UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

OPERADORES ALEATORIOS DE STURM-LIOUVILLE CON INTERACCIONES PUNTUALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ASAF LEVI FRANCO ARELLANO

TUTOR PRINCIPAL:
RAFAEL RENÉ DEL RÍO CASTILLO
IIMAS-UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA
IIMAS-UNAM

CARLOS VILLEGAS BLAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS-UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2020

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer primeramente a mi asesor de tesis Dr. Rafael del Río. Su orientación y ayuda han sido elementos clave en la elaboración de mi tesis. El tiempo que me dedicó me ha permitido aprender mucho más de lo que he estudiado en este trabajo. Me encuentro en deuda por el ánimo infundido y la confianza que deposito en mí.

Gracias a mis padres por haberme forjado como la persona que soy actualmente; muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que incluyo este; pero sobre todo les agradezco por ser un gran ejemplo de vida a seguir.

A Rubí, mi novia y amiga quien ha sido mi mano derecha durante todo este tiempo, gracias por tu apoyo y porque siempre estuviste ahí motivándome constantemente a alcanzar mis anhelos. Por estar presente no solo en esta étapa tan importante de mi vida, sino en todo momento ofreciéndome lo mejor y buscando lo mejor para mi persona.

Mi doctorado no hubiera sido posible sin el soporte del programa de CONACyT con Beca Nacional/CVU 622748 y del proyecto PAPIIT IN 110818.

Índice

CAPÍTULO 1

Introducción

En este trabajo se estudia el espectro puntual de operadores de Sturm-Liouville autoadjuntos con interacciones puntuales. Más especificamente, se investigará si variando los parámetros del problema espectral el problema preserva o destruye el hecho de que una energía dada sea un valor propio. Será de particular interes trabajar en un ambiente aleatorio. Para operadores aleatorios métricamente transitivos es bien sabido que la probabilidad de ser un valor propio para un $E \in \mathbb{R}$ dado es cero (Ver Corolario 1 Sección 4.3 en [16] y Teorema 2.12 en [21]). Si no se tiene esta condición, en principio cualquier situación podría ocurrir.

El trabajo consta de dos partes centrales. La primera es el Capítulo 3 donde se estudian operadores con interacciones puntuales tipo δ y δ' y la segunda en el Capítulo 4 donde se investiga el caso de interacciones puntuales generalizadas.

El capítulo 3 es acerca del espectro puntual de operadores de Sturm-Liouille autoadjuntos con interacciones puntuales tipo δ y δ'. Estos son definidos por expresiones de la forma

$$H_\omega = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \sum_{\omega \in \Omega} \omega(n)\delta(x - x_n)$$

Existen varias maneras de introducir interacciones puntuales en operadores autoadjuntos definidos por expresiones diferenciales de la forma

$$\frac{-d^2}{dx^2} + V$$

en $L^2(a, b)$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$:

- Interacciones tipo δ pueden ser definidas usando formas cuatráticas, ver [2], [30]. Por ejemplo, una interacción en un punto p puede ser agregada a $\frac{d^2}{dx^2} + V$ considerando la forma sesquilineal

$$t[f, g] := \int_a^b (\overline{g}' f' + V\overline{g} f)dx + \lambda \overline{g}(p)f(p)$$

- Interacciones puntuales en un conjunto discreto de puntos x_n pueden ser introducidas tratando a $\frac{d^2}{dx^2} + V$ como un operador definido en el espacio $\bigoplus_n L^2(I_n)$, donde $\bigcup_n I_n = (a, b)\backslash\{x_n\}$ y agregando condiciones de frontera conectando x_n^- con x_n^+ para toda n. Ver por ejemplo [12].

- Utilizando la teoría de extensiones autoadjuntas de operadores, generalizando la teoría clásica de Sturm-Liouville para interacciones puntuales. Este enfoque es trabajado en [5], ver en particular el apéndice.

El método de formas cuadráticas tiene la desventaja que sólo puede ser usado en operadores semi-acotados. Esta restricción excluye modelos físicos interesante como por ejemplo el caso en que $V(x) = Ex$. Por otro lado, al introducir el operador vía condiciones de frontera en el caso de un número infinito de interacciones de interacciones esto lleva a índices de deficiencia infinitos. Es por eso que en esta tesis se trabajará con el enfoque usado en [5], ya que éste resuelve ambos problemas y tiene la ventaja que los resultados bien conocidos de la teoría de Sturm-Liouville pueden ser extendidos a estos operadores. Para un estudio detallado de este campo, incluyendo muchos modelos en mecánica cuántica ver la monografía [2].

Las relaciones entre los operadores y su espectro tiene profundas consecuencias en varias áreas del Análisis funcional, Teoría de dispersión, problemas de Localización, Comportamiento dinámico de sistemas cuánticos, ecuaciones diferenciales integrales, Teoría de matrices entre otras. Este trabajo se centrará en el espectro puntual y considerará operadores generados por interacciones tipo δ y δ' con un valor propio común. Este puede ser considerado como un problema espectral inverso, donde dado un punto $E \in \mathbb{R}$ uno trata de caracterizar las sucesiones ω fara las cuales E pertenece al espectro puntual de los operadores H_ω. La manera en la que se procederá en el Capítulo 3 es primero analizando el operador con solo una interacción puntual tipo δ, luego extendiendo el resultado obtenido en este caso a un número contable de interacciones. Finalmente tratando nuestro operador en un ambiente aleatorio, seremos capaces de dar la caracterización de operadores compartiendo un mismo valor propio en un marco probabilístico.

En la situación aleatoria se considerarán a las ω asociadas a H_ω como un proceso estocástico y cada $\omega(n)$ una variable aleatoria con distribución de probabilidad continua (posiblemente singular). Para conceptos de probabilidad ver por ejemplo [9] o [11].
Los operadores H_ω no necesitan ser medibles (Ver definición 3.3.3) y ω no tiene que ser un proceso estocástico estacionario métricamente transitivo o ergódico, ver Sección 9.1 en [6].

El objetivo del capítulo 3 es mostrar que para operadores aleatorios con interacciones puntuales, la siguiente alternativa se cumple: un punto es valor propio para toda ω o solo para un conjunto de ω's de medida cero. Para decidir cual de estas situaciones pasa, se usará teoría clásica de oscilaciones, explotando la relación entre los ceros de las funciones propias y la localización de las interacciones puntuales.

Por otra parte, el capítulo 4 trata el mismo problema pero para interacciones puntuales generalizadas. Este capítulo tiene dos propósitos. Por un lado, resolver el problema de como varían los valores propios de un operador de Sturm-Liouville usando un nuevo enfoque, el cual esta basado en ideas geométricas y propiedades de matrices en $SL(2, \mathbb{R})$. Por otro lado, este enfoque permite generalizar de interacciones puntuales δ y δ' a una clase completa de interacciones puntuales autoadjuntas reales.

La idea principal que este Capítulo seguirá es la siguiente. Fijando las condiciones de frontera del problema espectral y considerando una energía que es un valor propio para una colección de parámetros, se variará uno de ellos mientras las otros se mantienen fijos. Cómo varía el parámetro es claro si se trabaja con una interacción tipo δ o δ', pero es mucho menos claro en el caso de matrices en $SL(2,\mathbb{R})$ conectando el límite izquierdo con el derecho de las soluciones en el punto en cuestión. Con este fin, se considerará la descomposición de Iwasawa de una matriz en $SL(2,\mathbb{R})$, expresándola como un producto canónico de una factor parábolico, uno hiperbólico y uno elíptico. Esto nos da los parámetros que se buscan y que se variarán. El siguiente paso es investigar la pregunta sobre la estabilidad de los valores propios del problema cuando se varían los parámetros. Resulta que en la mayoría de los casos existe una dicotomía. El valor propio esta presente para todos los valores del parámetro, o esta presente solo para el valor con el que iniciamos y para ninguno más. Para establecer esta dicotomía se mirará a la acción proyectiva de las matrices en $SL(2,\mathbb{R})$ y se podrá exhibir la dicotomía vía cálculos directos y simples. Una vez que la dicotomía correspondiente a una sola interacción puntual ha sido establecida, se preocederá a obtener un resultado para un numero contable de interacciones y para el caso en que los parámetros sean aleatorios.

Este trabajo esta organizado de la siguente manera:

En el Capítulo 2 se definirán los operadores principales de esta tesis introduciendo interaciones puntuales tipo δ en un conjunto discreto de puntos $\{x_n\}$. El objetivo de este capítulo es mostrar que la teoría clásica de Sturm-Liouville con todas sus herramientas fundamentales pueden ser generalizadas a nuestro caso. Se establecerá la alternativa de Weyl y se obtendrá la caracterización usual de realizaciones autoadjuntas en terminos de condiciones de frontera.

El Capítulo 3 esta dedicado para las interacciones puntuales tipo δ y δ'.. En la Sección 3.1 se considerarán a los operadores con solo una inteacción en el caso regular y se estudiará el comportamiento de su espectro puntual. Una herramienta clave es la relación entre la función de Green asociada a diferentes condiciones de frontera. Partiendo de soluciones clásicas se construirán soluciones más generales para el problema a tratar. En Sección 3.2 los resultados obtenidos para una interacción se extenderán a el caso de una cantidad contable y los operadores generados por la correspondiente expresión diferencial formal. En la Sección 3.3 se aplicarán los resultados de las secciones 3.1 y 3.2 a operadores aleatorios. El Teorema 3.3.1 da la caracterización de las ω's tales que H_ω comparte un valor propio. La subsección 3.3.1 considera los ceros de las funciones propias pertenecientes a el operador sin interacciones puntuales. Se prueba en particular, que el comportamiento no oscilatorio implica que las familias de H_ω's tienen un valor propio comun para un conjunto de ω's de medida cero. Resultados análogos se cumplen si las interacciones son colocadas suficientemente cerca. En la subsección 3.3.2 operadores medibles son introducidos. Finalmente en la Sección 3.4 se estudiarán operadores con interacciones δ' y se probarán resultados similares a los que se cumplen para el caso de interacciones δ.

En el Capítulo 4 se trabajará con interacciones puntuales generalizadas. En la Secciones 4.1 se discutirán las herramientas ya conocidas que seran escenciales sobre matrices de transferencia, las rectas reales proyectivas y la descomposición de Iwasawa para matrices. Como un ejemplo, en la Sección 4.2, se aplicarán estas herramientas al caso de una sola interacción puntual tipo δ. En la Sección

4.3 se considera el caso de una interaccion puntual generalizada, la cual es dada por una matriz en $SL(2, \mathbb{R})$. Los tres parámetros que describen tales matriz son dados. Se discutirá la estabilidad de los valores propios en este caso. Luego, la Sección 4.4 considerá el caso de una cantidad contable de interacciones puntuales generalizadas localizadas en un conjunto discreto dentro del intervalo. Finalmente, se considerará el caso de una cantidad contable de interacciones puntuales generalizadas con parámetros aleatorios en la Sección 4.5.

CAPÍTULO 2

Operadores de Schrödinger con Interacciones Puntuales

En este capítulo se colectarán hechos básicos acerca de la teoría de Sturm-Liouville para operadores de Schrödinger en dimensión uno con interacciones puntuales. Aunque el contenido de este Capítulo es conocido, es incluido para conveniencia del lector. Ver Apéndice en [5].

Los resultados siguen de cerca los obtenidos y probados por D. Buschmann, G. Stolz y J. Weidmann en [4] para interacciones puntuales generales. Aquí se analiza el caso particular de interacciones tipo δ y se dan las pruebas detalladas de los resultados en esta situación.

La teoría se desarrolla de manera similar al caso de la teoría de Sturm-Liouville clásica. Para ver un estudio minucioso de resultados en la teoría clásica ver Capítulo 8.4 en [28], Capítulo 13 en [27] y la Monografía [29].

2.1 Definición del Operador

Para introducir el operador con interacciones puntuales. Sean $V \in L^1_{Loc}(a,b)$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, sean $I \subseteq \mathbb{Z}$, $M = \{x_n\}_{n\in I} \subseteq (a,b)$ conjunto discreto, es decir un conjunto de puntos que se acumula a lo más en a o en b, $\Lambda = \{\alpha_n\}_{n\in I} \subset \mathbb{R}$. Consideremos las expresiones diferenciales formales:

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V$$

$$\tau_{\Lambda,M} := -\frac{d^2}{dx^2} + V + \sum_{n\in I} \alpha_n \delta(x - x_n)$$

El operador maximal $T^{max}_{\Lambda,M}$ correspondiente a $\tau_{\Lambda,M}$ en $L^2(a,b)$ se define como

$$D(T^{max}_{\Lambda,M}) := \{f \in L^2(a,b) : \ f, f' \text{ abs. cont. en } (a,b)\backslash M,\ \tau f \in L^2(a,b),$$

$$f(x_n+) = f(x_n-) \equiv f(x_n),\ \ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n),\ \forall n \in I\}$$

$$T_{V,M}^{max} f = \tau f$$

El operador minimal $T_{V,M}^{min}$ esta definido por

$$D(T_{\Lambda,M}^{min}) := \{f \in D(T_{\Lambda,M}^{max}) : supp f \text{ compacto en } (a,b)\}$$

$$T_{V,M}^{min} f = \tau f$$

Donde $supp f$ denota el soporte de f, es decir el conjunto de puntos donde la función no es cero, $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites por la derecha e izquierda respectivamente. f' y f'' la primer y segunda derivada débil de f respectivamente, tomada en cada componente conexa de $(a,b)\backslash M$. Para la definición de derivada débil ver Apéndice A.

Para u_1 y u_2 en $D(T_{\Lambda,M}^{max})$ definamos el *Corchete de Lagrange* como

$$[u_1,u_2]_x := \overline{u_1(x)}u_2'(x+) - \overline{u_1'(x+)}u_2(x) \qquad \text{para } x \in (a,b)$$

Los límites existen ya que $u_1, u_2 \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$. Obsérvese que cuando $x \neq x_n$, entonces

$$[u_1,u_2]_x := \overline{u_1(x)}u_2'(x) - \overline{u_1'(x)}u_2(x)$$

Definamos además los límites

$$[f,g]_a := \lim_{\alpha\to a+}[f,g]_\alpha \qquad y \qquad [f,g]_b := \lim_{\beta\to b-}[f,g]_\beta$$

Teorema 2.1.1 (Cf. Teorema 2.2 a), [4])**.** *Para $f,g \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$ el corchete de Lagrange $[f,g]_x$ es continuo, los límites $[f,g]_a$ y $[f,g]_b$ existen y se satisface la identidad de Lagrange:*

$$\langle T_{V,M}^{max} f, g\rangle - \langle f, T_{V,M}^{max} g\rangle = [f,g]_b - [f,g]_a$$

Demostración.
Para la primera parte basta probar que $[f,g]_x$ es continuo en x_n, $\forall n \in I$. Sean $x_n \in M$ y $f,g \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
[f,g]_{x_n-} - [f,g]_{x_n+} &= \overline{f(x_n-)}g'(x_n-) - \overline{f'(x_n-)}g(x_n-) - \overline{f(x_n+)}g'(x_n+) + \overline{f'(x_n+)}g(x_n+) \\
&= \overline{f(x_n)}[g'(x_n-) - g'(x_n+)] + g(x_n)[\overline{f'(x_n+) - f'(x_n-)}] \\
&= \overline{f(x_n)}[-\alpha_n g(x_n)] + g(x_n)[\alpha_n\overline{f(x_n)}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto $[f,g]_x$ continuo en (a,b). Ahora, sea $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Entonces $[\alpha,\beta] \cap M$ es finito. Así, por integración por partes se tiene que

$$\int_\alpha^\beta \overline{T_{V,M}^{max} f}g - \overline{f}T_{V,M}^{max} g dx = \int_\alpha^\beta [\overline{(-f''+Vf)}g - \overline{f}(-g''+Vg)]dx = \int_\alpha^\beta -\overline{f''}g dx + \int_\alpha^\beta \overline{f}g'' dx + \int_\alpha^\beta V\overline{f}g - \overline{f}Vg dx =$$

$$= -\overline{f'(\beta-)}g(\beta-) + \overline{f'(\alpha+)}g(\alpha+) + \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f'}g'dx + \overline{f(\beta-)}g'(\beta-) - \overline{f(\alpha+)}g'(\alpha+)$$

$$- \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f'}g'dx + \sum_{p\in(\alpha,\beta)\cap M} ([f,g]_{p-} - [f,g]_{p+})$$

$$= [f,g]_{\beta-} - [f,g]_{\alpha+}$$

Fijando α, por la definición de $T_{V,M}^{max}$ se sigue que la primer integral tiene un límite finito cuando $\beta \to b$. Por tanto $[f,g]_b$ existe. Análogamente haciendo que $\alpha \to a$, vemos que $[f,g]_a$ existe y es finito. Por tanto se cumple la igualdad que se quería.

□

Supongamos, sin perdida de generalidad, que el conjunto de índices es $I = \mathbb{Z}$ si es infinito o $I = \{0,1,2,\ldots,N\}$ si es finito de cardinalidad $N+1$.

Para poder generalizar Teoremas clásicos a nuestro caso es necesario extender el concepto de solución.

Definición 2.1.1.

- *Dado $g \in L^1_{loc}(a,b)$ y $z \in \mathbb{C}$, decimos que f es una solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$ si f y f' son absolutamente continuas en $(a,b)\backslash M$ con $-f'' + Vf - zf = g$, $f(x_n+) = f(x_n-)$ y $f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n)$.*

- *Sean u_1, $u_2 \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$. Definimos el Wronskiano $W(u_1,u_2)$ como*

$$W_x(u_1,u_2) := det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x+) & u_2'(x+) \end{pmatrix} = u_1(x)u_2'(x+) - u_1'(x+)u_2(x), \qquad x \in (a,b).$$

De manera análoga al corchete de Lagrange, el Wronskiano es continuo. Como consecuencia de esto se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 2.1.2. *Sean u_1 y u_2 soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$, entonces el Wronskiano $W_x(u_1,u_2)$ es constante en (a,b).*

Demostración.
Sean u_1 y u_2 soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$. Como u_1 y u_2 soluciones de $(\tau - z)u = 0$ en cada componente conexa de $(a,b)\backslash M$, por ecuación (9.4) en [24], $W_x(u_1,u_2)$ constante en cada componente conexa. Pero $W_x(u_1,u_2)$ continua en (a,b), entonces $W_{x_n-}(u_1,u_2) = W_{x_n+}(u_1,u_2)$, $\forall n \in I$. Por tanto $W_x(u_1,u_2)$ constante en (a,b). □

De manera análoga a la teoría clásica se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.3 (Cf. Lema 4.2, [4])**.** *Sean u_1 y u_2 soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$, u_1 y u_2 son linealmente independientes si y sólo si $W_x(u_1,u_2) \neq 0$, para alguna $x \in (a,b)$.*

Demostración.
Sean u_1, u_2 soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x+) & u_2'(x+) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Supongamos que $W_x(u_1,u_2) \neq 0$ para alguna $x \in (a,b)$, entonces, por Teorema 2.1.2, $W_x(u_1,u_2) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$. Así, para cualquier $x \in (a,b)$ el sistema (2.1) tiene sólo la solución trivial, y $\alpha u_1(x) + \beta u_2(x) = 0$, sólo si $\alpha = \beta = 0$. Por tanto u_1 y u_2 son linealmente independientes.

Supongamos ahora que para toda $x \in (a,b)$, $W_x(u_1,u_2) = 0$. Entonces el sistema (2.1) tiene una solución distinta del vector cero y por tanto existirá combinación lineal $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$ tal que α y β no son ambas cero, es decir, u_1 y u_2 linealmente dependientes. $\square$

Teorema 2.1.4 (Cf. Teorema 3.3 a), [4])**.** *El número de soluciones linealmente independientes de* $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ *para* $z \in \mathbb{C}$ *es* 2.

Demostración.
Supongamos I infinito. Sea v_0 solución de $(\tau - z)u = 0$ en (a,b).
Sea v_1 la única solución de $(\tau - z)u = 0$ en (a,b) tal que

$$v_1(x_0) = v_0(x_0)$$

$$v_1'(x_0) = \alpha_0 v_0(x_0) + v_0'(x_0)$$

Inductívamente, para $m > 1$, sea v_m la única solución de $(\tau - z)u = 0$ en (a,b) tal que

$$v_m(x_{m-1}) = v_{m-1}(x_{m-1})$$

$$v_m'(x_{m-1}) = \alpha_{m-1} v_{m-1}(x_{m-1}) + v'(x_{m-1})$$

Sea v_{-1} la única solución de $(\tau - z)u = 0$ en (a,b) tal que

$$v_{-1}(x_{-1}) = v_0(x_{-1})$$

$$v_{-1}'(x_{-1}) = v_{-1}'(x_{-1}) - \alpha_{-1} v_{-1}(x_{-1})$$

Inductívamente, para $m < 1$, sea v_m la única solución de $(\tau - z)u = 0$ en (a,b) tal que

$$v_m(x_m) = v_{m+1}(x_m)$$

$$v_m'(x_m) = v_{m+1}'(x_m) - \alpha_m v_{m+1}(x_m)$$

La función u_1 definida por $u_1(x) = v_m(x)$, para $x \in [x_{m-1}, x_m]$ esta únicamente determinada y es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ en (a,b).

Sea $\tilde{v}_0$ solución de $(\tau - z)u = 0$ en (a,b) tal que $\tilde{v}_0$ y v_0 linealmente independientes, esta solución existe, ver 16 Teorema 4 de [18] . Repitiendo la construcción para u_1 obtenemos función u_2 solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ en (a,b).

Por construcción $W_x(u_1,u_2) \neq 0$ para $x \in (x_{-1}, x_0)$. Por Teorema 2.1.3, u_1 y u_2 son linealmente independientes.

Sea u_3 solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ en (a,b). Por demostrar que existen constantes c_1, c_2 tales que

$$u_3(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \qquad x \in (a,b).$$

Como u_3 es solución de $(\tau - z)u = 0$ en (x_{m-1}, x_m), $\forall m \in I$, por Sección 16 Teorema 4 en [18], existen constantes c_1^m, c_2^m tales que

$$u_3(x) = c_1^m u_1(x) + c_2^m u_2(x), \qquad x \in (x_{m-1}, x_m)$$

Pero u_1, u_2 y u_3 son soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$, entonces

$$0 = u_3(x_m-) - u_3(x_m+) = (c_1^m - c_1^{m+1})u_1(x_m) + (c_2^m - c_2^{m+1})u_2(x_m)$$

De aquí que, para toda m, $c_1^m = c_1^{m+1} =: c_1$ y $c_2^m = c_2^{m+1} =: c_2$. Se sigue el resultado.

El caso con I finito se obtiene de manera análoga.

□

Observación 2.1.1. *La prueba del teorema anterior muestra como las soluciones de* $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ *pueden ser construidas de manera única a partir de las soluciones de* $(\tau - z)u = 0$ *en cada componente conexa de* (a, b)*. Además que*

$$dim(\{\textit{Soluciones de } (\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0\}) = 2 \tag{2.2}$$

Definición 2.1.2. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$ *llamamos a dos soluciones linealmente independientes de* $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ *un sistema fundamental de* $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$.

