UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

El determinante de Deligne y el 2-grupo de homotopía de los espacios conexos

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

Elhoim Llorente I Sumano y Ramírez

DIRECTOR DE LA TESIS

Dr. Alberto León Kushner Schnur, Facultad de Ciencias, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

Dr. Omar Antolín Camarena, IMATE, UNAM
Dr. José Pablo Peláez Menaldo, IMATE, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, 8 Noviembre 2019.

El determinante de Deligne y el 2-grupo de homotopía de los espacios conexos

Elhoim Sumano

Índice general

Introducción

Denotemos como $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}$ al conjunto simplicial reducido asociado a una categoría exacta $\mathcal{A}$ por la $s_\bullet$-construcción de [**Wal83**]. Entonces un n-simplejo de $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}$ es una serie de $n-1$ monomorfismos admisibles de $\mathcal{A}$ junto con una elección de cocientes.

Los grupos de homotopía de $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}$ son por definición los *K-grupos de Quillen* de $\mathcal{A}$; mas precisamente $K_n(\mathcal{A}) = \pi_{n+1}\big(\mathbf{K}^{\mathcal{A}}\big)$ para $n \geq 0$. Recordemos la siguiente propiedad universal (no estable) de los K-grupos de Quillen inferiores de $\mathcal{A}$:

K0 El grupo $K_0(\mathcal{A})$, es decir el grupo fundamental del conjunto simplicial reducido $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}$, representa al funtor:

$$\mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathbf{ad}_{\mathcal{A}}} \mathbf{Set}\ ;$$

de las *funciones aditivas de $\mathcal{A}$*, donde una función aditiva de $\mathcal{A}$ con valores en un grupo G (no necesariamente conmutativo) es una función $\mathbf{a}\colon \operatorname{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow G$ con las siguientes propiedades:

(I) $\mathbf{a}(0) = e_G$ el elemento neutro de G.

(II) $\mathbf{a}(B) = \mathbf{a}(A)\cdot\mathbf{a}(C)$ para cualquier sucesión exacta de $\mathcal{A}$:

$$A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C\ .$$

Ver las Secciones §7.3 y §16.1 de este trabajo.

K1 El 2-grupo fundamental del conjunto simplicial reducido $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}$, cuyos grupos de homotopía son los grupos $K_0(\mathcal{A})$ y $K_1(\mathcal{A})$, representa al funtor con valores en la categoría **Set** de las (*clases de homotopía de los*) *determinantes de* $\mathcal{A}$ definido en la categoría homotópica de los 2-grupos (no necesariamente conmutativos):

$$2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\widetilde{\mathbf{det}}_{\mathcal{A}}(\,\cdot\,)} \mathbf{Set}\ .$$

Ver §4.6 of [**Del87**] y la Sección §16.3 de este trabajo.

Hay una versión enriquecida de la propiedad **K1**: Denotemos como $\mathbb{K}^{\mathcal{A}}$ al conjunto bisimplicial reducido asociado a $\mathcal{A}$ por la $w\mathcal{S}_\bullet$-construcción de [**Wal83**]. Entonces un p-simplejo del conjunto simplicial $\mathbb{K}^{\mathcal{A}}_{\bullet,q}$ es una p-cadena de isomorfismos naturales entre elementos de $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}_q$. En particular los conjuntos simpliciales reducidos $diag(\mathbb{K}^{\mathcal{A}})$ y $\mathbf{K}^{\mathcal{A}}$ son débilmente equivalentes de forma canónica.

Se tiene:

K1E El 2-grupo fundamental del conjunto simplicial reducido $diag(\mathbb{K}^{\mathcal{A}})$ representa al funtor con valores en la categoría homotópica de los grupoides $h\mathbf{Grpd}$ de los *determinantes* (*funtoriales*) *de* $\mathcal{A}$ definido en la categoría de los 2-grupos (no necesariamente conmutativos):

$$2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathbf{det}_{\mathcal{A}}(\cdot)} h\mathbf{Grpd}\ .$$

Ver §4.3 de [**Del87**] y las Secciones §7.4 y §16.4 de este trabajo.

En los artículos [**MT07**] y [**MTW15**], usando módulos cuadráticos se demuestra la propiedad **K1**E para cualquier conjunto bisimplicial reducido, en particular para el conjunto bisimplicial asociado a un derivador como en [**Mal07a**] o a una categoría de Waldhausen por la $w\mathcal{S}_\bullet$-construcción.

En esta tesis la propiedad universal **K1**E que tiene el 2-grupo fundamental de cualquier conjunto bisimplicial reducido, será deducida de las propiedades homotópicas que tiene el conjunto bisimplicial reducido $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ asociado a todo 2-grupo $\mathcal{G}$ por el funtor 2-nervio de [**LP08**], en la estructura de categoría de modelos simplicial "canónica"sobre la categoría $\mathbf{ssSet}_0$ de los conjuntos bisimplicailes reducidos que modela los 2-tipos de homotopía punteados conexos (ver la Proposición 11.3.1, el Teorema 15.2.2 y la Sección 16 del Capítulo 3)

La estructura de la tesis es la siguiente:

CAPÍTULO 1. En las Secciones 1, 2 y 3 recordamos la notación y las propiedades básicas del concepto de (co)límite en una categoría usual y en las Secciones 4, 5 y 6 extendemos este concepto al de (co)limite homotópico en una categoría de modelos, demostrando sus propiedades de manera análoga a las de los (co)límites clásicos. Posteriormente en la Sección 7, usando cuadrados homotópicamente (co)cartesianos, definimos la K-teoría de un categoría de modelos (respecto de una familia de sus objetos).

CAPÍTULO 2. En la Sección 8 recordamos notación básica sobre la estructura de categoría de modelos simplicial en la categoría de los conjuntos simpliciales **sSet**, donde las equivalencias débiles son las n-equivalencias débiles $\mathbf{W}_n$ (para alguna $0 \leq n \leq \infty$) y las cofibraciones son los monomorfismos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{mono}, \mathbf{W}_n)$. Mientras que en la Sección 9 revisamos condiciones equivalentes para que en una categoría de modelos simplicial su enriquecimiento sea de hecho un enriquecimiento compatible con las n-equivalencias débiles.

En las Secciones 10 y 11 recordamos para $0 \leq n \leq \infty$ dos categorías de modelos simpliciales equivalentes de Quillen que modelan los n-tipos de homotopía punteados conexos. Primero revisamos en la Sección 10 la estructura de categorías de modelos simplicial en la categoría de los conjuntos simpliciales reducidos $\mathbf{sSet}_0$ donde las cofibraciones son los monomorfismos, las equivalencias débiles son las n-equivalencias homotópicas débiles $\nu^\star\mathbf{W}_n$, y el espacio de funciones es la restricción a $\mathbf{sSet}_0$ del espacio de funciones habitual para los conjuntos simpliciales punteados. Entonces en la Proposición 10.1.8 damos un conjunto generador de cofibraciones triviales para la familia de las fibraciones entre los objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{mono}, \nu^\star\mathbf{W}_n)$.

Posteriormente en la Sección 11, aplicando la construcción de [**Dug01**] a la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{mono}, \nu^\star\mathbf{W}_n)$, deducimos una estructura de categoría de modelos simplicial en la categoría de los conjuntos bisimpliciales reducidos $\mathbf{ssSet}_0$ donde las cofibraciones son los monomorfismos, las equivalencias débiles son las n-equivalencias homotópicas débiles diagonales $d^\star\mathbf{W}_n$ y el espacio de funciones es inducido del funtor $p_1^*(\Delta^\bullet)\colon \Delta \to \mathbf{ssSet}_0$ definido por $p_1^*(\Delta^n)_{p,q} = \Delta^n_p$. En el Corolario 11.3.4 obtenemos condiciones suficientes para que un conjunto bisimplicial reducido sea un objeto fibrante en la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{mono}, d^\star\mathbf{W}_n)$.

Capítulo 3. Comenzamos el Capítulo en la Sección 13 recordando las propiedades homotópicas del funtor nervio (geométrico) para las categorías pequeñas, cuando lo restringimos a los grupos. En la Sección 14 revisamos la 2-categoría $\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{Nlax}$ de las categorías monoidales, los funtores monoidales laxos unitarios y las transformaciones entre ellos, así como la sub-2-categoría plena 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$ de $\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{Nlax}$ cuyos objetos son los 2-grupos.

Por otro lado, en la Sección 15 comenzamos con la definición del funtor nervio (geométrico) $\mathcal{N}\colon \mathbf{cat}^{\otimes}_{Nlax} \longrightarrow \mathbf{sSet}_0$ como en [**Str87**], y probamos en el Lema 15.1.1 que $\mathcal{N}$ es el mismo que el funtor nervio de [**Dus02**] cuando lo restringimos a las bicategorías con un objeto. En la Proposición 15.1.4 recordamos que el nervio de un 2-grupo $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{mono}, \nu^\star\mathbf{W}_2)$. Posteriormente en §15.2 definimos un funtor nervio $\mathcal{N}^2\colon \mathbf{cat}^{\otimes}_{Nlax} \longrightarrow \mathbf{ssSet}_0$ tomando una “resolución simplicial”del funtor $\mathcal{N}$. Entonces probamos en el Teorema 15.2.2 que $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{mono}, d^\star\mathbf{W}_2)$ para cualquier 2-grupo $\mathcal{G}$. Más aún, probamos en el Corolario 15.2.5 que el funtor $\mathcal{N}^2$ es fielmente pleno y en §15.2.2 que $\mathcal{N}^2$ admite una extensión a un funtor simplicial fielmente pleno.

Finalmente en la Sección 16 deducimos las propiedades **K1** y **K1**E señaladas arriba (resp. la propiedad **K0**) de las propiedades homotópicas de los nervios geométricos de un 2-grupo $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ (resp. el nervio geométrico de un grupo $\mathrm{N}(G)$) en la categoría de modelos correspondiente $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{mono}, \nu^\star\mathbf{W}_2)$ o $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{mono}, d^\star\mathbf{W}_2)$ $\big($resp. $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{mono}, \nu^\star\mathbf{W}_1)\big)$.

Capítulo 1

Los K-grupos de una categoría de modelos

En el presente Capítulo recordamos el concepto de (co)límite homotópico en una categoría de modelos, demostrando sus propiedades de manera análoga a las de los (co)límites clásicos en una categoría usual. Posteriormente, usando cuadrados homotópicamente (co)cartesianos, definimos la K-teoría de un categoría de modelos (respecto de una familia de sus objetos).

1. Preliminares

§1.1. Universos y categorías. En algunas partes de este trabajo pueden aparecer problemas de tamaño con las familias de objetos que consideramos, concretamente en la construcción de la categoría de fracciones de una categoría con equivalencias débiles. Para resolver estas dificultades supondremos como fundamentos a los axiomas de Zermelo-Frenkel (ver por ejemplo [**Kun95**]), el axioma de elección y la existencia de al menos un universo de Grothendieck, al que fijamos y denotamos como $\mathcal{U}$ (ver por ejemplo [**Low14**]).

Cualquier familia de objetos con la que trabajemos se supondrá entonces que es un conjunto. Más aún, definimos una *categoría abstracta* (resp. una 2-*categoría abstracta*) como una categoría (resp. una 2-categoría) en el sentido habitual, cuya familia de todos sus objetos y la de todas sus flechas (resp. sus objetos, sus 1-flechas y sus 2-flechas) son conjuntos. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abstracta (resp. una 2-categoría abstracta), denotamos como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$) al conjunto (resp. a la categoría abstracta) de los morfismos en $\mathcal{C}$ de X en Y.

Por otro lado, definimos un *conjunto pequeño* (resp. *conjunto grande*) como un conjunto Ω tal que $\Omega \in \mathcal{U}$ (resp. $\Omega \subseteq \mathcal{U}$). Una *categoría grande* como una categoría abstracta tal que el conjunto de todos sus objetos y el de todos sus morfismos son conjuntos grandes. Una *categoría* como una categoría grande $\mathcal{C}$ cuyo conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un conjunto pequeño para cualesquiera dos objetos X y Y de $\mathcal{C}$. Y finalmente una *categoría pequeña* como una categoría cuyo conjunto de objetos es un conjunto pequeño (ver también §26.1 de [**DHKS04**]).

Denotamos como $\underline{\mathbf{CAT}}$ (resp. $\underline{\mathbf{Cat}}$, $\underline{\mathbf{cat}}$) a la 2-categoría abstracta de las categorías grandes (resp. las categorías, las categorías pequeñas), los funtores y las transformaciones naturales entre ellas. Escribimos también **CAT**, **Cat** y **cat** para denotar a las categorías abstractas inducidas de $\underline{\mathbf{CAT}}$, $\underline{\mathbf{Cat}}$ y $\underline{\mathbf{cat}}$ respectivamente, al olvidar las transformaciones naturales.

§1.1.1. Categorías de fracciones. Si $\mathcal{C}$ es una categoría y $\mathbf{W}$ es una familia arbitraria de morfismos de $\mathcal{C}$, la *categoría de fracciones* $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ como se describe por ejemplo en §5.2 de [**Bor94**] (ver también §1.1 de [**GZ76**] o §2.1 de [**Rie14**]), la cual se obtiene de $\mathcal{C}$ al *formalmente invertir* los elementos de $\mathbf{W}$, es generalmente una categoría grande.

Más aún, se muestra que la construcción “categoría de fracciones” define un 2-funtor:

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{Cat}}_{\mathbf{W}} \arrow[r] & \underline{\mathbf{CAT}} \,. \\ (\mathcal{C}, \mathbf{W}) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

donde $\underline{\mathbf{Cat}}_{\mathbf{W}}$ $\big($resp. $\underline{\mathbf{CAT}}_{\mathbf{W}}$ en (1.2) de más abajo$\big)$ denota a la siguiente 2-categoría abstracta: Sus objetos son las parejas $(\mathcal{C}, \mathbf{W})$ formadas de una categoría (resp. una categoría grande) $\mathcal{C}$ y de una familia distinguida de morfismos $\mathbf{W}$ de $\mathcal{C}$. Una 1-flecha de $(\mathcal{C}, \mathbf{W})$ en $(\mathcal{D}, \mathbf{W}')$ es un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $F(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}'$. Si F y G son dos 1-flechas, una 2-flecha de F en G es una transformación natural entre los funtores.

El 2-funtor (1.1) tiene la siguiente propiedad universal: Existe una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{C}, \mathbf{W}) \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{C} \\ \underline{\mathbf{Cat}}_{\mathbf{W}} \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] & \Downarrow\gamma & \underline{\mathbf{CAT}} \\ (\mathcal{C}, \mathbf{W}) \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \end{tikzcd}$$

tal que si $\mathcal{D}$ es una categoría grande, $\mathcal{C}$ es una categoría y $\mathbf{W}$ es una familia arbitraria de morfismos de $\mathcal{C}$, entonces el siguiente funtor:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbf{CAT}}}\big(\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}], \mathcal{D}\big) \xrightarrow{-\star\gamma_{(\mathcal{C},\mathbf{W})}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbf{CAT}}_{\mathbf{W}}}\big((\mathcal{C}, \mathbf{W}), (\mathcal{D}, \mathbf{iso}_{\mathcal{D}})\big) \tag{1.2}$$

es un isomorfismo de categorías, donde $\mathbf{iso}_{\mathcal{D}}$ denota a la familia de todos los isomorfismos de $\mathcal{D}$.

§1.2. Transformaciones conjugadas.

Sean:

$$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}\ , \quad G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}\ , \quad P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C} \quad \text{y} \quad Q\colon \mathcal{B} \to \mathcal{D}$$

funtores entre categorías abstractas, como en el siguiente cuadrado no necesariamente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} & \mathcal{C} \arrow[l, "G"'] \\ \mathcal{B} \arrow[u, "Q"] \arrow[ur, phantom, "?"] & \mathcal{A} \,. \arrow[l, "F"] \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

Supongamos que los funtores P y Q (resp. F y G) tienen adjuntos izquierdos (resp. derechos). Más precisamente, elijamos funtores adjuntos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "Q_{izq}"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend right, "P"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "P_{izq}"'] \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G_{der}"] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "F_{der}"] \end{tikzcd} \right),$$

junto con una unidad y una counidad (resp. una counidad y una unidad):

$$\mathrm{id} \overset{\eta^P}{\Longrightarrow} P \circ P_{izq} \qquad \text{y} \qquad Q_{izq} \circ Q \overset{\varepsilon^Q}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \tag{1.4}$$

$$\left(\text{resp.} \quad F \circ F_{der} \overset{\varepsilon^F}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{id} \overset{\eta^G}{\Longrightarrow} G_{der} \circ G \right),$$

respectivamente.

Si $\mathrm{Nat}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ denota al conjunto de las transformaciones naturales entre dos funtores, recordemos que se tiene una asignación:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(G \circ P, Q \circ F) & \longrightarrow & \mathrm{Nat}(Q_{izq} \circ G, F \circ P_{izq}) \\ \Theta & \longmapsto & \Theta_{izq} \end{array} \tag{1.5}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(G \circ P, Q \circ F) & \longrightarrow & \mathrm{Nat}(P \circ F_{der}, G_{der} \circ Q) \\ \Theta & \longmapsto & \Theta_{der} \end{array} \right)$$

que a cada transformación natural:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} & \mathcal{C} \arrow[l, "G"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \Theta"] \\ \mathcal{B} \arrow[u, "Q"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

asocia su *conjugada izquierda* (resp. *derecha*) *con respecto a* (1.3) y (1.4):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, "Q_{izq}"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "P_{izq}"] \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[ul, phantom, "\Searrow \Theta_{izq}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "G_{der}"] & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "F_{der}"'] \arrow[ur, phantom, "\Theta_{der} \Nwarrow"] & \mathcal{A} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} \right), \tag{1.7}$$

la cual se define como la composición:

$$(1.8)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=huge] Q_{izq}\circ G \arrow[r, Rightarrow, "(Q_{izq}\circ G)\star\eta^P"] \arrow[d, Rightarrow, "\Theta_{izq}"', "\shortparallel"] & Q_{izq}\circ G\circ P\circ P_{izq} \arrow[d, Rightarrow, "Q_{izq}\star\Theta\star P_{izq}"] \\ F\circ P_{izq} & Q_{izq}\circ Q\circ F\circ P_{izq} \arrow[l, Rightarrow, "\epsilon^Q\star(F\circ P_{izq})"] \end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\qquad \begin{tikzcd}[column sep=huge] P\circ F_{der} \arrow[r, Rightarrow, "\eta^G\star(P\circ F_{der})"] \arrow[d, Rightarrow, "\Theta_{der}"', "\shortparallel"] & G_{der}\circ G\circ P\circ F_{der} \arrow[d, Rightarrow, "G_{der}\star\Theta\star F_{der}"] \\ G_{der}\circ Q & G_{der}\circ Q\circ F\circ F_{der} \arrow[l, Rightarrow, "(G_{der}\circ Q)\star\epsilon^F"] \end{tikzcd}\right).$$

Por abuso, en ocasiones simplemente decimos que la transformación natural (1.7) es *una conjugada izquierda* (resp. *una conjugada derecha*) *de la transformación natural* (1.6).

En la literatura se suele decir que la transformación natural (1.6) cumple *la condición de Beck-Chevalley* si alguna conjugada izquierda de (1.6) es un isomorfismo (ver las propiedades en §1.2.1).

§1.2.1. Propiedades simples. La función (1.5) es biyectiva. En efecto, Θ es igual a la conjugada derecha (resp. izquierda) de Θ_{izq} (resp. de Θ_{der}) con respecto a los funtores adjuntos (1.3) y a las transformaciones naturales:

$$(1.9)\qquad P\circ P_{der} \overset{\varepsilon^P}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{id} \overset{\eta^Q}{\Longrightarrow} Q_{der}\circ Q$$

$$\left(\text{resp.}\quad \mathrm{id} \overset{\eta^F}{\Longrightarrow} F\circ F_{izq} \ \text{ y } \ G_{izq}\circ G \overset{\varepsilon^G}{\Longrightarrow} \mathrm{id}\right),$$

inversas[1] de las transformaciones naturales en (1.4).

Más aún, dos conjugados izquierdos (resp. derechos) Θ_{izq} y Θ'_{izq} (resp. Θ_{der} y Θ'_{der}) de la misma transformación natural Θ: $G\circ P \Longrightarrow Q\circ F$, están relacionados por isomorfismos de la forma:

$$(1.10)\quad \begin{tikzcd} Q'_{izq}\circ G \arrow[r, Rightarrow, "\beta\star G", "\cong"'] \arrow[d, Rightarrow, "\Theta'_{izq}"'] & Q_{izq}\circ G \arrow[d, Rightarrow, "\Theta_{izq}"] \\ F\circ P'_{izq} \arrow[r, Rightarrow, "\cong", "F\star\alpha"'] & F\circ P_{izq} \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} P\circ F'_{der} \arrow[r, Rightarrow, "P\star\alpha", "\cong"'] \arrow[d, Rightarrow, "\Theta'_{der}"'] & P\circ F_{der} \arrow[d, Rightarrow, "\Theta_{der}"] \\ G'_{der}\circ Q \arrow[r, Rightarrow, "\cong", "\beta\star Q"'] & G_{der}\circ Q \end{tikzcd}\right).$$

---

[1] Una unidad y una counidad de una misma adjunción son llamadas *inversas* si ellas verifican las identidades triangulares.

En efecto, sabemos que si consideramos otros funtores adjuntos izquierdos (resp. derechos):

(1.11)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "Q'_{izq}"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend right, "P"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "P'_{izq}"'] \end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G'_{der}"] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "F'_{der}"] \end{tikzcd}\right),$$

con respectivas transformaciones naturales:

(1.12)
$$\mathrm{id} \overset{\overline{\eta}^P}{\Longrightarrow} P \circ P'_{izq} \qquad \text{y} \qquad Q'_{izq} \circ Q \overset{\overline{\varepsilon}^Q}{\Longrightarrow} \mathrm{id}$$

$$\Big(\text{resp.} \quad F \circ F'_{der} \overset{\overline{\varepsilon}^F}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{id} \overset{\overline{\eta}^G}{\Longrightarrow} G'_{der} \circ G \Big),$$

existen isomorfismos naturales:

$$P'_{izq} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} P_{izq} \quad \text{y} \quad Q'_{izq} \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q_{izq}$$

$$\Big(\text{resp.} \quad F'_{der} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} F_{der} \quad \text{y} \quad G'_{der} \overset{\beta}{\Longrightarrow} G_{der} \Big),$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} & P \circ P_{izq} \\ \mathrm{id} \arrow[ur, Rightarrow, "\eta^P"] \arrow[dr, Rightarrow, "\overline{\eta}^P"'] & \\ & P \circ P'_{izq} \arrow[uu, Rightarrow, "P\star\alpha"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} Q_{izq} \circ Q \arrow[dr, Rightarrow, "\epsilon^Q"] & \\ & \mathrm{id} \\ Q'_{izq} \circ Q \arrow[uu, Rightarrow, "\beta\star Q"] \arrow[ur, Rightarrow, "\overline{\epsilon}^Q"'] & \end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} F \circ F_{der} \arrow[dr, Rightarrow, "\epsilon^F"] & \\ & \mathrm{id} \\ F \circ F'_{der} \arrow[uu, Rightarrow, "F\star\alpha"] \arrow[ur, Rightarrow, "\overline{\epsilon}^F"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & G_{izq} \circ G \\ \mathrm{id} \arrow[ur, Rightarrow, "\eta^G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\overline{\eta}^G"'] & \\ & G'_{izq} \circ G \arrow[uu, Rightarrow, "\beta\star G"'] \end{tikzcd}\right).$$

Se verifica entonces que el cuadrado (1.10) es conmutativo ya que éste es una cara del cubo:

$$\begin{tikzcd}
Q'_{izq}\circ G \arrow[rr, Rightarrow, "(Q'_{izq}\circ G)\star\overline{\eta}^P"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta\star G"] \arrow[dd, Rightarrow] & & Q'_{izq}\circ G\circ P\circ P'_{izq} \arrow[dr, Rightarrow, "\beta\star(G\circ P)\star\alpha"] \arrow[dd, Rightarrow, "Q'_{izq}\star\Theta\star P'_{izq}"] & \\
& Q_{izq}\circ G \arrow[rr, Rightarrow, "(Q_{izq}\circ G)\star\eta^P"] \arrow[dd, Rightarrow] & & Q_{izq}\circ G\circ P\circ P_{izq} \arrow[dd, Rightarrow, "Q_{izq}\star\Theta\star P_{izq}"] \\
F\circ P'_{izq} \arrow[dr, Rightarrow, "F\star\alpha"] & & Q'_{izq}\circ Q\circ F\circ P'_{izq} \arrow[ll, Rightarrow, "\overline{\epsilon}^Q\star(F\circ P'_{izq})"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta\star(Q\circ F)\star\alpha"] & \\
& F\circ P_{izq} & & Q_{izq}\circ Q\circ F\circ P_{izq} \arrow[ll, Rightarrow, "\epsilon^Q\star(F\circ P_{izq})"]
\end{tikzcd}$$

cuyas otras caras son cuadrados conmutativos.

Mostremos:

LEMA 1.2.1. *Si la transformación natural* $\Theta\colon\ G\circ P\Longrightarrow Q\circ F$ *admite una transformación conjugada izquierda* $\Theta_{izq}\colon\ Q_{izq}\circ G\Longrightarrow F\circ P_{izq}$ *y una conjugada derecha* $\Theta_{der}\colon\ P\circ F_{der}\Longrightarrow G_{der}\circ Q$ *, entonces las tranformaciones naturales* Θ_{izq} *y* Θ_{der} *son conjugadas la una de la otra en el sentido de IV.7 en* [**Lan98**].

De manera explícita se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\big(Q_{izq}\circ G(x),b\big) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(x,G_{der}\circ Q(b)\big) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\big(F\circ P_{izq}(x),b\big) \arrow[u, "-\circ(\Theta_{izq})_x"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(x,P\circ F_{der}(b)\big) \arrow[u, "(\Theta_{der})_b\circ-"']
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

para todo objeto x *de* $\mathcal{C}$ *y* b *de* $\mathcal{B}$*, donde los isomorfismos horizontales son inducidos de las transformaciones naturales* (1.4) *que definen* Θ_{izq} *y* Θ_{der} *y sus transformaciones naturales inversas* (1.9).

En particular la transformación $\Theta_{izq}\colon\ Q_{izq}\circ G\Longrightarrow F\circ P_{izq}$ *es un isomorfismo si y solamente si la transformación* $\Theta_{der}\colon\ P\circ F_{der}\Longrightarrow G_{der}\circ Q$ *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo al Teorema 2 de IV.7 en [**Lan98**], es suficiente ver que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id} \arrow[r, Rightarrow, "\eta^2"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta^1"'] & (G_{der}\circ Q)\circ(Q_{izq}\circ G) \arrow[d, Rightarrow, "(G_{der}\circ Q)\star\Theta_{izq}"] \\
(P\circ F_{der})\circ(F\circ P_{izq}) \arrow[r, Rightarrow, "\Theta_{der}\star(F\circ P_{izq})"'] & (G_{der}\circ Q)\circ(F\circ P_{izq})
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

donde η^1 y η^2 son las siguientes transformaciones naturales:

$$\mathrm{id} \xRightarrow{\eta^P} P \circ P_{izq} \xRightarrow{P \star \eta^F \star P_{izq}} P \circ (F_{der} \circ F) \circ P_{izq} = (P \circ F_{der}) \circ (F \circ P_{izq})$$

y

$$\mathrm{id} \xRightarrow{\eta^G} G_{der} \circ G \xRightarrow{G_{der} \star \eta^Q \star G} G_{der} \circ (Q \circ Q_{izq}) \circ G = (G_{der} \circ Q) \circ (Q_{izq} \circ G)$$

respectivamente.

Para mostrar esto escribamos a los morfismos $\big[\Theta_{der} \star (F \circ P_{izq})\big] \circ \eta^1$ y $\big[(G_{der} \circ Q) \star \Theta_{izq}\big] \circ \eta^2$ del diagrama (1.14) como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} & \\
\mathcal{D} \arrow[ur, bend left, "G_{der}"] & \mathcal{C} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[l, "G"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\eta^G}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "P_{izq}"] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "Q"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[u, "P"] \arrow[ul, phantom, "\swArrow\ \Theta"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, bend left, "F"] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow \eta^P"] \\
 & \mathcal{B} \arrow[ul, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "F_{der}"] \arrow[ul, phantom, "\swArrow_{\varepsilon^F}"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \eta^F"] &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[r, "G_{der}"] & \mathcal{C} & \\
\mathcal{B} \arrow[ur, bend left, "Q"] & \mathcal{D} \arrow[l, "Q_{izq}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\eta^Q}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "G"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\eta^G}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, bend left, "P_{izq}"] \\
 & \mathcal{B} \arrow[ul, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "Q"] \arrow[ul, phantom, "\swArrow_{\varepsilon^Q}"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"'] \arrow[u, "P"] \arrow[ul, phantom, "\swArrow\ \Theta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \eta^P"] &
\end{tikzcd} ,$$

respectivamente.

Se sigue de las llamadas identidades triangulares que estos dos caminos son iguales a la composición:

$$\mathrm{id} \xRightarrow{\eta^G \star \eta^P} G_{der} \circ G \circ P \circ P_{izq} \xRightarrow{G_{der} \star \Theta \star P_{izq}} G_{der} \circ Q \circ F \circ P_{izq} \ ,$$

por lo que (1.14) es un cuadrado conmutativo. ☐

Deducimos por ejemplo:

Corolario 1.2.2. *Sea* $\Theta \colon G \circ P \Longrightarrow Q \circ F$ *una transformación natural como la del diagrama* (1.6)*. Supongamos que* Θ *es un isomorfismo natural y que se cumple una de las siguientes propiedades:*

(a) *Los funtores* G *y* F *(resp.* P *y* Q*) son equivalencias de categorías y el funtor* P *o el funtor* Q *(resp.* F *o* G*) admite un adjunto por la izquierda (resp. derecha).*

(b) *El funtor* F *(resp.* P*) es una equivalencia de categorías,* G *(resp.* Q*) es un funtor fielmente pleno y se tienen adjunciones* $G \dashv G_{der}$ *y* $Q_{izq} \dashv Q$*.*

entonces Θ *admite una transformación conjugada izquierda y una conjugada derecha las cuales son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Θ es un isomorfismo natural. Para mostrar el enunciado con las hipótesis de (a) supongamos también que los funtores G y F (resp. P y Q) son equivalencias de categorías.

Notemos primero que el funtor P (resp. F) admite un adjunto por la izquierda (resp. derecha) si y solamente si Q (resp. G) admite un adjunto por la izquierda (resp. derecha). En efecto si P_{izq} (resp. F_{der}) es un adjunto izquierdo (resp. derecho) de P (resp. F) no es difícil mostrar que $F \circ P_{izq} \circ G'$ (resp. $P \circ F_{der} \circ Q'$) es un adjunto izquierdo (resp. derecho) de Q (resp. G), donde $G'\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ (resp. $Q'\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}$) es un funtor inverso salvo isomorfismo natural de G (resp. Q). Recíprocamente si Q_{izq} (resp. G_{der}) es un funtor adjunto izquierdo (resp. derecho) de Q (resp. G), entonces $F' \circ Q_{izq} \circ G$ (resp. $P' \circ G_{der} \circ Q$) es un funtor adjunto izquierdo (resp. derecho) de P (resp. F), donde $F'\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ (resp. $P'\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$) es un funtor inverso salvo isomorfismo natural de F (resp. P).

Se sigue en particular que Θ admite una conjugada izquierda (resp. derecha). Más aún, si $F'\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ y $G'\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ (resp. $P'\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ y $Q'\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}$) son funtores inversos salvo isomorfismo de F y G (resp. P y Q), entonces tenemos adjunciones $F \dashv F'$ y $G \dashv G'$ (resp. $P' \dashv P$ y $Q' \dashv Q$) cuyas unidades y counidades son isomorfismos naturales. En particular Θ también admite una transformación conjugada derecha (resp. izquierda) la cual es un isomorfismo natural de funtores por la fórmula (1.8). Se sigue del Lema 1.2.1 que toda conjugada izquierda (resp. derecha) de Θ también es un isomorfismo.

Para mostrar lo que nos falta, notemos que las hipótesis de (b) implican que el funtor $F' \circ Q_{izq} \circ G$ (resp. $P' \circ G_{der} \circ Q$) es un funtor adjunto izquierdo de P (resp. de F), donde $F'\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ (resp. $P'\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$) es un funtor inverso salvo isomorfismo natural de F (resp. P). En particular Θ admite una conjugada por la izquierda y una conjugada por la derecha.

Más aún, como G (resp. Q) es fielmente pleno, toda unidad $\eta^G\colon \mathrm{id} \Longrightarrow G_{der} \circ G$ (resp. toda counidad $\varepsilon^Q\colon Q_{izq} \circ Q \Longrightarrow \mathrm{id}$) es un isomorfismo. Se sigue de la fórmula (1.8) y del Lema 1.2.1 que toda conjugada por la izquierda y por la derecha de Θ son isomorfismos. ☐

§1.2.2. Compatibilidad con la composición. Consideremos ahora dos transformaciones naturales de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} & \mathcal{C} \arrow[l, "G"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\Theta^1"] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "Q"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & \mathcal{D} \arrow[l, "K"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\Theta^2"] \\
\mathcal{E} \arrow[u, "L"] & \mathcal{B} \arrow[l, "H"] \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & \mathcal{E} \arrow[l, "K"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\Theta^2"] \\
\mathcal{D} \arrow[u, "L"] & \mathcal{C} \arrow[l, "G"] \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
\right)$$

y tomemos la transformación natural que obtenemos al componer como sigue:

(1.15)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & \mathcal{D} \arrow[l, "K"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "G"'] \\
\mathcal{E} \arrow[u, "L"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Theta^2}"] & \mathcal{B} \arrow[l, "H"] \arrow[u, "Q"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Theta^1}"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & \mathcal{C} \arrow[l, "K\circ G"'] \\
\mathcal{E} \arrow[u, "L"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Theta^3}"] & \mathcal{A} \arrow[l, "H\circ F"] \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & \mathcal{E} \arrow[l, "K"'] \\
\mathcal{D} \arrow[u, "L"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Theta^2}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "G"] \arrow[u, "H"'] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "Q"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Theta^1}"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & \mathcal{E} \arrow[l, "K"'] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "L\circ Q"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Theta^3}"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"] \arrow[u, "H\circ P"']
\end{tikzcd}
\right),$$

es decir definimos $\Theta^3 = (\Theta^2 \star F) \circ (K \star \Theta^1)$ $\big($resp. $\Theta^3 = (L \star \Theta^1) \circ (\Theta^2 \star P)\big)$.

Supongamos que hemos elegido funtores adjuntos izquierdos (resp. derechos):

$$P_{izq} \dashv P\,, \qquad Q_{izq} \dashv Q \qquad \text{y} \qquad L_{izq} \dashv L \tag{1.16}$$

$$(\text{resp.} \qquad F \dashv F_{der}\,, \qquad G \dashv G_{der} \qquad \text{y} \qquad K \dashv K_{der})\,,$$

de los funtores P, Q y L (resp. F, G y K) y que:

$$\mathrm{id} \overset{\eta^P}{\Longrightarrow} P \circ P_{izq}\ , \quad \mathrm{id} \overset{\eta^Q}{\Longrightarrow} Q \circ Q_{izq}\ , \quad Q_{izq} \circ Q \overset{\varepsilon^Q}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \quad \text{y} \quad L_{izq} \circ L \overset{\varepsilon^L}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \tag{1.17}$$

$$\Big(\text{resp.} \quad F \circ F_{der} \overset{\varepsilon^F}{\Longrightarrow} \mathrm{id}\ , \quad G \circ G_{der} \overset{\varepsilon^G}{\Longrightarrow} \mathrm{id}\ , \quad \mathrm{id} \overset{\eta^G}{\Longrightarrow} G_{der} \circ G \quad \text{y} \quad \mathrm{id} \overset{\eta^K}{\Longrightarrow} K \circ K_{der}\ \Big);$$

son unidades y counidades de las adjunciones (1.16) respectivamente.

Si escribimos Θ^1_{izq}, Θ^2_{izq} y Θ^3_{izq} $\big($resp. Θ^1_{der}, Θ^2_{der} y $\Theta^3_{der}\big)$ para denotar a las transformaciones naturales conjugadas izquierdas (resp. derechas) de las transformaciones (1.15) con respecto a (1.16) y (1.17), respectivamente. No es difícil mostrar:

Lema 1.2.3. *Si las transformaciones naturales η^Q y ε^Q (resp. η^G y ε^G) en* (1.17) *son inversas una de la otra, es decir si éstas verifican las identidades triangulares, entonces:*

$$\Theta^3_{izq} = (H \star \Theta^1_{izq}) \circ (\Theta^2_{izq} \star G) \qquad \Big(\textit{resp.} \quad \Theta^3_{der} = (\Theta^2_{der} \star Q) \circ (H \star \Theta^1_{der})\Big)\ ;$$

en diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[d, "L_{izq}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\Theta^2_{izq}"] & \mathcal{D} \arrow[l, "K"'] \arrow[d, "Q_{izq}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\Theta^1_{izq}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "P_{izq}"] \\
\mathcal{E} & \mathcal{B} \arrow[l, "H"] & \mathcal{A} \arrow[l, "F"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[d, "L_{izq}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\Theta^3_{izq}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "K\circ G"'] \arrow[d, "P_{izq}"] \\
\mathcal{E} & \mathcal{A} \arrow[l, "H\circ F"]
\end{tikzcd}$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "K_{der}"] & \mathcal{E} \\
\mathcal{D} \arrow[u, "L"] \arrow[r, "G_{der}"] \arrow[ur, phantom, "\Theta^2_{der}\Nwarrow"] & \mathcal{C} \arrow[u, "H"'] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "F_{der}"'] \arrow[ur, phantom, "\Theta^1_{der}\Nwarrow"] & \mathcal{A} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd} = \begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "K_{der}"] & \mathcal{E} \\
\mathcal{B} \arrow[u, "L\circ Q"] \arrow[r, "F_{der}"'] \arrow[ur, phantom, "\Theta^3_{der}\Nwarrow"] & \mathcal{A} \arrow[u, "H\circ P"']
\end{tikzcd} \right).$$

2. Extensiones de Kan ordinarias

En esta sección recordamos terminología sobre extensiones de Kan ordinarias (ver Capítulo 10 de [**Lan98**], §3.7 de [**Bor94**] o Capítulo 1 de [**Rie14**]), usando el vocabulario de transformaciones conjugadas que revisamos en §1.2.

§2.1. Extensiones de Kan ordinarias locales. Sea $\gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor entre categorías abstractas (ver §1.1). Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría abstracta y $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es un funtor, una *extensión de Kan izquierda* (resp. *derecha*) *de* F *a lo largo de* γ es una pareja formada de un funtor $\mathrm{Lan}_\gamma F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ $\big($resp. $\mathrm{Ran}_\gamma F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}\big)$ y una transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow \mathrm{Lan}_\gamma F \circ \gamma$ $\big($resp. $\beta\colon \mathrm{Ran}_\gamma F \circ \gamma \Rightarrow F\big)$, tal que para cualquier otro funtor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ la siguiente función es biyectiva:

$$\mathrm{Nat}\big(\mathrm{Lan}_\gamma F, G\big) \xrightarrow{(-\star\gamma)\circ\alpha} \mathrm{Nat}\big(F, G\circ\gamma\big) \qquad \Big(\text{resp. } \mathrm{Nat}\big(G, \mathrm{Ran}_\gamma F\big) \xrightarrow{\beta\circ(-\star\gamma)} \mathrm{Nat}\big(G\circ\gamma, F\big)\Big),$$

donde $\mathrm{Nat}(S,T)$ denota al conjunto de las transformaciones naturales del funtor S en el funtor T.

§2.2. Extensiones de Kan ordinarias globales. Sea $\mathcal{C}$ una categoría (ver §1.1). Si I es una categoría pequeña, la categoría $\mathcal{C}^I$ de los I*-diagramas en* $\mathcal{C}$ es por definición la categoría de los funtores $\mathcal{X}\colon I \to \mathcal{C}$ y las transformaciones naturales entre ellos. Si a es un objeto de I y $\mathcal{X}$ es un I-diagrama de $\mathcal{C}$, denotamos como X_a al valor de $\mathcal{X}$ en a.

Un funtor entre categorías pequeñas $u\colon I \to J$ induce un funtor entre las categorías de diagramas $u^*\colon \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^I$, definido como $u^*(\mathcal{Y})_a = Y_{ua}$ para todo J-diagrama $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$ y todo objeto a de I. Del mismo modo, una transformación natural $\alpha\colon u \Rightarrow v : I \longrightarrow J$ induce la transformación natural $\alpha_*\colon u^* \Rightarrow v^* : \mathcal{C}^J \longrightarrow \mathcal{C}^I$, definida en un J-diagrama $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$ y un objeto a de I como el siguiente morfismo $\big(\alpha_{*\mathcal{Y}}\big)_a = Y_{\alpha_a}\colon Y_{ua} \longrightarrow Y_{va}$ de $\mathcal{C}$.

Se demuestra sin dificultad que obtenemos por este medio un 2-funtor:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{cat}}^{op} \arrow[rr] & & \underline{\mathbf{Cat}} \\
I \arrow[d, bend right, "u"'] \arrow[d, bend left, "v"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & & \mathcal{C}^I \\
J & \longmapsto & \mathcal{C}^J \arrow[u, bend left, "u^*"] \arrow[u, bend right, "v^*"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha_*}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd} , \tag{2.1}$$

donde $\underline{\mathbf{cat}}^{op}$ denota a la 2-categoría abstracta que se construye a partir de $\underline{\mathbf{cat}}$ al tomar (solamente) las 1-flechas en la dirección opuesta.

Si $u\colon I \to J$ es un funtor entre categorías pequeñas, decimos que la categoría $\mathcal{C}$ *admite extensiones de Kan izquierdas* (resp. *derechas*) *a lo largo de* u, si el funtor inducido u^* admite un adjunto izquierdo (resp. derecho):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^J \arrow[r, bend right, "u^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend right, "u_!"']
\end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^J \arrow[r, bend left, "u^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend left, "u_*"]
\end{tikzcd} \right).$$

Cuando este es el caso, un funtor $u_!$ adjunto izquierdo (resp. u_* adjunto derecho) es llamado *un funtor extensión de Kan izquierda* (resp. *derecha*) a lo largo de u. Notemos que si $\alpha\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}^I} \Rightarrow u^* \circ u_!$ $\big($resp. $\beta\colon u^* \circ u_* \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^I}$ $\big)$ es una unidad (resp. counidad) de la adjunción $u_! \dashv u^*$ (resp. $u^* \dashv u_*$) y $\mathcal{X}$ es un I-diagrama de $\mathcal{C}$, la pareja formada por el J-diagrama $u_!(\mathcal{X})$ $\big($resp. $u_*(\mathcal{X})\big)$ y el morfismo de I-diagramas $\alpha_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \to u_!(\mathcal{X}) \circ u$ $\big($resp. $\beta_{\mathcal{X}}\colon u_*(\mathcal{X}) \circ u \to \mathcal{X}$ $\big)$, es una extensión de Kan izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{X}$ a lo largo del funtor u, como definida en §2.1.

Si una categoría $\mathcal{C}$ admite extensiones de Kan izquierdas (resp. derechas) a lo largo del funtor $p_I\colon I \to \star$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend right, "(p_I)^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend right, "(p_I)_! = \operatorname*{colim}_I"']
\end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "(p_I)^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend left, "(p_I)_* = \lim\limits_I"]
\end{tikzcd} \right),$$

donde $\star$ es la categoría puntual e I es una categoría pequeña, se dice que $\mathcal{C}$ *admite colímites* (resp. *límites*) *de tipo* I o I*-colímites* (resp. I*-límites*). En este caso, para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, llamamos (por abuso) al objeto $\operatorname*{colim}\limits_I \mathcal{X}$ $\big($resp. $\lim\limits_I \mathcal{X}\big)$ *un colímite* (resp. *límite*) *de* $\mathcal{X}$ *en* $\mathcal{C}$.

Recordemos por último que una categoría $\mathcal{C}$ se dice que *admite colímites pequeños* (resp. *límites pequeños*), si $\mathcal{C}$ admite colímites (resp. límites) de tipo I para toda categoría pequeña I (ver la Proposición 2.2.3).

§2.2.1. La imagen de una adjunción por el 2-funtor (2.1) es una adjunción entre categorías de diagramas. Más precisamente, si tenemos una adjunción entre categorías pequeñas $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & J \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$ con una unidad $\eta\colon \mathrm{id}_I \Rightarrow v \circ u$ y una counidad $\varepsilon\colon u \circ v \Rightarrow \mathrm{id}_J$, entonces deducimos una adjunción $\begin{tikzcd} \mathcal{C}^I \arrow[r, bend left, "v^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^J \arrow[l, bend left, "u^*"] \end{tikzcd}$ donde una unidad $\eta_*\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}^I} \Rightarrow u^* \circ v^*$ y una counidad $\varepsilon_*\colon v^* \circ u^* \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^J}$ son definidas por los morfismos:

$$X_i \xrightarrow{X_{\eta_i}} X_{v \circ u(i)} = u^* \circ v^*(\mathcal{X})_i \qquad \text{y} \qquad v^* \circ u^*(\mathcal{Y})_j = Y_{u \circ v(j)} \xrightarrow{Y_{\varepsilon_j}} Y_j \tag{2.2}$$

respectivamente, para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, todo J-diagrama $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$, todo objeto i de I y todo objeto j de J.

Deducimos:

LEMA 2.2.1. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría y $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & J \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$ una adjunción entre categorías pequeñas, entonces el funtor $u_! = v^*\colon C^I \longrightarrow \mathcal{C}^J$ (resp. $v_* = u^*$) es un funtor extensión de Kan izquierda (resp. derecha) a lo largo de u (resp. de v). Más aún, en este caso si u (resp. v) es un funtor fielmente pleno, el funtor $u_!$ (resp. v_*) también lo es (ver el Corolario 2.2.4 de más abajo).*

En particular, si I es una categoría que admite un objeto final (resp. inicial) i_0, entonces $\mathcal{C}$ admite colímites (resp. límites) de tipo I y para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ el objeto X_{i_0} es un colímite (resp. límite) de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Para la segunda parte, recuerda que el funtor $p_I\colon I \longrightarrow \star$ admite un adjunto por la derecha (resp. por la izquierda) si y solamente si I admite un objeto final (resp. inicial). ☐

Mostremos:

COROLARIO 2.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $u\colon I \longrightarrow J$ un functor entre categorías pequeñas. Supongamos que u admite un funtor adjunto por la izquierda (resp. por la derecha) $v\colon J \longrightarrow I$ y que la categoría $\mathcal{C}$ admite I-colímites (I-límites); entonces $\mathcal{C}$ admite J-colímites (resp. J-límites) y toda transformación conjugada izquierda (resp. derecha):*

$$\operatorname*{colim}_I \circ u^* \Rightarrow \operatorname*{colim}_J \qquad \Big(\textit{resp.} \quad \lim_J \Rightarrow \lim_I \circ u^* \Big)$$

de la transformación natural:

(2.3)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^I & \mathcal{C}^J \arrow[l, "u^*"'] \\ \mathcal{C} \arrow[u, "p_I^*"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "p_J^*"'] \arrow[from=1-2, to=2-1, phantom, "\Swarrow \mathrm{id}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^I & \mathcal{C} \arrow[l, "p_I^*"'] \\ \mathcal{C}^J \arrow[u, "u^*"] & \mathcal{C} \arrow[l, "p_J^*"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[from=1-2, to=2-1, phantom, "\Swarrow \mathrm{id}"] \end{tikzcd} \right),$$

es un isomorfismo.

Demostración. Notemos que si u fuera una equivalencia de categorías (o un isomorfismo de categorías) el enunciado sería una consecuencia del inciso (a) del Corolario 1.2.2. Mientras que si v fuera un funtor fielmente pleno, el resultado sería una consecuencia del Lema 2.2.1 y del inciso (b) del Corolario 1.2.2. Mostremos el resultado deseado con la hipótesis de que existe una adjunción $v \dashv u$ (resp. $u \dashv v$).

En efecto, para empezar notemos que por el Lema 2.2.1 tenemos una adjunción $u^* \dashv v^*$ (resp. $v^* \dashv u^*$). En particular, si colim_I (resp. $\lim_I$) es un funtor I-colímites (resp. I-límites) en $\mathcal{C}$, entonces $\mathrm{colim}_I \circ u^*$ (resp. $\lim_I \circ u^*$) es un funtor J-colímites (resp. J-límites) en $\mathcal{C}$. Por lo tanto la transformación natural (2.3) admite una conjugada izquierda y una derecha.

Más aún, por el Lema 1.2.1 basta con determinar una transformación conjugada derecha (resp. izquierda) de (2.3) que sea un isomorfismo. Para ello notemos que si $\eta\colon \mathrm{id}_J \Longrightarrow u \circ v$ (resp. $\varepsilon\colon u \circ v \Longrightarrow \mathrm{id}_J$) es una unidad de la adjunción $v \dashv u$ (resp. $u \dashv v$), entonces podemos tomar como conjugada derecha (resp. izquierda) de (2.3):

(2.4)
$$\mathrm{id}_{der}\colon p_J^* \Longrightarrow v^* \circ p_I^* \qquad \Big(\text{resp.} \quad \mathrm{id}_{izq}\colon v^* \circ p_I^* \Longrightarrow p_J^* \Big)$$

a la transformación natural definida en un objeto A de $\mathcal{C}$ como el siguiente morfismo de $\mathcal{C}^J$:

(2.5)
$$p_J^*(A) \xrightarrow{\mathrm{id}_{der,\,A} = (\eta_*)_{p_J^* A}} v^* \circ u^* \circ p_J^*(A) = v^* \circ p_I^*(A)$$

$$\left(\text{resp.} \quad v^* \circ p_I^*(A) = v^* \circ u^* \circ p_J^*(A) \xrightarrow{\mathrm{id}_{izq,\,A} = (\varepsilon_*)_{p_J^* A}} p_J^*(A) \right),$$

donde $\eta_*\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}^J} \Rightarrow v^* \circ u^*$ (resp. $\varepsilon_*\colon v^* \circ u^* \Rightarrow \mathrm{id}$) es la transformación natural definida en un J-diagrama $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$ y un objeto b de J como el morfismo $\mathcal{Y}_{\eta_b}$ (resp. $\mathcal{Y}_{\varepsilon_b}$) de $\mathcal{C}$.

En particular, como $\mathcal{Y} = p_J^*(A)$ es un J-diagrama constante en (2.5), se sigue que $(\mathrm{id}_{der,A})_b$ (resp. $(\mathrm{id}_{izq,A})_b$) es igual al morfismo identidad de A en $\mathcal{C}$, para todo objeto b de J. Por lo tanto, la transformación (2.4) conjugada derecha (resp. izquierda) de (2.3) definida por (2.5) es un isomorfismo. □

§2.2.2. Morfismo evaluación. Sea $u\colon\ I \longrightarrow J$ un funtor entre categorías pequeñas. Recordemos que si b es un objeto de J, la categoría $u|b$ (resp. $b|u$) de los *objetos de I sobre* (resp. *bajo*) b *a través de* u, es por definición la categoría cuyos objetos son las parejas (a,α), donde a es un objeto de I y $\alpha :\ ua \longrightarrow b$ $\big($resp. $\alpha :\ b \longrightarrow ua$ $\big)$ es una flecha de J. Un morfismo de (a,α) en (a',α') es una flecha $f :\ a \longrightarrow a'$ de I tal que $\alpha' \circ u(f) = \alpha$ (resp. $u(f)\circ\alpha = \alpha'$).

Consideremos la transformación natural canónica:

$$\begin{tikzcd}
u|b \arrow[r, "\pi|b"] \arrow[d, "p_{u|b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow_{\Gamma|b}"] & I \arrow[d, "u"] \\
\star \arrow[r, "b"'] & J
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
b|u \arrow[r, "p_{b|u}"] \arrow[d, "b|\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow_{b|\Gamma}"] & \star \arrow[d, "b"] \\
I \arrow[r, "u"'] & J
\end{tikzcd}\right), \tag{2.6}$$

donde $(\pi|b)(a,\alpha) = a$ y $(\Gamma|b)_{(a,\alpha)} = \alpha$ $\big($resp. $(b|\pi)(a,\alpha) = a$ y $(b|\Gamma)_{(a,\alpha)} = \alpha\big)$, para todo objeto (a,α) de $u|b$ (resp. $b|u$).

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, deducimos de (2.6) y del 2-funtor (2.1) una transformación natural:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{u|b} \arrow[dr, phantom, "\Swarrow_{(\Gamma|b)_*}"] & \mathcal{C}^{I} \arrow[l, "(\pi|b)^*"'] \\
\mathcal{C} \arrow[u, "(p_{u|b})^*"] & \mathcal{C}^{J} \arrow[l, "b^*"] \arrow[u, "u^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{b|u} \arrow[dr, phantom, "\Swarrow_{(b|\Gamma)_*}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "(p_{b|u})^*"'] \\
\mathcal{C}^{I} \arrow[u, "(b|\pi)^*"] & \mathcal{C}^{J} \arrow[l, "u^*"] \arrow[u, "b^*"']
\end{tikzcd}\right). \tag{2.7}$$

Un *morfismo evaluación izquierda* (resp. *derecha*) *de u en b* (*con valores en $\mathcal{C}$*) es por definición una transformación conjugada izquierda de $\big(\Gamma|b\big)_*$ $\big($resp. conjugada derecha de $\big(b|\Gamma\big)_*\big)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{u|b} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{u|b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Lleftarrow (\Gamma|b)_{izq}"] & \mathcal{C}^{I} \arrow[l, "(\pi|b)^*"'] \arrow[d, "u_!"] \\
\mathcal{C} & \mathcal{C}^{J} \arrow[l, "b^*"]
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{b|u} \arrow[r, "\lim_{b|u}"] \arrow[dr, phantom, "(b|\Gamma)_{der} \Rrightarrow"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{C}^{I} \arrow[u, "(b|\pi)^*"] \arrow[r, "u_*"'] & \mathcal{C}^{J} \arrow[u, "b^*"']
\end{tikzcd}\right). \tag{2.8}$$

Si tal transformación conjugada existe, es decir si la categoría $\mathcal{C}$ admite $(u|b)$-colímites (resp. $(b|u)$-límites) y extensiones de Kan izquierdas (resp. derechas) a lo largo de u, llamamos para cada I-diagrama $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$ al morfismo:

$$\operatorname*{colim}_{u|b}\big(\mathcal{X}\circ(\pi|b)\big) \xrightarrow{(\Gamma|b)_{izq,\,\mathcal{X}}} u_!(\mathcal{X})_b \tag{2.9}$$

$$\left(\text{resp.}\quad u_*(\mathcal{X})_b \xrightarrow{(b|\Gamma)_{der,\,\mathcal{X}}} \lim_{b|u}\big(\mathcal{X}\circ(b|\pi)\big)\right),$$

un *morfismo evaluación de* $u_!(\mathcal{X})$ $\big($resp. $u_*(\mathcal{X})\big)$ *en* b.

El siguiente enunciado es bien conocido (ver por ejemplo X.4.1-2 de [**Lan98**]):

Proposición 2.2.3. *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría con colímites (resp. límites) pequeños, entonces* $\mathcal{C}$ *admite extensiones de Kan izquierdas (resp. derechas) a lo largo de cualquier funtor* $u: I \longrightarrow J$ *entre categorías pequeñas. Más aún, en este caso todo morfismo evaluación* (2.9) *de* $u_!(\mathcal{X})$ $\big($*resp.* $u_*(\mathcal{X})\big)$ *en* b *es un isomorfismo de* $\mathcal{C}$*, para todo* I*-diagrama* $\mathcal{X}$ *de* $\mathcal{C}$ *y todo objeto* b *de* J.

§2.2.3. Extensiones de Kan a lo largo de funtores fielmente plenos. Sea $u: I \longrightarrow J$ un funtor fielmente pleno entre categorías pequeñas. Observemos que para todo objeto a de I, se tiene la siguiente igualdad de transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd} u|ua \arrow[r, "\pi|ua"] \arrow[d, "p_{u|ua}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\Gamma"] & I \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\mathrm{id}"] & I \arrow[d, "u"] \\ \star \arrow[r, "a"'] & I \arrow[r, "u"'] & J \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} u|ua \arrow[r, "\pi|ua"] \arrow[d, "p_{u|ua}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\Gamma|ua"] & I \arrow[d, "u"] \\ \star \arrow[r, "ua"'] & J \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} ua|u \arrow[r, "p_{ua|u}"] \arrow[d, "ua|\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\Gamma"] & \star \arrow[d, "a"] \\ I \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\mathrm{id}"] & I \arrow[d, "u"] \\ I \arrow[r, "u"'] & J \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} ua|u \arrow[r, "p_{ua|u}"] \arrow[d, "ua|\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,ua|\Gamma"] & \star \arrow[d, "ua"] \\ I \arrow[r, "u"'] & J \end{tikzcd}\right)$$

donde la transformación natural:

$$\begin{tikzcd} u|ua \arrow[r, "\pi|ua"] \arrow[d, "p_{u|ua}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\Gamma"] & I \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \star \arrow[r, "a"'] & I \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} ua|u \arrow[r, "p_{ua|u}"] \arrow[d, "ua|\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\Gamma"] & \star \arrow[d, "a"] \\ I \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & I \end{tikzcd}\right), \tag{2.11}$$

es definida en un objeto (c, α) de la categoría $u|ua$ (resp. $ua|u$), como el único morfismo de I cuya imagen por u es igual a α.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y consideremos las transformaciones naturales que deducimos de (2.10) y del 2-funtor (2.1):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{u|ua} & \mathcal{C}^I \arrow[l, "(\pi|ua)^*"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\Gamma_*"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, "p^*_{u|ua}"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, "a^*"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^J \arrow[l, "u^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{u|ua} & \mathcal{C}^I \arrow[l, "(\pi|ua)^*"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\Gamma|ua_*"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, "p^*_{u|ua}"] & \mathcal{C}^J \arrow[l, "(ua)^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{ua\,|\,u} & \mathcal{C} \arrow[l, "p^*_{ua\,|\,u}"'] \\ \mathcal{C}^I \arrow[u, "(ua\,|\,\pi)^*"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \Gamma_*"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "a^*"'] \\ \mathcal{C}^I \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}^J \arrow[l, "u^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{ua\,|\,u} & \mathcal{C} \arrow[l, "p^*_{ua\,|\,u}"'] \\ \mathcal{C}^I \arrow[u, "(ua\,|\,\pi)^*"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ ua\,|\,\Gamma_*"] & \mathcal{C}^J \arrow[l, "u^*"] \arrow[u, "(ua)^*"'] \end{tikzcd}\right).$$

Supongamos que la categoría $\mathcal{C}$ admite colímites (resp. límites) pequeños. Más precisamente, supongamos (ver la Proposición 2.2.3) que $u_! \dashv u^*$ (resp. $u^* \dashv u_*$) es una adjunción con una unidad $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow u^* \circ u_!$ (resp. una counidad $\varepsilon\colon u^* \circ u_* \Longrightarrow \mathrm{id}$) y que $\mathrm{colim}_{u\,|\,ua} \dashv p^*_{u\,|\,ua}$ (resp. $p^*_{ua\,|\,u} \dashv \lim_{ua\,|\,u}$) es una adjunción con una counidad $\varepsilon\colon \mathrm{colim}_{u\,|\,ua} \circ p^*_{u\,|\,ua} \Longrightarrow \mathrm{id}$ (resp. una unidad $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow p^*_{ua\,|\,u} \circ \lim_{ua\,|\,u}$).

