



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

REDISEÑO BASADO EN FUNCIONES DE LYAPUNOV
VÍA MODOS DESLIZANTES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MANUEL ALFREDO ESTRADA ANGULO

TUTOR PRINCIPAL
DR. LEONID FRIDMAN

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. Verde Rodarte María Cristina

Secretario: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

1er. Vocal: Dr. Fridman Leonid

2o. Vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

3er. Vocal: Dr. Castaños Luna Fernando

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:
DR. LEONID FRIDMAN

FIRMA

Índice general

Índice de figuras	9
Índice de tablas	11
1. Introducción	13
1.1. Motivación y estado del arte	13
1.1.1. El rediseño basado en funciones de Lyapunov	13
1.1.2. Modos deslizantes y su relación con el rediseño basado en funciones de Lyapunov	14
1.2. Modos deslizantes continuos de orden superior	16
1.2.1. Algoritmo Super-twisting generalizado	16
1.2.2. Algoritmos Lipschitz por modos deslizantes	17
1.3. Estrategias de adaptación en modos deslizantes y rediseño basado en funciones de Lyapunov	18
1.3.1. Enfoque basado en funciones barrera	18
1.4. Alcance	19
1.5. Objetivos	20
1.5.1. Objetivos específicos	20
1.6. Metodología	20
1.7. Organización de la tesis	21
2. Preliminares	23
2.1. Clase de sistemas a considerar	23
2.2. Homogeneidad ponderada	24
2.3. Estabilidad en tiempo finito	24
2.4. Algoritmo Super-twisting generalizado de ganancias variables	26

3. rediseño basado en funciones de Lyapunov vía en modos deslizantes	29
3.1. rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico	29
3.1.1. El rediseño basado en funciones de Lyapunov desde el punto de vista de modos deslizantes	30
3.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes . .	31
3.3. Ejemplos de la superficie w y rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes	33
3.3.1. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes para sistemas LIT	33
3.3.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes: un sistema no lineal perturbado	34
3.3.3. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes para sistemas mecánicos completamente actuados .	35
4. Rediseño basado en funciones de Lyapunov vía Super-twisting	37
4.1. Planteamiento del problema	37
4.2. Un rediseño continuo basado en funciones de Lyapunov	37
4.2.1. Prueba de la Proposición 1	39
4.3. Caso de estudio: Robot de 2-GDL	41
4.3.1. Análisis de resultados	43
5. Rediseño basado en funciones de Lyapunov vía en algoritmos Lipschitz	49
5.1. Rediseño Lipschitz continuo	49
5.1.1. Prueba de la Proposición 2	51
5.2. Caso de estudio: Robot de 2-GDL	52
5.2.1. Obtención de la derivada \dot{w}	54
5.2.2. Análisis de resultados	55
6. Enfoque de función barrera en rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes	59
6.1. Funciones barrera multidimensionales	59
6.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes adaptables	60
6.3. Prueba de la Proposición 3	62
6.4. Caso de estudio: Robot de 2-GDL	65
7. Conclusiones y trabajo a futuro	71
7.1. Rediseño basado en funciones de Lyapunov basado vía Super-twisting	71

7.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov vía algoritmos Lipschitz por modos deslizantes	72
7.3. Enfoque de función barrera para rediseño basado en funciones de Lyapunov	72
7.4. Trabajo a futuro	73
Bibliografía	75
A. Demostración del Teorema 3	81

Índice de figuras

4.1. Estados del lazo cerrado en presencia del rediseño utilizando el control unitario.	44
4.2. Control u y variable de deslizamiento w con rediseño basado en control unitario.	45
4.3. Estados del lazo cerrado con el rediseño basado en STA.	46
4.4. Control u y variable de deslizamiento w con rediseño basado en STA.	47
5.1. Estados del lazo cerrado con el rediseño Lipschitz.	56
5.2. Control u y variable de deslizamiento w con rediseño Lipschitz.	57
6.1. Convergencia de la norma de la variable de salida $\ w(x)\ $ a una vecindad predefinida del origen de radio ε	61
6.2. Error de seguimiento	68
6.3. Norma de la variable auxiliar	69
6.4. Señales de control y ganancia adaptable	70

Índice de tablas

4.1. Parámetros del sistema	43
6.1. Parámetros de diseño.	66

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y estado del arte

En las décadas de los 50's y 60's, motivada por la carrera aeroespacial, la comunidad científica se enfocó en el problema del control óptimo. Sin embargo, rápidamente notaron que existía una gran diferencia entre los resultados teóricos y los obtenidos experimentalmente. Tal como menciona el profesor George Leitmann, "... pronto me percaté que resulta mucho más fácil desarrollar teoría de manera satisfactoria que buenos experimentos; no existe una manera de ignorar las condiciones intratables del mundo real" ([Leitmann, 1993](#)). Debido a ello, y a la falta de robustez ante incertidumbres en el modelo por parte del control óptimo, es que se motiva la búsqueda por metodologías para tratar con sistemas inciertos.

1.1.1. El rediseño basado en funciones de Lyapunov

[Gutman and Leitmann \(1976\)](#), presentan una metodología constructiva para el diseño de un control que trata con incertidumbres y perturbaciones acotadas. Dicha metodología se convirtió en una técnica clásica de control nombrada "..Rediseño de Lyapunov" por [Khalil \(2002\)](#) .

El rediseño basado en funciones de Lyapunov se basa en el conocimiento de un control para el sistema nominal (cuando no existen perturbaciones) y su función de Lyapunov, para diseñar una ley de control discontinua que puede tratar con incertidumbres y perturbaciones acopladas al canal de control. Esto llevó a otros trabajos a tratar de aprovechar las ventajas que proponía esta nueva metodología, por ejemplo en [Leitmann \(1981\)](#) se trata también el problema de rediseño basado en funciones de Lyapunov para sistemas lineales cuando existe error en la medición de

los estados.

Aunque el método puede obtener excelentes resultados garantizando la estabilidad asintótica del sistema en presencia de perturbaciones, la señal de control resulta ser discontinua, lo cual genera el fenómeno de *chattering*, oscilaciones de alta frecuencia. Con el fin de evitar la discontinuidad del control, [Corless and Leitmann \(1981\)](#) presentan un control que depende continuamente de los estados basados en una función de tipo saturación. No obstante, dicha estrategia sólo consigue acotamiento final y uniforme de las trayectorias del sistema, lo que es una clara desventaja con respecto al control discontinuo.

En [Barmish and Leitmann \(1982\)](#) y [Barmish et al. \(1983\)](#) el rediseño basado en funciones de Lyapunov se extiende al caso donde existen perturbaciones no acopladas para sistemas lineales y no lineales, respectivamente. De igual forma, se analizan trayectorias del sistema real cuando no se compensan exactamente las perturbaciones, y existen errores en la medición. Esto es importante debido a que en la realidad, es común que existan errores en sensores o estimadores de estados, dicho así, este análisis nos permite conocer como repercuten esos errores en las trayectorias del sistema perturbado con respecto a las del sistema nominal.

A pesar de ser una buena opción para tratar con perturbaciones en sistemas no lineales, la teoría de rediseño basado en funciones de Lyapunov se quedó estancada debido a que no existían más herramientas para ayudar con el problema de la discontinuidad y obtener una compensación exacta ante las perturbaciones. Por ello, un punto importante en este trabajo es retomar la filosofía propuesta por [Gutman and Leitmann \(1976\)](#) y aplicar la teoría de modos deslizantes desarrollada en los últimos años.

1.1.2. Modos deslizantes y su relación con el rediseño basado en funciones de Lyapunov

Por un lado, una de las ventajas del rediseño basado en funciones de Lyapunov consiste en una metodología de diseño de una variable de conmutación tal que se obtengan las propiedades deseadas para el sistema lineal.

Por otro lado, recordando el control por modos deslizantes y su metodología de diseño clásico compuesta de dos pasos ([Utkin, 1977](#)): 1) el diseño de una superficie de deslizamiento con las propiedades deseadas y 2) una ley de control que force las trayectorias del sistema a dicha superficie.

Un punto importante del segundo paso de diseño convencional por modos deslizantes, es que una vez alcanzada la superficie de deslizamiento, el sistema tiene un orden reducido de dimensión $n - p$, con n número de estados y p número de entradas.

El punto central es diseñar una superficie de deslizamiento, tal que la dinámica de orden reducido tenga ciertas propiedades de convergencia. Sin embargo, la relación entre el rendimiento en aplicaciones y el diseño de la superficie sigue siendo un problema abierto. Para el caso de una superficie no lineal es aún más complicado. Para ejemplificar esto, considere el sistema lineal invariante en el tiempo,

$$\dot{x} = Ax(t) + B(u(t) + d(t, x)), \quad (1.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, y las matrices A y B de dimensiones apropiadas. El vector d como una perturbación, se supone acotada por $\|p(t, x)\| < C_p$. Suponiendo el par (A, B) controlable y $\text{rango}(B) = p$, se lleva el sistema a su forma regular ([Luk'yanov and Utkin, 1981](#)),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2, \\ \dot{z}_2 &= A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + u + \tilde{p}(t, z_1, z_2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

con la transformación $T = \begin{bmatrix} B^\perp & B^+ \end{bmatrix}$, con B^\perp tal que $B^\perp B = 0$ y $B^+ = (B^T B)^{-1} B$. Entonces, se puede diseñar una superficie de grado relativo 1 de la forma

$$\sigma = z_2 + Kz_1 \quad (1.3)$$

tal que si $\sigma = 0$ implica que $\dot{z}_1 = -Kz_1$. Todo recae entonces en diseñar K tal que esta dinámica de deslizamiento tenga ciertas propiedades; sin embargo, no queda muy claro como diseñar una mejor K y como esta dinámica de deslizamiento afecta el sistema completo. Existen actualmente varios métodos para diseñar K . Un método y el más -directo- consiste en colocar los polos de la dinámica de deslizamiento, lo cual se puede realizar con la fórmula de Ackermann-Utkin ([Ackermann and Utkin, 1998](#)). Otra forma de diseñar dicha dinámica consiste en reducir el problema de diseño de K al de un controlador LQR, lo cual le da un enfoque óptimo al diseño ([Utkin, 1992](#)), pero existe, de igual manera, el dilema en la elección de la matriz Q .

Esta metodología está bien definida para el caso de sistemas lineales; sin embargo, en el caso no lineal, el problema de diseño de una superficie resulta más complejo. Una práctica común es llevar al sistema a su forma de controlador no lineal, aplicar linealización por realimentación de estados ([Isidori, 1995](#)) y después diseñar la superficie como se mencionó antes. Por otro lado, las transformaciones en los casos no lineales resultan bastantes complicadas. En el caso de linealización exacta debe existir una salida de grado relativo n , lo cual no siempre ocurre en sistemas reales, un ejemplo de ello es el carro péndulo. En el caso de linealización parcial o linealización entrada-salida, es necesario resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para la forma regular no lineal, lo cual puede ser una tarea complicada.

Una de las grandes ventajas del rediseño basado en funciones de Lyapunov, es que proporciona una superficie de deslizamiento asociada a un comportamiento nominal sin necesidad de diseñar la superficie. Si se ve el problema de rediseño desde el punto de vista de modos deslizantes, se puede utilizar la variable de conmutación como una variable de deslizamiento, tal que si se iguala a cero se obtiene una superficie con las propiedades del sistema y control nominal. Además, no es necesaria ninguna transformación del sistema, ni diseño de la superficie, lo que reduce la complejidad de la metodología de control.

1.2. Modos deslizantes continuos de orden superior

Es bien sabido que a pesar de las propiedades del control por modos deslizantes de primer orden, la discontinuidad en la ley de control genera el efecto de *chattering*, oscilaciones de alta frecuencia no deseadas en los estados y en la salida (Utkin, 1992; Boiko, 2005). De ahí nace la teoría de modos deslizantes continuos de alto orden propuestos por Levant (1993), como una alternativa ante los diseños discontinuos de primer orden. Este enfoque de modos deslizantes permite una atenuación considerable en el efecto de *chattering* al producir una señal de control continua, así como otras ventajas que residen en la precisión.

1.2.1. Algoritmo Super-twisting generalizado

Uno de los algoritmos más representativos de los modos deslizantes continuos de orden superior es el llamado algoritmo super-twisting (STA, por sus siglas en inglés) (Levant, 1998). Éste fue propuesto como una alternativa ante el control de primer orden discontinuo para sistemas de grado relativo 1. Consiste en una extensión dinámica, tal que la discontinuidad reside en el integrador del algoritmo con el fin de producir una señal continua al integrar dicha discontinuidad. Por su parte, provee compensación exacta de perturbaciones cuya derivada esté acotada, así como convergencia teóricamente exacta de la salida y su derivada (definido como modo deslizante de segundo orden). Las propiedades de dicho algoritmo se han analizado ampliamente durante los últimos años (Boiko, 2005; Utkin, 2016; Ventura and Fridman, 2019).

A pesar de que se probó la convergencia del STA con argumentos geométricos por parte de Levant (1993), no fue sino hasta Moreno and Osorio (2012) que se propone una función de Lyapunov para la prueba de estabilidad; sin embargo, dicha función de

Lyapunov no incluía las ganancias que propone [Levant \(1998\)](#). Recientemente, [Seeber and Horn \(2018\)](#) presentan condiciones necesarias y suficientes para la convergencia del STA, las cuales incluyen las ganancias de Levant.

Las extensiones al caso MIMO son presentadas en [Nagesh and Edwards \(2014\)](#) y más recientemente [Lopez-Caamal and Moreno \(2018\)](#).

1.2.2. Algoritmos Lipschitz por modos deslizantes

Como desventaja, el STA contiene términos fraccionarios proporcionales en su estructura de realimentación, los cuales causan de igual forma *chattering*, ya que conforme se acercan a cero, su pendiente tiende a infinito.

De hecho, en [Utkin \(2016\)](#) se presenta, un Ejemplo para el cual la amplitud de *chattering* por parte del STA es mayor que el causado por el control por modos deslizantes de primer orden. Por ello, la extensión inmediata para tratar de reducir el efecto de *chattering* es utilizar leyes de control por modos deslizantes que tengan pendiente finita en el origen. Dichos controladores se introducen en [Levant \(1993\)](#); [Bartolini et al. \(1998\)](#); [Bartolini et al. \(2003\)](#), y son llamados algoritmos Lipschitz por modos deslizantes.

Éstos se pueden diseñar con la integral de un algoritmo discontinuo de segundo orden, ya sea el algoritmo Sub-óptimo ([Bartolini et al., 1998](#)), terminal ([Zhihong et al., 1994](#)), Quasi-continuo ([Levant, 2005](#)) o el clásico Twisting ([Levant, 1993](#)), el cual es el utilizado como base en este trabajo.

Una detalle importante de este enfoque, reside en que para la implementación de dicho control es necesario el conocimiento de la derivada temporal de la variable de deslizamiento, lo que puede llevar a la confusión de que si esto es calculado y el coeficiente de control es conocido, entonces se puede conocer también la perturbación y por lo tanto compensarla directamente. Para ilustrar lo anterior, considere

$$\dot{x} = u + p(t)$$

donde todas las variables son funciones escalares. Si la derivada de x es conocida, entonces podemos plantear que la perturbación es $p(t) = \dot{x} - u$, y así compensarla, pero al sustituirla, se llega a la redundancia $\dot{x} = \dot{x}$, lo cual hace que de igual forma sea un problema abierto utilizar algoritmos Lipschitz por modos deslizantes con la promesa de reducir el *chattering*. En el capítulo 5 se presenta la generalización del algoritmo Twisting integrado más un controlador PI para el caso multivariable, cuando se conoce el coeficiente de control del sistema. Los detalles de la prueba de convergencia del algoritmo se presentan en el capítulo 5.

1.3. Estrategias de adaptación en modos deslizantes y rediseño basado en funciones de Lyapunov

En la práctica, el conocimiento de las cotas de la perturbación y diseño de ganancias es un problema importante. Por lo general, uno tiene un valor sobre estimado de la perturbación, lo que lleva a un aumento en la magnitud del *chattering*, así como un mayor consumo de energía lo cual es indeseable en aplicaciones.

Por otro lado, las ganancias adaptables proveen una alternativa ante el desconocimiento de la cota de la perturbación, cambiando dinámicamente el valor de las ganancias para lograr y mantener la estabilidad del sistema.

Primeramente, para el caso de rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico, [Corless and Leitmann \(1983\)](#) proponen una metodología de adaptación para el caso de sistemas inciertos basada en el conocimiento de la estructura de la perturbación. Dicho enfoque se basa en hacer un modelo de referencia de dichas perturbaciones y adaptar los parámetros via extensiones dinámicas. La desventaja es entonces la necesidad de conocer la estructura de la perturbación.

Por su parte, las metodologías de adaptación en la literatura de modos deslizantes se pueden resumir en las cuatro direcciones siguientes ([Shtessel et al., 2016](#)): 1) el uso de valores filtrados del control discontinuo, 2) ganancia monótonamente creciente, 3) ganancia creciente y decreciente, y 4) la utilización de funciones barrera.

En el caso de los tres primeros enfoques, se pueden mencionar algunas desventajas de cada uno. En el caso del uso de valores filtrados ([Oliveira et al., 2016](#); [Edwards and Shtessel, 2016](#)), se necesita conocer la cota superior de la velocidad de la perturbación. De ser conocida, es posible utilizar modos deslizantes continuos ([Moreno, 2018](#)), sin necesidad de una adaptación. Por su parte, el hecho de crecer la ganancia monótonamente ([Negrete-Chávez and Moreno, 2016](#); [Shtessel et al., 2012](#)), incrementa el efecto de *Chattering*, además no se puede asegurar el modo deslizante si la perturbación continúa creciendo. Para las adaptaciones que crecen y decrecen ([Plestan et al., 2010](#); [Shtessel et al., 2012](#)) sólo se logra acotamiento final de las trayectorias a una vecindad que no puede ser previamente definida, lo que también resulta en una desventaja clara.

