



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS QUÍMICAS

DINÁMICA DEL ENREDAMIENTO EN MODELOS DE INTERACCIÓN RADIACIÓN-MATERIA

TESIS

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA

Química Alejandra del Río Lima

Dr. Octavio Castaños Garza
Instituto de Ciencias Nucleares

Ciudad de México, julio 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS QUÍMICAS

**DINÁMICA DEL ENREDAMIENTO EN MODELOS DE INTERACCIÓN
RADIACIÓN-MATERIA**

**TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE**

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA

Química ALEJANDRA DEL RÍO LIMA



Ciudad de México, México; julio 2020

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE: Dr. Renato Lemus Casillas

VOCAL: Dr. José Francisco Récamier Angelini

VOCAL: Dr. Luis Emilio Orgaz Baqué

VOCAL: Dr. Tomás Rocha Rinza

SECRETARIO: Dr. José Eduardo Barrios Vargas

SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:

Departamento de Estructura de la Materia.

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.

ASESOR DEL TEMA:

Dr. Octavio Castaños Garza

SUSTENTANTE:

Q. Alejandra del Río Lima

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo financiero otorgado a través del programa de Becas Nacionales para Estudio de Posgrado, número de CVU 868202.

Al programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Químicas de la UNAM por la formación académica y por las oportunidades brindadas.

Al Dr. Octavio Castaños Garza por el todo el apoyo, dedicación y paciencia al dirigir la presente tesis. Mi completa admiración y respeto hacia él, como científico y como ser humano.

A los miembros del jurado por sus comentarios y observaciones realizadas, así como por el tiempo dedicado.

A mi mamá y hermano Gus, por todo el cariño y apoyo en mis decisiones. Quisiera que fueran más los momentos que pasemos juntos. A mi papá, por la paz y las enseñanzas que me trae su recuerdo.

A mis amigos Isaac, Felipe y a mis compañeros de maestría, a quienes admiro por la dedicación en su trabajo y con quienes comparto un mismo sueño.

A Joce y Andrés, amigos que el tiempo me ha dejado y que me gustaría siempre tener. A mis amigos del Instituto de Química, por hacerme reír y recibirme con alegría.

A quien compartió tiempo, cariño y metas conmigo, sin importar el tiempo que haya sido.

A mis nuevos amigos del Instituto de Física, a quienes comencé a admirar desde un inicio y, sin saberlo, me motivan a seguir aprendiendo y mejorando.

Índice general

1. Introducción	7
2. Cuantización del campo electromagnético	10
2.1. Segunda Cuantización	10
2.2. Cuantización de un campo multimodal	13
2.3. Operadores de cuadratura de amplitud	18
2.4. Campo Térmico	19
3. Emisión y Absorción de un átomo de dos niveles	21
3.1. Aproximación del dipolo	21
3.2. Transiciones electrónicas en un átomo de dos niveles	23
3.3. Hamiltoniano de interacción	27
3.3.1. Átomo efectivo de dos niveles	27
3.3.2. Campo clásico	28
3.3.3. Campo cuantizado	29
3.4. Modelo de Jaynes-Cummings	29
3.5. Modelo de Jaynes-Cummings generalizado	31
3.6. Realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings	31
4. Estados cuánticos de la luz	34
4.1. Estados de Fock	35
4.2. Estados Coherentes	37
4.2.1. Estadística de los estados coherentes	41
4.3. Estados Coherentes de $SU(1, 1)$	43
4.3.1. Estados Comprimidos de un modo	45
4.3.2. Estados comprimidos de dos modos	47
4.4. Funciones de distribución de cuasiprobabilidad	47
4.4.1. Función de Wigner	49
4.4.2. Función de Husimi	51

5. Evolución temporal	54
5.1. Enredamiento en sistemas bipartitas puros y correlaciones	54
5.1.1. Matriz de densidad	55
5.1.2. Matrices de densidad reducida del campo y de la materia	57
5.1.3. Entropía lineal y de Von Newmann	57
5.1.4. Autocorrelación	59
5.1.5. Decoherencia	59
5.2. Esquema de Schrödinger	60
5.2.1. Campo electromagnético de un modo	60
5.2.2. Campo electromagnético de dos modos	60
5.3. Esquema de Dirac	61
5.4. Resultados	64
5.4.1. Estados de Fock	65
5.4.2. Estado Coherentes de Glauber	73
5.4.3. Estados coherentes del grupo $SU(1,1)$ de un modo	80
5.4.4. Estados coherentes del grupo $SU(1,1)$ de dos modos	85
6. Ingeniería de Estados Cuánticos	90
6.1. Preparación de estados cuánticos	90
6.1.1. Estados de gato	92
6.1.2. Combinación finita de estados de Fock	96
7. Conclusiones	103
Appendix	106
A.1. Operador de evolución temporal	106
A.2. Función Auxiliar de Moyal	107

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo de la *teoría de la información cuántica* [1] ha traído consigo una nueva forma de procesar, almacenar y transmitir información a través de procesos físicos que utilizan el enredamiento cuántico como un recurso. La teleportación y criptografía cuántica son ejemplos de éstos [2].

Un área de investigación que también implementa procesos cuánticos para su desarrollo, es la construcción de computadoras cuánticas [3–5]. A diferencia de las computadoras clásicas que utilizan *bits* como unidad binaria fundamental, las computadoras cuánticas se construyen en base a *qubits*, los cuales son sistemas cuánticos de dos niveles que permiten la superposición coherente de sus dos estados que representan los valores 0 y 1.

Al presentar enredamiento y superposición de estados, las computadoras cuánticas consiguen un alto grado de paralelismo que aumenta exponencialmente su velocidad computacional [2]. Debido al alto impacto que pueden traer al desarrollo de la tecnología, actualmente su construcción es un área muy activa de investigación.

Así, existen diferentes propuestas de sistemas cuánticos como posibles candidatos para generar *qubits*. En todos los casos, se busca la presencia de enredamiento entre los *qubits* y entre un transmisor que lleva la información. Sin embargo, uno de los mayores retos que presenta la implementación de estos sistemas es la decoherencia. Éste es un proceso en el que los estados cuánticos de los qubits se modifican por la interacción con el ambiente [3]. Esta modificación en los estados ocasiona una pérdida de la información que se ve reflejada en que el sistema pasa de un estado puro a un estado mixto, como se discute en el capítulo 5.

Entre las propuestas para la construcción de *qubits*, se encuentran circuitos superconductores [6, 7], fotones individuales con dos posibles polarizaciones [8] y semiconductores ópticos [9, 10] y eléctricos [11]. También, existe la propuesta del uso de átomos confinados, donde pueden ser implementados iones [12–20] o átomos neutros en interacción con un campo electromagnético dentro de una cavidad [21, 22]. Aunque su desarrollo experimental es distinto, ya que se utilizan diferentes procedimientos para confinar a los átomos neutros y a los iones,

su interacción con el campo está descrita por el mismo modelo; conocido como modelo de Jaynes-Cummings y que es abordado en este trabajo.

Debido a la importancia del enredamiento como un recurso con aplicaciones en información cuántica, en este trabajo se aborda el estudio teórico de la interacción y del enredamiento entre un átomo de dos niveles y un campo electromagnético de uno y dos modos, en diferentes estados cuantizados de la luz.

Se comienza en el capítulo 2 introduciendo la notación de segunda cuantización, la cual es útil para la descripción cuántica de la luz y es implementada durante todo el trabajo. En este mismo capítulo, se realiza la cuantización del campo electromagnético que implica que éste puede ser descrito como una combinación lineal de osciladores armónicos desacoplados que tienen asociada una frecuencia y dos polarizaciones independientes.

En el capítulo 3 se presentan los modelos semi-clásicos y cuánticos que describen la interacción radiación-materia. De principal importancia en este trabajo son el modelo de Jaynes-Cummings y su modelo generalizado, los cuales consideran la aproximación dipolar y de onda rotante. A pesar de que el modelo de Jaynes-Cummings, es el modelo más sencillo en el estudio de la interacción materia-campo, el desarrollo tecnológico de láseres y cavidades ópticas ha permitido su realización experimental y con ello importantes avances en la óptica cuántica, como son el estudio de la emisión espontánea, la evidencia de la cuantización del campo y el estudio de las propiedades no clásicas de la luz. Asimismo, este modelo es el punto de partida para la descripción de sistemas más complejos que consideren la interacción entre un número múltiple de modos y átomos [23, 24].

Posteriormente, en el capítulo 4 se presentan las definiciones y propiedades de los estados cuánticos de la luz considerados en la interacción con el átomo. Éstos son: estados de Fock, estados coherentes de Glauber y estados coherentes SU(1,1) de uno y dos modos. Asimismo, se introduce brevemente el formalismo en el espacio fase de la mecánica cuántica. Su descripción de un sistema cuántico es completa ya que pueden calcularse todas las observables que el esquema de Schrödinger permite obtener. En este formalismo la función de onda se reemplaza por funciones de distribución de cuasi-probabilidad¹ que dependen de las posiciones y momentos y nos permitirán ilustrar el comportamiento del campo electromagnético antes y después de la interacción con el átomo.

En el capítulo 5 se muestran los resultados del estudio de la dinámica de la interacción átomo-campo. Al tratarse de un sistema bipartita puro, la medición del enredamiento entre los dos sistemas se realiza a través del cálculo de la entropía de Von Neumann y la entropía lineal en función del tiempo. También, se investiga la dependencia temporal de las probabilidades de ocupación, y las funciones de Autocorrelación y Coherencia, y principalmente sus correlaciones con el enredamiento entre la materia y el campo. Las funciones de distribución de cuasi-probabilidad de Wigner y Husimi son calculadas y se analiza el comportamiento cuántico en el espacio fase de los estados de la luz de uno y dos modos.

¹No son funciones de probabilidad porque pueden tomar valores negativos.

Los resultados obtenidos muestran el efecto que tienen el parámetro de desintonía y el número promedio de fotones en la cavidad sobre el enredamiento. Asimismo, utilizando el comportamiento de las probabilidades ocupacionales del átomo y de las funciones de autocorrelación y coherencia, se describen las condiciones en las que el enredamiento toma su valor máximo. Por otro lado, las funciones de cuasi-distribución de probabilidad nos permiten encontrar los estados con un comportamiento más cuántico (aquellos en los que la función de Wigner toma valores negativos y el área que ocupa la función de Husimi es grande²).

En el capítulo 6, se utiliza el enredamiento como un recurso para la construcción de estados específicos de la luz. Se muestran los procedimientos necesarios para generar un estado formado por la superposición coherente y finita de estados de Fock, así como un estado formado por la superposición de dos estados coherentes, conocidos como *estados de gato*. Estos estados cuánticos de la luz son utilizados en diversos experimentos de óptica cuántica.

Finalmente, el capítulo 7 contiene un resumen de las contribuciones más importantes de este trabajo.

²Recordar que el estado coherente de la luz es el que ocupa un área mínima en el espacio fase y que en este trabajo la normalizamos a la unidad.

Capítulo 2

Cuantización del campo electromagnético

2.1. Segunda Cuantización

Los problemas de muchos cuerpos aparecen en todas las áreas de la física atómica, molecular, y nuclear. La interacción entre las N partículas que conforman el sistema se escriben en términos de interacciones de una y dos partículas. Así, un Hamiltoniano de uno y dos cuerpos se puede escribir como

$$H = \sum_{i=1}^N \hat{h}(i) + \sum_{i<j} \hat{V}_{ij},$$

donde $\hat{h}(i)$ representa el Hamiltoniano de una partícula independiente y \hat{V}_{ij} la interacción residual. Además, de acuerdo a la mecánica estadística cuántica si el sistema está formado por fermiones, éste debe satisfacer la estadística de Fermi. Por el contrario, si está conformado por bosones, debe seguir la estadística de Bose.

En el esquema de segunda cuantización se quiere expresar H en términos de operadores de creación \mathbf{a}^\dagger y aniquilación \mathbf{a} , los cuales satisfacen relaciones de conmutación para bosones y relaciones de anticonmutación para el caso de fermiones.

Para comprender el formalismo de segunda cuantización, consideremos un sistema de N partículas libres que está descrito por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}(i),$$

donde $\hat{h}(i)$ actúa solamente sobre la partícula i . Dependiendo de la naturaleza de las partículas, la solución al problema presenta dos casos distintos. Si se trata de un conjunto de fermiones, la función de onda del sistema debe ser antisimétrica Ψ_N^F mientras que si se trata de

bosones, la función de onda debe ser simétrica Ψ_N^B ,

$$\Psi_N^F(\rho_1, \dots, \rho_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \Phi_{\rho_{\pi}}(1) \Phi_{\rho_{\pi}}(2) \cdots \Phi_{\rho_{\pi}}(N), \quad (2.1.1)$$

$$\Psi_N^B(\rho_1, \dots, \rho_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{\rho=0}^N n_{\rho}!}} \sum_{\pi} \Phi_{\rho_{\pi}}(1) \Phi_{\rho_{\pi}}(2) \cdots \Phi_{\rho_{\pi}}(N), \quad (2.1.2)$$

donde el índice ρ denota los estados ocupados por cada partícula y las variables $1, 2, \dots, N$ indican las coordenadas generalizadas de cada partícula. La suma en ambos casos corre sobre todas las posibles $N!$ permutaciones denotadas como π . En la función de onda para los N bosones, la constante de normalización considera el número de ocupación n_{ρ} de cada estado Φ_{ρ} , el cual puede tomar valores entre $0, 1, \dots, \infty$.

En el esquema de segunda cuantización, los estados de las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2) se describen por un ket de la forma

$$|\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_N\rangle = \mathbf{a}_{\rho_1}^{\dagger} \mathbf{a}_{\rho_2}^{\dagger} \cdots \mathbf{a}_{\rho_N}^{\dagger} |0\rangle.$$

donde $|0\rangle$ se interpreta como el estado de vacío caracterizado por $\mathbf{a}_{\rho} |0\rangle = 0$ para todo valor de ρ . A este espacio en el que actúan los operadores de creación y aniquilación se le llama espacio de segunda cuantización. Así, puede demostrarse la equivalencia entre el espacio de Hilbert de una partícula independiente y el espacio de segunda cuantización,

$$\Phi_{\rho}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{a}_{\rho}^{\dagger} |0\rangle.$$

En el esquema de segunda cuantización, ρ denota el número de ocupación del estado y, por lo tanto, el espacio formado por estos kets se conoce como espacio de número o espacio de Fock. El número de ocupación ρ puede tomar valores distintos dependiendo de si el sistema está formado por bosones o por fermiones. Para fermiones $\rho = 0, 1$ y para bosones $\rho = 0, 1, 2, \dots$.

Un aspecto fundamental de la segunda cuantización es que es posible escribir cualquier operador de una o dos partículas en términos de \mathbf{a}_{ρ} y $\mathbf{a}_{\rho}^{\dagger}$, de forma que los elementos de matriz de éstos sean iguales a los que se obtienen trabajando con los estados (2.1).

Operadores que describen observables de una sola partícula son escritos en primera cuantización como

$$\hat{O}^{(1)}[i] = \sum_{i=1}^N \hat{o}^{(1)}[i], \quad (2.2)$$

donde $\hat{o}^{(1)}$ es un operador de una partícula que actúa sobre la partícula i . En segunda cuantización toma la forma

$$\hat{O}^{(1)} = \sum_{\rho_1, \rho_1'} \langle \rho_1 | \hat{o}^{(1)} | \rho_1' \rangle \hat{a}_{\rho_1}^{\dagger} \hat{a}_{\rho_1'}, \quad (2.3)$$

donde el elemento de matriz de un cuerpo $\langle \rho_1 | \hat{\delta}^{(1)} | \rho'_1 \rangle$ está dado por la expresión,

$$\langle \rho_1 | \hat{\delta}^{(1)} | \rho'_1 \rangle = \int d\tau_1 \Phi_{\rho_1}^*(1) \hat{\delta}^{(1)} \Phi_{\rho'_1}(1). \quad (2.4)$$

Para los operadores de dos partículas que en el espacio de Hilbert se escriben como

$$\hat{O}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \hat{\delta}^{(2)}[i, j], \quad (2.5)$$

con $\hat{\delta}^{(2)}[i, j]$ como un operador que depende de las variables de las partículas i y j , se reescriben en segunda cuantización como

$$\hat{O}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2} \langle \rho_1 \rho_2 | \hat{\delta}^{(2)} | \rho'_1 \rho'_2 \rangle \hat{a}_{\rho_2}^\dagger \hat{a}_{\rho_1}^\dagger \hat{a}_{\rho'_1} \hat{a}_{\rho'_2}, \quad (2.6)$$

donde $\langle \rho_1 \rho_2 | \hat{\delta}^{(2)} | \rho'_1 \rho'_2 \rangle$ es el elemento de matriz de un operador de dos partículas, definido como

$$\langle \rho_1 \rho_2 | \hat{\delta}^{(2)} | \rho'_1 \rho'_2 \rangle = \int d\tau_1 d\tau_2 \Phi_{\rho_1}^*(1) \Phi_{\rho_2}^*(2) \hat{\delta}^{(2)} \Phi_{\rho'_1}(1) \Phi_{\rho'_2}(2). \quad (2.7)$$

Los valores que pueden tomar los números de ocupación dependen de la naturaleza de las partículas. Por otra parte, la correcta simetría de la función de onda (2.1), se asegura introduciendo operadores de creación y aniquilación que se construyen de forma que al aplicarse a una función de fermiones, ésta preserve su antisimetrización y al aplicarse a una función de bosones, ésta mantenga su carácter simétrico. A continuación, se definen los operadores de creación y aniquilación, así como sus propiedades, para los casos de fermiones y bosones.

Fermiones

Los operadores de creación para cualquier estado de N fermiones están definidos como

$$\mathbf{f}_k^\dagger |n_1 \cdots n_{k-1} n_k \cdots n_N\rangle = (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} n_i} (1 - \delta_{n_k, 1}) \sqrt{n_k + 1} |n_1 \cdots n_{k-1}, n_k + 1, n_{k+1} \cdots n_N\rangle,$$

donde definimos $n_0 = 0$. Debido al principio de exclusión de Pauli, los números de ocupación en una función de onda de fermiones sólo pueden tomar valores de 0 y 1, de forma que al aplicar un operador de creación \mathbf{f}^\dagger sobre un estado arbitrario, se cumple

$$\mathbf{f}^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad , \quad \mathbf{f}^\dagger |1\rangle = 0. \quad (2.8)$$

El adjunto del operador de creación se conoce como operador de aniquilación, \mathbf{f} . Para un sistema arbitrario de N fermiones éste se define como

$$\mathbf{f}_k |n_1 \cdots n_{k-1} n_k \cdots n_N\rangle = (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} n_i} (1 - \delta_{n_k, 0}) \sqrt{n_k} |n_1 \cdots n_{k-1}, n_k - 1, n_{k+1} \cdots n_N\rangle.$$

Ambos operadores satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación que son un reflejo de la antisimetría del sistema

$$\{\mathbf{f}_k^\dagger, \mathbf{f}_p^\dagger\} = \{\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_p\} = 0 \quad , \quad \{\mathbf{f}_k^\dagger, \mathbf{f}_p\} = \delta_{kp}. \quad (2.9)$$

Bosones

Los operadores de creación, \mathbf{b}_k^\dagger , y aniquilación, \mathbf{b}_k , para un estado de N bosones están definidos como

$$\mathbf{b}_k^\dagger |n_1 \cdots n_{k-1} n_k \cdots n_N\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1 \cdots n_{k-1} n_k + 1 n_{k+1} \cdots n_N\rangle \quad (2.10.1)$$

$$\mathbf{b}_k |n_1 \cdots n_{k-1} n_k \cdots n_N\rangle = \sqrt{n_k} |n_1 \cdots n_{k-1} n_k - 1 n_{k+1} \cdots n_N\rangle. \quad (2.10.2)$$

Para este caso, los números de ocupación no tienen restricción en el valor que pueden tomar, por lo que $n_k = 0, 1, \dots, N$. El caracter simétrico de un sistema de bosones, se ve reflejado en las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{b}_k^\dagger, \mathbf{b}_p^\dagger] = [\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_p] = 0, \quad [\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_p^\dagger] = \delta_{kp}. \quad (2.11)$$

Para entender el porqué de las relaciones de conmutación y anticonmutación, según corresponda, ilustraremos el caso de un sistema formado por dos fermiones o por dos bosones que ocupan únicamente dos niveles (capa cerrada). En ambos, las partículas ocupan un estado distinto, sin embargo, recordemos que otro estado posible para el sistema de dos bosones, es aquel en el que ambas partículas están en el mismo estado.

El estado de dos fermiones debe satisfacer la relación $|n_i, n_j\rangle = -|n_j, n_i\rangle$. Si ambos estados son creados a partir del vacío, entonces,

$$\mathbf{f}_i^\dagger \mathbf{f}_j^\dagger |0\rangle = -\mathbf{f}_j^\dagger \mathbf{f}_i^\dagger |0\rangle \quad \rightarrow \quad (\mathbf{f}_i^\dagger \mathbf{f}_j^\dagger + \mathbf{f}_j^\dagger \mathbf{f}_i^\dagger) |0\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{f}_i^\dagger, \mathbf{f}_j^\dagger\} = 0.$$

En el caso de los bosones, se debe satisfacer la simetrización de la función de onda, por lo que $|n_i, n_j\rangle = |n_j, n_i\rangle$. Así, se encuentra que

$$\mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j^\dagger |0\rangle = \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger |0\rangle \quad \rightarrow \quad (\mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j^\dagger - \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger) |0\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad [\mathbf{b}_i^\dagger, \mathbf{b}_j^\dagger] = 0.$$

2.2. Cuantización de un campo multimodal

La teoría cuántica del campo electromagnético en ausencia de fuentes fue formulada por Born, Heisenberg y Jordan en 1926. Su primera aplicación fue realizada por Dirac en 1927 al estudiar la emisión y absorción de radiación. De acuerdo a la física contemporánea, el Universo está hecho de campos de materia, cuyos cuantos son fermiones y campos de fuerza cuyos cuantos son bosones.

La ruta más simple a la cuantización del campo electromagnético es mostrar que un campo de un modo es equivalente a un oscilador armónico. Su generalización a campos multimodales es directa y el procedimiento se describe a continuación.

En ausencia de cargas y corrientes, como sucede en el vacío, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.12.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.12.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.12.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.12.4)$$

Bajo estas condiciones de vacío, es posible determinar el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ en términos de un potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ que satisface la norma de Coulomb, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$. Así, el campo eléctrico y magnético cumplen con las relaciones:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Sustituyendo estas definiciones en la ecuación de Maxwell (2.12.2), se puede demostrar que el potencial vectorial satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.13)$$

con $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$. La solución a esta ecuación diferencial está dada por la onda plana

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.14)$$

donde A_0 es una amplitud, \mathbf{k} es el vector de onda y ω es la frecuencia con la que oscila el campo \mathbf{A} .

Si se introduce un volumen de cuantización $V = L^3$ (Figura 2.1) y se pide que los campos vuelvan a tomar los mismos valores después de una longitud L , es decir, se imponen condiciones periódicas a la frontera de la forma

$$\begin{aligned} E_x(x, t) &= E_x(x + L, t) & B_x(x, t) &= B_x(x + L, t) \\ E_y(y, t) &= E_y(y + L, t) & B_y(y, t) &= B_y(y + L, t) \\ E_z(z, t) &= E_z(z + L, t) & B_z(z, t) &= B_z(z + L, t), \end{aligned}$$

se encuentra que el vector de onda \mathbf{k} únicamente puede tomar valores discretos definidos por los índices $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z.$$

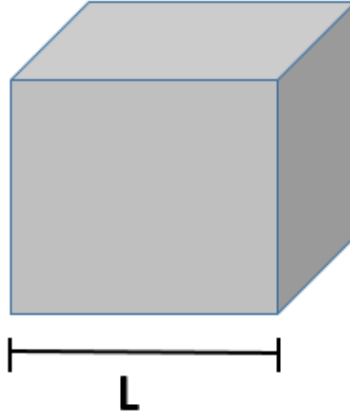


Figura 2.1: Volumen de cuantización de longitud L .

Asimismo, debido a que la frecuencia del modo está relacionado con \mathbf{k} a través de $\omega = c|k|$, se encuentra que ésta también está cuantizada y sólo toma los valores

$$\omega_l = c \frac{2\pi}{L} (n_{lx}^2 + n_{ly}^2 + n_{lz}^2)^{1/2}.$$

Finalmente, la generalización a la solución (2.14) surge al considerar que el campo está formado por la contribución de más de un modo. Por lo tanto, la solución general a la ecuación (2.13) es una combinación lineal de ondas planas, dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,s} \hat{\mathbf{e}}_{ls} \left[A_{ls} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + A_{ls}^* e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \right], \quad (2.15)$$

donde la suma sobre l considera todos los posibles modos del campo y la suma sobre s toma en cuenta las dos polarizaciones independientes. A_{ls} y $\hat{\mathbf{e}}_{ls}$ representan la amplitud compleja y el vector unitario de polarización, respectivamente, asociados al modo l con polarización s . Por último, \mathbf{k}_l y ω_l son el vector de onda y la frecuencia de oscilación asociadas al modo l .

Debido a la condición de norma de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$), es posible elegir los vectores $\mathbf{k}_l, \hat{\mathbf{e}}_{ls}, \hat{\mathbf{e}}_{ls'}$, de forma que cumplan con las relaciones:

$$\hat{\mathbf{e}}_{ls} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{ls'} = \delta_{ss'} \quad , \quad \mathbf{k}_l \cdot \hat{\mathbf{e}}_{ls'} = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{e}}_{ls} \times \hat{\mathbf{e}}_{ls'} = \frac{\mathbf{k}_l}{|\mathbf{k}_l|} = \hat{\mathbf{k}}_l,$$

es decir, se satisface que la dirección de propagación y la dirección de polarización en el modo l son ortogonales, por lo que se trata de una onda transversal.

Ahora es posible escribir las soluciones al campo eléctrico y el campo magnético en términos del potencial vectorial (2.15),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{l,s} \omega_l \hat{\mathbf{e}}_{ls} \left[A_{ls} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} - A_{ls}^* e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i}{c} \sum_{l,s} \omega_l (\hat{\mathbf{k}}_l \times \hat{\mathbf{e}}_{ls}) \left[A_{ls} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} - A_{ls}^* e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \right].\end{aligned}$$

Consideremos la energía clásica de un campo electromagnético, dada por

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV.$$

Al sustituir las soluciones para el campo eléctrico y el magnético, se encuentra que la energía depende únicamente de las amplitudes de cada modo

$$H = 2\epsilon_0 V \sum_{l,s} \omega_l^2 A_{ls}(t) A_{ls}^*(t) = 2\epsilon_0 V \sum_{l,s} \omega_l^2 A_{ls} A_{ls}^*.$$

Estas amplitudes pueden ser escritas en términos de las variables canónicas conjugadas p_{ls} y q_{ls} , como

$$A_{ls} = \frac{1}{2\omega_l (\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}}} [\omega_l q_{ls} + i p_{ls}] \quad , \quad A_{ls}^* = \frac{1}{2\omega_l (\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}}} [\omega_l q_{ls} - i p_{ls}].$$

Al sustituir estas expresiones en la energía clásica, se encuentra

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{l,s} (\hat{p}_{ls}^2 + \omega_l^2 \hat{q}_{ls}^2). \quad (2.16)$$

Es decir, la energía de un campo electromagnético multimodal con frecuencias ω_l es equivalente a la suma de las energías asociadas a un conjunto de osciladores armónicos con masa unitaria y frecuencias ω_l . Notemos como estos osciladores están desacoplados entre sí, por lo que sus dinámicas son independientes.

La cuantización del campo electromagnético se logra al transformar las variables canónicas q_{ls} y p_{ls} en operadores que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}_{ls}, \hat{q}_{l's'}] = [\hat{p}_{ls}, \hat{p}_{l's'}] = 0 \quad , \quad [\hat{q}_{ls}, \hat{p}_{l's'}] = i\hbar \delta_{ll'} \delta_{ss'}.$$

Para escribir la energía del campo en el formalismo de segunda cuantización, se introducen los operadores de creación y aniquilación en términos de \hat{q}_{ls} y \hat{p}_{ls} . Esto es,

$$\hat{a}_{ls} = \frac{1}{(2\hbar\omega_l)^{1/2}} [\omega_l \hat{q}_{ls} + i\hat{p}_{ls}] \quad , \quad \hat{a}_{ls}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_l)^{1/2}} [\omega_l \hat{q}_{ls} - i\hat{p}_{ls}].$$

Las relaciones de conmutación que satisfacen están dadas por

$$[\hat{a}_{ls}, \hat{a}_{l's'}] = [\hat{a}_{ls}^\dagger, \hat{a}_{l's'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_{ls}, \hat{a}_{l's'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{ss'} .$$

Así, el hamiltoniano asociado a la energía del campo tiene la forma

$$\hat{H} = \sum_{ls} \hbar \omega_l (\hat{a}_{ls}^\dagger \hat{a}_{ls} + \frac{1}{2}) = \sum_{ls} \hbar \omega_l (\hat{n}_{ls} + \frac{1}{2}) , \quad (2.17)$$

de donde se puede indentificar que se trata de la suma de un conjunto de hamiltonianos asociados a osciladores armónicos cuánticos con frecuencias ω_l y operadores número $\hat{n}_{ls} = \hat{a}_{ls}^\dagger \hat{a}_{ls}$.

Los eigenvalores de este Hamiltoniano están dados por el producto tensorial de los estados asociados a cada modo,

$$|\Psi\rangle = \prod_{ls} \otimes |n_{ls}\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{H} |\Psi\rangle = \sum_{ls} \hbar \omega_l (n_{ls} + \frac{1}{2}) |\Psi\rangle ,$$

donde n_{ls} es el número de fotonones en el modo ls . En otras palabras, las excitaciones en los modos se cuantizan a través del número de fotones asociados a cada uno de ellos.

La cuantización del campo electromagnético también consiste en escribir los campos eléctrico y magnético como operadores. Fácilmente se demuestra que éstos están dados por

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{ls} \left(\frac{\hbar \omega_l}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{ls} \left[\hat{a}_{ls} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \hat{a}_{ls}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \right] \quad (2.18.1)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{ls} (\hat{\mathbf{k}}_l \times \mathbf{e}_{ls}) \left(\frac{\hbar \omega_l}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{ls} \left[\hat{a}_{ls} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \hat{a}_{ls}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \right] . \quad (2.18.2)$$

Como conclusión, al considerar condiciones a la frontera e introducir las variables canónicas conjugadas de posición y momento, se logra la cuantización del campo electromagnético. Ésta se refleja en que la energía sólo toma valores discretos proporcionales al número de fotones asociados a cada modo. Por otro lado, el número de fotones es equivalente al número de excitaciones, es decir, un fotón es la excitación elemental en cada modo del campo electromagnético.

El momento lineal del campo cuantizado puede determinarse mediante la substitución de los campos eléctrico y magnético en la expresión

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{\epsilon_0}{c} \int_V d^3r (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}}) = \sum_{\ell s} \hbar \hat{\mathbf{K}}_\ell \hat{n}_{\ell s} ,$$

de tal manera que el momento lineal del campo en ausencia de fuentes es una constante de movimiento.

Se concluye que en la teoría cuántica del campo electromagnético libre los estados estacionarios están descritos por fotones de energía $\hbar\omega_\ell$ y momento lineal $\hbar\hat{\mathbf{K}}_\ell$. Como se tiene que $E^2 - P^2c^2 = \hbar^2(\omega_\ell^2 - k_\ell^2c^2) = 0$ para cada fotón; se tiene que los fotones tienen masa en reposo cero. De las relaciones de conmutación se concluye también que los estados estacionarios son simétricos con respecto a las permutaciones de fotones idénticos, esto es, que son bosones.

El vector $\hat{\mathbf{K}}_\ell$ de un fotón de modo (ℓ, s) especifica la energía y el momento lineal del fotón. El índice s de polarización se conecta con el espín del fotón, esto puede notarse mediante la expresión del momento angular intrínseco del campo

$$\vec{M} = \frac{\epsilon_0}{c} \int_V d^3r (\vec{E} \times \vec{A}).$$

Substituyendo las expresiones cuantizadas para el campo eléctrico y el potencial vectorial se obtiene

$$\hat{\mathbf{M}} = i\hbar \sum_\ell \vec{\kappa}_\ell (\hat{a}_{\ell 2}^\dagger \hat{a}_{\ell 1} - \hat{a}_{\ell 1}^\dagger \hat{a}_{\ell 2}). \quad (2.19)$$

Es inmediato que no conmuta con el operador de número de fotones y, por lo tanto, el estado de número no es un eigenestado de $\hat{\mathbf{M}}$.

Para construir eigenestados simultáneos de la energía, momento lineal y el espín del fotón es necesario definir funciones modales de polarización circular, esto es,

$$e_{k_\ell+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{k_\ell 1} + ie_{k_\ell 2}), \quad e_{k_\ell-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{k_\ell 1} - ie_{k_\ell 2}),$$

tales que satisfacen la expresión $e_{k_\ell\alpha}^* \cdot e_{k_\ell\alpha'} = \delta_{\alpha,\alpha'}$. Así, el operador de espín se escribe como

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_{\ell\alpha} \hbar\alpha \hat{\kappa}_\ell \hat{a}_{k_\ell\alpha}^\dagger \hat{a}_{k_\ell\alpha}. \quad (2.20)$$

Esto implica que la helicidad del fotón es $\pm\hbar$, que se traduce en que el fotón es un bosón de espín 1. En estas funciones modales de polarización, la energía y el momento lineal conmutan con el espín y están dados por

$$\hat{H}_F = \sum_{\ell\alpha} \hbar\omega_\ell \hat{a}_{k_\ell\alpha}^\dagger \hat{a}_{k_\ell,\alpha}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\ell\alpha} \hbar\hat{\kappa}_\ell \hat{a}_{k_\ell\alpha}^\dagger \hat{a}_{k_\ell,\alpha}.$$

2.3. Operadores de cuadratura de amplitud

Para comprender la definición de los operadores de cuadratura consideramos el caso de un campo unimodal confinado en una cavidad unidimensional de longitud L que se extiende sobre el eje z y, por lo tanto, z es la dirección de propagación del campo. También, se asume

que la dirección de polarización del campo eléctrico está dada en x . Así, el operador $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ dado en (2.18) se reduce a

$$\hat{\mathbf{E}}(z, t) = \mathbf{e}_x \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \left[\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \right] \sin kz.$$

Los operadores de cuadratura de amplitud, designados como \hat{X}_1 y \hat{X}_2 , son análogos a los operadores de posición y momento, pero escalados por un factor que los vuelve adimensionales. Están definidos como

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad , \quad \hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad , \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}. \quad (2.21)$$

Reescribiendo el campo eléctrico $\hat{\mathbf{E}}(z, t)$ en términos de estos operadores, se obtiene

$$\hat{\mathbf{E}}(x, t) = \hat{\mathbf{e}}_x 2 \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{X}_1 \cos \omega t + \hat{X}_2 \sin \omega t] \sin kz. \quad (2.22)$$

De esta expresión, se puede asociar a \hat{X}_1 y \hat{X}_2 como amplitudes de oscilación de un campo desfasadas por 90° . También, es posible reescribir el Hamiltoniano de un campo electromagnético de un modo en términos de \hat{X}_1 y \hat{X}_2 , esto es

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega (\hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2). \quad (2.23)$$

Debido a la similitud con la expresión de la energía de un campo clásico electromagnético, se dice que \hat{X}_1 y \hat{X}_2 son operadores que representan las amplitudes del campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente.

2.4. Campo Térmico

Es necesario entender el comportamiento de un campo electromagnético a una temperatura distinta de 0 K. Por ejemplo, experimentalmente se puede tener un campo electromagnético confinado en una cavidad a una cierta temperatura T de modo que las paredes de la cavidad y el campo estén en equilibrio térmico, es decir, el campo electromagnético esté acoplado con un baño térmico. Si el acoplamiento es débil, el sistema se puede estudiar desde la mecánica estadística como un ensamble canónico.

Consideramos el caso de un campo electromagnético unimodal en equilibrio térmico con las paredes de una cavidad a una temperatura T . La distribución de Boltzmann establece que la probabilidad P_n de que el modo esté excitado térmicamente a un nivel n está dada por

$$P_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n^\infty \exp(-E_n/k_B T)} \quad (2.24)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y E_n es la energía del campo unimodal en el estado n , esto es, $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

En termodinámica estadística, el sistema se describe a través de un operador de densidad. Para el campo térmico éste se define como

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)]}, \quad (2.25)$$

donde \hat{H} es el hamiltoniano del campo unimodal, $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$, el cual se obtiene de (2.17) y, al denominador de $\hat{\rho}$ se le conoce como función de partición Z

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp(-\hat{H}/k_B T) | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) \equiv Z. \end{aligned} \quad (2.26)$$

El operador de densidad se puede utilizar para calcular el promedio de cualquier observable. Una cantidad importante que describe el campo electromagnético es el número promedio de fotones, éste se puede calcular de la siguiente forma

$$\bar{n} = \langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{n}\hat{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{n}\hat{\rho} | n \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (2.27)$$

Dependiendo de la relación entre $k_B T$ y $\hbar\omega$ se puede tener dos casos distintos

$$\bar{n} = \begin{cases} \frac{k_B T}{\hbar\omega} & (k_B T \gg \hbar\omega) \\ \exp(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}) & (k_B T \ll \hbar\omega). \end{cases} \quad (2.28)$$

A temperatura ambiente el número promedio de fotones para una frecuencia óptica es del orden de 10^{-40} . En la superficie del sol (6000 K) y a una frecuencia de 6×10^{14} Hz que corresponde a luz color amarillo ($\lambda = 500$ nm), el número promedio de fotones es del orden 10^{-2} . Por otro lado, el promedio de fotones aumenta rápidamente con el incremento de la longitud de onda. Por ejemplo, a temperatura ambiente para una longitud de onda entre el intervalo $\lambda = 10 - 100$ pm, el promedio de fotones es aproximadamente $\bar{n} \simeq 1$ y para longitudes de onda que caen en la parte del microondas del espectro electromagnético, el número promedio de fotones es $\bar{n} \gg 1$.

