y para $k > k_F$ describen excitaciones de partículas. En el gráfico 2.1 se observa el efecto de la formación de pares en la relación de dispersión, esta abre una brecha para ambos lados del nivel de Fermi que es igual a la mitad de la energía de enlace del par.

2.2.2. Ecuación del Gap

Partiendo desde la ecuación 2.29 y teniendo en cuenta la amplitud de condensación para el gas homogéneo $\langle \phi | \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger | \phi \rangle = u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}$ la ecuación del gap tiene la forma:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu)^2 + |\Delta_{\mathbf{k}'}|^2}} \quad (2.38)$$

con:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V & \text{si } |\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu|, |\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu| < \omega_d \\ 0 & \text{si } |\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu|, |\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu| > \omega_d \end{cases} \quad (2.39)$$

Esto representa el potencial efectivo de interacción entre pares y describe el proceso de formación de pares bajo un potencial atractivo. Aquí se ha introducido una cantidad ω_d , que es una pequeña brecha sobre el nivel de Fermi y controla el rango de interacción. Introduciendo la forma del potencial efectivo la ecuación del gap tiene la forma:

$$-\frac{1}{V} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (2.40)$$

2.2.3. Ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes

La principal aplicación de esta teoría microscópica es la implementación a sistemas inhomogéneos, ya que permite la introducción de dependencias espaciales. Los resultados anteriores permitieron profundizar en los conceptos de estado base BCS y de pequeñas excitaciones. Todo este análisis parte desde el conocimiento a priori del Hamiltoniano de la teoría 2.26, el cual fue obtenido considerando la forma siguiente de los operadores de campo:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \\ \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \end{aligned} \quad (2.41)$$

en estos la dependencia espacial está bien determinada por ondas planas, lo cual permite una descripción basada solamente en los operadores fermiónicos de creación y aniquilación. Para extender este resultado a un problema con dependencia espacial se considera la misma transformación de Bogoliubov pero se toma en cuenta esta dependencia en las amplitudes de cuasipartículas, de manera que los operadores de campo toman la forma siguiente [39]:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) &= \sum_n (\hat{\gamma}_{n\uparrow} u_n(\mathbf{r}) - \hat{\gamma}_{n\downarrow}^{\dagger} v_n^*(\mathbf{r})) \\ \hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) &= \sum_n (\hat{\gamma}_{n\downarrow} u_n(\mathbf{r}) + \hat{\gamma}_{n\uparrow}^{\dagger} v_n^*(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (2.42)$$

esta transformación diagonaliza el hamiltoniano de campo medio \hat{H}_{eff} :

$$\hat{H}_{eff} = \int d^3\mathbf{r} \sum_{\alpha} \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{H}_0 \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

con $\hat{H}_0 = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + V(\mathbf{r})$.

Luego si se hace:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}), \hat{H}_{eff}] &= \hat{H}_0 \hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \\ [\hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}), \hat{H}_{eff}] &= \hat{H}_0 \hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) - \Delta^*(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

y se introducen las transformaciones 2.42 se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon u(\mathbf{r}) &= \hat{H}_0 u(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \\ \epsilon v(\mathbf{r}) &= -\hat{H}_0 v(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

que puede ser entendido como un sistema de ecuaciones acopladas con energías ϵ_n y eigenfunciones $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ tal que :

$$\epsilon_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\hat{H}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo se realizan descripciones para dos tipos de sistemas. En la primera parte se analizan los procesos de autoconfiguración (secciones 3.1, 3.2 y 3.3) en sistemas bosónicos. Esta parte inicia (sección 3.1) con la descripción de un método para realizar un análisis de Floquet a las ecuaciones que rigen la dinámica del condensado, este se basa en encontrar las soluciones del sistema determinadas por un comportamiento periódico de sus parámetros. Las secciones 3.2 y 3.3 describen las simulaciones realizadas para comprender las formaciones de patrones de Faraday, los valores de los parámetros que aquí se introducen son tomados semejantes a las simulaciones hechas en [13][14] y representan los valores del montaje experimental que allí se describe, con sus respectivas transformaciones de unidades. En una segunda parte (secciones 3.4, 3.5 y 3.6) el análisis es tomado sobre sistemas fermiónicos. La sección 3.4 describe el comportamiento de las ecuaciones del gap, correlaciones y aspectos generales para un sistema homogéneo. En el resto de las secciones se introducen dependencias espaciales y se hace un análisis teórico de como pudieran comportarse los solitones en el cruce BCS-BEC.

3.1. Balance armónico

En esta sección se propone la aplicación del método de balance armónico [40][41] a la ecuación de Mathieu, para describir la estabilidad del condensado luego de introducir una perturbación, en secciones posteriores se expondrá cómo se justifica la aplicación de dicha ecuación para la descripción de estos procesos. El método empleado describe las curvas de transición en la relación entre parámetros, esto es posible proponiendo soluciones en forma de series de Fourier a la ecuación:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\gamma(1+k^2)\frac{du}{dt} + \left[(1+\gamma^2)\Omega(k)^2 + 4k^2\alpha \cos(2\omega t)\right] u = 0 \quad (3.1)$$

Las series tienen la forma de la expresión 3.2 y representan funciones periódicas con período 4π (n impar) y 2π (n par).

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right) \quad (3.2)$$

Primeramente se introduce el cambio de variable $\tau = 2\omega t$ en la ecuación 3.1 tal que:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\gamma' \frac{du}{dt} + \left[\frac{(1 + \gamma^2)}{4\omega^2} \Omega(k)^2 + \frac{4\alpha'}{\omega^2} \cos(\tau) \right] u = 0 \quad (3.3)$$

con $\alpha' = \alpha k^2$ y $\gamma' = \gamma(1 + k^2)$. Luego introduciendo 3.2 se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} a_n \left[\frac{\Omega^2(1 + \gamma^2)}{4\omega^2} - \frac{n^2}{4} \right] \cos\left(\frac{n}{2}\tau\right) + b_n \left[\frac{\Omega^2(1 + \gamma^2)}{4\omega^2} - \frac{n^2}{4} \right] \sin\left(\frac{n}{2}\tau\right) \\ a_n \cos\left(\frac{n}{2}\tau\right) \frac{\alpha'}{\omega^2} \cos(\tau) + b_n \sin\left(\frac{n}{2}\tau\right) \frac{\alpha'}{\omega^2} \cos(\tau) + b_n \frac{\gamma' n}{\omega^2} \cos\left(\frac{n}{2}\tau\right) \\ - b_n \frac{\gamma' n}{\omega^2} \sin\left(\frac{n}{2}\tau\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

El siguiente paso es agrupar los términos con igual frecuencia obteniendo un conjunto homogéneo e infinito de ecuaciones para a_n y b_n para ambos casos n_{par} y n_{impar} . Entonces la solución no trivial de este sistema es encontrada obligando el determinante a ser 0, lo cual puede ser resuelto aplicando un eigensolver para los valores propios del sistema Ω^2 .

Para n_{par} se encuentra que el determinante tiene la forma:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 & \frac{4\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & \Omega^2 - \frac{4\omega^2}{1+\gamma^2} & \frac{-4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \Omega^2 - \frac{4\omega^2}{1+\gamma^2} & 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & \Omega^2 - \frac{16\omega^2}{1+\gamma^2} & -2\frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 2\frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \Omega^2 - \frac{16\omega^2}{1+\gamma^2} & 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

y para n_{impar} :

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \frac{\omega^2}{1+\gamma^2} + \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & \frac{-1}{2} \frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \Omega^2 - \frac{\omega^2}{1+\gamma^2} - \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & \Omega^2 - \frac{9\omega^2}{1+\gamma^2} & -\frac{3}{2} \frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & \frac{3}{2} \frac{4\omega\gamma'}{1+\gamma^2} & \Omega^2 - \frac{9\omega^2}{1+\gamma^2} & 0 & \frac{2\alpha'}{1+\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Para $\gamma = 0$ se obtienen las soluciones para el caso no disipativo como se verá posteriormente. En el caso de $\gamma \neq 0$ el procedimiento requiere la discretización de soluciones reales de eigenvalores sobre todas las soluciones que se obtienen. Además en ambos casos la relación entre parámetros debe ser adecuada considerando el cambio a γ' y α' .

3.2. Patrones de Faraday. Dinámica conservativa.

La formación de patrones de Faraday en condensados de Bose-Einstein es equivalente a la formación de inestabilidades en fluidos bajo aceleración oscilatoria vertical. La preferencia del sistema a seleccionar las longitudes de onda una vez que se forman las inestabilidades son una característica del sistema. El mecanismo de excitación de las no linealidades en la tesis se realiza modulando temporalmente los mecanismos de dispersión. Experimentalmente estos estudios son realizados cambiando la interacción mediante resonancias de Feshbach de manera general, mientras que para condensados de bajas dimensiones, es equivalente a modular temporalmente la frecuencia de la trampa en la dimensión del confinamiento fuerte [42]. Siguiendo esto, se analiza numéricamente la ecuación de GP donde se introducen modulaciones temporales en la longitud de dispersión:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\nabla^2\psi + V(r)\psi + c(t)|\psi|^2\psi \quad (3.7)$$

donde $c(t) = \frac{a(t)}{a} = 1 + 2\alpha \cos(2\omega t)$.

El sistema que se analizará es una representación local de un sistema atrapado más extendido, el cual puede ser considerado como un estado homogéneo bajo la influencia de un potencial $V(\mathbf{r}) = 0$, para todo el dominio, con condiciones de frontera periódicas. Este es bidimensional cuadrado de dimensiones de 200×200 unidades y en el inicio de la dinámica se le introduce un rompimiento de simetría espacial y se deja evolucionar, en tiempo real con el apoyo del código XMDS [43]; modulando temporalmente el parámetro de interacción [44]. En la figura 3.1 se muestra el perfil de densidad de la simulación, en este se captura el momento donde el sistema se autoconfigura formando patrones a la izquierda y cuando desaparecen a la derecha [13].

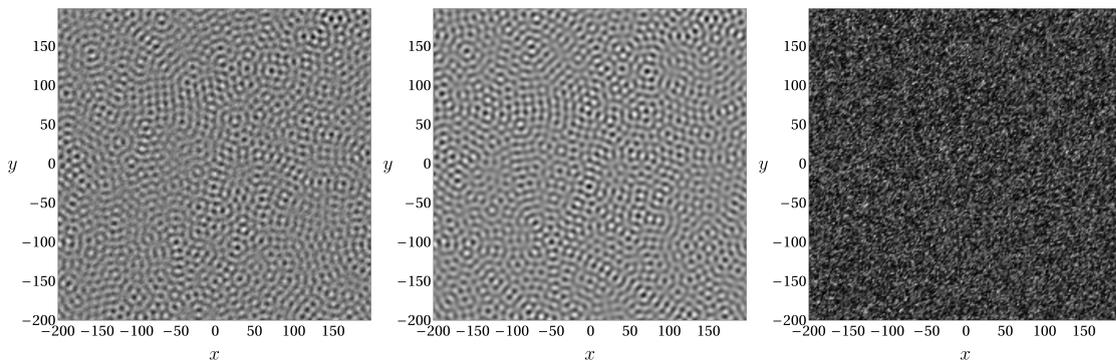


Figura 3.1. Perfil de densidad obtenido haciendo la dinámica de un sistema bidimensional cuadrado en tiempo real. Las distribuciones equivalen a tres tiempos diferentes (aumentando de izquierda a derecha) de la simulación.

Estos procesos de autoconfiguraciones temporales están ligados a la selección de frecuencias que provoca la resonancia entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de modulación externa. Para entender más de cerca que ocurre en la simulación se parte de la aproximación de un estado homogéneo, el cual puede ser entendido por una superposición, donde solo yacen ondas planas con pequeños

momentos ($k \rightarrow 0$). Luego se realiza una perturbación espacial, la cual excitará varios de los modos (ondas planas) del medio. La forma más sencilla de la perturbación tendrá la forma $1 + w(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. La forma del espacio de momentos cambiará en dependencia de como se elija la perturbación pero no afectarán los procesos de selección de frecuencias, solo cambiarán los tiempos de formación.

Un ejemplo de propuesta inicial para la perturbación es la introducción de múltiples modos, entonces el espacio de momentos estará descrito por una serie de anillos (un anillo por cada grupo de ondas planas con la misma energía, independientemente de la geometría) que describen diferentes grupos de ondas planas que se propagan sin preferencia en todas las direcciones y se dispersan entre ellas. Entonces la modulación, borra las huellas del estado inicial mediante procesos de dispersión y comienza la selección de cada grupo de ondas planas que cumplen la relación de resonancia, primero la primera zona y transitoriamente el resto. Con el paso del tiempo el sistema selecciona suficientes grupos de ondas planas como para que la selección por modulación pierda el control y ya no pueda competir con los procesos de dispersión de los demás modos con los modos seleccionados y de los modos seleccionados entre ellos, en otras palabras el sistema no puede seguir regulando el orden sin otro regulador externo como lo fue hasta cierto instante de tiempo la modulación. Otro punto de vista del cambio hacia un sistema más desorganizado pudiera estar dado por el aumento de interferencias inevitables luego de la organización temporal.

