UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE GRANDES RETÍCULAS DE R-MÓDULOS DEFINIDAS POR PROPIEDADES DE CERRADURA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JESÚS VILLAGÓMEZ CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

CIUDAD DE MÉXICO, 2020

1.Datos del alumno
Villagómez
Chávez
Jesús
(55) 68 35 49 63
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
313045105

2. Datos del tutor
Dr.
José
Ríos
Montes

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Bertha María
Tomé
Arreola

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María José
Arroyo
Paniagua

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Alejandro
Alvarado
García

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Jaime
Castro
Pérez

7.Datos del trabajo escrito.
Sobre grandes retículas de R-módulos definidas por propiedades de cerradura
77
2020

Agradecimientos

Después de muchas experiencias, contratiempos burocráticos, situaciones excepcionales que me tocaron vivir durante mi carrera y mi proceso de titulación, puedo decir, con gran certeza, que este nuevo paso en mi vida académica no podría haber sido posible sin las personas extraordinarias que me acompañaron en el camino.

En primer lugar, quisiera agradecer a mi mamá, Gloria, la persona más importante en mi vida, hiciste mis aspiraciones en tuyas. A mi padre, Jesús, y mi hermano, Victor, por el apoyo en todos estos años.

También, la familia Mancisidor por ser tan incondicionales y a quienes les guardo un sincero afecto. En especial a Maritza, su gran ayuda y su enorme afecto son invaluables para mi, sobre todo cuando estaba en tiempos difíciles.

A mis amigos de prepa, por todas las experiencias vividas, los bajones y los momentos de diversión que hemos vivido juntos. Ni la prepa ni la universidad hubiera sido lo mismo sin ustedes. No los nombro, por si se me olvida mencionar a alguno, pero ustedes saben quiénes son.

De igual manera con mis alumnos, a los que he asesorado, pero de quienes he aprendido mucho.

A los grandes maestros en mi formación, de los cuales he tomado mucha inspiración. Mi primera motivación para entrar a este mundo de las matemáticas, el profesor Raúl Díaz. Además, a la profesora Ninfa Calvario, a quien le guardo un gran cariño y una gran admiración. Por último, de manera especial, a José Ríos Montes, por todas sus enseñanzas, su paciencia, y el apoyo con las ayudantías, con el estímulo del CONACyT y con mi ingreso al posgrado.

Finalmente, agradezco CONACyT por el estímulo a ayudante de profesor SNI III,

obtenido para poder terminar este trabajo, y al sistema de becas, en general.

Índice general

Introducción

El siglo XX representó el inicio de nuevos paradigmas para el estudio de la matemática, trayendo consigo una gran cantidad de nuevas ramas. Entre las cuales, aparece el desarrollo de la teoría de anillos, empezando con el teorema de caracterización de anillos semisimples de Wedderburn-Artin en 1927 [25]. A partir de ahí, se han introducido más herramientas que nos permitan dar una clasificación más completa de este tipo de estructuras. De las cuales, el estudio de los R-módulos se ha convertido en una de las principales; con éste mismo se ha podido llegar a nociones como las teorías de torsión, las clases naturales, etc. Mientras que Amitsur, en 1954, introdujo la noción de prerradical; Spencer Dickson definió las teorías de torsión para categorías abelianas en 1966. A su vez, Dauns, en 1992, comenzó con el estudio de las clases naturales, a quienes llamó **clases saturadas**, y que en 1994 Page y Zhou retomaron con su nombre actual; etc. Un último enfoque, a través de describir ciertos tipos de clases en R-Mod por medio de propiedades de cerradura y de dar un tratamiento de manera reticular, ya ha dado condiciones sobre anillos artinianos, neterianos, locales, o inclusive anillos perfectos.

El objetivo principal de esta tesis es tratar con algunas retículas de clases de módulos determinadas a través de las propiedades por las que se cierran, y como consecuencia, estudiar algunos resultados que se derivan de dicho estudio. Además, el presente trabajo está basado en el escrito **On Big Lattices of Classes of R-modules Defined by Closure Properties**, [1].

Cuando no genere confusión, R denotará a un anillo asociativo con uno. Mientras que se escribirá R-Mod para referirse a la categoría de R-módulos izquierdos unitarios. Así mismo, usaremos *R-Simp* para representar a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos simples.

Durante el capítulo 1, introduciremos todos aquellos conceptos que serán necesarios para entender esta tesis. Empezaremos definiendo algunas nociones de lo que se cumple en una gran retícula. Después abarcaremos conceptos básicos de teoría de categorías, como lo son la concepción de categoría en sí, el producto fibrado, el coproducto fibrado y la noción de funtor. Y finalizando esta parte del trabajo, ahondaremos en los diferentes conceptos necesarios para estudiar la categoría $R\text{-}Mod$, incluyendo las propiedades de cerradura, y viendo cómo éstas ayudan a generar nuevas clasificaciones de anillos.

Por otro lado, con el capítulo 2 introduciremos las retículas definidas por las propiedades de cerradura. Además, veremos algunas retículas asociadas a $R\text{-}Mod$ que sean S-pseudocomplementadas. Terminaremos por determinar el comportamiento de los esqueletos (las retículas de pseudocomplementos) del primer tipo de retículas de este capítulo; con esta nueva herramienta podremos describir los pseudocomplementos en retículas tales como $R\text{-}tors$, *R-nat*, etc.

El capítulo 3 se enfocará en la colección de clases cerradas bajo submódulos y extensiones; describiendo la gran retícula *R-sext*, para lo cual definiremos los secuenciadores exactos entre dos clases en esta retícula, e introduciremos el operador *sext*. Una vez hecho ésto, nos dedicaremos en buscar algunas propiedades que cumple esta retícula. Mientras que en el capítulo siguiente, el cuarto, dualizaremos y estudiaremos estos mismos principios para *R-qext*, la clase de clases cerradas bajo cocientes y extensiones.

Finalmente, en el capítulo 5 relacionaremos todas estas nociones. Ocupando éstas últimas, junto a *R-nat* y *R-conat*, para dar una nueva caracterización de algunos anillos artinianos, algunos neterianos, y otros perfectos derechos locales izquierdos. Adicionalmente, terminamos este trabajo dando ejemplos claves en los que deducimos que las condiciones *R-her* = *R-quot*, *R-sext* = *R-qext* y *R-nat* = *R-conat* no son equivalentes.

Aún cuando este trabajo será lo más autocontenido posible, se le recomienda al lector complementar con otros textos, para un mejor manejo de los conceptos. Las referencias citadas en este trabajo son un buen comienzo para lograr este fin.

Parte I

TEORÍA BÁSICA DE MÓDULOS Y ANILLOS

CAPÍTULO 1

Preliminares

Ocuparemos este capítulo para precisar los conceptos con los que se trabajarán en esta tesis. Empezaremos considerando un poco de teoría de las grandes retículas. Además, se dará una introducción a la noción de categoría y algunos de sus objetos especiales, definidos por propiedades universales. Por último, se abordarán las ideas dentro de la teoría de módulos y de la teoría de anillos, buscando esclarecer en qué consisten las propiedades de cerradura, estudiando algunos tipos de módulos y anillos, y caracterizaciones de éstos.

1.1. Retículas

Definición 1.1.1. Como en [16], aquellas colecciones que no son conjuntos reciben el nombre de **clases propias**. Además, entenderemos por **conglomerado**, en el sentido descrito en [20], a una colección de clases. Por otro lado, una relación binaria $\preceq$ sobre un conjunto X es llamada **orden parcial** [16] (para fines de este trabajo, lo abreviaremos como orden) si satisface las siguientes propiedades:

1. Dado $x \in X$, se cumple que $x \preceq x$
2. Para cualesquiera dos elementos $x,\ y \in X$, si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x = y$
3. Si $x,\ y,\ z \in X$ son tres elementos tales que $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$

Definición 1.1.2. Sean X un conjunto, $\preceq$ un orden sobre X y $a,\ b \in X$. Un elemento **ínfimo** [16] de a y b en X, denotado por $a \wedge b$, es aquel que satisface:

1. $a \wedge b \preceq a$ y $a \wedge b \preceq b$.
2. Cada que un elemento $c \in X$ cumpla que $c \preceq a$ y $c \preceq b$, se tendrá que $c \preceq a \wedge b$.

De manera dual, el **supremo** [16] de a y b, el cual escribiremos como $a \vee b$, es un elemento que tiene las siguientes dos propiedades:

1. $a \preceq a \vee b$ y $a \preceq a \vee b$.

2. Para un elemento $c \in X$ tal que $a \preceq c$ y $b \preceq c$, se cumplirá que $a \vee b \preceq c$.

Ahora, notemos que esta última definición se generaliza para cualquier subconjunto $S \subseteq X$. Donde usaremos los símbolos $\bigwedge_{s \in S} s$ para el ínfimo de S, y $\bigvee_{s \in S} s$ para el supremo S. A continuación, se precisa el concepto de retícula.

Definición 1.1.3. Se define como **retícula** [24] al par $\{X, \preceq\}$, donde X es un conjunto y $\preceq$ es un orden sobre X en el que cualesquiera dos elementos de X tienen ínfimo y supremo. Por otra parte, si $\{X, \preceq\}$ cumple las propiedades de retícula, donde X es una clase propia, en vez de un conjunto, se dice que $\{X, \preceq\}$ es una **gran retícula** [16].

Dentro de las retículas, existe un tipo especial de éstas, las completas. Cuya definición es la siguiente.

Definición 1.1.4. Una retícula $\{X, \preceq\}$ se dice **completa** [6] si toda subfamilia $S \subseteq X$ tiene ínfimo y supremo en X.

Siguiendo la misma notación, como $X \subseteq X$, podemos tomar $S = X$. Lo cual da lugar a la observación:

Observación 1.1.5. Toda retícula completa tiene elemento mayor y un elemento menor.

Definición 1.1.6. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula. Definimos, en caso de existir, el elemento **cero** de X [24] como $0 = \bigwedge_{x \in X} x$ y al elemento **uno** de X [24] como $1 = \bigvee_{x \in X} x$. En dicha situación, diremos que X es una **retícula con** 0 **y** 1.

Estas retículas serán las que consideraremos a partir de ahora.

Definición 1.1.7. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula con 0 y 1, y sea $a \in X$. Un **pseudocomplemento** [1] de a es un elemento $b \in X$ tal que es máximo con la propiedad de que $a \wedge b = 0$. Es decir, si $c \in X$ es tal que $a \wedge c = 0$ y $b \preceq c \preceq 1$, se obtiene que $c = b$. Por otro lado, si $d \in X$ es el elemento mayor con el que $a \wedge d = 0$, diremos que d es un **pseudocomplemento fuerte** [1] de a (para resumirlo, decimos que d es un **S-pseudocomplemento** de a). En otras palabras, si $c \in X$ satisface que $a \wedge c = 0$, entonces $c \preceq d$. En tal caso, **denotaremos al S-pseudocomplemento mediante el símbolo** $a^{\perp}$. Además, decimos que X es una retícula **S-pseudocomplementada** [1] si todo elemento de X tiene S-pseudocomplemento en X. Ahora, se dice que x es un

complemento de a en X si $x \wedge a = 0$ y $x \vee a = 1$. Finalmente, entenderemos por **retícula complementada** [10] a una retícula donde cada uno de sus elementos posee un complemento.

Observación 1.1.8. Observe que de las definiciones anteriores se puede concluir que, en caso de existir, los S-pseudocomplementos son únicos; en cambio, los pseudocomplementos pueden no satifacer esta condición de unicidad.

Observación 1.1.9. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula y sean $x, y \in X$ tales que $x \preceq y$. Entonces $x \wedge z \preceq y \wedge z, \ \forall z \in X$.

Demostración. En efecto, si $z \in X$, entonces $x \wedge z \preceq z$ y $x \wedge z \preceq x \preceq y$. Por lo que $x \wedge z \preceq y \wedge z$.

□

Observación 1.1.10. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula y sean $x, y \in X$ dos elementos con S-pseudoomplemento. Si $x \preceq y$, entonces $y^\perp \preceq x^\perp$.

Demostración. Por la Observación 1.1.9, $x \wedge y^\perp \preceq y \wedge y^\perp = 0$. Entonces $x \wedge y^\perp = 0$. Y por la definición de S-pseudocomplemento, se tiene que $y^\perp \preceq x^\perp$.

□

Observación 1.1.11. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula. Una condición suficiente para que $x \preceq (x^\perp)^\perp$ se cumpla para todo $x \in X$ es el que X sea S-pseudocomplementada.

En efecto, si $x \in X$, entonces $x \wedge x^\perp = 0$ y $x^\perp \wedge (x^\perp)^\perp = 0$. Pero, al ser $(x^\perp)^\perp$ S-pseudocomplemento de $x^\perp$, se sigue que $x \preceq (x^\perp)^\perp$

□

Observación 1.1.12. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula. Que X sea S-pseudocomplementada, implica que si $x \in X$, entonces $x^\perp = (x^\perp)^{\perp\perp} = (x^{\perp\perp})^\perp = x^{\perp\perp\perp}$.

Demostración. Por la Observación 1.1.11, se tiene que $x \preceq x^{\perp\perp}$. Como $x \preceq x^{\perp\perp}$, por la Observación 1.1.10, se sigue que $(x^{\perp\perp})^\perp \preceq x^\perp$. Además, $x^\perp \wedge x^{\perp\perp} = 0$, y así $x^\perp \preceq (x^{\perp\perp})^\perp$. Concluyendo que $x^\perp = (x^{\perp\perp})^\perp$.

Por último, puesto que $x^{\perp\perp} = (x^\perp)^\perp$, obtenemos $(x^\perp)^{\perp\perp} = (x^{\perp\perp})^\perp$. Por lo tanto, $x^\perp = (x^\perp)^{\perp\perp} = (x^{\perp\perp})^\perp = x^{\perp\perp\perp}$.

□

Definición 1.1.13. Una retícula $\{X, \preceq\}$ es **modular** [6] si dados $a, b, c \in X$, con $a \preceq b$, se cumple que $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$

Definición 1.1.14. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula. Decimos que X es **distributiva** [6] si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se tiene que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Observación 1.1.15. Dada una retícula $\{X, \preceq\}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es distributiva
2. Para cualesquiera tres elementos $x, y, z \in X$, se satisface $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Una vez definidos éstos conceptos, se procede a considerar algunas generelizaciones. En el caso de retículas modulares, definiremos el ser superiormente continua. Análogamente, al abstraer más la noción de retícula distributiva, obtendremos a los marcos.

Definición 1.1.16. Sea $\preceq$ un orden sobre X. Un **conjunto dirigido** es un subconjunto $D \subseteq X$ con la propiedad de que si $a, b \in X$, entonces existe $z \in X$ tal que $a \preceq z$ y $b \preceq z$.

Definición 1.1.17. Sea X una retícula. Diremos que X es **superiormente continua** [24] si para culaquier $x \in X$ y cualquier conjunto dirigido $D \subseteq X$ se cumple que $x \wedge (\bigvee_{y \in D} y) = \bigvee_{y \in D} (x \wedge y)$. Por último, se dice que la retícula X es un **marco** si dado un elemento $x \in X$ y un subconjunto $T \subseteq X$ se tiene que $x \wedge (\bigvee_{t \in T} t) = \bigvee_{t \in T} (x \wedge t)$.

Observación 1.1.18. De la propia definición, tenemos que todo marco es una retícula distributiva y superiormente continua.

Observación 1.1.19. Hasta este momento, todas estas definiciones se pueden generalizar para grandes retículas. La prueba de la siguiente proposición es válida únicamente para retículas, ya que no tenemos un equivalente del **Lema de Zorn** para grandes retículas. Por lo que el estudio de los pseudocomplementos en grandes retículas se tratan sólo para algunos casos particulares.

Proposición 1.1.20. *Si $\{X, \preceq\}$ es una retícula superiormente continua, entonces X es pseudocomplementada.*

Demostración. Sea $x \in X$.

Definimos la familia $\mathfrak{F} = \{y \in X : y \wedge x = 0\}$. Ésta última es no vacía, pues $0 \in \mathfrak{F}$.

Ahora, considere una cadena $\{y_i\}_{i \in I}$ en $\mathfrak{F}$. Entonces $\{y_i\}_{i \in I}$ es una familia dirigida. Puesto que X es superiormente continua, se tiene que $x \wedge (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i) = 0$. Y así, toda cadena de $\mathfrak{F}$ es superiormente acotada.

Por el lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ tiene elementos máximos. Sea $t \in \mathfrak{F}$ uno de éstos elementos máximos. Por tanto, t es un pseudocomplemento de x en X.

□

Más adelante, en el capítulo 2, veremos que la condición de una retícula sea superiormente continua no es suficiente para que sea S-pseudocomplementada. Como ejemplo tenderemos a la retícula de ideales del anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$.

1.2. Categorías

Definición 1.2.1. Una categoría $\mathscr{X}$ [18] consiste de los siguientes elementos:

- Una clase de objetos, denotada por $Obj(\mathscr{X})$.
- Para cada $C, D \in Obj(\mathscr{X})$, un conjunto $Hom_{\mathscr{X}}(C, D)$, cuyos elementos se llaman morfismos.
- Si (C, D, E) es una tripleta de objetos de $\mathscr{X}$, entonces existe una composición $Hom_{\mathscr{X}}(D, C) \times Hom_{\mathscr{X}}(C, E) \longrightarrow Hom_{\mathscr{X}}(D, E)$ tal que:
  1. Para objetos distintos W, X, Y, Z de $\mathscr{X}$, se satisface que $Hom_{\mathscr{X}}(X, Y) \cap Hom_{\mathscr{X}}(W, Z) = \emptyset$
  2. La composición es asociativa.
  3. Para cualesquiera $C, D, E \in Obj(\mathscr{X})$, existe $1_C \in Hom_{\mathscr{X}}(C, C)$ tal que si $\alpha \in Hom_{\mathscr{X}}(C, D)$ y $\beta \in Hom_{\mathscr{X}}(E, C)$ se satisface que $\alpha 1_C = \alpha$ y $1_C \beta = \beta$.

Definición 1.2.2. Dada una categoría $\mathscr{X}$, sean $\alpha : M \longrightarrow K, \beta : N \longrightarrow K$ dos morfismos en $\mathscr{X}$. Un **producto fibrado** [26] de (α, β) es un objeto P en $\mathscr{X}$ con las siguientes propiedades:

1. Existe un par de morfismos $\varphi : P \longrightarrow M$ y $\psi : P \longrightarrow N$ en $\mathscr{X}$ tal que $\alpha\varphi = \beta\psi$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "\beta"] & K \end{tikzcd}$$

2. Si $L \in Obj(\mathscr{X})$, $\sigma \in Hom_{\mathscr{X}}(L, M)$ y $\tau \in Hom_{\mathscr{X}}(L, N)$ son tales que $\sigma\varphi = \tau\psi$, entonces existe un único morfismo $\lambda : L \longrightarrow P$ que satisface las identidades $\lambda\varphi = \sigma$ y $\lambda\psi = \tau$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[drr, "\sigma"] \arrow[dr, dotted, "\lambda"] \arrow[ddr, "\tau"'] & & \\ & P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ & N \arrow[r, "\beta"] & K \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.3. Sea $\mathscr{X}$ una categoría y sean $\delta : K \longrightarrow M, \chi : K \longrightarrow N$ dos morfismos en $\mathscr{X}$. Diremos que un objeto $C \in Obj(\mathscr{X})$ es un **coproducto fibrado** [26] si cumple con lo siguiente:

1. Hay dos morfismos $\pi : M \longrightarrow C$ y $\rho : N \longrightarrow C$ en $\mathscr{X}$ tales que $\pi\delta = \rho\chi$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\chi"] & M \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "\rho"] & C \end{tikzcd}$$

2. Si $S \in Obj(\mathscr{X})$, $\kappa \in Hom_{\mathscr{X}}(M, S)$ y $\phi \in Hom_{\mathscr{X}}(N, S)$ son tales que $\kappa\varphi = \phi\psi$, entonces existe un único morfismo $\eta : C \longrightarrow S$ tal que $\eta\pi = \kappa$ y $\eta\rho = \phi$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\chi"] & M \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, "\kappa"] & \\ N \arrow[r, "\rho"] \arrow[drr, "\phi"'] & C \arrow[dr, dotted, "\eta"] & \\ & & S \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.4. Sean $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ dos categorías. A una asignación entre objetos de las categorías, $F : Obj(\mathscr{X}) \longrightarrow Obj(\mathscr{Y})$ se le dará el nombre de **funtor** [18] si:

1. $F(X) \in Obj(\mathscr{Y})$, $\forall X \in Obj(\mathscr{X})$
2. Si $X, Y \in Obj(\mathscr{X})$ y $f \in Hom_{\mathscr{X}}(X, Y)$, entonces $F(f) \in Hom_{\mathscr{Y}}(F(X), F(Y))$
3. Sean $X, Y, Z \in Obj(\mathscr{X})$. Entonces dados 2 morfismos $f \in Hom_{\mathscr{X}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathscr{X}}(Y, Z)$, se satisface que $F(fg) = F(f)F(g)$
4. Para cualquier $X \in \mathscr{X}$, se satisface que $F(Id_X) = Id_{F(X)}$

1.3. Anillos y módulos

A partir del siglo XX, la concepción de los R-módulos se ha convertido en una pieza fundamental en el estudio de la teoría de anillos. Para ésto, definiremos algunas nociones básicas de esta teoría.

Definición 1.3.1. Siguiendo la definición dada en [6], sean R un conjunto no vacío, $+ : R \times R \longrightarrow R$ y $\cdot : R \times R \longrightarrow R$ dos operaciones binarias en R. Se dice que la estructura $(R, +, \cdot, 0, 1)$ es un **anillo asociativo con uno** (en adelante, únicamente lo mecionaremos como anillo) si $(R, +, 0)$ es un grupo abeliano, $(R, \cdot, 1)$ un monoide y si, además, se satiface la distributividad por ambos lados (es decir, para todos los $a, b, c \in R$, se tiene que $a(b+c) = ab+ac$ y $(a+b)c = ac+bc$). En tal caso, abreviaremos escribiendo únicamente R.

Definición 1.3.2. Sea R un anillo y sea $I \subseteq R$. Diremos que I es un **ideal izquierdo** (**derecho**) de R si I es un grupo abeliano aditivo que satisface que $aI \subseteq I$ ($Ia \subseteq I$ respectivamente), para toda $a \in R$. Por otro lado, I será un **ideal bilateral** de R siempre que sea ideal izquierdo y derecho.

A partir de lo mencionado en [24], obtendremos el concepto de R-módulo izquierdo unitario.

Definición 1.3.3. Sea R un anillo. Un **R-módulo izquierdo unitario** (a partir de ahora, será nombrado como R-módulo) es un conjunto no vacío M, dotado de dos operaciones $+ : M \times M \longrightarrow M$ y $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ tales que:

1. M es un grupo abeliano respecto a $+$
2. $r(m+n) = rm + rn$
3. $(a+r)x = am + rm$
4. $(ar)m = a(rm)$
5. $1m = m$

para cualesquiera $m, n \in M$ y $a, r \in R$. Cuando se esté en dicha situación, reduciremos la notación, escribiendo, solamente, M. Por último, a la clase de R-módulos se le citará como R-Mod.

De manera análoga, se define un **R-módulo derecho unitario**.

Definición 1.3.4. Sea M un R-módulo y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia en R-Mod.