Capítulo 3

Emisión y Absorción de un átomo de dos niveles

En este capítulo se discute la dinámica de los grados internos de un átomo de dos niveles debido a la presencia de un campo electromagnético externo. Asimismo, se presenta la derivación de dos modelos que permiten la descripción de la interacción átomo-campo. Como se discute en una sección posterior, la presencia de una cavidad es esencial para lograr el desarrollo experimental de estos modelos. Por lo tanto, comenzamos considerando los diferentes procesos que se llevan a cabo dentro de una cavidad y que originan transiciones energéticas en el átomo debido a su interacción con un campo electromagnético. Estos procesos se ilustran en la Figura 3.1 y son:

- Absorción de un fotón.
- Emisión espontánea.
- Emisión estimulada.

Además de éstos, es importante notar que también pueden llevarse a cabo otros mecanismos de excitación y desexcitación no radiativos, originados por la colisión del átomo con las paredes de la cavidad [25]. El estudio de las transiciones radiativas descritas en la Figura 3.1, se realiza a través de la mecánica cuántica. Para ello, primero es necesario definir un Hamiltoniano que modele la interacción átomo-campo.

3.1. Aproximación del dipolo

Considerando el acoplamiento minimal ¹ en unidades SI, el Hamiltoniano de una partícula sin espín, con carga q y masa m en presencia de un campo electromagnético, está dado por

¹El acoplamiento minimal se utiliza para describir la dinámica de una partícula cargada en un campo electromagnético; se reemplaza $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - q\mathbf{A}$. Para una distribución de carga se realiza el mismo reemplazo ignorando los momentos multipolares de mayor orden.

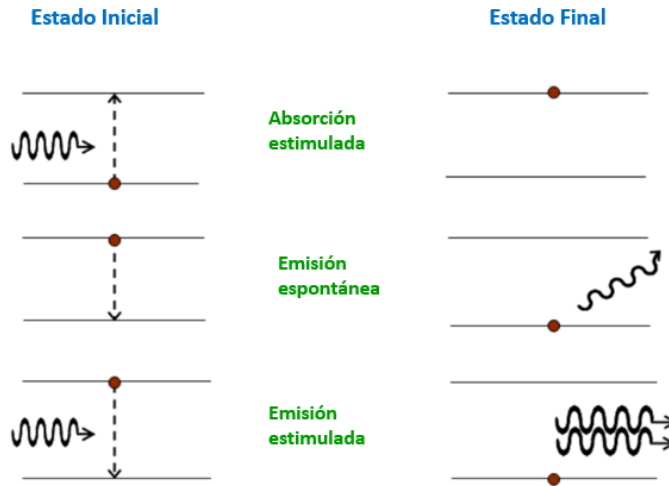


Figura 3.1: Procesos de transiciones en un átomo de dos niveles dentro de una cavidad.

la expresión [26]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi, \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\Phi(\mathbf{r}, t)$ son el potencial vectorial y escalar, respectivamente. Éstos definen al campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y al magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Recordemos que la elección de los potenciales \mathbf{A} y Φ no es única, ya que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ son invariantes ante transformaciones de norma del tipo

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t).$$

Esto implica que es posible elegir una función arbitraria $\chi(\mathbf{r}, t)$ que genere los mismos campos eléctricos y magnéticos. Ahora, partiendo de (3.1) y considerando la norma de Coulomb, para la que $\Phi = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, se encuentra que la descripción de un átomo hidrogenoide en presencia de un campo electromagnético y despreciando los efectos de la masa reducida, está dada por el Hamiltoniano

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}[-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r}. \quad (3.2)$$

Después de realizar la transformación de norma sobre (3.2), éste se reescribe como

$$\begin{aligned}\hat{H}'(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2m} [-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)]^2 - \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r} \\ &= \frac{1}{2m} [-i\hbar\nabla + e(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t))]^2 + e\frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r}.\end{aligned}$$

El siguiente paso es considerar el hecho de que si la longitud de onda del campo es grande comparada con el tamaño del átomo, la variación espacial del campo vectorial se puede despreciar, es decir, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)$. Esto sucede en sistemas en los que la interacción se da, por ejemplo, entre la luz visible que tiene una longitud de onda de $\lambda = 400 - 700$ nm y un átomo con un diámetro de $\sim 1\text{Å}$. Debido a que los campos eléctrico y magnético están en términos de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, eliminar la dependencia espacial de éste, conlleva a que el campo eléctrico sea constante en distancias pequeñas alrededor del átomo, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{E}(t)$, y a que se elimine la contribución del campo magnético. A esta aproximación se le conoce como *aproximación dipolar*.

Finalmente, si se elige la función de norma como $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$, se obtiene

$$\hat{H}'(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r} + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) = \hat{H}_0 - \hat{d} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (3.3)$$

es decir, la interacción entre el átomo y el campo depende únicamente del dipolo eléctrico, \hat{d} , y es una consecuencia de considerar que el potencial vectorial es constante en la extensión de un átomo. De ahí que a esta aproximación se le conozca como *aproximación dipolar*.

Notemos que hasta ahora, la naturaleza de $\mathbf{E}(t)$ no se ha especificado, por lo que la interacción con el átomo se puede dar a través de un campo clásico o un campo cuantizado. A continuación, se presentan ambos casos con el objetivo de resaltar las diferencias en las transiciones electrónicas que se presentan en un átomo de dos niveles.

3.2. Transiciones electrónicas en un átomo de dos niveles

Campo electromagnético clásico

El estudio de las transiciones electrónicas en un átomo de dos niveles confinado en una cavidad, puede realizarse a través de la teoría de perturbaciones. El problema que se desea resolver es el de encontrar solución a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi\rangle,$$

donde \hat{H} está dado por (3.3) y puede escribirse como la suma de un término sin perturbar, \hat{H}_0 , y un término perturbativo que toma en cuenta la interacción átomo-campo designado

por $\hat{H}^{(1)} = -\hat{d} \cdot \mathbf{E}(t)$. En este caso, $\mathbf{E}(t)$ es un campo clásico definido como $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$.

Consideramos que las eigenfunciones y eigenvalores del Hamiltoniano sin perturbar están dados por

$$\hat{H}_0 |\Psi_i\rangle = E_i |\Psi_i\rangle .$$

Estas eigenfunciones forman una base completa, por lo que satisfacen las relaciones de completés y ortonormalidad, $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{ij}$ y $\sum_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| = \hat{I}$. Por lo tanto, la solución a la ecuación (3.2) del sistema perturbado puede escribirse como una combinación lineal de la base de \hat{H}_0 ,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k C_k(t) e^{-i E_k t/\hbar} |\Psi_k\rangle , \quad (3.4)$$

donde $C_k(t)$ son las amplitudes dependientes del tiempo, asociadas a cada uno de los niveles energéticos del átomo, y satisfacen el requerimiento de normalización $\sum_k |C_k(t)|^2 = 1$.

Al sustituir la solución (3.4) en la ecuación de Schrödinger y multiplicar por $\langle \Psi_n | e^{i E_n t/\hbar}$, se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden que permiten encontrar la solución para las amplitudes de probabilidad C_n ,

$$\dot{C}_n(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_k e^{i(E_n - E_k)t/\hbar} C_k(t) \langle \Psi_n | \hat{H}^{(1)} | \Psi_k \rangle . \quad (3.5)$$

Como indican las reglas de selección para las integrales de transición, los términos $\langle \Psi_k | \hat{H}^{(1)} | \Psi_k \rangle$ en (3.5) son igual a cero, ya que no presentan un cambio de paridad, esto es,

$$\langle \Psi_k | \hat{H}^{(1)} | \Psi_k \rangle = -e \cos \omega t \left[E_{0x} \langle \Psi_k | \hat{x} | \Psi_k \rangle \hat{i} + E_{0y} \langle \Psi_k | \hat{y} | \Psi_k \rangle \hat{j} + E_{0z} \langle \Psi_k | \hat{z} | \Psi_k \rangle \hat{k} \right] = 0 .$$

Ahora, consideremos que inicialmente el átomo se encuentra en un estado $|\Psi_a\rangle$ y después de la interacción con el campo se realiza un transición al estado $|\Psi_b\rangle$. A partir de (3.5) es posible encontrar la probabilidad de transición entre estos dos estados.

Debido a que la teoría de perturbaciones supone una interacción débil, la aproximación

$$C_a(t) \approx 1 \quad C_b(t) \ll 1, \quad \text{cuando las condiciones iniciales son} \quad C_a(0) = 1 \quad C_b(0) = 0 ,$$

es apropiada e implica que la interacción con el campo no cambia significativamente las poblaciones de los estados del átomo. Así, se tiene que la solución a la ecuación diferencial

$$\dot{C}_b(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} \langle \Psi_b | \hat{H}^{(1)} | \Psi_a \rangle ,$$

está dada por

$$C_b(t) = -\frac{\langle \Psi_b | \hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 | \Psi_a \rangle}{2i\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega + \omega_0)t} - 1}{i(\omega + \omega_0)} + \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)t} - 1}{-i(\omega - \omega_0)} \right] ,$$

donde se definió $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$. Si consideramos el caso en el que la frecuencia del campo ω es cercana a la frecuencia entre los niveles energéticos del átomo, $\omega \approx \omega_0$, la solución se aproxima a

$$C_b(t) = -\frac{\langle \Psi_b | \hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 | \Psi_a \rangle}{\hbar(\omega - \omega_0)} e^{-i(\omega - \omega_0)\frac{t}{2}} \sin(\omega - \omega_0)\frac{t}{2}.$$

Finalmente, la probabilidad de transición entre los estados $a \rightarrow b$ está dada por

$$P_{a \rightarrow b} = |C_b(t)|^2 = \frac{|\langle \Psi_b | \hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 | \Psi_a \rangle|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_0)^2} \sin^2(\omega - \omega_0)\frac{t}{2}. \quad (3.6)$$

Esta transición ilustra el proceso de *absorción estimulada* en el que el átomo absorbe energía del campo electromagnético $E_b = E_a + \hbar\omega$.

Si se cambian las condiciones iniciales a $C_b(0) = 1$, $C_a(0) = 0$, se obtiene que el coeficiente de amplitud del estado $|\Psi_a\rangle$ a primer orden, es

$$C_a(t) = -\frac{\langle \Psi_a | \hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 | \Psi_b \rangle}{\hbar(\omega - \omega_0)} e^{i(\omega - \omega_0)\frac{t}{2}} \sin(\omega - \omega_0)\frac{t}{2}. \quad (3.7)$$

Por lo que la probabilidad de transición entre los estados $b \rightarrow a$ está dada por

$$P_{b \rightarrow a} = |C_a(t)|^2 = \frac{|\langle \Psi_a | \hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 | \Psi_b \rangle|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_0)^2} \sin^2(\omega - \omega_0)\frac{t}{2}. \quad (3.8)$$

Notemos que es el mismo resultado obtenido para la probabilidad de transición $P_{a \rightarrow b}$. Sin embargo, la transición $P_{b \rightarrow a}$ se da cuando un átomo que se encuentra en un estado de mayor energía es irradiado y éste decae a un estado de menor energía. A este proceso se le conoce como *emisión estimulada*. En este caso, es el campo electromagnético el que gana energía $\hbar\omega_0$ proveniente del átomo. Se dice que entró un fotón y salieron dos fotones (el original que causó la transición más otro dado por la transición del átomo al nivel de menor energía). Este proceso es muy importante porque da lugar a la amplificación, ya que si se tuvieran todos los átomos excitados y se usara un fotón incidente ocurriría una reacción en cadena, esto es, el primer fotón produce 2, éstos produciendo 4, y así sucesivamente. Se tendría entonces un número grande de fotones salientes todos con la misma frecuencia y virtualmente en el mismo instante, este es el principio del láser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Notemos que para lograr la amplificación es necesario lograr la llamada inversión de población (la mayoría de los átomos en el nivel superior). Esto se debe a la competencia con el proceso de absorción. Si se empieza con una mezcla de átomos en el estado excitado y átomos en el estado base, no se puede lograr la amplificación.

Campo electromagnético cuantizado

Cuando se considera la cuantización del campo, se encuentra que es posible que haya una transición del nivel de mayor energía al nivel de menor energía, aún en ausencia de

fotones. A este proceso se le conoce como *emisión espontánea* y es un proceso de naturaleza completamente cuántica.

Para explicar los fenómenos que surgen en este caso, se considera el operador asociado a un campo eléctrico definido en el Capítulo 2. Considerando la aproximación dipolar, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \approx \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, y el esquema de Schrödinger, este operador está dado por

$$\hat{\mathbf{E}} = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}[\hat{a} - \hat{a}^\dagger].$$

Así, el Hamiltoniano de interacción es

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = -i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

Debido a que ahora el átomo y el campo están cuantizados, las eigenfunciones asociadas al Hamiltoniano no perturbado están formadas por el producto directo de un estado de la materia y un estado del campo. Consideremos únicamente dos estados del átomo $|\Psi_a\rangle = |a\rangle$ y $|\Psi_b\rangle = |b\rangle$, tal que $E_b > E_a$. Ahora, los estados asociados al campo, se designarán como $|n\rangle$ con $n = 0, 1, \dots$, donde n indica el número de fotones en el modo del campo. Así, los estados del sistema compuesto átomo-campo están dados por $|a\rangle \otimes |n\rangle$ y $|b\rangle \otimes |n\rangle$.

Para estudiar el tipo de transiciones permitidas cuando el campo está cuantizado, tomaremos los siguientes 3 estados compuestos,

$$|i\rangle = |a\rangle \otimes |n\rangle \quad , \quad E_i = E_a + n\hbar\omega \quad (3.9.1)$$

$$|j\rangle = |b\rangle \otimes |n-1\rangle \quad , \quad E_j = E_b + (n-1)\hbar\omega \quad (3.9.2)$$

$$|k\rangle = |b\rangle \otimes |n+1\rangle \quad , \quad E_k = E_b + (n+1)\hbar\omega \quad (3.9.3)$$

Recordemos que los elementos de matriz no diagonales distintos de cero del Hamiltoniano \hat{H}_{int} , nos dan información sobre las transiciones permitidas entre dos estados. Así, tomando en cuenta $|i\rangle$, $|j\rangle$, $|k\rangle$, se encuentran los siguientes procesos permitidos

$$\langle j | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle = \langle b, n-1 | \hat{H}_{\text{int}} | a, n \rangle = -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0)_{ba} \sqrt{n} \quad \text{absorción}$$

$$\langle k | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle = \langle b, n+1 | \hat{H}_{\text{int}} | a, n \rangle = (\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0)_{ba} \sqrt{n+1} \quad \text{emisión}$$

donde $(\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0)_{ba} = \langle b | \hat{\mathbf{d}} | a \rangle$. Podemos notar que el proceso de absorción obtenido es igual al caso semiclásico. La transición a un estado de mayor energía solamente se da cuando $n \neq 0$, es decir, cuando hay presencia de fotones. El caso del proceso de emisión es distinto. Aún cuando $n = 0$, el elemento de matriz $\langle k | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle$ es distinto de cero. Esto implica que el decaimiento de un estado de mayor energía a uno de menor energía puede darse aún en

la ausencia de fotones. A este proceso se le conoce como *emisión espontánea* y tiene una naturaleza cuántica. Cuando $n > 0$, recuperamos el resultado obtenido con el tratamiento clásico del campo, en donde el decaimiento de $b \rightarrow a$ se da por la presencia de un fotón (*emisión estimulada*).

3.3. Hamiltoniano de interacción

El Hamiltoniano (3.3), describe de forma general la interacción entre un átomo hidrogenoide y un campo electromagnético. Esto implica que no especifica la naturaleza del átomo ni del campo, por lo que se consideran todos los niveles energéticos del átomo y el campo puede ser tratado de forma clásica o como un operador. El estudio del sistema se puede simplificar al considerar el átomo hidrogenoide como un sistema efectivo de dos niveles.

3.3.1. Átomo efectivo de dos niveles

En el modelo de dos niveles, se considera que los únicos dos estados poblados en el átomo están dados por $|g\rangle$ y $|e\rangle$, los cuales simbolizan el estado base y el estado excitado del átomo, respectivamente. Estos estados satisfacen las ecuaciones,

$$\hat{H}_A |g\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 |g\rangle \quad , \quad \hat{H}_A |e\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 |e\rangle \quad ,$$

de forma que la diferencia de energías entre ambos niveles sea $\omega_0 = (E_{|e\rangle} - E_{|g\rangle})/\hbar$. Debido a que $|g\rangle$ y $|e\rangle$ son las únicas eigenfunciones del Hamiltoniano de dos niveles, \hat{H}_A , éstas forman una base completa ortonormal que satisfacen las relaciones

$$\langle e|e\rangle = \langle g|g\rangle = 1 \quad , \quad \langle e|g\rangle = \langle g|e\rangle = 0 \quad , \quad \sum |n\rangle \langle n| = \hat{I} \quad .$$

Recordemos que todo Hamiltoniano es diagonal en la base formada por sus eigenfunciones, por lo tanto, en este caso \hat{H}_A tiene la forma sencilla

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z \quad , \quad (3.11)$$

donde $\hat{\sigma}_z$ es una matriz de Pauli y es uno de los generadores del grupo de simetría SU(2). Éste grupo de simetría está caracterizado por las matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

De manera análoga a los operadores de momento angular, es posible definir a partir de $\hat{\sigma}_x$ y $\hat{\sigma}_y$ dos operadores *escalera* que conectan los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, esto es,

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_- = \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.12)$$

Así, el Hamiltoniano de un átomo de dos niveles puede ser escrito en términos de las matrices $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$, las cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z \quad , \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2 \hat{\sigma}_\pm ,$$

y su acción sobre la base está definida por

$$\hat{\sigma}_z |g\rangle = -|g\rangle \quad , \quad \hat{\sigma}_z |e\rangle = |e\rangle \quad , \quad \hat{\sigma}_+ |g\rangle = |e\rangle \quad , \quad \hat{\sigma}_+ |e\rangle = 0 \quad , \quad \hat{\sigma}_- |g\rangle = 0 \quad , \quad \hat{\sigma}_- |e\rangle = |g\rangle .$$

Si se desea añadir una perturbación \hat{W} al átomo de dos niveles, el Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H}_A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 & W_{eg} \\ W_{ge}^* & \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + W_{eg} |e\rangle\langle g| + W_{ge}^* |g\rangle\langle e| = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + W_{eg} \hat{\sigma}_+ + W_{ge}^* \hat{\sigma}_- .$$

A continuación se estudia la interacción del átomo efectivo de dos niveles con un campo clásico y con un campo cuantizado. En el primer caso, se obtiene un modelo semi-clásico conocido como modelo de Rabi. En el caso en el que la interacción se da con un campo cuantizado, se deriva el modelo llamado Dicke. Si se realiza la aproximación de onda rotante sobre éste último, se obtiene el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, el cual es utilizado en todo el trabajo para el estudio de los sistemas.

3.3.2. Campo clásico

El Hamiltoniano que describe al sistema es

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} , \quad (3.13)$$

donde \hat{H}_0 es el hamiltoniano libre del átomo de dos niveles y \hat{H}_{int} describe la interacción átomo-campo. Éste último se modela a partir de la aproximación dipolar como

$$\hat{H}_{int} = -\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 \cos \omega t . \quad (3.14)$$

La solución a la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger está dada por

$$|\Psi(t)\rangle = C_g(t) e^{-iE_g t/\hbar} |g\rangle + C_e(t) e^{-iE_e t/\hbar} |e\rangle . \quad (3.15)$$

Al sustituir esta solución en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y multiplicar ambos lados de la ecuación por $\langle g|$ y por $\langle e|$, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{C}_g(t) &= \frac{i}{\hbar} \langle g|\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0|e\rangle \cos \omega t e^{-i\omega_0 t} C_e(t) \\ \dot{C}_e(t) &= \frac{i}{\hbar} \langle e|\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0|g\rangle \cos \omega t e^{i\omega_0 t} C_g(t) , \end{aligned}$$

el cual tiene como solución

$$\begin{aligned} C_e(t) &= -i \frac{\langle g | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | e \rangle}{\hbar \Omega_R} e^{i\Delta t/2} \sin(\Omega_R t/2) \\ C_g(t) &= e^{i\Delta t/2} \left\{ \cos(\Omega_R t/2) - i \frac{\Delta}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right\}, \end{aligned}$$

donde $\Omega_R(t) = [\Delta^2 + \langle e | -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | g \rangle]^{\frac{1}{2}}$ se conoce como la frecuencia de Rabi y $\Delta = \omega_0 - \omega$ es la desintonía.

3.3.3. Campo cuantizado

En este caso, la interacción con el átomo de dos niveles se da con un campo monocromático cuantizado que considera la aproximación dipolar y está dado por

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{e} \left(\frac{\hbar \omega}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz).$$

Así, el Hamiltoniano de interacción toma la forma

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = - \left(\frac{\hbar \omega}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(kz) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}.$$

En este punto, resulta conveniente escribir el operador momento dipolo, $\hat{\mathbf{d}}$, en términos de las matrices de Pauli. Debido a que los elementos de matriz diagonales de este operador son cero, $\langle e | \hat{\mathbf{d}} | e \rangle = \langle g | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle = 0$, es posible expresar $\hat{\mathbf{d}}$ como

$$\hat{\mathbf{d}} = d |g\rangle \langle e| + d^* |e\rangle \langle g| = d \hat{\sigma}_- + d^* \hat{\sigma}_+ = d (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-),$$

donde $d = \langle e | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle$ y se asume que es real. Así, el Hamiltoniano completo del sistema conocido como *modelo de Dicke*, está dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar \Omega \hat{n} + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.18)$$

3.4. Modelo de Jaynes-Cummings

En óptica cuántica, resulta de interés estudiar sistemas en los que se considere la cuantización del campo electromagnético y de la materia, ya que tienen potencial aplicación para el área de información cuántica. El modelo más sencillo para modelar este tipo de sistemas, es el modelo de Jaynes-Cummings. Este modelo considera un átomo efectivo de dos niveles confinado dentro de una cavidad y en interacción con un campo electromagnético monocromático, típicamente en la región de microondas.

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings está dado por

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (3.19)$$

el cual aproxima el término asociado al átomo como un sistema de dos niveles con el Hamiltoniano definido en una sección anterior,

$$\hat{H}_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z.$$

Como resultado de la cuantización del campo, el término asociado al campo libre en (3.19) está dado por

$$\hat{H}_F = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

donde Ω es la frecuencia asociada al campo y $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es el operador número. Finalmente, la interacción campo-átomo se describe como

$$\hat{H}_{int} = \hbar\lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-),$$

donde el parámetro λ es la frecuencia asociada al acoplamiento campo-materia. Notemos que éste es el único término que difiere con el hamiltoniano del modelo de Dicke. La diferencia está en que se eliminaron los términos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ y $\hat{\sigma}_- \hat{a}$. Esto se debe a que al analizar su dependencia con el tiempo

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} \sim e^{i(\Omega-\omega_0)t}, \quad \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \sim e^{-i(\Omega-\omega_0)t}, \quad \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \sim e^{i(\Omega+\omega_0)t}, \quad \hat{\sigma}_- \hat{a} \sim e^{-i(\Omega+\omega_0)t},$$

se observa que éstos oscilan con una frecuencia $\Omega + \omega_0$, la cual es mucho mayor que $\Omega - \omega_0$ que se aproxima a cero en el caso en resonancia. En un promedio temporal, estas oscilaciones rápidas $\Omega + \omega_0$ tienden a cero, por lo que no se consideran. Además, es importante notar que no conservan la energía, ya que $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ crea un fotón y excita al átomo, mientras que $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ elimina un fotón y desexcita el átomo. A la aproximación de desprestigiar estos términos se le conoce como *aproximación de onda rotante* y es la consideración final que se hace para llegar al modelo de Jaynes-Cummings.

Ahora, el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings tiene asociada la constante de movimiento

$$\hat{M} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_z + \hat{I}) \quad (3.20)$$

tal que $[\hat{H}_{JC}, \hat{M}] = 0$ y con la cual se puede reescribir (3.19) como

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\Omega \hat{M} + \hbar\Delta \hat{\sigma}_z + \hbar\lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad \text{con} \quad \Delta = \frac{\omega_0 - \Omega}{2}. \quad (3.21)$$

Una de las ventajas de este Hamiltoniano es que tiene solución exacta. Sus energías están dadas por

$$E_{\pm} = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \lambda^2 (n+1)},$$

donde el primer término es la energía de un oscilador armónico y el segundo término se conoce como frecuencia generalizada de Rabi.

3.5. Modelo de Jaynes-Cummings generalizado

El modelo de Jaynes-Cummings presentado en la sección anterior puede generalizarse para describir un sistema formado por un átomo de dos niveles confinado en una cavidad que interactúa con dos fotones de frecuencias Ω_1 y Ω_2 , como se describe en la Figura 3.2. En este caso se puede usar un modo para modular, amplificar, o controlar el otro modo. El átomo de Rydberg, sistema de dos niveles y discutido en la siguiente sección, acopla los dos modos y como veremos cambia las propiedades estadísticas de los fotones en la cavidad.

Nuevamente, los estados base y excitado del átomo están representados por $|g\rangle$ y $|e\rangle$, respectivamente. La frecuencia asociada a la diferencia de energía entre los niveles del átomo es ω_0 y δ es la *desintonía* asociada a la diferencia de energía entre los niveles atómicos y la suma de energías de ambos fotones.

El Hamiltoniano que describe este sistema está dado por

$$\hat{H}_{JC2} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+ \right), \quad (3.22)$$

donde g tiene unidades de frecuencia y acopla los estados de la misma paridad, $|g\rangle$ y $|e\rangle$, a través de un proceso de dos fotones. Las constantes de movimiento asociadas a este Hamiltoniano son

$$\hat{\Delta} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \quad \hat{N} = 2 \hat{K}_0 + \hat{\sigma}_z, \quad (3.23)$$

tales que $[\hat{H}_{JC2}, \hat{\Delta}] = [\hat{H}_{JC2}, \hat{N}] = 0$. Con éstas, (3.22) se reescribe como

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \quad [\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0$$

con

$$\hat{H}_1 = \hbar(\Omega N + \epsilon \Delta) \quad , \quad \hat{H}_2 = \frac{\hbar\delta}{2} \sigma_0 + \hbar g(\hat{K}_+ \sigma_- + \hat{K}_- \sigma_+). \quad (3.24)$$

Los parámetros $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$, $\delta = \omega_0 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ y $\epsilon = (\Omega_1 - \Omega_2)/2$ representan la frecuencia que portan los dos campos, la desintonía y la frecuencia de modulación entre los campos, respectivamente. Asimismo, se introdujeron los operadores que se utilizarán en la sección 4.3.2,

$$\hat{K}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \quad , \quad \hat{K}_- = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \quad , \quad \hat{K}_0 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1). \quad (3.25)$$

3.6. Realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings

Junto con el desarrollo experimental de la óptica atómica y molecular se generaron dispositivos que permitieron el estudio y control del campo electromagnético y de los grados internos de libertad de los átomos. Así, gracias a la invención de láseres y cavidades ópticas

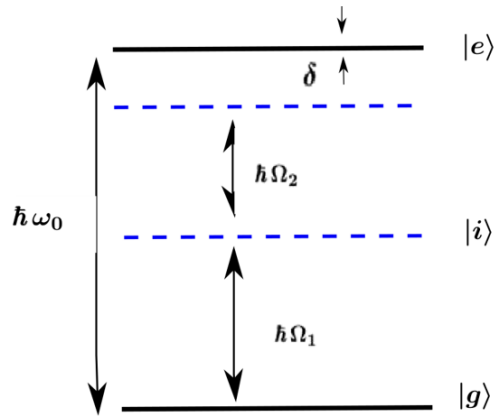


Figura 3.2: Modelo generalizado de Jaynes-Cummings en el que la transición entre los niveles atómicos está mediado por un proceso de dos fotones.

fue posible la realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings, llevada a cabo por Haroche y sus colaboradores en la Escuela Normal Superior de Paris [27, 28].

Las cavidades ópticas son dispositivos formados por espejos que se pueden presentar en distintas configuraciones [29]. Dentro de ellas, se confina un campo electromagnético de forma que éste es reflejado múltiples veces por los espejos. Este proceso genera dentro de la cavidad un número de ondas estacionarias con ciertas frecuencias. Las ondas estacionarias que se generan se conocen como modos y el número presente de éstas dentro de la cavidad está restringido. Así, las cavidades ópticas permiten el estudio de átomos aislados en interacción con un campo electromagnético de un número de modos limitados [30]. Por lo tanto, son fundamentales para el estudio de modelos que contemplen la cuantización del campo y de la materia.

Un parámetro que especifica la calidad de una cavidad es el *factor Q* o *factor de calidad*. Éste es un parámetro adimensional que describe el amortiguamiento que sienten las ondas estacionarias dentro de la cavidad. Así, mientras mayor es el factor Q, menor es el amortiguamiento en el campo y mayor es el tiempo que éste está dentro de la cavidad, asegurando que se favorezca la interacción átomo-campo.

En la realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings, se utilizó una cavidad óptica con paredes superconductoras de niobio y espejos esféricos. El factor Q de ésta fue $Q = 3 \times 10^8$, lo que permite que dentro de la cavidad haya fotones durante un tiempo aproximado de 1ms. Éste es un tiempo mucho mayor en comparación con el tiempo de interacción átomo-campo, el cual está limitado al tiempo que tarda el átomo en atravesar la cavidad y es del orden de unos pocos μs [27].

El esquema del experimento se ilustra en la Figura 3.3. La cavidad se prepara de forma que en ausencia de átomos y de campo, presente una temperatura de $T = 0.8K$, correspondiente con

un número promedio de fotones de $\bar{n} = 0.06$. Primero, un haz de átomos de ^{87}Rb es generado en el horno y enviado a un condensador donde se preparan los átomos de Rb en un estado circular de Rydberg siguiendo el método AMTM (adiabatic microwave transfer method), por sus siglas en inglés [28, 31, 32]. Posteriormente, con una frecuencia de repetición de 660 Hz y a través de pulsos de $2 \mu\text{s}$ de duración, los átomos de Rydberg son enviados hacia la cavidad. Los átomos cruzan la cavidad, la cual contiene dos modos de polarización ortogonal. La elipticidad de los espejos hace que se rompa la degeneración en los modos, separándolos con una frecuencia de 111 KHz. La frecuencia más baja coincide con la frecuencia de transición entre los dos estados circulares de Rydberg caracterizados por el número cuántico principal $n = 51$ y $n = 50$ ($\nu = 51.099 \text{ GHz}$). Los átomos son detectados después de que salen de la cavidad con un campo selectivo de ionización y se mide la transferencia del estado excitado al estado base.

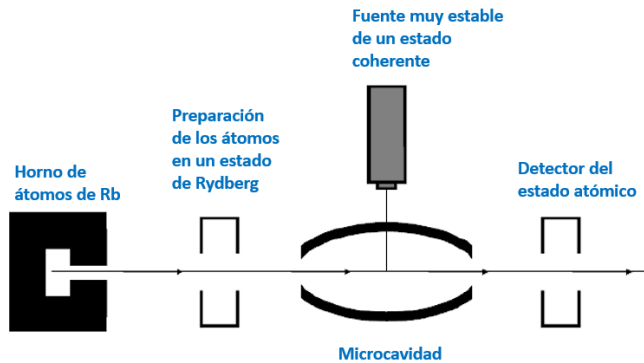


Figura 3.3: Esquema de la realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings. Imágen tomada de la referencia [33].

Como se ha mencionado, el modelo requiere de un átomo que se comporte como un sistema efectivo de dos niveles. Esto puede lograrse al trabajar con átomos de Rydberg. Éstos son átomos en los que uno de sus electrones, usualmente el electrón de valencia de un átomo alcalino, es excitado a un estado con un número cuántico principal muy alto ($n \sim 50$). Cuando el átomo se encuentra en un estado con $n \geq 50$, $l = n - 1$ y $|m| = n - 1$ (donde m es el número cuántico magnético), se dice que el átomo está en un estado de Rydberg circular. Estos estados sólo permiten la transición dipolar dada por: $n \Leftrightarrow n - 1$ y $|m| \Leftrightarrow |m| - 1$. Así, el átomo se comporta como un sistema de dos niveles.

Capítulo 4

Estados cuánticos de la luz

La luz ha sido descrita desde los marcos de referencia de la física clásica y la física cuántica. A partir de la descripción clásica, la luz se especifica como campos vectoriales que satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Así, la intensidad de un haz de luz en un punto del espacio al tiempo t se describe por una función univaluada positiva $I(t)$, la cual puede medirse con una precisión arbitraria y su valor no es afectado por el proceso de medición.

En contraste, en la teoría cuántica los campos vectoriales y la intensidad de la luz son representados como operadores (Capítulo 2), los cuales actúan sobre estados de la luz definidos por un vector ket. Es justamente la acción de los operadores sobre los vectores ket lo que representa el acto de medición. En general, el proceso de medición modifica el estado de la luz, por lo que mediciones del mismo vector de estado pueden registrar resultados diferentes.

A pesar de la distinción entre las teorías mencionadas, dentro de la descripción cuántica de la luz, existen fenómenos ópticos que tienen similitudes con las propiedades de los campos vectoriales clásicos. Debido a esto, muchos trabajos teóricos y experimentales se han dedicado a estudiar las propiedades estadísticas y las fluctuaciones de la luz, las cuales permiten diferenciar (dentro de la descripción cuántica) estados clásicos y estados no clásicos de la luz. Por ejemplo, en 1963, Glauber estableció que las mediciones en el grado de coherencia de segundo orden, permiten diferenciar la naturaleza de los estados de la luz. La teoría clásica establece que estas coherencias de segundo orden se ven reflejadas en desigualdades que deben satisfacerse. Si estas desigualdades se cumplen, entonces, se trata de un estado clásico de la luz. Por el contrario, si se violan las desigualdades, entonces, la luz está en un estado no clásico.

En este capítulo se definen diferentes estados de la luz, así como sus propiedades y características que permiten distinguirlos entre estados clásicos y estados no clásicos. Así mismo, se definen las funciones de cuasi-distribución de probabilidad de Husimi y Wigner, que aunque son las observables fundamentales en el formalismo de espacio fase de la mecánica cuántica, en este trabajo son utilizadas como un recurso ilustrativo para visualizar el campo electromagnético del sistema átomo-campo estudiado.

4.1. Estados de Fock

Los estados de Fock, son estados con propiedades muy distintas a las observadas en los campos clásicos. Una de sus aplicaciones más comunes es la generación de estados de la luz con un solo fotón. Este tipo de estados son ampliamente utilizados en tecnologías cuánticas y metrología. Existen diferentes formas de generarlos. En el capítulo 6 se muestra un procedimiento para construirlos a partir del modelo de Jaynes-Cummings.

Como se discutió previamente, un campo electromagnético cuantizado es equivalente a un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, cada uno de ellos descrito por un Hamiltoniano del tipo

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \quad (4.1)$$

donde ω es la frecuencia de oscilación asociada a un modo de la luz. Encontrar las funciones y valores propios de este Hamiltoniano es equivalente a encontrarlas para el operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, ya que se satisface la relación de conmutación $[\hat{H}, \hat{n}] = 0$, por lo que ambos operadores comparten una misma base.

Así, el problema de eigenvalores a resolver es

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.2)$$

donde n es el valor propio del operador \hat{n} y $|n\rangle$ es el correspondiente eigenvector. El operador de número \hat{n} es un operador hermitiano y, por lo tanto, sus eigenvalores son reales y sus eigenvectores forman una base completa y ortonormal.

Una característica importante de los valores propios n es que sólo pueden tomar valores no negativos, lo cual se deduce del valor esperado

$$\langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n\langle n|n\rangle \quad \text{con} \quad \langle n|n\rangle \geq 0. \quad (4.3)$$

De la relación de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ se puede obtener la relación $[\hat{a}, \hat{n}] = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} = \hat{a}$ y con ella

$$\hat{n}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{n} - [\hat{a}, \hat{n}])|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle. \quad (4.4)$$

Esto implica que $\hat{a}|n\rangle$ es también un eigenvector del operador \hat{n} con valor propio $n-1$ y, por lo tanto, se puede denotar como $|n-1\rangle$. Debido a que los eigenvalores de \hat{n} sólo pueden tomar valores positivos, existe un estado $|0\rangle$ tal que $\hat{a}|0\rangle = 0$. A este estado se le conoce como estado base y no contiene excitaciones. De forma similar, se puede obtener la relación

$$\hat{n}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (4.5)$$

De las ecuaciones (4.4) y (4.5), se observa que los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger actúan como operadores escalera disminuyendo y aumentando, respectivamente, el número de excitaciones en un estado.

Estos operadores se conocen como operadores de creación y aniquilación y son análogos a los presentados en el capítulo 2 en la sección de segunda cuantización para bosones. Sin embargo, es importante notar que su interpretación física es distinta a la que se le da en sistemas de partículas con masa, ya que, en la descripción del campo electromagnético no se crean ni destruyen partículas con masa, sino que se aumenta o disminuye el número de excitaciones asociadas a un modo del campo. Estas excitaciones están dadas por el número de fotones con energía $\hbar\omega$ presentes en un modo.