1.3.1. Enfoque basado en funciones barrera

Por otro lado, una función barrera se puede definir como una función estrictamente creciente en un conjunto, la cual contiene un solo mínimo global en cero. La definición

formal se dará en el capítulo 6. En el caso de este tipo de funciones como adaptación, se resolverán dos puntos importantes en el caso de ganancias adaptables:

- La ganancia sigue variaciones de la perturbación sin ser sobrestimada.
- La vecindad para la cual es llevada la variable de deslizamiento es predefinida con anterioridad.

Primeramente, la ganancia se incrementa hasta que la variable de deslizamiento llega a una vecindad de cero $\epsilon/2$, con ϵ previamente definida. Después, la ganancia definida por una función barrera asegura que la solución nunca saldrá de dicho dominio pre-escrito del origen. Más aún, la ganancia decrece prácticamente al valor de la norma de la perturbación conforme el sistema decrece hacia el origen ([Obeid et al., 2018](#)).

1.4. Alcance

De esta manera, el problema planteado por este trabajo es resolver el rediseño basado en funciones de Lyapunov desde el punto de vista de modos deslizantes para sistemas con perturbaciones acopladas al canal de control. Así se plantea el problema de utilizar algoritmos que generen una señal de control continua y, a la vez, recuperen exactamente el comportamiento nominal en el sistema real, considerando como comportamiento nominal al comportamiento del sistema con la ley de control previamente diseñada y en ausencia de perturbaciones.

Además, también se propone una metodología de adaptación de ganancias basándose en funciones barrera para el caso donde la frontera de la perturbación es desconocida. Es importante mencionar que a pesar que en [Obeid et al. \(2018\)](#) se menciona la metodología de función barrera, en este trabajo se realiza una extensión al caso multivariable. Por su parte, esta metodología también produce una señal de control continua, y a pesar de que no se logra la convergencia exacta, el dominio ϵ puede ser elegido por el diseñador.

Con ello se espera obtener una metodología de diseño de superficies de deslizamiento con propiedades deseadas basada en el rediseño basado en funciones de Lyapunov, para así implementar controladores por modos deslizantes modernos, que generen una señal de control continua.

1.5. Objetivos

Al utilizar el conocimiento de una ley de control y función de Lyapunov nominal, se resuelve el problema de diseño de superficies de deslizamiento utilizando el rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico.

1.5.1. Objetivos específicos

1. Resolver el problema de diseño de superficies de deslizamiento utilizando rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico.
2. Implementar el Algoritmo super-twisting, generando una señal de control continua al rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes,
3. Implementar Algoritmos de control Lipschitz por modos deslizantes, aminorando el efecto de *chattering*, en el problema de rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes,
4. Obtener soluciones adaptables para el problema de rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes, basándose en funciones barrera,
5. Aplicación de rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes en sistemas mecánicos completamente actuados.

1.6. Metodología

- Plantear el problema de diseño de superficies de deslizamiento utilizando el rediseño basado en funciones de Lyapunov; siendo así, se diseñará una superficie de deslizamiento basado en el conocimiento de un control nominal y su función de Lyapunov en lazo cerrado, para forzar las trayectorias del sistema a dicha superficie.
- Implementar el Algoritmo Super-twisting en el problema de rediseño basado en funciones de Lyapunov, compensando exactamente perturbaciones con derivada acotada y generando una señal de control continua.
- Implementar Algoritmos Lipschitz por modos deslizantes en el problema de rediseño basado en funciones de Lyapunov, compensando exactamente perturbaciones con derivada acotada y generando una señal de control Lipschitz

continua, disminuyendo el efecto de *chattering* y aumentando el rango de frecuencias donde existe rechazo de perturbación.

- Realizar adaptación de las ganancias en dos etapas: 1) adaptación a la frontera de la perturbación y 2) adaptación para luego seguir la frontera de la perturbación en una vecindad del origen de la superficie de deslizamiento.
- Aplicar la estrategia de rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes en sistemas mecánicos completamente actuados, con el fin de obtener una comparación entre los algoritmos antes propuestos.

1.7. Organización de la tesis

El contenido de este trabajo se divide en siete capítulos. El segundo contiene material preliminar con el fin de mencionar conceptos importantes de la teoría de modos deslizantes de orden superior. En el capítulo tercero, se da un repaso del rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico. De igual manera, en éste se plantea el problema a resolver y se da el punto central para la resolución del mismo que es el rediseño basado en funciones de Lyapunov basado en modos deslizantes.

En el cuarto capítulo se presenta el rediseño basado en funciones de Lyapunov basado en el algoritmo super-twisting, el cual genera una señal de control continua. Los detalles sobre la estabilidad de la superficie de deslizamiento y parte de la idea de un rediseño basado en funciones de Lyapunov continuo se explican a detalle en ese capítulo.

En el quinto capítulo se presenta otra alternativa a rediseño por modos deslizantes continuos, el cual se basa en un algoritmo Lipschitz por modos deslizantes. Dicho trabajo utiliza como base el controlador Lipschitz propuesto en [Martinez-Fuentes et al. \(2018\)](#) pero se extiende al caso multivariable.

El sexto capítulo explica la idea de rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes con ganancias adaptables, basado en funciones barrera.

Cabe mencionar que al final de cada capítulo se trata el mismo caso de estudio con el fin de comparar cada uno de los resultados obtenidos. Dicho ejemplo consta de un robot de dos grados de libertad para hacer tareas de estabilización y seguimiento.

Al final, en el séptimo capítulo, se presentan conclusiones y trabajo a futuro.

Notación

A lo largo de este trabajo, se definen las siguientes notaciones. Sea \mathbb{R}_+ el conjunto de todos los números reales positivos. Para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ se definirá como

1.7. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

la norma euclidiana de x . \mathbb{I} definirá la matriz identidad de dimensiones apropiadas. Se definirá $\lambda_{\min}(P)$ (respectivamente $\lambda_{\max}(P)$) al valor propio mínimo (máximo) de la matriz P . Se nombrará \star a la parte simétrica de cualquier matriz.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos preliminares que serán necesarios para los capítulos posteriores, estabilidad en tiempo finito y homogeneidad ponderada, además de la introducción del Algoritmo Super-Twisting Generalizado de ganancias Variables (VGSTA).

2.1. Clase de sistemas a considerar

Primeramente, con el fin de diferenciar que llamaremos perturbación a lo largo de este trabajo, considere el sistema dinámico con entrada

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (2.1)$$

dónde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada de control. Suponga que las funciones f y B son conocidas. Sin embargo, en la realidad existen errores de modelado, incertidumbres en parámetros e incluso cambio de los mismos por envejecimiento o cambios en la planta. Dicho así, considere una función extra $\tilde{f}(x)$ y $\tilde{B}(x)$, las cuales son desconocidas, sumando y restando

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x) + [\tilde{f}(x) - f(x)] , \\ \tilde{B}(x) &= B(x) + [\tilde{B}(x) - B(x)] \end{aligned}$$

podemos reescribir el sistema físico real como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + [\tilde{f}(x) - f(x)] + [B(x) + (B(x) - \tilde{B}(x))] u + p(t) \\ &= f(x) + \Delta_f(x) + B(x) [(\mathbb{I} - \Delta_B(x))u + \delta(t, x)] \end{aligned}$$

donde $p(t)$ es una señal externa que entra al sistema, siendo el aniquilador por la izquierda $B^\perp B = 0$, entonces $\Delta_f = B^\perp (B^\perp B^\perp)^{-1} (\tilde{f} - f + p)$ es la incertidumbre ortogonal a la matriz de control B , la incertidumbre en el coeficiente de control está dada por $\Delta_B = B(x) \tilde{B}(x)$ y $\delta(t, x) = (B^T B)^{-1} (\tilde{f} - f + p)$ define las perturbaciones acopladas al canal de control. De la metodología convencional de modos deslizantes, se puede definir una salida $s(x) = Cx$ como superficie de deslizamiento, con una dinámica

$$\begin{aligned} \dot{s} &= C\dot{x} = C \{f(x) + \Delta_f(x) + B(x) [(\mathbb{I} - \Delta_B(x))u + \delta(t, x)]\} \\ &= CB(x) \{[\mathbb{I} - \Delta_B(x)]u + \delta(t, x) + (CB(x))^{-1}C [f(x) + \Delta_f(x)]\} \end{aligned}$$

Con CB no singular. Cabe notar que a lo largo de este trabajo, se considera solamente el caso cuando $\Delta_f = \Delta_B = 0$.

2.2. Homogeneidad ponderada

La homogeneidad es una propiedad de escalamiento en funciones y ecuaciones diferenciales. Una generalización en dicho escalamiento se conoce como homogeneidad ponderada. Para ello, tome en cuenta las siguientes definiciones tomadas de [Bacciotti and Rosier \(2005\)](#).

Definición 1 Sea Λ_ϵ^r una matriz diagonal dada por $\Lambda_\epsilon^r = \text{diag}(\epsilon^{r_1}, \dots, \epsilon^{r_n})$, donde $r = [r_1, \dots, r_n]^T$, $r_i \in \mathbb{R}_+$. Los componentes de r son llamados pesos de homogeneidad de las coordenadas. Entonces:

- (I) Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ (con pesos r) si $f(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^m f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \epsilon \in \mathbb{R}_+$.
- (II) El campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$ es homogéneo de grado $k \in \mathbb{R}$ (con pesos r) si $f_i(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x)$, con $i = 1, 2, \dots, n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.
- (III) El sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ se dice homogéneo de grado k si f es homogéneo de grado k .

2.3. Estabilidad en tiempo finito

Considere el sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.2}$$

con $f(0) = 0$. Sea $\Phi(t, x)$ el flujo solución de (2.2) en el conjunto abierto $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Entonces tome la siguiente definición presentada en [Bhat and Bernstein \(2005\)](#).

Definición 2 *Considere el punto de equilibrio $f(0) = 0$ del sistema (2.2), se dice que es estable en tiempo finito si es estable, y existe una vecindad abierta U de $f(0) = 0$ y una función $T : U \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ (llamada función de asentamiento) tal que para cada $x \in U \setminus \{0\}$, $\Phi(t, x) \in \setminus \{0\}$ for all $t \in [0, T(x)]$ y $\lim_{t \rightarrow T(x)} \Phi(t, x) = 0$.*

Teorema 1 ([Bhat and Bernstein, 2005](#)) *El origen del sistema (2.2) es estable en tiempo finito y la función de asentamiento es continua en $f = 0$ si y sólo si existen números reales $c_f > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, y una función positiva definida V definida en una vecindad abierta de cero Ω , tal que*

$$\forall x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad \dot{V}(x) \leq c_f V^\alpha(x). \quad (2.3)$$

En este caso, la función de asentamiento $T(x)$ de hecho es continua en una vecindad del cero y satisface (al menos para $\|x\|$ suficientemente pequeña)

$$T(x) \leq \frac{1}{c_f(1 - \alpha)} V^{1-\alpha}(x(0)). \quad (2.4)$$

Otra forma de probar estabilidad en tiempo finito de un punto de equilibrio, consiste en argumentos de homogeneidad. Para ello tome los siguientes resultados de [Bhat and Bernstein \(2005\)](#).

Teorema 2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial homogéneo de grado $k < 0$. Si f es localmente atractivo, entonces f es globalmente estable en tiempo finito.*

De este Teorema se puede concluir el siguiente Corolario, el cual será de utilidad *a posteriori*.

Corolario 1 *Sean g_1, \dots, g_p campos vectoriales homogéneos con grados $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ y denote $f(x) = g_1 + \dots + g_p$. Suponga además que $f(0) = 0$. Si el origen es global y asintóticamente estable bajo g_1 entonces el origen es local y asintóticamente estable sobre f . Más aún, si el origen es estable en tiempo finito bajo g_1 entonces el origen es estable en tiempo finito bajo f .*

2.4. Algoritmo Super-twisting generalizado de ganancias variables

Debido a que será utilizado el algoritmo STA generalizado de ganancias variables (VGSTA), se presenta el algoritmo presentado en [Gonzalez et al. \(2012\)](#) y luego extendido al caso multivariable por [Vidal et al. \(2017\)](#). Para ello, considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}w, \\ \dot{w} &= u + \tilde{\delta}(t, \eta, w),\end{aligned}\tag{2.5}$$

y la ley de control

$$u = -k_1(t, \eta, w)\phi(w) - \int_0^t k_2(t, \eta, w)\phi(w)d\tau.\tag{2.6}$$

y las funciones

$$\begin{aligned}\phi_1(w) &= \frac{w}{\|w\|^{1/2}} + k_3w \\ \phi_2(w) &= \frac{w}{2\|w\|} + \frac{3k_3}{2} \frac{w}{\|w\|^{1/2}} + k_3^2w,\end{aligned}$$

para una ganancia extra $k_3 > 0$. Considere que la perturbación puede ser separada en dos partes, $\tilde{\delta} = d_1(t, \eta, w) + d_2(t, \eta)$ tal que podemos reescribir el sistema (2.5) en lazo cerrado con (2.6) de la forma siguiente

$$\dot{w} = z - k_1(t, x)\phi_1(w) + d_1(t, \eta, w),\tag{2.7}$$

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}d_2(t, \eta) - k_2(t, x)\phi_2(w).\tag{2.8}$$

Hipótesis 1 Considere los términos de perturbación d_1 y d_2 del sistema (2.7)-(2.8). Suponga que están acotados de la forma

$$\begin{aligned}\|d_1(t, w, \eta)\| &\leq \rho_1(t, w, \eta)\|\phi_1(w)\|, \\ \left\| \frac{d}{dt}d_2(t, \eta) \right\| &\leq \rho_2(t, w, \eta)\|\phi_2(w)\|\end{aligned}$$

donde las funciones $\rho_i \geq 0$ para $i = 1, 2$ son conocidas y continuas.

Antes de pasar a enunciar el Teorema principal relacionado a la estabilidad de (2.7)-(2.8), es necesario reconocer algunas propiedades del algoritmo. De igual manera que en el caso escalar, la función $\phi_2(w) = \phi_1'(w)\phi_1(w)$, esto se puede verificar fácilmente tomando la matriz jacobiana,

$$\frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} = \frac{1}{\|w\|^{1/2}} \left[\mathbb{I} - \frac{ww^T}{2\|w\|^2} \right] + k_3\mathbb{I}$$

para toda $w \neq 0$. Otro punto importante es que el término $\phi_1'(w) = (1/(2|w|^{1/2}) + k_3)$ es siempre positivo. Para el caso multivariable éste sigue siendo el caso, considere la forma cuadrática,

$$\mathbf{v}^T \frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} \mathbf{v} = \frac{1}{\|w\|^{1/2}} \left[\|w\|^2 - \frac{(\mathbf{v}^T w)(w^T \mathbf{v})}{2\|w\|^2} \right] + k_3\|\mathbf{v}\|^2,$$

en donde podemos acotar con la desigualdad de Cauchy-Schwarz $(\mathbf{v}^T w)(w^T \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{v}\|^2\|w\|^2$. Por lo tanto, se cumple que

$$\mathbf{v}^T \frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} \mathbf{v} \geq \lambda_{\min} \left[\frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} \right] \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$$

donde $\lambda_{\min} \left[\frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} \right] = \frac{1}{2\|w\|^{1/2}} + k_3$. Como propiedad final pero no menos interesante, se tiene que el valor máximo de dicha forma cuadrática ocurre cuando \mathbf{v} es un vector propio de la matrix jacobiana de ϕ_1 , eso es $\mathbf{v}^T \frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} = 0$, en este caso, se tiene que

$$\left\| \frac{\partial\phi_1(w)}{\partial w} \right\| = \left(\frac{1}{\|w\|^{1/2}} + k_3 \right) \quad \forall w \neq 0$$

Considere ahora el Teorema mencionado en [Gonzalez et al. \(2012\)](#).

Teorema 3 *Considere el sistema (2.7)-(2.8), con la Hipótesis 1 satisfecha. Entonces, para cualquier condición inicial $(\eta^T(0), w^T(0), z^T(0))$, la superficie $w = 0$ será alcanzada en tiempo finito si las ganancias se seleccionan*

$$\begin{aligned} k_1(t, x) &= c_1 + \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\rho_1 + \rho_2]^2 + 2\epsilon\rho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \rho_1] (\theta + 4\epsilon^2) \right\}, \\ k_2(t, x) &= \theta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

con $k_3 > 0$, $\epsilon > 0$, $\theta > 0$, $c_1 > 0$. Entonces, se puede estimar la función de asentamiento como

$$t_s = \frac{2}{\mu_2} \ln \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} V_s(w(0), z(0))^{1/2} + 1 \right).$$

donde $\zeta^T = [\phi_1(w), z]$.

La prueba de este resultado se presenta en el apéndice [A](#).

2.4. ALGORITMO SUPER-TWISTING GENERALIZADO DE GANANCIAS VARIABLES

Capítulo 3

rediseño basado en funciones de Lyapunov vía en modos deslizantes

3.1. rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico

Considere el sistema nominal no autónomo

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (3.1)$$

con la ley de control previamente diseñada $u = -\psi(x)$ y que conocemos la función de Lyapunov nominal $V(x)$, tal que satisface la siguiente Hipótesis.

Hipótesis 2 *Considere el sistema nominal (3.1), existe entonces un control $u = -\psi(x)$ y su respectiva función de Lyapunov $V(x)$ tal que se satisface*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) - B(x)\psi(x)] \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad (3.3)$$

donde las funciones α_i para $i = 1, 2, 3$ son funciones de clase \mathcal{K} .

