



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUÍDOS

ANÁLISIS DE UN FLUJO ELECTROSMÓTICO DE UN FLUIDO NEWTONIANO  
CON PROPIEDADES DEPENDIENTES DE LA TEMPERATURA Y CAMPO  
ELÉCTRICO.

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

PRESENTA

**Jorge Alberto Marroquín Desentis**

TUTOR PRINCIPAL

DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ, E.S.I.M.E. AZCAPOTZALCO, I.P.N.

COMITÉ TUTOR

DR. JAIME GONZÁLO CERVANTES DE GORTARI, FACULTAD DE INGENIERÍA, U.N.A.M.

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE, FACULTAD DE INGENIERÍA, U.N.A.M.

DR. LORENZO ALBERTO MARTÍNEZ SUÁSTEGUI, E.S.I.M.E. AZCAPOTZALCO, I.P.N.

DR. JOSÉ CARLOS ARCOS HERNÁNDEZ, E.S.I.M.E. AZCAPOTZALCO, I.P.N.

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, Septiembre 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**Presidente:** DR. JAIME GONZÁLO CERVANTES DE GORTARI

**Secretario:** DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

**1er. Vocal:** DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ

**2do. Vocal:** DR. LORENZO ALBERTO MARTÍNEZ SUÁSTEGUI

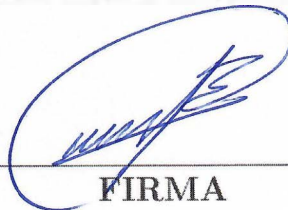
**3er. Vocal:** DR. JOSÉ CARLOS ARCOS HERNÁNDEZ

**Lugar o lugares donde se realizó la tesis:**

- FACULTAD DE INGENIERÍA. U.N.A.M.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ



A handwritten signature in blue ink, consisting of a large, stylized initial 'E' followed by a series of loops and strokes, positioned above a horizontal line.

**FIRMA**

## Agradecimientos

Al Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez por sus asesorías, su paciencia y sus consejos que me han permitido concluir de manera satisfactoria mis estudios de doctorado.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle por toda su disponibilidad, sus observaciones, consejos y tiempo que ha dedicado y continúa dedicando a nosotros, sus alumnos.

Al Dr. Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari por todo su tiempo y apoyo académico durante el desarrollo de la presente investigación.

Al Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui por su acompañamiento honesto y motivante en todo el proceso de mis estudios de posgrado.

Al Dr. José Carlos Arcos Hernández por la dedicación de su tiempo y apoyo en durante la temporada incierta por la que atraviesa el país y sus ciudadanos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de realizar mis estudios de doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para mis estudios de doctorado.

Al Fondo Sectorial de Investigación para la Educación SEP-CONACYT, por el apoyo recibido para la realización de este trabajo a través del la beca para la investigación No.220900.

Al SIP-IPN por el apoyo recibido a través de la beca para la investigación 20201443.

## Dedicatoria

A mis tíos Miguel Ángel y Maribel, y a mis primas Mariana y Gabriela.

A mis tíos Marcela y Fernando Cadiz y Joel Marroquín, por su invaluable cariño, tiempo, y apoyo.

A mis primos: Marisol, Álvar, Mauricio, Ruy y Edgar por su compañía.

A mis alumnos: Mayte, Benjamín y Daniela.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Efectos electrocinéticos	6
1.2.1. Flujos electroosmóticos	7
1.2.2. Doble capa eléctrica (EDL)	7
1.2.3. Longitud de Debye	8
1.2.4. Potencial $\zeta$	8
1.2.5. Velocidad de Helmholtz-Smoluchowski	9
1.2.6. Distribución de Boltzmann	9
<b>2. Marco teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Ecuaciones de gobierno	11
2.1.1. Continuidad	11
2.1.2. Cantidad de movimiento	11
2.1.3. Conservación de la energía	11
2.2. Electrohidrodinámica	12
2.2.1. Ley de Gauss	12
2.2.2. Potencial eléctrico	12
2.2.3. Modelo de Gouy-Chapman de la doble capa eléctrica	13
2.2.4. Aproximación de Debye-Hückel	14
2.2.5. Teoría de la lubricación	14
<b>3. Efecto viscoeléctrico en un flujo electroosmótico en un microcapilar</b>	<b>16</b>
3.1. Descripción del problema	16
3.2. Planteamiento del problema	16
3.3. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno	17
3.4. Solución asintótica para el potencial eléctrico en el límite $\frac{1}{\kappa} \ll 1$	18
3.5. Solución asintótica para la velocidad en el límite $\frac{1}{\kappa} \ll 1$	20
<b>4. Resultados</b>	<b>24</b>
4.1. Efecto viscoeléctrico caso isotérmico	24
<b>5. Calentamiento Joule y efecto viscoeléctrico en un flujo electroosmótico</b>	<b>28</b>
5.1. Descripción del problema	28
5.2. Planteamiento del problema	30
5.3. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno	32
5.4. Expansión asintótica en $\beta \rightarrow 0$	33
5.5. Expansión asintótica en $\Gamma \rightarrow 0$	36
5.6. Metodología de solución	37
<b>6. Resultados</b>	<b>44</b>
6.1. Calentamiento Joule y efecto viscoeléctrico en un flujo electroosmótico	44
<b>7. Conclusiones</b>	<b>52</b>

<b>Referencias</b>	<b>55</b>
<b>Apéndices</b>	<b>60</b>
<b>A. Ecuación de Grahame</b>	<b>60</b>

## Índice de figuras

1.	Diagrama esquemático del fenómeno de electroósmosis. . . . .	3
2.	Perfil de velocidad $u$ bajo un campo eléctrico tangencial a una superficie cargada. . . . .	5
3.	Diagrama esquemático de la doble capa eléctrica. . . . .	8
4.	EDL. a) modelo de Helmholtz, b) modelo de Gouy-Chapman. . . . .	9
5.	Diagrama del modelo físico a tratar. . . . .	17
6.	Sol. asintótica, Ec.(86) y sol. numérica de la Ec.(38) para $\bar{u}$ con $\bar{\kappa} = 100$ . . . . .	25
7.	Efecto del potencial $\zeta$ en el perfil de velocidad adimensional $\bar{u}$ con $\bar{\kappa} = 100$ . . . . .	25
8.	Efecto de $\bar{\kappa}$ y $\bar{f}$ en el flujo volumétrico para $\bar{\zeta} = 4$ . . . . .	27
9.	Efecto de $\bar{\zeta}$ y $\bar{f}$ en el flujo volumétrico para $\bar{\kappa} = 100$ . . . . .	27
10.	Efecto de $\bar{\zeta}$ y $\bar{f}$ en el flujo volumétrico para $\bar{\kappa} = 50$ . . . . .	28
11.	Diagrama del modelo físico a tratar. . . . .	30
12.	Solución del campo de presión inducida. . . . .	44
13.	Presión inducida para distintos $Pe$ y valores fijos de $\bar{f}$ , $\bar{\zeta}$ y $\Gamma$ . . . . .	45
14.	Presión inducida para distintos valores de $\bar{f}$ . . . . .	46
15.	Presión inducida para distintos valores de $\bar{\zeta}$ . . . . .	47
16.	Efecto Joule y viscoeléctrico en el campo de velocidades $Pe = 0,01$ y $\bar{\kappa} = 30$ . . . . .	48
17.	Efecto Joule y viscoeléctrico en el campo de velocidades $Pe = 0,05$ y $\bar{\kappa} = 30$ . . . . .	48
18.	Efecto Joule y viscoeléctrico en el campo de velocidades $Pe = 0,1$ y $\bar{\kappa} = 30$ . . . . .	49
19.	Campo de velocidad bajo efectos Joule y viscoeléctrico para distintos $\bar{\zeta}$ y $\chi = 0,1$ . . . . .	50
20.	Campo de velocidad bajo efectos Joule y viscoeléctrico para distintos $\bar{\zeta}$ y $\chi = 0,7$ . . . . .	50
21.	Efecto de $\bar{\zeta}$ y $\bar{f}$ en el flujo volumétrico para $\bar{\kappa} = 30$ y $\chi = 0,3, 0,7$ . . . . .	51
22.	Efecto de $\bar{\zeta}$ y $\bar{f}$ en el flujo volumétrico para $\bar{\kappa} = 30$ y $\chi = 0,3, 0,7$ . . . . .	51



## Índice de cuadros

1. Valor de los parámetros utilizados basados en literatura especializada. . . . . 24
2. Valores físicos utilizados para estimar el valor de los parámetros adimensionales. 44

## Nomenclatura

$a$	constante de sensibilidad para la conductividad eléctrica, $K^{-1}$
$C_p$	calor específico, $J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
$E$	campo eléctrico dentro de la doble capa eléctrica, $V\ m^{-1}$
$E_i$	campo eléctrico interno, $V\ m^{-1}$
$E_0$	campo eléctrico externo, $V\ m^{-1}$
$e$	carga elemental sobre un electrón, con el valor aproximado de $1,6021 \times 10^{-19}\ C$
$F$	constante de Faraday, con el valor de $96485,3329\ C\ mol^{-1}$
$f$	constante viscoeléctrica, $m^2\ V^{-2}$
$f^*$	constante viscoeléctrica adimensional
$\bar{f}$	parámetro adimensional, $\bar{f} = f * \bar{\kappa}^2$
$H$	mitad de la altura del microcapilar, $m$
$k_B$	constante de Boltzmann, $J\ K^{-1}$
$k_f$	conductividad térmica, $W\ m^{-1}K^{-1}$
$L$	longitud del microcapilar, $m$
$N_A$	constante de Avogadro, con el valor de $6,02214076 \times 10^{23}\ mol^{-1}$
$n_i$	número de concentración de iones, $m^{-3}$
$n_{\bullet}$	número de concentración iónica en la solución, $m^{-3}$
$\bar{P}$	presión adimensional
$P$	presión, $kg\ m\ s^{-2}$
$Pe$	número de Péclet
$R$	radio del microcapilar, $m$
$Re$	número de Reynolds
$r$	coordenada radial, $m$
$\bar{r}$	coordenada radial adimensional
$T$	temperatura, $K$
$t$	tiempo, $s$
$u$	velocidad axial del fluido, $m\ s^{-1}$
$\bar{u}$	velocidad axial adimensional
$U_{HS}$	velocidad de Helmholtz-Smoluchowski, $m\ s^{-1}$
$v$	velocidad transversal del fluido, $m\ s^{-1}$
$\bar{v}$	velocidad transversal adimensional
$c_h$	potencial químico
$x$	coordenada axial
$y$	coordenada transversal
$Y$	coordenada transversal adimensional
$z'$	valencia

## Símbolos griegos

$\alpha$	parámetro, $\alpha = \Delta T_c / T_0$
$\beta$	parámetro, $\beta = H / L$
$\epsilon$	permitividad eléctrica, $C V^{-1} m^{-1}$
$\gamma$	coordenada transversal adimensional de escalamiento
$\chi$	coordenada axial adimensional
$\Gamma$	parámetro, $\Gamma = a \Delta T_c$
$\eta$	viscosidad dinámica dentro de la doble capa eléctrica, $kg m^{-1} s^{-1}$
$\eta_0$	viscosidad dinámica de referencia, $kg m^{-1} s^{-1}$
$\kappa$	inverso de la longitud de Debye, $m^{-1}$
$\bar{\kappa}$	inverso de la longitud de Debye adimensional
$\lambda$	parámetro, $\lambda = h_{eq} H / k_f$
$\lambda_D$	longitud de Debye, m
$\rho$	densidad, $kg m^{-3}$
$\rho_e$	densidad de carga, $C m^{-3}$
$\sigma$	conductividad eléctrica, $S m^{-1}$
$\sigma_0$	conductividad eléctrica a temperatura ambiente, $S m^{-1}$
$\bar{\sigma}$	conductividad eléctrica adimensional
$\varsigma$	parámetro $\varsigma = \phi_c / \psi_c$
$\psi$	potencial eléctrico dentro de la doble capa eléctrica, V
$\bar{\psi}$	potencial eléctrico adimensional
$\phi$	potencial eléctrico externo, V
$\bar{\phi}$	potencial eléctrico adimensional
$\tau_{xy}$	esfuerzo cortante, $N m^{-2}$
$\bar{\tau}_{xy}$	esfuerzo cortante adimensional
$\theta$	temperatura adimensional
$\zeta$	potencial zeta, V
$\bar{\zeta}$	potencial zeta adimensional

## Subíndices

- 0 referencia, primer orden
- 1 orden uno
- c* característico
- i* interno, dentro de la doble capa eléctrica
- o* externo, fuera de la doble capa eléctrica

## Abstract

Electroosmotic flow, under the Debye-Hückel approximation, has been widely analyzed in the specialized literature. This is a severe restriction in practice, where zeta potentials as high as 100-200 mV are encountered frequently. Under this condition, the variation of the viscosity with the electric field in the electric double layer (EDL), known as the viscoelectric effect, can lead to a considerable variation in comparison to the Helmholtz-Smoluchowski equation for the electroosmotic velocity. The objective of the first part of this thesis is to analyze the electroosmotic flow in a cylindrical capillary at high zeta potentials in the thin EDL approximation, taking into account the viscoelectric effect. In order to obtain the potential distribution, the Poisson-Boltzmann equation was solved by using the matched asymptotic expansions method, and then, by applying the same technique, the flow field was determined from the momentum equation by considering that the viscosity of the electrolyte changes according to the relationship  $\eta = \eta_0 [1 + fE^2]$ , where  $\eta_0$  is the viscosity evaluated in absence of an electric field,  $f$  is the viscoelectric constant and  $E$  is the intrinsic electric field in direction transversal to the EDL. For asserting correctness of the asymptotic solution, this result was compared against a numerical solution, and a very good agreement between them was found. The results show that the viscoelectric effect has a noticeable influence by reducing the electroosmotic flow velocity in about 10% in comparison to the standard Helmholtz-Smoluchowski velocity.

In the second part of this thesis an electroosmotic flow of a Newtonian fluid in a slit microcapillary with Joule heating and viscoelectric effect is theoretically analyzed. The mathematical model consists of the continuity equation, the modified Cauchy equation, the energy equation, the Poisson-Boltzmann equation and the electrical current continuity equation where the viscosity is a function of the temperature and induced electric field parameters and the viscoelectric constant of the working fluid, while the electrical conductivity is considered as a function of temperature. The dimensionless equations are simplified using the lubrication theory and solved by means of the boundary layer theory to obtain an asymptotic solution. The second order of the momentum equation can not be solved by analytical methods so a semi-analytical solution was proposed. The results show the competence between the viscoelectric effect and Joule heating in the flow field and their influence on the induced pressure field, with the Joule heating causing an increase in the fluid velocity which causes an induced pressure field that opposes the flow to keep mass continuity while the viscoelectric effect reduces the flow velocity and thus also diminishes the magnitude of the induced pressure field. Also, while the Joule heating effect modifies the physical properties of the fluid along the microcapillary, the viscoelectric effect not only diminishes the magnitude of these changes but also promotes a back flow.

## Resumen

El flujo electroosmótico bajo la aproximación de Debye-Hückel ha sido ampliamente analizado en la literatura especializada. Esta aproximación es una restricción severa en la práctica dado que potenciales zeta de 100-200 mV se encuentran de manera frecuente. Bajo estas condiciones la viscosidad sufre una variación en función del campo eléctrico en la doble capa eléctrica (EDL), esto se conoce como el efecto viscoeléctrico. Esto puede llevar a una diferencia considerable en comparación con la solución presentada por la ecuación de Helmholtz-Smoluchowski para la velocidad electroosmótica. El objetivo de la primer parte de esta tesis es el analizar el flujo electroosmótico en un capilar cilíndrico a altos potenciales zeta considerando el efecto viscoeléctrico. Para obtener la distribución del potencial se resolvió la ecuación de Poisson-Boltzmann utilizando el método de expansiones asintóticas y del mismo modo se determinó el campo de flujo de la ecuación de cantidad de movimiento considerando el cambio en la viscosidad de acuerdo a la relación  $\eta = \eta_0 [1 + fE^2]$ , donde  $\eta_0$  es la viscosidad evaluada en ausencia de un campo eléctrico,  $f$  es la constante viscoeléctrica del fluido de trabajo y  $E$  es el campo eléctrico en dirección transversal a la EDL. La solución obtenida fue comparada con una solución numérica y se obtuvo una fuerte reciprocidad entre ambas soluciones. Los resultados muestran que el efecto viscoeléctrico tiene una notoria influencia ya que reduce la velocidad electroosmótica del flujo cerca de un 10% en comparación con la velocidad estándar de Helmholtz-Smoluchowski.

En la segunda parte de este estudio se analiza teóricamente un flujo electroosmótico de un fluido Newtoniano en un microcapilar de placas planas uniforme sobre el que se presenta calentamiento Joule y el efecto viscoeléctrico en el que se considera que la viscosidad del fluido y la constante viscoeléctrica son funciones dependientes de la temperatura. El modelo matemático que permite determinar la hidrodinámica y la distribución de temperaturas está formado por la ecuación de continuidad, la ecuación modificada de Cauchy, la ecuación de Poisson-Boltzmann, la ecuación de energía y la ecuación de continuidad de corriente. En este modelo matemático se consideró a la viscosidad del fluido y la constante viscoeléctrica como funciones dependientes de la temperatura. Las ecuaciones adimensionales se simplifican utilizando la teoría de la lubricación y son resueltas por medio de la teoría de capa límite y la técnica de expansión asintótica regular. El segundo orden de la ecuación de cantidad de movimiento no puede ser resuelto por medio analítico por lo que se propuso una solución semi-analítica. Los resultados muestran que existe una competencia entre el fenómeno viscoeléctrico y el calentamiento Joule afectando el campo de presión inducida y consecuentemente el campo de flujo. El calentamiento Joule causa un incremento de la velocidad de flujo que a su vez induce un campo de presión que se opone al flujo para mantener la continuidad de masa mientras que el efecto viscoeléctrico reduce la velocidad del flujo con lo que a su vez disminuye la magnitud del campo de presión inducida. Además, se observa que el calentamiento Joule modifica las propiedades físicas del fluido a lo largo del microcanal. Adicionalmente, el efecto viscoeléctrico atenúa la magnitud de estos cambios y promueve un flujo de retorno.

# 1. Introducción

## 1.1. Antecedentes

El desarrollo creciente de tecnologías de microfabricación ha permitido una variedad de sistemas de microfluidos que consisten en bombas, válvulas y mezcladores que son utilizados en el campo de la medicina, farmacéutico y en aplicaciones de monitoreo ambiental [1,2]. Algunos ejemplos de estas aplicaciones son la administración de medicamento, análisis de ADN, implementación de sistemas de secuenciación de ADN y sensores de detección de agentes químicos biológicos o explosivos en microchips [3,4]. La capacidad de miniaturizar, automatizar y paralelizar procesos de análisis de fluidos representan una gran ventaja dado que reduce el tiempo y el costo por el acortamiento de tiempos de residencia, reacción y respuesta [5]. La capacidad de estos dispositivos miniaturizados de poder dar un diagnóstico sin la necesidad de un equipo de laboratorio o personal especializado pueden ser sumamente prácticos en aplicaciones médicas y ambientalistas. Estos dispositivos requieren de una integración total de sus unidades de recolección, separación y detección con sus elementos de control de flujo, bombeo y los componentes electrónicos necesarios dentro de un sólo microchip, los cuáles se encuentran unidos por microcapilares, estos últimos cuentan con longitudes características que se encuentran en el rango entre 1 a  $10^2 \mu\text{m}$ . Con los presentes avances en la tecnología de micro y nanofabricación, es posible transportar fluidos con el uso de microcomponentes como microválvulas y microbombas. Esta micromaquinaria, la cuál es conocida como sistemas micro-electro-mecánicos (MEMS, por sus siglas en inglés) [6], cuenta con dificultades para su aplicación dado que dependen de componentes móviles y mecanismos en escala micro que son vulnerables a defectos de fabricación y a falla por fatiga, incrementando su costo. Dadas estas dificultades se tuvieron que encontrar alternativas para controlar el flujo de un fluido en escalas micrométricas sin necesidad de utilizar partes móviles. Esta necesidad se cubrió en parte con la utilización de los fenómenos electrocinéticos. La electrocinética concierne la aplicación de campos eléctricos que producen una fuerza electrostática en superficies polarizadas de manera tal que se induce el movimiento de un fluido o de partículas suspendidas en un fluido. Se propuso a dichos fenómenos como la manera más eficiente de transportar fluidos a escalas micrométricas ya que cuentan con las ventajas de la facilidad de fabricación, la ausencia de partes móviles y por lo tanto no sufren desgaste mecánico y su confiabilidad de desempeño aumenta. Añadiendo a esto, la utilización de electrodos permiten un control mucho más sencillo y preciso en el desplazamiento del fluido [3, 7].

La electroósmosis, fenómeno que se muestra en la Fig. 1, puede utilizarse para el bombeo de un fluido y el control del flujo con el uso de campos eléctricos, eliminando así la necesidad de utilizar bombas mecánicas o válvulas con componentes móviles. Una característica importante que presentan estos flujos es que poseen un perfil de velocidad el cuál es uniforme a lo largo de todo el microcanal [8]. La primera expresión que describe estos perfiles de velocidad electroosmótica fue obtenida por Smoluchowski en 1903 [9] y sería 20 años después cuando Debye y Hückel determinaron la distribución de iones a bajos potenciales eléctricos utilizando la aproximación de Boltzmann [10], esto llevo al desarrollo de soluciones analíticas para flujos electroosmóticos en canales de placas planas y circulares [11–14]. Algunas de las características principales de los flujos electroosmóticos, por ejemplo la uniformidad del perfil de velocidad y la baja dispersión de Taylor, pueden verse afectadas por diversos factores tales como: la variación de la viscosidad en el fluido de trabajo por efecto del calentamiento Joule, superficies con potenciales no unifor-

mes, cambios en la geometría del microcanal y gradientes en la conductividad. La perturbación de este tipo de flujos se ha vuelto un problema fundamental de gran interés en la mecánica de fluidos [15]. Estas variaciones en las propiedades físicas del electrolito pueden conducir a la presencia de inestabilidades electrocinéticas tales como: superficies con potenciales eléctricos no uniformes a lo largo del microcanal, soluciones electrolíticas no uniformes originadas por la existencia de gradientes de concentración de especies iónicas y la variación de las propiedades físicas del electrolito por efecto del calentamiento Joule. Este último surge con la imposición de un campo eléctrico a través de fluidos conductores, provocando no solo el calentamiento del electrolito sino también la aparición de gradientes de temperatura en las direcciones transversal y axial del microcapilar. La década pasada se presentaron en este campo soluciones para flujos electroosmóticos en capilares de placas planas y circulares considerando los efectos de la disipación viscosa para altos y bajos potenciales zeta [16, 17]. Chakraborty y Chen [18, 19] obtuvieron soluciones analíticas para el número de Nusselt para un flujo en microtubos y canales de placas planas bajo la acción combinada de fuerzas electroosmóticas y gradientes de presión impuestos. La importancia de los gradientes de temperatura que se presentan en este tipo de flujos se vio reflejada en trabajos como los desarrollados por Xuan y Tang [20–22] en el que demostraron que la magnitud de estos gradientes puede ser lo suficientemente elevada como para afectar las propiedades físicas del electrolito; estos cambios ocasionarán por tanto modificaciones en el campo de flujo electroosmótico y ponen en riesgo de degradación a las muestras transportadas. En trabajos como los presentados por Jones [23], Knox [24, 25] y Bosse [26] se ha demostrado que los efectos del calentamiento Joule pueden provocar una disminución en la resolución del análisis llevado a cabo en la muestra o en la pérdida de la misma, además de la aparición de burbujas de gas dentro del microcanal. En cuestión de la hidrodinámica del flujo han sido los autores Xuan y Li [27] quienes obtuvieron una expresión analítica para flujos electroosmóticos, aunque en principio esta solución considera solamente el perfil de temperatura radial en un microcapilar producido por la aparición del calentamiento Joule. Con esto se pudo demostrar que el perfil de velocidad electroosmótica mantiene su forma de flujo tapón excepto en la región correspondiente a la doble capa eléctrica, a pesar de esto, la magnitud de la velocidad electroosmótica se incrementa debido a que la viscosidad del electrolito decrece. También, en años más recientes, se han desarrollado soluciones teóricas que describen las características hidrodinámicas y térmicas de flujos producidos por acción conjunta de fenómenos electroosmóticos y gradientes de presión tanto para microcanales anulares como para canales de placas planas [28, 29].

Utilizando la aproximación de la teoría de la lubricación en un microcanal de placas planas con una variación del potencial  $\zeta$  en la dirección axial se determinó la distorsión del campo de flujo para geometrías generales [15]. Esto es el producto de un gradiente de presión inducido que es consecuencia de la variación de las propiedades físicas del fluido y la conservación de masa. Los autores Soumart y Baygents [30] desarrollaron expresiones semi-analíticas para la velocidad de flujo, función de corriente y campo eléctrico con el uso de la teoría de la lubricación.