A esta distribución espacial le corresponde la descripción del espacio de momentos observada en la figura 3.2, en estas se pueden apreciar las zonas de inestabilidad para las cuales se configura el condensado. Inicialmente se forma la primera zona en un tiempo, el cual se encuentra que está conectado con el tamaño de la perturbación inicial, alcanzándose con mayor rapidez en cuanto mayor es la perturbación. El resto de las zonas se va formando justo después de formarse la primera y esto continúa sucesivamente hasta que el condensado vuelve a perder tales configuraciones.

De igual manera los tiempos en las auto-configuraciones del sistema también son sensibles a los cambios en la amplitud (α) y a la frecuencia (ω) de modulación, haciéndose más largos si estos parámetros disminuyen.

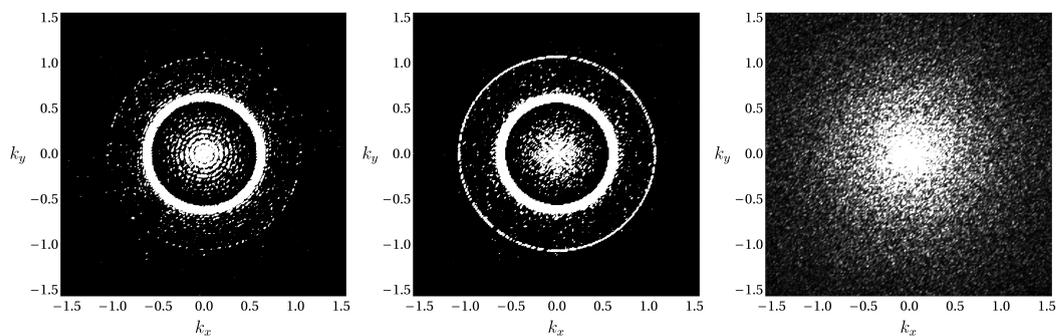


Figura 3.2. Distribución de momentos obtenida haciendo la dinámica de un sistema bidimensional cuadrado en tiempo real. Las distribuciones equivalen a tres tiempos diferentes (aumentando de izquierda a derecha) de la simulación.

En la figura 3.3 se muestra la configuración del espacio de momentos variando la frecuencia de modulación del parámetro de interacción en tres valores diferentes

(0.3π , 0.4π y 0.5π). Es posible observar cómo crece el radio de las distribuciones con el aumento de ω , al contrario del comportamiento encontrado en las distribuciones espaciales.

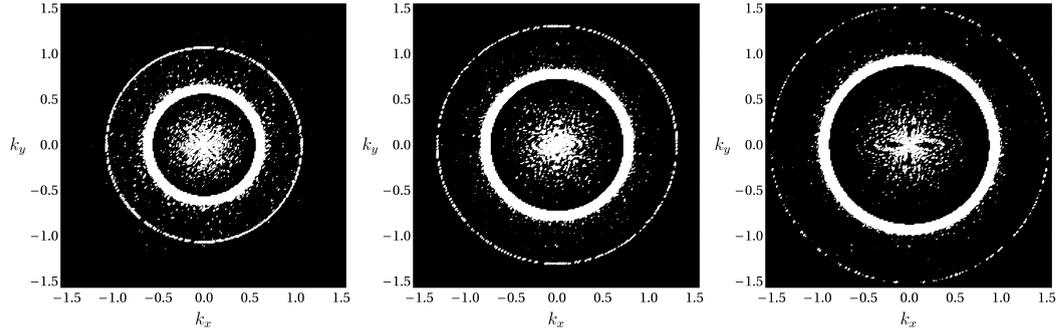


Figura 3.3. Distribución en el espacio de momentos para tres diferentes frecuencias de la modulación (0.3π , 0.4π y 0.5π). En cada caso la distribución equivale a el tiempo donde se han formado la dos primeras zonas visibles.

3.2.1. Análisis de estabilidad.

Para un sistema con ausencia de modulación ($\alpha = 0$) el condensado se encuentra en el estado base $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r})e^{-i\mu t}$. Si unido a esto se considera además que la distribución espacial es la correspondiente a un potencial plano ($V(\mathbf{r}) = 0$) $\mu = 1$ y $\psi_0(\mathbf{r}) = 1$, entonces la función de onda macroscópica del gas tendrá la forma de $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-it}$. Luego si se toma en cuenta que la modulación está encendida desde un inicio de la descripción del sistema, la función de onda macroscópica estará descrita ahora por:

$$\psi_{hom}(t) = e^{-it - \frac{\alpha}{\omega} \sin(2\omega t)} \quad (3.8)$$

Para analizar patrones de Faraday, se siguió la propuesta de la introducción de una perturbación espacial a el sistema homogéneo, esto permite analizar cómo evoluciona el condensado hacia sus inestabilidades y cómo cambian las distribuciones en el espacio de parámetros. Para ello se introduce una hipotética forma para el estado perturbado dada por [13]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{hom}(t) [1 + w(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (3.9)$$

donde $w(t)$ es la amplitud compleja de la perturbación. Esta propuesta para introducir un rompimiento de simetría permite encontrar mediante la ecuación de 3.7 la forma concreta de los coeficientes para ver emerger soluciones inestables luego de realizar la dinámica. A continuación, se presenta el análisis para encontrar la relación entre estos coeficientes:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = i \psi_{hom}(t) \left[(-i - 2i\alpha \cos(2\omega t)) (1 + w(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \frac{\partial}{\partial t} w(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \quad (3.10)$$

$$-\nabla^2\psi = \psi_{hom}(t)w(t)k^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} c(t)|\psi|^2\psi &= c(t) \left[(1 + u(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))^2 + (v(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))^2 \right] \psi \\ &\approx c(t) [1 + 2u(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \psi \\ &\approx \psi_{hom}(t) [1 + 3u(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + iv(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $u(t) = \text{Re}(w(t))$ y $v(t) = \text{Im}(w(t))$.

Agrupando los correspondientes términos real e imaginarios y considerando solo el primer orden de la perturbación se obtienen las ecuaciones para las amplitudes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= v(t)k^2 \\ \frac{d}{dt}v(t) &= -[u(t)k^2 + 2u(t)c(t)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

lo cual lleva a la ecuación de Mathieu [13] que describe el comportamiento de auto-configuración del condensado:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + [\Omega^2(k) + 4k^2\alpha \cos(2\omega t)] u = 0 \quad (3.14)$$

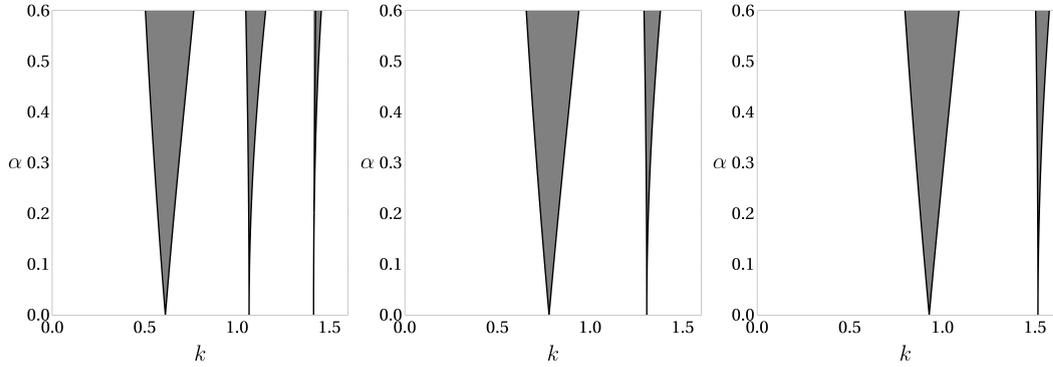


Figura 3.4. Zonas donde el condensado se vuelve inestable representado por las franjas grises en cada uno de los casos. Las configuraciones cambian dependiendo la frecuencia externa (0.3π , 0.4π y 0.5π) como se indicó que ocurre en la simulación numérica.

Las curvas de estabilidad para esta ecuación están determinadas por una serie infinita de resonancias localizadas en $k_n = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + (n\omega)^2}}$ donde n está dado por la condición de resonancia $\Omega(k_n) = n\omega$ entre la frecuencia externa 2ω y la frecuencia natural del sistema dada por la relación de dispersión $\Omega = k\sqrt{k^2 + 2}$. Lo anterior expuesto permite encontrar la relación entre α y k que describe el cambio en el ancho y posición de las zonas luego que el sistema forma los patrones como se muestra en la figura 3.4. Este resultado se encontró utilizando el método de la sección 3.1 y es consistente con [13].

3.2.2. Sistemas atrapados.

Se espera encontrar que los patrones observados en el anterior sistema 2D en un potencial plano ($V(\mathbf{r}) = 0$) también prevalezcan bajo la acción de una trampa. Esto introduce ciertos requisitos adicionales al cálculo, por lo que se reduce una de las dimensiones y luego se coloca el confinamiento, esperando que esto describa correctamente la generalidad de un sistema cuasi 1D.

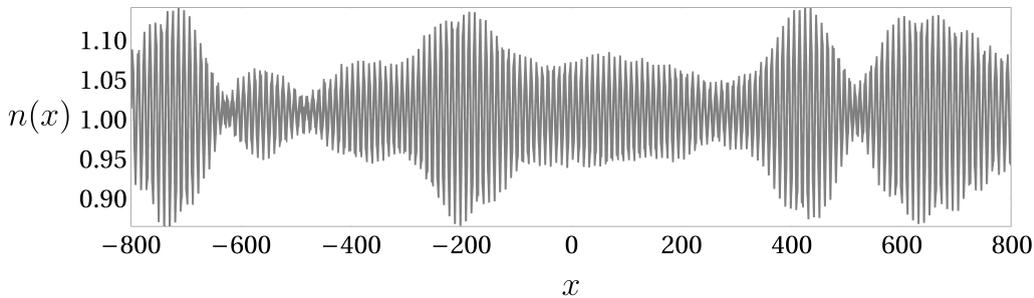


Figura 3.5. El perfil de densidad luego de la formación de patrones para un potencial plano en la dimensión más larga, para un configuración rectangular donde se ha hecho pequeña la dimensión transversal. Los parámetros utilizados fueron $\alpha = 0.2$ y $\omega = 0.3\pi$

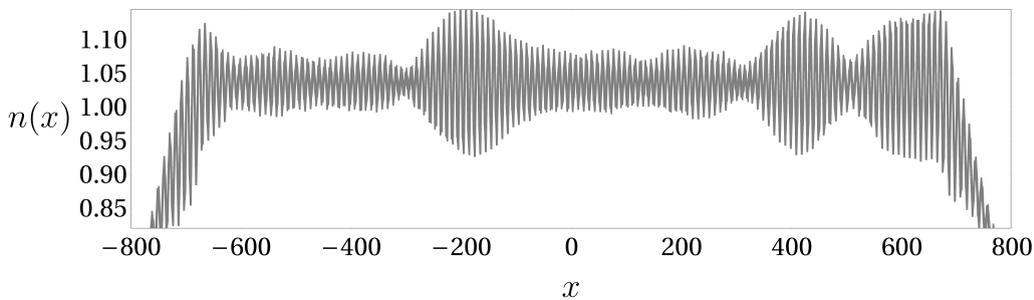


Figura 3.6. El perfil de densidad luego de la formación de patrones para un potencial plano en la dimensión más larga. Se ha colocado una trampa armónica ($\omega_x = 0.002$) manteniendo la configuración rectangular de la figura 3.5 y los mismos parámetros para la simulación. Se observa cómo los patrones surgen ahora envueltos por la forma parabólica de la densidad para el potencial armónico.

Se encontró que el sistema también se configura formando patrones (figura 3.5) siempre y cuando se mantenga el aporte (un tamaño pequeño pero distinto de 0) de la dimensión transversal. Previa simulaciones fueron realizadas sin tomar en cuenta esto y no se observa la formación de dichos patrones. De igual manera se analiza el peso de la tercera dimensión realizando una dinámica más costosa y esta demuestra que es válido el resultado 2D. Basados en la dinámica del sistema anterior procedemos a validar la existencia de estos patrones al colocar una trampa en nuestras simulaciones. El resultado es mostrado en 3.6 donde se encuentra que los patrones emergen envueltos en la estructura formada por la trampa armónica.

3.3. Patrones de Faraday. Dinámica no conservativa.

Siguiendo la metodología anterior la simulación puede ser extendida a sistemas reales y obtener el mismo grado de predicción para los patrones, para ello se introduce una corrección fenomenológica a la ecuación de GP [38]. La ecuación de GP bajo esta consideración es mostrada a continuación:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (1 - i\gamma)(-\nabla^2 - \mu + |\psi|^2)\psi + 2\alpha \cos(2\omega t) |\psi|^2 \psi \quad (3.15)$$

Los patrones emergen con una mayor simetría, debido al hecho, de que el sistema ahora limita las frecuencias para un valor determinado de la amplitud de la modulación α e incluso establece valores umbrales en este para la formación de patrones. A diferencia de la simulación conservativa, aquí el sistema mantiene ciertas simetrías en el perfil de densidad y relaja a una distribución estacionaria de patrones que aparecen y desaparecen oscilando con la mitad de la frecuencia de la modulación.