A partir de la aplicación sucesiva del operador de creación sobre el estado base $|0\rangle$, es posible construir todos los demás estados del sistema como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (4.6)$$

donde $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ es una constante de normalización. Estos estados normalizados se conocen como *Estados de Fock* y cumplen con ser eigenfunciones del operador número y con tener eigenvalores que representan el número de excitaciones o fotones presentes en el modo.

La acción de los operadores de creación y aniquilación sobre los estados de Fock, está dada por las relaciones

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad , \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle . \quad (4.7)$$

Nuevamente, se hace énfasis en que el sentido físico de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger sobre los estados de Fock, es distinto al sentido físico que se les da cuando se aplican sobre un estado que describe un sistema de muchas partículas. Al aplicarse sobre los estados de Fock, los eigenvectores del operador \hat{n} , se crean o se destruyen fotones con energía $\hbar\omega$ en un modo. Finalmente, debido a que los estados $|n\rangle$ son funciones propias de un operador hermitiano, satisfacen las condiciones de ortonormalidad y cerradura mencionadas anteriormente,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad , \quad \sum_n^\infty |n\rangle \langle n| = \hat{I} . \quad (4.8)$$

Una de las características importantes de los estados de Fock, es que son estados con un número de fotones definidos, lo cual se refleja en que las fluctuaciones asociadas al operador \hat{n} son cero. Para cualquier operador arbitrario \hat{O} , las fluctuaciones de su valor esperado se obtienen de la varianza, la cual se define como

$$\langle (\Delta\hat{O})^2 \rangle = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2 . \quad (4.9)$$

Así, las fluctuaciones en \hat{n} para un estado de Fock están dadas por

$$\langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle = \langle n|\hat{n}^2|n\rangle - \langle n|\hat{n}|n\rangle^2 = n^2 - n^2 = 0 . \quad (4.10)$$

Una consecuencia directa de este resultado, es que la energía del estado tampoco presenta fluctuaciones, ya que el número de fotones en un estado y su energía sólo difieren de la constante $\frac{\hbar\omega}{2}$, como se observa en el hamiltoniano (4.1).

Las fluctuaciones del campo electromagnético presentan un comportamiento diferente. Para visualizarlo, usamos la definición del operador electromagnético en término de los operadores de cuadratura dada en (2.22). Al calcular los valores esperados correspondientes se obtiene

$$\langle n|\hat{X}_1|n\rangle = \langle n|\hat{X}_2|n\rangle = 0 \quad \implies \quad \langle n|\hat{E}|n\rangle = 0. \quad (4.11)$$

El valor esperado del campo eléctrico es cero, a pesar de que existan n fotones presentes. Este comportamiento es muy distinto al de un campo clásico y muestra el carácter cuántico de los estados de Fock. Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{X}_1^2|n\rangle &= \frac{1}{4} \langle n|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle n|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|n\rangle \\ &= \frac{1}{4}(2n + 1). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Similarmente $\langle n|\hat{X}_2^2|n\rangle = \frac{1}{4}(2n + 1)$. Por lo tanto, las fluctuaciones asociadas al campo eléctrico están dadas por

$$\langle (\Delta\hat{E})^2 \rangle \approx \langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle \cos^2 \omega t + \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle \sin^2 \omega t \approx \frac{1}{4}(2n + 1), \quad (4.13)$$

es decir, las fluctuaciones del campo aumentan con el número de fotones y para el caso del estado base o estado vacío en el que $n = 0$, la fluctuación es de $\frac{1}{4}$ y se conoce como fluctuación del vacío. Otra propiedad característica de los estados de Fock, es que no tienen una fase definida. Su ángulo de fase puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π .

Los estados de Fock de la luz son utilizados en las tecnologías cuánticas debido a sus propiedades no clásicas. Sin embargo, en la descripción de otros sistemas es deseable trabajar con estados de la luz con propiedades que se asemejen a las observadas en los campos clásicos. Particularmente, resulta útil trabajar con estados de la luz en los que el valor esperado del campo electromagnético sea distinto de cero y que reproduzca el valor clásico del campo. Los estados coherentes de la luz cumplen con esta propiedad y, por lo tanto, son considerados como la versión cuántica de los estados clásicos de la luz.

4.2. Estados Coherentes

En la sección anterior, se definieron los estados de Fock y se mencionó que una de sus características particulares es que el valor esperado del campo electromagnético es cero. En la descripción de algunos sistemas, es deseable trabajar con estados de la luz con propiedades que se asemejen a las observadas en los campos clásicos. Particularmente, resulta útil trabajar con estados de la luz en los que el valor esperado del campo electromagnético es distinto de cero y reproduce el valor del campo clásico. En esta sección, se definen los estados coherentes de la luz, los cuales cumplen con estas características y además, presentan una dinámica muy

similar al comportamiento oscilatorio del sistema análogo clásico, por lo que son considerados los estados cuánticos que más se asemejan a los estados clásicos de la luz.

Los estados coherentes, denotados por el ket $|\alpha\rangle$, pueden definirse de tres formas equivalentes: como estados del vacío desplazado, como eigenfunciones del operador de aniquilación \hat{a} y a partir de una función generadora de los estados de oscilador armónico. A continuación, se presentan cada una de estas definiciones y se menciona que la definición como función generadora es útil para obtener una realización de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger .

Estado del vacío desplazado

De la mecánica cuántica, se sabe que es posible realizar una transformación unitaria sobre un conjunto completo de funciones ortonormales para generar otro conjunto nuevo. Este es el caso de los estados coherentes, los cuales se pueden definir a través de la acción de un operador unitario de desplazamiento, $\hat{D}(\alpha)$, sobre el estado de Fock del vacío, $|0\rangle$. Así, el estado coherente se define como

$$|\alpha\rangle \equiv \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (4.14)$$

donde el operador de desplazamiento está dado por

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (4.15)$$

Utilizando la relación de Baker-Campbell-Hausdorff para dos operadores \hat{A} y \hat{B} , tales que su conmutador es un escalar,

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad (4.16)$$

se encuentra que el operador $\hat{D}(\alpha)$ y su complejo conjugado $\hat{D}^\dagger(\alpha)$ pueden reescribirse como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}, \quad (4.17.1)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha^*\hat{a}} e^{-\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (4.17.2)$$

Al utilizar (4.17.1) y aplicarlo sobre el estado vacío, se demuestra que

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle, \quad (4.18)$$

donde se usó el hecho que $\hat{a}|0\rangle = 0$. Si se desarrolla la exponencial en series se llega a la expresión

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.19)$$

es decir, los estados coherentes son una combinación lineal de los estados de Fock con $e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$ como un factor de normalización.

Función generadora de estados del oscilador armónico

La expresión (4.19) permite establecer la definición de los estados coherentes a partir de una función generadora, esto es,

$$\boxed{|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}. \quad (4.20)$$

Es importante notar que estos estados son no normalizados y, por lo tanto, guardan la relación $|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |\alpha\rangle$. Al no estar normalizados, el traslape de estos estados está dado por

$$\{\alpha'|\alpha\rangle = \sum_{m,n} \frac{\alpha'^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = \sum_{m,n} \frac{\alpha'^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \delta_{m,n} = \sum_n \frac{(\alpha'^* \alpha)^n}{n!} = e^{\alpha'^* \alpha}. \quad (4.21)$$

A continuación establecemos el procedimiento para encontrar una realización de los operadores de creación y aniquilación, esto es,

$$\{\alpha|\hat{a}|\Psi\rangle = \{0|e^{\alpha^* \hat{a}} \hat{a}|\Psi\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \{0|e^{\alpha^* \hat{a}}|\Psi\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \{\alpha|\Psi\rangle}.$$

Esto implica

$$\hat{a} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha^*}. \quad (4.22)$$

En forma similar para el operador de creación tenemos que

$$\begin{aligned} \{\alpha|\hat{a}^\dagger|\Psi\rangle &= \{0|e^{\alpha^* \hat{a}} \hat{a}^\dagger e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha^* \hat{a}}|\Psi\rangle = \{0|(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)e^{\alpha^* \hat{a}}|\Psi\rangle \\ &= \alpha^* \{0|e^{\alpha^* \hat{a}}|\Psi\rangle = \alpha^* \{\alpha|\Psi\rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\hat{a}^\dagger \longrightarrow \alpha^*. \quad (4.23)$$

Funciones propias del operador de aniquilación \hat{a}

Utilizando el operador de desplazamiento definido en (4.17.1), es posible transformar el operador de aniquilación y los estados de Fock como

$$\hat{a}' = \hat{D}(\alpha) \hat{a} \hat{D}^\dagger(\alpha) \quad \text{y} \quad |n\rangle' = \hat{D}(\alpha) |n\rangle. \quad (4.24)$$

Si se utilizan las expresiones dadas en (4.17), se encuentra que

$$\hat{a}' = e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\alpha \hat{a}^\dagger} = \hat{a} - \alpha. \quad (4.25)$$

Además, debido a que $\hat{D}(\alpha)$ es un operador unitario, se satisface que la norma de los vectores transformados $|n\rangle'$ debe ser igual a la norma de los estados de Fock $|n\rangle$, esto es,

$$\langle n'|n'\rangle = \langle n|\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha)|n\rangle = \langle n|\hat{I}|n\rangle = \langle n|n\rangle \geq 0. \quad (4.26)$$

Por lo tanto, debe existir un estado límite denotado como $|0\rangle'$, tal que

$$\hat{a}' |0\rangle' = 0. \quad (4.27)$$

Al reescribir esta condición utilizando las transformaciones dadas en (4.24) y (4.25), se tiene

$$\begin{aligned} (\hat{a} - \alpha)\hat{D}(\alpha)|0\rangle &= 0 \\ \hat{a}\hat{D}(\alpha)|0\rangle &= \alpha\hat{D}(\alpha)|0\rangle, \end{aligned} \quad (4.28)$$

es decir, el ket $\hat{D}(\alpha)|0\rangle$ es eigenfunción de \hat{a} con valor propio α y, por lo tanto, puede ser denotado como $|\alpha\rangle$. Así, se llega a la definición del estado coherente como eigenfunción del operador de aniquilación \hat{a} ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (4.29)$$

Es importante notar que \hat{a} es un operador no Hermitiano, por lo que α es un número complejo de modo que

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|, \quad (4.30)$$

y, los estados $|\alpha\rangle$ no necesariamente son ortogonales ni deben satisfacer la relación de completés. Sin embargo, usando la relación de identidad de los estados de Fock, se pueden escribir los estados coherentes,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle, \quad (4.31)$$

donde $\langle n|\alpha\rangle$ es la representación de los estados coherentes en la base de Fock y puede determinarse al multiplicar por el bra $\langle n|$ la expresión (4.29), esto es

$$\langle n|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \quad (4.32)$$

Así se llega a la relación de recurrencia

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle, \quad (4.33)$$

de donde se deduce que

$$\langle n|\hat{a}|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle. \quad (4.34)$$

Finalmente,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.35)$$

El coeficiente $\langle 0|\alpha\rangle$ puede encontrarse al pedir que $|\alpha\rangle$ esté normalizado.

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 |e^{|\alpha|^2}| = 1. \quad (4.36)$$

Así, los estados coherentes en términos de los estados de Fock están dados por

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.37)$$

por lo tanto, las tres definiciones presentadas son equivalentes. A pesar de que $|\alpha\rangle$ son eigenfunciones de un operador no Hermitiano, cumplen con ser una base completa y su relación de completés está dada por

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha = \hat{I}. \quad (4.38)$$

4.2.1. Estadística de los estados coherentes

Una de las características más importantes de los estados coherentes es que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg,

$$\Delta\hat{x} \Delta\hat{p} = \frac{1}{2}, \quad (4.39)$$

donde usamos $\hbar = 1$. Para demostrarlo, tenemos que calcular las varianzas de los operadores de posición y momento. Recordamos su forma en términos de los operadores de creación y aniquilación,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad , \quad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \\ \hat{x}^2 &= \frac{1}{2}[(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2] \quad , \quad \hat{p}^2 = -\frac{1}{2}[(\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2]. \end{aligned}$$

Sus valores esperados en la base de estados coherente $|\alpha\rangle$ son

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle &= \sqrt{2} \operatorname{Re}[\alpha], & \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle &= \sqrt{2} \operatorname{Im}[\alpha], \\ \langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], & \langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}[1 - (\alpha - \alpha^*)^2]. \end{aligned}$$

Así, al calcular las varianzas se obtienen

$$\Delta\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \Delta\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.40)$$

Finalmente, con el producto de estas cantidades se demuestra la igualdad (4.39). Para calcular el valor esperado del campo eléctrico se utiliza la definición de éste en términos de los operadores de cuadratura (2.22).

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle &\approx \langle\alpha|\hat{X}_1|\alpha\rangle \cos\omega t + \langle\alpha|\hat{X}_2|\alpha\rangle \sin\omega t \\ &\approx \frac{1}{2}[(\alpha + \alpha^*) \cos\omega t - i(\alpha - \alpha^*) \sin\omega t] \\ &\approx \frac{1}{2} [\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

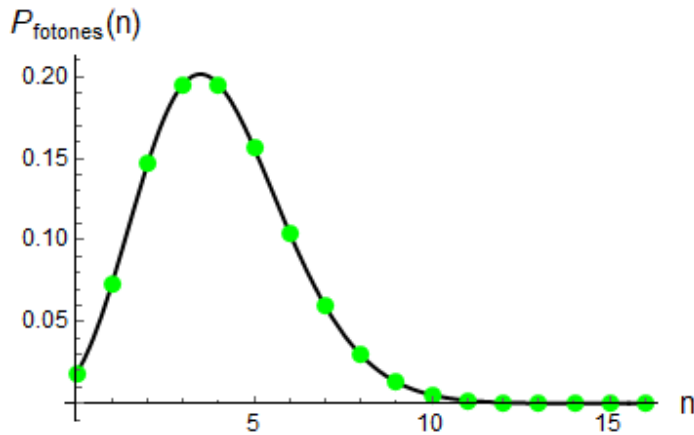


Figura 4.1: Distribución de Poisson que describe la probabilidad de encontrar n fotones en una cavidad cuando se cuantiza el campo electromagnético como un estado coherente.

A diferencia de los estados de Fock, el valor esperado del campo electromagnético es distinto de cero y su valor oscila con el tiempo, por lo que presenta un comportamiento similar al del campo clásico. Además, al calcular la fluctuación del campo eléctrico se observa que ésta es igual que la del estado vacío, por lo que su fluctuación es mínima y está dada por

$$\Delta \hat{E} = \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.42)$$

donde V es el volúmen en donde se encuentra confinado el campo. Por otro lado, es importante notar que el parámetro $|\alpha|$ está relacionado con la amplitud del campo, lo cual se deduce de la ecuación (4.41). Asimismo, al calcular el valor esperado de \hat{n}

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (4.43)$$

se observa que $|\alpha|^2$ es el promedio de fotones, \bar{n} , en el campo. Finalmente, para obtener las fluctuaciones asociadas al número de fotones, es necesario calcular

$$\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (4.44)$$

lo que da lugar a

$$\Delta \hat{n} = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = (\bar{n})^{\frac{1}{2}}. \quad (4.45)$$

Éste es un resultado característico de un proceso de Poisson, lo cual se corrobora al calcular la distribución de probabilidad del número de fotones en el campo, dada por

$$|\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (4.46)$$

y que se ilustra en la Figura 4.1.

4.3. Estados Coherentes de $SU(1, 1)$

En esta sección se definen los estados comprimidos de la luz de uno y dos modos [34] a partir del álgebra de Lie $SU(1,1)$, por lo que se comienza con una pequeña introducción sobre teoría de grupos y de las propiedades de $SU(1,1)$.

Tanto en física como en química conocer la simetría de un sistema resulta de interés, ya que es útil para resolver problemas en mecánica cuántica. Por ejemplo, se sabe que la simetría de un sistema está relacionada con una propiedad invariante. El conjunto de transformaciones que preservan esta cantidad invariante, junto con la operación de composición de las transformaciones forman un grupo. Un ejemplo son los sistemas bajo potenciales centrales, los cuales son invariantes ante operaciones de rotación en \mathbb{R}^3 que son transformaciones del grupo $SO(3)$. Este grupo es homomórfico a $SU(2)$, al cual pertenecen los operadores de momento angular. Así, si se desea estudiar un sistema con potencial central se puede saber que la solución para la parte angular estará dada en términos de los armónicos esféricos.

En teoría de grupos, un grupo \mathcal{G} se define como el conjunto de elementos $\{f, g, h, k, \dots\}$ que se relacionan entre sí a través de una operación binaria que se conoce como multiplicación del grupo y se denota como \circ . Las propiedades de un grupo son

- **Cerradura:** Si $f, g \in \mathcal{G}$, entonces, $f \circ g \in \mathcal{G}$.
- **Identidad:** Existe el elemento identidad e en \mathcal{G} , tal que

$$e \circ f = f \circ e = f \quad \text{para toda } f \in \mathcal{G}$$

- **Inverso:** Para toda $f \in \mathcal{G}$ existe un elemento f^{-1} tal que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

- **Asociatividad:** La identidad $f \circ (h \circ k) = (f \circ h) \circ k$ se satisface para todo $f, h, k \in \mathcal{G}$.

Para los propósitos del trabajo de tesis, un grupo de Lie de n parámetros es un grupo cuyos elementos pueden expresarse como funciones analíticas $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de n parámetros independientes, α_j , de tal modo que

- El elemento identidad $e = e(0, \dots, 0)$ corresponde a los valores $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- Las operaciones de multiplicación del grupo e inversión son funciones analíticas de los parámetros en alguna vecindad del elemento identidad.

Usando la notación $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la segunda propiedad implica que si $g(\alpha)$ y $g(\beta)$ son dos elementos del grupo definidos en una vecindad de la identidad entonces existen funciones

analíticas $\gamma_j = \gamma_j(\alpha, \beta)$ y $\delta(\alpha)$, con $j = 1, \dots, n$, tales que en alguna vecindad de la identidad se tiene que

$$g(\gamma) = g(\alpha)g(\beta), \quad g^{-1}(\alpha)g(\alpha) = g(\delta(\alpha)) \equiv e(0).$$

Los ejemplos más simples de grupos de Lie son los grupos matriciales para los cuales cada elemento del grupo g es una matriz $n \times n$ y cada elemento de matriz $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ es una función analítica de los n parámetros. El álgebra de Lie correspondiente puede obtenerse de los elementos del grupo en la vecindad de la identidad. Esto implica que la correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie es de n a 1, esto es, varios grupos de Lie, no isomórficos, pueden tener la misma álgebra de Lie.

Dado un elemento α de un campo \mathcal{F} y A, B, C elementos de un álgebra de Lie \mathcal{L} , se satisfacen las siguientes propiedades bajo la operación de conmutación,

- $[A, B] \in \mathcal{L}$,
- $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$,
- $\alpha[A, B] = [\alpha A, B] = [A, \alpha B]$,
- $[A, B] = -[B, A]$,
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Dado que un álgebra de Lie tiene una estructura subyacente de espacio vectorial, entonces, una base para ese espacio constituye una base para el álgebra de Lie. Así, si $\{L_j : j = 1, \dots, n\}$ es una base para el álgebra de Lie \mathcal{L} , se tiene que los elementos de la base satisfacen las relaciones de conmutación,

$$[L_j, L_k] = \sum_{\ell} c_{jkl} L_{\ell}, \quad (4.47)$$

donde las constantes c_{jkl} se llaman constantes de estructura del álgebra de Lie. Cada elemento de la base es un generador infinitesimal de un subgrupo asociado a un parámetro del grupo de Lie correspondiente. Por ese motivo se les llama generadores del álgebra. Para toda álgebra de Lie, es posible construir operadores que conmutan con todos los elementos L_i . Éstos se conocen como operadores de Casimir.

El grupo de Lie $SU(1,1)$ está formado por los generadores $\{\hat{K}_0, \hat{K}_1, \hat{K}_2\}$ que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i\hat{K}_0, \quad [\hat{K}_0, \hat{K}_1] = i\hat{K}_2, \quad [\hat{K}_2, \hat{K}_0] = i\hat{K}_1. \quad (4.48)$$

El operador de Casimir asociado a esta álgebra es

$$\hat{K}^2 = \hat{K}_0^2 - \hat{K}_1^2 - \hat{K}_2^2 = \hat{K}_0^2 - \frac{1}{2}(\hat{K}_+ \hat{K}_- + \hat{K}_- \hat{K}_+), \quad (4.49)$$

y satisface la relación $[\hat{K}^2, \hat{K}_i] = 0$ con $i = 0, 1, 2$. En cualquier representación irreducible tiene la forma $\hat{K}^2 = w(w-1)\hat{I}$. De forma análoga a los operadores de momento angular, es posible definir operadores escalera, \hat{K}_\pm , que resultan útiles para construir los estados del sistema a partir del estado base. Estos se definen como

$$\hat{K}_\pm = \hat{K}_1 \pm i\hat{K}_2, \quad (4.50)$$

y cumplen con las relaciones

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm\hat{K}_\pm \quad , \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = -2\hat{K}_0. \quad (4.51)$$

Conocer las relaciones de conmutación permite dar una elección de los operadores a partir de los cuales se puede construir la base del sistema. En este caso, se elige a $\{\hat{K}$ y $\hat{K}_0\}$, los cuales son diagonalizables simultáneamente y, por lo tanto, comparten una base denotada por $|w, k\rangle$. La acción de los operadores sobre la base es

$$\hat{K}^2 |w, k\rangle = w(w-1) |w, k\rangle \quad (4.52.1)$$

$$\hat{K}_0 |w, k\rangle = (w+k) |w, k\rangle \quad (4.52.2)$$

$$\hat{K}_+ |w, k\rangle = \sqrt{(k+1)(2w+k)} |w, k+1\rangle \quad (4.52.3)$$

$$\hat{K}_- |w, k\rangle = \sqrt{k(2w+k-1)} |w, k-1\rangle, \quad (4.52.4)$$

donde $w > 0$ y se conoce como índice de Bargmann y $k = 0, 1, 2, \dots$ es un número entero positivo. Todos los estados del sistema pueden ser contruidos a partir de la aplicación sucesiva del opeador escalera \hat{K}_+ sobre el estado base $|w, 0\rangle$, de la forma

$$|w, k\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma(2w)}{\Gamma(2w+k) k!}} (\hat{K}_+)^k |w\rangle. \quad (4.53)$$

Finalmente, dependiendo de la realización de los operadores \hat{K}_i , el grupo SU(1,1) puede ser utilizado para describir los estados comprimidos de uno y dos modos de la luz. A continuación se describen ambos estados.

4.3.1. Estados Comprimidos de un modo

Si se escoge la realización

$$\hat{K}_+ = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger)^2 \quad , \quad \hat{K}_- = \frac{1}{2}\hat{a}^2 \quad , \quad \hat{K}_0 = \frac{1}{4}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (4.54)$$

y se substituye en la definición del operador \hat{K} dada en (4.49), se obtiene que en esta representación el operador de Casimir se reduce a $\hat{K} = w(w-1) = -\frac{3}{16}$, la cual tiene como solución $w = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. Por lo tanto esta realización tiene dos representaciones irreducibles.

El espacio de Hilbert formado por los estados en los que $w = \frac{1}{4}$, $\mathcal{H}_{1/4}$, consiste en los estados de Fock con un número par de fotones, esto es

$$|\frac{1}{4}, k\rangle = |2k\rangle \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

Por otro lado el espacio de espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{3/4}$ en el que $w = \frac{3}{4}$ está formado por los estados de Fock con un número impar de fotones,

$$|\frac{3}{4}, k\rangle = |2k + 1\rangle \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

El operador unitario de desplazamiento de este grupo, también conocido como operador de compresión, está definido como

$$\hat{S}(\zeta) = e^{(\zeta \hat{K}_+ - \zeta^* \hat{K}_-)} = e^{\frac{1}{2}(\zeta \hat{a}^{\dagger 2} - \zeta^* \hat{a}^2)}, \quad (4.55)$$

donde $\zeta = r e^{-i\theta}$ con $0 < r < \infty$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Este operador unitario corresponde a un proceso físico y tiene la propiedad de hacer una transformación de escala en las cuadraturas del campo electromagnético, esto es,

$$S^\dagger(r) \hat{x}_1 S(r) = \hat{x}_1 e^r, \quad S^\dagger(r) \hat{x}_2 S(r) = \hat{x}_2 e^{-r}. \quad (4.56)$$

La acción de $S(\zeta)$ sobre el estado de vacío $|\frac{1}{4}, 0\rangle = |0\rangle$ y sobre el primer estado excitado de un oscilador $|\frac{3}{4}, 0\rangle = |1\rangle$, crea los estados coherentes de dos fotones que designamos por

$$|\frac{1}{4}, \eta\rangle = \hat{S}(\zeta) |0\rangle = e^{(\zeta \hat{K}_+ - \zeta^* \hat{K}_-)} |0\rangle \quad (4.57.1)$$

$$|\frac{3}{4}, \eta\rangle = \hat{S}(\zeta) |1\rangle = e^{(\zeta \hat{K}_+ - \zeta^* \hat{K}_-)} |1\rangle \quad (4.57.2)$$

donde por conveniencia usamos el parámetro complejo $\eta = \zeta/|\zeta| \tanh |\zeta|$. Usando la relación

$$\exp(\zeta \hat{K}_+ - \zeta^* \hat{K}_-) = \exp(\alpha \hat{K}_+) \exp(\beta \hat{K}_0) \exp(\gamma \hat{K}_-),$$

con

$$\beta = \ln(1 - \eta\eta'^*)^{-2}, \quad \alpha = \frac{\eta}{1 - \eta\eta'^*}, \quad \gamma = \frac{-\eta'^*}{1 + \eta\eta'^*}$$

podemos escribir los estados (4.57) en términos de los estados base que portan la representación irreducible w del grupo $SU(1,1)$,

$$|\frac{1}{4}, \eta\rangle = S(\zeta) |0\rangle = (1 - |\eta|^2)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(1/2 + k)}{\Gamma(1/2)k!}} \eta^k |2k\rangle \quad (4.58.1)$$

$$|\frac{3}{4}, \eta\rangle = S(\zeta) |1\rangle = (1 - |\eta|^2)^{\frac{3}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(3/2 + k)}{\Gamma(3/2)k!}} \eta^k |2k + 1\rangle. \quad (4.58.2)$$

Ambos estados están relacionados por el operador de aniquilación \hat{a} ,

$$\hat{a} |\frac{1}{4}\eta\rangle = \frac{\eta}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} |\frac{3}{4}\eta\rangle$$

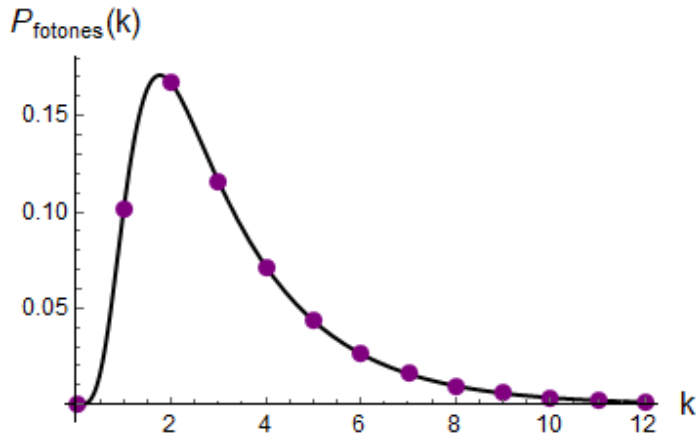


Figura 4.2: Distribución que describe la probabilidad de encontrar k fotones en una cavidad cuando se cuantiza el campo electromagnético como un estado comprimido.

4.3.2. Estados comprimidos de dos modos

La descripción de estos estados se hace al elegir la siguiente representación para los generadores del grupo $SU(1,1)$,

$$\hat{K}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger, \quad \hat{K}_- = \hat{a}_1 \hat{a}_2, \quad \hat{K}_0 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1).$$

Los estados coherentes $SU(1,1)$ de dos modos son generados por la acción de un operador de compresión $\hat{S}_2(\zeta)$ sobre un estados de Fock de dos modos $|n_1, n_2\rangle_F$. El operador de compresión está definido como

$$\hat{S}_2(\zeta) = e^{(\zeta^* \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \zeta \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger)} = e^{(\zeta^* \hat{K}_- - \zeta \hat{K}_+)},$$

donde $\zeta = -\frac{1}{2}\theta e^{-i\phi}$ con $0 < \theta < \infty$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. El estado de Fock de dos modos sobre el que actúa el operador de compresión se elige como $|q, 0\rangle_F$ donde $q > 0$ y es un número entero. Así, el estado coherente generado es

$$|\eta, q\rangle = \hat{S}_2(\zeta) |q, 0\rangle_F = (1 - |\eta|^2)^{\frac{q+1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(q+n)!}{n! q!}} \eta^n |q+n, n\rangle_F. \quad (4.59)$$

El parámetro complejo η describe este estado coherente $SU(1,1)$ y por conveniencia está definido como

$$\eta = -\tanh(\theta/2) e^{-i\phi}.$$

4.4. Funciones de distribución de cuasiprobabilidad

Para describir los estados del sistema átomo-campo, resulta útil introducir las funciones de cuasidistribución de probabilidad utilizadas como variables fundamentales en el formalismo

de la mecánica cuántica en el espacio fase y como un recurso en óptica cuántica para ilustrar la evolución del campo electromagnético de un sistema. A continuación, se describe brevemente las características más importantes de esta representación.

Como se mencionó, la mecánica cuántica puede ser estudiada a partir de diferentes esquemas o formulaciones. Por ejemplo, uno de los más conocidos es la formulación de Schrödinger, en la que el estado del sistema es descrito por una función de onda que se puede representar en el espacio de posiciones, $\Psi(\mathbf{r})$, o en el espacio de momentos $\Psi(\mathbf{p})$. Una formulación distinta es la del espacio fase [25]. En ésta, las variables de posición y momento se utilizan simultáneamente y el estado es descrito por una cuasi-distribución de probabilidad y no por una función de onda, un vector de estado o una matriz de densidad. Sin embargo, todas las formulaciones son matemáticamente equivalentes, ya que existe una correspondencia entre el espacio de funciones de onda y el espacio de cuasi-distribuciones de probabilidad [25].

La principal ventaja del formalismo en el espacio fase es que es similar a la mecánica estadística clásica, en el sentido en que ambas trabajan con funciones de distribución de probabilidad y en que no se utiliza el formalismo de operadores. Esta similitud permite hacer comparaciones entre las características clásicas y cuánticas de un sistema. Por ejemplo, en la mecánica estadística clásica se evalúa el promedio de una función $A_{cl}(x, p)$ que depende de las variables de posición y momento a través de una función de distribución de probabilidad $W_{cl}(x, p)$,

$$\langle A_{cl}(x, p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp A_{cl}(x, p) W_{cl}(x, p). \quad (4.60)$$

En la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase, es posible obtener el promedio de un observable de una forma análoga. La función de cuasi-distribución toma el papel de la función clásica de distribución y el observable se representa como una función de variables x y p

$$\langle \hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp A(x, p) W(x, p). \quad (4.61)$$

Donde $A(x, p)$ es la función que representa al operador \hat{A} en el espacio fase y se obtiene a partir de una transformación de Weyl, dada por

$$A(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{-ipy}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{A} | x - \frac{y}{2} \rangle. \quad (4.62)$$

Existen diferentes cuasi-distribuciones de probabilidad. Las más comunes son la función de Husimi y la función de Wigner. Ambas ofrecen otra forma de visualizar propiedades de sistemas cuánticos y proveen información sobre su comportamiento cuántico y clásico. A continuación se presentan su definición y propiedades.

4.4.1. Función de Wigner

Dado un vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ y su correspondiente matriz de densidad $\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$, la función de Wigner se define como la transformada de Fourier dada por

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + y | \hat{\rho} | q - y \rangle e^{-2ipy} dy. \quad (4.63)$$

Ésta cumple con las siguientes propiedades [35]:

Normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) = 1. \quad (4.64)$$

Área

El área de esta distribución se considera como una medida del comportamiento cuántico del sistema. Debido a que los estados coherentes satisfacen la incertidumbre de Heisenberg, su área en el espacio fase es mínima, por lo que se establece que a mayor área, mayor carácter cuántico del sistema.

$$A \geq \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W^2(q, p) \quad (4.65)$$

$$|W(q, p)| \leq \frac{1}{\pi \hbar} \quad (4.66)$$

Marginales

La integral de la función de Wigner sobre la coordenada de posición o sobre la coordenada de momento regresa la densidad de probabilidad de momentos o de posiciones, respectivamente.

- Marginal en q

Integrando sobre la variable de momento se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + y | \hat{\rho} | q - y \rangle e^{-2ipy} dy dp \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(q + y) \Psi^*(q - y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2py} dp \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi(q + y) \Psi^*(q - y) \pi \delta(y) \\ &= |\Psi(q)|^2, \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde se usó la representación de la delta de Dirac

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk = \delta(y - x)$$

y la propiedad

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x).$$

■ Marginal en p

Integrando sobre la variable de posición se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi(x + \frac{y}{2}) \Psi^*(x - \frac{y}{2}) dy dx. \quad (4.68)$$

Ahora, se hace el cambio de variables de la forma $q = x + \frac{y}{2}$ $q' = x - \frac{y}{2}$ con $dy dx = |J| dq dq'$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ip(q-q')}{\hbar}} \Psi(q) \Psi^*(q') dq dq' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipq}{\hbar}} \Psi(q) dq \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{ipq'}{\hbar}} \Psi(q') dq' \right]^* \\ &= \Phi(p) \Phi(p)^* = |\Phi(p)|^2 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Además de sus propiedades, un aspecto importante de esta función de cuasi-distribución de probabilidad es que para cualquier función de onda escrita como una combinación lineal de estados de Fock, se le puede asociar una función de Wigner reescrita en términos de una función auxiliar, la cual tiene una forma cerrada. Esto es, dada una función de la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

y con matriz de densidad en esta base

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle \langle m|,$$

la función de Wigner se puede escribir como

$$W_{\hat{\rho}}(q, p) = \sum_{n,m} c_n c_m^* W_{|n\rangle\langle m|}(q, p), \quad (4.70)$$

donde $W_{|n\rangle\langle m|}(q, p)$ se conoce como la función auxiliar de Moyal y su definición está dada por la expresión analítica

$$W_{|n\rangle\langle m|}(q, p) = \frac{(-1)^m}{\pi} 2^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (q - ip)^{n-m} e^{-(q^2+p^2)} \times L_m^{n-m}(2(q^2 + p^2)), \quad (4.71)$$

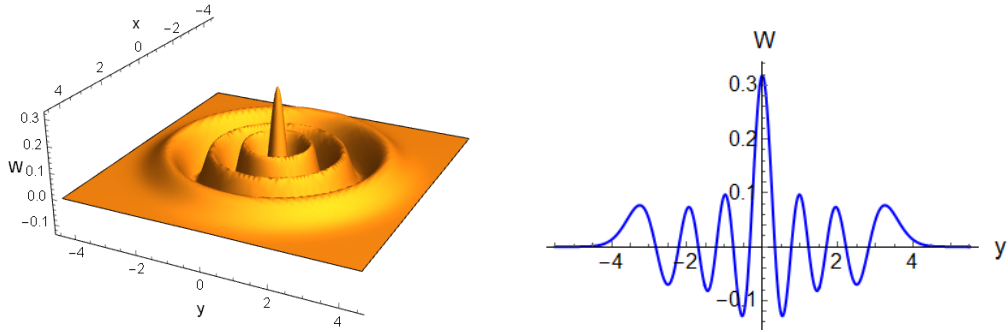


Figura 4.3: *Izquierda:* Función de Wigner para un estado de Fock con 6 fotones. *Derecha:* Corte a la la función de Wigner de la izquierda en $x = 0$ para ilustrar los valores negativos que puede tomar esta cuasi-distribución de probabilidad.

para $n \geq m$. Si $n < m$, se debe intercambiar $n \leftrightarrow m$ y $q - ip \leftrightarrow q + ip$. La deducción de esta función auxiliar se presenta en el Anexo 1.

Al tomar valores negativos, la función de Wigner resulta útil para ilustrar el carácter clásico de un estado de la luz (también reflejado en la presencia de fuertes correlaciones y de violaciones a la desigualdad de Cauchy-Schwarz), como se ilustra en la Figura 4.3 para un estado de Fock con $n = 5$.

4.4.2. Función de Husimi

La función de Husimi, designada como Q , es otra función de cuasi-distribución de probabilidad que permite visualizar el campo electromagnético y calcular los valores esperados de propiedades físicas a partir de ella. Una de sus características más importantes, es que a diferencia de la función de Wigner, la función Q es positiva sobre todo el espacio fase. Para un estado arbitrario de la luz está definida como

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \Psi \rangle \langle \Psi | \beta \rangle, \quad (4.72)$$

donde $|\beta\rangle$ es un estado coherente y $1/\pi$ es un factor de normalización. Los estados $|\beta\rangle$ dependen del parámetro complejo β que puede definirse $\beta = \text{Re}[\beta] + i \text{Im}[\beta] = x + iy$, entonces, la función Q también debe depender de estos parámetros, esto es, $Q(\beta) \equiv Q(x, y)$.

Es importante notar que la función de Husimi puede interpretarse como la probabilidad de que el estado $|\Psi\rangle$ se parezca a un estado coherente, por lo que sus valores necesariamente están acotados.