Entonces, dicha ley de control estabiliza asintóticamente el origen del sistema nominal. A pesar de ello, en la realidad existen perturbaciones en el modelo y parámetros del mismo, por lo tanto considere el sistema perturbado

$$\dot{x} = f(x) + B(x) [u + \delta(t, x)] , \quad (3.4)$$

y el control robustificante $u = -\psi + v$. Con ello, la derivada de $V(x)$ resulta en

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + \frac{\partial V}{\partial x} B(x) [v + \delta(t, x)], \quad (3.5)$$

defina la variable $w^T = \frac{\partial V}{\partial x} B(x)$ y suponga las siguientes cotas,

$$\|\delta(t, x)\| \leq \eta(t, x)$$

Seleccionando la ley de control tal como [Gutman \(1979\)](#), [Leitmann \(1979\)](#),

$$v = -\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|}.$$

Entonces la derivada de la función de Lyapunov nominal

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + w^T \left[-\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} + \delta(t, x) \right] \quad (3.6)$$

$$\leq -\alpha_3(\|x\|) - \|w\| [\rho(t, x) - \eta(t, x)] \quad (3.7)$$

Eligiendo entonces $\rho(t, x) = \eta(t, x)$ recuperamos la derivada de la función nominal $\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|)$. A pesar de ello, es imposible conocer el valor de η exactamente, lo cual resulta por lo general en la sobre estimación de la ganancia ρ .

Por su parte, la implementación de una ley de control discontinua induce el problema de *Chattering*, vibraciones de alta frecuencia que pueden dañar actuadores y plantas. Con el fin de evitar la discontinuidad del control, se sustituye el control discontinuo por uno continuo en [Barmish et al. \(1983\)](#) y [Ryan and Corless \(1984\)](#), aunque con ello sólo es posible obtener estabilidad práctica a una vecindad arbitrariamente pequeña.

3.1.1. El rediseño basado en funciones de Lyapunov desde el punto de vista de modos deslizantes

Una pregunta natural que surge al analizar las propiedades del rediseño basado en funciones de Lyapunov, como lo son insensibilidad ante las perturbaciones y un control discontinuo es, si tiene alguna relación con el control por modos deslizantes. Para ello, es necesario ver si la variable de conmutación es una superficie de deslizamiento. Recuerde la derivada de la función de Lyapunov anterior con el sistema perturbado (3.4),

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + w^T \left[-\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} + \delta(t, x) \right] \quad (3.8)$$

$$\leq -\alpha_3(\|x\|) - \|w\| [\rho(t, x) - \eta(t, x)] \quad (3.9)$$

es posible ver fácilmente que la elección de la ganancia $\rho = \eta$, como se mencionó antes. Sin embargo, dicha cota por lo general no se conoce con exactitud, por lo cual es común sobre estimar el valor de la cota de la perturbación. Por ello, seleccione la ganancia $\rho(t, x) = \eta(t, x) + s_\rho$, donde s_ρ resulta ser el sobre estimado de la ganancia.

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) - \|w\|s_\rho, \quad (3.10)$$

Calculando la dinámica de la variable de deslizamiento resulta en

$$\dot{w} = L_{\bar{f}(x)}w(x) + L_{B(x)}w(x) \left[-\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} + \delta(t, x) \right],$$

donde $\bar{f}(x) = f(x) + B(x)\psi(x)$. Proponiendo la candidata a función de Lyapunov $V_2 = (1/2)w^T w$ con respecto al tiempo resulta en

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = w^T \dot{w} &= w^T \left\{ L_{\bar{f}(x)}w(x) + L_{B(x)}w(x) \left[-\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} + \delta(t, x) \right] \right\}, \\ &\leq -\|w\| \left[\|L_B w\|s_\rho - \|L_{\bar{f}} w\| \right]. \end{aligned}$$

Esto implica que existirá modo deslizante siempre y cuando $\|L_B w\|s_\rho > \|L_{\bar{f}} w\|$, lo cual sucederá eventualmente ya que $L_{\bar{f}} w$ es una función de x y el estado es decreciente, lo que se puede ver de (3.10). Por lo tanto, existe modo deslizante con un dominio de deslizamiento tan grande como la sobre estimación de ganancia s_ρ por el coeficiente $L_B w$.

3.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes

Del análisis anterior es posible ver que podemos convertir el rediseño de Lyapunov en un problema de diseño de control por modos deslizantes, volviendo la variable de conmutación w en una variable de deslizamiento, tal que forcemos las trayectorias de $w = 0$ en tiempo finito y sin importar las perturbaciones. Considere de nuevo la dinámica de w como,

$$\dot{w} = L_{\bar{f}(x)}w(x) + L_{B(x)}w(x) [v + \delta(t, x)], \quad (3.11)$$

y centrando el problema en el diseño de una ley de control v tal que se puedan llevar las trayectorias de (3.11) a cero en tiempo finito sin importar el valor de $\delta(t, x)$. Para

3.2. REDISEÑO BASADO EN FUNCIONES DE LYAPUNOV POR MODOS DESLIZANTES

ello, se propone el control,

$$v = -(L_B w)^{-1} \left[L_{\bar{f}} w + \rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} \right], \quad (3.12)$$

el lazo cerrado de (3.11) queda entonces

$$\dot{w} = -\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} + L_B w \cdot \delta(t, x).$$

Tomando la candidata a función de Lyapunov $V_2 = (1/2)w^T w$, su derivada temporal se da como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= w^T \left[-\rho(t, x) \frac{w}{\|w\|} + L_B w \cdot \delta(t, x) \right], \\ &\leq -\|w\| [\rho(t, x) - \eta(t, x) \|L_B w\|] \end{aligned}$$

Recordando la cota de $\|\delta\| \leq \eta$, es fácilmente visible que la condición sobre la ganancia ρ es la siguiente

$$\rho(t, x) > \eta(t, x) \|L_B w\| \quad (3.13)$$

lo que implica que la derivada de la función V_2 puede ser acotada

$$\dot{V}_2 \leq -\rho(t, x) \|w\| \quad (3.14)$$

dado que $\sqrt{V_2} = \sqrt{(1/2)w^T w} \leq \|w\|$, eso implica que $\dot{V}_2 \leq -\rho(t, x) V_2^{1/2}$, lo que implica la convergencia en tiempo finito de la variable w al origen, sin importar la perturbación δ . Siendo así, se cumple que la derivada de la función de Lyapunov nominal $\dot{V} \leq -\alpha_3(\|w\|)$ después de un tiempo finito $t_f \leq 2\sqrt{V(0)}/\rho$.

Esto nos permite ver que de una manera relativamente sencilla, se puede recuperar el comportamiento nominal del sistema si se hace de w sea una variable de deslizamiento, y de igual forma, se puede forzar al cero en tiempo finito. Una desventaja de esto es que la señal de control es discontinua en el origen, lo cual genera el efecto de *chattering*. A lo largo de este trabajo se propondrán soluciones ante este problema, utilizando como idea principal el hacer $w = 0$ una superficie de deslizamiento.

3.3. Ejemplos de la superficie w y rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes

En esta sección se presentan algunos ejemplos de cómo se puede realizar el rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes en algunos casos particulares, para ello se tomará el término u_{smc} como un control por modos deslizantes, por ejemplo

$$u_{smc} = -k(t, x) \frac{w}{\|w\|} \quad (3.15)$$

3.3.1. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes para sistemas LIT

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + B(u + \delta(t, x)), \quad (3.16)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ y A , B de dimensiones apropiadas. Suponga que $u = -Kx$ ha sido diseñada para el sistema nominal tal que

$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (3.17)$$

$\bar{A} = A - BK$ es Hurwitz, entonces existe una función de Lyapunov cuadrática

$$V = x^T P x, \quad (3.18)$$

donde $P = P^T > 0$ se obtiene de la ecuación algebraica de Lyapunov $P\bar{A} + \bar{A}^T P = -Q$, para $Q = Q^T > 0$. Entonces la derivada de V para el sistema nominal está dada por

$$\dot{V} = -x^T Q x. \quad (3.19)$$

Defina la función lineal de los estados

$$w = 2B^T P x,$$

donde $w \in \mathbb{R}^p$. Entonces, la ecuación (3.5) está dada como

$$\dot{V} = -x^T Q x + w(v + \delta(t, x)).$$

3.3. EJEMPLOS DE LA SUPERFICIE W Y REDISEÑO BASADO EN FUNCIONES DE LYAPUNOV POR MODOS DESLIZANTES

Calculando la dinámica de w

$$\dot{w} = 2B^T P \bar{A}x + 2B^T PB(v + \delta(t, x)), \quad (3.20)$$

Note que el término $2B^T PB$ es siempre invertible, debido a la positividad de P y consecuentemente se cumple la Hipótesis 4. En este caso (6.7) tiene la forma

$$v = (2B^T PB)^{-1}(u_{smc} - 2B^T P \bar{A}x), \quad (3.21)$$

con lo cual se puede lograr la tarea de estabilizar el sistema (3.16) a pesar de las perturbaciones δ .

3.3.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes: un sistema no lineal perturbado

Considere el Ejemplo 14.8 de (Khalil, 2002, Ch. 14.3, p. 592)

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \quad \dot{x}_2 = u + \delta(t, x).$$

La ley de control por *backstepping* propuesta por Khalil (2002) para el sistema nominal tiene la forma

$$u_{nom} = -x_1 - (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2, \quad (3.22)$$

donde $z_2 = x_2 + x_1 + x_1^2$, y la función de Lyapunov $V_c = \frac{1}{2}(x_1^2 + z_2^2)$, con $\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2$, se demuestra la estabilidad asintótica del lazo cerrado nominal. Considere ahora el sistema incierto con ley de control $u = u_{nom} + v$. Entonces, la derivada de V_c a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado tiene la forma

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2 + z_2[v + \delta(t, x)].$$

De acuerdo a la Proposición 3, w se selecciona $w = z_2 = x_2 + x_1 + x_1^2$. Con ello, la dinámica de w se describe por

$$\dot{w} = u_{nom} + v + \delta(t, x) - (1 + 2x_1)\dot{x}_1. \quad (3.23)$$

Así entonces, se selecciona el control

$$v = -u_{nom} + (1 + 2x_1)\dot{x}_1 + u_{smc} \quad (3.24)$$

con lo que somos capaces de recuperar las propiedades nominales de estabilidad.

3.3.3. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes para sistemas mecánicos completamente actuados

Considere el sistema mecánico de n grados de libertad (Corless and Leitmann, 1990).

$$J(t, q)\ddot{q} = U(t, q, \dot{q}) + W(t, q, \dot{q})\hat{u} \quad (3.25)$$

con $q \in \mathbb{R}^n$, $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$, $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Donde $J(t, q)$ se asume simétrica y definida positiva, $W(t, q, \dot{q})$ es no singular y existen funciones $\hat{\beta}_i$ para $i = 1, 3$, tales que $\|U(t, q, \dot{q})\| \leq \hat{\beta}_0(t, q, \dot{q})$, $\lambda_{\max}[J(t, q)] \leq \hat{\beta}_1(t, q)$ y $\lambda_{\min}[J(t, q)] \geq \hat{\beta}_2(t, q)$. Para una trayectoria deseada $\bar{q} \in C^2$,

$$x = \begin{bmatrix} q(t) - \bar{q}(t) \\ \dot{q}(t) - \dot{\bar{q}}(t) \end{bmatrix}$$

Eligiendo una matriz no singular $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es posible definir una nueva entrada de control

$$\hat{u} = [T^T W(t, q, \dot{q})] u,$$

tal que se puede reescribir el sistema de la forma,

$$\dot{x} = Ax + B[h(t, x) + G(t, x)u]$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix},$$

$$h(t, x) = T^{-1}J^{-1}U - T^{-1}\ddot{\bar{q}},$$

$$G(t, x) = \tilde{J}^{-1}, \quad \tilde{J} = T^T J T.$$

Diseñe la ley de control $u = u_{nom}(t, x) + v(t, x)$,

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x) + B[h(t, x) + G(t, x)u],$$

con $\bar{f}(t, x) = Ax + BG(t, x)u_{nom}(t, x)$. El sistema nominal en lazo cerrado tiene la forma, $\dot{x} = Ax + BG(t, x)u_{nom}(t, x)$. Eligiendo cualquier matriz $Q^T = Q > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ y $\gamma(t, x) \in \mathbb{R}$ como escalares tal que,

$$\gamma(t, x) \geq \sigma \lambda_{\max}[\tilde{J}(t, x)], \quad \forall(t, x),$$

3.3. EJEMPLOS DE LA SUPERFICIE W Y REDISEÑO BASADO EN FUNCIONES DE LYAPUNOV POR MODOS DESLIZANTES

entonces, [Corless and Leitmann \(1990\)](#) proponen el control de la forma

$$u_{nom}(t, x) = -\gamma(t, x)B^T Px$$

donde $P = P^T > 0$ es la solución de la ecuación algebraica de Ricatti

$$PA + A^T P - \sigma P B B^T P + 2Q = 0.$$

Tomando $V = \frac{1}{2}x^T Px$ como función de Lyapunov del sistema nominal, \dot{V} puede ser acotada como $\dot{V} \leq -x^T Qx$.

Ahora definiendo $w = B^T Px$, su derivada temporal

$$\begin{aligned} \dot{w} &= B^T P \dot{x}, \\ &= B^T P [\bar{f}(t, x) + B [h(t, x) + G(t, x)u]], \\ &= B^T P \bar{f}(t, x) + B^T P B G(t, x)v(t, x) + \delta(t, x) \end{aligned}$$

con $\delta(t, x) = B^T P B h(t, x)$. Entonces se puede diseñar,

$$v(t, x) = - [B^T P B G(t, x)]^{-1} (B^T P \bar{f}(t, x) - u_{smc})$$

lo que deja la dinámica de w de la forma

$$\dot{w} = u_{smc} + \delta(t, x).$$

De esta forma fácilmente se puede aplicar la metodología de rediseño continua propuesta a un sistema mecánico completamente actuado.

Capítulo 4

Rediseño basado en funciones de Lyapunov vía Super-twisting

4.1. Planteamiento del problema

El objetivo de este capítulo es llegar a una *ley de control continua* que compense la perturbación en la derivada de la función de Lyapunov (3.5). Sustituyendo el control discontinuo (3.12) por uno continuo el efecto de chattering se atenúa por lo menos en presencia de actuadores rápidos (Ventura and Fridman, 2019).

4.2. Un rediseño continuo basado en funciones de Lyapunov

Es posible, como ya se mencionó, eliminar el efecto de la perturbación δ en (3.5) llevando la variable w a cero en tiempo finito. Para lograr esto utilizando control continuo, recuerde la dinámica de w

$$\dot{w} = L_{\bar{f}(x)}w(x) + L_{B(x)}w(x) (v + \delta(t, x)) . \quad (4.1)$$

Vamos entonces a alcanzar el propósito de este capítulo por medio del diseño de una ley de control basada en el algoritmo STA, tal que podamos forzar las trayectorias a un conjunto de modo deslizante de segundo orden $\dot{w} = w = 0$, produciendo una señal de control continua.

Como solución, considere el Super-twisting generalizado de ganancias variables

(VGSTA)(Gonzalez et al., 2012), (Vidal et al., 2017),

$$\begin{aligned} u_{st} &= -k_1(t, x)\phi_1(w) + \rho, \\ \dot{\rho} &= -k_2(t, x)\phi_2(w), \end{aligned} \quad (4.2)$$

con las funciones $\phi_1(w) = \frac{w}{\|w\|^{1/2}} + k_3w$ y $\phi_2(w) = \frac{w}{2\|w\|} + \frac{2k_3}{2} \frac{w}{\|w\|^{1/2}} + k_3^2w$. Note que $\phi_2 = \phi_1' \phi_1$, con $\phi_1' = \left[\frac{1}{\|w\|^{1/2}} \left(\mathbb{I} - \frac{ww^T}{2\|w\|} \right) + k_3\mathbb{I} \right]$.

Hipótesis 3 *Suponga que los términos de perturbación (3.11) pueden ser separados de la forma*

$$L_B w(x)\delta(t, x) = d_1(t, x) + \delta_z(t, x), \quad (4.3)$$

donde δ_z se elige tal que $B^\perp(x) \frac{\partial \delta_z}{\partial x} = 0$, siendo B^\perp un vector ortogonal a $B(x)$. Entonces, existen funciones $\rho_1(t, x) \geq 0$ y $\rho_2(t, x) \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|d_1(t, x)\| &\leq \rho_1(t, x)\|\phi_1(w)\| \\ \|d_2(t, x)\| &\leq \rho_2(t, x)\|\phi_2(w)\|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

con $d_2(t, x) = \frac{\partial \delta_z(t, x)}{\partial x} \bar{f}(x) + \frac{\partial \delta_z}{\partial t}$.

Observación 1 *La Hipótesis 3 es factible para una clase amplia de sistemas reales, véase el Ejemplo 3.*

Hipótesis 4 *El determinante de la matriz cuadrada $L_{B(x)}w(x)$ es acotado lejos de cero para toda x .*

Observación 2 *La Hipótesis 4 se satisface en el caso de que V es estrictamente convexa (i.e. $(\partial^2 V / \partial x^2) > 0$ para toda x) y $B(x)$ constante. Un caso particular es el caso lineal con función de Lyapunov cuadrática (Véase Ejemplo 1). Más aún, si (3.1) es un sistema pasivo y no degenerado en $x = 0$ con una función de almacenamiento $V \in C^2$, esta Hipótesis es al menos localmente $x = 0$ (Byrnes et al., 1991, Véase Proposición 4.5).*

Proposición 1 *Considere el sistema perturbado (3.4) y suponga se cumplen las suposiciones 3 y 4. Eligiendo el control v como*

$$v = - \left[L_{B(x)}w(x) \right]^{-1} \left(L_{\bar{f}(x)}w(x) - u_{st} \right) \quad (4.5)$$

con u_{st} como (4.2), y las funciones $k_1(t, x)$ y $k_2(t, x)$ de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} k_1(t, x) &= c_1 + \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\rho_1 + \rho_2]^2 + 2\epsilon\rho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \rho_1] (\theta + 4\epsilon^2) \right\}, \\ k_2(t, x) &= \theta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

con $k_3 > 0$, $\epsilon > 0$, $\theta > 0$, $c_1 > 0$.