Teorema 2.1.5. *El operador* $T_{V,M}^{min}$ *tiene índices de deficiencia* d_+ *y* d_- *iguales. Además,* $T_{V,M}^{min}$ *tiene extensiones autoadjuntas.*

Demostración.
Sea $f \in D(T_{\Lambda,M}^{min})$. Entonces $\overline{f}$, $\overline{f'}$ absolutamente continuas en $(a, b)\backslash M$. $\tau_V \overline{f} \in L^2(a, b)$, $supp\overline{f}$ compacto en (a, b) y $\overline{f(x_n+)} = \overline{f(x_n-)}$, $\overline{f'(x_n+)} - \overline{f'(x_n-)} = \alpha_n \overline{f}(x_n-)$, para toda $n \in I$. Asi $\overline{f} \in D(T_{\Lambda,M}^{min})$. Además $\overline{\tau_V f} = \tau_V \overline{f}$.

Por tanto, $T_{V,M}^{min}$ es K-real con la conjugación compleja y por teorema 8.9 en [28], $T_{V,M}^{min}$ tiene índices de deficiencia iguales y extensiones autoadjuntas.

□

Teorema 2.1.6. *Los índices de deficiencia de* $T_{V,M}^{min}$, $d_+ = d_- \in \{0, 1, 2\}$.

Demostracion. Los índices de deficiencia de $T_{V,M}^{min}$ son iguales al numero de soluciones linealmente independientes de la ecuacion $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ que estan en $L^2(a, b)$, $Im(z) \neq 0$. Por Teorema 2.1.4, éstas son a lo mas dos.

□

Teorema 2.1.7 (Cf. Lema 4.2 (3)[4])**.** *Sean* u_1 *y* u_2 *un sistema fundamental de la ecuación* $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$*,* $c \in (a, b)\backslash M$*,* $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ *y* $g \in L^1_{loc}(a, b)$*, entonces existen constantes* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ *tal que la solución* f *del problema*

$$(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g, \qquad f(c) = d_1, \qquad f'(c) = d_2$$

está dada por

$$f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_1(x) \int_c^x \frac{u_2(y)g(y)}{W(u_1,u_2)} dy - u_2(x) \int_c^x \frac{u_1(y)g(y)}{W(u_1,u_2)} dy$$

para cada $x \in (a,b)$.

Demostración.
Sin perdida de generalidad, supongamos que $W(u_1,u_2) = 1$.
Sean $c_1 := u_2'(c)d_1 - u_2(c)d_2$ y $c_2 := -u_1'(c)d_1 + u_1(c)d_2$, entonces $f(c) = d_1$. Observe que si $x \in (a,b)\backslash M$,

$$f'(x) = u_1'(x)\left[c_1 + \int_c^x u_2(y)g(y)dy\right] + u_2'(x)\left[c_2 - \int_c^x u_1(y)g(y)dy\right]$$

y

$$\begin{aligned} f'' &= u_1''\left[c_1 + \int u_2(y)g(y)dy\right] + u_2''\left[c_2 - \int u_1(y)g(y)dy\right] + W(u_1,u_2)g \\ &= u_1''\left[c_1 + \int u_2(y)g(y)dy\right] + u_2''\left[c_2 - \int u_1(y)g(y)dy\right] + g \end{aligned}$$

Asi, $f'(c) = d_2$ y

$$-f'' + Vf - zf = g$$

Como $u_1(x_n+) = u_2(x_n-)$, $u_2(x_n+) = u_2(x_n-)$ y $\int_c^x u_i(y)g(y)dy$ continuas en (a,b), $i = 1,2$, entonces $f(x_n-) = f(x_n+)$, $\forall n \in I$. Más aún,

$$f'(x_n+) = u_1'(x_n+)\left[c_1 + \int_c^{x_n} u_2(y)g(y)dy\right] + u_2'(x_n+)\left[c_2 - \int_x^{x_n} u_1(y)g(y)dy\right] =$$

$$= [\alpha u_1(x_n-) + u_1'(x_n-)]\left[c_1 + \int_c^{x_n} u_2(y)g(y)dy\right] + [\alpha u_2(x_n-) + u_2'(x_n-)]\left[c_2 - \int_x^{x_n} u_1(y)g(y)dy\right] =$$

$$= \alpha f(x_n-) + f'(x_n-)$$

Se tiene que f es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$.

□

El siguiente Teorema es otra propiedad importante del Wronskiano conocida como la Identidad de Plücker.

Teorema 2.1.8. *Para toda $f_1, f_2, f_3, f_4 \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$ se cumple que*

$$W_x(f_1,f_2)W_x(f_3,f_4) + W_x(f_1,f_3)W_x(f_4,f_2) + W_x(f_1,f_4)W_x(f_2,f_3) = 0$$

Demostración.
Ovsérve que el lado izquierdo de la igualdad es igual al determinante de la matriz

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1'(x+) & f_2'(x+) & f_3'(x+) & f_4'(x+) \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1'(x+) & f_2'(x+) & f_3'(x+) & f_4'(x+) \end{pmatrix}$$

que es claramente cero.

□

Teorema 2.1.9 (Cf. Teorema 2.2 b), [4]). *El operador $T^{min}_{V,M}$ es simétrico. Más aún, $(T^{min}_{V,M})^* = T^{max}_{V,M}$.*

Demostración.
Sean $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ y $g \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$, entonces por el Teorema 2.1.1

$$< T^{max}_{V,M} f, g > - < f, T^{min}_{V,M} g >= [f,g]_b - [f,g]_a = 0$$

Ya que g tiene soporte compacto en (a,b), así $T^{max}_{V,M} \subset (T^{min}_{V,M})^*$ y por tanto $T^{min}_{V,M}$ es simétrico.

Solo queda por probar que $D((T^{min}_{V,M})^*) \subset D(T^{max}_{\Lambda,M})$. Sea $f \in D((T^{min}_{V,M}))^*$, entonces

$$\langle f, T^{min}_{V,M} g\rangle = \langle \xi, g\rangle, \qquad \forall g \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$$

para alguna función $\xi \in L^2(a,b)$. Usando el Teorema 2.1.7, sea h alguna solución de la ecuación $\tau_{\Lambda,M} h = \xi$. Para $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, integrando por partes, se tiene que para toda $g \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$,

$$\int_\alpha^\beta \overline{h}\, T^{min}_{V,M} g = [h,g]_{\beta-} - [h,g]_{\alpha+} + \sum_{p\in(\alpha,\beta)\cap M} ([h,g]_{p+} - [h,g]_{p-}) + \int_\alpha^\beta \overline{\tau_{\Lambda,M} h}\, g$$

haciendo $\alpha \to a$, $\beta \to b$ y ya que $supp\, g$ compacto en (a,b), obtenemos

$$\int_a^b \overline{h}\, T^{min}_{V,M} g = \int_a^b \overline{\tau_{\Lambda,M} h}\, g = \int_a^b \xi\, g, \qquad \forall g \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$$

de aquí que

$$\int_a^b \overline{(f-h)}\, T^{min}_{V,M} g = \int_a^b \overline{f} T^{min}_{V,M} g - \int_a^b \overline{h}\, T^{min}_{V,M} g = \int_a^b \overline{\xi}\, g - \int_a^b \overline{\xi}\, g = 0.$$

Sea u_1, u_2 sistema fundamental de $\tau_{\Lambda,M} u = 0$. Sean F, F_1 y F_2 funcionales definidos sobre $L_2(a,b)$ como

$$F(l) := \int_a^b \overline{(f-h)}\, l, \qquad F_1(l) = \int_a^b \overline{u_1}\, l, \qquad F_2(l) := \int_a^b \overline{u_2}\, l$$

Entonces $Ker(F_1) \cap Ker(F_2) \subseteq Ker(F)$. Entonces, del Lema 9.3 en [24], existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tales que $F(l) = c_1 F_1(l) + c_2 F(l)$, de aquí que

$$\int_a^b \overline{(f-h)}\, g - c_1 \int_a^b \overline{u_1}\, g - c_2 \int_a^b \overline{u_2} g = 0.$$

Por tanto, $f(x) - h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ a.e. en (a,b) y así

$$\tau_{\Lambda,M} f = \tau_{\Lambda,M}(h + c_1 u_1 + c_2 u_2) = \xi$$

Como $f \in L_2(a,b)$, se sigue que $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$.

□

Teorema 2.1.10 (Cf. Corolario 2.3 [4]).

$$D(\overline{T^{min}_{\Lambda,M}}) = \{f \in D(T^{max}_{\Lambda,M}) : [f,g]_a = [f,g]_b = 0,\, \forall g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})\}$$

Demostración.

$\subseteq$) Sea $f \in D(\overline{T^{min}_{\Lambda,M}})$, entonces del Teorema 2.1.1 y como f tiene soporte compacto en (a,b) se cumple que para toda $g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$

$$\langle T^{max}_{V,M} f, g\rangle - \langle f, T^{max}_{V,M} g\rangle = [f,g]_a - [f,g]_b = 0$$

$\supseteq$) Sea $f \in D(T^{max}_{V,M})$ tal que $[f,g]_a = [f,b]_b = 0$, para toda $g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$, en particular tomemos $g_0 \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ tal que $g_0(x) = g_0'(x) = 1$ cerca de a, se tiene que $f(a) = 0$, procediendo de manera análoga uno obtiene que $f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$, por tanto $f \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$.

$\square$

Definición 2.1.3. *Decimos que $\tau_{\Lambda,M}$ es regular en a si $-\infty < a$, $V \in L^1_{Loc}[a,b)$ y a no es un punto de acumulación de M. La expresión $\tau_{\Lambda,M}$ se dice singular en a, si no es regular. Análogo para b.*
Si $\tau_{\Lambda,M}$ es regular en a y en b, llamamos a $\tau_{\Lambda,M}$ regular.

Lema 2.1.1. *Sean $\tau_{\Lambda,M}$ regular en a, $z \in \mathbb{C}$ y $g \in L^1(a,c)$ para $c \in (a,b)$. Entonces*

a) Para cada solución f de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$ existen los límites

$$f(a) := \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad y \qquad f'(a) := \lim_{x\to a+} f'(x)$$

Para $f, g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$, se tiene que

$$[f,g]_x := \overline{f(x)}g'(x) - \overline{f'(x)}g(x), \qquad x \in [a,b)$$

b) Para $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ constantes arbitrarias, existe exactmente una solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$ con $f(a) = c_0$ y $f'(a) = c_1$.

c) Si $\tau_{\Lambda,M}$ es regular en b. Para $c_0, c_1, d_0, d_1 \in \mathbb{C}$ constantes arbitrarias, existe $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$, tal que

$$f(a) = c_0, \qquad f'(a) = c_1, \qquad f(b) = d_0, \qquad f'(b) = d_1$$

Demostración.

a) Sea f solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$. Como $\tau_{\Lambda,M}$ es regular en a, es decir, $-\infty < a$ y a no es un punto de acumulación de M, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(a,\epsilon) \cap M = \emptyset$. Al ser f solución, f y f' son absolutamente continuas en (a,ε) y por Observación A.0.1, los límites existen. El resto se sigue de la definición del corchete de Lagrange.

b) Sea u_1 y u_2 sistema fundamental de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$. Por parte a), existen los vectores $(u_1(a), u_1'(a))$ y $(u_2(a), u_2'(a))$ linealmente independientes. Sea $\tilde{f}$ solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$ arbitraria. Entonces el sistema

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 - \tilde{f}(a) \\ c_1 - \tilde{f}'(a) \end{pmatrix}$$

tiene solución y la función f definida como $f = e_1 u_1(x) + e_2 u_2(x) + \tilde{f}(x)$ es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$ que cumple las condiciones pedidas. Para probar la unicidad, supongamos que no es única. Sean f_1 y f_2 soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)f = g$ que cumplen las condiciones pedidas en a. Entonces $f_1 - f_2$ es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$, tal que $(f_1 - f_2)(a) = 0$ y $(f_1 - f_2)'(a) = 0$, por tanto $f_1 - f_2 = 0$.

$c)$ Supongamos que $c_0 = c_1 = 0$. Dado $z \in \mathbb{C}$, sea u_1, u_2 sistema fundamental de soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$, tal que $u_1(b) = u_2'(b) = 0$ y $u_1'(b) = u_2(b) = 1$. Dichas soluciones existen y son únicas ya que $\tau_{\Lambda,M}$ es regular en b, pueden ser obtenidas repitiendo la prueba de $a)$ pero para el extremo b. Además como $\tau_{\Lambda,M}$ regular, $u_1, u_2 \in L^2(a,b)$, ya que funciones continuas en un intervalo finito estan en $L^2(a,b)$, y por tanto $u_1, u_2 \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$.
Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} \|u_1\| & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \|u_2\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ -d_1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Como u_1 y u_2 son linealmente independientes, $\|u_1\|\|u_2\| \neq |\langle u_1, u_2\rangle|$, y por tanto el sistema (2.3) tiene solución no trivial para e_1 y e_2. Sea $f = e_1 u_2 + e_2 e_2$, entonces $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ y f es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$. Visto que $f \in L^2(a,b)$, entonces $f \in L^1_{Loc}(a,b)$. Por parte $b)$ existe una función v solución de $\tau_{\Lambda,M} v = f$ con $v(a) = 0$ y $v'(a) = 0$. Nuevamente como $\tau_{\Lambda,M}$ regular, $v \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$. Usando la identidad de Lagrange, Teorema 2.1.1, se tiene de (2.3) que

$$d_0 = \overline{e}_1\|u_1\| + \overline{e}_2\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, e_1 u_1 + e_2 u_2\rangle = \langle u_1, f\rangle = \langle u_1, \tau_{\Lambda,M} v\rangle =$$

$$= \langle u_1, \tau_{\Lambda,M} v\rangle - \langle \tau_{\Lambda,M} u_1, v\rangle = [u_1, v]_a - [u_1, v]_b = -[u_1, v]_b$$

Haciendo cálculos similares resulta que $d_1 = [u_2, b]$. De aquí,

$$d_0 = \overline{u_1'(b)}v(b) - \overline{u_1(b)}v'(b) = v(b)$$

y

$$d_1 = \overline{u_2(b)}v'(b) - \overline{u_2'(b)}v(b) = v'(b)$$

Repitiendo el argumento para el caso en que $d_0 = d_1 = 0$, encontramos una función $w \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ tal que $w(a) = c_0$, $w'(a) = c_1$ y $w(b) = w'(b) = 0$. Por tanto, $v + w \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ es la función buscada.

□

Las partes $a)$ y $b)$ del Lema 2.1.1 se pueden probar, de manera análoga, para el caso en que $\tau_{\Lambda,M}$ regular en b.

2.2 Caso Regular

En esta subsección se estudiarán las extensiones autoadjuntas del operador $T^{min}_{\Lambda,M}$ en el caso que $\tau_{\Lambda,M}$ es regular. Observe que como $T^{min}_{M,V} \subset T^{max}_{M,V} = (T^{min}_{M,V})^*$, entonces toda extensión autoadjunta S de $T^{min}_{M,V}$ es tal que

$$T^{min}_{M,V} \subset S \subset T^{max}_{M,V}$$

Por tanto, el dominio de definición de cualquier extensión autoadjunta de $T^{min}_{M,V}$ debe ser un subespacio de $D(T^{max}_{M,V})$ en el que se cumplan ciertas condiciones de frontera que garanticen que los terminos de frontera, al aplicar integración por partes, se anulen.

La teoría que aquí se aplicará es análoga a la teoría clásica de operadores diferenciales ordinarios de segundo orden, ver por ejemplo Sección 8.4 en [28].

Teorema 2.2.1. *Si $\tau_{\Lambda,M}$ es regular, entonces los índices de deficiencia de $T^{min}_{\Lambda,M}$ son iguales a $(2,2)$.*

Demostración,
Si $\tau_{M,V}$ es regular, entonces toda solucion de la ecuacion $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ esta en $L^2(a,b)$, con $Im(z) \neq 0$, ya que funciones continuas en un intervalo finito estan en $L^2(a,b)$. Por tanto, por Teorema 2.1.6, $\gamma_+ = \gamma_- = 2$. □

Teorema 2.2.2. *Sea $\tau_{\Lambda,M}$ regular. Entonces*

$$D(\overline{T^{min}_{\Lambda,M}}) = \{f \in D(T^{max}_{\Lambda,M}) : f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b)\}$$

Demostración.
Sea $f \in D(\overline{T^{min}_{\Lambda,M}})$. Por Lema 2.1.1 c), existe función $v \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ tal que $v(a) = 0$, $v'(a) = 1$ y $v(x) = 0$ cerca de b. Del Lema 2.1.1 a), se tiene

$$0 = \langle \overline{T^{min}_{\Lambda,M}} f, v\rangle - \langle f, T^{max}_{\Lambda,M} v\rangle = [f,v]_b - [f,v]_a = -f(a)$$

Si ahora, la función v es escogida de tal manera que $v(a) = 1$, $v'(a) = 0$ y $v(x) = 0$ cerca de b, obtenemos que $f'(a) = 0$. De manera similar se prueba que $f(b) = f'(b) = 0$.

Para probar la otra contención, sea $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ tal que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Entonces, por Lema 2.1.1 a),

$$\langle T^{max}_{\Lambda,M} f, g\rangle - \langle f, T^{max}_{\Lambda,M} g\rangle = [f,g]_b = [f,g]_a = 0$$

para toda $g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$. Es decir, $f \in D((T^{max}_{\Lambda,M})^*) = D(((T^{min}_{\Lambda,M})^*)^*) = D(\overline{T^{min}_{\Lambda,M}})$.

□

Teorema 2.2.3. *Sea $\tau_{\Lambda,M}$ regular. Entonces el operador definido como*

$$D(H^{\theta,\gamma}_{V,M}) := \left\{ f \in D(T^{max}_{\Lambda,M}) : \begin{array}{l} f(a)\cos\theta - f'(a)\sin\theta = 0 \\ f(b)\cos\gamma - f'(b)\sin\gamma = 0 \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

$$H^{\theta,\gamma}_{V,M} f = T^{max}_{\Lambda,M} f$$

es una extensión autoadjunta de $T^{min}_{\Lambda,M}$ para cualesquiera $\theta, \gamma \in [o, \pi)$.

Demostración.
Integrando por partes se ve que $H^{\theta,\gamma}_{V,M}$ es un operador simétrico. Por tanto, basta probar que $H^{\theta,\gamma}_{V,M}$ es extensión de al menos dimensión 2 de $\overline{T^{min}_{\Lambda,M}}$. Ver Teorema 8.13 *b*) en [28]. Para ver esto, sean $u_a, u_b \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ tales que $u_a(a) = \sin\theta$, $u_a'(a) = \cos\theta$ y $u_a(x) = 0$ cerca de b; $u_b(b) = \sin\gamma$, $u_b'(b) = \cos\gamma$ y $u_b(x) = 0$ cerca de a. Estas funciones existen por Lema 2.1.1, y por construcción $u_a, u_b \in D(H^{\theta,\gamma}_{V,M})$.
Además, no existen constantes c_1, c_2 no cero, tales que la función $v := c_1u_a + c_2u_b$ cumpla que $v(a) = v'(a) = v(b) = v'(v) = 0$. Por teorema 2.2.2, esto quiere decir que no existe combinación no trivial de u_a y u_b que este en $D(\overline{T^{min}_{\Lambda,M}})$, es decir, $H^{\theta,\gamma}_{V,M}$ es extensión de dimensión 2 de $\overline{T^{min}_{\Lambda,M}}$ y por tanto $H^{\theta,\gamma}_{V,M}$ define una extensión autoadjunta de $\overline{T^{min}_{\Lambda,M}}$.

□

2.3 Caso Singular: Alternativa de Weyl

Se probó en el Teorema 2.1.6 que lo índices de deficiencia del operador $T^{min}_{\Lambda,M}$ pueden ser solamente 0, 1 o 2. Para el caso regular sabemos que los índices son exactamente 2, ver Teorema 2.2.1. Para estudiar este mismo problema en el caso singular el siguiente resultado, una generalización de la Alternativa de Weyl, es crucial.

Teorema 2.3.1 (Cf. Teorema 4.3 [4])**.** *Sea $c \in (a, b)$. Si para algún z_0, toda solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z_0)u = 0$ pertenece a $L^2(c, b)$, entonces toda solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ pertenece a $L^2(c, b)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Análogo para a.*

Demostración.
Sean u_1 y u_2 sistema fundamental de soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} - z_0)u = 0$, con $Im(z_0) \neq 0$, por hipótesis, $u_1, u_2 \in L^2(c, b)$ y supongamos sin perdida de generalidad que $W(u_1, u_2) = 1$. Sea v una solución arbitraria de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$. Entonces

$$(\tau_{\Lambda,M} - z_0)v = \tau_{\Lambda,M}v - z_0v = (z - z_0)v$$

Aplicando el teorema 2.1.7 para $g(x) = (z - z_0)v(x)$, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, tales que

$$v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + u_1(x)\int_c^x u_2(y)(z - z_0)v(y)dy - u_2(x)\int_c^x u_1(y)(z - z_0)v(y)dy =$$

$$= c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + (z - z_0)\int_c^x [u_1(x)u_2(y) - u_1(y)u_2(x)]v(y)dy$$

Definamos

$$\|v(x)\|_c := \left\{\int_c^x |v(y)|^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Claramente $\|v(x)\|_c \leq \|v\|_{L^2(c,b)}$. Escojamos M tal que $\|u_1(x)\|_c \leq M$ y $\|u_2(x)\|_c \leq M$, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$\int_c^x [u_1(x)u_2(y) - u_2(x)u_1(y)]v(y)dy \leq \|u_1(x)u_2(y) - u_2(x)u_1(y)\|_c\|v(x)\|_c \leq M(|u_1(x) + u_2(x)|)\|v(x)\|_c$$

Entonces, por la desigualdad de Minkowski

$$\|v(x)\|_c \leq (|c_1| + |c_2|)M + 2|z - z_0|M^2 \|v(x)\|_c$$

Si c es suficientemente grande para que $|z - z_0|M^2 < \frac{1}{4}$, entonces $\|v(x)\|_c \leq 2(|c_1| + |c_2|)M$. Y por tanto, $v \in L^2(c, b)$.

$\square$

De esto, se obtiene el siguiente resultado

Teorema 2.3.2 (Cf. Teorema 4.4 [4]). *[Alternativa de Weyl] Exactamente una de las siguientes alternativas se cumple,*

$i)$ *Para toda $z \in \mathbb{C}$ todas las soluciones de $(\tau_{\Lambda,M} z)u = 0$ estan en L^2 cerca de b.*

$ii)$ *Para toda $z \in \mathbb{C}$ existe al menos una solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ que no este en L^2 cerca de b.*

De manera análoga para a.

Demostración.
Como el número de soluciones linealmente independientes de $(\tau_{\lambda,M} - z)u = 0$ es dos, de Teorema 2.3.1, se sigue inmediátamente el resultado. $\square$

En el primer caso decimos que $\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso de círculo límite en b (lcc), en el segundo decimos que está en el caso de punto límite en b (lpc). Ésta terminología fue introducida por Weyl en el caso clásico.

Lema 2.3.1. *Si $\tau_{\Lambda,M}$ es lcc en b, entonces existe una única solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ que esta en L^2 cerca de b. Un resultado similar se cumple para a.*

Demostración.
Si existieran dos soluciones linealmente independendientes en L^2 cerca de b, $\tau_{\Lambda,M}$ estaría en el caso de punto límite. $\square$

Lema 2.3.2 (Cf. Teorema 4.5 [4]). *$\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso de punto límite en b si y solo si para toda $f, g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$, $[f, g]_b = 0$. Se cumple similarmente para a.*

Demostración. Supongamos que $\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso de punto límite en b y es regular en a. Entonces, por Lema 2.3.1, $dim(Ker(T^{max}_{\Lambda,M} - i)) = 1$, es decir $T^{min}_{\Lambda,M}$ tiene índices de deficiencia $(1, 1)$ y así $T^{max}_{\Lambda,M}$ es una extensión dos dimensional de $T^{min}_{\Lambda,M}$. Ver sección 8.2 en [28] para definiciones precisas.