En este trabajo vamos a utilizar la función de Husimi para visualizar el comportamiento de la luz en modelos de interacción y materia. Esto puede hacerse determinando el operador de densidad reducida del campo $\hat{\rho}_F$. En este caso la función de Husimi se escribe,

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho}_F | \beta \rangle, \quad (4.73)$$

lo que implica que de forma general, la función Q es el valor esperado del operador de densidad $\hat{\rho}_F$ en la base de los estados coherentes $|\beta\rangle$.

Algunas de sus propiedades son las siguientes:

Normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, y) dx dy = 1. \quad (4.74)$$

Valores positivos y acotados

$$0 \leq Q(x, y) \leq \frac{1}{\pi} \quad (4.75)$$

Área

El segundo momento de la función de Husimi se ha propuesto como una medida de la complejidad de los estados cuánticos, en el sentido en que a mayor valor del área, el sistema toma un mayor carácter cuántico. Adicionalmente, sirve como una medida de la localización del sistema en el espacio fase [2]. El área que ocupa la función de Husimi en el espacio fase está asociada con el inverso del segundo momento $M^{(2)}$, esto es

$$A = \frac{1}{M^{(2)}}, \quad (4.76)$$

donde $M^{(2)}$ está definido como

$$M^{(2)} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q^2(x, y) dx dy. \quad (4.77)$$

El factor 2π se introduce para garantizar que el segundo momento asociado a un estado coherente con $\rho_F = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ sea $M^{(2)} = 1$. Así, para la función de Husimi de un estado coherente con $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, se tiene que $A = 1$, el cual es el valor mínimo que puede tomar el área de ésta función. Por lo tanto, $A > 1$ para una función de Husimi de cualquier otro estado de la luz distinto al estado coherente. Por ejemplo, para un estado de Fock, $Q(x, y)$ está dada por

$$Q_{|n\rangle\langle n|}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \frac{(x^2+y^2)^n}{n!}, \quad (4.78)$$

la cual tiene un segundo momento de

$$M^{(2)}(|n\rangle) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$$

con un área de

$$A(|n\rangle) = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

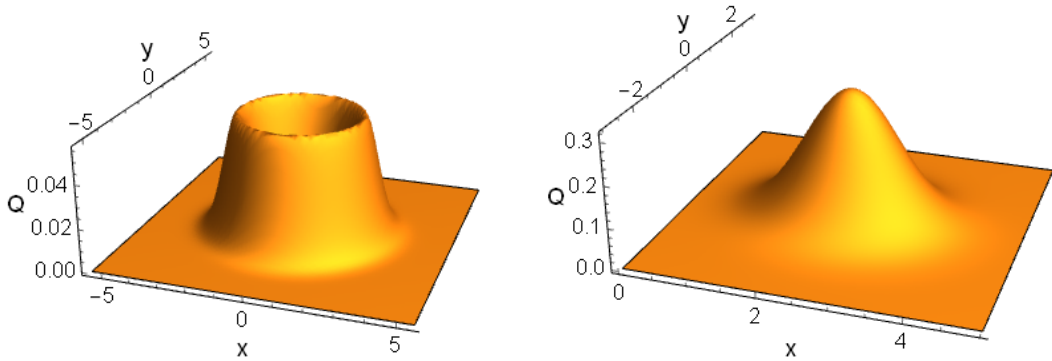


Figura 4.4: *Izquierda:* Función de Husimi para un estado de Fock con $n = 6$. *Derecha:* Función de Husimi para un estado coherente un número promedio de fotones $\bar{n} = |\alpha|^2 = 6$.

Para el caso en el que $n = 6$ el área de la función de Husimi es $A = 4.43$. Esta función se ilustra en la Figura 4.4, donde se comparan las funciones $Q(x, y)$ para el estado de Fock con $n = 6$ y un estado coherente con un número promedio de fotones $\bar{n} = 6$. Es evidente que la primera función tiene un radio mayor en comparación con el caso coherente, por lo tanto, el estado de Fock tiene un mayor carácter cuántico y está más deslocalizado.

Para un estado generalizado de la forma siguiente: $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, es inmediato escribir el segundo momento, esto es,

$$M^{(2)} = \sum_{n,n',m,m'} \frac{c_n c'_n c_m^* c_m'}{\sqrt{n! n'! m! m'}} \frac{(n+n')!}{2^{n+n'}} \delta_{n+n', m+m'}. \quad (4.79)$$

En problemas realistas la suma del estado generalizado se trunca, implicando un número finito de términos en las sumas de la expresión del segundo momento.

Retomando el formalismo de la mecánica cuántica en el espacio fase, una característica importante de esta formulación es que las funciones de cuasi-distribución de probabilidad están relacionadas a partir de transformaciones específicas. Por ejemplo las funciones de Wigner y Husimi se relacionan por la transformación

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int W(\beta) e^{-2|\beta-\alpha|^2} d^2\beta. \quad (4.80)$$

Las expresiones mencionadas de las distribuciones de cuasi-probabilidad de Wigner y Husimi serán ampliamente utilizadas para visualizar el comportamiento de la luz en cavidades o resonadores; particularmente para los modelos de interacción de radiación y materia discutidos en el presente trabajo.

Capítulo 5

Evolución temporal

En este capítulo se presentan los resultados de la dinámica del modelo original de Jaynes-Cummings y su modelo generalizado, donde la transición ocurre mediante dos fotones. En la primera sección, se definen las funciones que nos permiten obtener información sobre el enredamiento entre la materia y el campo electromagnético, las probabilidades de ocupación, la inversión de población y las funciones de autocorrelación. Posteriormente, el problema se aborda de dos formas distintas: utilizando el esquema de Schrödinger y utilizando esquema de interacción o de Dirac. Aunque ambos esquemas son completamente equivalentes, como se demuestra en este capítulo, en el esquema de interacción se resuelve la ecuación de Schrödinger la cuál es utilizada en el siguiente capítulo para la construcción de estados específicos de la luz. Notar que en el caso resonante en este esquema el Hamiltoniano es independiente del tiempo. En cada esquema, los resultados se presentan en los casos límite i) en resonancia, $\Delta = 0$, y ii) fuertemente fuera de resonancia, $\Delta \gg 1$.

La dinámica del sistema puede abordarse desde el esquema de Schrödinger calculando el operador de evolución temporal $\hat{U}(t) = e^{-i/\hbar \hat{H} t}$, el cuál se obtiene usando álgebra de operadores, específicamente, se utilizan las propiedades de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{\pm} = 1/2 (\hat{\sigma}_x \pm i \hat{\sigma}_y)$.

En el caso en el que el sistema está fuertemente fuera de resonancia, la ecuación de Schrödinger en el esquema de interacción da lugar a un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas. Este caso es importante, ya que surgen corrimientos de fase que dependen del número de fotones y de la población en los niveles atómicos; los cuáles abren la posibilidad de crear estados de gato al considerar la dinámica de un estado coherente y elegir apropiadamente las amplitudes de probabilidad atómicas, como se discute en el siguiente capítulo.

5.1. Enredamiento en sistemas bipartitas puros y correlaciones

El enredamiento es una propiedad única de sistemas cuánticos que se presenta entre las componentes de un sistema compuesto, esto es, entre un conjunto de partículas o entre un

átomo y un campo, como es el caso de este trabajo. Una de las particularidades del enredamiento es que existe aún en la ausencia de la interacción entre las componentes del sistema y no depende de la distancia entre ellas. Estas características establecen al enredamiento como un tipo de correlación cuántica de carácter local y no local.

Un estado enredado es aquel que no puede ser escrito de forma separable. Por ejemplo, consideremos el caso de dos partículas A y B de dos niveles que pueden, o no, interactuar entre sí. Si no hay enredamiento, es posible conocer de forma independiente el estado en el que se encuentra cada una de las partículas. Esto implica que el estado es separable y que se escribe como un producto tensorial entre los estados de A y B (5.1), donde en un caso general éstos están dados por una superposición coherente del tipo $\alpha_i |1\rangle_i + \beta_i |2\rangle_i$ con $i = A, B$.

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= (\alpha_A |1\rangle_A + \beta_A |2\rangle_A) \otimes (\alpha_B |1\rangle_B + \beta_B |2\rangle_B) \\ &= \alpha_A \alpha_B |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + \alpha_A \beta_B |1\rangle_A \otimes |2\rangle_B + \beta_A \alpha_B |2\rangle_A \otimes |1\rangle_B + \beta_A \beta_B |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Por el contrario, en los estados enredados no es posible conocer el estado de los subsistemas cuánticos de forma independiente y, por lo tanto, el estado total del sistema no es separable. Este es el caso de

$$|\Psi\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B, \quad (5.2)$$

el cual no puede ser escrito como un producto tensorial entre un estado de la partícula A y un estado de la partícula B , ya que al querer escribirlo de la forma (5.1) necesitamos la presencia de términos cruzados. En otras palabras, el estado no es factorizable por lo que únicamente podemos conocer el estado del sistema conjunto. Un aspecto relevante de los estados enredados se puede ilustrar con el ejemplo de las partículas A y B . Si se realiza una medición sobre la partícula B y ésta resulta estar en el estado $|1\rangle_B$, entonces, instantáneamente es posible saber que A se encuentra en $|1\rangle_A$. El hecho de que los subsistemas compartan información, es utilizado como un recurso en la *teoría de información cuántica* para establecer procedimientos que mejoren el almacenamiento, procesamiento y transferencia de la información.

Como se ha discutido, en un estado enredado al medir uno de los subsistemas se obtiene información del otro; para obtener información sobre los subsistemas es posible utilizar el formalismo de la matriz de densidad y las matrices de densidad reducida de los subsistemas.

5.1.1. Matriz de densidad

En mecánica cuántica, un sistema puro está completamente determinado por su función de onda $|\Psi\rangle$. Sin embargo, la forma más general de describir un sistema es a partir de su matriz de densidad $\hat{\rho}$. La definición de este operador abre la posibilidad de diferenciar entre dos tipos de estados cuánticos: estados puros y estados mixtos.

Existen distintas razones por las que es necesario considerar estados mixtos. Una de ellas se debe a que es frecuente encontrar sistemas que se encuentran en una mezcla estadística de diferentes estados. Un ejemplo es el proceso absorción-emisión espontánea de un fotón en un

átomo efectivo de dos niveles, donde existe una distribución de estados posibles por lo que el sistema no puede ser representado por una función de onda.

Por otro lado, la matriz de densidad es útil para estudiar estados que presentan enredamiento. Consideremos los casos de un sistema que interactúa fuertemente con su ambiente y la interacción átomo-campo estudiada en este trabajo. Si hay enredamiento, no será posible conocer el estado del sistema aislado del ambiente, ni el estado en el que se encuentra el átomo sin considerar al campo y viceversa. A través del cálculo de la matriz de densidad es posible definir también las matrices de densidad reducida que nos permiten conocer información sobre cada uno de los componentes de un sistema cuántico compuesto.

La matriz de densidad que describe un estado cuántico general está dada por

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (5.3)$$

donde la suma corre sobre los posibles estados en los que puede estar el sistema y p_i representa la probabilidad asociada a cada uno de ellos. Estas probabilidades satisfacen las siguientes relaciones

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad , \quad \sum_i p_i = 1 \quad , \quad \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (5.4)$$

Cuando el sistema está completamente descrito por un solo estado $|\Psi_i\rangle$, la matriz de densidad se reduce a

$$\hat{\rho} = |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|. \quad (5.5)$$

Este es el caso de un estado puro, en donde la matriz $\hat{\rho}$ es un operador de proyección, es decir, satisface la igualdad

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad , \quad \mathbf{Tr}[\hat{\rho}^2] = \mathbf{Tr}[\hat{\rho}] = 1. \quad (5.6)$$

Por el contrario, un estado mixto es aquel que está descrito por la matriz de densidad (5.3) y no cumple las relaciones (5.6). Así, un criterio para determinar si el sistema está en un estado puro o en un estado mixto es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}[\hat{\rho}^2] &= 1, & \text{para un estado puro} \\ \mathbf{Tr}[\hat{\rho}^2] &< 1, & \text{para un estado mixto.} \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

Toda matriz de densidad diagonal de dimensión $n \times n$ con $n > 1$ describe un estado mixto, la presencia de elementos no diagonales distintos de cero denotados como χ y conocidos como coherencias o correlaciones, implican que se trata de un estado puro o mixto. La distinción se determina calculando la traza del cuadrado de la matriz de densidad. Por ejemplo para una matriz de densidad de dos dimensiones se tiene un estado puro siempre que $\rho_{11} \rho_{22} = |\rho_{12}|^2$.

5.1.2. Matrices de densidad reducida del campo y de la materia

El concepto de matrices de densidad reducida resulta útil para analizar sistemas compuestos en los que se quiere medir observables asociados a uno de los subsistemas cuánticos que conforman el sistema. Recordemos que el valor esperado de un observable \hat{O} en términos de la matriz de densidad está dado por

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}]. \quad (5.8)$$

Ahora, en un sistema bipartita, por ejemplo uno formado por un subsistema A y un subsistema B (el cual se puede generalizar a sistemas de más componentes), el valor esperado de solamente uno de los subsistemas, i.e. \hat{O}_A , está dado por

$$\langle \hat{O}_A \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}_A] = \sum_{n,m} {}_A \langle n | {}_B \langle m | \hat{\rho} | m \rangle_B | n \rangle_A, \quad (5.9)$$

donde se define $\sum_m {}_B \langle m | \hat{\rho} | m \rangle_B$ como la matriz de densidad reducida del sistema A . Así, la matriz de densidad reducida de A está definida como la traza de $\hat{\rho}$ sobre todos los estados de B . Para el caso de la interacción átomo-campo considerado en este trabajo, las matrices reducidas del sistema bipartita son

$$\rho_M(t) = \text{Tr}_F[\rho(t)], \quad \rho_F(t) = \text{Tr}_M[\rho(t)]. \quad (5.10)$$

La matriz reducida de la materia para un sistema de dos niveles, se puede representar como:

$$\rho_M(t) = \begin{pmatrix} P_e(t) & \chi(t) \\ \chi^*(t) & P_g(t) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

donde $P_e(t)$ y $P_g(t)$ son las probabilidades de ocupación del átomo que satisfacen la relación $P_e(t) + P_g(t) = 1$. La letra $\chi(t)$ en los elementos no diagonales de la matriz representa una cantidad conocida como *coherencia*, los cuáles permiten diferenciar entre un estado puro y un estado mixto, mediante la expresión: $P_e(t) P_g(t) \geq |\chi(t)|^2$, es un estado puro si se cumple la igualdad, en caso contrario es un estado mixto.

5.1.3. Entropía lineal y de Von Newmann

Parte fundamental de este trabajo consiste en medir el enredamiento presente en un sistema bipartita puro. Esto se puede realizar a través de las funciones de entropía lineal y entropía de Von Newmann.

En un sistema bipartita puro AB , la matriz de densidad reducida de uno de los subsistemas puede (o no) ser diagonal. Si es diagonal, la descripción independiente de uno de los componentes está dada por un estado mixto y se presenta enredamiento. Así, es posible utilizar

el criterio (5.7.1) como una medida de enredamiento en un sistema bipartita puro, donde se cumplen las siguientes relaciones,

Si $|\Psi\rangle_{AB}$ está enredado $\leftrightarrow \hat{\rho}_A$ representa un estado mixto.

Si $|\Psi\rangle_{AB}$ no está enredado $\leftrightarrow \hat{\rho}_A$ representa un estado puro.

La función de entropía lineal está fundamentada en estos criterios y se define como

$$S_L = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_M^2(t)] = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_F^2(t)]. \quad (5.12)$$

Una característica importante es que sólo toma valores entre $0 \leq S_L \leq 1/2$. En nuestro caso, $\hat{\rho}_M$ describe un átomo de dos niveles por lo que se trata de una matriz 2×2 , definida en (5.11). Por el contrario, la dimensionalidad y descripción de $\hat{\rho}_F$ dependen del estado de la luz que se esté estudiando. Así, resulta conveniente escribir S_L en términos de $\hat{\rho}_M$ (5.13), donde χ son los términos no diagonales de $\hat{\rho}_M$ que se discuten posteriormente.

$$S_L = 2P_e(t)P_g(t) - 2|\chi|^2 \quad (5.13)$$

La entropía de Von Neumann es análoga a la definida en mecánica estadística y se puede entender como una medida de la falta de información, es decir, de la información que se obtendría si se realizara una medición completa sobre un sistema. Para un operador de densidad $\hat{\rho}$, ésta se define como

$$S_{VN} = -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (5.14)$$

Es posible demostrar que en la base en la que $\hat{\rho}$ es diagonal, la expresión (5.14) se reduce a

$$S_{VN} = -\sum_{k=1}^d \lambda_k \log \lambda_k, \quad (5.15)$$

donde λ_k son los eigenvalores de la matriz de densidad $\hat{\rho}$ del sistema bipartita y el índice d hace referencia a la dimensionalidad del espacio. Para un sistema cuántico puro bipartita la entropía de Von Neumann vale cero, porque solamente tiene un eigenvalor igual a la unidad. Para las correspondientes matrices de densidad reducida, por ejemplo del campo y la materia, el valor de la entropía determina si la materia y el campo están enredados; por este motivo se le llama al cálculo de la entropía de sistemas bipartitas entropía de enredamiento.

Para la matriz de densidad reducida de la materia dada en la expresión (5.11), es directo determinar sus eigenvalores,

$$\lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{(P_e(t) - P_g(t))^2}{4} + |\chi(t)|^2}, \quad (5.16)$$

y mediante la expresión (5.14), calcular la correspondiente entropía de enredamiento entre el campo y la materia.

5.1.4. Autocorrelación

En estudios de la dinámica de paquetes de onda se presentan los fenómenos llamados colapsos y resurgimientos, que fueron predichos en 1980 por Eberly y Sánchez-Mondragón estudiando precisamente el modelo de Jaynes-Cummings [24]. Los paquetes de onda aparecen en el contexto de la física atómica y molecular, para la observación de los colapsos y resurgimientos se determinan por ejemplo: la función de autocorrelación, y la inversión de población.

La función de autocorrelación es una señal típica que aparece en la dinámica de paquetes de onda. Está definida como el valor absoluto del producto interno entre el estado inicial del sistema y su estado a un tiempo t arbitrario; indicando que tanto se parece el estado del sistema al tiempo t al estado inicial,

$$A(t) = |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|. \quad (5.17)$$

Evidentemente, los valores que puede tomar se encuentran entre $0 \leq A(t) \leq 1$. Mientras menor sea el valor que adquiere a un tiempo t , el estado del sistema es menos parecido al estado inicial.

La inversión de población $I(t)$ en la dinámica de paquetes de onda asociados a sistemas de dos niveles está determinada por

$$I(t) = P_e(t) - P_g(t). \quad (5.18)$$

Para ambas observables se encuentra un comportamiento temporal muy similar, como veremos adelante. Esto es, presentan características típicas como: comportamiento cuasi-periódico, dasfasamientos, y resurgimientos completos y fraccionales.

5.1.5. Decoherencia

El término decoherencia aparece en muchas ramas de la física para describir la ausencia o desaparición de términos de superposiciones de estados cuánticos. Se utiliza como una consecuencia inevitable de la interacción de un sistema con su medio ambiente. En este trabajo, los elementos no-diagonales de la matriz de densidad reducida de la materia, designados como $\chi(t)$ y conocidos como coherencias, indican la transición del estado excitado al estado base bajo la influencia del campo electromagnético, como si éste fuera el medio ambiente.

La función coherencia está definida a partir de estos elementos no diagonales de la matriz de densidad reducida de la materia,

$$\text{Coh}(t) = 2|\chi(t)|. \quad (5.19)$$

Al observar la ecuación (5.13) de la entropía lineal, notamos que la coherencia nos da información sobre el enredamiento en el sistema. Cuando la coherencia es cero y, por lo tanto, la matriz $\hat{\rho}_M$ es diagonal, tenemos el caso de un estado con máximo enredamiento. Por el contrario, cuando el término $2|\chi(t)|^2$ iguala el valor $2P_e(t)P_g(t)$ (valor máximo que puede tomar), el sistema no presenta enredamiento y se trata de un estado completamente puro.

5.2. Esquema de Schrödinger

En el esquema de Schrödinger, la dependencia temporal del sistema está contenida en la función de onda. La información del sistema $\forall t$ se obtiene por la acción de un operador de evolución temporal sobre la función de onda a $t = 0$,

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(0)\rangle . \quad (5.20)$$

5.2.1. Campo electromagnético de un modo

El operador de evolución temporal asociado al Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings (3.22), el cual considera un sistema de dos niveles interactuando con un campo electromagnético de un modo en una cavidad resonante, se define a continuación. En el apéndice II se muestra el procedimiento completo para obtenerlo, por lo que en esta sección nos limitamos a presentar su representación como operador en la base atómica,

$$\hat{U}(t) = e^{-i\Omega \hat{M} t} \left\{ \hat{F}(\hat{n} + 1) |e\rangle \langle e| - i\lambda \hat{a} \hat{G}(\hat{n}) |e\rangle \langle g| - i\lambda \hat{a}^\dagger \hat{G}(\hat{n} + 1) |g\rangle \langle e| + \hat{F}^*(\hat{n}) |g\rangle \langle g| \right\}, \quad (5.21)$$

donde se definió la notación

$$\hat{F}(\hat{n}) = \cos(\hat{\Omega}(\hat{n})t) - \frac{i\Delta}{\hat{\Omega}(\hat{n})} \sin(\hat{\Omega}(\hat{n})t), \quad (5.22.1)$$

$$\hat{G}(\hat{n}) = \frac{1}{\hat{\Omega}(\hat{n})} \sin(\hat{\Omega}(\hat{n})t), \quad (5.22.2)$$

$$\hat{\Omega}(\hat{n}) = \sqrt{\Delta^2 + \lambda^2 \hat{n}}. \quad (5.22.3)$$

5.2.2. Campo electromagnético de dos modos

Para llevar a cabo el estudio de la interacción de un átomo con un campo cuantizado de dos modos, es necesario obtener el operador de evolución temporal asociado al hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings generalizado [36, 37]. Siguiendo la misma metodología descrita en el apéndice II, se encuentra que este operador está dado por

$$\hat{U}(t) = e^{-i(\Omega N + \epsilon \Delta)t} \left\{ \hat{F}_+(\hat{n}_1, \hat{n}_2) |e\rangle \langle e| + \hat{K}_- \hat{G}_+(\hat{n}_1, \hat{n}_2) |e\rangle \langle g| + \hat{K}_+ \hat{G}_-(\hat{n}_1, \hat{n}_2) |g\rangle \langle e| + \hat{F}_+(\hat{n}_1, \hat{n}_2) |g\rangle \langle g| \right\}, \quad (5.23)$$

donde se utilizó la notación

$$\hat{F}_+(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \cos g\sqrt{\hat{\nu}} t - i\frac{\delta}{2} \frac{1}{g\sqrt{\hat{\nu}}} \sin g\sqrt{\hat{\nu}} t \quad (5.24.1)$$

$$\hat{F}_-(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \cos g\sqrt{\hat{\nu}'} t + i\frac{\delta}{2} \frac{1}{g\sqrt{\hat{\nu}'}} \sin g\sqrt{\hat{\nu}'} t \quad (5.24.2)$$

$$\hat{G}_+(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = -\frac{i}{\sqrt{\hat{\nu}'}} \sin g\sqrt{\hat{\nu}'} t \quad (5.24.3)$$

$$\hat{G}_-(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = -\frac{i}{\sqrt{\hat{\nu}}} \sin g\sqrt{\hat{\nu}} t \quad (5.24.4)$$

$$\hat{\nu} = \frac{\delta^2}{4g^2} + \hat{K}_- \hat{K}_+ \quad , \quad \hat{\nu}' = \frac{\delta^2}{4g^2} + \hat{K}_+ \hat{K}_- . \quad (5.24.5)$$

Es importante notar que aunque la notación utilizada para denotar algunos parámetros, coincide en ambos modelos de Jaynes-Cummings, su significado físico es distinto y están dados en el capítulo 3.

Para estudiar el caso más general, tomemos como estados iniciales las siguientes funciones de onda que consideran la interacción del átomo con un campo de uno y dos modos,

$$|\Psi_0\rangle = [\sin \phi |g\rangle + \cos \phi |e\rangle] \otimes \sum_n^{\infty} \omega_n |n\rangle , \quad (5.25.1)$$

$$|\Psi_0\rangle = [\sin \phi |g\rangle + \cos \phi |e\rangle] \otimes \sum_n^{\infty} \omega_n |q+n, n\rangle_F , \quad (5.25.2)$$

donde el subíndice F en el ket $|q+k, k\rangle_F$ hace referencia a que es un estado de Fock de dos modos. Para simplificar la notación, este subíndice se omitirá en las siguientes expresiones.

5.3. Esquema de Dirac

Para resolver el caso fuera de resonancia, en donde $\Delta \neq 0$, e ilustrar otra metodología en la que es posible obtener la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings, se utiliza el esquema de interacción de la mecánica cuántica. En este esquema, el vector de estado del sistema y los operadores \hat{A} asociados a observables son dependientes del tiempo y están relacionados con el esquema de Schrödinger a través de las transformaciones unitarias

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\Psi_S\rangle \quad , \quad \hat{A}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0) , \quad (5.26)$$

donde $\hat{U}_0(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$ es el operador de evolución temporal asociado a un Hamiltoniano con base conocida. En el modelo de Jaynes-Cummings, este Hamiltoniano conocido consiste en la energía del átomo y el campo libre

$$\hat{H}_0 = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z . \quad (5.27)$$

Así, el Hamiltoniano en el esquema de interacciones es

$$\hat{H}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \bar{H}_S \hat{U}_0(t, t_0) = \hbar\lambda (\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i\Delta't} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i\Delta't}), \quad (5.28)$$

donde $\Delta' = 2\Delta$ definida anteriormente. El vector estado en el esquema de interacciones para el sistema de un átomo de dos niveles en interacción con un campo cuantizado, se propone como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Phi_{en}(t) |en\rangle + \Phi_{gn+1}(t) |gn+1\rangle \} + \Phi_{g0}(t) |g0\rangle. \quad (5.29)$$

Al sustituir en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_I(t) |\Psi(t)\rangle \quad (5.30)$$

y multiplicar por $\langle g0|$, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d\Phi_{g0}(t)}{dt} = 0, \quad (5.31)$$

la cual implica que el estado base $|g0\rangle$ está desacoplado. Por ese motivo en la literatura a $|g0\rangle$ se la llama estado obscuro. De forma similar, si se multiplica por $\langle en|$ y $\langle gn+1|$ se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, también conocido como ecuaciones de Rabi

$$\frac{d\Phi_{gn+1}(t)}{dt} = -i\lambda e^{-i\Delta't} \Phi_{en}(t) \sqrt{n+1} \quad (5.32.1)$$

$$\frac{d\Phi_{en}(t)}{dt} = -i\lambda e^{-i\Delta't} \Phi_{gn+1}(t) \sqrt{n+1}. \quad (5.32.2)$$

Derivando (5.32.2) con respecto al tiempo y substituyendo en (5.32.1) se obtiene,

$$\frac{d^2\Phi_{en}(t)}{dt^2} + i\Delta \frac{d\Phi_{en}(t)}{dt} + \lambda^2(n+1)\Phi_{en}(t) = 0, \quad (5.33)$$

se propone $\Phi_{en}(t) = e^{\gamma t}$, que al sustituir genera el polinomio

$$\gamma^2 + i\Delta\gamma + \lambda^2(n+1) = 0 \quad (5.34)$$

con raíces

$$\gamma_{\pm} = -i\frac{\Delta}{2} \pm i\Omega \quad y \quad \Omega = \sqrt{\lambda^2(n+1) + \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (5.35)$$

La solución general para Φ_{en} está dada por la combinación lineal que considera ambas raíces γ_{\pm} . La solución para Φ_{gn+1} se obtiene al sustituir Φ_{en} en (5.32.1). Éstas son

$$\Phi_{en}(t) = e^{-i\frac{\Delta'}{2}t} [A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}]$$

$$\Phi_{gn+1}(t) = e^{i\frac{\Delta'}{2}t} \left[A \left(\frac{\Delta' - \Omega}{\lambda\sqrt{n+1}} \right) e^{i\Omega t} + B \left(\frac{\Delta' + \Omega}{\lambda\sqrt{n+1}} \right) e^{-i\Omega t} \right].$$

Para obtener los coeficientes A y B hay que considerar las condiciones iniciales. Como las ecuaciones de Rabi son dos ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, para encontrar la solución particular al sistema se requiere de dos condiciones iniciales. Éstas están dadas por las amplitudes de probabilidad Φ_{en} y Φ_{gn+1} a $t = 0$, las cuales pueden tomar los valores de 0 y 1 y ésto dependerá de la configuración inicial del sistema. Así, las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} \Phi_{en}(0) &= A + B, \\ \Phi_{gn+1}(0) &= \frac{\Delta'/2 - \Omega}{g\sqrt{n+1}} A + \frac{\Delta'/2 + \Omega}{g\sqrt{n+1}} B. \end{aligned}$$

Al resolver para A y B se obtiene

$$A = \frac{\Delta'/2 + \Omega}{2\Omega} \Phi_{en}(0) - \frac{g\sqrt{n+1}}{2\Omega} \Phi_{gn+1}(0),$$

$$B = \frac{g\sqrt{n+1}}{2\Omega} \Phi_{gn+1}(0) - \frac{\Delta'/2 - \Omega}{2\Omega} \Phi_{en}(0).$$

Finalmente, la solución particular para las amplitudes de probabilidades es

$$\Phi_{en}(t) = e^{-i\frac{\Delta'}{2}t} \left[\Phi_{en}(0) \cos \Omega t - i \frac{\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega} \Phi_{gn+1}(0) \sin \Omega t + i \frac{\Delta'}{2\Omega} \Phi_{en}(0) \sin \Omega t \right], \quad (5.36.1)$$

$$\Phi_{gn+1}(t) = e^{i\frac{\Delta'}{2}t} \left[\Phi_{gn+1}(0) \cos \Omega t - i \frac{\Delta'}{2\Omega} \Phi_{gn+1}(0) \sin \Omega t - i \frac{\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega} \Phi_{en}(0) \sin \Omega t \right]. \quad (5.36.2)$$

Un caso especial ocurre cuando el campo electromagnético se encuentra en el estado de vacío y hay resonancia, esto es, $\Delta = 0$. Esto implica que $\Omega = \lambda\sqrt{n+1}$. Observamos en las eigenfunciones del sistema un intercambio periódico de energía entre el átomo y el campo con la frecuencia de Rabi λ . Si el átomo se encuentra en su estado base, se tiene que el sistema permanecerá en su estado base $|g0\rangle$. Mientras que si se encuentra en un estado excitado aparecen las oscilaciones de Rabi en las probabilidades de ocupación del sistema de dos niveles.

5.4. Resultados

En esta sección, utilizando las funciones presentadas anteriormente, se estudia la dinámica de la interacción átomo-campo. Los estados cuantizados de la luz que se hacen interactuar con el átomo son: estados de Fock, estados coherentes de Glauber y estados coherentes SU(1,1) de uno y dos modos. En cada caso, se analiza el efecto que tienen sobre la interacción la desintonía y el número promedio de fotones dentro de la cavidad. Asimismo, se presentan las cuasi-distribuciones de probabilidad de Husimi y Wigner con las cuales se ilustra el comportamiento del campo electromagnético antes y después de la interacción.

En todos los casos de estudio, se considera el estado inicial dado por (5.25.1). Los coeficientes ω_n se eligen de forma que describan los estados cuantizados de la luz mencionados (estados de Fock, estados coherentes de Glauber, estados coherentes SU(1,1) de uno y dos modos). La ventaja de considerar este estado inicial es que dependiendo de la elección del valor de ϕ se generan tres situaciones distintas. Cuando $\phi = \pi/4$, el átomo interactúa inicialmente con el campo en la superposición coherente $\frac{1}{\sqrt{2}}[|g\rangle + |e\rangle]$. En cambio, si $\phi = 0$ ($\pi/2$), el átomo se encuentra en el estado inicial $|e\rangle$ ($|g\rangle$). Analizar estas tres situaciones nos permite conocer si el estado inicial del átomo modifica la dinámica del enredamiento átomo-campo.

Los parámetros utilizados en el cálculo de todas las funciones, para el modelo de Jaynes-Cummings y su modelo generalizado se muestran en las tablas 5.1 y 5.2, respectivamente. Los valores fueron elegidos de forma que coincidan con los utilizados en la realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings [2, 27]. Recordemos que Ω es la frecuencia del campo y, cuando se está en resonancia, coincide con la frecuencia entre los dos niveles del átomo. En este caso, al tratarse de un átomo de Rydberg, la transición entre los dos niveles cae en la región del microondas del espectro electromagnético. La frecuencia que nos da información sobre el acoplamiento átomo-campo está dada por λ . Finalmente, Δ es la desintonía y como se discute a continuación, juega un papel importante en la interacción.

Cuadro 5.1: Parámetros para el modelo de Jaynes-Cummings

	Resonancia	Fuera de resonancia
Frecuencia atómica (ω_0)	51.1 GHz	51.1 GHz
Frecuencia acoplamiento (λ)	50π KHz	50π KHz
Desintonía (Δ)	0	10λ

Cuadro 5.2: Parámetros para el modelo de Jaynes-Cummings generalizado. Recordemos que estamos considerando un proceso de dos fotones donde $\delta = \omega_0 - (\Omega_1 + \Omega_2)$. Así, se tiene libertad en la elección de las frecuencias Ω_1 y Ω_2 de los dos fotones, pero se busca que se genere el valor deseado para la desintonía.

	Resonancia	Fuera de resonancia
Frecuencia atómica ω_0	51.1 GHz	51.1 GHz
Frecuencia acoplamiento g	10^6 Hz	10^6 Hz
Desintonía δ	0	$10g$
Parámetro de SU(1,1) η	0.8	0.8
Diferencia entre el número de fotones q	1	1
Promedio en el modo 1 $\langle n_1 \rangle_0$	41/9	41/9
Promedio en el modo 2 $\langle n_2 \rangle_0$	32/9	32/9

5.4.1. Estados de Fock

Consideramos el estado inicial

$$|\Psi_0\rangle = \sin \phi |g\nu\rangle + \cos \phi |e\nu\rangle, \quad (5.37)$$

obtenido de (5.25.1) al considerar $\omega_n = \delta_{n\nu}$. Las probabilidades de ocupación del átomo están dadas por $\mathcal{P}_e(0) = \cos^2\phi$ y $\mathcal{P}_g(0) = \sin^2\phi$. La acción del operador de evolución (5.21) es inmediata,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & e^{-i\Omega(\nu+1)t} \cos \phi F(\nu+1) |e\nu\rangle - i\lambda e^{-i\Omega\nu t} \sin \phi G(\nu)\sqrt{\nu} |e\nu-1\rangle, \\ & -i\lambda e^{-i\Omega(\nu+1)t} \cos \phi G(\nu+1)\sqrt{\nu+1} |g\nu+1\rangle + e^{-i\Omega\nu t} \sin \phi F^*(\nu) |g\nu\rangle. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Mediante esta función de onda se construyó la matriz de densidad reducida de la materia. Sus elementos diagonales están constituidos por las probabilidades de encontrar al átomo en su estado base o en su estado excitado, tal como se muestra en (5.11). Estas probabilidades están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(t) &= \cos^2\phi |F(\nu+1)|^2 + \lambda^2 \sin^2\phi |G(\nu)|^2 \nu, \\ \mathcal{P}_g(t) &= \sin^2\phi |F(\nu)|^2 + \lambda^2 \cos^2\phi |G(\nu+1)|^2 (\nu+1). \end{aligned} \quad (5.39)$$

De los elementos no diagonales se obtiene la función coherencia (5.19), que en este caso toma la forma

$$\text{Coh}(t) = 2|\sin \phi \cos \phi F(\nu+1)F^*(\nu)|. \quad (5.40)$$

Es importante notar que para los casos $\phi = 0, \pi/2$, la función coherencia es 0, por lo que la matriz de densidad reducida de la materia es diagonal.

A partir de las probabilidades y de la función de coherencia, la entropía lineal se establece como

$$S_L(t) = 2 \left[\cos^2 \phi |F(\nu + 1)|^2 + \lambda^2 \sin^2 \phi |G(\nu)|^2 \nu \right] \left[\sin^2 \phi |F(\nu)|^2 + \lambda^2 \cos^2 \phi |G(\nu + 1)|^2 (\nu + 1) \right] - 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi |F(\nu + 1)F^*(\nu)|^2. \quad (5.41)$$

Finalmente, la función autocorrelación está dada por

$$A(t) = \sin^4 \phi |F(\nu)|^2 + \cos^4 \phi |F(\nu + 1)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{-i\Omega t} \sin^2 \phi \cos^2 \phi F(\nu)F(\nu + 1) \right]. \quad (5.42)$$

Variación de la desintonía Δ átomo-campo

A continuación, se discute detalladamente el comportamiento de las funciones $\mathcal{P}_e(t)$, $\mathcal{P}_g(t)$, $Coh(t)$, $S_L(t)$, y $A(t)$ cuando el sistema está en resonancia ($\Delta = 0$) y cuando está fuertemente fuera de resonancia ($\Delta \gg 1$). Se consideró un campo de Fock con $n = 6$ fotones dentro de la cavidad y los parámetros presentados en la Tabla 5.1. Se encontró que el comportamiento del sistema cuando $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ presenta amplias similitudes¹, por lo que se ilustra únicamente el caso en el que $\phi = 0$ y $\phi = \pi/4$. Éste último, al tratarse de un estado en el que el átomo se encuentra inicialmente en un estado coherente, muestra diferencias importantes.