La velocidad de Helmholtz-Smoluchowski está dada por [8]:

$$U_{HS} = \epsilon \zeta \frac{E_0}{\eta_0}, \quad (1)$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica de la solución electrolítica,  $\zeta$  es el potencial zeta de la superficie sólida,  $E_0$  representa al potencial eléctrico externo y  $\eta_0$  es la viscosidad dinámica del



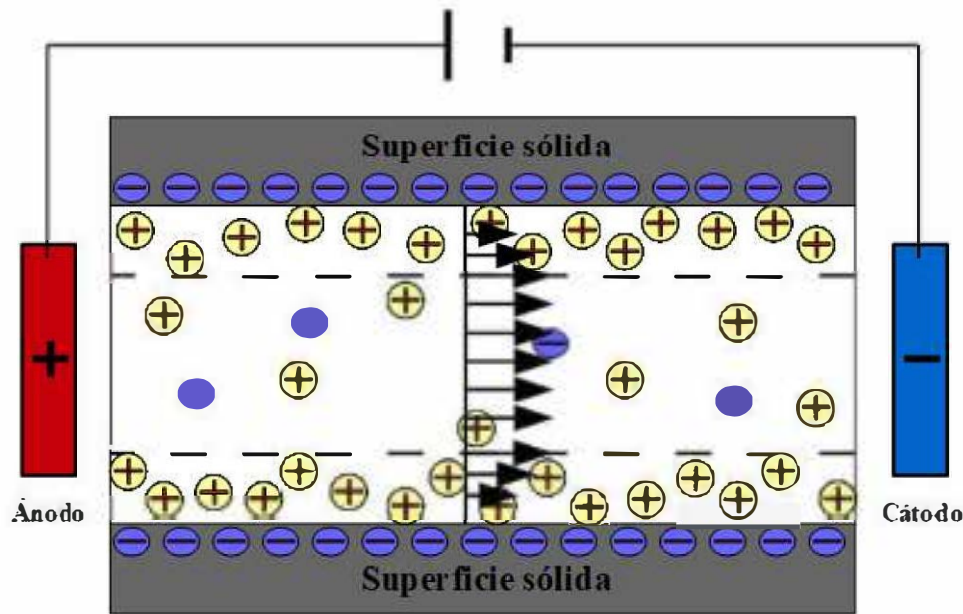


Figura 1: Diagrama esquemático del fenómeno de electroósmosis.

electrolito. Con dicha expresión se puede reconocer la relación que existe entre cualquiera de los cambios que se puedan producir en las propiedades físicas del fluido y el cambio en el campo de velocidad longitudinal  $U_{HS}$  que se presenta en dentro de un microcanal. Dado que dicho cambio violaría el principio de conservación de masa, se reconoce entonces la razón física del porqué de la aparición del gradiente de presión inducido a lo largo del eje axial del microcanal, esto fue descrito en por Xuan et al. en [21]. En este mismo trabajo Xuan et al. realizaron un estudio numérico-experimental del calentamiento Joule en un flujo electroosmótico (EOF, por sus siglas en inglés) de una solución electrolítica y determinaron que para un valor del campo eléctrico de 10 kV/m, la temperatura del fluido podría alcanzar los 40°C con una velocidad promedio de 800  $\mu\text{m/s}$ , mientras que para el mismo campo eléctrico, suponiendo que las propiedades del fluido permanecieran constantes, la velocidad es aproximadamente 640  $\mu\text{m/s}$ , es decir, al considerar solamente el efecto que la temperatura tiene sobre el campo de flujo la velocidad se incrementa en aproximadamente un 25%. Lo anterior hace suponer que los efectos térmicos tienen una gran influencia en el control de dispositivos microfluídicos que operan con EOF.

La viscosidad de un fluido es una propiedad que depende de varios aspectos, es a continuación que se discute la variación de la viscosidad con el campo eléctrico y la temperatura, lo que dará pauta al planteamiento del fenómeno a estudiar en la presente tesis.

En lo pertinente a la teoría estándar de flujos electrocinéticos,  $U_{HS}$  es una constante a lo largo de la longitud del microcanal cuando las propiedades físicas del fluido se consideran constantes. En 1961 Lyklema y Overbeek [31] expresaron la velocidad para el caso general de la variación tanto de la permitividad eléctrica  $\epsilon$  y la viscosidad  $\eta$  dentro de la doble capa eléctrica

$$u = E_0 \int_{\psi=\zeta}^{\psi=0} \frac{\epsilon}{\eta} d\psi, \quad (2)$$

donde  $\psi$  es el potencial eléctrico dentro de la doble capa electroosmótica (EDL, por sus siglas en inglés). Esta integral fue resuelta cuando la dependencia entre  $\eta$  y  $\epsilon$  con  $\psi$  es conocida. Para el caso particular en el cual el potencial  $\zeta$  en la superficie de contacto es alto ( $\zeta > 25\text{mV}$ ), la viscosidad de la solución dentro de la EDL es expresada como una función del campo eléctrico [32]. Con esto, se propuso una expresión para denotar el cambio de la viscosidad del fluido como una función del campo eléctrico [33,34]

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = fE^2, \quad (3)$$

donde  $\Delta\eta$  representa el cambio de viscosidad debido a la acción del campo eléctrico  $E$  mientras que el parámetro  $f$  es llamado la constante viscoeléctrica. Esta última es una propiedad física del fluido de trabajo y se encuentra en un rango dentro de los órdenes de magnitud  $O(10^{-16})$  to  $O(10^{-15}) \text{ m}^2\text{V}^{-2}$  [31].

Se sabe que la teoría clásica tiende a predecir valores más altos del potencial zeta que los obtenidos de manera experimental. Para superar esta diferencia se ha propuesto la aparición del llamado plano de corte o plano de deslizamiento en el que puede aplicarse la condición de no deslizamiento [35]. Es entre este plano y la superficie sólida en la que se considera que el electrolito cuenta con viscosidad infinita, esto último dado que al ocurrir un flujo tangencial a lo largo de una superficie cargada una capa muy delgada de fluido se adhiere a la superficie, esta capa recibe el nombre de capa estancada hidrodinámica la cual se extiende desde la superficie hasta una distancia en la que se asume la existencia del plano de deslizamiento, este estancamiento se debe a la fuerte interacción de los iones del fluido con la superficie [36].

Ha habido autores que han demostrado que la viscosidad de un líquido dipolar puede incrementarse al aplicarse altos campos eléctricos en dobles capas eléctricas altamente cargadas [37,38]. Esto propone que existe una relación entre la magnitud del campo eléctrico cargado y el caudal obtenido en un dispositivo que funcione en base a la electrocinética.

Bajo la suposición de EDL's delgadas, Lyklema y Overbeek [31] presentaron una corrección para la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski en la que se consideraba la variación de la viscosidad en función del campo eléctrico, presentada de la siguiente manera:

$$\eta = \eta_0 [1 + fE_i^2], \quad (4)$$

donde  $\eta_0$  es la viscosidad del fluido en la ausencia de un campo eléctrico y  $E_i = \frac{d\psi}{dy}$  es el campo eléctrico inducido en la EDL, con  $y$  representando la coordenada ortogonal al eje longitudinal del microcanal. Los resultados obtenidos demostraron que el efecto viscoeléctrico modifica el campo de velocidades de manera considerable. Este modelo ha sido el primer modelo electroreológico que ha podido ser llevado a una ecuación modificada de Helmholtz-Smoluchowski [39].

La Ec.(4) puede aplicarse directamente en las ecuaciones de gobierno para obtener las relaciones modificadas de Helmholtz-Smoluchowski. Esta relación indica que la parte interna de la doble capa eléctrica tenderá a mantenerse estática y este efecto es debido enteramente al electrolito, independientemente de cualquier otra característica como la densidad de carga. Este modelo puede contradecir a autores quienes han realizado recientemente estudios tanto teóricos como experimentales [3, 40, 41], los cuales han mostrado que el flujo persiste en superficies

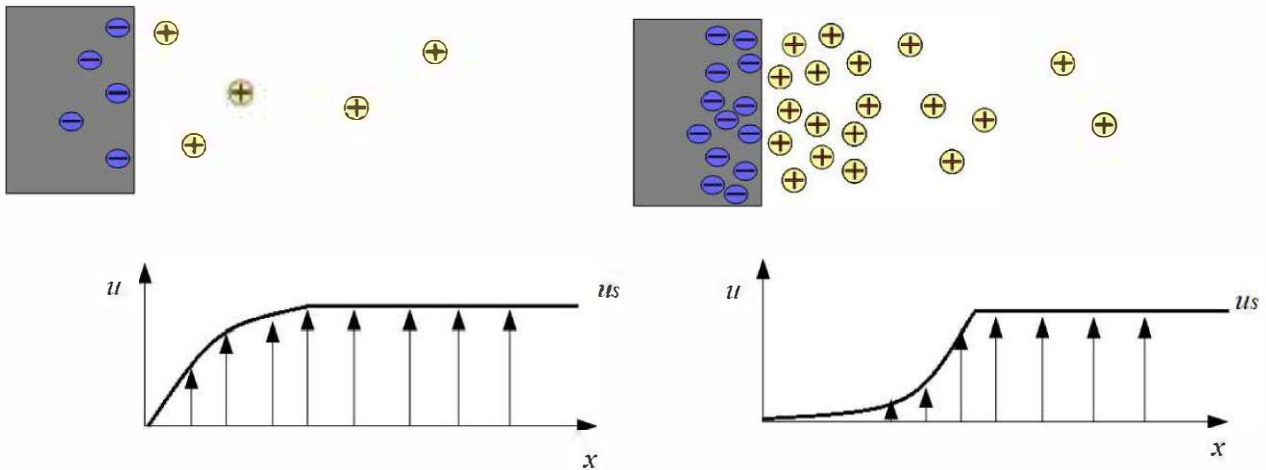


Figura 2: Perfil de velocidad  $u$  bajo un campo eléctrico tangencial a una superficie cargada.

hidrofílicas. En [39] se propone que, si se considerara la viscosidad como propiedad del fluido puro (no de la distribución local de la solución electrolítica) el mismo aumento de la viscosidad debido a la acción del campo eléctrico debería de presentarse en el volumen del fluido, aunque también se da el argumento que se necesita mucho control en el experimento para aplicar campos eléctricos superiores a  $30 \text{ V}/\mu\text{m}$ . Existen trabajos de fenómenos electrocinéticos en nanocanales que sugieren la aparición de un aumento de la viscosidad local cerca de las superficies cargadas, aunque todavía se necesita realizar trabajo en su descripción matemática. Uno de los primeros autores en explorar dichos fenómenos fue Lyklema [42], el que describió la formación de una capa de líquido estática en la cual se presentaba un paso de iones sin restricciones y contando con una conductividad similar a la del resto del fluido. De manera contradictoria, trabajos elaborados de manera más reciente [43–46] han demostrado que el fluido se mantiene en movimiento cerca de la pared aunque se registra un aumento de la viscosidad en esa zona.

La hipótesis de este fenómeno se muestra en la Fig. 2, en la cual se describe que a bajos voltajes inducidos, la condición de no deslizamiento se mantiene en la pared y la velocidad electroosmótica aumenta a través de la capa difusa y a altos voltajes inducidos el abultamiento de iones incrementa la viscosidad en la zona cercana a la pared y el plano de deslizamiento se desplaza alejándose de la superficie. Varios autores han intentado dar una explicación a la causa de este incremento de viscosidad siendo las principales ideas las siguientes:

- Abultamiento de iones cerca de la superficie: la compresión de iones contra una superficie puede provocar un incremento de la viscosidad de un electrolito debido a la disminución de movilidad de dichos iones a un alta densidad de carga [47–49].
- Correlaciones electrostáticas: los iones condensados se comportan como cristales de Wigner y esto puede contribuir al aumento de viscosidad [50–52].
- Efecto del solvente: trabajos previos [43, 44] han registrado aumentos de la viscosidad cerca de 5 veces el valor original en el rango de  $1 \text{ nm}$  de una superficie plana. Este efecto aumenta todavía más con la aplicación de altas cargas en la superficie [45] y la rugosidad de la superficie [53].

En este tipo de flujos tanto la permitividad eléctrica y la viscosidad son dependientes del campo eléctrico  $E$  y de la composición de la solución. Sin embargo, los trabajos [31, 43, 44] demuestran que los cambios en función del campo eléctrico serán mucho menores para la permitividad que para la viscosidad.

La característica principal del modelo viscoeléctrico que será utilizado en este trabajo, el abultamiento de iones cerca de una superficie cargada en comparación con el volumen restante del fluido, es consistente con las simulaciones de electroosmosis presentadas en [43, 44, 46, 54] que no muestran una doble capa estática.

El efecto viscoeléctrico ha sido abordado con anterioridad por Hunter [32] mientras que Zhao y Yang [55] presentaron una revisión de flujos electrocinéticos en la que se ha retomado al efecto viscoeléctrico siguiendo el trabajo presentado por Bazant [39]. Este último aportó una revisión de efectos electrocinéticos a voltajes altos en soluciones concentradas, en el que el efecto viscoeléctrico y fenómenos similares se analizaron.

Observando la Fig. 2 se aprecia que el modelo viscoeléctrico presentado en este trabajo indica que el plano de deslizamiento se separará de la superficie sólida, dependiendo esto tanto de la densidad iónica del electrolito y condiciones externas como el campo eléctrico. Es a bajos voltajes cuando no hay cambios de la viscosidad y el plano de deslizamiento se aproxima a la superficie sólida. Este modelo de una zona con propiedades electroreológicas diferentes también se presenta en [56] y [57] para modelos electrocinéticos de superficies porosas.

Una técnica analítica para abordar la solución de los modelos matemáticos relacionados a este tipo de fenómenos es la aproximación asintótica. En [58] se utilizó la aproximación de lubricación incluyendo efectos de calentamiento Joule donde las propiedades del fluido se consideraron dependientes de la temperatura en un flujo puramente electroosmótico de un fluido viscoelástico. Los resultados obtenidos utilizando esta técnica se validaron con simulaciones numéricas.

Otra técnica importante para este estudio es el método del acoplamiento (matching en el idioma inglés) de soluciones asintóticas presentado por Bender y Orzag [59] el cual se ha utilizado en trabajos como [60] y [61]. Para ampliar el conocimiento sobre este tipo de flujos se propone determinar la hidrodinámica y campo de temperatura de un EOF tomando en cuenta el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen el efecto que tiene el calentamiento Joule en las propiedades del fluido fuera de la zona de la EDL y el efecto del campo eléctrico en las propiedades del flujo dentro y fuera de la EDL, junto con la consideración de la variación de la conductividad eléctrica en función del campo de temperatura.

## 1.2. Efectos electrocinéticos

La electrocinética se define como el estudio del movimiento o flujo de un fluido debido a una doble capa eléctrica, la cual es el resultado de la interacción de una superficie ionizada con cargas estáticas en superficies dieléctricas [32]. Su importancia radica en la cantidad de aplicaciones que requieren de controlar el flujo y manipular solutos, esto es en procesos de separación, mezclado, dilución y administración a micro o nanoescalas [1, 4], donde un modo

mucho más preciso, sencillo y de bajo costo en comparación con utilizar micromaquinaria es la utilización de electrodos [3, 7]. Los fenómenos electrocinéticos se pueden dividir en [8]:

- Electroósmosis: movimiento de un líquido ionizado relativo a una superficie cargada debido a la aplicación de un campo eléctrico.
- Electrofóresis: movimiento de superficies cargadas relativo a un líquido estacionario debido a la aplicación de un campo eléctrico.
- Potencial de corriente: campo eléctrico que se produce por el movimiento de un fluido ionizado a lo largo de superficies ionizadas que son estacionarias.
- Potencial de sedimentación: campo eléctrico que se produce por el movimiento de partículas cargadas relativo a un líquido estacionario.

Esta tesis se centra en el estudio de un flujo electroosmótico. Las comparaciones de este tipo de flujos con flujos debidos a un gradiente de presión presentan importantes diferencias. Por ejemplo, en los flujos electroosmóticos el perfil de velocidad se mantiene uniforme, el llamado flujo tapón, mientras que en los flujos debidos a un gradiente de presión el perfil es parabólico, esta diferencia es significativa en el transporte de especies y aplicaciones de dispersión [4].

### 1.2.1. Flujos electroosmóticos

La electroósmosis se refiere al movimiento de un fluido debido a un campo eléctrico aplicado  $E_0$  en relación a una superficie cargada. Esto ocurre debido a la acción de la doble capa eléctrica (EDL), esta capa se forma por la interacción de una solución ionizada con las cargas estáticas que se encuentran sobre una superficie dieléctrica. Esta doble capa tiene movimiento por acción de las fuerzas de Coulomb entre los iones ya que, cuando las superficies de un capilar están cargadas negativamente y se aplica un campo eléctrico se ejercerá una fuerza en dirección del cátodo sobre los iones de carga positiva que se encuentran cerca de la superficie. Esta fuerza de Coulomb produce que los iones de carga positiva arrastren a la solución electrolítica con ellos al moverse hacia el cátodo Fig. 1.

### 1.2.2. Doble capa eléctrica (EDL)

La teoría de la doble capa eléctrica fue desarrollada por Helmholtz en 1879, quién relacionó los parámetros eléctricos y de flujo para el transporte electrocinético [62]. Al cargar la superficie de la pared de un microcanal, los iones de una carga del fluido que fluye dentro serán atraídos hacia la superficie, mientras que los iones de carga opuesta serán repelidos, causando el movimiento del fluido por arrastre viscoso. La Fig.3 muestra un esquema de la composición de la EDL, con los iones de carga opuesta agrupados cerca de la pared en lo que recibe el nombre de capa de Stern, cuyo espesor es del orden del diámetro de un ión [63] donde la fuerza electrostática mantiene inmovilizados a los iones, después sigue la capa difusa, zona en la cuál aumenta la velocidad electroosmótica.

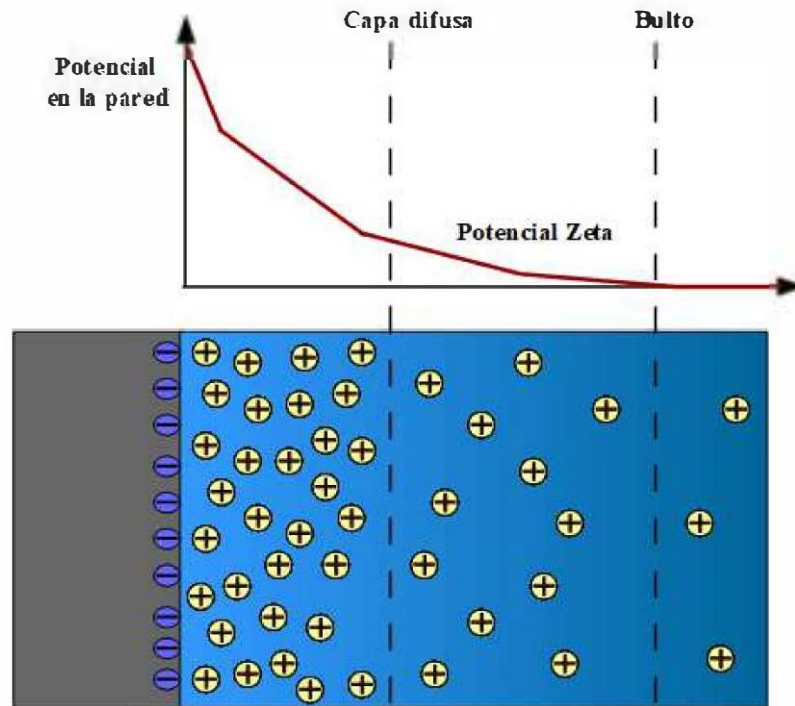


Figura 3: Diagrama esquemático de la doble capa eléctrica.

### 1.2.3. Longitud de Debye

La longitud de Debye es un parámetro que predice el espesor de la doble capa eléctrica, denotada por la letra  $\lambda_D$ . Se define como la distancia medida desde la pared donde la energía del potencial electrocinético es igual a la energía térmica [4]. La longitud de Debye depende de la concentración molar del fluido ionizado y su magnitud  $\lambda_D$  se puede estimar utilizando el parámetro de Debye-Hückel [10]:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda_D} = \left( \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

donde  $z$  es la valencia,  $e$  es la magnitud de la carga elemental,  $n_\infty$  es la concentración del electrolito [ $\text{m}^{-3}$ ],  $\epsilon$  es la permitividad dieléctrica de la solución electrolítica [ $\text{C}^2/\text{Nm}^2$ ],  $k_B$  es la constante de Boltzmann [ $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ ] y  $T$  la temperatura absoluta [K].

### 1.2.4. Potencial $\zeta$

La distribución de iones debido a la EDL se puede caracterizar usando el potencial eléctrico  $\psi$ , el cuál decrece rápidamente al desplazarse desde la pared hacia el centro del microcanal, al pasar por la capa de Stern. Al valor de  $\psi$  en el borde de la capa de Stern se le conoce como potencial zeta y se designa con la letra griega  $\zeta$ . La carga eléctrica que se encuentra en la capa difusa es la razón principal para que los efectos electrocinéticos estén presentes, donde los iones cargados o partículas puedan moverse con la aplicación de un campo eléctrico externo [4].

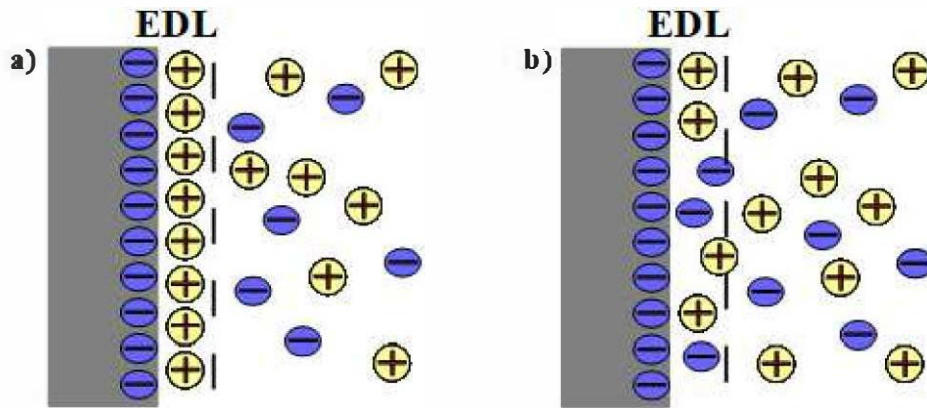


Figura 4: EDL. a) modelo de Helmholtz, b) modelo de Gouy-Chapman.

### 1.2.5. Velocidad de Helmholtz-Smoluchowski

Cuando se aplica un campo eléctrico externo  $E_0$ , en los extremos del microcanal, se genera una interacción de iones en la EDL. Si el espesor característico de la EDL, la longitud de Debye  $\lambda_D$ , es mucho más pequeño que el espesor del canal, el EOF exhibirá un flujo uniforme a través del microcanal, el perfil de velocidad producido por este fenómeno es un perfil uniforme, diferente al perfil parabólico producido por un gradiente de presión. Los EOF se prefieren en aplicaciones químicas y biomédicas, ya que reducen la dispersión de especies y de muestras, con lo cual beneficia el desempeño del microdispositivo [15], la movilidad electroosmótica para una EDL infinitesimalmente delgada está dada por la relación de Helmholtz-Smoluchowski,  $\eta_{EO} = -\zeta\epsilon/\eta$  [32]. Utilizando la movilidad electroosmótica se obtiene la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski definida por  $U_{HS} = -\epsilon\zeta\frac{E_0}{\eta}$ , [8], donde  $\eta$  y  $E_0$  representan el coeficiente de viscosidad y la intensidad del campo eléctrico, respectivamente.