Deducimos del Lema 1.2.3 y del diagrama (2.12) que para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ y todo objeto a en I, la siguiente composición es un morfismo evaluación de $u_!(\mathcal{X})$ (resp. $u_*(\mathcal{X})$) en $u(a)$:

$$\mathrm{(2.13)}\qquad \operatorname*{colim}_{u\,|\,ua}\big(\mathcal{X} \circ (\pi\,|\,ua)\big) \xrightarrow{\operatorname*{colim}_{u\,|\,ua}(\Gamma_*,\,\mathcal{X})} \operatorname*{colim}_{u\,|\,ua}\big(p^*_{u\,|\,ua}(X_a)\big) \xrightarrow{\varepsilon_{X_a}} X_a \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{X}})_a} u^* \circ u_!(\mathcal{X})_a$$

$$\left(\text{resp.}\quad u^* \circ u_*(\mathcal{X})_a \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_a} X_a \xrightarrow{\eta_{X_a}} \lim_{ua\,|\,u}\big(p^*_{ua\,|\,u}(X_a)\big) \xrightarrow{\lim_{ua\,|\,u}(\Gamma_*,\,\mathcal{X})} \lim_{ua\,|\,u}\big(\mathcal{X} \circ (ua\,|\,\pi)\big)\right).$$

Más aún, notemos que como (a, id_{ua}) es un objeto final (resp. inicial) de la categoría $u\,|\,ua$ (resp. $ua\,|\,u$), se tiene una adjunción:

$$\mathrm{(2.14)}\qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[r, bend right, "{(a,\mathrm{id}_{ua})}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & u\,|\,ua \arrow[l, bend right, "p_{u\,|\,ua}"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} \star \arrow[r, bend left, "{(a,\mathrm{id}_{ua})}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & ua\,|\,u \arrow[l, bend left, "p_{ua\,|\,u}"] \end{tikzcd}\right),$$

donde una counidad (resp. unidad) es la transformación natural identidad:

$$\mathrm{(2.15)}\qquad p_{u\,|\,ua} \circ (a, \mathrm{id}_{ua}) \overset{\mathrm{id}}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_\star \qquad \left(\text{resp.}\quad \mathrm{id}_\star \overset{\mathrm{id}}{\Longrightarrow} p_{u\,|\,ua} \circ (a, \mathrm{id}_{ua})\right).$$

En particular, en (2.13) podemos tomar (ver el Lema 2.2.1):

$$\mathrm{(2.16)}\qquad \operatorname*{colim}_{u\,|\,ua} = (a, \mathrm{id}_{ua})^* \quad \text{y} \quad \operatorname*{colim}_{u\,|\,ua} \circ p^*_{u\,|\,ua} \overset{\varepsilon\,=\,\mathrm{id}}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \lim_{ua\,|\,u} = (a, \mathrm{id}_{ua})^* \quad \text{y} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \overset{\eta\,=\,\mathrm{id}}{\Longrightarrow} \lim_{ua\,|\,u} \circ p^*_{u\,|\,ua}\right).$$

En resumen, si $u : I \longrightarrow J$ es un funtor fielmente pleno, $\mathcal{C}$ es una categoría con colímites (resp. límites) pequeños, $u_!$ (resp. u_*) es un funtor extensión de Kan izquierda (resp. derecha) a lo largo de u y η: $\mathrm{id} \Longrightarrow u^* \circ u_!$ (resp. ε: $u^* \circ u_* \Longrightarrow \mathrm{id}$) es una unidad (resp. counidad) de la adjunción $u_! \dashv u^*$ (resp. $u^* \dashv u_*$); se sigue de (2.13), (2.16) y de la Proposición 2.2.3 que η (resp. ε) es un isomorfismo natural.

Esto demuestra la primera parte del siguiente enunciado:

Corolario 2.2.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que admite colímites (resp. límites) pequeños. Si $u_!$ (resp. u_*) es un funtor extension de Kan izquierda (resp. derecha) a lo largo de un funtor fielmente pleno $u\colon\ I \longrightarrow J$ entre categorías pequeñas:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[r, bend right, "u^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend right, "u_!"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[r, bend left, "u^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend left, "u_*"] \end{tikzcd} \right),$$

entonces $u_!$ (resp. u_*) es también un funtor fielmente pleno.

Más aún, si ϵ (resp. η) es una counidad (resp. unidad) de la adjunción $u_! \dashv u^*$ $\big($resp. $u^* \dashv u_*\big)$ e $\mathcal{Y}$ es un J-diagrama de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{Y}$ pertenece a la imagen esencial[2] *del funtor $u_!$ (resp. u_*) si y solamente si, para todo objeto x de J que no pertenece a la imagen esencial de u, el morfismo:*

$$(2.17) \qquad \big(u_! \circ u^*(\mathcal{Y})\big)_x \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{Y}})_x} \mathcal{Y}_x \qquad \left(\textit{resp.} \quad \mathcal{Y}_x \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{Y}})_x} \big(u_* \circ u^*(\mathcal{Y})\big)_x \right),$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$.

Demostración. Si consideramos una unidad y una counidad (que verifiquen las identidades triangulares) de la adjunción $u_! \dashv u^*$ $\big($resp. $u^* \dashv u_*\big)$:

$$\mathrm{id} \overset{\eta}{\Longrightarrow} u^* \circ u_! \ \text{ y } \ u_! \circ u^* \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{id} \qquad \Big(\text{resp. } \mathrm{id} \overset{\eta}{\Longrightarrow} u_* \circ u^* \ \text{ y } \ u^* \circ u_* \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{id}\ \Big),$$

respectivamente, sabemos que el morfismo:

$$(2.18) \qquad \mathcal{X}_a \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{X}})_a} \big(u^* \circ u_!(\mathcal{X})\big)_a \qquad \left(\text{resp.} \quad \big(u^* \circ u_*(\mathcal{X})\big)_a \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_a} \mathcal{X}_a \right)$$

es un isomorfismo para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ y todo objeto a de I.

---

[2] Recuerda que un objeto x de J pertenece a la *imagen esencial* de un funtor $u\colon\ I \longrightarrow J$, si existe un objeto a de I y un isomorfismo $\alpha\colon ua \cong x$ de J

Por otro lado, si x es un objeto de J y $\alpha\colon ua \cong x$ un isomorfismo para algún objeto a de I, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(u^* \circ u_! \circ u^* \mathcal{Y})_a \arrow[r, "(u^* \epsilon_{\mathcal{Y}})_a"] \arrow[d, equal] & (u^* \mathcal{Y})_a \arrow[d, equal] \\
(u_! \circ u^* \mathcal{Y})_{ua} \arrow[r, "(\epsilon_{\mathcal{Y}})_{ua}"] \arrow[d, "(u_! \circ u^* \mathcal{Y})_\alpha"', "\wr"] & \mathcal{Y}_{ua} \arrow[d, "\wr"', "\mathcal{Y}_\alpha"] \\
(u_! \circ u^* \mathcal{Y})_x \arrow[r, "(\epsilon_{\mathcal{Y}})_x"'] & \mathcal{Y}_x
\end{tikzcd} \tag{2.19}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd}
(u^* \mathcal{Y})_a \arrow[r, "(u^* \eta_{\mathcal{Y}})_a"] \arrow[d, equal] & (u^* \circ u_* \circ u^* \mathcal{Y})_a \arrow[d, equal] \\
\mathcal{Y}_{ua} \arrow[r, "(\eta_{\mathcal{Y}})_{ua}"] \arrow[d, "\mathcal{Y}_\alpha"', "\wr"] & (u_* \circ u^* \mathcal{Y})_{ua} \arrow[d, "\wr"', "(u_* \circ u^* \mathcal{Y})_\alpha"] \\
\mathcal{Y}_x \arrow[r, "(\eta_{\mathcal{Y}})_x"'] & (u_* \circ u^* \mathcal{Y})_x
\end{tikzcd} \right).$$

Por lo tanto, ya que el morfismo $(u^* \epsilon_{\mathcal{Y}})_a$ $\big($resp. $(u^* \eta_{\mathcal{Y}})_a\big)$ de (2.19) es el inverso izquierdo (resp. derecho) del isomorfismo (2.18) donde $\mathcal{X} = u^* \mathcal{Y}$, se tiene que (2.17) es un isomorfismo si x pertenece a la imagen esencial de u. $\square$

3. Cuadrados (co)cartesianos ordinarios

§3.1. Denotemos como $\square$ a la categoría pequeña generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
d \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$

y sujeta a la relación que identifica las dos flechas de a en c. Consideremos también a la siguiente subcategoría plena $\ulcorner$ (resp. $\lrcorner$) de $\square$:

$$\ulcorner = \begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \\
d &
\end{tikzcd} \xhookrightarrow{q_\ulcorner} \begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
d \arrow[r] & c
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \lrcorner = \begin{tikzcd}
 & b \arrow[d] \\
d \arrow[r] & c
\end{tikzcd} \xhookrightarrow{q_\lrcorner} \begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
d \arrow[r] & c
\end{tikzcd} \right).$$

Observemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría arbitraria, escoger un $\square$-diagrama $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$ equivale a darse un cuadrado conmutativo de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \arrow[d] \\
X_d \arrow[r] & X_c\,.
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

En este caso tenemos:

$$q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X}) = \begin{tikzcd} X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \\ X_d & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \qquad q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X}) = \begin{tikzcd} & X_b \arrow[d] \\ X_d \arrow[r] & X_c \end{tikzcd}\right).$$

Supongamos más aún que $\mathcal{C}$ es una categoría que admite colímites pequeños (resp. límites pequeños). Deducimos de la Proposición 2.2.3 que existe una adjunción:

$$(3.3) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[r, bend left, "q_{\ulcorner\,!}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, bend left, "q^*_{\ulcorner}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[r, bend right, "q_{\lrcorner\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, bend right, "q^*_{\lrcorner}"'] \end{tikzcd}\right).$$

Si $\mathcal{Z}$ es un $\ulcorner$-diagrama (resp. $\lrcorner$-diagrama) de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{Z} = \begin{tikzcd} Z_a \arrow[r] \arrow[d] & Z_b \\ Z_d & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \qquad \mathcal{Z} = \begin{tikzcd} & Z_b \arrow[d] \\ Z_d \arrow[r] & Z_c \end{tikzcd}\right)$$

y η: $\mathrm{id} \Longrightarrow q^*_{\ulcorner} \circ q_{\ulcorner\,!}$ $\big($resp. ε: $q_{\lrcorner\,*} \circ q^*_{\lrcorner} \Longrightarrow \mathrm{id}$ $\big)$ es una unidad (resp. counidad) de la adjunción (3.3); notemos que como $q_{\ulcorner}$ (resp. $q_{\lrcorner}$) es un funtor fielmente pleno, se sigue del Corolario 2.2.4 que:

$$Z_x \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{Z}})_x} q_{\ulcorner\,!}(\mathcal{Z})_x \qquad \left(\text{resp.} \qquad q_{\lrcorner\,*}(\mathcal{Z})_x \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{Z}})_x} Z_x\right)$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$ para $x = a, b, d$ (resp. $x = b, c, d$).

Por otro lado, si consideramos una adjunción:

$$(3.4) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[r, bend left, "\operatorname*{colim}_{\ulcorner}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "p^*_{\ulcorner}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[r, bend right, "\lim_{\lrcorner}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "p^*_{\lrcorner}"'] \end{tikzcd}\right),$$

se construye un isomorfismo natural:

$$(3.5) \qquad q_{\ulcorner\,!}\,(\mathcal{Z})_c \cong \operatorname*{colim}_{\ulcorner}(\mathcal{Z}) \qquad \left(\text{resp.} \qquad q_{\lrcorner\,*}\,(\mathcal{Z})_a \cong \lim_{\lrcorner}(\mathcal{Z})\right)$$

de la siguiente manera: Sean:

$$(3.6) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{q_{\ulcorner}\,|\,c} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}\,|\,c}"'] & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi\,|\,c)^*"'] \arrow[d, "q_{\ulcorner\,!}"] \arrow[dl, phantom, "\Rrightarrow (\Gamma\,|\,c)_{izq}"] \\ \mathcal{C} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "c^*"] \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{q_{\ulcorner}\,|\,c} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}\,|\,c}"'] & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi\,|\,c)^*"'] \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\ulcorner}"] \arrow[dl, phantom, "\Rrightarrow \mathrm{id}_{izq}"] \\ \mathcal{C} & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a\,|\,q_\lrcorner} \arrow[r, "\lim\limits_{a\,|\,q_\lrcorner}"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[u, "(a\,|\,\pi)^*"] \arrow[r, "q_{\lrcorner\,*}"'] \arrow[ur, phantom, "(a\,|\,\Gamma)_{der}\Nwarrow"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "a^*"']
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a\,|\,q_\lrcorner} \arrow[r, "\lim\limits_{a\,|\,q_\lrcorner}"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[u, "(a\,|\,\pi)^*"] \arrow[r, "\lim\limits_{\lrcorner}"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_{der}\Nwarrow"] & \mathcal{C} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}\right)$$

transformaciones conjugadas izquierdas (resp. derechas) de las transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_\ulcorner\,|\,c} & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi\,|\,c)*"'] \\
\mathcal{C} \arrow[u, "(p_{q_\ulcorner\,|\,c})^*"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "c^*"] \arrow[u, "q_\ulcorner^*"'] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow(\Gamma\,|\,c)_*"]
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_\ulcorner\,|\,c} & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi\,|\,c)^*"', "\cong"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, "(p_{q_\ulcorner\,|\,c})^*"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "p_\ulcorner^*"'] \arrow[ul, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a\,|\,q_\lrcorner} & \mathcal{C} \arrow[l, "p^*_{a\,|\,q_\lrcorner}"'] \\
\mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[u, "(a\,|\,\pi)^*"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q_\lrcorner^*"] \arrow[u, "a^*"'] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow(a\,|\,\Gamma)_*"]
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a\,|\,q_\lrcorner} & \mathcal{C} \arrow[l, "p^*_{a\,|\,q_\lrcorner}"'] \\
\mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[u, "(a\,|\,\pi)^*", "\cong"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "p_\lrcorner^*"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, phantom, "="]
\end{tikzcd}\right),$$

inducidas del 2-funtor (2.1) y de las transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
q_\ulcorner\,|\,c \arrow[r, "\pi\,|\,c"] \arrow[d, "p_{q_\ulcorner\,|\,c}"'] & \ulcorner \arrow[d, "q_\ulcorner"] \\
\star \arrow[r, "c"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{\Gamma\,|\,c}"] & \square
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
q_\ulcorner\,|\,c \arrow[r, "\pi\,|\,c", "\cong"'] \arrow[d, "p_{q_\ulcorner\,|\,c}"'] & \ulcorner \arrow[d, "p_\ulcorner"] \\
\star \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \star
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd}
a\,|\,q_\lrcorner \arrow[r, "p_{a\,|\,q_\lrcorner}"] \arrow[d, "a\,|\,\pi"'] & \star \arrow[d, "a"] \\
\lrcorner \arrow[r, "q_\lrcorner"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow_{a\,|\,\Gamma}"] & \square
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
a\,|\,q_\lrcorner \arrow[r, "p_{a\,|\,q_\lrcorner}"] \arrow[d, "a\,|\,\pi"', "\cong"] & \star \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\lrcorner \arrow[r, "p_\lrcorner"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \star
\end{tikzcd}\right).$$

Se sigue de la Proposición 2.2.3 y del Corolario 2.2.2 que las transformaciones naturales (3.6) son isomorfismos, pues el funtor $\pi\,|\,c$ (resp. $a\,|\,\pi$) es un isomorfismo de categorías. Definimos el isomorfismo (3.5) como la composición:

$$q_{\ulcorner\,!}\,(\mathcal{Z})_c \xleftarrow{\left((\Gamma\,|\,c)_{izq}\right)_{\mathcal{Z}}} \operatorname*{colim}_{q_\ulcorner\,|\,c}\big((\pi\,|\,c)^*(\mathcal{Z})\big) \xrightarrow{\left((\mathrm{id})_{izq}\right)_{\mathcal{Z}}} \operatorname*{colim}_{\ulcorner}\,(\mathcal{Z})$$

$$\left(\text{resp.}\qquad q_{\lrcorner\,*}\,(\mathcal{Z})_a \xrightarrow{\left((a\,|\,\Gamma)_{der}\right)_{\mathcal{Z}}} \lim_{a\,|\,q_\lrcorner}\big((a\,|\,\pi)^*(\mathcal{Z})\big) \xleftarrow{\left((\mathrm{id})_{izq}\right)_{\mathcal{Z}}} \lim_{\lrcorner}\,(\mathcal{Z})\right).$$

Notemos por otro lado que si $\mathcal{X}$ es un $\square$-diagrama en $\mathcal{C}$ y $\varepsilon\colon\ q_{\ulcorner\,!}\circ q_{\ulcorner}^{*}\Longrightarrow \mathrm{id}$ $\big($resp. $\eta\colon\ \mathrm{id}\Longrightarrow q_{\lrcorner}^{*}\circ q_{\lrcorner\,*}\big)$ es una counidad (resp. unidad) de la adjunción (3.3); como señalamos en la prueba del Corolario 2.2.4, el morfismo de diagramas:

$$q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}\,(\mathcal{X}) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \qquad \left(\text{resp.}\quad \mathcal{X} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{X}}} q_{\lrcorner\,*}\, q_{\lrcorner}^{*}\,(\mathcal{X})\right)$$

cumple que para $x = a, b, d$ (resp. $x = b, c, d$):

$$q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X})_{x} \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_{x}} X_{x} \qquad \left(\text{resp.}\quad X_{x} \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{X}})_{x}} q_{\lrcorner\,*}\, q_{\lrcorner}^{*}(\mathcal{X})_{x}\right)$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$.

Dicho de otro modo, la diferencia entre los cuadrados conmutativos $\mathcal{X}$ y $q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X})$ de $\mathcal{C}$, radica en el siguiente morfismo de $\mathcal{C}$:

$$q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X})_{c} \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_{c}} X_{c} \qquad \left(\text{resp.}\quad X_{a} \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{X}})_{a}} q_{\lrcorner\,*}\, q_{\lrcorner}^{*}(\mathcal{X})_{a}\right). \tag{3.8}$$

Se construye un morfismo natural de $\mathcal{C}$:

$$\operatorname*{colim}_{\ulcorner}\big(q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X})\big) \xrightarrow{(\Phi_{izq})_{\mathcal{X}}} X_{c} \qquad \left(\text{resp.}\quad X_{a} \xrightarrow{(\Phi_{der})_{\mathcal{X}}} \lim_{\lrcorner}\big(q_{\lrcorner}^{*}(\mathcal{X})\big)\right), \tag{3.9}$$

tomando una conjugada izquierda (resp. derecha):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\ulcorner}"'] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q_{\ulcorner}^{*}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\Searrow\ \Phi_{izq}"] \\ \mathcal{C} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "c^{*}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[r, "\lim_{\lrcorner}"] & \mathcal{C} \\ \mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "q_{\lrcorner}^{*}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Phi_{der}\ \Nwarrow"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "a^{*}"'] \end{tikzcd}\right) \tag{3.10}$$

de la transformación natural:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q_{\ulcorner}^{*}"'] \\ \mathcal{C} \arrow[u, "p_{\ulcorner}^{*}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \Phi_{*}"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "c^{*}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\lrcorner} & \mathcal{C} \arrow[l, "p_{\lrcorner}^{*}"'] \\ \mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "q_{\lrcorner}^{*}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \Phi_{*}"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "a^{*}"'] \end{tikzcd}\right) \tag{3.11}$$

inducida de la transformación natural canónica:

$$\begin{tikzcd} \ulcorner \arrow[r, "q_{\ulcorner}"] \arrow[d, "p_{\ulcorner}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\ \Phi"] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \star \arrow[r, "c"'] & \square \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} \lrcorner \arrow[r, "p_{\lrcorner}"] \arrow[d, "q_{\lrcorner}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\ \Phi"] & \star \arrow[d, "a"] \\ \square \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \square \end{tikzcd}\right). \tag{3.12}$$

En el siguiente enunciado se muestra básicamente que los morfismos (3.8) y (3.9) forman parte de un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} q_{\ulcorner\,!}\big(q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})\big)_c \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c"'] & & \underset{\ulcorner}{\operatorname{colim}}\big(q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})\big) \arrow[dl, "(\Phi_{izq})_{\mathcal{X}}"] \\ & X_c & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} & X_a \arrow[dl, "(\eta_{\mathcal{X}})_a"'] \arrow[dr, "(\Phi_{der})_{\mathcal{X}}"] & \\ q_{\lrcorner\,*}\big(q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})\big)_a \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \underset{\lrcorner}{\lim}\big(q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})\big) \end{tikzcd}\right),$$

donde el isomorfismo horizontal es el construido en (3.5) para $\mathcal{Z} = q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})$.

LEMA 3.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con colímites pequeños (resp. límites pequeños). Si $\mathcal{X}$ es un $\square$-diagrama de $\mathcal{C}$:*

$$\mathcal{X} = \begin{tikzcd} X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \arrow[d] \\ X_d \arrow[r] & X_c \end{tikzcd},$$

los siguientes enunciados son equivalentes:

(I) *$\mathcal{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $q_{\ulcorner\,!}$ (resp. $q_{\lrcorner\,*}$), donde $q_{\ulcorner\,!} \dashv q^*_{\ulcorner}$ $\big($resp. $q^*_{\lrcorner} \dashv q_{\lrcorner\,*}\big)$ es cualquier adjunción como en* (3.3)*.*

(II) *Si $\varepsilon\colon q_{\ulcorner\,!} \circ q^*_{\ulcorner} \Longrightarrow \mathrm{id}$ $\big($resp. $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow q^*_{\lrcorner} \circ q_{\lrcorner\,*}\big)$ es una counidad (resp. unidad) de una adjunción $q_{\ulcorner\,!} \dashv q^*_{\ulcorner}$ $\big($resp. $q^*_{\lrcorner} \dashv q_{\lrcorner\,*}\big)$, el morfismo:*

$$q_{\ulcorner\,!}\, q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \mathcal{X} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{X}}} q_{\lrcorner\,*}\, q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})\right),$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}^{\square}$.

(III) *Si $\varepsilon\colon q_{\ulcorner\,!} \circ q^*_{\ulcorner} \Longrightarrow \mathrm{id}$ $\big($resp. $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow q^*_{\lrcorner} \circ q_{\lrcorner\,*}\big)$ es una counidad (resp. unidad) de una adjunción $q_{\ulcorner\,!} \dashv q^*_{\ulcorner}$ $\big($resp. $q^*_{\lrcorner} \dashv q_{\lrcorner\,*}\big)$, el morfismo:*

$$q_{\ulcorner\,!}\, q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})_c \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c} X_c \qquad \left(\textit{resp.} \quad X_a \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{X}})_a} q_{\lrcorner\,*}\, q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})_a\right),$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$.

(IV) *Si* (3.10) *es una conjugada izquierda de la transformación natural* (3.11)*, entonces:*

$$\underset{\ulcorner}{\operatorname{colim}}\big(q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})\big) \xrightarrow{(\Phi_{izq})_{\mathcal{X}}} X_c \qquad \left(\textit{resp.} \quad X_a \xrightarrow{(\Phi_{der})_{\mathcal{X}}} \underset{\lrcorner}{\lim}\big(q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})\big)\right), \tag{3.13}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$.

(V) *Si $\Phi^*\colon q^*_{\ulcorner} \Rightarrow p^*_{\ulcorner} \circ c^*$ $\big($resp. $\Phi^*\colon p^*_{\lrcorner} \circ a^* \Rightarrow q^*_{\lrcorner}\big)$ denota a la transformación natural* (3.11)*, entonces:*

$$\underset{\ulcorner}{\operatorname{colim}}\big(q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})\big) \xrightarrow{\underset{\ulcorner}{\operatorname{colim}}(\Phi^*_{\mathcal{X}})} \underset{\ulcorner}{\operatorname{colim}}\big(p^*_{\ulcorner}(X_c)\big) \qquad \left(\textit{resp.} \quad \underset{\lrcorner}{\lim}\big(p^*_{\lrcorner}(X_a)\big) \xrightarrow{\underset{\lrcorner}{\lim}(\Phi^*_{\mathcal{X}})} \underset{\lrcorner}{\lim}\big(q^*_{\lrcorner}(\mathcal{X})\big)\right),$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$.

Demostración. De acuerdo al Corolario 2.2.4 el funtor $q_{\ulcorner !}$ (resp. $q_{\lrcorner *}$) es fielmente pleno, ya que $q_{\ulcorner}$ (resp. $q_{\lrcorner}$) lo es; entonces los enunciados (i) y (ii) son equivalentes por un argumento canónico sobre las adjunciones. Los enunciados (i) y (iii) son equivalentes por la segunda parte del Corolario 2.2.4.

Mostremos (iii)⇔(iv) en el caso de la categoría $\ulcorner$. Para ello observemos que la igualdad de transformaciones naturales:

$$(3.14)\quad \begin{tikzcd} \ulcorner \,|\, c \arrow[r, "\pi \,|\, c"] \arrow[d, "p_{\ulcorner|c}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \ulcorner \arrow[r, "q_{\ulcorner}"] \arrow[d, "p_{\ulcorner}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \Phi"] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \star \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \star \arrow[r, "c"'] & \square \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \ulcorner \,|\, c \arrow[r, "\pi \,|\, c"] \arrow[d, "p_{\ulcorner|c}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \Gamma \,|\, c"] & \ulcorner \arrow[r, "q_{\ulcorner}"] \arrow[d, "q_{\ulcorner}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \star \arrow[r, "c"'] & \square \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \square \end{tikzcd},$$

induce por el 2-funtor (2.1), la Proposición 2.2.3 y el Lema 1.2.3, una igualdad entre la siguiente composición de transformaciones naturales conjugadas izquierdas:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner|c} \arrow[d, "\underset{\ulcorner|c}{\mathrm{colim}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \mathrm{id}^1_{izq}"] & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi \,|\, c)^*"'] \arrow[d, "\underset{\ulcorner}{\mathrm{colim}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \Phi_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q^*_{\ulcorner}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C} & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "c^*"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner|c} \arrow[d, "\underset{\ulcorner|c}{\mathrm{colim}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow (\Gamma \,|\, c)_{izq}"] & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi \,|\, c)^*"'] \arrow[d, "q_{\ulcorner !}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \mathrm{id}^2_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q^*_{\ulcorner}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "c^*"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

En particular, se tiene un diagrama conmutativo de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \underset{\ulcorner|c}{\mathrm{colim}}\big((\pi \,|\, c)^* \circ q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})\big) \arrow[r, "\left(\mathrm{id}^1_{izq}\right)_{q^*_{\ulcorner}\mathcal{X}}"] \arrow[d, "\left((\Gamma|c)_{izq}\right)_{q^*_{\ulcorner}\mathcal{X}}"'] & \underset{\ulcorner}{\mathrm{colim}}\big(q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, "(\Phi_{izq})_{\mathcal{X}}"] \\ q_{\ulcorner !}\, q^*_{\ulcorner}(\mathcal{X})_c \arrow[r, "\left((\mathrm{id}^2_{izq})_{\mathcal{X}}\right)_c = (\varepsilon_{\mathcal{X}})_c"'] & X_c, \end{tikzcd}$$

para todo cuadrado conmutativo $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$.

Más aún, para todo $\ulcorner$-diagrama $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{C}$ se sigue de la Proposición 2.2.3 y del Corolario 2.2.2 que $\big(\mathrm{id}^1_{izq}\big)_{\mathcal{Z}}$ y $\big((\Gamma \,|\, c)_{izq}\big)_{\mathcal{Z}}$ son isomorfismos de $\mathcal{C}$, pues el funtor $\pi \,|\, c$ del diagrama (3.14) es un isomorfismo de categorías. Por lo tanto, (iii)⇔(iv).

Por último, notemos que si $\Phi_{izq}\colon \underset{\ulcorner}{\mathrm{colim}} \circ q^*_{\ulcorner} \Rightarrow c^*$ $\big($resp. $\Phi^*\colon a^* \Rightarrow \underset{\lrcorner}{\lim} \circ q^*_{\lrcorner}\big)$ es una conjugada izquierda de la transformación natural (3.11), se tiene por definición un triangulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_{\ulcorner}\big(q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X})\big) \arrow[rr, "(\Phi_{izq})_{\mathcal{X}}"] \arrow[dr, bend right, "\operatorname*{colim}_{\ulcorner}(\Phi^{*}_{\mathcal{X}})"'] & & X_c \\
& \operatorname*{colim}_{\ulcorner}\big(p_{\ulcorner}^{*}\,(X_c)\big) \arrow[ur, "\epsilon_{X_c}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \left(\text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
X_a \arrow[rr, "(\Phi_{der})_{\mathcal{X}}"] \arrow[d, "\eta_{X_a}"'] & & \lim_{\lrcorner}\big(q_{\lrcorner}^{*}(\mathcal{X})\big) \\
\lim_{\lrcorner}\big(p_{\lrcorner}^{*}\,(X_a)\big) \arrow[urr, bend right, "\lim_{\lrcorner}(\Phi^{*}_{\mathcal{X}})"'] & &
\end{tikzcd}
\right),$$

donde $\epsilon\colon \operatorname*{colim}_{\ulcorner} \circ p_{\ulcorner}^{*} \Longrightarrow \mathrm{id}$ $\big($resp. $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow \lim_{\lrcorner} \circ p_{\lrcorner}^{*}$ $\big)$ es una counidad (resp. unidad) de la adjunción $\operatorname*{colim}_{\ulcorner} \dashv p_{\ulcorner}^{*}$ $\big($resp. $p_{\ulcorner}^{*} \dashv \lim_{\lrcorner}\big)$.

Por otro lado se sigue del Lema 2.2.1, que para todo objeto A de $\mathcal{C}$, el morfismo:

$$\operatorname*{colim}_{\ulcorner}\big(p_{\ulcorner}^{*}A\big) \xrightarrow{\epsilon_A} A \qquad \left(\text{resp.} \quad A \xrightarrow{\eta_A} \lim_{\lrcorner}\big(p_{\lrcorner}^{*}A\big)\right),$$

es un isomorfismo, ya que $\ulcorner$ (resp. $\lrcorner$) admite un objeto inicial (resp. final). Por lo tanto los enunciados (IV) y (V) son equivalentes. □

Si $\mathcal{C}$ es una categoría con colímites pequeños (resp. límites pequeños), decimos que un $\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \arrow[d] \\
X_d \arrow[r] & X_c
\end{tikzcd}$$

es un *cuadrado cocartesiano* (resp. *cuadrado cartesiano*) de $\mathcal{C}$, si se cumple uno de los enunciados equivalentes del Lema 3.1.1.

§3.2. Mostremos algunas propiedades simples de los cuadrados (co)cartesianos en una categoría admitiendo (co)límites pequeños.

LEMA 3.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con colímites pequeños (resp. límites pequeños). Supongamos que $F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ es un morfismo de $\square$-diagramas de $\mathcal{C}$ tal que:*

$$q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X}) \xrightarrow{q_{\ulcorner}^{*}F} q_{\ulcorner}^{*}(\mathcal{X}') \qquad \left(\textit{resp.} \quad q_{\lrcorner}^{*}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{q_{\lrcorner}^{*}F} q_{\lrcorner}^{*}(\mathfrak{X}')\right)$$

es un isomorfismo de la categoría de diagramas $\mathcal{C}^{\ulcorner}$ $\big($resp. $\mathcal{C}^{\lrcorner}\big)$. Dicho de otro modo, consideremos un cubo:

(3.15)

$$\begin{tikzcd}
& X'_a \arrow[rr] \arrow[dd] & & X'_b \arrow[dd] \\
X_a \arrow[ur, "F_a"] \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_b \arrow[ur, "F_b"] \arrow[dd] & \\
& X'_d \arrow[rr] & & X'_c, \\
X_d \arrow[ur, "F_d"] \arrow[rr] & & X_c \arrow[ur, "F_c"] &
\end{tikzcd}$$

cuyas caras son cuadrados conmutativos de $\mathcal{C}$, *con la propiedad que los morfismos* F_a, F_b *y* F_d $($*resp.* F_b, F_c *y* $F_d)$ *son isomorfismos de* $\mathcal{C}$.

Entonces, si $\mathcal{X}$ *es un cuadrado cocartesiano* $($*resp. cuadrado cartesiano*$)$, $\mathcal{X}'$ *es un cuadrado cocartesiano* $($*resp. cuadrado cartesiano*$)$ *si y solamente si* F *es un isomorfismo de la categoría de diagramas* $\mathcal{C}^{\square}$, *es decir si y solamente si el morfismo* F_c $($*resp.* $F_a)$ *es un isomorfismo de* $\mathcal{C}$.

Demostración. Consideremos una adjunción $q_{\ulcorner\,!} \dashv q_{\ulcorner}^{*}$ $\big($resp. $q_{\lrcorner}^{*} \dashv q_{\lrcorner\,*}\big)$ con una counidad (resp. unidad) ε: $q_{\ulcorner\,!} \circ q_{\ulcorner}^{*} \Longrightarrow \mathrm{id}$ $\big($resp. η: $\mathrm{id} \Longrightarrow q_{\lrcorner}^{*} \circ q_{\lrcorner\,*}$ $\big)$. Deducimos entonces un cuadrado conmutativo de morfismos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}\,(\mathcal{X})_c \arrow[r, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c"] \arrow[d, "q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}\,(F)_c"'] & X_c \arrow[d, "F_c"] \\ q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}\,(\mathcal{X}')_c \arrow[r, "(\varepsilon_{\mathcal{X}'})_c"'] & X'_c \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} X_a \arrow[r, "(\eta_{\mathcal{X}})_a"] \arrow[d, "F_a"'] & q_{\lrcorner\,*}\, q_{\lrcorner}^{*}\,(\mathcal{X})_a \arrow[d, "q_{\lrcorner\,!}\, q_{\lrcorner}^{*}\,(F)_a"] \\ X'_a \arrow[r, "(\eta_{\mathcal{X}'})_a"'] & q_{\lrcorner\,*}\, q_{\lrcorner}^{*}\,(\mathcal{X}')_a \end{tikzcd} \right),$$

donde $q_{\ulcorner\,!}\ q_{\ulcorner}^{*}\,(F)_c$ $\big($resp. $q_{\lrcorner\,!}\ q_{\lrcorner}^{*}\,(F)_a\big)$ es un isomorfismo, ya que por hipótesis $q_{\ulcorner}^{*}(F)$ $\big($resp. $q_{\lrcorner}^{*}(F)\big)$ es un isomorfismo de la categoría de diagramas $\mathcal{C}^{\ulcorner}$ $\big($resp. $\mathcal{C}^{\lrcorner}\big)$.

Se sigue de la propiedad (iii) del Lema 3.1.1 que si $\mathcal{X}$ es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano), es decir si el morfismo:

$$q_{\ulcorner\,!}\, q_{\ulcorner}^{*}\,(\mathcal{X})_c \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c} X_c \qquad \left(\text{resp.} \quad X_a \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{X}})_a} q_{\lrcorner\,*}\, q_{\lrcorner}^{*}\,(\mathcal{X})_a \right)$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{X}'$ es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano) si y solamente si F_c (resp. F_a) es un isomorfismo de $\mathcal{C}$. □

Mostremos también:

Lema 3.2.2. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría con colímites pequeños (resp. límites pequeños) y:*

$$\mathcal{X} \ = \ \begin{tikzcd} X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & X_b \arrow[d, "g"] \\ X_d \arrow[r, "f'"'] & X_c \end{tikzcd}$$

un cuadrado conmutativo en $\mathcal{C}$.

(i) $\mathcal{X}$ *es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano), si y solamente si:*

$$\mathcal{X}' \ = \ \begin{tikzcd} X_a \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X_d \arrow[d, "f'"] \\ X_b \arrow[r, "g"'] & X_c \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano).

(II) *Si f y f' son isomorfismos de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{X}$ es un cuadrado cartesiano y un cuadrado cocartesiano.*

DEMOSTRACIÓN. Para verificar (I) considera $\theta_\square \colon \square \to \square$ el único isomorfismo de categorías tal que $\theta_\square(a) = a$, $\theta_\square(b) = d$, $\theta_\square(c) = c$ y $\theta_\square(d) = b$. Si $\theta_\ulcorner$ (resp. $\theta_\lrcorner$) denota la restricción del funtor $\theta_\square$ a la subcategoría $\ulcorner$ (resp. $\lrcorner$) de $\square$, obtenemos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\ulcorner} & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "\theta^*_\ulcorner"', "\cong" description] \\
\mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "q^*_\ulcorner"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "\theta^*_\square", "\cong" description] \arrow[u, "q^*_\ulcorner"'] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow \mathrm{id}"]
\end{tikzcd}
\quad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\lrcorner} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q^*_\lrcorner"'] \\
\mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[u, "\theta^*_\lrcorner", "\cong"'] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "q^*_\lrcorner"] \arrow[u, "\theta^*_\square"', "\cong"] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow \mathrm{id}"]
\end{tikzcd}\right),$$

cuya conjugada izquierda (resp. derecha) es un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[d, "q_{\ulcorner\,!}"'] & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "\theta^*_\ulcorner"'] \arrow[d, "q_{\ulcorner\,!}"] \arrow[dl, phantom, "\Searrow (\mathrm{id})_{izq}"] \\
\mathcal{C}^{\square} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "\theta^*_\square"]
\end{tikzcd}
\quad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\lrcorner} \arrow[r, "q_{\lrcorner\,*}"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "\theta^*_\lrcorner"] \arrow[r, "q_{\lrcorner\,*}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{id})_{der} \Nwarrow"] & \mathcal{C}^{\square} \arrow[u, "\theta^*_\square"']
\end{tikzcd}\right), \tag{3.16}$$

pues los funtores $\theta^*_\ulcorner$ y $\theta^*_\square$ $\big($resp. $\theta^*_\lrcorner$ y $\theta^*_\square\big)$ son isomorfismos de categorías (ver el inciso (a) del Corolario 1.2.2).

Si $\alpha \colon q_{\ulcorner\,!}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{X}$ $\big($resp. $\alpha \colon q_{\lrcorner\,!}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{X}$ $\big)$ es un isomorfismo de $\square$-diagramas de $\mathcal{C}$, obtenemos así un isomorfismo:

$$\begin{gathered}
\mathcal{X}' = \theta^*_\square(\mathcal{X}) \xleftarrow[\cong]{\theta^*_\square(\alpha)} \theta^*_\square \circ q_{\ulcorner\,!}(\mathcal{Y}) \xrightarrow[\cong]{(3.16)_{\mathcal{Y}}} q_{\ulcorner\,!}\big(\theta^*_\ulcorner(\mathcal{Y})\big) \\
\left(\text{resp.}\qquad \mathcal{X}' = \theta^*_\square(\mathcal{X}) \xleftarrow[\cong]{\theta^*_\square(\alpha)} \theta^*_\square \circ q_{\lrcorner\,*}(\mathcal{Y}) \xrightarrow[\cong]{(3.16)_{\mathcal{Y}}} q_{\lrcorner\,*}\big(\theta^*_\lrcorner(\mathcal{Y})\big)\right).
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Dicho de otro modo, si $\mathcal{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $q_{\ulcorner\,!}$ $\big($resp. $q_{\lrcorner\,*}\big)$, entonces $\mathcal{X}' = \theta^*_\square(\mathcal{X})$ también lo es. El resultado deseado es entonces una consecuencia de la propiedad (I) del Lema 3.1.1.

Demostraremos solamente la parte del enunciado (II) sobre cuadrados cocartesiano. Para ello consideremos los funtores $\alpha \colon I \to \ulcorner$ y $\beta \colon I \to \square$ definidos como las inclusiones:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d] & & a \arrow[r] \arrow[d] & b \\
d \arrow[rr, hook, "\alpha", phantom, shift left=4] & & d &
\end{tikzcd}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[d] & & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
d & & d \arrow[r] & c
\end{tikzcd}, \tag{3.18}$$

$$a \downarrow d \xhookrightarrow{\alpha} \begin{matrix} a \to b \\ \downarrow \\ d \end{matrix} \qquad a \downarrow d \xhookrightarrow{\beta} \begin{matrix} a \to b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ d \to c \end{matrix}$$

en particular $\beta = q_\ulcorner \circ \alpha$.

Notemos que si tenemos adjunciones $q_{\ulcorner\,!} \dashv q^*_\ulcorner$, $\alpha_! \dashv \alpha^*$ y $\beta_! \dashv \beta^*$, la igualdad $\beta = q_\ulcorner \circ \alpha$ implica que existe un isomorfismo de funtores $q_{\ulcorner\,!} \circ \alpha_! \cong \beta_! \colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}^\square$. Por lo tanto, se sigue del enunciado (i) del Lema 3.1.1 que para mostrar el resultado deseado, es suficiente con demostrar que si

$$\mathcal{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r, "f'"'] & X_c
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado conmutativo en $\mathcal{C}$ tal que f y f' son isomorfismos de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $\beta_!\colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}^\square$.

Más aún, por el Corolario 2.2.4 es suficiente con demostrar que si $\varepsilon\colon \beta_! \circ \beta^* \Longrightarrow \mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $\beta_! \dashv \beta^*$, entonces los siguientes morfismos de $\mathcal{C}$:

$$\beta_! \circ \beta^*(\mathcal{X})_b \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_b} X_b \qquad \text{y} \qquad \beta_! \circ \beta^*(\mathcal{X})_c \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c} X_c$$

son isomorfismos.

Para ello consideremos las siguientes igualdades de transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\beta\,|\,b \arrow[r, "\pi\,|\,b"] \arrow[d, "p_{\beta\,|\,b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \Gamma\,|\,b"] & I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "="] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "="] & & \beta\,|\,b \arrow[r, "p_{\beta\,|\,b}", "\cong"'] \arrow[d, "p_{\beta\,|\,b}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \star \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \Gamma"] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\star \arrow[r, "b"'] & \square \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \square & & \star \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \star \arrow[r, "b"'] & \square
\end{tikzcd} \tag{3.19}$$

$$\text{y} \quad \begin{tikzcd}
\beta\,|\,c \arrow[r, "\pi\,|\,c"] \arrow[d, "p_{\beta\,|\,c}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \Gamma\,|\,c"] & I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "="] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "="] & & \beta\,|\,c \arrow[r, "\pi\,|\,c", "\cong"'] \arrow[d, "p_{\beta\,|\,c}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "p_I"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \Gamma'"] & \square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\star \arrow[r, "c"'] & \square \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \square & & \star \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \star \arrow[r, "c"'] & \square
\end{tikzcd} \ , \tag{3.20}$$

donde Γ y Γ' son las únicas transformaciones naturales posibles.

Se deduce del 2-funtor (2.1), del Lema 1.2.3, la Proposición 2.2.3 y el Corolario 2.2.2 que se tienen las siguientes igualdades de transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\beta\,|\,b} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\beta\,|\,b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow (\Gamma\,|\,b)_{izq}"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, "(\pi\,|\,b)^*"'] \arrow[d, "\beta_!"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \mathrm{id}^1_{izq}"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "\beta^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "="] & & \mathcal{C}^{\beta\,|\,b} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\beta\,|\,b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \mathrm{id}^2_{izq}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "p^*_{\beta\,|\,b}"', "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \Gamma_{izq}"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "a^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C} & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "b^*"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "\mathrm{id}"] & & \mathcal{C} & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "b^*"]
\end{tikzcd}$$

$$\text{y} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\beta\,|\,c} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\beta\,|\,c}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow (\Gamma\,|\,c)_{izq}"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, "(\pi\,|\,c)^*"'] \arrow[d, "\beta_!"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \mathrm{id}^1_{izq}"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "\beta^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "="] & & \mathcal{C}^{\beta\,|\,c} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\beta\,|\,c}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \mathrm{id}^3_{izq}"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, "(\pi\,|\,c)^*"', "\cong"] \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{I}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \Gamma'_{izq}"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "\beta^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C} & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "c^*"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "\mathrm{id}"] & & \mathcal{C} & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^\square \arrow[l, "c^*"]
\end{tikzcd} \ ,$$

donde las transformaciones conjugadas $(\Gamma\,|\,b)_{izq}$, $(\Gamma\,|\,c)_{izq}$, id^2_{izq} y id^3_{izq} son isomorfismos naturales.

Más aún, por el Lema 2.2.1 sabemos que podemos tomar $\operatorname*{colim}_I = d^*$ pues d es un objeto final de I. En particular, si $\mathcal{X}$ es un $\square$-diagrama de $\mathcal{C}$, obtenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\big(\beta_! \circ \beta^*(\mathcal{X})\big)_b \arrow[rr, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_b"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & & X_b \\
\operatorname*{colim}_{\beta|b}\big((\pi\,|\,b)^* \circ \beta^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, equal] & & \\
\operatorname*{colim}_{\beta|b}\big(p^*_{\beta|b} \circ a^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & & \\
X_a \arrow[uuurr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
\big(\beta_! \circ \beta^*(\mathcal{X})\big)_c \arrow[rr, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & & X_c \\
\operatorname*{colim}_{\beta|c}\big((\pi\,|\,c)^* \circ \beta^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, equal] & & \\
\operatorname*{colim}_{I}\big(\beta^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, equal] & & \\
X_d \arrow[uuurr, bend right, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon\colon\ \beta_! \circ \beta^* \Longrightarrow \mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $\beta_! \dashv \beta^*$.

Por lo tanto, si f y f' son isomorfismos de $\mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $\beta_!$. $\square$

§3.3. Composición de cuadrados (co)cartesianos. Denotemos como $\square\square$ a la categoría pequeña generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
f \arrow[r] & e \arrow[r] & d
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

y sujeta a la relación que identifica los dos morfismos de a en e, los dos morfismos de b en d y los tres morfismos de a en d.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, elegir un $\square\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ equivale entonces a darse un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ de la forma:

$$\mathcal{X} \; = \; \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \arrow[r] \arrow[d] & X_c \arrow[d] \\
X_f \arrow[r] & X_e \arrow[r] & X_d\,.
\end{tikzcd} \tag{3.22}$$

Para $1 \leq i \leq 3$, denotemos como $\alpha_i\ \square \longrightarrow \square\square$ a los funtores inclusión de las siguientes subcategorías:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
f \arrow[r] & e
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
e \arrow[r] & d
\end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
f \arrow[r] & d
\end{tikzcd}, \tag{3.23}$$

respectivamente. Deducimos en particular del 2-funtor (2.1), un funtor:

$$\mathcal{C}^{\square\square} \xrightarrow{\alpha_i^*} \mathcal{C}^{\square}$$

para cada $1 \leq i \leq 3$.

Mostremos:

Lema 3.3.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que admite colímites pequeños (resp. límites pequeños). Si $\mathcal{X}$ es un $\square\!\square$-diagrama de $\mathcal{C}$ y $\alpha_1^*(\mathcal{X})$ $\big($resp. $\alpha_2^*(\mathcal{X})\big)$ es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano), entonces $\alpha_2^*(\mathcal{X})$ $\big($resp. $\alpha_1^*(\mathcal{X})\big)$ es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano) si y solamente si $\alpha_3^*(\mathcal{X})$ es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano).*

Demostración. Demostremos la parte del enunciado sobre cuadrados cocartesiano. Para ello consideremos los funtores $\tau_1\colon I_3 \to I_2$ y $\tau_2\colon I_2 \to \square\!\square$ definidos como las inclusiones:

(3.24)
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] & c \\ f & & \end{tikzcd} \xhookrightarrow{\tau_1} \begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \\ f \arrow[r] & e & \end{tikzcd} \xhookrightarrow{\tau_2} \begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ f \arrow[r] & e \arrow[r] & d \end{tikzcd},$$

y denotemos como $\tau_3\colon I_3 \to \square\!\square$ a la composición $\tau_2 \circ \tau_1$.

Para cada $1 \leq i \leq 3$ supongamos que se tiene una adjunción $\tau_{i\,!} \dashv \tau_i^*$ junto con una counidad $\varepsilon^i\colon \tau_{i\,!} \circ \tau_i^* \Longrightarrow \mathrm{id}$. La igualdad $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_3$ implica que existe un isomorfismo de funtores:

$$\tau_{2\,!} \circ \tau_{1\,!} \xRightarrow[\cong]{\Psi} \tau_{3\,!}\,,$$

con la propiedad que para todo $\square\!\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$:

(3.25)
$$\begin{tikzcd} \tau_{2\,!} \circ \tau_{1\,!} \circ \tau_1^* \circ \tau_2^*(\mathcal{X}) \arrow[r, "\tau_{2\,!}\left(\varepsilon^1_{\tau_2^*(\mathcal{X})}\right)"] \arrow[d, phantom, "\Psi_{\tau_3^*\mathcal{X}}\ \wr\|"] & \tau_{2\,!} \circ \tau_2^*(\mathcal{X}) \arrow[r, "\varepsilon^2_{\mathcal{X}}"] & \mathcal{X} \\ \tau_{3\,!} \circ \tau_3^*(\mathcal{X}) \arrow[urr, bend right=10, "\varepsilon^3_{\mathcal{X}}"'] & & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de $\mathcal{C}^{\square\!\square}$.

Por lo tanto, para mostrar el enunciado deseado es suficiente verificar que si $\mathcal{X}$ es un $\square\!\square$-diagrama de $\mathcal{C}$, entonces se cumplen las siguientes dos propiedades:

a) $\alpha_1^*(\mathcal{X})$ es un cuadrado cocartesiano si y solamente si el morfismo:
$$\big(\tau_{1\,!} \circ \tau_1^* \circ \tau_2^*(\mathcal{X})\big)_e \xrightarrow{(\varepsilon^1_{\tau_2^*\mathcal{X}})_e} (\tau_2^*\mathcal{X})_e = X_e$$
es un isomorfismo de $\mathcal{C}$.

b) $\alpha_i^*(\mathcal{X})$ es un cuadrado cocartesisno si y solamente si el morfismo:
$$\big(\tau_{i\,!} \circ \tau_i^*(\mathcal{X})\big)_d \xrightarrow{(\varepsilon^i_{\mathcal{X}})_d} X_d$$
es un isomorfismo de $\mathcal{C}$, donde $2 \leq i \leq 3$.

Mostremos la propiedad a). Para ello consideremos el siguiente diagrama de categorías pequeñas, funtores y transformaciones naturales:
(3.26)

$$\begin{tikzcd}
q_{\ulcorner}|e \arrow[r, "\pi|e"] \arrow[d, "p_{q_{\ulcorner}|e}"'] \arrow[rd, phantom, "\Swarrow\Gamma|e"] & \ulcorner \arrow[r, "\alpha_1\circ q_{\ulcorner}=\tau_3\circ\gamma_1"] \arrow[d, "q_{\ulcorner}"'] \arrow[rd, phantom, "="] & \square\!\square \arrow[d, "\mathrm{id}"] & & q_{\ulcorner}|e \arrow[r, "\gamma_1|e", "\cong"'] \arrow[d, "p_{q_{\ulcorner}|e}"'] \arrow[rd, phantom, "="] & \tau_1|e \arrow[r, "\pi'|e"] \arrow[d, "p_{\tau_1|e}"'] \arrow[rd, phantom, "\Swarrow\Gamma'|e"] & I_3 \arrow[r, "\tau_2\circ\tau_1=\tau_3"] \arrow[d, "\tau_1"'] \arrow[rd, phantom, "="] & \square\!\square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\star \arrow[r, "e"'] & \square \arrow[r, "\alpha_1=\tau_2\circ\beta_1"'] & \square\!\square \arrow[from=1-3, to=2-5, phantom, "="] & & \star \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \star \arrow[r, "e"'] & I_2 \arrow[r, "\tau_2"'] & \square\!\square
\end{tikzcd},$$

donde $\beta_1\colon \square \to I_2$ y $\gamma_1\colon \ulcorner \to I_3$ son los únicos funtores tales que $\tau_2\circ\beta_1 = \alpha_1$ y $\tau_1\circ\gamma_1 = \beta_1\circ q_{\ulcorner}$, respectivamente; mientras que $\gamma_1|e\colon q_{\ulcorner}|e \longrightarrow \tau_1|e$ es el isomorfismo de categorías definido en objetos como $\big(\gamma_1|e\big)(x,\alpha) = \big(\gamma_1(x),\beta_1(\alpha)\big)$.

Como la categoría $\mathcal{C}$ admite colímites pequeños, deducimos del 2-funtor (2.1), la Proposición 2.2.3, el Corolario 2.2.2 y el Lema 1.2.3, la siguiente igualdad de transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_{\ulcorner}|e} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}|e}"'] & \mathcal{C}^{\ulcorner} \arrow[l, "(\pi|e)^*"'] \arrow[d, "q_{\ulcorner!}"'] \arrow[ld, phantom, "\Searrow(\Gamma|e)_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square\!\square} \arrow[l, "q_{\ulcorner}^*\circ\alpha_1^*=\gamma_1^*\circ\tau_3^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[ld, phantom, "\Searrow\mathrm{id}^1_{izq}"] \\
\mathcal{C} & \mathcal{C}^{\square} \arrow[l, "e^*"] & \mathcal{C}^{\square\!\square} \arrow[l, "\alpha_1^*=\beta_1^*\circ\tau_2^*"]
\end{tikzcd}\quad=$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_{\ulcorner}|e} \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}|e}"'] & \mathcal{C}^{\tau_1|e} \arrow[l, "(\gamma_1|e)^*"', "\cong"] \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\tau_1|e}"'] \arrow[ld, phantom, "\Searrow\mathrm{id}^2_{izq}"] & \mathcal{C}^{I_3} \arrow[l, "(\pi'|e)^*"'] \arrow[d, "\tau_{1!}"] \arrow[ld, phantom, "\Searrow(\Gamma'|e)_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square\!\square} \arrow[l, "\tau_3^*=\tau_1^*\circ\tau_2^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[ld, phantom, "\Searrow\mathrm{id}^3_{izq}"] \\
\mathcal{C} & \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^{I_2} \arrow[l, "e^*"] & \mathcal{C}^{\square\!\square} \arrow[l, "\tau_2^*"]
\end{tikzcd},$$

donde las transformaciones conjugadas $(\Gamma|e)_{izq}$, $(\Gamma'|e)_{izq}$ y id^2_{izq} son isomorfismos naturales.

Deducimos en particular para todo $\square\!\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\big(q_{\ulcorner!}\circ q_{\ulcorner}^*(\alpha_1^*\mathcal{X})\big)_e \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[rd, bend left=10, "\big(\varepsilon_{\alpha_1^*\mathcal{X}}\big)_e=\big((\mathrm{id}^1_{izq})_{\mathcal{X}}\big)_e"] & \\
\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}|e}\big((\pi|e)^*\circ\gamma_1^*\circ\tau_3^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "="] & (\alpha_1^*\mathcal{X})_e \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}|e}\big((\gamma_1|e)^*\circ(\pi'|e)^*\circ\tau_3^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & X_e \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
\operatorname*{colim}_{\tau_1|e}\big((\pi'|e)^*\circ\tau_3^*(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & (\tau_2^*\mathcal{X})_e \\
\big(\tau_{1!}\circ\tau_1^*(\tau_2^*\mathcal{X})\big)_e \arrow[ru, bend right=10, "\big(\varepsilon^1_{\tau_2^*\mathcal{X}}\big)_e=\big((\mathrm{id}^3_{izq})_{\mathcal{X}}\big)_e"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon\colon q_{\ulcorner\,!} \circ q_{\ulcorner}^{*} \Longrightarrow \mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $q_{\ulcorner\,!} \dashv q_{\ulcorner}^{*}$. Esto muestra la propiedad a) (ver (iii) del Lema 3.1.1).

La propiedad b) se muestra de manera análoga. Para ello consideramos la siguiente igualdad de transformaciones naturales para $2 \leq i \leq 3$:

(3.27)

$$\begin{tikzcd}
q_{\ulcorner}\,|\,d \arrow[r, "\pi\,|\,d"] \arrow[d, "p_{q_{\ulcorner}\,|\,d}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\ \Gamma\,|\,d"] & \ulcorner \arrow[r, "\tau_i\circ\gamma_i"] \arrow[d, "q_{\ulcorner}"] \arrow[dr, phantom, "="] & \square\!\square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[ddrr, phantom, "="] & & q_{\ulcorner}\,|\,d \arrow[r, "\gamma_i\,|\,d"] \arrow[d, "p_{q_{\ulcorner}\,|\,d}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \tau_i\,|\,d \arrow[r, "\pi'\,|\,d"] \arrow[d, "p_{\tau_i\,|\,d}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\ \Gamma'\,|\,d"] & I_i \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\tau_i"] \arrow[dr, phantom, "="] & \square\!\square \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\star \arrow[r, "d"'] & \square \arrow[r, "\alpha_i"'] & \square\!\square & & \star \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \star \arrow[r, "d"'] & \square\!\square \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \square\!\square
\end{tikzcd},$$

donde $\gamma_i\colon \ulcorner \longrightarrow I_i$ es el único funtor tal que $\tau_i \circ \gamma_i = \alpha_i \circ q_{\ulcorner}$ y $\gamma_i\,|\,d\colon q_{\ulcorner}\,|\,d \longrightarrow \tau_i\,|\,d$ es el funtor definido en objetos como $\big(\gamma_i\,|\,d\big)(x,\omega) = \big(\gamma_i(x), \alpha_i(\omega)\big)$.

En este caso es suficiente notar que aunque los funtores $\gamma_2\,|\,d$ y $\gamma_3\,|\,d$ no son isomorfismos, ellos admiten un adjunto izquierdo (ver las hipótesis del Corolario 2.2.2). Deducimos un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\big(q_{\ulcorner\,!} \circ q_{\ulcorner}^{*}(\alpha_i^{*}\mathcal{X})\big)_d \arrow[dr, bend left=10, "\big(\varepsilon_{\alpha_i^{*}\mathcal{X}}\big)_d"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \\
\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}\,|\,d}\big((\pi\,|\,d)^{*} \circ \gamma_i^{*} \circ \tau_i^{*}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "="] & (\alpha_i^{*}\mathcal{X})_d \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
\operatorname*{colim}_{q_{\ulcorner}\,|\,d}\big((\gamma_i\,|\,d)^{*} \circ (\pi'\,|\,d)^{*} \circ \tau_i^{*}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & X_d \\
\operatorname*{colim}_{\tau_i\,|\,d}\big((\pi'\,|\,d)^{*} \circ \tau_i^{*}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \\
\big(\tau_{i\,!} \circ \tau_i^{*}(\mathcal{X})\big)_d \arrow[uur, bend right=10, "\big(\varepsilon_{\mathcal{X}}^{i}\big)_d"'] &
\end{tikzcd}$$

para todo $\square\!\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$.

$\square$

4. Categorías de modelos

§4.1. Recordemos que una *categoría de modelos* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib})$ (ver por ejemplo [**Hov07**], [**Hir03**] o [**Qui67**]) es una categoría $\mathcal{C}$ con tres familias distinguidas de morfismos: $\mathbf{W}$, $\mathbf{cof}$ y $\mathbf{fib}$ cuyos elementos son llamados respectivamente *equivalencias débiles*, *cofibraciones* y *fibraciones*, los cuales cumplen las siguientes propiedades:

CM1. La categoría $\mathcal{C}$ admite límites y colímites pequeños.

CM2. La familia **W** satisface la *propiedad 2-de-3*, es decir si dos de los tres morfismos en un triangulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

pertenecen a **W**, también el tercer morfismo pertenece a **W**.

CM3. Las familias **W**, **cof** y **fib** son *estables por retractos*. De manera explícita, dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & Y \arrow[r] & B\,,
\end{tikzcd}$$

si f es un elemento de **W** (resp. **cof**, **fib**) entonces también g es un elemento de **W** (resp. **cof**, **fib**).

CM4. Los elementos de **fib** (resp. **cof**) tienen la *propiedad de levantamiento derecho* (resp. *izquierdo*) *respecto a los elementos* de $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$), es decir para todo cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

donde i es una cofibración y p es una fibración, si i es une elemento de **W** (resp. si p es un elemento de **W**) entonces existe un morfismo $\varphi\colon B \longrightarrow X$ tal que $\varphi \circ i = f$ y $p \circ \varphi = g$.

CM5. Para todo morfismo f de $\mathcal{C}$ existen factorizaciones funtoriales de la forma:

(I) $f = p\,i$, donde $p \in \mathbf{fib}$ e $i \in \mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$.

(II) $f = q\,j$, donde $q \in \mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$ y $j \in \mathbf{cof}$.

Denotamos como $\xrightarrow{\sim}$, $\rightarrowtail$ y $\twoheadrightarrow$ a las flechas de las familias **W**, **cof** y **fib** respectivamente. Los elementos de la familia $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$ $\big($resp. $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}\big)$ son llamados *fibraciones triviales* (resp. *cofibraciones triviales*).