1. Un **submódulo** de M [18] es un subconjunto $N \subseteq M$ que es un R-módulo bajo las operaciones heredadas por M. La notación que será usada para los submódulos es $N \leq M$, además $Sub_R(M)$ denotará al conjunto de submódulos de M.
2. Todo submódulo N de M define el respectivo **módulo cociente** [18] como el grupo abeliano cociente M/N con las operaciones determinadas por los representantes en M.
3. El grupo producto $\prod_{i \in I} M_i$ dotado con la acción de multiplicación por un escalar de R (es decir, $r(m_i)_{i \in I} \rightarrow (rm_i)_{i \in I}$) forma el **módulo producto** [14] de $\{M_i\}_{i \in I}$
4. Al submódulo $\{(m_i)_{i \in I} : m_i = 0$, salvo una cantidad finita de $i \in I\}$ de $\prod_{i \in I} M_i$ se le conoce como la **suma directa externa** [14] de $\{M_i\}_{i \in I}$. La cuál será denotada por $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

5. Por último, $M \neq 0$ es **simple** [18] si $Sub_R(M) = \{0, M\}$. Mientras que $N \leq M$ es **máximo** si es coátomo de la retícula $Sub_R(M)$ (es decir, si $M/N \in R\text{-}Simp$).

Definición 1.3.5. Sean M, N R-módulos y sea $f : M \longrightarrow N$ una función entre M y N. Decimos que f es un **homomorfismo de módulos** [18] (o bien, morfismo de módulos) si para cualquier $r \in R$ y para todos $m, n \in M$ se tiene que $f(m+n) = f(m) + f(n)$ y $f(rm) = rf(m)$.

Ya con estos conceptos, cabe mencionar que $R\text{-}Mod$ es una categoría, donde los morfismos de esta categoría son justamente los homomorfismos de módulos. A continuación, se definen algunos conceptos relacionados a los morfismos entre módulos.

Definición 1.3.6. A partir de [6], sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos.

1. Al conjunto $Nuc(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ se le conoce como el **núcleo** de f.
2. La **imagen** de f se describe como el conjunto $Im(f) = \{f(m) : m \in M\}$.
3. Diremos que f es un **monomorfismo** si $Nuc(f) = 0$.
4. A f le llamaremos **epimorfismo** cuando $Im(f) = N$.
5. Por último, f será un **isomorfismo** si es monomorfismo y epimorfismo. En tal caso, se dice que M y N son **isomorfos**, y lo denotaremos por $M \cong N$.

Con estas definiciones, a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples se le denota como $R\text{-}Simp$.

Definición 1.3.7. Una sucesión $\ldots \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$ es exacta [18] si $Im(f_{n+1}) \subseteq Nuc(f_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, una sucesión se dice **corta** si es de la forma: $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$

Observación 1.3.8. Las sucesiones exactas cortas en $R\text{-}Mod$ son esencialmente de la forma $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \longrightarrow 0$

Definición 1.3.9. Sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos. Decimos que $\mathscr{C}$ es **cerrada bajo extensiones** si para cada $N, K \in \mathscr{C}$ y si $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ es exacta, entonces $M \in \mathscr{C}$.

Definición 1.3.10. Una clase $\mathscr{A}$ de R-módulos **cerrada bajo sumas directas** si para cualquier colección $\{M_i\}_{i \in I} \subset \mathscr{A}$, se tiene que $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathscr{A}$.

En general, tenemos la siguiente definición para propiedades 1-arias

Definición 1.3.11. Sea $\mathscr{X}$ una clase de R-módulos y sea $\mathfrak{P}$ una propiedad 1-aria de R-módulos. Diremos que $\mathscr{X}$ es **cerrada bajo** $\mathfrak{P}$ si $\mathfrak{P}(M) \in \mathscr{X}$, $\forall M \in \mathscr{X}$.

1.4. Productos fibrados, coproductos fibrados y subcocientes

Utilizaremos y demostraremos con todo detalle 3 teoremas de [18] para poder precisar la noción de subcociente.

Proposición 1.4.1. *Sean $\varphi : N \longrightarrow M$ y $\psi : K \longrightarrow M$ dos morfismos de R-módulos y sea $L = \{(n,k) \in N \times K : \varphi(n) = \psi(k)\}$. Si $\lambda : L \longrightarrow N$ y $\mu : L \longrightarrow K$ están definidos como $\lambda(n,k) = n$ y $\mu(n,k) = k$, entonces L, λ y μ son el producto fibrado de (φ, ψ).*

Demostración. Primeramente, si $(n,k) \in L$, entonces $\varphi\lambda(n,k) = \varphi(n) = \psi(k) = \psi\mu(n,k)$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\lambda"] & K \arrow[d, "\psi"] \\ N \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

Ahora, sean $P \in R\text{-}Mod$, $\tau : P \longrightarrow N$, y $\sigma : P \longrightarrow K$ tales que $\tau\varphi = \sigma\psi$. Definimos el morfismo $\eta : P \longrightarrow L$ como $\eta(p) = (\tau(p), \sigma(p))$. De modo que $\lambda\eta = \lambda(\tau, \sigma) = \tau$ y $\mu\eta = \mu(\tau, \sigma) = \sigma$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, dotted, "\eta"] \arrow[drr, bend left, "\sigma"] \arrow[ddr, bend right, "\tau"'] & & \\ & L \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\lambda"] & K \arrow[d, "\psi"] \\ & N \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

Por último, para ver que η es única, sea $\chi : P \longrightarrow L$ otro morfismo que cumple dicha propiedad. De manera que si $p \in P$, entonces $\lambda(\eta - \chi)(p) = \tau(p) - \tau(p) = 0$ y $\mu(\eta - \chi)(p) = \sigma(p) - \sigma(p) = 0$. Por lo que $\eta - \chi = 0$. Lo que implica que η es única.

$\square$

Observación 1.4.2. En la prueba anterior, para demostrar la unicidad de η, un hecho de gran importancia es el que $Nuc(\lambda) \cap Nuc(\mu) = \{0\}$.

Demostración. Ésto se debe a que si $(n,k) \in Nuc(\lambda) \cap Nuc(\mu)$, entonces $n = \lambda(n,k) = 0$ y $k = \mu(n,k) = 0$.

$\square$

Definición 1.4.3. Sea $M \in R\text{-}Mod$. Dado un $S \subseteq M$ (posiblemente vacío), definimos el **submódulo generado por** S como el menor submódulo de M que contenga a S. Ésto es $\bigcap\{N \leq M : S \subseteq M\}$. En tal caso, denotaremos a éste como (S). Además, si $S = \{x\}$, denotaremos por $Rx = \{rx : r \in R\}$

Proposición 1.4.4. *Considere los siguientes morfismos $\varphi : M \longrightarrow N$ y $\psi : M \longrightarrow K$. Sea $P = \{(\varphi(m), -\psi(m)) : m \in M\}$. Entonces el módulo $L = N \oplus K/P$ junto a los morfismos $\lambda : N \longrightarrow L$ y $\mu : K \longrightarrow L$ dados por $\lambda(n) = \overline{(n,0)}$ y $\mu(k) = \overline{(0,k)}$ constituyen el coproducto fibrado de (φ, ψ).*

Demostración. Sea $m \in M$.
Entonces $(\lambda\varphi - \mu\psi)(m) = \overline{(\varphi(m),0)} - \overline{(0,\psi(m))} = \overline{(\varphi(m),-\psi(m))} = 0$. Es decir, $\lambda\varphi = \mu\psi$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & K \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\lambda"] & L \end{tikzcd}$$

Por otro lado, sean $S \in R\text{-}mod$, $\tau : N \longrightarrow S$ y $\sigma : K \longrightarrow S$ tales que $\tau\varphi = \sigma\psi$. Consideramos el morfismo $\eta : L \longrightarrow S$ determinado por $\eta(\overline{(n.k)}) = \tau(n) + \sigma(k)$. Ahora, sea $(n,k) \in N \times K$. Entonces $\eta\lambda(n) = \eta(\overline{(n,0)}) = \tau(n)$ y $\eta\mu(k) = \eta(\overline{(0,k)}) = \sigma(k)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & K \arrow[d, "\mu"] \arrow[ddr, "\sigma"] & \\ N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[drr, "\tau"'] & L \arrow[dr, dotted, "\eta"] & \\ & & S \end{tikzcd}$$

Finalmente, si $\chi : L \longrightarrow S$ es otro morfismo que satisface ésta misma propiedad y si $\overline{(n,0)}, \overline{(0,k)}$ son dos elementos en L, entonces $(\chi - \eta)\lambda(\overline{(n,0)}) = \tau(n) - \tau(n) = 0$ y $(\chi - \eta)\mu(\overline{(0,k)}) = \sigma(k) - \sigma(k) = 0$. Así, $\chi - \eta = 0$, ya que $\chi - \eta$ se anula en $(\left\{\overline{(n,0)}, \overline{(0,k)} : n \in N, k \in K\right\}) = L$. Concluyéndose que η es única.

□

Una pregunta que surge de estudiar las 2 propiedades anteriores de estas dos nociones dentro de la categoría $R\text{-}Mod$ es el encontrar una relación entre los morfismos y alguna condición de inyectividad o de sobreyectividad. Lo cual, da a lugar a nuestros dos siguientes resultados.

Proposición 1.4.5. *Sean $\varphi : N \longrightarrow M$ y $\psi : K \longrightarrow M$ dos morfismos. Suponga que L junto a $\lambda : L \longrightarrow N$ y $\mu : L \longrightarrow K$ forman el producto fibrado de (φ, ψ).*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mu} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

Entonces:

1. *Si ψ es mono., entonces λ es mono.*

2. *Si ψ es epi., entonces λ es epi.*

3. *Si φ es mono., entonces μ es mono.*

4. *Si φ es epi., entonces μ es epi.*

Demostración. Probaremos los incisos 1 y 2, ya que la condición 3 se argumenta de manera similar al iniso 1, mientras que la demostración del 4 es similar al de la del 2.

1. Sea $x \in Nuc(\lambda)$. Entonces $0 = \varphi\lambda(x) = \psi\mu(x)$. De esta forma $\mu(x) \in Nuc(\psi) = \{0\}$. Por los que $x \in Nuc(\lambda) \cap Nuc(\mu)$. Sin embargo, por la Observación 1.4.2, se tiene que $Nuc(\lambda) \cap Nuc(\mu) = \{0\}$. Es decir, $x = 0$. Por tanto, λ es mono.

$\square$

2. Sea $x \in N$. Entonces $\varphi(x) \in M$. Puesto que ψ es epi., existe una $k \in K$ tal que $\psi(k) = \varphi(x)$. Ahora, la descripción de L dada en Proposición 1.4.1, obtenemos que $(x, k) \in L$, y así, $\lambda(x, k) = x$. Por lo que λ es epi.

$\square$

Proposición 1.4.6. *A partir del siguiente diagrama de coproducto fibrado,*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ N & \xrightarrow{\lambda} & L \end{array}$$

se satisfacen cada una de las siguientes propiedades:

1. *Si ψ es mono., entonces λ es mono.*

2. *Si ψ es epi., entonces λ es epi.*

3. *Si φ es mono., entonces μ es mono.*

4. *Si φ es epi., entonces μ es epi.*

Demostración. Al igual que en la proposición anterior, probaremos sólo 1 y 2, ya que la argumentación es análoga.

1. Sea $x \in Nuc(\lambda)$. Entonces $\lambda(x) = \overline{(x,0)} = 0$. Como $\overline{(x,0)} = 0$, existe $k \in K$ tal que $\overline{(x,0)} = \overline{(\varphi(k),\psi(x))}$. Lo que implica que $\psi(k) = 0$. Pero ψ es mono., entonces $k = 0$ y $x = \varphi(k) = 0$. Concluyendo que λ es mono.

□

2. Sea $\overline{(x,y)} \in L$. De forma que $y \in K$, y como ψ es epi., existe $m \in M$ tal que $\psi(m) = y$. Entonces $\lambda(x - \varphi(m)) = \overline{(x - \varphi(m),0)} = \overline{(x - \varphi(m),0)} + \overline{0} = \overline{(x - \varphi(m),0)} + \overline{(\varphi(m),-\psi(m))} = \overline{(x,\psi(m))} = \overline{(x,y)}$. Por lo tanto λ es epi.

□

Definición 1.4.7. Sean M, N dos R-módulos. Se entenderá que N es un **subcociente** de M [1] si existen K un R-módulo, un monomorfismo $\varphi : N \longrightarrow K$ y un epimorfismo $\psi : M \longrightarrow K$.

Corolario 1.4.8. *Sean M, N dos R-módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *N es subcociente de M*

2. *Existen K un R-módulo, un monomorfismo $\tau : K \longrightarrow M$ y un epimorfismo $\sigma : K \longrightarrow N$.*

Demostración. Si N es un subcociente de M, existen $L \in R\text{-}Mod$, $\varphi : N \longrightarrow L$ mono. y $\psi : M \longrightarrow L$ epi. Entonces considerando al coproducto fibrado (K, τ, σ) y aplicando la Proposición 1.4.6, tenemos la condición deseada. Inversamente, si P es un R-módulo, $\rho : P \longrightarrow M$ mono y $\psi : P \longrightarrow N$ epi., entonces aplicamos la Proposición 1.4.5 al producto fibrado (S, λ, μ) para llegar a que N es subcociente de M.

□

Observación 1.4.9. Sea $M \in R\text{-}Mod$. La propiedad "N **es subcociente de** M" podemos representarla tanto por un diagrama de producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, two heads, "\psi"] \\
N \arrow[r, tail, "\varphi"] & K
\end{tikzcd}
$$

como por un diagrama de coproducto fibrado.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "\tau"] \arrow[d, two heads, "\sigma"] & M \\ N & \end{tikzcd}$$

Observación 1.4.10. Sean $M, N, K, L, Q \in R\text{-}Mod$. Entonces:

1. M es subcociente de sí mismo.

2. Si $N \leq M$ y K es subcociente de N, entonces K es subcociente de M. A su vez, si Q es cociente de M y L es subcociente de Q, entonces L es subcociente de M.

3. Dado el siguiente diagrama, $\rho[K] \cap \sigma\tau[N]$ es subcociente de N y de K.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, tail, "\tau"] & M \arrow[d, two heads, "\sigma"] \\ & K \arrow[r, tail, "\rho"] & L \end{tikzcd}$$

Demostración. 1. Ésto se debe a que el morfismo identidad $Id : M \longrightarrow M$ es epi. y mono.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "Id"] \arrow[d, two heads, "Id"] & M \\ M & \end{tikzcd}$$

2. En el primer caso, tenemos el morfismo inclusión $\iota : N \longrightarrow M$. Y como K es subcociente de N, existen $T \leq N$, un monomorfismo $\lambda : T \longrightarrow N$ y un epimorfismo $\eta : T \longrightarrow K$. De esta forma $T \leq M$, $\iota\lambda$ y η cumplen con las condiciones deseadas.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, tail, "\lambda"] \arrow[d, two heads, "\eta"] & N \arrow[r, tail, "\iota"] & M \\ K & & \end{tikzcd}$$

En el segundo caso, se tiene la proyección $\pi : M \longrightarrow Q$. Puesto que L es subcociente de Q, existen U un cociente de Q, $\rho : Q \longrightarrow U$ un epi y $\mu : L \longrightarrow U$ un monomorfismo. Por lo que $M \twoheadrightarrow U$, $\rho\pi$ y μ tienen la propiedad de subcociente.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "\pi"] & Q \arrow[r, two heads, "\rho"] & U \\
 & & L \arrow[u, tail, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

3. Primeramente, $\rho[K] \cap \sigma\tau[N]$ es subcociente de K, ya que $\rho[K]$ es cociente de K, $\rho : K \longrightarrow \rho[K]$ es epi y la inclusión $\iota : \rho[K] \cap \sigma\tau[N] \longrightarrow \rho[K]$ es mono.

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, two heads, "\rho"] \\
\rho[K] \cap \sigma\tau[N] \arrow[r, tail, "\iota"] & \rho[K]
\end{tikzcd}$$

De manera análoga, argumentamos el que $\rho[K] \cap \sigma\tau[N]$ sea subcociente de N, teniendo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, two heads, "\sigma\tau"] \\
\rho[K] \cap \sigma\tau[N] \arrow[r, tail, "\kappa"] & \sigma\tau[N]
\end{tikzcd}$$

1.5. Cápsulas inyectivas y cubiertas proyectivas

Definición 1.5.1. Sea $M \in R\text{-}Mod$ y sea $N \leq M$. Se dice que N es **esencial** [8] en M si el único pseudocomplemento de N en $Sub_R(M)$ es $\{0\}$

Definición 1.5.2. Sea $M \in R\text{-}Mod$. Definimos **la clase de inyectividad** [14] de M como aquellos módulos E con la propiedad que si $N \leq M$ y $\alpha : N \longrightarrow E$, entonces α puede ser extendido a un morfismo $\beta : M \longrightarrow E$. A dicha clase la denotaremos por $In(M)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.5.3. Un R-módulo M es **inyectivo** [14] si $M \in In(N)$, $\forall N \in R\text{-}Mod$.

Observación 1.5.4. Sea M un R-módulo izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es inyectivo.

2. $M \in In(R)$

A éste resultado se le conoce como el **criterio de Baer**

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"] & R \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Observación 1.5.5. En tal caso, $M \in R\text{-}Mod$ es inyectivo en $R\text{-}Mod$ si y sólo si $In^{-1}(M) = R\text{-}Mod$.

Definición 1.5.6. La **cápsula inyectiva** de un R-módulo M [14] es un módulo inyectivo E tal que $M \subseteq E$ y M es esencial en E.

Observación 1.5.7. La cápsula inyectiva de un módulo siempre existe y es única, salvo isomorfismos.

Definición 1.5.8. Sean $M, L \in R\text{-}Mod$ y N, K submódulos de M. Entenderemos que N es **superfluo** [12] en M si cada que $N + K = M$, implica que $K = M$. Por otro lado, un epimorfismo $f : M \longrightarrow L$ se dice **superfluo** si $Nuc(f)$ es superfluo en M.

Definición 1.5.9. La **clase de proyectividad** de M, $Proy(M)$, es la colección de R-módulos P tales que si $M \longrightarrow K \longrightarrow 0$ es exacta y $\tau : P \longrightarrow K$ es un morfismo, entonces τ se puede levantar a un morfismo $\sigma : P \longrightarrow M$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\sigma"'] \arrow[d, "\tau"] & \\ M \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definición 1.5.10. Sea $P \in R\text{-}Mod$. Diremos que P es **proyectivo** [26] si $P \in Proy(M)$, para cada $M \in R\text{-}Mod$.

Definición 1.5.11. A un R-módulo P se le llama **cubierta proyectiva** [26] de $N \in R\text{-}Mod$ si P es proyectivo y existe un epimorfismo $\nu : P \longrightarrow N$ superfluo.

Observación 1.5.12. Existen anillos, en los que algunos módulos no tienen cubierta proyectiva. Por ejemplo, en la categoría de grupos abelianos, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no tiene cubierta proyectiva. Más aún, ningún $\mathbb{Z}$-módulo finito tiene cubierta proyectiva y los $\mathbb{Z}$-módulos proyectivos son los únicos que tienen cubierta proyectiva en $\mathbb{Z}\text{-}Mod$.

1.6. Teorías de torsión

Definición 1.6.1. Sean $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ clases de R-módulos. Al par $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ se le conoce como **teoría de torsión** [24] si cumple con las siguientes propiedades

1. Si $T \in \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{F}$, entonces $Hom_R(T, F) = 0$.

2. Si $Hom_R(M, F) = 0, \ \forall F \in \mathbb{F}$, entonces $M \in \mathbb{T}$.

3. Si $Hom_R(T, M) = 0, \ \forall T \in \mathbb{T}$, entonces $M \in \mathbb{F}$.

En tal caso, diremos que $\mathbb{T}$ es una **clase de torsion**, y $\mathbb{F}$ será una **clase libre de torsión**. Finalmente, se usará la notación R-$TORS$ para la colección de teorías de torsión en R.

Teorema 1.6.2. *Sean $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ clases de R-módulos. Entonces:*

1. *$\mathbb{T}$ es una clase de torsión si y sólo si es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.*

2. *A su vez, $\mathbb{F}$ es una clase libre de torsión si y sólo si es cerrada bajo submódulos, productos y extensiones.*

Observación 1.6.3. Si $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ son dos clases de torsión, entonces $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ es una clase de torsión.

Definición 1.6.4. Sean $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau), \sigma = (\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma)$ dos teorías de torsión. Diremos que $\tau \leq \sigma$, cuando $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. O equivalentemente, $\tau \leq \sigma \Leftrightarrow \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$

Definición 1.6.5. Siguiendo [15], sea T una familia no vacía de R-$TORS$. Se describe el ínfimo de T, $\wedge T$, como aquella teoría de torsión cuya la clase de torsión está dada por $\mathscr{T}_{\bigwedge T} = \bigcap\{\mathbb{T}_\tau : \tau \in T\}$. Además, de esta forma, el supremo de T queda descrito por $\vee T = \wedge\{\sigma \in R\text{-}TORS : \tau \leq \sigma, \ \forall \tau \in T\}$.

Definición 1.6.6. Sea $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría de torsión. Diremos que τ es **hereditaria** [24] si $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos. Adicionalmente, los elementos de $\mathbb{T}$ se dirán módulos de **τ-torsión**, y los módulos en $\mathbb{F}$ se llamarán **libres de τ-torsión**. Por último, a la clase de teorías de torsión hereditarias se le denota como R-$tors$.

Observación 1.6.7. Tanto R-$TORS$ como R-$tors$ son retículas completas.

Proposición 1.6.8. *Si $\tau, \sigma \in R$-$tors$, entonces $\mathbb{T}_{\tau\wedge\sigma} = \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$ y $\tau \vee \sigma$ es la teoría de torsión hereditaria cuya clase libre de torsión es $\mathbb{F}_{\tau\vee\sigma} = \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_\sigma$.*

Demostración. Probemos primero que $\mathbb{T}_{\tau\wedge\sigma} = \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$. Como $\tau \wedge \sigma \leq \tau$ y $\tau \wedge \sigma \leq \sigma$, entonces $\mathbb{T}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{T}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. Por lo que $\mathbb{T}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$.

Por otro lado, puesto $\mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{T}_\sigma$ son clases de torsión hereditarias, entonces $\mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$ también lo es. Sea ν la teoría de torsión cuya clase de torsión es $\mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$. Entonces $\mathbb{T}_\nu \subseteq \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{T}_\nu \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. De este modo $\nu \leq \tau \wedge \sigma$, y así se concluye que $\mathbb{T}_{\tau\wedge\sigma} = \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$.

Por último, veamos que $\mathbb{F}_{\tau\vee\sigma} = \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_\sigma$. Sea ν la teoría de torsión cuya clase libre de torsión es $\mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_\sigma$. Puesto que $\tau \leq \tau \vee \sigma$ y $\sigma \leq \tau \vee \sigma$, entonces $\mathbb{F}_{\tau\vee\sigma} \subseteq \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_\sigma = \mathbb{F}_\nu$, y así $\nu \leq \tau \vee \sigma$. Además, $\mathbb{F}_\nu \subseteq \mathbb{F}_\tau$ y $\mathbb{F}_\nu \subseteq \mathbb{F}_\sigma$. Por ende, $\tau \leq \nu$ y $\sigma \leq \nu$. Por lo tanto, $\mathbb{F}_{\tau\vee\sigma} = \mathbb{F}_\nu = \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_\sigma$.

□

Note que la proposición anterior puede generalizarse para ínfimos y supremos arbitrarios. Por lo que formulamos la siguiente proposición.

Proposición 1.6.9. *Sea $\{\tau_i\}_{i\in I} \subseteq R\text{-}tors$. Entonces se satisfacen las siguientes dos propiedades $\mathbb{T}_{\bigwedge_{i\in I}\tau_i} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_{\tau_i}$ y $\mathbb{F}_{\bigvee_{i\in I}\tau_i} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_{\tau_i}$.*

Teorema 1.6.10. *R-tors es un marco.*

Demostración. Sea τ una teoría de torsión hereditaria y sea T una familia en R-$tors$. Fijando $\sigma \in T$ tenemos que $\sigma \leq \bigvee_{\upsilon\in T} \upsilon$. Entonces, por la Observación 1.1.9, $\tau \wedge \sigma$ está acotado por $\tau \wedge \bigvee_{\upsilon\in T} \upsilon$. De modo que $\bigvee_{\sigma\in T}(\tau \wedge \sigma) \leq \tau \wedge \bigvee_{\sigma\in T} \sigma$.