### 1.2.6. Distribución de Boltzmann

La distribución de Boltzmann es una relación fundamental en la termodinámica estadística que describe la probabilidad de la aparición de estados microscópicos como una función de la energía de estos estados [64]. Debido a la presencia de una superficie cargada en el microcapilar se producirá una distribución espacial de los iones cerca de la superficie. También se producirá un equilibrio de la distribución iónica dentro de la doble capa eléctrica difusa, Fig. 4. Tal equilibrio permite el utilizar la distribución de Boltzmann para relacionar la concentración iónica con el potencial eléctrico. Los iones que tienen la carga opuesta son atraídos al sólido, mientras que los contraiones, son repelidos. En el caso de temperatura cero, se produce una cancelación de carga, sin embargo, a una temperatura finita, el movimiento térmico contrarresta este comportamiento. La ecuación gobernante para la descripción continua del número de concentración de iones  $n_i$  viene de la expresión termodinámica para el potencial químico  $\bar{c}_h$  de una especie iónica  $i$  [65],

$$\bar{c}_h = Fz'_i\psi + RT \ln C_i = z'_ie\psi + k_B T \ln n_i, \quad (6)$$

donde  $F = N_A e$  es la constante de Faraday,  $N_A$  la constante de Avogadro,  $R = k_B A$  es la constante molar del gas,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $\psi$  el potencial eléctrico lejos de la superficie,  $z'_i$  la valencia de la especie iónica,  $e$  la carga elemental del electrón y  $T$  la

temperatura.  $\bar{c}_{h0}$  y  $n_{i\infty}$ . Considerando el equilibrio del transporte iónico de manera que no exista flujo iónico entonces la distribución de iones de carga opuesta como función de una distancia  $r$  lejos de la superficie puede obtenerse para la condición de equilibrio en el que el potencial químico El equilibrio termodinámico implica el potencial químico  $\bar{c}_h$  sea uniforme en cada posición

$$\bar{c}_h(r = 0) = \bar{c}_h(r \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Esta condición se cumple si existe una mezcla ideal de todas las especies iónicas del sistema, considerando  $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$  como un punto de referencia en el volumen aparente de fluido se puede obtener de las Ecs.(6 y 7) se obtiene la distribución de Boltzmann:

$$n_i = n_{i,\infty} \exp\left(-\frac{z'_i e \psi}{k_B T}\right), \quad (8)$$

donde  $n_{i,\infty} = n_i(r \rightarrow \infty)$  es la concentración del número iónico en el estado neutro donde  $\psi = 0$ . La distribución de Boltzmann representa el estado mínimo de energía en la ausencia de flujo. Puede también ser expresada en términos de la densidad de carga de todas las especies iónicas  $\rho_e$  [5]:

$$\rho_e = e \sum z'_i n_i = e \sum z'_i n_{i,\infty} \exp\left(-\frac{z'_i e \psi}{k_B T}\right) = F \sum z'_i C_{i,\infty} \exp\left(-\frac{z'_i F \psi}{RT}\right) \quad (9)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación de Poisson que describe la distribución de un potencial eléctrico en función de su densidad de carga

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \psi) = \rho_e, \quad (10)$$

se obtiene así la ecuación de Poisson-Boltzmann, con la que se puede describir la distribución del potencial eléctrico conforme en relación a la posición dentro del microcapilar

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon} \sum z'_i n_{i,\infty} \exp\left(-\frac{z'_i e \psi}{k_B T}\right). \quad (11)$$



## 2. Marco teórico

Dada la naturaleza de los flujos electrocinéticos su análisis requiere tanto de las ecuaciones de cantidad de movimiento de la mecánica de fluidos, conservación de la energía y continuidad, como las ecuaciones de continuidad de corriente y la ecuación de Poisson para la distribución del potencial eléctrico [64]. En este capítulo se procederá a revisar las ecuaciones de gobierno básicas que rigen los fenómenos de transporte en flujos electroosmóticos. Se tratará primero las ecuaciones de gobierno de continuidad, cantidad de movimiento y conservación de energía [66], para después abordar las ecuaciones básicas de la electrodinámica, incluyendo la modificación a la ecuación de cantidad de movimiento que se necesita para poder considerar las fuerzas eléctricas que surgen por la presencia de iones en la solución [4,64] y a continuación se hace un análisis de las condiciones de frontera hidrodinámicas y eléctricas [64,67] las cuales son necesarias para el plantamiento del modelo matemático a analizar en este trabajo.

### 2.1. Ecuaciones de gobierno

#### 2.1.1. Continuidad

La ecuación de continuidad, o de conservación de masa, indica que para un volumen de control que se encuentra fijo en el espacio, el gradiente de acumulación de masa dentro del mismo volumen de control es la diferencia entre la masa que entra y sale del volumen de control. Este enunciado puede escribirse de manera diferencial como sigue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad (12)$$

la parte izquierda de la ecuación determina la rapidez de acumulación de masa por unidad de volumen y el término de la derecha indica el flujo másico neto por unidad de volumen. Para el caso particular de un fluido de densidad constante, independiente del tiempo y posición, la ecuación de continuidad se expresa como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

#### 2.1.2. Cantidad de movimiento

El flujo de un fluido de un sistema de un solo componente con densidad constante está gobernado por la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, dada por [68]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla (\eta \nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_b. \quad (14)$$

La Ec.(14) representa el balance de fuerzas en un elemento de fluido en el espacio, donde  $P$  es la presión en el fluido,  $\mathbf{g}$  es la aceleración de la gravedad,  $\eta$  es la viscosidad del fluido y  $\mathbf{f}_b$  es cualquier otra fuerza por unidad de volumen que actúa en él.

#### 2.1.3. Conservación de la energía

La ecuación de energía se refiere a la diferencia en energía interna entre dos estados de equilibrio de un sistema debido al calor añadido y al trabajo realizado por el sistema. Considerando

una fuente de calor y la disipación de energía es considerada para propiedades físicas constantes se tiene la ecuación [68]

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right] = k_f \nabla^2 T + \dot{q}, \quad (15)$$

donde  $C_p$  es el calor específico del fluido,  $T$  es la temperatura del fluido y  $k_f$  es la conductividad térmica del fluido y  $\dot{q}$  es el término de generación de calor.

## 2.2. Electrohidrodinámica

Los flujos electrocinéticos tienen aplicaciones en las que el control del movimiento de un líquido o soluto debe tener un alto grado de control. Esto hace relevante el estudiar la electrohidrodinámica, que considera el acoplamiento de las fuerzas eléctricas con la hidrodinámica. Utilizando esta definición, la electrohidrodinámica comprende las propiedades eléctricas de los líquidos, tales como la electroquímica y la electrocinética [69]. Un método utilizado para acoplar las fuerzas eléctricas con la hidrodinámica es definir la fuerza de cuerpo de la ecuación de cantidad de movimiento como la fuerza que sucede por acción del campo eléctrico. Para el caso de fluidos newtonianos con viscosidad variable y despreciando la acción de la gravedad se tiene [5]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f}_e, \quad (16)$$

la fuerza eléctrica de cuerpo por unidad de volumen está dada por

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left[ \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right], \quad (17)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\rho_e$  es la densidad de carga libre [70], para el caso especial en el que se considera permitividad constante, la fuerza eléctrica de cuerpo por unidad de volumen  $\mathbf{f}_e$  está dada por

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E}. \quad (18)$$

### 2.2.1. Ley de Gauss

La ley de Gauss en forma diferencial relaciona la intensidad de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga eléctrica y se expresa como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (19)$$

esta ecuación se utiliza para determinar el flujo de un campo eléctrico que es causado por un conjunto de carga puntuales.

### 2.2.2. Potencial eléctrico

La intensidad del campo eléctrico se puede calcular como un gradiente de una función escalar, esta función es el potencial, representada por  $\psi$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (20)$$

insertando en Ec.(20) la definición de la ley de Gauss, Ec.(19), se puede obtener la forma diferencial del potencial eléctrico.

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (21)$$

esta última ecuación recibe el nombre de ecuación de Poisson, y describe la distribución del potencial eléctrico en un material dieléctrico en presencia de cargas libres para una permitividad  $\epsilon$  independiente de la coordenada espacial.

### 2.2.3. Modelo de Gouy-Chapman de la doble capa eléctrica

La idea de una doble capa eléctrica fue propuesta por primera vez por Helmholtz, quien propuso un arreglo de cargas en dos planos paralelos, entre los cuales la carga de la superficie se ve neutralizada por los contraiones del líquido. Sin embargo, esta descripción rígida de la doble capa eléctrica no se presenta en la naturaleza. La teoría de la doble capa difusa fue desarrollada a principios de los años 1900 por Gouy y Chapman de manera independiente [32]. En este modelo, la superficie cargada, compuesta de una capa de cargas, tiene un potencial superficial  $\psi_s$ , los iones en la solución son considerados como cargas puntuales inmersas en un continuo dieléctrico. Los contraiones no se encuentran sujetos de manera rígida a la superficie cargada, tienen un movimiento de difusión dentro de la fase líquida. El equilibrio de la distribución de concentración de iones en la capa difusa se establece debido a las fuerzas atribuidas a la repulsión y atracción electrostática entre la superficie cargada y los iones, la energía cinética de los contraiones tiene un efecto en el espesor de la resultante doble capa difusa, este modelo de la doble capa considera que la concentración de contraiones cerca de la superficie cargada sigue la distribución de Boltzmann. El modelo Gouy-Chapman provee de buenas predicciones cuantitativas cuando el potencial de la superficie es bajo ( $\sim 0.025$  V) y la concentración del electrolito no es alta. Este modelo considera a los iones como cargas puntuales que pueden aproximarse a la superficie cargada sin límite, además se considera que la permitividad dieléctrica del medio es constante hasta la superficie.

Considerando el caso de una superficie plana, la ecuación de Poisson está dada por

$$\epsilon\nabla^2\psi = -\rho_e. \quad (22)$$

Si se considera un modelo unidimensional, la ecuación anterior se expresa como

$$\epsilon\frac{d^2\psi}{dy^2} = -\rho_e, \quad (23)$$

donde  $y$  representa la distancia normal a la superficie cargada. La densidad de carga espacial de los iones móviles  $\rho_e$  se puede expresar en términos del número de concentración iónica y las valencias correspondientes como

$$\rho_e = \sum_{i=1}^N z_i e n_i, \quad (24)$$

donde  $n_i$  es la concentración del número iónico de la  $i$ -ésima especie iónica,  $z_i$  es la valencia de la  $i$ -ésima especie iónica,  $e$  es la magnitud de la carga elemental de un electrón,  $1,602 \times 10^{-19}$  C y  $N$  es el número de especies iónicas en la solución electrolítica. La Ec.(24) puede insertarse en

la Ec.(23) y utilizando la distribución de Boltzmann dada por Ec.(8) se obtiene la ecuación de Poisson-Boltzmann

$$\epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} = - \sum_{i=1}^N z_i e n_{i\infty} \exp\left(-\frac{z_i e \psi}{k_B T}\right), \quad (25)$$

esta última ecuación define la distribución del potencial eléctrico en una capa iónica difusa adyacente a una superficie cargada.

$$z_+ = -z_- = z, \quad (26)$$

donde  $z$  es la valencia del catión. Con esto, la ecuación de Poisson-Boltzmann Ec.(25) puede escribirse como

$$\epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} = 2z e n_{i\infty} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T}\right), \quad (27)$$

#### 2.2.4. Aproximación de Debye-Hückel

Para el caso en el que el potencial en la superficie cargada es menor a 0.025 V [71], el término  $ze\psi/k_B T$  de la ecuación de Poisson-Boltzmann es menor a la unidad y puede linealizarse para escribirse como

$$\sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T}\right) \approx \frac{ze\psi}{k_B T} \quad \frac{ze\psi}{k_B T} \ll 1. \quad (28)$$

Utilizando la definición de la longitud de Debye, la ecuación anterior se escribe como

$$\epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2z^2 e^2 n_{i\infty}}{k_B T \epsilon} \psi = \kappa^2 \psi, \quad (29)$$

esta ecuación corresponde a la aproximación de Debye-Hückel para la ecuación de Poisson-Boltzmann para un electrolito simétrico ( $z : z$ ) donde  $\kappa$  corresponde al inverso de la longitud de Debye.

#### 2.2.5. Teoría de la lubricación

Dado que los microcanales son usualmente de dimensiones macroscópicas en la dirección axial, y poseen un ancho característico del orden de micrometros, se puede considerar que el ancho característico es mucho menor que la longitud característica en el eje axial. El límite en el que el cociente entre estas dos longitudes es pequeño recibe el nombre de el límite de lubricación [72, 73]. Considerando las ecuaciones de cantidad de movimiento adimensionales en 2 dimensiones:

$$\beta Re \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho_e E_x, \quad (30)$$

$$\beta^3 Re \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \beta^2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho_e E_y, \quad (31)$$

en estas ecuaciones las componentes horizontal y vertical de la velocidad adimensional están representadas por  $u$  y  $v$ , las coordenadas adimensionales están dadas representadas por  $x$  y  $y$ ,

las cuáles están adimensionalizadas respecto a las siguientes escalas:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\bar{x}}{L}, & y &= \frac{\bar{y}}{H}, \\
 u &= \frac{\bar{u}}{U_{HS}}, & v &= \frac{\bar{v}L}{U_{HS}H}, \\
 P &= \frac{(P' - P'_0) H^2}{\eta_0 U_{HS} L}, & P' &= \bar{P} - \frac{\epsilon \kappa^2 \psi^2}{2}, \\
 \tau_{xy} &= \frac{\bar{\tau}_{xy} H}{\eta_0 U_{HS}}, & \tau_{xx} &= \frac{\bar{\tau}_{xx} H}{\eta_0 U_{HS}}, \\
 \tau_{yy} &= \frac{\bar{\tau}_{yy} H}{\eta_0 U_{HS}}
 \end{aligned} \tag{32}$$

con el parámetro adimensional  $\beta$  definido como  $\beta = \frac{H}{L}$ , siendo  $H$  el ancho del canal y  $L$  el largo del mismo. Utilizando la técnica de expansiones asintóticas utilizando a  $\beta$  como el parámetro de perturbación se obtiene las ecuaciones de orden unidad siguientes

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{33}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{34}$$

las cuales se conocen como las ecuaciones de lubricación. El análisis por la teoría de lubricación reduce el problema de un flujo electroosmótico a resolver dos ecuaciones diferenciales para las variables del potencial eléctrico y la velocidad en la dirección axial,  $\psi$  y  $u$ . También se observa que la teoría de la lubricación no toma en cuenta los efectos inerciales, dado que en el límite de lubricación los términos inerciales son de orden  $\beta Re$ , donde  $Re$  es el número de Reynolds basado en el ancho del canal y la velocidad electroosmótica característica y no aparecen en el primer orden de magnitud aún cuando  $Re \sim 1$ .

### 3. Efecto viscoeléctrico en un flujo electroosmótico en un microcapilar

#### 3.1. Descripción del problema

Al aplicarse un campo eléctrico en un fluido la viscosidad de este puede incrementarse debido al fenómeno de engrosamiento viscoeléctrico, este fenómeno fue abordado anteriormente por los autores Lyklema y Overbeek en [31], donde propusieron el primer modelo electroreológico que podría llevarse a un modelo modificado de la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski. Estos autores estimaron que el efecto viscoeléctrico es, al menos en fluidos similares al agua, más importante que la saturación dieléctrica en los efectos electrocinéticos. Para modelar el efecto viscoeléctrico, propusieron la siguiente expresión usando un valor de  $f = 10^{-15} \text{ m}^2\text{V}^{-2}$  para el agua

$$\eta = \eta_0 [1 + fE^2]. \quad (35)$$

Como ha sido discutido anteriormente por autores como Bazant [39], este modelo considera que al encontrarse a altos valores de carga eléctrica la parte interna de la doble capa eléctrica se encuentra detenida por cambios en la viscosidad, el modelo de Lyklema y Overbeek atribuye el efecto por completo al solvente, en este caso agua, siendo independiente de la densidad de carga o corriente de iones. La inclusión de este modelo en la solución de la ecuación de cantidad de movimiento Ec.(30) provoca la aparición de un acoplamiento de la ecuación del potencial eléctrico interno y la ecuación de cantidad de movimiento fuera del término fuente, esto provocará que para resolver el campo de velocidades se tendrá que plantear una integración de un término de la forma

$$\int \frac{dx}{1 + C \left( \frac{dx}{dy} \right)^2}, \quad (36)$$

la cual no puede ser resuelta directamente, por lo cuál se tendrá que hacer uso de técnicas asintóticas junto con consideraciones de la magnitud de los parámetros físicos para poder otorgar una solución.

#### 3.2. Planteamiento del problema

Se considerará un flujo electroosmótico de un fluido newtoniano en un microcapilar cilíndrico de radio  $R$  con una superficie cargada negativamente con un potencial en la superficie  $\zeta$ , como se muestra en la Fig. 5, Los extremos del microcanal están sujetos a un campo eléctrico uniforme  $E_x$ , el sistema de coordenadas es cilíndrico, donde  $r$  representa la dirección radial y  $x$  la dirección axial, adicionalmente se plantean las siguientes suposiciones:

- Estado estacionario y flujo totalmente desarrollado.
- El electrolito es simétrico ( $z : z$ )
- El campo eléctrico externo aplicado es debil en comparación con el campo eléctrico transversal, de manera que  $E_x = \phi/L \ll \zeta/\lambda_D$ , esto significa que el campo eléctrico externo no perturba la estructura de la EDL, como se presenta en los trabajos de los autores Hunter et al. [36] y Saville [74].

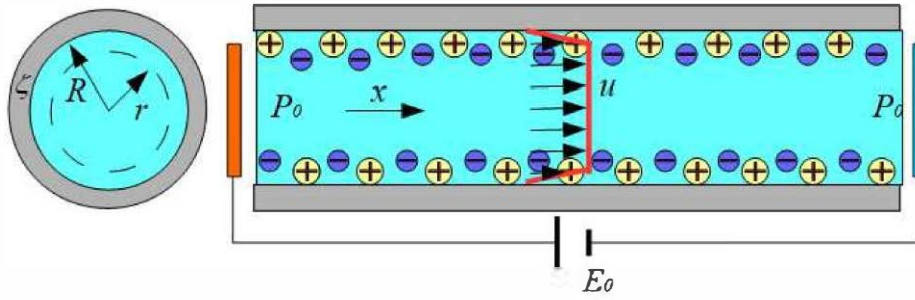


Figura 5: Diagrama del modelo físico a tratar.

- La permitividad dieléctrica no depende del potencial eléctrico, esto se debe a que cambios de un 10 % en la viscosidad de los líquidos se espera que ocurra en campos eléctricos de  $E = 2 \times 10^5$  V/cm el cuál es mucho menor al campo eléctrico requerido para un cambio de 10 % en la permitividad ( $E = 1,5 \times 10^6$  V/cm) [31].
- La viscosidad del fluido en la EDL no depende de la densidad de carga.

Las ecuaciones de gobierno para obtener el potencial eléctrico  $\psi$  y la velocidad  $u$  son las ecuaciones de Poisson-Boltzmann y Navier-Stokes, dadas por:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{2ze n_{\infty}}{\epsilon} \sinh \left( \frac{ze\psi}{k_B T} \right) \quad (37)$$

y

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \eta \frac{du}{dr} \right) = \epsilon E_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right), \quad (38)$$

las cuales se encuentran sujetas a las siguientes condiciones de frontera

$$\psi = \zeta, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad (39)$$

y

$$\frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{en} \quad r = 0, \quad (40)$$

aquí,  $\kappa = (2e^2 z^2 n_{\infty} / \epsilon k_B T)^{1/2}$  es el inverso de la longitud de Debye [64]. La viscosidad, como fue descrito por Lyklema y Overbeek [31], se encuentra expresada como

$$\eta = \eta_0 [1 + f E^2], \quad (41)$$

donde  $E = \frac{d\Phi}{dr}$  y dado que  $\Phi = \psi(r) + \phi(x)$ , donde  $\psi$  y  $\phi$  son los campos eléctricos interno y externo respectivamente, por lo que la definición anterior para  $E$  puede expresarse como  $E = \frac{d\psi}{dr}$ .

### 3.3. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

Para resolver las ecuaciones de gobierno Ecs.(37 y 38), junto con las condiciones de frontera Ecs.(39 y 40), se definen las siguientes variables adimensionales

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_c}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_{HS}} \quad \bar{r} = \frac{r}{R}. \quad (42)$$

En las variables adimensionales anteriores se presenta el potencial característico  $\psi_c = k_B T / ze$  y la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski  $U_{HS}$ . Utilizando estas variables, se pueden escribir las ecuaciones de gobierno Ecs.(37 y 38) en su forma adimensional, como se muestra

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{r}} = \bar{\kappa}^2 \sinh(\bar{\psi}), \quad (43)$$

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left\{ \bar{r} \left[ 1 + f^* \left( \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{r}} \right)^2 \right] \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} \right\} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{r}} \right), \quad (44)$$

que se encuentran sujetas a las siguientes condiciones de frontera adimensionales

$$\psi = \bar{\zeta}, \quad \bar{u} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{r} = 1 \quad (45)$$

y

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{r}} = 0, \quad \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{r} = 0, \quad (46)$$

en las ecuaciones anteriores  $\bar{\kappa} = R\kappa$ ,  $f^* = f(\psi_c/R)^2$  y  $\bar{\zeta} = \zeta/\psi_c$ . Como ocurre comúnmente en los flujos electroosmóticos, la magnitud del radio del microcanal se encuentra en el rango de 10 – 100  $\mu\text{m}$ . y siendo  $\kappa = 1/\lambda_D$  donde la longitud de Debye  $\lambda_D$  se encuentra en el rango 1 – 10 mm., por lo tanto, el parámetro adimensional  $\bar{\kappa} \gg 1$ , lo que permite fundamentar el que se análisis de los campos de velocidad y del potencial eléctrico, presentados en las Ecs.(43 y 44), puedan ser elaborado con el uso de la teoría de la capa límite, tomando bajo consideración que el lado izquierdo de Ec.(43) es afectado por un parámetro pequeño  $\bar{\kappa}^{-2}$ .

### 3.4. Solución asintótica para el potencial eléctrico en el límite $\frac{1}{\bar{\kappa}} \ll 1$

En esta sección se utiliza la teoría de capa límite para resolver el par de ecuaciones acopladas, Ecs.(43 y 44), con un procedimiento similar al presentado en [60]. Se considera a las ecuaciones de gobierno adimensionales en el límite  $\bar{\kappa} \gg 1$ . Cerca de la pared, dentro del espesor de la doble capa eléctrica de  $O(\bar{\kappa}^{-1})$  la magnitud de los gradientes del potencial eléctrico es grande. Por lo tanto es conveniente reescalar la variable  $\bar{r}$  utilizando la siguiente variable de escalamiento para la zona cerca del límite  $\bar{r} = 1$ , definida como

$$Y = \bar{\kappa}(1 - \bar{r}), \quad (47)$$

utilizando esta variable de escalamiento en conjunto con Ec.(43) se obtiene la ecuación adimensional de Poisson-Boltzmann para la zona interna de la EDL, expresada por

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_i}{dY^2} - \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{d\bar{\psi}_i}{dY} = \sinh(\bar{\psi}_i), \quad (48)$$

donde el subíndice  $i$  expresa que se trata de la solución interna de un problema de capa límite. El objetivo es obtener una aproximación asintótica de la solución correspondiente a la zona interna de la EDL, por lo que se puede definir una expansión asintótica de la forma

$$\bar{\psi}_i = \bar{\psi}_i^0 + \frac{1}{\bar{\kappa}} \bar{\psi}_i^1 + \dots, \quad (49)$$



sustituyendo la expansión expresada en Ec.(49) en la ecuación adimensional Ec.(48) y agrupando los términos del mismo orden se obtiene la siguiente ecuación adimensional para el orden cero en la región interna

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_i^0}{dY^2} = \sinh(\bar{\psi}_i^0), \quad (50)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\bar{\psi}_i^0 = \bar{\zeta} \quad \text{en} \quad Y = 0 \quad (51)$$

y

$$\bar{\psi}_i^0 = 0 \quad \text{en} \quad Y \rightarrow \infty. \quad (52)$$

La doble integración de la ecuación Ec.(50) da como resultado [60]

$$\bar{\psi}_i^0 = 2 \ln \left[ \frac{1 + t \exp(-Y)}{1 - t \exp(-Y)} \right], \quad (53)$$

donde

$$t = \tanh \left( \frac{\bar{\zeta}}{4} \right). \quad (54)$$

Para la solución de la región externa, el término al lado derecho de la Ec.(43) puede ser linealizado dado que se trabaja bajo la suposición de que en la zona externa de la EDL el valor del potencial es muy cercano a cero  $\psi_o^\bullet \rightarrow 0$ , por lo que se obtiene

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} \right) = \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}_o^0, \quad (55)$$

que cuenta con las condiciones de frontera

$$\bar{\psi}_o^\bullet = 0 \quad \text{en} \quad \bar{r} = 0. \quad (56)$$

La solución de esta ecuación está dada por [13]

$$\bar{\psi}_o^0 = AI_0(\bar{\kappa}\bar{r}). \quad (57)$$

Aquí,  $I_0$  es la función Bessel modificada de orden cero de primer tipo [75].  $A$  es una constante que es determinada al igualar la solución interna con la externa. Al dar un a valor a  $Y \gg 1$  en la Ec.(53) podemos linealizar la expresión como

$$\bar{\psi}_i^0 \approx 4t \exp(-Y) \quad \text{para} \quad Y \gg 1. \quad (58)$$

Al considerar la expansión asintótica de la función  $I_0$  en la Ec.(57)

$$\bar{\psi}_o^0 \approx A \frac{\exp(\bar{\kappa}\bar{r})}{\sqrt{2\pi\bar{\kappa}}}, \quad (59)$$

en la interface  $\bar{\psi}_o^0 = \bar{\psi}_i^0$ , por lo tanto

$$A = 4t \exp(-\bar{\kappa}) \sqrt{2\pi\bar{\kappa}}. \quad (60)$$

Una vez obtenido el valor de la constante  $A$ , se puede obtener la expresión que describe al potencial externo  $\bar{\psi}_o^0$  al sustituir la Ec.(60) en la Ec.(57)

$$\bar{\psi}_o^0 = 4t \exp(-\bar{\kappa}) \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}). \quad (61)$$

La solución compuesta del potencial eléctrico en el orden unidad se obtiene por medio del método del matching descrito en la referencia [76], obteniendo:

$$\bar{\psi}^0 = 2 \ln \left[ \frac{1 + t \exp(-\bar{\kappa}(1-\bar{r}))}{1 - t \exp(-\bar{\kappa}(1-\bar{r}))} \right] + 4t \exp(-\bar{\kappa}) \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}) - 4t \exp(-\bar{\kappa}(1-\bar{r})). \quad (62)$$

En este caso solo se consideró la contribución de  $O(\bar{\kappa}^0)$  del campo eléctrico para obtener el campo hidrodinámico. La razón de esto radica en que es común que en problemas de capa límite, la solución de primer orden sea suficiente para mostrar la física presente en el problema [59].