§4.2. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos, se sigue de las propiedades **CM3**, **CM4** y **CM5** (ver por ejemplo el Lema 1.1.10 de [**Hov07**]), que la familia **fib** (resp. **cof**) es exactamente igual a la familia de aquellos morfismos de $\mathcal{C}$ con la propiedad de levantamiento derecho (resp. izquierdo) respecto a los elementos de $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$). Concluimos en particular (ver también **CM2**) que las familias $\mathbf{W}$, $\mathbf{cof}$ y $\mathbf{fib}$ son estables por composición y contienen a los isomorfismos.

Del mismo modo, se muestra que $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$) es igual a la familia de todos los morfismos de $\mathcal{C}$ con la propiedad de levantamiento derecho (resp. izquierdo) respecto a los elementos de $\mathbf{cof}$ (resp. $\mathbf{fib}$). Por lo tanto las familias $\mathbf{fib}$ y $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{cof}$ y $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$) son además estables por cambio de base (resp. cocambio de base) a lo largo de morfismos arbitrarios en $\mathcal{C}$; es decir si en un cuadrado cartesiano (resp. cocartesiano) de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

el morfismo p (resp. f) es un elemento de $\mathbf{fib}$ o de $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{cof}$ o de $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$), entonces i (resp. g) también pertenece a la familia $\mathbf{fib}$ o a la familia $\mathbf{fib} \cap \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{cof}$ o a la familia $\mathbf{cof} \cap \mathbf{W}$) respectivamente.

§4.2.1. Se sigue de **CM1** que podemos elegir en $\mathcal{C}$ un objeto inicial $\varnothing$ y un objeto final $\star$. Un objeto X de $\mathcal{C}$ es llamado *cofibrante* (resp. *fibrante*) si la única flecha $\varnothing \longrightarrow X$ es una cofibración $\big($resp. $X \longrightarrow \star$ es una fibración$\big)$.

Del mismo modo, de la propiedad **CM5** sabemos que para todo objeto X de $\mathcal{C}$ podemos encontrar un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail, "j_X"'] & X \\
& QX \arrow[u, two heads, "\wr"', "q_X"]
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.} \qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "i_X"', "\wr"] & \star \\
RX \arrow[ur, two heads, "p_X"'] &
\end{tikzcd}
\right);$$

en particular el objeto QX es cofibrante (resp. RX fibrante). Llamamos a una pareja formada de un objeto cofibrante QX (resp. fibrante RX) y de una equivalencia débil $q_X \colon QX \longrightarrow X$ (resp. $i_X \colon X \longrightarrow RX$), un *remplazo cofibrante* (resp. un *remplazo fibrante) de* X.

Observemos que por hipótesis existe un funtor y una transformación natural:

$$Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \qquad \text{y} \qquad q : Q \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \tag{4.1}$$

$$\big(\text{resp.} \quad R : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \qquad \text{y} \qquad i : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow R \;\big),$$

con la propiedad que para todo objeto X de $\mathcal{C}$, el morfismo q_X (resp. i_X) es una fibración (resp. cofibración) y la pareja $(Q(X), q_X)$ $\big($resp. $(R(X), i_X)\big)$ es un remplazo cofibrante (resp. fibrante) de X. En este caso se tiene en particular que el objeto QX (resp. RX) es además fibrante (resp. cofibrante) si X lo es.

§4.2.2. Recordemos que un *objeto cilindro* de un objeto X de $\mathcal{C}$ (resp. un *objeto de trayectorias* u *objeto cocilindro* de Y) es la elección de un objeto $\mathbf{Cyl}(X)$ $\big($resp. $\mathbf{coCyl}(Y)\big)$ y de una factorización:

(4.2)

$$\begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[rr, "\mathrm{id}+\mathrm{id}"] \arrow[dr, tail, "i_0+i_1"'] & & X \\ & \mathbf{Cyl}(X) \arrow[ur, two heads, "\sim", "p"'] & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"] \arrow[dr, tail, "\sim", "i"'] & & Y \times Y \\ & \mathbf{coCyl}(Y) \arrow[ur, two heads, "(p_0{,}p_1)"'] & \end{tikzcd} \right).$$

Si tenemos dos morfismos f, g: $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ decimos que f es *homotópico izquierdo* a g (resp. *homotópico derecho*), si existe una *homotopía izquierda* (resp. *homotopía derecha*) de f en g, es decir si existe un objeto cilindro de X (resp. cocilindro de Y) y un morfismo H tal que el siguiente triángulo es conmutativo:

$$(4.3) \qquad \begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "i_0+i_1"'] & Y \\ \mathbf{Cyl}(X) \arrow[ur, dashed, "H"'] & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f{,}g)"] \arrow[dr, dashed, "H"'] & Y \times Y \\ & \mathbf{coCyl}(Y) \arrow[u, "(i_0{,}i_1)"'] \end{tikzcd} \right).$$

Se verifica que en la subcategoría plena $\mathcal{C}_{cf}$ de $\mathcal{C}$, cuyos objetos son los objetos que son tanto fibrantes como cofibrantes, la relación de homotopía izquierda y de homotopía derecha coinciden. Más aún se muestra que esta relación es una relación de equivalencia compatible con la composición, por lo que se deduce una categoría cociente $\pi\mathcal{C}_{cf}$ y un funtor $\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$.

Si $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ denota a la categoría de fracciones que obtenemos de $\mathcal{C}$ al formalmente invertir las equivalencias débiles, se muestra que existen cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{cf} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \pi\mathcal{C}_{cf} \arrow[r, dashed] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "RQ"] \arrow[d] & \mathcal{C}_{cf} \arrow[d] \\ \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[r, dashed] & \pi\mathcal{C}_{cf} \end{tikzcd} ,$$

los cuales inducen una equivalencia de categorías $\pi\mathcal{C}_{cf} \simeq \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ (en particular $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ es una categoría como definida en §1.1, ver §1.1.1).

En el contexto de las categorías de modelos denotamos también como $\mathrm{Ho}_{\mathbf{W}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ a la categoría de fracciones $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ y la llamamos la *categoría homotópica* de $\mathcal{C}$. Denotamos como $[X, Y]_{(\mathcal{C},\mathbf{W})}$ o $[X, Y]_{\mathcal{C}}$, al conjunto de los morfismos en $\mathrm{Ho}_{\mathbf{W}}(\mathcal{C})$ entre dos objetos X y Y de $\mathcal{C}$.

§4.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia distinguida de morfismos de $\mathcal{C}$ (por ejemplo una categoría de modelos con sus equivalencias débiles). Denotemos como $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ a la categoría de fracciones que obtenemos de $\mathcal{C}$ al formalmente invertir los elementos de $\mathbf{W}$ y como $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ al funtor canónico (notemos que la categoría abstracta $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ es en general una categoría grande como definida en §1.1).

Si $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un funtor de codominio una categoría, recordemos que un *funtor derivado izquierdo* (resp. *derecho*) de F (*respecto de* $\mathbf{W}$) es por definición una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) de F a lo largo del funtor $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ (ver por ejemplo [**Mal07b**] o §8.4 de [**Hir03**]). De manera explícita, un funtor derivado izquierdo (resp. derecho) de F (respecto de $\mathbf{W}$) es una pareja formada de un funtor $\mathbf{L}F\colon \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}$ $\big($resp. $\mathbf{R}F\colon \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}\big)$ y una transformación natural $\alpha\colon \mathbf{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ $\big($resp. $\beta\colon F \Rightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma\big)$, con la propiedad que para cualquier otro funtor $G\colon \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}$ la siguiente aplicación sea biyectiva:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}}\big(G, \mathbf{L}F\big) \overset{-\star\gamma}{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}\big(G \circ \gamma, \mathbf{L}F \circ \gamma\big) \xrightarrow{\alpha\circ -} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}\big(G \circ \gamma, F\big)$$

$$\Bigg(\text{resp.} \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}}\big(\mathbf{R}F, G\big) \overset{-\star\gamma}{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}\big(\mathbf{R}F \circ \gamma, G \circ \gamma\big) \xrightarrow{-\circ\beta} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}\big(F, G \circ \gamma\big)\Bigg).$$

En particular si F envía los elementos de $\mathbf{W}$ en los isomorfismos de $\mathcal{A}$, es decir si existe un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{A}, \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[ur, "\widehat{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces la pareja $(\widehat{F}, \mathrm{id})$ es a la vez un funtor derivado izquierdo y derecho de F.

Si $\mathcal{D}$ es otra categoría, $\mathbf{W}$ un familia de morfismos en $\mathcal{D}$ y $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor, llamamos a un funtor derivado izquierdo (resp. derecho) $\mathbf{L}F\colon \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}[\mathbf{W}^{-1}]$ $\big($resp. $\mathbf{R}F\colon \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}[\mathbf{W}^{-1}]\big)$ de la composición:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{D}[\mathbf{W}^{-1}]$$

un *funtor derivado total izquierdo* (resp. *derecho*) de $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

§4.3.1. Supongamos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos categorías de modelos. Recordemos que una adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

es llamada una *adjunción de Quillen* si el funtor adjunto izquierdo F preserva los elementos de las familias **cof** y $\mathbf{cof}\cap\mathbf{W}$, o de manera equivalente si el funtor adjunto derecho G preserva los elementos de las familias **fib** y $\mathbf{fib}\cap\mathbf{W}$.

Dada una adjunción de Quillen (4.4) se construye un funtor derivado total izquierdo de F (resp. derecho de G):

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathbf{L}F} \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \qquad \left(\text{resp.} \quad \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{R}G} \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \right),$$

de la siguiente manera: Si Q y q (resp. R e i) son como en (4.1), se sigue del Lema de Ken Brown (ver el Lema 1.1.12 de [**Hov07**]) que el funtor $F\circ Q$ (resp. $G\circ R$) respeta las equivalencias débiles. Entonces $\mathbf{L}F$ (resp. $\mathbf{R}G$) se define como el único funtor tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F\circ Q"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{D}}"] \\
\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathbf{L}F"'] & \mathrm{Ho}(\mathcal{D})
\end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "G\circ R"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"] \\
\mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \arrow[r, "\mathbf{R}G"'] & \mathrm{Ho}(\mathcal{C})
\end{tikzcd} \right),$$

y $\alpha = \big((\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)\star q\big)\colon \mathbf{L}F\circ\gamma_{\mathcal{C}} \Rightarrow \gamma_{\mathcal{D}}\circ F$ $\big($resp. $\beta = \big((\gamma_{\mathcal{C}}\circ G)\star i\big)\colon \gamma_{\mathcal{C}}\circ G \Rightarrow \mathbf{R}G\circ\gamma_{\mathcal{D}}$ $\big)$. La pareja $(\mathbf{L}F,\alpha)$ $\big($resp. $(\mathbf{R}G,\alpha)\big)$ es efectivamente un funtor derivado total izquierdo de F (resp. derecho de G) pues α_X (resp. β_Y) es un isomorfismo de $\mathcal{D}[\mathbf{W}^{-1}]$ $\big($resp. de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]\big)$ si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ (resp. Y es un objeto fibrante de $\mathcal{D}$).

Más aún, se muestra (ver por ejemplo el Teorema principal de [**Mal07b**]) que los funtores así obtenidos forman una adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[r, bend left, "\mathbf{L}F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \arrow[l, bend left, "\mathbf{R}G"]
\end{tikzcd}, \tag{4.5}$$

la cual tiene la siguiente propiedad: Si:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \overset{\eta}{\Longrightarrow} G\circ F \qquad \text{y} \qquad F\circ G \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

son una unidad y una counidad respectivamente de la adjunción (4.4), entonces existen una unidad y una counidad de (4.5):

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})} \overset{\widetilde{\eta}}{\Longrightarrow} \mathbf{R}G\circ\mathbf{L}F \qquad \text{y} \qquad \mathbf{L}F\circ\mathbf{R}G \overset{\widetilde{\varepsilon}}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{D})}$$

respectivamente, tales que los siguientes cuadrados son conmutativos:

(4.6)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}G \circ \gamma_{\mathcal{D}} \circ F & \gamma_{\mathcal{C}} \circ G \circ F \arrow[l, Rightarrow, "\beta\star F"'] & & \mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{C}} \circ G \arrow[r, Rightarrow, "\alpha\star G"] \arrow[d, Rightarrow, "\mathbf{L}F\star\beta"'] & \gamma_{\mathcal{D}} \circ F \circ G \arrow[d, Rightarrow, "\gamma_{\mathcal{D}}\star\varepsilon"] \\
\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{C}} \arrow[u, Rightarrow, "\mathbf{R}G\star\alpha"] & \gamma_{\mathcal{C}} \arrow[l, Rightarrow, "\widetilde{\eta}\star\gamma_{\mathcal{C}}"] \arrow[u, Rightarrow, "\gamma_{\mathcal{C}}\star\eta"'] & \text{y} & \mathbf{L}F \circ \mathbf{R}G \circ \gamma_{\mathcal{D}} \arrow[r, Rightarrow, "\widetilde{\varepsilon}\star\gamma_{\mathcal{D}}"'] & \gamma_{\mathcal{D}}
\end{tikzcd} .$$

En particular, para todo objeto A de $\mathcal{D}$ y todo objeto X de $\mathcal{C}$, deducimos los siguientes cuadrado conmutativos:

(4.7)

$$\begin{tikzcd}
GRF(X) & GF(X) \arrow[l, "G(i_{F(X)})"'] & & FQG(A) \arrow[r, "F(q_{GA})"] \arrow[d, "FQG(i_A)"'] & FG(A) \arrow[d, "\varepsilon_A"] \\
GRFQ(X) \arrow[u, "GRF(q_X)"] & X \arrow[l, "\widetilde{\eta}_X"] \arrow[u, "\eta_X"'] & \text{y} & FQGR(A) \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}_A"'] & A
\end{tikzcd} ,$$

de las categorías homotópicas $\mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ y $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$, respectivamente.

Una *equivalencia de Quillen* es una adjunción de Quillen como (4.4) tal que el funtor $\mathbf{L}F$ (o el funtor $\mathbf{R}F$) es una equivalencia de categorías. De manera equivalente, la adjunción de Quillen (4.4) es una equivalencia de Quillen si para todo objeto cofibrante X de $\mathcal{C}$ y todo objeto fibrante Y de $\mathcal{D}$, un morfismo $FX \longrightarrow Y$ es una equivalencia débil de $\mathcal{D}$ si y solamente si el morfismo adjunto $X \longrightarrow GY$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

5. Extensiones de Kan homotópicas

En esta sección, imitando §2.2, revisaremos algunos resultados sobre extensiones de Kan homotópicas (globales) en categorías de modelos, concentrándonos principalmente en diagramas inversos y directos.

§5.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si I es una categoría pequeña y $\mathbf{W}$ es una familia distinguida de morfismos de $\mathcal{C}$, denotamos como $\mathbf{W}_I$ al conjunto de las *equivalencias débiles argumento por argumento* de $\mathcal{C}^I$, es decir al conjunto de los morfismos de I-diagramas $F\colon\ \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ tales que para todo objeto a de I el morfismo $F_a\colon\ X_a \to X'_a$ es una equivalencia débil.

Observemos en particular que se tiene un diagrama conmutativo (ver §1.2):

(5.1)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^I \arrow[r, "(\gamma_{\mathcal{C}})^I"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}^I}"'] & \big(\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]\big)^I \\
\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[ru, dashed, "\Phi_{\mathcal{C},I}"'] &
\end{tikzcd} .$$

En general, el funtor $\Phi_{\mathcal{C},I}$ así obtenido no es una equivalencia de categorías salvo en casos muy específicos, por ejemplo:

LEMA 5.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$ que contiene a las identidades. Si I es una categoría pequeña isomorfa a una unión disjunta finita $I \cong I_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup I_n$ donde $n \geq 0$, entonces el funtor:*

$$\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \xrightarrow{(\widehat{u_1^*},\dots,\widehat{u_n^*})} \mathcal{C}^{I_1}[\mathbf{W}_{I_1}^{-1}] \times \cdots \times \mathcal{C}^{I_n}[\mathbf{W}_{I_n}^{-1}], \tag{5.2}$$

es un isomorfismo de categorías, donde $u_i\colon I_i \longrightarrow I$ son los funtores inclusión canónicos.

En particular, si I es una categoría pequeña discreta finita[3] *y $\mathbf{W}$ contiene a las identidades de $\mathcal{C}$, entonces el funtor $\Phi_{\mathcal{C},I}$ en (5.1) es un isomorfismo de categorías.*

DEMOSTRACIÓN. Si $n = 0$ es decir si I es la categoría vacía se tiene que $\mathcal{C}^I$ es la categoría puntual, entonces (5.2) es un isomorfismo de categorías porque el producto vacío de categorías es también la categoría puntual. Por otro lado si $n = 1$ el funtor (5.2) es el funtor identidad.

Finalmente notemos que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías con familias distinguidas de morfismos $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ y $\mathbf{W}_{\mathcal{B}}$ respectivamente las cuales contienen a los morfismos identidades, entonces el funtor canónico:

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\big[(\mathbf{W}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{W}_{\mathcal{B}})^{-1}\big] \longrightarrow \mathcal{A}[\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-1}] \times \mathcal{B}[\mathbf{W}_{\mathcal{B}}^{-1}]$$

es un isomorfismo de categorías.

En efecto la categoría $\mathcal{A}[\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-1}] \times \mathcal{B}[\mathbf{W}_{\mathcal{B}}^{-1}]$ tiene la propiedad universal que para cualquier categoría $\mathcal{D}$ el conjunto de los funtores $\mathcal{A}[\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-1}] \times \mathcal{B}[\mathbf{W}_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}$ se identifica con el conjunto de los funtores $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ tales que $F(f,b)$ y $F(a,g)$ son isomorfismos de $\mathcal{D}$ si $f \in \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$, $g \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}}$ son morfismos y $a \in \mathcal{A}_0$, $b \in \mathcal{B}_0$ son objetos. Como las familias de morfismos $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ y $\mathbf{W}_{\mathcal{B}}$ contienen a las identidades, esta propiedad es equivalente a pedir que $F(f,g)$ sea un isomorfismo de $\mathcal{D}$ si $f \in \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ y $g \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}}$.

Por lo tanto el funtor (5.2) es un isomorfismo si $n \geq 2$.

---

[3] I es una categoría pequeña *discreta finita* si no admite morfismos distintos de las identidades y el conjunto de sus objetos es finito (posiblemente vacío).

Supongamos ahora que I es una categoría discreta finita y sea $\{i_0, \ldots, i_s\}$ el conjunto de los objetos de I. Ya que para cada $0 \leq k \leq s$ tenemos cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^I \arrow[r, "(\gamma_{\mathcal{C}})^I"] \arrow[d, "u_k^*"'] & (\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}])^I \arrow[d, "u_k^*"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^I \arrow[r, "u_k^*"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}^I}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"] \\
\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[r, "\widehat{u_k^*}"'] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]
\end{tikzcd},$$

donde $u_k \colon \star \longrightarrow I$ es el funtor $u_k(\star) = i_k$, se sigue que el siguiente es un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^I \arrow[r, "(\gamma_{\mathcal{C}})^I"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}^I}"'] & (\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}])^I \arrow[d, "(u_1^*, \ldots, u_s^*)"] \\
\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[r, "(\widehat{u_1^*}, \ldots, \widehat{u_s^*})"'] & \underbrace{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \times \cdots \times \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}_{s}
\end{tikzcd}.$$

Por lo tanto (recuerda el isomorfismo de categorías (1.2)):

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}])^I \arrow[d, "(u_1^*, \ldots, u_s^*)"] \\
\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[ru, bend left, "\Phi_{\mathcal{C},I}"] \arrow[r, "(\widehat{u_1^*}, \ldots, \widehat{u_s^*})"'] & \underbrace{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \times \cdots \times \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}_{s}
\end{tikzcd}$$

es un triangulo conmutativo, donde $(u_1^*, \ldots, u_s^*)$ y $(\widehat{u_1^*}, \ldots, \widehat{u_s^*})$ son isomorfismos de categorías porque I es una categoría discreta finita y $\mathbf{W}$ contiene a los morfismos identidad. Esto demuestra que en este caso, $\Phi_{\mathcal{C},I}$ es un isomorfismo de categorías. ☐

Notemos sin embargo:

Lema 5.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{W}$ es una familia fuertemente saturada*[4]*, entonces para toda categoría pequeña I el funtor canónico:*

$$\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{C},I}} (\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}])^I \tag{5.3}$$

---

[4] Decimos que una familia de morfismos $\mathbf{W}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es *fuertemente saturada* si se cumple la siguiente propiedad: Un morfismo de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathbf{W}$ si y solamente si su imagen en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ es un isomorfismo. Por ejemplo la familia de las equivalencias débiles en una categoría de modelos es fuertemente saturada.

es conservativo*, es decir si* $F: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ *es un morfismo de* $\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}]$ *tal que para todo objeto* a *de* I *el morfismo* $F_a: X_a \to X'_a$ *es un isomorfismo de* $\mathcal{C}[\mathbf{W}]$*, entonces* F *es un isomorfismo de* $\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}]$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que un morfismo $F: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ de la categoría de fracciones $\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}]$, es la clase de equivalencia de una cadena de morfismos de $\mathcal{C}^I$:

(5.4)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \arrow[r, dash, "F^1"] & \mathfrak{X}^1 \arrow[r, dash, "F^2"] & \cdots \arrow[r, dash, "F^{n-1}"] & \mathfrak{X}^{n-1} \arrow[r, dash, "F^n"] & \mathfrak{X}^n = \mathfrak{X}' \end{tikzcd} ,$$

donde para cada $1 \leq k \leq n$ el morfismo F^k es un morfismo arbitrario de $\mathcal{C}^I$ de la forma $F^k: \mathfrak{X}^{k-1} \to \mathfrak{X}^k$, o el morfismo F^k es un morfismo de $\mathbf{W}_I$ de la forma $F^k: \mathfrak{X}^{k-1} \leftarrow \mathfrak{X}^k$.

Supongamos que $\Phi_{\mathcal{C},I}(F)$ es un isomorfismo de $\big(\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]\big)^I$, es decir supongamos que para todo objeto a de I, el morfismo de la categoría de fracciones $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ asociado a la cadena de morfismos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_a = X_a^0 \arrow[r, dash, "F_a^1"] & X_a^1 \arrow[r, dash, "F_a^2"] & \cdots \arrow[r, dash, "F_a^{n-1}"] & X_a^{n-1} \arrow[r, dash, "F_a^n"] & X_a^n = X'_a \end{tikzcd} ,$$

es un isomorfismo.

Como $\mathbf{W}$ es una familia de morfismos fuertemente saturada, deducimos que para todo objeto a de I y todo $0 \leq k \leq n$, el morfismo F_a^k pertenece a $\mathbf{W}$. Por lo tanto F^k pertenece a $\mathbf{W}_I$ para todo $0 \leq k \leq n$, es decir el morfismo de la categoría de fracciones $\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}]$ asociado a la cadena (5.4) es un isomorfismo. ☐

§5.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia distinguida de morfismos de $\mathcal{C}$. Notemos que si $u: I \to J$ es un funtor entre categorías pequeñas, el funtor $u^*: \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^I$ inducido entre las categorías de diagramas (ver §2.2) respeta las equivalencias débiles argumento por argumento. Obtenemos en particular un cuadrado conmutativo:

(5.5)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}^J}"'] & \mathcal{C}^I \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}^I}"] \\ \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[r, dashed, "\widehat{u^*}"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \end{tikzcd} .$$

Más aún, con ayuda de (1.1) deducimos el 2-funtor composición:

(5.6)
$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{cat}}^{op} \arrow[r, "(\mathcal{C}^{-}{,}\mathbf{W}_{-})"] & \underline{\mathbf{Cat}}_{\mathbf{W}} \arrow[r, "\mathcal{C}^{-}{[}\mathbf{W}_{-}^{-1}{]}"] & \underline{\mathbf{CAT}} \\ I \arrow[d, bend right, "u"'] \arrow[d, bend left, "v"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & (\mathcal{C}^I, \mathbf{W}_I) & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \\ J \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & (\mathcal{C}^J, \mathbf{W}_J) \arrow[u, bend left, "u^*"] \arrow[u, bend right, "v^*"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha_*}{\Rightarrow}"] \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[u, bend left, "\widehat{u^*}"] \arrow[u, bend right, "\widehat{v^*}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\widehat{\alpha_*}}{\Rightarrow}"] \end{tikzcd}$$

análogo al 2-funtor (2.1). Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos con $\mathbf{W}$ su familia de equivalencias débiles, entonces el 2-funtor (5.6) tiene de hecho su imagen en $\underline{\mathbf{Cat}}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría y $\mathbf{W}$ es una familia distinguida de morfismos de $\mathcal{C}$, decimos que la categoría $\mathcal{C}$ *admite extensiones de Kan homotópicas izquierdas* (resp. *derechas*) *a lo largo de* u (*relativas a* $\mathbf{W}$), si el funtor $\widehat{u^*}$ admite un adjunto izquierdo (resp. derecho):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[r, bend left, leftarrow, "u_!^h"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\widehat{u^*}"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[r, bend left, "\widehat{u^*}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, leftarrow, "u_*^h"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \end{tikzcd} \right).$$

En este caso, para todo I-diagrama $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{C}$ llamamos (por abuso) al J-diagrama $u_!^h(\mathfrak{X})$ (resp. $u_*^h(\mathfrak{X})$) de $\mathcal{C}$ una (o la) *extensión de Kan homotópica izquierda* (resp. *derecha*) *de* $\mathfrak{X}$ *a lo largo de* u (*relativa a* $\mathbf{W}$). El funtor $u_!^h$ (resp. u_*^h) es llamado un (o el) *funtor extensión de Kan homotópica izquierda* (resp. *derecha*) *a lo largo de* u (*relativa a* $\mathbf{W}$).

Si $\mathcal{C}$ admite extensiones de Kan homotópicas izquierdas (resp. derechas) a lo largo de un funtor $p_I : \ I \longrightarrow \star$ en la categoría puntual $\star$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[r, bend left, leftarrow, "(p_I)_!^h = \mathrm{hocolim}_I"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\widehat{(p_I)^*}"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[r, bend left, "\widehat{(p_I)^*}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, leftarrow, "(p_I)_*^h = \mathrm{holim}_I"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \end{tikzcd} \right),$$

decimos que $\mathcal{C}$ *admite colímites homotópicos* (resp. *límites homotópicos*) *de tipo* I (*relativos a* $\mathbf{W}$), y (por abuso) llamamos al objeto $\mathrm{hocolim}_I(\mathfrak{X})$ $\big($resp. $\mathrm{holim}_I(\mathfrak{X})\big)$ un (o el) *colímite homotópico* (resp. *límite homotópico*) del I-diagrama $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{C}$ (*relativo a* $\mathbf{W}$).

§5.2.1. El siguiente enunciado es una consecuencia del Lema 5.1.1:

Corolario 5.2.1. *Si I es una categoría pequeña discreta finita y $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos, entonces $\mathcal{C}$ admite colímites homotópicos (resp. límites homotópicos) de tipo I si y solamente si, la categoría $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ admite sumas (resp. productos) indexadas por el conjunto de objetos I_0 de I.*

Más aún, en este caso un colímite homotópico (resp. un límite homotópico) de un I-diagrama $\mathfrak{X} = \{X_i\}_{i\in I_0}$ de $\mathcal{C}$, es canónicamente isomorfo a una suma (resp. producto) de la familia $\{X_i\}_{i\in I_0}$ en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que se tienen cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "(p_I)^*"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}^I \arrow[d, "(\gamma_{\mathcal{C}})^I"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}] \arrow[r, "(p_I)^*"'] & \big(\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]\big)^I
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "(p_I)^*"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}^I \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}^I}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}] \arrow[r, "\widehat{(p_I)^*}"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}]
\end{tikzcd},$$

por lo que tenemos un triángulo conmutativo (ver (1.2)):

$$\begin{tikzcd}
 & \big(\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]\big)^I \\
\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[ur, bend left, "\Phi_{\mathcal{C},I}"] & \\
 & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[uu, "(p_I)^*"'] \arrow[ul, bend left, "\widehat{(p_I)^*}"]
\end{tikzcd},$$

donde $\Phi_{\mathcal{C},I}$ es un isomorfismo de categorías por el Lema 5.1.1. □

Notemos que los argumentos en §2.2.1 sobre imágenes de adjunciones por 2-funtores, nos permite deducir el siguiente enunciado análogo al del Lema 2.2.1:

LEMA 5.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$. Consideremos un funtor entre categorías pequeñas $u\colon I \longrightarrow J$ el cual admite un funtor adjunto derecho (resp. izquierdo) $v\colon J \longrightarrow I$. Entonces el funtor:*

$$\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \xrightarrow{u_!^h = \widehat{v^*}} \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \qquad \left(\textit{resp.} \qquad \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \xrightarrow{u_*^h = \widehat{v^*}} \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \right),$$

es un funtor extensión de Kan homotópica izquierda (resp. derecha) a lo largo de u, el cual es fielmente pleno si u lo es.

En particular, si I es una categoría que admite un objeto final (resp. inicial) i_0, entonces $\mathcal{C}$ admite colímites homotópicos (resp. límites homotópicos) de tipo I y para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ el objeto X_{i_0} es un colímite homotópicos (resp. límite homotópicos) de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$.

Del Lema 5.2.2 se sigue el siguiente enunciado análogo al Corolario 2.2.2:

COROLARIO 5.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$. Supongamos que $u\colon I \longrightarrow J$ es un funtor entre categorías pequeñas que admite un funtor adjunto derecho (resp. izquierdo) $v\colon J \longrightarrow I$. Si $\mathcal{C}$ admite I-colímites homotópicos (resp. I-límites homotópicos), entonces $\mathcal{C}$ también admite J-colímites homotópicos (resp. J-límites homotópicos) y cualquier transformación conjugada izquierda (resp. derecha)*

$$\underset{I}{\operatorname{hocolim}} \circ \widehat{u^*} \Longrightarrow \underset{J}{\operatorname{hocolim}} \qquad \big(\textit{resp.} \quad \underset{J}{\operatorname{holim}} \Longrightarrow \underset{I}{\operatorname{holim}} \circ \widehat{u^*}\ \big)$$

de la transformación natural:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] & \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[l, "\widehat{u^*}"'] \\ \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p_I^*}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\widehat{p_J^*}"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p_I^*}"'] \\ \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[u, "\widehat{u^*}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p_J^*}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd} \right), \tag{5.7}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Se sigue del Lema 5.2.2 que la transformación natural (5.7) admite una conjugada derecha y una izquierda. Por otro lado, se verifica como en el Corolario 2.2.2 que podemos tomar como conjugada derecha (resp. izquierda) de (5.2.2) a la transformación natural:

$$\mathrm{id}_{der}\colon \widehat{p_J^*} \Longrightarrow \widehat{v^*} \circ \widehat{p_I^*} \qquad \big(\text{resp.}\quad \mathrm{id}_{izq}\colon \widehat{v^*} \circ \widehat{p_I^*} \Longrightarrow \widehat{p_J^*}\ \big),$$

definida en un objeto A de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ y un objeto b de J como el morfismo identidad de A en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$. El resultado es entonces una consecuencia de los Lemas 5.1.2 y 1.2.1. ☐

§5.3. Es posible mostrar que en cualquier categoría de modelos existen extensiones de Kan homotópicas izquierdas y derechas a lo largo de todo funtor (entre categorías pequeñas). Más aún, se constata que dichos funtores satisfacen propiedades similares a las que cumplen las extensiones de Kan ordinarias (ver [**Cis03**] o el párrafo §20.2 de [**DHKS04**]). En el presente capítulo sin embargo, nos vamos a interesar en extensiones de Kan homotópicas a lo largo de funtores entre categorías pequeñas pertenecientes a una familia bastante restringida donde la teoría es mucho más simple.

Si I es una categoría pequeña, recordemos que una *estructura de Reedy* sobre I es una pareja formada de dos subcategorías I_+ y I_- de I verificando las propiedades:

(i) Todo morfismo u de I se escribe de manera única como una composición $u = u_+u_-$, donde u_+ (resp. u_-) es un morfismo de I_+ (resp. I_-).

(ii) Existe una función $\lambda\colon \operatorname{Obj}(I) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que si $a \longrightarrow b$ es un morfismo de I_+ (resp. de I_-) diferente de la identidad, entonces $\lambda(b) > \lambda(a)$ $\big($resp. $\lambda(a) > \lambda(b)\big)$.

En este caso decimos que $I = (I, I_+, I_-)$ es una *categoría de Reedy* y llamamos a I_+ (resp. I_-) la *subcategoría directa* (resp. *subcategoría inversa*) de I. Nota que por la propiedad (i) las categorías I_+ y I_- tienen el mismo conjunto de objetos que I.

Una *categoría directa* (resp. *inversa*) es una categoría pequeña que es la subcategoría directa (resp. inversa) de alguna categoría de Reedy. De manera equivalente, I es una categoría directa (resp. inversa) si existe una función $\lambda\colon \operatorname{Obj}(I) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\lambda(b) > \lambda(a)$ $\big($resp. $\lambda(a) > \lambda(b)\big)$ para todo morfismo distinto de la identidad $f\colon a \longrightarrow b$ de I.

PROPOSICIÓN 5.3.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Si (I, I_+, I_-) es una categoría de Reedy, entonces la categoría de diagramas $\mathcal{C}^{I_+}$ (resp. $\mathcal{C}^{I_-}$) admite una estructura de categoría de modelos, llamada* estructura de categoría de modelos proyectiva *(resp.* inyectiva*), cuyas equivalencias débiles y fibraciones (resp. equivalencias débiles y cofibraciones) son definidas argumento por argumento.*

Más aún, la categoría de diagramas $\mathcal{C}^I$ admite una estructura de categorías de modelos, llamada estructura de categoría de modelos de Reedy*, cuyas equivalencias débiles son definidas argumento por argumento, y las fibraciones (resp. las cofibraciones) son los morfismos cuyas restricciones a I_+ e I_- son fibraciones (resp. cofibraciones) de $\mathcal{C}^{I_+}$ y $\mathcal{C}^{I_-}$ respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Este es un resultado clásico, ver por ejemplo el Teorema 16.3.4 de [**Hir03**] o los Teoremas 5.1.3 y 5.2.5 de [**Hov07**]. Por comodidad recordemos la definición precisa de las fibraciones y las cofibraciones en la estructura de categoría de modelos de Reedy de $\mathcal{C}^I$:

Si $\mathcal{Y}$ es un I-diagrama de $\mathcal{C}$ y a es un objeto de I, definimos los siguientes objetos de $\mathcal{C}$:

$$M_a \mathcal{Y} = \lim_{a \to x} Y_x \qquad \text{y} \qquad L_a \mathcal{Y} = \operatorname*{colim}_{x \to a} Y_x$$

donde el límite (resp. colímite) se toma sobre la subcategoría de $a \,|\, I_-$ (resp. $I_+ \,|\, a$) cuyos objetos son las parejas (x, α) tales que α no es el morfismo identidad.

Notemos que para cada objeto a de I se tienen funtores canónicos $M_a\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ y $L_a\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$, así como transformaciones naturales:

$$\Big(L_a \Rightarrow (\,\cdot\,)_a \Rightarrow M_a \Big) = \Big\{ L_a \mathcal{Y} \longrightarrow Y_a \longrightarrow M_a \mathcal{Y} \Big\}_{\mathcal{Y} \in \mathcal{C}^I}.$$

Un morfismo $\varphi\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ de I-diagramas de $\mathcal{C}$ es entonces un fibración (resp. una fibración trivial) en la estructura de categoría de modelos de Reedy en $\mathcal{C}^I$ si y solamente si, para todo objeto a de I el morfismo $Y_a \longrightarrow M_a \mathcal{Y} \underset{M_a \mathcal{Z}}{\times} Z_a$ inducido del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d] & Z_a \arrow[d] \\
M_a \mathcal{Y} \arrow[r, "M_a \varphi"'] & M_a \mathcal{Z}
\end{tikzcd}$$

es una fibración (resp. una fibración trivial) de $\mathcal{C}$. Del mismo modo φ es una cofibración (resp. una cofibración trivial) si y solamente si, para todo objeto a de I el morfismo

$Y_a \underset{L_a\mathcal{Y}}{+} L_a\mathcal{Z} \longrightarrow Z_a$ inducido del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L_a\mathcal{Y} \arrow[r, "L_a\varphi"] \arrow[d] & L_a\mathcal{Z} \arrow[d] \\ Y_a \arrow[r, "\varphi_a"'] & Z_a \end{tikzcd}$$

es una cofibración (resp. una cofibración trivial) de $\mathcal{C}$. ☐

El siguiente enunciado es una consecuencia simple de la Proposición 5.3.1.

Corolario 5.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Si I es una categoría directa (resp. inversa) y suponemos que $\mathcal{C}^I$ tiene la estructura de categoría de modelos proyectiva (resp. inyectiva), entonces la adjunción:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend right, "p_I^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend right, "\operatorname{colim}_I"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "p_I^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend left, "\lim_I"] \end{tikzcd} \right), \tag{5.8}$$

es una adjunción de Quillen. En particular, $\mathcal{C}$ admite colímites homotópicos (resp. límites homotópicos) de tipo I.

Más aún, si $u : I \longrightarrow J$ es un funtor entre categorías directas (resp. inversas) entonces la adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[r, bend right, "u^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend right, "u_!"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[r, bend left, "u^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend left, "u_*"] \end{tikzcd} \right); \tag{5.9}$$

donde $u_!$ (resp. u_*) es un funtor extensión de Kan izquierda (resp. derecha) a lo largo de u ordinario, es una adjunción de Quillen. En particular, $\mathcal{C}$ admite extensiones de Kan homotópicas izquierdas (resp. derechas) a lo largo de u.

Demostración. Se verifica sin dificultad que los funtores p_I^* y u^* son funtores de Quillen derechos (resp. izquierdos) con las estructuras de categoría de modelos de la Proposición 5.3.1. ☐

§5.3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{W}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$. Si u: $I \longrightarrow J$ es un funtor entre categorías pequeñas y b un objeto de J, deducimos del diagrama de

categorías pequeñas (2.6) y del 2-funtor (5.6) una transformación natural:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{u|b}[\mathbf{W}^{-1}_{u|b}] & & \mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}^{-1}_{I}] \arrow[ll, "\widehat{(\pi|b)^*}"'] \\
& \Swarrow \widehat{(\Gamma|b)_*} & \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[uu, "\widehat{(p_{u|b})^*}"] & & \mathcal{C}^{J}[\mathbf{W}^{-1}_{J}] \arrow[ll, "\widehat{b^*}"] \arrow[uu, "\widehat{u^*}"']
\end{tikzcd}
\quad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{b|u}[\mathbf{W}^{-1}_{b|u}] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[ll, "\widehat{(p_{b|u})^*}"'] \\
& \Swarrow \widehat{(b|\Gamma)_*} & \\
\mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}^{-1}_{I}] \arrow[uu, "\widehat{(b|\pi)^*}"] & & \mathcal{C}^{J}[\mathbf{W}^{-1}_{J}] \arrow[ll, "\widehat{u^*}"] \arrow[uu, "\widehat{b^*}"']
\end{tikzcd}\right). \tag{5.10}$$

Un *morfismo evaluación homotópica izquierda* (resp. *derecha*) *de u en b* es por definición una conjugada izquierda de $\widehat{(\Gamma|b)_*}$ (resp. conjugada derecha de $\widehat{(b|\Gamma)_*}$):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{u|b}[\mathbf{W}^{-1}_{u|b}] \arrow[dd, "\underset{u|b}{\mathrm{hocolim}}"'] & & \mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}^{-1}_{I}] \arrow[ll, "\widehat{(\pi|b)^*}"'] \arrow[dd, "u^h_!"] \\
& \Searrow \widehat{(\Gamma|b)}_{izq} & \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] & & \mathcal{C}^{J}[\mathbf{W}^{-1}_{J}] \arrow[ll, "\widehat{b^*}"]
\end{tikzcd}
\quad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{b|u}[\mathbf{W}^{-1}_{b|u}] \arrow[rr, "\underset{b|u}{\mathrm{holim}}"] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \\
& \widehat{(b|\Gamma)}_{der} \Nwarrow & \\
\mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}^{-1}_{I}] \arrow[uu, "\widehat{(b|\pi)^*}"] \arrow[rr, "u^h_*"'] & & \mathcal{C}^{J}[\mathbf{W}^{-1}_{J}] \arrow[uu, "\widehat{b^*}"']
\end{tikzcd}\right), \tag{5.11}$$

de la transformación natural (5.10).

Notemos que $\mathcal{C}$ admite colímites homotópicos (resp. límites homotópicos) de tipo $u|b$ (resp. $b|u$) y extensiones de Kan homotópicas izquierdas (resp. derechas) a lo largo de u, si y solamente si $\mathcal{C}$ admite un morfismo evaluación homotópica izquierda (resp. derecha) de u en b. En este caso, para todo I-diagrama $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{C}$ llamamos al morfismo inducido de la categoría $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$\mathrm{hocolim}_{u|b}\big(\mathfrak{X}\circ(\pi|b)\big) \xrightarrow{\widehat{(\Gamma|b)}_{izq,\,\mathfrak{X}}} u^h_!(\mathfrak{X})_b \tag{5.12}$$

$$\left(\text{resp.}\qquad u^h_*(\mathfrak{X})_b \xrightarrow{\widehat{(b|\Gamma)}_{der,\,\mathfrak{X}}} \mathrm{holim}_{b|u}\big(\mathfrak{X}\circ(b|\pi)\big)\right)$$

un *morfismo evaluación de $u^h_!(\mathfrak{X})$* $\big($resp. $u^h_*(\mathfrak{X})\big)$ *en b.*

PROPOSICIÓN 5.3.3. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos, $u\colon\ I \longrightarrow J$ es un functor entre categorías pequeñas directas (resp. inversas) y b es un objeto de J, entonces existe un morfismo evaluación homotópica izquierda (resp. derecha) de u en b* (5.11) *y dicha transformación natural es un isomorfismo (ver el Lema 5.1.2).*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si I es una categoría directa (resp. inversa) entonces para todo objeto b de I la categoría $u|b$ (resp. $b|u$) es también directa (resp. inversa). En efecto, si λ: $\mathrm{Ob}(I) \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función tal que $\lambda(b) > \lambda(a)$ $\big($resp. $\lambda(b) < \lambda(a)\big)$ siempre que exista un morfismo f: $a \longrightarrow b$ en I distinto de la identidad, entonces la función composición $\lambda \circ \mathrm{Ob}(\pi\,|\,b)\colon \mathrm{Ob}(u\,|\,b) \to \mathbb{N}$ $\big($resp. $\lambda \circ \mathrm{Ob}(b\,|\,\pi)\colon \mathrm{Ob}(b\,|\,u) \to \mathbb{N}\,\big)$ tiene la misma propiedad con respecto a los morfismos de la categoría $u\,|\,b$ (resp. $b\,|\,u$).

Concluimos de la Proposición 5.3.1 que si I y J son categorías directas (resp. inversas), entonces para todo objeto b en J las categorías $\mathcal{C}^I$, $\mathcal{C}^J$ y $\mathcal{C}^{u\,|\,b}$ (resp. $\mathcal{C}^I$, $\mathcal{C}^J$ y $\mathcal{C}^{b\,|\,u}$) tienen estructuras de categorías de modelos donde las equivalencias débiles y las fibraciones (resp. las equivalencias débiles y las cofibraciones) son definidas argumento por argumento.

En particular (ver el Corolario 5.3.2), las adjunciones canónicas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^J \arrow[r, bend right, "u^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend right, "u_!"'] & \text{y} & \mathcal{C} \arrow[r, bend right, "p^*_{u\,|\,b}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{u\,|\,b} \arrow[l, bend right, "\mathrm{colim}_{u\,|\,b}"']
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp. }\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^J \arrow[r, bend left, "u^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I \arrow[l, bend left, "u_*"] & \text{y} & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "p^*_I"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{b\,|\,u} \arrow[l, bend left, "\lim_{b\,|\,u}"]
\end{tikzcd}\right)$$

son adjunciones de Quillen con respecto a estas estructuras de categorías de modelos. Por lo tanto, existe un morfismo evaluación homotópica izquierda (resp. derecha) de u en b como el de (5.11).

Mostremos la segunda afirmación del enunciado en el caso de categorías directas. Para ello notemos que si $\mathcal{X}$ es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}^I$ con la estructura de categoría de modelos proyectiva; con ayuda del diagrama (4.7) no es difícil ver que el morfismo evaluación izquierda de $u_!^h(\mathcal{X})$ en b como en (5.12), está definido salvo isomorfismo en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ por el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\operatorname*{colim}\limits_{u\,|\,b}\big(Q \circ (\pi\,|\,b)^* \,\mathfrak{X}\big) \arrow[r, "\operatorname*{colim}\limits_{u\,|\,b}\left(Q\circ(\pi\,|\,b)^*\,\eta_{\mathcal{X}}\right)"] \arrow[d, "(\widehat{b\,|\,\Gamma})_{izq,\,\mathfrak{X}}"'] & \operatorname*{colim}\limits_{u\,|\,b}\big(Q \circ (\pi\,|\,b)^* \circ u^* \circ u_!\,\mathfrak{X}\big) \arrow[d, "\operatorname*{colim}\limits_{u\,|\,b}\left(Q\left((\Gamma\,|\,b)_{*,u_!\mathcal{X}}\right)\right)"] \\
u_!(\mathcal{X})_b & \operatorname*{colim}\limits_{u\,|\,b}\big(Q \circ p^*_{u\,|\,b} \circ b^* \circ u_!\,\mathfrak{X}\big) \arrow[l, "\widetilde{\varepsilon}_{u_!(\mathcal{X})_b}"]
\end{tikzcd} \tag{5.13}$$

donde Q es un funtor reemplazo cofibrante en $\mathcal{C}^{u\,|\,b}$, $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}^I} \Longrightarrow u^* \circ u_!$ es una unidad y $\widetilde{\varepsilon}_A$ es el morfismo en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ imagen del siguiente morfismo composición en $\mathcal{C}$ (ver (4.7)):

$$\operatorname*{colim}_{u\,|\,b} \circ\, Q \circ p^*_{u\,|\,b}(A) \xrightarrow{\operatorname*{colim}\limits_{u\,|\,b}(q_{p^*_{u\,|\,b}A})} \operatorname*{colim}_{u\,|\,b} \circ\, p^*_{u\,|\,b}(A) \xrightarrow{\varepsilon_A} A\,;$$

aquí $\varepsilon\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mathrm{colim}_{u\,|\,b} \circ p^*_{u\,|\,b}$ es una counidad y $q\colon Q \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{u\,|\,b}}$ es el morfismo de comparación para el reemplazo Q (ver (4.1))

Por otro lado, como se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\big((\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}\big) \arrow[r, "\operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\left((\pi\,|\,b)^*\,\eta_{\mathcal{X}}\right)"] \arrow[d, "(b\,|\,\Gamma)_{izq,\,\mathfrak{X}}"'] & \operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\big((\pi\,|\,b)^*\circ u^*\circ u_!\,\mathfrak{X}\big) \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\left((\Gamma\,|\,b)_{*,u_!\mathcal{X}}\right)"] \\
u_!(\mathcal{X})_b & \operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\big(p^*_{u\,|\,b}\circ b^*\circ u_!\,\mathfrak{X}\big) \arrow[l, "\varepsilon_{u_!(\mathcal{X})_b}"]
\end{tikzcd}$$

se sigue de la naturalidad de q: $Q\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{u\,|\,b}}$ y del cuadrado conmutativo (5.13), que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\big(Q\circ(\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}\big) \arrow[rr, "\operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\left(q_{(\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}}\right)"] \arrow[dr, bend right, "(\widehat{b\,|\,\Gamma})_{izq,\,\mathfrak{X}}"'] & & \operatorname*{colim}_{u\,|\,b}\big((\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}\big) \arrow[dl, bend left, "(b\,|\,\Gamma)_{izq,\,\mathfrak{X}}"] \\
& u_!(\mathcal{X})_b &
\end{tikzcd} \tag{5.14}$$

Notemos finalmente que como el funtor $(\pi\,|\,b)\colon u\,|\,b\longrightarrow I$ es cofinal, si $\mathcal{X}$ es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}^I$ con la estructura proyectiva, entonces $(\pi\,|\,b)^*\,\mathcal{X}$ es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}^{u\,|\,b}$. En particular, el morfismo comparación:

$$Q\circ(\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}\xrightarrow{q_{(\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}}}(\pi\,|\,b)^*\,\mathfrak{X}$$

es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes de $\mathcal{C}^{u\,|\,b}$.

Deducimos de la Proposición 2.2.3 y del triángulo (5.14) que si $\mathcal{X}$ es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}^I$, el morfismo evaluación izquierda (resp. derecha) de $u^h_!(\mathcal{X})$ $\big($resp. $u^h_*(\mathcal{X})\big)$ en b de (5.12) es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$. Por lo tanto, ya que todo objeto en $\mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}]$ es isomorfo a un objeto cofibrante, se sigue del Lema 5.1.2 que la transformación natural (5.11) es un isomorfismo. □

§5.3.2. Deduzcamos de la Proposición 5.3.3 un enunciado análogo al Corolario 2.2.4 usando los mismos argumentos que en §2.2.3.

En efecto, supongamos que $u\colon\ I\longrightarrow J$ es un funtor fielmente pleno entre categorías pequeñas. Si $\mathcal{C}$ es una categoría y $\mathbf{W}$ es una familia de morfismos de $\mathcal{C}$; para cada objeto a de I deducimos del diagrama (2.10) de categorías pequeñas y del 2-funtor (5.6), el siguiente diagrama de categorías (grandes):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{u\,|\,ua}[\mathbf{W}^{-1}_{u\,|\,ua}] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,ua)^*}"'] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p^*_{u\,|\,ua}}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \widehat{\Gamma}_*"] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[l, "\widehat{a^*}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[l, "\widehat{u^*}"] \arrow[u, "\widehat{u^*}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{u\,|\,ua}[\mathbf{W}^{-1}_{u\,|\,ua}] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}_I^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,ua)^*}"'] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p^*_{u\,|\,ua}}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \widehat{\Gamma\,|\,ua_*}"] & \mathcal{C}^J[\mathbf{W}_J^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(ua)^*}"] \arrow[u, "\widehat{u^*}"']
\end{tikzcd} \tag{5.15}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{ua\,|\,u}[\mathbf{W}^{-1}_{ua\,|\,u}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p^*_{ua\,|\,u}}"'] \\ \mathcal{C}^I[\mathbf{W}^{-1}_I] \arrow[u, "(\widehat{ua\,|\,\pi})^*"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \widehat{\Gamma_*}"] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}^{-1}_I] \arrow[l, "\mathrm{id}" description] \arrow[u, "\widehat{a^*}"'] \\ \mathcal{C}^I[\mathbf{W}^{-1}_I] \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}^J[\mathbf{W}^{-1}_J] \arrow[l, "\widehat{u^*}"] \arrow[u, "\widehat{u^*}"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{ua\,|\,u}[\mathbf{W}^{-1}_{ua\,|\,u}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p^*_{ua\,|\,u}}"'] \\ \mathcal{C}^I[\mathbf{W}^{-1}_I] \arrow[u, "(\widehat{ua\,|\,\pi})^*"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\ \widehat{ua\,|\,\Gamma_*}"] & \mathcal{C}^J[\mathbf{W}^{-1}_J] \arrow[l, "\widehat{u^*}"] \arrow[u, "\widehat{(ua)^*}"'] \end{tikzcd} \right).$$

Notemos que por el Lema 5.2.2 y la adjunción (2.14), el funtor $(a, \mathrm{id}_{ua})^*$ es un funtor colímites homotópicos de tipo $u\,|\,ua$ (resp. límites homtópicos de tipo $ua\,|\,u$).

Supongamos que $\mathcal{C}$ admite extensiones de Kan homotópicas izquierdas (resp. derechas) a lo largo de u; más precisamente consideremos una adjunción $u^h_! \dashv \widehat{u^*}$ (resp. $\widehat{u^*} \dashv u^h_*$) con una unidad η: $\mathrm{id} \Longrightarrow \widehat{u^*} \circ u^h_!$ (resp. una counidad ε: $\widehat{u^*} \circ u^h_* \Longrightarrow \mathrm{id}$). Se sigue de Lema 1.2.3 y del diagrama (5.15) que para todo I-diagrama $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$ y todo objeto a en I, el siguiente morfismo en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$X_a \xrightarrow{\eta_a} \widehat{u^*} \circ u^h_!(\mathcal{X})_a \qquad \left(\text{resp.} \quad \widehat{u^*} \circ u^h_*(\mathcal{X})_a \xrightarrow{\varepsilon_a} X_a \right)$$

es un morfismo evaluación homotópica de $u^h_!(\mathcal{X})$ (resp. $u^h_*(\mathcal{X})$) en ua.

Deducimos del Lema 5.1.2 que cualquier morfismo evaluación homotópica izquierda (resp. derecha) de u en ua es un isomorfismo para todo objeto a de I, sí y solamente sí cualquier funtor $u^h_!$ (resp. u^h_*) extensión de Kan homotópica izquierda (resp. derecha) a lo largo de u (respecto de $\mathbf{W}$) es fielmente pleno.

Por lo tanto, se sigue de la Proposición 5.3.3 la primera parte del siguiente enunciado:

Corolario 5.3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y $u: \ I \longrightarrow J$ un funtor fielmente pleno entre categorías pequeñas directas (resp. inversas). Si $u^h_!$ (resp. u^h_*) es un funtor extension de Kan homotópica izquierda (resp. derecha) a lo largo de u:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^J[\mathbf{W}^{-1}_J] \arrow[r, bend right, "\widehat{u^*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}^{-1}_I] \arrow[l, bend right, "u^h_!"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^J[\mathbf{W}^{-1}_J] \arrow[r, bend left, "\widehat{u^*}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^I[\mathbf{W}^{-1}_I] \arrow[l, bend left, "u^h_*"] \end{tikzcd} \right),$$

entonces $u^h_!$ (resp. u^h_*) también es un funtor fielmente pleno.

Más aún, si ϵ (resp. η) es una counidad (resp. unidad) de la adjunción $u^h_! \dashv \widehat{u^*}$ $\left(\text{resp. } \widehat{u^*} \dashv u^h_*\right)$ e $\mathcal{Y}$ es un J-diagrama de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{Y}$ pertenece a la imagen esencia del funtor $u^h_!$ (resp. u^h_*) si y solamente si, para todo objeto x de J que no pertenece a la imagen esencial de u, el morfismo:

$$\left(u^h_! \circ \widehat{u^*}(\mathcal{Y})\right)_x \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{Y}})_x} \mathcal{Y}_x \qquad \left(\textit{resp.} \quad \mathcal{Y}_x \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{Y}})_x} \left(u^h_* \circ \widehat{u^*}(\mathcal{Y})\right)_x \right), \tag{5.16}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.

DEMOSTRACIÓN. No es difícil de mostrar como en la prueba del Corolario 2.2.4, que el morfismo (5.16) es un isomorfismo si x es un objeto de J isomorfo a un objeto en la imagen de u. Más aún, se sigue del Lema 5.1.2 que un J-diagrama $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$ pertenece a la imagen esencia del funtor $u^h_!$ (resp. u^h_*) si y solamente si, para todo objeto x de J el morfismo (5.16) es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$. $\square$

6. Cuadrados homotópicamente (co)cartesianos

§6.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y consideremos las adjunciones que deducimos sin dificultad del Corolario 5.3.2:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[r, bend left, "q^h_{\ulcorner !}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, bend left, "\widehat{q^*_{\ulcorner}}"] & \text{y} & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[r, bend left, "\operatorname*{hocolim}_{\ulcorner}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, bend left, "\widehat{p^*_{\ulcorner}}"] \end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{tikzcd} \text{resp.} & \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}] \arrow[r, bend right, "q^h_{\lrcorner *}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, bend right, "\widehat{q^*_{\lrcorner}}"'] & \text{y} & \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}] \arrow[r, bend right, "\operatorname*{holim}_{\lrcorner}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, bend right, "\widehat{p^*_{\lrcorner}}"'] \end{tikzcd}\right),$$

a partir de los funtores $q_{\ulcorner}\colon \ulcorner \longrightarrow \square$ y $p_{\ulcorner}\colon \ulcorner \longrightarrow \star$ (resp. $q_{\lrcorner}\colon \lrcorner \longrightarrow \square$ y $p_{\lrcorner}\colon \lrcorner \longrightarrow \star$) de (3.1) en §3.1.

Notemos que como $q_{\ulcorner}$ (resp. $q_{\lrcorner}$) es un funtor fielmente pleno, se sigue del Corolario 5.3.4 que cualquier unidad (resp. counidad):

$$\mathrm{id} \underset{\cong}{\overset{\eta}{\Longrightarrow}} \widehat{q^*_{\ulcorner}} \circ q^h_{\ulcorner !} : \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}]$$

$$\left(\text{resp.} \quad \widehat{q^*_{\lrcorner}} \circ q^h_{\lrcorner *} \underset{\cong}{\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}} \mathrm{id} : \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]\right)$$

de la adjunción $q^h_{\ulcorner !} \dashv \widehat{q^*_{\ulcorner}}$ (resp. $\widehat{q^*_{\lrcorner}} \dashv q^h_{\lrcorner *}$) es un isomorfismo natural.

Por otro lado, se sigue de la Proposición 5.3.3 y del Corolario 5.2.3 que tenemos un isomorfismo natural:

$$\widehat{c^*} \circ q^h_{\ulcorner !} \underset{\cong}{\overset{\mathrm{id}^{-1}_{izq} \circ (\Gamma \,|\, c)_{izq}}{\Longrightarrow}} \operatorname*{hocolim}_{\ulcorner} : \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \tag{6.1}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \widehat{a^*} \circ q^h_{\lrcorner *} \underset{\cong}{\overset{\mathrm{id}^{-1}_{der} \circ (a \,|\, \Gamma)_{der}}{\Longrightarrow}} \operatorname*{holim}_{\lrcorner} : \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]\right)$$

el cual se obtiene al componer las transformaciones conjugadas izquierdas (resp. derechas) de las siguientes transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_\ulcorner|c}[\mathbf{W}^{-1}_{q_\ulcorner|c}] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\ulcorner}] \arrow[l, "\widehat{(\pi|c)^*}"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\widehat{(\Gamma|c)_*}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p^*_{q_\ulcorner|c}}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[l, "\widehat{c^*}"] \arrow[u, "\widehat{q^*_\ulcorner}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_\ulcorner|c}[\mathbf{W}^{-1}_{q_\ulcorner|c}] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\ulcorner}] \arrow[l, "\widehat{(\pi|c)^*}"', "\cong"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p^*_{q_\ulcorner|c}}"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\widehat{p^*_\ulcorner}"']
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a|q_\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{a|q_\lrcorner}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p^*_{a|q_\lrcorner}}"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\widehat{(a|\Gamma)_*}"] \\
\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\lrcorner}] \arrow[u, "\widehat{(a|\pi)^*}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[l, "\widehat{q^*_\lrcorner}"] \arrow[u, "\widehat{a^*}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a|q_\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{a|q_\lrcorner}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p^*_{a|q_\lrcorner}}"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\,\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\lrcorner}] \arrow[u, "\widehat{(a|\pi)^*}", "\cong"'] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p^*_\lrcorner}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}\right),$$

inducidas del diagrama (3.7) en §3.1 y del 2-funtor (5.6).

Mostremos el enunciado análogo al Lema 3.1.1:

Lema 6.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Si $\mathfrak{X}$ es un cuadrado conmutativo de $\mathcal{C}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *$\mathfrak{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen de un funtor $q^h_{\ulcorner\,!}$ (resp. $q^h_{\lrcorner\,*}$) extension de Kan homotópica izquierda (resp. derecha) a lo largo de $q_\ulcorner$ (resp. $q_\lrcorner$).*

(ii) *Si $\varepsilon\colon\ q^h_{\ulcorner\,!}\circ\widehat{q^*_\ulcorner}\Longrightarrow\mathrm{id}$ $\big($resp. $\eta\colon\ \mathrm{id}\Longrightarrow q^h_{\lrcorner\,*}\circ\widehat{q^*_\lrcorner}\,\big)$ es una counidad (resp. unidad) de una adjunción $q^h_{\ulcorner\,!}\dashv\widehat{q^*_\ulcorner}$ $\big($resp. $\widehat{q^*_\lrcorner}\dashv q^h_{\lrcorner\,*}\big)$, el morfismo:*

$$q^h_{\ulcorner\,!}\,\widehat{q^*_\ulcorner}(\mathfrak{X})\xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{X}}}\mathcal{X}\qquad\left(\textit{resp.}\quad\mathcal{X}\xrightarrow{\eta_{\mathfrak{X}}}q^h_{\lrcorner\,*}\,\widehat{q^*_\lrcorner}(\mathfrak{X})\right)$$

es un isomorfismo de la categoría $\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}]$.

