UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# EL TEOREMA DE ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF PARA VARIEDADES CERRADAS

**TESINA**
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
LÁZARO ALEJANDRO BORREGO NÚÑEZ

DIRECTOR:
DR. MARCELO AGUILAR GONZÁLEZ DE LA VEGA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

Ciudad de México, Mayo 2020

# 1. Introducción

En este trabajo presentamos una prueba detallada, usando Teoría de Morse, del celebrado **Teorema de Índice de Poincaré-Hopf**, que fue presentada por John W. Milnor en [10]. Este teorema afirma que la suma de los índices $\sum \iota$ de un campo vectorial $X$ con ceros aislados en una variedad cerrada $M^n$ coincide con la característica de Euler de $M$, $\chi(M)$. Como consecuencia directa, el comportamiento de cualquier campo vectorial en $M^n$ con ceros aislados, una cualidad diferenciable de $M^n$, está hasta cierto punto determinada por un invariante homotópico de $M^n$.
Este resultado fue probado por primera vez en 1926 por Heinz Hopf en [6], y es una generalización del caso $n = 2$, que fue probado por Henri Poincaré en 1885.

Comenzamos con algunos hechos algebraicos básicos necesarios para establecer un pilar de la demostración: la característica de Euler es una función **aditiva** de pares.
Seguidamente analizamos el comportamiento local de un campo vectorial $X$ en $M$ con ceros aislados, a través de su **índice local** en cada cero. El índice local de $X$ mide el cambio direccional de $X$ alrededor del cero en cuestión, sutilmente contando el número de veces que $X$ apunta a una dirección fija.
El estudio de las funciones de Morse en una $M$ nos ocupará a continuación. Después de enunciar un teorema de existencia, ilustraremos como deformar ligeramente una función de Morse sin que pierda dicha propiedad, y tal que la variación resultante toma valores diferentes en puntos críticos diferentes. Este hecho, a simple vista técnico, será de mucha utilidad posteriormente.
A continuación, probaremos que una función de Morse en la variedad cerrada $M$, provee a $M$ de una estructura de **CW-complejo** finito. Esto quiere decir que, en cierto sentido, $M$ se puede construir pegando discos de varias dimensiones. Más específicamente, probaremos que los índices de los puntos críticos de una función de Morse $f$ en $M$, son las dimensiones de los discos que conforman $M$. Entonces, descomponiendo a $M$ convenientemente, encontraremos una relación entre la homología de $M$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$, y los puntos críticos de cualquier función de Morse en $M$.
La prueba entonces comienza con el estudio de campos no degenerados. Para cada función de Morse, existe un campo particular asociado, no degenerado, para el cual resulta directo probar la igualdad $\sum \iota = \chi(M)$. La prueba de este caso concluye observando para cualquier tal campo en $M$, su suma de índices $\sum \iota$ está completamente determinada por la geometría de cualquier encaje de $M$ en un espacio Euclidiano. La prueba del caso general consiste en modificar localmente cualquier campo en $M$ con ceros aislados para hacerlo no degenerado, sin alterar su suma de índices.

Una interpretación geométrica bastante intuitiva del Teorema de Índice de Poincaré-Hopf viene dada en [5] p.137. Denotemos por $\phi_t$ al flujo de $X$, y veamos a $M$ como la sección cero de su haz tangente $TM$. Entonces para $t > 0$ suficientemente pequeño, la perturbación $\phi_t(M)$ es una subvariedad de $TM$ **transversal** a $M$, y su intersección con $M$ es un conjunto finito de puntos que coincide con el conjunto de ceros de $X$. Resulta entonces que la suma de índices de $X$ coincide con el **número de intersección** $I(M, M)$ de $M$ en $M \times M$, el cual en ocasiones se usa como definición alternativa de la característica de Euler de $M$.

El Teorema de Índice de Poincaré-Hopf tiene muchas aplicaciones tanto dentro como fuera de la matemática teórica. A continuación mencionamos algunas:

1. **Teorema de Campos en esferas:** Existe un campo vectorial nunca nulo en $\mathbb{S}^{n-1}$ si y solo si $n$ es par. Para esto basta observar que
$$\chi(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \text{n es par} \\ 2, & \text{si} \quad \text{n es impar,} \end{cases}$$
y aplicar el teorema.

2. Para la **superficie de género g**, $S_g$, se cumple $\chi(S_g) = 2 - 2g$. Para probar esto, basta construir un campo vectorial $X$ en $S_g$ con dos ceros de índice 1, y $2g$ ceros de índice $-1$. Ver [5] p. 125.

3. Ningún grupo de Lie $G$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^{n-1}$ si $n$ es impar. En efecto, si asumimos lo

contrario, $\chi(G) = 2$. Pero esto contradice que $G$ es **paralelizable**, pues existe un campo vectorial $X$ nunca nulo en $G$, y al aplicarle a $X$ el teorema obtenemos $\chi(G) = 0$.

4. En [3] se presenta un modelo matemático de un terremoto, como aplicación del Teorema de Índice de Poincaré-Hopf.

# 2. Preliminares

## 2.1. Grupos finitamente generados. Sucesiones exactas y homología

A continuación un breve recordatorio de algunos conceptos básicos de teoría de grupos y álgebra homológica que necesitaremos.

**Definición 1.** Dado un grupo abeliano $A$, decimos que $a \in A$ es un elemento de torsión, si $na = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Entonces se verifica fácilmente usando la conmutatividad de $A$ que si $na = 0, mb = 0$, entonces $nm(a + b) = 0$. Luego, el subconjunto de todos los elementos de torsión en $A$ es un subgrupo de $A$, que denotamos por $A_{tor}$, y llamamos el **subgrupo de torsión de** $A$.

Decimos que el grupo abeliano $A'$ es libre, si existe $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq A'$ no vacío tal que todo elemento $a \in A'$ se escribe de forma única como

$$a = \sum_{i\in I} k_i e_i,$$

con cada $k_i \in \mathbb{Z}$ y $k_i = 0$ para casi todo $i \in I$. En este caso $|\{e_i\}_{i\in I}|$ es llamado **rango** de $A'$, y se denota rk $A'$.

**Teorema 1.** *Sea $A$ un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsion ($A_{tor} = 0$), entonces $A$ es libre abeliano.*

**Teorema 2.** *Sea $A$ un grupo abeliano finitamente generado. Entonces $A_{tor}$ es finito, y $\frac{A}{A_{tor}}$ es un grupo abeliano libre. Más aún, existe un subgrupo libre abeliano $A'$ de $A$, tal que $A \cong A_{tor} \oplus A'$.*

Para pruebas de los teoremas 1 y 2, ver [7] pp. 45, 46.

De esta manera, si $A$ es un grupo abeliano finitamente generado, se define el **rango** de $A$ como rk $\frac{A}{A_{tor}}$.

**Definición 2.** Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $R$-módulos, donde $R$ es un anillo conmutativo. La sucesión de homomorfismos de $R-$módulos

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} A_0 \longrightarrow 0$$

se dice exacta, si $\ker f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$, $\forall\ n \geq 0$.

**Proposición 1.** *Dada una sucesión exacta corta de grupos abelianos ($\mathbb{Z}-$módulos) finitamente generados*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0\ ,$$

*se tiene $0 = rk\ C - rk\ B + rk\ A$.*

**Demostración**:
El homomorfismo $\beta : B \to C$ es sobreyectivo, y por el Primer Teorema de Isomorfismo para grupos, ver [7] p. 16, y la exactitud de la sucesión en $B$, induce un isomorfismo $\overline{\beta} : \frac{B}{\alpha(A)} \to C$ que hace conmutar el triángulo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi"] & C \\ \frac{B}{\alpha(A)} \arrow[ur, dotted, "\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $\alpha$ es inyectivo, por lo que $\alpha^{-1} : \alpha(A) \to A$ es un isomorfismo.
De esta manera, si $\iota : \alpha(A) \hookrightarrow B$ denota la inclusión, se tiene un isomorfismo de sucesiones exactas cortas como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \alpha(A) \arrow[r, "\iota"] \arrow[u, "\alpha^{-1}", "\cong"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, equal] & \frac{B}{\alpha(A)} \arrow[r] \arrow[u, "\overline{\beta}", "\cong"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $A \subseteq B$, y $C = \frac{B}{A}$.

Ahora, tenemos $A \cong A_{tor} \oplus A'$ para $A' \leq A$ algún subgrupo libre abeliano, usando el Teorema 2. De esta suma directa y que $A$ es finitamente generado, tenemos que $A'$ es finitamente generado. Sea $A' = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{a_1, \ldots, a_k\}$.
Tenemos que

$$A' \cong \frac{A}{A_{tor}} = \frac{A}{A \cap B_{tor}} \cong \frac{A + B_{tor}}{B_{tor}} \hookrightarrow \frac{B}{B_{tor}} \cong B',$$

donde $B'$ es un subgrupo libre abeliano de $B$. Los isomorfismos de los extremos son consecuencia del Teorema 2, mientras que el del medio es resultado del Segundo Teorema de Isomorfismos para grupos, ver [7] p. 17. El mapeo $\hookrightarrow$ es inyectivo, ya que $B_{tor} \leq A + B_{tor} \leq B$.
Entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $A' \leq B'$ y, usando el Lema de Zorn, ver [7] App. 2, podemos completar $\{a_1, \ldots, a_k\}$ a una $\mathbb{Z}$-base $\{a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ para $B'$.
Probemos ahora que rk $C = n - k$.
En efecto, basta probar que

$$C = \frac{B}{A} = \left(\frac{B}{A}\right)_{tor} \oplus F', \tag{1}$$

donde $F' = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{b_{k+1} + A, \ldots, b_n + A\}$ Por definición, $\left(\frac{B}{A}\right)_{tor} = \{b + A \mid nb \in A \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$, y para todo $b \in B$ existen $b_{B_{tor}} \in B_{tor}$ y $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ tales que $b = b_{B_{tor}} + r_1a_1 + \ldots + r_ka_k + r_{k+1}b_{k+1} + \ldots + r_nb_n$. De aquí que

$$b + A = \big(b_{B_{tor}} + A\big) + r_{k+1}(b_{k+1} + A) + \ldots + r_n(b_n + A),$$

y claramente $b_{B_{tor}} + A \in \left(\frac{B}{A}\right)_{tor}$. Esto prueba que tenemos + en (1).
Ahora supongamos que $b + A \in \left(\frac{B}{A}\right)_{tor} \cap F'$ para algún $b \in B$. Como $b + A \in F'$, existen $r_{k+1}, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ tales que $b + A = r_{k+1}b_{k+1} + \ldots + r_nb_n + A$, i.e

$$b - r_{k+1}b_{k+1} - \ldots - r_nb_n = a_{A_{tor}} + r_1a_1 + \ldots + r_ka_k, \tag{2}$$

para algunos $a_{A_{tor}} \in A_{tor}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}$.
También $b + A \in \left(\frac{B}{A}\right)_{tor}$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mb \in A$.
Entonces

$$mb = (mb)_{A_{tor}} + s_1a_1 + \ldots + s_ka_k, \tag{3}$$

para algunos $(mb)_{A_{tor}} \in A_{tor}$, y $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{Z}$.
Ahora escojamos $l \in \mathbb{N}$ tal que $l(mb)_{A_{tor}} = la_{A_{tor}} = 0$. Multiplicando (2) por $m$ y sustituyendo (3), tenemos:

$$(mb)_{A_{tor}} + s_1a_1 + \ldots + s_ka_k - mr_{k+1}b_{k+1} - \ldots - mr_nb_n = ma_{A_{tor}} + mr_1a_1 + \ldots + mr_ka_k \tag{4}$$

Multiplicando (4) por $l$ obtenemos:

$$0 = l(mr_1 - s_1)a_1 + \ldots + l(mr_k - s_k)a_k + lmr_{k+1}b_{k+1} + \ldots + lmr_nb_n$$

Como $\{a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Z}$ y $l, m \neq 0$, $r_{k+1} = \ldots = r_n = 0$, y $b + A = A$. Esto prueba que la suma en (1) es directa, y concluye la prueba. $\square$

**Corolario 1.** *Dada una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados*

$$\ldots \xrightarrow{f_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_1} A_0 \longrightarrow 0 \ ,$$

*se tiene que rk $A_n \leq$ rk $A_{n+1}$ + rk $A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Demostración**:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f_{n+1} \xrightarrow{\iota} A_n \xrightarrow{\overline{f_n}} \operatorname{Im} f_n \longrightarrow 0 \ ,$$

donde $\overline{f_n}$ es simplemente $f_n$ visto como un mapeo $A_n \to \operatorname{Im} f_n = f(A_n)$, e $\iota$ denota la inclusión.
Notemos que $\operatorname{Im} f_{n+1} \cong \frac{A_{n+1}}{\ker f_{n+1}}$, por el Primer Teorema de Isomorfismo para grupos, ver [7] p. 16. Luego, por Proposición 1,

$$\begin{aligned} \text{rk } A_n &= \text{rk } \operatorname{Im} f_{n+1} + \text{rk } \operatorname{Im} f_n \\ &= \text{rk } \frac{A_{n+1}}{\ker f_{n+1}} + \text{rk } \operatorname{Im} f_n \\ &\leq \text{rk } A_{n+1} + \text{rk } A_{n-1}, \end{aligned}$$

ya que $\frac{A_{n+1}}{\ker f_{n+1}}$ es un cociente de $A_{n+1}$ e $\operatorname{Im} f_n \leq A_{n-1}$. $\square$

**Corolario 2.** *Sea $A$ la sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados*

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_1} A_0 \longrightarrow 0 \ .$$

*Entonces $\chi(A) = 0$, donde $\chi(A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i$rk $A_i$.*

**Demostración**:

Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ tenemos una suceción exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f_{i+1} \xrightarrow{\iota} A_i \xrightarrow{f_i} \operatorname{Im} f_i \longrightarrow 0 \ .$$

Por la Proposición 1 se tiene luego que

$$\text{rk } A_i = \text{rk } \operatorname{Im} f_{i+1} + \text{rk } \operatorname{Im} f_i = \text{rk } \ker f_i + \text{rk } \operatorname{Im} f_i,$$

para $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Entonces

$$\chi(A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \text{rk } A_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\text{rk } \ker f_i + \text{rk } \operatorname{Im} f_i\right) = 0,$$

pues $\operatorname{Im} f_{i+1} = \ker f_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, y $\ker f_n = \operatorname{Im} f_0 = 0$. $\square$

**Definición 3.** Sea $Top^2$ la categoría de pares de espacios topológicos y funciones continuas entre tales pares, y sea $S$ una función de un subconjunto de $Top^2$ al anillo de los enteros, $\mathbb{Z}$. Decimos que $S$ es **subaditiva** si siempre que $X \supseteq Y \supseteq Z$, se cumple

$$S(X,Z) \leq S(X,Y) + S(Y,Z).$$

Si se cumple la igualdad, decimos que $S$ es **aditiva**.