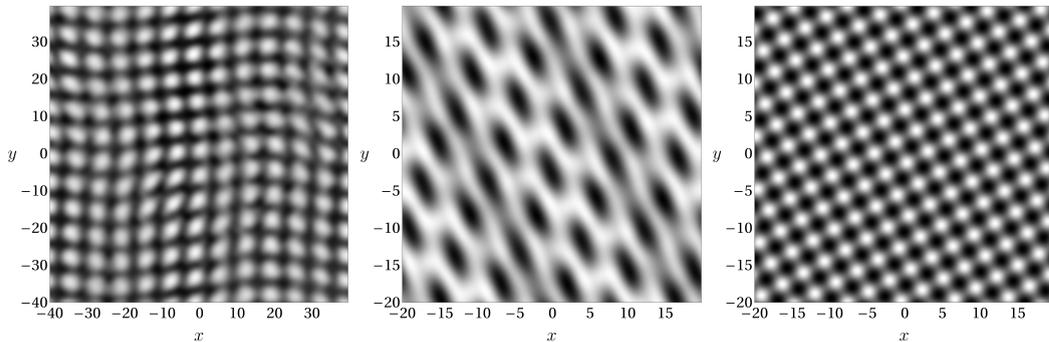


Figura 3.7. Perfil de densidad para el tiempo donde se alcanzan los patrones estacionarios. Estas corresponden a una frecuencia de modulación de la trampa igual a a) $\omega = 0.5\pi$, b) $\omega = \pi$ y c) $\omega = 1.5\pi$ y a los parámetros $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.03$.

En la figura 3.7 se muestran los perfiles de densidad encontrados en la dinámica con la ecuación 3.15 para arreglos cuadrados con el mismo valor del término de disipación pero para diferentes frecuencias de modulación. Aquí se observa la distribución del perfil de densidad para el tiempo donde se alcanza la distribución estacionaria, la cual a partir de ese instante comienza a aparecer y a desaparecer. También se aprecia que los patrones estacionarios cambian su geometría global para las diferentes frecuencias, lo cual está en consistencia con lo obtenido por [13], obteniéndose una muy llamativa configuración hexagonal en las frecuencias intermedias que no es muy bien capturado por [13]. Estas imágenes muestran también la disminución del tamaño de los patrones con el aumento de la frecuencia de modulación externa, lo cual puede ser comparado visualmente desde la figura 3.7 a la izquierda y a la derecha que equivalen a $\omega = 0.5\pi$ y $\omega = 1.5\pi$ respectivamente. De aquí se puede decir que aumentaron prácticamente el doble, ya que aunque la imagen está ajustada amigablemente para la comparación del carácter global de los patrones estas corresponden a dimensiones que van de 40×40 en la dinámica con $\omega = 0.5$ (izquierda) a 20×20 en la dinámica con $\omega = 1.5$ (derecha), que representa aproximadamente

una el doble de la otra. Esto es un comportamiento que ya se observaba desde la dinámica conservativa.

En los cálculos realizados en la tesis se tuvo en cuenta el análisis del espacio de momentos de la dinámica no conservativa, que es quién describe con exactitud que le está pasando a la superposición de ondas planas mientras cambia la simetría espacial de los patrones, pero no se logró capturar todavía un análisis detallado. Se conoce que lo que esta pasando es que además de que la disipación restringe la formación de los anillos de mayores momentos, logrando un estado “estacionario” también selecciona entre las direcciones de un mismo grupo de momentos. Por ejemplo en el caso de un arreglo con forma cuadrada se está en presencia de modos contra propagantes en las direcciones longitudinal y transversal. El caso hexagonal es el producto de tres modos contra propagantes haciendo un ángulo $\frac{\pi}{3}$ de entre ellos.

3.3.1. Análisis de estabilidad.

Al igual que el análisis realizado en el caso conservativo, para la dinámica no conservativa también se puede encontrar la ecuación de Mathieu que rige la estabilidad del condensado considerando la evolución luego de introducir una perturbación espacial con una amplitud compleja. Las ecuaciones correspondientes para la parte real e imaginaria de la amplitud de la perturbación, al igual que para las ecuaciones 3.13, ahora son escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= u(t) [k^2 + 2c(t)] + v(t)\gamma k^2 \\ \frac{du}{dt} &= v(t)k^2 - u(t)\gamma (k^2 + 2)\end{aligned}\tag{3.16}$$

de aquí se deduce la ecuación de Mathieu que describe la estabilidad para sistemas disipativos sin confinamiento:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\gamma(1 + k^2)\frac{du}{dt} + [(1 + \gamma^2)\Omega(k)^2 + 4k^2\alpha \cos(2\omega t)]u = 0\tag{3.17}$$

Aplicando el método de balance armónico propuesto en la sección 3.1 se encuentran las soluciones 2π y 4π periódicas para los parámetros. Las soluciones encontradas son mostradas en la figura 3.9, la cual es consistente también con [13], en esta se aprecia cómo las zonas de inestabilidad donde se configura el condensado se modifican en comparación a $\gamma = 0$.

Para valores pequeños de α esta gráfica describe que no hay formación de patrones y para valores dentro del rango donde el signo de la modulación corresponde a un BEC, el sistema solo manifiesta una zona de estabilidad para la configuración estacionaria. Para observar esto en nuestra simulación se realizó la dinámica para diferentes valores del parámetro α en un sistema donde se redujo una de las dimensiones, de tal manera que solo fuera visible el comportamiento en 1D. En la figura 3.8 se observan las equivalentes distribuciones de momentos de la solución estacionaria de los patrones para dos valores de α diferentes. El lado izquierdo corresponde a $\alpha = 0.05$, para este valor el sistema no muestra ninguna zona de inestabilidad, lo

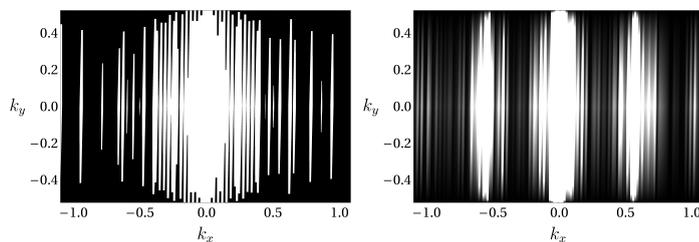


Figura 3.8. Distribución de momentos para dos valores de la amplitud de la modulación. A la izquierda $\alpha = 0.05$ y a la derecha $\alpha = 0.2$, estos dos resultados capturan la sensibilidad de la distribución de momentos hacia la introducción de la disipación ($\gamma = 0.03$) una vez alcanzada la distribución estacionaria.

que se observa es ruido y momentos de orden 0. En el lado derecho que corresponde a $\alpha = 0.2$ sí es posible encontrar las dos franjas propias de la primera zona además de los momentos de orden 0. Estos resultados están en correspondencia a la predicción teórica de la figura 3.9 que también predice la variación del ancho para valores de α donde se ve la primera zona.

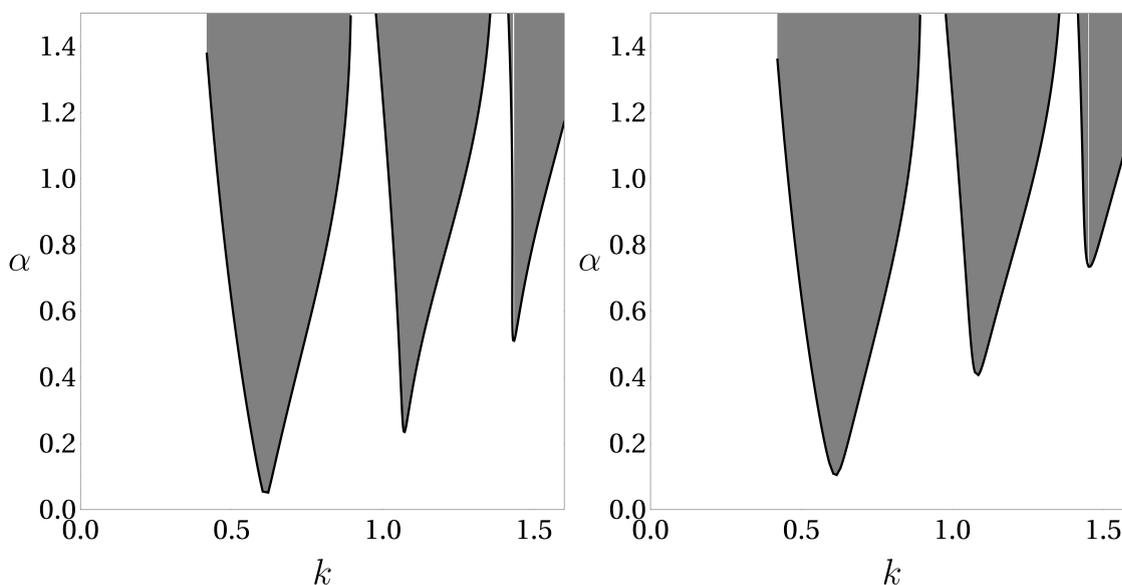
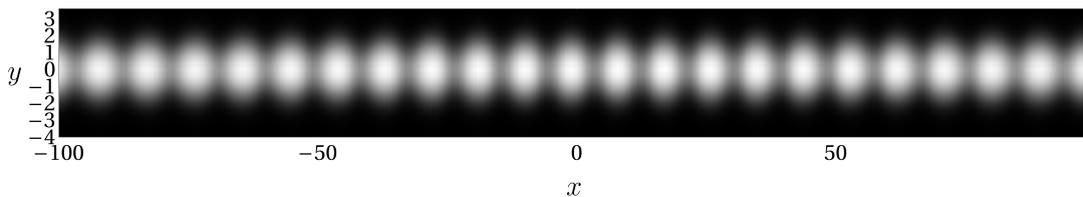


Figura 3.9. Zonas de inestabilidad obtenidas mediante el método propuesto de balance armónico. Estas corresponden a un valor de $\gamma = 0.01$ (izquierda) y $\gamma = 0.03$ (derecha) para una frecuencia de modulación de 0.3π

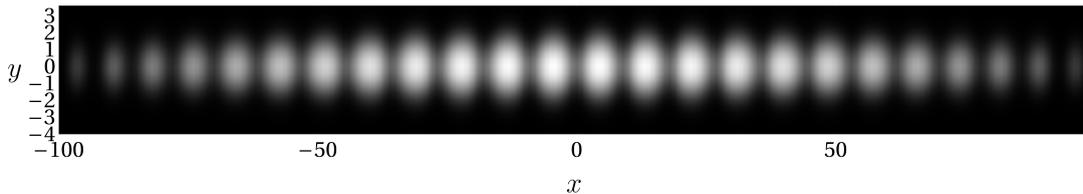
3.3.2. Sistema atrapado

Siguiendo la propuesta de [14] donde se describe la formación de patrones de Faraday en sistemas cuasi-unidimensionales apoyándose en simulaciones 2D como se realizó para el caso $\gamma = 0$ y conociendo desde estas mismas simulaciones que los patrones prevalecen bajo confinamiento, entonces un resultado esperado es la distribución de patrones bajo las condiciones de disipación. En la figura 3.10a se observa un sistema donde solo se ha colocado confinamiento transversal, aquí es

posible observar igualmente la formación de patrones. Para estos resultados se ha considerado un cambio hacia las distribuciones estacionarias, las cuales ahora están atrapadas y esto equivale a la modificación del potencial químico, lo cual puede ser evaluado mediante la aproximación de Thomas Fermi. El análisis de estabilidad es ahora un estudio pendiente, porque se necesita una nueva descripción que tome en cuenta la ecuación de Mathieu escrita para sistemas disipativos bajo confinamiento. En la figura 3.10b se añadió el confinamiento longitudinal mostrando de igual manera estos patrones. En la dinámica se encontró también que el sistema luego de alcanzar su distribución estacionaria comienza a oscilar con la mitad de la frecuencia de modulación y se observaron también las variaciones del tamaño espacial de las distribuciones.



(a) Formación de patrones para un sistema con confinamiento transversal ($\omega_y = 1$). Los parámetros de la simulación son $\omega = 0.3\pi$, $\alpha = 0.2$ y $\gamma = 0.01$.



(b) Formación de patrones para un sistema con confinamiento transversal ($\omega_y = 1$) y longitudinal ($\omega_x = 0.013$). Los parámetros de la simulación son $\omega = 0.3\pi$, $\alpha = 0.2$ y $\gamma = 0.01$.

Figura 3.10. Resultados de la dinámica con la ecuación no conservativa bajo confinamiento.

Para futuras simulaciones se priorizará un sistema más amable para la comparación de los resultados del laboratorio. Estos incluirán la simulación modulando la trampa [14] y la descripción en el espacio de momentos.