(iii) *Si $\varepsilon\colon\ q^h_{\ulcorner\,!}\circ\widehat{q^*_\ulcorner}\Longrightarrow\mathrm{id}$ $\big($resp. $\eta\colon\ \mathrm{id}\Longrightarrow q^h_{\lrcorner\,*}\circ\widehat{q^*_\lrcorner}\,\big)$ es una counidad (resp. unidad) de una adjunción $q^h_{\ulcorner\,!}\dashv\widehat{q^*_\ulcorner}$ $\big($resp. $\widehat{q^*_\lrcorner}\dashv q^h_{\lrcorner\,*}\big)$, el morfismo:*

$$q^h_{\ulcorner\,!}\,\widehat{q^*_\ulcorner}(\mathfrak{X})_c\xrightarrow{(\varepsilon_{\mathfrak{X}})_c}X_c\qquad\left(\textit{resp.}\quad X_a\xrightarrow{(\eta_{\mathfrak{X}})_a}q^h_{\lrcorner\,*}\,\widehat{q^*_\lrcorner}(\mathfrak{X})_a\right),$$

es un isomorfismo de la categoría $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.

(iv) *El morfismo de la categoría $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:*

$$\underset{\ulcorner}{\operatorname{hocolim}}\big(q^*_\ulcorner(\mathfrak{X})\big)\xrightarrow{\operatorname{hocolim}_\ulcorner(\widehat{\Phi_{*\mathfrak{X}}})}\underset{\ulcorner}{\operatorname{hocolim}}\big(p^*_\ulcorner\,(X_c)\big)$$

$$\left(\textit{resp.}\quad\underset{\lrcorner}{\operatorname{holim}}\big(p^*_\lrcorner\,(X_a)\big)\xrightarrow{\operatorname{holim}_\lrcorner(\widehat{\Phi_{*\mathfrak{X}}})}\underset{\lrcorner}{\operatorname{holim}}\big(q^*_\lrcorner(\mathfrak{X})\big)\right)$$

es un isomorfismo, donde:

(6.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}"'] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p_{\ulcorner}^{*}}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \widehat{\Phi_*}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{c^{*}}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\textit{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p_{\lrcorner}^{*}}"'] \\
\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{q_{\lrcorner}^{*}}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \widehat{\Phi_*}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\widehat{a^{*}}"']
\end{tikzcd}\right)$$

es la transformación natural inducida de (3.12) *y del* 2*-funtor* (5.6).

(V) *Si* $\Phi_{izq}\colon \operatorname*{hocolim}_{\ulcorner} \circ \widehat{q_{\ulcorner}^{*}} \Longrightarrow \widehat{c^{*}}$ *(resp.* $\Phi_{der}\colon \widehat{a^{*}} \Longrightarrow \operatorname*{holim}_{\lrcorner} \circ \widehat{p_{\lrcorner}^{*}}$ *) es una transformación conjugada izquierda (resp. derecha) de* (6.2)*, el morfismo:*

$$\operatorname*{hocolim}_{\ulcorner}\big(\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}(\mathfrak{X})\big) \xrightarrow{(\Phi_{izq})_{\mathcal{X}}} X_c \qquad \left(\textit{resp.}\quad X_a \xrightarrow{(\Phi_{der})_{\mathcal{X}}} \operatorname*{holim}_{\lrcorner}\big(\widehat{p_{\lrcorner}^{*}}(\mathfrak{X})\big)\ \right), \tag{6.3}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.

DEMOSTRACIÓN. Los enunciados (I), (II) y (III) son equivalentes por el Corolario 5.3.4, ya que $q_{\ulcorner}$ (resp. $q_{\lrcorner}$) es un funtor fielmente pleno.

Por otro lado, notemos que por definición de transformación conjugada izquierda (resp. derecha), el morfismo (6.3) en (V) se puede tomar como la composición:

$$\operatorname*{hocolim}_{\ulcorner}\big(q_{\ulcorner}^{*}(\mathfrak{X})\big) \xrightarrow{\operatorname{hocolim}_{\ulcorner}(\widehat{\Phi_{*}}_{\mathfrak{X}})} \operatorname*{hocolim}_{\ulcorner}\big(p_{\ulcorner}^{*}\,(X_c)\big) \xrightarrow{\varepsilon_{X_c}} X_c \tag{6.4}$$

$$\left(\text{resp.}\quad X_a \xrightarrow{\eta_{X_a}} \operatorname*{holim}_{\lrcorner}\big(p_{\lrcorner}^{*}\,(X_a)\big) \xrightarrow{\operatorname{holim}_{\lrcorner}(\widehat{\Phi_{*}}_{\mathfrak{X}})} \operatorname*{holim}_{\lrcorner}\big(q_{\lrcorner}^{*}(\mathfrak{X})\big),\ \right)$$

donde $\varepsilon\colon \operatorname{hocolim}_{\ulcorner} \circ p_{\ulcorner}^{*} \Longrightarrow \mathrm{id}$ (resp. $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow \operatorname{holim}_{\lrcorner} \circ q_{\lrcorner}^{*}$) es una unidad de una adjunción $\operatorname{hocolim}_{\ulcorner} \dashv p_{\ulcorner}^{*}$ (resp. $q_{\lrcorner}^{*} \dashv \operatorname{holim}_{\lrcorner}$).

Más aún, como la categoría $\ulcorner$ (resp. $\lrcorner$) admite un objeto inicial (resp. final), se sigue del Lema 5.2.2 que el funtor $p_{\ulcorner}^{*}$ (resp. $p_{\lrcorner}^{*}$) es un funtor fielmente pleno. En particular, el morfismo ε_A (resp. η_A) en (6.4) es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$. Por lo tanto los enunciados (IV) y (V) son equivalentes.

Finalmente, si consideramos el diagrama de categorías:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_{\ulcorner}\,|\,c}[\mathbf{W}_{q_{\ulcorner}\,|\,c}^{-1}] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,c)^{*}}"'] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}"'] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p_{q_{\ulcorner}\,|\,c}^{*}}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\widehat{p_{\ulcorner}^{*}}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \widehat{\Phi_*}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{c^{*}}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{q_{\ulcorner}\,|\,c}[\mathbf{W}_{q_{\ulcorner}\,|\,c}^{-1}] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,c)^{*}}"'] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}"'] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{p_{q_{\ulcorner}\,|\,c}^{*}}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \widehat{(\Gamma\,|\,c)_{*}}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{c^{*}}"] \arrow[u, "\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}"] \arrow[ur, phantom, "\swArrow\ \mathrm{id}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{a\,|\,q_\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{a\,|\,q_\lrcorner}] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[ll, "\widehat{p^*_{a\,|\,q_\lrcorner}}"'] \arrow[dll, phantom, "\Swarrow\ \mathrm{id}"] & & \mathcal{C}^{a\,|\,q_\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{a\,|\,q_\lrcorner}] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[ll, "\widehat{p^*_{a\,|\,q_\lrcorner}}"'] \arrow[dll, phantom, "\Swarrow\ \widehat{(a\,|\,\Gamma)_*}"] \\
\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\lrcorner}] \arrow[u, "\widehat{(a\,|\,\pi)^*}"] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[ll, "\widehat{p^*_\lrcorner}" description] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[dll, phantom, "\Swarrow\ \widehat{\Phi_*}"] & = & \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\lrcorner}] \arrow[u, "\widehat{(a\,|\,\pi)^*}"] & & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[ll, "\widehat{q^*_\lrcorner}" description] \arrow[u, "\widehat{a^*}"'] \arrow[dll, phantom, "\Swarrow\ \mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[u, "\widehat{q^*_\lrcorner}"] & & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[ll, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\widehat{a^*}"'] & & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[u, "\widehat{q^*_\lrcorner}"] & & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[ll, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}\right),$$

inducido de (3.14) y del 2-funtor (5.6), se sigue de Lema 1.2.3 que se tiene un triángulo conmutativo de transformaciones naturales:

(6.5)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{c^*}\circ q^h_{\ulcorner\,!}\circ\widehat{q^*_\ulcorner} \arrow[rr, Rightarrow, "(6.1)\star\widehat{q^*_\ulcorner}", "\cong"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\widehat{c^*}\star\varepsilon"'] & & \operatorname*{hocolim}_{\ulcorner}\circ\widehat{q^*_\ulcorner} \arrow[dl, Rightarrow, "\Phi_{izq}"] \\
& \widehat{c^*} &
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\ \begin{tikzcd}
\widehat{a^*}\circ q^h_{\lrcorner\,*}\circ\widehat{q^*_\lrcorner} \arrow[rr, Rightarrow, "(6.1)\star\widehat{q^*_\lrcorner}", "\cong"'] & & \operatorname*{holim}_{\lrcorner}\circ\widehat{q^*_\lrcorner} \\
& \widehat{a^*} \arrow[ul, Rightarrow, "\widehat{a^*}\star\eta"] \arrow[ur, Rightarrow, "\Phi_{der}"'] &
\end{tikzcd}\right)$$

En particular los enunciados (iii) y (v) son equivalentes. □

Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos, un cuadrado conmutativo de $\mathcal{C}$:

$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \arrow[d] \\
X_d \arrow[r] & X_c
\end{tikzcd}$$

es llamado un *cuadrado homotópicamente cocartesiano* (resp. *cuadrado homotópicamente cartesiano*), si $\mathfrak{X}$ cumple uno de los enunciados equivalentes del Lema 6.1.1.

§6.1.1. El siguiente Lema determina condiciones suficientes para que un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano) sea homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano). Ver también §10 de [**DS95**] y el Corolario 6.3.2.

Lema 6.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Si:*

(6.6)
$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r] & X_c
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado conmutativo de $\mathcal{C}$ tal que:

(i) *$\mathfrak{X}$ es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano).*
(ii) *X_a y X_d (resp. X_c y X_d) son objetos cofibrantes (resp. fibrantes) de $\mathcal{C}$.*
(iii) *El morfismo f es una cofibración (resp. g es una fibración) de $\mathcal{C}$.*

entonces $\mathfrak{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. cartesiano) de $\mathcal{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos la prueba en el caso de cuadrados cocartesianos. Para empezar consideremos la categoría de Reedy $(\ulcorner, \ulcorner_+, \ulcorner_-)$ donde $\ulcorner_+$ (resp. $\ulcorner_-$) es la subcategoría de:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r] \arrow[d] & b \\
\ulcorner = & d &
\end{tikzcd}$$

con el mismo conjunto de objetos y donde el único morfismo distinto de la identidad es el morfismo de a en b (resp. de a en d). Notemos que la función $\lambda : \ \{a, b, d\} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $\lambda(d) = 0$, $\lambda(a) = 1$ y $\lambda(b) = 2$, cumple la propiedad requerida.

Se muestra entonces que un morfismo $\varphi \colon \ \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ de $\ulcorner$-diagramas de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_a \arrow[rr, "f^Z"] \arrow[dd, "g^Z"] & & Z_b \\
Y_a \arrow[ur, "\varphi_a"] \arrow[rr, "f^Y", crossing over] \arrow[dd, "g^Y"'] & & Y_b \arrow[ur, "\varphi_b"'] & \\
 & Z_d & & \\
Y_d \arrow[ur, "\varphi_d"'] & & &
\end{tikzcd}$$

es una fibración (resp. una fibración trivial) de $\mathcal{C}^{\ulcorner}$ con respecto a la estructura de categoría de modelos de Reedy inducida (ver la Proposición 5.3.1), si y solamente si los siguientes tres morfismos:

$$Y_b \xrightarrow{\varphi_b} Z_b \ , \qquad Y_d \xrightarrow{\varphi_d} Z_d \quad \text{y} \quad Y_a \xrightarrow{\psi} Y_d \underset{Z_d}{\times} Z_a$$

son fibraciones (resp. fibraciones triviales) de $\mathcal{C}$, donde ψ es la función inducida por el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "g^Y"'] & Z_a \arrow[d, "g^Z"] \\
Y_d \arrow[r, "\varphi_d"'] & Z_d \,.
\end{tikzcd}$$

Del mismo modo $\varphi \colon \ \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ es una cofibración (resp. una cofibración trivial) si y solamente si los siguientes morfismos:

$$Y_a \xrightarrow{\varphi_a} Z_a \ , \qquad Y_d \xrightarrow{\varphi_d} Z_d \quad \text{y} \quad Y_b \underset{Y_a}{+} Z_a \xrightarrow{\psi} Z_b$$

son cofibraciones (resp. cofibraciones triviales) de $\mathcal{C}$, donde en este caso ψ es la función inducida por el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "f^Y"'] & Z_a \arrow[d, "f^Z"] \\
Y_b \arrow[r, "\varphi_b"'] & Z_b\,.
\end{tikzcd}$$

En efecto, con respecto a la estructura de Reedy sobre $\ulcorner$ que consideramos arriba, si $\mathcal{Y}$ es un $\ulcorner$-diagramas de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{Y} = \begin{tikzcd}
Y_a \arrow[r, "f^Y"] \arrow[d, "g^Y"'] & Y_b \\
Y_d
\end{tikzcd} \tag{6.7}$$

entonces $M_a\mathcal{Y} = Y_d$, $M_b\mathcal{Y} = \star = M_d\mathcal{Y}$, $L_a\mathcal{Y} = \varnothing = L_d\mathcal{Y}$ y $L_b\mathcal{Y} = Y_a$ donde $\star$ (resp. $\varnothing$) es un objeto final (resp. inicial) de $\mathcal{C}$.

Concluimos en particular que el funtor $p^*_{\ulcorner}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ulcorner}$ respeta las fibraciones y las fibraciones triviales, por lo que la adjunción $\operatorname{colim}_{\ulcorner} \dashv p^*_{\ulcorner}$ es una adjunción de Quillen.

Más aún, se sigue que un diagrama (6.7) es un objeto cofibrante si y solamente si Y_a y Y_d son objetos cofibrantes y el morfismo f^Y es una cofibración de $\mathcal{C}$. Por lo tanto para un tal $\ulcorner$-diagramas $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$, si tomamos una suma amalgamada de (6.7):

$$\begin{tikzcd}
Y_a \arrow[r, "f^Y"] \arrow[d, "g^Y"'] & Y_b \arrow[d] \\
Y_d \arrow[r] & Y_d \underset{Y_a}{+} Y_b
\end{tikzcd},$$

el objeto $Y_d \underset{Y_a}{+} Y_b$ es isomorfo a la imagen de $\mathcal{Y}$ bajo un funtor adjunto izquierdo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[r, bend right, "\widehat{p^*_{\ulcorner}}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\ulcorner}] \arrow[l, bend right, "\operatorname{hocolim}_{\ulcorner}"']
\end{tikzcd}.$$

□

§6.2. Mostremos enunciados análogos a los Lemas 3.2.1, 3.2.2 y 3.3.1 de los párrafos §3.2 y §3.3:

Lema 6.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Consideremos $F\colon \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$ un morfismo de la categoría $\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}]$ tal que $q^*_{\ulcorner}F$ $\big($resp. $q^*_{\lrcorner}F\big)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\ulcorner}]$ $\big($resp. $\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\lrcorner}]\big)$ y donde $\mathfrak{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano) de $\mathcal{C}$.*

Entonces, $\mathfrak{X}'$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano $($*resp. homotópicamente cartesiano*$)$ *si y solamente si F es un isomorfismo en $\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}]$, si y solamente si el morfismo F_c* $($*resp. F_a*$)$ *es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es similar a la del Lema 3.2.1: Elegimos una adjunción $q^h_{\ulcorner\,!} \dashv \widehat{q^*_{\ulcorner}}$ $\big($resp. $\widehat{q^*_{\lrcorner}} \dashv q^h_{\lrcorner\,*}\big)$ con una counidad (resp. unidad) $\varepsilon\colon q^h_{\ulcorner\,!} \circ \widehat{q^*_{\ulcorner}} \Longrightarrow \mathrm{id}$ $\Big($resp. $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow q^h_{\lrcorner\,*} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}$ $\Big)$, y consideramos el cuadrado conmutativo de morfismos de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ inducido por F:

$$\begin{tikzcd}
q^h_{\ulcorner\,!}\,\widehat{q^*_{\ulcorner}}\,(\mathcal{X})_c \arrow[r, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c"] \arrow[d, "q^h_{\ulcorner\,!}\,\widehat{q^*_{\ulcorner}}\,(F)_c"'] & X_c \arrow[d, "F_c"] \\
q^h_{\ulcorner\,!}\,\widehat{q^*_{\ulcorner}}\,(\mathcal{X}')_c \arrow[r, "(\varepsilon_{\mathcal{X}'})_c"'] & X'_c
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "(\eta_{\mathcal{X}})_a"] \arrow[d, "F_a"'] & q^h_{\lrcorner\,*}\,\widehat{q^*_{\lrcorner}}\,(\mathcal{X})_a \arrow[d, "q^h_{\lrcorner\,*}\,\widehat{q^*_{\lrcorner}}\,(F)_a"] \\
X'_a \arrow[r, "(\eta_{\mathcal{X}'})_a"'] & q^h_{\lrcorner\,*}\,\widehat{q^*_{\lrcorner}}\,(\mathcal{X}')_a
\end{tikzcd}
\right),$$

de la naturalidad de $\widehat{c^*} \circ \varepsilon$ (resp. $\widehat{a^*} \circ \eta$).

Deducimos de (III) del Lema 6.1.1 que $\mathcal{X}'$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano) si y solamente si el morfismo F_c (resp. F_a) es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$. Finalmente, esto es equivalente a que F sea un isomorfismo de la categoría $\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}]$ por el Lema 5.1.2. $\square$

Mostremos ahora:

LEMA 6.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y:*

$$\mathfrak{X} \;=\; \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r, "f'"'] & X_c
\end{tikzcd}$$

un cuadrado conmutativo en $\mathcal{C}$, entonces:

(I) *Si $\mathfrak{X}$ es homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano), el siguiente cuadrado conmutativo:*

$$\mathfrak{X}' \;=\; \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X_d \arrow[d, "f'"] \\
X_b \arrow[r, "g"'] & X_c
\end{tikzcd}$$

también lo es.

(II) *Si f y f' son equivalencias débiles, entonces $\mathfrak{X}$ es homotópicamente cartesiano y homotópicamente cocartesiano.*

Demostración. Mostremos la parte de los enunciados que corresponde a los cuadrados homotópicamente cocartesiano. La prueba es análoga a la del Lema 3.2.2.

Prueba de (i). Consideremos el funtor $\theta_{\square}\colon \square \longrightarrow \square$ de la demostración del Lema 3.2.2, definido como el único isomorfismo de categorías que invierte los objetos c y b, y deja fijos a los objetos a y d. Sea también $\theta_{\ulcorner}$ la restricción de $\theta_{\square}$ a la subcategoría $\ulcorner$ de $\square$.

Se sigue entonces del inciso (a) del Corolario 1.2.2 que toda conjugada izquierda:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[d, "q^{h}_{\ulcorner\,!}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,(\mathrm{id})_{izq}"] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{\theta_{\ulcorner}^{*}}"'] \arrow[d, "q^{h}_{\ulcorner\,!}"] \\
\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{\theta_{\square}^{*}}"]
\end{tikzcd} ,$$

de la transformación natural identidad:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{\theta_{\ulcorner}^{*}}"', "\cong"] \\
\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[u, "\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\cong"', "\widehat{\theta_{\square}^{*}}"] \arrow[u, "\widehat{q_{\ulcorner}^{*}}"']
\end{tikzcd} ,$$

es un isomorfismo. Por lo tanto, ya que $\mathfrak{X}' = \theta_{\square}^{*}(\mathfrak{X})$ y $\theta_{\square} \circ \theta_{\square} = \mathrm{id}_{\square}$, deducimos que $\mathfrak{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $q^{h}_{\ulcorner\,!}$, si y solamente si lo mismo se cumple para $\mathfrak{X}'$. El resultado deseado es entonces una consecuencia del Lema 6.1.1.

Para mostrar (ii) consideremos los funtores inclusión $\alpha\colon I \longrightarrow \ulcorner$ y $\beta\colon I \longrightarrow \square$ definidos en (3.18), los cuales cumplen que $\beta = q_{\ulcorner} \circ \alpha$. Deducimos de los diagramas (3.19) y (3.20), del 2-funtor (5.6), del Lema 1.2.3, del Corolario 5.2.3, de la Proposición 5.3.3 y del Lema 5.2.2 que se tienen las siguientes igualdades de transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\beta\,|\,b}[\mathbf{W}_{\beta\,|\,b}^{-1}] \arrow[d, "\operatorname*{hocolim}_{\beta\,|\,b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\widehat{(\Gamma\,|\,b)}_{izq}"] & \mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}_{I}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,b)^{*}}"'] \arrow[d, "\beta^{h}_{!}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\mathrm{id}^{1}_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{\beta^{*}}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{b^{*}}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\beta\,|\,b}[\mathbf{W}_{\beta\,|\,b}^{-1}] \arrow[d, "\operatorname*{hocolim}_{\beta\,|\,b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\mathrm{id}^{2}_{izq}"] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{p_{\beta\,|\,b}^{*}}"', "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\widehat{\Gamma}_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{a^{*}}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{b^{*}}"]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\beta\,|\,c}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[d, "\operatorname*{hocolim}_{\beta\,|\,c}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\widehat{(\Gamma\,|\,c)}_{izq}"] & \mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,c)^{*}}"'] \arrow[d, "\beta^{h}_{!}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\mathrm{id}^{1}_{izq}"] & C^{\square}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{\beta^{*}}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{c^{*}}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\beta\,|\,c}[\mathbf{W}_{\beta\,|\,c}^{-1}] \arrow[d, "\operatorname*{hocolim}_{\beta\,|\,c}"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\mathrm{id}^{3}_{izq}"] & \mathcal{C}^{I}[\mathbf{W}_{I}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{(\pi\,|\,c)^{*}}"', "\cong"] \arrow[d, "d^{*}"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\,\widehat{\Gamma'}_{izq}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{\beta^{*}}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[l, "\mathrm{id}"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}] \arrow[l, "\widehat{c^{*}}"]
\end{tikzcd} ,$$

donde las transformaciones conjugadas $\widehat{(\Gamma\,|\,b)}_{izq}$, $\widehat{(\Gamma\,|\,c)}_{izq}$, id^2_{izq} y id^3_{izq} son isomorfismos naturales.

En particular, para todo cuadrado conmutativo $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ tenemos diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\big(\beta^h_! \circ \widehat{\beta^*}(\mathcal{X})\big)_b \arrow[rr, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_b"] & & X_b \\
\underset{\beta\,|\,b}{\mathrm{hocolim}}\big(\widehat{(\pi\,|\,b)^*} \circ \widehat{\beta^*}(\mathcal{X})\big) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & & \\
\underset{\beta\,|\,b}{\mathrm{hocolim}}\big(\widehat{p^*_{\beta\,|\,b}} \circ \widehat{a^*}(\mathcal{X})\big) \arrow[u, phantom, "="] & & \\
X_a \arrow[u, phantom, "\cong"] \arrow[uuurr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
\big(\beta^h_! \circ \widehat{\beta^*}(\mathcal{X})\big)_c \arrow[rr, "(\varepsilon_{\mathcal{X}})_c"] & & X_c \\
\underset{\beta\,|\,c}{\mathrm{hocolim}}\big(\widehat{(\pi\,|\,c)^*} \circ \widehat{\beta^*}(\mathcal{X})\big) \arrow[u, phantom, "\cong"] & & \\
\underset{I}{\mathrm{hocolim}}\big(\widehat{\beta^*}(\mathcal{X})\big) \arrow[u, phantom, "="] & & \\
X_d \arrow[u, phantom, "="] \arrow[uuurr, bend right, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon\colon\ \beta^h_! \circ \widehat{\beta^*} \Longrightarrow \mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $\beta^h_! \dashv \widehat{\beta^*}$. Por lo tanto, se sigue del Corolario 5.3.4 que f y f' son equivalencias débiles de $\mathcal{C}$ si y solamente si, $\mathcal{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $\beta^h_!$.

Finalmente, como $\beta = q_\ulcorner \circ \alpha$ concluimos que si f y f' son equivalencias débiles de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{X}$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $q^h_{\ulcorner !}$. Por lo tanto, si f y f' son equivalencias débiles de $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano por (I) del Lema 6.1.1. $\square$

Para el siguiente enunciado, recordemos que $\square\!\square$ denota a la categoría pequeña (3.21), mientras que los funtores $\alpha_i\colon\ \square \longrightarrow \square\!\square$ son los funtores inclusión de las subcategorías (3.23), respectivamente.

LEMA 6.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Si $\mathcal{X}$ es un $\square\!\square$-diagrama de $\mathcal{C}$ y $\widehat{\alpha^*_1}(\mathcal{X})$ $\big($resp. $\widehat{\alpha^*_2}(\mathcal{X})\big)$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano), entonces $\widehat{\alpha^*_2}(\mathcal{X})$ $\big($resp. $\widehat{\alpha^*_1}(\mathcal{X})\big)$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano) si y solamente si $\widehat{\alpha^*_3}(\mathcal{X})$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano).*

DEMOSTRACIÓN. Mostremos el caso sobre cuadrados cocartesianos. La prueba es análoga a la prueba del Lema 3.3.1. En efecto, para empezar consideremos los funtores $\tau_1\colon\ I_3 \longrightarrow I_2$ y $\tau_2\colon\ I_2 \longrightarrow \square\!\square$ definidos como sigue:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] & c & & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c & & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
f & & & \arrow[r, hook, "\tau_1"] & f \arrow[r] & e & & \arrow[r, hook, "\tau_2"] & f \arrow[r] & e \arrow[r] & d
\end{tikzcd},$$

y sea $\tau_3 = \tau_2 \circ \tau_1$.

Notemos entonces que si aplicamos el 2-funtor (5.6) a la igualdad de transformaciones naturales (3.26), deducimos del Lema 1.2.3, del Corolario 5.2.3 y de la Proposición

5.3.3, para todo $\square\square$-diagrama $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$, un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd}
\big(q^h_{\ulcorner\,!}\circ\widehat{q^*_{\ulcorner}}(\widehat{\alpha^*_1}\,\mathcal{X})\big)_e \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[dr, bend left=10, "\big(\varepsilon_{\widehat{\alpha^*_1}\,\mathcal{X}}\big)_e"] & \\
\operatorname*{hocolim}_{q_{\ulcorner}\,|\,e}\big(\widehat{(\pi\,|\,e)^*}\circ\widehat{\gamma^*_1}\circ\widehat{\tau^*_3}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, equal] & (\widehat{\alpha^*_1}\,\mathcal{X})_e \arrow[d, equal] \\
\operatorname*{hocolim}_{q_{\ulcorner}\,|\,e}\big(\widehat{(\gamma_1\,|\,e)^*}\circ\widehat{(\pi'\,|\,e)^*}\circ\widehat{\tau^*_3}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & X_e \arrow[d, equal] \\
\operatorname*{hocolim}_{\tau_1\,|\,e}\big(\widehat{(\pi'\,|\,e)^*}\circ\widehat{\tau^*_3}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & (\widehat{\tau^*_2}\,\mathcal{X})_e \\
\big(\tau^h_{1!}\circ\widehat{\tau^*_1}(\widehat{\tau^*_2}\,\mathcal{X})\big)_e \arrow[ur, bend right=10, "\big(\varepsilon^1_{\widehat{\tau^*_2}\,\mathcal{X}}\big)_e"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon\colon\ q^h_{\ulcorner\,!}\circ\widehat{q^*_{\ulcorner}}\Longrightarrow\mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $q^h_{\ulcorner\,!}\dashv\widehat{q^*_{\ulcorner}}$ y $\varepsilon^1\colon\ \tau^h_{1!}\circ\widehat{\tau^*_1}\Longrightarrow\mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $\tau^h_{1!}\dashv\widehat{\tau^*_1}$.

Del mismo modo, si aplicamos el 2-funtor (5.6) a (3.27), deducimos para $2\le i\le 3$ y para todo $\square\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd}
\big(q^h_{\ulcorner\,!}\circ\widehat{q^*_{\ulcorner}}(\widehat{\alpha^*_i}\,\mathcal{X})\big)_d \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[dr, bend left=10, "\big(\varepsilon_{\widehat{\alpha^*_i}\,\mathcal{X}}\big)_d"] & \\
\operatorname*{hocolim}_{q_{\ulcorner}\,|\,d}\big(\widehat{(\pi\,|\,d)^*}\circ\widehat{\gamma^*_i}\circ\widehat{\tau^*_i}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, equal] & (\widehat{\alpha^*_i}\,\mathcal{X})_d \arrow[d, equal] \\
\operatorname*{hocolim}_{q_{\ulcorner}\,|\,d}\big(\widehat{(\gamma_i\,|\,d)^*}\circ\widehat{(\pi'\,|\,d)^*}\circ\widehat{\tau^*_i}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & X_d \\
\operatorname*{hocolim}_{\tau_i\,|\,d}\big(\widehat{(\pi'\,|\,d)^*}\circ\widehat{\tau^*_i}(\mathcal{X})\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \\
\big(\tau^h_{i!}\circ\widehat{\tau^*_i}(\mathcal{X})\big)_d \arrow[uur, bend right=15, "\big(\varepsilon^i_{\mathcal{X}}\big)_d"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon^i\colon\ \tau^h_{i!}\circ\widehat{\tau^*_i}\Longrightarrow\mathrm{id}$ es una counidad de la adjunción $\tau^h_{i!}\dashv\widehat{\tau^*_i}$.

Finalmente, notemos que la igualdad $\tau_2\circ\tau_1=\tau_3$ implica que existe un isomorfismo de funtores:

$$\tau^h_{2!}\circ\tau^h_{1!}\xRightarrow[\cong]{\Psi}\tau^h_{3!}\,,$$

con la propiedad que para todo $\square\square$-diagrama $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$:

(6.8)
$$\begin{tikzcd}
\tau^h_{2!}\circ\tau^h_{1!}\circ\widehat{\tau^*_1}\circ\widehat{\tau^*_2}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\tau^h_{2!}\big(\varepsilon^1_{\widehat{\tau^*_2}(\mathcal{X})}\big)"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"', "\Psi_{\widehat{\tau^*_3}\,\mathcal{X}}"] & \tau^h_{2!}\circ\widehat{\tau^*_2}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\varepsilon^2_{\mathcal{X}}"] & \mathcal{X} \\
\tau^h_{3!}\circ\widehat{\tau^*_3}(\mathcal{X}) \arrow[urr, bend right=10, "\varepsilon^3_{\mathcal{X}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de $\mathcal{C}^{\square\square}$.

□

§6.3. Categorías de modelos propias izquierdas y derechas. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos. Recordemos que se dice que $\mathcal{C}$ es *propia izquierda* (resp. *propia derecha*), si las equivalencias débiles de $\mathcal{C}$ son estables por cocambio de base (resp. cambio de base) a lo largo de las cofibraciones (resp. fibraciones); es decir, siempre que se tenga un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano) de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r, "f'"'] & X_c
\end{tikzcd}$$

donde f es una cofibración (resp. g sea una fibación) y g' una equivalencia débil (resp. f' una equivalencia débil), entonces el morfismo g (resp. f) es también una equivalencia débil.

Mostremos el siguiente enunciado bien conocido:

PROPOSICIÓN 6.3.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos propia izquierda (resp. propia derecha) y:*

$$(6.9) \qquad \mathfrak{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r, "f'"'] & X_c\,,
\end{tikzcd}$$

un cuadrado conmutativo de $\mathcal{C}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(I) *$\mathfrak{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. cartesiano)*

(II) *Para toda factorización:*

$$(6.10) \qquad \begin{tikzcd}
X_a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i"'] & & X_b \\
& A \arrow[ur, two heads, "p"', "\sim"] &
\end{tikzcd}
\qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd}
X_b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, tail, "j"', "\sim"] & & X_c \\
& A \arrow[ur, two heads, "q"'] &
\end{tikzcd}\right)$$

el morfismo φ en el siguiente diagrama conmutativo:

$$(6.11) \qquad \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, tail, "i"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f'"'] & X_d \underset{X_a}{+} A \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & X_c
\end{tikzcd}
\qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dd, bend right, "g'"'] & X_b \arrow[d, tail, "j"'] \arrow[dd, bend left, "g"] \\
X_d \underset{X_c}{\times} A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, two heads, "q"'] \\
X_d \arrow[r, "f'"'] & X_c
\end{tikzcd}\right)$$

es una equivalencia débil.

(iii) *Existe una factorización* (6.10) *para la cual el morfismo* φ *en el diagrama* (6.11) *es una equivalencia débil de* $\mathcal{C}$*.*

Demostración. Mostremos la parte del enunciado que corresponde a los cuadrados homotópicamente cocartesianos. Notemos para empezar que (ii)⇒(iii) ya que siempre existe una factorización como (6.10) para todo morfismo f de $\mathcal{C}$.

Por otro lado, para mostrar (i)⇒(ii) y (iii)⇒(i) consideremos un cuadrado conmutativo (6.9) de $\mathcal{C}$ y una factorización (6.10) del morfismo f.

Construimos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_a \arrow[rrr, "f"] \arrow[dl, equal] \arrow[ddd, "g'"] & & & X_b \arrow[ddd, two heads, "g"] \\
 & X_a \arrow[rrr, tail, "i"] \arrow[ddd, "g'"] & & & A \arrow[ur, "\sim", "p"'] \arrow[ddd] & \\
QX_a \arrow[rrr, tail] \arrow[ur, "\sim"] \arrow[ddd, tail] & & & C \arrow[ur, "\sim"] \arrow[ddd] & & \\
 & & X_d \arrow[rrr, "f'"] \arrow[dl, equal] & & & X_c\,, \\
 & X_d \arrow[rrr] & & & Z \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \\
B \arrow[rrr] \arrow[ur, "\sim"] & & & W \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & &
\end{tikzcd} \tag{6.12}$$

de la siguiente manera: El cubo de atrás es simplemente el diagrama (6.11) donde escribimos $Z = X_d \underset{X_a}{+} A$. Después tomamos un remplazo cofibrante $QX_a \xrightarrow{\sim} X_a$ del objeto X_a y consideramos factorizaciones:

$$\begin{tikzcd}
QX_a \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, tail] & X_a \arrow[r, "g'"] & X_d \\
 & B \arrow[ur, two heads, "\sim"] &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
QX_a \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, tail] & X_a \arrow[r] & A\,. \\
 & C \arrow[ur, two heads, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

En seguida definimos $W = B \underset{QX_a}{+} C$. En particular la cara de enfrente del cubo (6.12) es un cuadrado homotópicamente cocartesiano por el Lema 6.1.2. Deducimos del Lema 6.2.1 que $\mathfrak{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano si y solamente si, el morfismo composición $\psi \circ \varphi$ en (6.12) es una equivalencia débil. Por lo tanto, para mostrar las implicaciones (i)⇒(ii) y (iii)⇒(i) es suficiente con demostrar:

El morfismo ψ *en* (6.12) *es una equivalencia débil:*

Para mostrar esta afirmación consideremos la descomposición de ψ:

$$B \underset{QX_a}{+} C \xrightarrow{\psi_1} B \underset{QX_a}{+} A \xrightarrow{\psi_2} X_d \underset{X_a}{+} A \tag{6.13}$$

inducida del siguiente diagrama de morfismos de $\mathcal{C}$:

(6.14)
$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, equal] & QX_a \arrow[l, tail] \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, "\wr"] \\
B \arrow[d, "\wr"] & QX_a \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & A \arrow[d, equal] \\
X_d & X_a \arrow[l] \arrow[r, tail] & A
\end{tikzcd}$$

Notemos que como $\mathcal{C}$ es una categoría propia izquierda y se tiene que el morfismo ψ_1 se puede insertar en un diagrama de cuadrados cocartesianos (ver el Lema 3.3.1):

$$\begin{tikzcd}
QX_a \arrow[r] \arrow[d, tail] & C \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, tail] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & B \underset{QX_a}{+} C \arrow[r, dashed, "\sim", "\psi_1"'] & B \underset{QX_a}{+} A\,,
\end{tikzcd}$$

entonces ψ_1 es una equivalencia débil.

Se muestra igualmente que ψ_2 es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, considerando el siguiente diagrama de morfismos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & X_d \arrow[r] & X_d \underset{X_a}{+} A \\
B \arrow[r, "\sim"] & B \underset{QX_a}{+} X_a \arrow[r, tail] \arrow[u] & B \underset{QX_a}{+} A \arrow[u, dashed, "\psi_2"'] \\
QX_a \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, tail] & X_a \arrow[r, tail] \arrow[u] & A\,. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

□

Deducimos fácilmente de la implicación (III)⇒(I) de la Proposición 6.3.1 el siguiente enunciado (ver el Lema 6.1.2):

COROLARIO 6.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos propia izquierda (resp. propia derecha). Si:*

$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X_b \arrow[d, "g"] \\
X_d \arrow[r] & X_c\,,
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano) de $\mathcal{C}$ donde f es una cofibración (resp. g es una fibración), entonces $\mathfrak{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. cartesiano).

§6.4. Funtores espacio de lazos y suspensión. Consideremos los funtores:

$$\begin{tikzcd} & & b \arrow[d] & & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ \star \arrow[r, hook, "t"] & d \arrow[r] & c \arrow[rr, hook, "q_\lrcorner"] & & d \arrow[r] & c \end{tikzcd} \tag{6.15}$$

$$\text{y} \qquad \begin{tikzcd} & a \arrow[r] \arrow[d] & b & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ \star \arrow[ur, hook, "s"] & d \arrow[rr, hook, "q_\ulcorner"] & & d \arrow[r] & c \end{tikzcd},$$

donde $t(\star) = c$ y $s(\star) = a$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y supongamos que hemos elegido funtores adjuntos (ver el Corolario 5.3.2) inducidos de los funtores (6.15):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[r, bend left, "t^h_!"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\lrcorner}] \arrow[l, bend left, "\widehat{t^*}"] \arrow[r, bend right, "q^h_{\lrcorner *}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[l, bend right, "\widehat{q^*_{\lrcorner}}"'] \end{tikzcd} \tag{6.16}$$

$$\text{y} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[r, bend right, "s^h_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}_{\ulcorner}] \arrow[l, bend right, "\widehat{s^*}"'] \arrow[r, bend left, "q^h_{\ulcorner !}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}^{-1}_{\square}] \arrow[l, bend left, "\widehat{q^*_{\ulcorner}}"] \end{tikzcd}. \tag{6.17}$$

Definimos el funtor *espacio de lazos* de $\mathcal{C}$ (resp. el funtor *suspension* de $\mathcal{C}$) *asociado a las adjunciones* (6.16) (resp. (6.17)) como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Omega(\cdot)} & \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \\ X & \longmapsto & (q^h_{\lrcorner *}\, t^h_!\, X)_a \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Sigma(\cdot)} & \mathrm{Ho}(\mathcal{C})\,. \\ X & \longmapsto & (q^h_{\ulcorner !}\, s^h_*\, X)_c \end{array} \right). \tag{6.18}$$

Observemos que elecciones diferentes de adjunciones (6.16) (resp. (6.17)) deriva en funtores espacios de lazos (resp. funtores suspensión) isomorfos. *Un funtor espacio de lazos* (resp. *un funtor suspensión*) de la categoría de modelos $\mathcal{C}$ es por definición un funtor $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ isomorfo a un funtor de la forma (6.18).

LEMA 6.4.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathcal{C}$. Supongamos que tenemos un funtor:*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\quad\quad\Phi\quad\quad} \mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}]$$

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X \arrow[ur, "f"] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} & Y_a \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y_b \arrow[dd] \\ X_a \arrow[ur, "f_a"] \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_b \arrow[ur, "f_b"] \arrow[dd] & \\ & Y_d \arrow[rr] & & Y_c \\ X_d \arrow[ur, "f_d"] \arrow[rr] & & X_c \arrow[ur, "f_c"'] & \end{tikzcd}$$

verificando las siguientes propiedades:

(I) *Para todo objeto X de $\mathcal{A}$ se tiene que $X_c = X$ (resp. $X_a = X$), los morfismos $X_b \longleftarrow \varnothing \longrightarrow X_d$ (resp. $X_b \longrightarrow \star \longleftarrow X_d$) son equivalencias débiles y el cuadrado:*

$$\Phi(X) = \begin{tikzcd} X_a \arrow[r] \arrow[d] & X_b \arrow[d] \\ X_d \arrow[r] & X_c \end{tikzcd}$$

es homotópicamente cartesiano (resp. homotópicamente cocartesiano).

(II) *Para todo morfismo f de $\mathcal{A}$ se tiene que $f_c = \gamma(f)$ (resp. $f_a = \gamma(f)$), es decir f_c (resp. f_a) es la imagen de f por el funtor canónico γ: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.*

Entonces el funtor:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi_a = \widehat{a}^* \circ \Phi} & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \\ X & \longmapsto & X_a \end{array} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi_c = \widehat{c}^* \circ \Phi} & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \\ X & \longmapsto & X_c \end{array} \right) \tag{6.19}$$

envía las equivalencias débiles en isomorfismos, y el funtor inducido:

$$\mathcal{A}\big[(\mathbf{W} \cap \mathcal{A})^{-1}\big] \xrightarrow{\widetilde{\Phi_a}} \mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big] \qquad \left(\textit{resp.} \qquad \mathcal{A}\big[(\mathbf{W} \cap \mathcal{A})^{-1}\big] \xrightarrow{\widetilde{\Phi_c}} \mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big] \right)$$

es isomorfo al funtor composición:

$$\mathcal{A}\big[(\mathbf{W} \cap \mathcal{A})^{-1}\big] \xrightarrow{\ \nu\ } \mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big] \xrightarrow{\ \Omega\ } \mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]$$

$$\left(\textit{resp.} \qquad \mathcal{A}\big[(\mathbf{W} \cap \mathcal{A})^{-1}\big] \xrightarrow{\ \nu\ } \mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big] \xrightarrow{\ \Sigma\ } \mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big] \right),$$

donde Ω (resp. Σ) es un funtor espacio de lazos (resp. un funtor suspensión) de $\mathcal{C}$ y ν es el funtor inducido del funtor inclusión.

Demostración. Mostremos el resultado para espacios de lazos. Empecemos observando que el funtor (6.19) envía las equivalencias débiles en isomorfismos por los Lemas 6.2.1 y 5.1.2. Por otro lado, para mostrar que el funtor inducido:

$$\mathcal{A}\big[\big(\mathbf{W}\cap\mathcal{A}\big)^{-1}\big]\xrightarrow{\widetilde{\Phi_a}}\mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]$$

es isomorfo al funtor composición:

$$\mathcal{A}\big[\big(\mathbf{W}\cap\mathcal{A}\big)^{-1}\big]\xrightarrow{\nu}\mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]\xrightarrow{\Omega}\mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]$$

donde Ω es un funtor espacio de lazos de $\mathcal{C}$, se sigue de las propiedades de las categorías de fracciones que es suficiente con construir un isomorfismo de funtores:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "\gamma"'] & & \mathcal{A} \arrow[ll, hook'] \arrow[d, "\Phi_a"] \\
 & \overset{\alpha}{\Rightarrow} & \\
\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] \arrow[rr, "\Omega"'] & & \mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}] .
\end{tikzcd}$$

Para definir α consideremos primero adjunciones como en (6.16) con una counidad y una unidad:

$$\varepsilon^t\colon\ t^h_! \circ \widehat{t^*} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]} \qquad \text{y} \qquad \eta\colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}]} \Longrightarrow q^h_{\lrcorner *} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}\ .$$

Si X es un objeto de $\mathcal{A}$, deducimos del Lema 6.1.1 un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$X_a = \big(\Phi(X)\big)_a \xrightarrow{(\eta_{\Phi(X)})_a} \big(q^h_{\lrcorner *} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big)\big)_a\ .$$

Además, como $\widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big) = X_c = X$, tenemos un morfismo de $\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]$:

$$t^h_!(X) = t^h_! \circ \widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big) \xrightarrow{\varepsilon^t_{\widehat{q^*_{\lrcorner}}(\Phi X)}} \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big)\ . \tag{6.20}$$

Definimos α_X como la composición:

$$\Omega(X) = q^h_{\lrcorner *} \circ t^h_!(X)_a \xrightarrow{q^h_{\lrcorner *}(\varepsilon^t_{\widehat{q^*_{\lrcorner}}(\Phi X)})_a} \big(q^h_{\lrcorner *} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big)\big)_a \xrightarrow{(\eta_{\Phi(X)})_a^{-1}} \big(\Phi(X)\big)_a = X_a\ .$$

Se sigue del Lema 5.1.2 que para concluir la prueba del Lema, basta entonces con demostrar que:

$$t^h_!(X)_? = t^h_! \circ \widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big)_? \xrightarrow{(\varepsilon^t_{\widehat{q^*_{\lrcorner}}(\Phi X)})_?} \widehat{q^*_{\lrcorner}}\big(\Phi(X)\big)_?$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$, si $? = c, b, d$.

Caso $? = c$:

Por propiedades generales de cualquier adjunción, sabemos que existe una unidad $\eta^t\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]} \Longrightarrow \widehat{t^*} \circ t^h_!$ con la propiedad que para todo $\lrcorner$-diagrama $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$, la composición:

$$\widehat{t^*}(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\eta^t_{\widehat{t^*}\mathcal{Y}}} \widehat{t^*} \circ t^h_! \circ \widehat{t^*}(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\widehat{t^*}(\varepsilon^t_{\mathcal{Y}})} \widehat{t^*}(\mathcal{Y})$$

es el morfismo identidad en $\mathcal{C}[\mathbf{W}]$.

Si consideramos $\mathcal{Y} = \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)$, como además $\widehat{t^*} = (\,\cdot\,)_c$ y tenemos que $t^h_!$ es un funtor fielmente pleno de acuerdo al Corolario 5.3.4, deducimos que el morfismo:

$$t^h_!(X)_c = t^h_! \circ \widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)_c \xrightarrow{(\varepsilon^t_{\widehat{q^*_\lrcorner}(\Phi X)})_c} \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)_c = X$$

es un isomorfismo de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.

Caso $? = b, d$*:*

Notemos que los funtores $\pi\,|\,b, \pi\,|\,d\colon\ t\,|\,b = t\,|\,d \longrightarrow \star$ en §5.3.1 son iguales al funtor de la categoría vacía en la categoría puntual, en particular se sigue de la Proposición 5.3.3 que existen isomorfismos $t^h_!(X)_b \cong \varnothing \cong t^h_!(X)_d$ en $\mathcal{C}[\mathbf{W}]$.

Deducimos de las hipótesis que los morfismos en $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$\varnothing \cong t^h_!(X)_b = t^h_! \circ \widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)_b \xrightarrow{(\varepsilon^t_{\widehat{q^*_\lrcorner}(\Phi X)})_b} \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)_b = X_b$$

$$\text{y} \qquad \varnothing \cong t^h_!(X)_d = t^h_! \circ \widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)_d \xrightarrow{(\varepsilon^t_{\widehat{q^*_\lrcorner}(\Phi X)})_d} \widehat{q^*_\lrcorner}\big(\Phi(X)\big)_d = X_d$$

son isomorfismos. □

Como una aplicación del Lema 6.4.1 que acabamos de demostrar, veamos que si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos con la propiedad de que el único morfismo $\varnothing \longrightarrow \star$ es una fibración (resp. una cofibración), por ejemplo si $\mathcal{C}$ es una categoría punteada[5], entonces la definición de los funtores Ω y Σ coincide con la definición ordinaria en espacios topológicos.

En efecto, si X es un objeto fibrante (resp. cofibrante) de $\mathcal{C}$ consideremos una factorización:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[rr] \arrow[dr, bend right=15, "\sim"] & & X & & \text{resp.} & X \arrow[rr] \arrow[dr, tail, bend right=15] & & \star \\
& PX \arrow[ur, two heads, bend right=15] & & & & & CX \arrow[ur, bend right=15, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

---

[5] Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es *punteada* si $\mathcal{C}$ admite un objeto inicial $\varnothing$, un objeto final $\star$ y el morfismo $\varnothing \longrightarrow \star$ es un isomorfismo. En este caso llamamos a cualquier objeto inicial o final de $\mathcal{C}$ un *objeto cero*.

Se deduce del Lema 6.1.2 que todo cuadrado cartesiano (resp. cocartesiano) de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \varnothing \underset{X}{\times} PX \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, two heads] \\ \varnothing \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d] & CX \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & \star \underset{X}{\sqcup} CX \end{tikzcd}\right)$$

es un cuadrado homotópicamente cartesiano (resp. cocartesiano) ya que por hipótesis $\varnothing$ es un objeto fibrante (resp. $\star$ es un objeto cofibrante) de $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}_{fib}$ (resp. $\mathcal{C}_{cof}$) denota a la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los objetos fibrantes (resp. cofibrantes) podemos definir por este procedimiento un funtor:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{fib} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{fib} \\ X & \longmapsto & \varnothing \underset{X}{\times} PX \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{cof} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{cof} \\ X & \longmapsto & \star \underset{X}{\sqcup} CX \end{array}\right) \tag{6.21}$$

que respeta las equivalencias débiles. Más aún, se sigue del Lema 6.4.1 que el funtor inducido:

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C}_{fib}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}_{fib}[\mathbf{W}^{-1}] \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$$

$$\left(\text{resp.} \qquad \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C}_{cof}[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}_{cof}[\mathbf{W}^{-1}] \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \right)$$

es un funtor espacio de lazos (resp. suspensión) de $\mathcal{C}$.

Mostremos:

Lema 6.4.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías de modelos con la propiedad de que los únicos morfismo $\varnothing^{\mathcal{C}} \twoheadrightarrow \star^{\mathcal{C}}$ y $\varnothing^{\mathcal{D}} \twoheadrightarrow \star^{\mathcal{D}}$ son fibraciones triviales (resp. cofibraciones triviales). Supongamos que tenemos una adjunción de Quillen:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "F"'] \end{tikzcd}.$$

Si $\Omega^{\mathcal{C}}$ y $\Omega^{\mathcal{D}}$ (resp. $\Sigma^{\mathcal{C}}$ y $\Sigma^{\mathcal{D}}$) son funtores espacios de lazos (resp. funtores suspensión) de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente, se tiene un cuadrado conmutativo salvo isomorfismo natural:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathbf{R}G"] \arrow[d, "\Omega^{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \arrow[d, "\Omega^{D}"] \\ \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathbf{R}G"'] & \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\Sigma^{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \arrow[l, "\mathbf{L}F"'] \arrow[d, "\Sigma^{D}"] \\ \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) & \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \arrow[l, "\mathbf{L}F"] \end{tikzcd}\right)$$

donde $\mathbf{R}G$ (resp. $\mathbf{L}F$) es un funtor derivado total derecho de G (resp. izquierdo de F).

DEMOSTRACIÓN. Mostremos el caso sobre funtores espacios de lazos. Para ello es suficiente con construir un isomorfismo natural de funtores:

(6.22)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{fib} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "(6.21)"'] & \mathcal{D}_{fib} \arrow[r, "(6.21)"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow_{\alpha}"] & \mathcal{D}_{fib} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{C}_{fib} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{D}_{fib} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{Ho}(\mathcal{D})\,.
\end{tikzcd}$$

Observemos que si tomamos factorizaciones funtoriales en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$:

$$X \longmapsto \left(\begin{tikzcd}
\varnothing^{\mathcal{C}} \arrow[rr] \arrow[dr, "\sim"] & & X \\
& P^{\mathcal{C}}X \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}\right) \qquad \text{y} \qquad A \longmapsto \left(\begin{tikzcd}
\varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[rr] \arrow[dr, "\sim"] & & X \\
& P^{\mathcal{D}}A \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}\right)$$

respectivamente, así como funtores producto fibrado:

$$\left(\begin{tikzcd}
& C \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}\right) \qquad \longmapsto \qquad \left(\begin{tikzcd}
A \underset{B}{\times} C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}\right);$$

entonces la imagen de un objeto fibrante X de $\mathcal{C}$ por el funtor composición $G \circ (6.21)$ es el objeto fibrante $G\big(\varnothing^{\mathcal{C}} \underset{X}{\times} P^{\mathcal{C}}X\big)$ en el siguiente cuadrado homotópicamente cartesiano (ver el Lema 6.1.2):

(6.23)
$$\begin{tikzcd}
G\big(\varnothing^{\mathcal{C}} \underset{X}{\times} P^{\mathcal{C}}X\big) \arrow[r] \arrow[d] & G\big(P^{\mathcal{C}}X\big) \arrow[d] \\
G(\varnothing^{\mathcal{C}}) \arrow[r] & GX
\end{tikzcd}$$

mientras que la imagen de X por $(6.21) \circ G$ es el objeto fibrante $\varnothing^{\mathcal{D}} \underset{GX}{\times} P^{\mathcal{D}}(GX)$ en el cuadrado homotópicamente cartesiano (ver el Lema 6.1.2):

(6.24)
$$\begin{tikzcd}
\varnothing^{\mathcal{D}} \underset{GX}{\times} P^{\mathcal{D}}(GX) \arrow[r] \arrow[d] & P^{\mathcal{D}}(GX) \arrow[d] \\
\varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[r] & GX\,.
\end{tikzcd}$$

Deducimos que si $\widehat{q^{*}_{\lrcorner}} \dashv q^{h}_{\lrcorner *}$ es una adjunción con una unidad η: $\mathrm{id} \Longrightarrow q^{h}_{\lrcorner *} \circ \widehat{q^{*}_{\lrcorner}}$, se tienen isomorfismos en $\mathcal{D}[\mathbf{W}^{-1}]$:

$$G\big(\varnothing^{\mathcal{C}} \underset{X}{\times} P^{\mathcal{C}}X\big) = (6.23)_a \xrightarrow{(\eta_{(6.23)})_a} q^{h}_{\lrcorner *} \circ \widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\big((6.23)\big)_a$$

$$\text{y} \qquad \varnothing^{\mathcal{D}} \underset{GX}{\times} P^{\mathcal{D}}(GX) = (6.24)_a \xrightarrow{(\eta_{(6.24)})_a} q^{h}_{\lrcorner *} \circ \widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\big((6.24)\big)_a ,$$

pues los cuadrados (6.23) y (6.24) son homotópicamente cartesianos.

Definimos α_X como la composición:

$$\varnothing^{\mathcal{D}} \underset{GX}{\times} P^{\mathcal{D}}(GX) \xrightarrow{(\eta_{(6.23)})_a^{-1} \circ q^h_{\lrcorner *}(\beta_X)_a \circ (\eta_{(6.24)})_a} G\big(\varnothing^{\mathcal{C}} \underset{X}{\times} P^{\mathcal{C}} X\big) \ ,$$

donde $\beta_X\colon\ \widehat{q^*_{\lrcorner}}(6.24) \longrightarrow \widehat{q^*_{\lrcorner}}(6.23)$ es el morfismo de la categoría $\mathcal{D}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]$ definido por el siguiente diagrama conmutativo de $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
G(\varnothing^{\mathcal{C}}) \arrow[r] & GX & G(P^{\mathcal{C}} X) \arrow[l] \\
\varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d, equal] & GX \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & \varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d, "\wr"] \\
\varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[r] & GX & P^{\mathcal{D}}(GX) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Para mostrar que α_X es un isomorfismo en $\mathcal{D}[\mathbf{W}^{-1}]$, basta con notar que las hipótesis implican que los siguientes morfismos:

$$\begin{tikzcd}
G(\varnothing^{\mathcal{C}}) & \varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[l] \arrow[r] & G(P^{\mathcal{C}} X)
\end{tikzcd}$$

son equivalencias débiles de $\mathcal{D}$, pues se tienen diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & G(\varnothing^{C}) \arrow[d, "\wr"] \\
\star^{\mathcal{D}} & G(\star^{C}) \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\varnothing^{\mathcal{D}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & G(P^{\mathcal{C}} X) \\
& G(\varnothing^{\mathcal{C}}) \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Mostremos finalmente:

LEMA 6.4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos con la propiedad que el morfismo $\varnothing \longrightarrow \star$ sea una equivalencia débil. Si Ω y Σ son un funtor espacio de lazos y un funtor suspensión de $\mathcal{C}$ respectivamente, se tiene una adjunción:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[r, bend right, "\Omega"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[l, bend right, "\Sigma"']
\end{tikzcd} .$$

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos un funtor suspensión $\Sigma = \widehat{t^*} \circ \widehat{q^*_{\lrcorner}} \circ q^h_{\ulcorner !} \circ s^h_*$ y un funtor espacio de lazos $\Omega = \widehat{s^*} \circ \widehat{q^*_{\ulcorner}} \circ q^h_{\lrcorner *} \circ t^h_!$ de la categoría $\mathcal{C}$. Para mostrar el enunciado, mostremos que se tienen biyecciones binaturales:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}]}\big(q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A), q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]}\big(\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A), t^{h}_{!}(B)\big) \tag{I}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]}\big(t^{h}_{!}\circ\widehat{t^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A), t^{h}_{!}(B)\big) \tag{II}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}\big(\widehat{t^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A), \widehat{t^{*}}\circ t^{h}_{!}(B)\big) \tag{III}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}\big(\widehat{t^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A), B\big) \tag{IV}\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}\big(\Sigma(A), B\big)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\square}[\mathbf{W}_{\square}^{-1}]}\big(q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A), q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}]}\big(s^{h}_{*}(A), \widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)\big) \tag{I'}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}_{\ulcorner}^{-1}]}\big(s^{h}_{*}(A), s^{h}_{*}\circ\widehat{s^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)\big) \tag{II'}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}\big(\widehat{s^{*}}\circ s^{h}_{*}(A), \widehat{s^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)\big) \tag{III'}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}\big(A, \widehat{s^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)\big) \tag{IV'}\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}\big(A, \Omega(B)\big)\,.
\end{aligned}$$

En efecto, por un lado los isomorfismos (I), (I'), (III) y (III') se deducen por adjunción. Mientras que los isomorfismos binaturales (IV) y (IV') se deducen al componer con una unidad y una counidad $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}]^{-1}} \Longrightarrow \widehat{t^{*}}\circ t^{h}_{!}$ y $\varepsilon\colon \widehat{s^{*}}\circ s^{h}_{*} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]}$ respectivamente, las cuales son isomorfismos pues los funtores $t^{h}_{!}$ y s^{h}_{*} son fielmente plenos de acuerdo al Corolario 5.3.4.

Finalmente, los isomorfismos (II) y (II') se definen al componer con los isomorfismos:

$$\varepsilon_{\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)} \qquad \text{y} \qquad \eta_{\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)} \tag{6.25}$$

de las categorías $\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]$ y $\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}]$ respectivamente, donde:

$$\varepsilon\colon\ t^{h}_{!}\circ\widehat{t^{*}} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\lrcorner}[\mathbf{W}_{\lrcorner}^{-1}]} \qquad \text{y} \qquad \eta\colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\ulcorner}[\mathbf{W}^{-1}]} \Longrightarrow s^{h}_{*}\circ\widehat{s^{*}}$$

son una unidad y una counidad.

Notemos que los morfismos (6.25) son efectivamente isomorfismos, pues:

$$t^{h}_{!}\circ\widehat{t^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)_{?} \xrightarrow{(\varepsilon_{\widehat{q^{*}_{\lrcorner}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)}})_{?}} \widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)_{?}$$

$$\text{y} \qquad \widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)_{?} \xrightarrow{(\eta_{\widehat{q^{*}_{\ulcorner}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)}})_{?}} s^{h}_{*}\circ\widehat{s^{*}}\circ\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)_{?}$$

se identifican con los siguientes morfismos de $\mathcal{C}[\mathbf{W}^{-1}]$:

- $(\varepsilon_{\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)})_{b}$, $(\varepsilon_{\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)})_{d}$, $(\eta_{\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)})_{b}$ y $(\eta_{\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)})_{d}$ con $\varnothing \to \star$.
- $(\varepsilon_{\widehat{q^{*}_{\lrcorner}}\circ q^{h}_{\ulcorner\,!}\circ s^{h}_{*}(A)})_{c}$ con $\mathrm{id}_{\Sigma(A)}$ y $(\eta_{\widehat{q^{*}_{\ulcorner}}\circ q^{h}_{\lrcorner\,*}\circ t^{h}_{!}(B)})_{a}$ con $\mathrm{id}_{\Omega(A)}$.