### 3.5. Solución asintótica para la velocidad en el límite $\frac{1}{\bar{\kappa}} \ll 1$

Se tiene la ecuación de cantidad de movimiento Ec.(44), que puede expresarse en términos de la coordenada interna definida en Ec.(47) como

$$\frac{d}{dY} \left\{ \left(1 - \frac{Y}{\bar{\kappa}}\right) \left[ 1 + \bar{f} \left( \frac{d\bar{\psi}_i}{dY} \right)^2 \right] \frac{d\bar{u}_i}{dY} \right\} = \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{d}{dY} \left[ \left(1 - \frac{Y}{\bar{\kappa}}\right) \frac{d\bar{\psi}_i}{dY} \right], \quad (63)$$

donde,  $\bar{f} = f(\psi_c/\lambda_D)^2$  es la constante viscoeléctrica adimensional. La Ec.(63) se encuentra sujeta a las condiciones de frontera

$$\bar{u}_i = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\psi}_i = \bar{\zeta} \quad \text{en} \quad Y = 0 \quad (64)$$

y

$$\frac{d\bar{u}_i}{dY} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{\psi}_i}{dY} = 0 \quad \text{en} \quad Y \rightarrow \infty. \quad (65)$$

En Ec.(65) se presentan las condiciones de frontera en la zona externa, separada de la superficie del capilar donde los gradientes de velocidad y de potencial son cercanos a cero. Se propone la expansión para el campo de velocidades de la zona interna de la doble capa eléctrica

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i^0 + \frac{1}{\bar{\kappa}} \bar{u}_i^1 + \dots \quad (66)$$

Sustituyendo la expansión (66) en la Ec.(63) se puede obtener la ecuación de gobierno para el campo de velocidades electroosmóticas para el orden unidad de la región interna de la EDL, dada por

$$\frac{d}{dY} \left\{ \left[ 1 + \bar{f} \left( \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \right)^2 \right] \frac{d\bar{u}_i^0}{dY} \right\} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{d}{dY} \left( \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \right). \quad (67)$$

Esta expresión puede ser integrada respecto a  $Y$ , y al utilizar la condición de frontera mostrada en Ec.(65) se obtiene

$$\left[ 1 + \bar{f} \left( \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \right)^2 \right] \frac{d\bar{u}_i^0}{dY} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left( \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \right). \quad (68)$$

Una segunda integración da como resultado

$$\bar{u}_i^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \int \frac{d\bar{\psi}_i^0}{1 + \bar{f} \left( \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \right)^2} + C, \quad (69)$$

donde  $C$  es una constante de integración la cual debe ser determinada con la condición de frontera dada en la Ec.(64). Considerando que  $f = 1 \times 10^{-15} \text{ m}^2\text{V}^{-2}$  (Lyklema y Overbeek [31]),  $\psi_c = 2,5 \times 10^{-2} \text{ V}$  y  $\lambda_D = 1 \times 10^{-8} \text{ m}$  se determina el valor del parámetro adimensional  $\bar{f}$  como  $\bar{f} \ll 1$  y con esto se puede linealizar la expresión como

$$\bar{u}_i^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \int \left[ 1 - \bar{f} \left( \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \right)^2 \right] d\bar{\psi}_i^0 + C, \quad (70)$$

para continuar con la solución de esta última ecuación se sustituirá la derivada del campo eléctrico respecto a la coordenada  $Y$  por la ecuación de Grahame [77], la cuál se desarrolla en el apéndice A,

$$\frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} = 2 \sinh \left( \frac{\bar{\psi}_i^0}{2} \right). \quad (71)$$

Al sustituir la Ec.(71) en Ec.(70) se obtiene

$$\bar{u}_i^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \int \left[ 1 - 4\bar{f} \sinh^2 \left( \frac{\bar{\psi}_i^0}{2} \right) \right] d\bar{\psi}_i^0 + C. \quad (72)$$

Resolviendo la integral descrita y haciendo uso de la condición de frontera Ec.(64) se obtiene la velocidad electroosmótica para la zona interna de la EDL

$$\bar{u}_i^0 = \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \bar{\zeta} - \bar{\psi}_i^0 + 2\bar{f} \left( \sinh(\bar{\psi}_i^0) - \sinh(\bar{\zeta}) \right) + 4\bar{f} \left( \bar{\zeta} - \bar{\psi}_i^0 \right) \right]. \quad (73)$$

Para la zona externa, la ecuación de gobierno adimensional utilizada es la que anteriormente se definió en Ec.(44)

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left\{ \bar{r} \left[ 1 + f^* \left( \frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} \right)^2 \right] \frac{d\bar{u}_o^0}{d\bar{r}} \right\} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} \right), \quad (74)$$

que cuenta con la condición de frontera

$$\frac{d\bar{u}_o^0}{d\bar{r}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{r} = 0. \quad (75)$$

Al integrar la Ec.(74) dos veces con respecto a  $\bar{r}$  y aplicando las condiciones de frontera dadas por Ec.(75) se obtiene

$$\bar{u}_o^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \int \frac{d\bar{\psi}_o^0}{1 + f^* \left( \frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} \right)^2} + D, \quad (76)$$

donde  $\bar{\psi}_o^0$  es conocida por la Ec. (61) y su derivada correspondiente es

$$\frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} = 4\bar{\kappa}t \exp(-\bar{\kappa}) \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_1(\bar{\kappa}\bar{r}), \quad (77)$$

donde  $I_1$  es la función modificada de Bessel de primer tipo [75]; utilizando la Ec.(61), se puede reescribir Ec.(77) como

$$\frac{d\bar{\psi}_o^0}{d\bar{r}} = \bar{\kappa} \bar{\psi}_o^0 \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})}, \quad (78)$$

sustituyendo la Ec.(78) en Ec.(76) se obtiene

$$\bar{u}_o^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \int \frac{d\bar{\psi}_o^0}{1 + \bar{f} \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})} \right)^2 \left( \bar{\psi}_o^0 \right)^2} + D. \quad (79)$$

La Ec.(79) puede ser linealizada dado que  $\bar{f} \ll 1$ , obteniéndose:

$$\bar{u}_o^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \int \left[ 1 - \bar{f} \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})} \right)^2 \left( \bar{\psi}_o^0 \right)^2 \right] d\bar{\psi}_o^0 + D. \quad (80)$$

Al integrar la ecuación resultante se obtiene la ecuación del perfil de velocidad en la zona externa de la EDL

$$\bar{u}_o^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \bar{\psi}_o^0 - \frac{\bar{f}}{3} \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})} \right)^2 \left( \bar{\psi}_o^0 \right)^3 \right] + D. \quad (81)$$

Aquí,  $D$  es una constante que todavía no ha sido determinada pero puede ser estimada utilizando el método del matching de expansiones asintóticas [76], para esto, se toman las soluciones de ambas regiones

$$\bar{u}_i^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \bar{\psi}_i^0 + 4\bar{f}\bar{\psi}_i^0 - 2\bar{f} \sinh(\bar{\psi}_i^0) \right] + \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \bar{\zeta} + 4\bar{f}\bar{\zeta} - 2\bar{f} \sinh(\bar{\zeta}) \right],$$

y

$$\bar{u}_o^0 = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \bar{\psi}_o^0 - \frac{\bar{f}}{3} \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})} \right)^2 \left( \bar{\psi}_o^0 \right)^3 \right] + D, \quad (82)$$

y se expresa una de las dos en términos de la variable independiente de la otra región, en este caso, se expresó la solución interna  $\bar{u}_i^0$  en función de la variable independiente externa  $Y$ . Esta expresión es

$$[\bar{u}_i^0]_o = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ [\bar{\psi}_i^0]_o + 4\bar{f} [\bar{\psi}_i^0]_o - 2\bar{f} \sinh([\bar{\psi}_i^0]_o) \right] + \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \bar{\zeta} + 4\bar{f}\bar{\zeta} - 2\bar{f} \sinh(\bar{\zeta}) \right]. \quad (83)$$

Con esto se procede a obtener la solución del campo de velocidades por acoplamiento al realizar la suma de las soluciones de la zona interna y externa, Ecs.(82), y se resta la parte común dada por la Ec.(83)

$$\bar{u}^0 = \bar{u}_i^0 + \bar{u}_o^0 - [\bar{u}_i^0]_o, \quad (84)$$

Con lo que se obtiene la solución para el campo de velocidades, el cuál es dado por

$$\begin{aligned} \bar{u}^0 = & \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ -2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] - 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}) + 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} \right] \\ & + \frac{2\bar{f}}{\bar{\zeta}} \left[ \sinh \left[ 2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] \right] - \sinh \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} \right] \right] \\ & + \frac{4\bar{f}}{\bar{\zeta}} \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} - 2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] \right] \\ & + \frac{\bar{f}}{3\bar{\zeta}} \left[ \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})} \right)^2 \left( 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}) \right)^3 \right] + D. \end{aligned} \quad (85)$$

La constante  $D$  se obtiene al utilizar la condición de frontera en la pared del microcanal  $\bar{u}^0 = 0$  cuando  $\bar{r} = 1$ , sustituyendo esta condición y escribiendo la solución de la velocidad con el valor de la constante  $D$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{u}^0 = & \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ -2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] + 2 \ln \left[ \frac{1+t}{1-t} \right] - 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}) + 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}) \right] \\ & + \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} - 4t \right] \\ & + \frac{2\bar{f}}{\bar{\zeta}} \left[ \sinh \left[ 2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] \right] - \sinh \left[ 2 \ln \left[ \frac{1+t}{1-t} \right] \right] - \sinh \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} \right] + \sinh \left[ 4t \right] \right] \\ & + \frac{4\bar{f}}{\bar{\zeta}} \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} - 4t - 2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] + 2 \ln \left[ \frac{1+t}{1-t} \right] \right] \\ & + \frac{\bar{f}}{3\bar{\zeta}} \left[ \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}\bar{r})}{I_0(\bar{\kappa}\bar{r})} \right)^2 \left( 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}) \right)^3 - \left( \frac{I_1(\bar{\kappa})}{I_0(\bar{\kappa})} \right)^2 \left( 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}) \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

Cuadro 1: Valor de los parámetros utilizados basados en literatura especializada.

Parámetro	Valor	Unidad
$f$	$\sim 10^{-15}$	$\text{m}^2 \text{V}^{-2}$
$\lambda_D$	$\sim 10^{-9}$	m
$\zeta$	$\sim 2,5 \times 10^{-2} \sim 1,0 \times 10^{-1}$	V
$R$	10 – 100	$\mu \text{m}$
$L$	$\sim 0^{-2}$	m
$\eta_0$	$\sim 10^{-3}$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

## 4. Resultados

### 4.1. Efecto viscoeléctrico caso isotérmico

En la primera parte de la presente tesis se presentó una solución analítica para la distribución del potencial eléctrico y el perfil de velocidades adimensionales de un flujo puramente electroosmótico de un fluido newtoniano en un microcapilar cilíndrico en el que se considera el acoplamiento de la ecuación de Poisson-Boltzmann y la ecuación de cantidad de movimiento en el término viscoso de la ecuación de cantidad de movimiento, donde se considera la viscosidad dependiente del gradiente del potencial eléctrico. Se muestra que un EOF de este tipo es dependiente de los siguientes parámetros adimensionales: el potencial zeta adimensional  $\bar{\zeta}$ , la constante viscoeléctrica  $\bar{f}$  y el inverso de la longitud de Debye  $\bar{\kappa}$ . Para estimar los valores de los parámetros adimensionales involucrados en el análisis, se utilizaron valores de los parámetros físicos que se han reportado previamente en la literatura especializada de flujos electroosmóticos bajo el efecto viscoeléctrico, los cuáles se pueden consultar en la Tabla 1 obtenida de la literatura especializada [31, 78].

Para corroborar la exactitud de la solución analítica obtenida para el perfil de velocidad dado por la Ec.(86) se le comparó con la solución numérica del sistema de ecuaciones adimensionales, Ecs.(43)-(46). El resultado de tal comparación se muestra en la Fig. 6, se observa que tienen muy buena concordancia hasta el valor de  $\bar{\zeta} = 4$ , la solución numérica de las ecuaciones adimensionales de gobierno se obtuvo utilizando una integración numérica con el método de Runge-Kutta de 4° orden [79] con un tamaño de intervalo de  $\Delta \bar{r} = 1 \times 10^{-4}$ . El efecto del potencial eléctrico adimensional  $\bar{\zeta}$  en el perfil de velocidades electroosmóticas se muestra en las Fig. 7, en la que se presenta el perfil de velocidad como función de la coordenada radial adimensional. Estos perfiles se obtuvieron para un valor constante de la constante viscoeléctrica  $\bar{f} = 0,01$  y  $\bar{\kappa} = 50$ . Esta figura muestra que existe una fuerte dependencia no lineal entre la magnitud del campo de velocidad y el potencial zeta adimensional, siendo que un aumento en este último conduce a una disminución significativa de la velocidad del flujo. Lo anterior concuerda con lo descrito por Lyklema y Overbeek [31]. Se calculó el caudal adimensional  $\bar{Q}$ , el cuál se determino por medio de la relación

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_c} = 2 \int_0^1 \bar{r} \bar{u}^0(\bar{r}) d\bar{r}, \quad (87)$$

donde  $Q_c = \pi R^2 U_{HS}$  y  $\bar{u}^0$  está dada por la solución de la velocidad adimensional Ec.(86). La Ec. (87) fue integrada numéricamente utilizando la regla del trapecio [79], con esto se puede

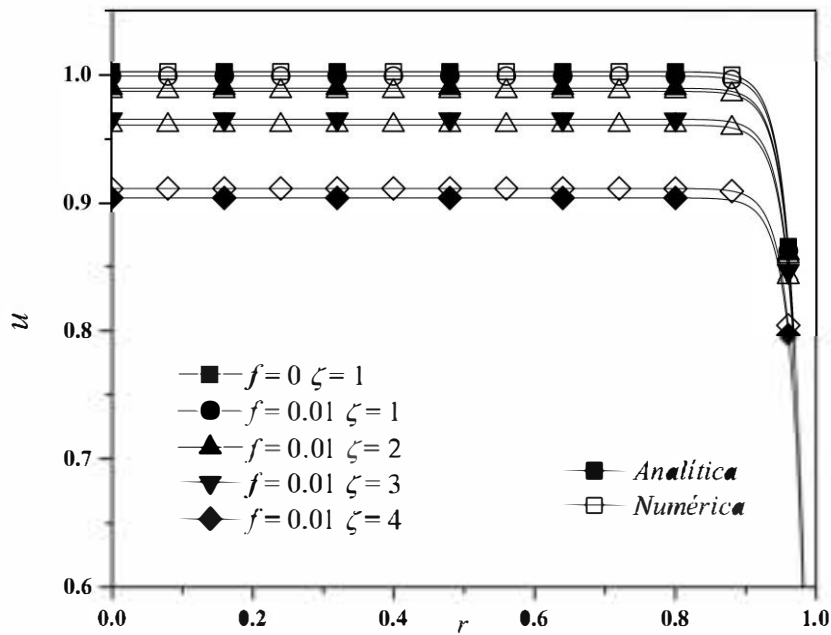


Figura 6: Sol. asintótica, Ec.(86) y sol. numérica de la Ec.(38) para  $\bar{u}$  con  $\bar{\kappa} = 100$ .

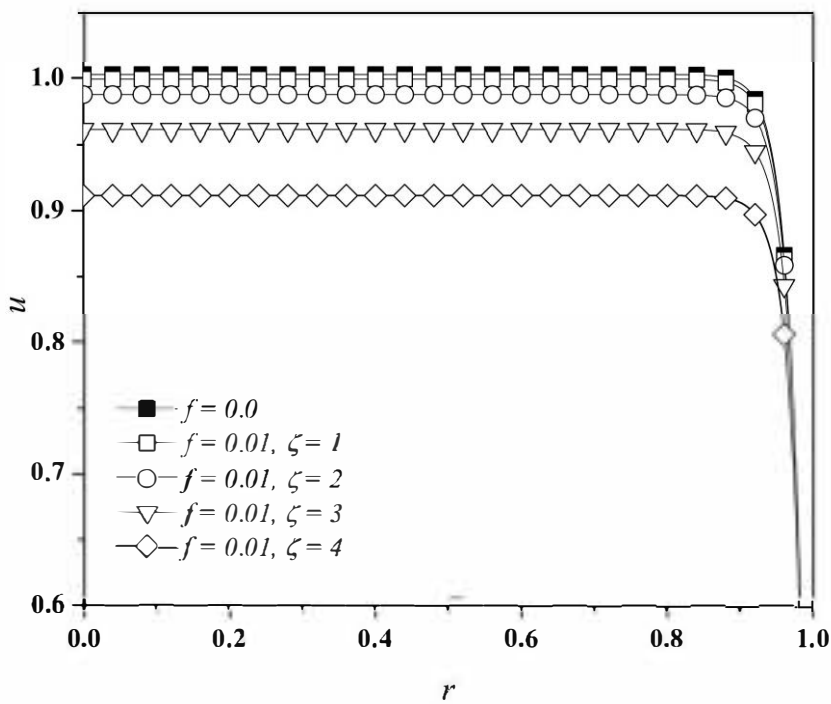


Figura 7: Efecto del potencial  $\zeta$  en el perfil de velocidad adimensional  $\bar{u}$  con  $\bar{\kappa} = 100$ .

definir el cociente del flujo volumétrico adimensional con y sin efecto viscoeléctrico  $Q^*$

$$Q^* = \frac{\bar{Q}_{(f=a)}}{\bar{Q}_{(f=0)}}, \quad (88)$$

donde el numerador  $\bar{Q}_{(f=a)}$  se refiere al flujo volumétrico bajo el efecto viscoeléctrico y el denominador  $\bar{Q}_{(f=0)}$  es el flujo volumétrico bajo las mismas condiciones sin considerar el efecto viscoeléctrico. En la evaluación de la Ec.(88) se utilizan valores para  $a$  en el rango de  $0,001 < a < 0,01$ . En la Fig. 8, se muestra el flujo volumétrico adimensional como función de la constante viscoeléctrica y dos valores del inverso de la longitud de Debye,  $\bar{\kappa} = 50, 100$ . Aquí se muestra una fuerte dependencia lineal entre el caudal y la constante viscoeléctrica, esto significa que para valores menores de la constante viscoeléctrica  $\bar{f}$  la magnitud del perfil de velocidad electroosmótico aumenta, al considerar el valor de  $\bar{f} = 0$  la Ec.(86) se expresa como

$$\begin{aligned} \bar{u}^0 = \frac{1}{\bar{\zeta}} & \left[ -2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})}} \right] + 2 \ln \left[ \frac{1+t}{1-t} \right] - 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}\bar{r}) + 4te^{-\bar{\kappa}} \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}) \right] \\ & + \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-\bar{r})} - 4t \right], \end{aligned} \quad (89)$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido por Petsev y Lopez [60]. En la Ec.(89) los términos que son función de la coordenada radial adimensional  $\bar{r}$  representan la distribución del potencial eléctrico dentro de la doble capa eléctrica, mientras que los términos restantes representan el potencial eléctrico en superficie sólida del microcanal. Por lo tanto, la Ec.(89) puede representarse como:

$$\bar{u}^0 = \frac{1}{\bar{\zeta}} [\bar{\zeta} - \bar{\psi}^0]. \quad (90)$$

El flujo volumétrico adimensional y por lo tanto, la distribución de velocidad adimensional sufrirá un decremento al aumentar  $\bar{f}$ . Dado que la constante viscoeléctrica adimensional está definida como  $\bar{f} = f\psi_c^2/\lambda_D^2$ , se reconoce que el valor de esta constante no solo es función del soluto que se utilice, lo cual determina el valor de  $f$  sino que tendrá un valor mayor cuando la longitud de Debye  $\lambda_D$  disminuye. La Fig. 9 muestra el flujo volumétrico como función de  $\bar{f}$  para  $\bar{\zeta} = 1, 4$ . Se observa la influencia de ambos parámetros en la disminución de la velocidad electroosmótica y por lo tanto en el flujo volumétrico adimensional obtenido, teniendo  $f$  un efecto lineal para un valor de  $\zeta$  dado, mientras que el potencial zeta en la pared del microcapilar tiene una influencia mucho mayor y de carácter no lineal sobre el comportamiento del flujo. Se observa que aún para valores muy altos de  $\bar{f} \approx 0,010$  el efecto viscoeléctrico tiene una aportación muy baja al campo de flujo, es para valores mayores del potencial zeta cuando el efecto viscoeléctrico se vuelve de importancia. Es importante notar que la teoría lineal de flujos electroosmóticos predice que para valores  $\bar{\kappa} \gg 1$  el caudal varía de manera lineal con el potencial zeta [8, 64], sin embargo, es al considerar el efecto viscoeléctrico que la relación no lineal del caudal con el valor del potencial eléctrico se puede apreciar fácilmente en la Fig. 10.



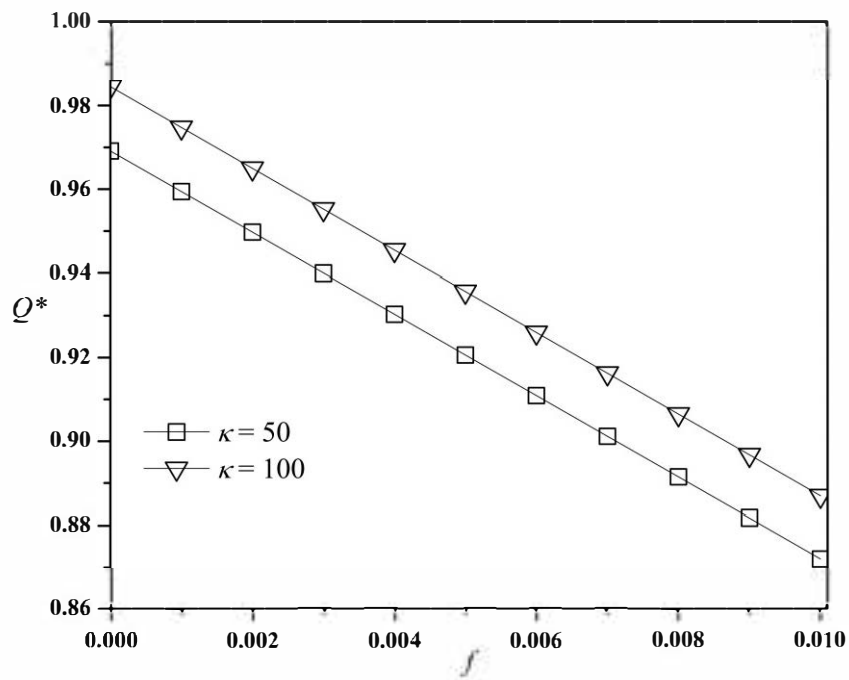


Figura 8: Efecto de  $\bar{\kappa}$  y  $\bar{f}$  en el flujo volumétrico para  $\bar{\zeta} = 4$ .

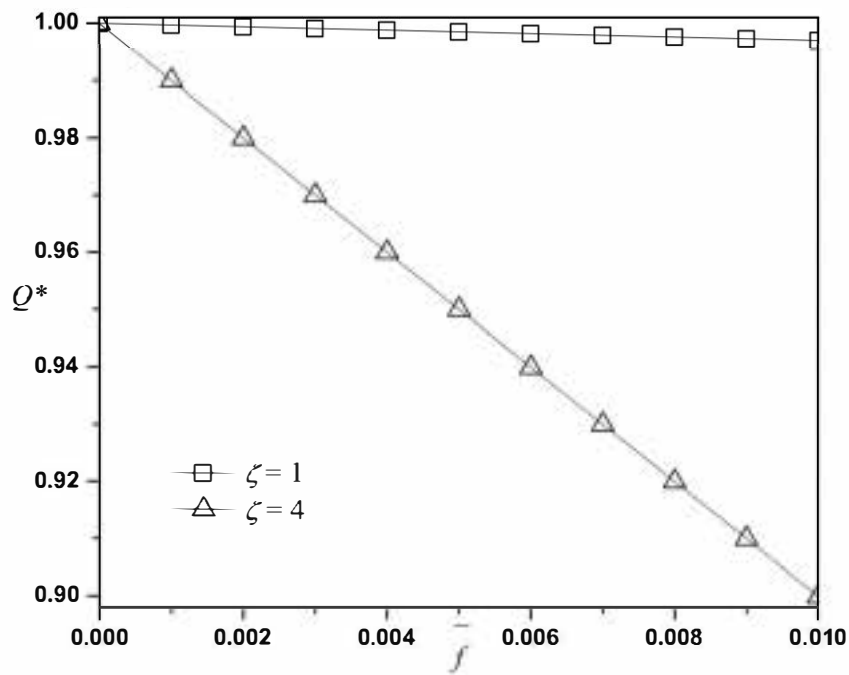


Figura 9: Efecto de  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{f}$  en el flujo volumétrico para  $\bar{\kappa} = 100$ .