Por un argumento inductivo directo, es fácil ver que si $X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_n$ y $S$ es subaditiva, entonces

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1}).$$

De igual manera, si $S$ es aditiva, entonces

$$S(X_n, X_0) = \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1}).$$

Como consecuencia del Corolario 19.20 de [4], los grupos de homología con coeficientes enteros de cualquier $CW$-complejo finito son finitamente generados, y son casi todos triviales. Esta observación le da sentido a los siguiente dos resultados.

**Lema 1.** *El **$\lambda$-ésimo número de Betti**, $\beta_\lambda : CW^2 \to \mathbb{Z}$ definido por $\beta_\lambda(X,Y) = rk\, H_\lambda(X,Y;\mathbb{Z})$ es subaditivo, donde $CW^2$ denota la subcategoría de $Top^2$ cuyos objetos son pares de $CW$ complejos finitos y cuyos morfismos son funciones continuas entre tales pares.*

**Demostración**:
Basta aplicarle el Corolario 1 a la sucesión exacta larga en homología asociada a la terna $(X,Y,Z)$, (ver [4] p. 77):

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{\lambda+1}} H_\lambda(Y,Z) \longrightarrow H_\lambda(X,Z) \longrightarrow H_\lambda(X,Y) \xrightarrow{\partial_\lambda} \ldots$$

$\square$

**Lema 2.** *La **característica de Euler** $\chi : CW^2 \to \mathbb{Z}$ definida por*

$$\chi(X,Y) = \sum_\lambda (-1)^\lambda \beta_\lambda(X,Y)$$

*es aditiva.*

**Demostración**:
Basta aplicarle el Corolario 2 a la sucesión exacta larga en homología asociada a la terna $(X,Y,Z)$ (ver [4] p. 77):

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{\lambda+1}} H_\lambda(Y,Z) \longrightarrow H_\lambda(X,Z) \longrightarrow H_\lambda(X,Y) \xrightarrow{\partial_\lambda} \ldots$$

$\square$

## 2.2. Índice de un campo vectorial. Teoría de Morse y homología.

En esta subsección, el concepto ”suave” va a significar clase $C^\infty$, ya sea aplicado a variedades o a mapeos entre ellas. Recordemos que para un mapeo suave $f : M \to N$, $p \in M$ se dice **punto regular** de $f$ si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es sobreyectiva; en caso contrario, $p$ es un **punto crítico** de $f$. Dualmente, $q \in N$ es un **valor regular** de $f$ si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es sobreyectiva para todo $p \in f^{-1}(q)$; en caso contrario, $q$ es un **valor crítico** de $f$. Vacuamente, cualquier $q \in N \setminus f(M)$ es un valor regular de $f$.

**Definición 4.** Sean $M$, $N$ variedades orientadas suaves de la misma dimensión, con $M$ compacta y $N$ conexa, y $f : M \to N$ un mapeo suave entre ellas. Entonces para $q \in N$ un valor regular de $f$, definimos

$$\deg(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{sign}(df_p), \tag{5}$$

donde

$$\mathrm{sign}(df_p) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad df_p : T_pM \to T_qN \quad \text{preserva la orientación} \\ \text{-}1, & \text{si} \quad df_p : T_pM \to T_qN \quad \text{invierte la orientación} \end{cases}$$

Aclaremos varias ideas en esta definición. Primero, el Teorema de Sard (ver [10] §3) garantiza que casi todo $q \in N$ es un valor regular de $f$. En este caso, como $\dim M = \dim N$, $f^{-1}(q)$ es una subvariedad discreta de $M$ compacta, por tanto es un subconjunto finito de puntos y la suma en (5) es finita. Más aún, $df_p : T_pM \to T_qN$ es un isomorfismo para cada $p \in f^{-1}(q)$, de aquí que tiene sentido decir que preserva o invierte la orientación.
Dos propiedades fundamentales de este entero $\deg(f, q)$ son:

- no depende del valor regular $q \in N$ que tomemos
- es constante en la clase de homotopía de $f$.

Para pruebas de estos hechos, ver [10] §5.
Por la primera propiedad, podemos definir el **grado de Brouwer** o **grado orientado** de $f : M \to N$ como $\deg(f) = \deg(f, q)$ para cualquier valor regular $q \in N$.
Consideremos ahora un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Un campo vectorial en $U$ es un mapeo suave $X : U \to TU$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} & TU \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "X"] \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $TU$ es el haz tangente de $U$, y $\pi : TU \cong U \times \mathbb{R}^n \to U$ es el mapeo $\pi(x, v) = v$. Podemos entonces convenir que un campo vectorial en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un mapeo $v : U \to \mathbb{R}^n$, solo considerando la segunda coordenada $v$ de $X$, que contiene *casi* toda su información.
El punto $x_0 \in U$ es un **cero** de $v$ si $v(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que $x_0$ es un **cero aislado** de $v$ si existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ tal que $x_0$ es el único cero de $v$ en $V$. En este caso existe $\epsilon > 0$ tal que $x_0$ es el único cero de $v$ en la bola cerrada $\overline{B(x, \epsilon)}$. En particular $\frac{v}{|v|} : \mathbb{S}^{n-1}_\epsilon(x_0) \to \mathbb{S}^{n-1}$ es una mapeo suave entre variedades como en la Definición 4, donde $|\cdot|$ denota la norma en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^{n-1}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ con centro en $0_{\mathbb{R}^n}$ y $\mathbb{S}^{n-1}_\epsilon(x_0) = \partial\overline{B(x_0, \epsilon)}$. Entonces definimos **índice** de $v$ en $x_0$ como $\mathrm{ind}_{x_0} v = \deg \frac{v}{|v|}$.
A continuación siguen algunos resultados que nos permitirán generalizar el concepto de índice a campos vectoriales en variedades abstractas.

**Lema 3** (**Lema de Hadamard**). *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función suave definida en un abierto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a $0_{\mathbb{R}^n}$, entonces existen funciones suaves $g_i : U \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que*

$$f(x) = f(0) + x^1 g_1(x) + \ldots + x^n g_n(x)$$

*para todo $x \in U$, donde $x = (x^1, \ldots, x^n)$ son las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^n$. Además, $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.*

**Demostración**:
Para cada $x \in U$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \tfrac{\partial}{\partial t} f(tx)\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} x^i \tfrac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\, dt \\ &= \sum_{i=0}^{n} x^i \int_0^1 \tfrac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\, dt \end{aligned}$$

Luego, basta hacer $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\, dt$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Una **isotopía** de mapeos entre variedades $M, N$ es un mapeo suave $H : M \times [0,1] \to N$ tal que cada para cada $t \in [0,1]$ el mapeo $H(\cdot, t) : M \to N$ es un encaje.

**Lema 4.** *Cualquier difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva la orientación estándar de $\mathbb{R}^n$ es suavemente isotópico a la identidad $Id_{\mathbb{R}^n}$. Asimismo, si $f$ invierte la orientación, es suavemente isotópico a la reflexión*

$$r(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-1}, -x^n).$$

**Demostración**:
Podemos asumir luego de aplicar traslaciones, que $f(0) = 0$, sin pérdida de generalidad.
Ahora,

$$df_0(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tx)}{t}.$$

Luego, es natural definir una homotopía $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por la fórmula

$$H(x,t) = \begin{cases} \frac{f(tx)}{t}, & \text{para} \quad 0 < t \le 1 \\ df_0(x), & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

Ahora, probemos la suavidad de $H$. Primero, escribamos $f = (f^1, \dots, f^n)$, en las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^n$. Aplicándole el Lema 3 a cada $f^j$, obtenemos $f^j(x) = x^1 g_{1j}(x) + \dots + x^n g_{nj}(x)$ para algunas funciones suaves $g_{1j}, \dots, g_{nj}$, con $g_{ij}(0) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0)$.
Entonces, si definimos $g_i(x) = (g_{i1}(x), \dots, g_{in}(x))$, podemos escribir

$$f(x) = x^1 g_1(x) + \dots + x^n g_n(x).$$

De aquí que $H(x,0) = df_0(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tx)}{t} = x^1 g_1(0) + \dots + x^n g_n(0)$.
Pero para $t \neq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \frac{f(tx)}{t} \\ &= x^1 g_1(tx) + \dots + x^n g_n(tx). \end{aligned}$$

Entonces, para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$,

$$H(x,t) = x^1 g_1(tx) + \dots + x^n g_n(tx).$$

Luego, $H$ es suave, y $H(\cdot, 0) = df_0$, $H(\cdot, 1) = f$.
Ahora, $H(\cdot, 0) = df_0$ es claramente un difeomorfismo, pues es un isomorfismo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Además, para $t \neq 0$,

$H(\cdot,t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo cuyo inverso es el mapeo $y \mapsto \frac{f^{-1}(ty)}{t}$. Luego, en efecto $H$ es una isotopía.
Solo resta ver que $df_0$ es isotópico a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ o a la reflexión $r$ del Lema 4, según $f$ preserve o invierta la orientación, y notar que la homotopía es una relación de equivalencia entre mapeos.
En el primer caso, $f'(0), \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \in Gl(n,\mathbb{R})^+$, y este es un grupo de Lie conexo, ver Teorema 3.68 de [15]. Basta tomar una curva suave $\gamma : [0,1] \to Gl(n,\mathbb{R})^+$ tal que $\gamma(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, y $\gamma(1) = f'(0)$ y definir $G : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ como $G(x,t) = \gamma(t) \cdot x$.
Si $f$ invierte la orientación, entonces $f'(0), r'(0) \in Gl(n,\mathbb{R})^- \cong Gl(n,\mathbb{R})^+$ conexo, así que podemos aplicar el mismo razonamiento que antes.

□

Dados un mapeo suave $f : M \to N$ entre variedades y $X$ y $Y$ campos en $M$, $N$ respectivamente, decimos que $X$ y $Y$ están **$f$-relacionados** si

$$df_p(X_p) = Y_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M.$$

La notación $X_p$ es alternativa a $X(p)$, para campos vectoriales en variedades abstractas.

**Proposición 2.** *Sean $U, V$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, $h : U \to V$ un difeomorfismo y $v, w$ campos en $U, V$ repectivamente, que están $h$-relacionados. Si $x_0 \in U$ es un cero aislado de $v$, entonces $h(x_0)$ es un cero aislado de $w$ y más aún, $ind_{x_0} v = ind_{h(x_0)} w$.*

**Demostración**:
Nuevamente podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_0 = h(x_0) = 0$. Más aún, como el concepto de índice es local, podemos después de restringir el dominio, asumir que $U$ es una bola cerrada de radio positivo, centrada en 0.
Si $h$ preserva la orientación, el Lema 4 garantiza la existencia de una isotopía $H : U \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ entre $H(\cdot,0) = \mathrm{Id}_U$ y $H(\cdot,1) = h$. De esta manera obtenemos una una familia a un parámetro de encajes $H(\cdot,t) = h_t : U \to \mathbb{R}^n$.
Sea $v_t$ el campo en $h_t(U)$ definido por $v_t(y) = dh_t \circ v \circ h_t^{-1}(y)$. Por definición, para cada $t \in [0,1]$, $v$ y $v_t$ están $h_t$-relacionados. Veamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in [0,1]$, 0 es el único cero de $v_t$ en la bola cerrada $\overline{B(0,\epsilon)}$.
En efecto, si asumimos lo contrario, podemos encontrar una sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ tal que $v_k := v_{t_k}$ tiene un cero $y_k \neq 0$, con

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 0.$$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, ver [12] p. 40, podemos asumir sin pérdida de generalidad que existe $t = \lim_{k\to\infty} t_k \in [0,1]$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k = h_{t_k}^{-1}(y_k) \neq 0$ es un cero de $v$. Una vez más, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ compacto, podemos asumir que existe $x = \lim_{k\to\infty} x_k \in U$. Pero entonces

$$h_t(x) = H(x,t) = \lim_{k\to\infty} H(x_k,t_k) = \lim_{k\to\infty} h_{t_k}(x_k) = \lim_{k\to\infty} y_k = 0.$$