Entonces las trayectorias de (3.4) alcanzan el conjunto $w = \dot{w} = 0$ en tiempo finito. Después de ello, (3.3) se satisface y por lo tanto (3.4) es asintóticamente estable.

4.2.1. Prueba de la Proposición 1

Primero, calculemos el valor de v (sin perturbación) que hace $\dot{w} = 0$, i.e.

$$\begin{aligned} 0 &= L_{\bar{f}(x)}w(x) + L_{B(x)}w(x)v, \\ \implies v &= - [L_Bw(x)]^{-1} L_{\bar{f}}w(x) \\ &= - [L_B^2V(x)]^{-1} L_{\bar{f}}L_BV(x), \end{aligned} \tag{4.7}$$

con este control y de igual forma el STA, la dinámica de w resulta en

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -k_1(t, x) \phi_1(w) + \rho + L_Bw(x)\delta(t, x) \\ \dot{\rho} &= -k_2(t, x) \phi_2(w). \end{aligned}$$

Nótese que los puntos donde $w = 0$, i.e. el conjunto

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w(x) = L_{B(x)}V(x) = 0\}, \tag{4.8}$$

es un subespacio de dimension $(n - p)$. Descomponiendo $L_Bw\delta(t, x)$ en dos términos

$$L_Bw(x)\delta(t, x) = d_1(t, x) + \delta_z(t, x)$$

tal que $d_1(t, x)$ se desvanece en el subespacio W (i.e. cuando $w = 0$) y $\frac{\partial \delta_z}{\partial x}B(x) = 0$, tal que son acotadas

$$\begin{aligned} \|d_1(t, x)\| &\leq \rho_1(t, x) \|\phi_1(w)\| \\ \|d_2(t, x)\| &\leq \rho_2(t, x) \|\phi_2(w)\|. \end{aligned}$$

con $d_2 = \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \bar{f}(x)$. Introduzca el cambio de variables $z = \rho + \delta_z$, la dinámica de la planta y de la variable w se vuelve

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) + B(x) [L_Bw(x)]^{-1} (-k_1(t, x) \phi_1(w) + z + d_1(t, x)), \\ \dot{w} &= -k_1(t, x) \phi_1(w) + z + d_1(t, x) \\ \dot{z} &= -k_2(t, x) \phi_2(w) + d_2(t, x), \end{aligned}$$

4.2. UN REDISEÑO CONTINUO BASADO EN FUNCIONES DE LYAPUNOV

o de otra forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x) + B(x) [L_B w(x)]^{-1} \dot{w}, \\ \dot{w} &= -k_1(t, x) \phi_1(w) + z + d_1(t, x) \\ \dot{z} &= -k_2(t, x) \phi_2(w) + d_2(t, x),\end{aligned}$$

tomando $F(x) = \bar{f}(x) - B(x) [L_B^2 V(x)]^{-1} L_{\bar{f}} L_B V(x)$. La convergencia de x a cero se puede demostrar en dos pasos:

1. Primero demostramos que $(w, z) \rightarrow 0$ a pesar de las perturbaciones/perturbaciones. Esto implica que $\dot{w} \rightarrow 0$ en tiempo finito. Para este propósito considere la función de Lyapunov $V_s(w, z)$

$$V_s(w, z) = \zeta^T P_s \zeta, \quad P = \begin{bmatrix} (\theta + 4\varepsilon^2) \mathbb{I} & -2\varepsilon \mathbb{I} \\ -2\varepsilon \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

donde $\zeta^T = [\phi_1^T(w) \quad z^T]$. Entonces, dicha prueba puede hacerse de manera similar a [Vidal et al. \(2017\)](#).

2. La dinámica reducida, i.e. el comportamiento después de que la superficie deslizante W (eso es cuando $w = \dot{w} = 0$) es alcanzada, se describe por la ecuación diferencial y la función

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x), \\ w &= L_B V(x) = 0.\end{aligned}$$

Se demuestra que el sistema dinámico tiene un punto de equilibrio estable en $x = 0$ (dentro del sub espacio W). Esto se hace en dos pasos:

- a) Se demuestra que el sub espacio W es invariante para la dinámica de lazo cerrado W con el vector de velocidades también en W . Esto también es el caso debido a que

$$\begin{aligned}x \in W &\Leftrightarrow L_B V(x) = 0, \\ \frac{d}{dt} L_B V(x) &= \frac{\partial}{\partial x} L_B V(x) \dot{x}, = \frac{\partial}{\partial x} L_B V(x) F(x) \\ &= \frac{\partial w(x)}{\partial x} \bar{f}(x) + \frac{\partial w(x)}{\partial x} g(x) \left[- (L_B w(x))^{-1} L_{\bar{f}} w(x) \right] \\ &= L_{\bar{f}} w(x) + L_B w(x) \left[- (L_B w(x))^{-1} L_{\bar{f}} w(x) \right] = 0.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de que W es invariante.

- b) Para el segundo paso, es necesario demostrar la estabilidad asintótica del origen en el sub espacio W . Utilizando la función de Lyapunov $V_W = V \ x \in W$, podemos calcular su derivada a lo largo de la trayectorias del lazo cerrado como,

$$\begin{aligned} \dot{V}_W &= \frac{\partial V_W}{\partial x} \dot{x}, \\ &= \frac{\partial V_W}{\partial x} \left[\bar{f}(x) - B(x) \left((L_B^2 V(x))^{-1} L_{\bar{f}} L_B V(x) \right) \right] \\ &= \frac{\partial V_W}{\partial x} \bar{f}(x) - \frac{\partial V_W}{\partial x} B(x) \left((L_B^2 V(x))^{-1} L_{\bar{f}} L_B V(x) \right), \\ &= \frac{\partial V_W}{\partial x} \bar{f}(x) \leq -c_3 (\|x\|), \end{aligned}$$

Dado que $V = V_W$, eso implica que $(\partial V_W / \partial x) B(x) = 0$, lo cual a su vez asegura la estabilidad asintótica de W . Esto concluye la demostración.

4.3. Caso de estudio: Robot de 2-GDL

Siguiendo la metodología del Ejemplo 3, considere el robot de dos grados de libertad que se presenta en [Slotine et al. \(1991\)](#),

$$J(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + \varphi(t) \quad (4.10)$$

donde $q = [q_1 \ q_2]$, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]$. De acuerdo con el Ejemplo anterior, las matrices, $U = C\dot{q} + g$, y la matriz $W(t, q, \dot{q}) = \mathbb{I}$. Las matrices son:

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

y sus entradas

$$\begin{aligned} J_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ J_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ J_{12} &= J_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ h &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2), \\ g_1 &= m_1 l_{c1} g \cos(q_1) + m_2 g [l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1)], \\ g_2 &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

4.3. CASO DE ESTUDIO: ROBOT DE 2-GDL

Defina las variables $x_1 = q - q_d$ y $x_2 = \dot{q} - \dot{q}_d$, siendo $q_d \in \mathbb{C}^2$ una trayectoria deseada. Entonces, con $B = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$, el sistema puede ser reescrito de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= G(x_1) (-C(x)x_2 - g(x_1) + \tau + \varphi(t) - \ddot{q}_d), \end{aligned}$$

y con $G(x_1) = [J(x_1)]^{-1}$. Esto se puede reescribir de forma más compacta

$$\dot{x} = Ax + B [G(x_1)\tau + h(t, x)], \quad (4.13)$$

tomando $h(t, x) = G(x_1) (-C(x)x_2 - g(x_1) + \tau + \varphi(t) - \ddot{q}_d)$. Tome el sistema nominal *i.e.* $\delta_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y $g(\cdot) = C(\cdot, \cdot) = \varphi = \ddot{q}_d = 0$, de tal forma que

$$\dot{x} = Ax + BG(x_1)\tau. \quad (4.14)$$

Cosidere el control $\tau = u_n$ de la forma siguiente

$$u = -\gamma B^T P x \quad (4.15)$$

tomando $\gamma \geq \lambda_{\max}(J(x))$. La ganancia de control es diseñada (4.15) calculando la solución P de la ecuación algebraica de Ricatti,

$$PA + A^T P - PBB^T P + 2Q = 0, \quad (4.16)$$

tomando $Q = Q^T > 0$, en particular $Q = \mathbb{I}$. Entonces, por medio de la función de Lyapunov, $V_R = x^T P x$, se puede probar que $\dot{V} \leq -x^T Q x$.

Para lidiar con el caso incierto, considere el nuevo control $\tau = u_n + v$ y la variable de deslizamiento $w = B^T P x$. Su dinámica está definida por

$$\dot{w} = B^T P \bar{A} x + B^T P B [G(x_1)v + h(t, x)], \quad (4.17)$$

con $\bar{A} = A - \gamma B G(x_1) B^T P$, entonces definimos la perturbación de la forma $d_1 = -C(x)x_2$ y $\delta_z = -g(x_1) + \varphi(t) - \ddot{q}_d$, entonces, de las bien conocidas propiedades de robots manipuladores con articulaciones exclusivamente rotativas ($\|g(x_1)\| \leq k'$ y $\|C(x)x_2\| \leq k_{C1}\|x_2\|^2$) Kelly et al. (2005), podemos acotar las perturbaciones como

$$\|d_1\| \leq \rho_1(t, x) \|\Phi_1(w)\|, \quad (4.18)$$

$$= (\Gamma_1 \|x\|^2 + \gamma_1) \|\phi_1(w)\|, \quad (4.19)$$

$$\|d_2\| \leq \rho_2(t, x) \|\phi_2(w)\| \quad (4.20)$$

$$= (\Gamma_2 \|x_2\| + \gamma_2) \|\phi_2(w)\| \quad (4.21)$$

lo cual implica que las ganancias son de la forma

$$k_1(t, x) = 12 + \frac{1}{4}[(\Gamma_1 \|x\|^2 + \gamma_1) + (\Gamma_2 \|x_2\| + \gamma_2)] + 2(\Gamma_2 \|x_2\| + \gamma_2) + 5(\Gamma_2 \|x_2\| + \gamma_2),$$

$$k_2(t, x) = 5 + 2k_1(t, x).$$

tomando $\sigma = 1$, el control $u_{nom}(t, x) = -B^T P x$ con P solución de la ecuación de Ricatti $Q = \mathbb{I}_4$. Entonces,

$$P = \begin{bmatrix} 3,1075 & 0 & 1,4142 & 0 \\ 0 & 3,1075 & 0 & 1,4142 \\ 1,4142 & 0 & 2,1974 & 0 \\ 0 & 1,4142 & 0 & 2,1974 \end{bmatrix}$$

Además, se proponen las trayectorias siguientes $q_d(t)^T = [\sin(t) \quad \cos(t)]$ y se considera la perturbación $\varphi(t) = 0,1 \sin(5t) + 0,5 \sin(t/4) + 1$. Los parámetros de simulación se eligen. Las simulaciones se realizaron utilizando $k_3 = \delta = \epsilon = 1$, y los

Tabla 4.1: Parámetros del sistema

Parámetro	valor
l_1	0.5
l_2	0.2
l_{c1}	0.32
l_{c2}	0.08
m_1	1
m_2	0.5
g	9.81
I_1	1e-2
I_2	0.5e-2

valores $\Gamma_1 = m_2 l_1 l_{c2} + 1$, $\gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = m_1 l_{c1} g + m_2 (l_{c2} + l_1) + m_2 l_{c2} g$, $\gamma_2 = 1, 1$.

4.3.1. Análisis de resultados

Con el fin de comparar el comportamiento, se realizaron simulaciones del rediseño clásico con las mismas ganancias de acuerdo a [Corless and Leitmann \(1990\)](#). Se puede ver de las Figuras 4.1 que los estados convergen asintóticamente al origen; sin embargo, en las coordenadas de velocidad es posible ver el efecto de *Chattering*. La

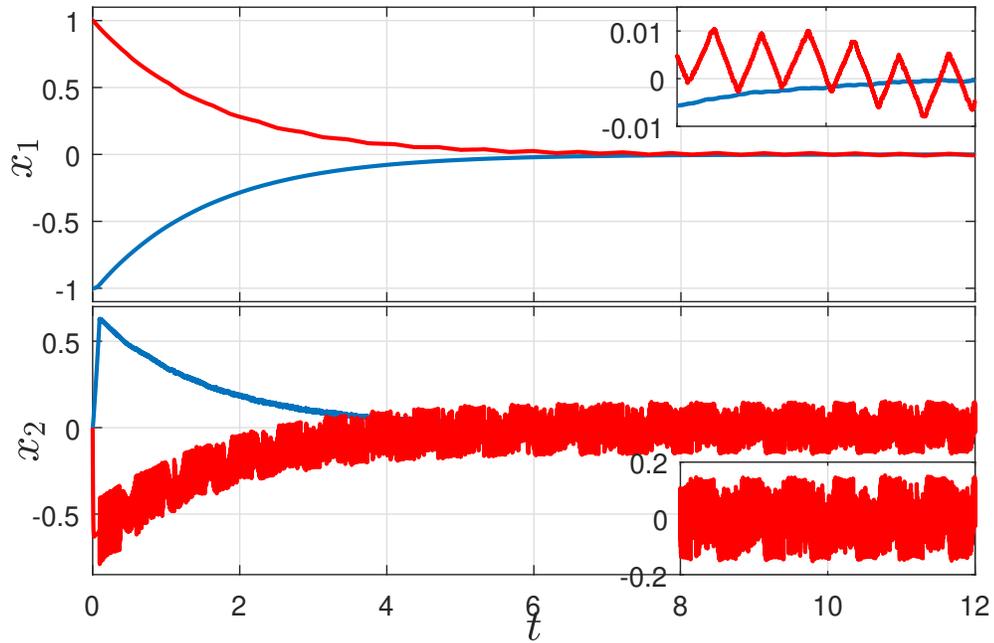


Figura 4.1: Estados del lazo cerrado en presencia del rediseño utilizando el control unitario.

Figura 4.2, muestra la señal de control discontinua. En la Figura 4.3, se ilustra la convergencia de los estados al origen sin el efecto visible de *chattering*. La atenuación del efecto de *Chattering* se puede ver claramente desde la Figura 4.4, el cual presenta la señal de control, además la variable de deslizamiento converge con oscilaciones más pequeñas que las del enfoque discontinuo.

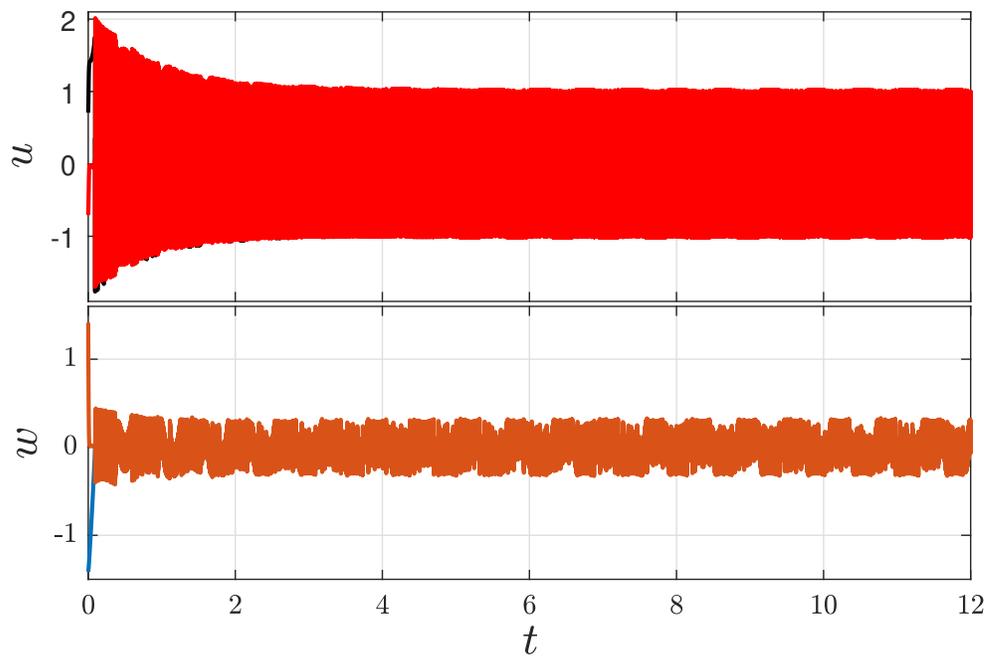


Figura 4.2: Control u y variable de deslizamiento w con rediseño basado en control unitario.