La Figura 5.1, muestra las probabilidades de ocupación del átomo y la entropía lineal cuando el sistema está en resonancia. Como es de esperarse, tanto para $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a) como para $\phi = \pi/4$ (gráfica b), a $t = 0$ la entropía es cero ya que aún no hay interacción. Conforme avanza el tiempo, las probabilidades de ocupación y S_L comienzan a oscilar con una frecuencia definida por la función $\hat{\Omega}(\hat{n})$ A.11 y del orden de $\lambda\sqrt{n}$. Independientemente del valor de ϕ y, por lo tanto, del estado inicial del átomo, se observa que el máximo valor de enredamiento dado por $S_L = 0.5$ se alcanza cuando las probabilidades de ocupación del átomo son $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$. Por el contrario, cuando un estado está preferiblemente ocupado, el enredamiento átomo-campo disminuyen. Así, cuando \mathcal{P}_e o \mathcal{P}_g toman el valor de 1, es decir, se tiene un completo conocimiento del estado del átomo, el enredamiento átomo-campo desaparece.

¹Es importante recordar que cuando $\phi = 0$, el estado inicial del átomo es $|e\rangle$ y cuando $\phi = \pi/2$, el átomo se encuentra inicialmente en $|g\rangle$. La única diferencia observada entre ambos casos es que para $\phi = \pi/2$, $\mathcal{P}_g(0) = 1$, es decir, las probabilidades de ocupación se invierten. Dado que en todos los estados cuantizados de la luz ésta es la única diferencia encontrada (bajo algunas excepciones que se discuten en el texto), sólo se ilustran las funciones cuando $\phi = 0$ y $\phi = \pi/4$, pero en el texto se discuten ambos casos.

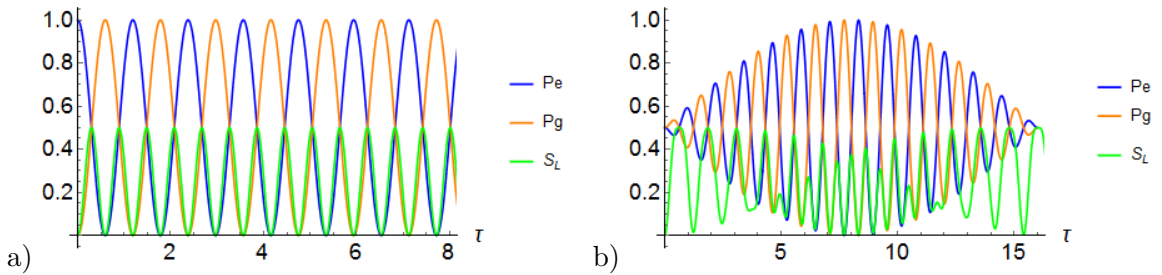


Figura 5.1: Entropía lineal y probabilidades de ocupación del sistema en resonancia. a) Cuando $\phi = 0, \pi/2$, las probabilidades de ocupación y la entropía lineal oscilan con una frecuencia de $\sqrt{6}\lambda$ y hay inversión de población. De la entropía lineal, podemos observar que hay un máximo enredamiento cuando $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$, es decir, cuando se tiene una mayor incertidumbre en el estado del átomo. Por el contrario, $S_L = 0$ cuando se conoce por completo el estado del átomo. b) Cuando $\phi = \pi/4$, es decir, cuando el átomo se encuentra inicialmente en una superposición de sus dos niveles, se observa el mismo comportamiento que en el caso anterior. Mientras exista un estado atómico favorecido, el enredamiento disminuye. Cuando ambos estados tienen la misma probabilidad a ser ocupados, se alcanza un enredamiento máximo. Escala del tiempo está dada en μs .

El comportamiento de la función coherencia cuando el sistema está en resonancia es ilustrado en la Figura 5.2. Cuando el estado inicial del átomo es $|e\rangle$ o $|g\rangle$, ésta es cero para todo t , lo que implica que $\hat{\rho}_M$ es una matriz diagonal. Por el contrario, cuando $\phi = \pi/4$, la matriz de densidad reducida de la materia es una matriz no diagonal y el estado del átomo se encuentra en un estado puro cuando $S_L = 0$. En este caso, la función de coherencia oscila con la misma frecuencia que S_L y se observa que cuando una es decreciente la otra es creciente. Cuando la entropía lineal alcanza su máximo valor, la coherencia se va a cero.

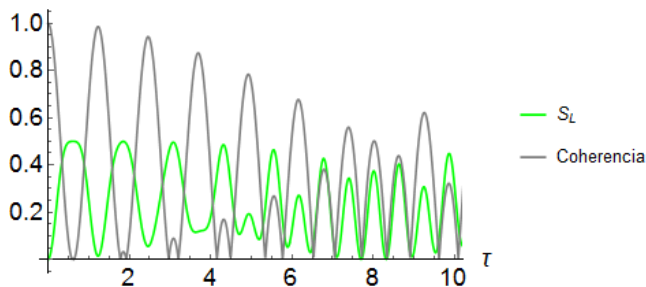


Figura 5.2: Función coherencia del sistema cuando $\Delta = 0$ y $\phi = \pi/4$. La escala de tiempo mostrada está en microsegundos. La coherencia y la entropía lineal presentan el mismo período. El tiempo en el que la coherencia disminuye coincide con el intervalo de tiempo en el que hay un estado preferiblemente ocupado del átomo (Figura 5.4) Cuando $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$, la coherencia vuelve a su valor inicial y $S_L = 0$. Los casos en los que $\phi = 0, \pi/2$ no se ilustran ya que la función coherencia toma el valor de $0 \forall t$.

Finalmente, el comportamiento de la función de autocorrelación cuando $\Delta = 0$ se muestra

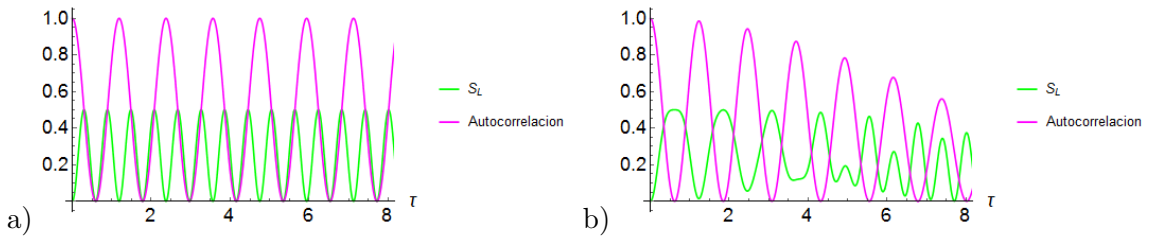


Figura 5.3: Función de Autocorrelación cuando $\Delta = 0$. La escala de tiempo mostrada está en ms. a) Cuando $\phi = 0, \pi/2$, la autocorrelación oscila con el mismo período que la entropía lineal y regresa a su estado inicial cada vez que el enredamiento átomo-campo se va a cero. Por el contrario, la autocorrelación se hace cero cuando se alcanza un máximo enredamiento. b) Cuando $\phi = \pi/4$, el sistema no regresa a su estado inicial en el intervalo de tiempo mostrado. Esto se debe a que la función de coherencia también disminuye con el tiempo.

en la Figura 5.3. Se observa que no hay diferencia significativa en si el átomo interactúa inicialmente en $|e\rangle$ o en $|g\rangle$ (gráfico a). En ambos casos, la autocorrelación comienza en 1 y después de la interacción comienza a oscilar con el doble del periodo de oscilación de S_L . Cada vez que el enredamiento se va a cero, la función de autocorrelación toma el valor de 1 y, por lo tanto, el sistema regresa a su estado inicial. En cambio, cuando se considera el estado con $\phi = \pi/4$ (gráfico b), el sistema no regresa a su estado inicial después de la interacción en el intervalo de tiempo mostrado, ya que la coherencia comienza a decrecer en intensidad como se muestra en la Figura 5.2.

En el caso en que el sistema está fuertemente fuera de resonancia (Tabla 5.1), el comportamiento de las funciones indica que efectivamente no hay una manifestación de la interacción átomo-campo. La Fig. 5.4 ilustra las probabilidades de ocupación del átomo y la Fig. 5.5 la entropía lineal. Sin importar el valor de ϕ , se puede notar fácilmente que las oscilaciones de las funciones son mucho mayores en comparación con el caso en resonancia y del orden de $\lambda\sqrt{100+n}$. Asimismo, la interacción con el campo no modifica las probabilidades de ocupación del átomo. Al no haber una interacción efectiva, los valores que alcanza el enredamiento, dados por la entropía lineal (gráfico a, Figura 5.5), son muy pequeños. La función de autocorrelación (gráfico b, Figura 5.5), se mantiene en todo el intervalo del tiempo alrededor de 1, indicando que el sistema inicial se ve muy poco afectado por el campo. Finalmente, la función de coherencia (Figura 5.6), sólo es distinta de cero cuando $\phi = \pi/4$ y, al igual que las funciones anteriores, su valor $\forall t$ es cercano al inicial.

Es importante mencionar que en resonancia se observó que a $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g \approx 0.5$, el enredamiento era máximo. Sin embargo, cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia, aún cuando $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g \approx 0.5$, el enredamiento prácticamente es cero en todo el intervalo del tiempo.

La diferencia en el comportamiento del sistema cuando $\Delta \gg 1$, puede entenderse más con la introducción de un Hamiltoniano efectivo de dispersión. Éste se propone en el capítulo 6 y

está dado por

$$\hat{H}_{eff} = -\frac{\hbar\lambda^2}{\Delta} \left[\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + 1) \right]. \quad (5.43)$$

Al aplicarlo sobre la función de onda inicial, se obtienen los siguientes resultados, los cuales concuerdan con el comportamiento mostrado en las probabilidades de ocupación indicadas en la Fig. 5.4, en la entropía lineal y la función de autocorrelación exhibidas en la Fig. 5.5, y la función de coherencia en la Fig. 5.6.

$$\mathcal{P}_e = \cos^2 \phi \quad , \quad \mathcal{P}_g = \sin^2 \phi \quad , \quad |\chi| = \sin \phi \cos \phi \quad , \quad S_L = 0 \quad , \quad A = 1. \quad (5.44)$$

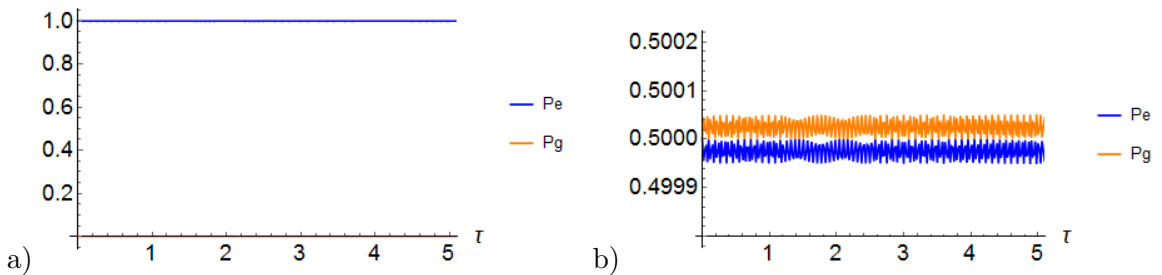


Figura 5.4: Probabilidades de ocupación del átomo . La escala de tiempo mostrada está en ms. a) Cuando $\phi = 0, \pi/2$, las probabilidades de los niveles del átomo se mantiene separados en todo el intervalo del tiempo; no hay inversión de población. b) Cuando $\phi = \pi/4$, tampoco se presenta inversión de población y las probabilidades de ambos estados se mantienen cercanos a 0.5.

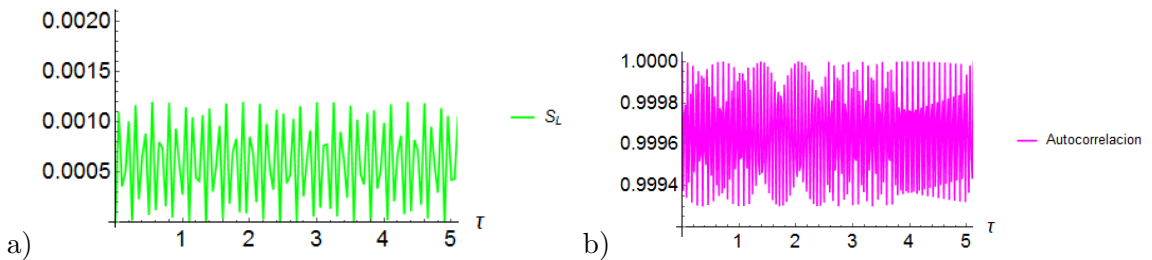


Figura 5.5: La escala de tiempo mostrada está en microsegundos. a) Comportamiento de S_L cuando $\Delta \gg 1$. Durante todo el intervalo de tiempo, el enredamiento es cercano a cero sin importar el valor ϕ ($\phi = 0, \pi/2, \pi/4$). A diferencia de cuando el sistema está en resonancia, tener $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g \approx 0.5$ no implica un enredamiento máximo. b) Función autocorrelación cuando $\Delta \gg 1$. Durante todo el intervalo del tiempo se mantiene alrededor de 1, lo que indica que el sistema $\forall t$ es muy similar al estado inicial.

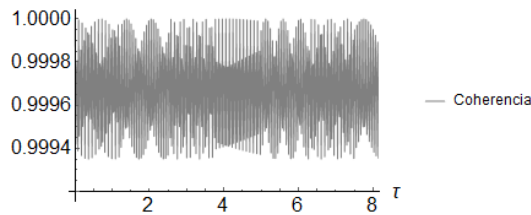


Figura 5.6: Función coherencia cuando $\Delta \gg 1$ y $\phi = \pi/4$. La escala de tiempo mostrada está en ms. La función coherencia presenta pequeñas oscilaciones alrededor de su valor inicial, indicando que la interacción átomo-campo no es efectiva. Los resultados para $\phi = 0, \pi/2$ no se presentan, ya que la coherencia es cero para todo t , es decir, la matriz de densidad reducida de la materia es diagonal.

Variación del número de fotones dentro de la cavidad

De todos los estados cuánticos de la luz estudiados en este trabajo, los estados de Fock son los únicos para los que se puede conocer de forma exacta el número de fotones que contiene el campo electromagnético. Por lo tanto, resulta interesante estudiar cuál es el efecto del número de fotones, dentro de la cavidad, en la interacción con un átomo de dos niveles. Los resultados se ilustran en la Figura 5.7, donde la escala del tiempo está en μs y los parámetros utilizados se muestran en la Tabla 5.1.

Se observa que tanto en resonancia como fuertemente fuera de resonancia, el efecto de aumentar el número de fotones dentro de la cavidad contribuye a disminuir el periodo de las funciones.

Funciones de cuasi-distribución de probabilidad

Hasta ahora, sólo se ha considerado el comportamiento del átomo y del sistema conjunto. Analizar el comportamiento del campo de forma independiente puede darnos más información o puede reafirmar lo observado hasta este punto. Por ello, a continuación se calculan las funciones de Husimi y Wigner cuando el sistema está en resonancia y con un número de fotones $n = 1$ dentro de la cavidad. Los tiempos mostrados son $\tau = 0, 7 \mu s$, ya que de la Figura 5.7, podemos observar que a $\tau = 0$ el sistema es separable y está caracterizado por una probabilidad ocupacional del estado $|e\rangle$ y la autocorrelación de un valor de 1, y $S_L = 0$. En contraste, a $\tau = 7 \mu s$, la autocorrelación es 0 y hay inversión de población, ya que $\mathcal{P}_e = 0$ y $\mathcal{P}_g = 1$.

En resonancia, a $\tau = 7 \mu s$ observamos que la función de autocorrelación es 0 y, por lo tanto, la entropía lineal es máxima, notamos también que el radio interno de la función de Husimi aumenta con respecto a su distribución a $\tau = 0$. En el caso en que $\Delta \gg 1$, no se observa un cambio significativo en la función de Husimi. Esto coincide con el comportamiento observado en las funciones estudiadas, las cuales se mantienen cercanas a su valor inicial. Además, al analizar el comportamiento del área de la función de Husimi (Figura 5.9), podemos reafirmar

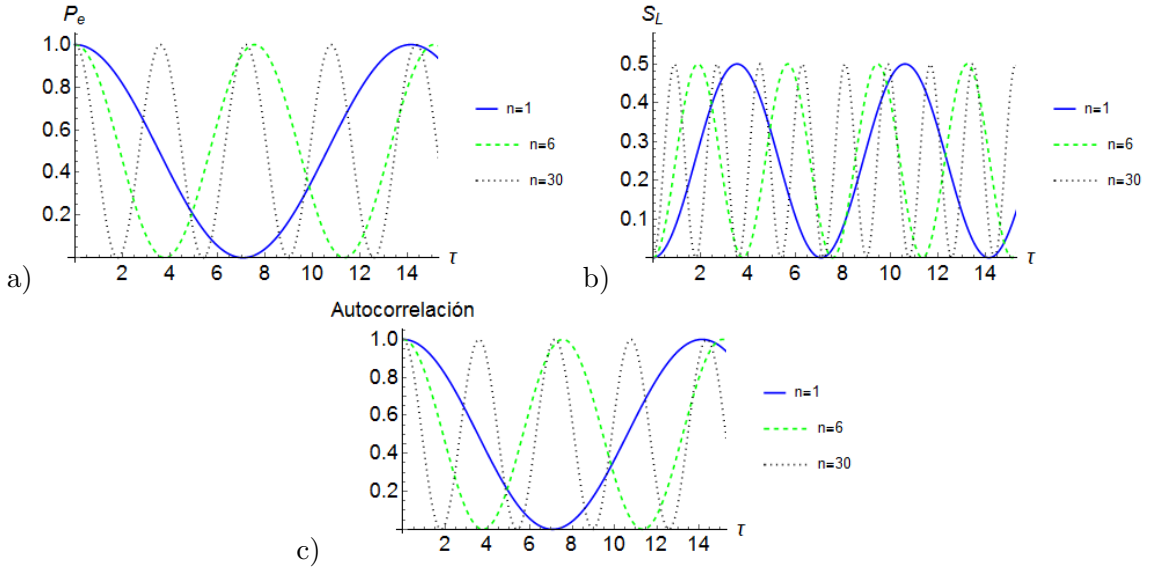


Figura 5.7: Comportamiento de a) probabilidad del que el átomo se encuentre en el estado $|e\rangle$, b) entropía lineal y c) autocorrelación cuando se varía el número de fotones dentro de la cavidad y cuando el átomo y el campo están en resonancia. En todos los casos, aumentar el número de fotones en la cavidad implica un aumento en la frecuencia con la que oscilan las funciones. La escala mostrada está en μs

que cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia el campo también se ve muy poco perturbado por la interacción con el átomo. Esto se refleja en que el área de la función Husimi varía muy poco. Por el contrario, cuando el sistema está en resonancia, la función Husimi duplica su área cuando hay inversión de población y la función de autocorrelación es cero.

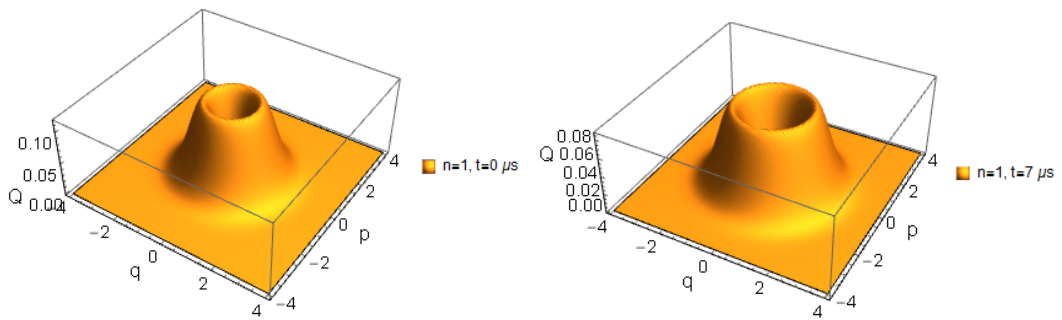


Figura 5.8: Función Husimi para un estado de Fock con $n = 1$ en interacción con un átomo de dos niveles en resonancia y a $t = 0, 7 \mu s$.

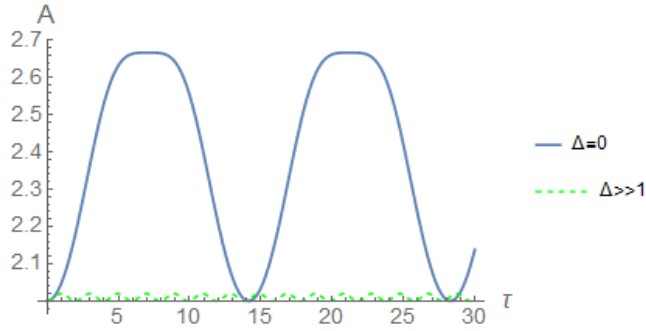


Figura 5.9: Variación del área de la función de Husimi cuando el átomo y el campo están en resonancia y cuando están fuertemente fuera de resonancia.

La dinámica de la función de Wigner es similar a la que presenta la función Husimi. En el caso fuertemente fuera de resonancia, no se observan cambios con el tiempo, lo que coincide con los comportamientos observados en las otras funciones. En el caso en resonancia y con un número de fotones $n = 1$, la función de Wigner (Figura 5.10) muestra un cambio significativo en su distribución después de la interacción.

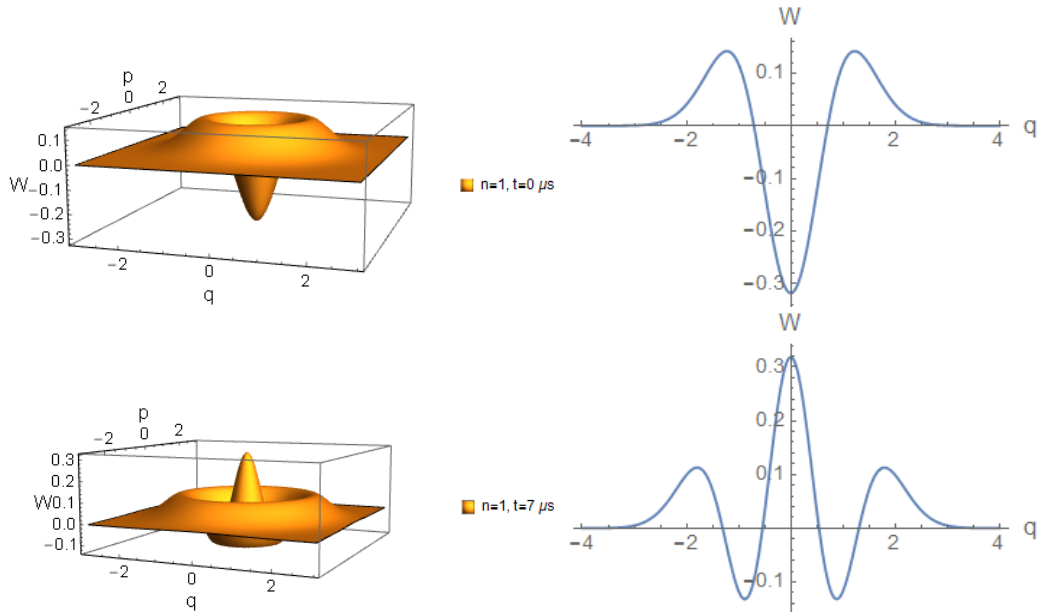


Figura 5.10: Función Wigner para un estado de Fock con $n = 1$ en interacción con un átomo de dos niveles en resonancia.

5.4.2. Estado Coherentes de Glauber

Para el estudio de la interacción átomo-campo con los estados coherentes de Glauber [34] de un modo, se considera el estado inicial separable

$$|\Psi_0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left\{ \sin \phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |g n\rangle + \cos \phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e n\rangle \right\}, \quad (5.45)$$

donde es inmediato que los coeficientes ω_n en (5.25.1) están dados por,

$$\omega_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}.$$

Se puede verificar que en $t = 0$, las probabilidades de ocupación del átomo están dadas por

$$\mathcal{P}_e(t) = \cos^2 \phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad \mathcal{P}_g(t) = \sin^2 \phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$

Después de hacer actuar el operador de evolución temporal (5.21) sobre el estado inicial se obtiene la función de onda $\forall t$,

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\cos \phi e^{-i\Omega(n+1)t} F(n+1) |e, n\rangle - i\lambda \sin \phi e^{-i\Omega n t} G(n) \sqrt{n} |e, n-1\rangle \right. \right. \\ \left. \left. - i\lambda \cos \phi e^{-i\Omega(n+1)t} G(n+1) \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle + \sin \phi e^{-i\Omega n t} F^*(n) |g, n\rangle \right] \right\}. \quad (5.46)$$

A partir de la función de onda, siguiendo el procedimiento explicado anteriormente, se construye la matriz de densidad reducida que describe a la materia, de la que se obtienen las probabilidades de ocupación y la función de coherencia, dados por

$$\mathcal{P}_e(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (\cos^2 \phi |F(n+1)|^2 + \lambda^2 \sin^2 \phi |G(n)|^2 n + 2\text{Re} [i\lambda e^{-i\Omega t} \sin \phi \cos \phi F(n+1)G(n)])$$

$$\mathcal{P}_g(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (\sin^2 \phi |F(n)|^2 + \lambda^2 \cos^2 \phi |G(n+1)|^2 (n+1) + 2\text{Re} [-i\lambda e^{-i\Omega t} \sin \phi \cos \phi G(n+1)F(n+1)])$$

$$\chi(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,k=0}^{\infty} i\lambda \sqrt{k} e^{-i\Omega(n-k+1)t} \cos^2 \phi \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*k}}{\sqrt{k!}} F(n+1)G(k) + \sin \phi \cos \phi e^{-i\Omega(n-k+1)t} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*k}}{\sqrt{k!}} F(n+1)F^*(k) \\ + \lambda^2 \sqrt{kn} \sin \phi \cos \phi e^{-i\Omega(n-k)t} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*k}}{\sqrt{k!}} G(n)G(k) - i\lambda \sin^2 \phi e^{-i\Omega(n-k)t} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*k}}{\sqrt{k!}} G(n)F(k).$$

Recordemos que estas expresiones son importantes, ya que a partir de ellas se construyen la entropía lineal y la función de coherencia. Para este caso tenemos que la función de autocorrelación del sistema en función del tiempo está dada por,

$$A(t) = e^{-|\alpha|^2} \left\{ \sin^4 \phi \sum_{n,k=0} \left[e^{-i\Omega(n-k)t} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} F^*(n)F(k) \right] + \cos^4 \phi \sum_{n,k=0} \left[e^{-i\Omega(n-k)t} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} F(n+1)F^*(k+1) \right] \right. \\ \left. + \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sum_{n,k=0} \left[e^{-i\Omega(n-k-1)t} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} F^*(n)F^*(k+1) \right] + \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sum_{n,k=0} \left[e^{-i\Omega(n-k+1)t} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} F^*(n+1)F^*(k) \right] \right\}.$$

Variación de la desintonía átomo-campo

A continuación se discute el comportamiento de las probabilidades de ocupación, la entropía lineal, y las funciones de coherencia y autocorrelación, cuando $\Delta = 0$ y $\Delta \gg 1$. Se considera un número promedio de fotones $\bar{n} = 16$, junto con los parámetros mencionados en la tabla 5.1. Cuando el sistema está en resonancia, las probabilidades de ocupación del átomo presentan el fenómeno característico de colapsos y resurgimientos ilustrados en la Figura 5.11, los cuales están presentes en los tres casos $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a) y $\pi/4$ (gráfico b), pero se acentúan cuando el estado inicial del átomo es $|e\rangle$ o $|g\rangle$. Notamos que el comportamiento de la entropía lineal es muy distinto dependiendo del estado inicial del átomo. Cuando $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a), el valor del enredamiento sube rápidamente y descende en los tiempos en los que suceden los colapsos en las probabilidades de ocupación. Cuando $\phi = \pi/4$ (gráfico b), el valor del enredamiento sube lentamente y no se ve afectado por los colapsos y resurgimientos del átomo.

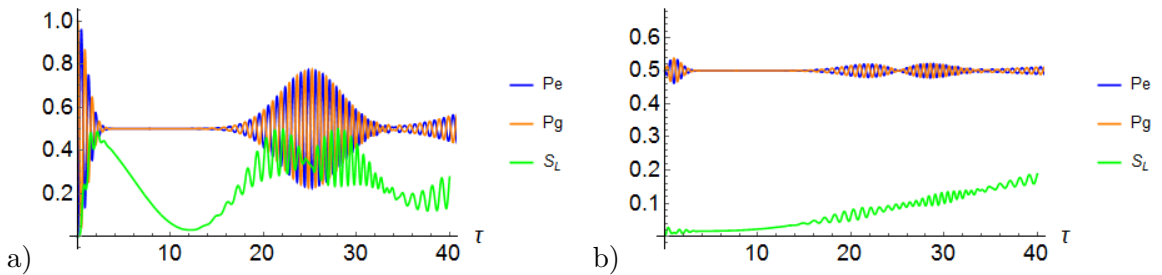


Figura 5.11: Probabilidades de ocupación y entropía lineal cuando el sistema está en resonancia. La escala de tiempo mostrada está en 10^{-5} s. a) Cuando $\phi = 0, \pi/2$ se presenta el fenómeno de colapsos y revivals. La entropía lineal deja de oscilar en los colapsos de las probabilidades de ocupación. b) Cuando $\phi = \pi/4$, también se observa el fenómeno de colapsos y resurgimientos pero a una menor intensidad. El comportamiento de S_L es muy diferente con respecto al primer caso. Cuando el átomo se encuentra inicialmente en una superposición coherente se observa que el enredamiento aumenta lentamente.

El comportamiento de la función de autocorrelación y la función de coherencia cuando $\Delta = 0$ se ilustran en la Figura 5.12. Cuando $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a), la función de coherencia (normalizada a su valor máximo) en $\tau = 0$ tiene un valor 0 y después de la interacción oscila entre los valores 0 y 1. Entonces el estado del campo o la materia oscilan entre una descripción de un estado puro y un estado mixto. Por otro lado, cuando $\phi = \pi/4$ (gráfica b) la función de coherencia toma un valor inicial

de 1 y nunca llega a cero, por lo que el sistema siempre se mantiene en un estado puro. Finalmente, el comportamiento de la función de autocorrelación es similar para todos los valores de ϕ . Una vez que comienza la interacción el sistema no regresa a su estado inicial.

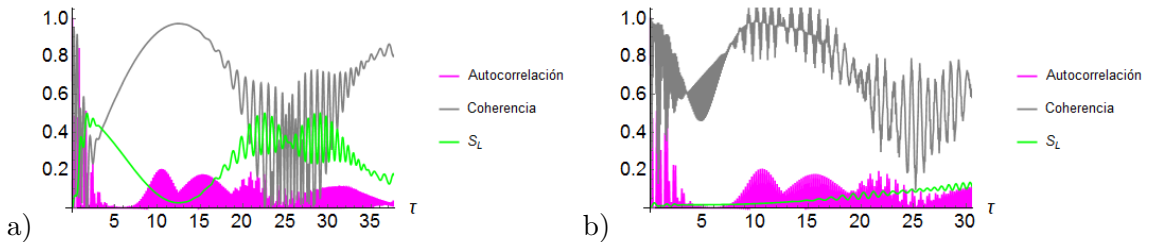


Figura 5.12: Coherencia, autocorrelación y entropía lineal cuando $\Delta = 0$. La escala de tiempo mostrada está en 10^{-5} s. El comportamiento de la coherencia y autocorrelación es muy similar cuando $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a) y cuando $\phi = \pi/4$ (gráfico b).

Las probabilidades de ocupación del átomo y la entropía lineal cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia se ilustran en la Figura 5.13. Cuando $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a), \mathcal{P}_e y \mathcal{P}_g se mantienen separadas y, por lo tanto, no hay inversión de población. En el caso en que el estado inicial del átomo está dado por una superposición de $|e\rangle$ y $|g\rangle$ (gráfico b), se observa que después de la interacción existe una preferencia a ocupar el estado excitado y esta preferencia se mantiene en todo el intervalo de tiempo. El caso de la entropía lineal, cuando el átomo interactúa con el campo en un estado inicial $|e\rangle$ o $|g\rangle$, el enredamiento se mantiene en valores bajos. Sin embargo, cuando el átomo se encuentra inicialmente en una superposición coherente e interactúa con el campo, se genera un enredamiento alto que se mantiene estable en un amplio intervalo de tiempo (gráfico b).

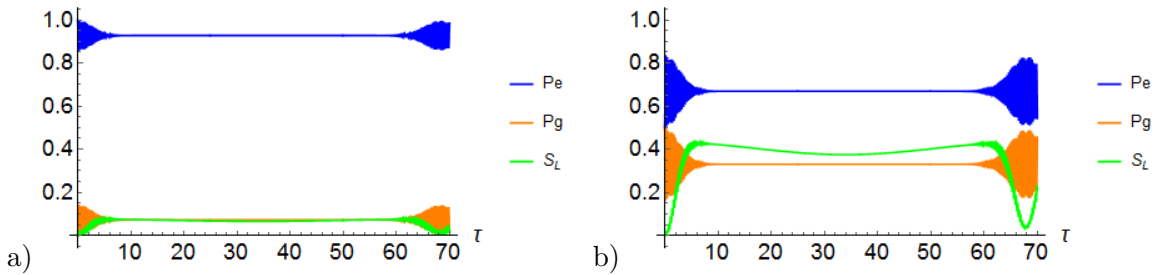


Figura 5.13: Entropía Lineal como medida del enredamiento átomo-campo del sistema. La escala de tiempo está en 10^{-5} s. a) Se considera $\phi = \pi/4$. Derecha. $\phi = \pi/2$. El comportamiento con el caso en el que $\phi = 0$ es muy similar. El que el estado del átomo inicie con un máximo de probabilidad, ya sea en $|g\rangle$ o en $|e\rangle$, e interactúe con un campo fuertemente fuera de resonancia tiene como consecuencia que no haya un enredamiento entre ambos subsistemas cuánticos. Este comportamiento también se ve reflejado en las gráfica de la función de autocorrelación en la que, tanto para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$, ésta recupera su valor inicial de 1 en intervalos cortos de tiempo. Esto implica que el estado del sistema regresa a su estado inicial o a un estado muy similar en el que los subsistemas átomo y campo son separables. Al observar la función de autocorrelación para el estado inicial con $\phi = \pi/4$, se encuentra que ésta disminuye rápidamente y se mantiene en valores bajos, por lo que el sistema evoluciona a un estado diferente en que el los subsistemas no son separables. Al comparar el comportamiento de la entropía lineal con la función de autocorrelación, se encuentra que en el caso en el que $\phi = \pi/4$, ésta función se mantiene en valores grandes y con constantes oscilaciones que implican una interferencia átomo-campo. En el caso $\phi = 0, \pi/2$, la coherencia toma valores pequeños y no presenta oscilaciones, por lo que se puede decir que los subsistemas no están fuertemente correlacionados.

La función de coherencia cuando $\Delta \gg 1$ se muestra en la Figura 5.14. Al igual que en el caso en resonancia, en $t = 0$ la función de coherencia toma el valor cero cuando $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a) y toma el valor de la unidad cuando $\phi = \pi/4$ (gráfico b). Notamos que en el intervalo del tiempo en el que suceden los colapsos en las probabilidades de ocupación, la función de coherencia se estabiliza e incluso se mantiene constante en el caso en que $\phi = 0, \pi/2$.

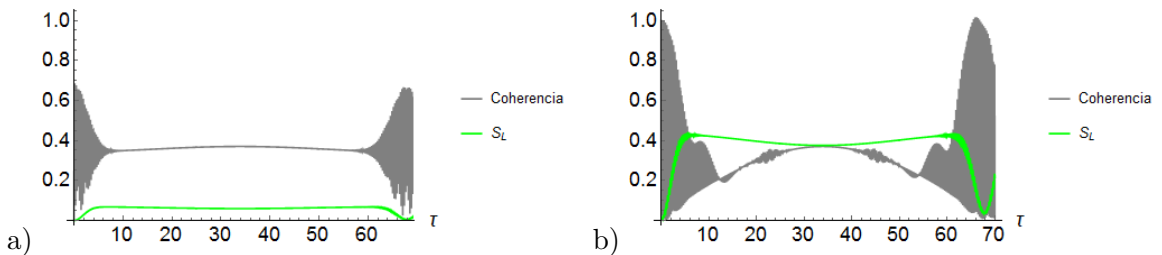


Figura 5.14: Comparación función coherencia y entropía lineal. La escala de tiempo está en 10^{-5} s.

Finalmente, la función de autocorrelación cuando $\Delta \gg 1$ se ilustra en la Figura 5.15. A diferencia de las funciones anteriores, ésta depende del estado inicial del átomo. La gráfica a) muestra la función de autocorrelación cuando el estado inicial del átomo es $|e\rangle$. La gráfica b) cuando el estado inicial del

átomo es $|g\rangle$ y la gráfica c) muestra la función de autocorrelación cuando inicialmente el átomo se encuentra en una superposición de sus dos niveles.

El comportamiento de estas funciones cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia, también puede ser obtenido a partir del Hamiltoniano efectivo presentado en el capítulo 6. Los resultados obtenidos coinciden con los reportados en las gráficas.