3.4. Sistemas fermiónicos. Ecuaciones del Gap.

El proceso de condensación en gases de Fermi interactuantes toma lugar por debajo de cierta temperatura crítica. El sistema alcanza un estado superfluido caracterizado por la formación de pares que tienen dispersiones de bajas energías y se comportan como un gas diluido. Aquí se estudia el comportamiento de estos gases bajo la modificación de la longitud de dispersión mediante la resonancia de Feshbach D.1. Esto hace que el sistema cambie de regímenes de interacción y adopte diferentes características. En un lado de la resonancia, con valores pequeños y negativos de la longitud de dispersión, el sistema es caracterizado por los pares de Cooper de tamaños grandes comparados con las distancias entre partículas y que son descritos por

configuraciones de muchos cuerpos; y al otro lado, con valores pequeños y negativos de la longitud de dispersión, el sistema será descrito por dímeros, con naturaleza bosónica por la unión de dos fermiones (sección 2.2.1), que se encontrarán en estado BEC si el sistema es frío y diluido. A medida que el sistema transita por diferentes regímenes también cambia la relación de dispersión del sistema y el parámetro de orden superfluido. Para encontrar esto se resuelve la ecuación del gap de la teoría BCS, la cual es resuelta formando un sistema de ecuaciones con la ecuación del número de partículas, para encontrar el par de valores de μ y Δ que satisface cada uno de los valores del parámetro de interacción [20][28]. La ecuación 2.40 tiene implícitas divergencias debido al corte impuesto en el potencial de contacto de los pares, estas pueden ser corregidas mediante un procedimiento de regularización descrito por [45] :

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega V} + \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{m}{k^2} \quad (3.18)$$

entonces la ecuación a resolver es ahora:

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_k \left(\frac{1}{2E_k} - \frac{m}{k^2} \right) \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta [46] que $\sum_k \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int 4\pi k^2 dk$ y con:

$$x^2 = \frac{k^2}{2m\Delta} \quad E_x = \frac{E_k}{\Delta} \quad dx = \frac{dk}{\sqrt{2m\Delta}} \quad (3.20)$$

se puede escribir la ecuación para el gap como una integral infinita de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{a_s} = \frac{2}{\pi} \sqrt{2m\Delta} \int_0^\infty x^2 dx \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (3.21)$$

esta ecuación es resuelta formando un sistema de ecuaciones con otro resultado, directamente extraído de la teoría BCS, que es la ecuación de la densidad de partículas en función de la energía de los estados(\uparrow, \downarrow):

$$n = \frac{N}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \sum_k \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right) \quad (3.22)$$

esta se puede escribir como una integral infinita de la siguiente manera:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} (2m\Delta)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^2 dx \left(1 - \frac{\xi_x}{E_x} \right) \quad (3.23)$$

Luego se hacen algunas consideraciones para reescribir los integrales de las expresiones 3.21 y 3.23 como polinomios de Legendre. Entonces conociéndose que [47] :

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{E_x} dx = \frac{\sqrt{x_0}}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} dz}{\sqrt{(z-1)^2 + \frac{1}{x_0^2}}} = -\pi \left(1 + \frac{1}{x_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} P_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_0^2}}} \right) \frac{\sqrt{x_0}}{2} \quad (3.24)$$

donde $x_0 = \frac{\mu}{\Delta}$, se puede inmediatamente encontrar una forma más loable para esta ecuación:

$$\eta = \frac{1}{k_F a} = (\mu^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{4}} P_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.25)$$

Este mismo procedimiento es aplicado a la densidad teniendo en cuenta que:

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{E_x} dx = \frac{x_0^{\frac{3}{2}}}{2} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{\sqrt{(z-1)^2 + \frac{1}{x_0^2}}} = \frac{x_0^{\frac{3}{2}}}{2} \pi \left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)^{\frac{3}{4}} P_{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_0^2}}} \right) \quad (3.26)$$

la representación general ahora en las nuevas funciones viene dada por:

$$n = -\frac{1}{2\pi} (2m\Delta)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x_0^{\frac{3}{2}}}{2} \pi \left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} P_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_0^2}}} \right) + \frac{x_0^{\frac{3}{2}}}{2} \pi \left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)^{\frac{3}{4}} P_{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_0^2}}} \right) \right] \quad (3.27)$$

donde si se aplica la siguiente propiedad:

$$P_{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) = -\frac{4}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}} P_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) - \frac{1}{3} P_{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.28)$$

y teniendo en cuenta $n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$, se obtiene el resultado para la densidad:

$$\frac{4}{\pi} = \mu (\mu^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{4}} P_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) + (\mu^2 + \Delta^2)^{\frac{3}{4}} P_{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.29)$$

Esta es resuelta en conjunto a la ecuación del gap (las ecuaciones 3.25 y 3.29 están escritas de tal manera que μ y Δ están en unidades de ϵ_F) mediante el método de Newton-Raphson acercándose iterativamente a la solución con un grado convincente de tolerancia (10^{-8}). Los valores obtenidos para el potencial químico y el parámetro de orden pueden ser observados en la figura 3.11.

Estas gráficas muestran la relación de dispersión de la mezcla a lo largo de todo el cruce y de aquí se infiere cómo varía la interacción entre estados de espines para cada régimen. Estos resultados son de vital importancia para cualquier simulación con defectos topológicos, ya que muestran el comportamiento asintótico de las excitaciones en el parámetro de orden superfluido y son resultados que no se pueden obviar y cualquier dinámica tiene que ser consistente a priori. Los valores obtenidos en la solución de la ecuación del gap hacen posible encontrar cómo se comporta la ocupación de estados para un condensado homogéneo en relación a la energía de los átomos, en la figura 3.12 (izquierda) se observa este resultado dado por la expresión :

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{\sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + |\Delta|^2}} \right) \quad (3.30)$$

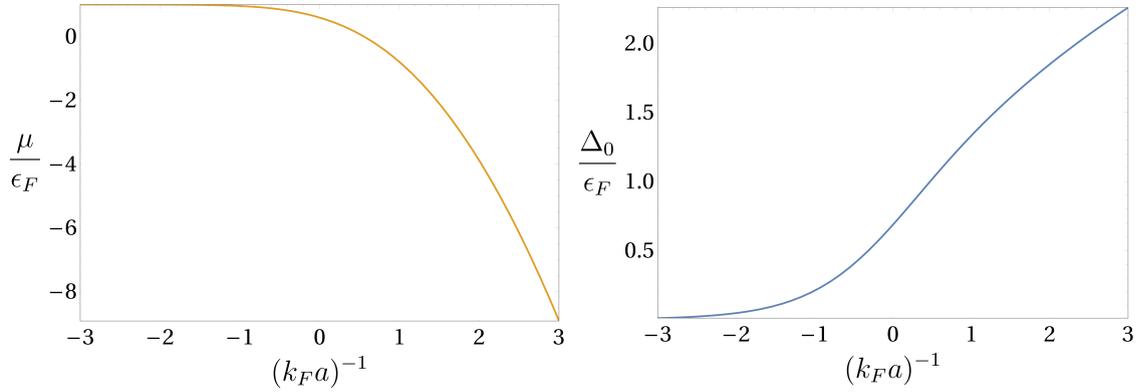


Figura 3.11. Comportamiento del potencial químico (izquierda) y del valor de gap (derecha) a través del cruce BCS-BEC.

aquí se le asignan distintos valores al potencial químico lo cual da una idea de como varía la superficie de Fermi de un extremo a otro del cruce, a medida que se acerca hacia el límite BEC la estructura va desapareciendo [28].

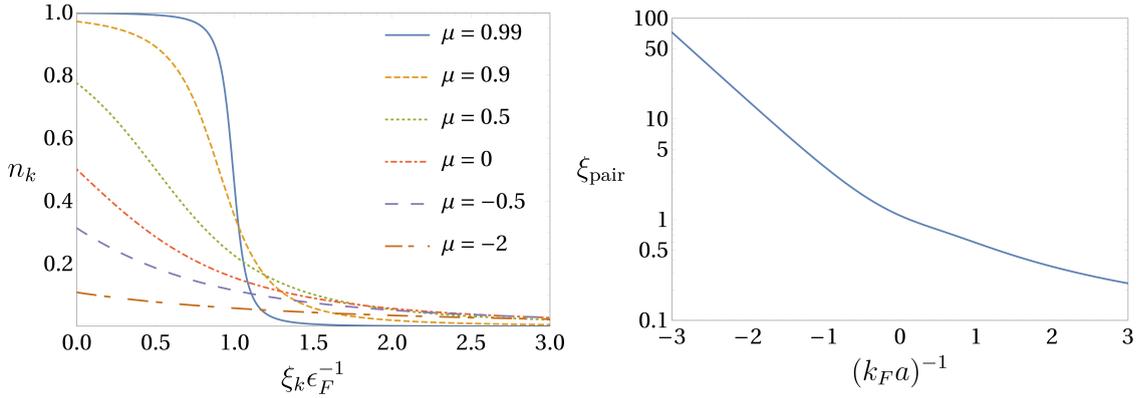


Figura 3.12. Ocupación de los fermiones contra el cambio de su energía cinética para distintos regímenes del cruce (izquierda). A medida que se entra a el lado BEC la superficie de Fermi se va perdiendo. Correlación de los pares para distintos regímenes del cruce (derecha).

Otro interesante resultado son las correlaciones de los pares, estas son determinantes para entender la extensión espacial de la función de onda de los pares $\theta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}$ a lo largo del cruce. Esta descripción puede ser dada mediante la función de correlación de pares con espines opuestos [48]:

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{n^2} |\langle \phi | \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{0}) | \phi \rangle|^2 \quad (3.31)$$

con n la densidad de partículas. y luego:

$$\xi_{pair}^2 = \frac{\int d\mathbf{r} g(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2}{\int d\mathbf{r} g(\mathbf{r})} = \frac{\sum_{\mathbf{k}} |\nabla_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}}|^2}{\sum_{\mathbf{k}} |\theta_{\mathbf{k}}|^2} \quad (3.32)$$

y tomando el continuo:

$$\xi_{pair}^2 = \frac{1}{m^2} \frac{\int_0^\infty d\mathbf{k} (k^4 \xi_{\mathbf{k}}^2 / E_{\mathbf{k}}^6)}{\int_0^\infty d\mathbf{k} (k^2 / E_{\mathbf{k}}^2)} \quad (3.33)$$

De aquí se calcula ξ_{pair} como una función de $x_0 = \frac{\mu}{\Delta}$ [46] :

$$k_F \xi_{pair} = \left(\frac{1 + x_1^4}{2} \right)^{1/2} \frac{(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0))^{1/3}}{(1 + x_0^2)^{1/4}} \quad (3.34)$$

donde:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{\sqrt{1 + x_0^2} + x_0}{2} \\ I_5(x_0) &= (1 + x_0^2)^{1/4} E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{x_1^2}{(1 + x_0^2)^{1/2}} \right) - \frac{1}{4x_1^2(1 + x_0^2)^{1/4}} F \left(\frac{\pi}{2}, \frac{x_1^2}{(1 + x_0^2)^{1/2}} \right) \\ I_6(x_0) &= \frac{1}{2(1 + x_0^2)^{1/4}} F \left(\frac{\pi}{2}, \frac{x_1^2}{(1 + x_0^2)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

con $F \left(\frac{\pi}{2}, \kappa \right)$ y $E \left(\frac{\pi}{2}, \kappa \right)$ los integrales elípticos de primer y segundo tipo respectivamente.

En la figura 3.12 (derecha) se muestra como varían las correlaciones de los pares, estas también permiten validar las escalas de tamaño de los pares en los resultados numéricos de la ecuaciones de BdG.

3.5. Excitaciones en sistemas fermiónicos. Solitones Negros.

Las ecuaciones de BdG pueden ser resueltas numéricamente para describir un problema no interactuante de cuasipartículas el cual se ha propuesto para la descripción de sistemas de superfluidos fermiónicos, donde las interacciones van desde fuertes en el lado BCS hasta los límites de la teoría de Bogoliubov en las fluctuaciones sobre el estado BEC. La amabilidad de estas ecuaciones permite la introducción de comportamientos espaciales que pueden ser muy útiles para describir el comportamiento de solitones o muros de dominios en el cruce BCS-BEC [34]. Estos constituyen excitaciones en el parámetro de orden y deben existir en consistencia a los resultados encontrados en la sección anterior para una distribución homogénea. Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{pmatrix} H_0(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ -\Delta^*(\mathbf{r}) & -H_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\eta(\mathbf{r}) \\ v_\eta(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_\eta \begin{pmatrix} u_\eta(\mathbf{r}) \\ v_\eta(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Este sistema tiene un espectro ϵ_η y $u_\eta(\mathbf{r})$, $v_\eta(\mathbf{r})$ son las amplitudes de cuasipartículas. Esto puede ser resuelto con la siguiente condición de normalización:

$$\int d^3\mathbf{r} [u_{\eta'}(\mathbf{r})u_\eta(\mathbf{r}) + v_{\eta'}(\mathbf{r})v_\eta(\mathbf{r})] = \delta_{\eta\eta'} \quad (3.37)$$

y las siguientes ecuaciones para el parámetro de orden y la densidad:

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r}) &= -g \sum_{\eta} u_{\eta}(\mathbf{r}) v_{\eta}^*(\mathbf{r}) \\ n(\mathbf{r}) &= 2 \sum_{\eta} |v_{\eta}(\mathbf{r})|^2\end{aligned}\tag{3.38}$$

Las soluciones autoconsistentes son encontradas mediante la continua evaluación del parámetro de orden hasta alcanzar un deseado rango de tolerancias. También se tuvieron en cuenta las divergencias ultravioletas por utilizar un rango finito para el potencial efectivo entre pares, lo cual es controlado introduciendo un corte en los modos y una renormalización al parámetro de interacción:

$$\frac{1}{k_F a} = \frac{8\pi\epsilon_F}{gk_F^3} + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{E_c}{\epsilon_F}}\tag{3.39}$$

Se considera un sistema 3D homogéneo ($V_{ext} = 0$) y las dimensiones son establecidas sobre una caja $L \times L_{\perp}^2$ donde L es la dimensión de la coordenada z donde existe el perfil del solitón y en las demás dimensiones es traslacionalmente simétrico. Las soluciones de las ecuaciones tendrán la siguiente forma:

$$u_{\eta}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{k_F}}{L_{\perp}} u_{n,n_{\perp}}(z) e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}}\tag{3.40}$$

donde $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$ y $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$, donde $k_x = \frac{2\pi n_x}{L_{\perp}}$ y $k_y = \frac{2\pi n_y}{L_{\perp}}$, con $n_{\perp} = (n_x, n_y)$ y n_x, n_y enteros.