$\square$

7. Los K-grupos de una categoría de modelos

En esta sección definimos el n-ésimo K-grupo de una categoría de modelos (respecto de una familia de sus objetos) como un $(n+1)$-tipo de homotopía conexo, es decir como un objeto salvo isomorfismo en la categoría homotópica de los $(n+1)$-tipos de homotopía punteados conexos. En §7.2 comparamos la definición que damos usando cuadrados homotópicamente cocartesiano con la definición de los K-grupos de Waldhausen. Finalmente, en §7.3 y §7.4 revisamos las propiedades universales de los K-grupos de una categoría de modelos (respecto de una familia de sus objetos) cuando $n = 0$ y $n = 1$.

§7.1. Si $p \geq 0$ escribimos $\lrcorner_p$ para denotar a la subcategoría plena de la categoría producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generada por las flechas del diagrama:

(7.1)
$$\begin{tikzcd}
& & & (p,p) \\
& (1,1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (p,1) \arrow[u, dotted] \\
(0,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & (p,0) \arrow[u]
\end{tikzcd} ,$$

es decir $\lrcorner_p$ es la subcategoría plena del conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cuyos objetos son las parejas (i,j) tales que $0 \leq j \leq i \leq p$.

Observemos que se tiene un funtor:

(7.2)
$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\lrcorner_\bullet} & \mathbf{cat} \\ [p] & \longmapsto & \lrcorner_p \end{array}$$

definido en un morfismo $f\colon [p] \to [p']$ de Δ por el morfismo de conjuntos parcialmente ordenados:

$$\begin{array}{ccc} \lrcorner_p & \xrightarrow{\quad \lrcorner_f \quad} & \lrcorner_{p'} \\ (i,j) & \longmapsto & \big(f(i), f(j)\big) . \end{array}$$

Si $\mathcal{C}$ es una categoría arbitraria deducimos un funtor:

(7.3)
$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Cat} \\ [p] & \longmapsto & \mathcal{C}^{\lrcorner_p} . \end{array}$$

§7.1.1. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos punteada y 0 es un objeto cero fijo de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0 y $p \geq 0$ es un número natural, decimos que un $\lrcorner_p$-diagrama $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\lrcorner_p \arrow[r, "\mathfrak{x}"] & \mathcal{C} \\
(i,j) \arrow[r, mapsto] & X_{i,j}
\end{tikzcd}$$

es un $(p-1)$-*triángulo izquierdo* (resp. *derecho*) *de* $\mathcal{C}$ *con valores en* $\mathcal{A}$, si se cumplen las siguientes propiedades:

(I) $X_{i,j}$ pertenece a la familia $\mathcal{A}$ para cualesquiera $0 \leq j \leq i \leq p$.
(II) $X_{k,k} = 0$ para todo $0 \leq k \leq p$.
(III) Si $0 \leq m < k \leq p-1$ el cuadrado de $\mathcal{C}$ inducido por el funtor $\mathfrak{X}$:

$$\begin{tikzcd}
X_{k,m+1} \arrow[r, "h_{k,m+1}"] & X_{k+1,m+1} \\
X_{k,m} \arrow[u, "v_{k,m}"] \arrow[r, "h_{k,m}"'] & X_{k+1,m} \arrow[u, "v_{k+1,m}"']
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano).

Notemos en particular que si $\mathcal{X}$ es un $(p-1)$-triángulo izquierdo (resp. derecho) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$, se sigue del Lema 6.2.3 que siempre que $0 \leq m < m' \leq k < k' \leq p$ el siguiente cuadrado de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X_{k,m'} \arrow[r, "h_{k'-1,m'} \circ \cdots \circ h_{k,m'}"] & X_{k',m'} \\
X_{k,m} \arrow[u, "v_{k,m'-1} \circ \cdots \circ v_{k,m}"] \arrow[r, "h_{k'-1,m} \circ \cdots \circ h_{k,m}"'] & X_{k',m} \arrow[u, "v_{k',m'-1} \circ \cdots \circ v_{k',m}"']
\end{tikzcd}$$

es homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano).

Por otro lado, notemos que por definición existe un único (-1)-triángulo izquierdo (resp. derecho) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$, al que identificamos con el objeto 0. Elegir un 0-triángulo izquierdo (resp. derecho) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u]
\end{tikzcd},$$

equivale a tomar un objeto X de $\mathcal{C}$ de la familia $\mathcal{A}$. Y darse un 1-triángulo izquierdo (resp. derecho) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & Z \arrow[u] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u] & Y, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

equivale a darse una sucesión de dos morfismos $\mathcal{C}$:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

donde los objetos X, Y y Z pertenecen a $\mathcal{A}$ y con la propiedad que el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[u] & Y \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

sea homotópicamente cocartesiano (resp. homotópicamente cartesiano) de $\mathcal{C}$.

Denotamos como $\mathrm{s}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})$ $\big($resp. $\mathrm{s}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$ al conjunto de los $(p-1)$-triángulos izquierdos (resp. derechos) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$ y como $\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})$ $\big($resp. $\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$ a la subcategoría plena de la categoría $\mathcal{C}^{\lrcorner_p}$ cuyo conjunto de objetos es $\mathrm{s}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})$ $\big($resp. $\mathrm{s}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$.

Escribimos también $\mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})$ $\big($resp. $\mathbf{W}\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$ para denotar a la subcategoría de $\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})$ $\big($resp. $\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$ con el mismo conjunto de objetos y donde los morfismos son los morfismos de $\lrcorner_p$-diagramas $f_{\bullet,\bullet}\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ tales que $f_{k,k} = \mathrm{id}_0$ siempre que $0 \leq k \leq p$ y $f_{i,j} \in \mathbf{W}$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ si $0 \leq j < i \leq p$ $\big($por el Lema 3.2.1 es suficiente pedir que $f_{k,k} = \mathrm{id}_0$ si $0 \leq k \leq p$ y $f_{i,0} \in \mathbf{W}$ si $1 \leq i \leq p$ (resp. $f_{p,j} \in \mathbf{W}$ si $0 \leq j \leq p-1$)$\big)$.

Observemos que por la propiedad (ii) del Lema 6.2.2 y por el Lema 6.2.3, el funtor (7.3) induce funtores:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\mathrm{s}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})} & \mathbf{Set} \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{s}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\mathrm{s}^d_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})} & \mathbf{Set} \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{s}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array}\right) \tag{7.4}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\mathbf{W}\mathrm{S}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})} & \mathbf{Cat} \\ [p] & \longmapsto & \mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\mathbf{W}\mathrm{S}^d_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})} & \mathbf{Cat} \\ [p] & \longmapsto & \mathbf{W}\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array}\right). \tag{7.5}$$

Si $n \geq 0$, definimos el *n-ésimo K-grupo* (*de Kan*) *izquierdo* (resp. *derecho*) de la terna $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$ como la clase del conjunto simplicial reducido (7.4) en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría homotópica $\mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{sSet}_0)$ de los $(n+1)$-tipos de homotopía punteados conexos.

El *n-ésimo K-grupo de Segal izquierdo* (resp. *derecho*) de $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$ es la clase del conjunto bisimplicial:

$$\begin{array}{ccc} \big(\Delta \times \Delta\big)^{op} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & \mathbf{Set} \\ \big([p],[q]\big) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p], \mathbf{W}\mathrm{S}^{i}_{q}(\mathcal{C}, \mathcal{A})\big) \end{array} \tag{7.6}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \big(\Delta \times \Delta\big)^{op} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & \mathbf{Set} \\ \big([p],[q]\big) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p], \mathbf{W}\mathrm{S}^{d}_{q}(\mathcal{C}, \mathcal{A})\big) \end{array}\right)$$

en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría homotópica $\mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{ssSet}_0)$.

PROPOSICIÓN 7.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos punteada y 0 un objeto cero fijo de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0 y $n \geq 0$ es un número natural, el n-ésimo K-grupo izquierdo (resp. derecho) de la terna $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$ es igual a la clase del conjunto simplicial diagonal del conjunto bisimplicial* (7.6)*, en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría homotópica $\mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{sSet}_0)$.*

Dicho de otro modo, las equivalencias de categorías:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{ssSet}_0) \arrow[r, bend right, "\mathbf{R}(\,\cdot\,)_{0,\bullet}"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{sSet}_0) \arrow[l, bend right, "\mathbf{L}p^*"'] & y & \mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{ssSet}_0) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{sSet}_0) \arrow[l, bend right, "\mathbf{R}r"'] \arrow[from=l, bend right, "\mathbf{L}diag"'] \end{tikzcd}$$

(ver (11.33) *y* (11.34)*) identifican al n-ésimo K-grupo y al n-ésimo K-grupo de Segal (izquierdos o derechos) de $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Mostremos el enunciado que concierne a los cuadrados homotópicamente cocartesianos. Para ello consideremos el morfismo de conjuntos bisimpliciales:

$$\begin{tikzcd} \big([p],[q]\big) \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathrm{s}^{i}_{q}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \\ \big(\Delta \times \Delta\big)^{op} \arrow[r, bend left, ""{name=U}] \arrow[r, bend right, ""'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "F_{\bullet,\bullet}"] & \mathbf{Set}\,, \\ \big([p],[q]\big) \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p], \mathbf{W}\mathrm{S}^{i}_{q}(\mathcal{C}, \mathcal{A})\big) \end{tikzcd}$$

definido en $\big([p],[q]\big)$ como la función $F_{p,q}$ que a un $(q-1)$-triángulo $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$ asocia el funtor composición:

$$[p] \xrightarrow{s^{p}_{0}} [0] \xrightarrow{\overline{\mathcal{X}}} \mathbf{W}\mathrm{S}^{i}_{q}(\mathcal{C}, \mathcal{A})\,,$$

donde $\overline{\mathcal{X}}$ es el único funtor cuya imagen en 0 es el objeto $\mathcal{X}$ de $\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$.

Mostraremos siguiendo a Waldhausen (ver por ejemplo §2.3 de [**DGM12**]) que el morfismo de conjuntos bisimpliciales F así definido, tiene la propiedad que para todo número natural $p \geq 0$ el morfismo inducido de conjuntos simpliciales:

$$\mathrm{s}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A}) \xrightarrow{F_{p,\bullet}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p],\mathbf{W}\mathrm{S}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})\big) \tag{7.7}$$

es una equivalencia homotópica. Esto implica que F induce un isomorfismo en la categoría homotópica $\mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{sSet}_0)$, entre el n-ésimo K-grupo izquierdo de la terna $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ y el conjunto simplicial diagonal del conjunto bisimplicial (7.6).

Observemos para empezar que si $\mathcal{C}_\mathcal{A}$ denota a la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{A}$, entonces el conjunto simplicial $\mathrm{s}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})$ es isomorfo al subconjunto simplicial $\mathbf{K}$ del conjunto simplicial:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ [q] & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big(\lrcorner_q,\mathcal{C}_\mathcal{A}\big) \end{array} \tag{7.8}$$

definido en cada número natural $q \geq 0$ por el conjunto $\mathbf{K}_q$ de aquellos funtores:

$$\begin{array}{ccc} \lrcorner_q & \xrightarrow{\mathfrak{X}} & \mathcal{C}_\mathcal{A} \\ (i,j) & \longmapsto & X_{i,j} \end{array}$$

con las propiedades:

(i) $X_{i,i} = 0$ para todo $0 \leq i \leq q$.

(ii) Si $0 \leq m < k \leq q-1$ el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} X_{k,m+1} \arrow[r, "h_{k,m+1}"] & X_{k+1,m+1} \\ X_{k,m} \arrow[u, "v_{k,m}"] \arrow[r, "h_{k,m}"'] & X_{k+1,m} \arrow[u, "v_{k+1,m}"'] \end{tikzcd}$$

inducido del funtor $\mathfrak{X}$ es homotópicamente cocartesiano.

Por otro lado, si para cada $p \geq 0$ denotamos como $p\mathcal{C}_\mathcal{A}$ a la subcategoría plena de la categoría de los funtores $\mathcal{C}^{[p]}$ cuyos objetos son los elementos del conjunto:

$$A^\bullet = \Big\{ A^0 \xrightarrow{f^1} \cdots \xrightarrow{f^p} A^p \,\Big|\, A^\ell \in \mathcal{A} \text{ y } f^\ell \in \mathbf{W} \Big\},$$

entonces el conjunto simplicial $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p],\mathbf{W}\mathrm{S}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$ es isomorfo al subconjunto simplicial $\mathbf{L}_{p,\bullet}$ del conjunto simplicial:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ [q] & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big(\lrcorner_q,p\mathcal{C}_\mathcal{A}\big) \end{array} \tag{7.9}$$

definidos para cada número natural $q \geq 0$ como el conjunto $\mathbf{L}_{p,q}$ de los funtores:

(7.10)
$$\begin{tikzcd} \lrcorner_q \arrow[r, "A^\bullet"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \\ (i,j) \arrow[r, mapsto] & A^\bullet_{i,j} = \left(A^0_{i,j} \overset{f^1_{i,j}}{\to} \cdots \overset{f^p_{i,j}}{\to} A^p_{i,j}\right) \end{tikzcd}$$

tales que:

(III) $A^\bullet_{i,i} = \left(0 \overset{\mathrm{id}}{\to} \cdots \overset{\mathrm{id}}{\to} 0\right)$ para todo $0 \leq i \leq q$.

(IV) Si $0 \leq m < k \leq q-1$ y $0 \leq \ell \leq p$ el cuadrado inducido:

(7.11)
$$\begin{tikzcd} A^\ell_{k,m+1} \arrow[r, "h^\ell_{k,m+1}"] & A^\ell_{k+1,m+1} \\ A^\ell_{k,m} \arrow[u, "v^\ell_{k,m}"] \arrow[r, "h^\ell_{k,m}"'] & A^\ell_{k+1,m} \arrow[u, "v^\ell_{k+1,m}"'] \end{tikzcd}$$

es un cuadrado homotópicamente cocartesiano de $\mathcal{C}$.

Consideremos ahora los funtores:

(7.12)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\Phi_p"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \\ A \arrow[r, mapsto] & \left(A \overset{\mathrm{id}}{\to} \cdots \overset{\mathrm{id}}{\to} A\right) \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\Psi_p"] & \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \\ \left(A^0 \overset{f^1}{\to} \cdots \overset{f^p}{\to} A^p\right) \arrow[r, mapsto] & A^p \end{tikzcd}$$

y observemos que $\Psi_p \circ \Phi_p = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$ y que existe una transformación natural:

(7.13)
$$\begin{tikzcd} p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "\Phi_p \circ \Psi_p"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

definida en un objeto $A^\bullet$ de $p\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ por el morfismo:

$$\begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[d, "\alpha_{A^\bullet}"] \\ \Phi_p \circ \Psi_p(A^\bullet) \end{tikzcd} = \left(\begin{tikzcd} A^0 \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "f^p \circ \cdots \circ f^1"'] & A^1 \arrow[r, "f^2"] \arrow[d, dashed, "f^p \circ \cdots \circ f^2"'] & \cdots \arrow[r, "f^p"] & A^p \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A^p \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & A^p \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & A^p \end{tikzcd} \right)$$

Se verifica sin dificultad que los funtores (7.12) inducen morfismos de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K} \arrow[r, "\widetilde{\Phi_p}"] & \mathbf{L}_{p,\bullet} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{L}_{p,\bullet} \arrow[r, "\widetilde{\Psi_p}"] & \mathbf{K} \end{tikzcd}$$

tales que $\widetilde{\Psi_p} \circ \widetilde{\Phi_p} = \mathrm{id}_{\mathbf{K}}$.

Más aún, se verifica sin dificultad que el morfismo $\widetilde{\Phi_p}$ así definido se identifica salvo isomorfismos con el morfismo (7.7) de arriba. En particular, para mostrar el enunciado deseado es suficiente con construir una homotopía del morfismo identidad $\mathrm{id}_{\mathbf{L}_{p,\bullet}}$ en $\widetilde{\Phi_p} \circ \widetilde{\Psi_p}$.

Para ello denotemos como $\Gamma\colon\ p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \times [1] \longrightarrow p\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ al funtor inducido por la transformación natural $\alpha\colon\ \mathrm{id}_{p\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} \Longrightarrow \Phi_p \circ \Psi_p$, en paticular:

$$\begin{tikzcd} p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, "(\mathrm{id},d_1)"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \times [1] \arrow[r, "\Gamma"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, "(\mathrm{id},d_0)"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \times [1] \arrow[r, "\Gamma"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

son iguales al funtor identidad y al funtor composición $\Phi_p \circ \Psi_p$, respectivamente. Definimos el morfismo de conjuntos simpliciales $H\colon\ \mathbf{L}_{p,\bullet} \times \Delta^1 \longrightarrow \mathbf{L}_{p,\bullet}$ de la siguiente manera: Si $q \geq 0$ y $(A^\bullet, \varphi)$ es un elemento de $\mathbf{L}_{p,q} \times \Delta^1_q$ el diagrama $H_q(A^\bullet, \varphi)$ es la composición:

$$\begin{tikzcd} \lrcorner_q \arrow[r] & \lrcorner_q \times [q] \arrow[r, "A^\bullet \times \varphi"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \times [1] \arrow[r, "\Gamma"] & p\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\,; \\ (i,j) \arrow[r, mapsto] & \big((i,j),i\big) & & \end{tikzcd}$$

en particular se tiene que:

$$H_q(A^\bullet, d_1 \circ s_0^q) = A^\bullet \qquad \text{y} \qquad H_q(A^\bullet, d_0 \circ s_0^q) = \Phi_p \circ \Psi_p \circ A^\bullet\,,$$

donde $d_1 \circ s_0^q$ (resp. $d_0 \circ s_0^q$) es el funtor constante de valor el objeto 0 (resp. 1) de $[1]$.

Nos resta verificar que el funtor $H_q(A^\bullet, \varphi)\colon\ \lrcorner_q \longrightarrow p\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ definido de esta manera es efectivamente un elemento de $\mathbf{L}_{p,\bullet}$, es decir mostremos que éste verifica las propiedades (III) y (IV) de arriba. En efecto se verifica sin problemas que $H_q(A^\bullet, \varphi)_{i,i} = \big(0 \overset{\mathrm{id}}{\to} \cdots \overset{\mathrm{id}}{\to} 0\big)$ para todo $0 \leq i \leq q$. Por otro lado si $0 \leq m < k \leq q-1$ y $0 \leq \ell \leq p$ se verifica que el cuadrado de (IV) definido por el funtor $H_q(A^\bullet, \varphi)$ es el cuadrado homotópicamente cocartesiano:

$$\begin{tikzcd} A^\ell_{k,m+1} \arrow[r, "h^\ell_{k,m+1}"] & A^\ell_{k+1,m+1} \\ A^\ell_{k,m} \arrow[u, "v^\ell_{k,m}"] \arrow[r, "h^\ell_{k,m}"'] & A^\ell_{k+1,m} \arrow[u, "v^\ell_{k+1,m}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{si} \quad \varphi(k) = \varphi(k+1) = 0\ ,$$

el cuadrado homotópicamente cocartesiano (ver el Lema 6.2.3 y (II) del Lema 6.2.2):

$$\begin{tikzcd} A^\ell_{k,m+1} \arrow[r, "f^p_{k+1,m+1} \circ \cdots \circ f^{\ell+1}_{k+1,m+1} \circ h^\ell_{k,m+1}"] & A^p_{k+1,m+1} \\ A^\ell_{k,m} \arrow[u, "v^\ell_{k,m}"] \arrow[r, "f^p_{k+1,m} \circ \cdots \circ f^{\ell+1}_{k+1,m} \circ h^\ell_{k,m}"'] & A^p_{k+1,m} \arrow[u, "v^p_{k+1,m}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{si} \quad 0 = \varphi(k) < \varphi(k+1) = 1$$

y los cuadrados homotópicamente cocartesianos:

$$\begin{tikzcd} A^p_{k,m+1} \arrow[r, "h^p_{k,m+1}"] & A^p_{k+1,m+1} \\ A^p_{k,m} \arrow[u, "v^p_{k,m}"] \arrow[r, "h^p_{k,m}"'] & A^p_{k+1,m} \arrow[u, "v^p_{k+1,m}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{si} \quad 1 = \varphi(k) = \varphi(k+1)\,.$$

□

Si $n \geq 0$ es un número natural, se sigue de la Proposición 7.1.1 que el $(n+1)$-ésimo grupo de homotopía de la realización geométrica de los conjuntos simpliciales reducidos:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ {[p]} & \longmapsto & \mathrm{s}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ {[p]} & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p], \mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big) \end{array}$$

son el mismo elemento en el conjunto de las clases de isomorfismo de los grupos (pequeños), es decir son isomorfos. Llamamos a la clase de este grupo el *n-ésimo K-grupo clásico de la terna* $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$.

§7.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos punteada y 0 un objeto cero fijo de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0 y $p \geq 0$ es un número natural, definimos un $(p-1)$-*triángulo estricto izquierdo* (resp. *derecho*) $\mathfrak{X}$ *de* $\mathcal{C}$ *con valores en* $\mathcal{A}$ como un $\lrcorner_p$-diagrama de $\mathcal{C}$ con las propiedades:

(i) Los objetos $X_{i,j}$ pertenecen a $\mathcal{A}$ para cualesquiera $0 \leq j \leq i \leq p$.

(ii) $X_{k,k} = 0$ para todo $0 \leq k \leq p$.

(iii) Si $0 \leq m < k \leq p-1$ el cuadrado de $\mathcal{C}$ inducido por el funtor $\mathfrak{X}$:

$$\begin{tikzcd} X_{k,m+1} \arrow[r, "h_{k,m+1}"] & X_{k+1,m+1} \\ X_{k,m} \arrow[u, "v_{k,m}"] \arrow[r, "h_{k,m}"'] & X_{k+1,m} \arrow[u, "v_{k+1,m}"'] \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano)

(iv) Para todo $0 \leq k \leq p-1$ el morfismo $X_{k,0} \longrightarrow X_{k+1,0}$ (resp. $X_{0,k} \longrightarrow X_{0,k+1}$) inducido por el funtor $\mathfrak{X}$ es una cofibración (resp. una fibración) de $\mathcal{C}$.

Deducimos del Lema 3.3.1 y de que en toda categoría de modelos las cofibraciones (resp. las fibraciones) son estables por composición y por cocambio de base (resp. cambio de base), que si $\mathcal{X}$ es un $(p-1)$-triángulo estricto izquierdo (resp. derecho) de $\mathcal{C}$ con valores en A, entonces:

- Si $0 \leq m < m' \leq k < k' \leq p$, el cuadrado de $\mathcal{C}$ inducido:

$$\begin{tikzcd}
X_{k,m'} \arrow[r, "h_{k'-1,m'}\circ\cdots\circ h_{k,m'}"] & X_{k',m'} \\
X_{k,m} \arrow[u, "v_{k,m'-1}\circ\cdots\circ v_{k,m}"] \arrow[r, "h_{k'-1,m}\circ\cdots\circ h_{k,m}"'] & X_{k',m} \arrow[u, "v_{k',m'-1}\circ\cdots\circ v_{k',m}"']
\end{tikzcd}$$

  es un cuadrado cocartesiano (resp. cartesiano).
- Si $0 \leq j \leq i < i' \leq p$ (resp. $0 \leq j < j' \leq i \leq p$), el morfismo $X_{i,j} \longrightarrow X_{i',j}$ (resp. $X_{i,j} \longrightarrow X_{i,j'}$) es una cofibración (resp. fibración) de $\mathcal{C}$.
- Si $0 \leq j \leq i \leq p$ los objetos $X_{i,j}$ son objetos cofibrantes (resp. fibrantes) de $\mathcal{C}$.

En particular, se sigue del Lema 6.1.2 que todo $(p-1)$-triángulo estricto izquierdo (resp. derecho) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$, también es un $(p-1)$-triángulo izquierdo (resp. derecho). Escribimos $\mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}$ $\big($resp. $\mathbf{W}\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}\big)$ para denotar a la subcategoría plena de $\mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})$ $\big($resp. $\mathbf{W}\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)$ cuyos objetos son los $(p-1)$-triángulos estrictos izquierdos (resp. derechos) de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$.

Se sigue de la propiedad (ii) del Lema 3.2.2 y del Lema 3.3.1, que el funtor (7.5) induce por restricción un funtor:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\mathbf{W}\mathrm{S}^i_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}} & \mathbf{Cat} \\ [p] & \longmapsto & \mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart} \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\mathbf{W}\mathrm{S}^d_\bullet(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}} & \mathbf{Cat} \\ [p] & \longmapsto & \mathbf{W}\mathrm{S}^d_p(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart} \end{array}\right). \tag{7.14}$$

Proposición 7.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos punteada y 0 un objeto cero fijo de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0 y que tiene la siguiente propiedad:*

(a) *$\mathcal{A}$ es estable por equivalencias débiles* i.e. *si $A \xrightarrow{\sim} B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ entonces A pertenece a $\mathcal{A}$ si y solamente si B pertenece a $\mathcal{A}$.*

entonces para toda $n \geq 0$ el n-ésimo K-grupo de Segal izquierdo (resp. derecho) de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ definido por el conjunto bisimplicial (7.6)*, es igual a la clase de isomorfismo del conjunto bisimplicial:*

$$\begin{array}{ccc} \big(\Delta\times\Delta\big)^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \big([p],[q]\big) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p],\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}\big) \end{array} \tag{7.15}$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \big(\Delta\times\Delta\big)^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \big([p],[q]\big) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big([p],\mathbf{W}\mathrm{S}^d_q(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}\big) \end{array}\right)$$

en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría homotópica $\mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{ssSet}_0)$*.*

En particular, el n-ésimo K-grupo izquierdo (resp. derecho) de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ *es igual a la clase de isomorfismo del conjunto simplicial diagonal de* (7.15)*, en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría homotópica* $\mathrm{Ho}_{n+1}(\mathbf{ssSet}_0)$*.*

DEMOSTRACIÓN. Veremos el caso sobre triángulos izquierdos. Para ello mostremos primero que si $q \geq 0$, entonces existe un funtor:

$$\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A}) \xrightarrow{\Phi_q} \mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A}) \tag{7.16}$$

y una transformación natural $\vartheta_q : \Phi_q \Rightarrow \mathrm{id}$ tal que $\Phi_q(\mathfrak{X})$ es un $(q-1)$-triángulo estricto izquierdo para todo $(q-1)$-triángulo izquierdo $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{C}$. La prueba es por inducción sobre q.

Definimos Φ_0 como el funtor identidad de la categoría puntual. Por otro lado Φ_1 y ϑ_1 son definidos a partir de un remplazo cofibrante funtorial (4.1).

Supongamos ahora que ya definimos Φ_{q-1} y ϑ_{q-1} verificando la propiedad deseada y consideremos el funtor inclusión:

$$\begin{array}{ccc} \lrcorner_{q-1} & \xrightarrow{\nu_q} & \lrcorner_q \; . \\ (i,j) & \longmapsto & (i,j) \end{array}$$

Si $\mathfrak{X}$ es un $(q-1)$-triángulo izquierdo de $\mathcal{C}$:

$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd} & & & 0 \\ & & 0 \arrow[r] & X_{q,q-1} \arrow[u] \\ & & \cdots & \vdots \\ & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{q,1} \arrow[u] \\ 0 \arrow[r] & X_{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & X_{q,0} \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

definimos la restricción $\nu_q^*\big(\Phi_q\mathfrak{X}\big)$ como el diagrama:

$$\Phi_{q-1}(\nu_q^*\mathfrak{X}) = \begin{tikzcd}
 & & & 0 \\
 & & 0 \arrow[r] & A_{q-1,q-2} \arrow[u] \\
 & & \cdots & \vdots \\
 & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{q-1,1} \arrow[u] \\
0 \arrow[r] & A_{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & A_{q-1,0} \arrow[u]
\end{tikzcd},$$

y el morfismo $\nu_q^*\big((\vartheta_q)_{\mathfrak{X}}\big)$ como $(\vartheta_{q-1})_{\nu_q^*\mathfrak{X}}$.

La columna de $\Phi_q\mathfrak{X}$ y la parte del morfismo $(\vartheta_q)_{\mathfrak{X}}$ que falta por describir son definidas de manera inductiva por medio de cubos:

(7.17)
$$\begin{tikzcd}
 & X_{q-1,k+1} \arrow[rr] & & X_{q,k+1} \\
A_{q-1,k+1} \arrow[ur, "F_{q-1,k+1}"] \arrow[rr, tail] & & A_{q,k+1} \arrow[ur, "F_{q,k+1}"] & \\
 & X_{q-1,k} \arrow[uu] \arrow[rr] & & X_{q,k}\,, \arrow[uu] \\
A_{q-1,k} \arrow[uu] \arrow[ur, "F_{q-1,k}"] \arrow[rr, tail] & & A_{q,k} \arrow[uu] \arrow[ur, "F_{q,k}"] &
\end{tikzcd}$$

donde $0 \leq k \leq q-2$ de la siguiente manera: Para empezar, si $k = 0$ descomponemos de manera funtorial al morfismo composición:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{q-1,0} \arrow[r] & X_{q,0}\,, \\
A_{q-1,0} \arrow[ur, "F_{q-1,0}"] & &
\end{tikzcd}$$

como una cofibración seguida de una fibración trivial de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{q,0}\,, \\
A_{q-1,0} \arrow[r, tail] & A_{q,0} \arrow[ur, "F_{q,0}"] &
\end{tikzcd}$$

Después elegimos de manera funtorial un cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A_{q-1,1} \arrow[r, tail] & A_{q,1} \\
A_{q-1,0} \arrow[u] \arrow[r, tail] & A_{q,0} \arrow[u]
\end{tikzcd},$$

y definimos $F_{q,1}\colon\ A_{q,1} \longrightarrow X_{q,1}$ como el único morfismo tal que (7.17) es un cubo cuyas caras son todas cuadrados conmutativos. En particular $F_{q,1}$ es una equivalencia débil por los Lemas 6.2.1 y 6.1.2.

Si ahora $1 \leq k \leq q-2$, consideramos funtorialmente un cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A_{q-1,k+1} \arrow[r, tail] & A_{q,k+1} \\
A_{q-1,k} \arrow[u] \arrow[r, tail] & A_{q,k} \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad ,$$

y tomamos a $F_{q,k+1}\colon\ A_{q,k+1} \longrightarrow X_{q,k+1}$ como el único morfismo con la propiedad que en el cubo (7.17) todas las caras sean cuadrados conmutativos. Nuevamente por los Lemas 6.2.1 y 6.1.2, deducimos que el morfismo $F_{q,k+1}$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Finalmente, observemos que si escribimos:

$$\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart} \xhookrightarrow{\Psi_q} \mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A}) \ ,$$

para denotar al funtor inclusión canónica, el funtor (7.16) que acabamos de definir induce un funtor:

$$\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A}) \xrightarrow{\Phi_q} \mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}$$

y la transformación natural $\vartheta_q\colon\ \Phi_q \Rightarrow \mathrm{id}$ induce transformaciones naturales:

$$\Phi_q \circ \Psi_q \Longrightarrow \mathrm{id} \qquad \text{y} \qquad \Psi_q \circ \Phi_q \Longrightarrow \mathrm{id} \ .$$

Dicho de otro modo, para cada $q \geq 0$ la imagen de Ψ_q por el funtor nervio de las categorías pequeñas $\mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$ es una equivalencia homotópica de conjuntos simpliciales. Por lo tanto si Ψ denota al morfismo inclusión canónico del conjunto bisimplicial:

$$\begin{array}{ccc}
\big(\Delta\times\Delta\big)^{op} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & \mathbf{Set} \\
\big([p],[q]\big) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big([p],\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}\big)
\end{array}$$

en el conjunto bisimplicial:

$$\begin{array}{ccc}
\big(\Delta\times\Delta\big)^{op} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & \mathbf{Set} \\
\big([p],[q]\big) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big([p],\mathbf{W}\mathrm{S}^i_q(\mathcal{C},\mathcal{A})\big)
\end{array}$$

se tiene que $\Psi_{\bullet,q}$ es una ∞-equivalencia débil de conjuntos simpliciales para todo $q \geq 0$.

Se deduce en particular que la imagen de Ψ por el funtor conjunto simplicial diagonal $\mathbf{ssSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ es una ∞-equivalencia débil de conjuntos simpliciales. ☐

Se demuestra sin dificultad:

Lema 7.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos con un objeto cero fijo* 0 *y* $\mathcal{A}$ *una familia de objetos de* $\mathcal{C}$ *que contiene a* 0. *Supongamos que* $\mathcal{A}$ *cumple la propiedad:*

(b) *La familia de objetos* $\mathcal{A}$ *es estable por cocambio de base a lo largo de las cofibraciones* i.e. *si:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} , \tag{7.18}$$

es un cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$ *tal que* f *es una cofibración y los objetos* A, B *y* C *pertenecen a* $\mathcal{A}$ *entonces* D *pertenece a* $\mathcal{A}$ *también.*

Si $\mathcal{A}_{cof}$ *denota a la subcategoría plena de* $\mathcal{C}$ *cuyos objetos son los objetos cofibrantes de* $\mathcal{C}$ *que pertenecen a* $\mathcal{A}$, *entonces* $\mathcal{A}_{cof}$ *admite una estructura de categoría de Waldhausen (ver* [**Wal83**]*) cuyas cofibraciones (resp. equivalencias débiles) son las cofibraciones (resp. las equivalencias débiles) de* $\mathcal{C}$ *entre los objetos de* $\mathcal{A}_{cof}$.

Se deduce del Lema 7.2.2 y de las Proposiciones 7.1.1 y 7.2.1:

Corolario 7.2.3. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría de modelos con un objeto cero fijo* 0 *y* $\mathcal{A}$ *una familia de objetos de* $\mathcal{C}$ *que contiene al objeto* 0. *Supongamos que* $\mathcal{A}$ *cumple las propiedades:*

(a) $\mathcal{A}$ *es estable por equivalencias débiles* i.e. *si* $A \xrightarrow{\sim} B$ *es una equivalencia débil de* $\mathcal{C}$ *entonces* A *pertenece a* $\mathcal{A}$ *si y solamente si* B *pertenece a* $\mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A}$ *es estable por cocambio de base a lo largo de las cofibraciones* i.e. *si:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} , \tag{7.19}$$

es un cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$ *tal que* f *es una cofibración y los objetos* A, B *y* C *pertenecen a* $\mathcal{A}$ *entonces* D *pertenece a* $\mathcal{A}$ *también.*

Si $n \geq 0$ *entonces el* n*-ésimo* K*-grupo clásico de* $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$, *es decir la clase de isomorfismo del* $(n+1)$*-ésimo grupo de homotopía de la realización geométrica del conjunto simplicial reducido:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{s}^i_p(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \,, \end{array}$$

es igual a el n*-ésimo* K*-grupo de Waldhausen de la categoría de Waldhausen* $\mathcal{A}_{cof}$ *del Lema 7.2.2, es decir es igual a la clase de isomorfismo del* $(n+1)$*-ésimo grupo de* *homotopía de la realización geométrica del conjunto simplicial reducido:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & \mathbf{Set} \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([p], \mathbf{W}\mathrm{S}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A})^{cart}\big)\,. \end{array}$$

§7.3. Propiedad universal del 0-ésimo K-grupo de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos con un objeto cero fijo 0 y $\mathcal{A}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0.

Si G es un grupo, una *función aditiva* de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ *con valores en* G es una función de conjuntos:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} G$$

tal que:

(I) $F(0) = e_G$ donde e_G es el neutro de G.

(II) Si X, Y y Z son objetos de $\mathcal{C}$ que pertenecen a la familia $\mathcal{A}$ y:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es una sucesión de morfismos de $\mathcal{C}$ tales que:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z \\ X \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

es un cuadrado homotópicamente cocartesiano de $\mathcal{C}$, entonces:

$$F(Y) = F(X)\cdot F(Z)\,.$$

Notemos que si $\varphi\colon\ G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos y $F\colon\ \mathcal{A} \longrightarrow G$ es una función aditiva de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ con valores en G, entonces la composición $\varphi\circ F\colon\ \mathcal{A} \longrightarrow H$ es una función aditiva de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ con valores en H.

De este modo tenemos un funtor:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Grp} & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & \mathbf{Set} \\ G & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c}\text{Funciones aditivas} \\ \text{de } (\mathcal{C},\mathcal{A},0) \text{ en } G\end{array}\right\} \end{array} \tag{7.20}$$

PROPOSICIÓN 7.3.1. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos con un objeto cero fijo 0 y $\mathcal{A}$ es una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0, entonces el funtor* (7.20) *es representable por el 0-ésimo K-grupo de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$, es decir por el grupo fundamental* *(ver §13.3) de la realización geométrica del conjunto simplicial reducido:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{s}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array} .$$

Demostración. Esta Proposición es un caso particular del Corolario 16.1.2. ☐

§7.4. Propiedad universal del primer K-grupo de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos con un objeto cero fijo 0 y $\mathcal{A}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene a 0.

Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo (ver la sección 14), un *determinante funtorial de* $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ *con valores en* $\mathcal{G}$ es una pareja $D = (D,T)$ donde:

$$\mathbf{W}\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{D} \mathcal{G}$$

es un funtor de $\mathbf{W}\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, la subcategoría de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{A}$ y los morfismos son las equivalencias débiles de los objetos de $\mathcal{A}$, en el grupoide subyacente a $\mathcal{G}$, y:

$$\mathrm{s}^g_2(\mathcal{C},\mathcal{A}) \xrightarrow{T} \left\{\text{Morfismos de } \mathcal{G}\right\}$$

es una función del conjunto de los 1-triángulos (izquierdos) de $\mathcal{C}$ (con valores en $\mathcal{A}$) en el conjunto de los morfismos de $\mathcal{G}$, verificando las siguientes propiedades:

(i) (Compatibilidad) Si $\mathfrak{X}$ es un 1-triángulo (izquierdo) de $\mathcal{C}$ (con valores en $\mathcal{A}$):

$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_0 \\ X_2 \arrow[u] \arrow[r] & X_1 \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

$T(\mathfrak{X})$ es un morfismo de $\mathcal{G}$ de la forma:

$$D_0(X_2) \otimes D_0(X_0) \xrightarrow{T(\mathfrak{X})} D_0(X_1) \ .$$

(ii) (Unitario) Se tiene que $D_0\big(0\big) = \mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ y $T\left(\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}\right) = l^{-1}_{\mathbb{1}} = r^{-1}_{\mathbb{1}}$.

(iii) (Funtorial) Si $\zeta\colon \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ es un morfismo de la categoría $\mathbf{W}\mathrm{S}^g_2(\mathcal{C},\mathcal{A})$:

$$\zeta = \begin{tikzcd} & X_0 \arrow[rr, "\zeta_0"] & & Y_0 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr, equal] & & 0 \arrow[ur] & \\ & X_1 \arrow[uu] \arrow[rr, "\zeta_1"] & & Y_1 \arrow[uu] \\ X_2 \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\zeta_2"'] & & Y_2 \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

se tiene un cuadrado conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
D_0(X_2) \otimes D_0(X_0) \arrow[r, "T(\mathfrak{X})"] \arrow[d, "D_1(\zeta_2)\otimes D_1(\zeta_0)"'] & D_0(X_1) \arrow[d, "D_1(\zeta_1)"] \\
D_0(Y_2) \otimes D_0(Y_0) \arrow[r, "T(\mathfrak{Y})"'] & D_0(Y_1)
\end{tikzcd} .$$

(IV) (Asociatividad) Si η es un 2-triángulo izquierdo de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$:

$$\eta = \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & A_{3,2} \\
0 \arrow[r] & A_{2,1} \arrow[r] \arrow[u] & A_{3,1} \arrow[u] \\
A_{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & A_{2,0} \arrow[r] \arrow[u] & A_{3,0} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

tenemos un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
D_0(A_{30}) & D_0(A_{10})\otimes D_0(A_{31}) \arrow[l, "T(d_2\,\eta)"'] \\
 & D_0(A_{10})\otimes(D_0(A_{21})\otimes D_0(A_{32})) \arrow[u, "D_0(A_{10})\otimes T(d_0\,\eta)"'] \\
D_0(A_{20})\otimes D_0(A_{32}) \arrow[uu, "T(d_1\,\eta)"] & (D_0(A_{10})\otimes D_0(A_{21}))\otimes D_0(A_{32}) \arrow[l, "T(d_3\,\eta)\otimes D_0(A_{32})"] \arrow[u, phantom, "a\ \wr\|"]
\end{tikzcd} .$$

Si (D,T) y (D',T') son dos determinantes funtoriales de $(\mathcal{C},\mathcal{A},0)$ con valores en $\mathcal{G}$ un *morfismo de determinantes* α: $(D,T) \longrightarrow (D',T')$ es una transformación natural:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{W}\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "D", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "D'"', ""{name=L, above}] & \mathcal{G}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

tal que:

(I) El morfismo α_0 es el morfismo identidad del objeto $\mathbb{1}$ de $\mathcal{G}$.

(II) Si $\mathfrak{X}$ es un 1-triángulo izquierdo de $\mathcal{C}$ con valores en $\mathcal{A}$:

$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \\
X_2 \arrow[r] \arrow[u] & X_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

se tiene un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
D_0(X_2) \otimes D_0(X_0) \arrow[r, "T(\mathfrak{X})"] \arrow[d, "\alpha_{X_2} \otimes \alpha_{X_0}"'] & D_0(X_1) \arrow[d, "\alpha_{X_1}"] \\
D'_0(X_0) \otimes D'_0(X_0) \arrow[r, "T'(\mathfrak{X})"'] & D'_0(X_1)
\end{tikzcd}$$

No es difícil mostrar que los determinantes de la terna $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$ con valores en $\mathcal{G}$ y los morfismos entre ellos forman un grupoide que denotamos $\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{G})$. La composición siendo la composición de transformaciones naturales.

Definimos un 2-funtor:

$$2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}} \underline{\mathbf{Grpd}}$$

como sigue: Si $(\varphi, m^{\varphi})\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un morfismo de 2-grupos el funtor:

$$\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\varphi, m^{\varphi})} \underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{H})$$

es definido en un determinante (D, T) de $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$ con valores en $\mathcal{G}$ por la fórmula:

$$\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}\big(\varphi, m^{\varphi}\big)(D, T) = (\overline{D}, \overline{T})$$

donde $\overline{D}$ es el funtor composición:

$$\mathbf{W}\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{D} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}$$

y $\overline{T}$ es el funtor composición:

$$\mathrm{s}_2^g(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \xrightarrow{T} \mathcal{N}_{\mathcal{S}}\big(\mathcal{G}\big)_{0,2} \xrightarrow{\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(\varphi, m^{\varphi})_{0,2}} \mathcal{N}_{\mathcal{S}}\big(\mathcal{H}\big)_{0,2} \subset \big\{ \text{Morphismes de } \mathcal{H} \big\}.$$

Si por otro lado
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, bend left, "{(\varphi, m^{\varphi})}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "{(\psi, m^{\psi})}"'{name=L}] & \mathcal{H} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\eta"]
\end{tikzcd}$$
es una transformación entre morfismos de 2-grupos, la transformación natural:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{G}) \arrow[r, bend left, "{\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\varphi, m^{\varphi})}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "{\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\psi, m^{\psi})}"'{name=L}] & \underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{H}) \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\overline{\eta}"]
\end{tikzcd}$$

es definida en un determinante (D, T) de $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$ con valores en $\mathcal{G}$ por la transformación natural:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{W}\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "D \circ \varphi"{name=U}] \arrow[r, bend right, "D \circ \psi"'{name=L}] & \mathcal{H} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "D \star \eta"]
\end{tikzcd}.$$

PROPOSICIÓN 7.4.1. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos con un objeto cero fijo 0 y $\mathcal{A}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$ que contiene al objeto 0, el funtor:*

$$2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}} \mathbf{Grpd} \xrightarrow{\quad\pi\quad} h\mathbf{Grpd} \tag{7.21}$$

es representable por el 2-grupo de homotopía (ver el Corolario 15.2.8) del conjunto simplicial reducido:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Set}\,. \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{s}^i_p(\mathcal{C},\mathcal{A}) \end{array} .$$

En particular, $(\varphi, m^{\varphi})\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es una 2-equivalencia débil de 2-grupos, si y solamente si el funtor:

$$\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\varphi,m^{\varphi})} \underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\mathcal{H})$$

es una equivalencia débil de grupoides; por lo que el funtor inducido:

$$2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{\pi_0\left(\underline{\mathbf{det}}_{(\mathcal{C},\mathcal{A},0)}(\,\bullet\,)\right)} \mathbf{Set}$$

también es representable por el primer K-grupo de $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, 0)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver el Corolario 16.4.7. ☐

Capítulo 2

Los n-tipos de homotopía reducidos

En el presente Capítulo comenzamos recordando las estructuras de categorías de modelos simpliciales en las categorías de los conjuntos simpliciales reducidos (Proposición 10.1.2) y de los conjuntos bisimpliciales reducidos (Proposición 11.3.1):

$$(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}) \quad \text{y} \quad (\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag}, \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0})\,,$$

respectivamente; cuyas categorías homotópicas son equivalentes a la categoría homotópica de los n-tipos de homotopia punteados conexos.

Posteriormente, en el Corolario 10.2.6 demostramos que el enriquecimiento de estas categorías de modelos es un enriquecimiento sobre $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_{n-1}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_{n-1})$ la categoría de modelos de los $(n-1)$-tipos de homotopía. Por último, en el Corolario 11.3.4 demostramos un criterio para determinar algunos de los objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$.

8. Conjuntos simpliciales

En esta sección recordamos notación básica sobre la categoría de los conjuntos simpliciales y sobre la estructura de categorías de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ cuya categoría homotópica es conocida como la *categoría homotópica de los n-tipos de homotopía.* Finalmente, en §8.6 recordamos la descripción combinatoria de D. Kan de los grupos de homotopía de los objetos fibrantes de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$.

§8.1. En este trabajo identificamos a los conjuntos preordenados con las categorías (abstractas) que satisfacen la siguiente propiedad: El conjunto de los morfismos entre cualesquiera dos de sus objetos es vacío o un conjunto con un único elemento. Resulta que los funtores entre estas categorías, son las funciones que respetan el orden.

Denotamos como $\mathbf{\Delta}$ a la *categoría de los simplejos*, es decir la subcategoría plena de **cat** cuyos objetos son las categorías $[n] = \{0 < \cdots < n\}$ para $n \geq 0$. De forma equivalente (ver por ejemplo II.2.2 de [**GZ76**]), $\mathbf{\Delta}$ es la categoría libre generada por los morfismos cara y degenerados:

$$\Big\{\ [n] \xrightarrow{\delta_i^n = \delta_i} [n+1]\ \Big|\, 0 \leq i \leq n+1 \Big\}_{n \geq 0} \quad \text{y} \quad \Big\{\ [n+1] \xrightarrow{\sigma_i^n = \sigma_i} [n]\ \Big|\, 0 \leq i \leq n \Big\}_{n \geq 0},$$

sujetos a las relaciones definidas para $n \geq 0$ por las reglas:

$$
\begin{aligned}
\delta_l^{n+1}\delta_k^n &= \delta_k^{n+1}\delta_{l-1}^n && 0 \leq k < l \leq n+2,\\
\sigma_l^n\sigma_k^{n+1} &= \sigma_k^n\sigma_{l+1}^{n+1} && 0 \leq k \leq l \leq n,\\
\sigma_k^{n+1}\delta_l^{n+1} &= \begin{cases} \delta_l^n\sigma_{k-1}^n & \text{si } \ 0 \leq l < k \leq n+1,\\ \mathrm{id}_{[n]} & \text{si } \ 0 \leq k \leq l \leq k+1 \leq n+2,\\ \delta_{l-1}^n\sigma_k^n & \text{si } \ 0 \leq k < l-1 \leq n+1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Denotamos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[r, phantom, "="] & {[0]} \arrow[r, bend left=60, "\delta_1^0"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^0"] & {[1]} \arrow[l, shift left, "\sigma_0^0"] \arrow[r, dotted, dash] & {[n]} \arrow[r, bend left=60, "\delta_{n+1}^n"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^n"] & {[n+1]} \arrow[l, shift left, "\sigma_n^n"] \arrow[l, bend left=60, "\sigma_0^n"] \arrow[r, dotted, dash] & {} .
\end{tikzcd}$$

De la misma forma, la *categoría aumentada de los simplejos* $\mathbf{\Delta}_+$, es la subcategoria plena de **cat** cuyos objetos son las categorías $[n]_+ = \{0 < \cdots < n-1\}$, para $n \geq 0$; es decir $[n]_+ = [n-1]$ si $n \geq 1$, y $[0]_+$ es la categoría vacía. Se verifica en particular que $\mathbf{\Delta}_+$ es obtenida de la categoría de los simplejos al agregar un objeto inicial.

Por lo tanto, $\mathbf{\Delta}_+$ es la categoría libre generada por la única función $[0]_+ \xrightarrow{\delta_0^{-1}} [1]_+$, más los morfismos cara y degenerados:

$$\left\{ \ [n+1]_+ = [n] \xrightarrow{\delta_i^n} [n+1] = [n+2]_+ \ \middle| 0 \leq i \leq n+1 \right\}_{n \geq 0}$$

$$\text{y} \qquad \left\{ \ [n+2]_+ = [n+1] \xrightarrow{\sigma_i^n} [n] = [n+1]_+ \ \middle| 0 \leq i \leq n \right\}_{n \geq 0};$$

sujetos a las relaciones definidas para $n \geq 0$ por:

$$
\begin{aligned}
\delta_l^n\delta_k^{n-1} &= \delta_k^n\delta_{l-1}^{n-1} && 0 \leq k < l \leq n+1,\\
\sigma_l^n\sigma_k^{n+1} &= \sigma_k^n\sigma_{l+1}^{n+1} && 0 \leq k \leq l \leq n,\\
\sigma_k^n\delta_l^n &= \begin{cases} \delta_l^{n-1}\sigma_{k-1}^{n-1} & \text{si } 0 \leq l < k \leq n,\\ \mathrm{id}_{[n]} & \text{si } 0 \leq k \leq l \leq k+1 \leq n+1,\\ \delta_{l-1}^{n-1}\sigma_k^{n-1} & \text{si } 0 \leq k < l-1 \leq n. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Denotamos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}_+ \arrow[r, phantom, "="] & {[0]_+} \arrow[r, "\delta_0^{-1}"] & {[1]_+} \arrow[r, bend left=60, "\delta_1^0"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^0"] & {[2]_+} \arrow[l, shift left, "\sigma_0^0"] \arrow[r, dotted, dash] & {[n+1]_+} \arrow[r, bend left=60, "\delta_{n+1}^n"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^n"] & {[n+2]_+} \arrow[l, shift left, "\sigma_n^n"] \arrow[l, bend left=60, "\sigma_0^n"] \arrow[r, dotted, dash] & {} .
\end{tikzcd}$$

La categoría aumentada de los simplejos $\mathbf{\Delta}_+$ admite una estructura de categoría monoidal estricta, donde:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}_+ \times \mathbf{\Delta}_+ \arrow[r, "\otimes"] & \mathbf{\Delta}_+ \\ \big([n]_+, [m]_+\big) \arrow[r, mapsto] & {[n+m]_+} \end{tikzcd} \tag{8.3}$$

es definida en dos morfismos $f\colon\ [n]_+ \longrightarrow [n']_+$ y $g\colon\ [m]_+ \longrightarrow [m']_+$ por la regla:

$$\big(f \otimes g\big)(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ g(k-n)+n' & \text{si } n \leq k \leq n+m-1\,. \end{cases} \tag{8.4}$$

§8.2. Denotemos como **sSet** a la categoría de los *conjuntos simpliciales*, es decir de los funtores $X : \mathbf{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ y las transformaciones naturales entre ellos.

Si X es un conjunto simplicial, el conjunto de los *n-simplejos* de X es denotado como $X_n = X\big([n]\big)$. Los morfismos cara y degenerados de la categoría $\mathbf{\Delta}$, inducen los *morfismos cara y degenerados de X*:

$$X_{n+1} \xrightarrow{d_i^n = d_i} X_n \quad \text{y} \quad X_n \xrightarrow{s_i^n = s_i} X_{n+1}\ , \quad \text{respectivamente.}$$

Un n-simplejo x de un conjunto simplicial X se dice que es *degenerado*, si x pertenece a la imagen de alguno de los morfismos $s_0^{n-1}, \ldots, s_{n-1}^{n-1}$. De manera equivalente, $x \in X_n$ es degenerado si existe $f\colon\ [n] \longrightarrow [m]$ sobreyectiva en objetos e $y \in X_m$ tal que $f^*(y) = x$.

Si a es un 0-simplejo de X, escribimos:

$$a \;=\; s_0^{n-1} \cdots s_0^0(a) \in X_n \qquad \text{donde } \ n \geq 1,$$

para denotar al n-simplejo degenerado asociado a a, y lo llamamos un n-simplejo *totalmente degenerado* de X.

Si $m \geq 0$, denotamos como Δ^m al conjunto simplicial representable por $[m]$, es decir Δ_n^m es igual al conjunto de los funtores de $[n]$ en $[m]$. También, denotamos por abuso como:

$$\Delta^m \xrightarrow{\delta_i^m = \delta_i} \Delta^{m+1} \quad \text{y} \quad \Delta^{m+1} \xrightarrow{\sigma_i^m = \sigma_i} \Delta^m\ ,$$

a los morfismos de conjuntos simpliciales definidos para $p \geq 0$ por las reglas:

$$\begin{tikzcd} \Delta_p^m \arrow[r, "(\delta_i^m)_p"] & \Delta_p^{m+1} & \text{y} & \Delta_p^{m+1} \arrow[r, "(\sigma_i^m)_p"] & \Delta_p^m\ , & \text{respectivamente.} \\ \varphi \arrow[r, mapsto] & \delta_i^m \circ \varphi & & \varphi \arrow[r, mapsto] & \sigma_i^m \circ \varphi & \end{tikzcd}$$

Por último, recordemos que la categoría de los conjuntos simpliciales **sSet** admite una estructura canónica de categoría cartesiana cerrada (ver IV§6 de [**Lan98**]), donde un objeto final es un conjunto simpicial constante de valor $\star$ (un conjunto con un único elemento), el producto de conjuntos simpliciales es el producto cartesiano argumento por argumento y el funtor adjunto del producto:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\times\cdot"']
\end{tikzcd} \tag{8.5}$$

es definido como $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X,Y)_m = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X\times\Delta^m, Y)$ para todo conjunto simplicial X.

§8.3. Si $m \geq -1$, definimos *la frontera* $\partial\Delta^{m+1}$ *de* Δ^{m+1} como el conúcleo en **sSet** de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{0\leq i<j\leq m+1} \Delta^{m-1} \arrow[r, shift left, "\sqcup_{i<j}\,\nu_i\circ\delta^{m-1}_{j-1}"] \arrow[r, shift right, "\sqcup_{i<j}\,\nu_j\circ\delta^{m-1}_{i}"'] & \coprod\limits_{0\leq l\leq m+1} \Delta^{m}
\end{tikzcd};$$

donde ν_l denota la inclusión de la l-ésima componente $\Delta^m \hookrightarrow \coprod\limits_{0\leq l\leq m+1} \Delta^m$ $\big($aquí $\Delta^{-1} = \Delta^{-2}$ es por definición el conjunto simplicial vacío$\big)$.

De la misma forma, para $0 \leq k \leq m+1$ definimos el *k-cuerno* $\Lambda^{m+1,k}$ *de* Δ^{m+1} como el conúcleo de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{\substack{0\leq i<j\leq m+1\\ i,j\neq k}} \Delta^{m-1} \arrow[r, shift left, "\sqcup_{i<j}\,\nu_i\circ\delta^{m-1}_{j-1}"] \arrow[r, shift right, "\sqcup_{i<j}\,\nu_j\circ\delta^{m-1}_{i}"'] & \coprod\limits_{\substack{0\leq l\leq m+1\\ l\neq k}} \Delta^{m}
\end{tikzcd}.$$

Se construye en particular un triángulo conmutativo de monomorfismos de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,k} \arrow[r, "\widetilde{\alpha}^{m,k}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha^{m,k}"'] & \partial\Delta^{m+1} \arrow[r, "\alpha^m"] & \Delta^{m+1}
\end{tikzcd}, \tag{8.6}$$

donde el morfismo α^m es inducido del morfismo:

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{0\leq l\leq m+1} \Delta^{m} \arrow[r, "\sqcup_l\,\delta^m_i"] & \Delta^{m+1}
\end{tikzcd},$$

y $\widetilde{\alpha}^{m,k}$ proviene de la inclusión evidente:

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{\substack{0\leq l\leq m+1\\ l\neq k}} \Delta^{m} \arrow[r] & \coprod\limits_{0\leq l\leq m+1} \Delta^{m}
\end{tikzcd}.$$

En particular, para todo conjunto simplicial X tenemos funciones:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \arrow[r, "\alpha_X^m"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_X^{m,k}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}_X^{m,k}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big) \end{tikzcd} . \tag{8.7}$$

De manera explícita, módulo los isomorfismos canónicos que obtenemos del Lema de Yoneda[1]:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \cong X_{m+1}, \tag{8.8}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big) \cong \left\{ (a_0, \ldots, a_{m+1}) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_i \in X_m \quad \text{y} \quad d_i^{m-1} a_j = d_{j-1}^{m-1} a_i \\ \text{si } 0 \leq i < j \leq m+1. \end{array} \right\} \qquad \text{y} \tag{8.9}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big) \cong \left\{ (a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1} \ldots, a_{m+1}) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_i \in X_m \quad \text{y} \quad d_i^{m-1} a_j = d_{j-1}^{m-1} a_i \\ \text{si } 0 \leq i < j \leq m+1 \text{ y } i, j \neq k. \end{array} \right\}, \tag{8.10}$$

las funciones del diagrama (8.7) son definidas por las siguientes reglas:

$$\alpha_X^m(a) \;=\; \big(d_0^m a, \ldots, d_{m+1}^m a\big), \tag{8.11}$$

$$\widetilde{\alpha}_X^{m,k}(a_0, \ldots, a_{m+1}) \;=\; \big(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{m+1}\big) \tag{8.12}$$

$$\text{y} \qquad \alpha_X^{m,k}(a) \;=\; \big(d_0^m a, \ldots, d_{k-1}^m a, d_{k+1}^m a, \ldots, d_m^m a\big). \tag{8.13}$$

Más adelante necesitaremos de la siguiente afirmación:

LEMA 8.3.1. *Sea X un conjunto simplicial, $m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m+1$, entonces en el diagrama* (8.7) *de arriba:*

(I) *Si la función $\alpha_X^{m,k}$ es inyectiva, la función α_X^m también es inyectiva.*

(II) *Si la función α_X^{m-1} es sobreyectiva (resp. inyectiva), entonces la función $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ es también sobreyectiva (resp. inyectiva).* (*Ver el Lema 1.7.1 de* [**Gle82**]).

(III) *Si la función $\alpha_X^{m,k}$ es sobreyectiva y la función $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ es inyectiva, entonces la función α_X^m es sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un conjunto simplicial, $m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m+1$. La prueba de (I) es inmediata. Para mostrar (II) consideremos un elemento a del conjunto (8.10),

---

[1] El caso $m = -1$ viene incluido si definimos X_{-1} como un conjunto con un único elemento, es decir si $X_{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{-1}, X)$.

es decir:

$$a = \big(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{m+1}\big) \in \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m+1} X_t \qquad \text{donde}$$

$$d_i^{m-1} a_j = d_{j-1}^{m-1} a_i \quad \text{si} \quad 0 \leq i < j \leq m+1 \quad \text{y} \quad i, j \neq k.$$

No es difícil ver, que si escribimos $(b_0, \ldots, b_m)$ para denotar a:

$$\Big(d_{k-1}^{m-1} a_0, \ldots, d_{k-1}^{m-1} a_{k-1}, d_k^{m-1} a_{k+1}, \ldots, d_k^{m-1} a_{m+1}\Big) \in \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} X_{m-1};$$

entonces $d_i^{m-2} b_j = d_{j-1}^{m-2} b_i$ para $0 \leq i < j \leq m$.