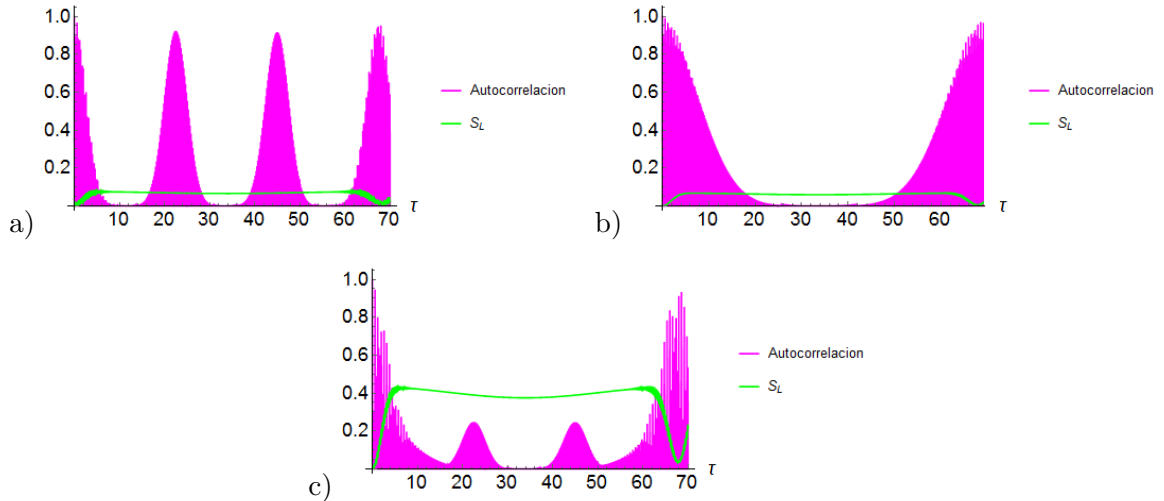


Figura 5.15: Comparación de la función de autocorrelación y entropía lineal. La escala de tiempo está en 10^{-5} s.

Variación del número promedio de fotones \bar{n} dentro de la cavidad

A diferencia de como sucede en los estados de Fock, en los estados coherentes de Glauber no se sabe el número exacto de fotones que contiene el campo, pero se conoce el número promedio de éstos. Dependiendo del número promedio de fotones \bar{n} que haya dentro de la cavidad en $t = 0$, la interacción con el átomo será distinta. En esta sección se ilustra el efecto que tiene la variación del número promedio de fotones en la cavidad sobre las cantidades estudiadas en el presente trabajo. En la Figura 5.16, se muestra el comportamiento de las funciones en el caso en resonancia y fuertemente fuera de resonancia. Lo primero que se puede observar es que los colapsos y resurgimientos característicos de las probabilidades de ocupación del átomo no están presentes para un promedio de fotones suficientemente pequeño. Al aumentar \bar{n} , estos fenómenos aparecen y la duración de los colapsos se incrementa, tanto para $\Delta = 0$ como para $\Delta \gg 1$. En la entropía lineal, en resonancia y fuertemente fuera de resonancia, se observa que al aumentar \bar{n} y, por lo tanto, al aumentar el tiempo de colapso, el enredamiento disminuye también durante un mayor intervalo de tiempo. En este punto, podemos contrastar con el comportamiento del enredamiento en el estado de Fock, donde se observó que cuando $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g \approx 0.5$ se tenía un mayor enredamiento. Por el contrario, en la gráfica a) y c) de la Figura 5.16, se puede notar que aunque $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g \approx 0.5$, el enredamiento átomo-campo tiende a bajar y solo aumentar su valor en los tiempos en los que suceden los resurgimientos en las probabilidades de ocupación del átomo. Un comportamiento similar se observa en la función de coherencia, mostrada en las gráficas g) y h) de la Figura 5.16. Se observa que el efecto del aumento del tiempo de colapso, generado por el

aumento de \bar{n} , se ve reflejado en que la función de coherencia incrementa su valor durante un mayor tiempo. Finalmente, al aumentar \bar{n} en la cavidad la función de autocorrelación toma valores cercanos a cero.

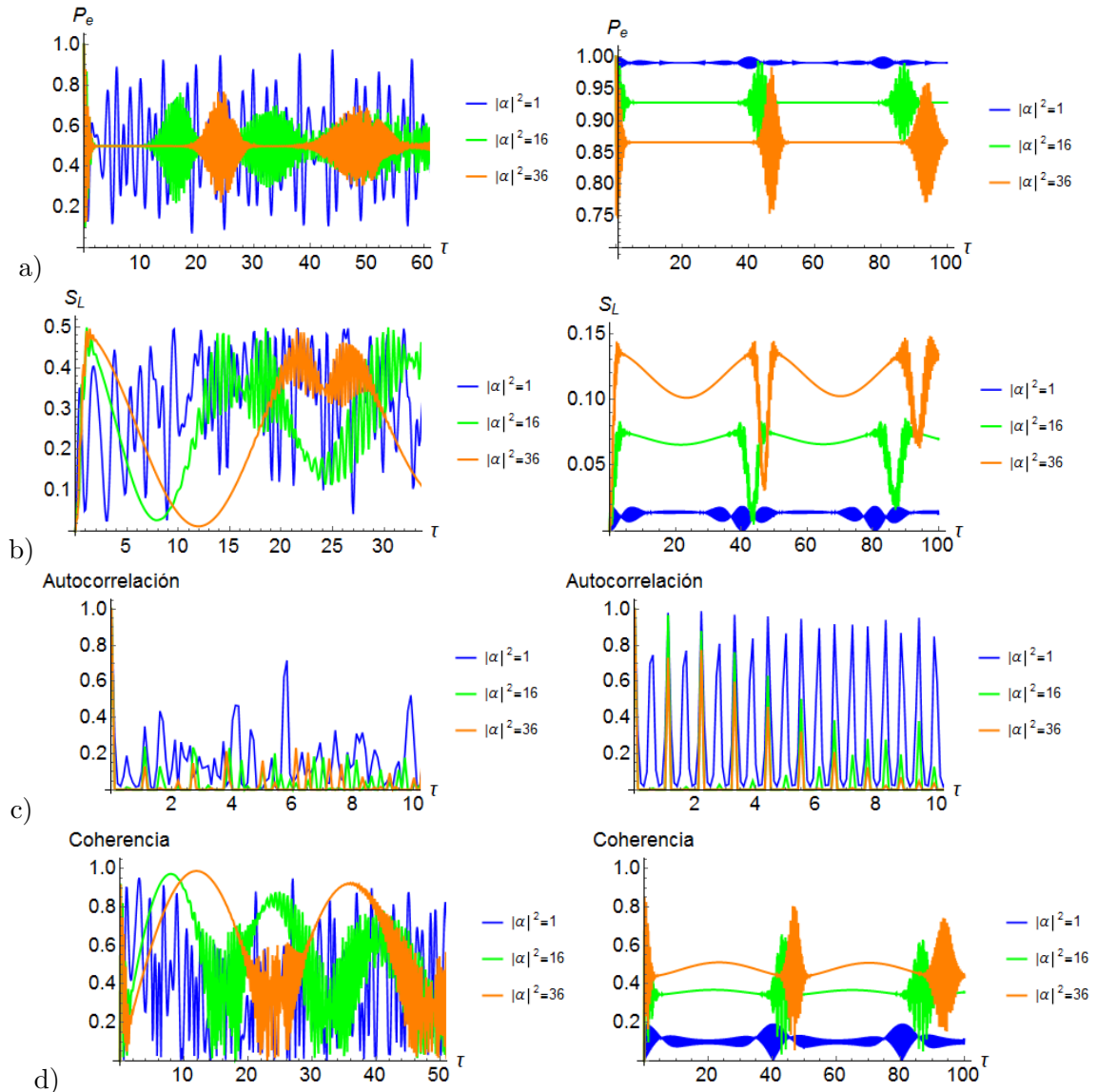


Figura 5.16: Variación en el número promedio de fotones para los casos $\Delta = 0$ (columna izquierda) y $\Delta \gg 1$ (columna derecha). La escala de tiempo mostrada está en 10^{-5} s.

Funciones de cuasi-distribución de probabilidad

A continuación se discuten las funciones de cuasi-distribución de probabilidad de Husimi y Wigner que nos permiten ilustrar el comportamiento del campo electromagnético. En la Figura 5.17 se presenta la función Husimi a diferentes tiempos, cuando el sistema está en resonancia, y cuando el estado inicial del átomo es $|e\rangle$. Los tiempos que se muestran son $\tau = 0, 2, 12 \mu\text{s}$, para los cuales los gráficos a) de las Figuras 5.11 y 5.12, muestran que son tiempos que están caracterizados por cambios importantes en el sistema. En $t = 2 \mu\text{s}$, S_L aumenta hasta su máximo valor y la coherencia aumenta rápidamente, mientras que \mathcal{P}_e disminuye rápidamente. En el campo, estos cambios se observan en que se pierde la distribución Poissoniana característica de los estados coherentes de Glauber y se adquiere una distribución de un *estado de gato*. Esto se puede verificar mediante el cálculo del área que ocupa la función Husimi en el espacio fase, ésta es ilustrada en la Figura 5.18, en donde a $t = 2 \mu\text{s}$ el área toma un valor de $A = 2$. En $\tau = 12 \mu\text{s}$, se encuentra que $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g \approx 0.5$, S_L disminuye y la coherencia es máxima. Esto se traduce en un aumento en el área de la función de Husimi (Figura 5.18).

Cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia, no se observa un cambio significativo en la distribución de la función de Husimi, por lo que sus resultados no se ilustran. Este comportamiento coincide con la poca variación observada en la función de Husimi bajo estas condiciones (Figura 5.18).

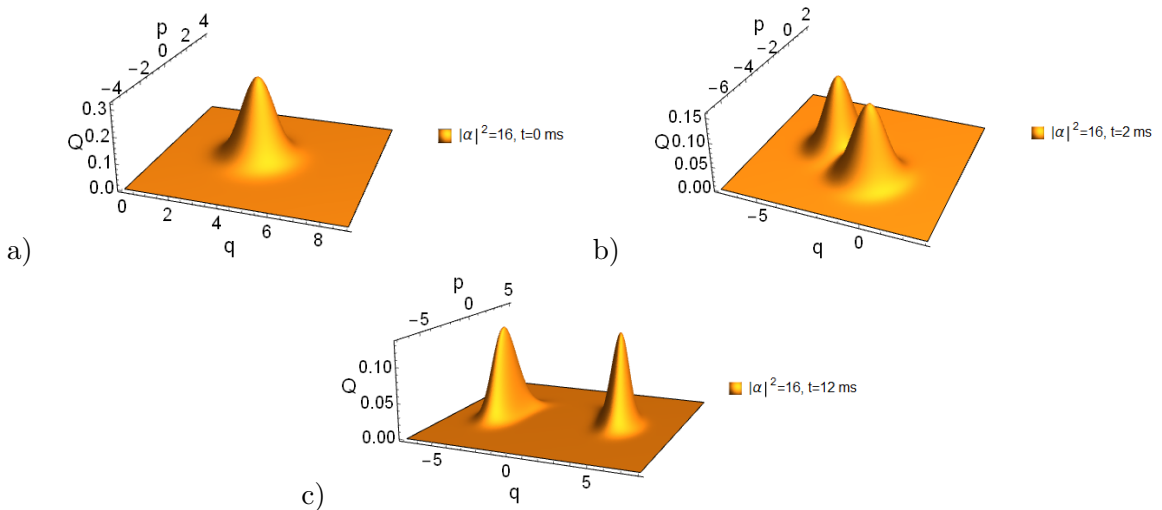


Figura 5.17: Función de Husimi cuando el sistema está en resonancia. a) A $t = 0 \text{ ms}$ cuando aún no hay interacción con el átomo, la función de Husimi presenta una distribución Gaussiana característica de los estados coherentes. b) $t = 2 \mu\text{s}$, como se discute en el texto, el sistema está caracterizado por una máxima entropía y un aumento en la coherencia. La distribución gaussiana se pierde, hay un rompimiento de simetría. A $\tau = 12 \mu\text{s}$ se observa una baja entropía lineal y una misma probabilidad para los estado del átomo ($\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$). La coherencia adquiere un valor máximo y ésta se transfiere al campo y el cual adquiere un *estado de gato*.

La función de Wigner sigue un comportamiento similar a la distribución de Husimi. En los tiempos $t = 2 \mu\text{s}$ y $t = 12 \mu\text{s}$ se pierde la distribución inicial. Un aspecto importante a notar es que a pesar de que la función de Wigner puede adquirir valores negativos, en este caso no se presentan, lo cual reafirma el hecho de que los estados coherentes de Glauber son los estados cuánticos que se parecen

más a los estados clásicos de la luz.

De manera análoga al caso de la función de Husimi, cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia, la función de Wigner no presenta cambios significativos en su distribución. Esto coincide con el hecho de que la función de Wigner y la función de Husimi están relacionadas por la transformación (4.80).

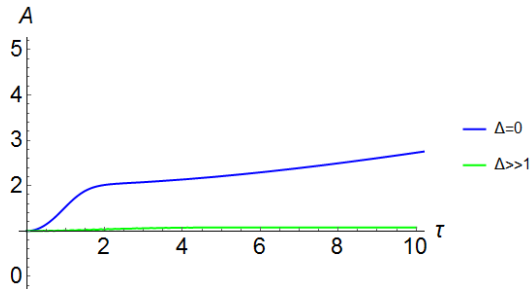


Figura 5.18: Se exhibe el área de la función Husimi en resonancia $\Delta = 0$ y fuertemente fuera de resonancia $\Delta \gg 1$. La escala de tiempo mostrada está en ms. En ambos casos se observa en $t = 0$ que la distribución de Husimi adquiere la mínima área posible ($A = 1$) característica de un estado coherente de Glauber. Después de la interacción con el átomo y cuando el sistema está en resonancia el área aumenta rápidamente. En $t = 2 \mu s$, se observa la formación de un estado de gato que ocupa un área $A = 2$. Posteriormente, el campo sigue modificando su distribución de cuasi-probabilidad y aumentando su área. Cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia, la variación en el área es muy pequeña, correspondiente a la nula variación observada en la función de Husimi.

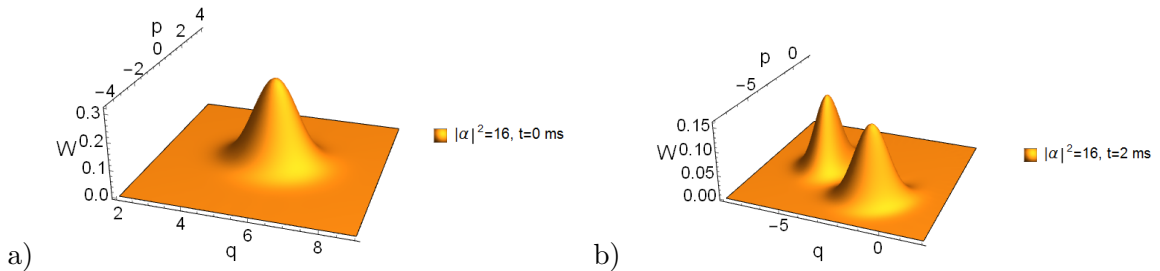


Figura 5.19: Función de Wigner cuando el sistema está en resonancia. Los cambios observados coinciden con las modificaciones de la función de Husimi.

5.4.3. Estados coherentes del grupo $SU(1,1)$ de un modo

El estado inicial del sistema átomo-campo está descrito por la función de onda,

$$|\Psi_0\rangle = (1 - |\eta|^2)^{1/4} \left\{ \sin \phi \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}} \eta^n |g, 2n\rangle + \cos \phi \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}} \eta^n |e, 2n\rangle \right\}, \quad (5.47)$$

donde los coeficientes ω_n en (5.25.1) toman la forma,

$$\omega_n = (1 - |\eta|^2)^{1/4} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}} \eta^n.$$

Este estado es separable y fácilmente se puede reconocer que las probabilidades ocupacionales del átomo a $t = 0$, están dadas por $\mathcal{P}_e = \cos^2 \phi$ y $\mathcal{P}_g = \sin^2 \phi$. Los coeficientes ω_n son amplitudes de probabilidad que satisfacen la igualdad

$$(1 - |\eta|^2)^{1/2} \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!} |\eta|^{2n} = 1.$$

Aunque, en principio, esta suma consta de un número infinito de términos, es posible encontrar computacionalmente un parámetro N que satisfaga la relación anterior. Cada término de esta suma da información sobre la probabilidad de encontrar $2n$ fotones o n pares de fotones en el campo electromagnético. La distribución de probabilidad de éste estado se muestra en la Figura 4.2.

Después actuar el operador de evolución temporal (5.21) sobre el estado inicial, encontramos

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & (1 - |\eta|^2)^{1/4} \sum_{n=0}^N \left\{ \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}} \eta^n \left[e^{-i\Omega(2n+1)t} \cos \phi F(2n+1) |e 2n\rangle \right. \right. \\ & - i\lambda e^{-i\Omega(2n)t} \sin \phi \sqrt{2n} G(2n) |e 2n-1\rangle \\ & \left. \left. - i\lambda e^{-i\Omega(2n+1)t} \cos \phi \sqrt{2n+1} G(2n+1) |g 2n+1\rangle + e^{-i\Omega(2n)t} \sin \phi F^*(2n) |g 2n\rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Al obtener la matriz de densidad reducida de la materia, a partir de la función de onda, se encuentra que las probabilidades de ocupación del átomo y la coherencia están dadas por

$$\mathcal{P}_e(t) = (1 - |\eta|^2)^{1/2} \sum_{n=0}^N \left[\cos^2 \phi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!} |\eta|^{2n} |F(2n+1)|^2 + \lambda^2 \sin^2 \phi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!} |\eta|^{2n} |G(2n)|^2 \sqrt{2n} \right]$$

$$\mathcal{P}_g(t) = (1 - |\eta|^2)^{1/2} \sum_{n=0}^N \left[\sin^2 \phi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!} |\eta|^{2n} F^*(2n) + \lambda^2 \cos^2 \phi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!} |\eta|^{2n} G(2n+1) \sqrt{2n+1} \right]$$

$$\chi(t) = (1 - |\eta|^2)^{1/2} \sum_{n,k=0}^N \left[\sin \phi \cos \phi e^{-i\Omega(2n-2k+1)t} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2})k!}} \eta^n \eta^{*k} F(2n+1)F(2n) \right]$$

Finalmente, la función de autocorrelación está dada por,

$$A(t) = (1 - |\eta|^2) \sum_{n,k=0}^N \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})n!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2})k!} |\eta|^{2n} |\eta|^{2k} e^{-i\Omega(2n-2k)t} [\sin^4 \phi F^*(2n)F(2k) + \cos^4 \phi F(2n+1)F^*(2k+1)]$$

Variación de la desintonía átomo-campo

A continuación se discute las diferencias encontradas en el comportamiento del sistema cuando $\Delta = 0$ y $\Delta \gg 1$. La Figura 5.20 muestra el comportamiento de las probabilidades de ocupación del átomo y la entropía lineal cuando el sistema está en resonancia. A diferencia de lo observado en los casos anteriores, podemos notar que el comportamiento de \mathcal{P}_e y \mathcal{P}_g difiere si ϕ toma valores de 0 o $\pi/2$. El caso más interesante sucede cuando el estado inicial del átomo es $|e\rangle$ (gráfico c). En éste, se nota para ciertos tiempos que la entropía lineal aumenta hasta su valor máximo $S_L = 0.5$ y también se observa la inversión de población. Al igual que en los estados de Fock, la máxima entropía se alcanza cuando $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$. Cuando $\phi = \pi/2$ (gráfico b) esta condición nunca se alcanza, por lo que $S_L < 0.5$. Finalmente, cuando $\phi = \pi/4$ (gráfico a) se observa la condición $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$, pero no se alcanza un máximo enredamiento. Esto se debe a que en este estado inicial $\hat{\rho}_M$ no es diagonal, por lo que la presencia de coherencias altas en estos tiempos (grafico a, Figura 5.21) impide alcanzar un máximo enedamiento. De la expresión para $\chi(t)$ notamos que para cuando ϕ es 0 o $\pi/2$, se hace cero; por lo tanto no contribuye al aumento o disminución del enredamiento.

Finalmente, se observó que el comportamiento de la autocorrelación del sistema en resonancia (gráfico b, Figura 5.21) es independiente del estado inicial del átomo. Para los tres casos ($\phi = 0, \pi/2, \pi/4$), después de la interacción átomo-campo, el sistema modifica su estado y no regresa a su estado inicial.

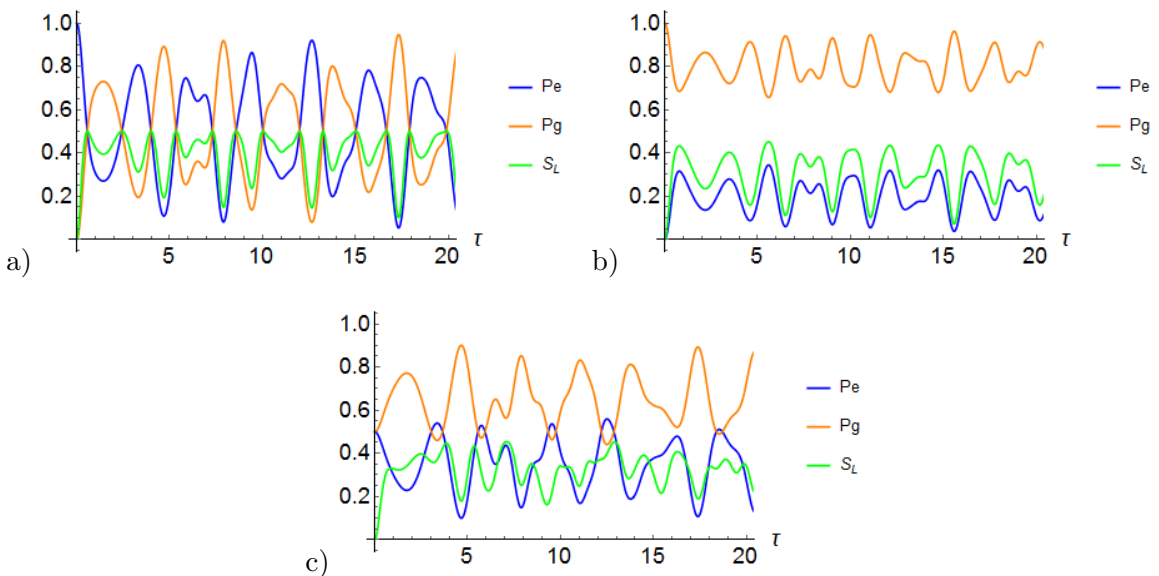


Figura 5.20: Probabilidades de ocupación del átomo y entropía lineal cuando el sistema está en resonancia. La escala de tiempo mostrada está en ms. a) $\phi = 0$. Se observa que la dinámica de las probabilidades de ocupación del átomo difieren si el átomo se encuentra inicialmente en los estados $|e\rangle$ o $|g\rangle$. Para el caso $|e\rangle$ ($\phi = 0$), se nota una inversión de la población y cuando se cumple la condición $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$ se alcanza un máximo la entropía lineal. b) Para cuando $\phi = \pi/2$, no ocurre la inversión de población, y S_L no alcanza su máximo valor. c) Para $\phi = \pi/4$, S_L no alcanza su valor máximo, ya que en los tiempos en que ocurre $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$, la coherencia es diferente de cero.

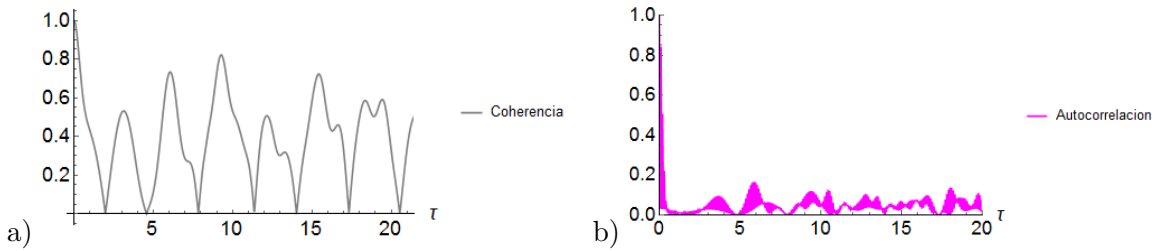


Figura 5.21: La escala de tiempo utilizada es ms. a) Función coherencia cuando $\Delta = 0$ y $\phi = \pi/4$. Los tiempos en los que la coherencia es cero y, por lo tanto, el estado del campo electromagnético caracteriza un estado mixto, coinciden con los tiempos en los que el estado $|g\rangle$ está favorecido a ser ocupado y el enredamiento disminuye. b) Función de autocorrelación cuando $\Delta = 0$. Se observa que su comportamiento es independiente del estado inicial del átomo.

Cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia y sin importar el valor de ϕ , se observa que las probabilidades de ocupación del átomo no se modifican después de la interacción con el campo (Figura 5.22). Sin embargo, la entropía lineal sí depende del estado inicial del átomo, ya que cuando ϕ toma valores de 0 y 1, S_L aumenta muy poco, indicando que la entropía átomo-campo es débil. Por el contrario, cuando $\phi = \pi/4$, S_L alcanza su máximo valor y se mantiene en éste durante un amplio intervalo de tiempo. Este mismo comportamiento se observa con $\phi = \pi/4$ en la interacción fuertemente fuera de resonancia entre el átomo y un campo coherente de Glauber. Sin embargo, difiere con el comportamiento observado en la interacción con un estado de Fock bajo las mismas condiciones.

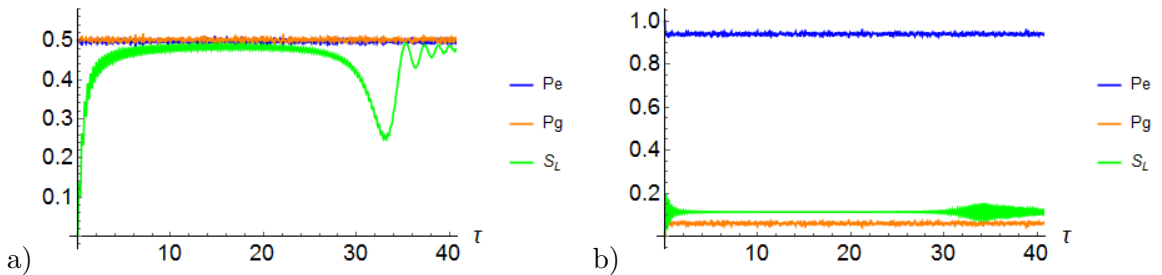


Figura 5.22: Probabilidades de ocupación y entropía lineal cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia. La escala de tiempo mostrada está en ms. a) Cuando $\phi = \pi/4$, las probabilidades de ocupación no muestran un cambio después de la interacción con el campo y ambas se mantienen en un valor de 0.5. Por el contrario, la entropía aumenta rápidamente y se mantiene estable en su valor máximo. b) Cuando $\phi = 0, \pi/2$, las probabilidades de ocupación tampoco se ven afectadas por la interacción con el campo y, en este caso, la medida del enredamiento es pequeña.

En la Figura 5.23, se ilustra el comportamiento de las funciones de autocorrelación y de coherencia cuando $\Delta \gg 1$. Al igual que en el caso fuertemente fuera de resonancia, la función de autocorrelación muestra un comportamiento distinto dependiente del estado inicial del átomo. Los puntos en los que difieren pueden estudiarse mediante el cálculo de las cuasi-distribuciones de probabilidad de Husimi y Wigner.

La expresión para la función $\chi(t)$ muestra que ésta sólo es distinta de cero cuando $\phi = \pi/4$ y su comportamiento se ilustra en el gráfico a) de la Figura 5.23. En los tiempos en los que la coherencia disminuye su valor hasta 0.5, S_L alcanza su máximo valor y cuando $\chi(t)$ aumenta su valor, S_L disminuye. En este caso, podemos concluir que una disminución en la coherencia contribuye a aumentar el enredamiento átomo-campo.

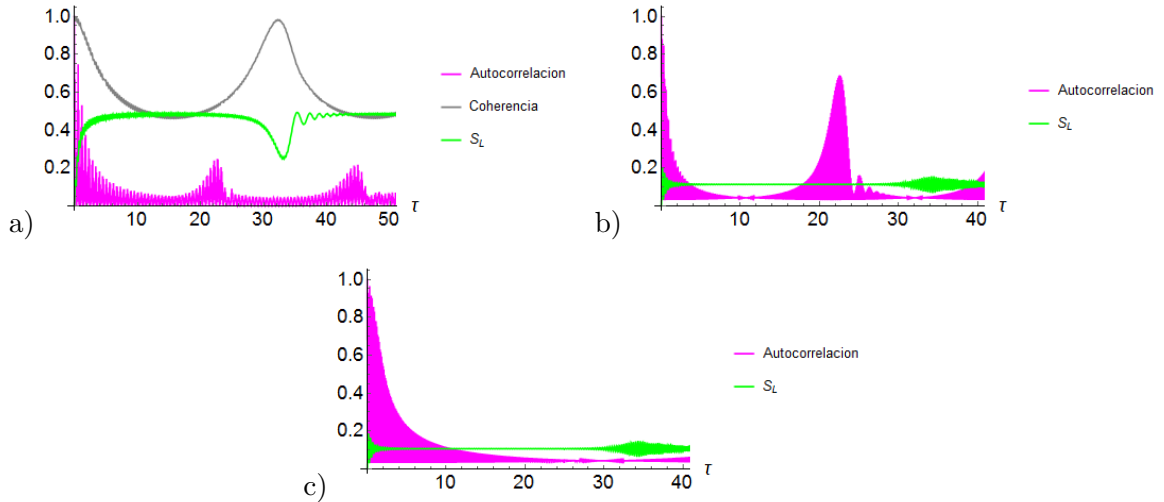


Figura 5.23: Funciones de autocorrelación y de coherencia cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia. a) $\phi = \pi/4$. Solamente cuando el estado inicial del átomo es una superposición de sus dos niveles, la coherencia es distinta de cero. Cuando ésta disminuye hasta 0.5, S_L alcanza su valor máximo. Los gráficos b) y c) muestran el comportamiento de la función de autocorrelación cuando $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$, respectivamente. Notamos que aunque el comportamiento de S_L y de las probabilidades de ocupación es muy similar cuando $\phi = 0, \pi/2$, la función de autocorrelación tiene un comportamiento diferente. Por lo tanto, resulta interesante estudiar el comportamiento del campo en los tiempos en los que la función de autocorrelación difiere.

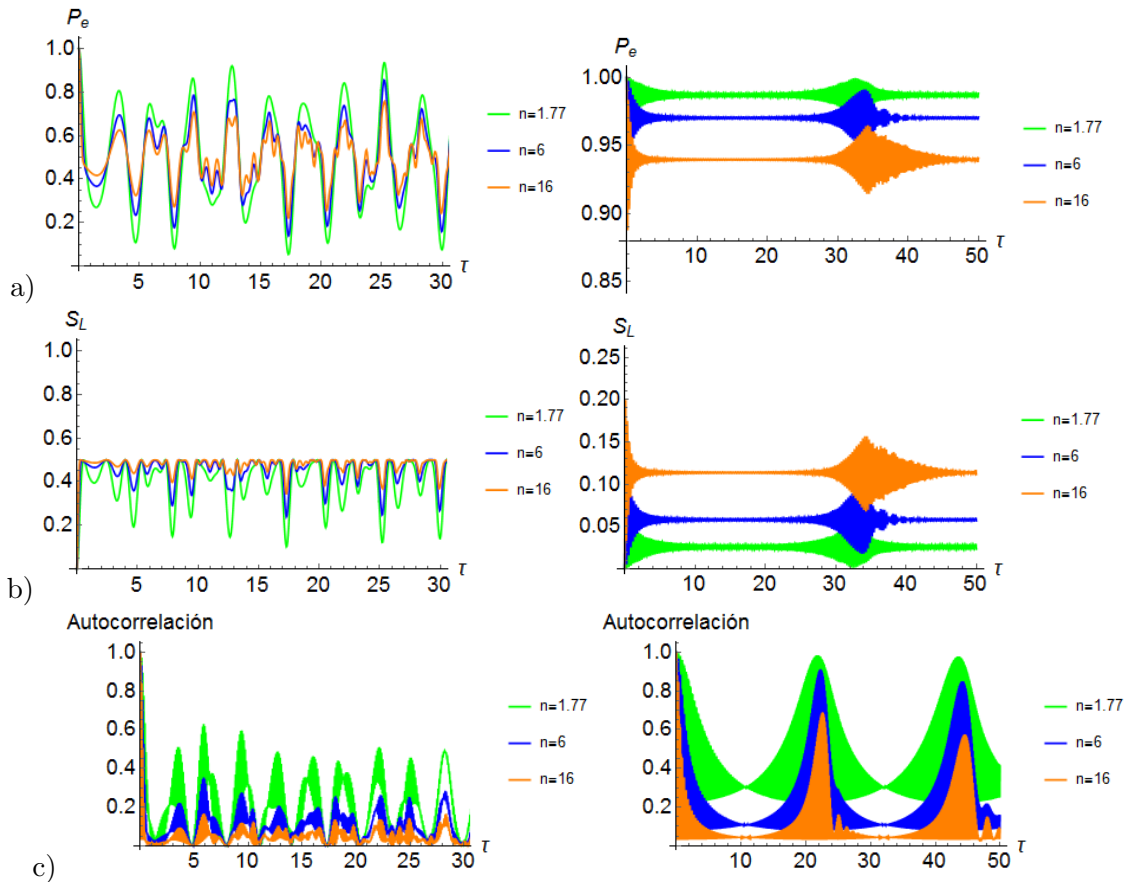
Variación del número promedio de fotones \bar{n} dentro de la cavidad

Figura 5.24: Se exhibe el comportamiento de las probabilidades de ocupación, la entropía lineal y la función de autocorrelación al cambiar el número promedio de fotones dentro de la cavidad. Esto se muestra cuando el sistema está en resonancia (*columna izquierda*) y cuando está fuertemente fuera de resonancia (*columna derecha*). En ambos casos, el estado inicial del átomo es $|e\rangle$. La escala de tiempo mostrada es ms. En el caso en el que $\Delta = 0$ y, a diferencia de los estados estudiados previamente, se puede notar que al aumentar \bar{n} no se modifican las frecuencias de oscilación de las funciones, pero decrecen sus intensidades. Cuando $\Delta \gg 1$, se observa que aumenta la duración de los colapsos en las probabilidades de ocupación del átomo, hecho que también se ve reflejado en S_L .

5.4.4. Estados coherentes del grupo $SU(1,1)$ de dos modos

El estado inicial general que se considera es

$$|\Psi_0\rangle = (1 - |\eta|^2)^{\frac{q+1}{2}} \left[\sin \phi \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{(q+n)!}{n!q!}} \eta^n |g\rangle |q+n, n\rangle + \cos \phi \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(q+n)!}{n!q!}} \eta^n |e\rangle |q+n, n\rangle \right], \quad (5.49)$$

donde los coeficientes ω_n de la ecuación (5.25.2) están dados por las amplitudes de probabilidad

$$\omega_n = (1 - |\eta|^2)^{\frac{q+1}{2}} \sqrt{\frac{(q+n)!}{n!q!}} \eta^n.$$

La suma del cuadrado de estos coeficientes, la cual debe ser igual a 1, es igual a la suma de las probabilidades de encontrar al campo con $q+n$ fotones en el primer modo y n fotones en el segundo modo. Éstas están definidas por

$$\mathcal{P}_{q,n} = \text{Tr}[\hat{\rho}_F(0) \hat{P}_{n+q,n}] = (1 - |\eta|^2)^{(q+1)} \frac{(q+n)!}{q!n!} |\eta|^{2n}, \quad (5.50)$$

donde $\hat{P}_{n+q,n}$ es un operador de proyección dado por $\hat{P}_{n+q,n} = |n+q, n\rangle \langle n+q, n|$. Por otro lado, y al igual que en todos los casos anteriores, las probabilidades de ocupación del átomo a $t=0$, están dadas por $\mathcal{P}_e(0) = \cos^2 \phi$ y $\mathcal{P}_g(0) = \sin^2 \phi$.

Los estados coherentes SU(1,1) de dos modos están definidos por el parámetro complejo η . La importancia de éste está en que permite definir el número promedio de fotones en el modo 1 y el modo 2 del campo electromagnético. Esta relación se obtiene al encontrar el valor esperado del generador \hat{K}_0 en la base no normalizada de los estados SU(1,1) de dos modos y en la base de los estados de Fock.

$$\begin{aligned} \langle \hat{K}_0 \rangle &= \langle \eta w | \hat{K}_0 | \eta w \rangle = \left(w + \eta^* \frac{\partial}{\partial \eta^*} \right) \langle \eta w | \eta w \rangle = w \left[\frac{1 + |\eta|^2}{1 - |\eta|^2} \right] \\ \langle \hat{K}_0 \rangle &= \langle n_1 n_2 | \hat{K}_0 | n_1 n_2 \rangle = \frac{1}{2} [\langle \hat{n}_1 \rangle + \langle \hat{n}_2 \rangle + 1]. \end{aligned}$$

Al igualar ambas identidades y recordar que el número promedio de fotones en los dos modos del campo están relacionados por $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle + q$, encontramos que el parámetro η de los estados SU(1,1) se relaciona con el número promedio de fotones como

$$|\eta|^2 = \frac{\langle n_2 \rangle}{\langle n_2 \rangle + q + 1}. \quad (5.51)$$

Debido a que el campo está compuesto de dos modos, el modelo de Jaynes-Cummings no da la descripción de la interacción generado con el átomo. Es necesario utilizar el modelo de Jaynes-Cummings generalizado, en el que la transición atómica está mediada por un proceso de dos fotones. La función de onda $\forall t$, dada por la acción del operador (5.23) sobre el estado inicial (5.49), está formada por cuatro términos. Cada uno de ellos está multiplicado por la fase $e^{-i\Omega(\hat{N} + \epsilon\hat{\Delta})t}$. Los resultados muestran que esta fase contribuye a generar oscilaciones de frecuencias altas que no definen el comportamiento global del sistema. Al hacer una transformación de similitud que elimine esta fase, los resultados ya no muestran estas oscilaciones, pero el sistema presenta el mismo comportamiento global. Es decir, se obtiene una envolvente de las funciones.