Ahora, supongamos que la igualdad no se satisface, es decir, que hay un R-módulo M tal que $M \in \mathbb{T}_{\tau\wedge\bigvee_{\sigma\in T}\sigma}$ pero que $M \notin \mathbb{T}_{\bigvee_{\sigma\in T}(\tau\wedge\sigma)}$. Sea N el mayor submódulo de $\bigvee_{\sigma\in T}(\tau\wedge\sigma)$-torsión. Además, observemos que M/N es un módulo libre de $\bigvee_{\sigma\in T}(\tau\wedge\sigma)$-torsión, ya que de lo contrario $M \in \mathbb{T}_{\bigvee_{\sigma\in T}(\tau\wedge\sigma)}$. Más aún, $M/N \in \mathbb{T}_{\tau\wedge\bigvee_{\sigma\in T}\sigma}$, pues esta clase es cerrada bajo cocientes. Entonces $M/N \in \mathbb{T}_{\bigvee_{\sigma\in T}\sigma}$. Lo cual implica que hay un $\upsilon \in T$ tal que $M/N \notin \mathbb{F}_\upsilon$. Sea $K/N \neq 0$ el mayor submódulo de υ-torsión de M/N, pues M/N no es libre de υ-torsión. De esta manera, $K/N \in \mathbb{T}_{\tau\wedge\upsilon} \subseteq \mathbb{T}_{\bigvee_{\sigma\in T}(\sigma\wedge\tau)}$. Sin embargo, como K/N es un módulo de $\bigvee_{\sigma\in T}(\sigma \wedge \tau)$-torsión y $M/N \in \mathbb{F}_{\bigvee_{\sigma\in T}(\sigma\wedge\tau)}$, tenemos que $K/N = 0$. Lo cual es imposible.

De este modo, podemos concluir que $\tau \wedge \bigvee_{\sigma\in T} \sigma = \bigvee_{\sigma\in T}(\sigma \wedge \tau)$

□

1.7. Prerradicales

Definición 1.7.1. Sea $r : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$ un funtor. Se dice que r es un **prerradical** [8] si satisface las siguientes 2 condiciones:

1. Para cada R-módulo M se tiene que $r(M) \subseteq M$

2. Sean $M, N \in R\text{-}Mod$. Si $f \in Hom_R(M, N)$, entonces $r(f) \in Hom_R(r(M), r(N))$ y $r(f) = f\,|_{r(M)}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ r(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "r(f)"] & r(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

A la clase de prerradicales en R se le denotará por $R\text{-}pr$.

Ejemplo 1.7.2. *1. El prerradical identidad, $Id : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$. El cual cumple que $Id(M) = M$ y $Id(f) = f$.*

2. El prerradical cero. Es decir, la asignación $\overline{0} : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$, $\overline{0}(M) = \{0\}$ y $\overline{0}(f) = 0$.

*3. En la categoría de grupos abelianos, $\mathbb{Z}\text{-}Mod$, tenemos el **prerradical de torsión**, $t(M) = \{m \in M : m \text{ tiene orden finito}\}$.*

*4. Si dado $m \in M$, denotamos $ann(m) = \{r \in R : rm = 0\}$. Entonces la asignación **singular** $Z : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$, $Z(M) = \{n \in M : ann(n) \text{ es esencial en } R\}$ es un prerradical.*

*5. El **radical de Jacobson**, donde $J(M) = \bigcap\{N \leq M : N \text{ es máximo de } M\} = \Sigma\{N \leq M : N \text{ es superfluo en } M\}$.*

*6. La asignación **zoclo**, $zoc(M) = \Sigma\{N \leq M : N \text{ es simple}\} = \bigcap\{N \leq M : N \text{ es esencial en } M\}$.*

7. Dados $M \in R\text{-}Mod$ y $N \in Sub_R(M)$, definimos el siguiente preradical $\omega_N^M(K) = \cap\{f^{-1}[N] : f \in Hom_R(K, M)\}$. Más aún, si $\tau \in R\text{-}pr$ es tal que $\tau(M) = N$, entonces $\tau \leq \omega_N^M$ (Ver en [22]).

Definición 1.7.3. Dotamos a $R\text{-}pr$ de un orden. Sean τ, σ dos prerradicales, convendremos que $\tau \leq \sigma$ [8] si $\tau(M) \subseteq \sigma(M)$, $\forall M \in R\text{-}Mod$.

Observación 1.7.4. Con ésto, $R\text{-}pr$ es una retícula completa. Donde el ínfimo es $(\tau \wedge \sigma)(M) = \tau(M) \cap \sigma(M)$ y el supremo, $(\tau \vee \sigma)(M) = \tau(M) + \sigma(M)$. Adicionalmente, $(\bigwedge_{i \in I} \sigma_i)(M) = \bigcap_{i \in I} \sigma_i(M)$ y $(\bigvee_{i \in I} \sigma_i)(M) = \Sigma_{i \in I} \sigma_i(M)$.

De esta forma, utilizaremos el siguiente lema para poder investigar más de la estructura reticular de $R\text{-}pr$.

Lema 1.7.5. *Sea M un R-módulo. La retícula $Sub_R(M)$ es superiormente continua.*

Demostración. Sean $N \in Sub_R(M)$ y $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un conjunto dirigido de submódulos de M. Probaremos que $N \cap \Sigma_{\alpha\in I}K_\alpha = \Sigma_{\alpha\in I}(N \cap K_\alpha)$. Primeramente, dado $m \in N \cap \Sigma_{\alpha\in I}K_\alpha$, se cumple que $m \in N$ y $m = \Sigma_{i=1}^{n} m_\alpha$, para algunas $\alpha_1, ..., \alpha_n$, donde para cada i, $m_{\alpha_i} \in K_{\alpha_i}$. Puesto que $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es dirigido, existe $\beta \in I$ tal que $m_{\alpha_i} \in K_\beta$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. De este modo, $m \in N \cap K_\beta$. Y así, $m \in \Sigma_{\alpha\in I}(N \cap K_\alpha)$.

Inversamente, si $m \in \Sigma_{\alpha\in I}(N \cap K_\alpha)$, entonces escribimos a m como $m = \Sigma_{\alpha\in I}m_\alpha$, con $m_\alpha \in N \cap K_\alpha$, $\forall\alpha \in I$. Lo que implica que $m \in N$ y $m \in \Sigma_{\alpha\in I}K_\alpha$. Y por tanto, $m \in N \cap \Sigma_{\alpha\in I}K_\alpha$.

□

Corolario 1.7.6. *R-pr es una gran retícula superiormente continua.*

Demostración. Sean τ un prerradical, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia dirigida en *R-pr*, y M un R-módulo. Entonces $\tau(M)$ es un submódulo de M y $\{\sigma_\alpha(M)\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto dirigido en la retícula $Sub_R(M)$, la cuál ya habíamos visto que es superiormente continua. Por tanto $(\tau \wedge \bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(M) = \tau(M) \cap \Sigma_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M) = \Sigma_{\alpha\in I}(\tau(M) \cap \sigma_\alpha(M)) = \bigvee_{\alpha\in I}(\tau \wedge \sigma_\alpha)(M)$.

□

Definición 1.7.7. Sean $\tau, \sigma \in$ *R-pr*. Definimos las operaciones $\cdot$ y $:$ de la siguiente manera:

1. $\tau \cdot \sigma = \tau \circ \sigma$.

2. $(\tau : \sigma)(M)$ es el único submódulo de M que satisface que $\tau(M) \subseteq (\tau : \sigma)(M)$ y $\frac{(\tau:\sigma)(M)}{\tau(M)} = \sigma(\frac{M}{\tau(M)})$

Definición 1.7.8. Dado un R-módulo M, definimos por recursión ordinal, la **serie zoclo** (o bien, **serie de Loewy**) de M [24]:

1. $S_0 = \{0\}$ y $S_1 = zoc(M)$.

2. Si i es un ordinal, supongamos definido S_i, entonces $S_{i+1}(M) = (zoc : S_i)(M)$

3. Si i es un ordinal límite, entonces $S_i(M) = \Sigma_{j<i}S_j(M)$

Al menor ordinal tal que $S_i(M) = S_j(M)$, $\forall j > i$ lo denotaremos por $\gamma(M)$.

1.8. Clases naturales

Otro de los diferentes tipos de retícula, se puede encontrar en *R-nat*, el conjunto de clases naturales. Por lo que en esta sección desarrollaremos la teoría básica, en la que podremos generar clases naturales y complementos de éstas.

Definición 1.8.1. Un **álgebra de Boole** es una retícula distributiva y complementada

Definición 1.8.2. Una clase no vacía de R-módulos izquierdos se dice **natural** si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. Al conjunto de clases naturales se le denota como *R-nat*.

Observación 1.8.3. $\{0\}$ y R-Mod son clases naturales.

Definición 1.8.4. Sea $\mathscr{K} \in$ *R-nat*. Definimos la clase $d(\mathscr{K})$ y su clase complementaria $c(\mathscr{K})$ como

$$d(\mathscr{K}) = \{M \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq N \leq M, \exists 0 \neq K \leq N \text{ t.q. } K \hookrightarrow T, \text{ p.a. } T \in \mathbb{K}\}$$
$$c(\mathscr{K}) = \{M \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq N,\ N \not\hookrightarrow K, \forall K \in \mathscr{K}\}$$

Observación 1.8.5. Si $\mathscr{K} \in$ *R-nat*, entonces $d(\mathscr{K}) = \mathscr{K}$. Además, $d(\mathscr{K}) \cap c(\mathbb{K}) = 0$. En efecto, si $0 \neq M \in d(\mathscr{K}) \cap c(\mathscr{K})$, entonces $M \in d(\mathscr{K})$ y $M \in c(\mathscr{K})$. Como $M \in d(\mathscr{K})$, entonces para cualquier submódulo no nulo N de M, existen $0 \neq L \leq N$ y $K \in \mathscr{K}$ tales que $L \hookrightarrow K$. Sin embargo, puesto que $M \in c(\mathscr{K})$, tenemos que $L \not\hookrightarrow K$. Lo cual es una contradicción.

□

A continuación enunciamos el **argumento de la proyección** [10], con el que justificamos muchos teoremas de clases naturales.

Proposición 1.8.6. *(Argumento de la proyección)*
Sea $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de R-módulos y sea $x \in E(\bigoplus_{\alpha \in A} W_\alpha$ un elemento no nulo. Entonces existen $\beta \in A$, $0 \neq r \in R$ y $0 \neq w \in W$ tales que $0 \neq Rrx \cong Rw \leq W_\alpha$ y $(0 : rx) = (0 : w)$.

Observación 1.8.7. El argumento de la proyección es equivalente a que cada submódulo no nulo de $E(\bigoplus_{\alpha \in A} W_\alpha)$ contenga un submódulo no nulo isomorfo a un submódulo de algún W_α.

Proposición 1.8.8. *Si $\mathscr{K}$ es una clase no vacía, entonces $d(\mathscr{K})$ es una clase natural.*

Demostración. Primeramente, probemos que $d(\mathscr{K})$ es hereditaria. Sean $M \in d(\mathscr{K})$ y $0 \neq N \in Sub_R(M)$. Si L es un submódulo no nulo de N, entonces $L \leq M$. Dado que $M \in d(\mathscr{K})$, existen $0 \neq T \in Sub_R(L)$ y $K \in \mathscr{K}$ tales que $T \hookrightarrow K$. De esta forma, $N \in d(\mathscr{K})$.

Ahora, veamos la cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset d(\mathscr{K})$ y sea $0 \neq N \leq \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Entonces $N \leq E(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$. Por el argumento de la proyección, existen $\beta \in A$ y $L \in Sub_R(M_\beta)$ tales que $N \cong L \leq M_\beta$. Como $M_\beta \in d(\mathscr{K})$, existen $0 \neq T \leq L \cong N$ y $K \in \mathscr{K}$ tales que $T \hookrightarrow K$. Por lo que $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \in d(\mathscr{K})$.

Por último, demostremos que $d(\mathscr{K})$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $M \in d(\mathscr{K})$ y sea $0 \neq N \leq E(M)$. Entonces $0 \neq N \cap M \in Sub_R(M)$. Puesto que $M \in d(\mathscr{K})$, hay $0 \neq L \leq N \cap M \leq N$ y $K \in \mathscr{K}$ con la propiedad de que $L \hookrightarrow K$. Con lo que concluimos que $E(M) \in d(\mathscr{K})$.

$\square$

Proposición 1.8.9. *$c(\mathscr{K}) \in R$-nat, $\forall \mathscr{K} \neq \emptyset$*

Demostración. Sea $0 \neq M \in c(\mathscr{K})$ y sea $0 \neq N \leq M$. Supongamos que hay un submódulo $L \neq 0$ de N y $K \in \mathscr{K}$ con la propiedad de que $L \hookrightarrow K$. Entonces $M \in d(\mathscr{K}) \cap c(\mathbb{K}) = 0$. Lo cual es una contradicción.

Por otro lado, sea $0 \neq M \in d(\mathscr{K})$. Si $0 \neq N \leq E(M)$ es un submódulo de tal forma que $N \hookrightarrow K$, donde $K \in \mathscr{K}$. Entonces $0 \neq N \cap M \hookrightarrow K$. De esta forma, tenemos que $M \in d(\mathscr{K})$. Una contradicción.

Finalmente, sean $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de R-módulos no nulos de $c(\mathscr{K})$ y $0 \neq N \leq \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \leq E(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$. Por el argumento de la proyección, existe $\beta \in A$ tal que $N \hookrightarrow M_\beta$. Como $M_\beta \in c(\mathscr{K})$ y $c(\mathscr{K})$ es una clase hereditaria, entonces $N \in c(\mathscr{K})$.

Por lo tanto $c(\mathscr{K}) \in R$-*nat*.

$\square$

Definición 1.8.10. Dotamos de un orden a R-*nat*. Dadas dos clases naturales $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}$, decimos que $\mathscr{K} \leq \mathscr{F}$ si y sólo si $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{F}$.

Observación 1.8.11. R-*nat* es una retícula completa, donde el ínfimo y el supremo para una familia de clases $\{\mathscr{K}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se desciben como $\bigwedge_{\alpha \in A} \mathscr{K}_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \mathscr{K}_\alpha$ y $\bigvee_{\alpha \in A} \mathscr{K}_\alpha = d(\bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{K}_\alpha)$, respectivamente.

Definición 1.8.12. Diremos que dos R-módulos M y N son ortogonales si M y N no tienen submódulos isomorfos no nulos. En tal caso, utilizaremos $M \perp N$ como notación de este concepto.

Definición 1.8.13. Sean $M \in R\text{-}Mod$ y $N \leq M$. Diremos que N es un submódulo de tipo de M, denotado por $N \leq_t M$, si N es pseudocomplemento de algún submódulo de M tal que hay un $L \leq M$ que cumple que $N \oplus L$ es esencial en M y $N \perp L$.

Observación 1.8.14. N es un submódulo de tipo de M si y sólo si hay una clase natural $\mathscr{K}$ tal que N es el mayor submódulo de M con la propiedad de que $n \in \mathscr{K}$, en tal caso especificamos que N es un submódulo de tipo $\mathscr{K}$.

Observación 1.8.15. Dada una clase de R-módulos $\mathscr{K}$, se satisface que $d(\mathscr{K}) \wedge c(\mathscr{K}) = 0$.

A partir de la observación anterior, podemos concluir que para cualquier clase natural $\mathscr{K}$ se satisface que $\mathscr{K} \wedge c(\mathscr{K}) = 0$. Sin embargo, existe una mayor relación entre $\mathscr{K}$ y $c(\mathscr{K})$, por lo cual tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.8.16. *Para cualquier $\mathscr{K} \in R$-nat, se cumple que $\mathscr{K} \vee c(\mathscr{K}) = R$-$Mod$.*

Demostración. Sea $M \in R$-Mod. Consideremos N un submódulo de tipo $d(\mathscr{K})$. Si L es un pseudocomplemento de N en M. Entonces L es un submódulo de tipo de M y, además, $L \in c(\mathscr{K})$. Puesto que $N \oplus L$ es esencial en M y $N \oplus L \in d(\mathscr{K}) \vee c(\mathscr{K})$, concluimos que $M \in d(\mathscr{K}) \vee c(\mathscr{K})$ ya que ésta última es cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas. Por lo tanto, $d(\mathscr{K}) \wedge c(\mathscr{K}) = R$-$Mod$.

□

Corolario 1.8.17. *R-nat es una retícula complementada.*

Observación 1.8.18. Sean $N, L \in Sub_R(M)$. Si N, L son submódulos de tipo $\mathscr{K}$ de M, entonces N y L no son ortogonales.

Teorema 1.8.19. *R-nat es una retícula distributiva.*

Demostración. Si $\mathscr{K}, \mathscr{L}, \mathscr{F} \in R$-$nat$, entonces $(\mathscr{K} \wedge \mathscr{L}) \vee (\mathscr{K} \wedge \mathscr{F}) \leq \mathscr{K} \wedge (\mathscr{L} \vee \mathscr{F})$.

Por otro lado, sean $M \in \mathscr{K} \wedge (\mathscr{L} \vee \mathscr{F})$, L un submódulo de tipo $\mathscr{L}$ de M y N un pseudocomplemento de L en M. Entonces $N \leq_t M$ y $L \perp N$. De modo que N no es un submódulo de tipo $\mathscr{L}$. Sin embargo, como $N \in \mathscr{L} \vee \mathscr{F}$, todo submódulo no nulo de N contiene un submódulo no nulo en $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$. Así, $N \in d(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$. Con lo cual tenemos que $L \in \mathscr{K} \wedge \mathscr{L}$ y $N \in \mathscr{K} \wedge \mathscr{F}$. Por lo que $L \oplus N \in d((\mathscr{K} \wedge \mathscr{L}) \cup (\mathscr{K} \wedge \mathscr{F})) = (\mathscr{K} \wedge \mathscr{L}) \vee (\mathscr{K} \wedge \mathscr{F})$.

Concluimos que $\mathscr{K} \wedge (\mathscr{L} \vee \mathscr{F}) = (\mathscr{K} \wedge \mathscr{L}) \cup (\mathscr{K} \wedge \mathscr{F})$.

□

A partir de las dos proposiciones anteriores podemos concluir el resultado de esta sección:

Teorema 1.8.20. *R-nat es un álgebra de Boole*

1.9. Propiedades de anillos

Las nociones de todos los siguientes tipos de anillos se pueden definir del lado derecho, estas definiciones son completamente análogas.

Definición 1.9.1. Un R-módulo M se dice **semisimple** [26] si existe una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de R-módulos simples tal que $M \cong \bigoplus_{i \in I} S_i$

Observación 1.9.2. 1. Si M es un R-módulo e I un ideal bilateral de R contenido en $An(M) = \{r \in R : rm = 0,\ \forall m \in M\}$, entonces M es un R/I-módulo.

2. $J(R)M \subseteq J(M)$.

3. Si M es un R-módulo semisimple, entonces $J(M) = 0$.

4. Por las observaciones anteriores, R-$Simp = R/J(R)$-$Simp$.

5. $J(R)$ es superfluo en R.

Observación 1.9.3. Las definiciones que daremos para anillos, también se pueden definir para cualquier $M \in R$-Mod. Remplazando la retícula de ideales $Sub_R(R)$ por la de submódulos $Sub_R(M)$.

Definición 1.9.4. Como en [24], diremos que R es un anillo **neteriano izquierdo** si satisface la condición de cadena ascendente respecto a su retícula de ideales izquierdos. Es decir, si $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_1 \subseteq ...$ es una cadena ascendente de ideales izquierdos, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+t},\ \forall t \in \mathbb{N}$. Por otro lado, se dice que R es un anillo **artiniano izquierdo** si su retícula de ideales izquierdos cumple la condición de cadena descendente. O sea, si $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_1 \supseteq ...$ es una cadena descendente de ideales izquierdos, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+t},\ \forall t \in \mathbb{N}$.

Probaremos una forma equivalente del teorema de Hopkins-Levitzki, la cual se puede encontrar en [2].

Teorema 1.9.5. *(Hopkins-Levitzki, 1936)*
Sea R un anillo artiniano izquierdo y sea $M \in R$-Mod. Tenemos que M es artiniano si y sólo si M es neteriano.

Demostración. Como R es artiniano izquierdo, entonces $J(R)$ es nilpotente (como consecuencia del Lema de Nakayama, ver en [6]) y $R/J(R)$ es semisimple. Sea $n \in \mathbb{N}$ el menor número natural tal que $J(R)^n = \{0\}$, y consideremos la serie de composición $M \supseteq J(R)M \supseteq J(R)^2M \supseteq ... \supseteq J(R)^{n-1}M \supseteq J(R)^nM = \{0\}$.

Además, también se cumple que $J(J(R)^kM/J(R)^{k+1}M) = \{0\},\ \forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Entonces $J(R)^kM/J(R)^{k+1}M$ es un $R/J(R)$-módulo semisimple, $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Por lo que, M es artiniano izquierdo si y sólo si cada uno de $J(R)^kM/J(R)^{k+1}M$ es artiniano. Sin embargo, para éstos cocientes es equivalente el ser artiniano izquierdo y el ser neteriano izquierdo, ya que los $J(R)^kM/J(R)^{k+1}M$ son semisimples. Por último, notemos que todo $J(R)^kM/J(R)^{k+1}M$ es neteriano izquierdo si y sólo si M es neteriano. De estas observaciones, se concluye que M es artiniano izquierdo si y sólo si M es neteriano izquierdo.

$\square$

Definición 1.9.6. Sea $\mathscr{A}$ una clase de R-módulos. Denotamos por $\tau_{\mathscr{A}}$ a la teoría de torsión generada por $\mathscr{A}$, la cual se puede definir a partir de las siguientes dos clases:

1. $\mathbb{F}_{\mathscr{A}} = \{N \in R\text{-}Mod | f : M \longrightarrow N \Rightarrow f = 0, \ \forall M \in \mathscr{A}\}$

2. $\mathbb{T}_{\mathscr{A}} = \{M \in R\text{-}Mod | f : M \longrightarrow N \Rightarrow f = 0, \ \forall N \in \mathbb{F}_{\mathscr{A}}\}$.

Definición 1.9.7. Dado un anillo R, R es **semiartiniano izquierdo** [24] si es miembro de la clase de torsión hereditaria generada por los R-módulos izquierdos simples.

Observación 1.9.8. Todo anillo artiniano izquierdo es semiartiniano izquierdo.

Corolario 1.9.9. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es artiniano izquierdo*

2. *R es neteriano izquierdo y semiartiniano izquierdo*

Lema 1.9.10. *Si M es un R-módulo semiartiniano izquierdo, entonces $S_{\gamma(M)}(M) = M$.*

Demostración. Sea N un submódulo propio de M, y denotemos por $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ a la teoría de torsión generada por los R-módulos simples. Entonces N es semiartiniano y $M/N \neq \{0\}$.Ahora, como $M \in \mathbb{T}$, entonces $M/N \notin \mathbb{F}$. De esta forma existe $S \in R\text{-}Simp$ tal que $S \leq M/N$.

Por último, si $S_{\gamma(M)}(M) \neq M$, entonces $soc(M/S_{\gamma(M)+1}(M)) \neq \{0\}$. Por lo que la serie zoclo no se estabiliza en $\gamma(M)$, lo cual no es posible. Concluimos $S_{\gamma(M)}(M) = M$.

□

Corolario 1.9.11. *Si R es un anillo semiartiniano, entonces todo R-módulo no nulo tiene zoclo no nulo.*

Demostración. Sea $M \in R\text{-}Mod$. Si $zoc(M) = \{0\}$, entonces $S_{\gamma(M)}(M) = \{0\}$. Por lo que $M = \{0\}$.