4.3. CASO DE ESTUDIO: ROBOT DE 2-GDL

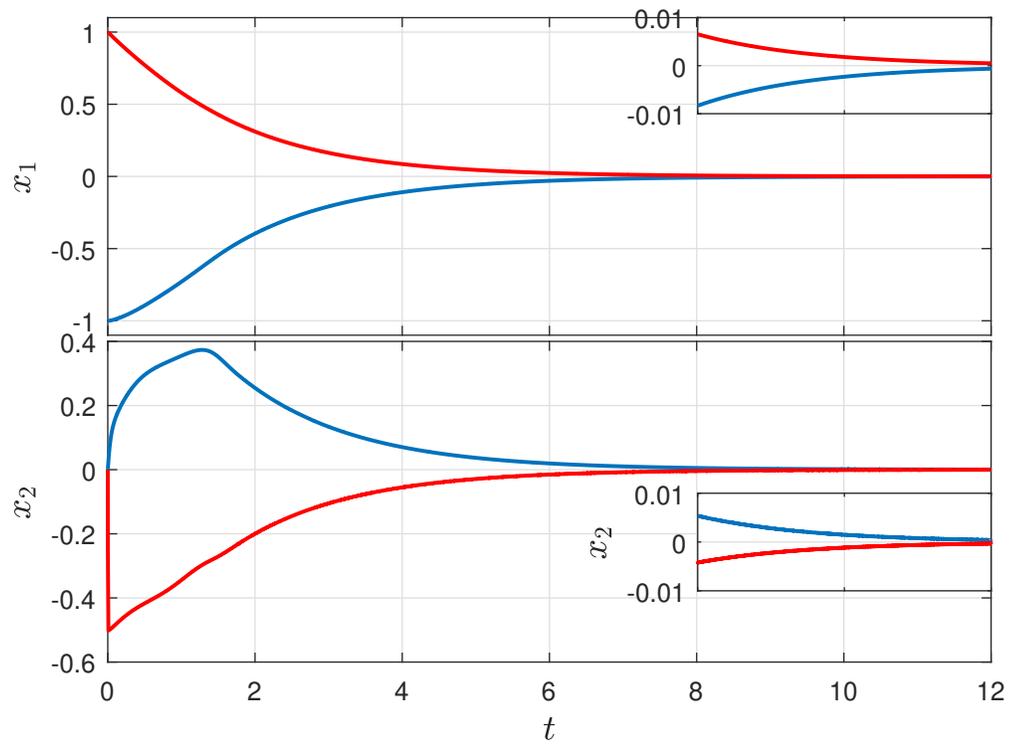


Figura 4.3: Estados del lazo cerrado con el rediseño basado en STA.

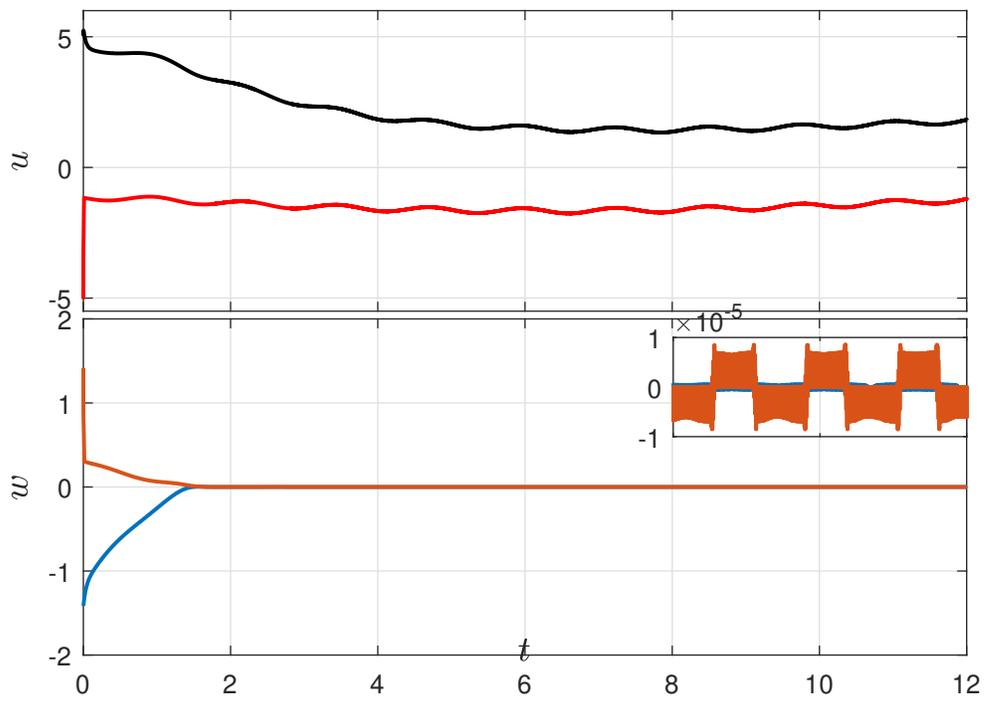


Figura 4.4: Control u y variable de deslizamiento w con rediseño basado en STA.

4.3. CASO DE ESTUDIO: ROBOT DE 2-GDL

Capítulo 5

Rediseño basado en funciones de Lyapunov vía en algoritmos Lipschitz

Con el fin de obtener una mejor atenuación del *chattering*, una de las posibilidades está en utilizar un controlador que genere una señal de control Lipschitz continua [Martinez-Fuentes et al. \(2018\)](#). En este capítulo se muestra una generalización al caso multivariable del algoritmo presentado en [Martinez-Fuentes et al. \(2018\)](#), aplicándolo en la superficie $w^T = \frac{\partial V}{\partial x} B(x)$ dada por el rediseño basado en funciones de Lyapunov, todo esto para el caso cuando el coeficiente de control es completamente conocido.

5.1. Rediseño Lipschitz continuo

De la misma manera que el caso anterior, el objetivo es llevar a w a cero de manera robusta ante las perturbaciones. Para ello hay que recordar la dinámica como

$$\dot{w} = L_{\bar{f}(x)} w(x) + L_{B(x)} w(x)(x) (v + \delta(t, x)) . \quad (5.1)$$

con el término $L_{B(x)} w(x)$ conocido, es posible implementar la siguiente ley de control

$$\begin{aligned} v &= [L_B w(x)]^{-1} (u_p - L_{\bar{f}} w(x)) , \\ u_p &= -c_1 w + \rho , \\ \dot{\rho} &= -c_2 w - k_1 \frac{w}{\|w\|} - k_2 \frac{\dot{w}}{\|\dot{w}\|} . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Un dato importante es que para poder implementar la ley de control (5.2), se requiere la derivada \dot{w} , la discusión sobre el cálculo de dicha derivada se dará más adelante. Por el momento, considere el lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -c_1 w + \rho + \delta_w, \\ \dot{\rho} &= -c_2 w - k_1 \frac{w}{\|w\|} - k_2 \frac{\dot{w}}{\|\dot{w}\|}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

donde $\delta_w = L_B w \delta$. Defina el cambio de variable $z = -c_1 w + \rho + \delta_w$, con lo cual podemos reescribir (5.3) como

$$\begin{aligned}\dot{w} &= z \\ \dot{z} &= -c_1 z - c_2 w - k_1 \frac{w}{\|w\|} - k_2 \frac{z}{\|z\|} + \frac{d}{dt} \delta_w(t, x)\end{aligned}\tag{5.4}$$

Se puede ver que el sistema ahora toma la forma de un sistema de segundo orden en la forma de controlador, de lo cual se tomará ventaja para la prueba de estabilidad. Dicho esto, se toma el resultado del capítulo con la siguiente Proposición.

Hipótesis 5 *Considere que la derivada de la perturbación, δ_w puede expresarse como*

$$\frac{d}{dt} \delta_w(t, x) = \frac{\partial \delta_w(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \delta_w(t, x)}{\partial x} \dot{x}$$

además, los términos $d_1 = \frac{\partial}{\partial t} \delta_w$ y $d_2 = \frac{\partial}{\partial x} \delta_w \dot{x}$ son acotados de la siguiente manera

$$\|d_1(t, x)\| \leq L_\delta,\tag{5.5}$$

$$\|d_2(t, x)\| \leq L_x \|z\|.\tag{5.6}$$

Proposición 2 *Considere el sistema (5.1) en lazo cerrado con el controlador (5.2), suponiendo que se cumple la Hipótesis 5. Además, si se toman las ganancias*

$$\begin{aligned}k_2 &= L_\delta + \beta_1, \\ k_1 &= 2L_\delta + \beta_1 + \beta_2,\end{aligned}\tag{5.7}$$

con las constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ y las ganancias c_i para $i = 1, 2$, tal que cumplen la siguiente desigualdad matricial lineal

$$\begin{bmatrix} a_1 c_2 & -[1 + \frac{a_1}{2}(c_1 + L_x) + a_2 c_1] \\ \star & 2a_2(c_1 - L_x) - a_1 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Entonces, el equilibrio $(0, 0)$ del sistema (5.4) es globalmente estable en tiempo finito.

5.1.1. Prueba de la Proposición 2

Considere la candidata a función de Lyapunov

$$V_w = w^T w + a_1 w^T z + a_2 z^T z + a_3 \|w\|$$

Calculando su derivada a lo largo de las trayectorias de (5.4),

$$\begin{aligned} \dot{V}_w &= W_l + W_d, \\ W_l &= (2w^T + a_1 z^T)z + (a_1 w^T + 2a_2 z^T)(-c_1 z - c_2 w + d_2(t, x)), \\ W_d &= a_3 z^T \frac{w}{\|w\|} + (a_1 w^T + 2a_2 z^T) \left(-k_1 \frac{w}{\|w\|} - k_2 \frac{z}{\|z\|} + d_1(t, x) \right). \end{aligned}$$

Con lo que es necesario probar que las funciones W_l y W_d son negativas definidas. Utilizando la Hipótesis 5, la función W_l puede ser acotada de la siguiente forma

$$W_l \leq - \begin{bmatrix} \|w\| \\ \|z\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 c_2 & -\frac{1}{2}[2 + a_1(c_1 + L_x) + a_2 c_2] \\ \star & 2c_1 a_2 - a_1 - 2a_2 L_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|w\| \\ \|z\| \end{bmatrix},$$

por lo cual, podemos resolver la desigualdad matricial para encontrar las ganancias c_1 y c_2 que garanticen que se cumpla

$$\begin{bmatrix} a_1 c_2 & -[1 + \frac{a_1}{2}(c_1 + L_x) + a_2 c_2] \\ \star & 2a_2(c_1 - L_x) - a_1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

siendo \star la parte simétrica de la matriz. Para la función W_d , se elige

$$a_3 = 2a_2 k_1,$$

entonces W_d queda como

$$W_d = -a_1 k_1 \frac{w^T w}{\|w\|} - 2a_2 k_2 \frac{z^T z}{\|z\|} - a_1 k_2 \frac{w^T z}{\|z\|} + a_1 w^T d_1(t, x) + 2a_2 z^T d_1(t, x),$$

y se puede acotar de la forma

$$W_d \leq -a_1 (k_1 - k_2 - L_\delta) \|w\| - 2a_2 (k_2 - L_\delta) \|z\|,$$

la cual es negativa si k_1 y k_2 se seleccionan

$$\begin{aligned} k_2 &= L_\delta + \beta_1, \\ k_1 &= 2L_\delta + \beta_1 + \beta_2, \end{aligned}$$

para constantes positivas β_1 y β_2 . Por su parte considere que el sistema se puede representar como una suma de términos homogéneos, aproximándose en el origen por el algoritmo Twisting con los pesos de homogeneidad $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$, y el grado $k = -1$. Para verificar esto, considere

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k_1 \frac{x_1}{\|x_1\|} - k_2 \frac{x_2}{\|x_2\|} \end{bmatrix}$$

donde $x = [x_1 \ x_2]^T = [w \ z]^T$. Considere la matriz de dilatación

$$\Lambda_r x = \begin{bmatrix} \lambda^{r_1} & 0 \\ 0 & \lambda^{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{r_1} x_1 \\ \lambda^{r_2} x_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_1(\Lambda_r x) &= \begin{bmatrix} \lambda^{r_2} x_2 \\ -k_1 \frac{\lambda^{r_1} x_1}{\|\lambda^{r_1} x_1\|} - k_2 \frac{\lambda^{r_2} x_2}{\|\lambda^{r_2} x_2\|} \end{bmatrix} \\ &= \lambda^k \begin{bmatrix} \lambda^{r_2 - k} x_2 \\ \lambda^{-k} \left(-k_1 \frac{x_1}{\|x_1\|} - k_2 \frac{x_2}{\|x_2\|} \right) \end{bmatrix}, \\ &= \lambda^k \begin{bmatrix} \lambda^{r_2 - k} & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \left(-k_1 \frac{x_1}{\|x_1\|} - k_2 \frac{x_2}{\|x_2\|} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual implica que $r_2 - k = r_1$ y que $r_2 = -k$, que se cumple si elegimos los pesos $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$, y el grado $k = -1$. Entonces, se puede concluir debido al Corolario 1 que el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito.

5.2. Caso de estudio: Robot de 2-GDL

Al recordar el sistema

$$\dot{x} = Ax + B[G(x_1)\tau + h(t, x)],$$

del capítulo anterior, con el control nominal $u_n = -\gamma w$ y una ley de control robustificante $\tau = u_n + v$. Seleccione el control v como (5.2), tal que tiene la forma

$$\begin{aligned} v &= \left[B^T P B G(x_1) \right]^{-1} \left(u_p - B^T P \bar{A} x \right), \\ u_p &= -c_1 w + \rho, \\ \dot{\rho} &= -c_2 w - k_1 \frac{w}{\|w\|} - k_2 \frac{\dot{w}}{\|\dot{w}\|}. \end{aligned}$$

con la matriz $\bar{A} = A - \gamma BG(x_1)B^T P$. Con dicho control, el sistema en lazo cerrado tiene la forma,

$$\dot{w} = u_p + B^T P B h(t, x),$$

donde, aprovechando que la matriz $B^T P B$ del Ejemplo puede ser reescrita por una matriz identidad por una constante, $B^T P B = a_{p2} \mathbb{I}$, entonces

$$a_p h(t, x) = a_{p2} [\varphi(t) - C(x)x_2 - g(x_1) - \ddot{q}_d(t)]$$

con el fin de calcular las ganancias, calculemos la derivada temporal la perturbación $h(t, x)$,

$$\frac{d}{dt} h(t, x) = \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \dot{x}$$

en donde es sencillo ver que

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = \dot{\varphi}(t) + q_d^{(3)}.$$

Sin embargo, el término parcial con respecto a x resulta un poco más complicado. Con el fin de obtener la cota L_x , considere la derivada

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial x} = \left[-\frac{\partial G(x_1)}{\partial x_1} [C(x)x_2 + g(x_1)] - G(x_1) \left[\frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} \right], \quad G(x_1) \frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_2} \right]$$

y ahora consideremos dicha matriz en dos partes $\frac{\partial h(t, x)}{\partial x} = [h'_1 \quad h'_2]$, de tal forma que encontremos cotas de cada uno de los componentes, de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \|h'_1\| &\leq \left\| \frac{\partial G(x_1)}{\partial x_1} \right\| (\|C(x)x_2\| + \|g(x_1)\|) + \|G(x_1)\| \left(\left\| \frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} \right\| \right), \\ \|h'_2\| &\leq \|G(x_1)\| \cdot \left\| \frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_2} \right\| \end{aligned}$$

donde cada una de las cotas tiene los siguientes valores ([Kelly et al., 2005](#))

$$\begin{aligned} \|G(x_1)\| &\leq \lambda_{\min}(J(x)), & \left\| \frac{\partial G(x_1)}{\partial x_1} \right\| &\leq k_J, \\ \|g(x_1)\| &\leq k', & \left\| \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} \right\| &\leq k_g, \\ \|C(x)x_2\| &\leq k_{C1} \|x_2\|^2, & \left\| \frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_1} \right\| &\leq 4m_2 l_1 l_{c2} \|x_2\|^2, \\ \left\| \frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_2} \right\| &\leq 6m_2 l_1 l_{c2} \|x_2\|. \end{aligned}$$

con respecto a las últimas dos cotas, se justifican con la derivada parcial del vector de $C(x)x_2$ con respecto a x_1 y x_2 , de tal manera que se pueden calcular de la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} \begin{bmatrix} 0 & 2x_{21}x_{22} + x_{22}^2 \\ 0 & x_{21}^2 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial C(x)x_2}{\partial x_2} &= h(x_1) \begin{bmatrix} 2x_{22} & 3x_{22} - x_{21} \\ 2x_{21} & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde se recuerda la función $h(x_1) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(x_{12})$. Entonces, las cotas mostradas se pueden obtener fácilmente de las propiedades de las normas $\|\mathbf{v}\| \leq \sqrt{n}\|\mathbf{v}\|_\infty$. Las simulaciones siguientes fueron realizadas en el caso de estudio del capítulo 4. Tomando las cotas con los valores numéricos y siguiendo los mencionados en [Kelly et al. \(2005\)](#)

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(J(x)) &\leq \alpha = 2.7720, \\ k_J &= \frac{1}{|Det(J(x))|} \sqrt{2} m_2 l_1 l_{c2} = 38.0952, \\ Det(J(x)) &= I_1 I_2 + I_2 [l_{c2}^2 m_1 + l_1^2 m_2] + l_{c2}^2 m_2 I_1 + l_{c1}^2 l_{c2}^2 m_1 m_2 + l_1^2 l_{c2} m_2^2 [1 - \cos^2(x_{12})], \\ k' &= 2.2290, \\ k_{C1} &= n^2 m_2 l_1 l_{c2} = 0.336\end{aligned}$$

tomando claro el valor de $n = 2$. Siendo así, es necesario fijar un valor de cota para la velocidad, debido a que el diseño de ganancias solamente considera constantes, para ello, tome $\|x_2\| \leq 1$, en una vecindad suficientemente pequeña, $\|x_2\| \leq \|x_2\|^2$, por lo cual tomamos $\|x_2\| = 1$ en el cálculo de las ganancias.

Tomando las trayectorias $q_d(t) = [\sin(t) \quad \cos(t)]^T$ y la perturbación $\varphi(t) = 0.1 \sin(5t) + 0.5 \sin(t/4) + 1$, es claro que la cota $L_d = 4$. Las ganancias resultan en los valores numéricos $c_1 = 25$, $c_2 = 0.01$, para los valores $a_1 = 1$, $a_2 = 5/4$ y $a_{p2} = 2.1974$, tomando P del caso anterior también. Para las ganancias $k_1 = 10$ y $k_2 = 5$ y los valores $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Recalcando que los valores a_i cumplen con la desigualdad matricial mencionada.