Todas las operaciones pueden ser modificadas para realizar los cálculos con variables adimensionales en energías, momentos y longitud. Las energías están divididas por la energía de Fermi (ϵ_F), los momentos por el momento de Fermi (k_F) y la longitudes por el inverso del momento de Fermi tal que:

$$\begin{aligned}L &= \frac{10}{k_F} & L_{\perp} &= \frac{20}{k_F} \\ 0 &\leq \epsilon_{n,n_{\perp}} \leq E_c & E_c &= 50\epsilon_F\end{aligned}\tag{3.41}$$

la condición de normalización es ahora:

$$\int dz \left[|u_{n,n_{\perp}}(z)|^2 + |v_{n,n_{\perp}}(z)|^2 \right] = 1\tag{3.42}$$

Luego el sistema de ecuaciones de 3.36 toma la forma:

$$\begin{pmatrix} -\partial_z^2 - \tilde{\mu} & \Delta(r) \\ \Delta^*(r) & \partial_z^2 + \tilde{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n,n_{\perp}}(z) \\ v_{n,n_{\perp}}(z) \end{pmatrix} = \epsilon_{n,n_{\perp}} \begin{pmatrix} u_{n,n_{\perp}}(z) \\ v_{n,n_{\perp}}(z) \end{pmatrix}\tag{3.43}$$

donde $\tilde{\mu} = \mu - k_x^2 - k_y^2$

Este sistema de ecuaciones es resuelto tomando una discretización del espacio $l = 1, 2, 3 \dots N$ y utilizando una adaptación de el método propuesto por [49] a este problema. La forma para la segunda y primera derivada es la siguiente:

$$\begin{aligned}\partial_z^2 \phi(z) &= \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1}}{\delta^2} \\ \partial_z \phi(z) &= \frac{\phi_{l+1} - \phi_{l-1}}{\delta}\end{aligned}\tag{3.44}$$

Esto lleva a resolver un problema de eigenvalores para la siguiente configuración matricial:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}\tag{3.45}$$

donde la matriz A es triagonal con la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\delta^2} - \tilde{\mu} & -\frac{1}{\delta^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\delta^2} & \frac{2}{\delta^2} - \tilde{\mu} & -\frac{1}{\delta^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\delta^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{\delta^2} & \frac{2}{\delta^2} - \tilde{\mu} \end{pmatrix}\tag{3.46}$$

y B es una matriz diagonal con dimensiones N:

$$B = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \Delta_N \end{pmatrix}\tag{3.47}$$

esta contiene la información del parámetro de orden y la fase del superfluido, la cual se forma inicialmente con una función de prueba. Luego U y V son los vectores solución correspondientes a las amplitudes de cuasipartículas.

Las soluciones son encontradas con una tolerancia de 10^{-8} sobre la mayor variación de la energía para todos los modos seleccionados. El sistema a resolver es unidimensional con una modificación en el potencial químico que tiene en cuenta el aporte de los modos transversales correspondientes a ondas planas.

Este sistema puede converger a varias soluciones dependiendo principalmente del número de modos transversales y de la energía de corte que sea establecida. Entonces encontrar un criterio que discrimine la solución dentro de un conjunto infinito de ellas es una tarea que se desarrolló analizando los resultados analíticos conocidos y las evidencias numéricas de la convergencia. Para un número acertado de modos transversales se encontraron los valores de la energía de corte que satisfacen la solución homogénea del parámetro de orden y ese fue el principal criterio para

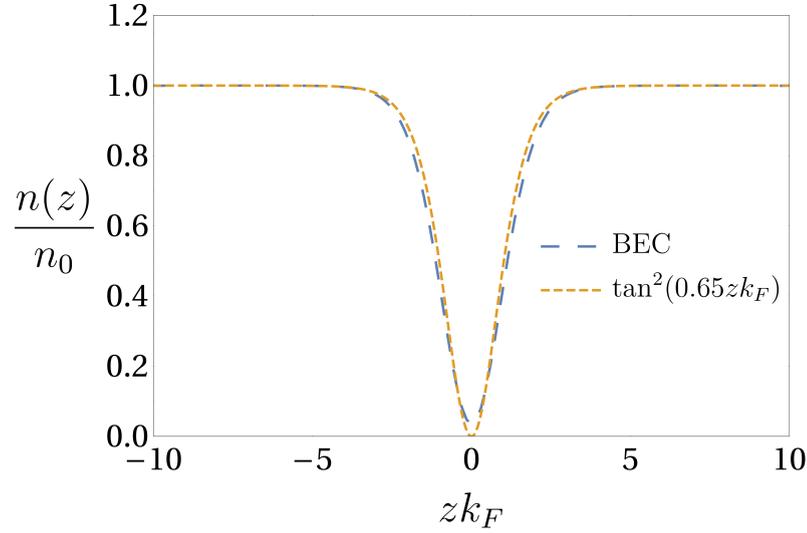


Figura 3.13. Perfil de densidad en lado BEC ($\eta = 1$) obtenido con las ecuaciones de BdG y su forma analítica.

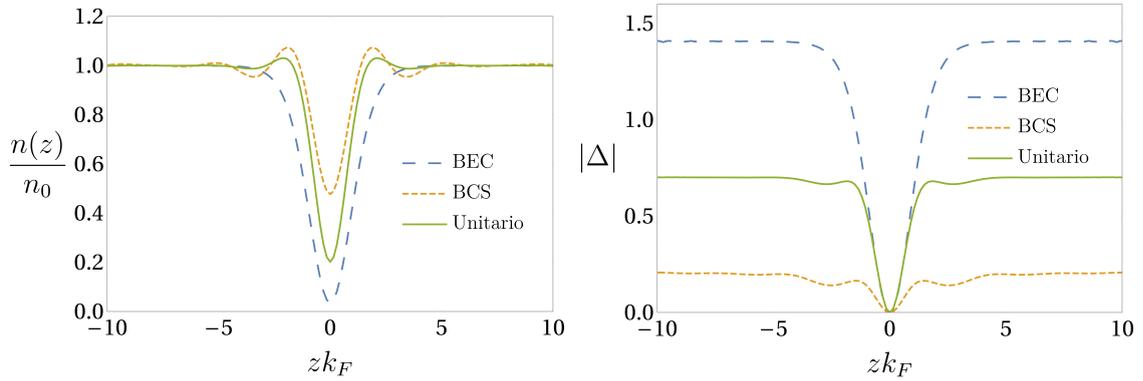


Figura 3.14. Perfiles de densidad (izquierda) y parámetro de orden (derecha). Estos equivalen a tres regímenes del cruce: BEC ($\eta = 1$), Unitario ($\eta = 0$) y BCS ($\eta = -1$).

encontrar la solución final. En este caso resultaron de interés la obtención de los perfiles de densidad en tres regímenes distintos equivalentes al lado BEC, Unitario y BCS. El resultado en el lado BEC se muestra en la figura 3.13 para $\eta = 1$ donde fue comprobado que fuera consistente además con la solución analítica de la ecuación de GP y se demostró que es mejor la coincidencia a medida que se acerca más hacia el lado BEC ($\eta > 1$). Los resultados obtenidos para los solitones se muestran en la figura 3.14. Aquí se observan cambios en la profundidad de los perfiles y en el ancho pasando desde una distribución más profunda y ancha en el lado BEC hasta una estrecha y poco profunda en lado BCS.

Las oscilaciones tanto en el perfil de densidad como en el parámetro de orden son una característica propia del cambio a un sistema con correlaciones más largas. En la figura 3.15 se muestra una vista esquemática de la forma del primer modo $|v_0|^2$ para el lado BCS, Unitario y BEC donde se realizó un ajuste conociendo que

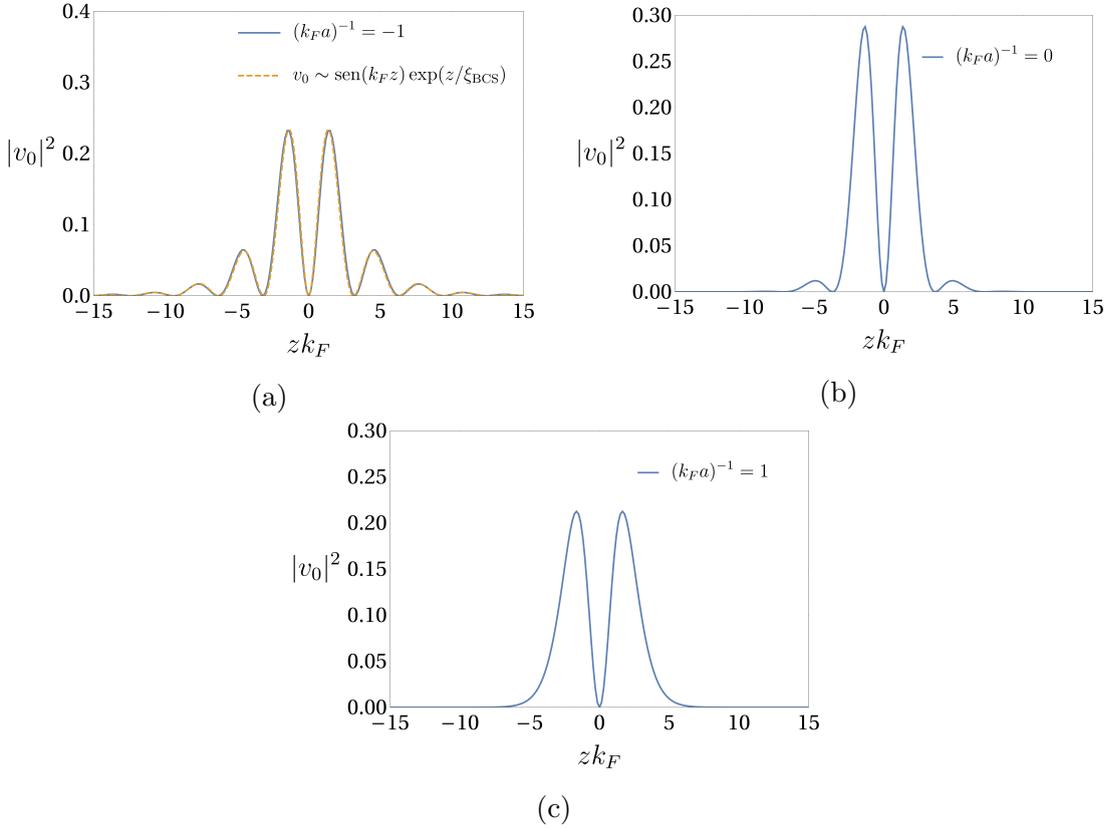


Figura 3.15. $|v_0|^2(z)$ para el estado de menor energía con $k_\perp = 0$. (a) corresponde al régimen BCS, (b) a el Unitario y (c) al BEC. La descripción analítica en (a) corresponde a $v_o \sim \text{sen}(k_F z) \exp(z/\xi_{\text{BCS}})$ con $\xi_{\text{BCS}} = 4.8k_F^{-1}$ lo cual es mayor al valor de $\xi_{\text{pair}} = 3.56k_F^{-1}$ encontrado en los cálculos de campo medio de la sección 3.4.

$v_o \sim \text{sen}(k_F z) \exp(z/\xi_{\text{BCS}})$. Este ajuste permitió identificar el cambio en el tamaño de los pares dentro del solitón, los cuales aumentan con respecto a los encontrados para el estado homogéneo. Se determinó un $\xi_{\text{BCS}} = 4.8k_F^{-1}$ lo cual es muy diferente del valor reportado por [34] de $\xi_{\text{BCS}} = 10k_F^{-1}$ pero continúa siendo mayor al valor de $\xi_{\text{pair}} = 3.56k_F^{-1}$ encontrado en los cálculos de campo medio para el estado homogéneo, lo cual indica que el par creció. Este crecimiento pudiera ser entendido como una consecuencia directa de la disminución del módulo de Δ (figura 3.14 a la derecha) en el solitón que se traduce a su vez como una disminución de la energía de enlace. Esto lleva también a reflexionar sobre el significado de las oscilaciones de Friedel, las cuales pudieran ser la manifestación de procesos de interferencia por el aumento de las correlaciones en el solitón.