□

Proposición 1.9.12. *Si R es un anillo semiartiniano, entonces $zoc(M)$ es esencial en M, $\forall M \in R\text{-}Mod$.*

Demostración. Sea $M \in R\text{-}Mod$, y sea H un submódulo no nulo de M. Como R es semiartiniano, tenemos que H contiene un submódulo simple S. Así $S \subseteq zoc(M) \cap H$. Así $H \cap zoc(M) \neq \{0\}$. Por lo que $zoc(M)$ es esencial en M.

□

Definición 1.9.13. Un anillo será **local izquierdo** si $R\text{-}Simp$ consta de un único módulo simple.

Definición 1.9.14. Sea R un anillo. Diremos que R es **perfecto izquierdo** [6] si todo R-módulo izquierdo tiene cubierta proyectiva.

Definición 1.9.15. Sea R un anillo y sea I un ideal de R. Decimos que I es T-nilpotente izquierdo si para cualquier sucesión $(a_i)_{i\geq 1}$ de elementos de I, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n a_{n-1}...a_2 a_1 = 0$.

Definición 1.9.16. Un anillo se dice **semiprimario** [12] si $R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es nilpotente.

Corolario 1.9.17. *Todo anillo artiniano izquierdo es semiprimario.*

Demostración. Sea R un anillo artiniano izquierdo. Entonces $R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es nilpotente. Por lo que R es semiprimario.

□

Teorema 1.9.18. *(Teorema P de Bass)*
Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *R es un anillo perfecto izquierdo.*
2. *$R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es T-nilpotente.*
3. *$R/J(R)$ es semisimple y todo R-módulo no nulo contiene un submódulo máximo.*
4. *R satisface la condición de cadena descendente sobre ideales principales derechos.*

Una demostración de este hecho puede encontrarse en [12].

Corolario 1.9.19. *Si R es un anillo artiniano izquierdo, entonces R es perfecto por ambos lados.*

Demostración. Como R es artiniano izquierdo, entonces R satisface la condición de cadena descendente sobre ideales de R. En particular R sobre ideales principales izquierdos. Por el teorema P de Bass, concluimos que R es perfecto derecho.

Por otro lado, dado que R es semiprimario, $R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es nilpotente. Entonces $J(R)$ es T-nilpotente. Y por tanto R es perfecto izquierdo.

□

Proposición 1.9.20. *Todo anillo perfecto derecho es semiartiniano izquierdo.*

Definición 1.9.21. Sea $M \in R\text{-}Mod$. Diremos que M es **finitamente generado** [24] si existen $m_1, ..., m_n \in M$ tal que $M = \Sigma_{i=1}^{n} R m_i$.

Proposición 1.9.22. *En un anillo local izquierdo, todo R-módulo proyectivo finitamente generado es libre.*

Demostración. Sea P un R-módulo proyectivo. En [26] se discute que $P = P\Sigma\{Im(f) : f \in Hom_R(P,R)\}$. Entonces $\Sigma\{Im(f) : f \in Hom_R(P,R)\} \nsubseteq J(R)$, por lo que existen $p \in P$ y $f \in Hom_R(P,R)$ tal que $f(p) \notin J(R)$. Como R es local izquierdo, entonces $R = f(p)R + J(R)$. Además, como $J(R)$ es superfluo, se cumple que $R = f(p)R$. Así, f es epi. y P se descompone como suma directa $P = R \oplus A$.

Ahora, puesto que P es f.g., tenemos que $\frac{P}{PJ(R)}$ es un $\frac{R}{J(R)}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\frac{P}{PJ(R)}$ tiene a lo más n sumandos directos isomorfos a $R/J(R)$. Sean $k \geq 1$ y $B \in R\text{-}Mod$ tales que $P = R^k \oplus B$. De esta manera, $\frac{P}{PJ(R)}$ es de la forma $\frac{P}{PJ(R)} = (\frac{R}{RJ(R)})^k \oplus \frac{C}{CJ(R)}$, y así $k \leq n$. Consideremos que k es el mayor entero tal que $P = R^k \oplus B$. Si $B \neq \{0\}$, entonces B es proyectivo, pues B es sumando directo, por lo que B se puede descomponer en sumas directas, $B = R \oplus D$; y así $P = R^{k+1} \oplus D$. lo cual es una contradicción. Entonces $P = R^k$ y P es libre.

□

Una proposición más general, afirma que en un anillo local, todo R-módulo proyectivo es libre; y su prueba puede encontrarse en [17].

Definición 1.9.23. Un anillo R se dice **semiperfecto** [12] izquierdo si todo R-módulo izquierdo finitamente generado tiene cubierta proyectiva.

Observación 1.9.24. La condición de ser semiperfecto se cumple por ambos lados. Más aún, todo anillo perfecto izquierdo es semiperfecto izquierdo.

Observación 1.9.25. Dado un ideal I, decimos que un elemento idempotente $\bar{e} \in R/I$ es levantado módulo I si existe $f \in R$ idempotente tal que $\bar{e} = f + I$. Un anillo es semiperfecto si y sólo si $R/J(R)$ es semisimple y todo elemento idempotente es levantado módulo $J(R)$.

Proposición 1.9.26. *Todo anillo artiniano izquierdo (o derecho) es semiperfecto.*

Demostración. Sabemos que un anillo artiniano izquierdo es perfecto por ambos lados, y por tanto semiperfecto.

□

Definición 1.9.27. Sea R un anillo con descomposición $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$, donde cada R_i es un anillo. Definimos la clase $\mathbb{P}(R) = \{(r_1, ..., r_n) : r_i \in R_i\text{-}pr,\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$.

Además, dados $r = (r_1, ..., r_n), s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbb{P}(R)$, definimos ([8]):

1. $r \wedge s = (r_1 \wedge s_1, ..., r_n \wedge s_n)$
2. $r \vee s = (r_1 \vee s_1, ..., r_n \vee s_n)$
3. $r \leq s$ si y sólo si $r_i \leq s_i,\ \forall i \in \{1, ..., n\}$

4. $r \cdot s = (r_1 \cdot s_1, ..., r_n \cdot s_n)$

5. $(r : s) = (r_1 : s_1, ..., r_n : s_n)$

Proposición 1.9.28. *Sea R un anillo con descomposición $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$, donde cada R_i es un anillo. Denotemos por $\pi_i : R \longrightarrow R_i$ la respectiva i-ésima proyección canónica. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre R-pr y $\mathbb{P}(R)$, dada por las asignaciones $r \mapsto (\pi_1(r), ..., \pi_n(r))$ y $(r_1, ..., r_n) \mapsto \Sigma_{i=1}^n r_i(\pi_i)$. Adicionalmente, estas asignaciones preservan supremos, ínfimos, orden, $\cdot$ y $(\_ : \_)$*

Demostración. Denotemos las asignaciones $\phi(r) = (\pi_1(r), ..., \pi_n(r))$ y $\psi(r_1, ..., r_n) = \Sigma_{i=1}^n r_i(\pi_i)$.

Probemos primero que $\phi(r) \in \mathbb{P}(R), \forall r \in R\text{-}pr$. Sea $r \in R\text{-}pr$. Si $M \in R\text{-}Mod$, entonces $r[M] \subseteq M$. De esta forma, para cada i, $\pi_i r[M] \subseteq \pi_i[M]$. Además, si $f : M \longrightarrow N$, entonces $r[M] \subseteq N$. Y así $\pi_i r[M] \subseteq \pi_i[N]$. De donde podemos concluir que $\phi(r) \in \mathbb{P}(R)$.

Inversamente, sea $(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{P}(R)$. Veamos que $\psi(r_1, ..., r_n) \in R\text{-}pr$. Si M un R-módulo, entonces para cada i, $r_i\pi_i[M] \subseteq \pi_i[M]$, y así $\psi(r_1, ..., r_n)[M] = \Sigma_{i=1}^n r_i\pi_i[M] \subseteq \oplus_{i=1}^n \pi_i[M] = M$. Por último, si $f : M \longrightarrow N$, entonces $\pi_i[M] \subseteq N, \forall i$. Por lo que $\psi(r_1, ..., r_n)[M] = \Sigma_{i=1}^n r_i(\pi_i)[M] \subseteq \oplus_{i=1}^n \pi_i[N] = N$. Por tanto $\psi(r_1, ..., r_n) \in R\text{-}pr$.

Ahora, probaremos que estas asignaciones preservan orden. Las demás propiedades se prueban de manera análoga. Sean $r, t \in R\text{-}pr$ tales que $r \leq t$ y sea $M \in R\text{-}Mod$. Entonces $\pi_i r \leq \pi_i t, \forall i$ y así $\phi(r) \leq \phi(t)$. Por otro lado, si $(r_1, ..., r_n) \leq (t_1, ..., t_n)$ y M un R-módulo, entonces $r_i\pi_i[M] \leq t_i\pi_i[M]$ para cualquier i. Y por tanto $\psi(r) \leq \psi(t)$.

□

Observación 1.9.29. Si R es un anillo con descomposición $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$, donde cada R_i es un anillo perfecto derecho local izquierdo, entonces por la proposición anterior, podemos suponer que R es perfecto derecho local izquierdo, en caso de ser necesario.

A continuación, procederemos a indagar un poco sobre la retícula de ideales del anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.9.30. *Sea U un $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathbb{R}^2$. Definimos $I_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} : (x, y) \in U \right\}$.*

Ahora, sea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \in I_U$. Entonces $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R}x & \mathbb{R}y \end{pmatrix} \subseteq I_U$. Ésto quiere decir que I_U es un ideal izquierdo de R. Más aún, los únicos ideales simples de R son de la forma I_W, con W un subespacio de dimensión 1.

Uno puede ver que $Sub_R(R) = \{I_U : U \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2\} \cup \left\{ 0, R, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Parte II

GRANDES RETÍCULAS EN R-Mod DEFINIDAS POR PROPIEDADES DE CERRADURA

CAPÍTULO 2

Retículas S-Pseudocomplementadas

En el transcurso de este capítulo, se considerarán algunas propiedades de cerradura de clases de R-módulos: El ser cerrado bajo submódulos, cocientes, extensiones, sumas directas, cápsulas inyectivas, productos o, incluso, cubiertas proyectivas. Estas propiedades las abreviaremos usando los símbolos siguientes: $\leq$, $\twoheadrightarrow$, *ext*, $\oplus$, $E()$, $\prod$, $P()$, *respectivamente. Además, se dará una visión más detallada al comportamiento tanto de las grandes retículas que son objeto de nuestro estudio como de sus respectivos esqueletos.*

2.1. Propiedades de cerradura

Definición 2.1.1. Sea A un conjunto no vacío de propiedades de cerradura. L_A denotará al conglomerado de clases R-módulos cerradas bajo cada propiedad en A.

Ejemplo 2.1.2. *Las siguientes clases pueden escribirse con la notación anterior.*

1. $L_{\{\leq\}}$ *denotará a R-her, el conglomerado de clases hereditarias.*

2. *El conglomerado de clases cohereditarias, R-quot, también puede ser escrito como* $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

3. $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$ *es el conglomerado de clases de Serre.*

4. $L_{\{\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}$ *se usará para R-TORS.*

5. *Mientras que* $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}$ *será la notación para R-tors.*

6. $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ *es igual a R-op, el conglomerado de clases abiertas.*

7. $L_{\{\leq,\oplus,ext,E()\}}$ *denota lo mismo que R-nat, es decir, el conjunto de clases naturales [10].*

Proposición 2.1.3. $L_{\{\leq\}}$ *es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.*

Demostración. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in L_A$, $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ y $N \in Sub_R(M)$. Entonces $M \in \mathscr{C}$ y $M \in \mathscr{D}$. Puesto que ambas clases son cerradas bajo $\leq$, deducimos que $N \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Así $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$. En caso de que A contenga otras propiedades de cerradura, la demostración será análoga; y por tanto $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} \in L_A$.

□

Un resultado más general puede formularse, para un conjunto no vacío de propiedades de cerradura, siguiendo la misma heurística de la demostración anterior, por lo que tenemos el siguiente corolario.

Proposición 2.1.4. *Si A un conjunto no vacío de propiedades de cerradura, entonces L_A es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.*

Observación 2.1.5. Sea A un conjunto no vacío de propiedades de cerradura. Note que $L_A \neq \emptyset$, ya que $R\text{-}Mod \in L_A$.

Se demostrará la siguiente proposición para poder relacionar a una clase arbitraria de R-módulos con las retículas L_A.

Lema 2.1.6. *Sea $\mathfrak{C}$ una clase de R-módulos y sea A un conjunto de propiedades de cerradura. El menor elemento en L_A que contiene a $\mathfrak{C}$ siempre existe.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ una clase de R-módulos. Denotemos por $\mathbf{L} = \{X \in L_A : \mathfrak{C} \subseteq X\}$. Observe que $\mathbf{L} \neq \emptyset$, pues $R\text{-}Mod \in \mathbf{L}$. Entonces, por la Proposición 2.1.4, $\bigcap_{X \in \mathbf{L}} X \in L_A$. Este elemento es el buscado.

□

Definición 2.1.7. Sea $\mathfrak{C}$ una clase de R-módulos y sea A un conjunto de propiedades de cerradura. Al menor elemento en L_A que contiene a $\mathfrak{C}$ se le denotará como $L_A(\mathfrak{C})$ [1].

Observación 2.1.8. Dado A un conjunto no vacío de propiedades de cerradura, L_A es una gran retícula completa respecto a la inclusión.

En efecto, si $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in L_A$, note que el elemento $L_A(\mathscr{C} \cup \mathscr{D})$ es el supremo de dichas clases y que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ es su ínfimo. Lo cuál hace que L_A sea una gran retícula.

Por último, sea $\mathfrak{S} \subset L_A$. Entonces $\bigvee_{\mathscr{C} \in \mathfrak{S}} \mathscr{C} = L_A(\bigcup_{\mathscr{C} \in \mathfrak{S}} \mathscr{C})$ y $\bigwedge_{\mathscr{C} \in \mathfrak{S}} \mathscr{C} = \bigcap_{\mathscr{C} \in \mathfrak{S}} \mathscr{C}$. Así se cumple que L_A es completa.

□

Definición 2.1.9. En caso de existir, dado un $S \in L_A$ fijo, escribiremos $S^{\perp_A}$ para mencionar a un pseudocomplemento de S en L_A. De manera adicional, $Skel(L_A)$ será la clase de pseudocomplementos dentro de L_A, a la cual le daremos el nombre de **esqueleto** de la gran retícula L_A.

Observación 2.1.10. Sea A un conjunto de propiedades de cerradura de R-Mod. Entonces $Skel(L_A) \subseteq L_A$.

2.2. Retículas pseudocomplementadas en R-Mod

Ejemplo 2.2.1. *Sea $\mathscr{C} \in L_{\{\leq\}}$ (R-her). El pseudocomplemento de $\mathscr{C}$ en $L_{\{\leq\}}$ queda descrito de la siguiente forma: $\mathscr{C}^{\perp_{\{\leq\}}} = \{M : N \leq M,\ N \in \mathscr{C} \Rightarrow N = 0\}$. Más aún, $\mathscr{C}^{\perp_{\{\leq\}}}$ es el S-pseudocomplemento de $\mathscr{C}$ en $L_{\{\leq\}}$.*

Demostración. Denotemos por $\mathscr{A}$ a $\{M : N \leq M,\ N \in \mathscr{C} \Rightarrow N = 0\}$. Sea $M \in \mathscr{A}$. Para ver que $\mathscr{A} \in L_{\{\leq\}}$, consideramos un N submódulo de M y $K \leq N$ de tal forma que $K \in \mathscr{C}$. Ésto implica que $K \leq M$ y $K \in \mathscr{C}$. De modo que $K = \{0\}$, ya que $M \in \mathscr{A}$. Concluyéndose que $N \in \mathscr{A}$. Lo cuál garantiza que $\mathscr{A}$ sea hereditaria.

Por otro lado, sea $M \in \mathscr{A} \cap \mathscr{C}$. Puesto que M es submódulo de sí mismo y que $M \in \mathscr{C}$, entonces la descripción de $\mathscr{A}$ nos asegura que $M = \{0\}$. Y por tanto, $\mathscr{A} \cap \mathscr{C} = \{0\}$.

Por último, sea $\mathscr{D} \in L_{\{\leq\}}$ una clase tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Si $M \in \mathscr{D}$ y $N \leq M$ es tal que $N \in \mathscr{C}$, entonces $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, ya que $\mathscr{D}$ es una clase hereditaria. Sin embargo, $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$, y así $N = \{0\}$. De manera que $M \in \mathscr{A}$. Por lo que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}$. Ésto significa que $\mathscr{A} = \mathscr{C}^{\perp_{\{\leq\}}}$ es S-pseudocomplemento.

□

Ejemplo 2.2.2. *Dentro de la gran retícula de clases abiertas (ésto es, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$), fijando un $\mathscr{C} \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, se puede obtener explícitamente un pseudocomplemento, el cual estará determinado como $\mathscr{C}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = \{M : M$ no tiene subcocientes no nulos en $\mathscr{C}\}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{M : M$ *no tiene subcocientes no nulos en* $\mathscr{C}\}$.

$\mathscr{A}$ es cerrada bajo submódulos. En efecto, sean $M \in \mathscr{A}$ y $N \leq M$, y sea K un subcociente de N tal que $K \in \mathscr{C}$. Entonces K es subcociente de M. Sin embargo, nuestra descripción de $\mathscr{A}$ nos asegura que $K = \{0\}$, y así $N \in \mathscr{A}$.

Ahora, para ver que $\mathscr{A}$ es cerrada bajo cocientes, consideramos $M \in \mathscr{A}$ y N un cociente de M. Sea $L \in \mathscr{C}$ un subcociente de N. De modo que L es subcociente de M, y por lo tanto $L = \{0\}$. Es decir, $N \in \mathscr{A}$.

Por otro lado, si $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{A}$, como M es subcociente de sí mismo y $M \in \mathscr{C}$, entonces se tiene que $M = \{0\}$. Por lo que $\mathscr{C} \cap \mathscr{A} = \{0\}$.

Por último, sea $\mathscr{D}$ una clase contenida propiamente en R-Mod, tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Sean $M \in \mathscr{D}$ y $N \in \mathscr{C}$ un subcociente de M. Con lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads] \\ N \arrow[r, tail] & K \end{tikzcd}$$

Dado que $M \twoheadrightarrow K$, se tiene que $K \in \mathscr{D}$. Y puesto que $N \rightarrowtail K$, se cumple que $N \in \mathscr{D}$. De modo que $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$. No obstante, $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$, y así $N = \{0\}$. Por tanto, $\mathscr{A} = \mathscr{D}$. En otras palabras, $\mathscr{A}$ es el pseudocomplemento de $\mathscr{C}$.

□

Ejemplo 2.2.3. *Sea $\mathscr{C} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Entonces $\mathscr{A} = \{M : M \twoheadrightarrow K, K \in \mathscr{C} \Rightarrow K = \{0\}\}$ es el S-pseudocomplemento de $\mathscr{C}$*

Demostración. Considere la clase $\mathscr{A}$ a $\{M : si\ M \twoheadrightarrow N,\ N \in \mathscr{C} \Rightarrow N = 0\}$, y sean $M \in \mathscr{A}$ y $M \twoheadrightarrow N$. Dado K un cociente de N en la clase $\mathscr{C}$, también es cociente de M. Como $K \in \mathscr{C}$, entonces $K = \{0\}$, pues $M \in \mathscr{A}$. Ésto quiere decier que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes.

Ahora, para ver que $\mathscr{A} \cap \mathscr{C} = \{0\}$, sea $M \in \mathscr{A} \cap \mathscr{C}$. Al ser M cociente de sí mismo, se cumple que $M = \{0\}$.

Por último, demostremos que $\mathscr{A}$ es S-pseudocomplemento de $\mathscr{C}$. Para este fin, sean $\mathscr{D} \in L_{\twoheadrightarrow}$ tal que $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{0\}$, $M \in \mathscr{D}$ y T un cociente de M tal que $T \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{D}$ es cohereditaria, tenemos que $T \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Entonces $T = \{0\}$. Concluimos que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$.

□

Ejemplo 2.2.4. *R-tors es S-pseudocomplementada.*

Ésto se debe a que R-tors es un marco, en el que dado $\tau \in R$-tors, su S-pseudocomplemento será la teoría de torsión $\bigvee\{\sigma \in R\text{-tors} : \tau \wedge \sigma = 0\}$.

□

Observación 2.2.5. Si $\tau \in R$-*pr* tal que $\tau(S) = 0, \forall S \in R$-*Simp*, entonces $\tau = 0$. Ésto se sigue del hecho de que todo R-módulo se sumerge en un producto de copias de $\bigoplus\{S : S \in R\text{-}Simp\}$.

Ejemplo 2.2.6. *Otro ejemplo clásico de gran retícula S-pseudocomplementada es R-pr.*

Demostración. Sean $\sigma \in R$-*pr* y $\tau = \bigwedge\{\omega_0^{E(S)} : S \in R\text{-}Simp, \sigma(E(S)) \neq 0\}$. Ahora, sea $M \in R$-*Simp*. Tenemos 2 casos: $\sigma(E(M)) = 0$ o $\sigma(E(M)) \neq 0$.

Si $\sigma(E(M)) = 0$, entonces $(\sigma \wedge \tau)(E(M)) \leq \sigma(E(M)) = 0$. Por otro lado, si se considera el siguiente caso, observamos que $(\sigma \wedge \tau)(E(M)) \leq \omega_0^{E(M)}(E(M)) = 0$. Por ambos casos, y por la observación anterior, tenemos que $\sigma \wedge \tau = 0$.

Considerando que $0 \neq \sigma(E(S)) \subsetneq E(S)$ y que S es esencial en $E(S)$, entonces $S \cap \sigma(E(S)) \neq 0$. Y dado que S es simple, entonces $S \subseteq \sigma(E(S))$, y por tanto $\sigma(E(S))$ es esencial en $E(S)$. Por último, sea α es un preradical tal que $\alpha \wedge \sigma = 0$ y sea $S \in R$-*Simp* tal que $\sigma(E(S)) \neq 0$. Entonces $\sigma(E(S)) \cap \alpha(E(S)) = (\sigma \wedge \alpha)(E(S)) = 0$. Como $\sigma(E(S)) \cap \alpha(E(S)) = 0$, tenemos que $\alpha(E(S)) = 0$. Por tanto, $\alpha \leq \omega_0^{E(S)}$. Concluimos que τ es el único pseudoomplemento de σ.

□

Ejemplo 2.2.7. *R-nat también es S-pseudocomplementada. Ésto se debe a que toda álgebra de Boole es una retícula S-pseudocomplementada.*

Ejemplo 2.2.8. *Aún cuando $Sub_R(M)$ es pseudocomplementada $\forall M \in R$-Mod, hay anillos en los que no es S-pseudocomplementada.*

Demostración. Sea M un R-módulo y sea $N \leq M$. Para ver que $Sub_R(M)$ es una retícula pseudocomplementada, definimos $\mathfrak{F} = \{K \leq M : N \cap K = \{0\}\}$. La cual es no vacía, pues $\{0\} \in \mathfrak{F}$.

Ahora, considere la cadena $\{C_i\}_{i\in I}$ en $\mathfrak{F}$. Como $N \cap \bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I}(N \cap C_i) = \{0\}$, se tiene que $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathfrak{F}$ es una cota superior de $\{C_i\}_{i\in I}$. De este modo, por el lema de Zorn, hay un elemento máximo en $\mathfrak{F}$.

Sea $L \in \mathfrak{F}$ un máximo. Entonces $L \cap N = \{0\}$ y es máximo con esta propiedad. Es decir, L es pseudocomplemento de N.

Por otra parte, consideremos el anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. Y sean I_{U_1}, I_{U_2} dos ideales de R, donde $U_1 \neq U_2$ son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1, distintos de $\mathbb{R} \times \{0\}$. Entonces I_{U_1} y I_{U_2} son dos diferentes pseudocomplementos de $I_{\mathbb{R}\times\{0\}}$. Por lo que $Sub_R(R)$ **NO** es S-pseudocomplementada.