Como $h_t$ es un difeomorfismo, $x = 0$. Esto es absurdo, pues hemos encontrado una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ceros de $v$ con $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, y esto contradice que 0 es un cero aislado de $v$.
Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $t \in [0,1]$, $v_t$ no tiene ceros en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}_\epsilon$ y podemos definir una homotopía $G : \mathbb{S}^{n-1}_\epsilon \times [0,1] \to \mathbb{S}^{n-1}$ entre los mapeos $\frac{v}{|v|}, \frac{w}{|w|}$ como $G(x,t) = \frac{v_t(x)}{|v_t(x)|}$.
Esto prueba que $\mathrm{ind}_0 v = \deg(\frac{v}{|v|}) = \deg(\frac{w}{|w|}) = \mathrm{ind}_0 w$.
Ahora, si $h$ invierte la orientación, también por el Lema 4, tenemos una isotopía $H : U \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $h_0 = H(\cdot,0) = r$ y $h_1 = H(\cdot,1) = h$, donde $r$ es la reflexión definida en el Lema 4. Entonces $\mathrm{ind}_0 w = \mathrm{ind}_0 v'$, donde

$$v' = dr \circ v \circ r^{-1} = r \circ v \circ r^{-1} = r \circ v \circ r,$$

pues $r$ es lineal y $r^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Solo faltaría ver que $\mathrm{ind}_0 v' = \mathrm{ind}_0 v$. Observemos que $\frac{v'}{|v'|} = r \circ \frac{v}{|v|} \circ r$, por tanto $\frac{v'}{|v'|}$ preserva la orientación en $x$ si y solo si $\frac{v}{|v|}$ preserva la orientación en $r(x)$. Como $r$ es un difeomorfismo restringido a cualquier esfera centrada en 0,

$$\mathrm{ind}_0 v' = \deg(\frac{v'}{|v'|}) = \deg(\frac{v}{|v|}) = \mathrm{ind}_0 v$$

y concluye la prueba. □

**Definición 5.** Para un campo $X$ en una variedad $M$, y $p \in M$ un cero aislado de $X$, tomemos una carta $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ centrada en $p$ (i.e $\varphi(p) = 0$), donde $U \subseteq M$ es abierto. Entonces definimos el **índice** de $X$ en $p$ como $\text{ind}_p X = \text{ind}_0 v$, donde $v$ es el campo en $\varphi(U)$ definido por

$$v(x) = X_{\varphi^{-1}(x)}, \text{ para cada } x \in \varphi(U).$$

Para ver que esta noción está bien definida, tomemos otra carta $\psi : U \to \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ también centrada en $p$, sin pérdida de generalidad. Entonces los campos $v$ en $\varphi(U)$ y $w$ en $\psi(U)$ asociado a $X$ en la carta $\psi$ como arriba, están $h$-relacionados, para el difeomorfismo $h = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(U)$. Luego, la Proposición 2 garantiza la buena definición del índice en el contexto general.
Ahora vamos a ver cómo la topología de una variedad compacta con frontera, $X^n \subset \mathbb{R}^n$, en particular un campo vectorial normal a $\partial X$, determina hasta cierto punto el comportamiento de cualquier campo vectorial en $X$ con solo ceros aislados.

**Lema 5.** *Sea $X$ una variedad compacta orientada, $M = \partial X$ orientada por la orientación frontera heredada de $X$ y $N$ una variedad tal que dim $M$ = dim $N$. Si el mapeo suave $f : M \to N$ admite una extensión suave $F : X \to N$, entonces deg $f = 0$.*

**Demostración**:
Por el Teorema de Sard (ver [10] §3), casi todo punto $y \in N$ es un valor regular de ambas $f$, y $F$. Para un tal $y \in N$, por el Teorema de Clasificación de 1-variedades suaves, ver [10] App., la 1-variedad compacta $F^{-1}(y)$ es una unión finita de círculos y arcos cerrados. Además, como $\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial X$, solo los puntos frontera de los arcos están en $M$.
Sea $A \subseteq F^{-1}(y)$ uno cualquiera de tales arcos, con $\partial A = \{a, b\}$. Bastará probar que $\text{sign}(df_a) + \text{sign}(df_b) = 0$.
Las orientaciones en $X$ y $N$ inducen una orientación en $A$ como sigue. Sean $x \in A$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base positivamente orientada de $T_xX$ tal que $v_1 \in T_xA$. Entonces $\{v_1\}$ es positivamente orientada para $T_xA \iff \{dF_x(v_2), \dots, dF_x(v_n)\}$ es positivamente orientada para $T_yN$. Esto tiene sentido pues $dF_x|_S : S \to T_yN$ es un isomorfismo, donde $S = \text{span}\{v_2, \dots, v_n\}$, al ser $y$ un valor regular de $F$ y $F(A) = \{y\}$.
Sea $v_1(x)$ el vector unitario positivamente orientado tangente a $A$ en $x$. Entonces $v_1$ es un campo vectorial suave, pues $v_1(x) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ para cualquier parametrización $\alpha : (-1, 1) \to A$ de una vecindad de $x$ en $A$ que preserve la orientación, con $t = \alpha^{-1}(x)$.
Además, como $v_1(a) \notin T_aM$, $v_1(b) \notin T_bM$, uno de $v_1(a)$, $v_1(b)$ apunta hacia afuera y el otro apunta hacia adentro. De aquí es trivial que

$$\text{sign}(df_a) + \text{sign}(df_b) = 0,$$

teniendo en cuenta la orientación que definimos en $A$ y que $dF_x|_{T_xM} = df_x$ para todo $x \in M$. □

**Definición 6.** Sea $X^n \subset \mathbb{R}^n$ una $n$-variedad compacta con frontera. El **mapeo de Gauss** $g : \partial X \to \mathbb{S}^{n-1}$ se define como $g(x) = N_x$, donde $N_x$ es el vector unitario normal a $\partial X$ en $x$ que apunta hacia afuera.

En esta definición, aclaremos la frase "... que apunta hacia afuera". Para un vector $v \in T_xX$, donde $x \in \partial X$, se dice que $v$ **apunta hacia afuera** si alrededor de $x$ existe una carta $\varphi : U \to \mathbb{H}^n$ tal que $v(x^n) > 0$, donde $v(x^n) > 0$ denota la derivada direccional de la función coordenada $x^n$ en el punto $x$ en la dirección de $v$. Es un resultado bien conocido que esta noción no depende de la carta, como consecuencia del Teorema de Bolzano de Valores Intermedios, ver [12] p. 93.

**Lema 6.** *Si $v : X^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave con ceros aislados que apunta hacia afuera a lo largo de $\partial X$, entonces $\sum \iota$ = deg $g$, donde $\sum \iota$ denota la suma de los índices de $v$ y como antes, $g : \partial X \to \mathbb{S}^{n-1}$ es el mapeo de Gauss asociado a $X$.*

**Demostración**:

Sea $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ el conjunto de ceros de $v$, y $B_i = B(x_i, \epsilon_i)$ una bola abierta centrada en $x_i$ y no contiente a cualquier otro cero de $v$. Entonces $Y = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ es una variedad compacta con frontera $\partial X \bigsqcup_{i=1}^{k}(-\partial B_i) = \partial X \bigsqcup_{i=1}^{k}(-\mathbb{S}_i^{n-1})$. El signo "$-$" indica que la esfera $\mathbb{S}_i^{n-1}$ recibe la orientación opuesta a la que hereda de $B_i$ como su frontera, pues como frontera de $Y$, un vector que apunta hacia afuera en $\mathbb{S}_i^{n-1}$ es el vector que apunta a $x_i$.
La función $\overline{v}(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|} : \partial Y \to \mathbb{S}^{n-1}$ está bien definida, es suave y claramente se extiende a $Y$. Por el Lema 5, la suma de los grados de las restricciones de $\overline{v}$ a las distintas componentes de $\partial Y$ es 0. Pero $\overline{v}|_{\partial X}$ es homotópico a $g$ vía la homotopía

$$H : \partial X \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$$

dada por $h_t(x) = \frac{v(x)+t(N_x - v(x))}{|v(x)+t(N_x-v(x))|}$. Esta homotopía está bien definida pues en todo punto $x \in \partial X$, $v(x)$ y $N_x$ apuntan hacia afuera.
Entonces, como la suma de los grados de las restricciones de $\overline{v}$ a las componentes $\mathbb{S}_1^{n-1}, \ldots, \mathbb{S}_k^{n-1}$ de $\partial Y$ es $-\sum \iota$, la prueba concluye. □

Tomemos ahora $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad cerrada, y para $\epsilon > 0$ definamos $M_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x, M) \leq \epsilon\}$. El Teorema de la $\epsilon$-vecindad, ver [5] p. 69, garantiza que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $M_\epsilon$ es una $k$-variedad compacta con frontera $\{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x, M) = \epsilon\}$, y cada punto $x \in M_\epsilon$ tiene al menos un punto más cercano en $M$.
Sea $T^\perp M = \{(y, v) \in M \times \mathbb{R}^k \mid v \in (T_y M)^\perp\}$, el haz normal de $M$ en $\mathbb{R}^k$. Más específicamente, en [5] pp. 71, 72, se demuestra que el mapeo

$$h : T^\perp M \to \mathbb{R}^k$$

dado por $h(y, v) = y + v$, manda una vecindad abierta $U$ de la sección cero en $T^\perp M$ difeomorfamente a una vecindad abierta $V$ de $M$ en $\mathbb{R}^k$. Como $M$ es compacta, es claro que cualquier vecindad abierta $V$ de $M$ contiene a $M_\epsilon$ para algún $\epsilon > 0$.
Ahora, si $\pi : T^\perp M \to M$ denota la proyección canónica $\pi(y, v) = y$, entonces tenemos una sumersión suave $r : M_\epsilon \to M$, definida por $r(x) = \pi(h^{-1}(x))$. Este mapeo es una sumersión pues $\pi$ es claramente una sumersión y $h : h^{-1}(M_\epsilon) \to M_\epsilon$ es un difeomorfismo.
El siguiente lema caracteriza de manera geométrica a la sumersión $r$.

**Lema 7.** *Para $x \in M_\epsilon$, $r(x) \in M$ es el único punto en $M$ más cercano a $x$.*

**Demostración**:

Primero veamos que existe un punto $y_0 \in M$ tal que $d(x, y_0) = d(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y)$. En efecto, la función $\theta : M \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(y) = |x - y|^2$ es suave, al ser la restricción a $M$ de una función suave $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, dada por la misma regla de asignación. Entonces, como $M$ es compacta, $\theta$ debe alcanzar su valor mínimo en algún punto $y_0 \in M$, por el Teorema de Weierstrass de Valores Extremos, ver [12] p. 89. Claramente este $y_0$ es un punto más cercano a $x$ en $M$.
Ahora veamos que $x - y_0 \in (T_{y_0} M)^\perp$. Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ cualquier curva suave tal que $\gamma(0) = y_0$. El punto $t = 0$ es de mínimo local para la función $d : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ definida como $d(t) = \theta(\alpha(t)) = |x - \alpha(t)|^2$. De aquí que

$$0 = d'(0) = -2\langle \alpha'(0), x - \alpha(0) \rangle = -2\langle \alpha'(0), x - y_0 \rangle.$$

Consecuentemente, $x - y_0 \in (T_{y_0} M)^\perp$ como queríamos.
Finalmente, veamos que $r(x)$ es el único punto en $M$ más cercano a $x$. Supongamos por el contrario que existen dos puntos distintos $y_0, y_1$ más cercanos a $x$ en $M$, para $x \in M_\epsilon$. Como vimos antes, $x - y_0 \in (T_{y_0} M)^\perp$ y $x - y_1 \in (T_{y_1} M)^\perp$. Además, $h(y_0, x - y_0) = h(y_1, x - y_1) = x$, de donde $(y_0, x - y_0)$, $(y_1, x - y_1) \in h^{-1}(M_\epsilon)$. Esto es absurdo, pues ya habíamos establecido que $h : h^{-1}(M_\epsilon) \to M_\epsilon$ es un difeomorfismo, en particular es inyectivo. □

Decimos que un campo vectorial $w : U \to \mathbb{R}^k$ tiene un cero **no degenerado** en $x$ si $x$ es cero de $w$, y la transformación lineal $dw_x$ es no singular. Del Teorema de la Función Inversa, ver [14] p. 35, se sigue que los ceros no degenerados de un campo vectorial son aislados.
Más generalmente, consideremos un cero $x$ de un campo vectorial $v$ en una variedad $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Como $v$ es un mapeo

$v : M \to \mathbb{R}^k$, la diferencial de $v$, $dv_x : T_xM \to \mathbb{R}^k$ está definida.
El siguiente lema técnico nos permitirá probar seguidamente que todos los campos con solo ceros no degenerados en una variedad compacta $M \subseteq \mathbb{R}^k$ tienen una característica de naturaleza combinatoria en común.

**Lema 8.** *Para $v$ un campo vectorial en una variedad $M \subseteq \mathbb{R}^k$ y $x$ un cero de $v$, $dv_x(T_xM) \subseteq T_xM$.*

**Demostración**:
Sea $h : U \to \mathbb{R}^n$ una carta alrededor de $x$ en $M$, con $h = (h^1, \dots, h^n)$ y sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ la correspondiente base de campos coordenados en $M$. Entonces $X_i = \frac{\partial}{\partial h^i}\big|_x = dh^{-1}_{h(x)}(e_i) = \frac{\partial h^{-1}}{\partial u^i}\big(h(x)\big)$, donde $(u^1, \dots, u^n)$ son las coordenadas usuales en $h(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Además, denotemos por $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base usual de $\mathbb{R}^n$.
Notemos que

$$dv_x(X_i) = dv_x\left(\frac{\partial}{\partial h^i}\bigg|_x\right) = d\big(v \circ h^{-1}\big)_{h(x)}(e_i) = \frac{\partial(v \circ h^{-1})}{\partial u^i}\big(h(x)\big). \tag{6}$$

Sea

$$w = \sum_{j=1}^n w^j e_j$$

el campo en $h(U)$ que está $h$-asociado a $v$. Por definición,

$$\big(v \circ h^{-1}\big)(h(x)) = v(x) = dh^{-1}_{h(x)} \circ w \circ h(x) = dh^{-1}_{h(x)}\left(\sum_{j=1}^n w^j(h(x))e_j\right) = \sum_{j=1}^n w^j\big(h(x)\big)X_j(x).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial(v \circ h^{-1})}{\partial u^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w^j}{\partial u^i}X_j + \sum_{j=1}^n w^j\frac{\partial X_j}{\partial u^i}. \tag{7}$$

Ahora, evaluando (7) en $h(x)$ y sustituyendo (6), obtenemos que

$$dv_x(X_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w^j}{\partial u^i}X_j \in T_xM.$$

$\square$

Entonces, para un campo $v$ en una variedad $M \subseteq \mathbb{R}^k$, decimos que el cero $x \in M$ es **no degenerado** si $dv_x : T_xM \to T_xM$ es un isomorfismo. Por el mismo argumento que usamos para campos definidos en abiertos de $\mathbb{R}^k$, todo cero no degenerado es aislado. A aquellos campos vectoriales $v$ con solo ceros no degenerados los llamaremos **campos no degenerados**; si $v$ no es un campo no degenerado, se dice que $v$ es un campo **degenerado**.