5.2.1. Obtención de la derivada \dot{w}

Una parte importante para la implementación de la ley de control (5.2), reside en la obtención de la derivada de la variable de deslizamiento. Una manera simple y bien conocida para obtenerla es vía el algoritmo super-twisting [Levant \(1998\)](#). Para

ello, considere en el ejemplo que la función $w = [w_1 \ w_2]^T$, definiendo el siguiente algoritmo de estimación,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{i1} &= -\lambda_{i1}|e_i|^{1/2}\text{sign}(e_i) + \xi_{i2}, \\ \dot{\xi}_{i2} &= -\lambda_{i2}\text{sign}(e_i),\end{aligned}$$

para el error de estimación $e_i = \xi_{i1} - w_i$, para los sub-índices $i = 1, 2$. Estos representan las señal para el componente i -ésimo de la señal w , por lo cual son necesarios entonces dos estimadores. En este caso ξ_{i1} y ξ_{i2} corresponden a los estados del observador. Los estados de cada diferenciador, convergen entonces a los de la señal de entrada w_i , con las ganancias de la forma $\lambda_{i1} = 1.5L_i^{1/2}$ y $\lambda_{i2} = 1.1L_i$, de la forma que menciona [Levant \(1998\)](#). Por otro lado, se seleccionan $L_1 = 100$ y $L_2 = 10$, con lo cual se obtienen los resultados siguientes.

5.2.2. Análisis de resultados

Con el fin de comparar el comportamiento, se realizaron simulaciones del rediseño basado en control unitario con las ganancias diseñadas de acuerdo a [Corless and Leitmann \(1990\)](#). Se puede ver de las Figuras [4.1](#) que los estados convergen asintóticamente al origen; sin embargo, en las coordenadas de velocidad es posible ver el efecto de *Chattering*.

Por su parte la Figura [5.2](#) también muestra las señales de control. Se logra notar que una componente del control tiene forma sinusoidal, lo implicaría la compensación de la trayectoria deseada y la perturbación φ . Por otro lado, el *chattering* que se presenta en la variable de deslizamiento w , también se debe al cálculo de la derivada \dot{w} utilizando el diferenciador exacto, lo cual a su vez se transmite a los estados del sistema en la Figura [5.1](#).

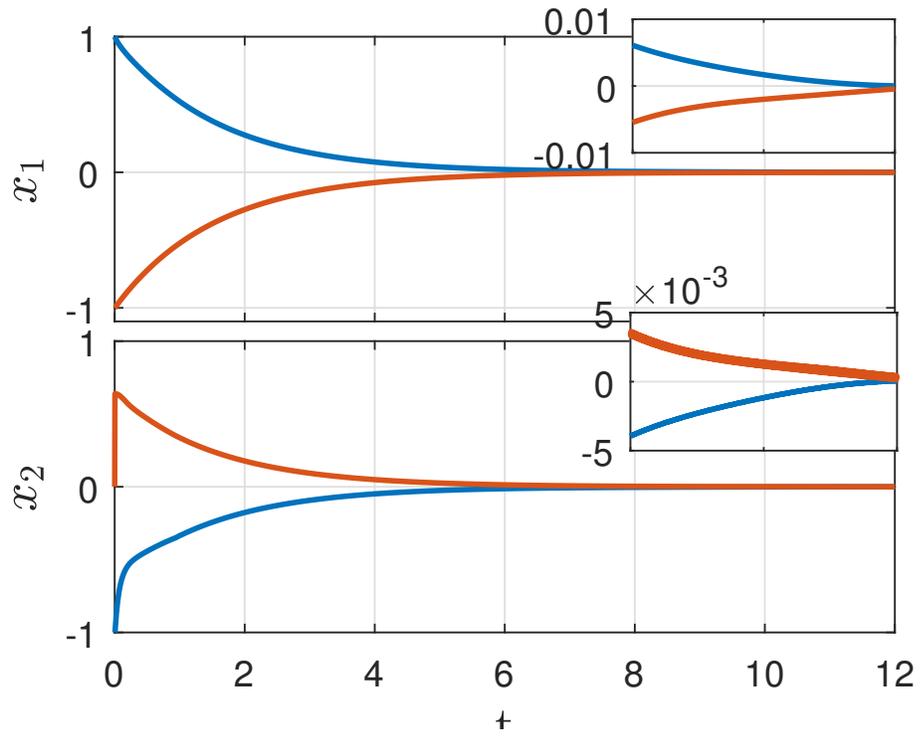


Figura 5.1: Estados del lazo cerrado con el rediseño Lipschitz.

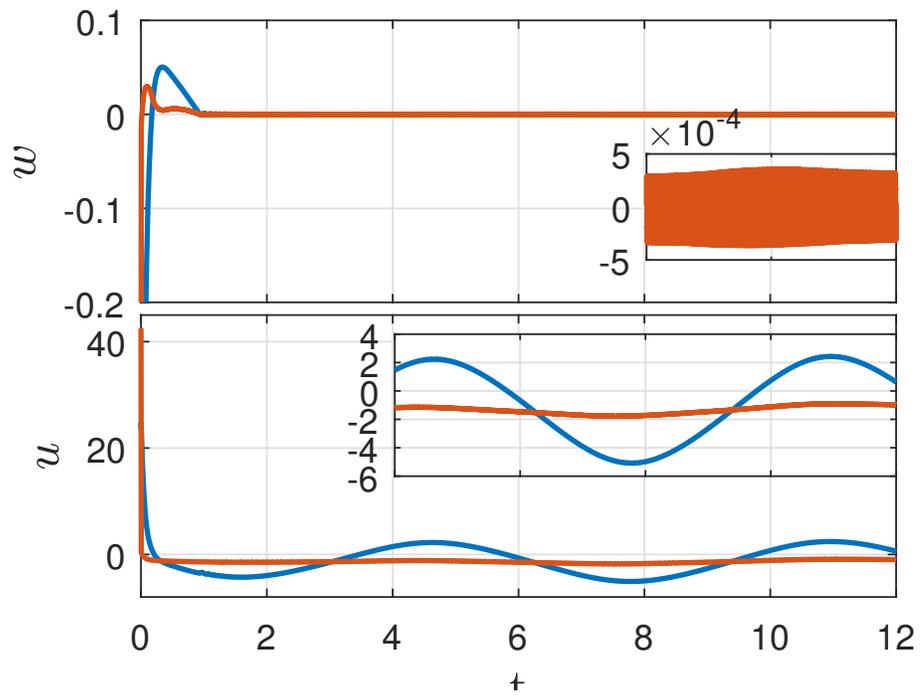


Figura 5.2: Control u y variable de deslizamiento w con rediseño Lipschitz.

Capítulo 6

Enfoque de función barrera en rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes

En este capítulo, se presenta el rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes con el control unitario, pero utilizando el enfoque de función barrera para la adaptación de las ganancias. Por otro lado, a pesar de que se utiliza el control unitario, el enfoque de función barrera permite la adaptación de la ganancia a la solución del sistema, generando una señal de control continua, a expensas de obtener estabilidad práctica de la dinámica de w .

6.1. Funciones barrera multidimensionales

Definición 3 Dado $\varepsilon > 0$, las funciones barrera multidimensionales $\beta : (0, \varepsilon) \rightarrow [\bar{\beta}, \infty)$ se definen como la clase de funciones estrictamente crecientes en el intervalo $[0, \varepsilon)$, con la asíntota $\lim_{s \rightarrow \varepsilon} \beta(s) = +\infty$, $s \in \mathbb{R}^+$ y un mínimo global en el cero, i.e. $\beta(0) = \bar{\beta} \geq 0$.

Sea $w \in \mathbb{R}^m$, un ejemplo bastante simple de funciones que satisfacen la Definición 3 es la siguiente función barrera semi-definida positiva.

$$\beta(\|w\|) = \frac{\|w\|}{\varepsilon - \|w\|}, \quad \bar{\beta} = 0. \quad (6.1)$$

Note que su derivada temporal se da de la siguiente manera.

$$\dot{\beta}(\|w\|) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - \|w\|)^2} \frac{w^T \dot{w}}{\|w\|}. \quad (6.2)$$

Dicha función será utilizada para realizar la adaptación del rediseño por modos deslizantes adaptables.

6.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov por modos deslizantes adaptables

Recuerde la dinámica de w

$$\dot{w} = L_{\bar{f}(x)}w(x) + L_{B(x)}w(x) (v + \delta(t, x)) \quad (6.3)$$

donde, $\bar{f}(x) = f(x) - B(x)\psi(x)$, $L_{\bar{f}}w(x) := [\partial w / \partial x]f(x)$ y $L_Bw(x) := [\partial w / \partial x]B(x)$. Con el fin de relajar la Hipótesis del conocimiento de la cota de la perturbación δ a su mera existencia, considere la ley de adaptación

$$k(t, \|w\|) = \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \bar{\alpha}\|w\|, \bar{\alpha} > 0, & \text{if } 0 \leq t \leq \bar{t}, \\ \beta(t) = \frac{\|w\|}{\varepsilon - \|w\|}, & \text{if } t > \bar{t} \end{cases} \quad (6.4)$$

donde $\bar{t} = \bar{t}(\|w(x(0))\|, \varepsilon)$, es una constante que pertenece a un intervalo acotado.

Eligiendo $v = -[L_{B(x)}w(x)]^{-1} (L_{\bar{f}(x)}w(x) - u_{sm})$ con la ley de control unitaria adaptable como:

$$u_{sm} := -k(t, \|w\|) \frac{w}{\|w\|}, \quad (6.5)$$

la dinámica de w en lazo cerrado toma la siguiente forma

$$\dot{w} = -k(t, \|w\|) \frac{w}{\|w\|} + \delta(t, x) \quad (6.6)$$

con $\delta := L_Bw(x)\delta$ que cumple la siguiente Hipótesis.

Hipótesis 6 *El término incierto $\bar{\delta}(t, x)$ está acotado de la siguiente forma*

$$\|\bar{\delta}(t, x)\| < \bar{M}.$$

casi en todas partes con la cota positivo \bar{M} , desconocida.

El lazo cerrado de la dinámica de w tiene las siguientes propiedades, mismas que se ilustran en la Figura 6.1

- Al inicio, la ganancia $K(t, \|w\|)$ incrementa (cf. Plestan et al. (2010)) hasta que la variable de deslizamiento $w(x)$ alcanza el dominio $\|w(x)\| < \varepsilon/2$ en un tiempo finito \bar{t} .
- Enseguida, la ganancia adaptable conmuta a la función barrera, que no permite que la variable de deslizamiento w salga de la ε -vecindad de cero, aún cuando la perturbación $\bar{\delta}$ continúa incrementando, *i.e.*, $\|w(x)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq \bar{t}$.

Nótese que la ganancia (6.1) incrementa de acuerdo al valor de la solución de (6.6) (Véase Fig. 6.1). Dentro de los intervalos (t_1, t_2) y (t_3, t_4) la ganancia coincide con el valor de la cota superior siempre y cuando $\|w\|$ esté cerca del origen.

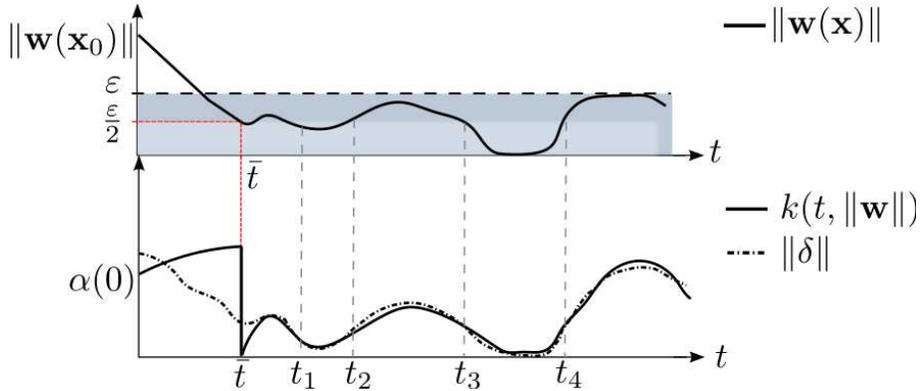


Figura 6.1: Convergencia de la norma de la variable de salida $\|w(x)\|$ a una vecindad predefinida del origen de radio ε .

Lo antes mencionado se resume en el siguiente resultado principal del capítulo.

Proposición 3 *Considere el sistema perturbado (3.4) y suponga que las Hipótesis 2, 4 y 6 se cumplen. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y $B_r = \{\|x\| \leq r\}$. Utilice el control v*

$$v = - \left[L_{B(x)} w(x) \right]^{-1} \left(L_{\bar{f}(x)} w(x) - u_{sm} \right) \quad (6.7)$$

con el control unitario adaptable u_{sm} en (6.5), y la ganancia adaptable $k(t, x)$ en (6.4). Dado $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$, entonces para toda $\|x(0)\| < c_2^{-1}(c_1(r))$, existe un

tiempo finito \bar{t} tal que las soluciones de (3.1) alcanzan el conjunto $\|w\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq \bar{t}$. Después de ello, la solución del lazo cerrado (3.1) satisface,

$$\|x\| \leq b(\varepsilon), \quad \forall t \geq \bar{t}$$

donde

$$b(\varepsilon) := c_1^{-1}(c_2(c_3^{-1}(2\varepsilon(N-1)/N))). \quad (6.8)$$

6.3. Prueba de la Proposición 3

La prueba se realizará en cuatro pasos. Primeramente, se demuestra que w está uniformemente acotada en tres pasos. Por su parte, en el cuarto paso, se obtiene la última cota de la solución del sistema en lazo cerrado (3.4).

Primer paso: Se demuestra que la variable de deslizamiento $w(x)$ alcanza la bola cerrada $\|w(x)\| < \varepsilon/2$ en $t = \bar{t}(\|w(x_0)\|, t_0)$. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2}w^T w + \frac{1}{2\theta}(\alpha(t) - \alpha^*)^2 \quad (6.9)$$

donde α^* y θ son constantes positivas, utilizando al sistema (6.3) y la ganancia (6.4), la derivada temporal de (6.9) se calcula como

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= w^T \dot{w} + \frac{1}{\theta}(\alpha(t) - \alpha^*)\dot{\alpha}(t) \\ &= w^T \left(-\alpha(t) \frac{w}{\|w\|} + \bar{\delta}\right) + \frac{1}{\theta}(\alpha(t) - \alpha^*)\bar{\alpha}\|w\| \\ &= -\alpha(t)\|w\| + \underbrace{w^T \bar{\delta}}_{\leq \bar{M}\|w\|} + \frac{\bar{\alpha}}{\theta}(\alpha(t) - \alpha^*)\|w\| \\ &\leq -(\alpha^* - \bar{M})\|w\| - (\alpha(t) - \alpha^*)\|w\| + \\ &\quad + \frac{\bar{\alpha}}{\theta}(\alpha(t) - \alpha^*)\|w\| \\ &= -(\alpha^* - \bar{M})\|w\| - \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{\theta}\right)(\alpha(t) - \alpha^*)\|w\| \end{aligned}$$

Nótese que siempre existen $\alpha^* > \bar{M}$ y es posible elegir $\theta > \bar{\alpha}$ tal que $\rho_1 \triangleq (\alpha^* - \bar{M}) > 0$ y $\rho_2 \triangleq \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{\theta}\right) > 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -\rho_1\|w\| - \rho_2\|w\||\alpha(t) - \alpha^*| \\ &\leq -\min\{\rho_1, \sqrt{\theta}\rho_2\|w\|\}\sqrt{2} \left[\frac{\|w\|}{\sqrt{2}} + \frac{|\alpha(t) - \alpha^*|}{\sqrt{2\theta}} \right]\end{aligned}$$

debido a $\sqrt{V_1} = \sqrt{\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2\theta}|\alpha(t) - \alpha^*|^2} \leq \frac{\|w\|}{\sqrt{2}} + \frac{|\alpha(t) - \alpha^*|}{\sqrt{2\theta}}$ entonces $\dot{V}_1 \leq -\rho V_1^{\frac{1}{2}}$ donde $\rho \triangleq \sqrt{2}\min\{\rho_1, \rho_2\sqrt{\theta}\|w\|\}$. Entonces, se garantiza la convergencia en tiempo finito al dominio $\|\mathbf{w}(x(\bar{t}))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ con el tiempo de convergencia estimado $\bar{t} \leq 2\sqrt{V_1(0)}/\rho$.

Segundo paso: Ahora, se demuestra que para todo $t \geq \bar{t}$ la variable w está contenida en la región dada por $\|w\| \leq \sigma_1$ con

$$\sigma_1 \triangleq \frac{\varepsilon\bar{M}}{\bar{M} + 1} \quad (6.10)$$

Sea $t = \bar{t}$, que denota el primer tiempo en el cual $\|w(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}(\beta(\|w\|))^2 \quad (6.11)$$

para $t \geq \bar{t}$.

La derivada temporal de V_2 a lo largo de las trayectorias (6.2) y (6.6) está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= w^T \dot{w} + \beta(\|w\|)\dot{\beta}(\|w\|) \\ &= w^T \left(-\beta(\|w\|)\frac{w}{\|w\|} + \bar{\delta} \right) + \beta(\|w\|) \left[\frac{\varepsilon}{(\varepsilon - \|w\|)^2} \frac{w^T \dot{w}}{\|w\|} \right] \\ &\leq -(\beta(\|w\|) - M)\|w\| \\ &\quad + \xi\beta(\|w\|) \left[-\beta(\|w\|)\frac{w^T w}{\|w\|^2} + \underbrace{\frac{w^T \bar{\delta}(t, x)}{\|w\|}}_{\leq \bar{M}} \right]\end{aligned}$$

$$\text{con } \xi \triangleq \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - \|w\|)^2}.$$

6.3. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN ??