□

2.3. El esqueleto de una gran retícula

Lema 2.3.1. *Sean A, B dos conjuntos de propiedades de cerradura tales que L_A y L_B son retículas S-pseudocomplementadas. Si $Skel(L_A) \subseteq L_B \subseteq L_A$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_A} = \mathscr{C}^{\perp_B}$, para todo $\mathscr{C} \in L_B$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in L_B$. Como $\mathscr{C}^{\perp_B} \in L_B \subseteq L_A$ y $\mathscr{C} \wedge \mathscr{C}^{\perp_B} = 0$, entonces se cumple $\mathscr{C}^{\perp_B} \leq \mathscr{C}^{\perp_A}$. Por otro lado, puesto que $\mathscr{C}^{\perp_A} \in Skel(L_A) \subseteq L_B$ y $\mathscr{C} \wedge \mathscr{C}^{\perp_A} = 0$, se tiene que $\mathscr{C}^{\perp_A} \leq \mathscr{C}^{\perp_B}$. Por tanto $\mathscr{C}^{\perp_A} = \mathscr{C}^{\perp_B}$.

□

Teorema 2.3.2. *Considere A, B dos conjuntos de propiedades de cerradura y supóngase que tanto L_A como L_B son S-pseudocomplementadas. Si $Skel(L_A) \subseteq L_B \subseteq L_A$, entonces $Skel(L_A) = Skel(L_B)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}^{\perp_B} \in Skel(L_B)$, con $\mathscr{C} \in L_B$. Como $Skel(L_A) \subseteq L_B \subseteq L_A$, al aplicar el Lema 2.3.1, obtenemos la igualdad $\mathscr{C}^{\perp_B} = \mathscr{C}^{\perp_A} \in Skel(L_A)$. De esta manera, $Skel(L_B) \subseteq Skel(L_A)$.

Por otro lado, sea $\mathscr{C}^{\perp_A}$, con $\mathscr{C} \in L_A$. Dado que $\mathscr{C}^{\perp_A \perp_A} \in Skel(L_A) \subseteq L_B$, a partir de Observación 1.1.12 y Lema 2.3.1, se sigue que $\mathscr{C}^{\perp_A} = \mathscr{C}^{\perp_A \perp_A \perp_A} = (\mathscr{C}^{\perp_A \perp_A})^{\perp_B} \in Skel(L_B)$. Por tanto $Skel(L_A) = Skel(L_B)$.

□

Teorema 2.3.3. *Dados A, B dos conjuntos de propiedades de cerradura, si L_A y L_B son S-pseudocomplementadas y $Skel(L_A) = L_B$, entonces para cada $\mathscr{C} \in L_A$ se satisface que $(\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A} = L_B(\mathscr{C})$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in L_A$. Como $\mathscr{C}^{\perp_A} \in L_B = Skel(L_A)$, entonces $L_B(\mathscr{C}) \leq (\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A}$, ya que por la Observación 1.1.11 se tiene que $\mathscr{C} \leq (\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A}$.

Por otro lado, dado que $L_B(\mathscr{C}) \in Skel(L_A) = L_B$, entonces existe $\mathscr{A} \in L_A$ tal que $L_B(\mathscr{C}) = \mathscr{A}^{\perp_A}$. Al satisfacerse $\mathscr{C} \leq L_B(\mathscr{C})$, por la Observación 1.1.10, se sigue que $(\mathscr{C}^{\perp})^{\perp} \leq (L_B(\mathscr{C})^{\perp_A})^{\perp_A} = (\mathscr{A}^{\perp_A \perp_A})^{\perp_A} = \mathscr{A}^{\perp_A} = L_B(\mathscr{C})$.

Por lo tanto, $(\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A} = L_B(\mathscr{C})$.

□

2.4. El cálculo de los esqueletos de algunas grandes retículas de R-Mod

En esta sección, probaremos que los esqueletos de las clases abiertas son justamente clases de torsión, por lo que probaremos que estos esqueletos son cerrados bajo extensiones y sumas directas. Posteriormente usaremos este resultado para ver que los esqueletos de las clases abiertas, de las clases de Serre y de las teorías de torsión hereditarias coinciden.

Proposición 2.4.1. $Skel(L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}$

Demostración. Sea $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{\perp_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$.

Primero, para ver que $\mathscr{D}$ es cerrada bajo extensiones, sea

$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, donde $L, N \in \mathscr{D}$. Ahora, supongamos que existe un subcociente no nulo $K \in \mathscr{C}$ de M.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, two heads, "\alpha"] \\
K \arrow[r, tail, "\beta"] & T
\end{tikzcd}$$

Con β mono. y α epi. Entonces, por la Observación 1.4.10, $\beta[K]\cap\alpha f[L]$ es subcociente de K y de L.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & K \arrow[r, "\beta"] & T & &
\end{tikzcd}$$

De esta forma, $\beta[K]\cap\alpha f[L]\in\mathscr{C}$, pues $\mathscr{C}$ es cerrado bajo subcocientes; y, además, $\beta[K]\cap\alpha f[L]=0$, por ser un subcociente de L en $\mathscr{C}$. Entonces tenemos $\pi : T\longrightarrow T/\alpha f[L]$ la proyección canónica, $\eta : N\longrightarrow T/\alpha f[L]$ otro epi. y $T/\alpha f[L]\neq\{0\}$. Puesto que $\mathscr{D}$ es cerrada bajo cocientes y $N\twoheadrightarrow T/\alpha f[L]$, tenemos que $T/\alpha f[L]\in\mathscr{D}$. Ahora, vemos que $\pi\beta$ es mono., y entonces $K\rightarrowtail T/\alpha f[L]$. De este modo, $K\in\mathscr{C}$. Y por ende $K=\{0\}$, ya que $K\in\mathscr{C}\cap\mathscr{C}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$. Lo cual es una contradicción.

A partir de ésto, podemos deducir que $\mathscr{D}$ es cerradas bajo sumas directas finitas.

Por otro lado, veamos que $\mathscr{D}$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una colección de R-módulos en $\mathscr{D}$. Ahora, supongamos que hay un subcociente N de $\bigoplus_{i\in I}M_i$ tal que $N\in\mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \bigoplus_{i\in I} M_i \\
N &
\end{tikzcd}$$

A partir de este diagrama de coproducto fibrado, podemos elegir a N de tal forma que N sea un submódulo simple de $\bigoplus_{i\in I}M_i$. De esta forma, N es un subcociente de una suma directa finita $\bigoplus_{k=1}^{n}M_{i_k}$. Dado que $\bigoplus_{k=1}^{n}M_{i_k}\in\mathscr{D}$, deducimos que $N\in\mathscr{D}$. Ésto implica que $N\in\mathscr{C}\cap\mathscr{C}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$. Por lo tanto, $N=\{0\}$, lo cual es una contradicción.

□

Corolario 2.4.2. $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})=Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}})=Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}})$

Demostración. Como $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})\subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}\subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}\subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, aplicando el Lema 2.3.2, se sigue que $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})=Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}})=Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}})$.

□

Con este corolario obtenemos una nueva descripción de los pseudocomplementos en *R-tors*

Corolario 2.4.3. *Sea $\tau \in R$-tors. El pseudocomplemento de τ es la teoría de torsión determinada por $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M : M$ no tiene subcocientes de τ-torsión no nulos$\}$.*

Demostración. Sea $\sigma = \{M : M$ no tiene subcocientes de τ-torsión no nulos$\}$. Puesto que $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}} \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ y que $\tau \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}$, por el Lema 2.3.1, ésto implica que $\tau^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}} = \tau^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$. Sin embargo, el S-pseudocomplemento de $\mathbb{T}_\tau$ en $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ ya fue previamente descrito en el Ejemplo 2.2.2, siendo éste la clase $\{M : M$ no tiene subcocientes de no nulos en $\mathbb{T}_\tau\} = \sigma$. Por lo tanto, $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \sigma$.

□

2.5. Uniformidad

Definición 2.5.1. Sea M un R-módulo. Decimos que M es **compresible** [23] si para cada $N \in Sub_R(M)$ no nulo, existe un monomorfismo $f : M \longrightarrow N$. Por otro lado, M se llamará **cocompresible** [23] si para cada cociente $M \twoheadrightarrow K$, existe un epimorfismo $g : K \longrightarrow M$.

Definición 2.5.2. Sea $\{X, \preceq\}$ una retícula. Diremos que un elemento $\mathscr{C} \in X$ no nulo es un **átomo** [23] de X si cada que $\mathscr{C} \leq \mathscr{D}$ implica que $\mathscr{C} = \mathscr{D}$. Por otro lado, una retícula X es **atómica** [23] si para todo $x \in X$, existe $y \in X$ un átomo tal que $y \preceq x$. Por último, definimos el **zoclo de** X [23], denotado por $Zoc(X)$, como el supremo de todos los átomos.

Ejemplo 2.5.3. $Zoc(L_{\{\leq\}}) = \{M : M$ *es compresible*$\}$

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ un átomo de $L_{\{\leq\}}$, y sea $M \in \mathscr{C}$ un R-módulo no nulo. Si $N \leq M$, con $N \neq \{0\}$, entonces $L_{\{\leq\}}(N) \subseteq \mathscr{C}$. Sin embargo, puesto que $\mathscr{C}$ es átomo, tenemos que $\mathscr{C} \subseteq L_{\{\leq\}}(N)$, y entonces $M \in L_{\{\leq\}}(N)$. Por tanto M es compresible.

Por otro lado, consideremos a M un módulo compresible. Sea $\mathscr{D} \in L_{\{\leq\}}$ una clase no nula tal que $\mathscr{D} \leq L_{\{\leq\}}(M)$. Entonces existe $N \leq M$ tal que $N \in \mathscr{D}$. Como M es compresible, tenemos que $M \in \mathscr{D}$. De esta forma $L_{\{\leq\}}(M) = \mathscr{D}$. Con lo que concluimos que $Zoc(L_{\{\leq\}}) = \{M : M$ es compresible$\}$.

□

Ejemplo 2.5.4. $Zoc(L_{\{\twoheadrightarrow\}}) = \{M : M$ *es cocompresible*$\}$

Demostración. Sean $\mathscr{C}$ un átomo de $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, y $M \in \mathscr{C}$ un R-módulo no nulo. Consideremos $M \twoheadrightarrow N$, con $N \neq \{0\}$, entonces $L_{\{\twoheadrightarrow\}}(N) \subseteq \mathscr{C}$. Ahora, como $\mathscr{C}$ es átomo, deducimos que $\mathscr{C} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}(N)$, y así $M \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}(N)$. Por lo que M es cocompresible.

Inversamente, sea M un módulo cocompresible y sea $\mathscr{D} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ una clase no nula tal que $\mathscr{D} \leq L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M)$. Entonces existe N un cociente de M tal que $N \in \mathscr{D}$. Como M es cocompresible, tenemos que $M \in \mathscr{D}$. Entonces $L_{\{\leq\}}(M) = \mathscr{D}$.

□

Ejemplo 2.5.5. $Zoc(L_{\{\oplus\}}) = \{0\}$

Demostración. Si $\mathscr{C} \in L_{\{\oplus\}}$ es un átomo, entonces existe $M \in \mathscr{C}$, con $M \neq \{0\}$. Existe X un conjunto tal que $|M| < \left|M^{(X)}\right|$. Puesto que nuestra clase es cerrada bajo sumas directas, $M^{(X)} \in L_{\{\oplus\}}(M)$. Entonces $L_{\{\oplus\}}(M) = L_{\{\oplus\}}(M^{(X)})$. De esta forma, existe un conjunto Y tal que $M \cong (M^{(X)})^{(Y)}$, con $|Y| \geq 1$. Pero $|M| < \left|M^{(X)}\right| \leq \left|(M^{(X)})^{(Y)}\right|$. Contradiciendo el isomorfismo de M y $(M^{(X)})^{(Y)}$. Por lo tanto, $L_{\{\oplus\}}$ no es atómica.

□

Ejemplo 2.5.6. $Zoc(L_{\{\prod\}}) = \{0\}$

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in L_{\{\prod\}}$ un átomo. También consideremos un conjunto X tal que $|M| < \left|M^X\right|$. Además, $M \in L_{\{\prod\}}(M) = L_{\{\prod\}}(M^X)$. Entonces $M \cong (M^X)^Y$. Y así, $\left|(M^X)^Y\right| = |M| < \left|M^X\right| \leq \left|(M^X)^Y\right|$, lo cuál es una contradicción. Por tanto $Zoc(L_{\{\prod\}}) = \{0\}$.

□

Ejemplo 2.5.7. $Zoc(L_{\{E()\}}) = \{M : M \text{ } \textit{es inyectivo}\}$

Demostración. Si $\mathscr{C}$ es un átomo de $L_{\{E()\}}$, entonces existe un R-módulo inyectivo E tal que $\mathscr{C} = L_{\{E()\}}(E) = \{0, E\}$. Lo cual quiere decir que los átomos de $L_{\{E()\}}$ están en correspondencia con un conjunto completo de representantes de clases de módulos inyectivos. Entonces $Zoc(L_{\{E()\}}) = \{E : E \text{ es inyectivo}\}$.

□

Ejemplo 2.5.8. $Zoc(L_{\{P()\}}) = \{M : M \text{ } \textit{es proyectivo o no tiene cubierta proyectiva}\}$

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ un átomo de $L_{\{P()\}}$. Si M es un elemento no nulo de $\mathscr{C}$, entonces $L_{\{P()\}}(M) = \mathscr{C}$.

Si M tiene cubierta proyectiva, entonces $P(M) \in L_{\{P()\}}(M)$, ya que esta clase es cerrada bajo cubiertas proyectivas. Entonces $\{0, M\} = L_{\{P()\}}(M) = L_{\{P()\}}(P(M)) = \{0, P(M)\}$. Así $M = P(M)$, y por tanto M es proyectivo. Ahora, si M no tiene cubierta proyectiva, entonces $L_{\{P()\}}(M) = \{0, M\}$. Por lo que los átomos de $L_{\{P()\}}$ están determinados únicamente por los módulos que son proyectivos o que no tienen cubierta proyectiva.

□

Ejemplo 2.5.9. $Zoc(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) = R\text{-}Simp$

Demostración. Por los dos primeros ejemplos de esta sección, los átomos de esta retícula son de la forma $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}(M)$, donde M es compresible y cocompresible. De esta manera, M es simple. Por tanto $Zoc(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) = R\text{-}Simp$.

□

De los ejemplos anteriores, podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 2.5.10. *Para un anillo R, las siguientes propiedades se satisfacen:*

1. *$L_{\{\leq\}}$ es atómica si y sólo si todo R-módulo no nulo contiene un submódulo compresible.*
2. *$L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es atómica si y sólo si todo R-módulo no nulo contiene un cociente cocompresible.*
3. *$L_{\{\oplus\}}$ y $L_{\{\prod\}}$ nunca son atómicas.*
4. *$L_{\{E()\}}$, $L_{\{P()\}}$ y $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ siempre son atómicas.*

Definición 2.5.11. Sea X una retícula. Decimos que X es **uniforme** [23] si para cualquier colección $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos no nulos de X cumple que $\bigwedge_{i\in I} x_i \neq 0$.

Teorema 2.5.12. *Las siguientes condiciones son equvalentes:*

1. *$L_{\{\leq\}}$ es uniforme.*
2. *R es local izquierdo y semiartiniano izquierdo.*

Demostración. Sean S_1, S_2 dos módulos simples. Entonces $\{0, S_1\}, \{0, S_2\} \in L_{\{\leq\}}$. Si $L_{\{\leq\}}$ es uniforme, entonces $\{0, S_1\} \wedge \{0, S_2\} \neq \{0\}$. De este modo $S_1 = S_2$. Por lo que R es local izquierdo.

Ahora, si $M \in R\text{-}Mod$, entonces $L_{\{\leq\}}(M) \wedge \{0, S_1\} \neq \{0\}$. De tal fomra $S \in L_{\{\leq\}}(M)$: Por lo que S_1 se encaja en M. Por tanto R es semiartiniano izquierdo.

Por otro lado, si R es local izquierdo y semiartiniano izquierdo, entonces S_1 se encaja en cualesquiera 2 módulos M y N. Así $L_{\{\leq\}}(M) \wedge L_{\{\leq\}}(N) \neq \{0\}$. Por tanto $L_{\{\leq\}}$ es uniforme.

□

Teorema 2.5.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$L_{\{\oplus\}}$ es uniforme.*
2. *R es semisimple y local izquierdo.*

Demostración. Suponga que $L_{\{\oplus\}}$ es uniforme. Sean $M, P \in R\text{-}Mod$, con $M \neq \{0\}$ y P proyectivo. Entonces $L_{\{\oplus\}}(M) \wedge L_{\{\oplus\}}(P) \neq \{0\}$. De este modo, existen dos conjuntos X y Y tales que $M^{(X)} \cong P^{(Y)}$. Como P es proyectivo, entonces $M^{(X)}$ y $P^{(Y)}$ son proyectivo, y así M es proyectivo. Concluimos que todo R-módulo es proyectivo, la cuál es una equivalencia para que el anillo sea semisimple.

Ahora, sean S_1, S_2 dos módulos simples. Entonces $L_{\{\oplus\}}(S_1) \wedge L_{\{\oplus\}}(S_2) \neq \{0\}$. Lo cual implica que $(S_1)^{(X)} \cong (S_2)^{(Y)}$, para algunos conjuntos X y Y. Entonces $S_1 \cong S_2$. Por lo que R es local izquierdo.

Por último, supongamos que R es semisimple, local izquierdo. Sean M, N dos R-módulos no nulos, y sea S el único simple. Como R es semisimple, entonces $M \cong S^{(X)}$ y $N \cong S^{(Y)}$, para algunos conjuntos X y Y. Ahora, sea Z un conjunto tal que $|X|, |Y| \leq |Z|$ y $M^{(Z)} \cong N^{(Z)}$. Así $L_{\{\oplus\}}(M) \wedge L_{\{\oplus\}}(N) \neq \{0\}$. Por tanto $L_{\{\oplus\}}$ es uniforme.

□

Teorema 2.5.14. *$L_{\{E()\}}$ es uniforme si y sólo si R es trivial.*

Demostración. Supongamos que R no es trivial. Entonces sea E un módulo inyectivo no nulo. Además, sea X un conjunto tal que $\left|E^X\right| > |E|$. Como E y E^X son inyectivos, entonces $\{0, E\}, \{0, E^X\} \in L_{\{E()\}}$ y $\{0, E\} \wedge \{0, E^X\} = \{0\}$. Lo cual implica que $L_{\{E()\}}$ no es uniforme.

□

CAPÍTULO 3

La Gran Retícula *R-sext*

3.1. El operador $E(\cdot,\cdot)$

Definición 3.1.1. A una clase $\mathbf{C}$ de R-módulos que contenga al módulo $\{0\}$ y sea cerrada bajo isomorfismos, se le da el nombre de **clase con cero** [1].

Definición 3.1.2. Denotaremos por *R-sext* a la colección de todas las clases de R-módulos cerradas bajo isomorfismos, submódulos y extensiones.

Definición 3.1.3. Sean $\mathscr{C},\mathscr{D}$ dos clases con cero. Definimos el **secuenciador exacto** de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ como la clase de R-módulos definida por:
$E(\mathscr{C},\mathscr{D})=\{M$:existe $0\to C\to M\to D\to 0$ exacta, con $C\in\mathscr{C}$ y $D\in\mathscr{D}\}$.

Definición 3.1.4. Sea $\mathscr{C}$ una clase con cero. Definimos, por recursión, las siguientes clases. El **secuenciador cero** de $\mathscr{C}$ es la clase $E(\mathscr{C},\mathscr{C})^0=\{0\}$. Para un $n\in\mathbb{N}$, supongamos definido el **n-ésimo secuenciador**, $E(\mathscr{C},\mathscr{C})^n$, y en tal caso definimos el $n+1$-**ésimo secuenciador** como la clase determinada por $E(\mathscr{C},\mathscr{C})^{n+1}=E(\mathscr{C},E(\mathscr{C},\mathscr{C})^n)$.

Proposición 3.1.5. *Dadas $\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E}$ tres clases con cero,* $E(E(\mathscr{C},\mathscr{D}),\mathscr{E})=E(\mathscr{C},E(\mathscr{D},\mathscr{E}))$

Demostración. Sea $M\in E(E(\mathscr{C},\mathscr{D}),\mathscr{E})$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow M/N\longrightarrow 0$$

donde $N\in E(\mathscr{C},\mathscr{D})$ y $M/N\in\mathscr{E}$. Puesto que $N\in E(\mathscr{C},\mathscr{D})$, existe otra sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow C\longrightarrow N\longrightarrow N/C\longrightarrow 0$$

donde $C\in\mathscr{C}$ y $N/C\in\mathscr{D}$. De donde obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N/C & \longrightarrow & M/C & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

En este caso, $N/C \in \mathscr{D}$ y $M/N \in \mathscr{E}$. Lo que implica que $M/C \in E(\mathscr{D}, \mathscr{E})$. De este modo tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow M/C \longrightarrow 0$$

donde $C \in \mathscr{C}$ y $M/C \in E(\mathscr{D}, \mathscr{E})$. Por lo tanto, $M \in E(\mathscr{C}, E(\mathscr{D}, \mathscr{E}))$.

Recíprocamente, si $M \in E(\mathscr{C}, E(\mathscr{D}, \mathscr{E}))$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow M/L \longrightarrow 0$$

donde $L \in \mathscr{C}$ y $M/L \in E(\mathscr{D}, \mathscr{E})$. Como $M/L \in E(\mathscr{D}, \mathscr{E})$, existe un R-módulo K tal que $L \leq K \leq M$, $K/L \in \mathscr{D}$, $M/K \in \mathscr{E}$ y la sucesión

$$0 \longrightarrow K/L \longrightarrow M/L \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

es exacta. Con lo que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/L & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & M/K & \longrightarrow & M/K & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Además, $K \in E(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ se sigue de que $L \in \mathscr{C}$ y que $K/L \in \mathscr{D}$. Entonces tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

con $K \in E(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ y $M/K \in \mathscr{E}$. Por lo que $M \in E(E(\mathscr{C}, \mathscr{D}), \mathscr{E})$.

$\square$

Lema 3.1.6. *Sea $\mathscr{C}$ una clase hereditaria de R-módulos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la clase $E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$ es hereditaria.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n

Si $n = 0$, entonces $E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^0 = \{0\}$ es claramente hereditaria.

Supongamos, inductivamente, que $E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^k \in L_{\{\leq\}}$. Ahora, sea $M \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{k+1}$ y sea $N \leq M$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

con $K \in \mathscr{C}$ y $M/K \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})$. De este modo, conseguimos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \cap K \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N+K}{K} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{C} \in L_{\{\leq\}}$, se cumple que $N \cap K \in \mathscr{C}$. Y por hipótesis de inducción se sigue que $\frac{N+K}{K} \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^k$. Por lo que $N \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{k+1}$.

$\square$

Por el lema anterior, si $\mathscr{C} \in L_{\{\leq\}}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$ es una clase hereditaria. Ésto porque si $M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^k$. Por lo que $Sub_R(M) \subseteq E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$.

Sin embargo, este tipo de clases cumple con más propiedades de cerradura: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$ es cerrado bajo extenciones. Por lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.7. *Sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos. La clase $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$ es cerrada bajo submódulos y extensiones, siempre que $\mathscr{C}$ sea hereditaria.*

Demostración. La primer propiedad ya fue discutida, por lo que nos centraremos en ver que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$ sea cerrada bajo extensiones.

Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, con $K \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^n$ y $N \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^m$. Probemos, por inducción sobre n, que $M \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{m+n}$.

Si $n = 0$, entonces $K = \{0\}$ y $M \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^m$.