**Teorema 7.** *Para cualquier campo vectorial no degenerado $v$ en $M$, la suma de sus índices $\sum \iota$ es igual al grado del mapeo de Gauss*

$$g : \partial M_\epsilon \to \mathbb{S}^{k-1}.$$

*En particular, esta suma es constante en el conjunto de campos $v$ que satisfacen las hipótesis enunciadas.*

**Demostración**:
Consideremos la función distancia al cuadrado $\phi : M_\epsilon \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = |x - r(x)|^2$. Como

$$\text{grad } \phi\ (x) = 2\big(x - r(x)\big),$$

$\epsilon^2$ es un valor regular de $\phi$, pues grad $\phi\ (x) = 2\big(x - r(x)\big) = 0$ implicaría que $x \in M$, lo cual es imposible si $|x - r(x)| = \epsilon > 0$.

Entonces, para cada punto de la superficie de nivel $\partial M_\epsilon = \phi^{-1}(\epsilon^2)$ el vector normal unitario que apunta hacia afuera está dado por

$$g(x) = \frac{\text{grad } \phi\ (x)}{|\text{grad } \phi\ (x)|} = \frac{x - r(x)}{\epsilon}$$

.
Ahora extendamos $v$ a un campo vectorial $w$ en la vecindad $M_\epsilon$ como

$$w(x) = \big(x - r(x)\big) + v(r(x)).$$

Entonces $w$ es suave y apunta hacia afuera a lo largo de $\partial M_\epsilon$, pues si $x \in \partial M_\epsilon$, $\langle w(x), g(x)\rangle = \epsilon > 0$. Además, notemos que $w(x) = 0$ solo si $x \in M$ y $v(x) = 0$, pues $x - r(x) \perp v(r(x))$, al ser $x - r(x) \in (T_{r(x)}M)^\perp$. Para la derivada de $w$ en un cero $y \in M$, tenemos que

$$dw_y(u) = dv_y(u) \text{ si } u \in T_yM \tag{8}$$

$$dw_y(u) = u \text{ si } u \in (T_yM)^\perp \tag{9}$$

Para probar (8), es suficiente ver que $r|_M = \text{Id}_M$, por tanto $w|_M = v$.
Por otra parte, si $u \in (T_yM)^\perp$ es no nulo, la curva suave $\alpha : (-\frac{\epsilon}{|u|}, \frac{\epsilon}{|u|}) \to M_\epsilon$ dada por $\alpha(t) = y + tu$ satisface $\alpha(0) = y$ y $\alpha'(0) = u$. Entonces

$$\begin{aligned} dw_y(u) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} w\big(\alpha(t)\big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big((y + tu - y) + v(y)\big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (tu) \\ &= u, \end{aligned}$$

lo cual prueba (9).
Entonces, por el Lema 8 y como $dv_y$ es no singular, también $dw_y$ es no singular. Entonces el índice de $w$ en el cero $y$ es igual al índice $\iota$ de $v$ en $y$, por el Lema 4.
El Lema 6 garantiza entonces que la suma de índices $\sum \iota$ de $v$ es igual al grado del mapeo de Gauss $g$. □

Seguidamente, algunas definiciones y resultados importantes de **Teoría de Morse** que necesitaremos más adelante. A partir de ahora estudiaremos las llamadas *funciones de Morse* sobre una variedad compacta $M$.
El concepto de **matriz Hessiana** de una función suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ en una generalización de mismo concepto, para funciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que para una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la matriz Hessiana en un punto $x$ es la matriz $\text{Hess}_x f = \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,(x)\big)_{i,j}$ con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. El punto crítico $x \in U$ ($df_x = 0$) se dice **no degenerado** si $\det \text{Hess}_x f \neq 0$; de lo contrario se dice que $x$ es **degenerado**.
Para extender este concepto a variedades abstractas, haremos uso del siguiente:

**Lema 9.** *Sean $U$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $f : U \to \mathbb{R}$ una función suave tal que* $0$ *es un punto crítico no degenerado de $f$, y $\phi : V \to \phi(V) \subseteq U$ un difeomorfismo con $\phi(0) = 0$. Entonces* $0$ *es un punto crítico no degenerado de $f \circ \phi$.*

**Demostración**:
Sean $f' = f \circ \phi$, $\phi = \big(\phi^1, \ldots, \phi^n\big)$, $H = \text{Hess}_0 f$, $H' = \text{Hess}_0 f'$. Entonces $df'_0 = df_0 \circ d\phi_0 = 0$, de donde $0$ es un punto crítico de $f'$. Más aún,

$$\frac{\partial f'}{\partial x^i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}\big(\phi(x)\big) \cdot \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i}(x).\cdot$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(0)\cdot\frac{\partial \phi^k}{\partial x^i}(0)\cdot\frac{\partial \phi^l}{\partial x^j}(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}(0)\cdot\frac{\partial^2 \phi^k}{\partial x^i \partial x^j}(0)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(0)\cdot\frac{\partial \phi^k}{\partial x^i}(0)\cdot\frac{\partial \phi^l}{\partial x^j}(0),\end{aligned}$$

pues $\frac{\partial f}{\partial x^k}(0) = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.
En notación matricial, hemos probado que $H' = \big(\phi'(0)\big)^t H \phi'(0)$, donde $A^t$ denota la matriz transpuesta de $A$. Como $\phi$ es un difeomorfismo y $H$ es no singular, también lo es $H'$. □

**Definición 8.** Sea $f : M \to \mathbb{R}$ suave y $p$ un punto crítico de $f$. Decimos que $p$ es un **punto crítico no degenerado** de $f$ si para una carta $\big(\varphi, U\big)$ centrada en $p$, tenemos que 0 es un punto crítico no degenerado de $f \circ \varphi^{-1}$; en otro caso decimos que $p$ es un punto crítico **degenerado** de $f$. Entonces decimos que $f : M \to \mathbb{R}$ es una **función de Morse** en $M$ si no tiene puntos críticos degenerados.

El Lema 9 garantiza que la primera parte de esta definición no depende de la carta $\varphi$ que tomemos.
Si $p$ es un punto crítico de $f$, podemos definir una forma bilineal simétrica $f_{**} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ como sigue. Dados los vectores $v, w \in T_pM$, los extendemos localmente a campos vectoriales $X, Y$ en una vecindad de $p$. Para esto, basta tomar una carta $(\varphi, U)$ alrededor de $p$, y definir $X_q = \big(d\varphi^{-1}\big)_{\varphi(q)}\left(\tilde{v}_{\varphi(q)}\right)$, $Y_q = \big(d\varphi^{-1}\big)_{\varphi(q)}\left(\tilde{w}_{\varphi(q)}\right)$, donde los campos $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ se definen como $\tilde{v}(x) = d\varphi_p(v)$, $\tilde{w}(x) = d\varphi_p(w)$ para todo $x \in \varphi(U)$. Claramente $X$ y $Y$ son campos suaves, al ser **pullbacks** por una carta de campos constantes en $\varphi(U)$. Además, $X_p = v$, $Y_p = w$.
Definimos pues $f_{**}(v, w) = X_p(Yf)$, donde la función $Yf$ se define como $Yf(p) = Y_p(f)$. Ahora, si $X'$, $Y'$ son otras extensiones de $v$, $w$ a campos vectoriales locales, veamos que $X_p(Yf) = X'_p(Y'f)$. En efecto, $X_p = v = X'_p$, así que la definición de $f_{**}$ no depende de la extensión de su primera coordenada $v$. Entonces, si probamos que $f_{**}$ es simétrica, en particular estaríamos probando que su definición tampoco depende de la segunda coordenada $w$. Para esto, tomemos dos pares de extensiones $X, X'$ y $Y, Y'$ de $v$, $w$ respectivamente. Entonces

$$X_p(Yf) - Y'_p(X'f) = X'_p(Yf) - Y_p(X'f) = [X', Y]_p(f) = df_p([X', Y]_p) = 0.$$

Entonces $f_{**}(v, w) = f_{**}(w, v)$ independientemente de las extensiones que tomemos. Esto prueba que $f_{**}$ es simétrica y está bien definida. Claramente, $f_{**}$ es bilineal.
Si $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ es una carta alrededor de $p$, la matriz que representa a $f_{**}$ en la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^1}|_p\}$ es precisamente $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)_{i,j}$, la matriz Hessiana de $f$ en $p$ en la carta $\varphi$. De esta forma definimos el **índice** de $f$ en $p$ como el índice de la forma bilineal $f_{**}$ en $T_pM$, i.e, la máxima dimensión de un subespacio $W$ de $T_pM$ restringida al cual $f_{**}$ es definida negativa ($f_{**}(v, v) < 0$ para todo $v \in W$).
A continuación enunciamos un resultado seminal de Teoría de Morse, una demostración del cual puede ser hallada en [11] p. 6.

**Lema 10** (**Lema de Morse**). *Sea $p$ un punto crítico no degenerado de $f : M \to \mathbb{R}$ de índice $\lambda$. Existe una carta $(\varphi, U)$ centrada en $p$ tal que para todo $q \in U$ se tiene*

$$f(q) = f(p) - (x^1(q))^2 - \ldots - (x^\lambda(q))^2 + (x^{\lambda+1}(q))^2 + \ldots + (x^n(q))^2,$$

*donde $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$.*

Toda variedad suave compacta $M$ admite un encaje $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$, ver Teorema 2.17 de [13]. Entonces, podemos pensar que $M$ es una subvariedad Euclidiana y, en ocasiones, será pertinente hacerlo.
Hasta ahora, hemos hablado de funciones de Morse en una variedad compacta $M$, pero no hemos garantizado siquiera la existencia de tales funciones. Resulta que el Teorema de Sard, ver [10] §3, no solo garantiza que existen funciones de Morse en $M$, sino que son bien comunes en un sentido práctico:

**Teorema 9.** *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una subvariedad Euclidiana, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Entonces para casi todo $a = (a^1, \ldots, a^N) \in \mathbb{R}^N$, la función $f_a = f + a^1x^1 + \ldots + a^Nx^N$ es de Morse en $M$, donde $(x^1, \ldots, x^N)$ son las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^N$.*

Para una prueba simple de este resultado, ver [5] p. 43.
Ahora, dada una variedad cerrada $M$ (compacta y sin frontera) y una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$, notemos que $f$ solo puede tener una cantidad finita de puntos críticos. En efecto, el Lema 10 garantiza que todo punto crítico no degenerado, es aislado. Como $f$ es de Morse, su conjunto de puntos críticos es un subconjunto discreto de $M$ compacta, por tanto, es finito. Consecuentemente, es claro que también el conjunto de valores críticos es finito. El siguiente resultado será útil más adelante.

**Lema 11.** *Dada una subvariedad Euclidiana compacta $M$, existen funciones de Morse en $M$ que toman valores distintos en distintos puntos críticos.*

**Demostración**:
Tomemos cualquier función de Morse $f$ en $M$, y sea $\{p_1, \ldots, p_k\}$ el conjunto de sus puntos críticos. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ sea $\rho_i : M \to \mathbb{R}$ una función flan suave idénticamente 1 en una pequeña bola coordenada abierta $U_i$ centrada en $p_i$, e idénticamente 0 fuera de una bola coordenada abierta $V_i$ que contiene a $U_i$, ver Proposición 2.25 de [8]. Podemos además suponer que $V_i \cap V_j = \varnothing$ para $i \neq j$, y que $p_i$ es el único punto crítico de $f$ en $V_i$.
Veamos que podemos escoger números reales no nulos $a_1, \ldots, a_k$ tales que $f(p_i) + a_i \neq f(p_j) + a_j$ para $i \neq j$. Si $k = 1$ no hay nada que probar. Si $k \geq 2$, en cualquier vecindad de $(f(p_1), \ldots, f(p_k)) \in \mathbb{R}^k$ hay puntos que no pertenecen a ninguno de los hiperplanos $\{x_i = x_j\}$ con $i \neq j$, pues la unión de estos tiene medida cero en $\mathbb{R}^k$. Dichos puntos son de la forma $(f(p_1), \ldots, f(p_k)) + a$, con $a \in \mathbb{R}^k$ de norma tan pequeña como se quiera.
Seguidamente, definamos $\overline{f} : M \to \mathbb{R}$ como

$$\overline{f} = f + \sum_{i=1}^{k} a_i\rho_i.$$

Esta $\overline{f}$ es suave. Claramente fuera de $\bigcup_{i=1}^k V_i$, $\overline{f} \equiv f$.
Supongamos que $p \in V_i \setminus U_i$ para algún $i$. Notemos que $K_i = \overline{V_i} \setminus U_i$ es compacto, por tanto existen $m = \min_{p\in K_i}|\mathrm{grad} f(p)|$, y $M = \max_{p\in K_i}|\mathrm{grad}\rho_i(p)|$. Entonces

$$\overline{f}(p) = f(p) + a_i\rho_i(p),$$

de donde

$$\mathrm{grad}\overline{f}(p) = \mathrm{grad} f(p) + a_i \mathrm{grad}\rho_i(p) \neq 0,$$

si $|a_i| < \frac{m}{M}$. Finalmente, si $p \in U_i$ para algún $i$, $\overline{f} = f + a_i$. Entonces $\mathrm{grad}\overline{f}(p) = \mathrm{grad} f(p) = 0$ solo si $p = p_i$.
Hemos probado que $\overline{f}$ tiene los mismos puntos críticos que $f$. Pero, como en cada $U_i$ tenemos que $\overline{f} = f + a_i$, $\mathrm{Hess}_{p_i}\overline{f} = \mathrm{Hess}_{p_i} f$ es no singular.
Luego, $\overline{f}$ es una función de Morse que toma valores diferentes en puntos críticos diferentes. □

Ahora, dada una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$, denotaremos $M_t = f^{-1}(-\infty, t]$, y $M(t) = f^{-1}(t)$. Dedicaremos entonces una gran parte de esta subsección a estudiar como cambia $M_t$ cuando $t$ recorre de manera creciente el intervalo $[c-\epsilon, c+\epsilon]$, donde $c$ es un valor crítico de $f$ y $\epsilon > 0$ es tal que $c$ es el único valor crítico de $f$ en $[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Para esto, primero veamos el caso más simple, donde $t$ recorre un intervalo $[a, b]$ sin valores críticos de $f$.