Sean $u_1, u_2 \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ con $u_1 = u_2 = 0$ cerca de b y

$$u_1(a) = u_2'(a) = 1 \qquad \text{y} \qquad u_1'(a) = u_2(a) = 0$$

entonces $u_1, u_2 \notin D(T^{min}_{\Lambda,M})$ y u_1, u_2 linealmente independientes, es decir, u_1 y u_2 son linealmente independientes módulo $T^{min}_{\Lambda,M}$. Por tanto (Teorema 8.13 a) [28])

$$D(T^{max}_{\Lambda,M}) = D(T^{min}_{\Lambda,M}) + span\{u_1, u_2\}$$

Entonces, para cada $f, g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$, existen funciones $f_0, g_0 \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$ tales que $f = f_0$ y $g = g_0$ cerca de b y por tanto

$$[f, g]_b = [f_0, g_0]_b = 0$$

Ahora, si $\tau\Lambda, M$ no es regular en a tomemos una $c \in (a, b)$. Para toda $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ la función $f|_{(c,b)}$ pertenece al dominio del operador maximal inducido por la restricción $\tau_{\Lambda,M}|_{(c,b)}$ y el resultado se sigue por lo ya probado.

□

Lema 2.3.3. *Supongamos que $\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso de punto limite en a y en b. Si u es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ tal que $u \in L^2(a, b)$, entonces $u = 0$.*

Demostración.
Si $u \in L^2(a, b)$ es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$, entonces $\overline{u} \in L^2(a, b)$ es solución de $(\tau_{\Lambda,M} - \overline{z})u = 0$ y ambas $u, \overline{u} \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$. Sea $[\alpha, beta] \subset (a, b)$. Aplicando la identidad de Lagrange en $[\alpha, \beta]$, Teorema 2.1.1, se tiene que

$$[u, \overline{u}]_\beta - [u, \overline{u}]_\alpha = \int_\alpha^\beta zu\overline{u} - \int_\alpha^\beta u\overline{zu} = (z - \overline{z}) \int_\alpha^\beta u\overline{u} = 2i\, Im(z) \int_\alpha^\beta |u|^2$$

Cuando $\alpha \to a$ y $\beta \to b$, el lado izquierdo de la igualdad converge a cero por Lema 2.3.2 y el lado derecho converge a $2i\, Im(z)\|u\|^2$, por tanto $u = 0$.

□

Lema 2.3.4. *$\tau_{\Lambda,M}$ esta en el caso de círculo límite en b si y solo si existe $f \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ tal que*

$$[f, \overline{f}]_b = 0 \qquad y \qquad [f, g]_b \neq 0$$

para algúna $g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$. Se cumple similarmente para a.

Demostración.
Supongamos que $\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso de círculo límite en b y sean u_1 y u_2 sistema fundamental de soluciones de $\tau_{\Lambda,M}u = 0$ con $W(u_1, u_2) = 1$, entonces $u_1, u_2 \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ cerca de b. Por tanto existen $f, g \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ con $f = u_1$ y $g = u_2$ cerca de b. Por tanto, como u_1 y u_2 son reales, se tiene que

$$[f, g]_b = [u_1, u_2]_b = 1$$

y

$$[f, \overline{f}]_b = [u_1, \overline{u_1}]_b = 0$$

□

Teorema 2.3.3 (Cf. Teorema 4.6 [4]). *Los índices de deficiencia de $T^{min}_{\Lambda,M}$ son:*

$$\gamma_\pm(T^{min}_{\Lambda,M}) = \begin{cases} 0 & Si\ \tau_{\Lambda,M} es\ lpc\ en\ ambos\ extremos\ de\ (a,b) \\ 1 & Si\ \tau_{\Lambda,M} es\ lpc\ en\ solo\ un\ extremo\ de\ (a,b) \\ 2 & Si\ \tau_{\Lambda,M} es\ lcc\ en\ ambos\ extremos\ de\ (a,b) \end{cases}$$

Demostración.
Si $\tau_{\Lambda,M}$ es lcc en ambos extremos de (a,b), entonces toda solución de $(\tau_{\Lambda,M} - i)u = 0$ pertenece a $L^2(a,b)$ y por tanto $\gamma_{\pm} = dim(Ker(T_{\Lambda,M}^{max} \mp i)) = 2$.
En caso de que $\tau_{\Lambda,M}$ es lpc en solo un extremo de (a,b), entonces, por Lema 2.3.1, existe exactamente una solución de $(\tau_{\Lambda,M} - i)u = 0$ en $L^2(a,b)$, así $\gamma_{\pm} = 1$.
Si $\tau_{\Lambda,M}$ es lpc en ambos extremos se tiene que $Ker(T_{\Lambda,M}^{max} - i) = \{0\}$, por Lema 2.3.3 y por tanto $\gamma_{\pm} = 0$.

□

2.4 Extensiones Autoadjuntas

Con ayuda de los resultados obtenidos hasta ahora, estamos preparadors para dar las restricciones autoajuntas del operador $T_{\Lambda,M}^{max}$ o equivalentemente las extensiones autoadjuntas de $T_{\Lambda,M}^{min}$.

Introduzcamos la siguiente notación

$$[f,g]_a^b := [f,g]_b - [f,g]_a$$

Teorema 2.4.1. *Un operador A es una restricción autoadjunta de $T_{\Lambda,M}^{max}$ si y sólo si*

$$D(A) = \{g \in D(T_{\Lambda,M}^{max}) : \forall f \in D(A),\ [f,g]_a^b = 0\}$$

Demostración.
Denotemos el conjunto del lado derecho de la igualdad como A_0. Supongamos primero que A es una restricción autoadjunta de $T_{\Lambda,M}^{max}$. Si $g \in D(A)$, entonces

$$0 = \langle T_{\Lambda,M}^{max} f, g\rangle - \langle f, T_{\Lambda,M}^{max} g\rangle = [f,g]_a^b, \qquad \forall f \in D(A)$$

así, $g \in A_0$. Ahora si $g \in A_0$, entonces

$$0 = [f,g]_a^b = \langle T_{\Lambda,M}^{max} f, g\rangle - \langle f, T_{\Lambda,M}^{max} g\rangle, \qquad \forall f \in D(A)$$

y por tanto $g \in D(A^*) = D(A)$.
Por otro lado, supongamos ahora que $D(A) = A_0$, entonces A es un operador simétrico ya que para toda $f, g \in D(A)$, se cumple que $\langle T_{\Lambda,M}^{max} f, g\rangle = \langle f, T_{\Lambda,M}^{max} g\rangle$. Ahora, sea $g \in D(A^*) \subseteq T_{\Lambda,M}^{max}$, entonces

$$0 = \langle T_{\Lambda,M}^{max} f, g\rangle - \langle f, T_{\Lambda,M}^{max} g\rangle = [f,g]_a^b$$

Para toda $f \in A$ y por tanto $g \in A_0 = A$.

□

El objetivo de esta sección es determinar las restricciones autoadjuntas de $T_{\Lambda,M}^{max}$. El caso más sencillo es cuando $\tau_{\Lambda,M}$ es punto límite en a y en b.

Teorema 2.4.2. *Si $\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso de punto límite en a y en b entonces $T_{\Lambda,M}^{min} = T_{\Lambda,M}^{max}$ es un operador autoadjunto.*

Demostración.
Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 2.3.3.

□

Ahora analízemos el caso en el que $\tau_{\Lambda,M}$ es lpc en un extremo de (a,b) y lcc en el otro.

Teorema 2.4.3. *Supongamos que $\tau_{\Lambda,M}$ es lpc en a y lcc en b. Entonces A es una restricción autoadjunta de $T^{max}_{\Lambda,M}$ si y sólo si existe $v \in D(T^{max}_{\Lambda,M})\backslash D(T^{min}_{\Lambda,M})$ con $[v,v]_a = 0$ tal que*

$$D(A) = \{f \in D(T^{max}_{\Lambda,M}) : [v,f]_a = 0\}$$

Se cumple un resultado similar en el caso de que $\tau_{\Lambda,M}$ es lcc en b y lpc en a.

Demostración Del Teorema 2.3.3, sabemos que $\gamma_\pm(T^{min}_{\Lambda,M}) = 1$, entonces las extensiones autoadjuntas de $T^{min}_{\Lambda,M}$ son precisamente las extensiones simétricas uno dimensionales de $T^{min}_{\Lambda,M}$, ver sección 8.2 en [28] para definiciones precisas. Por tanto, ver Teorema 8.13 a) en [28], A es una extensión autoadjunta de $T^{min}_{\Lambda,M}$ si y sólo si existe función $v \in D(T^{max}_{\Lambda,M})\backslash D(T^{min}_{\Lambda,M})$ con $[v,v]_a = 0$ y tal que

$$D(A) = D(T^{min}_{\Lambda,M}) + span\{v\}$$

Por tanto, basta probar que

$$T^{min}_{\Lambda,M} + span\{v\} = \{f \in D(T^{max}_{\Lambda,M}) : [v,f]_a = 0\}$$

Sea $f \in D(T^{min}_{\Lambda,M}) + span\{v\}$, entonces existen $f_0 \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$ y constante c tal que $f = f_0 + cv$. Por Teorema 2.1.10, $[v, f_0] = 0$ y como $[v,v]_a = 0$, entonces $[v,f]_a = 0$.
Por tanto, el subespacio del lado izquierdo de la igualdad esta contenido en el del lado derecho. Pero si el subespacio del lado derecho fuera más grande, sería igual que $D(T^{max}_{\Lambda,M})$ y por tanto esto implicaría que $v \in D(T^{min}_{\Lambda,M})$.

□

Las restricciones autoadjuntas obtenidas en el Teorema 2.4.3 son distintas si y sólo si las funciones v correspondientes son linealmente independientes módulo $D(T^{min}_{\Lambda,M})$. Más aún , v puede ser elegida tal que v sea una solución real de $(\tau_{\Lambda,M} - z)u = 0$ con $z \in \mathbb{R}$ cerca de a.

Finalmente consideremos el caso en que $\tau_{\Lambda,M}$ es lcc en a y en b.

Teorema 2.4.4 (Cf. Teorema 5.1 [4])**.** *Supongamos que $\tau_{\Lambda,M}$ está en el caso del círculo límite en a y en b. Entonces A es una restricción autoadjunta de $T^{max}_{\Lambda,M}$ si y sólo si existen funciones $v, w \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$, linealmente independientes módulo $D(T^{min}_{\Lambda,M})$, con*

$$[v,v]^b_a = [w,w]^b_a = [v,w]^b_a = 0$$

tales que

$$D(A) = \{f \in D(T^{max}_{\Lambda,M}) : [v,f]_a = [w,f]_b = 0\}$$

Demostración.
Del Teorema 2.3.3, sabemos que $\gamma_\pm(T^{min}_{\Lambda,M}) = 2$, entonces las extensiones autoadjuntas de $T^{min}_{\Lambda,M}$ son precisamente las extensiones simétricas dos dimensionales de $T^{min}_{\Lambda,M}$, ver sección 8.2 en [28] para definiciones precisas. Por tanto, ver Teorema 8.13 a) en [28], A es una extensión autoadjunta de $T^{min}_{\Lambda,M}$ si y sólo si existen funciones $v, w \in D(T^{max}_{\Lambda,M})$ linealmente independientes módulo $T^{min}_{\Lambda,M}$ con

$$[v,v]^b_a = [w,w]^b_a = [v,w]^b_a = 0$$

tales que

$$D(A) = D(T^{min}_{\Lambda,M}) + span\{v,w\}$$

Por tanto, basta probar que

$$D(T_{\Lambda,M}^{min}) + span\{v,w\} = \{f \in D(T_{\Lambda,M}^{max}) : [v,f]_a^b = [w,f]_a^b = 0\}$$

Denotemos el subespacio del lado derecho por S. Sea $f \in D(T_{\Lambda,M}^{min}) + span\{v,w\}$, entonces existen $f_0 \in D(T_{\Lambda,M}^{min})$ y constantes c_1, c_2 tales que $f = f_0 + c_1 v + c_2 w$. Por Teorema 2.1.10, $[v, f_0]_a^b = 0$ y $[w, f_0]_a^b$, entonces $[v,f]_a^b = 0$. Por tanto el subespacio del lado izquierdo de la igualdad esta contenido en S. Para probar que S no puede ser más grande, consideremos los funcionales F_v y F_w en $D(T_{\Lambda,M}^{max})$ definidos por

$$F_v(f) = [v,f]_a^b \qquad \text{y} \qquad F_w(f) = [w,f]_a^b \qquad f \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$$

La intersección de los Kernels de estos funcionales es precisamente S, por definición. Más aún estos funcionales son linealmente independientes. Para ver esto supongamos $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ y $c_1 F_v + c_2 F_w = 0$, entonces para toda $f \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$ se tiene que

$$0 = k_1 F_v(f) + k_2 F_w(f) = k_1[v,f]_a^b + k_2[w,f]_a^b = [k_1 v + k_2 w, f]_a^b$$

Esto implica que

$$[k_1 v + k_2 w, f]_a = [k_1 v + k_2 w, f]_b = 0$$

para toda $f \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$ y por tanto $c_1 v + c_2 w \in D(T_{\Lambda,M}^{min})$. Ahora como v, w son linealmente independientes modulo $T_{\Lambda,M}^{min}$ obtenemos que $k_1 = k_2 = 0$.

Ahora por Lema 9.3 en [24]

$$Ker(F_v) \nsubseteq Ker(F_w) \qquad \text{y} \qquad Ker(F_w) \nsubseteq Ker(F_v)$$

Por tanto existen $f_v, f_2 \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$ tales que $[v, f_v]_a^b = [w, f_w]_a^b = 0$ pero $[w, f_v]_a^b \neq 0$ y $[v, f_w]_a^b \neq 0$. Ambas funciones, $f_v, f_w \notin S$ y son linealmente independientes. Por tanto S es a lo más una extensión dos dimensional de $T_{\Lambda,M}^{min}$.

□

En el caso en que $\tau_{\Lambda,M}$ es lcc en a y en b , las restricciones autoadjuntas de $T_{\Lambda,M}^{max}$ se dice que tienen condiciones de frontera separadas si es de la forma

$$D(A) = \{f \in D(T_{\Lambda,M}^{max}) : [v,f]_a = [w,f]_b = 0\}$$

donde $v, w \in D(T_{\Lambda,M}^{max})$ y pueden ser elegidas como soluciones reales de $(\tau_{\Lambda,M} - z) = 0$ cerca de a y b respectivamente.

Los resultados de esta sección se pueden resumir en el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.5 (Cf. Teorema 5.2 a) [4]). *$A_{v,w}$ es una restricción autoadjunta de $T_{\Lambda,M}^{max}$ con condiciones de frontera separadas si y sólo si existen soluciones reales v y w de $(\tau_{\Lambda,M} - z) = 0$, $z \in \mathbb{R}$ tales que*

$$D(A_{v,w}) \;=\; \left\{ f \in D(T_{\Lambda,M}^{max}) : \begin{array}{c} [v,f]_a = 0 \text{ si } \tau_{\alpha,M} \text{ lcc en } a \\ [w,f]_b = 0 \text{ si } \tau_{\alpha,M} \text{ lcc en } b \end{array} \right\}.$$

Los subíndices v, w no tienen significado si $\tau_{\Lambda,M}$ es lpc.

CAPÍTULO 3

Operadores Aleatorios de Sturm-Liouville con Interacciones Puntuales Tipo δ y δ'

3.1 Operadores de Sturm-Liouville con una interacción puntual

En éste capítulo se analizará el caso de una sola interacción en el caso regular y se desarrollarán los pasos básicos que serán usados en las secciones siguientes.
Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado finito. Sea $V \in L^1(J)$ función real, $p \in J$ un punto interior y $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos las expresiones diferenciales

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V$$

$$\tau_{\alpha,p} := -\frac{d^2}{dx^2} + V + \alpha\delta(x-p)$$

El operador maximal $T_{\alpha,p}$ correspondiente a $\tau_{\alpha,p}$ esta definido por

$$T_{\alpha,p} f = \tau f$$

$$D(T_{\alpha,p}) = \{f \in L^2(J) : \ f,\ f' \text{ abs. cont en } J\backslash\{p\}, -f'' + Vf \in L^2(J),$$
$$f(p+) = f(p-) \equiv f(p),\ f'(p+) - f'(p-) = \alpha f(p)\}$$

Extenderemos el concepto de solución y Wronskiano de la siguiente manera

Definición 3.1.1. *Dados $g \in L^1(J)$ y $z \in \mathbb{C}$, decimos que f es solución de $(\tau_{\alpha,p} - z)f = g$ si f y f' son absolutamente continuas en $J\backslash\{p\}$ con $-f'' + Vf - zf = g$ y $f(p+) = f(p-)$, $f'(p+) - f'(p-) = \alpha f(p)$.*

Definición 3.1.2. *Sean u_1 y u_2 soluciones de $(\tau_{\alpha,p} - z)u = 0$, $z \in \mathbb{C}$. El Wronskiano $W(u_1, u_2)$ esta definido por*

$$W_x(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)(x) := det \begin{pmatrix} u_1(x+) & u_2(x+) \\ u_1'(x+) & u_2'(x+) \end{pmatrix} = u_1(x+)u_2'(x+) - u_1'(x+)u_2(x+)$$

Lema 3.1.1. *$W(u_1, u_2)$ es continuo en p.*

$$\begin{aligned}
W_{p-}(u_1,u_2) - W_{p+}(u_1,u_2) &= u_1(p)u_2'(p-) - u_1'(p-)u_2(p) - u_1(p)u_2'(p+) + u_1'(p+)u_2(p) \\
&= u_1(p)[u_2'(p-) - u_2'(p+)] + u_2(p)[u_1'(p+) - u_1'(p-)] \\
&= u_1(p)[-\alpha u_2(p)] + u_2(p)[\alpha u_1(p)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Fijemos $J = [a,b]$

Lema 3.1.2. *Sean u y v soluciones de*

$$\tau_{\alpha,p}u = \lambda_0 u \qquad y \qquad \tau_{\alpha,p}v = \lambda v$$

respectivamente. Sean $c, d \in [a,b]\backslash\{p\}$. Entonces

$$W_d(u,v) - W_c(u,v) = (\lambda_0 - \lambda)\int_c^d u(t)v(t)dt.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx}W_x(u,v) &= \tfrac{d}{dx}[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] \\
&= u'(x)v'(x) + u(x)v''(x) - u''(x)v(x) - u'(x)v'(x) \\
&= u(x)[V(x)v(x) - \lambda v(x)] - [V(x)u(x) - \lambda_0 u(x)]v(x) \\
&= (\lambda_0 - \lambda)u(x)v(x)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}W_x(u,v) = (\lambda_0 - \lambda)u(x)v(x) \qquad \forall x \in [a,b]\backslash\{p\}$$

Sean $c, d \in [a,b]\backslash\{p\}$. Si $a \leq c < d < p$ o $p < c < d \leq b$, entonces del teorema fundamental del cálculo

$$W_d(u,v) - W_c(u,v) = (\lambda_0 - \lambda)\int_c^d u(t)v(t)dt$$

Si $a \leq c < p < d \leq b$, por continuidad del Wronskiano en p, Lema 3.1.1, se tiene

$$(\lambda_0 - \lambda)\int_c^d u(t)v(t)dt = (\lambda_0 - \lambda)\left[\int_c^p u(t)v(t)dt + \int_p^d u(t)v(t)dt\right]$$

$$= W_{p-}(u,v) - W_c(u,v) + W_d(u,v) - W_{p+}(u,v) = W_d(u,v) - W_c(u,v)$$

□

Definición 3.1.3. *Una solución de $\tau_{\alpha,p}u = \lambda u$ que satisface la condición de frontera en $l \in [a,b]\backslash\{p\}$.*

$$u(l)cos\theta + u'(l)sen\theta = 0, \qquad \theta \in [0,\pi)$$

se denotará por $u_{l,\alpha}(\lambda)$.

Dicha solución puede ser construida de la siguiente manera. Supongamos que $l \in [a, p)$, elegimos $w_1(x, \lambda)$ solución de $(\tau - \lambda)u = 0$, tal que

$$w_1(l, \lambda) = sen\theta$$
$$w_1'(l, \lambda) = -\cos\theta$$

Una vez obtenida $w_1(x, \lambda)$, elegimos $w_2(x, \lambda)$ solución de $(\tau - \lambda)u = 0$, tal que

$$w_2(p, \lambda) = w_1(p, \lambda)$$
$$w_2'(p, \lambda) = w_1'(p, \lambda) + \alpha w_1(p, \lambda)$$

Entonces podemos definir

$$u_{l,\alpha}(x, \lambda) := \begin{cases} w_1(x, \lambda) & \text{si } x \leq p \\ w_2(x, \lambda) & \text{si } x > p \end{cases}$$

En caso de que $l \in (p, b]$, la construcción es análoga. Si $\alpha = 0$ entonces la solución construida es la solución del caso clásico.

Las funciones $u_{l,\alpha}(x, \lambda)$ y $u_{l,\alpha}'(x, \lambda)$ son enteras con respecto a λ para cada $x \in [a, b]$ fijo. Ver [24], Teorema 9.1 y [29], Teorema 2.5.3.

El siguiente Teorema es una generalización del Teorema 8.4.2 en [3],

Teorema 3.1.1. *Sea $u_{a,\alpha}(\lambda)$ como en la definición anterior. Si $u_{a,\alpha}'(\lambda, x) \neq 0$, entonces $\forall x \in [a, b] \backslash \{p\}$*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{u_{a,\alpha}(\lambda, x)}{u_{a,\alpha}'(\lambda, x)}\right\} = \frac{1}{u_{a,\alpha}'(\lambda, x)^2}\int_a^x u_{a,\alpha}(\lambda, t)^2 dt$$

y si $u_{a,\alpha}(\lambda, x) \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{u_{a,\alpha}'(\lambda, x)}{u_{a,\alpha}(\lambda, x)}\right\} = -\frac{1}{u_{a,\alpha}(\lambda, x)^2}\int_a^x u_{a,\alpha}(\lambda, t)^2 dt$$

Demostración. Si en el Lema 3.1.2 escogemos $u = u_{a,\alpha}(\lambda)$ y $v = u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda})$ entonces, para $x \in [a, b] \backslash \{p\}$

$$W_x(u_{a,\alpha}(\lambda), u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda})) = (\lambda - \tilde{\lambda})\int_a^x u_{a,\alpha}(\lambda, t)u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda}, t)dt$$

ya que $W_a(u_{a,\alpha}(\lambda), u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda})) = 0$
Así $\forall x \in [a, b] \backslash \{p\}$

$$\begin{aligned}
\int_a^x u_{a,\alpha}(\lambda, t)u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda}, t)dt &= \tfrac{u_{a,\alpha}(\lambda)u_{a,\alpha}'(\tilde{\lambda}) - u_{a,\alpha}'(\lambda)u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}} \\
&= \tfrac{u_{a,\alpha}(\lambda)u_{a,\alpha}'(\tilde{\lambda}) - u_{a,\alpha}(\lambda)u_{a,\alpha}'(\lambda) + u_{a,\alpha}(\lambda)u_{a,\alpha}'(\lambda) - u_{a,\alpha}'(\lambda)u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}} \\
&= u_{a,\alpha}'(\lambda)\tfrac{u_{a,\alpha}(\lambda) - u_{a,\alpha}(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}} - u_{a,\alpha}(\lambda)\tfrac{u_{a,\alpha}'(\lambda) - u_{a,\alpha}'(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}}
\end{aligned}$$

Haciendo $\tilde{\lambda} \to \lambda$, obtenemos que

$$\int_a^x u_{a,\alpha}(\lambda, t)^2 dt = u'_{a,\alpha}(\lambda, x)\frac{\partial}{\partial \lambda} u_{a,\alpha}(\lambda, x) - u_{a,\alpha}(\lambda, x)\frac{\partial}{\partial \lambda} u'_{a,\alpha}(\lambda, x)$$

Dividiendo por $u'_{a,\alpha}(\lambda, x)^2$ obtenemos la primer igualdad y dividiendo por $u_a(\lambda, x)^2$ obtenemos la segunda.