Ahora, aupongamos, inductivamente, que el resultado es válido para un nivel $n = k$.

Para el siguiente estrato, como $K \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{k+1}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow K \longrightarrow K/L \longrightarrow 0$$

donde $L \in \mathscr{C}$ y $K/L \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^k$. De este modo, consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K/L \arrow[r] \arrow[d] & M/L \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Entonces $M/L \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{m+k}$, pues $N \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^m$ y $K/L \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^k$. Por último, tomando $L \in \mathscr{C}$ y $M/L \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{m+k}$, de la sucesión

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow M/L \longrightarrow 0$$

tenemos que $M \in E(\mathscr{C}, \mathscr{C})^{m+k+1}$.

□

Observación 3.1.8. Sean $\mathscr{N} \in L_{\{\leq\}}$ y $\mathscr{C} \in$ *R-sext*. Si $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{C}$, entonces $E(\mathscr{N}, \mathscr{N}) \subseteq \mathscr{C}$. En efecto, si $M \in E(\mathscr{N}, \mathscr{N})$, entonces existe una sucesión $0 \to N \to M \to K \to 0$ exacta, con $N, K \in \mathscr{N}$. Entonces $N, K \in \mathscr{C}$, y como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que $M \in \mathscr{C}$.

□

Proposición 3.1.9. *Si $\mathscr{N}$ es una clase hereditaria y $\mathscr{C} \in$ R-sext tal que $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{C}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^n \subseteq \mathscr{C}$*

Demostración. Procedamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$, entonces $E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^0 = \{0\} \subseteq \mathscr{C}$.
Ahora, supongamos, inductivamente, que $E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^n \subseteq \mathscr{C}$. Por último, probemos que $E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^{n+1}$ está contenido en $\mathscr{C}$.

Si $M \in E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^{n+1}$, existen $N \in \mathscr{N}$ y $K \in E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^n$ tal que la sucesión $0 \to N \to M \to K \to 0$ es exacta. Entonces $N \in \mathscr{C}$ y, por hipótesis de inducción, $K \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{C} \in R\text{-}sext$, tenemos que $M \in \mathscr{C}$.

Concluimos que $E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^k \subseteq \mathscr{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Y por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{N}, \mathscr{N})^n \subseteq \mathscr{C}$.

□

Corolario 3.1.10. *Sea $\mathscr{C}$ una clase en R-Mod. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}), L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}))^n$ es la clase en R-sext generada por $\mathscr{C}$ en R-sext.*

Demostración. Puesto que las clases en *R-sext* son hereditarias, la clase generada por $\mathscr{C}$ coincide con la generada por $L_{\{\leq\}}(\mathscr{C})$. Ahora, por la proposición anterior, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}), L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}))^n$ es la menor clase que contiene a $L_{\{\leq\}}(\mathscr{C})$, y por tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}), L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}))^n$ es la clase generada por $L_{\{\leq\}}(\mathscr{C})$.

□

Definición 3.1.11. Se define al operador **sext**: $\mathscr{P}(R\text{-}Mod) \longrightarrow R\text{-}sext$ como la asignación $sext(\mathscr{C}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}), L_{\{\leq\}}(\mathscr{C}))^n$.

Observación 3.1.12. $Zoc(R) \in sext(R\text{-}simp)$. En efecto, como $Zoc(R)$ es la suma de los ideales izquierdos simples, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $Zoc(R) \in E(R\text{-}simp, R\text{-}simp)^n \subseteq sext(R\text{-}simp)$.

□

Observación 3.1.13. $R\text{-}sext = L_{\{\leq, ext\}}$. Por lo que *R-sext* es una gran retícula completa. Donde $\bigwedge_{i\in I} \mathscr{C}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_{i\in I}$ y $\bigvee_{i\in I} \mathscr{C}_{i\in I} = sext(\bigcup_{i\in I} \mathscr{C}_{i\in I})$

Observación 3.1.14. Sean $M, N \in R\text{-}Mod$. Si $N \leq M$, entonces $L_{\{\leq\}}(N) \subseteq L_{\{\leq\}}(M)$.

En efecto, si $\mathscr{X} \in L_{\{\leq\}}$ es tal que $M \in \mathscr{X}$, como $\mathscr{X}$ es hereditaria, entonces $N \in \mathscr{X}$. Es decir $N \in L_{\{\leq\}}(M)$, y así $L_{\{\leq\}}(N) \subseteq L_{\{\leq\}}(M)$.

□

3.2. Pseudocomplementos en *R-sext*

Lema 3.2.1. *Sea $\mathscr{C} \in R\text{-}sext$. Entonces $\mathscr{A} = \{M \in R\text{-}Mod : L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{C} = \{0\}\}$ es cerrada bajo submódulos y extensiones.*

Demostración. Primeramente, si $M \in \mathscr{A}$ y $N \leq M$, entonces, por la observación anterior, tenemos que $L_{\{\leq\}}(N) \cap \mathscr{C} \subseteq L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{C} = \{0\}$. De esta forma, $\mathscr{A}$ es hereditaria.

Por otro lado, sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, donde $K, L \in \mathscr{A}$, y sea $T \leq M$ tal que $T \in \mathscr{C}$. Entonces $K \cap T \in \mathscr{C}$, pues $\mathscr{C}$ es hereditaria. Sin embargo, al ser $K \cap T$ un submódulo de K en $\mathscr{C}$, se tiene que $K \cap T = 0$. De modo que $\pi\mid_T : T \longrightarrow L$ es mono; es decir, $T \leq L$. Ahora, puesto que $L_{\{\leq\}}(L)$ es hereditaria, se sigue que $T \in L_{\{\leq\}} \cap \mathscr{C} = \{0\}$. Por tanto $T = \{0\}$.

$\square$

Teorema 3.2.2. *R-sext es S-pseudocomplementada.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in R\text{-}sext$ y sea $\mathscr{A} = \{M \in R\text{-}Mod : L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{C} = \{0\}\}$. Por lo visto en el lema anterior, $\mathscr{A} \in R\text{-}sext$. Ahora, sea $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{A}$. Entonces $M \in \mathscr{C} \cap L_{\{\leq\}}(M) = \{0\}$. Por tanto $\mathscr{C} \cap \mathscr{A} = \{0\}$.

Por último, sea $\mathscr{D} \in R\text{-}sext$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Además, considere $M \in \mathscr{D}$ y sea $N \in L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{C}$. Esto implica que $N \leq M$; y puesto que $\mathscr{D}$ es hereditaria, se cumple que $N \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C}$. Sin embargo, esta última intersección es $\{0\}$. Por lo que $L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{C} = \{0\}$, y así $\mathscr{D} = \mathscr{A}$. Se concluye que *R-sext* es S-pseudocomplementada.

$\square$

Teorema 3.2.3. $Skel(R\text{-}sext) = R\text{-}Nat$

Demostración. Por el Lema 3.2.1, dado que $R\text{-}nat = Skel(L_{\{\leq\}}) \subseteq L_{\{\leq,ext\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$, se puede aplicar el Teorema 2.3.2, por lo que $R\text{-}nat = Skel(L_{\{\leq\}}) = Skel(R\text{-}sext)$.

$\square$

Corolario 3.2.4. *Sea $\mathscr{C} \in R\text{-}sext$. Si $nat(\mathscr{C})$ denota a la clase natural generada por $\mathscr{C}$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = nat(\mathscr{C})$. Como consecuencia tenemos, si $\mathscr{C} \in R\text{-}nat$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = \mathscr{C}$.*

Demostración. El resultado se sigue del hecho de que $L_{\{\leq,E(),\oplus\}} = R\text{-}nat = Skel(R\text{-}sext)$. Entonces por el Lema 2.3.3, tenemos que $\mathscr{C}^{\perp_{\{sext\}}\perp_{\{sext\}}} = \mathscr{C}^{\perp_{\{\leq,ext\}}\perp_{\{\leq,ext\}}} = L_{\{\leq,E(),\oplus\}}(\mathscr{C}) = nat(\mathscr{C})$.

Por último, si $\mathscr{C} \in R\text{-}nat$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = nat(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

$\square$

Definición 3.2.5. Sean $M \in R\text{-}Mod$ y $N \leq M$. Decimos que N es esencialmente cerrado en M si para cada submódulo K de M tal que $N \subseteq K$ es esencial en K, entonces $N = K$.

Proposición 3.2.6. *Sea $M \in R\text{-}Mod$ y sea $\mathscr{C} \in R\text{-}nat$. Existe un submódulo de M máximo respecto a ser elemento de $\mathscr{C}$*

Demostración. Sea $\mathfrak{F} = \{N \leq M : N \in \mathscr{C}\}$, la cual es una clase no vacía, porque $\{0\} \in \mathfrak{F}$.

Además, $\mathfrak{F}$ está ordenada bajo $\leq$.

Ahora, dada una cadena $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cadena de elementos de $\mathfrak{F}$, tenemos que $N_\alpha \leq \bigoplus_{\alpha\in A} N_\alpha \leq M$. Tenemos que $\bigoplus_{\alpha\in A} N_\alpha \in \mathscr{C}$ porque $\mathscr{C}$ es cerrada bajo sumas directas. Por lo que toda cadena en $\mathfrak{F}$ está superiormente acotada.

Entonces, por el Lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ tiene un elemento máximo, digamos $T \in \mathfrak{F}$, entonces T es el submódulo deseado.

□

Observación 3.2.7. Sea $\mathscr{C}$ una clase natural y sea $M \in R\text{-}Mod$. Si N es un submódulo máximo con la propiedad de ser elemento de $\mathscr{C}$, entonces N es esencialmente cerrado.

Demostración. En efecto, sea $K \leq M$ es tal que K contiene esencialmente a N y $K \neq M$. Entonces K es una extensión esencial de N. Puesto que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones esenciales, tenemos que $K \in \mathscr{C}$. Pero N es máximo con la propiedad de pertenecer a $\mathscr{C}$. Entonces $N = K$.

□

Teorema 3.2.8. *Se cumplen las propiedades de D'Morgan respecto a $\perp_{sext}$.*
Ésto es $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}} = \mathscr{C}^{\perp_{sext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$ y $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}} = \mathscr{C}^{\perp_{sext}} \vee \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$, para cualquier par de clases $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in R\text{-}sext$

Demostración. Probemos que $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}} = \mathscr{C}^{\perp_{sext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$. Como $\mathscr{C} \leq \mathscr{C} \vee \mathscr{D}$ y $\mathscr{D} \leq \mathscr{C} \vee \mathscr{D}$, entonces por la Observación 1.1.10, tenemos que $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}} \leq \mathscr{C}^{\perp_{sext}}$ y que $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}} \leq \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$. Entonces $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$ es cota inferior de $\mathscr{C}^{\perp_{sext}}$ y de $\mathscr{D}^{\perp_{sext}}$, por lo que $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}} \leq \mathscr{C}^{\perp_{sext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$.

Por otro lado, supongamos que $M \in (\mathscr{C}^{\perp_{sext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{sext}}) \setminus (\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$. Entonces $M \in \mathscr{C}^{\perp_{sext}} = \{T : L_{\{\leq\}}(T) \cap \mathscr{C} = \{0\}\}$ y $M \in \mathscr{D}^{\perp_{sext}} = \{T : L_{\{\leq\}}(T) \cap \mathscr{D} = \{0\}\}$. Bajo estas condiciones, consideremos un submódulo no nulo $N \in \mathscr{C} \vee \mathscr{D} = sext(\mathscr{C} \cup \mathscr{D})$ de M. De este modo, hay una sucesión $0 \longrightarrow K \rightarrowtail N \twoheadrightarrow L \longrightarrow 0$ exacta corta, donde $K \in \mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ es tal que $K \neq \{0\}$. Entonces $K \leq N$, y así $K \leq M$. De esta manera, $K \in L_{\{\leq\}}(M) \cap (\mathscr{C} \cup \mathscr{D}) = (L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{D}) \cup (L_{\{\leq\}}(M) \cap \mathscr{D}) = \{0\}$. Por tanto, $K = 0$, lo cual es imposible. Por lo que $M \in (\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$.

De igual manera, probemos que $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}} = \mathscr{C}^{\perp_{sext}} \vee \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$. Puesto que $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D} \leq \mathscr{C}$ y $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D} \leq \mathscr{D}$, obtenemos que $\mathscr{C}^{\perp_{sext}} \leq (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$ y $\mathscr{D}^{\perp_{sext}} \leq (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$; y así $\mathscr{C}^{\perp_{sext}} \vee \mathscr{D}^{\perp_{sext}} \leq (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$.

Ahora, dado que $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}} \in R\text{-}nat$, podemos considerar $M \in (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$ un R-módulo inyectivo, ésto pues toda clase natural es cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas. Entonces $L_{\{\leq\}}(M) \cap (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}) = \{0\}$. Sea C un submódulo máximo de M tal que $C \in \mathscr{C}^{\perp_{sext}}$. Como C es máximo, C es esencialmente cerrado en M. Bajo estas condiciones, por el Ejemplo 2.2.8, sea K un pseudocomplemento de C. Como $C \subsetneq C \oplus K$ es escencial en $C \oplus K$, obtenemos que $C \oplus K = M$.

Si $K \notin \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$, entonces $L_{\{\leq\}}(K) \cap \mathscr{D} \neq \{0\}$. De esta manera, existe un submódulo $L \in \mathscr{D}$ no nulo de K, con $L \notin \mathscr{C}^{\perp_{sext}}$. Entonces $L_{\{\leq\}}(L) \cap \mathscr{C} \neq \{0\}$. Por lo que hay un submódulo T no nulo de L tal que $T \in \mathscr{C}$. Siendo que $T \leq L$ y $\mathscr{D}$ sea hereditaria, entonces $T \in \mathscr{D}$. Por lo tanto, $T \in L_{\{\leq\}}(M) \cap (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}) = \{0\}$, lo cual es imposible. Así, $M = C \oplus K$, con $C \in \mathscr{C}^{\perp_{sext}}$ y $K \in \mathscr{D}^{\perp_{sext}}$. Con lo que concluimos la igualdad $\mathscr{C}^{\perp_{sext}} \vee \mathscr{D}^{\perp_{sext}} = (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{sext}}$.

$\square$

CAPÍTULO 4

La Gran Retícula *R-qext*

En este capítulo se dará un análisis dual al del capítulo anterior, considerando ahora aquellas clases cerradas bajo isomorfismos, cocientes y extensiones. Veremos que toda subcolección de elementos en *R-qext* tiene supremo. Seguiremos con el operador qext, y estudiaremos los pesudocomplementos dentro de *R-qext* y su relación con *R-conat*. Finalmente, formularemos un resultado análogo de leyes de D'Morgan respecto a $\perp_{qext}$. Con este objetivo, damos la siguiente definición.

Definición 4.0.1. A la colección de todas aquellas clases en R-Mod cerradas bajo isomorfismos, cocientes y extensiones se le da el nombre de *R-qext*.

4.1. Clases cohereditarias

Lema 4.1.1. *Sea $\mathscr{B} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n$ es una clase cohereditaria. Más aún, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.*

Demostración. Mediante una inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ argumentamos de la siguiente manera.

Si $n = 0$, entonces $E(\mathscr{B},\mathscr{B})^0 = \{0\} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$

Ahora, supongamos, inductivamente, que para un cierto $k \in \mathbb{N}$, la clase $E(\mathscr{B},\mathscr{B})^k$ es cohereditaria.

Y por último, sea $M \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^{k+1}$ y sea M/N un cociente de M. De este modo, existen $K \in Sub_R(M)$ tal que $N \le K$ y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

donde $K \in \mathscr{B}$ y $M/K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^k$. Ahora, como $\mathscr{B} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, se tiene que $K/N \in \mathscr{B}$. Por otro lado, por la hipótesis de inducción también obtenemos que $M/K = \frac{M/N}{M/K} \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^k$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K/N & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & \frac{M/N}{K/N} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ésto implica que $M/N \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^{k+1}$.

Más aún, puesto que cada estrato es cohereditario, podemos concluir que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n$ también lo es.

$\square$

Este lema nos dice que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\_,\_)^n$ genera clases cohereditarias a partir de dicho tipo de clase. Más aún, el siguiente teorema nos permite saber que también $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\_,\_)^n$ se cierra bajo extensiones.

Teorema 4.1.2. *Si $\mathscr{B}$ es una clase cohereditaria, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n$ es cerrada bajo cocientes y extensiones.*

Demostración. Por el lema anterior, ya sabemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

Ahora, para ver que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n$ es cerrada bajor extensiones, sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, con $K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^m$ y $M/K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^n$; y así procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$, entonces $M = K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^m$.

Después, suponemos, inductivamente, que el resultado es válido si $M/KE(\mathscr{B},\mathscr{B})^k$.

Por último, si $M/K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^{k+1}$, entonces existe $L \in Sub_R(M)$ tal que $K \leq L$, $L/K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^k$ y $M/L = \frac{M/K}{L/K} \in \mathscr{B}$. De donde obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L/K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/K & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & M/L & \longrightarrow & M/L & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Entonces, por hipótesis de inducción, $L \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^{m+k}$, pues $K \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^m$ y $L/KE(\mathscr{B},\mathscr{B})^k$. Con lo cual consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow M/L \longrightarrow 0$$

Ahora, como $L \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^{m+k}$ y $M/L \in \mathscr{B}$, concluimos que $M \in E(\mathscr{B},\mathscr{B})^{m+k+1}$.

□

Proposición 4.1.3. *Si $\mathscr{K}$ es una clase cohereditaria y $\mathscr{D} \in R$-qext tal que $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\mathscr{K},\mathscr{K})^n \subseteq \mathscr{D}$.*

Demostración. Probemos, por inducción, que $E(\mathscr{K},\mathscr{K})^n \subseteq \mathscr{D}$.

Para el caso del 0, tenemos que $E(\mathscr{K},\mathscr{K})^0 = \{0\} \subseteq \mathscr{D}$

Ahora, supongamos, inductivamente, que $E(\mathscr{K},\mathscr{K})^n \subseteq \mathscr{D}$.

Por último, sea $M \in E(\mathscr{K},\mathscr{K})^{n+1}$. De este modo, existen $N \in \mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$ y $L \in E(\mathscr{K},\mathscr{K})^n$ tal que $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ es exacta. Entonces, por hipótesis de inducción, $L \in \mathscr{D}$. Y puesto que $\mathscr{D}$ es cerrada bajo extensiones, se tiene que $M \in \mathscr{D}$.

□

Corolario 4.1.4. *Sea $\mathscr{B}$ una clase de R-módulos. La clase generada por $\mathscr{B}$ en R-qext está descrita como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{B}), L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{B}))^n$.*

Demostración. Puesto que *R-qext* consta de clases cohereditarias, la clase generada por $\mathscr{B}$ coincide con la generada por $L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{B})$. Ahora, por el lema anterior, la clase generada por $L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{B})$ es $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{B}), L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{B}))^n$.

□

Definición 4.1.5. De manera totalmente análoga a sext, el operador **qext** queda establecido como $qext(\mathscr{A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{A}), L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathscr{A}))^n$.

Observación 4.1.6. Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $R^n \in qext(R)$

En efecto, $R^2 \in qext(R)$ pues $0 \longrightarrow R \longrightarrow R^2 \longrightarrow R \longrightarrow 0$ es exacta. Supongamos, inductivamente, que $R^n \in qext(R)$. De la misma forma, $R^{n+1} \in qext(R)$, ya que $0 \longrightarrow R^n \longrightarrow R^{n+1} \longrightarrow R \longrightarrow 0$ es exacta.

□

Observación 4.1.7. *R-qext* $= L_{\{\twoheadrightarrow,ext\}}$ es una gran retícula completa, donde el ínfimo está descrito por $\bigwedge_{i\in I} \mathscr{B}_i = \bigcap_{i\in I} \mathscr{B}_i$ y el supremo queda establecido como la clase $\bigvee_{i\in I} \mathscr{B}_i = qext(\bigcup_{i\in I} \mathscr{B}_i)$.

4.2. Los pseudocomplementos en R-*qext*

Continuaremos por estudiar los pseudocomplementos dentro de esta retícula, por lo que empezamos con el siguiente resultado:

Lema 4.2.1. *Si $\mathscr{B}$ una clase cohereditaria, entonces la clase $\big\{M : L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \cap \mathscr{B} = \{0\}\big\}$ es cerrada bajo cocientes y extensiones.*

Demostración. Denotemos $\mathfrak{F} = \big\{M : L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \cap \mathscr{B} = \{0\}\big\}$. Entonces $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo cocientes. En efecto, sean $M \in \mathfrak{F}$, N un cociente de M y $K \in \mathscr{B}$ un cociente de N. Entonces $M \twoheadrightarrow K$, lo que implica que $K \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \cap \mathscr{B} = \{0\}$. Por tanto $K \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}(N) \cap \mathscr{B} = \{0\}$.

Ahora, consideremos una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$ donde $N, K \in \mathfrak{F}$. Sea $L \in \mathscr{B}$ un cociente de M; y como $L \twoheadrightarrow K \cap L$ y $\mathscr{B}$ es cohereditaria, entonces $K \cap L \in \mathscr{B} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(K) = \{0\}$. De este modo, L es cociente de N, y así $L \in \mathscr{B} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(N) = \{0\}$.

□

Teorema 4.2.2. *R-qext es S-pseudocomplementada.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} \in R$-*qext*. Consideremos $\mathscr{A} = \big\{M : L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \cap \mathscr{B} = \{0\}\big\}$, la cual, por el lema anterior, es una clase en R-*qext*.

El que $\mathscr{B} \cap \mathscr{A} = \{0\}$ es una consecuencia inmediata. Ésto ya que si $M \in \mathscr{B} \cap \mathscr{A}$, entonces $M \in \mathscr{B} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) = \{0\}$. Por lo que $M = \{0\}$.

Finalmente, sea $\mathscr{D} \in R$-*qext* tal que $\mathscr{B} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Entonces, dados $M \in \mathscr{D}$ y $N \in \mathscr{B}$ un cociente de M, tenemos que $N \in \mathscr{D}$, pues $\mathscr{D} \in R$-*qext*. De esta forma, $N \in \mathscr{B} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Por lo tanto, $M \in \mathscr{A}$. Lo cual termina nuestra prueba, $\mathscr{A}$ es pseudocomplemento de $\mathscr{B}$ y éste es único.

□

Observación 4.2.3. Las dos proposiciones anteriores implican que se cumple la contención $Skel(R\text{-}quot) \subseteq R\text{-}qext$

Teorema 4.2.4. *$R\text{-}conat := Skel(R\text{-}quot) = Skel(R\text{-}qext)$*

Demostración. Puesto que $Skel(R\text{-}quot) \subseteq R\text{-}qext \subseteq R\text{-}quot$, aplicando el Teorema 2.3.2, tenemos que $R\text{-}conat := Skel(R\text{-}quot) = Skel(R\text{-}qext)$.

□

Corolario 4.2.5. *Sea $\mathscr{B} \in R$-qext. Si $conat(\mathscr{B})$ denota a la clase conatural generada por $\mathscr{B}$, entonces $\mathscr{B}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = conat(\mathscr{B})$.*

Demostración. Tomando como punto de partida el teorema anterior, tenemos que $Skel(R\text{-}qext) = R\text{-}conat$; y por el Lema 2.3.3, entonces $\mathscr{B}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = conat(\mathscr{B})$.

□

Observación 4.2.6. Ahora, como $R\text{-}conat := Skel(R\text{-}quot) = Skel(R\text{-}qext)$, tenemos que dada una clase $\mathscr{B} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $\mathscr{B}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = conat(\mathscr{B})$.