Ya que α_X^{m-1} es sobreyectiva por hipótesis, existe $a_k \in X_m$ tal que:

$$d_i^{m-1} a_k = d_{k-1}^{m-1} a_i \quad \text{si} \quad 0 \leq i < k \qquad \text{y} \quad d_{j-1}^{m-1} a_k = d_k^{m-1} a_j \quad \text{si} \quad 0 \leq k < j;$$

es decir $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ es sobreyectiva.

Para mostrar (III), consideremos un elemento y del codominio de la función α_X^m. Si x es un $(m+1)$-simplejo de X tal que $\alpha_X^{m,k}(x) = \widetilde{\alpha}_X^{m,k}(y)$; ya que $\alpha_X^{m,k}(x) = \widetilde{\alpha}_X^{m,k}\big(\alpha_X^m(x)\big)$, deducimos que $\alpha_X^m(x)$ y y son enviados al mismo elemento por la función inyectiva $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$. Por lo tanto, $\alpha_X^m(x) = y$. Dicho de otro modo, α_X^m es una función sobreyectiva. □

Si $m \geq 0$ decimos que un conjunto simplicial X *cumple la condición de extensión de Kan en dimensión* m (resp. *cumple la condición de extensión Kan de manera estricta en dimensión* m), si la función $\alpha_X^{m,k}$ del diagrama (8.7) es sobreyectiva (resp. biyectiva) para todo $0 \leq k \leq m+1$. Notemos que todo conjunto simplicial cumple la condición de extensión de Kan en dimensión 0.

Un *complejo de Kan* es un conjunto simplicial que cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m para toda $m \geq 0$. De manera explícita, un conjunto simplicial X es un complejo de Kan si para todo cuadrado conmutativo de **sSet**:

(8.14)
$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,k} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{m,k}"'] & X \arrow[d] \\
\Delta^{m+1} \arrow[r] & \star
\end{tikzcd}$$

donde $m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m+1$, existe un morfismo diagonal:

(8.15)
$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,k} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{m,k}"'] & X \arrow[d] \\
\Delta^{m+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \star
\end{tikzcd}$$

completando (8.14) en un diagrama conmutativo.

Más generalmente, si $0 \leq n \leq \infty$ un conjunto simplicial X es llamado un *n-grupoide de Kan*[2] (ver §12.3 más abajo) si X es un complejo de Kan que cumple la condición de extensión de Kan de manera estricta en dimensión $m \geq n$, es decir si el morphismo diagonal del diagrama (8.15) es único para $m \geq n$. En particular un ∞-grupoide de Kan es simplemente un complejo de Kan.

§8.4. Sea **Top** la categoría de los espacios topológicos (pequeños) y las funciones continuas entre ellos. Recordemos que el funtor:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[r] & \mathbf{Top} \\
{[n]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^n_{top} = \left\{ \big(t_0, \ldots, t_n\big) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} t_n = 1\,,\ t_i \geq 0 \right\},
\end{tikzcd} \tag{8.16}$$

induce una adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top} \arrow[r, bend right, "s(\,\cdot\,)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,, \arrow[l, bend right, "|\cdot|"']
\end{tikzcd} \tag{8.17}$$

donde $s(\,\cdot\,)$ es definido por la fórmula $s(\mathcal{X})_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\big(\Delta^n_{top}, \mathcal{X}\big)$ y el funtor $|\cdot|$ es una extensión de Kan izquierda, la cual vamos a elegir y fijar, del funtor (8.16) a lo largo del encaje de Yoneda:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[r, hook] & \mathbf{sSet} \\
{[n]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^n\,.
\end{tikzcd}$$

Llamamos a $s(\mathcal{X})$ el *conjunto simplicial singular* del espacio topológico $\mathcal{X}$, y a $|X|$ (una ó) la *realización geométrica* del conjunto simplicial X.

Fijemos también una unidad η de la adjunción $|\cdot| \dashv s(\,\cdot\,)$ y observemos que esta nos permite asociar a cada 0-simplejo de un conjunto simplicial X, un punto del espacio topológico $|X|$ el cual vamos a denotar por el mismo símbolo:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "(\eta_X)_0"] & s\big(|\,X\,|\big)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\big(\Delta^0_{top}, |\,X\,|\big)\,. \\
a \arrow[r, mapsto] & a
\end{tikzcd}$$

Si $a \in X_0$ y $m \geq 0$, escribimos $\pi_m(X, a)$ para denotar al conjunto de las clases de homotopía punteada de las funciones continuas punteadas $\big(\mathbb{S}^m_{top}, \star\big) \longrightarrow \big(|X|, a\big)$, donde $\mathbb{S}^m_{top}$ denota a la m-esfera topológica, es decir $\mathbb{S}^m_{top}$ es el conjunto de los puntos $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tales que $\|\overline{x}\| = \sqrt{x_0^2 + \cdots + x_m^2} = 1$, y $\star = (1, 0, \ldots, 0)$.

Si $m = 0$ se verifica sin dificultad que $\pi_0(X, a)$ es independiente de a, por lo que este conjunto es denotado simplemente $\pi_0(X)$ y llamado el conjunto de los *componentes*

---

[2] También llamado un *n-hipergrupoide*.

por trayectorias de X. Si $m \geq 1$, el conjunto $\pi_m(X, a)$ admite una estructura de grupo, conmutativo para $m \geq 2$. Este grupo es llamado el *m-ésimo grupo de homotopía de X en a.*

Si $-1 \leq n \leq \infty$, un morfismo de conjuntos simpliciales $F\colon X \longrightarrow Y$ es llamado una *n-equivalencia débil*, si la función $\pi_m(F, a)\colon \pi_m(X, a) \longrightarrow \pi_m(Y, Fa)$ inducida al componer con $|F|\colon |X| \longrightarrow |Y|$, es biyectiva para todo 0-simplejo a de X y toda $0 \leq m \leq n$. En particular todo morfismo de conjuntos simpliciales es una (-1)-equivalencia débil.

LEMA 8.4.1. *El concepto de n-equivalencia débil es independiente del funtor realisación geométrica elegido.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|\cdot|'$ es otra extension de Kan izquierda del funtor (8.16) (a lo largo del encaje de Yoneda) y η' es una unidad de la adjunción $|\cdot|' \dashv s(\cdot)$, entonces existe un isomorfismo natural de funtores $\alpha\colon |\cdot| \Longrightarrow |\cdot|'$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & s\big(|\cdot|\big) \arrow[d, Rightarrow, "s(\alpha)"] \\
\mathrm{id} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\eta'"'] & {} \\
 & s\big(|\cdot|'\big)
\end{tikzcd} .$$

Se sigue que para todo conjunto simplicial X existe un homeomorfismo de espacios topológicos $\alpha_X\colon |X| \longrightarrow |X|'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\Big(\Delta^0_{top}, |X|\Big) \arrow[dd, "\alpha_X \circ -"] \\
X_0 \arrow[ur, bend left, "(\eta_X)_0"] \arrow[dr, bend right, "(\eta'_X)_0"'] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\Big(\Delta^0_{top}, |X|'\Big)
\end{tikzcd} ;$$

en particular α_X induce un isomorfismo natural entre los grupos $\pi_m(X, a)$ definidos a partir del funtor $|\cdot|$ y la transformación natural η o a partir de $|\cdot|'$ y η'. ☐

Recordemos:

TEOREMA 8.4.2. *Si $-1 \leq n \leq \infty$, la categoría de los conjuntos simpliciales* **sSet** *admite una estructura de categoría de modelos cuando:*

$$\begin{aligned}
\Big\{\textit{equivalencias débiles}\Big\} \ &= \ \Big\{\textit{n-equivalencias débiles}\Big\} = \mathbf{W}_n\,, \\
\Big\{\textit{cofibraciones}\Big\} \ &= \ \Big\{\textit{monomorfismos}\Big\} = \mathbf{mono}\,, \\
\textit{y} \qquad \Big\{\textit{fibraciones}\Big\} \ &= \ \Big\{\textit{morfismos con la propiedad de levantamiento} \\
&\qquad\quad \textit{por la derecha con respecto a } \mathbf{mono} \cap \mathbf{W}_n\Big\} = \mathbf{fib}_n\,.
\end{aligned}$$

Además, un conjunto simplicial X es un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ *si y solamente si X es un complejo de Kan tal que $\pi_m(X, a) = 0$ para todo $m \geq n+1$ y todo 0-simplejo a de X.*

Demostración. En §9 de [**Cis06**] se muestra que $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ es una categoría de modelos cofibrantemente generada para toda $-1 \leq n \leq \infty$.

En este trabajo, a partir de resultados bien conocidos de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$ y del Teorema 4.7 de [**Bar10**] mostramos que la categoría simplicial $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ es una localización de Bousfield izquierda de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$ respecto al conjunto de morfismo (8.18) de más abajo. De manera explícita:

Sabemos que $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$ es una categoría de modelos cuyos objetos fibrantes son los complejos de Kan (ver por ejemplo el Teorema 3.6.5 de [**Hov07**] o el Teorema 3 de II§3 de [**Qui67**]). De hecho $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$ es una categoría de modelos propia izquierda y combinatoria [3]; por lo que de acuerdo al Teorema 4.7 de [**Bar10**] podemos considerar su localización de Bousfield izquierda con respecto al siguiente conjunto de morfismos:

$$S_n = \left\{ \partial\Delta^{m+1} \xhookrightarrow{\alpha^m} \Delta^{m+1} \right\}_{m \geq n+1}, \tag{8.18}$$

donde $n \geq -1$ es un entero.

En los Lemas que siguen, escribimos $[\ \cdot\ ,\ \cdot\ ]_\infty$ para denotar al conjunto de los morfismos en la categoría homotópica $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty^{-1}]$.

Lema 8.4.3. *Si $m \geq 0$ y X es un conjunto simplicial, entonces $\pi_m(X, a) = 0$ para todo 0-simplejo a de X si y solamente si la función:*

$$[\Delta^{m+1}, X]_\infty \xrightarrow{(\alpha^m)^*} [\partial\Delta^{m+1}, X]_\infty\ ,$$

inducida por el morfismo $\alpha^m\colon\ \partial\Delta^{m+1} \hookrightarrow \Delta^{m+1}$ en la categoría homotópica $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty^{-1}]$ *es biyectiva.*

En particular, si $-1 \leq n \leq \infty$, un conjunto simplicial X verifica que $\pi_m(X, a) = 0$ para todo $m \geq n+1$ y todo 0-simplejo a de X si y solamente si, X es un objeto S_n-local de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$.

Demostración. Recordemos que si A y B son dos conjuntos simpliciales, el funtor realización geométrica $|\cdot|$ induce una biyección entre el conjunto de los morfismos $[A, B]_\infty$ de la categoría homotópica $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty^{-1}]$, y el conjunto $\big[|A|, |B|\big]_{\mathbf{Top}}$ de los morfismos en la categoría de fracciones $\mathbf{Top}\big[(\mathbf{W}_\infty^{top})^{-1}\big]$ (ver los Teoremas 2.4.19, 2.4.23 y 3.6.7

---

[3] Una categoría de modelos es llamada *combinatoria* si ella es localmente presentable y cofibrantemente generada. Ver la Definición 1.21 de [**Bar10**]

de [**Hov07**]). Por otro lado, ya que $|A|$ es un complejo celular, el conjunto $\big[|A|,|B|\big]_{\mathbf{Top}}$ es simplemente el conjunto de las clases de homotopía usuales de las funciones continuas de $|A|$ en $|B|$ (ver el Teorema 2.4.19 de [**Hov07**]).

En particular, si $\mathbb{D}^{m+1}$ denota al conjunto de los elementos $\overline{x} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tales que $\|\overline{x}\| \leq 1$ y consideramos $\mathbb{S}^m_{top}$ como el subconjunto de los $\overline{x} \in \mathbb{D}^{m+1}$ tales que $\|\overline{x}\| = 1$; la función:

$$[\Delta^{m+1}, X]_\infty \xrightarrow{(\alpha^m)^*} [\partial\Delta^{m+1}, X]_\infty \ , \tag{8.19}$$

se identifica con la función:

$$[\mathbb{D}^{m+1}, |X|] \longrightarrow [\mathbb{S}^m_{top}, |X|] \ , \tag{8.20}$$

inducida por la inclusión $\mathbb{S}^m_{top} \hookrightarrow \mathbb{D}^{m+1}$ donde $\big[\ ,\ \big]$ denota al conjunto de las clases de homotopía usuales de las funciones continuas.

Por otro lado, es fácil convencerse que (8.20) siempre es una función inyectiva cuya imagen son las clases de homotopía de las funciones $\mathbb{S}^m_{top} \hookrightarrow |X|$ que admiten una extensión a lo largo de la inclusión $\mathbb{S}^m_{top} \hookrightarrow \mathbb{D}^{m+1}$. Consideremos dos casos:

Caso $m \geq 1$: Sabemos que si f es una función continua de $\mathbb{S}^m_{top}$ en un espacio topológico cualquiera A, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (I) f representa al elemento cero del grupo $\pi_m(A, w)$ donde $w = f(1, 0, \dots, 0) \in A$.
- (II) f admite una extensión a lo largo de la inclusión $\mathbb{S}^m_{top} \hookrightarrow \mathbb{D}^{m+1}$.

Por lo tanto, si $m \geq 1$ la función (8.19) es biyectiva si y solamente si la función inyectiva (8.20) es sobreyectiva, si y solamente si toda función continua f: $\mathbb{S}^m_{top} \hookrightarrow |X|$ representa al elemento cero del grupo $\pi_m(|X|, w)$ donde $w = f(1, 0, \dots, 0) \in |X|$, si y solamente si $\pi_m(X, a) = \pi_m(|X|, a) = 0$ para todo 0-simplejo $a \in X$.

Caso $m \geq 0$: Notemos que en este caso los siguientes enunciados son equivalentes:

- (I) La imagen de f está contenida en una misma componente por trayectorias del espacio topológico A.
- (II) f admite una extensión a lo largo de la inclusión $\mathbb{S}^0_{top} \hookrightarrow \mathbb{D}^1$.

Entonces, en este caso la función (8.19) es biyectiva si y solamente si la función inyectiva (8.20) es sobreyectiva, si y solamente si la imagen de toda función continua f: $\mathbb{S}^0_{top} \hookrightarrow |X|$ está contenida en un mismo componente por trayectorias de $|X|$, si y solamente si $\pi_0(X) = \pi_m(|X|) = 0$. □

Mostremos:

LEMA 8.4.4. *Si* $-1 \leq n \leq \infty$ *y* f: $X \longrightarrow Y$ *es un morphismo de conjuntos simpliciales, entonces* f *es una* n*-equivalencia débil de conjuntos simpliciales si y solamente* *si, f es una equivalencia débil S_n-local de* $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$*, es decir f cumple que para todo conjunto simplicial S_n-local Z (ver el Lema 8.4.3 de arriba) la función:*

$$[Y,Z]_\infty \xrightarrow{f^*} [X,Z]_\infty\,,$$

en la categoría homotópica $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty^{-1}]$ *es biyectiva.*

Demostración. *Caso $n = -1$:* Recordemos que todo morfismo de **sSet** es una (-1)-equivalencia débil. Por otro lado, si Z es un conjunto simplicial S_{-1}-local se sigue del Lema 8.4.3 que el morfismo canónico $Z \longrightarrow \star$ es una ∞-equivalencia débil. En particular $f^*\colon [Y,Z]_\infty \longrightarrow [X,Z]_\infty$ es una biyección entre conjuntos con un único elemento, para todo morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ de conjuntos simpliciales.

Caso $n \geq 0$: En la prueba usaremos algunas propiedades del coesqueleto de un conjunto simplicial que mostraremos en §12 más abajo. Recordemos para empezar que la transformación natural de funtores:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \longrightarrow [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\infty$$

definida por el funtor canónico $\mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty{}^{-1}]$, induce una biyección de conjuntos:

$$\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(A,B)\big) \cong [A,B]_\infty$$

para todo conjunto simplicial A y todo complejo de Kan B. En efecto si A es un conjunto simplicial arbitrario, entonces:

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[rr, "\mathrm{id}+\mathrm{id}"] \arrow[dr, "i_0+i_1"'] & & A \\ & A \times \Delta^1 \arrow[ur, "\sim", "\mathrm{proj}"'] & \end{tikzcd}$$

es un objeto cilíndro de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$, donde los morfismos i_0 y i_1 son por definición las composiciones:

$$A \cong A \times \Delta^0 \xrightarrow{A\times\delta_0} A \times \Delta^1 \qquad \text{y} \qquad A \cong A \times \Delta^0 \xrightarrow{A\times\delta_1} A \times \Delta^1\,,$$

respectivamente.

Consideremos ahora un morfismo de conjuntos simpliciales $f\colon X \longrightarrow Y$ y un conjunto simplicial arbitrario Z. Se sigue entonces que si tomamos remplazos fibrantes de f y Z en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$, es decir un cuadrado conmutativo y una flecha:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] & & Z \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' & \text{y} & Z' \end{tikzcd}\,,$$

donde los morfismos verticales son ∞-equivalencias débiles cuyo codominio es un complejo de Kan; entonces la función:

$$[Y,Z]_\infty \xrightarrow{f^*} [X,Z]_\infty\,, \tag{8.21}$$

entre conjuntos de morfismos de la categoría $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty{}^{-1}]$, se identifican con la función:

$$\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(Y',Z'\big)\Big) \xrightarrow{(f')^*} \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X',Z'\big)\Big)\ . \tag{8.22}$$

Si Z es un conjunto simplicial S_n-local, se sigue del Lema 8.4.3 y del Corolario 12.1.2 de §12 que el morfismo $Z' \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(Z')$ inducido de una unidad arbitraria de la adjunción $\tau_{n+1\,*} \dashv \tau_{n+1}^*$ es una ∞-equivalencia débil entre complejos de Kan. Por lo tanto, (8.22) se identifica con la función:

$$\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(Y',\mathbf{csq}_{n+1}(Z')\big)\Big) \xrightarrow{(f')^*} \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X',\mathbf{csq}_{n+1}(Z')\big)\Big),$$

que de acuerdo al Lema 12.1.3 se identifica con la función:

$$\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1}(Y'),\mathbf{csq}_{n+1}(Z')\big)\Big) \xrightarrow{\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*} \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1}(X'),\mathbf{csq}_{n+1}(Z')\big)\Big)\ . \tag{8.23}$$

Si f es una n-equivalencia débil, se sigue del Corolario 12.1.2 que $\mathbf{csq}_{n+1}(f')$ es una ∞-equivalencia débil, es decir (8.23) es una función biyectiva. Por lo tanto, si f es una n-equivalencia débil la función (8.21) es biyectiva para todo conjunto simplicial S_n-local Z, es decir f es una equivalencia débil S_n-local.

Sea ahora $f\colon\ X \longrightarrow Y$ una equivalencia débil S_n-local, y consideremos un remplazo fibrante de f en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet},\mathbf{W}_\infty,\mathbf{mono},\mathbf{fib}_\infty)$, es decir consideremos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y', \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son ∞-equivalencias débiles de codominio un complejo de Kan.

Observemos para empezar que de acuerdo al Corolario 12.1.2 y al Lema 8.4.3 los conjuntos simpliciales $\mathbf{csq}_{n+1}X'$ y $\mathbf{csq}_{n+1}Y'$ son S_n-locales; en particular la siguiente función es biyectiva:

$$\begin{tikzcd} {[Y,\mathbf{csq}_{n+1}X']_\infty} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & {[X,\mathbf{csq}_{n+1}X']_\infty} \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(Y',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[r, "(f')^*"'] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \end{tikzcd} \ . \tag{8.24}$$

Por otro lado, gracias al Lema 12.1.3 la función biyectiva (8.24) se identifica con la función:

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[r, "\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\big[\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big]_\infty \arrow[r, "\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*"'] & \big[\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big]_\infty
\end{tikzcd} \quad . \tag{8.25}$$

Sea $g:\ \mathbf{csq}_{n+1}Y' \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}X'$ un morfismo de la categoría de fracciones $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty^{-1}]$, tal que la composición $g\circ\mathbf{csq}_{n+1}(f')$ sea el morfismo identidad del objeto $\mathbf{csq}_{n+1}X'$ en la categoría homotópica.

Se verifica entonces que la composición:

$$[\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty \xrightarrow{g^*} [\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty \xrightarrow{\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*} [\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty\,,$$

es igual a la función identidad; por lo tanto la composición:

$$[\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty \xrightarrow{\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*} [\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty \xrightarrow{g^*} [\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty\,,$$

también es igual a la función identidad, pues la siguiente flecha:

$$[\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty \xrightarrow{\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*} [\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty\,,$$

es biyectiva.

Entonces $g\circ\mathbf{csq}_{n+1}(f')$ y $\mathbf{csq}_{n+1}(f')\circ g$ son morfismos identidad de la categoría $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_\infty^{-1}]$. Dicho de otro modo, $\mathbf{csq}_{n+1}(f')$ es una ∞-equivalencia débil. En particular, f es una n-equivalencia débil por el Corolario 12.1.2. ☐

Se sigue del Teorema 4.7 de [**Bar10**] y los Lemas 8.4.3 y 8.4.4 que venimos de mostrar, que $(\mathbf{sSet},\mathbf{W}_n,\mathbf{mono},\mathbf{fib}_n)$ es una categoría de modelos propia izquierda y combinatoria cuyos objetos fibrantes son los complejos de Kan X tales que $\pi_m(X,a)=0$ para toda $m\geq n+1$ y todo 0-simplejo a de X. ☐

Notemos también:

Lema 8.4.5. *La categoría cartesiana cerrada de los conjuntos simpliciales* $\mathbf{sSet}$ *con la estructura de categoría de modelos* $(\mathbf{sSet},\mathbf{W}_n,\mathbf{mono},\mathbf{fib}_n)$ *del Teorema 8.4.2 es una categoría de modelos monoidal simétrica en el sentido de* [**Hov07**] (*ver la Definición 4.2.6 de* [**Hov07**] *o la Definición 1.27 de* [**Bar10**]).

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a las Definiciones 4.2.1 y 4.2.6 de [**Hov07**], basta demostrar que si $j\colon X \longrightarrow Y$ y $q\colon Z \longrightarrow W$ son monomorfismos de conjuntos simpliciales, entonces el morfismo φ en un diagrama suma amalgamada:

$$\begin{tikzcd}
Z\otimes X \arrow[r, "q\otimes X"] \arrow[d, "Z\otimes j"'] & W\otimes X \arrow[d, "\widetilde{Z\otimes j}"] \arrow[rdd, bend left, "W\otimes j"] & \\
Z\otimes Y \arrow[r, "\widetilde{q\otimes X}"] \arrow[rrd, bend right, "q\otimes Y"'] & Z\otimes Y \coprod_{Z\otimes X} W\otimes X \arrow[rd, dashed, "\varphi"] & \\
& & W\otimes Y\,,
\end{tikzcd} \tag{8.26}$$

es un monomorfismo **sSet**, el cual es también una n-equivalencia débil si suponemos además que j o q es una n-equivalencia débil.

Ya que el funtor $\otimes$ es en este caso el producto cartesiano argumento por argumento, se sigue que para cualesquiera $j\colon X \longrightarrow Y$ y $q\colon Z \longrightarrow W$ monomorfismos de conjuntos simpliciales, los morfismos $Z\otimes j$, $W\otimes j$, $q\otimes X$ y $q\otimes Y$ en el diagrama (8.26) también son monomorfismos. En particular, los morfismos $\widetilde{Z\otimes j}$ y $\widetilde{q\otimes X}$ son monomorfismos; y por lo tanto, φ también es un monomorfismo (es suficiente con verificar esta afirmación para la categoría de los conjuntos).

Por último, si suponemos que el monomorfismo j (resp. q) es además una n-equivalencia débil; ya que los funtores π_i conmutan con productos finitos, los morfismos $Z\otimes j$ y $W\otimes j$ (resp. $q\otimes X$ y $q\otimes Y$) son también monomorfismos y n-equivalencias débiles. En particular, $\widetilde{Z\otimes j}$ (resp. $\widetilde{q\otimes X}$) es un monomorfismo y una n-equivalencia débil, pues la familia de morfismos $\mathbf{mono}\cap\mathbf{W}_n$ es estable por cocambio de base (válido para las cofibraciones triviales de cualquier categoría de modelos). Por lo tanto, φ es un n-equivalencia débil pues $\mathbf{W}_n$ satisface la propiedad 2-de-3. ☐

§8.4.1. Escribimos $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$ para denotar a la *categoría de los n-tipos de homotopía*, es decir a la categoría homotópica $\mathbf{sSet}[\mathbf{W}_n^{-1}]$ de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ la categoría de modelos del Teorema 8.4.2, y denotamos como $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_n$ al conjunto de los morfismos en la categoría $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$. Si X es un conjunto simplicial, la clase de equivalencia asociada a X en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de $\mathrm{Ho}_n\big(\,\mathbf{sSet}\,\big)$, es llamada el *$n$-tipo de homotopía de X*.

Se sigue del Lema 8.4.5 que la categoría de los n-típos de homotopía $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$ es una categoría cartesiana cerrada (ver el Lema 5.1.1 de arriba y §4.3 de [**Hov07**]), cuyo objeto de morfismos (el "**hom**" interno) es el complejo de funciones derivado $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}$ (definido por medio de la localización simplicial de [**DK80a, DK80c, DK80b**], o construido a partir de resoluciones fibrantes y cofibrantes como en §5.4 de [**Hov07**] o el Capítulo 18 de [**Hir03**]).

La categoría de los n-típos de homotopía con dicha estructura de categoría cartesiana cerrada es llamada algunas veces la *categoría homotópica de los n-grupoides.*

Ya que $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ es una categoría de modelos donde todos sus objetos son cofibrantes, es posible construir a la categoría homotópica de los n-grupoides de la siguiente manera: Llamamos a X un conjunto simplicial *n-fibrante* si X es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ del Teorema 8.4.2, es decir X es n-fibrante si y solamente si X es un complejo de Kan tal que $\pi_m(X, a) = 0$ para todo $m \geq n + 1$ y todo 0-simplejo a de X.

Si escribimos $\mathbf{Fib}^n$ para denotar a la subcategoría plena de $\mathbf{sSet}$ cuyos objetos son los conjuntos simpliciales n-fibrantes, se tiene:

Lema 8.4.6. *Sea $-1 \leq n \leq \infty$. Si X y Y son conjuntos simpliciales n-fibrantes, el producto cartesian oargumento por argumento $X \times Y$ y el conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X, Y)$ son conjuntos simpliciales n-fibrantes. Dicho de otro modo, la categoría $\mathbf{Fib}^n$ es una subcategoría cartesiana cerrada de $\mathbf{sSet}$.*

Demostración. El producto de dos conjuntos simpliciales n-fibrantes es un conjunto simplicial n-fibrante, porque la familia de los objetos fibrantes en una categoría de modelos siempre es estable por productos.

Por otro lado, si X y Y son objetos fibrantes de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ (que es una categoría de modelos donde todos los objetos son cofibrantes), se deduce del Lema 8.4.5 (ver por ejemplo el Lema 4.2.2 de [**Hov07**]) que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, Y\big)$ también es un objeto fibrante, es decir un conjunto simplicial n-fibrante. ☐

Definimos la categoría homotópica $h\mathbf{Fib}^n$ de la categoría $\mathbf{Fib}^n$ de los conjuntos simpliciales n-fibrantes como la categoría cuyos objetos son los conjuntos simpliciales n-fibrantes y el conjunto de los morfismos es el conjunto de las componentes por trayectorias $\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big)$. Se sigue inmediatamente que el funtor inclusion de $\mathbf{Fib}^n$ en $\mathbf{sSet}$ induce una equivalencia de categorías entre $h\mathbf{Fib}^n$ y la categoría de los n-tipos de homotopía $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$.

Observemos por último que en la categoría cartesiana cerrada $h\mathbf{Fib}^n$ el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}$ es el objeto de los morfismos (es decir el "**hom**" interno), mientras que en la categoría cartesiana cerrada de los n-tipos de homotopía $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$ el objeto de los morfismos es el complejo de funciones derivado $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}$.

§8.5. Fijemos $\star$ un conjunto con un único objeto y denotemos también como $\star$ al conjunto simplicial constante de valor $\star$.

Escribimos $\mathbf{sSet}_\star$ para denotar a la categoría de los *conjuntos simpliciales punteados*, es decir la categoría de las parejas $X = (X, x)$, donde X es un conjunto simplicial y

$x:\ \star \longrightarrow X$ es un morfismo de conjuntos simpliciales del objetos final $\star$ en X. Un morfismo de (X,x) en (Y,y) es una flecha $f:\ X \longrightarrow Y$ de **sSet** tal que $fx = y$.

De manera equivalente, si $\mathbf{Set}_\star$ denota a la categoría de los *conjuntos punteados*, es decir la categoría de las parejas $X = (X,x)$, donde X es un conjunto y $x:\ \star \longrightarrow X$ es una función; la categoría $\mathbf{sSet}_\star$ es isomorfa a la categoría de los funtores de la categoría opuesta de los simplejos Δ^{op} en la categoría $\mathbf{Set}_\star$.

En todo caso, se verifica que el funtor canónico $\pi:\ \mathbf{sSet}_\star \longrightarrow \mathbf{sSet}$ definido por la regla $(X,x) \mapsto X$, admite un funtor adjunto izquierdo $(\ \cdot\ )_+:\ \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}_\star$, definido en un objeto A de **sSet** como la suma $A_+ = A \sqcup \star$, punteado por el morfismo inclusión canónica $\star \longrightarrow A \sqcup \star$.

Recordemos que la categoría $\mathbf{sSet}_\star$ admite una estructura de categoría monoidal simétrica cerrada, cuando el tensor es el *producto cuña* $\cdot \wedge \cdot$ definido en dos conjuntos simpliciales punteados $X = (X,x)$ y $Y = (Y,y)$, por un cuadrado cocartesiano en la categoría **sSet**:

(8.27)
$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r] & X \wedge Y \\
\big(X \times \star\big) \sqcup \big(\star \times Y\big) \arrow[u] \arrow[r] & X \times Y \arrow[u] .
\end{tikzcd}$$

La unidad del producto cuña es el conjunto simplicial constante con valores $\star_+ = \star \sqcup \star$, el isomorfismo de symetría es el inducido del isomorfismo canónico $X \times Y \cong Y \times X$ de conjuntos simpliciales, y el cotensor es definido por la fórmula:

(8.28)
$$\hom^{\wedge}_{\mathbf{sSet}_\star}(X,Y)_m = \Big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X \wedge \Delta^m_+, Y\big), y\Big) \qquad \text{si} \quad m \geq 0\,,$$

para cualesquiera $X = (X,x)$ y $Y = (Y,y)$ conjuntos simpliciales punteados.

COROLARIO 8.5.1. *Si $-1 \leq n \leq \infty$, la categoría de los conjuntos simpliciales punteados $\mathbf{sSet}_\star$ con la estructura de categoría monoidal simétrica cerrada definida por el porducto cuña, admite una estructura de categoría de modelos monoidal simétrica cuando:*

$$\begin{aligned}
\big\{\textit{equivalencias débiles}\big\} &= \big\{f:\ (X,x) \to (Y,y)\ \big|\ f:\ X \to Y\ \in \mathbf{W}_n\big\} = \pi^{-1}\mathbf{W}_n\,, \\
\big\{\textit{cofibraciones}\big\} &= \big\{\textit{monomorfismos}\big\} = \mathbf{mono} \\
\textit{y} \qquad \big\{\textit{fibrations}\big\} &= \big\{f:\ (X,x) \to (Y,y)\ \big|\ f:\ X \to Y\ \in \mathbf{fib}_n\big\} = \pi^{-1}\mathbf{fib}_n\,.
\end{aligned}$$

En particular,

(8.29)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet}_\star \arrow[r, bend right, "\pi = \textit{Funtor que olvida}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "(\,\cdot\,)_+"']
\end{tikzcd}$$

es una adjunción de Quillen.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.2.9 de [**Hov07**], esto es una consecuencia del Teorema 8.4.2 y el Lema 8.4.5 de arriba. ☐

Escribimos $\mathrm{Ho}_n\big(\,\mathbf{sSet}_\star\,\big)$ para denotar a la *categoría de los n-tipos de homotopía punteados*, es decir la categoría homotópica de $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$, y denotamos como $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_n^{\mathrm{pt}}$ al conjunto de los morfismos en $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_\star)$. Si X es un conjunto simplicial punteado, la clase asociada a X en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría $\mathrm{Ho}_n\big(\,\mathbf{sSet}_\star\,\big)$, es llamado el *$n$-tipo de homotopía punteado de X*.

§8.6. Si $m \geq 0$ definimos a la m-esfera simplicial $\mathbb{S}^m := \Delta^m/\partial\Delta^m$ por un cuadrado cocartesiano en **sSet**:

(8.30)
$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r, "\star"] & \mathbb{S}^m \\
\partial\Delta^m \arrow[u] \arrow[r, "\alpha^{m-1}"'] & \Delta^m \arrow[u]
\end{tikzcd}\ .$$

Sea X un conjunto simplicial y $a \in X_0$ un 0-simplejo de X. Del Lema de Yoneda y de la propiedad universal de los cuadrados cocartesianos, deducimos una biyección entre el conjunto X_m de los m-simplejos x de X con la propiedad:

$$\alpha_X^{m-1}(x) = \big(d_0x, \ldots, d_mx\big) = (a, \ldots, a) \in \underbrace{X_{m-1} \times \cdots \times X_{m-1}}_{m+1},$$

y el conjunto de los morfismos de conjuntos simpliciales:

(8.31)
$$\mathbb{S}^m \xrightarrow{\sigma^x} X \qquad \text{tales que} \qquad \sigma_0^x(\star) = a \in X_0\,.$$

Observemos que si fijamos una equivalencia homotópica de espacio topológicos:

$$\mathbb{S}^m_{top} \xrightarrow[\cong]{\Phi} \big|\mathbb{S}^m\big|$$

tal que $\Phi(1, 0, \ldots, 0) = \star$, obtenemos una función natural en X:

(8.32)
$$\begin{tikzcd}
\left\{ x \in X_m \,\middle|\, d_i(x) = a \quad 0 \leq i \leq m \right\} \arrow[r] & \pi_m(X, a) \\
x \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c}\text{La clase}\\ \text{de homotopía}\\ \text{punteada de } |\sigma^x| \circ \Phi.\end{array}
\end{tikzcd}\ .$$

PROPOSICIÓN 8.6.1. *Si $m \geq 0$ y X es un complejo de Kan, la función* (8.32) *es sobreyectiva e identifica dos elementos x e y de su dominio si y solamente si, existe $w \in X_{m+1}$ tal que $d_{m+1}w = x$, $d_mw = y$ y $d_iw = a$ para $0 \leq i \leq m-1$.*

DEMOSTRACIÓN. En este trabajo definimos $\pi_m(X,a)$ como el conjunto de las clases de homotopía punteada de las funciones continuas punteadas $\big(\mathbb{S}^m_{top},\star\big) \longrightarrow \big(|X|,a\big)$.

Ya que el espacio topológico $\mathbb{S}^m_{top}$ admite una estructura de complejo celular, el conjunto $\pi_m(X,a)$ se identifica con el conjunto de los morfismos $[(\mathbb{S}^m_{top},\star),(|X|,a)]_{\mathbf{Top}_*}$ de la categoría de fracciones $\mathbf{Top}_*\big[(\mathbf{W}^{top}_\infty)^{-1}\big]$ (ver el Corolario 2.4.20 y el Teorema 2.4.19 de [**Hov07**]). Por lo tanto, con ayuda de la equivalencia débil $\mathbb{S}^m_{top} \xrightarrow[\cong]{\Phi} \big|\mathbb{S}^m\big|$, obtenemos una biyección $[(|\mathbb{S}^m|,\star),(|X|,a)]_{\mathbf{Top}_*} \cong \pi_m(X,a)$.

Por otro lado recordemos que el funtor $|\cdot|$ determina una biyección entre el conjunto $[(|\mathbb{S}^m|,\star),(|X|,a)]_{\mathbf{Top}_*}$ y el conjunto de los morfismos $[(\mathbb{S}^m,\star),(X,a)]^{\mathrm{pt}}_\infty$ de la categoría homotópica $\mathbf{sSet}_\star[\mathbf{W}^{-1}_\infty]$ (ver el Teorema 3.6.7 y el Corolario 2.4.24 de [**Hov07**]).

Si X es un complejo de Kan, deducimos entonces una biyección:

$$\begin{tikzcd} \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((\mathbb{S}^m,\star),(X,a)\big)\Big) \arrow[r, "\cong"] & \pi_m(X,a)\,, \\ {[\sigma]} \arrow[r, mapsto] & {[|\sigma|\circ\Phi]} \end{tikzcd} \tag{8.33}$$

definida en la clase de un morfismo de conjuntos simpliciales $\sigma\colon \mathbb{S}^m \longrightarrow X$ tal que $\sigma_0(\star)=a$, como la clase de homotopía punteada del morfismo:

$$\mathbb{S}^m_{top} \xrightarrow[\cong]{\Phi} \big|\mathbb{S}^{m+1}\big| \xrightarrow{|\sigma|} |X| \ .$$

Obtenemos así un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((\mathbb{S}^m,\star),(X,a)\big)_0 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \Big\{x\in X_m \ \Big|\ d_i(x)=a \quad 0\le i\le m\Big\} \arrow[d, "(8.32)"] \\ \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((\mathbb{S}^m,\star),(X,a)\big)\Big) \arrow[r, "\cong", "(8.33)"'] & \pi_m(X,a)\,; \end{tikzcd} \tag{8.34}$$

en particular la función (8.32) es sobreyectiva.

Para mostrar la afirmación debemos verificar que si $x,y\colon \Delta^m \longrightarrow X$ son dos morfismos tales que las dos composiciones:

$$\partial\Delta^m \xrightarrow{\alpha^{m-1}} \Delta^m \xrightarrow{x} X \qquad \text{y} \qquad \partial\Delta^m \xrightarrow{\alpha^{m-1}} \Delta^m \xrightarrow{y} X$$

son iguales al morfismo constante $\partial\Delta^m \longrightarrow \star \xrightarrow{a} X$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) Existe un morfismo $H\colon \Delta^m\times\Delta^1 \longrightarrow X$ tal que:

$$\partial\Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{\alpha^{m-1}\times\Delta^1} \Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{H} X$$

es el morfismo constante $\partial\Delta^m \times \Delta^1 \longrightarrow \star \xrightarrow{a} X$ y:

(8.35)
$$\begin{tikzcd}
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[rr, "\mathrm{proj}", "\cong"'] \arrow[dr, "\Delta^m\times\delta_1"'] & & \Delta^m \arrow[dr, bend left, "x"] & \\
& \Delta^m \times \Delta^1 \arrow[rr, "H" description] & & X \\
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[rr, "\cong", "\mathrm{proj}"'] \arrow[ur, "\Delta^m\times\delta_0"] & & \Delta^m \arrow[ur, bend right, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos

(ii) Existe un morfismo $w\colon \Delta^{m+1} \longrightarrow X$ tal que la composición:

$$\Delta^m \xrightarrow{\delta_i} \Delta^{m+1} \xrightarrow{w} X$$

es igual a x si $i = m + 1$, igual a y si $i = m$ e igual al morfismo constante $\Delta^m \longrightarrow \star \xrightarrow{a} X$ si $0 \leq i \leq m - 1$.

Supongamos para empezar que se tiene un morfismo $H\colon \Delta^m \times \Delta^1 \longrightarrow X$ como en (i) de arriba. Para mostrar la existencia del morfismo $w\colon \Delta^{m+1} \longrightarrow X$ con las propiedades deseadas como en (ii), construimos primero un cuadrado conmutativo:

(8.36)
$$\begin{tikzcd}
(\Delta^{m+1} \times \Delta^0) \bigsqcup\limits_{(\partial\Delta^{m+1}\times\Delta^0)} (\partial\Delta^{m+1} \times \Delta^1) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d] \\
\Delta^{m+1} \times \Delta^1 \arrow[r] & \star ,
\end{tikzcd}$$

donde el conjunto simplicial $(\Delta^{m+1} \times \Delta^0) \bigsqcup\limits_{(\partial\Delta^{m+1}\times\Delta^0)} (\partial\Delta^{m+1} \times \Delta^1)$ es la suma amalgamada de los morfismos:

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[r, "\partial\Delta^{m+1}\times\delta_1"] \arrow[d, "\alpha^m\times\Delta^0"'] & \partial\Delta^{m+1} \times \Delta^1 , \\
\Delta^{m+1} \times \Delta^0 &
\end{tikzcd}$$

de la siguiente manera:

ϕ es deducido de la propiedad universal de los cuadrados cocartesianos a partir del cuadrado conmutativo:

(8.37)
$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[r, "\partial\Delta^{m+1}\times\delta_1"] \arrow[d, "\alpha^m\times\Delta^0"'] & \partial\Delta^{m+1} \times \Delta^1 \arrow[d, "\alpha^m\times\Delta^1"] \\
\Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[r, "\Delta^{m+1}\times\delta_1"'] & \Delta^{m+1} \times \Delta^1 .
\end{tikzcd}$$

y ψ a partir del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta^{m+1}\times\Delta^0 \arrow[r, "\partial\Delta^{m+1}\times\delta_1"] \arrow[d, "\alpha^m\times\Delta^0"'] & \partial\Delta^{m+1}\times\Delta^1 \arrow[d, "\psi_1"] \\
\Delta^{m+1}\times\Delta^0 \arrow[r, "\psi_2"'] & X\,;
\end{tikzcd} \tag{8.38}$$

donde ψ_2 es la composición $\Delta^{m+1}\times\Delta^0 \xrightarrow{\text{proj}} \Delta^{m+1} \xrightarrow{\sigma_m} \Delta^m \xrightarrow{x} X$.

Para definir ψ_1, vemos al conjunto simplicial $\partial\Delta^{m+1}\times\Delta^1$ como el conúcleo de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup\limits_{0\le i<j\le m+1}\left(\Delta^{m-1}\times\Delta^1\right) \arrow[r, shift left, "\bigsqcup\limits_{i<j}(\nu_i\circ\delta^{m-1}_{j-1}\times\Delta^1)"] \arrow[r, shift right, "\bigsqcup\limits_{i<j}(\nu_j\circ\delta^{m-1}_{i}\times\Delta^1)"'] & \bigsqcup\limits_{0\le l\le m+1}\left(\Delta^m\times\Delta^1\right)
\end{tikzcd} ,$$

donde ν_l es la inclusión de la l-ésima componente $\Delta^m \hookrightarrow \bigsqcup\limits_{0\le l\le m+1}\Delta^m$; entonces ψ_1 es inducido por el morfismo $\bigsqcup\limits_{l}\rho_l\colon \bigsqcup\limits_{0\le l\le m+1}\left(\Delta^m\times\Delta^1\right) \longrightarrow X$ donde ρ_l son definidos por las reglas:

$$\rho_0 = \cdots = \rho_{m-1} = \Big(\ \Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{a} X\ \Big)$$

$$\rho_m = \Big(\ \Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{H} X\ \Big) \qquad \text{y} \qquad \rho_{m+1} = \Big(\ \Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{\text{proj}} \Delta^m \xrightarrow{x} X\ \Big)$$

Verificamos que (8.38) es un cuadrado conmutativo, pues se tienen diagramas conmutativos para toda $0\le i\le m+1$:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^m\times\Delta^0 \arrow[r, "\Delta^m\times\delta_1"] \arrow[d, "\delta_i\times\Delta^0"'] & \Delta^m\times\Delta^1 \arrow[d, "\rho_i"] \\
\Delta^{m+1}\times\Delta^0 \arrow[r, "\psi_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ya que construimos los morfismos ϕ y ψ del cuadrado (8.36), observemos que ϕ es de hecho un monomorfismo y una ∞-equivalencia débil; en efecto, esto es una consecuencia del Lema 8.4.5 (ver el diagrama (8.26) en su prueba), pues en el diagrama (8.37) el monomorfismo $\delta_1\colon\ \Delta^0 \longrightarrow \Delta^1$ es una ∞-equivalencia débil.

En particular, como por hipótesis X es un complejo de Kan deducimos la existencia de un morfismo $\xi\colon\ \Delta^{m+1}\times\Delta^1 \longrightarrow X$ en un triángulo conmutativo:

(8.39)
$$\begin{tikzcd}
(\Delta^{m+1}\times\Delta^0)\coprod_{(\partial\Delta^{m+1}\times\Delta^0)}(\partial\Delta^{m+1}\times\Delta^1) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & X \\
\Delta^{m+1}\times\Delta^1 \arrow[ru, dashed, bend right, "\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Si definimos:

$$w = \Big(\ \Delta^{m+1} \xrightarrow[\cong]{\mathrm{proj}^{-1}} \Delta^{m+1}\times\Delta^0 \xrightarrow{\Delta^{m+1}\times\delta_0} \Delta^{m+1}\times\Delta^1 \xrightarrow{\xi} X\ \Big),$$

se sigue que la composición $w\circ d_i$ es igual al morfismo:

$$\Delta^m \xrightarrow[\cong]{\mathrm{proj}^{-1}} \Delta^m\times\Delta^0 \xrightarrow{\delta_i\times\delta_0} \Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{\xi} X\ ,$$

que de acuerdo al triángulo (8.39) es igual al siguiente morfismo:

$$\Delta^m \xrightarrow[\cong]{\mathrm{proj}^{-1}} \Delta^m\times\Delta^0 \xrightarrow{\Delta^m\times\delta_0} \Delta^m\times\Delta^1 \xrightarrow{\rho_i} X$$

para todo $0\le i\le m+1$.

De la definición de los morfismos ρ_i deducimos que $w\circ d_i = a$ si $0\le i\le m-1$, $w\circ d_m = y$ y $w\circ d_{m+1} = x$ como queríamos.

Recíprocamente supongamos que como en (ii) partimos de $w\colon\ \Delta^{m+1}\longrightarrow X$ un morfismo de conjuntos simpliciales tal que $w\circ d_i = a$ si $0\le i\le m-1$, $w\circ d_m = y$ y $w\circ d_{m+1} = x$. Para mostrar la existencia del morfismo $H\colon\ \Delta^m\times\Delta^1\longrightarrow X$ como en (i), consideremos para empezar un cuadrado conmutativo:

(8.40)
$$\begin{tikzcd}
(\Delta^{m+1}\times\partial\Delta^1)\coprod_{(\Lambda^{m+1,m}\times\partial\Delta^1)}(\Lambda^{m+1,m}\times\Delta^1) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d] \\
\Delta^{m+1}\times\Delta^1 \arrow[r] & \star
\end{tikzcd}$$
,

donde el conjunto simplicial $(\Delta^{m+1}\times\partial\Delta^1)\coprod_{(\Lambda^{m+1,m}\times\partial\Delta^1)}(\Lambda^{m+1,m}\times\Delta^1)$ es la suma amalgamada de los morfismos:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,m}\times\partial\Delta^1 \arrow[r, "\Lambda^{m+1,m}\times\alpha^0"] \arrow[d, "\alpha^{m,m}\times\partial\Delta^1"'] & \Lambda^{m+1,m}\times\Delta^1 \\
\Delta^{m+1}\times\partial\Delta^1 &
\end{tikzcd}$$

El morfismo ϕ de (8.40) se deduce del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,m} \times \partial\Delta^1 \arrow[r, "\Lambda^{m+1,m}\times\alpha^0"] \arrow[d, "\alpha^{m,m}\times\partial\Delta^1"'] & \Lambda^{m+1,m} \times \Delta^1 \arrow[d, "\alpha^{m,m}\times\Delta^1"] \\
\Delta^{m+1} \times \partial\Delta^1 \arrow[r, "\Delta^{m+1}\times\alpha^0"'] & \Delta^{m+1} \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

y el morfismo ψ del cuadrado:

(8.41)
$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,m} \times \partial\Delta^1 \arrow[r, "\Lambda^{m+1,m}\times\alpha^0"] \arrow[d, "\alpha^{m,m}\times\partial\Delta^1"'] & \Lambda^{m+1,m} \times \Delta^1 \arrow[d, "\psi_1"] \\
\Delta^{m+1} \times \partial\Delta^1 \arrow[r, "\psi_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

que definimos como sigue: Para definir ψ_2 observamos que se tiene un cuadrado cocartesiano:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[d, "\Delta^{m+1}\times\overline{\delta_1}"] \\
\Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[r, "\Delta^{m+1}\times\overline{\delta_0}"'] & \Delta^{m+1} \times \partial\Delta^1
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{\delta_i}$ es el único morfismo de conjuntos simpliciales tal que:

$$\Big(\Delta^0 \xrightarrow{\delta_i} \Delta^1 \Big) = \Big(\Delta^0 \xrightarrow{\overline{\delta_i}} \partial\Delta^1 \xrightarrow{\alpha^0} \Delta^1 \Big);$$

entonces ψ_2 es el morfismo inducido por el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[rr] \arrow[ddd] & & \Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\
& & \Delta^{m+1} \arrow[d, "\sigma_m"] \\
& & \Delta^m \arrow[d, "x"] \\
\Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{proj}"'] & \Delta^{m+1} \arrow[r, "w"'] & X
\end{tikzcd}$$

El morfismo ψ_1 es definido viendo al conjunto simplicial $\Lambda^{m+1,m}\times\Delta^1$ como el conúcleo de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\bigsqcup_{\substack{0\leq i<j\leq m+1 \\ i,j\neq m}} \big(\Delta^{m-1} \times \Delta^1\big) \arrow[r, shift left, "\sqcup_{i<j} (\nu_i\circ\delta_{j-1}^{m-1}\times\Delta^1)"] \arrow[r, shift right, "\sqcup_{i<j} (\nu_j\circ\delta_{i}^{m-1}\times\Delta^1)"'] & \displaystyle\bigsqcup_{\substack{0\leq l\leq m+1 \\ l\neq m}} \big(\Delta^{m} \times \Delta^1\big)
\end{tikzcd} ,$$

donde ν_l denota la inclusión de la l-ésima componente $\Delta^m \hookrightarrow \bigsqcup\limits_{\substack{0\le l\le m+1\\ l\neq m}} \Delta^m$; entonces ψ_1 es definido como el morfismo inducido de $\sqcup_l \tau_l$: $\bigsqcup\limits_{\substack{0\le l\le m+1\\ l\neq m}} \big(\Delta^m \times \Delta^1\big) \longrightarrow X$ donde las τ_l son definidas por las reglas:

$$\tau_0 = \cdots = \tau_{m-1} = \Big(\, \Delta^m \times \Delta^1 \xrightarrow{a} X \,\Big) \qquad \text{y} \qquad \tau_{m+1} = \Big(\, \Delta^m \times \Delta^1 \xrightarrow{\text{proj}} \Delta^m \xrightarrow{x} X \,\Big).$$

Para mostrar que el cuadrado (8.41) es conmutativo, es suficiente observar que se tienen diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[r, "\delta_i \times \Delta^0"] \arrow[d, "\Delta^m \times \delta_1"'] & \Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[d, "x \circ \sigma_m \circ \text{proj}"] \\
\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "\tau_i"'] & X
\end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd}
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[r, "\delta_i \times \Delta^0"] \arrow[d, "\Delta^m \times \delta_0"'] & \Delta^{m+1} \times \Delta^0 \arrow[d, "w \circ \text{proj}"] \\
\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "\tau_i"'] & X
\end{tikzcd}$$

siempre que $0 \le i \le m+1$ con $i \neq m$.

Después de haber definido los morfismos ϕ y ψ del cuadrado (8.40), notemos que ϕ es un monomorfismo y una ∞-equivalencia débil. Por lo tanto, ya que X es un complejo de Kan existe un morfismo ξ: $\Delta^{m+1} \times \Delta^1 \longrightarrow X$ como en el triángulo conmutativo:

(8.42)
$$\begin{tikzcd}
(\Delta^{m+1} \times \partial\Delta^1) \bigsqcup\limits_{(\Lambda^{m+1,m} \times \Delta^1)} (\Lambda^{m+1,m} \times \Delta^1) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & X \\
\Delta^{m+1} \times \Delta^1 \arrow[ur, dashed, bend right, "\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos $H = \Big(\, \Delta^m \times \Delta^1 \xrightarrow{\delta_m \times \Delta^1} \Delta^{m+1} \times \Delta^1 \xrightarrow{\xi} X \,\Big)$. Para mostrar que la composición:

$$\partial\Delta^m \times \Delta^1 \xrightarrow{\alpha^{m-1} \times \Delta^1} \Delta^m \times \Delta^1 \xrightarrow{H} X$$

es el morfismo constante de valor a, es suficiente mostrar que la composición:

$$\Delta^{m-1} \times \Delta^1 \xrightarrow{(\delta_m \circ \delta_i) \times \Delta^1} \Delta^{m+1} \times \Delta^1 \xrightarrow{\xi} X \tag{8.43}$$

es el morfismo contante de valor a para todo $0 \le i \le m$. Pero del diagrama conmutativo (8.42) deducimos que la composición (8.43) es igual al morfismo:

$$\Delta^{m-1} \times \Delta^1 \xrightarrow{\delta_{m,i} \times \Delta^1} \Lambda^{m+1,m} \times \Delta^1 \xrightarrow{\psi_1} X$$

donde $\delta_{m,i}$ es el único morfismo en el triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Lambda^{m+1,m} \arrow[d, "\alpha^{m,m}"] \\
\Delta^{m-1} \arrow[r, "\delta_i"'] \arrow[rru, dashed, "\delta_{m,i}"] & \Delta^m \arrow[r, "\delta_m"'] & \Delta^{m+1};
\end{tikzcd}$$

por lo que (8.43) es el morfismo constante de valor a, pues:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{m-1} \times \Delta^1 \arrow[r, "\delta_j \times \Delta^1"] & \Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "\tau_i"] & X
\end{tikzcd}$$

es constante para toda $0 \le i, j \le m$.

Finalmente para mostrar que se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{proj}"] \arrow[dr, "\Delta^m \times \delta_1"'] & \Delta^m \arrow[dr, bend left, "x"] & \\
 & \Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "H"] & X, \\
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{proj}"] \arrow[ur, "\Delta^m \times \delta_0"] & \Delta^m \arrow[ur, bend right, "y"'] &
\end{tikzcd} \tag{8.44}$$

observemos que por el triángulo conmutativo (8.42) se tienen cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{proj}"] \arrow[d, "\Delta^m \times \delta_0"'] & \Delta^m \arrow[d, "w \circ \delta_m = y"] \\
\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "H"'] & X
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}
\Delta^m \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{proj}"] \arrow[d, "\Delta^m \times \delta_1"'] & \Delta^m \arrow[d, "x \circ \sigma_m \circ \delta_m = x"] \\
\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "H"'] & X.
\end{tikzcd}$$

□

Recordemos finalmente:

PROPOSICIÓN 8.6.2. *Sea X un complejo de Kan. Si $x, y, w \in X_m$ son m-simplejos de X tales que $\alpha_X^m(x) = \alpha_X^m(y) = \alpha_X^m(w) = (a, \dots, a)$; entonces, $\overline{\alpha}(x)\,\overline{\alpha}(y) = \overline{\alpha}(w)$ en el grupo $\pi_m(X, a)$ (donde $\overline{\alpha}$ es la función* (8.32) *de arriba) si y solamente si, existe $z \in X_{m+1}$ tal que $d_{m+1}z = x$, $d_m z = w$, $d_{m-1}z = y$ y $d_i z = a$ para $0 \le i \le m-2$.*

9. Categorías de modelos simpliciales de orden n

§9.1. Si $-1 \le n \le \infty$, una categoría de modelos $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}})$ enriquecida en la categoría de modelos monoidal simétrica $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n, \times)$ del Lema 8.4.5 es llamada una *categoría de modelos simplicial de orden n*.

De manera explicita (ver §4.2 de [**Hov07**]), una categoría de modelos simplicial de orden n es una categoría $\mathcal{C}$, con una estructura de categoría de modelos $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib})$

y un enriquecimiento en la categoría cartesiana cerrada de los conjuntos simpliciales **sSet** (ver [**Kel82**]):

$$\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C} \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet}\ ,$$

que cumple las siguientes propiedades:

CMS1. El enriquecimiento admite un tensor y un cotensor, es decir si X y Y son objetos arbitrarios de $\mathcal{C}$, se tienen adjunciones:

$$(9.1)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\otimes\cdot"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,. \arrow[l, bend right, "Y^{\cdot}"'] \end{tikzcd}$$

CMS2$_n^{\otimes}$. Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y $q\colon X \longrightarrow Y$ es una cofibración de $\mathcal{C}$, entonces el morfismo φ en el siguiente diagrama suma amalgamada:

$$(9.2)\qquad \begin{tikzcd} X\otimes A \arrow[r, "q\otimes A"] \arrow[d, "X\otimes j"'] & Y\otimes A \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "Y\otimes j"] & \\ X\otimes B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "q\otimes B"'] & X\otimes B \coprod\limits_{X\otimes A} Y\otimes A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ & & Y\otimes B\,, \end{tikzcd}$$

es una cofibración de $\mathcal{C}$, la cual es también una equivalencia débil si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si q es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Se verifica sin dificultad que **CMS2$_n^{\otimes}$** es equivalente a cada una de las siguientes propiedades:

CMS2$_n^{\mathrm{co}\otimes}$. Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y $p\colon X \longrightarrow Y$ es una fibración de $\mathcal{C}$, entonces el morfismo ψ en el siguiente diagrama producto fibrado:

$$(9.3)\qquad \begin{tikzcd} X^B \arrow[dr, dashed, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "p^B"] \arrow[ddr, bend right, "X^j"'] & & \\ & X^A \times\limits_{Y^A} Y^B \arrow[r] \arrow[d] & Y^B \arrow[d, "Y^j"] \\ & X^A \arrow[r, "p^A"'] & Y^A \end{tikzcd}$$

es una fibración de $\mathcal{C}$, la cual es también una equivalencia débil si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si p es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

CMS2$_n^{\mathrm{Hom}}$. Si $j\colon Z \longrightarrow W$ es una cofibración de $\mathcal{C}$ y $p\colon X \longrightarrow Y$ una fibración, entonces el morfismo ψ en el siguiente diagrama producto fibrado:

(9.4)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(W,X) \arrow[dr, dashed, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "p_*"] \arrow[ddr, bend right, "j^*"'] & & \\
& \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,X) \underset{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,Y)}{\times} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(W,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(W,Y) \arrow[d, "j^*"] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,X) \arrow[r, "p_*"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,Y)
\end{tikzcd}$$

es una fibración de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n, \times)$, la cual es también una n-equivalencia débil si j o p es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Deducimos fácilmente:

Lema 9.1.1. *Sea $-1 \leq n \leq \infty$ y $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial de orden n. Entonces se cumple:*

(i) *Si $q\colon X \longrightarrow Y$ es una cofibración (resp. cofibración trivial) de $\mathcal{C}$, entonces $q \otimes A\colon X \otimes A \longrightarrow Y \otimes A$ es una cofibración (resp. cofibración trivial) de $\mathcal{C}$ para todo conjunto simplicial A*

(ii) *Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo (resp. un monomorfismo y una n-equivalencia débil) de conjuntos simpliciales y X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$, entonces $X \otimes j\colon X \otimes A \longrightarrow X \otimes B$ es una cofibración (resp. cofibración trivial) de $\mathcal{C}$.*

(iii) *Si $p\colon X \longrightarrow Y$ es un fibración (resp. una fibración trivial) de $\mathcal{C}$, entonces $p^A\colon X^A \longrightarrow Y^A$ es una fibración (resp. fibración trivial) de $\mathcal{C}$ para todo conjunto simplicial A.*

(iv) *Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo (resp. un monomorfismo y una n-equivalencia débil) de conjuntos simpliciales y X es un objeto fibrante de $\mathcal{C}$, entonces $X^j\colon X^B \longrightarrow X^A$ es una fibración (resp. fibración trivial) de $\mathcal{C}$.*

(v) *Si $q\colon Z \longrightarrow W$ es una cofibración (resp. cofibración trivial) de $\mathcal{C}$ y X es un objeto fibrante de $\mathcal{C}$, entonces $q^*\colon \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(W,X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,X)$ es una fibración (resp. fibración trivial) de $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$.*

(vi) *Si* $j\colon X \longrightarrow Y$ *es un fibración (resp. una fibración trivial) de* $\mathcal{C}$ *y* Z *es un objeto cofibrante de* $\mathcal{C}$*, entonces* $j^*\colon \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ *es una fibración (resp. fibración trivial) de* $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$.