□

Definición 3.1.4. *Definamos para $z \in \mathbb{C}$*

$$G_\alpha(z, x, x) = \frac{u_{a,\alpha}(z, x) u_{b,\alpha}(z, x)}{W_x(u_{a,\alpha}(z), u_{b,\alpha}(z))}$$

Ésta es la función de Green de un operador autoadjunto, pero ésto no se usara aquí.

Teorema 3.1.2. *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$G_\alpha(z; p, p) = G_0(z; p, p)\frac{1}{1 - \alpha G_0(z; p, p)}$$

Demostración. Si $x \leq p$, $u_{a,0}(x) = u_{a,\alpha}(x)$ y si $x \geq p$, $u_{b,0}(x) = u_{b,\alpha}(x)$.

Ahora, de la condición en p

$$u'_{a,\alpha}(p+) = u'_{a,\alpha}(p-) + \alpha u_{a,\alpha}(p) = u'_{a,0}(p-) + \alpha u_{a,0}(p) = u'_{a,0}(p+) + \alpha u_{a,0}(p).$$

Usando esto en G_α se tiene que

$$G_\alpha(z, p, p) = \frac{u_{a,\alpha}(p) u_{b,\alpha}(p)}{W(u_{a,\alpha}, u_{b,\alpha})} = \frac{u_{a,\alpha}(p) u_{b,\alpha}(p)}{u_{a,\alpha}(p) u'_{b,\alpha}(p+) - u'_{a,\alpha}(p+) u_{b,\alpha}(p)}$$

$$= \frac{u_{a,0}(p) u_{b,0}(p)}{u_{a,0}(p) u'_{b,0}(p+) - u'_{a,0}(p+) u_{b,0}(p) - \alpha u_{a,0}(p) u_{b,0}(p)}$$

Entonces

$$G_\alpha(z, p, p) = \frac{u_{a,0}(p) u_{b,0}(p)}{W(u_{a,0}, u_{b,0})\left(1 - \alpha \frac{u_{a,0}(p) u_{b,0}(p)}{W(u_{a,0}, u_{b,0})}\right)} = G_0(z, p, p)\frac{1}{1 - \alpha G_0(z, p, p)}$$

□

Corolario 3.1.1. *Si $G_\alpha := G_\alpha(z; p, p)$, entonces $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$,*

$$G_\beta = \frac{G_\alpha}{1 + (\alpha - \beta) G_\alpha}.$$

Demostración. Del Teorema 3.1.2, si $G_0 = 0$, $G_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Si $G_0 \neq 0$,

$$G_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{G} - \alpha}.$$

Entonces

$$\frac{1}{G_0} = \frac{1}{G_\alpha} + \alpha = \frac{1}{G_\beta} + \beta$$

Por tanto

$$G_\beta = \frac{G_\alpha}{1 + (\alpha - \beta)G_\alpha}.$$

□

Supongamos ahora que $\tau_{\alpha,p}$ es regular en a y en b, i.e a y b son finitos, $V \in L^1([a,b])$. Consideremos la restricción autoadjunta $H_{\alpha,p}$ de $T_{\alpha,p}$ en $L_2(a,b)$, ver Teorema 2.4 o Teorema 5.2 en [4], definido por

$$H_{\alpha,p} f = \tau f \tag{3.1}$$

$$D(H_{\alpha,p}) \quad = \quad \left\{ f \in D(T_{\alpha,p}) : \begin{array}{c} f(a)cos\theta + f'(a)sen\theta = 0 \\ f(b)cos\gamma + f'(b)sen\gamma = 0 \end{array} \right\} \qquad \theta,\, \gamma \in [0,\pi).$$

Teorema 3.1.3. *Sea E eigenvalor de $H_{\alpha,p}$, entonces $G_\alpha(E,p,p) = 0$ o $G_\alpha(z,p,p)$ tiene un polo en E.*

Demostración. Sean $u_{a,\alpha}(E,x)$ y $u_{b,\alpha}(E,x)$ soluciones de $(H_{\alpha,p} - E)u = 0$ que satisfacen la condición de frontera en a y b respectivamente. Entonces $u_{a,\alpha}$ y $u_{b,\alpha}$ son linealmente dependientes y $W(u_{a,\alpha}(E), u_{b,\alpha}(E)) = 0$. Ver [4], Lemma 4.2.

- Si $u_{a,\alpha}(E,p) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \to E} |G_\alpha(z,p,p)| = \lim_{z \to E} \left| \frac{u_{a,\alpha}(z,p) u_{b,\alpha}(z,p)}{W(u_{a,\alpha}(z), u_{b,\alpha}(z))} \right| = \infty \tag{3.2}$$

- Ahora consideremos el caso cuando $u_{a,\alpha}(E,p) = 0$. Sea $u_{b,\alpha}$ solución tal que $u_{b,\alpha}(E,b) = -sen\theta$ y $u'_{b,\alpha}(E,b) = cos\theta$, $\theta \in [0,\pi)$. Como, para cada z fija, $W_x(u_{a,\alpha}(z), u_{b,\alpha}(z))$ es constante para toda x en $[a,b]$,entonces

$$W_x(u_{a,\alpha}(E), u_{b,\alpha}(E)) = W_b(u_{a,\alpha}(E), u_{b,\alpha}(E)) = u_{a,\alpha}(E,b)cos\theta + u'_{a,\alpha}(E,b)\sin\theta$$

  Las funciones $u'_{a,\alpha}(E,b)$ y $u_{a,\alpha}(E,b)$ no pueden ser cero simultaneamente. Supongamos por ejemplo que $u'_{a,\alpha}(E,b) \neq 0$.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{W_p(u_{a,\alpha}(\lambda), u_{b,\alpha}(\lambda))}{u'_{a,\alpha}(\lambda,b)}\right]_{\lambda=E} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{u_{a,\alpha}(\lambda,b)}{u'_{a,\alpha}(\lambda,b)}cos\theta + \sin\theta\right]_{\lambda=E} = \frac{cos\theta}{u'_{a,\alpha}(E,b)^2}\int_a^b u_{a,\alpha}(E,t)^2 dt \neq 0$$

donde para la ultima igualdad se uso el Teorema 3.1.1 . Ya que se esta suponiendo que E es un eigenvalvalor, las funciones $u_{a,\alpha}(E,b)$ y $u_{b,\alpha}(E,b)$ son linealmente dependientes. Así $u'_{a,\alpha}(E,b) = Cu'_{b,\alpha}(E,b) = C\cos\theta \neq 0$. Por tanto

$$\frac{W_p(u_{a,\alpha}(\lambda), u_{b,\alpha}(\lambda))}{u'_{a,\alpha}(\lambda, b)}$$

tiene un cero en E de orden uno y como $u'_{a,\alpha}(E,b) \neq 0$ entonces $W_p(u_{a,\alpha}(\lambda), u_{b,\alpha}(\lambda))$ también tiene un cero de orden uno. Como el cero en E del numerador de $G(z,p,p)$ es de orden dos, obtenemos

$$\lim_{z\to E} G_\alpha(z,p,p) = 0 \tag{3.3}$$

Si $u'_{a,\alpha}(E,b) = 0$, podemos asumir que $u_{a,\alpha}(E,b) \neq 0$. Haciendo una construcción analoga obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{W_p(u_{a,\alpha}(\lambda), u_{b,\alpha}(\lambda))}{u_{a,\alpha}(\lambda,b)}\right]_{\lambda=E} = -\frac{\sin\theta}{u_{a,\alpha}(E,b)^2}\int_a^b u_{a,\alpha}(E,t)^2 dt \neq 0$$

y por tanto se sigue (3.3). □

Los eigenvalores de un operador L serán denotados por $\sigma_p(L)$ esto es

$$\sigma_p(L) := \{r \in \mathbb{R} : L\varphi = r\varphi \text{ para algún } \varphi \not\equiv 0,\ \varphi \in D(L)\}$$

Teorema 3.1.4. *Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces para el conjunto*

$$A(E) := \{\alpha \in \mathbb{R} : E \in \sigma_p(H_{\alpha,p})\}$$

existen dos posibilidades:

a) $A(E)$ tiene a lo más un elemento.

b) $A(E) = \mathbb{R}$.

Demostración.

Si $u(p) = 0$, entonces $u'(p+) - u'(p-) = \beta u(p)$, esto es, $u \in D(H_{\beta,p})$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$ y $H_{\beta,p}u = Eu$. Entonces, E es eigenvalor de $H_{\beta,p}$.

Si $u(p) \neq 0$, de la ecuación (3.2) obtenemos que $G_\alpha(E,p,p) = \infty$. Por Corolario 3.1.1, $\forall\beta \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$,

$$G_\beta(E;p,p) = \frac{1}{\beta - \alpha} \tag{3.4}$$

Como el lado derecho de (3.4) no es cero ni ∞, del Teorema 3.1.3 se sigue que E no es eigenvalor de $H_{\beta,p}$.

□

Observación 3.1.1. *Caso a) sucede si el eigenvector u asociado a E es tal que $u(p) \neq 0$, de otra manera se cumple el caso b).*

3.2 Operadores de Sturm-Liouville con Interacciones puntules caso contable

Hasta este momento, todos los resultados han sido sobre el operador con una sola interacción puntual en el caso regular. Ahora consideraremos una cantidad contable de interacciones puntuales. Los resultados de la sección anterior serán usados.

Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $V \in L^1_{loc}(a,b)$ función real. Fijemos un conjunto discreto M de puntos acumulandose a lo más en a o en b, $M := \{x_n\}_{n\in I} \subset (a,b)$ donde $I \subseteq \mathbb{Z}$ y sea $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$. Fijamos $\alpha = \alpha_{n_0}$ y consideremos la expresión diferencial formal

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V \tag{3.5}$$

$$\tau_{\alpha,M} := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \sum_{n\in I\setminus\{n_0\}} \alpha_n \delta(x-x_n) + \alpha\delta(x-x_{n_0})$$

El operador maximal $T_{\alpha,M}$ correspondiente a $\tau_{\alpha,M}$ esta definido por

$$T_{\alpha,M} f = \tau f$$

$$D(T_{\alpha,M}) = \{f \in L^2(a,b) :\ f,\ f' \text{ abs. cont en } (a,b)\setminus M, -f'' + Vf \in L^2(a,b),$$
$$f(x_n+) = f(x_n-) \equiv f(x_n),\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n),\ \forall n \in I\}$$

Análogo a lo que se hizo anteriormente, se introducirán las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1. *Dados $g \in L^1_{loc}(a,b)$ y $z \in \mathbb{C}$, llamamos a f solución de $(\tau_{\alpha,M} - z)f = g$ si f y f' son absolutamente continuas en $(a,b)\setminus M$ con $-f'' + Vf - zf = g$ y $f(x_n+) = f(x_n-)$, $f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n)$, $\forall n \in I$.*

Definición 3.2.2. *Definimos el Wronskiano de dos soluciones u_1 y u_2 de $(\tau_{\alpha,M} - z)f = 0$ como en la definición 3.1.2, es decir*

$$W_x(u_1,u_2) = u_1(x+)u_2'(x+) - u_1'(x+)u_2(x+)$$

Definición 3.2.3. *Para $f, g \in D(T_{\alpha,M})$ definimos el corchete de Lagrange*

$$[f,g]_x = \overline{f(x+)}g'(x+) - \overline{f'(x+)}g(x+).$$

Los límites $[f,g]_a = \lim_{x\to a+}[f,g]_x$ y $[f,g]_b = \lim_{x\to b-}[f,g]_x$ existen. Ver [4].

Una solución de $(\tau_{\alpha,M} - z)f = 0$ se dice que esta en $L^2(a,b)$ a la derecha (izquierda), si f is cuadrado integrable en una vecindad de b (a).

Definición 3.2.4.

i) *$\tau_{\alpha,M}$ esta en el **caso del círculo límite** (lcc) en b si para toda $z \in \mathbb{C}$ todas las soluciones de $(\tau_{\alpha,M} - z)f = 0$ estan en $L^2(a,b)$ a la derecha.*

ii) $\tau_{\alpha,M}$ *esta en el* ***caso del punto lḿite*** *(lpc) en* b *si para toda* $z \in \mathbb{C}$ *existe al menos una solución de* $(\tau_{\alpha,M} - z)f = 0$ *que no esta en* $L^2(a,b)$ *a la derecha.*

La misma definición aplica para el extremo a*.*

De acuerdo a la *alternativa de Weyl*, ver [4] Teorema 4.4, siempre se tiene $i)$ o $ii)$.
Considere la restricción autoadjunta $H_{\alpha,M}$ de $T_{\alpha,M}$ en $L_2(a,b)$ definida como

$$H_{\alpha,M}f = \tau f \tag{3.6}$$

$$D(H_{\alpha,M}) \quad = \quad \left\{ f \in D(T_{\alpha,M}) : \begin{array}{l} [v,f]_a = 0 \text{ si } \tau_{\alpha,M} \text{ lcc en } a \\ [w,f]_b = 0 \text{ si } \tau_{\alpha,M} \text{ lcc en } b \end{array} \right\}.$$

Donde v y w son soluciones reales no triviales de $(\tau_{\alpha,M} - \lambda)v = 0$ cerca de a y cerca de b respectivamente, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ver Teorema 2.4.5 o Teorema 5.2 en [4].

Definición 3.2.5. *Decimos que* $\tau_{\alpha,M}$ *es regular en* a *si* a *es finito,* $V \in L^1_{loc}[a,b)$ *y* a *no es un punto de acumulación de* M*. La misma definición aplica para el extremo* b*.*

Si $\tau_{\alpha,M}$ es regular en a, entonces $\tau_{\alpha,M}$ es lcc en a y la condición $[v,f]_a = 0$ puede ser reemplazada por

$$f(a)cos\psi + f'(a)sen\psi = 0$$

para $\psi \in [0,\pi)$. Lo mismo se cumple para b.

Para $\gamma, \theta \in [0,\pi)$ y $[c,d] \subset [a,b]$, tal que $[c,d] \cap M = \{x_{n_0}\}$, definamos el operador

$$H_\alpha^{\theta\gamma} := H_{\alpha,x_{n_0}}$$

donde $H_{\alpha,x_{n_0}}$ es como en fórmula (3.1) de la sección anterior con $p = x_{n_0}$ y $J = [c,d]$.
Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y definamos

$$A(E) := \{\alpha \in \mathbb{R} : E \in \sigma_p(H_{\alpha,M})\}$$

Lema 3.2.1. *Existen* $\theta_0, \gamma_0 \in [0,\pi)$ *tal que si* $\alpha \in A(E)$*, entonces* $E \in \sigma_p(H_\alpha^{\theta_0\gamma_0})$*.*

Demostración.

Si $\lambda_0 \in A(E)$, entonces para alguna $\varphi \in D(H_{\lambda_0,M})$, $H_{\lambda_0,M}\varphi = E\varphi$.

Fijemos los puntos $\theta_0, \gamma_0 \in [0,\pi)$ donde

$$\begin{array}{c} \varphi(c)cos\theta_0 + \varphi'(c)sen\theta_0 = 0 \\ \varphi(d)cos\gamma_0 + \varphi'(d)sen\gamma_0 = 0 \end{array} \tag{3.7}$$

Si $\alpha \in A(E)$ es tal que $\alpha = \lambda_0$, el resultado se sigue.

Si $\alpha \in A(E)$ pero $\lambda_0 \neq \alpha$, entonces $H_{\alpha,M}\psi = E\psi$, para alguna $\psi \in D(H_{\alpha,M})$. Por tanto, existen $\theta, \gamma \in [0,\pi)$ que satisfacen las condiciones de frontera en c y d para ψ, similar a (3.7). Si probamos que $\theta = \theta_0$ y $\gamma = \gamma_0$, entonces $H_\alpha^{\theta_0\gamma_0}\psi = E\psi$ y por tanto $E \in \sigma(H_\alpha^{\theta_0\gamma_0})$.

Probemos que $\gamma = \gamma_0$. La prueba para θ es análoga.

a) Suponga que $\tau_{\alpha,M}$ esta en el caso del círculo limite en b.

   El Wronskiano satisface $W_x(w,\varphi) = [w,\varphi]_x$ y $W_x(w,\psi) = [w,\psi]_x$ ya que w es real. Es constante para $x \in [d,b)$ ya que w, ψ y φ son soluciones de $\tau_{\alpha,M} f = Ef$ en el intervalo $[d,b)$ porque x_{n_0} no intersecta $[d,b)$. Por hipótesis, las funciones φ y ψ satisfacen la condición del caso círculo límite en b. Esto implica que

   $$0 = [w,\psi]_b = \lim_{x\to b-} W_x(w,\psi) \qquad \text{y} \qquad 0 = [w,\varphi]_b = \lim_{x\to b-} W_x(w,\varphi)$$

   Por tanto $W_x(w,\psi) = W_x(w,\varphi) = 0$ y entonces $W_x(\varphi,\psi) = 0$. Así φ y ψ son linealmente dependientes y $\varphi = K\psi$ para alguna constante $K \in \mathbb{R}$. Por tanto $\gamma = \gamma_0$. Ver Lema 4.2 [4].

b) Supongamos que $\tau_{\alpha,M}$ esta en el caso del punto límite en b. Si $\gamma_0 \neq \gamma$ entonces φ y ψ son linealmente independientes en $[d,b)$, ya que si existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = K\varphi$ entonces $\gamma = \gamma_0$. Por tanto toda solución f de $\tau_{\alpha,M} f = Ef$ en $[d,b)$ puede ser escrita como $f = c_1\varphi + c_2\psi$. Pero, como $\varphi, \psi \in L^2(a,b)$, entonces $u \in L^2(a,b)$ y obtenemos una contradicción al caso del punto límite.

$\square$

Un argumento análogo fue dado en [8].
El siguiente Teorema es una generalización del Teorema 3.1.4.

Teorema 3.2.1. *Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces para el conjunto*

$$A(E) := \{\alpha \in \mathbb{R} : E \in \sigma_p(H_{\alpha,M})\}$$

existen dos posibilidades:

a) $A(E)$ tiene a lo más un elemento.

b) $A(E) = \mathbb{R}$.

Demostración. Por Teorema 3.1.4 para E fija una de las siguientes se cumple

- Existe a lo más una α tal que $E \in \sigma_p(H_\alpha^{\theta_0,\gamma_0})$ o
- $E \in \sigma_p(H_\alpha^{\theta_0,\gamma_0})$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$

La afirmación se sigue por 3.2.1.

$\square$

Observación 3.2.1. *Caso a) sucede si el eigenvector u asociado a E es tal que $u(x_{n_0}) \neq 0$, de otra manera se cumple el caso b).*

3.3 Operadores Aleatorios de Sturm-Liouville con Interacciones Puntuales

En esta sección serán usados los resultados previamente obtenidos para estudiar el caso aleatorio. Para empezar se construirá el espacio de probabilidad Ω donde están las sucesiones de constante de acoplamiento y así nuestros operadores aleatorios estarán bien definidos.

El espacio de sucesiones reales $\{\omega_n\}_{n\in I}$, donde $I \subseteq \mathbb{Z}$, se denotará por $\mathbb{R}^I$. Introducimos una medida en $\mathbb{R}^I$ de la siguiente manera. Sea $\{p_n\}_{n\in I}$ una sucesion de medidas de probabilidad continuas en $\mathbb{R}$ ($p_n(\{r\}) = 0$ para cada $r \in \mathbb{R}$) y considere la medida producto $\mathbb{P} = \times_{n\in I} p_n$ definida en la $\sigma-$álgebra producto $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^I$ generada por los conjuntos cilindro, esto es, por los conjuntos de la forma $\{\omega : \omega(i_1) \in A_1, \ldots, \omega(i_n) \in A_n\}$ para $i_1, \ldots, i_n \in I$, donde $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$. De esta manera un espacio de medida $\tilde{\Omega} = (\mathbb{R}^I, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es construido. Consideremos entonces la completación de este espacio (subconjuntos de conjuntos de medida cero son medibles) $\tilde{\Omega}$ que sera denotada por Ω. Ver capítulo 1, sección 1 en [21].

Sean $-\infty \le a < b \le \infty$, $V \in L^1_{loc}(a,b)$ función real. Fijemos un conjunto discreto $M := \{x_n\}_{n\in I} \subset (a,b)$ donde $I \subseteq \mathbb{Z}$ y sea $\omega = \{\omega(n)\}_{n\in I} \in \Omega$. Considere la expresión diferencial formal

$$\tau_\omega := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \sum_{n\in I} \omega(n)\delta(x - x_n)$$

El operador maximal T_ω correspondiente a τ_ω esta definido como antes por

$$T_\omega f = \tau f$$

$$D(T_\omega) = \{f \in L^2(a,b) :\ f,\ f' \text{ abs. cont en } (a,b)\backslash M, -f'' + Vf \in L^2(a,b),$$
$$f(x_n+) = f(x_n-),\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \omega(n)f(x_n),\ \forall n \in I\}$$

Asuma que el caso de punto límite ocurre en a o que τ_ω es regular en a (Ver definición 3.2.5) y las mismas posibilidades para b.

Para $\theta, \gamma \in [0,\pi)$ fijos, sea $H_\omega^{\theta,\gamma}$ la restricción autoadjunta de T_ω definida como

$$H_\omega^{\theta,\gamma} f = \tau f \tag{3.8}$$

$$D(H_\omega^{\theta,\gamma}) = \left\{ f \in D(T_\omega) : \begin{array}{ll} f(a)cos\theta + f'(a)sen\theta = 0 & \text{si } \tau_\omega \text{ regular en } a \\ f(b)cos\gamma + f'(b)sen\gamma = 0 & \text{si } \tau_\omega \text{ regular en } a \end{array} \right\}$$

Observe que los índices θ o γ no tienen sentido si τ_ω es lpc en a o b.
En lo siguiente en lugar de $H_\omega^{\theta,\gamma}$ escribiremos H_ω.