Observación 4.2.7. A partir de la condición CN estudiada en [3], dada una familia de R-módulos $\mathfrak{M}$, la clase $conat(\mathfrak{M})$ queda descrita como

$$conat(\mathfrak{M}) = \{M : \forall M \twoheadrightarrow N, \exists N \twoheadrightarrow C, \text{ con } C \text{ un cociente de un elemento de } \mathfrak{M}\}.$$

Teorema 4.2.8. *Si $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ son dos clases en R-qext, entonces se satisfacen las propiedades $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{qext}} = \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp qext}$ y $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \geq \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \vee \mathscr{D}^{\perp qext}$.*

Demostración. Probemos que $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{qext}} = \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp qext}$. Tenemos que $\mathscr{C} \leq \mathscr{C} \vee \mathscr{D}$ y $\mathscr{D} \leq \mathscr{C} \vee \mathscr{D}$; de modo que $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \leq \mathscr{C}^{\perp_{qext}}$ y $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \leq \mathscr{D}^{\perp_{qext}}$. Y así $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \leq \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{qext}}$.

Por otro lado, supongamos que existe $M \in (\mathscr{C}^{\perp_{qext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{qext}}) \setminus (\mathscr{C}^{\perp_{qext}} \vee \mathscr{D}^{\perp_{qext}})$ con $M \neq \{0\}$. Lo que implica que $\mathscr{C} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) = \{0\}$, $\mathscr{D} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) = \{0\}$ y $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \neq \{0\}$. Entonces existe $M \twoheadrightarrow K$ tal que $K \in \mathscr{C} \vee \mathscr{D}$. Con lo cual tenemos una sucesión $0 \longrightarrow T \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$ exacta, con $L \in \mathscr{C} \cup \mathscr{D}$, $L \neq \{0\}$. De esta forma, $\mathscr{C} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \neq \{0\}$ o $\mathscr{D} \cap L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M) \neq \{0\}$. Lo cual es una contraddicón. Y por lo tanto, $(\mathscr{C} \vee \mathscr{D})^{\perp_{qext}} = \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \wedge \mathscr{D}^{\perp qext}$.

Para la segunda, probemos que $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \geq \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \vee \mathscr{D}^{\perp qext}$. La desigualdad $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \geq \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \vee \mathscr{D}^{\perp qext}$ siempre se cumple. En efecto, como $\mathscr{C} \wedge \mathscr{C} \leq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D} \wedge \mathscr{C} \leq \mathscr{D}$, entonces $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \geq \mathscr{C}^{\perp_{qext}}$ y $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \geq \mathscr{D}^{\perp_{qext}}$. Por lo que $(\mathscr{C} \wedge \mathscr{D})^{\perp_{qext}} \geq \mathscr{C}^{\perp_{qext}} \vee \mathscr{D}^{\perp_{qext}}$.

□

CAPÍTULO 5

Caracterizaciones De Anillos

5.1. Módulos finitamente generados

Observación 5.1.1. Un R-módulo M es finitamente generado si y sólo si existe un epimorfismo $\varphi : R^k \longrightarrow M$, para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.1.2. *La clase de módulos finitamente generados es cerrada bajo cocientes y extensiones.*

Demostración. Sea M un R-módulo finitamente generado y M/K un cociente de M. Entonces existen dos epimorfismos, $\varphi : R^n \longrightarrow M$ y $\pi : M \longrightarrow M/K$. De esta forma, $\pi\varphi : R^n \longrightarrow M/K$ es epi., y por tanto M/K es finitamente generado. Por otro lado, sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta, donde N, K son finitamente generados. Si $\{x_1, ..., x_n\}$ y $\{y_1, ..., y_m\}$ son bases para N y K respectivamente, entonces definimos una familia de elementos de M como sigue, $z_1 = x_1, ..., z_n = x_n$ y para cada $i \in \{1, ..., m\}$, z_{n+i} es un representante del conjunto $g^{-1}[\{y_i\}]$. De este modo, $\{z_1, ..., z_{n+m}\}$ es base para M. Concluimos que M es finitamente generado.

□

Ejemplo 5.1.3. $qext(R) = \{M \in R\text{-}Mod : M \text{ *es finitamente generado*}\}$.

Demostración. Sea M un R-módulo finitamente generado. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es exacta. Como $qext(R)$ es cerrada bajo cocientes, $M \in qext(R)$. Ahora, $L_{\{\twoheadrightarrow\}}(R)$ es la clase de los cocientes R/I, donde I es ideal de R. Los cuales son finitamente generados, por la proposición anterior. Así mismo, $E(R, R)$ consta de R-módulos f.g.; y de la misma manera, $qext(R)$ queda descrita como aquella clase de módulos finitamente generados.

□

Ejemplo 5.1.4. *$sext(R\text{-}simp)$ y $qext(R\text{-}simp)$ consisten de R-módulos semiartinianos finitamente generados*

Demostración. Tenemos que $sext(R\text{-}simp) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\leq\}}(R\text{-}simp), L_{\{\leq\}}(R\text{-}simp))^n$. Ahora, por el Corolario 3.1.10, $sext(R\text{-}simp)$ es la clase en $R\text{-}sext$ generada por $R\text{-}simp$. Como $R\text{-}simp$ consta de R-módulos f.g., todos los módulos de $sext(R\text{-}simp)$ son finitamente generados. Finalmente, puesto que la clase de torsión hereditaria generada por $R\text{-}simp$ es cerrada bajo submódulos y extensiones, dicha clase contiene a $sext(R\text{-}simp)$. Lo cual quiere decir que los R-módulos de $R\text{-}simp$ son semiartinianos. De manera análoga, también se argumenta que $qext(R\text{-}simp)$ consta de R-módulos semiartinianos finitamente generados.

□

Teorema 5.1.5. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$R\text{-}nat = R\text{-}conat$*
2. *Para cada R-módulo M, $nat(M) = conat(M)$*

Demostración. (1) ⇒ (2) Sea M un R-módulo. Como $nat(M) \in R\text{-}nat \subseteq R\text{-}conat$, entonces $nat(M)$ es una clase conatural que contiene a M. Lo que implica que $conat(M) \subseteq nat(M)$. De manera análoga, tenemos que $nat(M) \subseteq conat(M)$. Por lo tanto $nat(M) = conat(M)$.

(2) ⇒ (1) Sea $\mathscr{C} \in R\text{-}nat$ y sea $M \in \mathscr{C}$. Puesto que $conat(M) = nat(M) \subseteq \mathscr{C}$, tenemos que $\mathscr{M}$ es cerrada bajo cocientes. Para probar que $\mathscr{C}$ es una clase conatural, basta probar que si K es un módulo talque todos sus cocientes no nulos tienen un cociente no nulo en $\mathscr{C}$, entonces $K \in \mathscr{C}$, es decir que $\mathscr{C}$ cumpla la condición CN. En vista de lo anterior, consideremos $L \in R\text{-}Mod$ tal que para cada epimorfismo $f : L \longrightarrow T$, existe un epimorfismo $g : T \longrightarrow C$, con $C \in \mathscr{C}$.

Sea U un submódulo de L máximo con la propiedad de que $U \in \mathscr{C}$. Si $U \neq L$, entonces U no es esencial, porque toda clase natural es cerrada bajo extensiones esenciales. A lo que deducimos que U es esencialmente cerrado. Así, U tiene un pseudocomplemento en L, digamos $V \neq \{0\}$. Entonces V se encaja esencialmente en $L/U \neq \{0\}$, así $E(V) = L/U$. Además, la propiedad de que U y V sean pseudocomplementos implica que $V \in \mathscr{C}^{\perp_{nat}}$. Y, dado que $\mathscr{C}^{\perp_{nat}}$ también es cerrada bajo cápsulas inyectivas, deducimos que $L/U \in \mathscr{C}^{\perp_{nat}}$. Cabe mencionar que L/U tiene un cociente no nulo L/B en $\mathscr{C}$, por la elección de L. Como $\mathscr{C}^{\perp_{nat}}$ es cerrada bajo cocientes, entonces $L/B \in \mathscr{C}^{\perp_{nat}}$. De esta forma, $\{0\} \neq L/B \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{nat}} = \{0\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $L = U \in \mathscr{C}$, y concluyéndose que $R\text{-}nat \subseteq R\text{-}conat$.

Por otro lado, probemos que la otra contención también es válida. Para este fin, sea $\mathscr{C} \in R\text{-}conat$ y sea $M \in \mathscr{C}$. Ya que $nat(M) = conat(M) \subseteq \mathscr{C}$, obtenemos que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo submódulos. De donde, vemos que $\mathscr{C}$ es una clase abierta. Sea $\mathscr{A} = \{N : N$ no tiene cocientes no nulos en $\mathscr{C}\}$ el S-pseudocomplemento de $\mathscr{C}$ en *R-quot*, el cual también es una clase conatural. Entonces $\mathscr{A}$ es cerrada bajo submódulos, y por ende $\mathscr{A} = \{N : N$ no tiene subcocientes no nulos en $\mathscr{C}\} \in$ *R-op*. Adicionalmente, por el Lema 2.4.1, $\mathscr{A} \in$ *R-tors*, y entonces es cerrada bajo sumas directas. Ahora, como $\mathscr{C}$ es una clase conatural, se sigue que $\mathscr{C} = \mathscr{A}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$, y entonces $\mathscr{C}$ es cerrada bajo sumas directas.

De lo anterior, para probar que $\mathscr{C}$ es una clase natural, bastará verificar que si N es un R-módulo con la propiedad de que cualquiera de sus submódulos no nulos tiene un submódulo no nulo en $\mathscr{C}$, entonces $N \in \mathscr{C}$; es decir $d(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Sea L un módulo con dicha propiedad. Entonces L contiene una máxima familia independiente de submódulos en $\mathscr{C}$, cuya suma directa denotaremos por U. De donde, $U \in \mathscr{C}$. Puesto que esta familia es máxima independiente, tenemos que U es esencial en L. Entonces $L = E(U) \in nat(U) = conat(U) \subseteq \mathscr{C}$. Por tanto, $\mathscr{C} \in$ *R-nat*. Concluimos que *R-nat* = *R-conat*.

□

Definición 5.1.6. Diremos que R tiene una **descomposición primaria** [9] si para cada $M \in R\text{-}TORS$, M se descompone como $M = \bigoplus_{S\ simple} \mathbb{T}_S(M)$.

Proposición 5.1.7. *Sean R un anillo y τ es un átomo de R-$TORS$. Si $R = \Sigma\{I \in Sub_R(R) : I \in \tau\}$, entonces R es isomorfo a un anillo de matrices de $n \times m$ con entradas en un anillo local.*

Demostración. Como $R = \Sigma\{I \in Sub_R(R) : I \in \tau\}$, tenemos que $|R\text{-}tors| = 2$. Además existe una sucesión de ideales izquierdos $\{0\} = I_0 \subseteq I_1 \subseteq ... \subseteq I_\alpha = R$, α un ordinal, con:

1. El factor I_{i+1}/I_i es simple, para todo ordinal i.
2. Si i es un ordinal limite, entonces $I_i = \bigcup_{j<i} I_j$.

Además, puesto que $|R\text{-}tors| = 2$, entonces los factores son isomorfos, y así $Zoc(R/J(R)) = R/J(R)$. Por lo que $R/J(R)$ es semisimple. Concluimos que R es isomorfo a un anillo de matrices de $n \times m$ con entradas en un anillo local.

□

Observación 5.1.8. Todo anillo que cumpla las hipótesis del teorema anterior tiene una descomposición primaria.

Observación 5.1.9. Si R tiene una descomposición primaria, con $R = \bigoplus_{Ssimple} \mathbb{T}_S(R)$, entonces $\mathbb{T}_S(R)/J(\mathbb{T}_S(R))$ es semisimple y cada $\mathbb{T}_S(R)$ es T-nilpotente.

De estas 2 observaciones tenemos que si R tiene una descomposición primaria, entonces, usando el teorema P de Bass, R es una suma directa finita de anillos matrices con entradas en anillos locales izquierdos y perfectos por ambos lados. Más aún, tenemos el siguiente resultado ([9]):

Teorema 5.1.10. *(R. Bronowitz-M. Teply, 1976)*
Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *Si $\tau \in R\text{-}TORS$, entonces $\mathbb{T}_\tau$ también es una clase libre de torsión.*
2. *R es perfecto izquierdo y derecho tal que $E(S_1, S_2) = \{0\}\}$ para cualesquiera $S_1, S_2 \in R\text{-}Simp$ no isomorfos.*
3. *Toda teoría de torsión es generada por un R-módulo simple; y R tiene una descomposición primaria.*
4. *R es una suma directa finita de anillos matrices con entradas en anillos locales izquierdos y perfectos por ambos lados.*
5. *Toda clase libre de torsión también es una clase de torsión.*

Teorema 5.1.11. *Una condición necesaria y suficiente para que R sea isomorfo a un producto de anillos perfectos derechos, locales izquierdos es que $R\text{-}nat = R\text{-}conat$.*

Demostración. Puesto que $R\text{-}tors \subseteq R\text{-}nat = R\text{-}conat$, entonces τ es cerrada bajo cocientes, $\forall \tau \in R\text{-}tors$. Por lo tanto, R es isomorfo a un producto de anillos perfectos derechos, locales izquierdos. Inversamente, supongamos que R es perfecto derecho, local izquierdo. De donde R es semiartiniano, y entonces todo R-módulo es una extensión esencial de su zoclo. De esta forma, toda clase natural es generada por módulos simples. Ahora, como R es local izquierdo, entonces $|R\text{-}simp| = 1$. Por lo que $R\text{-}nat = \{\{0\}, R\text{-}Mod\}$. Por otro lado, toda clase conatural también es generada por los módulos simples, y así $R\text{-}conat = \{\{0\}, R\text{-}Mod\} = R\text{-}nat$.

□

5.2. Propiedades de los operadores *sext* y *qext*

Proposición 5.2.1. *Sea $M \in R\text{-}Mod$. Si $R\text{-}sext \subseteq R\text{-}qext$, entonces $qext(M) \subseteq sext(M)$*

Demostración. Como $sext(M) \in R\text{-}sext \subseteq R\text{-}qext$, entonces $sext(M)$ es una clase cerrada bajo cocientes y extensiones. Sin embargo, $qext(M)$ es la menor clase en $R\text{-}qext$ que contiene a M. Por tanto $qext(M) \subseteq sext(M)$.

□

Proposición 5.2.2. *Sea $M \in R\text{-}Mod$. Si $R\text{-}qext \subseteq R\text{-}sext$, entonces $sext(M) \subseteq qext(M)$*

Demostración. Puesto $qext(M) \in R\text{-}qext \subseteq R\text{-}sext$, obtenemos que $qext(M) \in R\text{-}sext$. Pero, $sext(M)$ es la menor clase cerrada bajo submódulos y extensiones que contiene a M. Por tanto $sext(M) \subseteq qext(M)$.

□

Con estas dos proposiciones, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.2.3. *Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $R\text{-}sext = R\text{-}qext$
2. $sext(M) = qext(M), \ \forall M \in R\text{-}Mod$

Demostración. Primero, sea $M \in R\text{-}Mod$. Por lo visto anteriormente, como $R\text{-}sext \subseteq R\text{-}qext$, entonces $qext(M) \subseteq sext(M)$; y como $R\text{-}qext \subseteq R\text{-}sext$, entonces $sext(M) \subseteq qext(M)$. Por lo que $sext(M) = qext(M)$.

Invesamente, supongamos que $\mathscr{C}$ es una clase en $R\text{-}sext$, y sea $M \in \mathscr{C}$. Como $sext(M) = qext(M) \subseteq \mathscr{C}$, tenemos que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes. Y así $\mathscr{C} \in R\text{-}qext$.

Ahora, sea $\mathscr{D} \in R\text{-}qext$ y sea $M \in \mathscr{D}$. Entonces $\mathscr{D}$ es cerrada bajo submódulos, ya que $sext(M) = qext(M) \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto, $\mathscr{D} \in R\text{-}sext$. Concluimos que $R\text{-}sext = R\text{-}qext$.

□

Lema 5.2.4. *Sea X un conjunto. Para un módulo $N \in sext(M)$, se tiene que $N^{(X)} \in sext(M^{(X)})$.*

Demostración. Sea $N \neq 0$ un R-módulo de $sext(M)$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $N \in E(L_{\{\leq\}}(M), L_{\{\leq\}}(M))^n$. De esta forma, procediendo por inducción, si $n = 1$, entonces $N \leq M$, y por ende $N^{(X)} \leq M^{(X)}$.

Suponga, inductivamente, que $n > 1$. Entonces existe una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow T \longrightarrow 0$ tal que $K \leq M$ y $T \in E(L_{\{\leq\}}(M), L_{\{\leq\}}(M))^n$. De modo que la sucesión $0 \longrightarrow K^{(X)} \longrightarrow N^{(X)} \longrightarrow T^{(X)} \longrightarrow 0$ es exacta. Ahora, por hipótesis de inducción, $K^{(X)}, T^{(X)} \in sext(M^{(X)})$. Puesto $sext(M^{(X)})$ es cerrada bajo extensiones, $N^{(X)} \in sext(M^{(X)})$.

□

Lema 5.2.5. *Dados X cualquier conjunto y un R-módulo $N \in qext(M)$, se cumple que $N^{(X)} \in qext(M^{(X)})$.*

Demostración. Sea $N \in qext(M)$ no nulo y sea $n \in \mathbb{N}$ el mínimo tal que $N \in E(L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M), L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M))^n$. Por lo que, si $n = 1$, entonces $M \twoheadrightarrow N$. Así, $M^{(X)} \twoheadrightarrow N^{(X)}$.

Supongamos, inductivamente, que $n > 1$. Entonces existen $K \in E(L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M), L_{\{\twoheadrightarrow\}}(M))^n$ y $M \twoheadrightarrow T$ tal que la sucesión $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow T \longrightarrow 0$ es exacta. Además, $0 \longrightarrow K^{(X)} \longrightarrow N^{(X)} \longrightarrow T^{(X)} \longrightarrow 0$ es exacta. Y, por hipótesis de inducción, $K^{(X)}, T^{(X)} \in sext(M^{(X)})$. Y por tanto, $N^{(X)} \in sext(M^{(X)})$.

□

Apartir de estas dos proposiciones, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.2.6. *Dados X un conjunto y M, N dos R-módulos, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si $sext(M) = sext(N)$, entonces $sext(M^{(X)}) = sext(N^{(X)})$*
2. *Si $qext(M) = qext(N)$, entonces $qext(M^{(X)}) = qext(N^{(X)})$*

Observación 5.2.7. Si $S \in R\text{-}Simp$ y $sext(S^{(X)}) = sext(S^{(Y)})$, entonces $|X| = |Y|$.

Demostración. En efecto, como $S^X \in sext(S^{(Y)})$, entonces $S^{(X)} \cong (S^{(Y)})^{(Z)} \cong S^{(Y \times Z)}$, para algún conjunto Z no vacío. De esta forma $|X| = |Y|\,|Z|$, y así $|X| \leq |Y|$. La otra desigualdad es análoga.

□

5.3. *R-sext* y *R-qext*

Teorema 5.3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$sext(R) = sext(R\text{-}Simp)$.*
2. *R es artiniano izquierdo y R contiene una copia de cada módulo simple.*

Demostración. Supongamos (1), por el Corolario 3.1.10, $sext(R)$ es la clase en $R\text{-}sext$ generada por los ideles izquierdos de R. A partir del Ejemplo 5.1.4, $sext(R\text{-}simp)$ consiste de R-módulos semiartinianos finitamente generados. Con estas dos premisas vemos que los ideales izquierdos de R son semiartinianos f.g.; en particular, R es neteriano y semiartiniano. Por lo que R es artiniano.

Ahora, sea S un módulo simple. Entonces $S \in sext(R)$, y por ende, existe el número natural menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $S \in E(L_{\{\leq\}}(R), L_{\{\leq\}}(R))$. Por lo que hay una sucesión exacta $0 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow U \longrightarrow 0$ donde T es un ideal izquierdo no nulo de R. De donde tenemos que $T \cong S$, porque $T \longrightarrow S$ es mono. y S es simple. Por lo que T es la copia buscada.

Inversamente, como R es artiniano, entonces R es neteriano y semiartiniano. De este modo, considerando la serie de Loewy de R, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $S_m(R) = S_{m+1}(R)$, ya que R es neteriano. Puesto que cada $S_n(R)$ es suma de módulos simples, tenemos que $S_n(R) \in sext(R\text{-}Simp)$. Por otro lado, observamos que $Zoc(R/S_m(R)) = S_{m+1}(R)/S_m(R) = \{0\}$; y así $R/S_m(R) = 0$, pues R es semiartiniano. Por ende, $R = S_m(R) \in sext(R\text{-}Simp)$.

Sea $I \leq R$. De manera análoga, tomando la serie de Loewy de I, tenemos que $I \in sext(R\text{-}Simp)$. Entonces $L_{\{\leq\}}(R) \subseteq sext(R\text{-}Simp)$. Como $sext(R)$ es la clase generada por $L_{\{\leq\}}(R) \subseteq sext(R\text{-}Simp)$ en *R-sext*, se cumple que $sext(R) \subseteq sext(R\text{-}Simp)$. Por último, como R contiene una copia de cada módulo simple, concluimos que $sext(R\text{-}Simp) \subseteq sext(R)$.

□

Lema 5.3.2. *Si $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$, entonces R es semiartiniano izquierdo.*

Demostración. Del Ejemplo 5.1.4, vemos que los módulos de $qext(R\text{-}Simp)$ son semiartinianos finitamente generados. De este modo, todo R-módulo f.g. es semiartiniano, porque $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$. Ya que R es f.g., concluimos que R es semiartiniano izquierdo.

□

Teorema 5.3.3. *R es artiniano izquierdo si y sólo si $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$ y R es neteriano izquierdo.*

Demostración. Suponiendo que $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$, por el lema anterior, entonces R es semiartiniano izquierdo. Y como simultáneamente R es neteriano y semiartiniano, entonces R es artiniano izquierdo.

Por otro lado, si R es artiniano, entonces R es neteriano y semiartiniano. Puesto que R es neteriano, la serie zoclo de Loewy se estaciona en una cantidad finita de pasos. Ésto es, hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $S_n(R) = S_{n+1}(R)$; de modo que $Zoc(R/S_n(R)) = S_{n+1}(R)/S_n(R) = \{0\}$. Ahora, como R es semiartiniano, se cumple que $R/S_n(R) = \{0\}$, y por ende $R = S_n(R)$. Lo cual implica que R es suma de ideales simples, con lo que tenemos que $R = S_n(R) \in qext(R\text{-}Simp)$. Por lo que $qext(R) \subseteq qext(R\text{-}Simp)$.

Finalmente, sea S un R-módulo simple. Entonces S es un cociente de R, y por tanto $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$.

□

Lema 5.3.4. *Sea R un anillo. Si toda clase en R-sext es una clase en R-qext, entonces R contiene un copia de cada R-módulo simple.*

Demostración. Puesto que R-$sext \subseteq R$-$qext$, entonces $qext(R) \subseteq sext(R)$ y cada módulo simple S esta en la clase $sext(R) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(L_{\{\leq\}}(R), L_{\{\leq\}}(R))^n$. Sea $n \in \mathbb{N}$ el menor entero positivo tal que $S \in E(L_{\{\leq\}}(R), L_{\{\leq\}}(R))^n$. De este modo, existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow U \longrightarrow 0$ donde $T \in Sub_R(R)$. Por lo que $S \cong T$ y T está contenido en R.

□

Lema 5.3.5. *Si R-$sext \subseteq R$-$qext$, entonces R es neteriano izquierdo.*

Demostración. Por la hipótesis, $Sub_R(R) \subseteq sext(R) \subseteq qext(R) = \{M : M \text{ es f.g.}\}$. Es decir, todo ideal izquierdo de R es finitamente generado. La cual es la definición de que R sea neteriano izquierdo.

□

Proposición 5.3.6. *Si R-$sext \subseteq R$-$qext$, entonces R es isomorfo a un producto finito de anillos locales izquierdos, perfectos derechos.*

Demostración. Sea $\mathbb{F}$ una clase libre de torsión hereditaria. Entonces $\mathbb{F} \in R$-$sext$. Como R-$sext \subseteq R$-$qext$, entonces $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cocientes. Lo cual implica que $\mathbb{F}$ es también una clase de torsión, y por tanto R es isomorfo a un producto finito de anillos locales izquierdos, perfectos derechos.