**Teorema 10.** *Sea $M$ una variedad cerrada suave, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave que no tiene valores críticos en $[a, b]$. Entonces $M_a$ es un retracto por deformación de $M_b$. Además, $M_b \cong M_a$ difeomorfos.*

**Demostración**:
La idea de la prueba es deslizar $M_b$ a lo largo de trayectorias transversales a las hipersuperficies $M(t)$, con $t \in [a, b]$. Toda variedad suave admite una métrica Riemanniana, ver Corolario 4.20 de [2]. Dicho esto, escojamos

una métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ en $M$. Se define entonces el **campo gradiente** de $f$ con respecto a $\langle , \rangle$, que denotamos grad$f$, como

$$\langle X_q, \text{grad} f(q) \rangle = X_q(f) = df_q(X_q).$$

Ahora, como $f^{-1}[a,b]$ es cerrado en $M$ compacta, es compacto. Sabemos que $\text{grad} f(q) \neq 0$ para $q \in f^{-1}[a,b]$. Sea entonces $\rho : M \to \mathbb{R}$ una función suave que coincide con $\frac{1}{\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle}$ en el compacto $f^{-1}[a,b]$, y es idénticamente 0 fuera de $f^{-1}[a-2\delta, b+2\delta]$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Para construir $\rho$, extendemos $\frac{1}{\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle}$ de $f^{-1}[a,b]$ a toda $M$, multiplicándola por una función flan suave $\lambda : M \to \mathbb{R}$ no negativa, que es idénticamente 1 en el compacto $f^{-1}[a,b]$ e idénticamente 0 fuera del abierto $f^{-1}(a-\delta, b+\delta)$. Adicionalmente, notemos que $\max_{q \in M} \lambda(q) = 1$.
Entonces el campo vectorial $X = \rho \cdot \text{grad} f$ es suave, y como $M$ es compacta, es un campo completo, ver Teorema 5.6 de [13].
Sea $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ el flujo de $X$, entonces cada $\phi_t = \phi(\cdot, t)$ es un difeomorfismo de $M$.
Consideremos para cada $q \in M$ la función $t \mapsto f(\phi_t(q))$. Si $\phi_t(q) \in f^{-1}[a,b]$, entonces

$$\frac{\partial f(\phi_t(q))}{\partial t} = \langle \frac{\partial \phi_t(q)}{\partial t}, (\text{grad} f)_{\phi_t(q)} \rangle = \langle X_{\phi_t(q)}, (\text{grad} f)_{\phi_t(q)} \rangle = 1$$

Por tanto,

$$f(\phi_t(q)) = t + f(q), \tag{10}$$

siempre y cuando $f(\phi_t(q)) \in [a,b]$.
Más aún para todo $t \in \mathbb{R}$ y $q \in M$,

$$\frac{\partial f(\phi_t(q))}{\partial t} = \langle \frac{\partial \phi_t(q)}{\partial t}, (\text{grad} f)_{\phi_t(q)} \rangle = \langle X_{\phi_t(q)}, (\text{grad} f)_{\phi_t(q)} \rangle = \rho(\phi_t(q)) \cdot \left| (\text{grad} f)_{\phi_t(q)} \right|^2 \in [0,1].$$

De aquí que $f$ es creciente a lo largo de las trayectorias de $X$, y $f(\phi_t(q)) - f(\phi_0(q)) \leq t - 0$, o

$$f(\phi_t(q)) \leq f(q) + t, \tag{11}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $q \in M$.
Consideremos ahora el difeomorfismo $\phi_{a-b} : M \to M$. Veamos que $\phi_{a-b}(M_b) = M_a$. Primero, si $q \in M_a$, $a - b < 0$, por tanto $f(\phi_{a-b}(q)) < f(\phi_0(q)) = f(q) \leq a$. Ahora, si $q \in f^{-1}[a,b]$, notemos que $\phi_{b-f(q)}(q) \in f^{-1}[a,b]$, pues $f(\phi_{b-f(q)}(q)) \leq f(q) + b - f(q) = b$, por (11). Además $b - f(q) \geq 0$, luego $f(\phi_{b-f(q)}(q)) \geq f(\phi_0(q)) = f(q) \geq a$. Entonces, podemos aplicarle (10) a $\phi_{b-f(q)}(q)$ para obtener

$$f(\phi_{a-b}(q)) \leq f(\phi_{a-b+b-f(q)}(q)) = f \circ \phi_{a-b}(\phi_{b-f(q)}(q)) = f(\phi_{b-f(q)}(q)) + a - b \leq b + a - b = a.$$

Con esto hemos probado que $\phi_{a-b}(M_b) \subseteq M_a$. Para finalizar, basta aplicar (10) para ver que $\phi_{a-b}(M(b)) = M(a)$. Esto prueba que $M_b \cong M_a$. Ahora definamos una homotopía $h_t : M_b \to M_b$ por

$$h_t(q) = \begin{cases} q, & \text{si} \quad f(q) \leq a \\ \phi_{t(a-f(q))}(q), & \text{si} \quad a \leq f(q) \leq b. \end{cases}$$

Para ver que esta homotopía es continua, notemos primero que sus restricciones a $M_a \times I$ y $\left(f^{-1}[a,b]\right) \times I$ son continuas. Además, si $(q_0, t_0)$ es un punto de la intersección de las cerraduras de estas dos regiones,

$$q_0 = \lim_{(q,t) \to (q_0, t_0)} h_t(q)$$

para $(q,t) \in \left(f^{-1}[a,b]\right) \times I$, por la continuidad de $\phi$. Además, $h_0 = \text{Id}_{M_b}$, y $h_1$ es una retracción de $M_b$ en $M_a$ pues claramente $h_1|_{M_a} = \text{Id}_{M_a}$, y si $q \in f^{-1}[a,b]$, $\phi_{a-f(q)}(q) \in M(a)$, por (10). □

De este teorema podemos deducir que si $t$ recorre un intervalo $[a,b]$ sin puntos críticos de $f$, entonces $M_t$ no cambia su tipo de homotopía, en particular.

Supongamos ahora que $[a, b] = [c - \epsilon, c + \epsilon]$, donde $c$ es un valor crítico de $f$ y $\epsilon > 0$ es tal que $c$ es el único valor crítico de $f$ en $[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Además, por el Lema 11, podemos asumir que $f$ toma valores distintos en puntos críticos distintos. Separemos los posibles casos en cuanto a el índice $\lambda$ del punto crítico $p$ con $f(p) = c$.

Primero supongamos que $p$ es de índice 0. Entonces, por el Lema 10 existe una carta $(\varphi, U)$ centrada en $p$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = c + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Entonces $p$ es un mínimo local de $f$.
Empecemos asumiendo que $p$ es, de hecho, el mínimo absoluto de $f$ en $M$. En este caso, $M_t = \varnothing$ para $t < c$, en particular $M_{c-\epsilon} = \varnothing$ para $\epsilon > 0$. Además, $c = f(p) \in (c - 2\epsilon, c + 2\epsilon)$ abierto en $\mathbb{R}$. Entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $f^{-1}(c - 2\epsilon, c + 2\epsilon) \subseteq U$, y por tanto $M_{c+\epsilon} \subseteq U$. De aquí que

$$\begin{aligned} M_{c+\epsilon} &= \{q \in U | c + (x^1(q))^2 + \ldots + (x^n(q))^2 \leq c + \epsilon\} \\ &= \{q \in U | (x^1(q))^2 + \ldots + (x^n(q))^2 \leq \epsilon\} \\ &= \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right) \cong \mathbb{D}^n, \end{aligned}$$

Si $p$ es un mínimo local pero no es el mínimo absoluto de $f$, entonces $M_{c-\epsilon} \neq \varnothing$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Como antes existe una carta $(\varphi, U)$ centrada en $p$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = c + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

y $U \cap M_{c+\epsilon} = \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right) \cong \mathbb{D}^n_\epsilon$. Escribimos entonces $M_{c+\epsilon} = \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right) \bigsqcup \left(M_{c+\epsilon} \setminus \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right)\right)$, con $M_{c+\epsilon} \setminus \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right) \neq \varnothing$ pues $M_{c+\epsilon} \setminus \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right) \supseteq M_{c-\epsilon} \neq \varnothing$.

Notemos que $K_1 = f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon] \setminus \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right)$ es compacto y grad $f \neq 0$ en $K_1$, para cualquier métrica Riemanniana en $M$. Entonces, como en la prueba del Teorema 10, construimos una función flan suave $\rho_1 : M \to \mathbb{R}$ tal que $\rho_1 \equiv \frac{1}{\langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle}$ en $K_1$ y $\rho_1 \equiv 0$ fuera de una vecindad precompacta $U_1$ de $K_1$ y hacemos $X = \rho_1 \cdot \text{grad } f$. Este campo es suave y completo en $M$. Si $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ es el flujo de $X$, definimos una retracción por deformación de $M_{c+\epsilon}$ en $M_{c-\epsilon} \bigsqcup \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right)$ como

$$h_t(q) = \begin{cases} q, & \text{si} \quad q \in M_{c-\epsilon} \bigsqcup \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right) \\ \phi_{t(c-\epsilon-f(q))}(q), & \text{si} \quad q \in K_1. \end{cases}$$

Probemos que esta homotopía es continua. Solo hay que verificar la continuidad en puntos $(q_0, t_0) \in M(c - \epsilon) \times I$, pues esta es la intersección de las cerraduras de las regiones $\left(M_{c-\epsilon} \bigsqcup \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right)\right) \times I$, $K_1 \times I$. Entonces,

$$q_0 = \lim_{(q,t) \to (q_0, t_0)} h_t(q)$$

para $(q, t) \in K_1 \times I$, por la continuidad de $\phi$.
Además, $h_0 = \text{Id}_{M_{c+\epsilon}}$, $h_t(q) = q$ para todo $q \in M_{c-\epsilon} \bigsqcup \varphi^{-1}\left(\mathbb{D}^n_\epsilon\right)$ y $t \in [0, 1]$. Adicionalmente, $h_1(K_1) \subseteq M(c - \epsilon)$, por (10) en la prueba del Teorema 10, para $a = c - \epsilon$, $b = c + \epsilon$. Entonces $h_1$ es una retracción.

Analicemos ahora el caso en que el índice $\lambda$ de $p$ es $n = \dim M$. Por el Lema 10 existe una carta $(\varphi, U)$ centrada en $p$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = c - (x^1)^2 - \ldots - (x^n)^2.$$

Entonces $p$ es un máximo local de $f$.
Asumamos inicialmente que $p$ es el máximo absoluto de $f$ en $M$. Entonces si $t \geq c$, $M_t = M$. Podemos asumir que

$U \cap M_{c-\epsilon} \neq \varnothing$, para $\epsilon$ suficientemente pequeño. En este caso,

$$\begin{aligned} M_{c-\epsilon} \cap U &= \{q \in U | c - (x^1(q))^2 - \ldots - (x^n(q))^2 \leq c - \epsilon\} \\ &= \{q \in U | (x^1(q))^2 + \ldots + (x^n(q))^2 \geq \epsilon\} \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(U) \setminus \text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\right). \end{aligned}$$

Como $\partial M_{c-\epsilon} = \varphi^{-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}_{\sqrt{\epsilon}}\right) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ y $c$ es el valor máximo absoluto de $f$, $M_{c+\epsilon} = M$ es $M_{c-\epsilon}$ con un disco $\mathbb{D}^n$ pegado a lo largo de su frontera $\mathbb{S}^{n-1}$.
Si $p$ es un máximo local que no es el punto de máximo absoluto de $f$, para $\epsilon$ suficientemente pequeño, $M_{c+\epsilon} \subsetneq M$. Nuevamente usamos la forma local de $f$ que garantiza el Lema 10, y escribimos

$$M_{c+\epsilon} = \varphi^{-1}\big(\text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\big) \bigsqcup \left(M_{c+\epsilon} \setminus \varphi^{-1}\big(\text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\big)\right).$$

Notemos que $K_2 = M_{c+\epsilon} \setminus \left(\varphi^{-1}\big(\text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\big) \bigcup \text{ int } M_{c-\epsilon}\right)$ es compacto y grad $f \neq 0$ en $K_2$, para cualquier métrica Riemanniana en $M$. Entonces, como antes, construimos una función flan suave $\rho_2 : M \to \mathbb{R}$ tal que $\rho_2 \equiv \frac{1}{\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle}$ en $K_2$ y $\rho_2 \equiv 0$ fuera de una vecindad precompacta $U_2$ de $K_2$ y hacemos $X = \rho_2 \cdot \text{grad } f$. Este campo es suave y completo en $M$.
Si $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ es el flujo de $X$, definimos una retracción por deformación de $M_{c+\epsilon}$ en $M_{c-\epsilon} \cup \varphi^{-1}\big(\text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\big)$ como

$$h_t(q) = \begin{cases} q, & \text{si} \quad q \in M_{c-\epsilon} \cup \varphi^{-1}\big(\text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\big) \\ \phi_{t(c-\epsilon-f(q))}(q), & \text{si} \quad q \in K_2. \end{cases}$$

La prueba de continuidad de esta homotopía es enteramente análoga a la de la homotopía construida en el caso de un punto de mínimo local no absoluto, es consecuencia directa de la continuidad del flujo $\phi$.
Además, $h_0 = \text{Id}_{M_{c+\epsilon}}$, $h_t(q) = q$ para todo $q \in M_{c-\epsilon} \cup \varphi^{-1}\big(\text{int } \mathbb{D}^n_{\sqrt{\epsilon}}\big)$ y $t \in [0,1]$. Adicionalmente, $h_1(K_2) \subseteq M(c-\epsilon)$, por (10) en la prueba del Teorema 10, para $a = c - \epsilon$, $b = c + \epsilon$. Entonces $h_1$ es una retracción.
De esta manera, si $\lambda = n$, $M_{c+\epsilon}$ es homotópicamente equivalente a $M_{c-\epsilon}$ con un $n$-disco pegado a lo largo una de las componentes de su frontera.
Para los casos en que el índice de $p$ es $\lambda = 0$ o $\lambda = n$, $M_{c-\epsilon} \cup \mathbb{D}^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c+\epsilon}$. Es importante observar que el espacio adjunción $M_{c-\epsilon} \cup \mathbb{D}^\lambda$ ha tenido la característica de que el mapeo de adjunción es siempre inyectivo. En ocasiones, cuando nos refiramos a un $\lambda$-disco $\mathbb{D}^\lambda$ siendo adjuntado a un espacio, vamos a usar la notación $\mathrm{e}^\lambda$, y le llamaremos una $\lambda$-celda.
Resulta que si $\lambda \neq 0, n$ el resultado sigue siendo cierto, aunque la prueba es bastante más complicada. Aprovechamos para recordar las hipótesis que hemos estado usando hasta ahora.