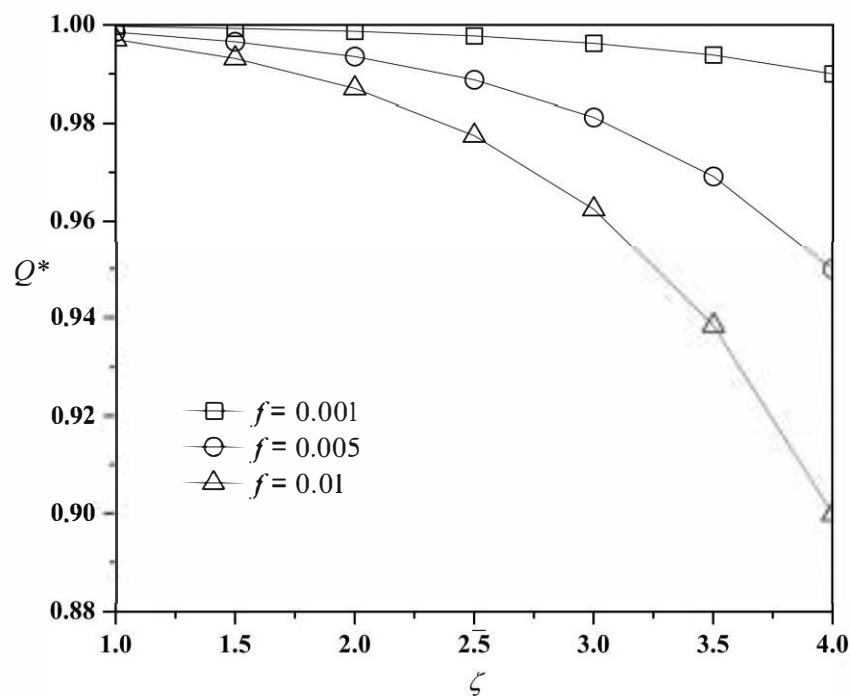


Figura 10: Efecto de  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{f}$  en el flujo volumétrico para  $\bar{\kappa} = 50$ .

## 5. Calentamiento Joule y efecto viscoeléctrico en un flujo electroosmótico

### 5.1. Descripción del problema

En los flujos electroosmóticos existe la presencia inevitable del calentamiento Joule en la fase líquida al aplicarse un campo eléctrico axial el cuál genera el flujo. Esta fuente de calor que se produce de manera interna provocará un incremento en la temperatura no homogéneo dentro del fluido que puede llegar a ser de magnitud considerable [21]. Este fuerte aumento en la temperatura afectará por lo tanto los campos de potencial eléctrico y de flujo por medio del acomplamiento de estos por medio de la dependencia de la conductividad y la viscosidad del fluido con la temperatura. Esta dependencia ha sido estudiada con anterioridad por otros autores, como Xuan y Li [27, 80] quienes demostraron que la magnitud de la velocidad electroosmótica aumenta debido a la disminución de la viscosidad y que el campo de velocidades obtiene una forma convexa a lo largo del microcanal a excepción de las zonas cercanas a los extremos, donde se obtiene una forma cóncava junto con la aparición de un campo eléctrico no uniforme a lo largo del microcanal. Estos cambios en el perfil de velocidad llevan a la aparición de gradientes axiales de presión a lo largo del microcanal para el cumplimiento de la ecuación de continuidad. La dependencia de la conductividad eléctrica y la viscosidad con la temperatura provoca que el sistema de ecuaciones de gobierno del problema se encuentren fuertemente acopladas entre sí, por lo que no es posible obtener una solución analítica exacta y requiriéndose por lo tanto utilizar técnicas asintóticas para obtener una solución utilizando como parámetro de perturbación una relación adimensional con el gradiente de temperatura característico del sistema. Mientras que la solución matemática del primer orden de magnitud de las ecuaciones

de gobierno se mantiene similar a la solución presentada en el caso presentado anteriormente es durante la solución del siguiente orden de magnitud en el que la dependencia con la temperatura presenta dificultades para la solución por métodos analíticos dado que el término de  $\sinh[\psi]$  presentado en la ecuación del potencial eléctrico una dependencia con la temperatura, definida por funciones exponenciales [58]. Siendo la solución del potencial eléctrico presente en la solución para el campo de velocidad y el campo de presiones e introduciendo la no linealidad al encontrarse en el denominador de los términos con una forma  $1 + \bar{f} \frac{d\psi}{dy}$  el cuál no podrá ser linealizado bajo las consideraciones del presente estudio, esto último junto con la complejidad de la función solución del potencial eléctrico provocan que la solución analítica para el campo de velocidades y presiones se dificulte, optando por la utilización de métodos numéricos aplicados por medio del software Wolfram Mathematica 8.0 para su solución.

Para el modelo matemático del problema que considera la acción del calentamiento Joule y el efecto viscoeléctrico se considera un EOF de un fluido newtoniano en un canal de placas planas de altura  $2H$  y longitud  $L$ . Las aplicaciones típicas de un EOF requieren que  $L \gg H$  y el flujo es producido sólo por el efecto de fuerzas electrostáticas causadas por un campo eléctrico  $E_x$  que actúa en la dirección axial. Este campo eléctrico está dado por  $E_x = \phi_0/L$  donde  $\phi_0$  es el valor del campo eléctrico impuesto en la entrada del microcanal, como se muestra en la Fig. 11. La entrada y la salida del microcanal se encuentran conectadas a depósitos que poseen una temperatura de referencia  $T_0$  y presión  $P_0$ , de manera análoga a los trabajos presentados por Xuan en [20] y [80]. Se considera un flujo calor hacia las paredes del microcanal  $q$  a lo largo de la coordenada longitudinal ( $0 \leq x \leq L$ ) y se considera que los extremos del microcanal son adiabáticos, esto porque se trabaja bajo la consideración de que las pérdidas de calor hacia los extremos del microcanal son mucho menores que el flujo de calor hacia las paredes. Debido a la geometría del microcanal, de placas planas se establece un sistema de coordenadas rectangular  $(x, y)$  con el origen ubicado en la entrada del microcanal y el eje  $x$  ubicado a lo largo de su eje longitudinal, como se muestra en la Fig. 11.

Se siguen además las siguientes suposiciones:

- El flujo es laminar y el correspondiente número de Reynolds es mucho menor respecto a la unidad  $Re \ll 1$ .
- El fluido es un electrolito simétrico ( $z : z$ )
- El campo eléctrico externo aplicado  $E_x$  es débil en comparación con el campo eléctrico a través de la EDL, esto significa que el campo eléctrico externo perturba la estructura de la EDL por una cantidad despreciable, como se presenta en los trabajos de los autores Hunter et al. [36] y Saville [74].
- La permitividad dieléctrica no depende del potencial eléctrico, esto se debe a que cambios de un 10 % en la viscosidad de los líquidos se espera que ocurra en campos eléctricos de  $E = 2 \times 10^5$  V/cm el cuál es mucho menor al campo eléctrico requerido para un cambio de 10 % en la permitividad ( $E = 1,5 \times 10^6$  V/cm) [31].
- La viscosidad y la conductividad eléctrica son consideradas dependientes de la temperatura [80]. Esta suposición tiene un efecto en los campos de velocidad en la dirección longitudinal y en la existencia de gradientes de presión inducidos en el fluido.

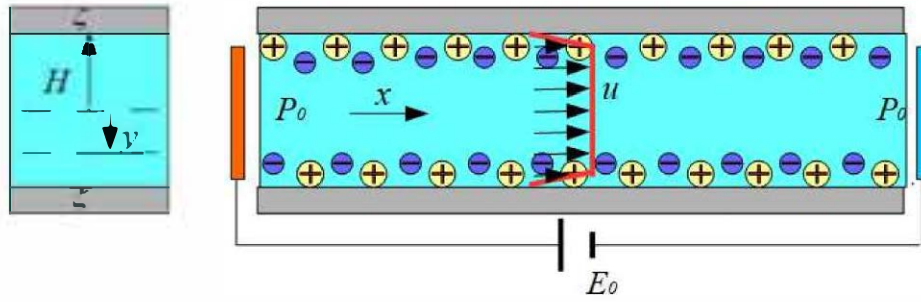


Figura 11: Diagrama del modelo físico a tratar.

- El potencial  $\zeta$  no varía en la dirección axial. Para relajar esta suposición se podría considerar la dependencia del potencial con la temperatura como es reportado por [35].
- Aunque en la capa difusa la viscosidad local llega a aumentar debido a la alineación de dipolos del solvente [39], en este trabajo se desprecia dicho efecto.

## 5.2. Planteamiento del problema

Las ecuaciones acopladas que describen el flujo en estado estacionario del EOF son la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (91)$$

las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones  $x$  y  $y$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho_e E_x, \quad (92)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho_e E_y, \quad (93)$$

y la ecuación de energía,

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_f \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \sigma E_x^2. \quad (94)$$

En las Ecs.(91)-(94),  $\tau_{xy}$  es el esfuerzo cortante,  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$  representan los esfuerzos normales,  $u$  y  $v$  son las componentes de velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente,  $P$  es la presión hidrodinámica. Los símbolos  $\rho$  y  $\rho_e$  denotan la densidad del fluido y la densidad neta de carga de la solución electrolítica,  $T$  es la temperatura del fluido,  $C_p$  and  $k_f$  son el calor específico y la conductividad térmica, respectivamente. La conductividad eléctrica es definida como una función dependiente de la temperatura, de la manera siguiente

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 + a (T_f - T_0) \right], \quad (95)$$

donde  $\sigma_0$  es la conductividad eléctrica evaluada a una temperatura de referencia  $T_0$ ,  $a$  es el coeficiente de temperatura [64]. Los símbolos  $E_x$  y  $E_y$  representan los campos eléctricos en las direcciones  $x$  y  $y$ , definidos como:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}, \quad (96)$$

y

$$E_y = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}. \quad (97)$$

El potencial eléctrico  $\Phi$  está determinado por la ecuación de Poisson,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (98)$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad dieléctrica del fluido, la cual se considera como una constante. La densidad de carga  $\rho_e$  está definida para un electrolito simétrico monovalente de la siguiente manera

$$\rho_e = -FC_0z \left( e^{\frac{ze\psi}{kT}} - e^{-\frac{ze\psi}{kT}} \right), \quad (99)$$

lo cual puede ser expresado utilizando expresiones trigonométricas hiperbólicas

$$\rho_e = -FC_0z \sinh\left[\frac{ze\psi}{kT}\right]. \quad (100)$$

Finalmente, la ecuación de continuidad de corriente, dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = 0. \quad (101)$$

La conductividad eléctrica es considerada dependiente de la temperatura, por lo tanto, un cambio en esta propiedad producirá cambios en el campo eléctrico, lo que provocará una modificación en la solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento ya que modificará el valor del término fuente que es función de  $\rho_e$  y  $E_x$ .

Las ecuaciones mostradas con anterioridad, Ecs.(91-94) y Ecs.(98-101), se encuentran sujetas a las siguientes condiciones de frontera

$$u(x, y = H) = v(x, y = H) = 0, \quad (102)$$

$$\phi(x = 0) = \phi_0, \phi(x = L) = 0, \quad (103)$$

$$\psi(y = 0) = 0, \psi(y = H) = \zeta, \quad (104)$$

$$P(x = 0, y) = P(x = L, y) = P_0, \quad (105)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y = 0) = 0, T(x = 0, y) = T(x = L, y) = T_0, \quad (106)$$

la condición de frontera Ec.(102) representa las condiciones de no deslizamiento e impermeabilidad, la Ec.(103) representa el campo eléctrico impuesto en  $x = 0$  como  $\phi_0$  con la salida del canal en condición de aislamiento, la condición representada en la Ec.(104) representa el potencial eléctrico en la pared (potencial  $\zeta$ ) y el como, fuera de la EDL, este potencial cae rápidamente aproximándose a cero. La condición indicada en la Ec.(105) corresponde a la suposición de esta misma formulación de que no existe un gradiente de presión tanto en la entrada como en la salida del microcanal, por lo tanto, corresponde a un flujo puramente electroosmótico. El último conjunto de condiciones de frontera Ec.(106) representa la simetría de la distribución de temperatura a lo largo de la dirección transversal en el microcanal [80].

### 5.3. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de gobierno presentadas anteriormente son adimensionalizadas a partir de las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{x}{L}, & Y &= \frac{y}{H}, \\
 \bar{\phi} &= \frac{\phi}{\phi_c}, & \bar{\psi} &= \frac{\psi}{\psi_c}, \\
 \bar{u} &= \frac{u}{U_{HS}}, & \bar{v} &= \frac{vL}{U_{HS}H}, \\
 \bar{P} &= \frac{(P' - P'_0) H^2}{\eta_0 U_{HS} L}, & P' &= P - \frac{\epsilon \kappa^2 \psi^2}{2}, \\
 \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\tau_{xy} H}{\eta_0 U_{HS}}, & \bar{\tau}_{xx} &= \frac{\tau_{xx} H}{\eta_0 U_{HS}}, \\
 \bar{\tau}_{yy} &= \frac{\tau_{yy} H}{\eta_0 U_{HS}}, & \theta &= \frac{T - T_0}{\Delta T_c},
 \end{aligned} \tag{107}$$

donde  $\Delta T_c = \frac{\sigma_0 E_0^2 H L}{k_f}$  representa el incremento de temperatura característico en el fluido [58];  $U_{HS}$  es la velocidad electroosmótica de Helmholtz-Smoluchowski, definida como  $U_{HS} = \frac{-\epsilon \zeta E_0}{\eta_0}$  [8], donde  $\eta_0$  es la viscosidad del fluido en ausencia de efectos térmicos y eléctricos. Al expresar las ecuaciones de gobierno en términos de las variables adimensionales éstas toman la forma siguiente

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0, \tag{108}$$

$$\beta Re \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} + \beta \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial Y} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi}, \tag{109}$$

$$\beta^3 Re \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} + \beta^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \chi} + \beta \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial Y}, \tag{110}$$

$$Pe \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \bar{\sigma} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2, \tag{111}$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 \sinh \left[ \frac{\bar{\psi}}{1 + \alpha \theta} \right], \tag{112}$$

$$\beta^2 \zeta \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right) = 0. \tag{113}$$

Para la ecuación adimensional de la cantidad de movimiento en la dirección  $Y$  no aparece el término de la fuerza eléctrica dado que al partir de la ecuación de gobierno Ec.(93) se sustituye la presión de Maxwell en el gradiente de presión

$$P = P' + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2, \tag{114}$$

mientras que los términos  $\rho_e$  y  $E_y$  son sustituidos por sus definiciones, mostradas a continuación:

$$\rho_e = -\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(y)}{\partial y}. \quad (115)$$

Al introducir estas definiciones en la ecuación de gobierno se obtiene

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( P' + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi(y)}{\partial y}, \quad (116)$$

al derivarse en  $y$  el segundo término de la presión de Maxwell se obtiene

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (117)$$

con lo cual puede eliminarse el término de la fuerza eléctrica. En las ecuaciones adimensionales de gobierno Ecs.(108-113) aparecen parámetros adimensionales los cuáles se definen a continuación:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho U_{HS} H}{\eta_0}, & Pe &= \frac{\rho C_p U_{HS} H}{k_f}, \\ \varsigma &= \frac{\phi_c}{\psi_c}, & \beta &= \frac{H}{L}, \\ \bar{\zeta} &= \frac{\zeta}{\psi_c}, & \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_o}, \\ \alpha &= \frac{\Delta T_c}{T_0}, & \bar{\sigma} &= 1 + \Gamma \theta, \\ \Gamma &= a \Delta T_c. \end{aligned} \quad (118)$$

En los parametros anteriores, Ecs.(118), se presentan las definiciones de los números adimensionales de Reynolds y Péclet, que representan la proporción entre las fuerzas inerciales y viscosas y la relación entre la advección y la difusión de una cantidad física.

#### 5.4. Expansión asintótica en $\beta \rightarrow 0$

Se realiza un análisis asintótico del sistema de ecuaciones adimensionales Ecs.(108)-(113), utilizando los parámetros adimensionales  $\beta$  y  $Re$  [58]. Bajo las suposiciones realizadas estos parámetros son de magnitud mucho menor a la unidad. Las ecuaciones adimensionales de cantidad de movimiento contienen dos parámetros adimensionales, los cuáles son  $\beta$  y  $\beta^2 Re$ , ambos deben ser de pequeña magnitud para justificar la utilización de la teoría de la lubricación en su análisis, esto es decir, considerarse velocidades muy bajas de flujo  $Re < 1$  y que la geometría del microcanal se presente como un canal delgado e infinitamente largo  $\beta = \frac{H}{L} < 1$ . Se considera un  $Re$  fijo e independiente de  $\beta$ , por lo tanto  $\beta Re \rightarrow 0$  cuando  $\beta \rightarrow 0$ , el análisis bajo este esquema necesita que se desprezice la contribución de los términos viscosos de orden  $O(\beta)$  y  $O(\beta^2)$ , y los términos inerciales  $O(\beta Re)$  y  $O(\beta^2 Re)$  en las Ecs.(109) y (110), por lo que

se puede aplicar una expansión asintótica a las variables como se presenta a continuación:

$$\bar{u} = u_0 + \beta u_1 + \dots, \quad (119)$$

$$\bar{v} = v_0 + \beta v_1 + \dots, \quad (120)$$

$$\bar{P} = P_0 + \beta P_1 + \dots, \quad (121)$$

$$\bar{\theta} = \theta_0 + \beta \theta_1 + \dots, \quad (122)$$

$$\bar{\psi} = \psi_0 + \beta \psi_1 + \dots, \quad (123)$$

$$\bar{\phi} = \phi_0 + \beta \phi_1 + \dots, \quad (124)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \beta \sigma_1 + \dots \quad (125)$$

utilizando estas expresiones, las ecuaciones adimensionales de gobierno en el límite  $\beta \rightarrow 0$  y  $\beta Re \rightarrow 0$  pueden escribirse como

$$\frac{\partial u_0}{\partial \chi} + \frac{\partial v_0}{\partial Y} = 0, \quad (126)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial \chi} = \exp[-\delta\theta_0] \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( 1 + f^* \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial Y} \right) \right] + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial Y^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \chi}, \quad (127)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial Y} = 0. \quad (128)$$

De los términos difusivos de la ecuación de la energía Ec.(111) se tiene que

$$\frac{\Delta T_x}{L^2} \sim \frac{\Delta T_Y}{H^2}, \quad (129)$$

lo cuál puede reescribirse como

$$\frac{\Delta T_x}{L} \sim \frac{L}{H} \frac{\Delta T_Y}{H}, \quad (130)$$

donde  $\frac{L}{H} \gg 1$ , esto indica que la caída de temperatura en la dirección longitudinal es mayor a la caída en la dirección transversal, con esto puede considerarse la temperatura como un valor constante a lo largo de  $Y$ . Para obtener una relación para la temperatura solo dependiente de la variable longitudinal  $\chi$  se integra la Ec.(111) en  $Y$

$$Pe \int_0^1 u \frac{\partial \theta}{\partial \chi} dY = \int_0^1 \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} dY + \int_0^1 \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} dY + \int_0^1 \bar{\sigma} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 dY, \quad (131)$$

esto puede reescribirse al sacar los términos no dependientes de  $Y$  de las integrales

$$Pe \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \int_0^1 u dY = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} \int_0^1 dY + \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} dY + \bar{\sigma} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 \int_0^1 dY, \quad (132)$$

para evaluar los límites del término  $\frac{\partial \theta}{\partial Y}$  se considera que tendrá un valor de 0 dentro del dominio, sin embargo, en la frontera con la superficie del microcapilar ( $Y = 1$ ) se tiene que la interacción con la superficie será dada por la ley de enfriamiento de Newton

$$q = h_{eq}(T - T_0), \quad (133)$$



utilizando la ley de Fourier de conducción de calor y la definición de la escala adimensional de temperatura

$$q = k_f \frac{\partial T}{\partial y}, \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_c}, \quad (134)$$

igualando ambas expresiones para el flujo de calor hacia la superficie del microcapilar  $q$  y adimensionalizando se obtiene

$$-k_f \frac{\Delta T_c}{H} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = h_{eq} \Delta T_c \theta, \quad (135)$$

el signo negativo en la parte izquierda de la igualdad es debido a que el flujo de calor se dirige hacia la superficie del microcanal, despejando  $\frac{\partial \theta}{\partial Y}$  de lo anterior se obtiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -\frac{h_{eq} H}{k_f} \theta, \quad (136)$$

sustituyendo ahora los parámetros adimensionales

$$\lambda = \frac{h_{eq} H}{k_f}, \quad (137)$$

$$\bar{\sigma} = 1 + \Gamma \theta, \quad (138)$$

se obtiene la ecuación de la energía

$$Pe \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \int_0^1 u_0 dY = \beta \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2} - \frac{1}{\beta} \lambda \theta_0 + (1 + \Gamma \theta_0) \left( \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \chi} \right)^2, \quad (139)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 \sinh \left[ \frac{\psi_0}{1 + \alpha \theta_0} \right], \quad (140)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left( (1 + \Gamma \theta_0) \frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \right) = 0. \quad (141)$$

En las Ecs. (126)-(128) y Ecs. (139)-(141) se definen los siguientes parámetros:

$$\Gamma = a \Delta T_c, \alpha = \frac{\Delta T_c}{T_0}, \delta = b \Delta T_c, \quad (142)$$

$$f^* = f \left( \frac{\psi_c}{H} \right)^2. \quad (143)$$

Acorde a la Ec.(128), la presión  $P_0$  es dependiente solamente de  $\chi$  y el problema hidrodinámico puede ser descrito utilizando la solución de las Ecs.(126) y (127), las cuáles se conocen como las ecuaciones de lubricación. De la Ec.(139) se observa que la variable de la temperatura presentará una variación en la variable  $\chi$  afectada por la magnitud de de velocidad  $u_0$ ,  $u_0$  también se mantiene como función de la variable adimensional  $\chi$  y  $Y$ . La variación de  $u_0$  en  $\chi$  por lo tanto afectará en el campo de presiones  $P_0$ . Es de notar que aunque las Ecs.(108)-(110) son exactas, las ecuaciones de lubricación son la aproximación del primer orden de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en el límite asintótico  $\beta \rightarrow 0$ .