Así, los resultados mostrados en esta sección están dados en un esquema generado por la transformación

$$e^{i\Omega(\hat{N} + \epsilon\hat{\Delta})t} \hat{H} e^{-i\Omega(\hat{N} + \epsilon\hat{\Delta})t} \quad , \quad e^{i\Omega(\hat{N} + \epsilon\hat{\Delta})t} |\Psi(t)\rangle. \quad (5.52)$$

La función de onda $\forall t$ que se obtiene, es

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & (1 - |\eta|^2)^{\frac{q+1}{2}} \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{(q+n)!}{n!q!}} \eta^n \left\{ \cos \phi F_+(q, n) |e\rangle |q+n, n\rangle \right. \\
& + \sin \phi G_+(q, n) \sqrt{(q+n)n} |e\rangle |q+n-1, n-1\rangle + \cos \phi G_-(q, n) \sqrt{(q+n-1)n-1} |g\rangle |q+n+1, n+1\rangle \\
& \left. + \sin \phi F_-(q, n) |g\rangle |q+n, n\rangle \right\}. \tag{5.53}
\end{aligned}$$

Variación de la desintonía átomo-campo

Los resultados mostrados a continuación consideran los parámetros mostrados en la tabla 5.2. Estos valores fueron tomados de la realización experimental del modelo de Jaynes-Cummings generalizado.

Cuando el sistema está en resonancia y, como se ha observado en casos anteriores, altos valores de S_L se alcanzan cuando \mathcal{P}_e y \mathcal{P}_g tienden a 0.5. Así, para el caso en el que $\phi = \pi/4$ (gráfico b de la Figura 5.25), en donde las probabilidades de ocupación se mantienen muy cercanas a su valor inicial de 0.5, se consigue un enredamiento más alto en comparación con el caso en el que $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a, Figura 5.25). En este caso, el estado favorecido a ser ocupado es $|g\rangle$.

De la Figura 5.26, se puede observar que el comportamiento de la función coherencia también contribuye a que se pueda lograr un alto enredamiento. Cuando $\phi = \pi/4$ (gráfico b), se observa que mientras más bajos sean los valores de la coherencia, el enredamiento será más alto. Así, cuando $\phi = 0, \pi/2$, donde la coherencia se mantiene a valores más altos, se observa que el enredamiento es menor.

Finalmente, en la Figura 5.27 se muestra el comportamiento de la función Autocorrelación cuando $\Delta = 0$. Sin importar el estado inicial del átomo, se observa que esta función oscila con una frecuencia aproximada de 2π . Sin embargo, nunca recupera su valor inicial, por lo que el estado tampoco regresa a su estado inicial.

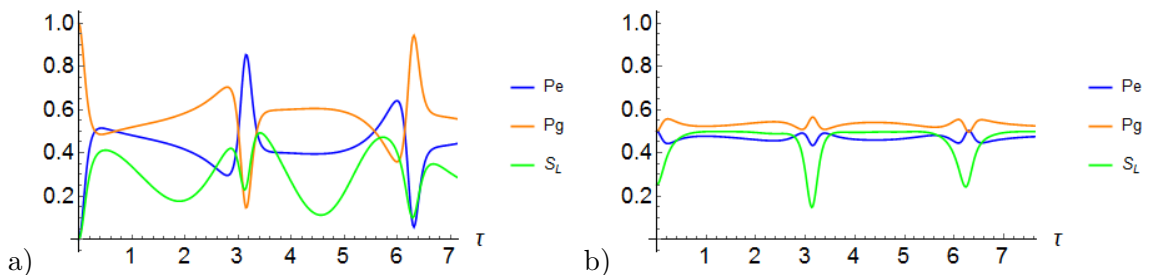


Figura 5.25: Entropía lineal y probabilidades de ocupación del átomo cuando el sistema está en resonancia. La escala de tiempo mostrada está en ms Tanto para $\phi = 0, \pi/2$ (gráfico a) como para $\phi = \pi/4$ (gráfico b), la máxima entropía lineal se alcanza cuando \mathcal{P}_e y \mathcal{P}_g toman el valor de 0.5.

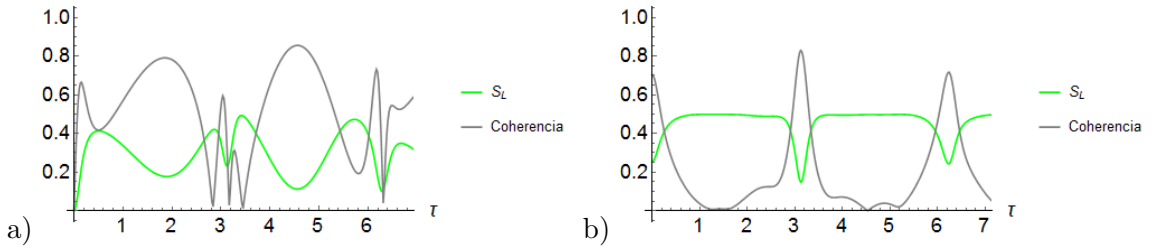


Figura 5.26: Comportamiento de la función coherencia cuando $\Delta = 0$. El gráfico a muestra el caso en el que el estado inicial del átomo está dado por $\phi = 0, \pi/2$. El gráfico b muestra el caso en que $\phi = \pi/4$. En ambos, la entropía lineal se ve favorecida cuando la coherencia disminuye su valor.

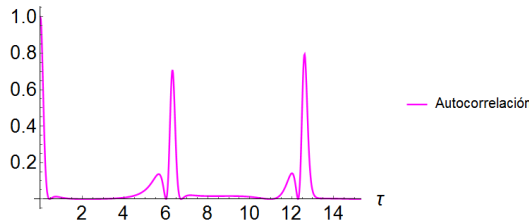


Figura 5.27: Función autocorrelación cuando $\Delta = 0$. La escala de tiempo mostrada está en ms. Sin importar el estado inicial del átomo, la función autocorrelación presenta el mismo comportamiento para $\phi = 0, \pi/2, \pi/4$. Tiene una frecuencia de oscilación de aproximadamente 2π , en la que aumenta su valor pero no toma el valor de 1, por lo que después de la interacción, el sistema no regresa a su estado inicial.

Cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia, se observa que a diferencia del caso en resonancia con $\phi = \pi/4$, donde el estado preferible a ser ocupado es $|g\rangle$, en este caso el estado excitado es el que tiene una mayor probabilidad a ser ocupado (gráfico b, Figura 5.28).

En la Figura 5.29 se muestra el comportamiento de las funciones entropía lineal, coherencia y autocorrelación. Sin importar el estado inicial del átomo el comportamiento de las tres funciones es muy similar. Conforme avanza el tiempo la coherencia y la autocorrelación disminuyen sus valores y S_L aumenta hasta valores cercanos a 0.4.

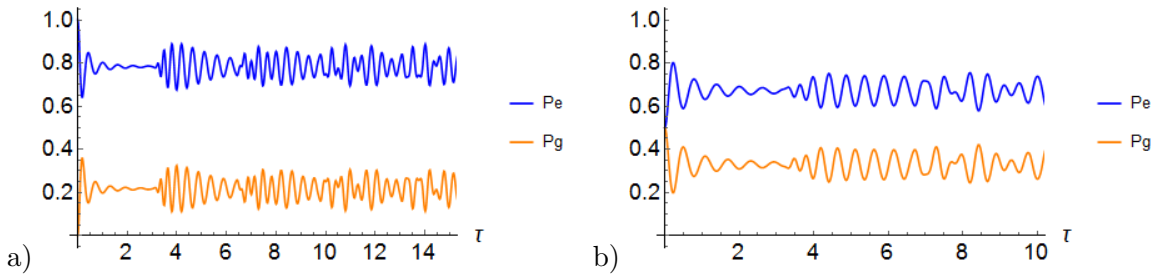


Figura 5.28: Probabilidades de ocupación del átomo cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia. a) Cuando el estado inicial del átomo es $|e\rangle$ o $|g\rangle$, la probabilidades de los estados se mantienen separados y presentan pequeñas oscilaciones respecto a su valor inicial. b) Cuando el átomo está inicialmente en una combinación de sus dos estados ($\phi = \pi/4$), el estado $|e\rangle$ adquiere una preferencia a ser ocupado durante todo el intervalo de tiempo. En ambos casos, se observa el fenómeno de colapsos y revivals.

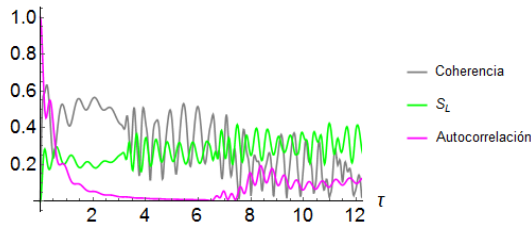


Figura 5.29: Entropía lineal, coherencia y autocorrelación. El comportamiento de las funciones es independiente del estado inicial del átomo ($\phi = 0, \pi/2, \pi/4$). La coherencia y la autocorrelación tienen a disminuir, mientras que S_L aumenta.

Variación del número promedio de fotones

Existen dos formas de variar el número promedio de fotones del campo electromagnético [36]. Una de ellas es dejar fijo el parámetro η del estado $SU(1,1)$ mientras se aumenta la diferencia de fotones entre el modo 1 y el modo 2, es decir, se aumenta el valor de q . La segunda forma consiste en variar el parámetro η dejando fijo la diferencia de fotones entre los modos. Los resultados muestran que el único cambio relevante en la variación en q suceden entre el estado $q = 0$ y cualquier otro estado con $q > 0$. Todos los estados con $q > 0$ siguen un comportamiento similar, sin embargo, el estado con $q = 0$ se comporta de forma semejante a los estados de Fock, en el sentido en que el periodo de las funciones está bien definido y a ese tiempo, el sistema regresa a su estado original.

La variación en el parámetro η contribuye a generar el fenómeno de colapsos y revivals y a prolongar el tiempo en el que suceden. Como consecuencia, a mayor valor de η , se alcanza un enredamiento máximo durante un mayor tiempo.

Capítulo 6

Ingeniería de Estados Cuánticos

El enredamiento es una propiedad característica de los sistemas cuánticos. Se manifiesta en el hecho de que debido a la interacción entre dos subsistemas cuánticos, éstos no pueden ser descritos de forma separada. Una consecuencia de ello, es que al realizar una medición sobre un subsistema cuántico, se encuentra información sobre el otro. Por ejemplo, en la interacción átomo-campo es posible conocer el estado en el que se encuentra el átomo después de realizar una medición sobre el campo y viceversa.

En este capítulo se discute el uso del enredamiento entre un estado atómico y un estado de la luz, descrito por el modelo de Jaynes-Cummings, como un recurso para generar estados cuánticos de luz arbitrarios. Específicamente, se describe el proceso para construir estados de gato y estados formados por una superposición finita de estados de Fock. En ambos procedimientos, debido a la presencia del enredamiento átomo-campo, se realiza una medición sobre los grados internos de libertad del átomo para conocer el estado del campo después de la interacción.

6.1. Preparación de estados cuánticos

Como se ha mencionado, en un sistema bipartita no separable o que presenta enredamiento, conocer el estado en el que se encuentra un subsistema cuántico implica realizar mediciones sobre el otro. El modelo de Jaynes-Cummings es el modelo más simple que demuestra el enredamiento entre el campo y los grados de libertad atómicos. Este enredamiento puede observarse realizando mediciones sobre el campo, el átomo, o sobre el sistema conjunto. Por ejemplo, consideremos el estado conjunto átomo-campo (6.1) que es una solución para el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=g,e} \Phi_{jn}(t) |j n\rangle . \quad (6.1)$$

Cuando se realiza una medición conjunta, la probabilidad de que el átomo esté en el estado de referencia $|\tilde{\Psi}_A\rangle$ y el campo en el estado de referencia $|\tilde{\Psi}_F\rangle$, está dada por (6.2).

$$\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_A\rangle, |\tilde{\Psi}_F\rangle) = \left| \langle \tilde{\Psi}_F, \tilde{\Psi}_A | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=g,e} \Phi_{nj}(t) \langle \tilde{\Psi}_A | j \rangle \langle \tilde{\Psi}_F | n \rangle \right|^2 . \quad (6.2)$$

Esta medición implica una alta interferencia cuántica. Para obtener la probabilidad (6.2) primero se calcula el producto de las amplitudes $\Phi_{jn}(t)$ con las amplitudes de probabilidad de los estados de referencia del átomo y del campo. Posteriormente, se suma sobre los estados atómicos y sobre todos los estados del campo. Esta doble suma introduce términos de interferencia que deben ser entendidos como propiedades características de un sistema altamente correlacionado, ya que es fácil identificar que (6.2) no está compuesto de probabilidades independientes, por lo que sus contribuciones no son separables.

Ahora, las probabilidades asociadas a los subsistemas cuánticos pueden ser determinadas a partir de la probabilidad conjunta (6.2). Por ejemplo, la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado arbitrario $|\tilde{\Psi}_A\rangle$ sin importar el estado del campo está dada por,

$$\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_A\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \langle n | \langle \tilde{\Psi}_A | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_A\rangle, |n\rangle). \quad (6.3)$$

Es decir, se trata de la suma de las probabilidades conjuntas donde el átomo se encuentra en el estado arbitrario $|\tilde{\Psi}_A\rangle$ y el campo en el estado $|n\rangle$. La suma se hace sobre n para considerar todos los estados posibles del campo.

De forma similar, la probabilidad de que el campo se encuentre en el estado arbitrario $|\tilde{\Psi}_F\rangle$ sin importar el estado del átomo está dada por,

$$\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_F\rangle) = \sum_{j=g,e} \left| \langle j | \langle \tilde{\Psi}_F | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \sum_{j=g,e} \mathbb{P}(t; |j\rangle, |\tilde{\Psi}_F\rangle). \quad (6.4)$$

Ésta se expresa como la suma de probabilidades conjuntas de que el campo se encuentra en el estado arbitrario $|\tilde{\Psi}_F\rangle$ y el átomo en cualquiera de sus dos estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$.

Hasta este punto, se han obtenido expresiones para las probabilidades de obtener ciertos estado del campo y del átomo. Ahora, nuestro interés está en conocer el estado en el que queda uno de los subsistemas cuánticos después de realizar una medición sobre el otro. Así, el estado del campo (átomo) después de determinar que el átomo (campo) se encuentra en el estado de referencia $|\tilde{\Psi}_A\rangle$ ($|\tilde{\Psi}_F\rangle$), está dado por (6.5), donde N_F y N_A son constantes de normalización. \hat{I}_A es el operador identidad definido en el espacio vectorial formado por la base de los estados atómicos, esto es, $\hat{I}_A = |g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|$.

$$|\Psi_F\rangle = N_F \sum_n |n\rangle \langle n, \tilde{\Psi}_A | \Psi(t) \rangle \quad , \quad |\Psi_A\rangle = N_A \hat{I}_A \otimes \langle \tilde{\Psi}_F | \Psi(t) \rangle. \quad (6.5)$$

Las constantes de normalización pueden ser obtenidas fácilmente y están dadas por el inverso del cuadrado de las probabilidades de medir el estado de referencia $|\Psi_F\rangle$ o $|\Psi_A\rangle$, como se muestra en (6.6).

$$|\Psi_F\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_A\rangle)}} \sum_n |n\rangle \langle n, \tilde{\Psi}_A | \Psi(t) \rangle \quad , \quad |\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_F\rangle)}} \hat{I}_A \otimes \langle \tilde{\Psi}_F | \Psi(t) \rangle. \quad (6.6)$$

Los estados (6.6) tienen un significado físico importante. Por ejemplo, el estado del campo $|\Psi_F\rangle$ se determina al medir la probabilidad de encontrar el estado de referencia $|\tilde{\Psi}_A\rangle$ y la normalización de $|\Psi_F\rangle$ está dada por $\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_A\rangle)$. Del mismo modo, el estado del campo $|\Psi_A\rangle$ se determina después

de medir la probabilidad de encontrar el estado de referencia $|\tilde{\Psi}_F\rangle$, y su normalización depende de $\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_F\rangle)$.

El enredamiento entre las variables atómicas y el campo electromagnético se manifiesta en las probabilidades para medir estas cantidades. Para hacer las mediciones de las probabilidades mencionadas, se preparan los estados iniciales atómico y del campo, los cuales interactúan entre si por un tiempo t . Posteriormente, se realizan mediciones en los estados de referencia del átomo y el campo, o únicamente sobre el átomo o sobre el campo. Se registran los resultados, se repite el experimento muchas veces y se construye un histograma.

Puede realizarse una medición del estado atómico como sigue: Primero, se aplica un campo clásico al estado atómico por un tiempo t , esto es,

$$|\psi_A\rangle \rightarrow c'_e|e\rangle + c'_g|g\rangle,$$

En éste las amplitudes de probabilidad se escriben como

$$c'_e = \cos \lambda t c_e - i \sin \lambda t c_g, \quad c'_g = \cos \lambda t c_g - i \sin \lambda t c_e,$$

donde λ determina el momento dipolar del átomo. Segundo, se proyecta el estado atómico con respecto al estado base, esto es,

$$\langle g|\psi'\rangle = c_e \cos \lambda t - i c_g \sin \lambda t,$$

que se compara con la proyección deseada con respecto al estado de referencia

$$\langle \tilde{\psi}_A|\psi_A\rangle = \tilde{c}_e^* c_e + \tilde{c}_g^* c_g.$$

Tercero, se eligen los parámetros del campo clásico en forma apropiada. Generalmente se usa una onda de luz no resonante para lograr

$$\tilde{c}_e^* = \cos \lambda t, \quad \tilde{c}_g^* = -i \sin \lambda t. \quad (6.7)$$

Se concluye que se puede realizar una medición sobre un estado de referencia $|\tilde{\psi}\rangle_A$, enviando el átomo a través de un campo clásico no resonante; seguido de una medición de la población usando el método de ionización. Para medir el campo electromagnético puede utilizar la realización experimental de estados homodinos como estado referencia. (ver texto L. Mandel y E. Wolf).

6.1.1. Estados de gato

En esta sección se discute la interacción átomo-campo dentro de una cavidad considerando una *desintonía* muy alta, $\Delta = \omega - \Omega \gg 1$, de forma que el sistema bipartita se encuentre fuertemente fuera de resonancia. Bajo estas circunstancias, después de dejar que el sistema interactúe y se presente enredamiento, se realiza una medición sobre los grados internos del átomo. El estado del campo generado después de la medición es una superposición de dos estados coherentes con distintas fases. Este tipo de estados son conocidos como estados gato.

Recordemos que el modelo de Jaynes-Cummings describe la interacción átomo-campo que usaremos para la construcción del estado de gato. Bajo las condiciones de alto *detuning*, la solución a $\Omega(n)$ dada por las ecuaciones de Rabi en (5.35), se puede aproximar como

$$\Omega(n) = \sqrt{\lambda^2(n+1) + \frac{\Delta^2}{4}} = \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\Delta}{2} + \frac{\lambda^2(n+1)}{\Delta}. \quad (6.8)$$

Asimismo, los coeficientes dados (5.36.2) se aproximan como se muestra en (6.9), donde adicionalmente se considera $\frac{\Delta}{2\Omega} \approx 1$.

$$\Phi_{en}(t) = \Phi_{en}(0) \exp \left[i \frac{\lambda^2(n+1)}{\Delta} t \right] \quad , \quad \Phi_{gn+1}(t) = \Phi_{gn+1}(0) \exp \left[-i \frac{\lambda^2(n+1)}{\Delta} t \right] \quad (6.9)$$

Al substituirlos en el estado (5.29), el cual es solución del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (5.28), se obtiene un estado particular (6.10) que hace referencia a la interacción átomo-campo con un *detuning* alto.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp \left[i \frac{\lambda^2(n+1)}{\Delta} t \right] \Phi_{en}(0) |en\rangle + \exp \left[-i \frac{\lambda^2(n+1)}{\Delta} t \right] \Phi_{gn+1}(0) |gn+1\rangle \right\} + \Phi_{g0}(0) |g0\rangle . \quad (6.10)$$

A este estado se le puede asociar un Hamiltoniano efectivo y su correspondiente operador de evolución temporal dados por

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{\hbar\lambda^2}{\Delta} \left[\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + 1) \right] \quad , \quad \hat{U}_{\text{eff}} = \exp \left\{ \frac{i\lambda^2}{\Delta} \left[\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + 1) \right] t \right\} . \quad (6.11)$$

La elección de este Hamiltoniano efectivo se debe a que la acción del operador de evolución temporal sobre los estados $|en\rangle$ y $|gn+1\rangle$ es

$$\hat{U}_{\text{eff}} |en\rangle = e^{i\frac{\lambda^2}{\Delta}(n+1)t} |en\rangle \quad , \quad \hat{U}_{\text{eff}} |gn+1\rangle = e^{-i\frac{\lambda^2}{\Delta}(n+1)t} |gn+1\rangle ,$$

es decir, recupera el estado (6.10). En otras palabras, partiendo del modelo Jaynes-Cummings, se ha encontrado un Hamiltoniano efectivo y su correspondiente solución que describen un sistema formado por la interacción átomo-campo con un *detuning* alto.

Los operadores (6.11) pueden ser reescritos en términos de la constante de movimiento

$$\hat{\Lambda} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + 1)$$

como

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{\hbar\lambda^2}{\Delta} \hat{\sigma}_z \hat{\Lambda} \quad , \quad \hat{U}_{\text{eff}} = \exp \left[i \frac{\lambda^2}{\Delta} \hat{\sigma}_z \hat{\Lambda} \right] . \quad (6.12)$$

El siguiente paso es proponer un estado inicial a ser estudiado. Consideraremos un átomo en una superposición coherente (6.13) de sus estados, el cual se puede generar al hacer incidir un campo clásico sobre un átomo efectivo de dos niveles,

$$|\Psi_A\rangle_0 = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle . \quad (6.13)$$

Este estado atómico (6.13) con frecuencia ω_0 entre sus niveles, se hace pasar por una cavidad resonante que contiene un campo unimodal en el estado (6.14) con frecuencia Ω , tal que $\omega_0 \gg \Omega$,

$$|\Psi_F\rangle_0 = \sum_n \omega_n |n\rangle . \quad (6.14)$$

Así, el estado inicial que consideramos está dado por

$$|\Psi_0\rangle = |\Psi_F\rangle_0 \otimes |\Psi_A\rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \{ c_e |e, n\rangle + c_g |g, n\rangle \} . \quad (6.15)$$

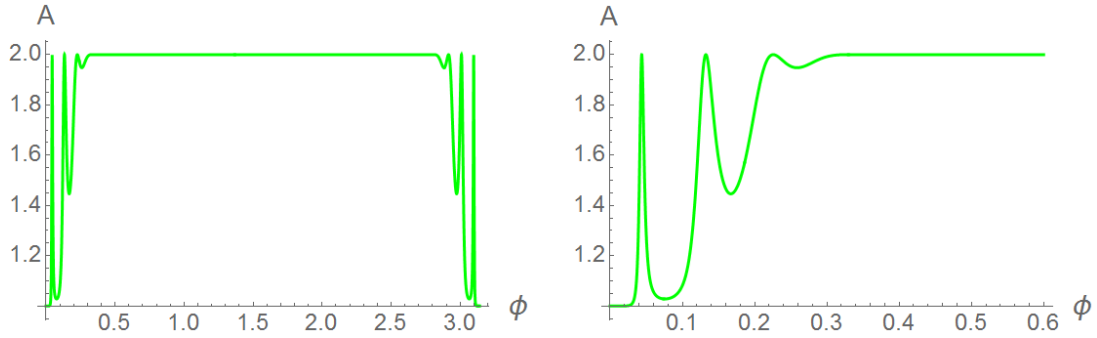


Figura 6.1: Área en el espacio fase de la función de Husimi (5.9) para el estado (6.22) con $\alpha = 6$. Se observa que cuando $\phi = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, el campo se encuentra en un estado coherente el cual presenta un área mínima $A = 1$. Conforme ϕ aumenta, el estado de gato se forma y éste adquiere un área de $A = 2$, ya que se trata de la superposición de dos estados coherentes. En la figura de la derecha se presenta un acercamiento de la gráfica del área, donde se muestra la desestabilización del estado gato en las cercanías a $\phi = n\pi$.

Después de actuar el operador de evolución temporal sobre éste, se obtiene el vector de estado que describe el sistema $\forall t$,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \omega_n \left[c_e e^{i[\phi_1(t) + \phi_n(t)]} |e\rangle + c_g e^{-i\phi_n(t)} |g\rangle \right] \otimes |n\rangle, \quad (6.16)$$

donde se definió la fase $\Phi_n(t)$ como

$$\phi_n(t) = \frac{\lambda^2 n}{\Delta} t. \quad (6.17)$$

Como se ha mencionado, el estado (6.16) describe la interacción átomo-campo y, gracias a la presencia de enredamiento entre ambos subsistemas, es posible conocer el estado en el que se encuentra el campo después de realizar una medición sobre el átomo. Así, se propone el estado atómico de referencia

$$|\tilde{\Psi}_A\rangle = \tilde{c}_e |e\rangle + \tilde{c}_g |g\rangle, \quad (6.18)$$

para el cual, su probabilidad de ser medido está dada por (6.3). Después de realizar la medición y haber encontrado este estado de referencia (6.18), el estado en el que queda el átomo está dado por (6.19), como se discute en la sección anterior.

$$|\Psi_F\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{P}(t; |\tilde{\Psi}_A\rangle)}} \left\{ \tilde{c}_e^* c_e e^{i\phi_1(t)} \sum_n \omega_n e^{i\phi_n(t)} |n\rangle + \tilde{c}_g^* c_g \sum_n \omega_n e^{-i\phi_n(t)} |n\rangle \right\}. \quad (6.19)$$

El estado de referencia atómica $|\tilde{\Psi}_A\rangle$ y el estado atómico $|\Psi_A\rangle_0$ con el que interactúa el campo en un inicio, se pueden construir tal que

$$\tilde{c}_e^* c_e e^{i\Phi_1(t)} = \tilde{c}_g^* c_g = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bajo esta condición el estado (6.19) se simplifica a

$$|\Psi_F\rangle = \frac{N}{\sqrt{2}} \left[\sum_n \omega_n e^{i\phi_n(t)} |n\rangle + \sum_n \omega_n e^{-i\phi_n(t)} |n\rangle \right]. \quad (6.20)$$

Finalmente, consideremos el caso especial en el que el estado (6.14), el campo con el que interactúa el átomo dentro de la cavidad, se trata de un estado coherente

$$|\Psi_F\rangle_0 = \sum_n \omega_n |n\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} |n\rangle \quad (6.21)$$

donde α se toma como un número real. Bajo estas consideraciones y recordando la definición de la fase $\Phi_n(t)$ dada en (6.17), se encuentra que el estado del campo está descrito por (6.22), el cual es una superposición de dos estados coherentes con fases diferentes, lo que se conoce como *estado de gato*.

$$|\Psi_F\rangle = \frac{N}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left\{ \sum_n \frac{(\alpha e^{i\frac{\lambda^2}{\Delta}t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle + \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\frac{\lambda^2}{\Delta}t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right\} = \frac{N}{\sqrt{2}} [|\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle], \quad (6.22)$$

donde, finalmente, la fase ϕ está dada por $\phi = \frac{\lambda^2}{\Delta}t$. El comportamiento en el espacio fase de éste estado se ilustra en la Figura 6.2, donde se presentan sus funciones de Husimi y Wigner. Éstas nos permiten obtener información sobre el tipo de correlaciones presentes y sobre la similitud del estado con un estado coherente. Finalmente, la Figura 6.1 presenta el comportamiento del área en el espacio fase de la función de Husimi como función de ϕ . Al comparar ambas figuras es evidente que cuando $\phi = 0$, el campo se encuentra en un estado coherente. Éste está caracterizado por un área mínima $A = 1$ y una distribución gaussiana en el espacio fase para la función de Husimi. Asimismo se observa que la función de Wigner no presenta valores negativos. Conforme ϕ aumenta, el campo evoluciona a un estado de gato, el cual tiene un área de $A = 2$ y se mantiene estable dentro del intervalo $0 < \phi < \pi$. En las cercanías y cuando $\phi = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, el estado de gato se destruye y se recupera el estado coherente del campo.

En conclusión hemos utilizado una interacción dispersiva fuertemente desintonizada con el modo del campo en la cavidad para crear una superposición de dos estados coherentes de amplitudes iguales pero fases diferentes. En este proceso se ha transferido la coherencia de los átomos al campo electromagnético.

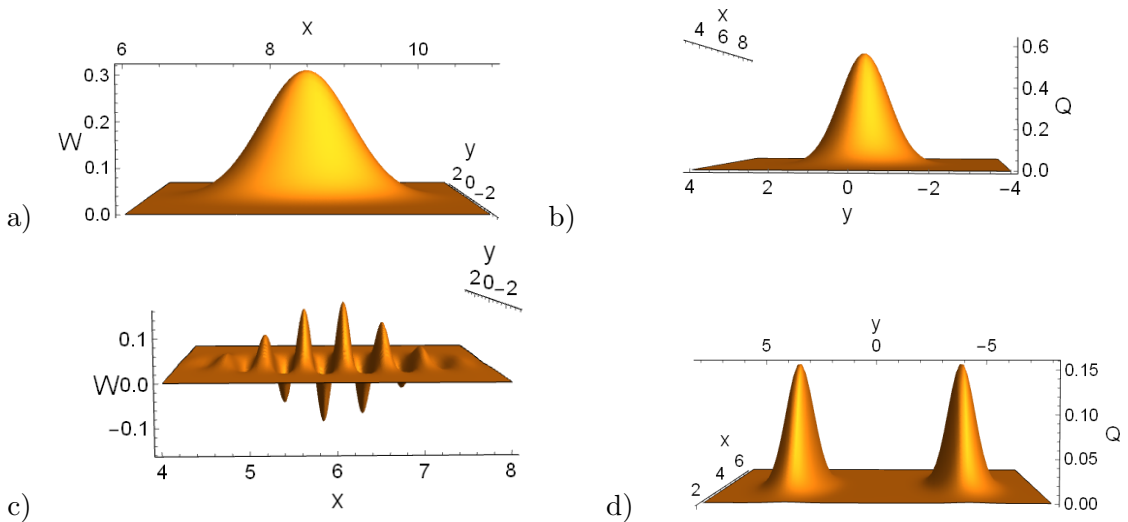


Figura 6.2: Funciones de Wigner (*columna izquierda*) y funciones de Husimi (*columna derecha*) para el estado (6.22) con $\alpha = 6$ y distintos valores de ϕ . Recordemos que la fase ϕ está relacionada con el tiempo a través de $t = \frac{\Delta}{\lambda^2} \phi$. Las figuras a) y b) ilustran las funciones cuando $\phi = 0$ ($t = 0$). En este caso el campo se encuentra en un estado coherente. Las figuras c) y d) presentan las funciones cuando $\phi = \pi/4$ ($t = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta}{\lambda^2}$). Se observa que la función de Husimi presenta valores negativos y la función de Husimi adquiere el comportamiento esperado para un estado de gato: una combinación de dos estados coherentes.

6.1.2. Combinación finita de estados de Fock

Los estados de la luz formados por una superposición coherente y finita de estados de Fock (6.23), pueden ser generados dentro de un resonador utilizando el enredamiento átomo-campo como un recurso.

$$|\Psi_d\rangle = \sum_{n=0}^N d_n |n\rangle. \quad (6.23)$$

Los estados (6.23) se construyen partiendo del estado de vacío en una cavidad mediante la inyección de N átomos excitados de dos niveles que atraviesan la cavidad; y al salir se asegura que el átomo se encuentre en su estado base. El enredamiento nos garantiza entonces que el átomo ha transferido su excitación al campo, implicando la construcción del estado de Fock $|N\rangle$ del campo electromagnético. Para formar una superposición coherente de estados de Fock, debe tenerse el fenómeno de interferencia cuántica, preparando el estado atómico en una superposición de estados.

El procedimiento experimental para generarlos consiste en hacer interactuar individualmente un número de N átomos en una superposición coherente (6.24) con un campo cuantizado.

$$|\Psi_A\rangle = |e\rangle + i \epsilon |g\rangle. \quad (6.24)$$

Los átomos se inciden de forma individual dentro de una cavidad donde interactúan con el campo. Al salir de ésta, se realiza una medición sobre sus grados internos de libertad. Si el átomo se encuentra

en el estado base $|g\rangle$ (resultado positivo), implica que se introdujo una excitación (fotón) a la cavidad. De lo contrario, si el átomo se encuentra en el estado excitado $|e\rangle$ (resultado negativo), el campo no se modificó y se debe repetir el experimento. Este procedimiento se debe llevar a cabo de manera subsecuente buscando que después de la interacción de cada átomo se obtenga un resultado positivo.

Por ejemplo, el primer átomo que se incide en la cavidad para que interactúe con el estado vacío del campo $|0\rangle$, esta dado por

$$|\Psi_A^{(1)}\rangle = |e\rangle + i\epsilon_1 |g\rangle .$$

Después de realizar la medición en los grados internos de libertad del átomo y de haber determinado que éste se encuentra en el estado base $|g\rangle$, el estado del campo está dado por

$$|\Psi_F^{(1)}\rangle = \Phi_0^{(1)} |0\rangle + \Phi_1^{(1)} |1\rangle .$$

Al repetir este procedimiento y enviar un segundo átomo en un estado

$$|\Psi_A^{(2)}\rangle = |e\rangle + i\epsilon_2 |g\rangle ,$$

se encuentra que si el resultado de la medición en el átomo fue positiva, el nuevo estado del campo es

$$|\Psi_F^{(2)}\rangle = \Phi_0^{(2)} |0\rangle + \Phi_1^{(2)} |1\rangle + \Phi_2^{(2)} |2\rangle .$$

Así, después de la interacción individual de N átomos con el campo de la cavidad se genera un estado de la luz (6.25) formado por la superposición de los primeros $N+1$ estados de Fock con probabilidades de amplitud $\Phi_n^{(N)}$, donde el subíndice hace referencia al estado del campo y el superíndice denota el número de átomo que se ha enviado.

$$|\Psi_F^{(N)}\rangle = \sum_{n=0}^N \Phi_n^{(N)} |n\rangle . \quad (6.25)$$

La evolución de estas probabilidades de amplitud se describe en la Figura 6.3. En general, los valores de $\Phi_n^{(N)}$ no corresponden con los coeficientes d_n con los que se quiere construir el estado (6.23). Sin embargo, al hacer uso del enredamiento átomo-campo del sistema, es posible encontrar las condiciones necesarias para que sus valores coincidan ($\Phi_1^{(N)} = d_1$, $\Phi_2^{(N)} = d_2$, ...) y así lograr construir un estado específico de la luz.

Después de que el átomo interactúa con el campo dentro de la cavidad y sale de ésta, el sistema conjunto está descrito por el modelo de Jaynes-Cummings. Por lo tanto, el estado átomo-campo después de haber incidido el k -ésimo átomo es

$$\begin{aligned} |\Psi^k(t_k)\rangle &= \hat{U}(t_k) \left[|\Psi_F^{(k-1)}\rangle \otimes |\Psi_A^{(k)}\rangle \right] \\ &= \hat{U}(t_k) \left[\sum_{n=0}^{k-1} \Phi_n^{(k-1)} |n\rangle \otimes \left(|e\rangle + i\epsilon_k |g\rangle \right) \right] . \end{aligned} \quad (6.26)$$

Es decir, se trata de la evolución temporal de un estado inicial descrito por la interacción de un campo $|\Psi_F^{(k-1)}\rangle$ (antes de inyectar el k -ésimo átomo) y un átomo en una superposición coherente, donde el estado del campo en la cavidad $|\Psi_F^{(k-1)}\rangle$ es una superposición de estados de Fock con $n = 0, 1, \dots, k-1$.

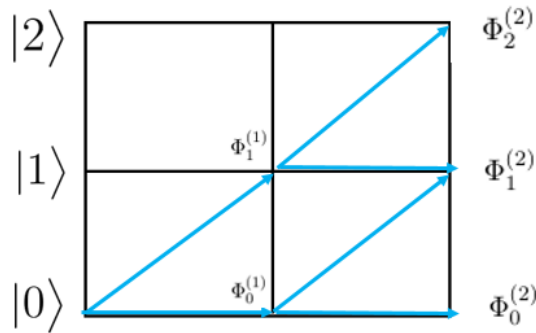


Figura 6.3: Evolución de las amplitudes de probabilidad debido a la interacción sucesiva átomo-campo dentro de la cavidad. El eje horizontal representa el tiempo que le toma a cada átomo pasar por la cavidad. Tomando como ejemplo un proceso en el que se inciden individualmente dos átomos dentro de una cavidad, los coeficientes finales que describen el estado del campo son $\Phi_n^{(2)}$. El enredamiento átomo-campo nos permite encontrar los valores ϵ_k (con $k = 1, 2$) con los que se debe construir los estados (6.24) de los átomos que se envían, de forma que los valores de $\Phi_n^{(2)}$ coincidan con los coeficientes d_n en (6.29).