Suponga que $\|w(x(\bar{t}))\| > \sigma_1$ con σ_1 definida en (6.10). Nótese que $\beta(\|w\|)$ es una función creciente, entonces $\beta(\|w\|) > \beta(\sigma_1) = \bar{M}$, y

$$\dot{V}_2 \leq -\beta_s \|w\| - \xi \beta_s \beta(\|w\|) \quad (6.12)$$

con $\beta_s \triangleq (\beta(\|w\|) - \bar{M}) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\beta_s \|w\| - \xi \beta_s |\beta(\|w\|)| \\ &= -\beta_s \sqrt{2} \left(\frac{\|w\|}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} |\beta(\|w\|)| \right) \\ &\leq -\beta_s \sqrt{2} \min\{1, \xi\} \left(\frac{\|w\|}{\sqrt{2}} + \frac{|\beta(\|w\|)|}{\sqrt{2}} \right) \\ &\leq -\beta_1 V_2^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde $\beta_1 \triangleq \sqrt{2} \beta_s \min\{1, \xi\}$. Así, se garantiza la convergencia en tiempo finito a $\{\|w\| \leq \sigma_1\}$.

Tercer paso: Una vez que las trayectorias convergen al dominio descrito por $\|w\| \leq \sigma_1$, sólo queda probar que w permanece en el dominio $\|w\| < \varepsilon$. Después de haber pasado un pequeño periodo de tiempo $T > 0$, tal que $t \geq \bar{t} + T$, el signo de \dot{V}_2 se vuelve indefinido (*cf.* Con la cota (6.12)). Por lo tanto, w incrementa hasta que alcanza la frontera $\{\|w\| \leq \sigma_1\}$, dado que $\dot{V}_2 \leq 0$ en la frontera, entonces para todo $t \geq \bar{t} + T$ se cumple que $\|w(x(t))\| \leq \sigma_1$. Finalmente, por construcción de (6.10) es inmediato que $\|w(x)\| < \varepsilon$ también se cumple para $t \geq \bar{t}$. Por lo tanto, la solución w es uniformemente acotada.

Cuarto paso: De acuerdo al paso anterior, la solución w es uniformemente acotada, i.e., $\|w\| < \sigma_1 < \varepsilon$. Además, podemos elegir un conjunto $\mathcal{S} = \{\tilde{\sigma}_1 < \|w\| < \tilde{\sigma}_N\}$ con $N \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, tal que \dot{V}_2 sea negativa dentro de este conjunto. Para ello considere

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\tilde{M}}{\tilde{M} + 1} \varepsilon, \quad \tilde{\sigma}_N = \frac{\tilde{M}N}{\tilde{M}N + 1} \varepsilon, \quad (6.13)$$

con $\tilde{M} = \|(L_B w)^{-1} L_{\bar{f}} w\| + \bar{M}$, $\forall t \geq \bar{t}$, donde $\sigma_1 < \tilde{\sigma}_1 < \tilde{\sigma}_N < \varepsilon$. En el conjunto \mathcal{S} , la derivada temporal de la función de Lyapunov nominal V (véase (3.7)) con

$u = \psi(x) + v$ y $v = -(L_B w)^{-1}(k(t, x) \frac{w}{\|w\|} + L_{\bar{f}} w)$, satisface la siguiente cota:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -c_3(\|w\|) + w^T v + w^T \delta \\ &\leq -c_3(\|w\|) - w^T \left[(L_B w)^{-1} \left(k(t, x) \frac{w}{\|w\|} + L_{\bar{f}} w \right) \right] + w^T \delta \\ &\leq -c_3(\|w\|) + \|w\| \|(L_B w)^{-1} L_{\bar{f}} w\| - \frac{\|w\|^2}{\varepsilon - \|w\|} + \|w\| \bar{M} \\ &\leq -c_3(\|w\|) - \frac{\|w\|^2}{\varepsilon - \|w\|} + \|w\| \left(\underbrace{\|(L_B w)^{-1} L_{\bar{f}} w\| + \bar{M}}_{\triangleq \tilde{M}} \right), \end{aligned}$$

entonces en $\mathcal{S} = \{\tilde{\sigma}_1 \leq \|w\| \leq \tilde{\sigma}_N\}$,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -c_3(\|x\|) - \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{\varepsilon - \tilde{\sigma}_1} + \tilde{M} \tilde{\sigma}_N \\ &= -c_3(\|x\|) - \frac{\tilde{M}^2}{\tilde{M} + 1} \varepsilon + \frac{N \tilde{M}^2}{N \tilde{M} + 1} \varepsilon \\ &= -c_3(\|x\|) + (N - 1) \frac{\tilde{M}}{\tilde{M} + 1} \frac{\tilde{M}}{N \tilde{M} + 1} \varepsilon \end{aligned}$$

Ya que $\frac{\tilde{M}}{\tilde{M} + 1} < 1$ y $\frac{\tilde{M}}{N \tilde{M} + 1} < \frac{1}{N}$, se cumple que

$$\dot{V} \leq -c_3(\|x\|) + \frac{N - 1}{N} \varepsilon$$

$\forall t \geq \bar{t}$ y $N \geq 2$.

Tómese r tal que $B_r \subset D$, escogiendo $\varepsilon < \frac{N}{2(N-1)} c_3(c_2^{-1}(c_1(r)))$ y definiendo $\mu = c_3^{-1}(2\varepsilon \frac{N-1}{N}) < c_2^{-1}(c_1(r))$. Entonces

$$\dot{V} \leq -c_3(\|x\|), \quad \forall \mu \leq \|x\| < r.$$

Por la aplicación del Teorema 4.18 en [Khalil \(2002\)](#) se concluye que las soluciones de x en lazo cerrado son uniforme y finalmente acotadas por una función de clase \mathcal{K} , $b(\cdot)$ en (6.8) la cual depende de una variable ε definida *a priori*. \square

6.4. Caso de estudio: Robot de 2-GDL

Recuerde el robot de dos grados de libertad de la sección 4.3,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= [J(x_1)]^{-1} (-C(x)x_2 - g(x_1) + \tau + \varphi(t) - \ddot{q}_d), \end{aligned}$$

y el cual puede escribirse de manera compacta

$$\dot{x} = Ax + B[h(t, x) + G(x)\tau], \quad (6.14)$$

Recuerde que, tomando la función de Lyapunov nominal , $w = B^T Px$, y su dinámica tiene la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= B^T P \dot{x} \\ &= B^T P [\bar{A}x + B(h(t, x) + G(x)v)] \\ &= B^T P \bar{A}x + B^T P B G(x)v + \delta(t, x), \end{aligned} \quad (6.15)$$

con $\bar{A} = Ax - B(B^T Px)$ y $\delta(t, x) = B^T P B h(t, x)$. Seleccionando el control v ahora de la forma ,

$$v = - [B^T P B G(x)]^{-1} \left(B^T P \bar{A}x - k(t, \|w\|) \frac{w}{\|w\|} \right) \quad (6.16)$$

w será forzado a la vecindad ε de cero. Considere que las trayectorias a seguir son $q(t) = [\sin(t) \ \cos(t)]^T$ y las perturbaciones del tiempo $\varphi(t) = a(t) \sin(2t)[1 \ 1]^T$ con

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 22, \\ 0,6, & 22 < t \leq 40, \\ 0,3, & 40 < t \leq 60. \end{cases}$$

Tabla 6.1: Parámetros de diseño.

	PSBF	DLR1	DLR2
Parámetros valores	$\alpha(0) = 1, \varepsilon = 0,5, \bar{\alpha} = 0,1$	$k = 5$	$k = 15$

En las simulaciones se muestran tres casos: la cota superior de la perturbación existe pero no es conocida, *i.e.*, el enfoque de función barrera (PSBF); la cota de la perturbación se sobrestima un poco utilizando el control unitario (DLR1) en (3.12); en el tercer escenario, se subestima la cota superior de la perturbación de manera considerable con el control unitario (DLR2) en (3.12). Los parámetros de simulación se dan en las Tablas 4.1 y 6.1 y las simulaciones se realizaron utilizando un paso de muestreo de $1 \times 10^{-4} s$ con método de integración Euler.

Los errores x para PSBF, DLR1 y DLR2 se muestran en las Fig. 6.2(a)-Fig. 6.2(c), respectivamente. Para mostrar las ventajas del enfoque propuesto, se agrega una perturbación externa $\varphi(t)$. Esta perturbación decrece en amplitud a los tiempos $t = 22 s$ y $t = 40 s$, todo esto para mostrar que el enfoque PSBF es capaz de seguir estos cambios. El efecto de φ se muestra en la Figura 6.2(d). Así la amplitud del *chattering* y la ganancia no siguen los efectos de la perturbación. En contraste con esto, la ganancia adaptable por función barrera converge a la norma de la perturbación (véase Fig. 6.4(d)), sin sobreestimarla. Vale la pena mencionar que PSBF no utiliza ninguna información sobre la cota superior de la perturbación. Además, ya que genera una señal de control continua el efecto de *chattering* no se presenta más.

La Figura 6.3(a) ilustra que w en el caso PSBF es suave y su norma está contenida en una vecindad predefinida del origen, la cual nunca será excedida. En el caso en que la ganancia $k = 5$ en DLR1 (véase Fig. 6.3(b)), esta variable permanece en la misma vecindad con un nivel constante de *chattering*. Sin embargo, la amplitud de *chattering* es mucho mayor en el caso DLR2 cuando la ganancia se selecciona como $k = 15$. En DLR2, es posible ver que la norma de la variable auxiliar w sobrepasa la vecindad preescrita en el diseño por función barrera (véase Fig. 6.3(c)).

Las señales de control se presentan en la Figura 6.4. Nótese que en PSBF la señal de control es continua (véase Fig. 6.4(a)) esto se debe a la combinación de la función barrera (6.1) y el control unitario (6.5). Más aún, la ganancia adaptable presentada en 6.4(d) disminuye de manera similar a la solución del sistema w y de igual forma sigue las variaciones de la perturbación cuando ésta, incrementa o disminuye, es claro que esto no sucede en los casos DLR1 y DLR2. Por otro lado, con el fin de compensar las perturbaciones, la sobreestimación de las ganancias produce efectos indeseables de *chattering* como se muestra en los escenarios de DLR1 y DLR2 en las Figuras 6.4(b)-6.4(c).

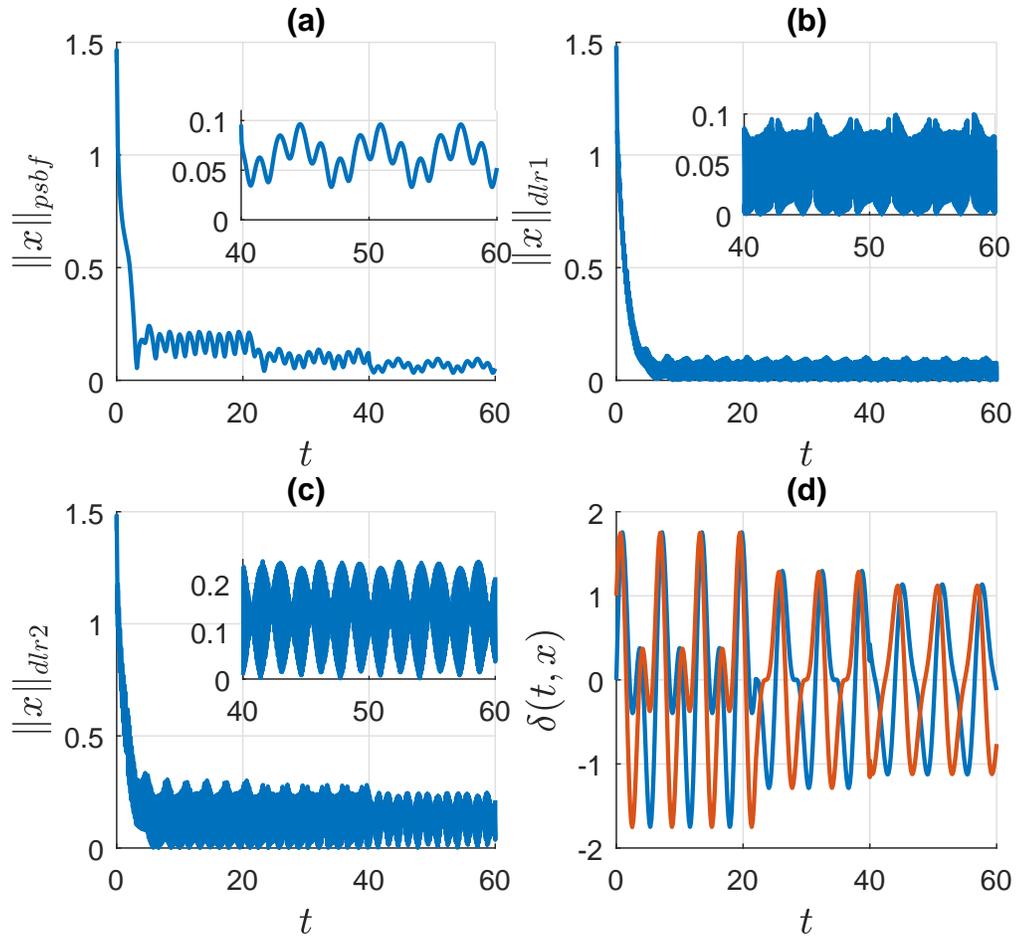


Figura 6.2: Error de seguimiento

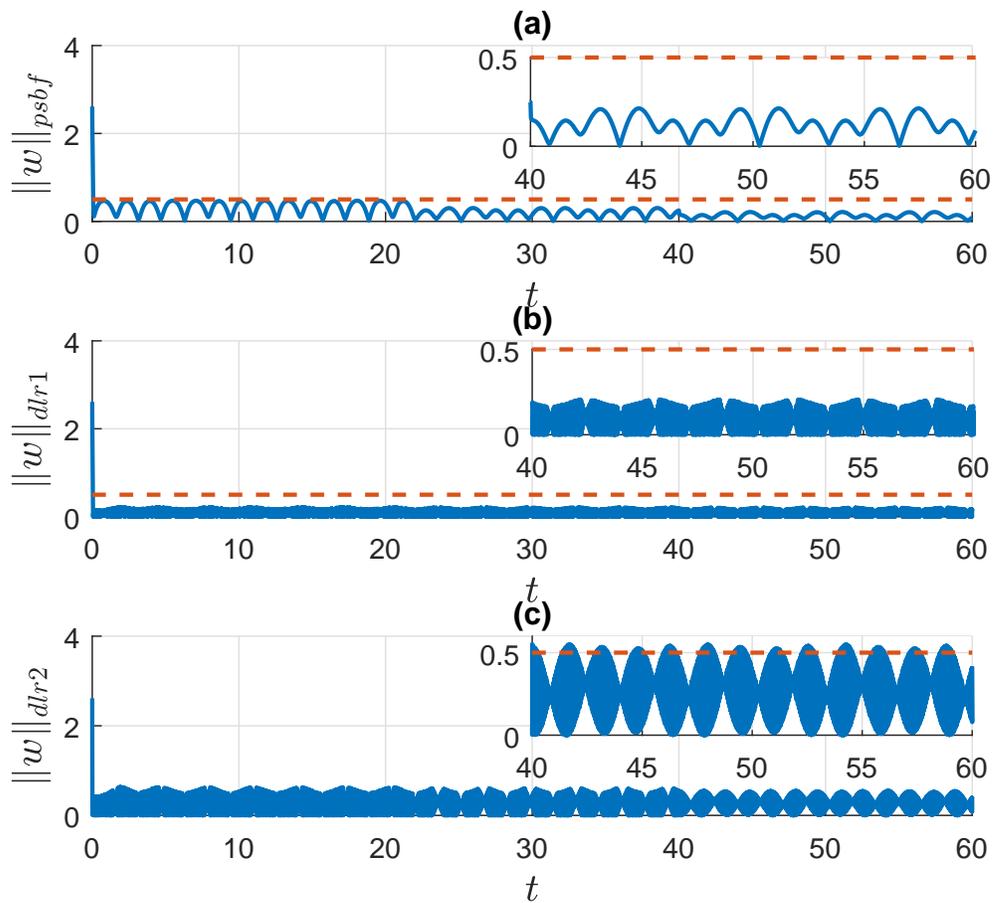


Figura 6.3: Norma de la variable auxiliar

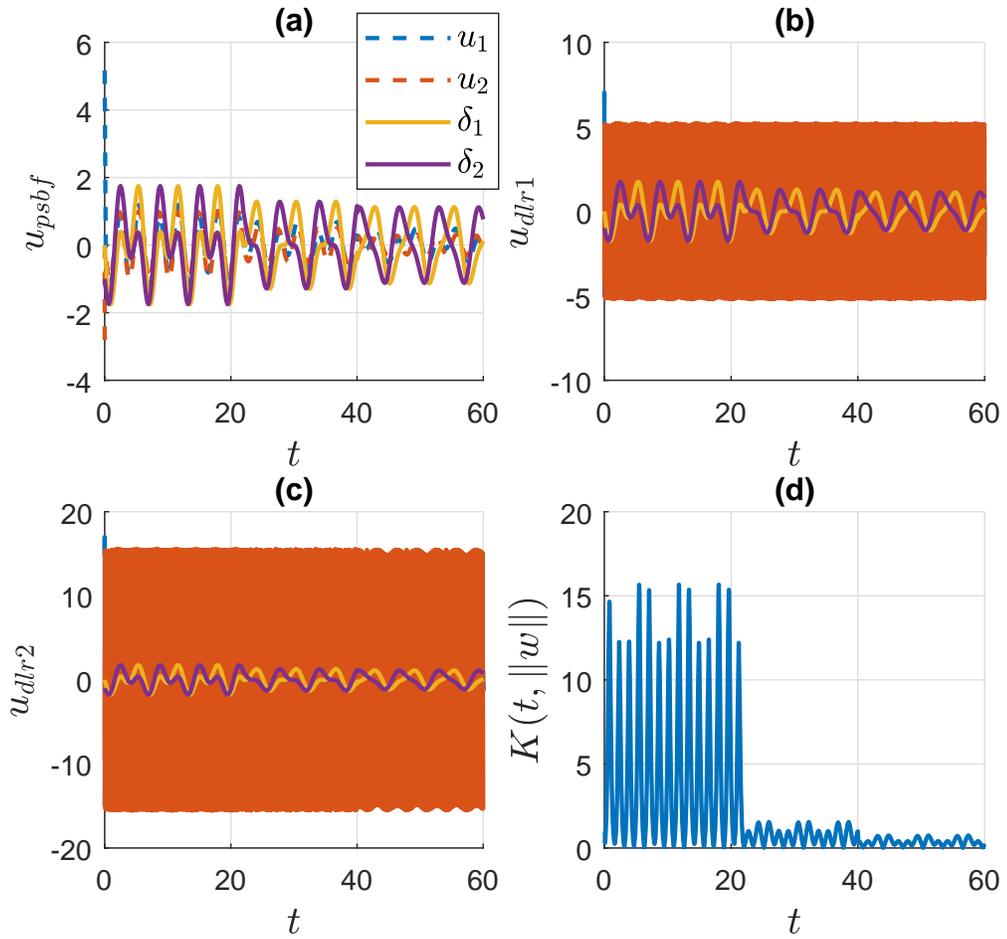


Figura 6.4: Señales de control y ganancia adaptable

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a futuro

Este trabajo propuso una metodología de diseño de superficies de deslizamiento utilizando el rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico. Se mostró que al llevar la superficie propuesta por el rediseño clásico a cero, el sistema recupera las propiedades de convergencia del sistema nominal.