En particular, si X *es un objeto cofibrante de* $\mathcal{C}$*,* Y *es un objeto fibrante de* $\mathcal{C}$ *y* A *es cualquier conjunto simplicial, entonces* $X \otimes A$ *es un objeto cofibrante de* $\mathcal{C}$*,* Y^A *es un objeto fibrante de* $\mathcal{C}$ *y el conjunto simplicial* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *es un objeto fibrante de la categoría de modelos* $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ *del Teorema 8.4.2.*

§9.1.1. Notemos que si $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}})$ es una categoría de modelos simplicial de orden n y denotamos como $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{C}}$ al conjunto de los morfismos en la categoría de fracciones $\mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]$, la transformación natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \longrightarrow [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{C}}$ induce una biyección:

$$\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big) \cong \big[X,Y\big]_{\mathcal{C}}$$

para cualquier objeto cofibrante X de $\mathcal{C}$ y cualquier objeto fibrante Y de $\mathcal{C}$.

En efecto, se sigue del Lema 9.1.1 que si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ entonces:

$$\begin{tikzcd}
X \sqcup X \arrow[rr, "\mathrm{id}+\mathrm{id}"] \arrow[dr, tail, "i_0+i_1"'] & & X \\
& X \otimes \Delta^1 \arrow[ur, "\sim", "p"'] &
\end{tikzcd}$$

es un objeto cilindro de la categoría de modelos $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib})$, donde p es la equivalencia débil:

$$X \otimes \Delta^1 \xrightarrow{X\otimes\sigma_0} X \otimes \Delta^0 \cong X$$

y las cofibraciones i_0 y i_1 son respectivamente las siguientes composiciones:

$$X \cong X \otimes \Delta^0 \xrightarrow{X\otimes\delta_0} X \otimes \Delta^1 \qquad \text{y} \qquad X \cong X \otimes \Delta^0 \xrightarrow{X\otimes\delta_1} X \otimes \Delta^1 \ .$$

Más aún si $-1 \leq n \leq m \leq \infty$ entonces la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$ implica la propiedad $\mathbf{CMS2}_m^{\otimes}$, pues en este caso $\mathbf{W}_\infty \subseteq \mathbf{W}_m \subseteq \mathbf{W}_n \subseteq \mathbf{W}_{-1}$. Por lo tanto:

Lema 9.1.2. *Si* $-1 \leq n \leq m \leq \infty$ *y* $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}})$ *es una categoría de modelos simplicial de orden* n*, entonces* $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}})$ *también es una categoría de modelos simplicial de orden* m*.*

En particular, si X *est un objeto cofibrante de* $\mathcal{C}$ *y* Y *es un objeto fibrante, el tipo de homotopía del conjunto simplicial* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$*, es igual al* complejo de fonciones derivado $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *definido por la localisación simplicial* $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbf{W})$ *de* [**DK80a, DK80c, DK80b**]*, o construido a partir de resoluciones fibrantes y cofibrantes como en §5.4 de* [**Hov07**] *o el capítulo 18 de* [**Hir03**].

Demostración. Ver el Corolario 4.7 de §4.3 en [**DK80b**]. ☐

§9.1.2. Sea $n \geq -1$ un número entero y $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial de orden ∞. Notemos que si $\mathcal{C}$ cumple la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$, o equivalentemente la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\mathrm{Hom}}$; es decir si $\mathcal{C}$ es de hecho una categoría de modelos simplicial de orden n, deducimos del Lema 9.1.1 la siguiente propiedad:

> Para todo objeto cofibrante X de $\mathcal{C}$ y todo objeto fibrante Y, el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ del Teorema 8.4.2; es decir $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un complejo de Kan tal que $\pi_k\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y), f\big) = 0$ para toda $k \geq n+1$ y todo morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$. En particular, por el Lema 9.1.2 se tiene que $\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), f\big) = 0$ para todo morfismo $f\colon Z \longrightarrow W$ de $\mathcal{C}$ y todo número natural $k \geq n+1$.

Mostremos un inverso parcial (ver también el Corolario 9.1.4):

PROPOSICIÓN 9.1.3. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos simplicial de orden ∞ y $n \geq -1$ es un número entero, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *Si $k \geq n+1$ es un número natural y $f\colon Z \longrightarrow W$ es un morfismo arbitrario de $\mathcal{C}$, se tiene que $\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), f\big) = 0$.*

(II) *Si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y Y es un objeto fibrante, el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ del Teorema 8.4.2.*

(III) *El morfismo $X \otimes j\colon X \otimes A \longrightarrow X \otimes B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y $j\colon A \longrightarrow B$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales.*

(IV) *Si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$, $q\colon X \longrightarrow Y$ es una cofibración de $\mathcal{C}$ y $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo y una n-equivalencia de conjuntos simpliciales, entonces la cofibración $\varphi\colon X \otimes B \coprod_{X \otimes A} Y \otimes A \longrightarrow Y \otimes B$ del diagrama* (9.2) *es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.*

(V) *El morfismo $X \otimes a_0\colon X \otimes \star \longrightarrow X \otimes A$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y (A, a_0) es un conjunto simplicial punteado tal que $\pi_m(A, a_0) = 0$ para toda $0 \leq m \leq n$.*

(VI) *El morfismo $X \otimes j^k\colon X \otimes \star \longrightarrow X \otimes \mathbb{S}^k$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, para todo objeto cofibrante X de $\mathcal{C}$ y toda $k \geq n+1$, donde $j^k\colon \star \longrightarrow \mathbb{S}^k$ es el morfismo canónico.*

DEMOSTRACIÓN. Para empezar notemos que la equivalencia (I) $\Leftrightarrow$(II) es una consecuencia de los Lemas 9.1.1 y 9.1.2.

(ii) ⇒(iii): Sea X un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y $j\colon\ A \longrightarrow B$ una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales. Consideremos para empezar un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r, "j'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

donde A', B' son complejos de Kan y los morfismos verticales son ∞-equivalencias débiles y monomorfismos, deducimos un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes A \arrow[r, "X\otimes j"] \arrow[d] & X \otimes B \arrow[d] \\
X \otimes A' \arrow[r, "X\otimes j'"'] & X \otimes B'
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son cofibraciones triviales entre objetos cofibrantes de $\mathcal{C}$ por el Lema 9.1.1. En particular $X \otimes j$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, si y solamente si $X \otimes j'$ lo es.

Para mostrar ahora que $X \otimes j'$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, notemos que basta mostrar que para todo objeto fibrante W de $\mathcal{C}$ la función $(X \otimes j')^\star$ en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[X \otimes B', W]_{\mathcal{C}}} \arrow[r, "(X\otimes j')^\star"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & {[X \otimes A', W]_{\mathcal{C}}} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \otimes B', W)\big) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \otimes A', W)\big) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(B', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big) \arrow[r, "(j')^\star"'] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(A', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big)
\end{tikzcd} \tag{9.5}$$

es biyectiva, donde $\big[\,\cdot\,,\,\cdot\,\big]_{\mathcal{C}}$ denota al conjunto de los morfismos de la categoría homotópica $\mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]$.

Por otro lado, por el Lema 9.1.1 el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, W)$ es un complejo de Kan, ya que X es un objeto cofibrante y W un objeto fibrante de $\mathcal{C}$. En particular, se sigue del Corolario 12.1.2 y de (ii) que el morfismo inducido:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, W) \xrightarrow{\eta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)}} \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, W) \tag{9.6}$$

es una ∞-equivalencia homotópica entre complejos de Kan. Deducimos del Lema 12.1.3 y de (9.6) el siguiente diagrama conmutativo:
(9.7)

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(B', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\big)\Big) \arrow[r, "(j')^{\star}"] \arrow[d, phantom, "\cong" description] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(A', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" description] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(B', \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" description] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(A', \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" description] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1} B', \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" description] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1} A', \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" description] \\
\Big[\mathbf{csq}_{n+1} B', \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\Big]_{\infty} \arrow[r, "(\mathbf{csq}_{n+1} j')^{\star}"'] & \Big[\mathbf{csq}_{n+1} A', \mathbf{csq}_{n+1}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,W)\Big]_{\infty}
\end{tikzcd}$$

donde $\big[\,\cdot\,,\,\cdot\,\big]_{\infty}$ denota al conjunto de los morfismos en $\mathbf{sSet}\big[\mathbf{W}_{\infty}^{-1}\big]$.

Finalmente, como $j'\colon A' \longrightarrow B'$ es una n-equivalencia débil entre complejos de Kan, se sigue del Corolario 12.1.2 que $\mathbf{csq}_{n+1} j'\colon \mathbf{csq}_{n+1} A' \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1} B'$ es una ∞-equivalencia débil. Por lo tanto (9.7) es una función biyectiva, y entonces también (9.5) es una biyección.

(III) $\Rightarrow$(IV): Sea X un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$, $q\colon X \longrightarrow Y$ una cofibración de $\mathcal{C}$ y $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo y una n-equivalencia de conjuntos simpliciales. Notemos primero que Y también es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$. Deducimos de (III) y del Lema 9.1.1 que los morfismos $X \otimes j$ y $Y \otimes j$ del diagrama (9.2) son cofibraciones triviales de $\mathcal{C}$. Como las cofibraciones triviales son estables por cocambio de base y las equivalencias débiles cumplen la propiedad 2-de-3, se sigue que la cofibración φ del diagrama (9.2) es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

(IV) $\Rightarrow$(V): Sea X un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y (A, a_0) un conjunto simplicial punteado tal que $\pi_m(A, a_0) = 0$ para toda $0 \leq m \leq n$. Notemos que por hipótesis $a_0\colon \star \longrightarrow A$ es un monomorfismo y una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales. Si consideramos también a la cofibración $\varnothing \longrightarrow X$ donde $\varnothing$ es un objeto inicial de $\mathcal{C}$, deducimos de (IV) que $X \otimes a_0\colon X \otimes \star \longrightarrow X \otimes A$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

(V) $\Rightarrow$(VI): Sabemos que $\pi_m(\mathbb{S}^k, \star) = 0$ siempre que $0 \leq m < k$, en particular esto se cumple si $k \geq n+1$ y $0 \leq m \leq n$.

(VI) $\Rightarrow$(II): Sea X un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y Y un objeto fibrante. Notemos primero que si $k \geq n+1$, el morfismo $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \otimes \mathbb{S}^k, Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \otimes \star, Y)$ inducido de la cofibración trivial $X \otimes j^k$, es una fibración trivial de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_{\infty}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_{\infty})$ según el Lema 9.1.1.

Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, deducimos del siguiente diagrama cartesiano de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((\mathbb{S}^k,\star),(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),f)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbb{S}^k,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "(j^k)^\star"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X\otimes\mathbb{S}^k,Y) \arrow[d, "(X\otimes j^k)^\star"] \\
\star \arrow[r, "f"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\star,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X\otimes\star,Y)\,,
\end{tikzcd}$$

que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((\mathbb{S}^k,\star),(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),f)\big)\longrightarrow\star$ es una fibración trivial de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet},\mathbf{W}_\infty,\mathbf{mono},\mathbf{fib}_\infty)$.

En particular, $\pi_k\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),f\big)\cong\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((\mathbb{S}^k,\star),(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),f)\big)\Big)=0$ (ver la biyección (8.33) en la prueba de la Proposición 8.6.1). ☐

Deducimos fácilmente de la Proposición 9.1.3:

Corolario 9.1.4. *Si $n\geq -1$ es un entero y $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos simplicial de orden ∞ con la propiedad que todos sus objetos son cofibrantes, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *Si $k\geq n+1$ entonces $\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W),f\big)=0$ para todo $f\colon Z\longrightarrow W$.*

(ii) *$\mathcal{C}$ cumple la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$, es decir la estructura de $\mathcal{C}$ es de hecho la de una categoría de modelos simplicial de orden n.*

§9.2. Definimos una *categoría de modelos simplicial punteada de orden n*, como una categoría de modelos enriquecida en $(\mathbf{sSet}_\star,\pi^{-1}\mathbf{W}_n,\mathbf{mono},\pi^{-1}\mathbf{fib}_n,\wedge)$ la categoría de modelos monoidal del Corolario 8.5.1.

De manera explícita, una categoría de modelos simplicial punteada de orden n es una categoría $\mathcal{C}$, con una estructura de categoría de modelos $(\mathcal{C},\mathbf{W},\mathbf{cof},\mathbf{fib})$ y un enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ en la categoría monoidal simétrica cerrada $\big(\mathbf{sSet}_\star,\wedge\big)$ (ver §8.5) tal que:

$\mathbf{CMS1}^{\mathbf{pt}}$. El enriquecimiento admite un tensor y un cotensor, es decir si X y Y son objetos arbitrarios de $\mathcal{C}$, se tienen adjunciones:

(9.8)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_\star \arrow[l, bend right, "X\wedge\cdot"']
\end{tikzcd}
\quad\text{y}\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_\star\,. \arrow[l, bend right, "Y^{\wedge\cdot}"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{CMS2}_n^{\wedge}$. Si $j\colon A\longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales punteados y $q\colon X\longrightarrow Y$ es una cofibración de $\mathcal{C}$, entonces el morfismo ψ en el siguiente diagrama suma amalgamada:

$$\begin{tikzcd}
X \wedge A \arrow[r, "q\wedge A"] \arrow[d, "X\wedge j"'] & Y \wedge A \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "Y\wedge j"] & \\
X \wedge B \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "q\wedge B"'] & X \wedge B \bigvee\limits_{X\wedge A} Y \wedge A \arrow[rd, "\psi"] & \\
 & & Y \wedge B\,,
\end{tikzcd} \tag{9.9}$$

es una cofibración de $\mathcal{C}$, la cual es también una equivalencia débil si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales punteados, o si q es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

De manera equivalente (ver la Proposición 4.2.19 de [**Hov07**]):

LEMA 9.2.1. *Si* $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib})$ *es una categoría de modelos, con un enriquecimiento en la categoría cartesiana cerrada de los conjuntos simpliciales:*

$$\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet} \ ; \tag{9.10}$$

los enunciados siguientes son equivalentes:

(I) $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}})$ *es una categoría de modelos simplicial de orden* n *y* $\mathcal{C}$ *es una categoría punteada (es decir si* $\varnothing$ *es un objeto inicial de* $\mathcal{C}$ *y* $\star$ *es un objeto final, el único morfismo* $\varnothing \longrightarrow \star$ *es un isomorfismo).*

(II) *El funtor* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *admite una extensión:*

$$\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet}_{\star} \ , \tag{9.11}$$

a lo largo del funtor que olvida $\pi : \ \mathbf{sSet}_{\star} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ *con la propiedad que* $(\mathcal{C}, \mathbf{W}, \mathbf{cof}, \mathbf{fib}, \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}})$ *es una categoría de modelos simplicial punteada de orden* n*.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos para empezar la prueba de la siguiente afirmación: Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un objeto inicial $\varnothing$ y un objeto final $\star$. Si nos damos un enriquecimiento (9.10) de $\mathcal{C}$ en la categoría cartesiana cerrada **sSet**, los enunciados siguientes son equivalentes:

(a) La categoría $\mathcal{C}$ es punteada, es decir el único morfismo $\varnothing \longrightarrow \star$ es un isomorfismo.

(b) El funtor (9.10) admite una extensión (9.11) a lo largo del funtor que olvida el punto base $\pi : \ \mathbf{sSet}_{\star} \longrightarrow \mathbf{sSet}$.

En efecto, si suponemos que $\mathcal{C}$ es una categoría punteada, definimos para X y Y objetos de $\mathcal{C}$ el siguiente conjunto simplicial punteado:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(X,Y) = \big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y), \star_X^Y\big)\,, \tag{9.12}$$

donde $\star_X^Y$ denota al morfismo cero $X \longrightarrow \star \cong \varnothing \longrightarrow Y$. Se muestra fácilmente que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}$ es un funtor en dos variables.

Recíprocamente, supongamos que (9.10) admite una extensión (9.11) a lo largo del funtor que olvida $\pi :\ \mathbf{sSet}_\star \longrightarrow \mathbf{sSet}$; entonces el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,\varnothing)$ es no vacío, en particular el morfismo canónico $\varnothing \longrightarrow \star$ es un isomorfismo.

Por otro lado, si $\mathcal{C}$ es una categoría punteada con un enriquecimiento (9.10) en la categoría cartesiana cerrada **sSet**, mostremos que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ verifica la propiedad **CMS1**, si y solamente si el enriquecimiento (9.12) verifica la propiedad **CMS1**$^{\mathrm{pt}}$.

En efecto, sean X y Y objetos de $\mathcal{C}$ y consideremos adjunciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\otimes\cdot"'] & \text{y} & \mathcal{C}^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,. \arrow[l, bend right, "Y^{\cdot}"']
\end{tikzcd} \tag{9.13}$$

Definimos funtores adjuntos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_\star \arrow[l, bend right, "X\wedge\cdot"'] & \text{y} & \mathcal{C}^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_\star\,, \arrow[l, bend right, "Y^{\wedge\cdot}"']
\end{tikzcd} \tag{9.14}$$

tomando para todo conjunto simplicial punteado $A = (A, a_0)$ un cuadrado cocartesiano y un cuadrado cartesiano de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r] & X\wedge A & & \star & Y^{\wedge A} \arrow[l] \arrow[d] \\
X\otimes\star \arrow[u] \arrow[r, "X\otimes a_0"'] & X\otimes A \arrow[u] & \text{y} & Y^{\star} \arrow[u, leftarrow] & Y^{A}\,, \arrow[l, "Y^{a_0}"]
\end{tikzcd} \tag{9.15}$$

respectivamente.

Para mostrar que los funtores (9.14) son efectivamente adjuntos, es suficiente con aplicar los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\,-\,,Y)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,-\,)$ a los cuadrados (9.15) respectivamente, recordar que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\star,Y) \cong \star \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\star)$ para $\mathcal{C}$ punteada y observar que se tiene un cuadrado cartesiano de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[d, "\star_X^Y"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_\star}\Big(A, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(X,Y)\Big) \arrow[l] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\star, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big) & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(A, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\Big)\,. \arrow[l, "-\circ a_0"]
\end{tikzcd}$$

Notemos también que las siguientes composiciones de adjunciones:
(9.16)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)"'] & \mathbf{sSet}_\star \arrow[l, bend right, "X\wedge\cdot"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\pi"'] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "(\cdot)_+"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{op} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}(\cdot,Y)"'] & \mathbf{sSet}_\star \arrow[l, bend right, "Y^{\wedge\cdot}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\pi"'] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "(\cdot)_+"']
\end{tikzcd}.$$

son isomorfas a las adjunciones (9.13). En particular, si recíprocamente suponemos que $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}$ verifica la propiedad **CMS1$^{\mathbf{pt}}$**, deducimos las adjunciones (9.13) componiendo como en (9.16).

Finalmente, si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos punteada con un enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\cdot,\cdot)$ en la categoría cartesiana cerrada **sSet**, verificando la propiedad **CMS1**; mostremos que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ verifica la propiedad $\mathbf{CMS2}^{\otimes}_{n}$, si y solamente si el enriquecimiento (9.12) verifica la propiedad $\mathbf{CMS2}^{\wedge}_{n}$.

En efecto, supongamos que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ verifica $\mathbf{CMS2}^{\otimes}_{n}$. Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales punteados y $q\colon X \longrightarrow Y$ es una cofibración de $\mathcal{C}$, debemos mostrar que el morfismo ψ en el diagrama cocartesiano:

(9.17)
$$\begin{tikzcd}
X\wedge A \arrow[r, "q\wedge A"] \arrow[d, "X\wedge j"'] & Y\wedge A \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "Y\wedge j"] & \\
X\wedge B \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "q\wedge B"'] & X\wedge B \bigvee\limits_{X\wedge A} Y\wedge A \arrow[rd, "\psi"] & \\
 & & Y\wedge B\,,
\end{tikzcd}$$

es una cofibración, la cual es también una equivalencia débil si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si q es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Para ello consideremos el diagrama cocartesiano de $\mathcal{C}$:

(9.18)
$$\begin{tikzcd}
X\otimes\pi A \arrow[r, "q\otimes\pi A"] \arrow[d, "X\otimes\pi j"'] & Y\otimes\pi A \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "Y\otimes\pi j"] & \\
X\otimes\pi B \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "q\otimes\pi B"'] & X\otimes\pi B \bigvee\limits_{X\otimes\pi A} Y\otimes\pi A \arrow[rd, "\varphi"] & \\
 & & Y\otimes\pi B\,,
\end{tikzcd}$$

asociado a la cofibración $q\colon X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ y al monomorfismo de conjuntos simpliciales $\pi j\colon \pi A \longrightarrow \pi B$ subyacente a j.

Ya que por hipótesis $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ verifica la propiedad $\mathbf{CMS2}^{\otimes}_{n}$, se sigue que el morfismo φ de (9.18) es una cofibración de $\mathcal{C}$, la cual también es una equivalencia débil si πj es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si q es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Por otro lado, observemos que en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r] & Y \wedge A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "Y\wedge j"] & (X\wedge B) \bigvee_{(X\wedge A)} (Y\wedge A) \arrow[r, "\psi"] & Y\wedge B \\
Y\otimes\star \arrow[r] \arrow[u] & Y\otimes\pi A \arrow[r] \arrow[u] \arrow[rr, bend right, "Y\otimes\pi j"'] \arrow[ur, phantom, "(i)"] & (X\otimes\pi B) \bigvee_{(X\otimes\pi A)} (Y\otimes\pi A) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "(ii)"] & Y\otimes\pi B \arrow[u]\,,
\end{tikzcd} \tag{9.19}$$

el cuadrado (i) es cocartesiano ya que se descompone en dos cuadrados cocartesianos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
Y\wedge A \arrow[r, "\cong"] & \star\bigvee_{\star}(Y\wedge A) \arrow[r] & (X\wedge B) \bigvee_{(X\wedge A)} (Y\wedge A) \\
Y\otimes\pi A \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u] & (X\otimes\star) \bigvee_{(X\otimes\star)} (Y\otimes\pi A) \arrow[r] \arrow[u] & (X\otimes\pi B) \bigvee_{(X\otimes\pi A)} (Y\otimes\pi A)\,; \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{9.20}$$

donde el cuadrado derecho es construido como un colímite de diagramas cocartesianos:

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r] & X\wedge A \\
X\otimes\star \arrow[r] \arrow[u] & X\otimes\pi A\,, \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y\wedge A \arrow[r] & Y\wedge A \\
Y\otimes\pi A \arrow[r] \arrow[u] & Y\otimes\pi A \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\star \arrow[r] & X\wedge B \\
X\otimes\star \arrow[r] \arrow[u] & X\otimes\pi B\,. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Se sigue que el cuadrado (ii) del diagrama (9.19):

$$\begin{tikzcd}
(X\wedge B) \bigvee_{(X\wedge B)} (Y\wedge A) \arrow[r, "\psi"] & Y\wedge B \\
(X\otimes\pi B) \bigvee_{(X\otimes\pi B)} (Y\otimes\pi A) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u] & Y\otimes\pi B\,, \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{9.21}$$

es un cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$.

Ya que las familias de morfismos **cof** y $\mathbf{cof}\cap\mathbf{W}$, son estables por cocambios de base en toda categoría de modelos; concluimos que si el morfismo φ es una cofibración de $\mathcal{C}$ (resp. una cofibración trivial), entonces el morfismo ψ es también una cofibración (resp. una cofibración trivial).

En particular, el morfismo ψ es una cofibración la cual también es una equivalencia débil si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales punteados, o si q es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, si $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ verifica la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$, entonces $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}$ verifica la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\wedge}$.

Recíprocamente, si $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}$ satisface la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\wedge}$, para mostrar que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ verifica la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$ observemos que $X \otimes A \cong X \wedge (A_+)$. ☐

Notemos que por el Lema 9.2.1 y el Corolario 8.5.1 se tiene en particular que $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$ es una categoría de modelos simplicial de orden n con el enriquecimiento:

$$(9.22) \qquad \mathbf{sSet}_\star \times \mathbf{sSet}_\star \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet} \ ,$$

definido por $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_*}(X,Y)_m = \pi\Big(\mathrm{hom}^{\wedge}_{\mathbf{sSet}_\star}(X,Y)\Big)_m = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_*}(X \wedge \Delta^m_+, Y)$ para $m \geq 0$, donde π es el funtor que olvida de $\mathbf{sSet}_\star$ en $\mathbf{sSet}$ y $\mathrm{hom}^{\wedge}_{\mathbf{sSet}_\star}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es el funtor (8.28).

Los funtores tensor y cotensor son:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_\star \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\wedge(\cdot)_+"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_\star^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "Y^{\cdot}"'] \end{tikzcd},$$

donde $\big(Y^K\big)_m = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(K_+ \wedge \Delta^m_+, Y\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(K \times \Delta^m, \pi(Y)\big)$ si $m \geq 0$.

§9.2.1. Recordemos la construcción de los funtores suspensión y espacios de lazos en el contexto de las categorías de modelos simpliciales punteadas (ver §6.4 de arriba y el Capítulo 6 de [**Hov07**]):

LEMA 9.2.2. *Sea $-1 \leq n \leq \infty$ y $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial punteada de orden n. Si $\mathbb{S}^1$ denota al círculo simplicial visto como un conjunto simplicial punteado (ver §8.6), entonces la adjunción $\cdot \wedge \mathbb{S}^1 \dashv \cdot^{\wedge\mathbb{S}^1}$ inducida de las adjunciones* (9.8) *es una adjunción de Quillen, y la adjunción derivada:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}\big(\mathcal{C}\big) \arrow[r, bend right, "\mathbf{R}\big((\cdot)^{\wedge\mathbb{S}^1}\big)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Ho}\big(\mathcal{C}\big) \arrow[l, bend right, "\mathbf{L}(\cdot\wedge\mathbb{S}^1)"'] \end{tikzcd}$$

es isomorfa a la adjunción $\Sigma \dashv \Omega$ de la Proposición 6.4.3.

En particular, si X y Y son cualesquiera dos objetos de $\mathcal{C}$ hay isomorfismos naturales:

$$(9.23) \qquad \big[\Sigma^k(X), Y\big]_{\mathcal{C}} \cong \pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), \star^Y_X\big) \cong \big[X, \Omega^k(Y)\big]_{\mathcal{C}} \qquad \textit{si} \ \ k \geq 0\,,$$

donde $\star_X^Y$ *es el morfismo cero de* X *en* Y *de* $\mathcal{C}$ *y* $\Sigma^0 = \Omega^0$ *es el funtor identidad de* Ho($\mathcal{C}$)[4].

Demostración. Mostremos que la adjunción $\cdot^{\wedge \mathbb{S}^1} \dashv \cdot \wedge \mathbb{S}^1$ es una adjunción de Quillen. Para ello observemos que por la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\wedge}$ si consideramos una cofibración $f\colon X \rightarrowtail Y$ de $\mathcal{C}$ (resp. una cofibración trivial), el morfismo $f \wedge \mathbb{S}^1$ es una cofibración de $\mathcal{C}$ (resp. una cofibración trivial). Dicho de otro modo, el funtor $\cdot \wedge \mathbb{S}^1$ es adjunto de Quillen izquierdo.

Por otro lado, de la definición del conjunto simplicial $\mathbb{S}^1$ tenemos un cuadrado cocartesiano de **sSet**:

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r] & \mathbb{S}^1 \\ \partial\Delta^1 \arrow[u] \arrow[r] & \Delta^1 \arrow[u] \end{tikzcd} \quad . \tag{9.24}$$

Si denotamos como $\big(\partial\Delta^1, [0]\big)$ $\big($resp. $\big(\Delta^1, [0]\big)$ $\big)$ al conjunto simplicial punteado cuyo conjunto simplicial subyacente es $\partial\Delta^1$ (resp. Δ^1), y el punto base es el 0-simplejo $[0]$; se sigue que el cuadrado (9.24) induce un cuadrado cocartesiano de $\mathbf{sSet}_\star$:

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r] & \mathbb{S}^1 \\ \big(\partial\Delta^1, [0]\big) \arrow[u] \arrow[r] & \big(\Delta^1, [0]\big) \arrow[u] \end{tikzcd} \quad .$$

Por lo tanto, tenemos un cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} X \wedge \star \arrow[r] & X \wedge \mathbb{S}^1 \\ X \wedge \big(\partial\Delta^1, [0]\big) \arrow[u] \arrow[r] & X \wedge \big(\Delta^1, [0]\big) \arrow[u] \end{tikzcd} \quad , \tag{9.25}$$

para todo objeto X de $\mathcal{C}$.

Observemos que por la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\wedge}$ y el Lema 6.1.2, el cuadrado (9.25) es homotópicamente cocartesiano si X es un objeto cofibrante. En particular, se sigue del Lema 6.4.1 que para mostrar el resultado deseado, es suficiente notar que se tienen isomorfismos de $\mathcal{C}$:

$$X \wedge \star \longrightarrow \star \qquad \text{y} \qquad X \wedge \big(\partial\Delta^1, [0]\big) \longrightarrow X\,,$$

y una equivalencia débil:

$$X \wedge \big(\Delta^1, [0]\big) \longrightarrow \star\,.$$

En efecto, para empezar observemos que si X es un objeto arbitrario de $\mathcal{C}$, el producto $X \wedge \star$ es un objeto cero de $\mathcal{C}$ ya que el funtor $X \wedge \cdot$ conmuta con colímites y $\star$

---

[4] Los isomorfismos (9.23) son válidos para categorías de modelos no simpliciales, ver por ejemplo el Capítulo 6 de [**Hov07**] o [**Qui67**] para $0 \leq k \leq 1$

es un objeto cero de $\mathbf{sSet}_\star$. En segundo lugar, ya que el conjunto simplicial punteado $\big(\partial\Delta^1,[0]\big)$ es isomorfo a Δ^0_+, la unidad de la categoría monoidal $\mathbf{sSet}_\star$ con el producto cuña, se sigue que el objeto $X\wedge\big(\partial\Delta^1,[0]\big)$ es canónicamente isomorfo a X en $\mathcal{C}$. Deducimos así isomorfismos $X\wedge\star\longrightarrow\star$ y $X\wedge\big(\partial\Delta^1,[0]\big)\longrightarrow X$ de $\mathcal{C}$.

Por otro lado, observemos que el morfismo $d_1\colon\ \Delta^0\longrightarrow\Delta^1$ es una cofibración y una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales para toda $-1\le n\le\infty$; por lo que el morfismo que deducimos $X\wedge d_1\colon\ X\wedge\big(\Delta^0,[0]\big)\longrightarrow X\wedge\big(\Delta^1,[0]\big)$, es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ cuando X es cofibrante por la propiedad $\mathbf{CMS2}^{\wedge}_n$.

Finalmente, si X' es un reemplazo cofibrante X y Y' es un remplazo fibrante de Y, se tiene para $k\ge 0$ los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned}\big[\Sigma^k(X),Y\big]_{\mathcal{C}} &\cong \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}\big(X'\wedge(\underbrace{\mathbb{S}^1\wedge\cdots\wedge\mathbb{S}^1}_{k}),Y'\big)\Big)\\ &\cong \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}\big(X'\wedge\mathbb{S}^k,Y'\big)\Big)\\ &\cong \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbb{S}^k,\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}(X',Y')\big)\Big)\\ &\cong \pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\star^Y_X\big)\end{aligned}$$

□

Mostremos la siguiente versión punteada de la Proposición 9.1.3:

COROLARIO 9.2.3. *Sea $n\ge 0$ un número natural. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos simplicial punteada de orden ∞ (ver el Lema 9.2.1), los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) $\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}(Z,W)\big)=\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W),\star^W_Z\big)=0$ *para toda $k\ge n+1$ y cualesquiera objetos Z y W de $\mathcal{C}$.*

(II) *Si $k\ge n+1$ entonces* $\pi_k\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{pt}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big)=\pi_k\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),\star^Y_X\big)=0$ *para todo objeto cofibrante X y todo objeto fibrante Y de $\mathcal{C}$.*

(III) *El funtor $\Sigma^k\colon\ \mathrm{Ho}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ es isomorfo al funtor cero para toda $k\ge n+1$.*

(IV) *El funtor $\Omega^k\colon\ \mathrm{Ho}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ es isomorfo al funtor cero para toda $k\ge n+1$.*

(V) *El morfismo $X\wedge j\colon\ X\wedge A\longrightarrow X\wedge B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, para todo objeto cofibrante X de $\mathcal{C}$ y toda n-equivalencia débil $j\colon\ A\longrightarrow B$ entre conjuntos simpliciales* reducidos *(ver §10.1).*

(VI) *El morfismo $X\wedge j^k\colon\ X\wedge\star\longrightarrow X\wedge\mathbb{S}^k$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$, para todo objeto cofibrante X de $\mathcal{C}$ y toda $k\ge n+1$, donde $j^k\colon\ \star\longrightarrow\mathbb{S}^k$ es el morfismo canónico (Nota que $X\wedge\star\cong\star$).*

Demostración. Los enunciados (i), (iii) y (iv) son equivalentes como consecuencia del isomorfismo (9.23) del Lema 9.2.2. Por otro lado (i) $\Leftrightarrow$ (ii) se sigue del Lema 9.1.2.

(ii) $\Rightarrow$ (v): Sea X un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$ y $j\colon\ A \to B$ una n-equivalencia débil entre conjuntos simpliciales reducidos. La prueba que haremos es similar a la prueba de la implicación (ii) $\Rightarrow$ (iii) de la Proposición 9.1.3, en particular notemos que podemos suponer que los conjuntos simpliciales reducidos A y B son complejos de Kan (ver la Proposición 10.1.2).

Por otro lado, si W es un objeto fibrante de $\mathcal{C}$, obtenemos un diagrama conmutativo de funciones como en (9.5):

(9.26)
$$\begin{tikzcd}
{[X \wedge B, W]_{\mathcal{C}}} \arrow[r, "(X\wedge j)^*"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & {[X \wedge A, W]_{\mathcal{C}}} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \wedge B, W)\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \wedge A, W)\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(B, \underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(A, \underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\pi_0\Bigg(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(B, \mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big)\Bigg) \arrow[d, equal] & \pi_0\Bigg(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(A, \mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big)\Bigg) \arrow[d, equal] \\
\pi_0\Bigg(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\Big(B, \mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big)\Bigg) \arrow[r, "(j)^*"'] & \pi_0\Bigg(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\Big(A, \mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big)\Bigg)
\end{tikzcd}$$

donde $\big[\,\cdot\,,\cdot\,\big]_{\mathcal{C}}$ denota al conjunto de los morfismos de la categoría homotópica $\mathcal{C}\big[\mathbf{W}^{-1}\big]$ (ver la adjunción (10.2)).

Más aún, en esta ocasión el enunciado (ii) con el Lema 10.1.7 implican que el morfismo canónico:

$$\mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big) \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}\Big(\mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, W)\big)\Big)$$

es una ∞-equivalencia débil entre complejos de Kan reducidos. Deducimos en particular como en la prueba de la Proposición 9.1.3 que el morfismo $X \wedge j\colon\ X \wedge A \longrightarrow X \wedge B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Como $n \geq 0$; si $k \geq n+1$ entonces $k \geq n+1 \geq 1$, en particular $j^k\colon\ \star \to \mathbb{S}^k$ es una n-equivalencia débil entre conjuntos simpliciales reducidos si $k \geq n+1$.

(vi) $\Rightarrow$ (ii): La prueba es similar a la prueba de (vi) $\Rightarrow$ (ii) en la Proposición 9.1.3. En efecto, si X es un objeto fibrante de $\mathcal{C}$, Y es un objeto cofibrante y $k \geq n+1$ es un número natural, el morfismo de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \wedge \mathbb{S}^k, Y) \arrow[r, "(X\wedge j^k)^*"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X \wedge \star, Y) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbb{S}^k, \underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, Y)\big) \arrow[r, "(j^k)^*"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\star, \underline{\mathrm{Hom}}^{pt}_{\mathcal{C}}(X, Y)\big) \cong \star
\end{tikzcd}$$

inducido del morfismo canónico $j^k\colon \star \longrightarrow \mathbb{S}^k$ es una fibración trivial de la categoría de modelos $\big(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty\big)$, ya que $X \wedge j^k\colon X\wedge\star \longrightarrow X\wedge\mathbb{S}^k$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

En particular, $\pi_k\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y), \star_X^Y\big) \cong \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbb{S}^k, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}^{pt}(X,Y)\big)\Big) = 0.$ ☐

Deducimos:

COROLARIO 9.2.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial punteada de orden ∞ con la siguiente propiedad:*

- *Si en un cuadrado homotópicamente cocartesiano de $\mathcal{C}$:*

(9.27)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

el objeto C es débilmente contraible (es decir si el morfismo $\star \longrightarrow C$ es una equivalencia débil), entonces el morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$[5].

Si $n \geq 0$ es un número natural, entonces los siguientes enunciados son equivalentes (ver el Corolario 9.2.3):

(I) $\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{pt}}(Z,W)\big) = \pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), \star_Z^W\big) = 0$ *para toda $k \geq n+1$ y cualesquiera objetos Z y W de $\mathcal{C}$.*

(II) $\pi_k\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), f\big) = 0$ *para toda $k \geq n+1$ y para todo morfismo f de $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \geq 0$ y supongamos (I). Si X es un objeto cofibrante de $\mathcal{C}$, se sigue del Corolario 9.2.3 y de (I) que el morfismo $X \wedge j^k\colon X\wedge\star \longrightarrow X\wedge\mathbb{S}^k$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ si $k \geq n+1$, donde $j^k\colon \star \longrightarrow \mathbb{S}^k$ es el morfismo canónico.

Notemos por otro lado que como X y $\star$ son objetos cofibrantes de $\mathcal{C}$ ($\varnothing \longrightarrow \star$ es una cofibración como lo es cualquier isomorfismo), se sigue de los Lemas 9.1.1 y 6.1.2 que el siguiente cuadrado cocartesiano de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} X\otimes\star \arrow[r, "X\otimes j^k"] \arrow[d] & X\otimes\mathbb{S}^k \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & X\wedge\mathbb{S}^k \end{tikzcd}$$

es un cuadrado homotópicamente cocartesiano.

---

[5] Esta propiedad también se puede enunciar de la siguiente forma: Un morfismo de $\mathcal{C}$ es una equivalencia débil si y solamente si su cofibra homotópica es débilmente contraible.

Como se tiene una equivalencia débil de $\mathcal{C}$:

$$\star \cong X \wedge \star \xrightarrow{X\wedge j^k} X \wedge \mathbb{S}^k \ ,$$

deducimos de la propiedad (•) que $X \otimes j^k\colon\ X \otimes \star \longrightarrow X \otimes \mathbb{S}^k$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$. Se sigue de la Proposición 9.1.3 que (i) ⇒ (ii). ☐

Se sigue de los Corolarios Corolario 9.1.4, 9.2.3 y 9.2.4:

Corolario 9.2.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial punteada de orden ∞ con las siguientes propiedades:*

- *Todos los objetos de $\mathcal{C}$ son cofibrantes.*
- *Si en un cuadrado homotópicamente cocartesiano de $\mathcal{C}$:*

(9.28)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

el objeto C es débilmente contraible (es decir si el morfismo $\star \longrightarrow C$ es una equivalencia débil), entonces el morfismo $f\colon\ A \longrightarrow B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Si $n \geq 0$ es un número natural, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\Omega^k\colon\ \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ *es isomorfo al funtor cero para toda $k \geq n+1$.*

(ii) $\mathcal{C}$ *cumple la propiedad* $\mathbf{CMS2}_n^{\wedge}$ *o equivalentemente la propiedad* $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$ *(ver el Lema 9.2.1), es decir la estructura en $\mathcal{C}$ es de hecho la de una categoría de modelos simplicial punteada de orden n.*

§9.3. Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría con un objeto final $\star$, la categoría $\mathcal{C}_\star$ de los *objetos punteados de* $\mathcal{C}$ es la categoría de las parejas $X = (X, x)$ donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y $x:\ \star \longrightarrow X$ es una flecha. Un morfismo de (X,x) en (Y,y) es una flecha $f:\ X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ tal que $fx = y$.

Si suponemos además que $\mathcal{C}$ es una categoría con sumas finitas, se muestra fácilmente que el funtor que olvida $\pi:\ \mathcal{C}_\star \longrightarrow \mathcal{C}$ definido por la regla $(X,x) \mapsto X$, admite un adjunto por la izquierda $(\,\cdot\,)_+:\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\star$, definido en un objeto A de $\mathcal{C}$ como la suma $A_+ = A \sqcup \star$, punteado por el morfismo canónico $\star \longrightarrow A \sqcup \star$.

No es difícil de demostrar que si $\mathcal{C}$ es una categoría punteada entonces la adjunción $(\,\cdot\,)_+ \dashv \pi$ es una equivalencia de categorías.

El siguiente enunciado es la Proposición 1.1.8 de [**Hov07**]

LEMA 9.3.1. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos, la categoría de los objetos punteados $\mathcal{C}_\star$ admite una estructura de categoría de modelos, cuando las equivalencias débiles (resp. las cofibraciones, las fibraciones) son los morfismos $f\colon\ (X,x) \to (Y,y)$ cuyas flechas subyacentes $f\colon\ X \to Y$ son equivalencias débiles (resp. cofibraciones, fibraciones) de $\mathcal{C}$. En particular:*

(9.29)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_\star \arrow[rr, bend right, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C} \arrow[ll, bend right, "(\,\cdot\,)_+"'] \end{tikzcd},$$

es una adjunción de Quillen.

Mostremos el siguiente enunciado:

LEMA 9.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos con la propiedad que el morfismo canónico $\varnothing \longrightarrow \star$ sea una cofibración. Si:*

(9.30)
$$\mathfrak{X} = \begin{tikzcd} (A,a_0) \arrow[r] \arrow[d] & (B,b_0) \arrow[d] \\ (C,c_0) \arrow[r] & (D,d_0) \end{tikzcd}$$

es un cuadrado conmutativo de $\mathcal{C}_\star$ la categoría de modelos de los objetos punteados de $\mathcal{C}$ del Lema 9.3.1, y:

(9.31)
$$\pi(\mathfrak{X}) = \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

es el cuadrado conmutativo inducido en $\mathcal{C}$ por el funtor que olvida el punto base, entonces (9.30) *es un cuadrado homotópicamente cocartesiano en $\mathcal{C}_\star$ si y solamente si* (9.31) *es un cuadrado homotópicamente cocartesiano en $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos para empezar un diagrama conmutativo de $\mathcal{C}$:

(9.32)
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd] \\ A' \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr, tail] \arrow[dd, tail] & & X \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dd] & \\ & C \arrow[rr] & & D \\ Y \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr] & & W \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

que se construye a partir de factorizaciones en $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[rr, "a_0"] \arrow[dr, tail, bend right, "a_0'"'] & & A \\ & A' \arrow[ur, two heads, "\sim"] & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, tail, bend right] & A \arrow[r] & B \\ & X \arrow[ur, two heads, "\sim"] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, tail, bend right] & A \arrow[r] & C \\ & Y \arrow[ur, two heads, "\sim"] & \end{tikzcd} ,$$

y tomando una suma amalgamada $W = Y \underset{A'}{+} X$ en $\mathcal{C}$. En particular existe un (único) morfismo $\varphi\colon W \longrightarrow D$ en $\mathcal{C}$ que completa (9.32) en un diagrama conmutativo.

Por otro lado, notemos que existe un único cuadrado conmutativo en $\mathcal{C}_\star$:

$$\mathfrak{Y} = \begin{tikzcd} (A', a_0') \arrow[r] \arrow[d] & (X, x_0) \arrow[d] \\ (Y, y_0) \arrow[r] & (W, w_0) \end{tikzcd}$$

el cual es un cuadrado cocartesiano en $\mathcal{C}_\star$ y cuya imagen por el funtor que olvida el punto base $\pi(\mathfrak{Y})$ es igual a la cara de enfrente del cubo (9.32). Más aún, se verifica sin dificultad que (9.32) es de hecho un morfismo en $\mathcal{C}_\star$ de $\mathfrak{Y}$ en $\mathfrak{X}$.

Notemos que por el Lema 6.1.2 el cuadrado conmutativo $\mathfrak{Y}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano de $\mathcal{C}_\star$; además, como el morfismo canónico $\varnothing \longrightarrow \star$ es una cofibración de $\mathcal{C}$, se sigue también del Lema 6.1.2 que el cuadrado conmutativo $\pi(\mathfrak{Y})$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano en $\mathcal{C}$. En particular, por el Lema 6.2.1 tenemos que $\mathfrak{X}$ (resp. $\pi(\mathfrak{X})$) es un cuadrado homotópicamente cocartesiano en $\mathcal{C}_\star$ (resp. $\mathcal{C}$) si y solamente si φ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Por lo tanto $\pi(\mathfrak{X})$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano en $\mathcal{C}$ si y solamente si, φ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ si y solamente si, $\mathfrak{X}$ es un cuadrado homotópicamente cocartesiano en $\mathcal{C}_\star$. $\square$

Recordemos por otro lado que si $\mathcal{C}$ es una categoría completa y cocompleta, con un enriquecimiento en la categoría cartesiana cerrada **sSet**:

$$\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet} ,$$

y con adjunciones:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\otimes\cdot"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "Y^{\cdot}"'] \end{tikzcd} , \tag{9.33}$$

para todos los objetos X y Y de $\mathcal{C}$; entonces la categoría $\mathcal{C}_\star$ de los objetos punteados de $\mathcal{C}$ admite un enriquecimiento canónico:

$$\mathcal{C}_\star^{op} \times \mathcal{C}_\star \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet} , \tag{9.34}$$

y se tienen adjunciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_\star \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\otimes_\star\cdot"'] & \text{y} & \mathcal{C}_\star^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "Y^{\star\cdot}"']
\end{tikzcd} \tag{9.35}$$

para todos los objetos punteados $X = (X, x_0)$ y $Y = (Y, y_0)$ de $\mathcal{C}$.

En efecto, si $X = (X, x_0)$ es un objeto punteado de $\mathcal{C}$, para todo conjunto simplicial A definimos el objeto punteado $X \otimes_\star A$ de $\mathcal{C}$ por un cuadrado cocartesiano en $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r] & X \otimes_\star A \\
\star \otimes A \arrow[u] \arrow[r, "x_0\otimes A"'] & X \otimes A \arrow[u]\,.
\end{tikzcd} \tag{9.36}$$

Si definimos el enriquecimiento $\mathcal{C}_\star$ por la fórmula:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star}(X,Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\star}(X \otimes_\star \Delta^n, Y)\,, \qquad \text{donde } n \geq 0;$$

se verifica sin dificultad que (9.35) son adjunciones, cuando $Y^{\star A} = \left(Y^A, y_0^A\right)$ donde y_0^A es el morfismo $\star \cong \star^A \xrightarrow{y_0^A} Y^A$.

Notemos en particular que si $X = (X, x_0)$ y $Y = (Y, y_0)$ son objetos punteados de $\mathcal{C}$, se tiene un cuadrado cartesiano de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[d, "(x_0)^\star"] \\
\star \arrow[r, "\overline{y_0}"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,Y)\,.
\end{tikzcd} \tag{9.37}$$

LEMA 9.3.3. *Sea* $0 \leq n \leq \infty$. *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría de modelos con un enriquecimiento* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}$ *en* **sSet** *y existen adjunciones:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\otimes\cdot"'] & y & \mathcal{C}^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(\cdot,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,, \arrow[l, bend right, "Y^{\cdot}"']
\end{tikzcd}$$

para todos los objetos X *y* Y *de* $\mathcal{C}$*; entonces* $(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}})$ *es una categoría de modelos simplicial de orden* n *si y solamente si,* $(\mathcal{C}_\star, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star})$ *es una categoría de modelos simplicial punteada de orden* n*, donde* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_\star}$ *es como en el cuadrado cartesiano* (9.37).

DEMOSTRACIÓN. La prueba es similar a la prueba del Lema 9.2.1, pero esta vez utilizamos que el funtor $-\otimes_\star A$ conmuta con sumas por lo que $(X \otimes A)_+ \cong (X_+) \otimes_\star A$. ☐

Deducimos del Corolario 9.2.5 y de los Lemas 9.3.1, 9.3.2 y 9.3.3:

Corolario 9.3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial de orden ∞ con las siguientes propiedades:*

- *El morfismo canónico $\varnothing \longrightarrow \star$ y todos los morfismos de la forma $\star \longrightarrow X$ son cofibraciones de $\mathcal{C}$.*
- *Si en un cuadrado homotópicamente cocartesiano de $\mathcal{C}$:*

(9.38)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

el objeto C es débilmente contraible (es decir si el morfismo $\star \longrightarrow C$ es una equivalencia débil), entonces el morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$.

Si $n \geq 0$ es un número natural y $\mathcal{C}_\star$ denota a la categoría de modelos de los objetos punteados de $\mathcal{C}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) *$\mathcal{C}$ cumple la propiedad $\mathbf{CMS2}_n^{\otimes}$, es decir la estructura en $\mathcal{C}$ es de hecho la de una categoría de modelos simplicial de orden n.*

(ii) *$\Omega^k\colon \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_\star) \longrightarrow \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_\star)$ es isomorfo al funtor cero para toda $k \geq n+1$.*

10. Conjuntos simpliciales reducidos

En esta sección vamos a revisar notación básica sobre la estructura de categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ en la categoría de los conjuntos simpliciales reducidos, cuya categoría homotópica modela los n-tipos de homotopía punteados conexos.

En la Proposición 10.1.8 determinamos un conjunto de cofibraciones triviales que genera a las fibraciones entre los objetos fibrantes de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$. Finalmente, demostramos en §10.2 que la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ admite un enriquecimiento en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_{n-1}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_{n-1})$.

§10.1. Denotamos como $\mathbf{sSet}_0$ a la subcategoría plena de $\mathbf{sSet}$ cuyos objetos son los *conjuntos simpliciales reducidos*, es decir los conjuntos simpliciales X con un único 0-simplejo; lo que denotamos $X_0 = \star$.

Observemos que como todo conjunto simplicial reducido es canónicamente punteado, el funtor inclusión de $\mathbf{sSet}_0$ en $\mathbf{sSet}$ se factoriza:

(10.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{sSet}\,, \\ & \mathbf{sSet}_\star \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\pi\colon \mathbf{sSet}_\star \longrightarrow \mathbf{sSet}$ es el funtor que olvida.

Más aún, se tienen adjunciones:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, hook] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right=40, "\mathcal{F}"'] & \text{y} & \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, hook] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"'] & \mathbf{sSet}_\star \arrow[l, bend right=40, "\mathcal{G}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathcal{H}"] \end{tikzcd} \tag{10.2}$$

definidas para todo conjunto simplicial X y todo 0-simplejo $x_0 \in X_0$, por un cuadrado cocartesiano en **sSet** y uno cartesiano:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}X = \mathcal{G}(X, x_0) & X \arrow[l] & & \mathcal{H}(X, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \star \arrow[u] & \mathbf{sq}_0(X) \arrow[l] \arrow[u] & \text{y} & \star \arrow[r, "x_0"'] & \mathbf{csq}_0(X)\,, \end{tikzcd}$$

respectivamente[6].

Dicho de otro modo, $\mathcal{G}(X, x_0) = \mathcal{F}(X)$ es el conjunto simplicial cociente $X\big/\mathbf{sq}_0 X$, es decir $\mathcal{G}(X, x_0)_n = \mathcal{F}(X)_n$ se construye para $n \geq 0$ identificando en X_n a todos los n-simplejos totalmente degenerados en un sólo punto. Por otro lado, para $n \geq 0$ el conjunto $\mathcal{H}(X, x_0)_n$ es el subconjunto de los n-simplejos de X con la propiedad que todos sus 0-simplejos son iguales a x_0.

LEMA 10.1.1. *La categoría* $\mathbf{sSet}_0$ *admite límites y colímites pequeños. Más precisamente, si* I *es una categoría pequeña y* $\gamma\colon\ I \longrightarrow \mathbf{sSet}_0$ *es un funtor, entonces:*

(I) *Un límite de* γ *en* **sSet** *es un límite de* γ *en* $\mathbf{sSet}_0$.

(II) *Un cociente* $\operatorname*{colim}_I \gamma\big/\mathbf{sq}_0\big(\operatorname*{colim}_I \gamma\big)$ *en* **sSet** *es un colímite de* γ *en* $\mathbf{sSet}_0$*, siempre que* $\operatorname*{colim}_I \gamma$ *sea un colimite de* γ *en* **sSet**. *En particular si* I *es una categoría conexa, un colímite de* γ *en* **sSet** *es un colímite de* γ *en* $\mathbf{sSet}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos solamente que el funtor $\mathbf{sSet}_0 \hookrightarrow \mathbf{sSet}$ conmuta con los colímites sobre categorías conexas. En efecto, si $\gamma\colon\ I \longrightarrow \mathbf{sSet}_0$ es un funtor cuyo dominio es una categoría pequeña conexa y $\operatorname*{colim}_{i \in I} \gamma(i)$ denota un colímite de γ en la categoría **sSet**, se tienen isomorfismos:

$$\Big(\operatorname*{colim}_{i \in I} \gamma(i)\Big)_0 \cong \operatorname*{colim}_{i \in I}\big(\gamma(i)_0\big) \cong \pi_0(I) \cong \star\,;$$

donde $\operatorname*{colim}_{i \in I}\big(\gamma(i)_0\big)$ es un colímite en **Set** del funtor constante $i \longmapsto \star$. ☐

---

[6] Recordemos que el 0-esqueleto $\mathbf{sq}_0(X)$ de X es el conjunto simplicial constante con valor X_0, el conjunto de los 0-simplejos de X. Mientras que el 0-coesqueleto $\mathbf{csq}_0(X)$ es un conjunto simplicial cuyo conjunto de n-simplejos es el producto cartesiano X_0^n

Observemos por otro lado que el enriquecimiento de $\mathbf{sSet}_\star$ en $\mathbf{sSet}$ definido en (9.22), induce el siguiente enriquecimiento de $\mathbf{sSet}_0$ en la categoría de los conjuntos simpliciales:

$$\mathbf{sSet}_0 \times \mathbf{sSet}_0 \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{sSet} \tag{10.3}$$

$$\text{donde} \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}(X \wedge \Delta^n_+, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_*}(X \wedge \Delta^n_+, Y)\,,$$

acompañado de adjunciones:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "X\overset{\circ}{\wedge}(\,\cdot\,)"'] & \text{y} & \mathbf{sSet}_0^{op} \arrow[r, bend right, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(\,\cdot\,,Y)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,, \arrow[l, bend right, "Y^{\overset{\circ}{\wedge}\cdot}"'] \end{tikzcd} \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} \text{donde} \quad X \overset{\circ}{\wedge} K = X \wedge K_+ \quad \text{y} \quad \big(Y^{\overset{\circ}{\wedge} K}\big)_n &= \mathcal{H}\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_*}(K_+,Y),\star\big)_n \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big((K\times\Delta^n)\big/(K\times\mathbf{sq}_0\Delta^n),Y\big)\,. \end{aligned}$$

Notemos para estas fórmulas que si X es un conjunto simplicial reducido y K es un conjunto simplicial, el conjunto simplicial $X\wedge K_+ = (X\times K)\big/(\star\times K)$ también es reducido.

Proposición 10.1.2. *Si $0\le n\le\infty$, la categoría de los conjuntos simpliciales reducidos* $\mathbf{sSet}_0$ *con el enriquecimiento* (10.3) *de arriba admite una estructura de categoría de modelos simplicial punteada de orden n (ver también el Corolario 10.2.6), cuando:*

$$\begin{aligned} \big\{\textit{equivalencias débiles}\big\} \;&=\; \big\{f\colon\ X\to Y\ \big|\ f \textit{ es una } n\textit{-equivalencia} \\ &\qquad\qquad\qquad \textit{débil en } \mathbf{sSet}\big\} \;=\; \mathbf{W}_n^{red}\,, \\ \big\{\textit{cofibrations}\big\} \;&=\; \big\{\textit{monomorfismos}\big\} \;=\; \mathbf{mono}\,, \\ \textit{y}\qquad \big\{\textit{fibraciones}\big\} \;&=\; \big\{\textit{morfismos con la propiedad de levantamiento} \\ &\qquad \textit{a la derecha con respecto a } \mathbf{mono}\cap\mathbf{W}_n^{red}\big\} \\ &=\; \big\{n\textit{-fibraciones reducidas}\big\} \;=\; \mathbf{fib}_n^{red}\,. \end{aligned}$$

Un conjunto simplicial reducido Z es fibrante en $(\mathbf{sSet}_0,\mathbf{W}_n^{red},\mathbf{mono},\mathbf{fib}_n^{red})$ si y solamente si Z es un complejo de Kan tal que $\pi_m(Z)=\pi_m(Z,\star)=0$ para todo $m\ge n+1$.

Demostración. Caso $n=\infty$: En la Proposcición 6.2 de [**GJ99**] se muestra que $(\mathbf{sSet}_0,\mathbf{W}_\infty^{red},\mathbf{mono},\mathbf{fib}_\infty^{red})$ es una categorías de modelos; más aún, en el Lema 6.6 de [**GJ99**] se muestra que si $f\colon\ X\longrightarrow Y$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos, los siguientes enunciados son equivalentes:

(I) f es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}^{red}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{red}_\infty)$ y el morfismo f verifica la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto al morfismo $\star \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

(II) f es una fibración de Kan.

Ya que todo morfismo $X \longrightarrow \star$ de dominio un conjunto simplicial reducido cumple la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto al morfismo $\star \longrightarrow \mathbb{S}^1$; se sigue que un conjunto simplicial reducido X es fibrante en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}^{red}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{red}_\infty)$, si y solamente si X es un complejo de Kan.

Observemos ahora que $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}^{red}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{red}_\infty)$ con el enriquecimiento (10.3) es una categoría de modelos simplicial punteada (de orden ∞). En efecto, se sigue del Lema 9.2.1 que debemos mostrar las propiedades **CMS1** y $\mathbf{CMS2}^{\otimes}_n$. Las adjunciones de la propiedad **CMS1** son definidas en (10.4). Por otro lado, para mostrar la propiedad $\mathbf{CMS2}^{\otimes}_n$. debemos mostrar el siguietne enunciado:

> Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y $q\colon X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos, entonces el morfismo φ en el siguiente diagrama suma amalgamada en $\mathbf{sSet}_0$:
>
> (10.5)
> $$\begin{tikzcd} X \wedge A_+ \arrow[r, "q \wedge A_+"] \arrow[d, "X \wedge j_+"'] & Y \wedge A_+ \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "Y \wedge j_+"] & \\ X \wedge B_+ \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "q \wedge B_+"'] & X \wedge B_+ \coprod\limits_{X \wedge A_+} Y \wedge A_+ \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & & Y \wedge B_+ , \end{tikzcd}$$
>
> es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos, el cual es una ∞-equivalencia débil si j es una ∞-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si q es una ∞-equivalencia débil entre conjuntos simpliciales reducidos.

Esta propiedad es una consecuencia de que la inclusión de $\mathbf{sSet}_0$ en $\mathbf{sSet}_*$ conmuta con los colímites, y porque $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_\infty, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_*})$ es una categoría de modelos simplicial (de orden ∞).

Por otro lado, observemos que de acuerdo a un resultado de Smith (ver la Proposición 2.2 de [**Bar10**]) la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}^{red}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{red}_\infty)$ es una categoría de modelos combinatoria si y solamente si, $\mathbf{sSet}_0$ es una categoría localmente presentable (ver [**AR94**]) y existe un conjunto I de monomorfismos de $\mathbf{sSet}_0$ tal que $\mathbf{cof}(I) = \mathbf{monos}$[7].

Lema 10.1.3. *La categoría* $\mathbf{sSet}_0$ *de los conjuntos simpliciales reducidos es localmente presentable.*

Demostración. Por la Proposición 1.46 de [**AR94**] basta mostrar que $\mathbf{sSet}_0$ es equivalente a una subcategoría plena y reflexiva de una categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\mathcal{A}}$ la cual sea cerrada por colímites directos (o de manera equivalente por colímites filtrantes).