3.6. Excitaciones en sistemas fermiónicos. Solitones Grises.

La realización de la dinámica en tiempo real de las ecuaciones de BdG requieren un poder de cálculo muy alto, estas forman un sistema acoplado infinito que se

resuelve autoconsistentemente. Algunas variantes para la extensión de las soluciones estáticas han surgido para la descripción de defectos topológicos. En este trabajo se utiliza un método [37] en el que se hacen varias consideraciones para reducir los grados de libertad del sistema y tomar una idea general de la dinámica en el cruce BCS-BEC. El sistema que se analiza permitirá describir las características del movimiento de solitones [37][35] y establecer una metodología para la descripción de otras excitaciones topológicas. Aquí se considera el solitón moviéndose sobre un fondo en reposo, el cual no cambia su distribución y permite a este moverse puntualmente, solo cambiando ciertas características propias de los valores de la interacción. Entonces es válido realizar una transformación Galileana al marco de referencia del solitón $\xi = z - v_s t$, resolviendo un problema estático donde emerge un término dependiente a la velocidad y una fase compleja en el parámetro de orden:

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = \Delta(z - v_s t) = \Delta(\xi) \quad (3.48)$$

la introducción de la fase es hecha para describir el aumento o disminución de partículas en el solitón. La dinámica será descrita entonces por las siguientes ecuaciones:

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_\eta(\mathbf{r}, t) \\ v_\eta(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\hat{H}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\eta(\mathbf{r}, t) \\ v_\eta(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

y teniendo en cuenta que ahora las soluciones son de la siguiente forma:

$$v_\eta(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{k_F}}{L_\perp} e^{ik_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} e^{-iE_{n,n_\perp} t} v_{n,n_\perp}(\xi) \quad (3.50)$$

el sistema a resolver puede ser considerado como:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_\xi + i\hbar v_s \frac{d}{d\xi} & \Delta(\xi) \\ \Delta^*(\xi) & -\hat{H}_\xi + i\hbar v_s \frac{d}{d\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\eta(\xi) \\ v_\eta(\xi) \end{pmatrix} = \epsilon_\eta \begin{pmatrix} u_\eta(\xi) \\ v_\eta(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

con $\hat{H}_\xi = -\frac{\hbar^2}{2m} [\frac{\partial^2}{d\xi^2} - k_y^2 - k_x^2] - \mu$.

Para este sistema donde el solitón se mueve con una velocidad v_s las ecuaciones 3.45 se modifican de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A + iv_s C & B \\ B^* & -A + iv_s C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

donde se toma en cuenta ahora el parámetro de orden superfluido como complejo y C es una matriz con la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\delta} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\delta} & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{\delta} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{\delta} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Es necesaria la introducción de criterios nuevos para la convergencia que varían dependiendo del régimen y discriminan sobre el conjunto de soluciones que emergen, de no conocer a priori la forma exacta de la fase compleja. En el lado BEC por ejemplo, el criterio es basado en el conocimiento de que la fase compleja es constante para todo el dominio y entonces se busca dentro de todas las soluciones la que tiene particularmente esa forma, como se observa en la figura 3.16 (abajo).

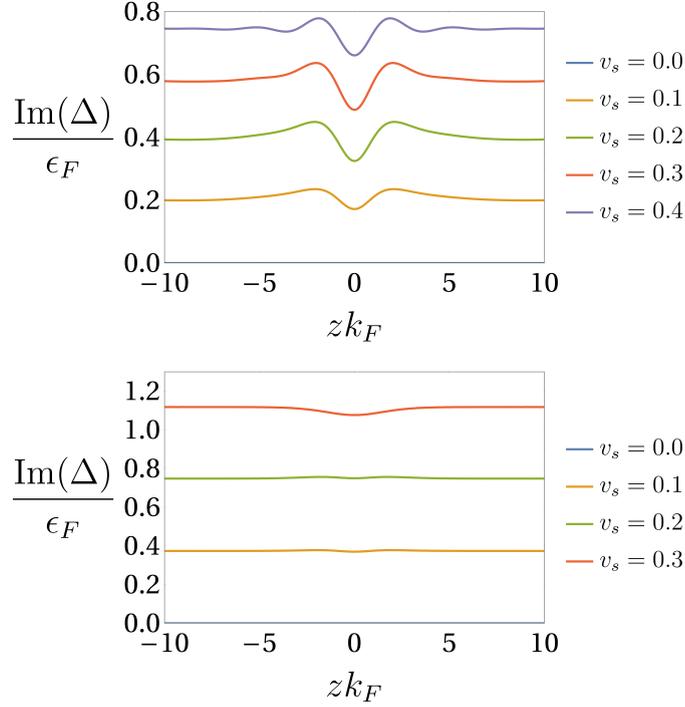


Figura 3.16. Distribución espacial para la fase compleja del solitón gris en dependencia a la velocidad. Arriba se muestra el lado unitario con $\eta = 0$ y abajo el lado BEC para $(\eta = 1)$

En los otros regímenes aunque ya no se esperaba una forma específica del comportamiento, se operó producto de las variaciones en la densidad, donde el criterio fue que se cumpliera la consideración inicial de tomar un solitón sobre un fondo que no cambia su distribución y entonces se dejó que emergieran espontáneamente la fase compleja con las oscilaciones propias del régimen, como se puede ver en la figura 3.16 (arriba).

La figura 3.17 muestra el perfil de densidad para $\eta = 0$ (Unitario) y $\eta = 1$ (BEC) en dependencia a la velocidad de propagación del solitón. Se observa cómo cambia la profundidad a medida que aumenta el valor de la velocidad y se obliga a las soluciones a mantener un valor constante en el resto del espacio. De igual manera la figura 3.18 muestra la distribución espacial del parámetro de orden, se observa cómo se mantienen los criterios de convergencia, al igual que en el caso estático, manteniendo el valor asintótico como el valor obtenido de la solución de la ecuación del gap para el caso homogéneo (≈ 0.7 para $\eta = 0$ y ≈ 1.5 para $\eta = 1$). El comportamiento en la variación de la profundidad, al igual que para la densidad, fue determinado de manera cualitativa. Un ajuste numérico que describa esto, que

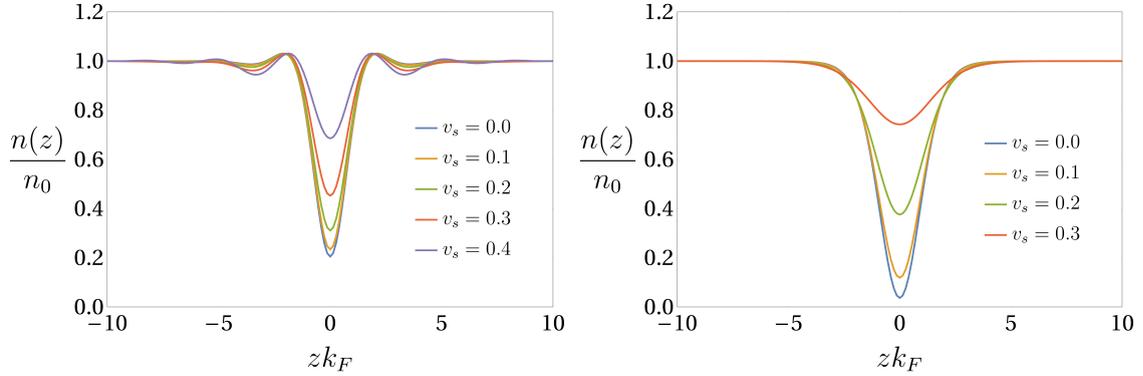


Figura 3.17. Perfil de densidad para el solitón gris en dependencia a la velocidad. A la izquierda se muestra el lado Unitario con $\eta = 0$ y a la derecha el lado BEC para ($\eta = 1$)

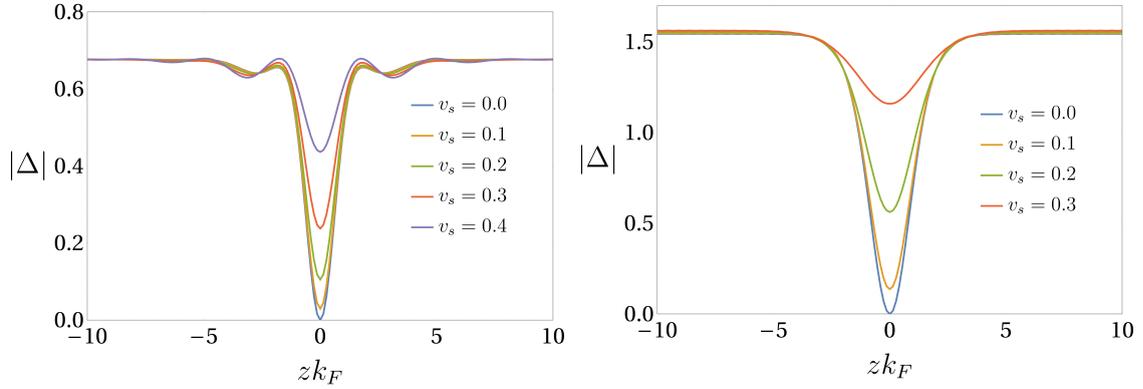


Figura 3.18. Distribución espacial para el parámetro de orden superfluido para el solitón gris en dependencia a la velocidad. A la izquierda se muestra el lado Unitario con $\eta = 0$ y a la derecha el lado BEC para ($\eta = 1$).

es equivalente a decir cómo varía la fase del solitón, pudiera ser encontrado en los resultados de [37]. En el caso correspondiente al lado BEC se observa que la altura en el perfil del solitón varía en un rango más corto de velocidades en comparación al régimen Unitario para el que se encuentra que el rango de variaciones es mayor.

Los resultados obtenidos sobre el rango de variaciones de la velocidad son consistentes con la interpretación del límite de velocidades con el cambio de regímenes. Esto se justifica con la velocidad del sonido y la velocidad de rompimiento de los pares [37] que imponen un límite a la existencia de dichas excitaciones en la fase superfluida. En la figura 3.19 se observa la velocidad de rompimientos de pares $mv_{sp}^2 = \sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2} - \mu$ que aumenta hacia el lado BEC y la velocidad del sonido $c = \sqrt{n(\frac{\partial \mu}{\partial n})/m}$ que decrece a medida que cambiamos al lado BEC. Este último resultado fue calculado [46] mediante la expresión 3.54.

$$\frac{c}{v_F} = \left(\frac{1}{3} \frac{\Delta}{\epsilon_F} \frac{I_5(x_0)(I_6(x_0) + x_0 I_5(x_0))}{I_5(x_0)^2 + I_6(x_0)^2} \right)^{1/2} \quad (3.54)$$

Ambas velocidades mostradas en 3.54 determinan la velocidad de flujo de los

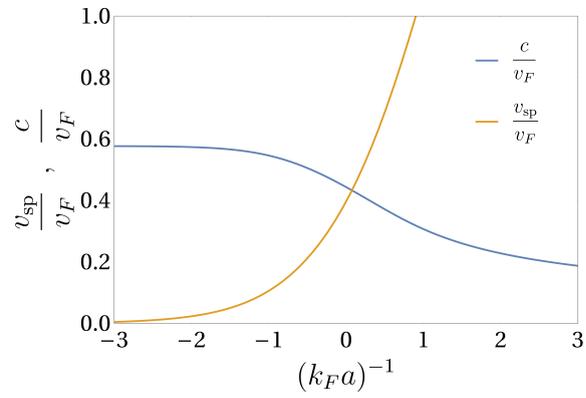


Figura 3.19. Velocidades de rompimiento del par ($\frac{v_{sp}}{v_F}$) y del sonido ($\frac{c}{v_F}$) con la variación de la longitud de dispersión.

pares en los diferentes regímenes, mostrando que para el régimen Unitario el flujo es máximo [37][23][24].

Capítulo 4

Conclusiones

Se realizó una descripción de sistemas bosónicos 2D realizando la evolución temporal bajo modulación del parámetro de interacción. Para un acercamiento a la interpretación de sistemas reales primeramente se analizó la formación de patrones en sistemas conservativos, donde se utilizó la ecuación de GP y se analizaron los diferentes tiempos de la dinámica para los cuales se forman los patrones y posteriormente se destruyen. Este proceso de autoconfiguración fue analizado siguiendo un método de balance armónico basado en teoría de Floquet, el cual permitió distinguir las zonas de inestabilidad y cómo varían en dependencia de la frecuencia de modulación externa. Posteriormente se realizó la dinámica introduciendo un término fenomenológico que vuelve la ecuación no conservativa y favorece al sistema a alcanzar una distribución estacionaria más simétrica que aparece y desaparece con la mitad de la frecuencia de la modulación externa. Se observó la variación en las formas globales de los patrones en dependencia a las frecuencias y cómo disminuye el tamaño a medida que aumenta dicha frecuencia. En este caso también se aplicó teoría de Floquet para la descripción de las resonancias en el espacio de momentos y se indagó además en la descripción de estos sistemas bajo confinamiento de trampas armónicas.

Como introducción a la dinámica en tiempo real de sistemas fermiónicos más interactuantes se encontraron las descripciones de las relaciones de dispersión y del parámetro de orden superfluido con las cuales se describieron las variaciones en los diferentes regímenes para excitaciones como paredes de dominios en el parámetro de orden, que a su vez se comportan como solitones en los perfiles de densidad. Estos cálculos fueron extendidos a ambos lados de las resonancias de Feshbach y para diferentes velocidades de los solitones, encontrando en cada régimen cómo varían la profundidad de los solitones, el ancho, la forma de los modos principales y la fase de la excitación en el parámetro de orden. Estos resultados son encontrados en consistencia con predicciones teóricas de la teoría de solitones descritas para el límite BEC por la ecuación de GP y los resultados de la teoría BCS, haciendo que los métodos empleados sean reconocidos como satisfactorios para descripciones como las que tomaron lugar en este trabajo o para posteriores análisis de otros sistemas. Los cálculos aquí realizados muestran cuan llamativo y complejo es el más sencillo de los estudios realizados con fermiones, para los cuales una descripción completa de la dinámica es actualmente uno de los grandes problemas sin resolver.