**Proposición 3.** *Sea $M^n$ una variedad cerrada, $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave, $p$ un punto crítico no degenerado de $f$ de índice $\lambda \neq 0, n$, y $c = f(p)$. Si $\epsilon > 0$ es tal que $p$ es el único punto crítico de $f$ en $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$, entonces $M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c+\epsilon}$.*

**Demostración**:
Por el Lema 10, podemos escoger una carta $(\varphi, U)$ centrada en $p$, tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = c - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Escojamos $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\mathbb{D}^n_{\sqrt{2\epsilon}} \subset \varphi(U)$, y $M_{c-\epsilon} \cap U$, $M_{c+\epsilon} \cap U \neq \varnothing$. La $\lambda$-celda en la tésis del teorema será $\mathrm{e}^\lambda = \{q \in U \mid x^1(q)^2 + \ldots + x^\lambda(q)^2 \leq \epsilon,\ x^{\lambda+1}(q) = \ldots = x^n(q) = 0\}$.
Entonces,

$$M_{c-\epsilon} \cap U = \{q \in U \mid x^1(q)^2 + \ldots + x^\lambda(q)^2 - x^{\lambda+1}(q)^2 - \ldots - x^n(q)^2 \geq \epsilon\},$$

el "interior" del hiperboloide generalizado $(x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 - (x^{\lambda+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = \epsilon\}$.
Similarmente,

$$M_{c+\epsilon} \cap U = \{q \in U \mid -x^1(q)^2 - \ldots - x^\lambda(q)^2 + x^{\lambda+1}(q)^2 + \ldots + x^n(q)^2 \leq \epsilon\},$$

el "exterior" del hiperboloide generalizado $-(x^1)^2 - \ldots - x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = \epsilon\}$.
Las hipersuperficies $M(c) \cap U$ son conos generalizados.
Como $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo, luego en ocasiones $q \in U$ será identificado con $x = \varphi(q) \in U$. Notemos ahora que $\mathrm{e}^\lambda \subseteq U$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^\lambda \cap M_{c-\epsilon} &= \{x \in U \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 \leq \epsilon,\ x^{\lambda+1} = \ldots = x^n = 0,\ (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 - (x^{\lambda+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 \geq \epsilon\} \\ &= \{x \in U \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 = \epsilon,\ x^{\lambda+1} = \ldots = x^n = 0\} = \partial \mathrm{e}^\lambda, \end{aligned}$$

así que $\mathrm{e}^\lambda$ está inyectivamente pegado a $M_{c-\epsilon}$ a lo largo de su frontera.
Probemos que $M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c+\epsilon}$. Para esto, empecemos por convenir la existencia de una función suave $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface:

- $\mu(0) > \epsilon$
- $\mu(r) = 0,$ para $r \geq 2\epsilon$
- $-1 < \mu'(r) \leq 0,$ para $r \geq 2\epsilon$,

cuya construcción es directa usando la función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en [13], p. 33.
Sean $\xi,\ \eta : U \to [0, +\infty]$ las funciones $\xi = (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2$, $\eta = (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2$. Definamos $F : M \to \mathbb{R}$ como $f$ fuera de $U$, y $F = f - \mu(\xi + 2\eta)$ en $U$. En $U \setminus \varphi^{-1}(\mathbb{D}^n_{\sqrt{2\epsilon}})$ tenemos que $\xi + 2\eta \geq \xi + \eta \geq 2\epsilon$, y como $\mu(r) = 0$ para $r \geq 2\epsilon$, tenemos $F \equiv f$. Entonces, $F$ es suave.
Además, en $U$, $f = c - \xi + \eta$, $F = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$.

**Paso 1:** Probemos que $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon] = M_{c+\epsilon}$.
Como $F \leq f$ en $M$, claramente $M_{c+\epsilon} \subseteq F^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$.
Ahora veamos que $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] \subseteq M_{c+\epsilon}$. Para $\xi + 2\eta \geq 2\epsilon$, $F \equiv f$. Si $q \in F^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$ es tal que $\xi(q) + 2\eta(q) < 2\epsilon$, entonces $f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) < c + \epsilon$.

**Paso 2:** Los puntos críticos de $F$ y $f$ coinciden.
Fuera de $U$, $F \equiv f$, así que sus puntos críticos claramente coinciden.
En $U$, $F = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1. \end{aligned}$$

Luego, $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta} \neq 0$ en $U$. Además, las 1-formas $d\xi$, $d\eta$ son simultáneamente nulas solamente en $p \in U$.
En efecto,

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial \xi}{\partial x^\lambda} dx^n = 2x^1 dx^1 + \ldots + 2x^\lambda dx^\lambda \\ d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x^{\lambda+1}} dx^{\lambda+1} + \ldots + \frac{\partial \eta}{\partial x^n} dx^n = 2x^{\lambda+1} dx^{\lambda+1} + \ldots + 2x^n dx^n. \end{aligned}$$

De aquí que $d\xi(q) = d\eta(q) = 0 \iff x^1(q) = \ldots = x^n(q) = 0 \iff q = p$. Como

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

el único punto crítico de $F$ en $U$ es $p$, como ocurre para $f$.

**Paso 3:** $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ es un retracto por deformación de $M_{c+\epsilon}$.

Consideremos la región compacta $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Si $q \in F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$, $c-\epsilon \leq F(q) \leq f(q)$, y también $q \in F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = M_{c+\epsilon}$. Entonces $f(q) \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$, y hemos probado que $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon] \subseteq f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Como el único punto crítico de $f$ en $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ es $p$, $p$ es posiblemente el único punto crítico de $F$ en $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Ahora, como $F(p) = c = \mu(0) < c-\epsilon$, $p \notin F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$, y esta región no contiene puntos críticos de $F$. Entonces, si aplicamos el Teorema 10 a $F : M \to \mathbb{R}$, obtenemos que $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ es un retracto por deformación de $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = M_{c+\epsilon}$.

Como $F \leq f$, $M_{c-\epsilon} \subseteq F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$.
Escribamos entonces $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] = M_{c-\epsilon} \cup H$, donde $H = \overline{F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \setminus M_{c-\epsilon}}$. De hecho,

$$H = \{q \in U \mid -\epsilon \leq -\xi(q) + \eta(q) \leq \mu(\xi(q) + 2\eta(q)) - \epsilon\}.$$

Probemos que $\mathrm{e}^\lambda = \{q \in U \mid \xi(q) \leq \epsilon,\ \eta(q) = 0\} \subseteq H$. Sea $q \in \mathrm{e}^\lambda$, como $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$, $\eta(q) = \eta(p) = 0$ y $\xi(q) \geq 0 = \xi(p)$, entonces $F(q) \leq F(p) < c-\epsilon$. Además, $f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \geq c-\epsilon$. Entonces $q \in H$, y $\mathrm{e}^\lambda \subseteq H$.

**Paso 4:** $M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c-\epsilon} \cup H$.
Finalmente, vamos a construir una retracción por deformación $r : \big(M_{c-\epsilon} \cup H\big) \times I \to M_{c-\epsilon} \cup H$ de $M_{c-\epsilon} \cup H$ en $M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda$, donde usamos la notación $I = [0,1]$. Sea $r_t$ el mapeo identidad fuera de $U$, para todo $t \in I$, i.e en $\big(M_{c-\epsilon} \cup H\big) \cap U^c$, y definamos $r_t$ en $\big(M_{c-\epsilon} \cup H\big) \cap U$ por partes como:

$$r_t(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} (x^1, \ldots, x^\lambda, tx^{\lambda+1}, \ldots, tx^n), & \text{si} \quad x \in H \cap \{\xi \leq \epsilon\} = R_1 \\ (x^1, \ldots, x^\lambda, s_t(x)x^{\lambda+1}, \ldots, s_t(x)x^n), & \text{si} \quad x \in H \cap \{\epsilon < \xi \leq \eta + \epsilon\} = R_2 \\ (x^1, \ldots, x^n), & \text{si} \quad x \in \{\eta + \epsilon \leq \xi\} = M_{c-\epsilon} = R_3, \end{cases}$$

para todo $t \in I$, donde $s_t(x) = t + (1-t)\big(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\big)^{\frac{1}{2}}$.
Para concluir la prueba, debemos verificar varias propiedades de $r_t$:

- r es continua, donde $r(x,t) = r_t(x)$,
- $r_t\big(M_{c-\epsilon} \cup H\big) \subseteq M_{c-\epsilon} \cup H$ para todo $t \in I$,
- $r_t|_{M_{c-\epsilon} \cup\ \mathrm{e}^\lambda} = \mathrm{Id}_{M_{c-\epsilon} \cup\ \mathrm{e}^\lambda}$ para todo $t \in I$,
- $r_1 = \mathrm{Id}_{M_{c-\epsilon} \cup\ H}$ y,
- $r_0$ es una retracción $M_{c-\epsilon} \cup H \to M_{c-\epsilon} \cup\ \mathrm{e}^\lambda$.

Probemos estas propiedades en ese orden.
Para la continuidad de $r : \big(M_{c-\epsilon} \cup H\big) \times I \to M_{c-\epsilon} \cup H$, primero notemos que la continuidad de $r$ restringida a las regiones $R_1 \times I$ y $R_3 \times I$ es directa. Adicionalmente, el mapeo $s : R_2 \times I \to \mathbb{R}$ definido por $s(x,t) = s_t(x)$ es claramente continuo, ya que $\{\eta = 0\} \cap R_2 = \varnothing$, entonces también la restricción de $r$ es continua en $R_2 \times I$.
Solo falta probar que $r$ es continua en $\big(\overline{R_i \times I}\big) \cap \big(\overline{R_i \times I}\big) = \big(\overline{R_i} \times I\big) \cap \big(\overline{R_j} \times I\big) = \big(\overline{R_i} \cap \overline{R_j}\big) \times I$, para todos los pares $(i,j)$ con $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3\}$. Como $M$ es primero numerable, la continuidad de cualquier mapeo definido en un subespacio de $M$ puede ser verificada usando sucesiones.

- Supongamos que $(x_0, t_0) \in \big(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}\big) \times I$. Entonces $\xi(x_0) = \epsilon$, y $\eta(x_0) \geq 0$.
  Si $\eta(x_0) > 0$,
  $$\lim_{(x,t) \to (x_0,t_0)} s(x,t) = t_0,$$
  así que
  $$\lim_{(x,t) \to (x_0,t_0)} r(x,t) = r(x_0,t_0)$$

tanto si $(x,t) \in R_1 \times I$ como si $(x,t) \in R_2 \times I$.
Por otra parte, supongamos que $\eta(x_0) = 0$. Como $\xi$ y $\eta$ son continuas, $\eta(x_0) = 0$ y $0 < \frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)} \leq 1$ para todo $x \in R_2$, tenemos que

$$0 \leq s_t(x) = t + (1-t)\left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq t + (1-t) = 1.$$

De aquí que si $(x,t) \in R_2 \times I$

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} |r(t,x) - r(x_0,t_0)|^2 = \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \big(\xi(x-x_0) + s_t(x)^2\eta(x)\big) = 0.$$

Como en este caso $(x_0,t_0) \in \overline{R_1} \times I = R_1 \times I$ y ya habíamos verificado la continuidad de $r$ restringida a $R_1 \times I$, este caso concluye.

- Si $(x_0,t_0) \in \big(\overline{R_2} \cap \overline{R_3}\big) \times I$, $\xi(x_0) = \eta(x_0) + \epsilon$ y $\eta(x_0) \geq 0$.
  Primero, si $\eta(x_0) > 0$,
  $$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} s(x,t) = 1,$$
  así que
  $$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} r(x,t) = r(x_0,t_0) = x_0$$
  lo mismo si $(x,t) \in R_2 \times I$ que si $(x,t) \in R_3 \times I$.
  Ahora, si $\eta(x_0) = 0$, como vimos en el caso anterior se cumple que
  $$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} r(x,t) = r(x_0,t_0)$$
  para $x \in R_2$. Pero en este caso $(x_0,t_0) \in \overline{R_3} \times I = R_3 \times I$ y $r$ restringida a $R_3 \times I$ es continua, luego este caso está probado.