### 5.5. Expansión asintótica en $\Gamma \rightarrow 0$

En este límite se consideran valores pequeños del parámetro referente al cambio de temperatura  $\Gamma$  comparado a la unidad, se realiza otra perturbación regular para las variables dependientes  $u_0, v_0, P_0, \theta_0, \psi_0, \phi_0$  con las siguientes expansiones asintóticas en el parámetro  $\Gamma$ .

$$u_0 = u_{0,0} + \Gamma u_{0,1} + \dots, \quad (144)$$

$$v_0 = \Gamma v_{0,1} + \dots, \quad (145)$$

$$P_0 = \Gamma P_{0,1} + \dots, \quad (146)$$

$$\theta_0 = \theta_{0,0} + \Gamma \theta_{0,1} + \dots, \quad (147)$$

$$\psi_0 = \psi_{0,0} + \Gamma \psi_{0,1} + \dots, \quad (148)$$

$$\phi_0 = \phi_{0,0} + \Gamma \phi_{0,1} + \dots \quad (149)$$

Sustituyendo las expansiones en las ecuaciones acopladas Ecs.(126)-(141), se pueden reescribir utilizando las relaciones con  $\Delta T_c$  de los parámetros adimensionales  $\Gamma, \alpha$  y  $\delta$  expuestas en la Ec.(142). Considerando que  $\Delta T_c = \frac{\Gamma}{a}$  se puede sustituir esta definición en las definiciones de los parámetros adimensionales  $\alpha$  y  $\delta$  para expresarlos en términos de  $\Gamma$  como se presenta a continuación

$$\delta = \frac{b}{a} \Gamma, \quad (150)$$

$$\alpha = \frac{1}{aT_0} \Gamma. \quad (151)$$

Separando los términos por su orden de magnitud en  $\Gamma$ , se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones. Para  $\Gamma^0$ :

$$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial \chi} = 0, \quad (152)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( 1 + f^* \left( \frac{d\psi_{0,0}}{dY} \right)^2 \frac{\partial u_{0,0}}{\partial Y} \right) \right] = \frac{1}{\zeta} \frac{d^2 \psi_{0,0}}{dY^2} \frac{d\phi_{0,0}}{d\chi}, \quad (153)$$

$$Pe \frac{d\theta_{0,0}}{d\chi} \int_0^1 u_{0,0} dY = \beta \frac{d^2 \theta_{0,0}}{d\chi^2} - \frac{1}{\beta} \lambda \theta_{0,0} + \left( \frac{d\phi_{0,0}}{d\chi} \right)^2, \quad (154)$$

$$\frac{d^2 \psi_{0,0}}{dY^2} = \bar{\kappa}^2 \sinh [\psi_{0,0}], \quad (155)$$

$$\frac{d^2 \phi_{0,0}}{d\chi^2} = 0, \quad (156)$$

para  $\Gamma^1$  se obtiene:

$$\frac{\partial u_{0,1}}{\partial \chi} + \frac{\partial v_{0,1}}{\partial Y} = 0, \quad (157)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{0,1}}{\partial \chi} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \exp \left[ -\frac{b}{a} \theta_{0,0} \right] 2f^* \frac{d\psi_{0,0}}{dY} \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial Y} \frac{\partial u_{0,0}}{\partial Y} \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \exp \left[ -\frac{b}{a} \theta_{0,0} \right] \left( \left( 1 + f^* \left( \frac{d\psi_{0,0}}{dY} \right)^2 \right) \frac{\partial u_{0,1}}{\partial Y} \right) \right] \\
&- \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ \frac{d^2 \psi_{0,0}}{dY^2} \frac{\partial \phi_{0,1}}{\partial \chi} + \frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial Y^2} \frac{d\phi_{0,0}}{d\chi} \right],
\end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned}
Pe \frac{d\theta_{0,1}}{d\chi} \int_0^1 u_{0,1} dY &= \beta \frac{d^2 \theta_{0,1}}{d\chi^2} - \frac{1}{\beta} \lambda \theta_{0,1} + \theta_{0,0} \left( \frac{\partial \phi_{0,1}^-}{\partial \chi} \right)^2 \\
&+ 2 \frac{d\phi_{0,0}^-}{d\chi} \frac{\partial \phi_{0,1}^-}{\partial \chi},
\end{aligned} \tag{159}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 \sinh \left[ \psi_{0,1} - \frac{\psi_{0,0} \theta_{0,0}}{a T_0} \right], \tag{160}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{0,1}}{d\chi^2} + \frac{d}{d\chi} \left[ \theta_{0,0} \frac{\partial \phi_{0,0}}{\partial \chi} \right] = 0, \tag{161}$$

y sus respectivas condiciones de frontera:

$$u_{0,i}(Y = 1) = 0, \quad i = 0, 1, \tag{162}$$

$$v_{0,1}(Y = 1, -1) = 0, \tag{163}$$

$$P_{0,1}(\chi = 0, 1) = 0, \tag{164}$$

$$\theta_{0,i}(\chi = 0, 1) = 0, \quad i = 0, 1, \tag{165}$$

$$\phi_{0,0}(\chi = 0) = 1, \quad \phi_{0,0}(\chi = 1) = 0, \tag{166}$$

$$\phi_{0,1}(\chi = 0) = 0, \quad \phi_{0,1}(\chi = 1) = 0, \tag{167}$$

$$\psi_{0,0}(Y = 0) = 0, \quad \psi_{0,0}(Y = 1) = \bar{\zeta}, \quad \frac{d\psi_{0,0}}{dY}(Y = 0) = 0, \tag{168}$$

$$\psi_{0,1}(Y = 0) = 0, \quad \psi_{0,1}(Y = 1) = 0, \quad \frac{d\psi_{0,1}}{dY}(Y = 0) = 0. \tag{169}$$

## 5.6. Metodología de solución

Las ecuaciones presentadas en la sección anterior son resueltas bajo la consideración de que la EDL es delgada, esto tiene como consecuencia que los gradientes del potencial eléctrico interno y del perfil de velocidad sean muy altos cerca de las superficies del microcanal, llegando a un gradiente cero en la frontera de la EDL con el volumen de fluido. De acuerdo a esto, la teoría de capa límite descrita por Petsev y Lopez en [60] es utilizada. Al considerar las ecuaciones de cantidad de movimiento y potencial eléctrico interno para ambos órdenes de magnitud Ecs.(153)

y (158), y Ecs.(155) y (160), respectivamente, en la region cerca de la pared, es conveniente reescalar la variable  $Y$  presentando la variable de escalamiento  $\gamma$ , la que se define como

$$\gamma = \bar{\kappa}(1 - Y), \quad (170)$$

de esta manera se obtienen ecuaciones representativas de la región interna de la EDL tanto para el potencial eléctrico como para el campo de velocidad, dichas ecuaciones se enumeran a continuación

$$\frac{d^2\psi_{0,0}}{d\gamma^2} = \sinh[\psi_{0,0}], \quad (171)$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \left[ \left( 1 + \bar{f} \left( \frac{d\psi_{0,0}}{d\gamma} \right)^2 \frac{\partial u_{0,0}}{\partial\gamma} \right) \right] = \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{d^2\psi_{0,0}}{d\gamma^2} \frac{d\phi_{0,0}}{d\chi}, \quad (172)$$

y para  $I^{-1}$

$$\frac{\partial^2\psi_{0,1}}{\partial\gamma^2} = \sinh \left[ \psi_{0,1} - \frac{\psi_{0,0}\theta_{0,0}}{aT_0} \right], \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{0,1}}{\partial\chi} &= \bar{\kappa}^2 \frac{\partial}{\partial\gamma} \left[ \exp \left[ -\frac{b}{a}\theta_{0,0} \right] 2\bar{f} \frac{d\psi_{0,0}}{d\gamma} \frac{\partial\psi_{0,1}}{\partial\gamma} \frac{\partial u_{0,0}}{\partial\gamma} \right] \\ &+ \bar{\kappa}^2 \frac{\partial}{\partial\gamma} \left[ \exp \left[ -\frac{b}{a}\theta_{0,0} \right] \left( \left( 1 + \bar{f} \left( \frac{d\psi_{0,0}}{d\gamma} \right)^2 \right) \frac{\partial u_{0,1}}{\partial\gamma} \right) \right] \\ &= \frac{\bar{\kappa}^2}{\bar{\zeta}} \left[ \frac{d^2\psi_{0,0}}{d\gamma^2} \frac{\partial\phi_{0,1}}{\partial\chi} + \frac{\partial^2\psi_{0,1}}{\partial\gamma^2} \frac{d\phi_{0,0}}{d\chi} \right], \end{aligned} \quad (174)$$

donde aparece una nueva variable adimensional  $\bar{f}$ , la cuál se define como:

$$\bar{f} = f^*\bar{\kappa}. \quad (175)$$

Al resolver Ecs.(152-156) y Ecs.(171-172) y utilizando la técnica del matching descrita en [76] para las ecuaciones de cantidad de movimiento y potencial eléctrico interno, se obtiene la solución de orden cero para el potencial eléctrico, campo de velocidades y campo de temperatura en el fluido, las cuales son:

$$\phi_{0,0} = 1 - \chi, \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,0} &= 2 \ln \left[ \frac{1 + t \exp(-\bar{\kappa}(1 - Y))}{1 - t \exp(-\bar{\kappa}(1 - Y))} \right] \\ &+ 4t \exp(-\bar{\kappa}) \sqrt{2\pi\bar{\kappa}} I_0(\bar{\kappa}) - 4t \exp(-\bar{\kappa}(1 - Y)), \end{aligned} \quad (177)$$

$$\begin{aligned}
u_{0,0} &= \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ -2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-Y)}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-Y)}} \right] + 2 \ln \left[ \frac{1+t}{1-t} \right] \right] \\
&+ \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ -4te^{-\bar{\kappa}}\sqrt{2\pi\bar{\kappa}}I_0(\bar{\kappa}Y) + 4te^{-\bar{\kappa}}\sqrt{2\pi\bar{\kappa}}I_0(\bar{\kappa}) \right] \\
&+ \frac{1}{\bar{\zeta}} \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-Y)} - 4t \right] + \frac{2\bar{f}}{\bar{\zeta}} \left[ -\sinh \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-Y)} \right] + \sinh \left[ 4t \right] \right] \\
&+ \frac{4\bar{f}}{\bar{\zeta}} \left[ 4te^{-\bar{\kappa}(1-Y)} - 4t - 2 \ln \left[ \frac{1 + te^{-\bar{\kappa}(1-Y)}}{1 - te^{-\bar{\kappa}(1-Y)}} \right] + 2 \ln \left[ \frac{1+t}{1-t} \right] \right] \\
&+ \frac{\bar{f}}{3\bar{\zeta}} \left[ \left( \frac{I_1(\bar{\kappa}Y)}{I_0(\bar{\kappa}Y)} \right)^2 \left( 4te^{-\bar{\kappa}}\sqrt{2\pi\bar{\kappa}}I_0(\bar{\kappa}Y) \right)^3 \right] \\
&- \frac{\bar{f}}{3\bar{\zeta}} \left[ \left( \frac{I_1(\bar{\kappa})}{I_0(\bar{\kappa})} \right)^2 \left( 4te^{-\bar{\kappa}}\sqrt{2\pi\bar{\kappa}}I_0(\bar{\kappa}) \right)^3 \right],
\end{aligned} \tag{178}$$

$$\theta_{0,0} = \frac{\beta}{\lambda} \left[ \frac{\exp[m_2\chi] - \exp[m_1\chi]}{\exp[m_2] - \exp[m_1]} (\exp[m_1] - 1) + 1 - \exp[m_1\chi] \right], \tag{179}$$

donde

$$t = \tanh \left[ \frac{\bar{\zeta}}{4} \right], \tag{180}$$

$$m_1 = \frac{1}{2\beta} \left( Pek_1 + (Pe^2k_1^2 + 4\lambda)^{\frac{1}{2}} \right), \tag{181}$$

$$m_2 = \frac{1}{2\beta} \left( Pek_1 - (Pe^2k_1^2 + 4\lambda)^{\frac{1}{2}} \right), \tag{182}$$

$$k_1 = \int_0^1 u_{0,0} dY. \tag{183}$$

Utilizando un procedimiento similar, se obtiene la solución para  $O(\Gamma)$  del potencial eléctrico, campo de velocidades, campo de presiones y campo de temperatura al resolver Ecs.(157)-(161) y Ecs.(173)-(174)

$$\phi_{0,1} = \int_0^1 \theta d\chi - \int_0^1 \theta(0) d\chi + \chi \left( \int_0^1 \theta(0) d\chi - \int_0^1 \theta(1) d\chi \right) + C_\phi. \tag{184}$$

donde al sustituir la condición de frontera para  $\phi_{0,1}(0) = 0$  se obtiene el valor de la constante de integración  $C_\phi = 0$ .

$$\begin{aligned}\psi_{0,1} &= 4 \tanh^{-1} \left[ n(\chi) e^{-\kappa(1-Y)} \right] + \frac{\psi_{im0,0}\theta}{aT_0} \\ &- 4 \left( n(\chi) e^{-\kappa(1-Y)} \right) - \frac{\psi_{cm0,0}\theta}{aT_0} \\ &+ C_\psi \sinh[\kappa Y] - \frac{D(\chi)}{2\kappa} e^{-\kappa Y} \\ &+ D(\chi) \left( \frac{1}{2\kappa} \cosh[\kappa Y] - Y \sinh[\kappa Y] \right),\end{aligned}\quad (185)$$

donde

$$\int_0^1 \theta d\chi = \frac{\beta}{\lambda} \left( -\frac{e^{m_1\chi}}{m_1} + \frac{e^{m_1\chi}(-1+e^{m_1})}{(e^{m_1}-e^{m_2})m_1} - \frac{e^{m_2\chi}(-1+e^{m_1})}{(e^{m_1}-e^{m_2})m_2} + \chi \right) + C_\theta, \quad (186)$$

donde al sustituir la condición de frontera para  $\theta(0) = 0$  se obtiene el valor de la constante de integración  $C_\theta = 0$ . En la Ec.(185) aparecen parámetros que son definidos a continuación;

$$n(\chi) = -\tanh \left[ \frac{\zeta\theta}{4aT_0} \right], \quad (187)$$

$$\psi_{im0,0} = 4 \tanh^{-1} \left[ te^{-\kappa(1-Y)} \right], \quad (188)$$

$$\psi_{cm0,0} = 4te^{-\kappa}, \quad (189)$$

$$G(\chi) = \frac{\kappa\theta}{2aT_0}, \quad (190)$$

$$D(\chi) = G(\chi) \frac{4te^{-\kappa}}{\cosh[\kappa]}, \quad (191)$$

$$\begin{aligned}C_\psi &= \frac{1}{\sinh[\kappa]} \left( \psi_{cm0,1} + \frac{D(\chi)}{2\kappa} e^{-\kappa} \right) \\ &- \frac{1}{\sinh[\kappa]} \left( D(\chi) \left( \frac{1}{2\kappa} \cosh[\kappa Y] - Y \sinh[\kappa Y] \right) \right).\end{aligned}\quad (192)$$

$$\psi_{cm0,1} = 4 \left( n(\chi) e^{-\kappa(1-Y)} \right) - \frac{\psi_{cm0,0}\theta}{aT_0}, \quad (193)$$

Las soluciones para los campos interno y externo del potencial eléctrico se obtienen al introducir las expresiones obtenidas para cada orden de magnitud en sus respectivas expansiones asintóticas Ecs.(148) y (149)

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \psi_{0,0} + \Gamma\psi_{0,1} + \dots, \\ \phi_0 &= \phi_{0,0} + \Gamma\phi_{0,1} + \dots,\end{aligned}$$

la ecuación que resolverá la cantidad de movimiento para la región interna se obtiene al despejar de la Ec.(174) el término de la velocidad para el orden de magnitud  $\Gamma$ , quedando en función

del gradiente de presión inducido como

$$\begin{aligned}
 u_{0,1,in} &= \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{\frac{\partial P_1}{\partial \chi} (\frac{\gamma}{\bar{\kappa}} - 1)}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} \right) d\gamma \\
 &+ \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} + \frac{b\theta}{a\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} \right) d\gamma \\
 &- 2 \int_0^1 \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \frac{\frac{\partial u_{0,in}}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} d\gamma,
 \end{aligned} \tag{194}$$

donde

$$\frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} = -2 \sinh \left[ 2 \tanh^{-1} [te^{-\gamma}] \right] \tag{195}$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \gamma} = -1 \tag{196}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma} = \theta(\chi) + \int_0^1 \theta(0) d\chi - \int_0^1 \theta(1) d\chi \tag{197}$$

$$\frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma} = -2 \sinh \left[ 2 \tanh^{-1} [n(\chi) e^{-\gamma}] \right] \tag{198}$$

$$\frac{\partial u_{0,in}}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left( 1 - \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2 \right) \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \tag{199}$$

Esta última integración tuvo que ser resuelta por medio del software computacional Wolfram Mathematica 8.0. De la misma manera, el campo de velocidades para la zona externa Ec.(158) se obtiene como:

$$\begin{aligned}
 u_{1,out} &= \int_0^1 \left( \frac{\frac{\partial P_1}{\partial \chi} Y}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} \right) dY \\
 &+ \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{1,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} + \frac{b\theta}{a\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} \right) dY \\
 &- 2 \int_0^1 \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \frac{\frac{\partial u_{0,out}}{\partial Y} \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \frac{\partial \psi_{1,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} dY,
 \end{aligned} \tag{200}$$

donde

$$\frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial \gamma} = 4e^{-\bar{\kappa}\bar{\kappa}t} \frac{1}{\cosh[\bar{\kappa}]} \sinh[\bar{\kappa}Y] \quad (201)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \gamma} = -1 \quad (202)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma} = \theta(\chi) + \int_0^1 \theta(0) d\chi - \int_0^1 \theta(1) d\chi \quad (203)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{1,out}}{\partial \gamma} &= \frac{1}{2} e^{-\bar{\kappa}Y} G(\chi) + G(\chi) \left( -\bar{\kappa}Y \cosh[\bar{\kappa}Y] - \frac{1}{2} \sinh[\bar{\kappa}Y] \right) \\ &+ \bar{\kappa} \cosh[\bar{\kappa}Y] \frac{1}{\sinh[\bar{\kappa}]} \left( \frac{e^{-\bar{\kappa}} G(\chi)}{2\bar{\kappa}} - G(\chi) \left( \frac{\cosh[\bar{\kappa}]}{2\bar{\kappa}} - \sinh[\bar{\kappa}] \right) \right) \\ &+ \bar{\kappa} \cosh[\bar{\kappa}Y] \frac{1}{\sinh[\bar{\kappa}]} (\psi_{1,in}(\chi, 0)) \end{aligned} \quad (204)$$

$$\frac{\partial u_{0,out}}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\zeta} \left( 1 - \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial \gamma} \right)^2 \right) \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial \gamma}, \quad (205)$$

del mismo modo que en la solución de la región interna, la integración de para obtener la solución de la zona externa se realiza a través del software computacional Wolfram Mathematica 8.0. Conociendo las expresiones para ambas regiones, la solución del  $O(\Gamma)$  se obtiene al conjuntar las soluciones para las regiones externas e internas con respecto de la EDL por medio del método del matching,

$$u_1 = u_{1,in} + u_{1,out} - u_{1,cm}, \quad (206)$$

donde  $u_{1,cm}$  representa los términos comunes entre la soluciones externa e interna, este término se obtiene de:

$$u_{1,cm} = u_{1,in}(Y = 0). \quad (207)$$

Hasta este momento en el procedimiento, se desconoce la solución para el campo de presiones, del cuál depende la solución para el campo de velocidades. Para obtener una respuesta para el campo de presiones, se sustituye Ec.(206) en la ecuación de continuidad de  $O(\Gamma)$ , Ec.(157) y se resuelve para la componente de la velocidad transversal  $v_1$

$$v_1 = - \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial \chi} \partial Y + C, \quad (208)$$

por la condición de impermeabilidad en las paredes del microcanal  $v_{0,1} = 0$  en  $Y = -1$  y en  $Y = 1$ . Con la condición de frontera en  $Y = -1$  se obtiene la constante de integración

$$C = \int \frac{\partial u_1}{\partial \chi} \partial Y|_{Y=-1}, \quad (209)$$

y al aplicar la condición de frontera en  $Y = 1$  se obtiene una expresión en la que la única incógnita es el gradiente de presión [58]. Para resolver para  $P_1$  se utilizó el método del disparo a través de software Wolfram Mathematica 8.0. La ecuación a resolver para la presión está dada



de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_1}{\partial \chi^2} = & \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} \right) d\gamma - \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} \right) d\gamma|_{\gamma=\bar{\kappa}} \right) dY \\
& + \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} + \frac{b\theta}{a\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} \right) d\gamma \right) dY \\
& - \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} + \frac{b\theta}{a\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma}}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} \right) d\gamma|_{\gamma=\bar{\kappa}} \right) dY \\
& - \int_0^1 \left( 2 \int_0^1 \frac{\frac{\partial u_{0,in}}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma}}{\bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} d\gamma + 2 \int_0^1 \frac{\frac{\partial u_{0,in}}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_{1,in}}{\partial \gamma}}{\bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} d\gamma|_{\gamma=\bar{\kappa}} \right) dY \\
& + \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} \right) dY \right) dY \tag{210} \\
& + \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{1,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} + \frac{b\theta}{a\bar{\zeta}} \frac{\frac{\partial \phi_0}{\partial \chi} \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} \right) dY \right) dY \\
& - \int_0^1 \left( 2 \int_0^1 \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \frac{\frac{\partial u_{0,out}}{\partial Y} \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \frac{\partial \psi_{1,out}}{\partial Y}}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} dY \right) dY \\
& + C \\
& \div \left( - \epsilon_0^1 t \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{(\frac{\gamma}{\bar{\kappa}} - 1)}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} d\gamma - \int_0^1 \frac{Y}{1 + \frac{\bar{f}}{\bar{\kappa}^2} \left( \frac{\partial \psi_{0,out}}{\partial Y} \right)^2} dY + \int \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{(\frac{\gamma}{\bar{\kappa}} - 1)}{1 + \bar{f} \left( \frac{\partial \psi_{0,in}}{\partial \gamma} \right)^2} d\gamma|_{\gamma=\bar{\kappa}} \right)
\end{aligned}$$

Para validar esta solución semi-analítica, se comparó el campo de presión inducido obtenido con el mostrado en el trabajo previo de Bautista et al. [58], confirmando una excelente congruencia entre ambas soluciones, la cuál se presenta en la Fig. 12.

Cuadro 2: Valores físicos utilizados para estimar el valor de los parámetros adimensionales.

Parámetro	Valor	Unidad
$a$	$\sim 10^{-2}$	$\text{K}^{-1}$
$b$	$\sim 10^{-2}$	$\text{K}^{-1}$
$E_0$	$\sim 10^3$	$\text{V m}^{-1}$
$H$	50 – 200	$\mu\text{ m}$
$k_f$	0,61 – 0,7	$\text{W K m}^{-1}$
$L$	$\sim 10^{-2}$	$\text{m}$
$\zeta$	$\sim 10^{-2}$	$\text{V}$
$\eta_0$	$\sim 10^{-3}$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

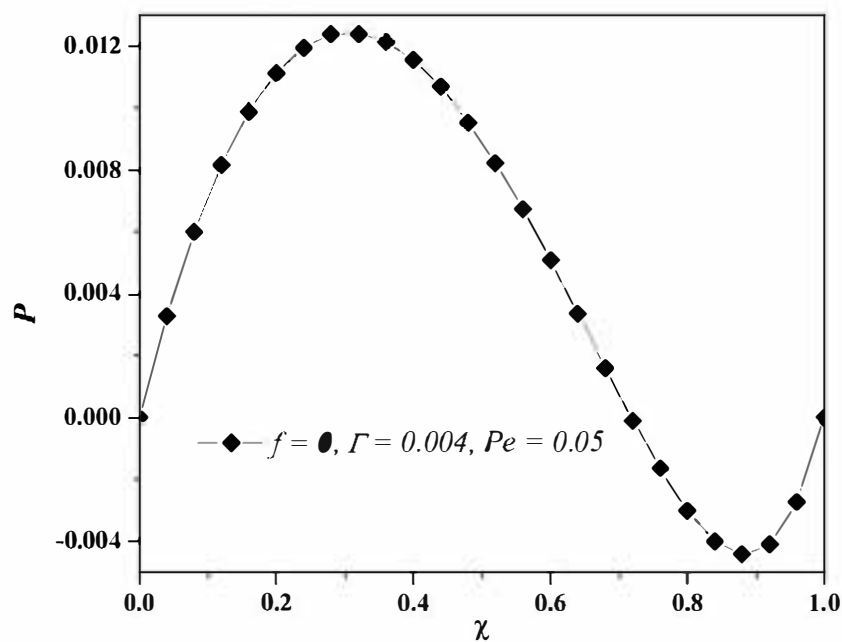


Figura 12: Solución del campo de presión inducida.