Observación 3.3.1. *Un ejemplo donde τ_ω es lpc en ambos extremos para toda $\omega \in \Omega$ fue dado en Teorema 1 en [5]. Se requiere que $I = \mathbb{Z}$, V acotado y $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n+1} - x_n| > 0$.*

Definición 3.3.1. *Para $E \in \mathbb{R}$, definimos*

$$A(E) := \{\omega \in \Omega : E \in \sigma_p(H_\omega)\} \tag{3.9}$$

Para $B \subseteq A(E)$ medible y para cada $n \in I$, definimos

$$Q_{n,E} := \{\omega \in B | \exists\, u_\omega \in D(H_\omega),\ H_\omega u_\omega = E u_\omega \ \ y \ \ u_\omega(x_n) \neq 0\} \tag{3.10}$$

Lema 3.3.1. *$Q_{n,E}$ es medible y $\mathbb{P}(Q_{n,E}) = 0$.*

Demostración. Sea

$$\chi_B(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{si } \omega \notin B \end{cases}$$

Si $\omega \in Q_{n,E}$, entonces de la definición de $Q_{n,E}$ se sigue que $\chi_B(\omega) = 1$.

Sea $f : \mathbb{R}^{I \setminus \{n\}} \to [0, \infty)$.

$$f(\tilde{\omega}) := \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\omega) dp_n(\omega(n))$$

donde $\tilde{\omega} = \sum\limits_{k \in I \setminus \{n\}} \omega(k) e(k)$. Aquí $e(k) = (e_m)_{m \in I}$ son los vectores canónicos con entradas $e_m = 0$ si $k \neq m$ y $e_k = 1$. La medibilidad de f se sigue del Teorema de Fubini. (Ver Teorema 7.8 [22])
Si $\omega = \sum\limits_{k \in I} \omega(k) e(k) \in Q_{n,E}$ entonces $f(\tilde{\omega}) = 0$, donde $\tilde{\omega} = \sum\limits_{k \in I \setminus \{n\}} \omega(k) e(k)$, ya que p_n es continua y por Teorema 3.2.1.

Así $Q_{n,E} \subseteq [f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}] \cap B$.

Ahora, usando Fubini,

$$\int_{f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}} \chi_B(\omega) d\mathbb{P} = \int_{f^{-1}(\{0\})} d\mathbb{P}(\tilde{\omega}) \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\omega) dp_n(\omega(n)) = \int_{f^{-1}(\{0\})} f(\tilde{\omega}) d\mathbb{P}(\tilde{\omega}) = 0$$

Entonces,

$$\int_{[f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}] \cap B} \chi_B(\omega) d\mathbb{P} = 0$$

y como $\chi_B(\omega) = 1$ en B, entonces $\mathbb{P}([f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}] \cap B) = 0$.

Como la medida $d\mathbb{P}$ es completa, cualquier subconjunto de conjuntos de medida cero es medible con medida cero. Por tanto $Q_{n,E}$ es medible.

$\square$

Teorema 3.3.1. *Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y B cualquier subconjunto medible de $A(E)$. Entonces una de las siguientes opciones se cumple:*

$i)$ $\mathbb{P}(B) = 0$

$ii)$ $A(E) = \Omega$

Demostración. Es suficiente probar que si $ii)$ no se cumple entonces se cumple $i)$.

Supongamos entonces que existe $\omega_0 \in \Omega$ tal que E no es eigenvalor de H_{ω_0}. Si E no es eigenvalor de H_ω, $\forall \omega \in \Omega$, entonces $\mathbb{P}(B) = 0$ y el resultado se sigue.

Supongamos ahora que $\omega \in B$, entonces $E \in \sigma_p(H_\omega)$, i.e. existe $u_\omega \in D(H_\omega)$ tal que $H_\omega u_\omega = Eu_\omega$. Entonces $\omega \in Q_{n,E}$, para alguna $n \in I$. Esto es cierto porque si $u_\omega(x_n) = 0\ \forall n \in I$, entonces de la definición de H_ω, E debe ser un eigenvalor de H_{ω_0}. Por tanto

$$B \subset \bigcup_{n \in I} Q_{n,E}$$

Usando Lema 3.3.1, entonces $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in I} Q_n) = 0$, Por tanto se sigue el resultado.

□

Para el siguiente corolario se denotará por H al operador H_ω definido en (3.8) con $\omega(n) = 0$, $\forall n \in I$. Éste es sólo la restricción autoadjunta generada por la expresión diferencial τ en la teoría clásica de Sturm-Liouville sin interacciones puntuales.

Corolario 3.3.1 (cf. Observaciones 3.1.1, 3.2.1)**.**

a) Si $E \notin \sigma_p(H)$ entonces $\mathbb{P}(B) = 0$ para cualquier subconjunto medible B de ω's, $\omega \in \Omega$ para las cuales $E \in \sigma_p(H_\omega)$.

b) Si $E \in \sigma_p(H)$ con $Hu = Eu$, entonces $A(E) = \Omega$ si y sólo si $u(x_n) = 0$, $\forall n \in I$.

Demostración.

a) Si $E \notin \sigma_p(H)$, entonces $\omega = (\dots, 0, 0, 0, \dots) \notin A(E)$. Por tanto $A(E) \neq \Omega$ y la afirmación se sigue del Teorema 3.3.1.

b) Supongamos que $E \in \sigma_p(H)$ con $Hu = Eu$.

$\Leftarrow$) Si $u(x_n) = 0\ \forall n \in I$, entonces de la definición de H_ω, E debe ser un eigenvalor de H_ω con eigenvector u, $\forall \omega \in \Omega$.

$\Rightarrow$) Del Lema 3.3.1, $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in I} Q_{n,E}) = 0$. Entonces $A(E) = \Omega \not\subseteq \bigcup_{n \in I} Q_{n,E}$.

Tomemos $\tilde{\omega} \in A(E) \setminus \bigcup_{n \in I} Q_{n,E}$. Existe $u_{\tilde{\omega}} \in D(H_{\tilde{\omega}})$ tal que

$$(\tau_{\tilde{\omega}} - E)u_{\tilde{\omega}} = 0 \qquad \text{and} \qquad u_{\tilde{\omega}}(x_n) = 0,\ \forall n \in I$$

Por tanto $u'_{\tilde{\omega}}(x_n+) - u'_{\tilde{\omega}}(x_n-) = \tilde{\omega}(n)u_{\tilde{\omega}}(x_n) = 0$, $\forall n \in I$. Así $u'_{\tilde{\omega}}$ es continua en (a, b) y $(H - E)u_{\tilde{\omega}} = 0$.
Como todos los eigenvalores de H son simples, ver Teorema 8.29 (d) [28], entonces $u(x_n) = Cu_{\tilde{\omega}}(x_n) = 0$, $\forall n \in I$.

■

Entonces a menos que E sea un eigenvalor de H y de que las interacciones puntuales esten localizadas en las raíces de las eigenfunciones, tendremos un conjunto “pequeño” de operadores H_ω compartiendo el mismo eigenvalor E.

Como otra consecuencia del Teorema 3.3.1 tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 3.3.2. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión de numeros reales y B_i subconjuntos medibles de $A(E_i)$. Supongamos que no existe algún punto $E \in \mathbb{R}$ que sea eigenvalor de H_ω para toda $\omega \in \Omega$, entonces*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i : \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \sigma_p(H_\omega) \neq \emptyset\}) = 0$$

Demostración. Por aditividad de $\mathbb{P}$ y Teorema 3.3.1, tenemos

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \sigma_p(H_\omega) \neq \emptyset\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \bigcup_{i=1}^{\infty} [\{E_i\} \cap \sigma_p(H_\omega)] \neq \emptyset)\} =$$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : E_i \in \sigma_p(H_\omega))\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : E_i \in \sigma_p(H_\omega)\}) = 0$$

□

3.3.1 Oscilación de Soluciones

En esta sección se usarán resultados acerca de oscilación de soluciones de expresiones diferenciales de segundo orden. La localización de ceros de eigenfunciones además de la posición de las interacciones puntuales, nos ayudarán a entender cuando la opción b en el Teorema 3.3.1 pasa.

En esta subsección τ se define como en la ecuación (3.5) y $A(E)$ se define como en la Definición 3.3.1 (3.9) es decir, como el conjunto de $\omega \in \Omega$ tales que H_ω comparten un eigenvalor común E.

Definición 3.3.2 (Ver Sección XI.6 en [13])**.** *La ecuación*

$$(\tau - E)f = 0$$

se dice no oscilatoria en un intervalo J si toda solución tiene a lo más un número finito de ceros en J.

Si $t = b$ es un extremo (posiblemente infinito) de J que no pertenece a J, entonces la ecuación se dice no oscilatoria en $t = b$ Si toda solución tiene un número finito de ceros en J o si los ceros no se acumulan en b.

Lema 3.3.2. *Si $A(E) = \Omega$, entonces existe una solución u de $(\tau - E)f = 0$ tal que $u(x_n) = 0$, $\forall n \in I$.*

Demostración. Si $A(E) = \Omega$, entonces existe u tal que $Hu = Eu$, donde H es el operador H_ω con $\omega(n) = 0$, $\forall n \in I$. Del Corolario 3.3.1 (b) la afirmación se sigue. ■

Teorema 3.3.2. *Sea V el potencial que aparece en la expresión (3.5). Supongamos que $|V(x)| \leq K$ para toda $x \in (a, b)$. Sea J un intervalo tal que*

$$|J| \leq \frac{2}{\sqrt{K + |E|}}$$

donde $|J|$ es la longitud del intervalo. Asumamos que $J \cap M$ tiene al menos dos elementos. Entonces $\mathbb{P}(B) = 0$ para cualquier subconjunto medible B de $A(E)$.

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto medible B de $A(E)$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces del Teorema 3.3.1, $A(E) = \Omega$.

Por Lema 3.3.2, existe una solución u de $(\tau - E)f = 0$ tal que $u(x_n) = 0$, $\forall n \in I$. Usando un teorema de Lyapunov, ver Teorema 3.9 de [14] y Corolario 5.1 de [13], el intervalo J es desconjugado , i.e. existe a lo más un cero de cualquier solución de $(\tau - E)f = 0$ en el intervalo J, como u es solución esta es una contradicción, por tanto $\mathbb{P}(B) = 0$ para cualquier subconjunto medible B de $A(E)$. ■

En el último teorema observe que entre mas grande sea $|E|$, más pequeño $|J|$ será. Esto corresponde al hecho de que las soluciones oscilan más rápido si la energía es alta.

Teorema 3.3.3. *Supongamos que $(\tau - E)f = 0$ es no oscilatoria en (a, b) y que el conjunto de interacciones M es un conjunto contable. Entonces $\mathbb{P}(B) = 0$ para cualquier subconjunto medible B de $A(E)$.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto medible B de $A(E)$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces por Teorema 3.3.1, $A(E) = \Omega$.

Por Lema 3.3.2, existe una solución u de $(\tau - E)f = 0$ tal que $u(x_n) = 0$, $\forall n \in I$. La ecuación $(\tau - E)f = 0$ es no oscilatoria i.e. cualquier solución en el intervalo (a, b) tiene a lo más un número finito de ceros. Como u es solución esto es una contradicción, así $\mathbb{P}(B) = 0$ para cualquier subconjunto medible B de $A(E)$. ■

Existen diferentes condiciones en la literatura que nos permiten concluir que nuestro problema es no oscilatorio. Aplicando un teorema probado por Hille, Theorem 3.1 [14], obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4. *Si V es continua en $[a, \infty)$, $V(x) \le E$, $\int_a^\infty (E - V(x))dx < \infty$ y*

$$\limsup_{x\to\infty} x \int_x^\infty (E - V(t))dt < \frac{1}{4}$$

entonces $(\tau - E)f = 0$ es no oscilatoria en $[a, \infty)$.

Estimaciones más finas sobre el número de ceros pueden también ser usadas, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5. *Sea V continua en $[0, T]$ y $|V(x)| \le K$. Si el número de puntos en $M \cap [0, T]$ es mayor o igual que*

$$\frac{T\sqrt{|E| + K}}{2} + 1$$

entonces, $\mathbb{P}(B) = 0$ para cualquier subconjunto medible B de $A(E)$.

Demostración. Usando Corolario 5.2 en [13] vemos que el número de ceros de cualquier solución de $(\tau - E)f = 0$ es menor o igual que

$$\frac{T\sqrt{|E| + K}}{2} + 1$$

y la prueba se sigue como en el Teorema. 3.3.2. ■

3.3.2 Operadores Medibles

Ahora se introducirán condiciones de medibilidad para la familia de operadores H_ω.

Definición 3.3.3 (Ver Lema 1.2.2 en [23], Proposición 3 en [15])**.** *Una familia $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ se dice medible si los mapeos*

$$\omega \to < \varphi, E_\omega(\lambda)\psi >$$

son medibles para todas φ, $\psi \in \mathfrak{H}$, donde $E_\omega(\lambda)$ es la correspondiente resolución de la identidad de S_ω.

El siguiente teorema fue comunicado por Peter Stollmann

Teorema 3.3.6. *Sea*

$$A(E) := \{\omega \in \Omega : E \in \sigma_p(S_\omega)\}$$

como en la Definición 3.3.1. Si $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de operadores medibles definida en un espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$, entonces $A(E)$ es medible.

dem. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto contable denso de $\mathfrak{H}$.
Observe que

$$A(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{3.11}$$

donde

$$A_n := \{\omega \in \Omega : E_\omega(\{E\})\psi_n \neq 0\}$$

El conjunto del lado derecho de (3.11) esta contenido en $A(E)$ ya que $A(E) = \{\omega \in \Omega | E_\omega(\{E\}) \neq 0\}$. Para probar la otra inclusión, sea $\omega \in A(E)$ y supongamos que para toda n, $E_\omega(\{E\})\psi_n = 0$. Para cada $x \in \mathfrak{H}$ se tiene

$$< E_\omega(\{E\})x, \psi_n > = < x, E_\omega(\{E\})\psi_n > = 0.$$

Como $\{\psi_n\}$ es denso, $E_\omega(\{E\})x = 0$ y $E_\omega(\{E\}) = 0$, lo que es una contradicción a $\omega \in A(E)$. Por lo tanto existe n_0 tal que $E_\omega(\{E\})\psi_{n_0} \neq 0$ y $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Se probará ahora que los conjuntos A_n son medibles.
Ya que S_ω es medible, la función f_n definida como $\omega \to f_n(\omega) := < \psi_n, E_\omega(\{E\})\psi_n >$ es medible para cada n. Se tiene que $\omega \in A_n^c$ si y sólo si

$$f_n(\omega) = < \psi_n, E_\omega(\{E\})\psi_n > = \|E_\omega(\{E\})\psi_n\|^2 = 0.$$

Así

$$A_n^c = \{\omega | E_\omega(\{E\})\psi_n = 0\} = f_n^{-1}(\{0\}).$$

Se sigue que A_n^c y por tanto A_n son conjuntos medibles. Así $A(E)$ es una unión contable de conjuntos medibles y así medible.

□

Usando el Teorema 3.3.6 obtenemos el siguiente Corolario al Teorema 3.3.1. Sea $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ la familia de operadores definida en (3.8).

Corolario 3.3.3. *Supongamos que la familia* $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *es medible. Para* $E \in \mathbb{R}$ *fijo, una de las siguientes opciones se cumple:*

$i)$ $\mathbb{P}(A(E)) = 0$

$ii)$ $A(E) = \Omega$

dem. Tomemos $B = A(E)$ en el Teorema 3.3.1. □

Para mostrar un ejemplo de una familia medible de operadores, mencionemos el operador generado por la expresión diferencial

$$\tau_\omega := -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{n\in I} \omega(n)\delta(x - x_n)$$

donde $\omega(n)$ es un proceso estocástico estacionario métricamente transitivo que satisface $|\omega(n)| \leq C < \infty$, ver [15]. En particular podemos tomar $\omega(n)$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

Como el operador generado por $-\frac{d^2}{dx^2}$ sin interacciones puntuales no tiene eigenvalores, podemos aplicar el Corolario 3.3.1 y obtener $\mathbb{P}(A(E)) = 0$. Tenemos en este caso una prueba de un resultado de Pastur que dice que la probabilidad de cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo de ser un eigenvalor de multiplicidad finita de un operador métricamente transitivo es cero, ver Teorema 3 en [20] y Teorema 2.12 en [21].

3.4 Operadores de Sturm-Liouville con Interacciones tipo δ'

Consideremos ahora operadores con interacciones δ' y mostraremos resultados análogos que pueden ser obtenidos. Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $V \in L^1_{loc}(a,b)$ una función real. Fijemos un conjunto discreto $M := \{x_n\}_{n\in I} \subset (a,b)$ donde $I \subseteq \mathbb{Z}$ y sea $\omega = \{\omega(n)\}_{n\in I} \in \Omega$, donde Ω es definida como en la sección 3.3. Consideremos la expresión diferencial formal

$$\tau_\omega := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \sum_{n\in I} \omega(n)\delta'(x-x_n)$$

El operador maximal T_ω correspondiente a τ_ω esta definido por

$$T_\omega f = \tau f = -\frac{d^2 f}{dx^2} + Vf$$

$$D(T_\omega) = \{f \in L^2(a,b) :\ f,\ f' \text{ abs. cont en } (a,b)\backslash M, -f'' + Vf \in L^2(a,b),$$
$$f'(x_n+) = f'(x_n-),\ f(x_n+) - f(x_n-) = \omega(n)f'(x_n),\ \forall n \in I\}$$

La construcción es similar a la que se hizo en la sección 3.3, pero nótese el cambio de las condiciones en las x_n.

Definición 3.4.1. *Una función f es una solución de $(\tau_\omega - \lambda)f = 0$ si f y f' son absolutamente continuas en $(a,b)\backslash M$ con $-f'' + Vf - \lambda f = 0$ y $f'(x_n+) = f'(x_n-)$, $f(x_n+) - f(x_n-) = \omega(n)f'(x_n)$, $\forall n \in I$.*

Supongamos que ocurre el caso de punto límite en a o que τ_ω es regular en a (Ver Definición 3.2.5) y las mismas posibilidades para b.

Para $\theta, \gamma \in [0,\pi)$ fijas, sea $H_\omega^{\theta,\gamma}$ la restricción autoadjunta de T_ω definida como

$$H_\omega^{\theta,\gamma} f = \tau f \tag{3.12}$$

$$D(H_\omega^{\theta,\gamma}) = \left\{ f \in D(T_\omega) : \begin{array}{ll} f(a)cos\theta + f'(a)sen\theta = 0 & \text{si } \tau_\omega \text{ regular en } a \\ f(b)cos\gamma + f'(b)sen\gamma = 0 & \text{si } \tau_\omega \text{ regular en } a \end{array} \right\}$$

Nótese que los índices θ o γ no tienen sentido si τ_ω es lpc en a o b.
En lo que sigue en lugar de $H_\omega^{\theta,\gamma}$ escribiremos H_ω.
Similarmente a lo que se ha hecho antes uno puede probar que para este H_ω con interacciones δ' se cumple el siguiente Teorema.

Teorema 3.4.1. *Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y B cualquier subconjunto medible de*

$$A(E) := \{\omega \in \Omega : E \in \sigma_p(H_\omega)\}.$$

Entonces una de las siguientes opciones se cumple:

$i)$ $\mathbb{P}(B) = 0$

$ii)$ $A(E) = \Omega$

Demostración.
La prueba se sigue de manera cercara a los argumentos dados en la Sección 3.1, 3.2 and 3.3. El Wronskiano puede ser definido para soluciones de $(\tau_\omega - \lambda)u = 0$ con interacciones δ' y la continuidad en los puntos x_n se cumple como en el Lema 3.1.1. La modificación principal a la Sección 3.1 es el uso de $\tilde{G}$ introducido abajo, en lugar de G dada en la Definición 3.1.4. Para $z \in \mathbb{C}$ sea

$$\tilde{G}_\alpha(z,x,x) := \frac{u'_{a,\alpha}(z,x)u'_{b,\alpha}(z,x)}{W_x(u_{a,\alpha}(z),u_{b,\alpha}(z))}$$

donde $u_{a,\alpha}$ y $u_{b,\alpha}$ son como en la Definición 3.1.3 pero que satisfacen las condiciones de la interacción δ' en p, es decir $f'(p+) = f'(p-)$ y $f(p+) - f(p-) = \alpha f'(p)$.

Si $x \leq p$, $u_{a,0}(x) = u_{a,\alpha}(x)$ y si $x \geq p$, $u_{b,0}(x) = u_{b,\alpha}(x)$.

Ahora, de la condición en p

$$u_{a,\alpha}(p+) = u_{a,\alpha}(p-) + \alpha u'_{a,\alpha}(p) = u_{a,0}(p-) + \alpha u'_{a,0}(p) = u_{a,0}(p+) + \alpha u'_{a,0}(p).$$

Usando esto en $\tilde{G}_\alpha$ tenemos que

$$\tilde{G}_\alpha(z,p,p) = \frac{u'_{a,\alpha}(p)u'_{b,\alpha}(p)}{W(u_{a,\alpha},u_{b,\alpha})} = \frac{u'_{a,\alpha}(p)u'_{b,\alpha}(p)}{u_{a,\alpha}(p+)u'_{b,\alpha}(p) - u'_{a,\alpha}(p)u_{b,\alpha}(p+)} =$$

$$= \frac{u'_{a,0}(p)u'_{b,0}(p)}{u_{a,0}(p+)u'_{b,0}(p) + \alpha u'_{a,0}(p)u'_{b,0}(p) - u'_{a,0}(p)u_{b,0}(p+)}$$

Entonces

$$\tilde{G}_\alpha(z,p,p) = \frac{u'_{a,0}(p)u'_{b,0}(p)}{W(u_{a,0},u_{b,0})\left(1 + \alpha\frac{u'_{a,0}(p)u'_{b,0}(p)}{W(u_{a,0},u_{b,0})}\right)} = \tilde{G}_0(z,p,p)\frac{1}{1+\alpha\tilde{G}_0(z,p,p)}$$

Y obtenemos la caracterización de los eigenvalores dada en el Teorema 3.1.3 y así también el Teorema 3.1.4 para interacciones δ'.
Los resultados en la sección 3.2 se cumplen para interacciones δ' práctimante sin modificaciones. En la sección 3.3 modificamos la Definición 3.3.1 (3.10) pidiendo que $u'_\omega(x_n) \neq 0$ en lugar de $u_\omega(x_n) \neq 0$ y se obtiene el Lema 3.3.1 y el Teorema 3.3.1 para interacciones δ'. Por tanto el resultado se sigue.

□

Observación 3.4.1. *Situaciones mezcladas donde interacciones δ y δ' se presentan, pueden ser tratadas con los argumentos dados anteriormente.*

CAPÍTULO 4

Operadores Aleatorios de Sturm-Liouville con Interacciones Puntuales Generalizadas

Este capítulo esta basado en un trabajo conjunto con Rafael del Río y David Damanik, ver [7]. Se resolverá el problema de como varían los valores propios de una clase de operadores aleatorios de Sturm-Liouville usando un nuevo enfoque, herramientas geométricas y matrices en $SL(2,\mathbb{R})$. Por medio de este enfoque se generalizará de interacciones puntuales δ y δ' a una clase completa de interacciones puntuales autoadjuntas reales.

4.1 Matrices de Transferencia

En esta sección se presentará una manera de introducir las matrices de transferencia, la cual no es la manera estandar de presentarlas.

Consideremos un intervalo abierto $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, un potencial L^1_{loc} $V : I \to \mathbb{R}$, y una energía $E \in \mathbb{R}$. La ecuación diferencial asociada es

$$-u''(x) + V(x)u(x) = Eu(x), \quad x \in I. \tag{4.1}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales muestra que para cada $x \in I$ y cada $(v,d)^T \in \mathbb{R}^2$, existe una única solución u de (4.1) con $(u(x),u'(x))^T = (v,d)^T$. Más aún, todas las soluciones reales de (4.1) provienen de esta manera. Ver por ejemplo Teorema 2.2.1 en [29]. Esto tiene las siguientes consecuencias.