Motivado por este estudio se propone la extensión de estos cálculos a:

- La implementación de una teoría efectiva para la determinación del peso en el tamaño de la perturbación espacial y la amplitud de modulación en el tiempo de formación de los patrones.
- Mediante el estudio del mapeo GP-BdG y basándose en los resultados obtenidos para los modos de menor energía para solitones, introducir una descripción oscilante a el solitón predicho por la ecuación de GP que permita ver las particularidades encontradas para diferentes regímenes del cruce.
- Extender el procedimiento aquí mostrado a una geometría cilíndrica y analizar la formación de vórtices en el cruce BEC-BCS [50].

Apéndice A

A.1. Función de onda de muchos cuerpos.

El problema general de bosones interactuantes en una región del espacio está descrito por una función de n partículas en el espacio de coordenadas. Esta descripción está realizada sobre las relaciones de conmutación (A.1) que siguen los operadores de campo $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})(\hat{\psi}(\mathbf{r}))$ que crean (aniquilan) bosones en la posición \mathbf{r} .

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')] = [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0 \quad (\text{A.1})$$

Este razonamiento puede ser extendido a un sistema formado por n bosones cada uno ocupando la posición \mathbf{r}_i con $i = 1, 2, \dots, n$ de la manera que el nuevo estado tomará la forma:

$$|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_3) \dots \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_n) |0\rangle \quad (\text{A.2})$$

la cual es construida sobre la siguiente condición de ortogonalidad para partículas indistinguibles:

$$\langle \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\text{permutaciones}} P \left[\delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \delta^3(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \dots \dots \delta^3(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n) \right] \quad (\text{A.3})$$

y de cerradura:

$$\int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \dots \int d^3\mathbf{r}_n |\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\rangle \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n| = 1 \quad (\text{A.4})$$

Los interpretación anterior permite la consideración de partículas distribuidas en el espacio ocupando posiciones $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ y siendo indistinguibles al cambio entre estas. Establecido esto, se describen todas las características tomando en cuenta la función de onda de muchas partículas. Se realiza primeramente la expansión de los operadores de campo en series de Fourier de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) &= \sum_i \hat{a}_i^\dagger u_i^*(\mathbf{r}) \\ \hat{\psi}(\mathbf{r}) &= \sum_i \hat{a}_i u_i(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

esto genera una descripción de segunda cuantización del espacio de Hilbert y permite una representación de número de partículas con los vectores bases $|n_1, n_2 \dots\rangle$, con n_i siendo las poblaciones de los estados $u_i(\mathbf{r})$ con energía ϵ_i tal que $\hat{H}u_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i u_i(\mathbf{r})$. Entonces la correcta descripción de la función de onda esta determinada por:

$$\Phi_{n_1, n_2 \dots n_k \dots}^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n) = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n | n_1, n_2 \dots n_k \dots \rangle \quad (\text{A.6})$$

con $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \dots$

Apéndice B

B.1. Dispersión a bajas energías.

El concepto de gases diluidos es una consideración hecha tomando en cuenta las proporciones de tamaños en las escalas atómicas, como son la separación entre átomos, el rango de acción de las fuerzas moleculares y la longitud de dispersión. Varias consideraciones son hechas sobre esta base para realizar una descripción fidedigna de las interacciones en condensados. Algunas como considerar dispersiones simétricas con frente de onda esférico para ondas planas, las cuales pudieran depender solamente del ángulo de dispersión son soportadas por las condiciones del sistema y llevan a considerar una la función de onda como [22]:

$$\psi = \exp ikz + f(\theta) \frac{\exp ikr}{r} \quad (\text{B.1})$$

En el límite de dispersión de onda- s (bajas energías) la función $f(\theta)$ será contemplada por una constante a que es conocida como longitud de dispersión.

$$\psi = 1 - \frac{a}{r} \quad (\text{B.2})$$

La descripción del problema vendrá dada por la solución de la ecuación de Schrödinger para el problema reducido donde se considera la simetría axial y se toma en cuenta a ψ como la función de onda de dos cuerpos. La solución será escrita en términos de los polinomios de Legendre con una parte radial R_{kl} de la siguiente manera:

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) R_{kl}(r) \quad (\text{B.3})$$

$$R_{kl}'' + \frac{2}{r} R_{kl}' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2mr}{\hbar^2} U(r) \right] R_{kl} = 0 \quad (\text{B.4})$$

La solución general de esta ecuación es:

$$R_{kl} = \frac{c_1 (-1)^l (2l-1)!! r^l}{k^{2l+1}} \left(\frac{d}{r dr} \right)^l \frac{\text{sen}(kr)}{r} + \frac{c_2 (-1)^l (2l-1)!! r^l}{(2l-1)!!} \left(\frac{d}{r dr} \right)^l \frac{\cos(kr)}{r} \quad (\text{B.5})$$

que tiene como forma asintótica de esta solución $R_{kl}(r) \cong \frac{\text{sen}(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)}{kr}$ para $r = \infty$ y tomando en cuenta:

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) j_l(kr) \cong \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{\text{sen}(kr - \frac{\pi l}{2})}{kr} \quad (\text{B.6})$$

se puede determinar la constante A_l :

$$A_l = (2l+1) i^l e^{\delta_l} \quad (\text{B.7})$$

y la forma para $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ki} (e^{2\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \quad (\text{B.8})$$

luego la probabilidad de dispersión entre θ y $\theta + d\theta$ en un ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \text{sen } \theta d\theta$:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{4\pi}{4i^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (e^{2i\delta_l} - 1)(2l+1) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

y desde B.5 se puede calcular δ_l :

$$\tan(\delta_l) \approx \delta_l = \frac{c_2 k^{2l+1}}{c_1 (2l-1)!! (2l+1)!!} \quad (\text{B.10})$$

Para entender este resultado se consideran las escalas de interacción en dos rangos. Primeramente se analizan potenciales en un rango finito, con estos la fase varía como k^{2l+1} , lo cual para momentos pequeños es gobernado por $l = 0$. De igual manera se toman distancias largas y se introduce el análisis sobre la base de los potenciales moleculares como $\frac{1}{r^6}$ y $\frac{1}{r^7}$, la fase se sigue comportando con mayor peso para $l = 0$ solo si $l < \frac{n-3}{2}$ y para valores mayores es tal que $\delta_l \sim k^{n-2}$ con n el exponente de la variable espacial en el denominador del potencial, lo cual también es dominado por $l = 0$. De aquí uno encuentra entonces que $f = \frac{\delta_0}{k}$ y es posible demostrar desde B.2 que $\delta_0 = -ka$ para $k \rightarrow 0$, lo cual es una condición que se cumple en sistemas de átomos muy fríos.

Apéndice C

C.1. Interacciones efectivas.

La ecuación B.1 será representada en el espacio de momentos como [22]:

$$\phi(k') = (2\pi)^3 \delta(k - k') + \phi_{sc}(k') \quad (\text{C.1})$$

y luego la ecuación de Schrödinger para el sistema de dos partículas de masas m iguales puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 k'^2}{m} \phi(k') + \int \frac{dk''}{(2\pi)^3} U(k'') \phi(k' - k'') - E \phi(k') = 0 \\ \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} \right) \phi_{sc}(k') = U(k', k) + \frac{1}{V} \sum_{k''} U(k', k'') \phi_{sc}(k'') \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

con $E = \frac{\hbar^2 k^2}{m}$ la energía correspondiente al canal de entrada. De aquí:

$$\begin{aligned} \phi_{sc}(k') &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} + i\delta \right)^{-1} \left(U(k', k) + \frac{1}{V} \sum_{k''} U(k, k'') \phi_{sc}(k'') \right) \\ &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} + i\delta \right)^{-1} T(k', k, E) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde se ha introducido un factor imaginario δ para discriminar solamente sobre soluciones que salen después de la dispersión y $T(k', k, E)$ es la matriz de dispersión. Siendo consistente con todo el análisis realizado para gases diluidos a bajas energías se considera $E = k = 0$ y la función de dispersión vendrá como:

$$\phi_{sc}(k') \approx \frac{m}{\hbar^2 k'^2} T(k', 0, 0) \quad (\text{C.4})$$

Esto da paso a entender el sistema como una dispersión por un potencial efectivo lo cual es posible debido a como varía la función de onda del sistema. Esta solo tiene variaciones importantes cuando los dos átomos están potencialmente cerca y ocurre una dispersión rápida dentro de un sistema que en su mayoría varía lento, sin cambios trascendentales. Otra consideración dada la forma de los potenciales de dispersión es la energía del estado dispersado la cual si se toma solo la descripción a largo rango puede ser identificada teniendo que $k' \approx k = 0$. Luego:

$$\begin{aligned}\psi_{sc}(r) &= -T(0, 0, 0) \int \frac{dk'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2 k'^2} e^{ik'r} \\ \psi_{sc}(r) &= -T(0, 0, 0) \frac{m}{4\pi\hbar^2 r} = -\frac{a}{r}\end{aligned}\tag{C.5}$$

y $T(0, 0, 0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$.

De manera más general la amplitud de dispersión será expresada como:

$$f(k, k') = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} T(k', k, E)\tag{C.6}$$

entonces si solo se considera, en una primera aproximación, el primer término de la matriz de dispersión se tiene que:

$$\begin{aligned}a_{ef} &= \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int U(r) e^{-i(k-k')r} d^3r \\ a_{ef} &= \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int U(r) d^3r \\ a_{ef} &= \frac{m}{4\pi\hbar^2} U(0, 0)\end{aligned}\tag{C.7}$$

con $U(r) = U(0, 0)\delta(r) = g\delta(r)$. Esta descripción pudiera entenderse como un potencial efectivo que tiene contenida implícitamente la información de correlaciones de corto alcance.

Apéndice D

D.1. Resonancias de Feshbach.

En gases de Fermi también se requiere que la dispersión sea gobernada por un potencial efectivo (onda- s). Estos gases son mezclas de dos estados internos que se definen como espines abajo y arriba, que en realidad corresponden a un sistema de dos niveles, formados por la combinación de estados hiperfinos estables en las colisiones para la configuración del medio. Para esta descripción, será necesario un modelo para describir cómo dos fermiones (canal abierto) se acoplan en un estado enlazado (canal cerrado) y cómo se describirá esto para el cruce, basado en un modelo de un solo canal, lo cual es válido en el límite cuando el ancho de la resonancia es mucho más grande que la energía de Fermi. De las ecuaciones C.3 se encuentra que la matriz de dispersión satisface la ecuación de Lippmann-Schwinger [22]:

$$T(k', k, E) = U(k', k) + \frac{1}{V} \sum_{k''} U(k', k'') (E - H_0 + i\delta)^{-1} T(k'', k, E) \quad (\text{D.1})$$

donde se modificaron los operadores de energía (H_0) del canal abierto, correspondiente al sistema para el movimiento relativo de fermiones producto de la interacción Zeeman y con el campo magnético externo. Este corresponde a:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m_r} + H_{spin-1} + H_{spin-2} \quad (\text{D.2})$$

donde por ejemplo para un campo magnético en la dirección z :

$$H_{spin} = A\vec{I} \cdot \vec{J} + g\mu_B B_z J_z - \frac{\mu}{I} B_z \quad (\text{D.3})$$

Las funciones de onda de este Hamiltoniano son $|\alpha\beta, k\rangle$ con la siguiente configuración para la energía:

$$\begin{aligned} H_{spin-1} |\alpha\rangle &= \epsilon_\alpha |\alpha\rangle \\ H_0 |\alpha\beta, k\rangle &= \left(\frac{\hbar^2 k_{\alpha\beta}^2}{2m_r} + \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \right) |\alpha\beta, k\rangle \\ H_{th} &= \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Para una mayor simplicidad que tendrá como fin la descripción de la matriz de dispersión para este sistema formado por un canal abierto y uno cerrado dividamos en subespacios:

$$|\psi\rangle = |\psi_P\rangle + |\psi_Q\rangle \quad (\text{D.5})$$

donde $|\psi_P\rangle = \mathcal{P}|\psi\rangle$ y $|\psi_Q\rangle = \mathcal{Q}|\psi\rangle$ siendo \mathcal{Q} y \mathcal{P} los respectivos proyectores para los estados continuos y enlazados.