En la ecuación (6.26), t_k es el tiempo que le toma al k -ésimo átomo atravesar la cavidad y $\hat{U}(t_k)$ (6.27) es el operador de evolución temporal del modelo de Jaynes-Cummings. Ver expresión (5.21) en el capítulo 5.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_k) = & \left\{ \hat{C}_n^{(k)} |e\rangle \langle e| - \frac{i}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{S}_n^{(k)} \hat{a} |e\rangle \langle g| \right. \\ & \left. - \frac{i}{\sqrt{\hat{n}}} \hat{S}_{n-1}^k \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e| + \hat{C}_{n-1}^{(k)} |g\rangle \langle g| \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Es importante notar que la dependencia temporal de los coeficientes también está indicada por el superíndice, por tal motivo, de aquí en adelante no indicaremos la dependencia temporal de las funciones. Así, los coeficientes $\hat{C}_n^{(k)}$ y $\hat{S}_n^{(k)}$ en (6.27) están dados por las relaciones

$$\hat{C}_n^{(k)} = \cos(\lambda t_k \sqrt{\hat{n}+1}) \quad , \quad \hat{S}_n^{(k)} = \sin(\lambda t_k \sqrt{\hat{n}+1}).$$

Al actuar el operador (6.27) sobre el estado inicial (6.26), se encuentra que el estado conjunto del sistema es

$$\begin{aligned} |\Psi^{nk}(t_k)\rangle = & \sum_n \Phi_n^{(k-1)} \left\{ C_n^{(k)} |en\rangle - iS_n^{(k)} |gn+1\rangle \right. \\ & \left. + \epsilon_k S_{n-1}^{(k)} |en-1\rangle + i\epsilon_k C_{n-1}^{(k)} |gn\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Finalmente, después de realizar una medición sobre los grados internos del átomo y de determinar

que éste se encuentra en su estado base $|g\rangle$, el campo queda descrito por el estado (6.29).

$$\begin{aligned} |\Psi_F^{(k)}(t_k)\rangle &= \sum_{n=0} |n\rangle \langle g|n\rangle \Psi^{n,k}(t_k) = -i \sum_n \left\{ S_{n-1}^{(k)} \Phi_{n-1}^{(k-1)} - \epsilon_k C_{n-1}^{(k)} \Phi_n^{(k-1)} \right\} |n\rangle \\ &= -i \sum_n \Phi_n^{(k)} |n\rangle . \end{aligned} \quad (6.29)$$

De esta expresión (6.29) se puede observar que los valores de $\Phi_n^{(k)}$ dependen de los coeficientes del estado del campo que se tenía antes de incidir el k -ésimo átomo, es decir, están en función de los términos $\Phi_j^{(k-1)}$. Por lo tanto, los coeficientes $\Phi_n^{(k)}$ se encuentran a partir de la relación de recurrencia dada en (6.30).

$$\Phi_n^{(k)} = S_{n-1}^{(k)} \Phi_{n-1}^{(k-1)} - \epsilon_k C_{n-1}^{(k)} \Phi_n^{(k-1)}. \quad (6.30)$$

En esta expresión (6.30), el único parámetro desconocido es ϵ_k , ya que $C_{n-1}^{(k)}$ y $S_{n-1}^{(k)}$ están dados por el modelo de Jaynes-Cummings. Así, los valores de ϵ_k en la superposición coherente con la que se manda al k -ésimo átomo dentro de la cavidad, son los que permiten que los coeficientes $\Phi_n^{(N)}$ sean iguales a d_n en el estado (6.23).

A continuación se ilustra el procedimiento necesario a seguir para encontrar ϵ_1 y ϵ_2 con los que se debe contruir los estados coherente de los dos átomos que se inciden en la cavidad para generar el estado (6.31).

$$|\Psi_d\rangle = \cos \phi |0\rangle + \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} [|1\rangle + |2\rangle] . \quad (6.31)$$

Después de haber enviado los dos átomos de forma individual y de haber realizado las mediciones en el átomo con resultados positivos, el estado del campo está dado por

$$|\Psi_F^{(2)}\rangle = \Phi_0^{(2)} |0\rangle + \Phi_1^{(2)} |1\rangle + \Phi_2^{(2)} |2\rangle . \quad (6.32)$$

El problema que deseamos resolver es el de encontrar los valores de ϵ_1 y ϵ_2 que permitan que se cumplan las igualdades (6.33).

$$\Phi_0^{(2)} = \cos \phi \quad , \quad \Phi_1^{(2)} = \Phi_2^{(2)} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} . \quad (6.33)$$

Empezamos considerando el caso del segundo átomo con $k = 2$.

- Si $n = 2$, la relación de recurrencia es

$$\Phi_2^{(2)} = S_1^{(2)} \Phi_1^{(1)} - \epsilon_2 C_2^{(2)} \Phi_2^{(1)} ,$$

con $\Phi_2^{(1)} = 0$ porque no puede existir el estado del campo $|2\rangle$ cuando sólo se ha mandado un átomo. Recordemos que el valor de $S_1^{(2)}$ se conoce y buscamos que $\Phi_2^{(2)} = \sin \phi / \sqrt{2}$, por lo tanto

$$\Phi_2^{(2)} = S_1^{(2)} \Phi_1^{(1)} \longrightarrow \Phi_1^{(1)} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2} S_1^{(2)}} . \quad (6.34)$$

- Si $n = 1$, la relación de recurrencia está dada por

$$\Phi_1^{(2)} = S_0^{(2)}\Phi_0^{(1)} - \epsilon_2 C_0^{(2)}\Phi_1^{(1)}.$$

Nuevamente se busca que $\Phi_1^{(2)} = \sin \phi / \sqrt{2}$. Al substituir el valor de $\Phi_1^{(1)}$ dado en (6.35), se obtiene la siguiente expresión para $\Phi_0^{(1)}$.

$$\Phi_0^{(1)} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2} S_0^{(2)}} \left[1 + \epsilon_2 \frac{C_0^{(2)}}{S_1^{(2)}} \right]. \quad (6.35)$$

- Si $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, la relación de recurrencia es

$$\Phi_0^{(2)} = S_{-1}^{(2)}\Phi_{-1}^{(1)} - \epsilon_2 C_{-1}^{(2)}\Phi_0^{(1)}.$$

En este caso, al observar las definiciones de los coeficientes $S_n^{(k)}$ y $C_n^{(k)}$ se encuentra que $S_{-1}^{(2)} = 0$ y $C_{-1}^{(2)} = 1$. Además, al considerar $\Phi_0^{(2)} = \cos \phi$ se obtiene

$$\Phi_0^{(1)} = -\frac{\cos \phi}{\epsilon_2} \quad (6.36)$$

Finalmente, igualando las ecuaciones (6.35) y (6.36) se determina la expresión (6.37) con la que es posible obtener el valor del coeficiente ϵ_2 con el que se debe construir el estado coherente del segundo átomo que se manda a la cavidad.

$$-\frac{\cos \phi}{\epsilon_2} S_0^{(2)} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \left[1 + \epsilon_2 \frac{C_0^{(2)}}{S_1^{(2)}} \right]. \quad (6.37)$$

Las dos soluciones a la ecuación cuadrática (6.37) son

$$\epsilon_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{S_1^{(2)}}{C_0^{(2)}} \sin \phi \pm \sqrt{\left(\frac{S_1^{(2)}}{C_0^{(2)}} \right)^2 \frac{\sin^2 \phi}{8} - \frac{S_0^{(2)} S_1^{(2)}}{C_0^{(2)}} \cos \phi}. \quad (6.38)$$

Ahora consideremos el primer átomo que se envía a la cavidad, es decir, $k = 1$. En este caso n solo puede tomar los valores 0 y 1.

- Si $\mathbf{n} = \mathbf{1}$, la relación de recurrencia es

$$\Phi_1^{(1)} = S_0^{(1)}\Phi_0^{(0)} - \epsilon_1 C_0^{(1)}\Phi_1^{(0)}.$$

Nuevamente $\Phi_1^{(0)} = 0$ por que no es posible tener el estado del campo $|1\rangle$ cuando no se ha mandado ningún átomo a la cavidad. El valor de $\Phi_1^{(1)}$ fue obtenido en (6.34) y al substituirlo en la relación de recurrencia se encuentra una expresión para $\Phi_0^{(0)}$ (6.39).

$$\Phi_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \phi}{S_1^{(2)} S_0^{(1)}}. \quad (6.39)$$

- Si $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, se obtiene la siguiente relación de recurrencia

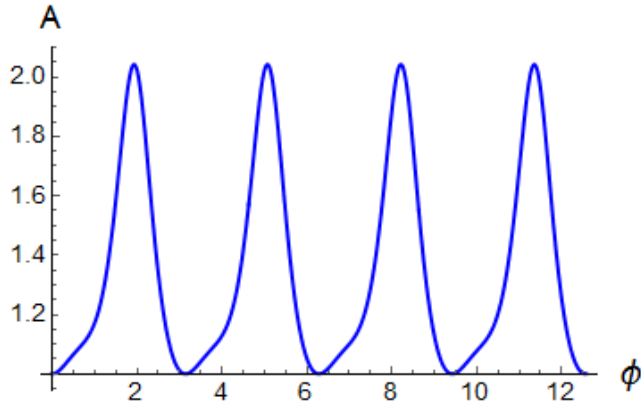


Figura 6.4: Área (5.9) de la cuasidistribución de Husimi en función de ϕ . Cuando $\phi = n\pi$, el área toma el valor mínimo de 1, lo que indica que el estado (6.31) se encuentra en un estado coherente, es decir, en el estado más clásico posible como se discute en el capítulo 3.

$$\Phi_0^{(1)} = S_{-1}^{(1)}\Phi_{-1}^{(0)} - \epsilon_1 C_{-1}^{(1)}\Phi_0^{(0)},$$

donde $S_{-1}^{(1)} = 0$. Sustituyendo los valores de $\Phi_0^{(1)}$ (6.36) y $\Phi_0^{(0)}$ (6.39) se obtiene una expresión para ϵ_1 en términos de ϵ_2 , el cual tienen dos soluciones dadas en (6.38).

$$\epsilon_1 = \sqrt{2} \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \frac{S_1^{(2)} S_0^{(1)}}{\epsilon_2} \quad (6.40)$$

Así, para contruir un estado de la luz formado por una combinación específica de estados de Fock, es necesario conocer el valor de los coeficientes ϵ_k que se deben utilizar en la construcción de los estados atómicos que se mandan a la cavidad. Estos coeficientes ϵ_k se obtiene de forma inversa, es decir, comenzando por el último átomo y terminando en el primero.

Como conclusión, es importante notar que la presencia del enredamiento átomo-campo descrito por el modelo de Jaynes-Cummings, permite conocer el estado del campo cuando se realiza una medición sobre los grados internos de libertad del átomo cuando éste sale de la cavidad. Es decir, basta con saber que el átomo se encuentra en $|g\rangle$, para conocer el estado del campo y obtener la relación de recurrencia con la que se encuentran los coeficientes ϵ_k . Este procedimiento se puede generalizar a modelos SU(1,1), donde la interacción átomo-campo y el enredamiento entre estos subsistemas están descritos por el Hamiltoniano SU(1,1).

La ventaja de tener el control en la construcción de los estados cuantizados de la luz, es que se pueden crear estados con propiedades particulares que permitan ser utilizados en experimentos de óptica cuántica. En la Figura 6.5, se presentan las cuasidistribuciones de probabilidad de Husimi y Wigner para el estado (6.31) con distintos valores de ϕ . Estas funciones nos permiten ilustrar el comportamiento del campo y nos dan información de las propiedades no clásicas del estado de la luz. En la Fig. 6.4 se muestra el área en el espacio fase y como función de ϕ , que ocupa la función de Husimi del estado del campo. Se observa que cuando $\phi = n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$, el área que ocupa la función Husimi corresponde al área de un estado coherente, es decir, al área mínima que se puede tener ($A = 1$).

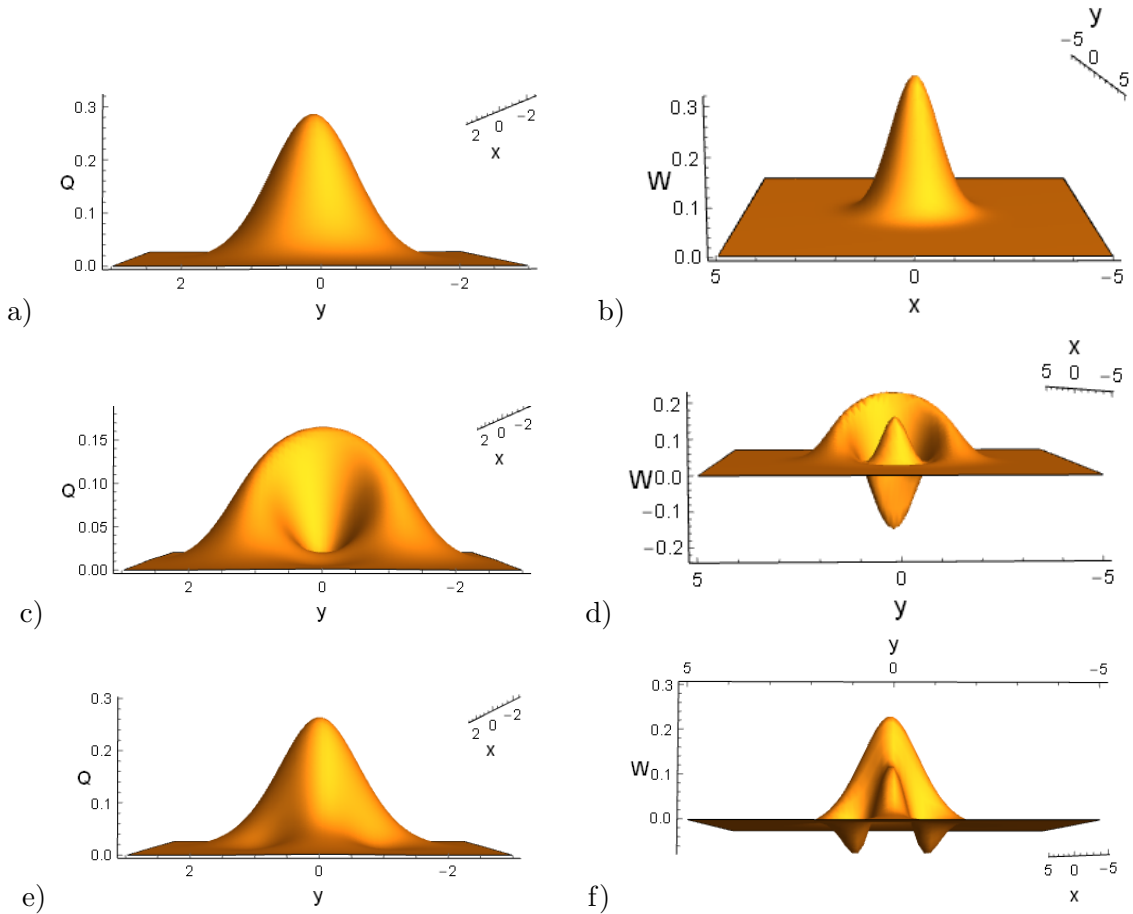


Figura 6.5: Funciones de Husimi (*columna izquierda*) y funciones de Wigner (*columna derecha*) para el estado (6.31) con diferentes valores de ϕ . Las gráficas a) y b) ilustran las funciones cuando $\phi = 0$ y, por lo tanto, la única contribución a la combinación lineal es el estado vacío coherente $|0\rangle$, lo cual se ve reflejado en que la función de Husimi presenta una distribución gaussiana y la función de Wigner no toma valores negativos. Las gráficas c) y d) reflejan las funciones de Husimi y Wigner cuando $\phi = \pi/2$. En este caso la combinación lineal en (6.31) está formada por los estados de Fock $|1\rangle$ y $|2\rangle$, lo cuales en contraste con $|0\rangle$, presentan un carácter cuántico alto por lo que la función de Husimi pierde su distribución gaussiana y la función de Wigner adquiere valores negativos. Finalmente, las gráficas e) y f) ilustran las cuasidistribuciones de probabilidad cuando $\phi = \pi/4$.

Capítulo 7

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió la interacción cuantizada entre un átomo efectivo de dos niveles y un campo electromagnético de uno y dos modos dentro de una cavidad. Específicamente, se investigó el comportamiento del enredamiento campo-materia y de otros observables, como las probabilidades ocupacionales y la coherencia, que resultan de interés para la óptica cuántica, la teoría de información cuántica y para los fundamentos de la mecánica cuántica.

El estudio de la evolución temporal del enredamiento presente entre el átomo de dos niveles y el campo electromagnético es importante, ya que su realización experimental puede utilizarse en la construcción de bits cuánticos y durante otros procesos de la información cuántica. Asimismo, se demostró que este enredamiento sirve como un recurso para la construcción de dos estados específicos de la luz con posibles aplicaciones en óptica cuántica. Uno de estos estados es la superposición finita de estados de Fock, mientras que el segundo está formado por la superposición de dos estados coherentes de Glauber, conocidos como estados gato. Las propiedades particulares de ambos se pueden visualizar mediante el cálculo de las funciones de Wigner y Husimi.

Para lograr la descripción y entendimiento del sistema se inició con la cuantización de un campo electromagnético multimodal. Mediante la indentificación de un conjunto infinito de osciladores armónicos se determinó la forma de los campos eléctricos y magnéticos, así como el momento angular intrínscico y el momento lineal del campo, en términos de operadores bosónicos. Por otro lado, se definieron los operadores adimensionales de cuadratura del campo (análogos a los de posición y momento). Éstos tienen un papel importante en óptica cuántica, ya que permiten la determinación de las propiedades estadísticas del campo.

Se continuó describiendo los procesos de emisión y absorción presentes en un átomo de dos niveles, los cuales son emisión espontánea, absorción y emisión estimulada de un fotón. El último proceso es el responsable de la existencia del laser. En éste, un fotón con una energía dada por la separación entre los niveles atómicos es enviado. La interacción que se genera emite dos fotones los cuales pueden inducir transiciones en otros átomos.

La interacción radiación materia se describió utilizando el modelo de Jaynes-Cummings (considerado paradigmático en la óptica cuántica) y su modelo generalizado. En el primero, un átomo de dos niveles interactúa dipolarmente con un campo cuantizado de un modo dentro de una cavidad y su Hamiltoniano exhibe una constante de movimiento asociada al número total de excitaciones \hat{M} . En el modelo generalizado, la transición entre los dos niveles es mediada por fotones de dos modos del

campo. Como consecuencia de este proceso, los niveles atómicos que participan en la transición no pueden conectarse mediante transiciones dipolares.

En el estudio de la interacción se consideraron diversos estados cuantizados de la luz los cuales presentan distintas propiedades entre ellos. Los estados de Fock tienen un alto comportamiento cuántico que se ilustra mediante los valores negativos de la función de cuasidistribución de Wigner, así como a través del área en el espacio fase que ocupa la función de Husimi. Los estados coherentes de Glauber presentan un comportamiento que se asemeja al de los haces de luz clásicos. Esto se refleja en que su incertidumbre y el área que ocupa su función de Husimi en el espacio fase son mínimas. Una propiedad importante es que son función generadora de los estados de oscilador armónico. Los estados comprimidos son aquellos que tienen una de sus cuadraturas más pequeña que el límite establecido por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Los estados coherentes y comprimidos están asociados con las estructuras algebraicas del grupo de Lie de Heisenberg-Weyl y el grupo de las transformaciones especiales unitarias de $SU(1,1)$, respectivamente.

Dependiendo del estado cuantizado de la luz con el que interactúa el átomo de dos niveles, la dinámica del enredamiento mostró diversos comportamientos. Cuando el átomo interactúa con un estado de Fock, las probabilidades de ocupación, la entropía lineal, la función de coherencia y la función de autocorrelación, para cualquier valor de Δ , oscilan con una frecuencia definida por $\sqrt{\Delta^2 + \lambda^2 n}$, la cual se conoce como frecuencia de Rabi. Cuando el sistema está en resonancia y, sin importar el estado inicial del átomo, se observó que es posible alcanzar un máximo enredamiento cuando $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$. Sin embargo, este enredamiento no es estable debido a las oscilaciones de S_L .

Al aumentar la desintonía hasta un valor de 10λ , en la interacción con un estado de Fock, se generó un Hamiltoniano efectivo (6.11) en el que la interacción entre la materia y el campo es diagonal, implicando en este caso un acoplamiento pequeño. El cambio en el comportamiento del sistema cuando se varía Δ se ilustró con las funciones de Husimi y Wigner, en las que no se observó un cambio significativo en su distribución cuando $\Delta \gg 1$. Por otro lado, cuando se varía el número de fotones dentro de la cavidad se observó una disminución en el período de oscilación de las funciones. Este comportamiento también está descrito por la frecuencia de Rabi.

En la interacción del átomo con los estados coherentes de Glauber es posible generar enredamiento cuando el sistema está en resonancia y cuando está fuertemente fuera de resonancia, sin embargo, el comportamiento más estable se observó cuando $\Delta \gg 1$ y $\phi = \pi/4$. En este caso, es posible generar un máximo enredamiento estable durante un intervalo de tiempo grande. Esto no sucede cuando el sistema está en resonancia, en donde a pesar de que se satisfaga $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_g = 0.5$ y $\phi = \pi/4$, la entropía lineal no alcanza su máximo valor porque la matriz de densidad reducida no es diagonal. Este comportamiento contrasta lo observado en los estados de Fock con $\Delta = 0$.

Una característica importante de los estados coherentes de Glauber en interacción con un átomo de dos niveles, es que al aumentar el número promedio de fotones dentro de la cavidad, se aumentan los tiempos de los fenómenos de colapsos y resurgimientos, en las probabilidades de ocupación del átomo.

En general, se demostró que cuando se tiene una interacción fuertemente fuera de resonancia es posible generar un alto enredamiento átomo-campo si se utiliza un estado coherente de Glauber o con un estado coherente de $SU(1,1)$. En ambos casos, la generación de enredamiento sólo es posible cuando el estado inicial del átomo está dado por la superposición coherente $\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$. Así, el estado inicial del átomo juega un papel importante, ya que se observa que se debe satisfacer que la función de coherencia y las probabilidades ocupacionales tomen valores cercanas a cero, lo cual sólo se logra

cuando $\phi = \pi/4$. Por otro lado, como se mencionó en el capítulo 6, el enredamiento generado cuando el sistema está fuertemente fuera de resonancia puede ser implementado para generar un estado de gato.

Perspectivas

Como futuro trabajo, los resultados presentados se pueden extender para sistemas de muchos átomos. En particular de dos átomos de dos niveles en interacción con campos electromagnéticos de uno y dos modos en una cavidad resonante. También es posible considerar sistemas atómicos con un mayor número de niveles activos.

Finalmente, es importante señalar que parte de este trabajo ha sido presentado en un evento internacional y se tiene una publicación aceptada en las memorias del evento [38].

Apéndice

A.1. Operador de evolución temporal

En el esquema de Schrödinger, la información temporal del sistema está contenida en la función de onda $|\Psi(t)\rangle$. Ésta se obtiene por la acción de un operador de evolución temporal sobre el estado del sistema inicial $|\Psi_0\rangle$, es decir,

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi_0\rangle . \quad (\text{A.1})$$

Por lo tanto, para conocer el estado del sistema $\forall t$, primero es necesario encontrar el operador de evolución temporal. Tomemos el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings dado en (3.22). Considerando las definiciones de las matrices,

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e| \quad , \quad \hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g| ,$$

podemos reescribir este Hamiltoniano como

$$\hat{H}_{JC} = \hbar \Omega \hat{M} + \hbar \Delta (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) + \hbar \lambda (\hat{a} |e\rangle \langle g| + \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e|) . \quad (\text{A.2})$$

Es fácil identificar que (A.2) es independiente del tiempo, por lo que su operador de evolución temporal se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i\hat{H}_{JC}}{\hbar} t} = e^{-i\Omega \hat{M} t} e^{-i\bar{H} t} , \quad (\text{A.3})$$

donde $\bar{H} = \Delta (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) + \lambda \hat{a} |e\rangle \langle g| + \lambda \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e|$. Al escribir este término en su representación matricial utilizando la base atómica, se encuentra

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \Delta \Omega & \lambda \hat{a} \\ \lambda \hat{a}^\dagger & -\Delta \Omega \end{pmatrix} . \quad (\text{A.4})$$

Es decir, el operador (A.2) no es diagonal en la base atómica y como deseamos actuarlo sobre el estado (5.25.1), para encontrar su acción sobre este estado se pueden seguir dos procedimientos. El primero consiste en diagonalizar el Hamiltoniano y encontrar sus eigenvectores para escribir el estado (5.25.1) en términos de éstos. Así, la acción del operador de evolución es directa. El segundo procedimiento, y el utilizado en este trabajo, consiste en desarrollar en series la exponencial (A.3) de forma que se encuentre una expresión matricial para este operador de evolución. Debido a que \hat{M} es una constante de movimiento, el término $e^{-i\Omega \hat{M} t}$ sólo modifica al vector estado por una fase y no es necesario su desarrollo algebraico. El segundo término en (A.3), $e^{-i\bar{H} t}$, se desarrolla utilizando la siguiente identidad para operadores exponenciales

$$e^{-\lambda \hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \hat{A}^n . \quad (\text{A.5})$$

Esta serie puede descomponerse en términos pares e impares. Así, para $e^{-i\bar{H}t}$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\bar{H}t)^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2s} (\bar{H}^2)^s t^{2s}}{(2s)!} - i\bar{H} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\bar{H}^2)^s t^{2s+1}}{(2s+1)!}. \quad (\text{A.6})$$

La representación matricial del término \bar{H}^2 que aparece en ésta serie está dada por el siguiente operador diagonal,

$$\bar{H}^2 = [\Delta^2 \lambda^2 (\hat{n} + 1)] |e\rangle \langle e| + [\Delta^2 + \lambda^2 \hat{n}] |g\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} \Delta^2 \lambda^2 (\hat{n} + 1) & 0 \\ 0 & \Delta^2 + \lambda^2 \hat{n} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto, las potencias $(\bar{H}^2)^s$ dadas en (A.6) también son diagonales. Así, (A.6) está dado por

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) = & \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^{2s} \frac{[\Delta^2 \lambda^2 (\hat{n} + 1)]^s}{(2s)!} t^{2s} & 0 \\ 0 & \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^{2s} \frac{[\Delta^2 + \lambda^2 \hat{n}]^s}{(2s)!} t^{2s} \end{pmatrix} \\ & - i\bar{H} \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{[\Delta^2 \lambda^2 (\hat{n} + 1)]^s}{(2s+1)!} t^{2s+1} & 0 \\ 0 & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{[\Delta^2 + \lambda^2 \hat{n}]^s}{(2s+1)!} t^{2s+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Al reconocer las funciones $\sin x$ y $\cos x$ como desarrollo en series en (A.8),

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (\text{A.9})$$

se encuentra que el operador de evolución temporal es

$$\hat{U}(t) = e^{-i\Omega \hat{M} t} \begin{pmatrix} F(\hat{n} + 1) & -i \lambda \hat{a} G(\hat{n}) \\ -i \lambda \hat{a}^\dagger G(\hat{n} + 1) & F^*(\hat{n}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde se definió la notación

$$F(\hat{n}) = \cos(\Omega(\hat{n})t) - \frac{i\Delta}{\Omega(\hat{n})} \sin(\Omega(\hat{n})t) \quad (\text{A.11.1})$$

$$G(\hat{n}) = \frac{1}{\Omega(\hat{n})} \sin(\Omega(\hat{n})t) \quad (\text{A.11.2})$$

$$\Omega(\hat{n}) = \sqrt{\Delta^2 + \lambda^2 \hat{n}}. \quad (\text{A.11.3})$$

A.2. Función Auxiliar de Moyal

Para obtener la función de Moyal, se define la función auxiliar

$$W_{|\alpha\rangle\langle\beta|}(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + y | \alpha \rangle \langle \beta | q - y \rangle e^{-2ipy} dy, \quad (\text{A.12})$$

y se identifican los estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ en las representacion de las coordenadas $q + y$ y $q - y$, respectivamente. Esto es:

$$\begin{aligned} \langle q + y | \alpha \rangle &= \Psi_\alpha(q + y) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{2}(q + y)^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \sqrt{2}(q + y)\alpha \right] \\ \langle \beta | q - y \rangle &= \Psi_\beta^*(q - y) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{2}(q - y)^2 - \frac{\beta^{*2}}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \sqrt{2}(q - y)\beta^* \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, la ecuación A.12 se puede reescribir:

$$\begin{aligned} W_{|\alpha\rangle\langle\beta|} &= \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp \left[-q^2 + \sqrt{2}q(\alpha + \beta^*) + \frac{1}{2}(-\alpha^2 - |\alpha|^2 - \beta^{*2} - |\beta|^2) \right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ipy} e^{-y^2 + \sqrt{2}y(\alpha - \beta^*)} dy. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Y, expresando la la integral como

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[-y^2 + y \left(\sqrt{2}(\alpha - \beta^*) - i2p \right) \right] = e^{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[-(y + A)^2 \right], \quad (\text{A.15})$$

con $A = ip - \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta^*)$, se encuentra la solución

$$I = \sqrt{\pi} e^{A^2}. \quad (\text{A.16})$$

Así, la ecuación (A.14) es:

$$W_{|\alpha\rangle\langle\beta|} = \frac{1}{\pi} \exp \left[-zz^* + \sqrt{2}(\alpha z^* + \beta^* z) - \alpha\beta^* \right] e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}, \quad (\text{A.17})$$

donde se uso $z = q + iy$ y $z^* = q - iy$.

Reescribiendo

$$\exp \left[\sqrt{2}\alpha z^* + \sqrt{2}\beta^* z - \alpha\beta^* \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha z^*)^n}{n!} \left(1 - \frac{\beta^*}{\sqrt{2}z^*} \right)^n e^{\frac{\beta^*}{\sqrt{2}z^*} 2zz^*} \quad (\text{A.18})$$

e identificando la función generadora asociada a los polinomios de Laguerre

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m^{s-m}(w) u^m = e^{-uw} (1 + u)^s \quad (\text{A.19})$$

con $u = -\frac{\beta^*}{\sqrt{2}z^*}$ y $w = 2z^*z = 2(q^2 + p^2)$ se tiene que la ecuacion (A.17) es

$$W_{|\alpha\rangle\langle\beta|} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{-zz^*} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha z^*)^n}{n!} L_m^{n-m}(2zz^*) \left(\frac{-\beta^*}{\sqrt{2}z^*} \right)^m. \quad (\text{A.20})$$

Si se reescribe la ecuación A.12 en términos de los estados de Fock,

$$\begin{aligned}
 W_{|\alpha\rangle\langle\beta|} &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n \beta^{*m}}{\sqrt{n! m!}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle q+y|m\rangle \langle n|q-y\rangle e^{-2ipy} \\
 &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n \beta^{*m}}{\sqrt{n! m!}} W_{|n\rangle\langle m|}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

y se compara con la ecuación (A.20), se encuentra que la función auxiliar de Moyal es:

$$W_{|n\rangle\langle m|}(q,p) = \frac{(-1)^m}{\pi} 2^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (q-ip)^{n-m} e^{-(q^2+p^2)} \times L_m^{n-m}(2(q^2+p^2)). \tag{A.22}$$

Bibliografía

- [1] Axel Kuhn and Daniel Ljunggren. Cavity-based single-photon sources. *Contemporary Physics*, 51:289–313, 2010.
- [2] Christopher C. Gerry and Peter L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [3] Holger P. Specht, Christian Nölleke, Andreas Reiserer, Manuel Uphff, Eden Figueroa, Stephan Ritter, and Gerhard Rempe. A single-atom quantum memory. *Nature*, 473:289–313, 2011.
- [4] M Saffman. Quantum computing with atomic and qubits and rydberg interactions: Progress and challenges. *Journal of Physics b: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49, 2016.
- [5] David P. DiVicenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte Der Physik*, 48:9–11, 2000.
- [6] John Clarke and Frank K. Wilhelm. Superconducting quantum bits. *Nature*, 453:1031–1042, 2008.
- [7] William M. Kaminsky, Seth Lloyd, and Terry P. Orlando. Scalable superconducting architecture for adiabatic quantum computation. *arXiv:quant-ph/0403090*, 2004.
- [8] J. W. Silverstone, D. Bonneau, J. L. O’Brien, and M.G. Thompson. Silicon quantum photonics. *IEEE Journal of Selected Quantum Electronics*, 22:390–402, 2016.
- [9] F. Dolde, I. Jakobi, B. Naydenov, N. Zhao, S. Pezzagna, C. Trautmann, J. Meijer, P. Neumann, F. Jelezko, and J. Wrachtrup. Room-temperature entanglement between single defect spins in diamond. *Nature Physics*, 9:139–143, 2013.
- [10] H. Bernien, B. Hensen, W. Pfaff, G. Koolstra, M.S. Blok, L. Robledo, T.H. Taminiiau, M. Markham, D.J. Twitchen, L. Childress, and R. Hanson. Heralded entanglement between solid-state qubits separated by three metres. *Nature*, 497:86–90, 2013.
- [11] J.J. Pla, K.Y. Tan, J.P. Dehollain, W.H. Lim, J.J. Morton, D.N. Jamieson, A.S. Dzurak, and A. Morello. A single-atom electron spin qubit in silicon. *Nature*, 489:541–545, 2012.
- [12] Man-Chao Zhang, Wei Wu, Lin-Ze He, Yi Xie, and Chun-Wang Wu. Demonstration of quantum anti-zeno effecto with a single trapped ion. *Chinese Physics B*, 27, 2018.
- [13] Wayne M. Itano, D. J. Heinzen, J. J . Bollinger, and D. J. Wineland. Quantum zeno effect. *Physical Review A*, 41, 1989.
- [14] R. Guerrietsma, B. P. Lanyon, G. Kirchmair, F. Zähringer, C. Hempel, J. Casanova, E. Solano, R. Blatt, and C.F Roos. Quantum simulation of the klein paradox with trapped ions. *Physical Review Letters*, 106, 2011.

- [15] L. Lamata, J. León, T. Schätz, and E. Solano. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. *Physical Review Letters*, 98, 2007.
- [16] Jiannis Pachos and Herbert Walther. Quantum computation with trapped ions in an optical cavity. *Physical Review Letters*, 89, 2002.
- [17] Chr. Wunderlich, Chr. Balzer, and P.E. Toschek. Evolution of an atom impeded by measurement: The quantum zeno effect. *Nature Reviews Physics*, 56a:160–164, 2001.
- [18] Caroline Champenois. Trapping and cooling of ions. Master’s thesis, Lécole de Physique des Houche, école predoctorale sur les atomes froids et la condensation de Bose-Einstein, octobre 2008.
- [19] I. Marzoli, J. I. Cirac, R. Blatt, and P. Zoller. Laser cooling of trapped three-level ions: Designing two-level systems for sideband cooling. *Physical Review A*, 49, 1993.
- [20] J. Casanova, J. J. García-Ripoll, R. Gerritsma, C. F. Roos, and E. Solano. Klein tunneling and dirac potentials in trapped ions. *Physical Review A*, 82, 2010.
- [21] Amitabh Joshi and Suresh V. Lawande. Recent experiments in quantum optics and their implications - i. *Current Science*, 82(7):816–837, 2002.
- [22] Amitabh Joshi and Suresh Lawande. Recent experiments in quantum optics and their implications - ii. *Current Science*, 82, 04 2002.
- [23] Andrew D Greentree, Jens Koch, and Jonas Larson. Fifty years of Jaynes-Cummings physics. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43:2pp, 2013.
- [24] Bruce W. Shore and P.L. Knight. Topical review the jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40:1195–1238, 1993.
- [25] Wolfgang P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, 1 edition, 2001.
- [26] B. H Bransden and C. J. Joachain. *Physics of atoms and molecules*. John Wiley and Sons, 1990.
- [27] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J.Dreyer, E. Hagley, J.M. Raimond, and S. Haroche. Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Physical Review Letters*, 76, 1995.
- [28] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J.M. Raimond, and S. Haroche. From lamb shift to light shifts: Vacuum and subphoton cavity fields measured by atomic phase sensitive detection. *Physical Review Letters*, 72, 1993.
- [29] P. W. Milonni and J. H. Berly. *Lasers*. John Wiley & Sons, 10 1998.
- [30] Guido Burkard, Michael J. Gullans, Xiao Mi, and Jason R. Petta. Superconductor-semiconductor hybrid-circuit quantum electrodynamics. *Nature Reviews Physics*, 2:129–140, 03 2020.
- [31] Randall G. Hulet and Daniel Kleppner. Rydberg atoms in a circular states. *Physical Review Letters*, 51, 1983.
- [32] J.Liang, M. Gross, P. Goy, and S. Haroche. Circular rydberg-state spectroscopy. *Physical Review A*, 33, 1986.
- [33] Eugenio Roldán. El modelo de Jaynes-Cummings. *Óptica pura y aplicada*, 2011.
- [34] R. Loudon and P.L. Knight. Squeezed light. *Journal of Modern Optics*, 34:709–759, 1987.

- [35] Jon Brogaard. Wigner function formalism in quantum mechanics. Master's thesis, Niels Bohr Institute University of Copenhagen, 6 2015.
- [36] Christopher C. Gerry and Ronald F. Welch. Dynamics of a two-mode two-photon Jaynes-Cummings model interacting with correlated $\text{su}(1,1)$ coherent states. *J. Opt. Soc. Am.*, 9:290–297, 1992.
- [37] Shih-Chuan Gou. Quantum behavior of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Physical Review A*, 40:5116–5128, 1989.
- [38] O. Castaños and A. del Río Lima. Dynamics of quantum entanglement in matter field models. *Journal of Physics Conf. Ser.*, Por publicar 2020.