Con esto, el objetivo principal es obtener de manera constructiva el diseño de superficies de deslizamiento y leyes de control por modos deslizantes que generen una señal de control continua.

Por su parte, el método de diseño de superficies no necesita de ninguna transformación, lo cual es una ventaja para el caso no lineal.

7.1. Rediseño basado en funciones de Lyapunov basado vía Super-twisting

En el capítulo 3, se presentó una primera metodología de rediseño basado en funciones de Lyapunov continuo, utilizando la variable de deslizamiento proveniente del rediseño basado en funciones de Lyapunov clásico. Al obtener la dinámica de w , se le asignó una nueva dinámica suponiendo que los parámetros y el sistema nominal son completamente conocidos. De esta forma, se utilizó el algoritmo super-twisting para compensar perturbaciones desde la dinámica de w , y además generando una señal de control continua.

En la Proposición 1 se demostró que el sistema perturbado converge utilizando el control propuesto, y además, que la dinámica en modo deslizante es estable y cumple con las propiedades del control nominal.

Como ejemplos, se presentó el rediseño basado en STA para sistemas LTI utilizando

un control nominal lineal y una función de Lyapunov cuadrática. De igual forma, se presentó un ejemplo no lineal por *backstepping* propuesto en [Khalil \(2002\)](#). Se mostró la viabilidad del método en un robot de dos grados de libertad, para el problema de seguimiento de trayectorias.

7.2. Rediseño basado en funciones de Lyapunov vía algoritmos Lipschitz por modos deslizantes

En el capítulo 4, se presentó una ley de control Lipschitz por modos deslizantes, la cual consiste en dos partes, una parte PI lineal, y otra parte discontinua en el integrador. Dicho control genera una señal de control Lipschitz continua, la cual a su vez, genera un menor efecto de *chattering*. Por otro lado, una desventaja consiste en la necesidad de la derivada de w para su implementación, la cual debe ser calculada con un diferenciador.

La proposición 2 demuestra la estabilidad de dicho algoritmo, y su viabilidad se demuestra en el caso de estudio presentado.

7.3. Enfoque de función barrera para rediseño basado en funciones de Lyapunov

Por último, el capítulo 5 presentó una metodología para rediseño basado en funciones de Lyapunov basada en función barrera, la cual consistió en dos partes : 1) una ley de adaptación que lleve a una vecindad previamente definida de la variable de deslizamiento, y 2) el cambio a la función barrera que asegura que la variable de deslizamiento nunca saldrá de esa vecindad que elige el diseñador.

La Proposición 3, muestra el resultado de la adaptación de la ganancia en el caso de rediseño y que ésta logra el acotamiento final y uniforme de las trayectorias sin necesidad de conocer una cota de la perturbación. Además, se asegura que la adaptación de la ganancia a la solución de la variable de deslizamiento, haciendo así que el control siga la perturbación. Una desventaja clara de este enfoque es que se considera para perturbaciones acotadas por una constante.

Se presenta la viabilidad de dicho control de igual manera en un robot de dos grados de libertad, donde se ve claramente que en simulaciones se cumplió con las cotas calculadas, además de generar una señal de control continua. Además, se propone

una perturbación que decrece con el tiempo, mostrando que la ganancia tiene la capacidad de decrecer junto con la perturbación, lo cual reduce el consumo de energía del actuador.

7.4. Trabajo a futuro

Como problemas abiertos, todavía no se tiene un estudio del rediseño basado en funciones de Lyapunov, tanto clásico como por modos deslizantes, cuando se tienen funciones de Lyapunov débiles *i.e.* su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es negativa semi-definida. Esto ampliaría considerablemente las aplicaciones del método, por ejemplo a leyes de control basadas en pasividad.

Por otro lado, se debe tratar el caso cuando existe coeficiente incierto de control. En ese caso, la dinámica de la variable w no se puede asignar de la manera tratada en este trabajo. Además, el coeficiente incierto genera un error en el control nominal, el cual en adición a la perturbación original, genera una perturbación más complicada.

7.4. TRABAJO A FUTURO

Bibliografia

- J. Ackermann and V. Utkin. Sliding mode control design based on ackermann's formula. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):234–237, 1998.
- A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2005.
- B. R. Barmish and G. Leitmann. On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions. *Transactions of Automatic Control*, 27(1):153–158, 1982.
- B. R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 21(2):246–255, 1983.
- G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):241–246, 1998.
- G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, and E. Usai. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control - INT J CONTR*, 76:875–892, 06 2003. doi: 10.1080/0020717031000099010.
- S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17:101–127, 2005.
- I. Boiko. Analysis of sliding modes in the frequency domain. *International Journal of Control*, 78(13):969–981, 2005.
- C. Byrnes, I. A., and W. J. C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1228–1240, Nov 1991. doi: 10.1109/9.100932.

BIBLIOGRAFÍA

- M. Corless and G. Leitmann. Adaptive control of systems containing uncertain functions and unknown functions with uncertain bounds. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 41(1):155–168, 1983.
- M. Corless and G. Leitmann. Deterministic control of uncertain systems: A lyapunov theory approach. 1990.
- M. J. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic-systems. *Ieee Transactions on Automatic Control*, 26(5):1139–1144, 1981. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/tac.1981.1102785. URL [<GotoISI>://WOS:A1981MJ38700019](#).
- K. Deimling. *Multivalued Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin, Germany., 1992.
- C. Edwards and Y. B. Shtessel. Adaptive continuous higher order sliding mode control. *Automatica*, 65:183–190, 2016.
- T. Gonzalez, J. A. Moreno, and L. Fridman. Variable gain super-twisting sliding mode control. *IET Control Theory Applications*, 9(4):553–562, 2012.
- S. Gutman. Uncertain dynamical systems—a lyapunov min-max approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(3):437–443, 1979.
- S. Gutman and G. Leitmann. Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty. In *1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes*, pages 94–99. IEEE, 1976.
- A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995.
- R. Kelly, S. V., and L. A. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer, 2005.
- H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- G. Leitmann. Guaranteed asymptotic stability for some linear-systems with bounded uncertainties. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the Asme*, 101(3):212–216, 1979. ISSN 0022-0434. doi: 10.1115/1.3426427. URL [<GotoISI>://WOS:A1979HP13200006](#).
- G. Leitmann. On the efficacy of nonlinear control in uncertain systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the Asme*, 102: 95–102, 1981.

BIBLIOGRAFÍA

- G. Leitmann. On one approach to the control of uncertain systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the Asme*, 115(2B): 373–380, 1993. ISSN 0022-0434. doi: 10.1115/1.2899077. URL [GotoISI://WOS:A1993LH13200019](https://doi.org/10.1115/1.2899077).
- A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- A. Levant. Robust and exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- A. Levant. Levant, a.: Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *automatica* 41(5), 823-830. *Automatica*, 41:823–830, 05 2005. doi: 10.1016/j.automatica.2004.11.029.
- F. Lopez-Caamal and J. A. Moreno. Generalised multivariable supertwisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3):634–660, 2018. ISSN 1049-8923. doi: 10.1002/rnc.4311. URL [GotoISI://WOS:000455519500009](https://doi.org/10.1002/rnc.4311).
- A. G. Luk'yanov and V. I. Utkin. Reducing dynamic systems: Regular form. *Autom. Remote Control*, 41(3):5–13, 1981.
- C. Martinez-Fuentes, J. A. Moreno, and L. Fridman. Anti-chattering strategy using twisting controller. *IFAC Papers Online*, 51(13):384–389, 2018.
- J. Moreno. Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In L. Fridman, J. A. Moreno, and R. Iriarte, editors, *Sliding modes after the first decade of the 21st century*, pages 113–149. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- J. A. Moreno. Discontinuous integral control for systems with relative degree two. In *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*, pages 187–218. Springer, 2018.
- J. A. Moreno and M. Osorio. Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):1035–1040, 2012.
- I. Nagesh and C. Edwards. A multivariable super-twisting sliding mode approach. *Automatica*, 01 2014.

BIBLIOGRAFÍA

- D. Y. Negrete-Chávez and J. A. Moreno. Second-order sliding mode output feedback controller with adaptation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10):1523–1543, 2016.
- H. Obeid, L. M. Fridman, S. Laghrouche, and M. Harmouche. Barrier function-based adaptive sliding mode control. *Automatica*, 93:540–544, 2018. ISSN 0005-1098. doi: 10.1016/j.automatica.2018.03.078. URL [GotoISI://WOS:000436916200059](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.03.078).
- T. R. Oliveira, J. P. V. Cunha, and L. Hsu. Adaptive sliding mode control for disturbances with unknown bounds. In *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 59–64. IEEE, 2016.
- F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International Journal of Control*, 83(9):1907–1919, 2010. ISSN 0020-7179. doi: 10.1080/00207179.2010.501385. URL [GotoISI://WOS:000281160000014](https://doi.org/10.1080/00207179.2010.501385).
- E. P. Ryan and M. Corless. Ultimate boundedness and asymptotic stability of a class of uncertain dynamical systems via continuous and discontinuous feedback control. *Ima Journal of Mathematical Control and Information*, 1(3):223–242, 1984. ISSN 0265-0754. doi: 10.1093/imamci/1.3.223. URL [GotoISI://WOS:000208452900002](https://doi.org/10.1093/imamci/1.3.223).
- R. Seeber and M. Horn. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm. In *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 120–125, July 2018. doi: 10.1109/VSS.2018.8460445.
- Y. Shtessel, M. Taleb, and F. Plestan. A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5):759–769, 2012.
- Y. Shtessel, L. Fridman, and F. Plestan. Adaptive sliding mode control and observation. *International Journal of Control*, 89(9):1743–1746, 2016.
- J.-J. E. Slotine, W. Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- V. Utkin. *Sliding modes in optimization and control problems*. Springer Verlag, New York, 1992.
- V. Utkin. Discussion aspects of high-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3):829–833, 2016.

BIBLIOGRAFÍA

- V. I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222, 1977. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/tac.1977.1101446. URL [<GotoISI>://WOS:A1977DC38200008](#).
- U. P. Ventura and L. Fridman. When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? frequency domain criteria. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019.
- P. Vidal, E. V. L. Nunes, and L. Hsu. Output-feedback multivariable global variable gain super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(6):2999–3005, 2017. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/tac.2016.2609602. URL [<GotoISI>://WOS:000402733600035](#).
- M. Zhihong, A. Paplinski, and H. Wu. A robust mimo terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2464–2469, 1 1994. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/9.362847.

BIBLIOGRAFÍA

Apéndice A

Demostración del Teorema 3

Con el fin de simplificar la prueba, considere el caso escalar, aunque es fácil ver de [Vidal et al. \(2017\)](#) que la extensión al caso multivariable de [Gonzalez et al. \(2012\)](#) es inmediata. Sólo es necesario considerar la función de Lyapunov de [Moreno \(2011\)](#) $V_s(w, z)$

$$V_s(w, z) = \zeta^T P_s \zeta \quad (\text{A.1})$$

donde $\zeta^T = [\phi_1(w), z]$, y P_s es

$$P_s = \begin{bmatrix} p_{s1} & p_{s2} \\ p_{s2} & p_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta + 4\epsilon^2)\mathbb{I} & -2\epsilon\mathbb{I} \\ -2\epsilon\mathbb{I} & \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

considere $\mathbb{I} = 1$ para el caso SISO, y constantes positivas θ y ϵ . La función de Lyapunov para la dinámica de w es positiva definida, continua y diferenciable en casi todos lados excepto en el conjunto $\mathbb{S} = \{(w, z) \in \mathbb{R}^2 | w = 0\}$. Si reescribimos la perturbación como

$$\begin{aligned} d_1(t, \eta, w) &= \alpha_1(t, x)\phi_1(t, x), \\ \frac{d}{dt}d_2(t, x) &= \alpha_2(t, x)\phi_2(t, x). \end{aligned}$$

Retomando que $\phi_2(w) = \phi_1'(w)\phi_1(w)$, y que la derivada temporal de ζ puede ser calculada como

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(w) \begin{bmatrix} -[k_1(t, x) - \alpha_1(t, x)] & 1 \\ -[k_1(t, x) - \alpha_2(t, x)] & 0 \end{bmatrix} \zeta, = \phi_1'(w) A_s(t, x) \zeta,$$

para cualquier punto en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}$. Calculando la derivada temporal de $V_s(w, z)$

$$\begin{aligned}\dot{V}_s(w, z) &= \phi'_1(w) \zeta^T \left(A_s^T(t, x) P_s + P_s A_s(t, x) \right) \zeta, \\ &= -\phi'_1(w) \zeta^T Q_s(t, x) \zeta,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}Q_s(t, x) &= \begin{bmatrix} Q_{s1} & * \\ Q_{s2} & -p_{3s} \end{bmatrix} \\ Q_{s1} &= 2[k_1(t, x) - \alpha_1(t, x)] p_{s1} + 2[k_2(t, x) - \alpha_2(t, x)] p_{s3}, \\ Q_{s2} &= [k_1(t, x) - \alpha_1(t, x)] p_{s3} + [k_2(t, x) - \alpha_2(t, x)] p_{s2} - p_{1s},\end{aligned}$$

donde * indica el elemento simétrico de la matriz. Entonces,

$$\begin{aligned}Q_s - 2\epsilon \mathbb{I}, \\ = \begin{bmatrix} 2\theta k_1 + 4\epsilon(2\epsilon k_1 - k_2) - 2(\theta + 4\epsilon^2)\alpha_1 + 4\epsilon\alpha_2 - 2\epsilon & * \\ k_2 - 2\epsilon k_1 - (\theta + 4\epsilon^2) + 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 2\epsilon \end{bmatrix}\end{aligned}$$

seleccionando $k_2 = \theta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1$, se tiene que

$$Q_s - 2\epsilon \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 2\theta k_1 - (\theta + 4\epsilon)^2(4\epsilon + 2\alpha_1) + 4\epsilon\alpha_2 - 2\epsilon & * \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 2\epsilon \end{bmatrix}$$

Es claro ver que la selección de ganancias

$$\begin{aligned}k_1(t, x) &= c_1 + \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\rho_1 + \rho_2]^2 + 2\epsilon\rho_2 + \epsilon \right. \\ &\quad \left. + [2\epsilon + \rho_1] (\theta + 4\epsilon^2) \right\}, \\ k_2(t, x) &= \theta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x).\end{aligned}$$

aseguran la negatividad definida de la derivada, con lo cual $Q_s - 2\epsilon \mathbb{I}$ es positivo definido para todo (t, x) , y

$$\begin{aligned}\dot{V}_s &= -\phi'_1(w) \zeta^T Q_s(t, x) \zeta, \\ &\leq -2\epsilon \phi'_1(w) \zeta^T \zeta,\end{aligned}$$

y puede verse claramente $\phi'_1(w) > 0$. Dado que $\lambda_{\min}(P_s) \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}(P_s) \|\zeta\|_2^2$, y

$$|\zeta_1| \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V_s^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}(P_s)},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq -\mu_1 V_s^{\frac{1}{2}} - \mu_2 V_s, \\ \mu_1 &= \frac{\epsilon \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s)}{\lambda_{\max}(P_s)}, \quad \mu_2 = \frac{2\epsilon k_3}{\lambda_{\max}(P_s)}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Utilizando el Teorema de estabilidad de Lyapunov para inclusiones diferenciales [Deimling \(1992\)](#), podemos concluir que el punto de equilibrio $(w, z) = 0$ converge en tiempo finito. la ecuación de la solución diferencial entonces,

$$\dot{\varsigma} = -\mu_1 \varsigma^{\frac{1}{2}} - \mu_2 \varsigma, \quad \varsigma(0) = \varsigma_0 \geq 0,$$

se puede calcular como

$$\varsigma(t) = e^{(-\mu_2 t)} \left[\varsigma_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(1 - e^{-\frac{\mu_2}{2} t} \right) \right]^2. \tag{A.3}$$

Por el lema de comparación [Khalil \(2002\)](#), se concluye que $(w(t), z(t))$ converge en tiempo finito, con una función de asentamiento,

$$t_s = \frac{2}{\mu_2} \ln \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} V_s(w(0), z(0))^{1/2} + 1 \right).$$