Proposición 4.1.1. *El conjunto S_E de soluciones reales de* (4.1) *es un espacio real dos dimensional y, para cada $x \in I$, el mapeo*

$$M_{x,E} : S_E \to \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración.
La linealidad se sigue directamente de la definición del mapeo $M_{x,E}$. Por los resultados estandar de ecuaciones diferenciales citados arriba, es sobre e inyectiva. Esto también implica el hecho de que S_E es un espacio vectorial real dos dimensional. $\square$

Proposición 4.1.2. *Para $x,y \in I$, existe una matriz $M(x,y;E) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tal que para toda $u \in S_E$, tenemos*

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = M(x,y;E) \begin{pmatrix} u(y) \\ u'(y) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Demostración.
Si definimos $M(x,y;E) := M_{x,E}M^{-1}_{y,E}$, entonces (4.2) se cumple por Proposition 4.1.1. Por construcción, $M(x,y;E) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, así solo basta probar que $\det M(x,y;E) = 1$.
Consideremos las dos soluciones $u_D, u_N \in S_E$ con

$$\begin{pmatrix} u_N(y) & u_D(y) \\ u'_N(y) & u'_D(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} M(x,y;E) &= M(x,y;E)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(x,y;E)\begin{pmatrix} u_N(y) & u_D(y) \\ u_N'(y) & u_D'(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_N(x) & u_D(x) \\ u_N'(x) & u_D'(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \det M(x,y;E) &= \det\begin{pmatrix} u_N(x) & u_D(x) \\ u_N'(x) & u_D'(x) \end{pmatrix} \\ &= u_N(x)u_D'(x) - u_D(x)u_N'(x) \\ &= u_N(y)u_D'(y) - u_D(y)u_N'(y) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aquí se ha usado que el Wronskiano es constante, esto se sigue del hecho de que u_D, u_N resuelven (4.1):

$$\begin{aligned} (u_N(t)u_D'(t) - u_D(t)u_N'(t))' &= \\ &= u_N'(t)u_D'(t) + u_N(t)u_D''(t) - u_D'(t)u_N'(t) - u_D(t)u_N''(t) \\ &= u_N(t)[(V(t)-E)u_D(t)] - u_D(t)[(V(t)-E)u_N(t)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4.1.1 La recta real proyectiva

Recuerde que la recta real proyectiva $\mathbb{RP}^1$ esta dada por

$$\mathbb{RP}^1 = \{\text{rectas en } \mathbb{R}^2 \text{ que pasan por el origen}\}.$$

Observe que los elementos de $\mathbb{RP}^1$ son clases de equivalencia con respecto a la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$v \sim w \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v = \lambda w.$$

Definición 4.1.1. *Denotamos la clase de equivalencia de $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por $[v]$.*

Observación 4.1.1. *Sean $u = (u_1, u_2)^T$ y $v = (v_1, v_2)^T$. Entonces, $[u] = [v]$ si y sólo si $arg(u_2 + iu_1) = arg(v_2 + iv_1) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Lema 4.1.1. *Cualquier $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ induce un mapeo biyectivo bien definido de $\mathbb{RP}^1$ a $\mathbb{RP}^1$, el cual será denotado por $\tilde{M}$, vía*

$$\tilde{M}([v]) = [Mv].$$

Demostración.
Sea $u \sim v$. Entonces $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y

$$[Mu] = \tilde{M}[u] = \tilde{M}[\lambda v] = [M\lambda v] = [\lambda Mv] = [Mv].$$

Esto muestra que $\tilde{M}$ esta bien definido.
Sea $[v] \in \mathbb{RP}^1$ con representante v. Como M es sobre por hipótesis, existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $Mu = v$. Como

$$\tilde{M}([u]) = [Mu] = [v],$$

se sigue que $\tilde{M}$ es sobre.

Finalmente, supongamos $[Mu] = [Mv]$. Entonces, existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $Mu = kMv$, y como M es inyectiva por hipótesis , $u = kv$. Así $[u] = [v]$ y $\tilde{M}$ es inyectiva. $\square$

4.1.2 La Descomposición de las matrices en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

En esta subsección se discutirá la descomposición de Iwasawa para matrices en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$; ver por ejemplo [17].

Definimos los siguientes subgrupos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$:

$$\mathcal{E} = \left\{ E_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathcal{P} = \left\{ P_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathcal{H} = \left\{ H_r := \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} : r > 0 \right\}.$$

Teorema 4.1.1 (Descomposición de Iwasawa)**.** *Toda matriz $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ puede ser escrita de manera única como $A = P_\alpha H_r E_\theta$, dónde $P_\alpha \in \mathcal{P}$, $H_r \in \mathcal{H}$ y $E_\theta \in \mathcal{E}$.*

Demostración.
Considere el semiplano superior complejo, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Dada $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, consideremos su acción en $\mathbb{C}_+$ dada por

$$A \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Observe que $A \cdot z$ pertenece a $\mathbb{C}_+$ para cada $z \in \mathbb{C}_+$ ya que

$$\Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)\Im z}{|cz+d|^2} = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} > 0.$$

Más aún, note que

$$(A \cdot B) \cdot z = A \cdot (B \cdot z) \tag{4.3}$$

Para todas $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{C}_+$.
Consideremos el caso $A \cdot i = i$, esto es,

$$\frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow ai + b = di - c \Leftrightarrow a = d \text{ y } b = -c.$$

Así, la condición $\det A = ad - bc = 1$ se convierte en $a^2 + c^2 = 1$ y podemos elegir $\theta \in \mathbb{R}$ con $a = \cos\theta$ y $c = \sin\theta$, tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Esto muestra que $A \cdot i = i$ si y sólo si $A \in \mathcal{E}$.
Dada cualquier $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, consideremos $A \cdot i \in \mathbb{C}_+$ y fijemos

$$\alpha := \Re(A \cdot i), \quad r := (\Im(A \cdot i))^{1/2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A \cdot i &= \alpha + ir^2 \\ &= \begin{pmatrix} r & \alpha/r \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \cdot i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \cdot i \end{aligned}$$

Así, para (4.3),

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \cdot i = i,$$

lo que implica que

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

para una $\theta \in \mathbb{R}$ adecuada por nuestra discución de arriba. Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

como se deseaba. Esto establece la existencia.
Para mostrar unicidad, consideremos la siguiente identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 1/r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & 1/r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ and $r_1, r_2 > 0$.
Aplicando ambos lados a $i \in \mathbb{C}_+$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 1/r_1 \end{pmatrix} \cdot i = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & 1/r_2 \end{pmatrix} \cdot i,$$

lo cual es equivalente a

$$\alpha_1 + ir_1^2 = \alpha_2 + ir_2^2.$$

Esto implica que $\alpha_1 = \alpha_2$ y $r_1 = r_2$ (since $r_1, r_2 > 0$). Toda vez que esto se cumpla, tenemos también que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix},$$

probando unicidad. □

Observación 4.1.2. *Dado que cualquier matriz en* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *puede ser escrita como la inversa de la transpuesta de una matriz en* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*, tenemos también la descomposición*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & \tilde{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tilde{\theta} & -\sin\tilde{\theta} \\ \sin\tilde{\theta} & \cos\tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

para algunas $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$*,* $\tilde{r} > 0$ *y* $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$*.*

4.2 El Caso de una Interacción tipo δ

Para entender los conceptos consideremos el caso de una interacción tipo δ. Es decir el caso estudiado en la sección 3.1 y probaremos el resultado obtenido en el Teorema 3.1.4 pero utilizando matrices de transferencia.

Sean $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y finito, $V \in L^1(I)$ real valuada, $p \in I$ un punto interior, y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Consideremos las expresiones diferenciales formales

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V$$

y

$$\tau_{\alpha,p} := -\frac{d^2}{dx^2} + V + \alpha\delta(x - p).$$

Recordemos que el operador maximal $T_{\alpha,p}$ correspondiente a $\tau_{\alpha,p}$ esta definido por

$$T_{\alpha,p} f = \tau f$$

$$D(T_{\alpha,p}) = \Big\{ f \in L^2(I) : \; f, \; f' \text{ abs. cont in } I \backslash \{p\}, -f'' + Vf \in L^2(I),$$
$$\begin{pmatrix} f(p+) \\ f'(p+) \end{pmatrix} = A_{\alpha,p} \begin{pmatrix} f(p-) \\ f'(p-) \end{pmatrix} \Big\}.$$

Observación 4.2.1. *Note que la restricción de cualquier función absolutamente continua a un intervalo acotado es de variación acotada y por tanto los límites por la derecha y por la izquierda existen en todo punto, ver Sección 8.15 en [22].*

Aquí, $A_{\alpha,p}$ es la matriz en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ definida por

$$A_{\alpha,p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Observe que $T_{\alpha,p}$ corresponde al operador definido en la sección 3.1.

Consideremos la restricción autoadjunta $H_{\alpha,p}$ de $T_{\alpha,p}$ in $L^2(I)$, ver Teorema 5.2 en [4], definida por

$$H_{\alpha,p} f = \tau f \tag{4.5}$$

$$D(H_{\alpha,p}) \quad = \quad \left\{ f \in D(T_{\alpha,p}) : \begin{array}{l} f(a)\cos\theta + f'(a)\sin\theta = 0 \\ f(b)\cos\gamma + f'(b)\sin\gamma = 0 \end{array} \right\} \qquad \theta, \, \gamma \in [0, \pi).$$

Teorema 4.2.1 (Ver Teorema 3.1.4)**.** *Sea $E \in \sigma_p(H_{\alpha,p})$. Entonces la siguiente alternativa sucede:*

$i)$ $E \in \sigma_p(H_{\tilde{\alpha},p})$ para toda $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$,

$ii)$ $E \notin \sigma_p(H_{\tilde{\alpha},p})$ para toda $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

Demostración.
Notemos primero que en el nivel de matrices de transferencia, la interacción puntual inserta el factor (4.4) entre $M(y, p+; E)$ y $M(p-, x; E)$ para $a \leq x < p < y \leq b$.
Sea $E \in \mathbb{R}$ tal que $E \in \sigma_p(H_{\alpha,p})$. Entonces existe un vector no cero $u \in D(H_{\alpha,p})$ con $H_{\alpha,p}u = Eu$. En particular, se tiene que

$$\begin{pmatrix} u(p+) \\ u'(p+) \end{pmatrix} = A_{\alpha,p} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $ii)$ falla; y por tanto tenemos que probar $i)$. Sea $E \in \sigma_p(H_{\tilde{\alpha},p})$ para alguna $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Existe un vector no cero $v \in D(H_{\tilde{\alpha},p})$ tal que $H_{\tilde{\alpha},p}v = Ev$. Como $M = M(p-, a; E) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ y $[(u(a), u'(a))^T] = [(v(a), v'(a))^T]$, se tiene que

$$[(u(p-), u'(p-))^T] = \tilde{M}([(u(a), u'(a))^T]) = \tilde{M}([(v(a), v'(a))^T]) = [(v(p-), v'(p-))^T].$$

Así, existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} v(p-) \\ v'(p-) \end{pmatrix},$$

y como $u \in D(H_{\alpha,p})$ y $v \in D(H_{\tilde{\alpha},p})$,

$$\begin{pmatrix} u(p-) \\ (\alpha - \tilde{\alpha})u(p-) + u'(p-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha - \tilde{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} = A^{-1}_{\tilde{\alpha},p} A_{\alpha,p} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} =$$

$$= A^{-1}_{\tilde{\alpha},p} \begin{pmatrix} u(p+) \\ u'(p+) \end{pmatrix} = k A^{-1}_{\tilde{\alpha},p} \begin{pmatrix} v(p+) \\ v'(p+) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} v(p-) \\ v'(p-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix}$$

y entonces $(\alpha - \tilde{\alpha})u(p-) + u'(p-) = u'(p-)$. Como $\tilde{\alpha} \neq \alpha$, $u(p-) = 0$. Así $\forall \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} u(p+) \\ u'(p+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u'(p+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u'(p-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u'(p-) \end{pmatrix} = A_{\tilde{\alpha},p} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix}$$

Por tanto, se cumple que $u \in \sigma_p(H_{\tilde{\alpha},p})$, $\forall \tilde{\alpha} \neq \alpha$ y $i)$. $\square$

4.3 El caso de una sola interacción puntual generalizada

Ahora construiremos el operador con una interacción puntual generalizada. Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado finito. Sean $V \in L^1(I)$ función real valuada, $p \in I$ un punto interior y $A_{\alpha,r,\theta} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ con descomposición de Iwasawa $A_{\alpha,r,\theta} = P_\alpha H_r E_\theta$, dónde $P_\alpha \in \mathcal{P}$, $H_r \in \mathcal{H}$ and $E_\theta \in \mathcal{E}$. Consideremos la siguiente expresión diferencial formal

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V.$$

Definición 4.3.1. *El operador maximal correspondiente $T_{\alpha,r,\theta}$ esta definido por*

$$T_{\alpha,r,\theta} f = \tau f$$

$$D(T_{\alpha,r,\theta}) = \Big\{ f \in L^2(I) : \ f,\ f' \textit{ abs. cont in } I\backslash\{p\}, -f'' + Vf \in L^2(I),$$
$$\begin{pmatrix} f(p+) \\ f'(p+) \end{pmatrix} = A_{\alpha,r,\theta} \begin{pmatrix} f(p-) \\ f'(p-) \end{pmatrix} \Big\}.$$

Consideremos la restricción autoadjunta $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta}$ de $T_{\alpha,r,\theta}$ in $L^2(I)$, ver ecuación (4.3) en [26], definida abajo

Definición 4.3.2. *Sea $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta}$ el operador definido por*

$$H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta} f = \tau f$$

$$D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta}) \quad = \quad \left\{ f \in D(T_{\alpha,r,\theta}) : \ \begin{array}{l} f(a)\cos\delta + f'(a)\sin\delta = 0 \\ f(b)\cos\gamma + f'(b)\sin\gamma = 0 \end{array} \right\}, \quad \delta,\ \gamma \in [0,\pi).$$

Lema 4.3.1. *Sea $\theta, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ y fijemos $v \in \mathbb{R}^2$. Se cumple que: $\tilde{\theta} \neq \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $[A_{\alpha,r,\theta} v] \neq [A_{\alpha,r,\tilde{\theta}} v]$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean $\tilde{\theta} \neq \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Dado que E_γ actúa como una matriz de rotación por un ángulo γ, tenemos que $[E_\theta v] \neq [E_{\tilde{\theta}} v]$. Tomando en cuenta que $P_\alpha H_r \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, Lemma 4.1.1 nos dice que $[A_{\alpha,r,\theta} v] \neq [A_{\alpha,r,\tilde{\theta}} v]$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $[A_{\alpha,r,\theta} v] \neq [A_{\alpha,r,\tilde{\theta}} v]$. Recordando la definición introducida en el Lema 4.1.1,
$$\widetilde{P_\alpha H_r}[E_{\tilde{\theta}} v] = [P_\alpha H_r E_{\tilde{\theta}} v] = [A_{\alpha,r,\tilde{\theta}} v] \neq [A_{\alpha,r,\theta} v] = \widetilde{P_\alpha H_r}[E_\theta v],$$
pues $\widetilde{P_\alpha H_r}$ es inyectiva. Así $[E_\theta v] \neq [E_{\tilde{\theta}} v]$ y por tanto $\tilde{\theta} \neq \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Lema 4.3.2. *Sean $r, \tilde{r} > 0$, $\tilde{r} \neq r$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Los siguientes son equivalentes:*

$i)$ $[v] = [(\sin\theta, \cos\theta)^T]$ *or* $[v] = [(\cos\theta, -\sin\theta)^T]$,

$ii)$ $[A_{\alpha,r,\theta} v] = [A_{\alpha,\tilde{r},\theta} v]$.

Demostración.

$ii) \Rightarrow i)$ Asumamos que $[A_{\alpha,r,\theta}v] = [A_{\alpha,\tilde{r},\theta}v]$. Entonces $\tilde{P}_\alpha[H_r E_\theta v] = \tilde{P}_\alpha[H_{\tilde{r}} E_\theta v]$. Del Lema 4.1.1 $\tilde{P}_\alpha$ es inyectiva, $[H_r E_\theta v] = [H_{\tilde{r}} E_\theta v]$, esto es, existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $H_r E_\theta v = k H_{\tilde{r}} E_\theta v$. Así, $H_{\tilde{r}}^{-1} H_r E_\theta v = k E_\theta v$, y por tanto $E_\theta v$ es un vector propio de la matriz diagonal $H_{\tilde{r}}^{-1} H_r$. Como $r \neq \tilde{r}$, los vectores propios son multiplos de $[0,1]^T$ o $[1,0]^T$. Entonces $[E_\theta v] = [(1,0)^T]$ o $[E_\theta v] = [(0,1)^T]$, tomando en cuenta que

$$E_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y Lema 4.1.1, obtenemos $[v] = [(\sin\theta, \cos\theta)^T]$ o $[v] = [(\cos\theta, -\sin\theta)^T]$.

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que $[v] = [(\sin\theta, \cos\theta)^T]$. Entonces,

$$[A_{\alpha,r,\theta}v] = [P_\alpha H_r (0,1)^T] = [\frac{1}{r} P_\alpha (0,1)^T] = [\frac{1}{\tilde{r}} P_\alpha (0,1)^T] = [P_\alpha H_{\tilde{r}} (0,1)^T] = [A_{\alpha,\tilde{r},\theta}v].$$

Cuando $[v] = [(\cos\theta, -\sin\theta)^T]$, el resultado se sigue de manera análoga.

□

Lema 4.3.3. *Sean $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha} \neq \alpha$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Los siguientes son equivalentes:*

$i)$ $[v] = [(\cos\theta, -\sin\theta)^T]$,

$ii)$ $[A_{\alpha,r,\theta}v] = [A_{\tilde{\alpha},r,\theta}v]$.

Demostración.

$ii) \Rightarrow i)$ Asumamos que $[A_{\alpha,r,\theta}v] = [A_{\tilde{\alpha},r,\theta}v]$, esto es, existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $P_\alpha H_r E_\theta v = k P_{\tilde{\alpha}} H_r E_\theta v$. Entonces $P_{\tilde{\alpha}}^{-1} P_\alpha H_r E_\theta v = k H_r E_\theta v$. Así $H_r E_\theta v$ es un vector propio de la matriz $P_{\tilde{\alpha}}^{-1} P_\alpha$. Como $\alpha \neq \tilde{\alpha}$, $P_{\tilde{\alpha}}^{-1} P_\alpha \neq I$ sus vectores propios son multiplos de $(1,0)^T$. Entonces $[H_r E_\theta v] = [(1,0)^T]$, y tomando en cuenta que

$$(H_r E_\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos\theta & r\sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

y el Lema 4.1.1, obtenemos que $[v] = [\frac{1}{r}(\cos\theta, -\sin\theta)^T] = [(\cos\theta, -\sin\theta)^T]$.

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que $[v] = [(\cos\theta, -\sin\theta)]$. Entonces

$$[A_{\alpha,r,\theta}v] = [P_\alpha r(1,0)^T] = [r(1,0)^T] = [P_{\tilde{\alpha}} r(1,0)^T] = [A_{\tilde{\alpha},r,\theta}v].$$

□

Teorema 4.3.1. *Sea $E \in \mathbb{R}$. Si $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta})$, entonces:*

a) $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\tilde{\theta}})$ *si y sólo si* $\tilde{\theta} = \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Una de las siguientes se cumple:

i) $E \notin \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,\tilde{r},\theta})$ *para toda* $\tilde{r} \neq r$.

ii) $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,\tilde{r},\theta})$ *para toda* $\tilde{r} > 0$.

c) Una de las siguientes se cumple:

i) $E \notin \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\tilde{\alpha},r,\theta})$ *para toda* $\tilde{\alpha} \neq \alpha$.

ii) $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\tilde{\alpha},r,\theta})$ *para toda* $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Demostración.
Como $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta})$, existe $u \in L^2(a,b)$, $u \neq 0$, tal que $u \in D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta})$ y $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta} u = Eu$.

a) Supongamos ahora que $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\tilde{\theta}})$ para alguna $\tilde{\theta} \neq \theta$. Entonces existe $v \in L^2(a,b)$, $v \neq 0$, tal que $v \in D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\tilde{\theta}})$ y $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\tilde{\theta}} v = Ev$. Considemos las matrices $M(p-,a;E)$ y $M(b,p+;E)$, las cuales no dependen de α, r y θ.
Como $M := M(p-,a;E) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y $[(u(a),u'(a))^T] = [(v(a),v'(a))^T]$, tenemos que

$$[(u(p-),u'(p-))^T] = \tilde{M}([(u(a),u'(a))^T]) = \tilde{M}([(v(a),v'(a))^T]) = [(v(p-),v'(p-))^T].$$

Así, existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v(p-) \\ v'(p-) \end{pmatrix}.$$

Análogamente, como $M^{-1}(b,p+;E) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, existe $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} u(p+) \\ u'(p+) \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v(p+) \\ v'(p+) \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} u(p+) \\ u'(p+) \end{pmatrix} = A_{\alpha,r,\theta} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} v(p+) \\ v'(p+) \end{pmatrix} = A_{\alpha,r,\tilde{\theta}} \begin{pmatrix} v(p-) \\ v'(p-) \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$[A_{\alpha,r,\theta}(u(p-),u'(p-))^T] = [A_{\alpha,r,\tilde{\theta}}(v(p-),v'(p-))^T] = [A_{\alpha,r,\tilde{\theta}}(u(p-),u'(p-))^T].$$

Por el Lema 4.3.1 esto pasa si y sólo si $\tilde{\theta} = \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Supongamos que $i)$ es falso. Entonces para alguna $r_0 \neq r$, existe $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r_0,\theta})$. Por tanto existe un vector no cero $v \in L^2(a,b)$ tal que $v \in D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r_0,\theta})$ y $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r_0,\theta} v = Ev$. Como en el caso $a)$ concluimos que

$$[A_{\alpha,r,\theta}(u(p-),u'(p-))^T] = [A_{\alpha,r_0,\theta}(v(p-),v'(p-))^T] = [A_{\alpha,r_0,\theta}(u(p-),u'(p-))^T].$$

Por el Lema 4.3.2 esto pasa si y sólo si $[(u(p-),u'(p-))^T] = [(\sin\theta,\cos\theta)^T]$ o $[(u(p-),u'(p-))^T] = [(\cos\theta,-\sin\theta)^T]$.
Asumamos que $[(u(p-),u'(p-))^T] = [(\sin\theta,\cos\theta)^T]$. Si $[(u(p-),u'(p-))^T] = [(\cos\theta,-\sin\theta)^T]$, el argumento procede análogamente. Existe $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $(u(p-),u'(p-))^T = c(\sin\theta,\cos\theta)^T$.