Aplicando estos proyectores a $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} (E - H_{PP})|\psi_P\rangle &= H_{PQ}|\psi_Q\rangle \\ (E - H_{QQ})|\psi_Q\rangle &= H_{QP}|\psi_P\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

donde se encuentra el término que media la resonancia actuando como una interacción efectiva en el subespacio \mathcal{P} :

$$E|\psi_P\rangle = \left(H_{PP} + H_{PQ}(E - H_{QQ} + i\delta)^{-1}H_{QP} \right) |\psi_P\rangle \quad (\text{D.7})$$

con $H_{PP} = H_0 + U_1$ con U_1 la interacción en el espacio \mathcal{P} . Entonces la ecuación D.7 queda:

$$E|\psi_P\rangle = (H_0 + U)|\psi_P\rangle \quad (\text{D.8})$$

con:

$$U = U_1 + H_{PQ}(E - H_{QQ} + i\delta)^{-1}H_{QP} \quad (\text{D.9})$$

La ecuación D.1 será escrita de forma matricial de la siguiente manera:

$$T = U + UG_0T \quad (\text{D.10})$$

donde $G_0 = (E - H_0 + i\delta)^{-1}$. Luego esta ecuación puede ser escrita como:

$$T = T_1 + (1 - U_1G_0)^{-1}U_2(1 - G_0U)^{-1} \quad (\text{D.11})$$

con T_1 es la matriz de dispersión en el supespacio \mathcal{P} si se quitan los términos de transiciones al espacio \mathcal{Q} . Entonces la amplitud de dispersión será escrita como:

$$\langle k'|T|k\rangle = \langle k'|T_1|k\rangle + \langle k', U_1, -|U_2|k, U_1, +\rangle \quad (\text{D.12})$$

donde se consideraron contribuciones de primer orden ($U \approx U_1$) y $|k, U_1, \pm\rangle$ son estados que poseen ondas esféricas (+ si son salientes y - si son entrantes) y resultan de aplicar $(1 - G_0U)^{-1}$ a los estados $|k\rangle$. En la dispersión a bajas energías se considera casi cero la velocidad relativa de las partículas del canal abierto, lo que permite obviar la diferencia entre ondas salientes y entrantes ($|k, U_1, \pm\rangle = |\phi_0\rangle$) Bajo estas consideraciones la amplitud de dispersión será evaluada por el resultado de C.6:

$$\frac{4\pi\hbar}{m}a = \frac{4\pi\hbar}{m}a_P + \langle k', U_1, -|U_2|k, U_1, +\rangle \quad (\text{D.13})$$

donde a_P es la longitud de dispersión en el subespacio \mathcal{P} cuando no hay acople entre los canales. Luego el segundo término a la derecha puede ser evaluado con

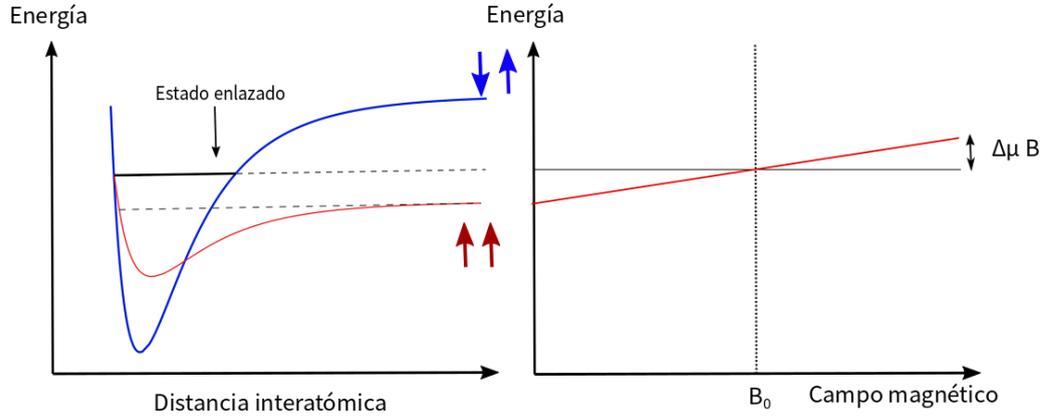


Figura D.1. Cambio en la energía entre el estado resonante y el canal abierto con la variación del campo magnético.

$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$, donde la suma recorre por los estados continuos y los enlazados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_0 | U_2 | \phi_0 \rangle &= \sum_{n,n'} \langle \phi_0 | H_{PQ} | n \rangle \langle n | \frac{1}{E - H_{QQ}} | n' \rangle \langle n' | H_{QP} | \phi_0 \rangle \\
 &= \sum_{n,n'} \langle \phi_0 | H_{PQ} | \phi_n \rangle \frac{\delta_{nn'}}{E_{th} - E_n} \langle \phi_{n'} | H_{QP} | \phi_0 \rangle \\
 &= \sum_n \frac{|\langle \phi_n | H_{QP} | \phi_0 \rangle|^2}{E_{th} - E_n}
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

con E_n siendo la energía del estado n -ésimo del subespacio \mathcal{Q} .

Si la energía E_{th} es cercana a una de un estado enlazado (estado resonante) entonces los demás estados pudieran estar aproximados a estados no resonantes con longitud de dispersión a_{n-re} tal como:

$$\frac{4\pi\hbar^2}{m} a = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_{n-re} + \frac{|\langle \phi_{re} | H_{QP} | \phi_0 \rangle|^2}{E_{th} - E_{re}} \tag{D.15}$$

Este resultado puede ser expandido como una función del campo magnético :

$$E_{th} - E_{re} \approx (\mu_{res} - \mu_\alpha - \mu_\beta)(B - B_0) \tag{D.16}$$

con $\mu_{re} = -\frac{\partial E_{re}}{\partial B}$, $\mu_\alpha = -\frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial B}$ y $\mu_\beta = -\frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial B}$, que son los momentos magnéticos de los átomos en el canal abierto y el momento magnético de un estado molecular respectivamente. La longitud de dispersión está dada entonces por :

$$a = a_{n-re} \left(1 + \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \tag{D.17}$$

donde :

$$\Delta B = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_{n-re}} \frac{|\langle \phi_{re} | H_{QP} | \phi_0 \rangle|^2}{\mu_{res} - \mu_\alpha - \mu_\beta} \tag{D.18}$$

En la figura D.1 se observa que si se varía el campo en $\delta B = B - B_0$ entonces la diferencia energética entre el estado resonante y el canal abierto aumenta en una cantidad $\Delta\mu B$ con $\Delta\mu = \mu_{res} - \mu_\alpha - \mu_\beta$ lo cual también sigue siendo un estado enlazado para el canal abierto.

Bibliografía

- [1] F. London, “The λ -phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy,” *Nature*, vol. 141, p. 643–644, 1938.
- [2] H. E. Hall and W. F. Vinen, “The rotation of liquid helium ii i. experiments on the propagation of second sound in uniformly rotating helium ii,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 238, p. 204–214, December 1956.
- [3] L. Landau, “Theory of the superfluidity of helium ii,” *Phys. Rev.*, vol. 60, pp. 356–358, Aug 1941.
- [4] R. Feynman, “Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium,” vol. 1 of *Progress in Low Temperature Physics*, pp. 17 – 53, Elsevier, 1955.
- [5] S. Moroni, D. E. Galli, S. Fantoni, and L. Reatto, “Variational theory of bulk ^4He with shadow wave functions: Ground state and the phonon-maxon-roton spectrum,” *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp. 909–924, Jul 1998.
- [6] N. N. Bogolyubov, “A contribution to the theory of super-fluidity,” *J. Phys. USSR*, vol. 11, 1947.
- [7] E. P. Gross, “Structure of a quantized vortex in boson systems,” *Il Nuovo Cimento*, vol. 20, 1961.
- [8] L. P. Pitaevskii, “Vortex lines in an imperfect bose gas,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 13, 1961.
- [9] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor,” *Science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995.
- [10] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, “Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 3969–3973, Nov 1995.
- [11] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Theory of bose-einstein condensation in trapped gases,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 71, pp. 463–512, Apr 1999.
- [12] P. Engels, C. Atherton, and M. A. Hofer, “Observation of faraday waves in a Bose-Einstein condensate,” *Physical Review Letters*, vol. 98, no. 9, pp. 2–5, 2007.

- [13] K. Staliunas and S. Longhi, “Faraday patterns in Bose-Einstein condensates,” *2003 European Quantum Electronics Conference, EQEC 2003*, p. 280, 2003.
- [14] K. Staliunas, S. Longhi, and G. J. De Valcárcel, “Faraday patterns in low-dimensional Bose-Einstein condensates,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 70, no. 1, pp. 2–5, 2004.
- [15] R. Greiner and Jin, “Emergence of a molecular bose–einstein condensate from a fermi gas,” *Nature*, vol. 426, 2003.
- [16] G. B. Partridge, K. E. Strecker, R. I. Kamar, M. W. Jack, and R. G. Hulet, “Molecular probe of pairing in the bec-bcs crossover,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 020404, Jul 2005.
- [17] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, “Feshbach resonances in ultracold gases,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 1225–1286, Apr 2010.
- [18] C. J. PETHICK and H. Smith, “Bose-Einstein Condensation in dilute gases,” no. 1991, 1995.
- [19] M. M. Parish, “The bcs-bec crossover,” *arXiv:1402.5171*.
- [20] Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, “BCS-BEC crossover: From high temperature superconductors to ultracold superfluids,” *Physics Reports*, vol. 412, no. 1, pp. 1–88, 2005.
- [21] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 80, no. 3, pp. 885–964, 2008.
- [22] C. J. Pethick, “Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases,” no. 1991, 1995.
- [23] J. Birman, S. F. Edwards, R. Friend, M. Rees, D. Sherrington, and G. Veneziano, “International Series of Monographs on Physics,” 2009.
- [24] D. E. Miller, J. K. Chin, C. A. Stan, Y. Liu, W. Setiawan, C. Sanner, and W. Ketterle, “Critical velocity for superfluid flow across the BEC-BCS crossover,” *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 7, pp. 1–4, 2007.
- [25] S. K. Adhikari and L. Salasnich, “Vortex lattice in the crossover of a Bose gas from weak coupling to unitarity,” *Scientific Reports*, vol. 8, no. 1, pp. 1–11, 2018.
- [26] T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, “Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties,” *Physical Review*, vol. 106, no. 6, pp. 1135–1145, 1957.
- [27] R. A. Tang, H. C. Li, and J. K. Xue, “Faraday instability and Faraday patterns in a superfluid Fermi gas,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 44, no. 11, 2011.

- [28] Strinati, “The BCS-BEC crossover: From ultra-cold Fermi gases to nuclear systems,” *Physics Reports*, vol. 738, no. Mc, 2018.
- [29] A. Bulgac, “Time-Dependent Density Functional Theory and the Real-Time Dynamics of Fermi Superfluids,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 63, no. 1, pp. 97–121, 2013.
- [30] A. Bulgac, M. M. N. Forbes, and G. Wlazłowski, “Towards quantum turbulence in cold atomic fermionic superfluids,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 50, no. 1, 2017.
- [31] D. Kevrekidis and Carretero-González, *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates*.
- [32] A. R. Fritsch, M. Lu, G. H. Reid, A. M. Piñeiro, and I. B. Spielman, “Creating solitons with controllable and near-zero velocity in bose-einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 053629, May 2020.
- [33] T. Tsuzuki, “Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation,” *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 441–457, 1971.
- [34] M. Antezza, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Dark solitons in a superfluid Fermi gas,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 76, no. 4, pp. 3–6, 2007.
- [35] R. G. Scott, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, O. Fialko, R. Liao, and J. Brand, “The decay and collisions of dark solitons in superfluid Fermi gases,” *New Journal of Physics*, vol. 14, pp. 0–14, 2012.
- [36] A. Spuntarelli, L. D. Carr, P. Pieri, and G. C. Strinati, “Gray solitons in a strongly interacting superfluid Fermi gas,” *New Journal of Physics*, vol. 13, pp. 1–10, 2011.
- [37] R. Liao and J. Brand, “Traveling Dark Solitons in Superfluid Fermi Gases,” pp. 1–4, 2010.
- [38] S. Choi, S. A. Morgan, and K. Burnett, “Phenomenological damping in trapped atomic Bose-Einstein condensates,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 57, no. 5, pp. 4057–4060, 1998.
- [39] P. de Gennes, “Superconductivity of metals and alloys,” 1999.
- [40] I. Kovacic, R. Rand, and S. M. Sah, “Mathieu’s equation and its generalizations: Overview of stability charts and their features,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 70, no. 2, 2018.
- [41] T. Insperger and G. Stépán, “Stability of the damped Mathieu equation with time delay,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, vol. 125, no. 2, pp. 166–171, 2003.

- [42] D. S. Petrov and G. V. Shlyapnikov, “Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 64, no. 1, p. 14, 2001.
- [43] G. R. Dennis, J. J. Hope, and M. T. Johnsson, “Xmds2: Fast, scalable simulation of coupled stochastic partial differential equations,” *Computer Physics Communications*, vol. 184, no. 1, pp. 201 – 208, 2013.
- [44] J. J. García-Ripoll, V. M. Pérez-García, and P. Torres, “Extended parametric resonances in nonlinear schrödinger systems,” *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 9, pp. 1715–1718, 1999.
- [45] M. Randeria, J.-m. Duan, and L. Yir vol. 41, no. 1, 1990.
- [46] M. Marini, F. Pistolesi, and G. C. Strinati, “Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: Analytic results for the crossover in three dimensions,” *European Physical Journal B*, vol. 1, no. 2, pp. 151–159, 1998.
- [47] T. Papenbrock and G. F. Bertsch vol. 59, no. 4, pp. 2052–2055, 1999.
- [48] F. Pistolesi and G. C. Strinati, “Evolution from bcs superconductivity to bose condensation: Role of the parameter $k_f\xi$,” *Phys. Rev. B*, vol. 49, pp. 6356–6359, Mar 1994.
- [49] H. Pu and N. P. Bigelow, “Properties of two-species bose condensates,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 6, pp. 1130–1133, 1998.
- [50] R. Sensarma, M. Randeria, and T.-L. Ho, “Vortices in superfluid fermi gases through the bec to bcs crossover,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 090403, Mar 2006.