## 6. Resultados

### 6.1. Calentamiento Joule y efecto viscoeléctrico en un flujo electroosmótico

Para estimar el valor de los parámetros adimensionales usados en la solución semi-analítica realizada se utilizaron los valores típicos de propiedades de transporte y parámetros geométricos que se presentan en la Tabla 2. En consecuencia, el valor de los parámetros utilizados en el cálculo fueron los siguientes  $\bar{\kappa} = 30$ ,  $\Gamma = 0,004, 0,008$ ,  $a = 0,01$ ,  $b = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ ,  $Pe = 0,01, 0,05$ ,  $0 \leq \bar{f} \leq 0,004$ . La ecuación diferencial para el campo de presiones inducidas se resolvió por medio del método numérico del disparo con un tamaño de paso de  $\Delta\chi = 1 \times 10^{-5}$ . La Fig. 13 muestra la distribución del campo de presión inducida para diferentes valores del número de Péclet ( $Pe = 0,01, 0,05, 0,1$ ) y para un número fijo de la constante viscoeléctrica adimensional  $\bar{f} = 0,0022$  y se comparan estos perfiles con el campo de presión inducido en el caso

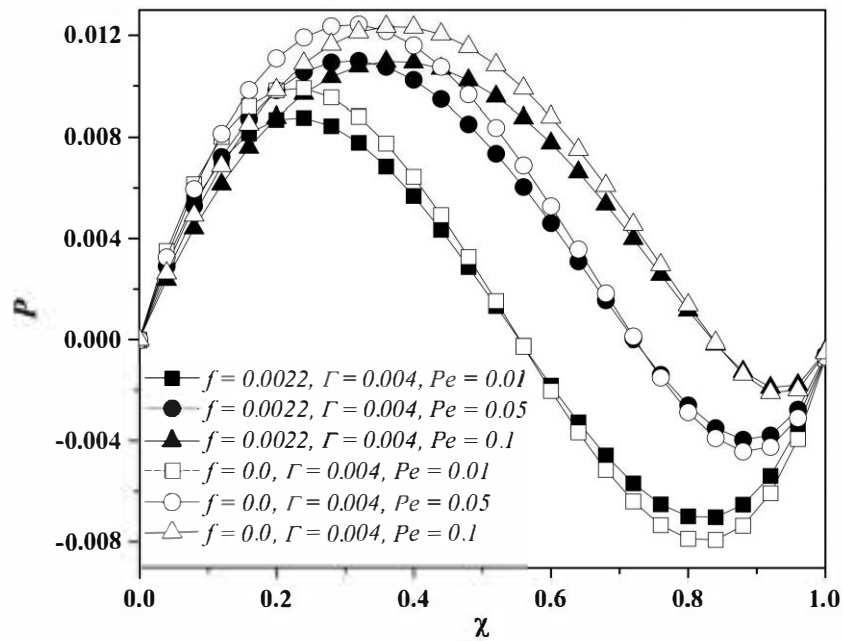


Figura 13: Presión inducida para distintos  $Pe$  y valores fijos de  $\bar{f}$ ,  $\bar{\zeta}$  y  $\Gamma$ .

en el que no se considera el efecto viscoeléctrico, lo que corresponde a un valor de la constante viscoeléctrica  $\bar{f} = 0$ . Esta presión inducida a lo largo del microcapilar se debe a la dependencia con respecto a la temperatura, este campo de presiones garantiza la ecuación de conservación de masa en el orden  $O(\Gamma)$ , donde se tienen considerados los efectos de la generación de calor volumétrica. Se muestra así que a mayores valores de la constante  $\bar{f}$  la longitud de Debye disminuye provocando un abultamiento de iones que llevará a una menor fuerza de arrastre de los mismos dentro de la doble capa, por lo que se obtienen velocidades menores y, por lo tanto, para mantener la ecuación de continuidad válida, la magnitud del campo de presión inducida no necesita ser tan alta como en el caso libre del efecto viscoeléctrico. Siendo el valor de  $Pe$  mayor, el perfil del campo de presiones tiende a desplazar su punto de inflexión a hacia la salida del microcanal, esto siendo debido a la capacidad que tiene el fluido de transportar el calor debido a su movimiento y a las condiciones de frontera que indica que las salidas del microcanal son sumideros térmicos; esto provoca que el efecto en el campo de presión del efecto viscoeléctrico se atenúe cerca de la salida. Es en las Figs. 14 y 15 en el que se muestra la relación del campo de presiones inducidas con los dos parámetros que rigen el fenómeno viscoeléctrico, tanto la constante viscoeléctrica adimensional  $\bar{f}$ , como el potencial zeta adimensional  $\bar{\zeta}$ , ambos términos provocarán que la viscosidad del fluido aumente, esto se refleja en el perfil de presión inducida ya que al aumentar la viscosidad del fluido se disminuye la transferencia de cantidad de movimiento en el fluido, lo que lleva a que el para mantener válida la ecuación de conservación de masa se requieran gradientes de presión inducida menores. Este aumento de la viscosidad está referido en la expresión obtenida por los autores Lyklema y Overbeek [31]

$$\eta = \eta_0 [1 + fE^2]$$

Coincidiendo por lo predicho por ambos autores, el efecto que tienen ambos parámetros difieren entre sí, presentándose como una relación lineal entre la magnitud de la presión inducida  $P$  y el valor de la constante viscoeléctrica adimensional  $\bar{f}$  y una relación no lineal de  $P$  con  $\bar{\zeta}$ . De

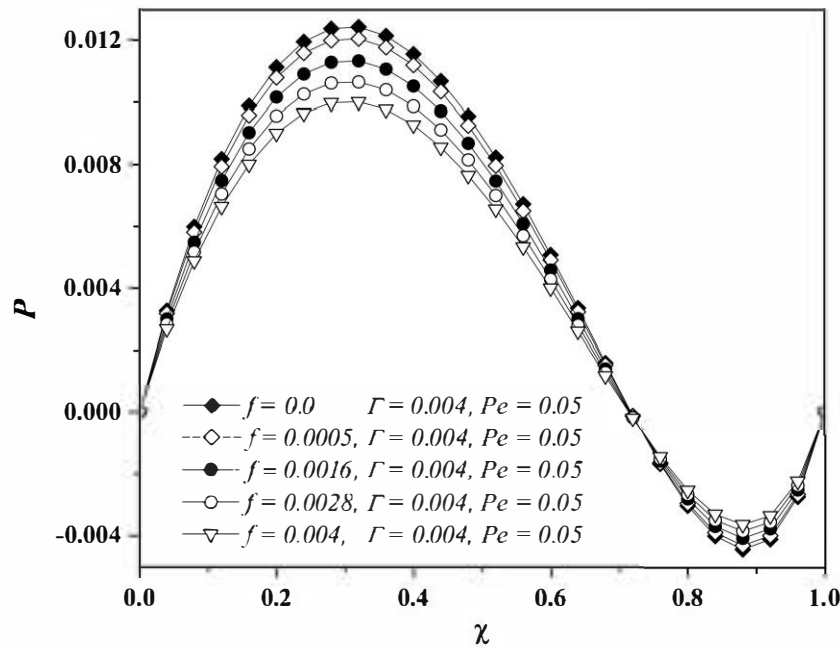


Figura 14: Presión inducida para distintos valores de  $\bar{f}$ .

aquí se desprende la ecuación anterior que describe una relación lineal de la viscosidad con  $f$  y no lineal con  $E = d\psi/d\gamma$ . Este aumento de la viscosidad disminuye el efecto del calentamiento Joule a lo largo del microcapilar, promoviendo con esto una distribución de presión constante e igual a cero, recuperando el caso de un EOF donde las propiedades físicas se asumen constantes. Es importante notar que  $\bar{f} \sim f(\psi_c^2)\bar{\kappa}^2/H^2$  varía como el inverso del cuadrado de la longitud de Debye. En la definición de  $\bar{f}$  se observa esta dependencia ya que  $\bar{f} \propto \bar{\kappa}^2$  y  $E \sim d\psi/dy \propto \bar{\kappa}$ . Dado que para mayores valores de  $\bar{\kappa}$  lo cual llevaría a un aumento del valor de la constante viscoeléctrica, pero este cambio en la configuración del flujo también provocaría un aumento en el gradiente del potencial eléctrico, por lo que el efecto viscoeléctrico es fuertemente influido por la longitud de Debye. La consecuencia del efecto del calentamiento Joule en las propiedades físicas del fluido se muestra en las Figs. 16 - 20. Es evidente que cuando las propiedades físicas de un fluido cambian con la temperatura, el flujo es completamente desarrollado. En tal caso, cuando el gradiente de presión adimensional es positivo,  $dP/d\chi > 0$ , los perfiles de velocidad son convexos, con la presión a favor del flujo, promoviendo un perfil de velocidad parabólico, mientras que para valores negativos,  $dP/d\chi < 0$ , el perfil de velocidad es cóncavo, siendo que se produce una presión negativa dentro del microcanal. Es cuando el valor del gradiente es  $dP/d\chi = 0$  que se recupera el perfil de velocidades característico de los flujos electroosmóticos con propiedades físicas constantes, el flujo tipo tapón. Es Ecs.(200)-(205) donde se muestra que el campo de velocidad es afectado por el gradiente de presión adimensional, los gradientes eléctricos, el campo de temperatura y la constante viscoeléctrica. La ausencia de estos términos provocaría que no existieran modificaciones al campo de velocidades electroosmóticas. Como se muestra en la Fig. 16 el efecto que tiene el calentamiento Joule sobre el perfil de velocidad obtenido es notorio, tanto modificando la forma general del perfil como aumentando la magnitud de la velocidad adimensional, mientras que el efecto viscoeléctrico tiene una participación menor en la magnitud de la velocidad alcanzada. Sin embargo, muestra que como consecuencia de disminuir el gradiente de presión inducida, un flujo modificado por la variación de sus propiedades

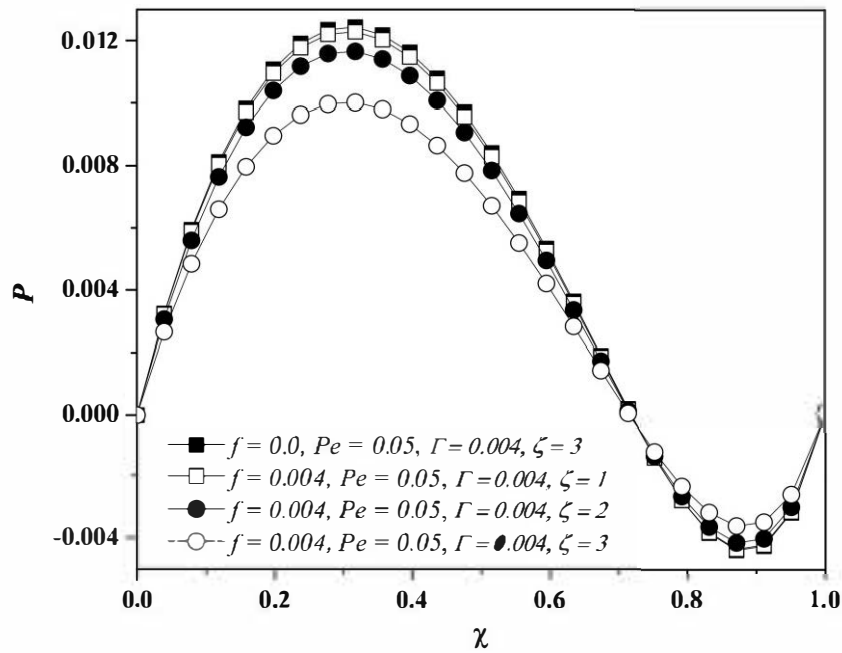


Figura 15: Presión inducida para distintos valores de  $\bar{\zeta}$ .

físicas por causas térmicas se aproximará a regresar a su forma descrita por propiedades constantes por acción del efecto viscoeléctrico. En las Figs. 16-18 se muestra el perfil de velocidad adimensional, el cuál se evaluó en dos coordenadas longitudinales adimensionales arbitrarias  $\chi = 0,3, 0,7$  y como función de la coordenada transversal adimensional  $Y$ . La influencia de la temperatura se muestra fuertemente en los casos presentados, para tres valores diferentes del número de Péclet  $Pe = 0,01, 0,05, 0,1$ . Se muestra también el efecto viscoeléctrico, mostrando que no solo la magnitud del campo de velocidad disminuye sino también la magnitud alcanzada por el perfil de velocidad, regresando a su forma de flujo tapón. Se debe considerar que para los casos en los que se considera solamente el efecto viscoeléctrico sin presencia de la dependencia de la temperatura el perfil de velocidad mantiene su forma original, solo hay un cambio en la magnitud de la velocidad alcanzada, lo anterior nos permite identificar que la variación de las propiedades físicas por efecto de la temperatura tienen mayores y variados efectos del campo de flujo, ya que el efecto viscoeléctrico solo actúa en la resistencia a fluir del flujo. También se muestra que el efecto del parámetro adimensional  $\bar{f}$  en el campo de velocidades adimensional es una reducción de la magnitud de manera lineal, lo cuál está en concordancia con lo obtenido en [61]. La relación que tiene la magnitud del perfil de velocidad con los parámetros principales del efecto viscoeléctrico se muestra en las Figs. 19-20 las cuales muestran la variación del perfil de velocidad de un flujo electroosmótico sobre el cuál actúa el calentamiento Joule y el fenómeno viscoeléctrico, se muestra el efecto que tiene el potencial zeta  $\bar{\zeta}$ . El resultado concuerda con el comportamiento obtenido en [61], describiendo cómo la magnitud del perfil de velocidad disminuye de manera no lineal para valores mayores de  $\bar{\zeta}$ . Es evidente que este efecto muestra dependencia de la posición en la coordenada longitudinal adimensional  $\chi$ , con perfiles mostrados tanto para la posición  $\chi = 0,3$  y  $\chi = 0,7$  los cuáles disminuyen cuando se ven sujetos a las mismas condiciones del efecto viscoeléctrico y calentamiento Joule, esto, dado la modificación del campo eléctrico por efecto de la temperatura. Se considera que al aplicar potenciales zeta mayores, el perfil de velocidad tendería a relajarse para regresar a un perfil si-

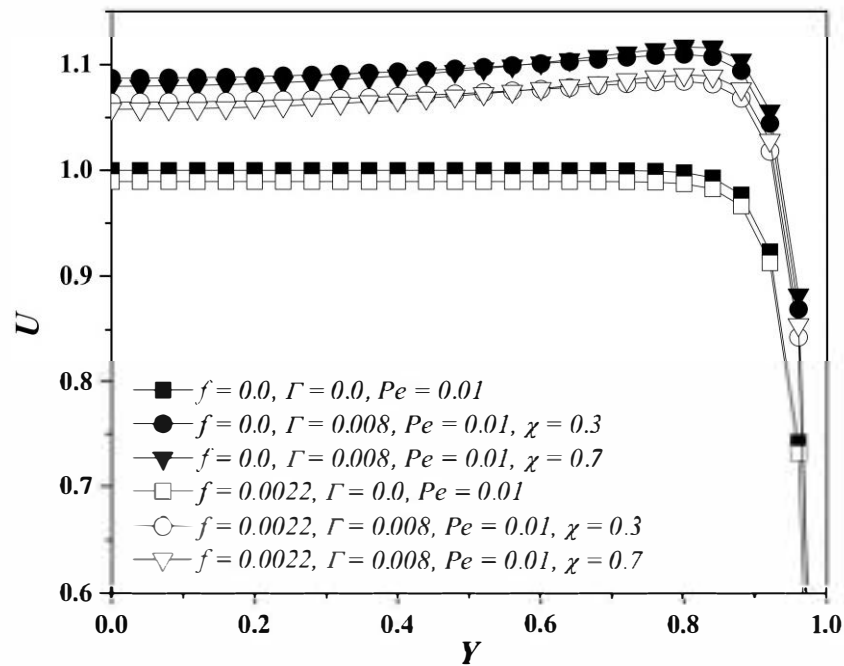


Figura 16: Efecto Joule y viscoeléctrico en el campo de velocidades  $Pe = 0,01$  y  $\bar{\kappa} = 30$ .

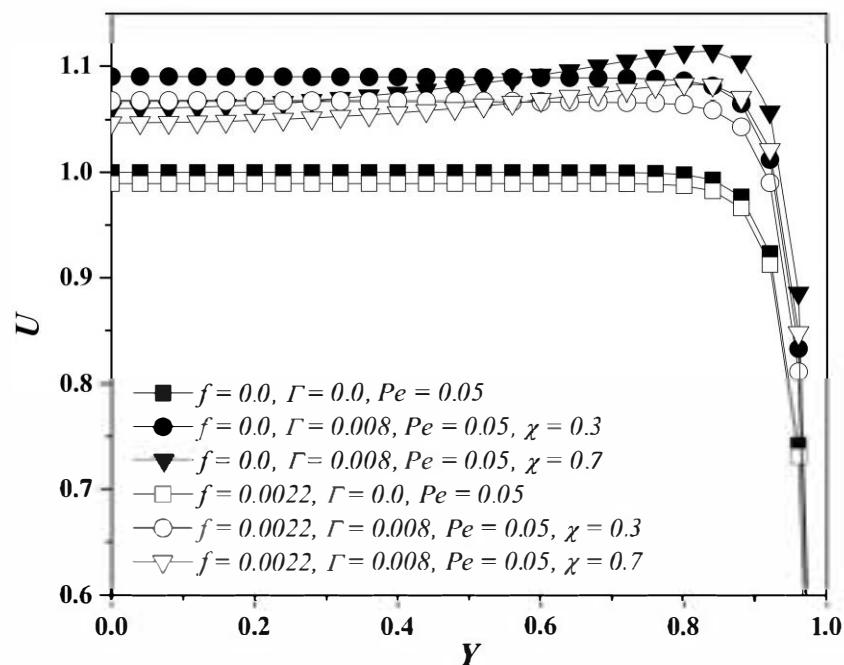


Figura 17: Efecto Joule y viscoeléctrico en el campo de velocidades  $Pe = 0,05$  y  $\bar{\kappa} = 30$ .

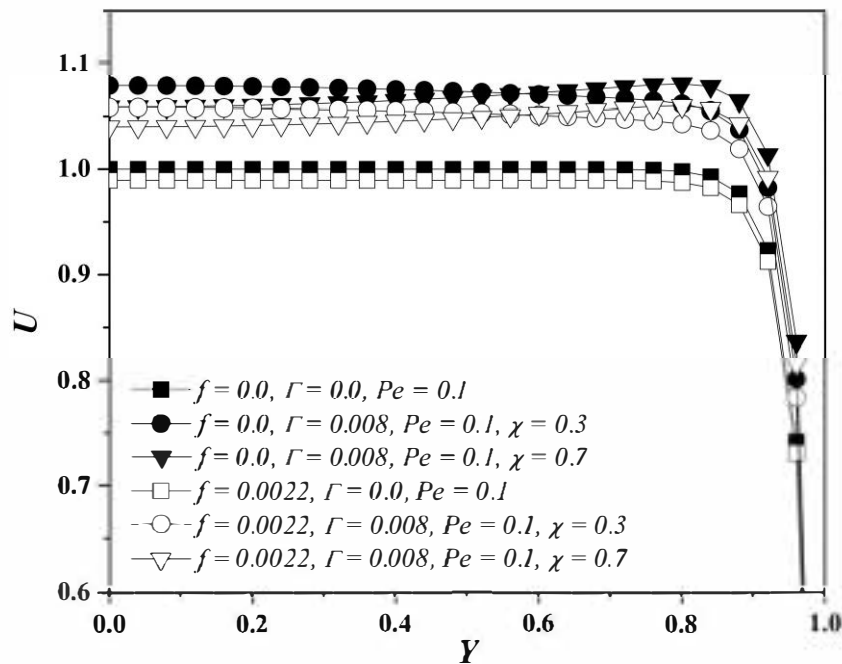


Figura 18: Efecto Joule y viscoeléctrico en el campo de velocidades  $Pe = 0,1$  y  $\bar{\kappa} = 30$ .

milar a un flujo electroosmótico sin presencia de calentamiento Joule y con efecto viscoeléctrico, presentando un perfil similar al flujo tapón. Las velocidades presentadas en este perfil presentan una reducción de su magnitud, esto se debe al aumento de la viscosidad. Para el caso en el que  $\bar{f} \rightarrow 0$  y  $\Gamma \rightarrow 0$  se recuperó el perfil clásico de flujos electroosmóticos conocido como "flujo tapón". En las Figs. 21 y 22 se graficó el flujo volumétrico adimensional en función de  $\bar{f}$  y  $\bar{\zeta}$ . Se muestra que el flujo volumétrico adimensional tiene una fuerte relación lineal con el aumento del valor en  $\bar{f}$ , sin embargo, esta relación no es uniforme cuando se presentan cambios en el valor del potencial  $\bar{\zeta}$ . Esta discrepancia tiene raíz en la influencia que presenta el calentamiento Joule en el gradiente del potencial eléctrico presente dentro de la EDL, esta relación está expresada por la Ec.(160). Es aquí donde ocurre el acoplamiento entre el calentamiento Joule y el efecto viscoeléctrico ya que este gradiente de potencial eléctrico presente en la EDL es el parámetro que influye en la magnitud del efecto viscoeléctrico presente. El acoplamiento de ambos efectos es solo en un sentido, dado que la temperatura alcanzada por el fluido por el calentamiento Joule  $\theta$  afecta al gradiente del potencial interno  $\psi$ , el cuál influye en la variación de la viscosidad  $\eta$  dada por el efecto viscoeléctrico. Mientras que las variables participantes en el efecto viscoeléctrico:  $f$ ,  $\eta$  y  $d\psi/dY$ , no afectan a las variables participantes en el calentamiento Joule. Esto último se muestra en la Fig. 22 donde se ilustra el comportamiento del flujo volumétrico adimensional en función del potencial zeta adimensional en la superficie del microcanal  $\bar{\zeta}$ . Se muestra la disminución no lineal del flujo volumétrico adimensional para valores cada vez mayores de  $\bar{\zeta}$ . Sin embargo, como se describe en la Ec.(185), el gradiente de potencial tiene una relación con la temperatura del fluido  $\Delta\psi/\Delta Y \sim \theta$  y considerando que el efecto viscoeléctrico plantea que  $u \sim 1/(\Delta\psi/\Delta Y)$  esto explica que al comparar con el flujo volumétrico adimensional obtenido en el caso isotérmico el flujo volumétrico obtenido considerando el efecto viscoeléctrico se presente una reducción del flujo volumétrico transportado con una diferencia del 3 %.

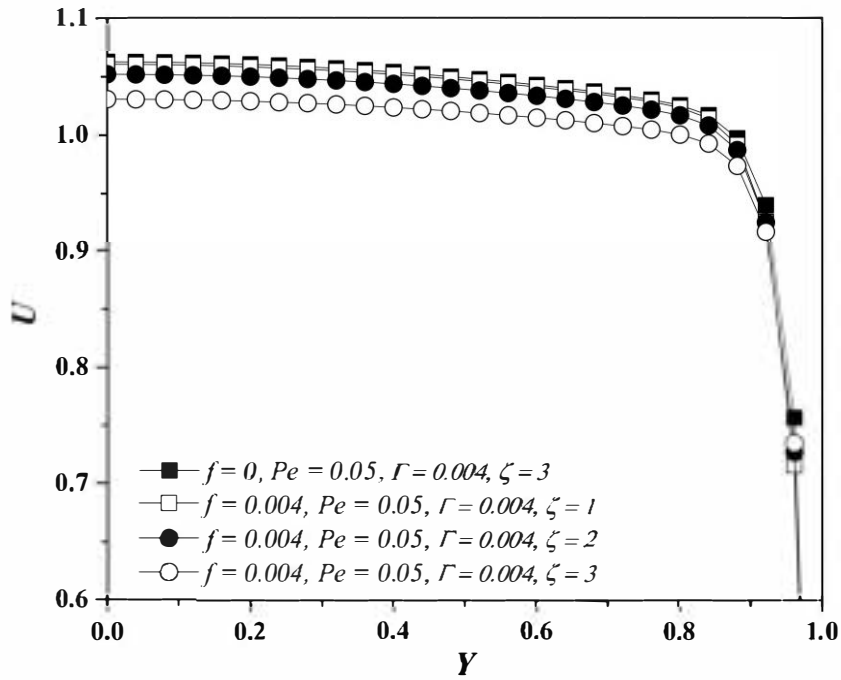


Figura 19: Campo de velocidad bajo efectos Joule y viscoeléctrico para distintos  $\bar{\zeta}$  y  $\chi = 0,1$ .

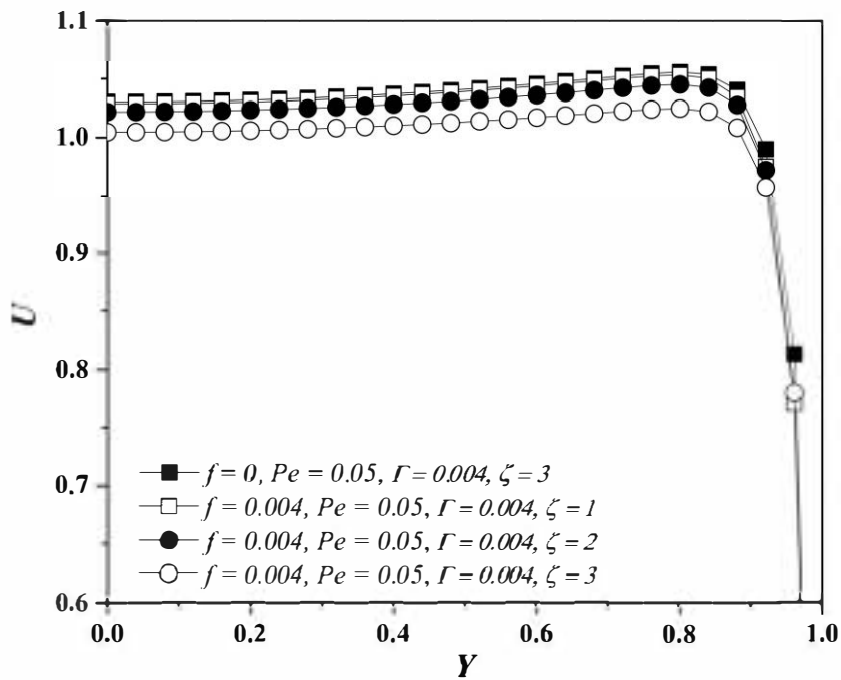


Figura 20: Campo de velocidad bajo efectos Joule y viscoeléctrico para distintos  $\bar{\zeta}$  y  $\chi = 0,7$ .



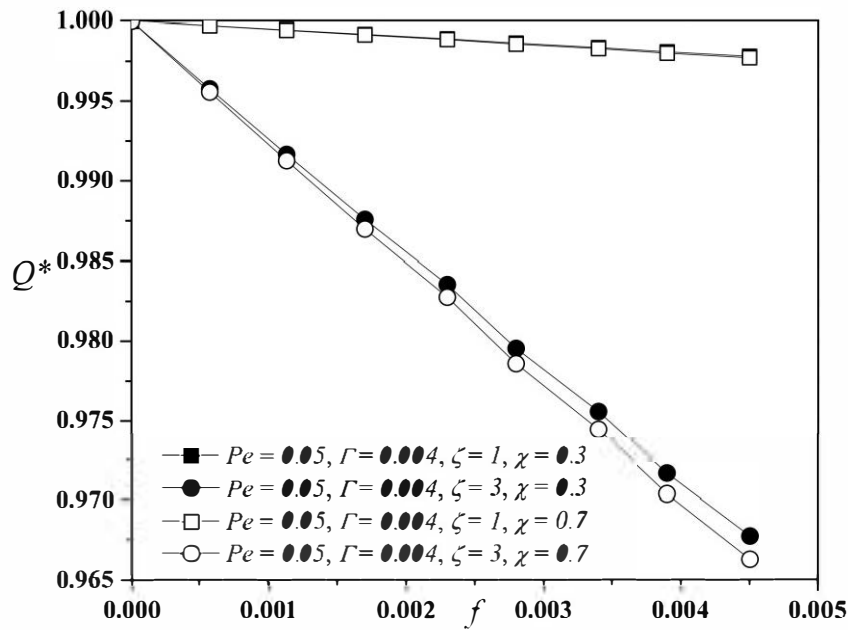


Figura 21: Efecto de  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{f}$  en el flujo volumétrico para  $\bar{\kappa} = 30$  y  $\chi = 0,3, 0,7$ .