Normalizamos y tomamos $c = 1$. Verifiquemos que para cada $\tilde{r} > 0$, $E \in \sigma(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,\tilde{r},\theta})$ con vector propio

$$w(x) := \begin{cases} \frac{\tilde{r}}{r} u(x) & \text{si } a \leq x < p \\ \\ u(x) & \text{si } p < x \leq b \end{cases}$$

Primero, notemos que w satistace las condiciones en a y en b de las funciones en $D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta})$ ya que u también las satisface. Ahora,

$$A_{\alpha,\tilde{r},\theta} \begin{pmatrix} w(p-) \\ w'(p-) \end{pmatrix} = A_{\alpha,\tilde{r},\theta} \left(\frac{\tilde{r}}{r} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} \right) = \frac{\tilde{r}}{r} A_{\alpha,\tilde{r},\theta} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\tilde{r}}{r} \frac{1}{\tilde{r}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\alpha,r,\theta} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(p+) \\ u'(p+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(p+) \\ w'(p+) \end{pmatrix}.$$

La primera y la segunda igualdad se cumplen por la definición de w y u, las siguientes tres igualdades son cálculos directos. La penúltima igualdad se cumple ya que $u \in D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta})$ y la última se sigue de que $w = u$ a la derecha de p. Por tanto $w \in D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha,\tilde{r},\theta})$, $\tau w = Ew$ en $[a,b]\backslash\{p\}$, y E es un valor propio para $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,\tilde{r},\theta}$, $\tilde{r} > 0$.

c) Supongamos que $i)$ es falso. Entonces para alguna $\alpha_0 \neq \alpha$, existe $E \in \sigma_p(H^{\delta,\gamma}_{\alpha_0,r,\theta})$. Por tanto, existe $v \in L^2(a,b)$, $v \neq 0$, tal que $v \in D(H^{\delta,\gamma}_{\alpha_0,r,\theta})$ y $H^{\delta,\gamma}_{\alpha_0,r,\theta} v = Ev$. Concluimos como en el caso a) que

$$[A_{\alpha,r,\theta}(u(p-),u'(p-))^T] = [A_{\alpha_0,r,\theta}(v(p-),v'(p-))^T] = [A_{\alpha_0,r,\theta}(u(p-),u'(p-))^T].$$

Por el Lema 4.3.3 esto pasa si y sólo si $[(u(p-),u'(p-))^T] = [(\cos\theta, -\sin\theta)^T]$. Existe $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(u(p-),u'(p-))^T = c(\sin\theta,\cos\theta)^T$. Normalizamos y tomamos $c = 1$. Para toda $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$,

$$A_{\tilde{\alpha},r,\theta} \begin{pmatrix} u(p-) \\ u'(p-) \end{pmatrix} = A_{\tilde{\alpha},r,\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, para toda $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, $u \in D(H^{\delta,\gamma}_{\tilde{\alpha},r,\theta})$ y $H^{\delta,\gamma}_{\tilde{\alpha},r,\theta} u = Eu$.

$\square$

4.4 Interacciones puntuales generalizadas caso contable

Sean $-\infty \le a < b \le \infty$ y $V \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ función real valuada. Fijemos un conjunto discreto de puntos $M = \{x_n\}_{n\in\mathfrak{I}} \subset (a,b)$, donde $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{Z}$. Supongamos que el conjunto M se acumula a lo más en a o b. Sean $\Lambda := \{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$, $R := \{r_n\} \subset (0,\infty)$ y $\Theta := \{\theta_n\} \subset \mathbb{R}$.

Definición 4.4.1. *Sea $A_{\alpha_n,r_n,\theta_n} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ con descomposición de Iwasawa $A_{\alpha_n,r_n,\theta_n} = P_{\alpha_n} H_{r_n} E_{\theta_n}$, donde $P_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$, $H_{r_n} \in \mathcal{H}$ y $E_{\theta_n} \in \mathcal{E}$ para toda $n \in \mathfrak{I}$.*

Consideremos la expresión diferencia formal

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V.$$

Definición 4.4.2. *El operador maximal $T_{\Lambda,R,\Theta}$ esta definido por*

$$T_{\Lambda,R,\Theta} f = \tau f$$

$$D(T_{\Lambda,R,\Theta}) = \Big\{ f \in L^2(a,b) :\ f,\ f' \textit{ abs. cont en } (a,b)\backslash M, -f'' + Vf \in L^2(a,b),$$
$$\begin{pmatrix} f(x_n+) \\ f'(x_n+) \end{pmatrix} = A_{\alpha_n,r_n,\theta_n} \begin{pmatrix} f(x_n-) \\ f'(x_n-) \end{pmatrix} \forall n \in \mathfrak{I} \Big\}$$

(Ver observación 4.2.1)

Definición 4.4.3. *Dados $g \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ y $z \in \mathbb{C}$, Decimos que f es solución de $(\tau_{\Lambda,R,\Theta} - z)f = g$ si f y f' son absolutamente continuas en $(a,b)\backslash M$ con $-f'' + Vf - zf = g$ y*

$$\begin{pmatrix} f(x_n+) \\ f'(x_n+) \end{pmatrix} = A_{\alpha_n,r_n,\theta_n} \begin{pmatrix} f(x_n-) \\ f'(x_n-) \end{pmatrix} \forall n \in \mathfrak{I}.$$

Definición 4.4.4. *Definimos el Wronskiano de dos soluciones u_1 y u_2 de $(\tau_{\Lambda,R,\Theta} - z)f = 0$ por*

$$W_x(u_1,u_2) = u_1(x+)u_2'(x+) - u_1'(x+)u_2(x+).$$

Definición 4.4.5. *Para f y g absolutamente continuas en $(a,b)\backslash M$, definimos el corchete de Lagrange como*

$$[f,g]_x := \overline{f(x+)}g'(x+) - \overline{f'(x+)}g(x+) \qquad x \in (a,b)$$

Si $f,g \in D(T_{\Lambda,R,\Theta})$, entonces los límites $[f,g]_a := \lim_{x\to a+}[f,g]_x$ y $[f,g]_b := \lim_{x\to b-}[f,g]_x$ existen; ver [4, Theorem 2.2].

Una solución de $(\tau_{\Lambda,R,\Theta} - z)f = 0$ se dice que esta a la derecha (resp., izquierda) en $L^2(a,b)$ si f es cuadrado integrable en una vecindad de b (resp., a).

Definición 4.4.6.

$i)$ *$\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ esta en el **caso de círculo límite** (lcc) en b si para toda $z \in \mathbb{C}$, todas las soluciones de $(\tau_{\Lambda,R,\Theta} - z)f = 0$ estan a la derecha en $L^2(a,b)$.*

$ii)$ *$\tau_{\Lambda,R,\theta}$ esta en el **caso de punto límite** (lpc) en b si para toda $z \in \mathbb{C}$, existe al menos una solución de $(\tau_{\Lambda,R,\Theta} - z)f = 0$ que no esta a la derecha en $L^2(a,b)$.*

La misma definición aplica para el extremo a.

De acuerdo a la *alternativa de Weyl*, ver [4, Theorem 4.4], siempre se cumple $i)$ o $ii)$.

En el Teorema 5.2 en [4] se establece que el operador $H_{\Lambda,R,\Theta}$, definido abajo, es una restricción autoadjunta del operador maximal $T_{\Lambda,R,\Theta}$ introducido en la Definición 4.4.2.

Definición 4.4.7. *Sea $H_{\Lambda,R,\Theta}$ el operador definido como*

$$H_{\Lambda,R,\Theta}f = \tau f$$

$$D(H_{\Lambda,R,\Theta}) \quad = \quad \left\{ f \in D(T_{\Lambda,R,\Theta}) : \begin{array}{l} [v,f]_a = 0 \textit{ if } \tau_{\Lambda,R,\Theta} \textit{ lcc en } a \\ [w,f]_b = 0 \textit{ if } \tau_{\Lambda,R,\Theta} \textit{ lcc en } b \end{array} \right\},$$

donde v y w son soluciones reales no triviales de $(\tau_{\Lambda,R,\Theta} - \lambda)v = 0$ cerca de a y cerca de b, respectivamente, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ esta en el caso de círculo límite en b, entonces w esta a la derecha en $L^2(a,b)$ y por tanto $[w,f]_b$ esta bien definido y lo mismo pasa para a y v. Si $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ esta en el caso de punto límite en a o b no requerimos ninguna condición extra en esos puntos.

Observación 4.4.1. *Para la existencia de los valores de $[v,f]_a$ y $[w,f]_b$ en la frontera ver Teorema 2.2 a) en [4]. En el Teorema 5.2 en [4], las restricciones autoadjuntas esta caracterizadas usando matrices unitarias. El caso que aquí se esta tratando corresponde al caso particular de condicones de frontera autoadjuntas reales y connecting. Para la construcción de restricciones autoadjuntas ver tambiém [19, pp. 216], [10, Sección 15], [12, Teorema 2.2], [25, Sección 3] y [1, Teorema 1].*

Observación 4.4.2. *Siempre que fijemos un parámetro, no se escribirá. Por ejemplo, si fijamos R y Θ solo escribiremos H_Λ y análogamente para los otros casos.*

Definición 4.4.8. *Decimos que $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ es regular en a si a es finito, $V \in L^1_{\mathrm{loc}}[a,b)$ y a no es un punto de acumulación de M. La misma definición aplica para el extremo b.*

Si $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ es regular en a, entonces $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ es lcc en a y la condición $[v,f]_a = 0$ puede ser reemplazada por

$$f(a)\cos\psi + f'(a)\sin\psi = 0$$

para $\psi \in [0,\pi)$. Lo mismo se cumple para b.

En el resto de esta sección para el operador $H_{\Lambda,R,\Theta}$ de la Definición 4.4.7 fijaremos los valores de α_n, r_n y θ_n para $n \neq n_0$. Fijemos $\alpha = \alpha_{n_0}$, $r = r_{n_0}$ y $\theta = \theta_{n_0}$. Este operador será denotado por $H_{\alpha,r,\theta}$, donde solo los valores que Λ, R y Θ toman en n_0 estan explicitamente mostrados.

Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y definamos

$$P(E) := \{(\alpha,r,\theta) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R} : E \in \sigma_p(H_{\alpha,r,\theta})\}.$$

Ahora, tomemos el operador $H^{\delta,\gamma}_{\alpha,r,\theta}$ introducido en la definición 4.3.2 con $p = x_{n_0}$ y $I = [c,d] \subset (a,b)$ tal que $[c,d] \cap M = \{x_{n_0}\}$ (Note que se ha cambiado la notación para los extremos del intervalo I).

Lema 4.4.1. *Existen δ_0, $\gamma_0 \in [0, \pi)$ fijos tales que para todas $(\alpha, r, \theta) \in P(E)$, sucede que $E \in \sigma_p(H^{\delta_0,\gamma_0}_{\alpha,r,\theta})$.*

Demostración.

Si $(\alpha_1, r_1, \theta_1) \in P(E)$, entonces para alguna $\varphi \in D(H_{\alpha_1,r_1,\theta_1})$ no cero, $H_{\alpha_1,r_1,\theta_1}\varphi = E\varphi$.

Fijemos los puntos $\delta_0, \gamma_0 \in [0, \pi)$ donde

$$\begin{gathered} \varphi(c)\cos\delta_0 + \varphi'(c)\sin\delta_0 = 0 \\ \varphi(d)\cos\gamma_0 + \varphi'(d)\sin\gamma_0 = 0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

Si $(\alpha, r, \theta) \in P(E)$ es tal que $(\alpha, r, \theta) = (\alpha_1, r_1, \theta_1)$, la afirmación se sigue.

Si $(\alpha, r, \theta) \in P(E)$ pero $(\alpha, r, \theta) \neq (\alpha_1, r_1, \theta_1)$, entonces $H_{\alpha,r,\theta}\psi = E\psi$ para alguna $\psi \in D(H_{\alpha,r,\theta})$ no cero. Por tanto, existe $\delta, \gamma \in [0, \pi)$ que satisface las condiciones de frontera en c y d para ψ, similar a (4.6). Si probamos que $\delta = \delta_0$ y $\gamma = \gamma_0$, entonces $H^{\delta_0,\gamma_0}_{\alpha,r,\theta}\psi = E\psi$ y por tanto $E \in \sigma(H^{\delta_0,\gamma_0}_{\alpha,r,\theta})$.

Probemos que $\gamma = \gamma_0$. La prueba para δ es análoga.

a) Supongamos que $\tau_{\alpha,r,\theta}$ esta en el caso de círculo límite en b.

   El Wronskiano satisface $W_x(w, \varphi) = [w, \varphi]_x$ y $W_x(w, \psi) = [w, \psi]_x$ porque w es real. Es constante para $x \in [d, b)$ ya que w, ψ y φ son soluciones de $\tau_{\alpha,r,\theta}f = Ef$ en el intervalo $[d, b)$ porque x_{n_0} no intersecta $[d, b)$. Por hipótesis, las funciones φ y ψ satisfacen las condiciones de lcc en b. Esto implica que

   $$0 = [w, \psi]_b = \lim_{x\to b-} W_x(w, \psi) \qquad \text{y} \qquad 0 = [w, \varphi]_b = \lim_{x\to b-} W_x(w, \varphi)$$

   Por tanto $W_x(w, \psi) = W_x(w, \varphi) = 0$ y entonces $W_x(\varphi, \psi) = 0$. Así φ y ψ son linealmente dependientes y $\varphi = K\psi$ para alguna constante $K \in \mathbb{R}$ no cero. Por tanto, $\gamma = \gamma_0$. Ver Lema 4.2 en [4].

b) Supongamos ahora que $\tau_{\alpha,r,\theta}$ esta en el caso de punto límite en b. Si $\gamma_0 \neq \gamma$, entonces φ y ψ son linealmente independientes en $[d, b)$, ya que si existe una constante $K \in \mathbb{R}$ no cero tal que $\psi = K\varphi$ entonces $\gamma = \gamma_0$. Por tanto toda solución f de $\tau_{\alpha,r,\theta}f = Ef$ en $[d, b)$ puede ser escrita como $u = c_1\varphi + c_2\psi$. Pero, como $\varphi, \psi \in L^2(a, b)$, entonces $u \in L^2(a, b)$ y obtenemos una contradicción al caso de punto límite.

$\square$

Teorema 4.4.1. *Se tienen los siguientes casos:*

a) Si $\alpha = \alpha_0$ y $r = r_0$ son fijos, entonces $\{(\alpha_0, r_0, \theta) \in P(E)\}$ es vacío o contable.

b) Si $\alpha = \alpha_0$ y $\theta = \theta_0$ son fijos, entonces $\{(\alpha_0, r, \theta_0) \in P(E)\}$ tiene a lo más un elemento o $\{(\alpha_0, r, \theta_0) \in P(E)\} = \{\alpha_0\} \times (0, \infty) \times \{\theta_0\}$.

c) *Si* $r = r_0$ *and* $\theta = \theta_0$ *son fijos, entonces* $\{(\alpha, r_0, \theta_0) \in P(E)\}$ *tiene a lo más un elemento o* $\{(\alpha, r_0, \theta_0) \in P(E)\} = \mathbb{R} \times \{r_0\} \times \{\theta_0\}$.

Demostración.

$a)$ Supongamos que para alguna θ, $(\alpha_0, r_0, \theta) \in P(E)$. Entonces por Lema 4.4.1, $E \in \sigma_p(H^{\delta_0,\gamma_0}_{\alpha_0,r_0,\theta})$. Por Teorema 4.3.1 $a)$, esto implica que $(\alpha_0, r_0, \tilde{\theta}) \in P(E)$ si y sólo si $\tilde{\theta} = \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto el conjunto $\{(\alpha_0, r_0, \theta) \in P(E)\}$ es contable.

$b)$ Supongamos que para alguna r, $(\alpha_0, r, \theta_0) \in P(E)$. Entonces por Lema 4.4.1, $E \in \sigma_p(H^{\delta_0,\gamma_0}_{\alpha_0,r,\theta_0})$. Por Teorema 4.3.1 $b)$, se tiene que $(\alpha_0, \tilde{r}, \theta_0) \notin P(E)$, $\forall \tilde{r} \neq r$ o $(\alpha_0, \tilde{r}, \theta_0) \in P(E)$, $\forall \tilde{r} > 0$. Por tanto la afirmación se sigue.

c) Supongamos que para alguna α, $(\alpha, r_0, \theta_0) \in P(E)$. Entonces por Lema 4.4.1, $E \in \sigma_p(H^{\delta_0,\gamma_0}_{\alpha,r_0,\theta_0})$. Por Teorema 4.3.1 $c)$, se tiene que $(\tilde{\alpha}, r_0, \theta_0) \notin P(E)$, $\forall \tilde{\alpha} \neq \alpha$ o $(\tilde{\alpha}, r_0, \theta_0) \in P(E)$, $\forall \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$. Por tanto la afirmación se sigue.

□

Observación 4.4.3. *Observe que en* $b)$ *del Teorema 4.4.1, si el vector propio asociado a* E *es tal que* $u(x_{n_0}-) = \cos\theta_{n_0}$ *y* $u'(x_{n_0}-) = -\sin\theta_{n_0}$ *o* $u(x_{n_0}-) = \sin\theta_{n_0}$ *y* $u'(x_{n_0}-) = \cos\theta_{n_0}$*, entonces* $\{(\alpha_0, r, \theta_0) \in P(E)\} = \{\alpha_0\} \times (0, \infty) \times \{\theta_0\}$*, de otra forma* $\{(\alpha_0, r, \theta_0) \in P(E)\}$ *tiene a lo más un elemento. En el caso* $c)$ *del mismo Teorema, si el vector propio asociado a* E *es tal que* $u(x_{n_0}-) = \cos\theta_{n_0}$ *y* $u'(x_{n_0}-) = -\sin\theta_{n_0}$*, entonces* $\{(\alpha, r_0, \theta_0) \in P(E)\} = \mathbb{R} \times \{r_0\} \times \{\theta_0\}$*, de otra forma* $\{(\alpha, r_0, \theta_0) \in P(E)\}$ *tiene a lo más un elemento.*

4.5 Operadores Aleatorios de Sturm-Liouville con Interacciones Puntuales Generalizadas

En esta sección usaremos los resultados obtenidos previamente para estudiar el caso aleatorio. Primero el espacio de probabilidad Ω donde viven las sucesiones de constantes de acomplamiento será construido y entonces nuestros operadores aleatorios serán definidos.

El espacio de sucesiones real valuadas $\{\omega_n\}_{n\in\mathfrak{I}}$, donde $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{Z}$, será denotado por $\mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$. Introducimos una medida $\mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$ de la siguiente manera. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathfrak{I}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ y considere la medida producto $\mathbb{P} = \times_{n\in\mathfrak{I}} p_n$ definida sobre la σ-álgebra producto $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$ generada por los conjuntos cilindro, esto es, por los conjuntos de la forma $\{\omega : \omega(i_1) \in A_1, \ldots, \omega(i_n) \in A_n\}$ para $i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{I}$, donde $A_1, \ldots, A_n$ son los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$. De esta manera el espacio $\Omega = (\mathbb{R}^{\mathfrak{I}}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es construido. Ver Capitulo 1, Sección 1 en [21]. En algunos casos requeriremos que el espacio de medida Ω sea completo, i.e. subconjuntos de conjuntos de medida cero son medibles. Todo espacio de medida puede ser completado, ver Teorema 1.36 en [22].

Si fijamos R y Θ, y sea $\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$, denotaremos el operador $H_{\Lambda,R,\Theta}$ como H_Λ y análogamente H_R y H_Θ cuando los parámetros Λ y Θ o Λ y R esten fijos, respectivamente, ver Observación 4.4.2. Mas aún suponga que el caso de punto límite ocurre en a o que $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ es regular en a y las mismas posibilidades para b (ver Definición 4.4.8).

Sean $\Omega_1 = (\mathbb{R}^{\mathfrak{I}}, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$, $\Omega_2 = ((0,\infty)^{\mathfrak{I}}, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ y $\Omega_3 = (\mathbb{R}^{\mathfrak{I}}, \mathcal{F}_3, \mathbb{P}_3)$ espacios de probabilidad construidos como se describió arriba.

Definición 4.5.1. *Para cualquier $E \in \mathbb{R}$, definimos el conjunto*

$$P_{R,\Theta}(E) := \{\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}} : E \in \sigma_p(H_\Lambda)\}$$

$$P_{\Lambda,\Theta}(E) := \{R \in (0,\infty)^{\mathfrak{I}} : E \in \sigma_p(H_R)\}$$

$$P_{\Lambda,R}(E) := \{\Theta \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}} : E \in \sigma_p(H_\Theta)\}$$

Se probara el siguiente Teorema. Recuerde que una medida continua p es una medida tal que $p(\{x\}) = 0$, para cualquier punto x.

Teorema 4.5.1. *Supongamos que Ω_1 es completo y $\mathbb{P}_1 = \times_{n\in I} p_n$ es tal que p_n son medidas continuas para toda $n \in I$. Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y $B \subset P_{R,\Theta}(E)$, para cualquier conjunto medible $B \in \mathcal{F}_1$. Entonces una de las siguientes se cumple:*

$i)$ $\mathbb{P}_1(B) = 0$

$ii)$ $P_{R,\Theta}(E) = \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$

Observación 4.5.1. *Se mostrará que en algunos casos siempre existe un conjunto de interacciones puntuales M donde $ii)$ ocurre. Ver Teorema 4.5.5 abajo.*

Observación 4.5.2. *Un resultado análogo se cumple para $P_{\Lambda,\Theta}(E)$: $\mathbb{P}_2(B) = 0$ o $P_{\Lambda,\Theta}(E) = (0,\infty)^{\mathfrak{I}}$.*

Antes de probar el Teorema 4.5.1 probaremos el siguiente Lema, donde la definición 4.1.1 es usada.

Lema 4.5.1. *Para cualquier conjunto medible $B \subseteq P_{R,\Theta}$ y cualquier $n \in \mathfrak{I}$, sea*

$$Q_{n,E} := \{\Lambda \in B : \exists u_\Lambda \in D(H_\Lambda)\backslash\{0\},\ H_\Lambda u_\Lambda = E u_\Lambda \text{ y } [(u_\Lambda(x_n-), u'_\Lambda(x_n-))^T] \neq [(\cos\theta_n, -\sin\theta_n)^T]\}.$$

Entonces $Q_{n,E}$ es medible y $\mathbb{P}_1(Q_{n,E}) = 0$.

Demostración.
Sea

$$\chi_B(\Lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda \in B, \\ 0 & \text{si } \Lambda \notin B. \end{cases}$$

Si $\Lambda \in Q_{n,E}$, entonces de la definición de $Q_{n,E}$ se sigue que $\chi_B(\Lambda) = 1$.

Sea $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{I}\backslash\{n\}} \to [0, \infty)$ definida por

$$f(\tilde{\Lambda}) := \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\Lambda)\, dp_n(\Lambda(n)),$$

donde $\tilde{\Lambda} = \sum_{k \in \mathfrak{I}\backslash\{n\}} \Lambda(k)e(k)$. Aquí $e(k) = (e_m)_{m \in \mathfrak{I}}$ son los vectores canónicos con entradas $e_m = 0$ si $k \neq m$ y $e_k = 1$. La medibilidad de f se sigue del Teorema de Fubini. (Ver [22, Theorem 7.8].)
Si $\Lambda = \sum_{k \in \mathfrak{I}} \Lambda(k)e(k) \in Q_{n,E}$, entonces $f(\tilde{\Lambda}) = 0$, donde $\tilde{\Lambda} = \sum_{k \in \mathfrak{I}\backslash\{n\}} \Lambda(k)e(k)$. Esto se sigue de la Observación 4.4.3 ya que p_n es continua.

Por tanto $Q_{n,E} \subseteq [f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}] \cap B$.