□

Definición 5.3.7. Sean R, S dos anillos. Diremos que R y S son **Morita-equivalentes** [19] por la izquierda si existen dos funtores $F : R\text{-}Mod \longrightarrow S-Mod$, $G : S\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$ tales que $FG = Id_{S-Mod}$ y $GF = Id_{R-Mod}$.

Observación 5.3.8. Sean R, S dos anillos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. R y S son Morita-equivalentes por la izquierda.

2. R y S son Morita-equivalentes por la derecha.

En dicho caso, diremos solamente que R y S son Morita-equivalentes, y lo denotaremos por $R \approx_M S$.

Definición 5.3.9. Sean R un anillo y $\mathfrak{P}$ una propiedad de módulos. Decimos que $\mathfrak{P}$ es **Morita-invariante** [19] si cada que R cumpla $\mathfrak{P}$, entonces cada anillo $S \approx_M R$ también cumple $\mathfrak{P}$.

Observación 5.3.10. El ser módulo simple izquierdo, ser semisimple izquierdo y ser artiniano izquierdo son propiedades Morita-invariantes. Entonces, bajo la definición dada en este trabajo, el ser local izquierdo es Morita-invariante. Dicho ésto, podemos reemplazar el **ser local iquierdo** con **ser local** en los teoremas de la siguiente sección.

Proposición 5.3.11. *Sea R un anillo tal que R-qext = R-sext. Entonces R es isomorfo a un producto finito de anillos locales izquierdos y artinianos izquierdos.*

Demostración. Dado que R-*sext* $\subseteq$ R-*qext*, entonces $R \cong \prod_{i=1}^{n} R_i$, donde cada R_i es un anillo local izquierdo, perfecto derecho. Además, como R-*qext* $\subseteq$ R-*sext*, R es neteriano, por la Proposición 5.3.5. Ahora, puesto que todo anillos perfecto derecho es semiartiniano izquierdo, entonces R_i es semiartiniano, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. De este modo, $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ es una colección de anillos neterianos y semiartinianos izquierdos. Por lo que cada uno de éstos es artiniano izquierdo.

□

5.4. Anillos cuya $E(R/J(R))$ es finitamente generada

Lema 5.4.1. *Sea R un anillo artiniano izquierdo, local izquierdo. Si $E(R/J(R))$ es finitamente generado, entonces $sext(R) = qext(R)$.*

Demostración. Como R es artiniano, es neteriano y semiartiniano. Entonces todo ideal de R es finitamente generado, y por ende elementos de $qext(R)$, por el Ejemplo 5.1.3. Además, $sext(R)$ es la clase de los módulos cerrada bajo extensiones generada por los ideales de R. De esta forma, $sext(R)$ consiste de R-módulos f.g., y así $sext(R) \subseteq qext(R)$.

Por otro lado, puesto R es artiniano, entonces $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$. Ahora, sea M un R-módulo f.g. Como $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$, existe $S \in R\text{-}Simp$ tal que $qext(M) = qext(S)$. Al ser R un anillo local, S es el único simple en R-*Simp*. Por lo que todo R-módulo semisimple es elemento de $sext(S)$.

Finalmente, considerando la serie zoclo de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S_n(M) = M$, ya que R es neteriano. Y como $S_n(M)$ es suma de simples, vemos que $M \in sext(S)$. Además, por hipótesis tenemos que $E(S)$ es f.g., entonces $E(S) \in qext(R)$. Por lo anterior deducimos que $qext(R) \subseteq sext(S) = qext(S) \subseteq qext(E(S)) \subseteq qext(R)$. Así, $qext(R) = sext(S) \subseteq sext(R)$. Por lo que podemos concluir que $sext(R) = qext(R)$.

□

Lema 5.4.2. *Sea R un anillo artiniano izquierdo, local y sea M un R-módulo que no sea finitamente generado. Si $E(R/Rad(R))$ es finitamente generado, entonces tenemos que $sext(M) = qext(M)$.*

Demostración. Primero, notemos que, como R es artiniano izquierdo, entonces R es perfecto izquierdo, por lo que todo R-módulo tiene cubierta proyectiva; y como R es local, todo R-módulo proyectivo es libre.

Ahora, sea $R^{(X)} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ una cubierta proyectiva de un R-módulo no nulo M. Por otro lado, $M/J(M) \cong S^{(Z)}$, para algún conjunto Z. Además, la cubierta proyectiva de S induce una cubierta proyectiva de $M/J(M)$, $R^{(Z)} \longrightarrow M/J(M) \longrightarrow 0$ Del diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{(X)} \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\ R^{(Z)} \arrow[r, "\eta"] & M/J(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tenemos que $\lambda\pi$ es un epimorfismo superfluo. Entonces $R^{(Z)}$ y $R^{(X)}$ son cubiertas proyectivas de $M/J(M)$. Así, $R^{(X)} \cong R^{(Z)}$. Consecuentemente, $|X| = |Z|$, y también $M, M/J(M) \in qext(R^{(X)})$.

Por otro lado, como R es artiniano izquierdo, tenemos que $qext(R) = qext(S)$, y por ende, $qext(R^{(X)}) = qext(S^{(X)})$. Lo que implica que

$$qext(M) \leq qext(R^{(X)}) = qext(S^{(X)}) = qext(S^{(Z)}) = qext(M/J(M)) \leq qext(M).$$

Por lo que $qext(M) = qext(M/J(M)) = qext(S^{(X)}$. Adicionalmente, del Lema 5.4.1, tenemos que $qext(R^{(X)}) = qext(S^{(X)}) = sext(R^{(X)}) = sext(S^{(X)})$. De modo que

$$qext(M) = qext(M/J(M)) = qext(S^{(X)}) = sext(S^{(X)}) = sext(M/J(M)) \leq sext(M).$$

Por último, sea $N \in Sub_R(M)$. Entonces existe un conjunto Y tal que $P(N) = R^{(Y)}$ y $|Y| \leq |X|$. De esta forma, siguiendo la construcción de arriba, tenemos que $N \in sext(S^{(Y)}) \leq sext(S^{(X)}) = qext(M)$. Adicionalmente, note que $qext(M) = sext(R^{(X)}) \in R\text{-}sext$. Por lo tanto, $sext(M) \leq qext(M)$, ya que el generador $L_{\{\leq\}}(M)$ de $sext(M)$ está contenido en R-*sext* en la clase $qext(M)$. Concluyendo, así, que $sext(M) = qext(M)$.

$\square$

Observación 5.4.3. En la prueba anterior, notamos que en anillos artinianos izquierdos y locales, todo módulo M no finitamente generado, cumple con la igualdad $qext(M) = qext(M/J(M))$.

Observación 5.4.4. Sean R un anillo, $M \in R\text{-}mod$ y $N \in Sub_R(M)$.

1. Si N es esencial en M, entonces $E(N) \cong E(M)$.

2. Si R es neteriano, entonces cápsulas inyectivas conmutan con sumas directas.

Observación 5.4.5. Sean $M, N, K \in R\text{-}Mod$.

1. Si $N \leq M$, entonces $sext(N) \subseteq sext(M)$.

2. Si $K \leq N \leq M$ y $sext(K) = sext(M)$, entonces $sext(K) = sext(N) = sext(M)$.

Demostración. Probemos la primera afirmación. Como $N \leq M$, entonces $Sub_R(N) \subseteq Sub_R(M) \subseteq sext(M)$. Puesto que $sext(N)$ es la menor clase en R-$sext$ que contiene a $Sub_R(N)$, entonces $sext(N) \subseteq sext(M)$. La segunda afirmación se sigue de la primera, pues $sext(K) \subseteq sext(N) \subseteq sext(M) = sext(K)$. Y por ende, $sext(K) = sext(N) = sext(M)$.

□

Lema 5.4.6. *Dados R un anillo artiniano izquierdo, local izquierdo, y M un R-módulo. Si $E(R/J(R))$ es finitamente generado, entonces $sext(M) \cong sext(Zoc(M))$.*

Demostración. Como R es local izquierdo, sea S el único módulo simple en R-Mod. Entonces existe un conjunto Z tal que $Zoc(M) \cong S^{(Z)}$. Ahora, dado que R es artiniano, entonces R es neteriano, semiartiniano y $qext(R) = qext(R\text{-}Simp)$: De esta forma, en vista del lema anterior, tenemos que $Zoc(M)$ es esencial en M. Por ende, $E(M) \cong E(Zoc(M)) \cong E(S^{(Z)}) \cong E(S)^{(Z)}$, ésto último pues R es neteriano. Como $E(R/J(R)) = E(S)$ es finitamente generado, tenemos que $E(S) \in qext(R) = qext(R\text{-}Simp) = qext(S)$. Además, por el Lema 5.4.1, $qext(S) = qext(R) = sext(R) = sext(S)$. Entonces $E(S) \in sext(S)$. De esta manera $E(M) \cong E(S)^{(Z)} \in sext(S^{(Z)})$, y así, $sext(Zoc(M)) \cong sext(S^{(Z)}) \cong sext(E(S)^{(Z)}) \cong sext(M)$. Por lo tanto, $sext(Zoc(M)) = sext(E(M)) = sext(M)$.

□

Lema 5.4.7. *Para R un anillo artiniano izquierdo, local izquierdo y M un R-módulo no finitamente generado. Si $E(R/J(R))$ es finitamente generado, entonces $Zoc(M) \cong M/J(M)$.*

Demostración. Puesto que R es local izquierdo, sea S el único R-módulo simple en R-Mod. Entonces existe un conjunto X tal que $Zoc(M) \cong S^{(X)}$. Además, al R satisfacer las condiciones de ser local y ser artiniano por izquierda, tenemos que $sext(M) = qext(M)$. De la misma manera, tenemos que $R/J(M)$ es semisimple, y por tanto, existe un conjunto Y tal que $M/J(M) \cong S^{(Y)}$. Entonces, por el lema anterior, tenemos que

$$sext(S^{(X)}) = sext(M) = qext(M/J(M)) = qext(S^{(Y)}) = sext(S^{(Y)})$$

De donde, $|X| = |Y|$. Concluyendo que $Zoc(M) \cong M/J(M)$.

□

Teorema 5.4.8. *Suponga que R es un anillo en el que la cápsula inyectiva de cada R-módulo simple es finitamente generado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $sext(M) = qext(M),\ \forall M \in R\text{-}Mod$.
2. $R\text{-}sext = R\text{-}qext$.

3. *R es isomorfo a un producto finito de anillos artinianos izquierdos, locales izquierdos.*

4. *R es isomorfo a un producto finito de anillos locales izquierdos, perfectos izquierdos y derechos tal que $Zoc(M) \cong M/Rad(M)$, para cada R-módulo izquierdo M no finitamente generado*

Demostración. Tanto la equivalencia $1 \Leftrightarrow 2$ como $2 \Rightarrow 3$ fueron discutidas en el Corolario 5.2.3 y en el Lema 5.3.11, respectivamente.

$3 \Rightarrow 4$ Todo anillo artiniano izquierdo es neteriano izquierdo y perfecto por ambos lados. Además, podemos asumir que R es local. Por hipótesis, $E(R/J(R))$ es finitamente generado. Entonces, por el Lema 5.4.7, tenemos que $Zoc(M) \cong M/J(M)$ para cualquier R-módulo que no sea finitamente generado.

$4 \Rightarrow 1$ Supongamos que R es local izquierdo y perfecto por ambos lados. Sea $M \in R$-Mod y sea S el único R-módulo simple. Si M no es finitamente generado, entonces $sext(M) = sext(Zoc(M))$ y $qext(M) = qext(M/J(M))$. Por lo que $sext(M) = sext(Zoc(M)) = sext(M/J(M)) = qext(M/J(M)) = qext(M)$. Ahora, si M es f.g., entonces $Zoc(M)$ y $M/J(M)$ son semisimples f.g.. Concluyendose que $sext(M) = sext(S) = qext(S) = qext(M/J(M)) = qext(M)$.

□

5.5. Ejemplos importantes

Observación 5.5.1. Para R un anillo conmutativo, tenemos que R es un anillo local si y sólo si R tiene un único ideal máximo.

Definición 5.5.2. Un anillo R es un **dominio de ideales principales** (abreviado PID) si todo ideal de R es generado por un solo elemento.

Enunciaremos el siguiente teorema formulado en [4].

Teorema 5.5.3. *Sea R un anillo. R-her$=R$-quot si y sólo si R es un producto finito de anillos artinianos PID.*

Proposición 5.5.4. *Dado un anillo R artiniano conmutativo, las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *Si A es un ideal máximo de R y $B_i = \{r \in E(R/A) : rA^i = \{0\}\}$, entonces cada B_{i+1}/B_i es finitamente generado.*

2. *Si A es un ideal máximo de R, entonces R/A es f.g.*

3. *La clase de R-módulos es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. 1. Sea $\{I_\alpha\}_\alpha$ una familia bien ordenada estrictamente creciente en B_{i+1}/B_i tales que $\Sigma_{\alpha\in\mathbb{N}} I_\alpha = B_{i+1}/B_i$, $I_0 = \{0\}$ y donde cada I_α es de la forma $\Sigma_{j\leq\alpha} r_j B_{i+1}/B_i$. Entonces tenemos la siguiente cadena: $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ....$ Además, puesto que R es artiniano, por el teorema de Hopkins-Levitzki, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k = I_{k+r}, \forall r \in \mathbb{N}$. Entonces $B_{i+1}/B_i = \Sigma_{j=1}^{k} r_j B_{i+1}/B_i$. Por lo que B_{i+1}/B_i es f.g.□

2. Supongamos que la cadena $\{B_{i+1}/B_i\}_i$ no continene 2 ideales iguales. Como R es artiniano, existe una cantidad finita de éstos. Entonces $E(R/A)$ queda determinado por la familia $\{B_{i+i}/B_i\}$, y por tanto $E(R/A)$ es finitamente generado.

3. Este inciso se sigue de los anteriores. En efecto, si M es f.g., como R es conmutativo, existen $A_1, ...A_n$ ideales máximos de R tales que $M = \Sigma_{i=1}^{n} R/A_i$. Por el inciso anterior, cada R/A_i es f.g., y por tanto M también lo es.

□

A continuación damos un ejemplo de un anillo donde *R-nat* = *R-conat*, pero donde *R-her* $\neq$ *R-quot*.

Ejemplo 5.5.5. *Sea k un campo. Consideremos $A = k[x, y]$ y $R = A/(x^2, y^2)$.*

Notemos que $R = \{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + (x^2, y^2) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in k\}$ es una álgebra conmutativa sobre k de dimensión 4.

Tenemos que $Sub_R(R) = \{0, R\overline{xy}, R\overline{x}, R\overline{y}, R\overline{x} + R\overline{y}, R\}$, por el teorema de la correspondencia de módulos. Entonces R es local. Más aún, $Zoc(R) = R\overline{xy}$ y $J(R) = R\overline{x}+R\overline{y}$.

Ahora, por el teorema de Wedderburn para álgebras finito-dimensionales, deducimos que R es isomorfo a $M_1^4(k)$ o a $M_2(k)$. Sin embargo, $Sub_k(R)$ y $Sub_k(M_2(k))$ no son isomorfas. Entonces $R \cong M_1^4(k)$. Además, $M_1(k)$ es artiniano, pues k lo es y la propiedad ***ser artiniano*** *es Morita-invariante. Y por tanto, $M_1(k)$ es perfecto. De este modo, R es isomorfo a un producto de anillos locales perfectos. Y así, R-nat = R-conat.*

Por otro lado, visto como anillo, R es QF (un anillo donde todo módulo inyectivo es proyectivo y todo módulo proyectivo) y $R/Zoc(R)$ no lo es. Además, $R\overline{x} + R\overline{y}$ no es generado por un solo elemento. Entonces R no es PID. Concluimos, en vista del teorema anterior, que R-her $\neq$ R-quot.

Ahora, veamos que R-sext = R-qext y que R-her = R-quot son dos condiciones que no son equivalentes.

Ejemplo 5.5.6. *Veamos al anillo R definido en el ejemplo anteior. Éste satisface que la clase de R-módulos finitamente generados es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Además, R es isomorfo a un producto finito de anillos locales artinianos. Entonces por el Teorema 5.4.8, tenemos que R-sext = R-qext, pero R-her $\neq$ R-quot. Más aún, cualquier anillo artiniano conmutativo que no sea PID, cumple con estas mismas relaciones* *reticulares.*

Por último, veremos que R-nat = R-conat y R-sext = R-qext no son equivalentes. Para este fin necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 5.5.7. Sea R un anillo. Un **R-R-bimódulo** [24] es un grupo abeliano M tal que $M \in R\text{-}Mod$, $M \in Mod\text{-}R$ y tal que para cualesquiera $r, t \in R$, $m \in M$ se cumple que $(rm)t = r(mt)$.

Definición 5.5.8. (Introducida por M.Nagata, 1962)
Sea R un anillo y M un R-R-bimódulo. Definimos la **extensión trivial** de R y M [7] como el grupo abeliano $R \oplus M$ dotado de la multiplicación $(r, t)(m, n) = (rt, rn + tm)$. En tal caso, la extensión trivial de R y M se denotará por $R \ltimes M$.

Observación 5.5.9. Podemos identificar a los elementos (r, m) de $R \ltimes M$ como $(r, m) = \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$. De tal forma que podemos ver a $R \ltimes M$ como los siguientes 2 conjuntos: $\{(r, m) : r \in R, m \in M\} = \{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M\}$.

Observación 5.5.10. La extensión trivial $R \ltimes M$ es un anillo asosciativo con unidad, donde $1_{R\ltimes M} = (1, 0)$

Ejemplo 5.5.11. *Tomemos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Y consideremos la extensión trivial $R = \mathbb{Q} \ltimes \mathbb{R}$, el cual es un anillo conmutativo.*

Entonces $Sub_R(R) = \{(0, U) : U$ es $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial de $\mathbb{R}\} \cup \{R\}$. De esta forma, $(0, \mathbb{Q}\pi) \subseteq (0, \mathbb{Q}\pi^2) \subseteq ... \subseteq (0, \mathbb{Q}\pi^n) \subseteq ...$ es una cadena infinita ascendente, y por ende R no es neteriano. Ahora, por el teorema de Hopkins-Levitzki, R no es artiniano.

Además, como $dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \infty$, entonces R no es isomorfo a un producto finito de anillos. Entonces, bajo estas 3 condiciones, concluimos que R-sext $\neq$ R-qext.

Ahora, notemos que $(0, \mathbb{R})$ es el único ideal máximo de R. Lo cual implica que R es local. Así $J(R) = (0, \mathbb{R})$, y entonces $R/J(R)$ es simple. Además si $(0, a) \in (0, \mathbb{R})$, entonces $(0, a)^2 = (0a, 0a + 0a) = (0, 0)$. Por lo que R es semiprimario, y por tanto perfecto. Con lo que concluimos que R es un anillo tal que R-nat = R-conat, pero R-sext $\neq$ R-qext.

Cabe notar que en este ejemplo podemos sustituir a $\mathbb{Q}$ por cualquier campo k y a $\mathbb{R}$ por cualquier k-espacio vectorial de dimensión infinita.

Bibliografía

[1] *Alvarado García A., Rincón Mejía H.A., Ríos Montes J. (2010) On Big Lattices of Classes of R-modules Defined by Closure Properties. In: Van Huynh D., López-Permouth S.R. (eds) Advances in Ring Theory. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel.*

[2] *Toma Albu, Gary F. Birkenmeier, Ali Erdogan, Adnan Tercan; Ring and Module Theory. Trends in Mathematics, Birkhäuser. Springer Basel AG. Primera edición. 2010. Toma Albu; A Seventy Years Jubilee: The Hopkins-Levitzki Theorem; 1-26.*

[3] *Alvarado García A., Rincón Mejía H. A. y Ríos Montes J., On the Lattices of Natural and Conatural Classes in R-mod, Comm. in Algebra, 29(2), 541-556 (2001).*

[4] *Alvarado García A., Rincón-Mejía H. A. y Ríos-Montes J.; On Some Lattices of Modules Classes. Journal of Algebra and its Applications. 2006, 105-117.*

[5] *Alvarado García A., Cejudo Castilla C., Rincón Mejía H.A., Vilchis Montalvo I.F.; On Classes of Modules Closed under Injective Hulls and Artinian Principal Ideal Rings. International Electronic Journal of Algebra, Vol. 15. (2014) 1-12.*

[6] *Anderson, Frank W. y Fuller, Kent; Rings and Categories of Modules. Segunda ed. Springer-Verlag. New York. 1992.*

[7] *D.D. Anderson, Driss Bennis, Brahim Fahid, Abdulaziz Shaiea; On n-Trivial Extensions of Rings.* $10{,}13140/RG{,}2{,}1{,}2054{,}9520$. *2016.*

[8] *Bican, L., Kepka, T. y Nemec, P.; Rings, Modules and Preradicals. Décima impresión. Marcel Dekker, Inc. Basel, New York. 1982.*

[9] *Bronowitz, R., Teply, M.; Torsion theories of simple type. J. Pure Appl. Algebra 3 (1973), 329-336.*

[10] *Dauns, J., Zhou, Y.; Classes of Modules. Pure and Applied Mathematics (Boca Ratón), 281. Chapman-Hall/CRC, Boca Ratón, FL., 2006.*

[11] *Dlab, V.; On a class of perfect rings. Can. J. Math. 22 (1970) 822-826.*

[12] *Faith, C.; Algebra II, Ring Theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 191. (Springer-Verlag, 1976).*

[13] *Fernández Alonso González, R.; (1998) Morfismos entre las retículas R-TORS y R- tors y algunas cosideraciones sobre R-TORS (Tesis doctoral). Universidad Nacional Autónoma de México. México, D.F.*

[14] *Golan, Jonathan S. y Head, Tom; Modules and the Structure of Rings. Décima impresón. Marcel Dekker, Inc. New York. 1991.*

[15] *Golan, Jonathan S.; Torsion theories. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 29. Longman Scientific and Technical. Harlow, John Wiley and Sons, Inc. New York. 1986*

[16] *Jech, Thomas; Set Theory. Third Millenium ed., rev. and expanded. Springer. Berlín. 2002.*

[17] *Kaplansky, I.; Proyective modules, Ann. of Math 68.(1958) 372-377*

[18] *Kasch, Friedrich; Modules and Rings. Academic Press. Londres. 1982.*

[19] *Lam, Tsit-Yuen; Lectures on Modules and Rings. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag. New York. 1998.*

[20] *Murfet, Daniel; Foundations for Category Theory. Lecture Notes (2006), 1-9.*

[21] *Raggi, F., Ríos Montes, J., Rincón Mejía, H.A., Fernández-Alonso, R. y Signoret, C.; The Lattice Structure of Preradicals; Comm. in Algebra, 30(3); pg. 1533-1544 (2002).*

[22] *Raggi, F., Ríos Montes, J., Rincón Mejía, H.A., Fernández-Alonso, R. y Signoret, C.; The lattice structure of preradicals III: operators; Journal of Pure and Applied Algebra, 190(1-3); pg. 251-265 (2004).*

[23] *Rincón Mejía, H. A., and Sánchez Hernández, J. P.; On Uniformity in Lattices of Classes of Modules Defined by Closure Properties. Internatinal Electronic Journal of Algebra, Vol. 18 (2015), 92-106.*

[24] *Stenström, Bo; Rings of Quotients. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1975.*

[25] Nicholson, W.K.; A Short Proof of the Wedderburn-Artin Theorem. New Zeland journal of mathematics, Vol. 22 (1993), 83-86.

[26] Wisbauer, Robert; Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach Science Publishers, Reading. Düsseldorf. 1991.

[27] Zhou, Y.; Decomposing modules into direct sums of submodules with types. J. Pure Appl. Algebra 138 (1999), no. 1, 83-97