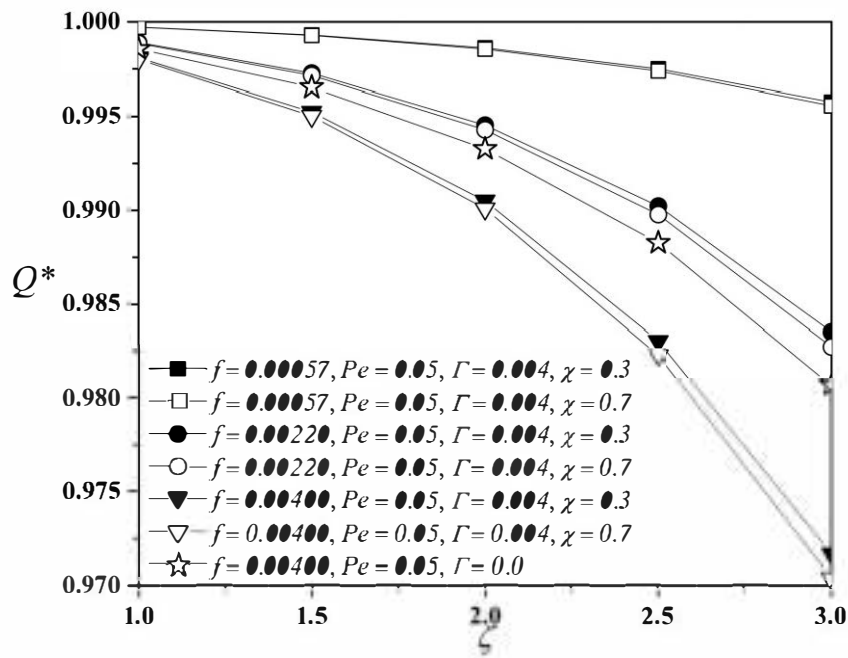


Figura 22: Efecto de  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{f}$  en el flujo volumétrico para  $\bar{\kappa} = 30$  y  $\chi = 0,3, 0,7$ .

## 7. Conclusiones

En la primera parte del presente trabajo se planteó un estudio analítico de un flujo electroosmótico isotérmico de un fluido newtoniano dentro de un microcapilar cilíndrico. El análisis teórico se realizó utilizando las ecuaciones de Poisson-Boltzmann y la ecuación de cantidad de movimiento, esta última incluyendo el modelo desarrollado por Lyklema y Overbeek que describe la relación que tiene la viscosidad de un electrolito con el campo eléctrico aplicado en un microcapilar [31,81]. Este modelo fue desarrollado a mitad del siglo pasado y hasta ahora se mantiene como el único modelo electroreológico que puede ser usado para obtener expresiones modificadas de expresión de Helmholtz-Smoluchowski para la velocidad electroosmótica [39]. Estas dos ecuaciones de gobierno fueron adimensionalizadas y se desarrolló la solución analítica para describir la distribución del potencial eléctrico y el perfil de velocidad. Las condiciones de frontera para el potencial eléctrico en la pared del microcanal fue el potencial zeta adimensional  $\bar{\psi} = \bar{\zeta}$  y en el caso de la velocidad se aplicó la condición de no deslizamiento  $\bar{u} = 0$ . Al utilizar el modelo electroreológico propuesto por Lyklema y Overbeek se dilucidó la reducción de la magnitud del perfil de velocidad electroosmótica en consecuencia al aumento de la viscosidad por la influencia del campo eléctrico interno.

Las ecuaciones de Poisson-Boltzmann y de cantidad de movimiento se resolvieron utilizando la teoría de capa límite, esto se justifica dado que los gradientes de ambas propiedades del flujo presentan una magnitud mucho mayor dentro de la EDL, siendo  $\Delta\psi/\Delta r \sim \Delta u/\Delta r \sim 0$  en la zona externa de la doble capa eléctrica. El acoplamiento entre ambas ecuaciones fue dado con la inclusión del modelo reológico de Lyklema y Overbeek en el término viscoso de la ecuación de cantidad de movimiento. Adicionalmente, se consideraron propiedades físicas independientes de la temperatura, esto provoca que no se presenten gradientes de presión inducida a lo largo del microcapilar y por lo tanto el perfil de velocidades es afectado de manera exclusiva por fuerzas electrocinéticas. Esta parte del trabajo se limitó a resolver el efecto del campo eléctrico interno en la viscosidad, no se consideró el efecto que tiene el potencial eléctrico en el valor de permitividad dieléctrica dado que en el trabajo realizado por Lyklema y Overbeek [31] se indica que se presentan cambios en la viscosidad en presencia de voltajes por unidad de longitud de un orden de magnitud menor que el necesario para un cambio similar en la permitividad. Esta última condición se mantuvo para los dos casos estudiados en el presente trabajo.

El campo de velocidad se determinó a partir de las ecuaciones de gobierno adimensionales para el potencial eléctrico y la cantidad de movimiento, considerando como única propiedad física variable a la viscosidad como función del campo eléctrico. En esta solución se aprecia el efecto de dos parámetros adimensionales: la constante viscoeléctrica adimensional  $\bar{f}$  y el potencial zeta adimensional  $\bar{\zeta}$ . La constante  $\bar{f}$  es función de la constante viscoeléctrica particular del fluido de trabajo  $f$ , el radio del microcapilar y la longitud de Debye adimensional, de manera que  $\bar{f} \sim f\bar{\kappa}^2(\psi_c/R)^2$ . Se muestra que la consideración del efecto viscoeléctrico trae consigo la disminución de la magnitud de las velocidades presentes en el perfil del flujo, sin afectar la forma del perfil de velocidades clásico de un flujo electroosmótico. La solución analítica de las ecuaciones de gobierno permitió obtener la descripción de la influencia que los parámetros adimensionales característicos del efecto viscoeléctrico  $\bar{f}$  y  $\bar{\zeta}$  presentan en el flujo volumétrico adimensional. El aumento del parámetro  $\bar{f}$  lleva a una disminución lineal del flujo volumétrico adimensional, esto debido a la reducción de la magnitud del campo de velocidades, mientras que  $\bar{\zeta}$  presenta una influencia no lineal en la reducción del flujo volumétrico adimensional. Se demostró que la expresión obtenida para describir la magnitud de la velocidad en el microcanal puede recuperar

la solución reportada por los autores Petsev y Lopez para el flujo electroosmótico de un fluido newtoniano en un microcapilar cilíndrico utilizando la aproximación de capa límite presentada en [60] cuando el valor de la constante viscoelétrica adimensional es  $\bar{f} = 0$ .

En la segunda parte del presente trabajo se consideró la dependendencia de las propiedades físicas con la temperatura debido al calentamiento Joule en conjunto con el efecto viscoelétrico en un flujo electroosmótico de un fluido newtoniano en un microcanal de placas planas rectangulares. Se planteó a la conductividad eléctrica como una función lineal dependiente de la temperatura y a la viscosidad como a una función exponencial en función de la temperatura y lineal en función del campo eléctrico. También se consideró la presencia de una EDL delgada, la consecuencia de esto es que se consideren que los gradientes de velocidad y de potencial eléctrico sean de gran magnitud cerca de la superficie del microcanal y tiendan a cero fuera de la EDL. En consecuencia a la consideración de la variación de las propiedades físicas con la temperatura el modelo matemático planteado se encuentra fuertemente acoplado. Este modelo matemático está compuesto por la ecuación de continuidad, las ecuaciones modificadas de Cauchy en las direcciones  $x$  y  $y$ , la ecuación de energía, la ecuación de Poisson-Boltzmann y la ecuación de continuidad de corriente. Estas ecuaciones de gobierno fueron simplificadas aplicando la Teoría de la Lubricación, con lo que los términos inerciales en las ecuaciones de cantidad de movimiento se pueden despreciar mientras que los términos difusivos de la ecuación de energía se mantienen porque se considera que la magnitud del gradiente de temperatura en la dirección axial es mayor que el gradiente de temperatura transversal [58]. Se planteó la solución del sistema de ecuaciones resultante por medio de la técnica de expansión asintótica regular, considerando como parámetro de perturbación al parámetro adimensional  $\Gamma$  el cuál está asociado con los cambios en la viscosidad por efecto de la temperatura. Dado que no fue posible el obtener una solución por técnicas analíticas para la ecuación de cantidad de movimiento y la distribución de presión inducida, se recurrió a la aplicación de métodos numéricos por medio del software computacional Wolfram Mathematica 8.0 para obtener una solución semi-analítica. La presencia del calentamiento Joule y su efecto tanto en la viscosidad y la conductividad eléctrica tiene una fuerte influencia en el campo hidrodinámico y produce el surgimiento de un campo de presión inducida dentro del microcanal garantizar la conservación de masa mientras que el efecto viscoelétrico produce una resistencia al movimiento por parte del fluido. Esta consideración del modelo electroreológico muestra que el efecto viscoelétrico tiene una gran influencia en el campo de presión inducido por el calentamiento Joule. El campo de presión inducida es sensible a ambos parámetros que rigen el efecto viscoelétrico: la constante  $\bar{f}$  y el potencial zeta  $\bar{\zeta}$ . La relación del gradiente de presión inducida en la dirección longitudinal del microcanal  $\Delta P/\Delta x$  es inversamente proporcional a  $\bar{f}$ , mientras que para  $\bar{\zeta}$  la relación es no lineal. Se concluye que la aparición del efecto viscoelétrico inhibe al campo de presión inducida, esto tiene una influencia directa en el perfil de velocidad. La acción del gradiente de presión provoca que el campo de velocidades no se mantenga uniforme a lo largo del microcanal, aparecerán perfiles de velocidad convexos cuando se presenta una presión positiva en la región cerca de la entrada del microcanal y cóncavos cerca de la salida del microcanal, donde se presentan presiones negativas. El efecto viscoelétrico presenta un efecto conjugado en el perfil de velocidad: El aumento de la viscosidad produce una reducción de la magnitud del perfil de velocidad electroosmótica y la disminución del gradiente de presión inducida promueve la recuperación del perfil tapón clásico de los flujos electroosmóticos con propiedades constantes. En relación con el flujo volumétrico adimensional se muestra que este disminuye al aumentar el

valor de  $\bar{\zeta}$ , esto se debe a que un mayor valor del potencial zeta produce mayores gradientes de potencial dentro de la doble capa eléctrica. Al conjuntar este efecto con el calentamiento Joule que provoca un aumento del potencial eléctrico dentro de la EDL lo que lleva a un aumento del efecto viscoeléctrico. Esto lleva a una reducción neta del flujo volumétrico adimensional del 1% en relación al caso en que se consideren propiedades físicas constantes.

Dado que el método numérico utilizado y el poder de cómputo fue insuficiente para obtener la solución del campo de presiones para valores de potencial zeta adimensional  $\bar{\zeta} \geq 3,5$ , para valores de la constante viscoeléctrica adimensional  $\bar{f} \geq 0,0045$  o valores del inverso de la longitud de Debye  $\bar{\kappa} \geq 30$  se propone como trabajo a futuro la mejora del presente análisis utilizando un método numérico de carácter iterativo, otra posibilidad es el incluir en el modelo matemático la variación del potencial zeta con la temperatura.

## Referencias

- [1] van den Berg A. & Harrison D., editor. *Micro Total Analysis Systems '98*. Kluwer Academic, 1998.
- [2] Manz A. & Becker H., editor. *Microsystem Technology in Chemistry and Life Sciences*. Springer, 1998.
- [3] Adjari A. Stone H., Stroock A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip. *Annual Review of Biophysics and Biomolecules Structure*, 36:381–441, 2004.
- [4] Aluru N. Karniadakis G., Beskok A. *Microflows and Nanoflows*. Springer, 2005.
- [5] Chang H. & Yeo L. *Electrokinetically driven Microfluidics and Nanofluidics*. Cambridge, 2010.
- [6] Ho C. & Tai Y. Micro-electromechanical-systems (mems) and fluid flows. *Annu Rev Fluid Mech*, 30:579–612, 1998.
- [7] Stone H. & Kim S. Microfluidics: Basic issues, applications and challenges. *AIChE J.*, 47:1250–1254, 2001.
- [8] Probstein R. *Psychochemical Hydrodynamics*, volume 69. John Wiley & Sons, 3 1994.
- [9] Smoluchowski M. Contribution a la theorie iendosome electrique et quelques phenomenes correlatifs. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, 8:182–199, 1903.
- [10] Debye P. & Huckel E. Zur theorie der elektrolyte i. gefrierpunktserniedrigung und verwandte erscheinungen. *Phys. Z.*, 24:185–206, 1923.
- [11] Burgreen D. & Nakache F. Electrokinetic flow in ultrafine capillary elements. *ASD-TDR*, 1963.
- [12] Burgreen D. & Nakache F. Electrokinetic flow in ultrafine capillary slits. *J. Phys Chem*, 68:1084–1091, 1964.
- [13] Rice C. & Whitehead R. Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary. *J. Phys. Chem*, 69:4017–4024, 1965.
- [14] Neale G. Epstein N. Levine S., Marriott J. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta-potentials. *J. Colloid Interface Sci.*, 52:136–149, 1975.
- [15] Ghosal S. Fluid mechanics of electroosmotic flow and its effect on band broadening in capillary electrophoresis. *Electrophoresis*, 25:214–228, 2004.
- [16] Maynes D. & Webb B. The effect of viscous dissipation in thermally fully developed electroosmotic heat transfer in microchannels. *Int. J Heat Mass Transfer*, 47:987–999, 2004.
- [17] Maynes D. Liechty B., Webb B. Convective heat transfer characteristics of electroosmotically generated flow in microtubes at high wall potential. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48:2360–2371, 2005.

- [18] Chakraborty S. Analytical solutions of nusselt number for thermally fully developed flow in microtubes under combined action of electroosmotic forces and imposed pressure gradients. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49:810–813, 2006.
- [19] Chen C. Thermal transport characteristics of mixed pressure and electroosmotically driven flow in micro- and nanochannels with joule heating. *J. Heat Transfer*, 131, 2009.
- [20] Li D. Xuan X., Sinton D. Thermal end effects on electroosmotic flow in a capillary. *Intl. J. Heat Mass Transfer.*, 47:3145–3157, 2004.
- [21] Sinton D. Li D. Xuan X., Xu B. Electroosmotic flow with joule heating effects. *Lab on a Chip*, 4:230–236, 2004.
- [22] Chai J. Gong H. Tang G., Yang C. Joule heating effect on electroosmotic flow and mass species transport in a microcapillary. *Intl J. Heat Mass Transfer*, 47:215–227, 2004.
- [23] Jones A. & Grushka E. Nature of temperature gradient in capillary zone electrophoresis. *Chromatography*, 466:219–225, 1989.
- [24] Knox J. & McCormack K. Temperature effects in capillary electrophoresis 1. internal capillary temperature and effect upon performance. *Chromatographia*, 38:207–214, 1994.
- [25] Knox J. & McCormack K. Temperature effects in capillary electrophoresis 2. some theoretical calculations and predictions. *Chromatographia*, 38:215–221, 1994.
- [26] Bosse M. & Arce P. The role of joule heating in dispersive mixing effects in electrophoretic cells: hydrodynamic consideration. *Electrophoresis*, 21:1018–1025, 2000.
- [27] Xuan X. & Li D. Investigation on convective heat transfer and flow features of nanofluids. *Journal of Heat Transfer*, 125:151–155, 2003.
- [28] Saidi M. Yavari H., Sadeghi A. Hydrodynamic and thermal characteristics of combined electroosmotic and pressure driven flow in a microannulus. *J. Heat Transfer*, 134, 2012.
- [29] Saidi M. Sadeghi A., Kazemi Y. Joule heating effects in electrokinetically driven flow through rectangular microchannels: An analytical approach. *Nanoscale Microscale Thermophys. Eng.*, 17:173–193, 2013.
- [30] Souart T. & Baygents J. Lubrication theory for electroosmotic flow in a non-uniform electrolyte. *J. Fluid Mech.*, 576:139–172, 2007.
- [31] Lyklema J. & Overbeek J. On the interpretation of electrokinetic potentials. *Journal of colloid sciences*, 16:501–512, 1961.
- [32] Hunter R. *Zeta Potential in Colloid Science: Principles and Applications*. London: Academic, 1988.
- [33] Andrade E. & Dodd C. The effect of an electrical field on the viscosity of liquids. *Proc. R. Soc.*, 187:296, 1946.

- [34] Andrade E. & Dodd C. The effect of an electrical field on the viscosity of liquids. ii. *Proc. R. Soc.*, 204:449, 1951.
- [35] Kirby B. & Hasselbrink E. Zeta potential of microfluidic substrates: 1. theory, experimental techniques, and effects on separations. *Electrophoresis*, 25:187–202, 2004.
- [36] Hunter R. Koopal L. Lyklema J. Delgado A., Gonzalez-Caballero F. Measurement and interpretation of electrokinetic phenomena. *J. Colloid Interface Sci.*, 309:194–224, 2007.
- [37] Stokes R. & Mills T. *Viscosity of electrolytes and related properties*. Pergamon Press, 1965.
- [38] Vand V. Viscosity of solutions and suspensions. *J. Phys. Chem.*, 52:277–299, 1948.
- [39] Storey B. Adjari A. Bazant M., Kilic M. Towards an understanding of induced-charge electrokinetics at large applied voltages in concentrated solutions. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 152:48–88, 2009.
- [40] Stone H. Lauga E., Brenner M. *Handbook of experimental fluid dynamics*. Springer, 2007.
- [41] Bocquet L. & Barrat J. Flow boundary conditions from nano- to micro- scales. *Soft Matter*, 3:685–693, 2007.
- [42] De Coninck J. Lyklema J., Rovillard S. Electrokinetics: The properties of the stagnant layer unraveled. *Langmuir*, 14(20):5659–5663, 1998.
- [43] Freund J. Electro-osmosis in a nanometer-scale channel studied by atomistic simulation. *J. Chem. Phys.*, 116(5):2194–2200, 2002.
- [44] Qiao R. & Aluru N. Ion concentrations and velocity profiles in nanochannel electroosmotic flows. *J. Chem. Phys.*, 118(10):4692–4701, 2003.
- [45] Qiao R. & Aluru N. Scaling of electrokinetic transport in nanometer channels. *Langmuir*, 21:8972–8977, 2005.
- [46] Trizac E. Bocquet L. Joly L., Ybert C. Hydrodynamics within the electric double layer on slipping surfaces. *Phys Rev Lett*, 93, 2007.
- [47] Olsson P. & Teitel S. Critical scaling of shear viscosity at the jamming transition. *Phys Rev Lett*, 99(178001), 2007.
- [48] Liu A. & Nagel S. Jamming is not just cool anymore. *Nature (Lond)*, 396(21), 1998.
- [49] Nagel S. O’Hern C., Silbert L. Jamming at zero temperature and zero applied stress: The epitome of disorder. *Phys Rev*, 68(011306), 2003.
- [50] Shklovskii B. Screening of a macroion by multivalent ions: Correlation-induced inversion of charge. *Phys Rev*, 60:5802–5811, 1999.
- [51] Nguyen T. & Shklovskii B. Adsorption of charged particles on an oppositely charged surface: Oscillating inversion of charge. *Phys Rev*, 64(041407), 2001.

- [52] Shklovskii B. Grosberg Y., Nguyen T. The physics of charge inversion in chemical and biological systems. *Review of Modern Physics*, 74:329–343, 2002.
- [53] Kim D. & Darve E. Molecular dynamics simulations of rough wall microchannels. *Phys Rev*, 73(051203), 2006.
- [54] Chakraborty S. Generalization of interfacial electrohydrodynamics in the presence of hydrophobic interactions in narrow fluidic confinements. *Phys Rev Lett*, 100(09801), 2008.
- [55] Zhao C. & Yang C. Electrokinetics of non-newtonian fluids: a review. *Adv Colloid Interface Sci.*, 201-202:94–108, 2013.
- [56] Horno J. Lopez-Garcia J., Grosse C. Numerical study of colloidal suspensions of soft spherical particles using the network method 1. dc electrophoretic mobility. *Journal of Colloid and Interface Science*, 265:327–340, 2003.
- [57] Horno J. Lopez-Garcia J., Grosse C. Numerical study of colloidal suspensions of soft spherical particles using the network method 2. ac electrokinetic and dielectric properties. *Journal of Colloid and Interface Science*, 265:341–350, 2003.
- [58] Arcos J. Mendez F. Bautista O., Sanchez S. Lubrication theory for electroosmotic flow in a slit microchannel with the phan-thien and tanner model. *Journal of Fluid Mechanics*, 722:496–532, 2013.
- [59] Bender C. & Orzag S. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. New York: Springer, 1999.
- [60] Petsev D. & Lopez G. Electrostatic potential and electroosmotic flow in a cylindrical capillary filled with symmetric electrolyte: analytic solutions in thin double layer approximation. *Journal of Colloid Interface Science*, 294:492–498, 2006.
- [61] Bautista O. Marroquin-Desentis J., Mendez F. Viscoelectric effect on electroosmotic flow in a cylindrical microcapillary. *Fluid Dynamics Research*, 48, 2016.
- [62] Helmholtz V. Studien uber elektrische grenschichten. *Annalen der Physik und Chemie*, 7:337 – 387, 1879.
- [63] Garai A. & Chakraborty S. Micro-scale thermo-fluidic transport in two immiscible liquid layers subject to combined electroosmotic and pressure-driven transport. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:2660 – 2666, 2009.
- [64] Masliyah J. & Bhattacharjee S. *Electrokinetic and Colloid Transport Phenomena*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [65] Israelachvili J.N. *Intermolecular and Surface Forces*. Academic, London, 1992.
- [66] Hassager O. Bird R., Armstrong R. *Dynamics of polymeric liquids, Vol 1, Fluid Mechanics*. Wiley, 2000.
- [67] Leal G. *Advanced Transport Phenomena. Fluid Mechanics and Convective Transport Processes*. Cambridge University Press, 2007.



- [68] Lightfoot E. Bird R., Stewart W. *Transport Phenomena*. Wiley, New York, 2002.
- [69] Bruus H. *Theoretical Microfluidics*. Oxford Master Series in Condensed Matter Physics, 2008.
- [70] Schowalter W. Russel W., Saville D. *Colloidal Dispersions*. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1989.
- [71] Rajagopalan R. Hiemenz P. *Principles of Colloid and Surface Chemistry*. Marcell Dekker, 1997.
- [72] S. Ghosal. Lubrication theory for electro-osmotic flow in a microfluidic channel of slowly varying cross section and wall charge. *J. Fluid Mech.*, 459:103–128, 2002.
- [73] A. Ajdari. Generation of transverse fluid currents and forces by an electric field: Electro-osmosis on charge modulated and undulated surfaces. *Physical Review*, 53(5):4996 – 5005, 1996.
- [74] Saville D. Electrokinetic effects with small particles. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 9:321–337, 1977.
- [75] Abramowitz M. & Stegun I. *Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs and mathematical tables*. New York: Dover, 1965.
- [76] Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. New York: Academic, 1964.
- [77] Grahame D. The electric double layer and the theory of electrocapillarity. *Chemical Reviews*, 41:441–500, 1947.
- [78] Bergenholtz J. Nayeri M., Abbas Z. Measurements of screening length in salt solutions by total internal reflection microscopy: Influence of van der waals forces and instrumental noise. *Colloid Surf., A* 429:74 – 81, 2013.
- [79] Hoffman J. & Frankel S. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: CRC Press, 2001.
- [80] Xuan X. & Li D. Analytical study of joule heating effects on electrokinetic transportation in capillary electrophoresis. *J. Chromatogr.*, 1064:227–237, 2005.
- [81] Lyklema J. On the slip process in electrokinetics. *Colloid Surf A Physicochem Eng Asp*, 92:41–49, 1994.

# Apéndices

## A. Ecuación de Grahame

De la ecuación para el orden unidad del potencial eléctrico

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_i^0}{dY^2} = \sinh(\bar{\psi}_i^0), \quad (211)$$

donde se define un cambio de variable como

$$v = \frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 \bar{\psi}_i^0}{dY^2} = v \frac{dv}{d\bar{\psi}_i^0}, \quad (212)$$

utilizando el cambio de variable se puede reescribir Ec.(211) como

$$v \frac{dv}{d\bar{\psi}_i^0} = \sinh(\bar{\psi}_i^0), \quad (213)$$

al integrar esta última ecuación se obtiene como resultado

$$\frac{v^2}{2} = \cosh(\bar{\psi}_i^0) + B, \quad (214)$$

donde  $B = 2$ , el valor de esta constante se determina al aplicar la condición de frontera que se encuentra aproximándose al centro del canal  $d\bar{\psi}_i^0/dx = \bar{\psi}_i^0 = 0$ . Para simplificar la expresión obtenida se considera la identidad trigonométrica  $\sinh^2(\theta) = [\cosh(2\theta) - 1]/2$ . Utilizando estas expresiones se obtiene de la Ec.(214) lo siguiente:

$$v = \left[ 4 \sinh^2 \left( \frac{\bar{\psi}_i^0}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (215)$$

De esto se obtiene la conocida ecuación de Grahame [77], la cual describe la relación entre la carga y el potencial eléctrico

$$\frac{d\bar{\psi}_i^0}{dY} = 2 \sinh \left( \frac{\bar{\psi}_i^0}{2} \right) \quad (216)$$