Ahora, usando Fubini,

$$\int_{f^{-1}(\{0\})\times\mathbb{R}} \chi_B(\Lambda)\, d\mathbb{P}_1 = \int_{f^{-1}(\{0\})} d\mathbb{P}_1(\tilde{\Lambda}) \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\Lambda)\, dp_n(\Lambda(n)) = \int_{f^{-1}(\{0\})} f(\tilde{\Lambda})\, d\mathbb{P}_1(\tilde{\Lambda}) = 0.$$

Entonces,

$$\int_{[f^{-1}(\{0\})\times\mathbb{R}]\cap B} \chi_B(\Lambda)\, d\mathbb{P}_1 = 0,$$

y ya que $\chi_B(\Lambda) = 1$ en B, tenemos que $\mathbb{P}_1([f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}] \cap B) = 0$.

Como la medida $d\mathbb{P}_1$ es completa, cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero es medible con medida cero. Por tanto $Q_{n,E}$ es medible.

$\square$

Demostración. [Prueba del Teorema 4.5.1]
Basta probar que si $ii)$ no se cumple, entonces $i)$ se cumple.

Supongamos que existe $\Lambda_0 \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$ tal que E no es valor propio de H_{Λ_0}.

Si E no es valor propio de H_Λ para toda $\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$, entonces $\mathbb{P}_1(B) = 0$ y el resultado se sigue.

Supongamos ahora que $\Lambda \in B$, entonces $E \in \sigma_p(H_\Lambda)$, i.e. existe $u_\Lambda \in D(H_\Lambda)\backslash\{0\}$ tal que $H_\Lambda u_\Lambda = E u_\Lambda$. Entonces $\Lambda \in Q_{n,E}$ para alguna $n \in \mathfrak{I}$. Esto se sigue ya que si $[(u_\Lambda(x_n-), u'_\Lambda(x_n-))^T] =$

$[(\cos\theta_n, -\sin\theta_n)^T]$ para toda $n \in \mathfrak{I}$, entonces existe $c_n \in \mathbb{R}$ tal que $(u(x_n-), u'(x_n-))^T = c_n(\cos\theta, -\sin\theta)$, por tanto

$$A_{\Lambda(n),r_n,\theta_n}\begin{pmatrix} u(x_n-) \\ u'(x_n-) \end{pmatrix} = A_{\Lambda(n),r_n,\theta_n} c_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n \\ -\sin\theta_n \end{pmatrix} = c_n r_n \begin{pmatrix} 1 & \Lambda(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_n r_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el lado derecho no depende de Λ, de la definición de H_Λ, E debe ser valor propio de H_Λ para toda $\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$, en particular E es valor propio de H_{Λ_0}, cf. prueba del Teorema 4.3.1 c), lo cual no es posible por nuestra hipótesis inicial. Por tanto

$$B \subset \bigcup_{n\in I} Q_{n,E},$$

donde $Q_{n,E}$ fue definido en Lema 4.5.1. Usando ese lema obtenemos que $\mathbb{P}_1(\bigcup_{n\in\mathfrak{I}} Q_n) = 0$. Por tanto, el resultado se sigue. □

Observación 4.5.3. *Si $\tau_{\Lambda,R,\Theta}$ esta en el lcc en b debemos suponer que es regular en b, de otra manera no podemos asegurar que la función u_Λ en la prueba del Teorema 3.3.1 satisface las condiciones de frontera en b para toda $\Lambda(n)$, y lo mismo para el extremo a.*

Teorema 4.5.2. *Suponga que $\mathbb{P}_3 = \times_{n\in\mathfrak{I}} q_n$ es tal que q_{n_0} es una medida continua para algún $n_0 \in \mathfrak{I}$. Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y sea B subconjunto medible de $P_{\Lambda,R}(E)$. Entonces $\mathbb{P}_3(B) = 0$.*

Demostración.
Sea

$$\chi_B(\Theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Theta \in B, \\ 0 & \text{if } \Theta \notin B, \end{cases}$$

y definamos $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{I}\setminus\{n_0\}} \to [0,\infty)$ como

$$f(\tilde{\Theta}) := \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\Theta)\, dq_{n_0}(\Theta(n_0)),$$

donde $\tilde{\Theta} = \sum_{k\in\mathfrak{I}\setminus\{n_0\}} \Theta(k)e(k)$. Aquí $e(k) = (e_m)_{m\in\mathfrak{I}}$ son los vectores canónicos con entradas $e_m = 0$ si $k \neq m$ y $e_k = 1$. La medibilidad de f se sigue del Teorema de Fubini. (Ver [22, Teorema 7.8].)
Si $\Theta = \sum_{k\in\mathfrak{I}} \Theta(k)e(k) \in B$, entonces $f(\tilde{\Theta}) = 0$, donde $\tilde{\Theta} = \sum_{k\in\mathfrak{I}\setminus\{n\}} \Theta(k)e(k)$. Esto se sigue del Teorema 4.4.1 ya que q_{n_0} es continua.

Por tanto $B \subseteq [f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}]$.

Ahora, usando Fubini,

$$\int_{f^{-1}(\{0\})\times\mathbb{R}} \chi_B(\Theta)\, d\mathbb{P}_3 = \int_{f^{-1}(\{0\})} d\mathbb{P}_3(\tilde{\Theta}) \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\Theta)\, dq_{n_0}(\Theta(n_0)) = \int_{f^{-1}(\{0\})} f(\tilde{\Theta})\, d\mathbb{P}_3(\tilde{\Theta}) = 0.$$

Entonces, $\mathbb{P}_3([f^{-1}(\{0\}) \times \mathbb{R}]) = 0$. Por tanto, $\mathbb{P}_3(B) = 0$.

□

Definición 4.5.2. *Para cualquier $E \in \mathbb{R}$, definimos*

$$P(E) := \{(\Lambda, R, \Theta) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 : E \in \sigma_p(H_{\Lambda,R,\Theta})\}.$$

En los siguientes Teoremas, la hipótesis de Medibilidad de el conjunto $P(E)$ es crucial. Esta suposición puede ser satisfecha por ejemplo, si suponemos que los operadores $H_{\Lambda,R,\Theta}$ son medibles. Ver Teorema 3.3.6.

Teorema 4.5.3. *Supongamos que $\mathbb{P}_3 = \times_{n\in\mathfrak{I}} q_n$ es tal que q_{n_0} es una medida continua para algún $n_0 \in \mathfrak{I}$. Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y supongamos que $P(E)$ es medible. Sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_3$. Entonces,*

$$\mathbb{P}(P(E)) = 0.$$

Demostración.
Sea

$$\chi_{P(E)}(\Lambda, R, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\Lambda, R, \Theta) \in P(E), \\ 0 & \text{if } (\Lambda, R, \Theta) \notin P(E). \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(P(E)) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3} \chi_{P(E)}(\Lambda, R, \Theta)\, d\mathbb{P}.$$

Usando Fubini, se tiene que

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3} \chi_{P(E)}(\Lambda, R, \Theta)\, d\mathbb{P} = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} d\mathbb{P}_1 \times d\mathbb{P}_2 \int_{\Omega_3} \chi_{P_{\Lambda,R}(E)}(\Theta)\, d\mathbb{P}_3(\Theta),$$

donde $P_{\Lambda,R}(E)$ es como en la Definición 4.5.1.
Note que

$$\int_{\Omega_3} \chi_{P_{\Lambda,R}(E)}(\Theta)\, d\mathbb{P}_3(\Theta) = \mathbb{P}_3(P_{\Lambda,R}(E)),$$

y que el Teorema 4.5.2 da que $\mathbb{P}_3(P_{R,\Theta}(E)) = 0$. Así, el Teorema se sigue.

□

Teorema 4.5.4. *Suponga que Ω_1 es completo y que $\mathbb{P}_1 = \times_{n\in\mathfrak{I}} p_n$ es tal que p_n son medidas continuas para toda $n \in \mathfrak{I}$. Sea $E \in \mathbb{R}$ fijo y suponga que $P(E)$ es medible. Sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_3$. Entonces una de las siguientes se cumple*

$i)$ $\mathbb{P}(P(E)) = 0$,

$ii)$ $\mathbb{P}(P(E)) = 1$.

Proof. Sea

$$\chi_{P(E)}(\Lambda, R, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\Lambda, R, \Theta) \in P(E), \\ 0 & \text{si } (\Lambda, R, \Theta) \notin P(E). \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(P(E)) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3} \chi_{P(E)}(\Lambda, R, \Theta)\, d\mathbb{P}.$$

Usando Fubini, se tiene que

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3} \chi_{P(E)}(\Lambda, R, \Theta)\, d\mathbb{P} = \int_{\Omega_2\times\Omega_3} d\mathbb{P}_2 \times d\mathbb{P}_3 \int_{\Omega_1} \chi_{P_{R,\Theta}(E)}(\Lambda)\, d\mathbb{P}_1(\Lambda),$$

donde $P_{R,\Theta}(E)$ es como en la Definición 4.5.1. Como

$$\int_\Omega \chi_{P_{R,\Theta}(E)}(\Lambda)\, d\mathbb{P}(\Lambda) = \mathbb{P}(P_{R,\Theta}(E)),$$

usando el Teorema 3.3.1 concluimos que $\mathbb{P}(P_{R,\Theta}(E)) = 0$ o $\mathbb{P}(P_{R,\Theta}(E)) = 1$. Por tanto, se sigue el Teorema. $\square$

Observación 4.5.4. *Un resultado análogo se cumple si suponemos que Ω_2, en lugar de Ω_1, satisface las hipótesis del Teorema.*

4.5.1 Oscilación de Soluciones

El siguiente resultado, Teorema 4.5.5, muestra que siempre es posible construir un conjunto de interacciones puntuales M tal que la opción $ii)$ en el Teorema 3.3.1 ocurre.
Sea $H = H_{\Lambda,R,\Theta}$ con $\Lambda = \{0\}_{n\in\mathfrak{I}}$, $R = \{1\}_{n\in\mathfrak{I}}$ y $\Theta = \{0\}_{n\in\mathfrak{I}}$ el operador no perturbado. Este operador no depende de M ni $\mathfrak{I}$, y corresponde al operador autoadjunto sin interacciones. Las matrices introducidas en la Definición 4.4.1 ahora son matrices identidad, esto es

$$A_{\alpha_n,r_n,\theta_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definamos

$$\varphi(x) := arg(u'(x) + iu(x)) \qquad\qquad x \in (a,b).$$

Los ceros de la solución u estan dados por los valores de x tales que $\varphi(x) = k\pi$ para algún entero k. $(\tau - E)u = 0$ es oscilatoria en b si y sólo si $\varphi(x) \to \infty$ cuando $x \to b$; Ver la Definición 3.3.2 y [14, p.9].

Lema 4.5.2. *Dados dos ceros consecutivos $t_1, t_2 \in (a,b)$ de una solución u de $(\tau - E)u = 0$ y un vector dado $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$, existe un punto $x_0 \in [t_1, t_2)$ tal que*

$$\left[\begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right].$$

Demostración.
Como t_1 y t_2 son ceros de la solución u, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $\varphi(t_1) = k_1\pi$ y $\varphi(t_2) = k_2\pi$. Como φ no puede tender a un multiplo de π por arriba, ver [3, Teorema 8.4.3 $ii)$], se tiene que $k_2 = k_1 + 1$. Como φ es continua, existe $x_0 \in [t_1, t_2)$ tal que

$$\arg(u'(x_0) + iu(x_0)) = \arg(v_2 + iv_1).$$

Por tanto, de la Observación 4.1.1,

$$\left[\begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right].$$

$\square$

Teorema 4.5.5. *Sean $(\tau - E)u = 0$ oscilatoria en (a,b), $-\infty \le a < b \le \infty$, $E \in \sigma_p(H)$ y los ceros de u tal que no se acumulan en algún punto interior de (a,b). Fijemos $R = \{r_n\}_{n\in\mathfrak{I}}$ y $\Theta = \{\theta_n\}_{n\in\mathfrak{I}}$, donde $\mathfrak{I}$ es finito o $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$. Entonces existe $M \subset \mathbb{R}$ discreto tal que $P_{R,\Theta}(E) = \mathbb{R}^I$.*

Demostración.
Sea $Hu = Eu$.
Supongamos que $\mathfrak{I}$ es finito, $\mathfrak{I} = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$, y $\Theta = \{\theta_{n_1}, \ldots, \theta_{n_r}\}$. Sean $t_0, t_1, \ldots, t_r$, $r+1$ ceros consecutivos de u. Para $n_i \in \mathfrak{I}$, sea x_{n_i} tal que $x_{n_i} \in [t_{i-1}, t_i)$ y

$$\left[\begin{pmatrix} u(x_{n_i}) \\ u'(x_{n_i}) \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta_{n_i} \\ -\sin\theta_{n_i} \end{pmatrix}\right].$$

Por el Lema 4.5.2, tal x_{n_i} existe. Sea $M = \{x_{n_i}\}_{i=1}^r$ y tomemos $A_{\alpha_{n_i}, r_{n_i}, \theta_{n_i}} = P_{\alpha_{n_i}} H_{r_{n_i}} E_{\theta_{n_i}}$ como en la Definición 4.4.1, para toda $n_i \in \mathfrak{I}$. Entonces,

$$A_{\alpha_{n_i}, r_{n_i}, \theta_{n_i}} \begin{pmatrix} u(x_{n_i}-) \\ u'(x_{n_i}-) \end{pmatrix} = A_{\alpha_{n_i}, r_{n_i}, \theta_{n_i}} \begin{pmatrix} \cos\theta_{n_i} \\ -\sin\theta_{n_i} \end{pmatrix} = r_{n_i} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{n_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{n_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la definición de H_Λ, E debe ser un valor propio de H_Λ para toda $\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$, y por tanto $P_{R,\Theta}(E) = \mathbb{R}^I$.
Supongamos ahora que $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$. Asumamos que existen infinitos ceros de u, enumerados de forma ascendente por $t_0, t_1, \ldots$. Sean $\Theta = \{\theta_n\}_{n \in \mathfrak{I}}$ y x_1 tal que $x_1 \in [t_0, t_1)$ y

$$\left[\begin{pmatrix} u(x_1) \\ u'(x_1) \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \end{pmatrix}\right].$$

Como arriba, sea x_2 tal que $x_2 \in [t_1, t_2)$ y

$$\left[\begin{pmatrix} u(x_2) \\ u'(x_2) \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ -\sin\theta_2 \end{pmatrix}\right].$$

De esta manera obtenemos una sucesión $M := \{x_n\}_{n \in \mathfrak{I}}$. Tomemos $A_{\alpha_n, r_n, \theta_n} = P_{\alpha_n} H_r E_{\theta_n}$ como en la Definición 4.4.1. Entonces,

$$A_{\alpha_n, r_n, \theta_n} \begin{pmatrix} u(x_n-) \\ u'(x_n-) \end{pmatrix} = A_{\alpha_n, r_n, \theta_n} \begin{pmatrix} \cos\theta_n \\ -\sin\theta_n \end{pmatrix} = r_n \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la definición de H_Λ, E debe ser valor propio de H_Λ para toda $\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$, y por tanto $P_{R,\Theta}(E) = \mathbb{R}^{\mathfrak{I}}$.
$\square$

Apéndices

APÉNDICE A

Funciones Absolutamente Continuas

Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y conexo. Sea $C_0^\infty(U)$ el espacio de funciones infinitamene diferenciables en U con soporte compacto, a este espacio se le conoce como el espacio de funciones de prueba.

Definición A.0.1. *Suponga $u, v \in L^1_{loc}(U)$. Decimos que v es la derivada débil de u. si*

$$\int_U u\phi' dx = -\int_U v\phi dx$$

Para toda función de prueba $\phi \in C_0^\infty(U)$.

Es decir, si dada una función u sucede que existe una función v que cumple la igualdad para toda ϕ , decimos que u tiene derivada débil.

Definición A.0.2. *El espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ consiste de todas las funciones $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrables tales que para cada α, $\alpha \leq k$, la $\alpha-$ésima derivada débil de u existe y pertenece a $L^p(U)$.*

Lema A.0.1. *Si $u : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es débilmente diferenciable y $u' = 0$. Entonces u es constante.*

Demostración.
La condición de que la derivada débil de u sea cero significa que

$$\int_a^b u\phi dx = 0 \qquad\qquad \forall \phi \in C_0^\infty(a, b)$$

Elegimos una función de prueba $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ tal que su integral sea uno. Podemos representar cualquier $\phi \in C_0^\infty(a, b)$ como

$$\phi = A\varphi + \psi'$$

donde $A \in \mathbb{R}$ y $\psi \in C_0^\infty(a, b)$ dados por

$$A = \int_a^b \phi dx, \qquad\qquad \psi(x) = \int_a^x [\phi(t) - A\varphi(t)]dt$$

Entonces,

$$\int_a^b u\phi dx = \int_a^b u[A\varphi + \psi']dx = A\int_a^b u\varphi dx + \int_a^b u\psi' dx = A\int_a^b u\varphi dx =$$

$$= c\int_a^b \phi dx. \qquad \text{con} \qquad c = \int_a^b u\varphi dx.$$

De aquí que

$$\int_a^b (u - c)\phi dx = 0, \qquad\qquad \forall \phi \in C_0^\infty(a, b)$$

Así $f = c$ puntualmente a.e. Entonces f es equivalente a una función constante.

□

Teorema A.0.1. *$u \in W^{1,p}(a, b)$ si y sólo si u es igual a una función absolutamente continua a.e. cuya derivada ordinaria (que existe a.e.) esta en $L^p(a, b)$.*

Demostración.
Sea $u \in W^{1,p}(a,b)$. Por definición, existe u', la derivada débil de u, y $u' \in L^p(a,b)$. Más aún, por la desigualdad de Hölder, $u' \in L^1(a,b)$. Entonces la función $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x u'(t)dt$$

está bien definida.

Más aún F es absolutamente continua, entonces por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que existe su derivada ordinaria F' a.e. y es igual a u' y que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

Basta probar que $u = F$ a.e. en (a,b). Para esto, sea $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, tenemos

$$\int_a^b F\varphi' dx = -\int_a^b F'\varphi dx = -\int_a^b u'\varphi dx = \int_a^b u\varphi' dx$$

Así, $\forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$,

$$\int_a^b (F-u)\varphi' dx = 0$$

Por lema A.0.1, existe constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F - u = C$ a.e, es decir $u(x) = F(x) + C$ para a.e $x \in (a,b)$.

Por tanto, la derivada ordinaria de u existe y $u' \in L^p(a,b)$.

□

En el teorema anterior se prueba que u es débilmente diferenciable si y sólo si u es absolutamente continua. Y en ese caso $u' = v$.
Denotemos por $AC(a,b)$ el espacio de funciones absolutamente continuas definidas en (a,b) . Estas son precisamente las funciones f que pueden ser escritas en la forma

$$f(x) = f(c) + \int_c^x h(t)dt, \qquad x \in (a,b)$$

donde $h \in L^1_{Loc}(a,b)$ y la integral se lee como

$$\textstyle\int_c^x h(t)dt \quad = \quad \begin{cases} \int_{[c,x)} h(t)dt & \text{if } x > c \\ 0 & \text{if } x = c \\ -\int_{[x,c)} h(t)dt & \text{if } x < c \end{cases}$$

Observación A.0.1. *Toda función $f \in AC(a,b)$ es de variación acotada y por tanto los lḿites*

$$f(x+) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x+\epsilon) \qquad y \qquad f(x-) = \lim_{\epsilon \uparrow 0} f(x+\epsilon)$$

existen. Ver, por ejemplo, Sección 8.15 en [22].

Bibliografía

[1] S. Albeverio, L. Dąbrowski, and P. Kurasov. Symmetries of Schrödinger operators with point interactions. *Lett. Math. Phys.*, 45(1):33–47, 1998.

[2] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hø egh Krohn, and H. Holden. *Solvable models in quantum mechanics*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2005. With an appendix by Pavel Exner.

[3] F. V. Atkinson. *Discrete and continuous boundary problems*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8. Academic Press, New York-London, 1964.

[4] D. Buschmann, G. Stolz, and J. Weidmann. One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions. *J. Reine Angew. Math.*, 467:169–186, 1995.

[5] Carol Shubin Christ and Günter Stolz. Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions. *J. Math. Anal. Appl.*, 184(3):491–516, 1994.

[6] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, study edition, 1987.

[7] David Damanik, Rafael del Rio, and Asaf L. Franco. Random sturm-liouville operators with generalized point interactions. to appear in operator en matrices, 2019.

[8] Rafael del Rio. Random Sturm-Liouville operators. *Appl. Math. Lett.*, 24(2):179–183, 2011.

[9] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

[10] W. N. Everitt, C. Shubin, G. Stolz, and A. Zettl. Sturm-Liouville problems with an infinite number of interior singularities. In *Spectral theory and computational methods of Sturm-Liouville problems (Knoxville, TN, 1996)*, volume 191 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 211–249. Dekker, New York, 1997.

[11] R.G. Gallager. *Stochastic Processes: Theory for Applications*. Stochastic Processes: Theory for Applications. Cambridge University Press, 2013.

[12] F. Gesztesy and W. Kirsch. One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a discrete set. *J. Reine Angew. Math.*, 362:28–50, 1985.

[13] Philip Hartman. *Ordinary differential equations*. Birkhäuser, Boston, Mass., second edition, 1982.

[14] Don Hinton. Sturm's 1836 oscillation results evolution of the theory. In *Sturm-Liouville theory*, pages 1–27. Birkhäuser, Basel, 2005.

[15] W. Kirsch and F. Martinelli. On the ergodic properties of the spectrum of general random operators. *J. Reine Angew. Math.*, 334:141–156, 1982.

[16] Werner Kirsch. Random Schrödinger operators. A course. In *Schrödinger operators (Sønderborg, 1988)*, volume 345 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 264–370. Springer, Berlin, 1989.

[17] Serge Lang. $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, volume 105 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985. Reprint of the 1975 edition.

[18] M. A. Naĭmark. *Linear differential operators. Part II: Linear differential operators in Hilbert space*. With additional material by the author, and a supplement by V. È. Ljance. Translated from the Russian by E. R. Dawson. English translation edited by W. N. Everitt. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1968.

[19] Konstantin Pankrashkin. Resolvents of self-adjoint extensions with mixed boundary conditions. *Rep. Math. Phys.*, 58(2):207–221, 2006.

[20] L. A. Pastur. Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. *Comm. Math. Phys.*, 75(2):179–196, 1980.

[21] Leonid Pastur and Alexander Figotin. *Spectra of random and almost-periodic operators*, volume 297 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[22] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966.

[23] Peter Stollmann. *Caught by disorder*, volume 20 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. Bound states in random media.

[24] Gerald Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*, volume 99 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With applications to Schrödinger operators.

[25] P. Šeba. The generalized point interaction in one dimension. *Czechoslovak J. Phys. B*, 36(6):667–673, 1986.

[26] Aiping Wang and Anton Zettl. Eigenvalues of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary conditions. *Electron. J. Differential Equations*, pages Paper No. 127, 27, 2017.

[27] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 2: Anwendungen*. Lineare Operatoren in Hilberträumen. Vieweg+Teubner Verlag, 2003.

[28] Joachim Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.

[29] Anton Zettl. *Sturm-Liouville theory*, volume 121 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[30] J. Zorbas. Perturbation of selfadjoint operators by dirac distributions. *Journal of Mathematical Physics*, 21(4):840–847, 1980.