- Para $(x_0,t_0) \in \big(\overline{R_1} \cap \overline{R_3}\big) \times I$ tenemos que
  $$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} r(x,t) = r(x_0,t_0) = x_0$$
  tanto si $(x,t) \in R_1 \times I$ como si $(x,t) \in R_3 \times I$, pues $(x_0,t_0) \in \big(\overline{R_1} \cap \overline{R_3}\big) \times I = \big(R_1 \cap R_3\big) \times I = \big(R_1 \times I\big) \cap \big(R_3 \times I\big)$, y las restricciones de $r$ a estas dos regiones son continuas.

Ahora veamos que $r_t\big(M_{c-\epsilon} \cup H\big) \subseteq M_{c-\epsilon} \cup H$ para todo $t \in I$.
Si $x \in R_3$ esto es trivial.
Supongamos que $x \in R_1 = H \cap \{\xi \leq \epsilon\}$. Como $\xi(r_t(x)) = \xi(x) \leq \epsilon$, tenemos que $\xi\big(r_t(x)\big) \in \{\xi \leq \epsilon\}$ para todo $t \in I$.
Ahora,

$$-\xi\big(r_t(x)\big) + \eta\big(r_t(x)\big) = -\xi(x) + t^2\eta(x) \geq -\xi(x) \geq \epsilon$$

y como $\mu$ es decreciente

$$-\xi\big(r_t(x)\big) + \eta\big(r_t(x)\big) = -\xi(x) + t^2\eta(x) \leq -\xi(x) + \eta(x) \leq \mu\big(\xi(x) + 2\eta(x)\big) - \epsilon \leq \mu\left(\xi\big(r_t(x)\big) + 2\eta\big(r_t(x)\big)\right) - \epsilon,$$

para todo $t \in I$. Luego, también $r_t(x) \in H$ para todo $t \in I$.
Si $x \in R_2$, $0 < \left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$, luego

$$s_x(x) = t + (1-t)\left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \geq t\left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}} + (1-t)\left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

de donde

$$-\xi\big(r_t(x)\big) + \eta\big(r_t(x)\big) = -\xi(x) + \big(s_t(x)\big)^2\eta(x) \geq -\xi(x) + \left(\frac{\xi(x)-\epsilon}{\eta(x)}\right)\eta(x) = -\epsilon.$$

Además, $\xi\big(r_t(x)\big) = \xi(x)$, $\eta\big(r_t(x)\big) \geq \eta(x)$ y $\mu$ es decreciente, así que como en el caso anterior, tenemos que $-\xi\big(r_t(x)\big) + \eta\big(r_t(x)\big) \leq \mu\left(\xi\big(r_t(x)\big) + 2\eta\big(r_t(x)\big)\right) - \epsilon$ para todo $t \in I$. Entonces $r_t(x) \in H$, para todo $t \in I$.

Claramente $r_t|_{M_{c-\epsilon}\cup\ \mathrm{e}^\lambda} = \mathrm{Id}_{M_{c-\epsilon}\cup\ \mathrm{e}^\lambda}$ para todo $t \in I$, pues $\big(M_{c-\epsilon} \cup\ \mathrm{e}^\lambda\big) \cap R_1 = \mathrm{e}^\lambda$ y $\big(M_{c-\epsilon} \cup\ \mathrm{e}^\lambda\big) \cap R_2 \subseteq M_{c-\epsilon}$.
También es claro que $r_1 = \mathrm{Id}_{M_{c-\epsilon}\cup\ H}$.
Finalmente, probemos que $r_0$ es una retracción $M_{c-\epsilon} \cup H \to M_{c-\epsilon} \cup\ \mathrm{e}^\lambda$. Si $x \in M_{c-\epsilon} = R_3$, $r_0(x) = x$, igualmente si $x \in \mathrm{e}^\lambda$ entonces $x \in R_1$ y $r_0(x) = x$. $\square$

Resumiendo toda la discusión anterior, hemos probado el siguiente:

**Teorema 11.** *Sea $M^n$ una variedad cerrada, $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave, $p$ un punto crítico no degenerado de $f$ de índice $\lambda$, y $c = f(p)$. Si $\epsilon > 0$ es tal que $p$ es el único punto crítico de $f$ en $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$, entonces $M_{c+\epsilon} \simeq M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda$, donde $\simeq$ denota la relación de equivalencia homotópica.*

A continuación veremos la importancia del Teorema 11 y su prueba, por ejemplo, para calcular las homologías relativas $H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}; R)$, donde $R$ es cualquier anillo conmutativo unitario, que serán de mucha ultilidad en la prueba del teorema principal de este trabajo.
Un vez fijo el anillo de coeficientes $R$, escribiremos $H_*(X)$, $H_*(X, A)$ en lugar de $H_*(X; R)$, $H_*(X, A; R)$.

**Proposición 4.** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 11, $H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) \cong H_*(e^\lambda, \partial e^\lambda)$, para cualquier anillo conmutativo unitario $R$.*

**Demostración**:
Como hicimos anteriormente, vamos a separar los casos $\lambda = 0$, $\lambda = n$ y $\lambda \neq 0,\ n$.

Supongamos primero que $\lambda = 0$. Entonces, como ya vimos, $M_{c+\epsilon} \cong M_{c-\epsilon} \bigsqcup\ \mathrm{e}^n$, de manera que

$$\begin{aligned} H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) &\cong H_*\big(M_{c-\epsilon} \textstyle\bigsqcup\ \mathrm{e}^n, M_{c-\epsilon}\big) \\ &= H_*\big(M_{c-\epsilon} \textstyle\bigsqcup\ \mathrm{e}^n, M_{c-\epsilon} \textstyle\bigsqcup\ \varnothing\big) \\ &\cong H_*(M_{c-\epsilon}, M_{c-\epsilon}) \oplus H_*(\mathrm{e}^n, \varnothing) \\ &\cong H_*(\mathrm{e}^n, \varnothing) \\ &\cong H_*(\mathrm{e}^0, \partial \mathrm{e}^0), \end{aligned}$$

El primer isomorfismo viene dado porque el par $(M_{c-\epsilon} \bigsqcup\ \mathrm{e}^n, M_{c-\epsilon})$ es un retracto por deformación del par $(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon})$. El segundo isomorfismo es consecuencia de la Proposición 13.9 de [4], que podemos aplicar a la descomposición en componentes conexas de $M_{c-\epsilon} \bigsqcup\ \mathrm{e}^n$. El cuarto isomorfismo es consecuencia de que $\mathrm{e}^n \simeq \mathrm{e}^0$, y que $\partial \mathrm{e}^0 = \varnothing$.

Similarmente, si $\lambda = n$, ya probamos que existe una retracción por deformación de $M_{c+\epsilon}$ en $M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^n$, $M_{c-\epsilon}$ con una $n$-celda pegada inyectivamente a lo largo de una de las componentes de su frontera, $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, por el Teorema de Escisión, ver [4] p. 82, podemos escindir el subespacio int $M_{c-2\epsilon}$ del par $(M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^n, M_{c-\epsilon})$, y obtenemos que

$$H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) \cong H_*(M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^n, M_{c-\epsilon}) \cong H_*\big(f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon] \cup \mathrm{e}^n, f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon]\big).$$

Una vez más usamos la técnica de la prueba del Teorema 10, primero fijando una métrica Riemanniana en $M$. Como $K = f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon]$ es compacto y no contiene puntos críticos de $f$, podemos construir una función flan suave $\rho : M \to \mathbb{R}$ tal que $\rho \equiv \frac{1}{\langle \mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ f \rangle}$ en $K$ y $\rho \equiv 0$ fuera de una vecindad precompacta $U$ de $K$ y hacemos $X = \rho \cdot \mathrm{grad}\ f$. Este campo es suave y completo en $M$. Entonces, si $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ es el flujo de $X$, definimos una retracción por deformación de $f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon] \cup \mathrm{e}^n$ en $M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^n$ como

$$h_t(p) = \begin{cases} p, & \text{si} \quad p \in M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^n \\ \phi_{t(c-\epsilon-f(p))}(p), & \text{si} \quad p \in K. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, esta homotopía es continua.
Además, $h_0 = \mathrm{Id}_{f^{-1}[c-2\epsilon,c-\epsilon] \,\cup\, \mathrm{e}^n}$, $h_t(p) = p$ para todo $p \in M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^n$ y $t \in [0,1]$. Adicionalmente, $h_1(K) \subseteq M(c-\epsilon)$, por (10) en la prueba del Teorema 10, para $a = c-2\epsilon$, $b = c-\epsilon$. Entonces $h_1$ es una retracción.
Hemos probado que $\big(M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^n, M(c-\epsilon)\big)$ es un retracto por deformación de $\big(f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon] \cup \mathrm{e}^n, f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon]\big)$.
Ahora, si $X_1, \ldots, X_k$ son las componentes conexas de $M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^n$, siendo $X_k = \mathrm{e}^n$ la componente que contiene a $\mathrm{e}^n$, entonces $X_1, \ldots, X_{k-1}, \partial\mathrm{e}^n$ son las componentes conexas de $M(c-\epsilon)$, y

$$\begin{aligned}
H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) &\cong H_*(M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^n, M_{c-\epsilon}) \\
&\cong H_*\big(f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon] \cup \mathrm{e}^n, f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon]\big) \\
&\cong H_*\big(M(c-\epsilon) \ \cup\ \mathrm{e}^n, M(c-\epsilon)\big) \\
&\cong H_*(X_1, X_1) \oplus \ldots \oplus H_*(X_{k-1}, X_{k-1}) \oplus H_*(\mathrm{e}^n, \partial\mathrm{e}^n) \\
&\cong H_*(\mathrm{e}^n, \partial\mathrm{e}^n),
\end{aligned}$$

donde el penúltimo isomorfismo está garantizado por la Proposición 13.9 de [4].

Finalmente, analicemos el caso $\lambda \neq 0, n$.
Por la Proposición 3, $M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c+\epsilon}$. Recordemos que podemos escindir el subespacio int $M_{c-2\epsilon}$ del par $(M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda, M_{c-\epsilon})$, y obtenemos que

$$H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) \cong H_*(M_{c-\epsilon} \cup \mathrm{e}^\lambda, M_{c-\epsilon}) \cong H_*\big(f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon] \cup \mathrm{e}^\lambda, f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon]\big).$$

Copiando la prueba del caso $\lambda = n$, el par $\big(M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^\lambda, M(c-\epsilon)\big)$ es un retracto por deformación del par $\big(f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon] \ \cup\ \mathrm{e}^\lambda, f^{-1}[c-2\epsilon, c-\epsilon]\big)$.
Ahora, hagamos $B = \varphi^{-1}\big(\overline{B(0, 2\epsilon)}\big)$, $X = M(c-\epsilon) \cup \mathrm{e}^\lambda$ y $V = X \setminus \mathrm{int}\, B$, donde $\varphi$ es una carta como en la prueba de la Proposición 3. Entonces, claramente $V$ es cerrado en $M$, y como $X$ también es cerrado en $M$, $V$ es cerrado en $X$. Más aún, $V = \overline{V} \subseteq M(c-\epsilon)$, cuya frontera topológica en $X$ es $\partial\mathrm{e}^\lambda$, la cual es disjunta de $V$.
Entonces $V = \overline{V} \subseteq \mathrm{int}\ M(c-\epsilon)$, y podemos escindir $V$ del par $\big(X, M(c-\epsilon)\big)$, de nuevo por el Teorema de Escisión, ver [4] p. 82. De esta forma,

$$H_*\big(X, M(c-\epsilon)\big) \cong H_*(Z, T),$$

donde $Z = X \cap$ int $B$, $T = M(c-\epsilon) \cap$ int B. Para concluir con la prueba, veamos ahora que $(\mathrm{e}^n, \partial\mathrm{e}^n)$ es un retracto por deformación de $(Z, T)$.
Primero notemos que como $\lambda \geq 1$, existe un difeomorfismo

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 - (x^{\lambda+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = \epsilon\} \xrightarrow{\phi} \mathbb{S}_\epsilon^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$$

dado por

$$\phi(x) = \left( \frac{x^1}{\sqrt{\frac{(x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 + \epsilon}{\epsilon}}}, \ldots, \frac{x^\lambda}{\sqrt{\frac{(x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 + \epsilon}{\epsilon}}}, x^{\lambda+1}, \ldots, x^n \right),$$

con inversa

$$\mathbb{S}_\epsilon^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n-\lambda} \xrightarrow{\psi} Y$$

definida como

$$\psi(y) = \left( y^1 \sqrt{\frac{(y^{\lambda+1})^2 + \ldots + (y^n)^2 + \epsilon}{\epsilon}}, \ldots, y^\lambda \sqrt{\frac{(y^{\lambda+1})^2 + \ldots + (y^n)^2 + \epsilon}{\epsilon}}, y^{\lambda+1}, \ldots, y^n \right).$$

Definimos entonces una homotopía $H; (Z, T) \times I \to (Z, T)$ por

$$h_t(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in \mathrm{e}^\lambda \\ \phi^{-1}\big(\phi^1(x), \ldots, \phi^\lambda(x), (1-t)\phi^{\lambda+1}(x), \ldots, (1-t)\phi^n(x)\big), & \text{si} \quad x \in M(c-\epsilon), \end{cases}$$

para todo $t \in I$, donde $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$.

- Claramente $H$ es continua. En efecto, sus restricciones a $\mathrm{e}^\lambda \times I$ y $\big(M(c-\epsilon) \cap \mathrm{int}\ B\big) \times I$ son continuas. Además, si $(x_0, t_0)$ es un punto de la intersección de las cerraduras de estas dos regiones,
$$x_0 = \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} h_t(x)$$
para $(x,t) \in \big(M(c-\epsilon) \cap \mathrm{int}\ B\big) \times I$, por la continuidad de $\phi$.
- Para cada $t \in I$, $h_t(T) \subseteq T$, pues $\big(\phi^1(x), \ldots, \phi^\lambda(x), (1-t)\phi^{\lambda+1}(x), \ldots, (1-t)\phi^n(x)\big) \in \mathbb{S}_\epsilon^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$ si $x \in T$, luego $h_t(x) \in Y$. Más aún, como $t \geq 0$, $|h_t(x)| \leq |x| < 2\epsilon$, tenemos que $h_t(x) \in Y \cap$ int $B = M(c-\epsilon) \cap$ int $B = T$.
Por el mismo argumento de arriba, y porque cada $h_t$ deja $\mathrm{e}^\lambda$ fijo, $h_t(Z) \subseteq Z$ para cada $t \in I$.
- Por definición, para cada $x \in \mathrm{e}^\lambda$ y $t \in I$, $h_t(x) = x$.
- $h_0 = \mathrm{Id}_{(Z,T)}$ y $h_1 : (Z,T) \to (Z,T)$ es una retracción al par $(\mathrm{e}^n, \partial\mathrm{e}^n)$.
Para verificar la última afirmación, tomemos $x \in Z$. Entonces
$$\begin{aligned} h_1(x) &= \phi^{-1}\left(\frac{x^1}{\sqrt{\frac{(x^{\lambda+1})^2+\ldots+(x^n)^2+\epsilon}{\epsilon}}}, \ldots, \frac{x^\lambda}{\sqrt{\frac{(x^{\lambda+1})^2+\ldots+(x^n)^2+\epsilon}{\epsilon}}}, 0, \ldots, 0\right) \\ &= \left(\frac{x^1}{\sqrt{\frac{(x^{\lambda+1})^2+\ldots+(x^n)^2+\epsilon}{\epsilon}}}, \ldots, \frac{x^\lambda}{\sqrt{\frac{(x^{\lambda+1})^2+\ldots+(x^n)^2+\epsilon}{\epsilon}}}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathrm{e}^n, \end{aligned}$$
si $x \in Z$. Adicionalmente, si $x \in M(c-\epsilon)$, este punto está en $\partial\mathrm{e}^n$.
Entonces $h_1(Z,T) \subseteq (\mathrm{e}^n, \partial\mathrm{e}^n)$, y como $h_1|_{(\mathrm{e}^n,\partial\mathrm{e}^n)} = \mathrm{Id}_{(\mathrm{e}^n,\partial\mathrm{e}^n)}$, la prueba concluye.

□

Con todas las herramientas que hemos desarrollado, estamos listos para probar una relación crucial entre los puntos críticos de una función de Morse en una variedad cerrada $M$, y su característica de Euler.

**Teorema 12 (Desigualdades de Morse).** *Si $c_\lambda$ denota el número de puntos críticos de índice $\lambda$ de una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ en una variedad cerrada $M$ que toma valores distintos en distintos puntos críticos, entonces*
$$\beta_\lambda(M) \leq c_\lambda \tag{12}$$
$$\chi(M) = \sum_\lambda (-1)^\lambda c_\lambda \tag{13}$$
*donde $\beta_\lambda(M) = \beta_\lambda(M, \varnothing)$, y $\chi(M) = \chi(M, \varnothing)$.*

**Demostración**:
Sean $a_0 < \ldots < a_k$ números reales tales que $M_{a_i}$ contiene exactamente $i$ puntos críticos y $M_{a_k} = M$. Entonces
$$H_\lambda(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) \cong H_\lambda(\mathrm{e}^{\lambda_i}, \partial\mathrm{e}^{\lambda_i}) \tag{14}$$
$$\cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si} \quad \lambda = \lambda_i \\ 0, & \text{si} \quad \lambda \neq \lambda_i \end{cases} \tag{15}$$
donde $\lambda_i$ es el índice del punto crítico $p_i \in (a_{i-1}, a_i)$. El isomorfismo en (14) está justificado por la Proposición 4 y el isomorfismo en (15) es consecuencia de la existencia de una sucesión exacta larga en homología asociada al par

$(\mathrm{e}^{\lambda_i}, \partial \mathrm{e}^{\lambda_i})$, ver [4] p. 75, y de que $\mathrm{e}^{\lambda_i}$ es contraíble.
Aplicándole el Lema 1 a $\varnothing = M_{a_0} \subseteq \ldots \subseteq M_{a_k} = M$ obtenemos

$$\beta_\lambda(M) \leq \sum_\lambda \beta_\lambda(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) = c_\lambda,$$

lo cual prueba (12).
Asimismo, aplicándole el Lema 2 a $\varnothing = M_{a_0} \subseteq \ldots \subseteq M_{a_k} = M$ obtenemos

$$\chi(M) = \sum_\lambda \chi(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) = \sum_\lambda (-1)^\lambda c_\lambda,$$

y (13) queda probado. □

# 3. El teorema

**Teorema 13** (**Teorema de Índice de Poincaré-Hopf para variedades cerradas**). *Sea $M$ una variedad cerrada, y $X$ un campo vectorial suave en $M$ con ceros aislados. Entonces*

$$\chi(M) = \sum \iota,$$

*la suma de los índices de $X$. En particular, esta suma de índices no depende del campo vectorial $X$.*

**Demostración**:
**Paso 1:** El teorema es cierto para campos no degenerados en $M$.
Supongamos que $X$ es un campo no degenerado en $M$. Tomemos entonces una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ que toma valores distintos en puntos críticos distintos. Esta función existe como consecuencia del Teorema 9 y del Lema 11.
Entonces, por el Teorema 2.30 de [9], existe un campo vectorial $Y$ en $M$ que es **tipo gradiente para** $f$, ver Definición 2.29 en [9]. Esto implica, en particular, que para cada punto crítico $p$ de $f$ de índice $\lambda$, existe una carta $(\varphi, U)$ centrada en $p$ tal que:

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = -(x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 + c \tag{16}$$

y en estas coordenadas

$$Y = -2x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \ldots - 2x^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + 2x^{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda+1}} + \ldots + 2x^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \tag{17}$$

donde $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ y $c = f(p)$.
En particular, (16) y (17) implican que los ceros de $Y$ y los puntos críticos de $f$ coinciden, y $Y$ solo tiene ceros aislados. Además, por (17), el índice de $Y$ en el punto crítico $p$ de índice $\lambda$ es $(-1)^\lambda$. En efecto, la localización de $Y$ es el campo vectorial $v$ en $\varphi(U)$ dado por

$$v(x^1, \ldots, x^n) = (-2x^1, \ldots, -2x^\lambda, 2x^{\lambda+1}, \ldots, 2x^n).$$

De aquí que $\frac{v}{|v|} : \mathbb{S}^{n-1}_\epsilon \to \mathbb{S}^{n-1}$ es un difeomorfismo que preserva la orientación si y solo si $(-1)^\lambda = 1$, e $\mathrm{ind}_p Y = (-1)^\lambda$.
Además, $Y$ es un campo no degenerado.
Del Teorema 12 tenemos que

$$\chi(M) = \sum_\lambda (-1)^\lambda c_\lambda = \sum \iota,$$

donde la última igualdad es consecuencia de que en todo punto crítico de $f$ de índice $\lambda$, el índice de $Y$ es $(-1)^\lambda$. Como $X$ y $Y$ son campos no degenerados en $M$, el Teorema 7 garantiza que la suma $\sum \iota$ coincide en ambos campos y queda probado el teorema para cualquier campo no degenerado.

**Paso 2:** El teorema es cierto para cualquier campo $X$ en $M$.
Supongamos primero que $v : V \to \mathbb{R}^n$ es un campo en un abierto Euclidiano, con un cero aislado en $x_0$. Tomemos una función flan suave $\rho : V \to [0, 1]$ tal que

- $\rho \equiv 1$ en un $N_1$,
- $\rho \equiv 0$ fuera de $N \supseteq N_1$,

donde $N_1$ y $N$ son bolas abiertas centradas en $x_0$, contenidas en $V$ y $x_0$ es el único cero de $v$ en $N$. Observemos además que $\rho$ es no negativa en $V$ y

$$\max_{x \in U} \rho(x) = 1. \tag{18}$$

Tomemos un valor regular $y$ de $v$ y veamos que si $y$ es suficientemente pequeño, el campo vectorial $\tilde{v} : V \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$\tilde{v}(x) = v(x) - \rho(x)y$$

es no degenerado en $N$.
Primero si $x \in N_1$ es un cero de $\tilde{v}$, como $\rho\big|_{N_1} \equiv 1$, se cumple

$$0 = \tilde{v}(x) = v(x) - y,$$

de donde $d\tilde{v}_x = dv_x$ es no singular, pues $y$ es un valor regular de $v$.
Si

$$|y| < \min_{x \in \overline{N \setminus N_1}} |v(x)|,$$

entonces para todo $x \in N \setminus N_1$ tenemos

$$|\tilde{v}(x)| = |v(x) - \rho(x)y| \geq |v(x)| - \rho(x)|y| > 0$$

por (18). Luego, $\tilde{v}$ no tiene ceros en $N \setminus N_1$.
Fuera de $N$, $v \equiv \tilde{v}$ y $v$ no tiene ceros, luego todos los ceros de $\tilde{v}$ estan en $N_1$. Como en $N_1$ se cumple $\tilde{v} = v - y$ y $y$ es un valor regular de $v$, la cantidad de ceros de $\tilde{v}$ es finita.
Sea $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq N$ el conjunto de ceros de $\tilde{v}$. La suma de los índices de $\tilde{v}$ es simplemente esta suma restringida a $N$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $K = \overline{N} \setminus \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta)$ no contiene ceros de $\tilde{v}$ y todas las bolas son disjuntas dos a dos, y disjuntas de $\partial N$. Entonces la frontera de la variedad compacta orientada $K$ es

$$\partial N \bigsqcup_{i=1}^{n} \big( - \mathbb{S}_\delta^{n-1}(x_i) \big),$$

donde $-\mathbb{S}_\delta^{n-1}(x_i)$ denota la esfera con centro $x_i$, radio $\delta$ y con la orientación inversa a la heredada de $\overline{B(x_i, \delta)}$ como su frontera.
Como el mapeo

$$\frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|} : \partial K \to \mathbb{S}^{n-1}$$

se extiende a $K$, por el Lema 5,

$$\begin{aligned} 0 &= \deg \frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|} \\ &= \operatorname{ind}_{x_0} v - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{x_i} \tilde{v}, \end{aligned}$$

pues $\tilde{v} \equiv v$ en $\partial N$.
De esta manera, modificamos el campo local $v$ posiblemente con ceros degenerados, y obtuvimos un nuevo campo local $\tilde{v}$ no degenerado con la misma suma de índices $\sum \iota$.
Ahora, en el caso general de una variedad cerrada abstracta $M$, procedemos como sigue. Tomemos un cero aislado $p \in M$ y una carta $(\varphi, U)$ alrededor de $p$. Seguidamente, le aplicamos el procedimiento anterior al campo $v : V \to \mathbb{R}^n$, definido como $v = (\varphi^{-1})^* \big(X\big|_U\big)$, el pullback del campo local $X\big|_U$ por $\varphi^{-1}$, y $V = \varphi(U)$. Así obtenemos $\tilde{v} : V \to \mathbb{R}^n$ no degenerado y con la misma suma $\sum \iota$ que $v$. Entonces, definimos el campo $\tilde{X}$ en $M$ como

$$\tilde{X}_q = \begin{cases} (\varphi)^* \big(\overline{v}\big)(q), & \text{si} \quad q \in U \\ X_q & \text{si} \quad q \notin U. \end{cases}$$

Este campo es suave, pues $\tilde{v} \equiv v$ en la región $V \setminus N$, como antes. Además, claramente la suma $\sum \iota$ es la misma para $X$ y $\tilde{X}$, pues estos campos coinciden fuera de $V$, y en $V$ tienen igual suma de índices por como construimos $v$ y $\tilde{v}$.
Seguidamente le aplicamos este procedimiento a $\tilde{X}$ y en una cantidad finita de iteraciones, terminamos con un campo no degenerado en $M$, y con la misma suma $\sum \iota$ que $X$.
Para concluir, solo le aplicamos el paso anterior al campo resultante. $\square$

**Observación.** En el caso de variedades compactas con frontera, el Teorema de Índice de Poincaré-Hopf es también válido. Para una prueba, usando Teoría de Punto Fijo de Lefschetz, consultar el Teorema 12.13 de [1].

# Referencias


[1] G.E. Bredon. *Topology and Geometry.* Springer, New York, NY, 1993.

[2] K. Bröcker, T. Jänich. *Introduction to differential topology.* Cambridge University Press, 1982.

[3] Zhang S. et al. An Application of the Poincaré-Hopf Index Theorem: A Mathematical Model of Earthquake. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, (466), 2018.

[4] Harper J. Greenberg, M. *Algebraic topology: A first course.* Benjamin/Cummings, 1981.

[5] Pollack A. Guillemin, V. *Differential topology.* Prentice-Hall, 1974.

[6] Hopf H. Vektorfelder in n-dimensionalen mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen 96*, pages 225–250, 1926.

[7] S. Lang. *Algebra.* Springer-Verlag, 3rd edition, 2002.

[8] J.M. Lee. *Smooth manifolds.* Springer, 2nd edition, 2013.

[9] Yukio Matsumoto. *An introduction to Morse Theory*, volume 208. American Mathematical Society, 2002.

[10] J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* The University Press of Virginia, 1965.

[11] J. Milnor. *Morse Theory*, volume 51. Princeton University Press, 1968.

[12] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1976.

[13] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 1. Publish or Perish, 3rd edition, 1999.

[14] Michael Spivak. *Calculus on manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Addison-Wesley, 1965.

[15] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, 1983.