Para ellos recordemos que se tiene una adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet}_0 \arrow[r, hook, "\nu" description] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right=40, "\mathcal{F}=\cdot\big/\mathbf{sq}_0(\,\cdot\,)"'] \arrow[l, phantom, bend right=15, "\perp"]
\end{tikzcd},$$

donde el funtor fielmente pleno ν (la inclusión canónica) conmuta con los colímites de los diagramas de los funtores $\gamma : \ I \longrightarrow \mathbf{sSet}_0$ donde I admite un objeto inicial (ver el Lema 10.1.1). ☐

Mostremos:

Lema 10.1.4. *Si* $\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$ *es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos, entonces* φ *es la composición transfinita de imagenes directas en la categoría* $\mathbf{sSet}_0$ *de morfismos en el conjunto:*

$$\left\{ \quad \partial\Delta^n/\mathbf{sq}_0\partial\Delta^n \xhookrightarrow{\alpha^{n-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{n-1}} \Delta^n/\mathbf{sq}_0\Delta^n \quad \middle| \quad n \geq 1 \quad \right\}.$$

Demostración. Si $\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$ es un morfismo de conjuntos simpliciales reducidos, vamos a definir para cada $i \geq 0$ un conjunto simplicial reducido $X^{(i)}$ y un morfismo $g^i\colon\ X^{(i)} \longrightarrow Y$ tal que $X^0 = X$ y $g^0 = \varphi$; más aún, si $i < j$ vamos a construir un morfismo $\varphi_i^j\colon\ X^{(i)} \longrightarrow X^{(j)}$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
X^{(i)} \arrow[dr, bend left=10, "g^i"] \arrow[d, "\varphi_i^j"'] & \\
 & Y \\
X^{(j)} \arrow[ur, bend right=10, "g^j"'] &
\end{tikzcd},$$

sea un triángulo conmutativo y $\varphi_k^j \circ \varphi_i^k = \varphi_i^j$ siempre que $i < k < j$.

Para empezar escribamos $X^{(0)} = X$ y sea $g^0 = \varphi\colon\ X^{(0)} \longrightarrow Y$. Si $i \geq 1$ definimos de manera inductiva $X^{(i)}$ considerando un cuadrado cocartesiano en $\mathbf{sSet}$ $\big($el cual es

---

[7] $\mathbf{cof}(I)$ denota al conjunto de todos los retractos de las composiciones transfinitas de las imágenes directas de los elementos de I.

entonces también un cuadrado cocartesiano en $\mathbf{sSet}_0$ $\big)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sq}_i(X^{(i-1)}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{sq}_i(g^{i-1})"'] & X^{(i-1)} \arrow[d, "\varphi^i_{i-1}"] \\
\mathbf{sq}_i(Y) \arrow[r] & X^{(i)}
\end{tikzcd}\tag{10.6}$$

el morfismo $g^i\colon\ X^{(i)} \longrightarrow Y$ es definido por la propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sq}_i(X^{(i-1)}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{sq}_i(g^{i-1})"'] & X^{(i-1)} \arrow[d, "\varphi^i_{i-1}"] \arrow[ddr, bend left, "g^{i-1}"] & \\
\mathbf{sq}_i(Y) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^{(i)} \arrow[dr, dashed, "g^i"] & \\
& & Y\,.
\end{tikzcd}\tag{10.7}$$

Definimos finalmente $\varphi^j_i = \varphi^j_{j-1} \circ \cdots \circ \varphi^{i+1}_i$ para $i < j$.

Observemos que para $i \geq 1$ el morfismo g^i definido en el diagrama (10.7) cumple que las funciones entre los conjuntos de los n-simplejos $g^i_n\colon\ X^{(i)}_n \longrightarrow Y_n$ son biyectivas para $0 \leq n \leq i$, ya que el morfismo $\mathbf{sq}_i(Z) \longrightarrow Z$ cumple esta propiedad para todo conjunto simplicial Z. En efecto, esto se cumple para $i \geq 0$ ya que $g^0 = \varphi$ es un morfismo de conjuntos simpliciales reducidos.

Si suponemos que $\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos, se verifica por inducción que los morfismos g^i para $i \geq 0$ son también monomorfismos. En particular el morfismo $\operatorname{colim} g^i\colon\ \operatorname*{colim}_i X^{(i)} \longrightarrow Y$ en el triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_i X^{(i)} \arrow[r, "\operatorname{colim} g^i"] & Y \\
X \arrow[u] \arrow[ur, bend right=10, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\operatorname*{colim}_i X^{(i)}$ es un colímite en $\mathbf{sSet}_0$ (ó $\mathbf{sSet}$), es un isomorfismo de conjuntos simpliciales. Dicho de otro modo, acabamos de describir al morfismo φ como la composición transfinita en $\mathbf{sSet}_0$ (ó $\mathbf{sSet}$) de los morfismos $\left\{\varphi^i_{i-1}\right\}_{i\geq 1}$.

Más aún, observemos que de las propiedades señaladas de los morfismos g^i se deduce que para toda $i \geq 1$ se tiene un cuadrado cocartesiano en $\mathbf{sSet}$:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\Omega_i} \partial\Delta^i \arrow[r] \arrow[d, "\coprod \alpha^{i-1}"'] & \mathbf{sq}_i(X^{(i-1)}) \arrow[d, "\mathbf{sq}_i(g^{i-1})"] \\
\coprod_{\Omega_i} \Delta^i \arrow[r] & \mathbf{sq}_i(Y)
\end{tikzcd}$$

donde Ω_i es el conjunto de los i-simplejos de Y que no están en la imagen de la función g_i^{i-1} (es decir $Y_i \backslash X_i$). Por lo tanto se tiene un cuadrado cocartesiano en la categoría de los conjuntos simpliciales reducidos $\mathbf{sSet}_0$:

$$\begin{tikzcd}
\bigvee\limits_{\Omega_i}\big(\partial\Delta^i/\mathbf{sq}_0\partial\Delta^i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\vee(\alpha^{i-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{i-1})"'] & \mathbf{sq}_i(X^{(i-1)}) \arrow[d, "\mathbf{sq}_i(g^{i-1})"] \\
\bigvee\limits_{\Omega_i}\big(\Delta^i/\mathbf{sq}_0\Delta^n\big) \arrow[r] & \mathbf{sq}_i(Y)\,,
\end{tikzcd} \tag{10.8}$$

donde $\bigvee\limits_k Z_k$ es una suma en $\mathbf{sSet}_0$ de la familia de conjuntos simpliciales reducidos $\big\{Z_k\big\}_k$, es decir $\bigvee\limits_k Z_k = \bigsqcup\limits_k Z_k \big/ \big(\mathbf{sq}_0 \bigsqcup\limits_k Z_k\big)$.

Se sigue de los cuadrados cocartesianos (10.6) y (10.8) que el siguiente es un cuadrado cocartesiano de $\mathbf{sSet}_0$:

$$\begin{tikzcd}
\bigvee\limits_{\Omega_i}\big(\partial\Delta^i/\mathbf{sq}_0\partial\Delta^i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\vee(\alpha^{i-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{i-1})"'] & X^{(i-1)} \arrow[d, "\varphi^i_{i-1}"] \\
\bigvee\limits_{\Omega_i}\big(\Delta^i/\mathbf{sq}_0\Delta^n\big) \arrow[r] & X^{(i)}\,;
\end{tikzcd}$$

por lo que de acuerdo a los Lemas 2.1.12 y 2.1.13 de [**Hov07**], φ es la composición transfinita de imagenes directas en $\mathbf{sSet}_0$ de elementos del conjunto:

$$\left\{ \quad \partial\Delta^n/\mathbf{sq}_0\partial\Delta^n \xhookrightarrow{\alpha^{n-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{n-1}} \Delta^n/\mathbf{sq}_0\Delta^n \quad \middle| \quad n \geq 1 \quad \right\}.$$

$\square$

Se concluye que $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$ es una categoría de modelos propia izquierda y combinatoria, por lo que de acuerdo al Teorema 4.7 de [**Bar10**] podemos considerar su localización de Bousfield por la izquierda con respecto al siguiente conjunto de morfismos:

$$S_n^{red} = \left\{ \quad \star \hookrightarrow \mathbb{S}^m \quad \middle| \quad m \geq n+1 \right\}, \tag{10.9}$$

donde $n \geq 0$ es un entero.

En las afirmaciones que siguen escribimos $[\,\cdot\,,\cdot\,]_\infty^{red}$ para denotar al conjunto de los morfismos en la categoría de fracciones $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_\infty^{red})^{-1}\big]$.

Lema 10.1.5. *Sea $m \geq 1$ y Z un conjunto simplicial reducido, entonces $\pi_m(Z) = \pi_m(Z,\star) = 0$ si y solamente si la función:*

$$[\mathbb{S}^m, Z]_\infty^{red} \xrightarrow{(j^m)^*} [\star, Z]_\infty^{red}\ ,$$

inducido por el morfismo $j^m\colon \star \hookrightarrow \mathbb{S}^m$ *en la categoría homotópica* $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_\infty^{red})^{-1}\big]$ *es biyectiva.*

En particular, si $n \geq 0$ *un conjunto simplicial reducido* Z *cumple que* $\pi_m(Z) = \pi_m(Z,\star) = 0$ *para todo* $m \geq n+1$ *si y solamente si,* Z *es un objeto* S_n^{red}*-local de* $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$*.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos para empezar que si A y B son conjuntos simpliciales reducidos, deducimos de la definición de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$ en (9.22) y (10.3) respectivamente, una biyección natural:

$$(10.10) \quad [A,B]_\infty^{\mathrm{red}} \cong \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(A,B')\big) = \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((A,\star),(B',\star)\big)\Big) \cong [(A,\star),(B,\star)]_\infty^{\mathrm{pt}},$$

donde B' es un remplazo fibrante de B en $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$; es decir B' es un conjunto simplicial reducido el cual es un complejo de Kan y en particular $(B',\star)$ también es un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_\infty)$.

Se sigue que si Z es un conjunto simplicial reducido entonces $[\mathbb{S}^m, Z]_\infty^{\mathrm{red}} \cong \pi_m(Z)$ (ver por ejemplo la biyección (8.33)). Por lo tanto la siguiente función:

$$\pi_m(Z) \cong [\mathbb{S}^m, Z]_\infty^{\mathrm{red}} \xrightarrow{(j^m)^*} [\star, Z]_\infty^{\mathrm{red}} \cong \star \ ,$$

es biyectiva si y solamente si $\pi_m(Z) = 0$. ☐

Mostremos también:

LEMA 10.1.6. *Si* $n \geq 0$*, un morfismo* $f\colon X \longrightarrow Y$ *de conjuntos simpliciales reducidos es una equivalencia débil* S_n^{red}*-local, si y solamente si* f *es una* n*-equivalencia débil de conjuntos simpliciales.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este Lema es análoga a la del Lema 8.4.4 si consideramos la versión punteada del coesqueleto $\mathbf{csq}_n^{\mathrm{pt}}(X,x_0) = \big(\mathbf{csq}_n(X), x_0\big)$ de §12.6 y recordamos que:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(A,B) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((A,\star),(B,\star)\big),$$

para cualesquiera A y B conjuntos simpliciales reducidos.

Para ver esto con mayor detalle, consideremos $f\colon X \longrightarrow Y$ un morfismo de conjuntos simpliciales reducidos y Z un conjunto simplicial reducido. Si tomamos reemplazos fibrantes de f y Z en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$, es decir consideremos un cuadrado conmutativo y una flecha:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] & & Z \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' & \text{y} & Z' \end{tikzcd} \ ,$$

donde los morfismos verticales son ∞-equivalencias débiles entre conjuntos simpliciales reducidos de codominio complejos Kan; entonces la función:

$$[Y,Z]_{\infty}^{red} \xrightarrow{f^*} [X,Z]_{\infty}^{red} \tag{10.11}$$

entre los conjuntos de morfismos de la categoría homotópica $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_{\infty}^{red})^{-1}\big]$, se identifica con la función:

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(Y',Z'\big)\Big) \arrow[r, "(f')^*"] \arrow[d, equal] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X',Z'\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((Y',\star),(Z',\star)\big)\Big) \arrow[r, "(f')^*"'] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((X',\star),(Z',\star)\big)\Big) .
\end{tikzcd} \tag{10.12}$$

Supongamos que Z es un conjunto simplicial reducido S_n^{red}-local. Se sigue del Lema 10.1.5 y del Corolario 12.1.2 que el morfismo:

$$Z' \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(Z')$$

es una ∞-equivalencia débil entre conjuntos simpliciales reducidos los cuales son objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_{\infty}^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_{\infty}^{red})$; en particular:

$$(Z',\star) \longrightarrow \big(\mathbf{csq}_{n+1}(Z'),\star\big) = \mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Z',\star) \quad ,$$

es una ∞-equivalencia débil entre conjuntos simpliciales punteados los cuales son objetos fibrantes de la categoría de modelos simplicial $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_\infty)$.

Por lo tanto, (10.12) se identifica con la función:

$$\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((Y',\star),\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Z',\star)\big)\Big) \xrightarrow{(f')^*} \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((X',\star),\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Z',\star)\big)\Big),$$

que de acuerdo al Lema 12.6.2 se identifica con la función:

(10.13)

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Y',\star),\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Z',\star)\big)\Big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(X',\star),\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Z',\star)\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\big[\mathbf{csq}_{n+1}Y',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big]_{\infty}^{red} \arrow[r, "\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*"'] & \big[\mathbf{csq}_{n+1}X',\mathbf{csq}_{n+1}X'\big]_{\infty}^{red} .
\end{tikzcd}$$

Si f es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos, se sigue del Corolario 12.1.2 que $\mathbf{csq}_{n+1}(f')$ es una ∞-equivalencia débil, es decir (10.13) es una función biyectiva. Por lo que si f es una n-equivalencia débil, la función (10.11) es biyectiva para todo conjunto simplicial reducido S_n^{red}-local Z, es decir f es una equivalencia débil S_n^{red}-local.

Sea ahora $f\colon\ X \longrightarrow Y$ un morfismo de conjuntos simpliciales reducidos el cual es una equivalencia S_n^{red}-local, y consideremos un remplazo fibrante de f en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$, es decir consideremos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y',
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son ∞-equivalencias débiles entre conjuntos simpliciales reducidos cuyos codominios son complejos de Kan.

Observemos para empezar que por el Corolario 12.1.2 y el Lema 10.1.5 los conjuntos simpliciales $\mathbf{csq}_{n+1}X'$ y $\mathbf{csq}_{n+1}Y'$ son S_n^{red}-locales; en particular la siguiente función:
(10.14)

$$\begin{tikzcd}
{[Y, \mathbf{csq}_{n+1}X']_\infty^{red}} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & {[X, \mathbf{csq}_{n+1}X']_\infty^{red}} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(Y', \mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, equal] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X', \mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((Y', \star), \mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(X', \star)\big)\Big) \arrow[r, "(f')^*"'] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big((X', \star), \mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(X', \star)\big)\Big),
\end{tikzcd}$$

es biyectiva.

Por otro lado, gracias al Lema 12.1.3, la función biyectiva (10.14) se identifica con la función:
(10.15)

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(Y', \star), \mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(X', \star)\big)\Big) \arrow[r, "\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(f')^*"] \arrow[d, equal] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(X', \star), \mathbf{csq}_{n+1}^{\mathrm{pt}}(X', \star)\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\mathbf{csq}_{n+1}Y', \mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\mathbf{csq}_{n+1}X', \mathbf{csq}_{n+1}X'\big)\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\big[\mathbf{csq}_{n+1}Y', \mathbf{csq}_{n+1}X'\big]_\infty^{red} \arrow[r, "\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*"'] & \big[\mathbf{csq}_{n+1}X', \mathbf{csq}_{n+1}X'\big]_\infty^{red}.
\end{tikzcd}$$

Sea $g:\ \mathbf{csq}_{n+1}Y' \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}X'$ un morfismo de la categoría $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_\infty^{red})^{-1}\big]$, tal que la composición $g \circ \mathbf{csq}_{n+1}(f')$ es el morfismo identidad del objeto $\mathbf{csq}_{n+1}X'$ en la categoría $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_\infty^{red})^{-1}\big]$.

Se verifica entonces que la composición:

$$[\mathbf{csq}_{n+1}X', \mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty^{red} \xrightarrow{\quad g^* \quad} [\mathbf{csq}_{n+1}Y', \mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty^{red} \xrightarrow{\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*} [\mathbf{csq}_{n+1}X', \mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty^{red},$$

es igual a la función identidad; por lo que:

$$[\mathbf{csq}_{n+1}Y', \mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty^{red} \xrightarrow{\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*} [\mathbf{csq}_{n+1}X', \mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty^{red} \xrightarrow{\quad g^* \quad} [\mathbf{csq}_{n+1}Y', \mathbf{csq}_{n+1}Y']_\infty^{red}$$

también es igual a la función identidad, pues la flecha $\mathbf{csq}_{n+1}(f')^*$ es biyectiva.

En particular $\mathbf{csq}_{n+1}(f')\circ g = \mathrm{id}$ en $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_\infty^{red})^{-1}\big]$. Dicho de otro modo, $\mathbf{csq}_{n+1}(f')$ es una ∞-equivalencia débil. Por lo tanto, de acuerdo al Corolario 12.1.2 f es una n-equivalencia débil. ☐

Deducimos del Teorema 4.7 de [**Bar10**] y de los Lemas 10.1.5 y 10.1.6 que venimos de mostrar que $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ es efectivamente una categoría de modelos, cuyos objetos fibrantes son los conjuntos simpliciales reducidos que son complejos de Kan X tales que $\pi_m(X) = 0$ para toda $m \geq n+1$.

Finalmente, si $0 \leq n < \infty$ se muestra que $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ con el enriquecimiento (10.3) es una categoría de modelos simplicial de orden n como hicimos con el caso $n = \infty$. Esto es posible ya que $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star})$ es una categoría de modelos simplicial de orden n (ver el Corolario 8.5.1 y los Lemas 9.2.1 y 9.3.3). ☐

Escribimos $\mathrm{Ho}_n\big(\,\mathbf{sSet}_0\,\big)$ para denotar a la *categoría de los n-tipos de homotopía reducidos*, es decir a la categoría homotópica de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ la categoría de modelos de la Proposición 10.1.2, y denotamos como $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_n^{red}$ al conjunto de los morfismos en $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0)$. Si X es un conjunto simplicial reducido, la clase asociada a X en el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría $\mathrm{Ho}_n\big(\,\mathbf{sSet}_0\,\big)$, es llamada el *$n$-tipo de homotopía reducido de X*.

Recordemos:

LEMA 10.1.7. *Si $0 \leq n \leq \infty$, la adjunción* (10.2) *de más arriba:*

(10.16)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, hook, "\nu"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\top"] & \mathbf{sSet}_\star \arrow[l, bend right=40, "\mathcal{H}"'] \end{tikzcd}$$

es una adjunción de Quillen con respecto a las estructuras de categoría de modelos de la Proposición 10.1.2 y del Corolario 8.5.1.

Más aún, la adjunción inducida entre las categorías homotópicas:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_0\big) \arrow[r, "\mathbf{L}\nu"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\top"] & \mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_\star\big) \arrow[l, bend right=40, "\mathbf{R}\mathcal{H}"'] \end{tikzcd}$$

determina una equivalencia entre la categoría de los n-tipos de homotopía reducidos $\mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_0\big)$ y la subcategoría plena de $\mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_\star\big)$ de los n-tipos de homotopía punteados conexos, es decir los X tales que $\pi_0(X) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. El funtor inclusión $\mathbf{sSet}_0 \hookrightarrow \mathbf{sSet}_\star$ respeta evidentemente los monomorfismos y las n-equivalencias débiles entre conjuntos simpliciales reducidos. Por lo tanto (10.16) es efectivamente una adjunción de Quillen.

Para mostrar la segunda afirmación, notemos primero que la transformación natural identidad es una unidad de la adjunción $\nu \dashv \mathcal{H}$. Además el funtor identidad de la categoría $\mathbf{sSet}_\star$ es un remplazo cofibrante para la estructura de categoría de modelos del Corolario 8.5.1. Como el funtor $\mathcal{H}$ respeta las n-equivalencias débiles entre complejos de Kan (usar por ejemplo la Proposición 8.6.1), se sigue que si A es un conjunto simplicial reducido el cual es un complejo de Kan, el morfismo $\widetilde{\eta}_A\colon A \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H} \circ \mathbf{L}\nu(A)$ en el segundo cuadrado de (4.7) es un isomorfismo de $\mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_0\big)$. Dicho de otro modo, toda unidad de la adjunción $\mathbf{L}\,\nu \dashv \mathbf{R}\,\mathcal{H}$ es un isomorfismo.

Por otro lado, notemos que la inclusión canónica es una counidad ε de la adjunción $\nu \dashv \mathcal{H}$. En particular, si (X, x_0) es un conjunto simplicial punteado conexo tal que X es un complejo de Kan, entonces $\varepsilon_{(X,x_0)}$ es una ∞-equivalencia débil entre complejos de Kan reducidos. No es difícil deducir en este caso que el morfismo $\widetilde{\varepsilon}_{(X,x_0)}\colon \mathbf{L}\nu \circ \mathbf{R}\mathcal{H}(X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ en el primer cuadrado de (4.7) es un isomorfismo de la categoría $\mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_\star\big)$. En otras palabras, toda counidad de la adjunción $\mathbf{L}\,\nu \dashv \mathbf{R}\,\mathcal{H}$ es un isomorfismo en los conjuntos simpliciales punteados conexos. ☐

La siguiente afirmación es un criterio que permite identificar a las fibraciones entre objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ (ver el Lema 2.1 de [**Sta14**]).

PROPOSICIÓN 10.1.8. *Si $0 \leq n \leq \infty$, sean X y Y objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ de la Proposición 10.1.2, es decir X y Y son complejos de Kan reducidos tales que $\pi_m(X) = 0 = \pi_m(Y)$ para toda $m \geq n+1$; entonces un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ es una fibración de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ si y solamente si f tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los elementos del siguiente conjunto:*

$$(10.17)\quad J_0 = \left\{ \quad \Lambda^{m,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \xhookrightarrow{\alpha^{m-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{m-1}} \Delta^m/\mathbf{sq}_0\Delta^m \quad \middle| \quad m \geq 2\,,\ 0 \leq k \leq m \quad \right\}.$$

(Notese que $m \geq 2$ en la definición de J_0).

DEMOSTRACIÓN. Ya que $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ es una localización de Bousfield por la izquierda de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$, se sigue de la Proposición 3.4.16 de [**Hir03**] que si X y Y son objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$, un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ es una fibración de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ si y solamente si f es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$.

Por lo tanto, es suficiente mostrar que si X y Y son complejos de Kan reducidos, entonces un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ es una fibración de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$, si y solamente si f tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los elementos de J_0.

Notemos primero:

LEMA 10.1.9. *Si $m \geq 2$ y $0 \leq k \leq m$, el morfismo de conjuntos simpliciales reducidos:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{m,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \arrow[r, hook, "\alpha^{m-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{m-1}"] & \Delta^m/\mathbf{sq}_0\Delta^m \end{tikzcd}$$

es un monomorfismo y una ∞-equivalencia débil. En particular, toda fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los elementos de J_0.

DEMOSTRACIÓN. Se verifica fácilmente que si $j\colon\ A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales, entonces $j/\mathbf{sq}_0 j\colon\ A/\mathbf{sq}_0 A \longrightarrow B/\mathbf{sq}_0 B$ también es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos.

Por otro lado, si tomamos cuadrados cocartesianos:

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r] & \Delta^m/\mathbf{sq}_0\Delta^m \\ \mathbf{sq}_0\Delta^m \arrow[r] \arrow[u] & \Delta^m \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \star \arrow[r] & \Lambda^{m,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \\ \mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \arrow[r] \arrow[u] & \Lambda^{m,k} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

que de acuerdo al Lema 6.1.2 son de hecho cuadrados homotópicamente cocartesianos de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_\infty, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty)$; se construye un cubo en $\mathbf{sSet}$ cuyas caras son todas cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \Lambda^{m,k} \arrow[dl] \arrow[dd, "\alpha^{m,k}"] \\ \star \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & \Lambda^{m,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \arrow[dd] & \\ & \mathbf{sq}_0\Delta^m \arrow[rr] \arrow[dl] & & \Delta^m \arrow[dl] \\ \star \arrow[rr] & & \Delta^m/\mathbf{sq}_0\Delta^m & \end{tikzcd}$$

donde $\alpha^{m,k}\colon\ \Lambda^{m,k} \longrightarrow \Delta^m$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales si $m \geq 1$ y $0 \leq k \leq m$; y el morfismo $\mathbf{sq}_0\alpha^{m,k}\colon\ \mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \longrightarrow \mathbf{sq}_0\Delta^m$ es un isomorfismo de conjuntos simpliciales si $m \geq 2$ y $0 \leq k \leq m$.

Deducimos del Lema 6.2.1 que el monomorfismo:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{m,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \arrow[r, hook, "\alpha^{m-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{m-1}"] & \Delta^m/\mathbf{sq}_0\Delta^m \end{tikzcd} ,$$

es una ∞-equivalencia débil si $m \geq 2$ y $0 \leq k \leq m$. ☐

Denotemos como $\mathcal{A}$ al conjunto de los morfismos de conjuntos simpliciales reducidos $f\colon X \longrightarrow Y$ donde X y Y son complejos de Kan y f cumple la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los elementos de J_0 en (10.17). Queremos mostrar que los morfismos de $\mathcal{A}$ son fibraciones de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_\infty^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_\infty^{red})$. Equivalentemente mostremos que los morfismos de conjuntos simpliciales reducidos en $\mathbf{mono} \cap \mathbf{W}_\infty^{red}$ tienen la propiedad de levantamiento por la izquierda con respecto a los morfismos de $\mathcal{A}$.

Supongamos para ello que tenemos un cuadrado conmutativo de conjuntos simpliciales reducidos:

(10.18)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde j es un monomorfismo y una ∞-equivalencia débil, X y Y son complejos de Kan y f tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los morfismos de J_0 en (10.17).

Debemos mostrar que el cuadrado (10.18) admite un levantamiento, es decir que existe un morfismo $F\colon B \longrightarrow X$ tal que $f \circ F = \psi$ y $F \circ j = \varphi$.

Consideremos primero, con ayuda del argumento del objeto pequeño, una factorización en $\mathbf{sSet}_0$ del morfismo ψ:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\psi_1"'] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & B' \arrow[r, "\psi_2"'] & Y\,, \end{tikzcd}$$

donde ψ_2 tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los morfismos de J_0 y ψ_1 es un morfismo en $\mathbf{cell}(J_0)$[8].

En seguida consideremos un cuadrado cartesiano en $\mathbf{sSet}_0$:

$$\begin{tikzcd} B' \underset{Y}{\times} X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "\psi_2"'] & Y\,, \end{tikzcd}$$

y si $\xi\colon A \longrightarrow B' \underset{Y}{\times} X$ es el único morfismo de conjuntos simpliciales reducidos tal que $p_2 \circ \xi = \varphi$ y $p_1 \circ \xi = \psi_1 \circ j$, tomemos una factorización en $\mathbf{sSet}_0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi_1"'] \arrow[rr, bend left, "\xi"] & A' \arrow[r, "\xi_2"'] & B' \underset{Y}{\times} X\,, \end{tikzcd}$$

---

[8] Recuerda que $\mathbf{cell}(J_0)$ es el conjunto de todas las composiciones transfinitas de las imágenes directas de los elementos de J_0.

donde ξ_2 tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los morfismos de J_0 y ξ_1 es un morfismo en $\mathbf{cell}\big(J_0\big)$.

Observemos que $(p_1 \circ \xi_2) \circ \xi_1 = p_1 \circ \xi = \psi_1 \circ j$ por lo que se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "j"'] & A' \arrow[d, "p_1 \circ \xi_2"] \\ B \arrow[r, "\psi_1"'] & B' . \end{tikzcd} \tag{10.19}$$

Por otro lado, notemos que el cuadrado (10.18) admite un levantamiento si lo mismo ocurre para el cuadrado (10.19). En efecto, si $G\colon\ B \longrightarrow A'$ cumple que $(p_1 \circ \xi_2) \circ G = \psi_1$ y $G \circ j = \xi_1$, entonces el morfismo $F\colon\ B \longrightarrow X$ definido por la composición $F = p_2 \circ \xi_2 \circ G$ cumple que:

$$f \circ F = f \circ p_2 \circ \xi_2 \circ G = \psi_2 \circ p_1 \circ \xi_2 \circ G = \psi_2 \circ \psi_1 = \psi$$

$$\text{y} \qquad F \circ j = p_2 \circ \xi_2 \circ G \circ j = p_2 \circ \xi_2 \circ \xi_1 = p_2 \circ \xi = \varphi .$$

Por último, ya que $j\colon\ A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales reducidos, para mostrar la existencia de un levantamiento del cuadrado (10.19), es suficiente mostrar:

a) $p_1 \circ \xi_2$ es una ∞-equivalencia débil.
b) $p_1 \circ \xi_2$ es una fibración de Kan.

El punto a) se deduce de la propiedad 2-de-3 que tienen las ∞-equivalencias débiles, pues $(p_1 \circ \xi_2) \circ \xi_1 = \psi_1 \circ j$ donde j es una ∞-equivalencia débil por hipótesis y los morfismos ξ_1 y ψ_1 son ∞-equivalencias débiles en tanto que elementos de $\mathbf{cell}(J_0)$ (ver el Lema 10.1.9).

Para mostrar b) observemos primero:

Lema 10.1.10. *Si Z es un conjunto simplicial reducido, entonces $Z \longrightarrow \star$ tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los morfismos de J_0 en* (10.17)*, si y solamente si Z es un complejo de Kan.*

Demostración. Ya que tenemos una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, hook, "\nu"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\perp"] & \mathbf{sSet} , \arrow[l, bend right=40, "\mathcal{F} = \cdot \big/ \mathbf{sq}_0(\,\cdot\,)"'] \end{tikzcd}$$

(donde el funtor ν normalmente se suprime); se sigue que un conjunto simplicial reducido X es un complejo de Kan si y solamente si el morfismo $X \longrightarrow \star$ cumple la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto al conjunto de morfismos:

$$\left\{ \quad \Lambda^{m,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{m,k} \xhookrightarrow{\alpha^{m-1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{m-1}} \Delta^m/\mathbf{sq}_0\Delta^m \quad \middle| \quad m \geq 1\,,\ 0 \leq k \leq m \quad \right\}.$$

El enunciado que queremos mostrar es una consecuencia de que un morfismo de la forma $X \longrightarrow \star$ donde X es cualquier conjunto simplicial reducido, siempre tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto al morfismo $\star \hookrightarrow \Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1 = \mathbb{S}^1$.

□

Mostremos también:

LEMA 10.1.11. *Sea* $T\colon Z \longrightarrow W$ *un morfismo de* $\mathcal{A}$*, es decir* Z *y* W *son conjuntos simpliciales reducidos los cuales son complejos de Kan, y* T *tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a los morfismos de* J_0 *en* (10.17)*. Si* T *es tal que la función* $T^\star\colon \pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(W)$ *es sobreyectiva, entonces* T *es una fibración de Kan.*

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar que T es una fibración de Kan, debemos mostrar simplemente que T tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto al morfismo:

$$\star \hookrightarrow \Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1 \ ;$$

es decir, debemos mostrar que la función $T_1\colon Z_1 \longrightarrow W_1$ es biyectiva.

Sea $w \in W_1$ un 1-simplejo del conjunto simplicial reducido W. Ya que la función $T^\star\colon \pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(W)$ es sobreyectiva, se sigue de la Proposición 8.6.1 que existe un 1-simplejo $z \in Z_1$ de Z y un 2-simplejo $\eta \in W_2$ de W tales que $d_2(\eta) = T_1(z)$ y $d_1(\eta) = w$ y $d_0(\eta) = \star$.

Consideremos el morfismo $\eta'\colon \Lambda^{2,1}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{2,1} \longrightarrow Z$ que definen las condiciones:

$$\begin{tikzcd} \Delta^1 \arrow[r, "\delta_2"'] \arrow[rrr, bend left, "z"] & \Lambda^{2,1} \arrow[r, "\text{cociente}"'] & \Lambda^{2,1}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{2,1} \arrow[r, "\eta'"'] & Z \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \Delta^1 \arrow[r, "\delta_0"'] \arrow[rrr, bend left, "\star"] & \Lambda^{2,1} \arrow[r, "\text{cociente}"'] & \Lambda^{2,1}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{2,1} \arrow[r, "\eta'"'] & Z \end{tikzcd} \ ;$$

y observemos que se tiene un cuadrado conmutativo:

(10.20)
$$\begin{tikzcd} \Lambda^{2,1}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{2,1} \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\alpha^{1,1}/\mathbf{sq}_0\alpha^{1,1}"'] & Z \arrow[d, "T"] \\ \Delta^2/\mathbf{sq}_0\Delta^2 \arrow[r, "\eta"'] & W \end{tikzcd}$$

Si $\xi\colon \Delta^2/\mathbf{sq}_0\Delta^2 \longrightarrow Z$ es un levantamiento del cuadrado (10.20), se constata que:

$$T_1(d_1\xi) = d_1(T_2\xi) = d_1(\eta) = w\,.$$

Por lo tanto $T_1\colon\ Z_1 \longrightarrow W_1$ es una función sobreyectiva. □

Regresando a la prueba de la Proposición 10.1.8, se sigue del Lema 10.1.10 que los conjuntos simpliciales A' y B' del diagrama (10.19) son complejos de Kan. En efecto, los morfismos p_1, ξ_2 y ψ_2 cumplen la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a J_0, y por hipótesis X y Y son complejos de de Kan. Por lo que los morfismos $A' \to \star$ y $B' \to \star$ cumplen la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a J_0.

Por último, como ya mostramos que $p_1 \circ \xi_2$ es una ∞-equivalencia débil, se deduce del Lema 10.1.11 el punto b), es decir que $p_1 \circ \xi_2$ es una fibración de Kan. □

§10.2. En el presente párrafo vamos a mostrar que si $0 \leq n < \infty$, la categoría de modelos simplicial punteada $\big(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big)$ de la Proposición 10.1.2 es una categoría de modelos simplicial de orden $n-1$.

De acuerdo al Corolario 9.2.5 es suficiente construir un funtor espacio de lazos de la categoría de modelos punteada $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$:

$$\mathbf{sSet}_0\big[\mathbf{W}_n^{red}\big] \xrightarrow{\ \Omega\ } \mathbf{sSet}_0\big[\mathbf{W}_n^{red}\big],$$

cuya n-ésima iteración Ω^n es isomorfo al funtor cero.

§10.2.1. Consideremos la sucesión de funtores:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[r, "\mathrm{i}_{1,0}"] & \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \arrow[r, "\vartheta"] & \mathbf{\Delta} \\ {[m]} \arrow[r, mapsto] & {\big([m],[0]\big)} \arrow[r, mapsto] & {[m+1]} \end{tikzcd} \tag{10.21}$$

donde $\mathrm{i}_{1,0}$ es el funtor inclusión en (11.1) y ϑ es la restricción a la categoría de los simplejos del funtor producto $\otimes$ definido en (8.4) para $\mathbf{\Delta}_+$.

Estamos interesados en el funtor *décalage* $\mathbb{D}\colon\ \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ definido como la composición de los funtores inducidos de (10.21):

$$\mathbf{sSet} \xrightarrow{\ \vartheta^*\ } \mathbf{ssSet} \xrightarrow{\ (\mathrm{i}_{1,0})^*\ } \mathbf{sSet}\ .$$

De forma explícita, si X es un conjunto simplicial entonces $\mathbb{D}(X)_m = X_{m+1}$ donde:

$$d_i : \mathbb{D}(X)_m = X_{m+1} \xrightarrow{\ d_i\ } X_m = \mathbb{D}(X)_{m-1} \qquad 0 \leq i \leq m$$

$$\text{y} \qquad s_j : \mathbb{D}(X)_{m-1} = X_m \xrightarrow{\ s_j\ } X_{m+1} = \mathbb{D}(X)_m \qquad 0 \leq j \leq m-1$$

son los morfismos cara y degenerados.

Recordemos que se tienen transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sq}_0 \arrow[r, Rightarrow, shift right, "\beta"'] & \mathbb{D} \arrow[l, Rightarrow, shift right, "\alpha"'] \arrow[r, Rightarrow, "\varrho"] & \mathrm{id}_{\mathbf{sSet}} ,
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos $\begin{tikzcd} \mathbf{sq}_0(X) \arrow[r, shift right, "\beta_X"'] & \mathbb{D}(X) \arrow[l, shift right, "\alpha_X"'] \arrow[r, "\varrho_X"] & X \end{tikzcd}$ son definidos por las funciones:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, shift right, "\underbrace{s_0 \ldots s_0}_{m+1}"'] & X_{m+1} \arrow[l, shift right, "\overbrace{d_0 \ldots d_0}^{m+1}"'] \arrow[r, "d_{m+1}"] & X_m
\end{tikzcd} \quad , \qquad \text{si} \quad m \geq 0$$

para todo conjunto simplicial X.

Estas funciones definen efectivamente morfismos de conjuntos simpliciales, pues de acuerdo a las identidades (8.1) tenemos para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq m-1$ que:

$$\begin{array}{rcl}
d_m \circ d_i = d_i \circ d_{m+1} & \text{y} & d_{m+1} \circ s_j = d_m \circ s_j \ , \\
\underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_0}_{m} \circ d_i = \underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_0}_{m+1} & \text{y} & \underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_0}_{m+1} \circ s_j = \underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_0}_{m} \ , \\
\underbrace{s_0 \circ \cdots \circ s_0}_{m} = d_i \circ \underbrace{s_0 \circ \cdots \circ s_0}_{m+1} & \text{y} & s_j \circ \underbrace{s_0 \circ \cdots \circ s_0}_{m} = \underbrace{s_0 \circ \cdots \circ s_0}_{m+1} \ .
\end{array}$$

LEMA 10.2.1. *Si X es un conjunto simplicial, los morfismos* $\begin{tikzcd} \mathbb{D}(X) \arrow[r, shift right, "\alpha_X"'] & \mathbf{sq}_0(X) \arrow[l, shift right, "\beta_X"'] \end{tikzcd}$ *satisfacen $\alpha_X \circ \beta_X = \mathrm{id}_{\mathbf{sq}_0(X)}$. Más aún, existe una homotopía $H : \mathrm{id}_{\mathbb{D}(X)} \simeq \beta_X \circ \alpha_X$, es decir $\mathbf{sq}_0(X)$ es un retracto por deformación de $\mathbb{D}(X)$.*

En particular, si X es un conjunto simplicial reducido el conjunto simplicial punteado $\mathbb{D}(X)$ por el morfismo β_X: $\star \longrightarrow \mathbb{D}(X)$ es contraible.

DEMOSTRACIÓN. Deducimos que $\alpha_X \circ \beta_X = \mathrm{id}_{\mathbf{sq}_0(X)}$, es decir que:

$$\big(\alpha_X\big)_m \circ \big(\beta_X\big)_m = \underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_0}_{m+1} \circ \underbrace{s_0 \circ \cdots \circ s_0}_{m+1} = \mathrm{id}_{X_0} \qquad \text{si} \quad m \geq 0 ,$$

de la igualdad $d_0 \circ s_0 = \mathrm{id}$.

Por otro lado, definimos H: $\mathbb{D}(X) \times \Delta^1 \longrightarrow \mathbb{D}(X)$ para $m \geq 0$, $x \in \mathbb{D}(X)_m = X_{m+1}$ y $\varphi \in \Delta^1_m$ por la fórmula:

$$H_m(x, \varphi) = \begin{cases} \underbrace{s_m \circ \cdots \circ s_t}_{m+1-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_m}_{m+1-t}(x) & \text{si } t = \min\Big\{0 \leq a \leq m \,\Big|\, \varphi(a) = 1\Big\} \text{ y } \varphi \neq \delta_1 \circ \underbrace{\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_0}_{m}, \\ x & \text{si } \varphi = \delta_1 \circ \underbrace{\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_0}_{m}. \end{cases}$$

H es efectivamente un morfismo de conjuntos simpliciales, ya que se tienen las siguientes igualdades de funciones:

$$\begin{aligned}
d_i \circ \underbrace{s_m \circ \cdots \circ s_t}_{m+1-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_m}_{m+1-t} &= \underbrace{s_{m-1} \circ \cdots \circ s_t}_{m-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_{m-1}}_{m-t} \circ d_i && \text{si} \quad 0 \le t < i \le m, \\
d_i \circ \underbrace{s_m \circ \cdots \circ s_t}_{m+1-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_m}_{m+1-t} &= \underbrace{s_{m-1} \circ \cdots \circ s_{t-1}}_{m+1-t} \circ \underbrace{d_{t-1} \circ \cdots \circ d_{m-1}}_{m+1-t} \circ d_i && \text{si} \quad 0 \le i \le t \le m, \\
\underbrace{s_m \circ \cdots \circ s_t}_{m+1-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_m}_{m+1-t} \circ s_j &= s_j \circ \underbrace{s_{m-1} \circ \cdots \circ s_t}_{m-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_{m-1}}_{m-t} && \text{si} \quad 0 \le t \le j \le m-1, \\
\underbrace{s_m \circ \cdots \circ s_{t+1}}_{m-t} \circ \underbrace{d_{t+1} \circ \cdots \circ d_m}_{m-t} \circ s_j &= s_j \circ \underbrace{s_{m-1} \circ \cdots \circ s_t}_{m-t} \circ \underbrace{d_t \circ \cdots \circ d_{m-1}}_{m-t} && \text{si} \quad 0 \le j < t \le m-1,
\end{aligned}$$

Más aún, $H : \mathrm{id}_{\mathbb{D}(X)} \simeq \beta_X \circ \alpha_X$ pues para toda $m \ge 0$ y $x \in \mathbb{D}(X)_m = X_{m+1}$ se tiene que:

$$H_m(x, \delta_1 \circ \underbrace{\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_0}_{m}) = x \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
H_m(x, \delta_0 \circ \underbrace{\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_0}_{m}) &= \underbrace{s_m \circ \cdots \circ s_0}_{m+1} \circ \underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_m}_{m+1} \\
&= \underbrace{s_0 \circ \cdots \circ s_0}_{m+1} \circ \underbrace{d_0 \circ \cdots \circ d_0}_{m+1} = \big(\beta_X\big)_n \circ \big(\alpha_X\big)_m .
\end{aligned}$$

□

Recordemos también:

Lema 10.2.2. *Si X es un conjunto simplicial, entonces X es un complejo de Kan si y solamente si el morfismo $\varrho_X \colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow X$ es una fibración de Kan.*

Demostración. Sean $m \ge 1$ y $0 \le k \le m$. Notemos que con ayuda del Lema de Yoneda, podemos identificar a un cuadrado conmutativo:

(10.22)
$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m,k} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha^{m-1,k}"'] & \mathbb{D}(X) \arrow[d, "\varrho_X"] \\
\Delta^m \arrow[r, "\varphi"'] & X
\end{tikzcd}$$

con una $(m+1)$-eada $(\widetilde{\psi}_0, \ldots, \widetilde{\psi}_{k-1}, \widetilde{\psi}_k, \ldots, \widetilde{\psi}_m, \widetilde{\varphi})$ de m-simplejos de X tales que:

$$\begin{aligned}
& d_i \, \widetilde{\psi}_j = d_{j-1} \, \widetilde{\psi}_i \qquad \text{si} \quad 0 \le i < j \le m\,,\ i, j \ne k \\
\text{y} \qquad & d_i \, \widetilde{\varphi} = d_m \, \widetilde{\psi}_i \qquad \text{si} \quad 0 \le i \le m\,,\ i \ne k\,;
\end{aligned}$$

ó de manera más compacta, tales que:

$$d_i\,\widetilde{\psi}_j = d_{j-1}\,\widetilde{\psi}_i \qquad \text{si} \quad 0 \le i < j \le m+1, \quad i,j \neq k$$

donde $\widetilde{\psi}_{m+1} = \widetilde{\varphi}$.

Dicho de otro modo, la $(m+1)$-eada $(\widetilde{\psi}_0, \dots, \widetilde{\psi}_{k-1}, \widetilde{\psi}_k, \dots, \widetilde{\psi}_m, \widetilde{\varphi})$ de m-simplejos de X determina un morfismo μ como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{m+1,k} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha^{m,k}"'] & X \arrow[d] \\
\Delta^{m+1} \arrow[r] & \star
\end{tikzcd}$$

Si suponemos que X es un complejo de Kan, existe $w \in X_{m+1} = \mathbb{D}(X)_m$ tal que $d_i(w) = \widetilde{\psi}_i$ si $0 \le i \le m$, $i \neq k$ y $d_{m+1}(w) = \widetilde{\varphi}$. No es difícil verificar que w determina un levantamiento del cuadrado (10.22). El recíproco es análogo. □

§10.2.2. Si X es un conjunto simplicial punteado $x_0\colon \star \longrightarrow X$, definimos *el espacio de lazos de X sobre x_0* como la fibra del morfismo $\varrho_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow X$ sobre x_0:

$$\Omega_{x_0}(X)_n = \Big\{\, \alpha \in \mathbb{D}(X)_n = X_{n+1} \;\Big|\; d_{n+1}(\alpha) = x_0 \,\Big\} \qquad \text{si } n \ge 0\,. \tag{10.23}$$

Dicho de otro modo, tomamos un cuadrado cartesiano en **sSet** (ó equivalentemente en $\mathbf{sSet}_\star$):

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{x_0}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{D}(X) \arrow[d, "\varrho_X"] \\
\star \arrow[r, "x_0"'] & X\,.
\end{tikzcd} \tag{10.24}$$

LEMA 10.2.3. *Sea $0 \le n \le \infty$. Si X es un complejo de Kan reducido tal que $\pi_i(X) = 0$ para $i \ge n+1$, entonces el cuadrado cartesiano* (10.24) *asociado al único morfismo $x_0\colon \star \longrightarrow X$ es un cuadrado homotópicamente cartesiano en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$, el cual tiene las propiedades:*

(I) *El único morfismo $\alpha_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow \star$ es una ∞-equivalencia débil.*

(II) *El conjunto simplicial $\Omega_\star(X)$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_{n-1}, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_{n-1})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \le n \le \infty$ y X un complejo de Kan reducido tal que $\pi_i(X) = 0$ para $i \ge n+1$. Se sigue de los Lemas 10.2.1 y 10.2.2 que el morfismo $\varrho_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow X$ es una fibración de Kan y que $\alpha_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow \mathbf{sq}_0(X) = \star$ es una ∞-equivalencia débil. En particular los conjuntos simpliciales X y $\mathbb{D}(X)$ son objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$, si los consideramos como conjuntos simpliciales punteados por los 0-simplejos $\star \in X_0$ y $\star = s_0(\star) \in \mathbb{D}(X)_0 = X_1$ respectivamente.

Concluimos que la fibración de Kan $\varrho_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow X$ es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$, y por lo tanto el espacio de lazos simplicial $\Omega_\star(X)$ es un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$, pues las fibraciones son estables por cambio de base en toda categoría de modelos.

Más aún, por el Lema 6.1.2, el cuadrado (10.24) es de hecho un cuadrado homotópicamente cartesiano de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$.

Finalmente, observemos que un objeto fibrante Z de $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$ es fibrante en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_{n-1}, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_{n-1})$, si y solamente si $\pi_n(Z) = 0$. No es difícil deducir de la Proposición 8.6.1 que si $n \geq 0$ entonces $\pi_n\big(\Omega_\star(X)\big) \cong \pi_{n+1}\big(X\big) = 0$. ☐

El siguiente enunciado es una versión combinatoria del Lema 10.2.3 (ver [**Dus02**]):

LEMA 10.2.4. *Si X es un 0-grupoide de Kan reducido (ver al final de §8.3), entonces X y $\Omega_\star(X)$ son el conjunto simplicial constante de valor $\star$. Por otro lado si $n \geq 1$ es un número entero y X es un n-grupoide de Kan reducido, entonces $\Omega_\star(X)$ es un $(n-1)$-grupoide de Kan.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es un 0-grupoide de Kan reducido, según del Corolario 12.3.2 los morfismos cara y degenerados de X son isomorfismos. En particular de la definición (10.23) y como X es reducido, deducimos que X y $\Omega_\star(X)$ son el conjunto simplicial constante de valor $\star$.

Sea $n \geq 1$. Queremos mostrar que si X es un conjunto simplicial reducido el cual es un complejo de Kan que cumple la condición de extensión de Kan de manera estricta en dimensión m para $m \geq n$, entonces $\Omega_\star(X)$ es un complejo de Kan que cumple la condición de extensión de Kan de manera estricta en dimensión m para $m \geq n-1$.

Recordemos para empezar que por el Lema de Yoneda y la definición del conjunto simplicial $\Lambda^{m+1,k}$, si $m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m+1$ podemos identificar a la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{m,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big)$$

con la función:

$$\begin{array}{ccc} X_{m+1} & \longrightarrow & \left\{ \big(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1} \ldots, a_{m+1}\big) \in X_m^{m+1} \;\middle|\; \begin{array}{c} d_i a_j = d_{j-1} a_i \text{ si} \\ 0 \leq i < j \leq m+1,\ i, j \neq k. \end{array} \right\}. \\ \eta & \longmapsto & \big(d_0(\eta), \ldots, d_{k-1}(\eta), d_{k+1}(\eta) \ldots, d_{m+1}(\eta)\big) \end{array} \tag{10.25}$$

De la misma forma, si $m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m$ identificamos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m}, \Omega_\star(X)\big) \xrightarrow{\alpha_{\Omega_\star(X)}^{m-1,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m,k}, \Omega_\star(X)\big)$$

con la siguiente función:

(10.26)

$$\begin{array}{ccc} \left\{\alpha \in X_{m+1} \middle| d_{m+1}(\alpha) = \star\right\} & \longrightarrow & \left\{\big(b_0,\dots,b_{k-1},b_{k+1}\dots,b_m\big) \in X_m^m \;\middle|\; \begin{array}{c} d_m(b_i) = \star \text{ si } 0 \le i \le m,\ i \neq k \\ d_i b_j = d_{j-1} b_i \text{ si } 0 \le i < j \le m,\ i,j \neq k \end{array} \right\}. \\ \alpha & \mapsto & \big(d_0(\alpha),\dots,d_{k-1}(\alpha),d_{k+1}(\alpha)\dots,d_m(\alpha)\big) \end{array}$$

Más aún, se verifica sin dificultad que si $m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m$ el siguiente cuadrado conmuta:

(10.27)

$$\begin{tikzcd} X_{m+1} \arrow[r, "(10.25)"] & \left\{\big(a_0,\dots,a_{k-1},a_{k+1}\dots,a_{m+1}\big) \in X_m^{m+1} \;\middle|\; \begin{array}{c} d_i a_j = d_{j-1} a_i \text{ si} \\ 0 \le i < j \le m+1,\ i,j \neq k. \end{array} \right\} \\ \left\{\alpha \in X_{m+1} \middle| d_{m+1}(\alpha) = \star\right\} \arrow[u] \arrow[r, "(10.26)"'] & \left\{\big(b_0,\dots,b_{k-1},b_{k+1}\dots,b_m\big) \in X_m^m \;\middle|\; \begin{array}{c} d_m(b_i) = \star \text{ si } 0 \le i \le m,\ i \neq k \\ d_i b_j = d_{j-1} b_i \text{ si } 0 \le i < j \le m,\ i,j \neq k \end{array} \right\}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde la función que asciende a la izquierda es la contención y la función que asciende a la derecha es definida por la regla:

$$\big(b_0,\dots,b_{k-1},b_{k+1}\dots,b_m\big) \qquad \longmapsto \qquad \big(b_0,\dots,b_{k-1},b_{k+1}\dots,b_m,\star\big).$$

De hecho se verifica sin problemas que el cuadrado (10.27) es un cuadrado cartesiano de conjuntos. Por lo que si X cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m (resp. la cumple de manera estricta en dimensión m), entonces $\Omega_\star(X)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $m-1$ (resp. la cumple de manera estricta en dimensión m). $\square$

§10.2.3. Si X es un conjunto simplicial reducido, consideremos ahora el morfismo de conjuntos simpliciales reducidos:

$$\mathbb{D}^{red}(X) \xrightarrow{\varrho_X^{red}} X \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H}\Big(\ \mathbb{D}(X) \xrightarrow{\varrho_X} X\ \Big).$$

imagen del morfismo $\varrho_X\colon\ \mathbb{D}(X) \longrightarrow X$ por el funtor adjunto derecho de la adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, hookrightarrow, "\nu"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\top"] & \mathbf{sSet}_\star . \arrow[l, bend right, "\mathcal{H}"'] \end{tikzcd} \tag{10.28}$$

De manera explícita se tiene que $\mathbb{D}^{red}(X)_0 = \{\star = s_0(\star)\} \subseteq X_1$ y si $n \geq 1$:

$$\mathbb{D}^{red}(X)_n = \Big\{\ \alpha \in X_{n+1}\ \Big|\ d_{i_n} \circ \cdots \circ d_{i_1}(\alpha) = \star \in X_1 \quad \text{si} \quad 0 \leq i_j \leq n+1-j \Big\}.$$

Definimos *el espacio de lazos simplicial reducido* de un conjunto simplicial reducido X, como la fibra del morfismo $\varrho_X^{red}\colon \mathbb{D}^{red}(X) \longrightarrow X$ sobre el 0-simplejo $\star$; de manera explícita $\mathbb{\Omega}^{red}(X)_0 = \{\star\} = \mathbb{D}^{red}(X)_0$ y si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{\Omega}^{red}(X)_n &= \Big\{\alpha \in \mathbb{D}^{red}(X)_n \;\Big|\; d_{n+1}(\alpha) = \star\Big\}\\ &= \Big\{\alpha \in X_{n+1} \;\Big|\; d_{n+1}(\alpha) = \star \in X_n \text{ y}\\ &\qquad\qquad d_{i_n} \circ \cdots \circ d_{i_1}(\alpha) = \star \in X_1 \text{ si } 0 \leq i_j \leq n+1-j\Big\}.\end{aligned}$$

En particular se tiene un cuadrado cartesiano de $\mathbf{sSet}_0$ (ó de $\mathbf{sSet}$):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{\Omega}^{red}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{D}^{red}(X) \arrow[d, "\rho_X^{red}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{10.29}$$

Lema 10.2.5. *Sea $1 \leq n \leq \infty$. Si X es un complejo de Kan reducido tal que $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq n+1$, entonces el cuadrado cartesiano* (10.29) *es un cuadrado homotópicamente cartesiano en la categoría de modelos* $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ *el cual tiene las propiedades:*

(i) *El único morfismo $\alpha_X\colon \mathbb{D}^{red}(X) \longrightarrow \star$ es una ∞-equivalencia débil.*

(ii) *El conjunto simplicial reducido $\mathbb{\Omega}^{red}(X)$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos* $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_{n-1}^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_{n-1}^{red})$.

Demostración. Sea X un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$, es decir X es un complejo de Kan reducido tal que $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq n+1$. Se sigue del Lema 10.1.7 que el morfismo ϱ_X^{red} imagen del morfismo $\varrho_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow X$ por el funtor adjunto derecho de la adjunción (10.28), es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$. En particular, los conjuntos simpliciales reducidos $\mathbb{D}^{red}(X)$ y $\mathbb{\Omega}^{red}(X)$ son objetos fibrantes de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ y por el Lema 6.1.2 el cuadrado (10.29) es un cuadrado homotópicamente cartesiano de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$.

Más aún, ya que $\alpha_X\colon \mathbb{D}(X) \longrightarrow \star$ es una ∞-equivalencia débil entre complejos de Kan punteados:

$$\mathcal{H}\Big(\ \mathbb{D}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \star\ \Big) = \ \mathbb{D}^{red}(X) \longrightarrow \star$$

también es una ∞-equivalencia débil entre complejos de Kan reducidos.

Finalmente, recordemos que un objeto fibrante Z de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ es fibrante en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_{n-1}^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_{n-1}^{red})$ si y solamente si $\pi_n(Z) = 0$. Deducimos fácilmente que $\pi_n\big(\mathbb{\Omega}^{red}(X)\big) \cong \pi_{n+1}\big(X\big) = 0$ de la Proposición 8.6.1. □

Deducimos de los Lemas 10.2.5 y 6.4.1 el siguiente enunciado:

COROLARIO 10.2.6. *Si* $1 \leq n \leq \infty$ *el funtor* Ω^{red}: $\mathbf{sSet}_0 \longrightarrow \mathbf{sSet}_0$ *definido arriba respeta las* n*-equivalencias débiles entre los objetos fibrantes de la categoría de modelos* $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ *de la Proposición 10.1.2. Más aún, un funtor derivado total por la derecha de* Ω^{red} *es un funtor espacio de lazos de* $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ *tal que* $\star \longrightarrow \Omega^{red}(X)$ *es una* $(n-1)$*-equivalencia débil para todo objeto fibrante* X*.*

En particular, la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ *junto con el enriquecimiento* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$ *definido en* (10.3) *es una categoría de modelos simplicial punteada de orden* $n-1$*.*

Por el Corolario 10.2.6, el funtor derivado de los morfismos $\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$ de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ induce en la categoría de los n-tipos de homotopía reducidos $\mathrm{Ho}_n\big(\mathbf{sSet}_0\big)$, es decir la categoría homotópica $\mathbf{sSet}_0\big[(\mathbf{W}_n^{red})^{-1}\big]$ de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$, un enriquecimiento con tensor y cotensor sobre la categoría cartesiana cerrada $\mathrm{Ho}_{n-1}\big(\mathbf{sSet}\big)$ de los $(n-1)$-tipos de homotopía (la categoría homotópica de los $(n-1)$-grupoides).

La categoría de los n-tipos de homotopía reducidos con tal enriquecimiento sobre la categoría homotópica de los $(n-1)$-grupoides es llamada la *categoría homotópica de los* n*-grupos.*

Señalemos la siguiente versión equivalente de esta categoría: Escribimos $\mathbf{Fib}_0^n$ para denotar a la subcategoría de $\mathbf{sSet}_0$ cuyos objetos son los conjuntos simpliciales n-fibrantes reducidos, es decir los objetos fibrantes de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ la categoría de modelos de la Proposición 10.1.2, o de manera explicita los complejos de Kan X tales que $X_0 = \star$ y $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq n+1$.

Deducimos del Corolario 10.2.6:

COROLARIO 10.2.7. *Sea* $0 < n < \infty$*. Si* X *y* Y *son conjuntos simpliciales* n*-fibrantes reducidos, el conjunto simplicial de los morfismos* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X, Y)$ *de* (10.3) *es un conjunto simplicial* $(n-1)$*-fibrante. Dicho de otro modo, el funtor* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$ *induce por restricción un enriquecimiento de la categoría* $\mathbf{Fib}_0^n$ *sobre la categoría catesiana cerrada* $\mathbf{Fib}^{n-1}$ *(ver el Lema 8.4.6).*

Si $h\mathbf{Fib}_0^n$ denota a la categoría de los conjuntos simpliciales n-fibrantes reducidos donde el conjunto de morfismos es el conjunto de los componentes conectables por trayectorias $\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big)$, se sigue que el funtor inclusión canónico de $\mathbf{Fib}_0^n$ en $\mathbf{sSet}_0$ induce una equivalenca de categorías entre $h\mathbf{Fib}_0^n$ y la categoría de los n-tipos de homotopía reducidos $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0)$.

Por último, observemos que el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$ es un enriquecimiento de $h\mathbf{Fib}_0^n$ sobre la categoría cartesiana cerrada $h\mathbf{Fib}^{n-1}$, mientras que el enriquecimiento de la categoría de los n-tipos de homotopía reducidos $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0)$ sobre la categoría cartesiana cerrada de los $(n-1)$-tipos de homotopía $\mathrm{Ho}_{n-1}(\mathbf{sSet})$ es un funtor derivado de los morfismos $\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$.

11. Conjuntos bisimpliciales reducidos

En la presente sección vamos a recordar la estructura de categoría de modelos en los conjuntos bisimpliciales reducidos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ donde las equivalencias débiles son las n-equivalencias débiles diagonales. En el Corolario 11.3.4 determinamos condiciones suficientes para que un conjunto bisimplicial sea un objeto fibrante en $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$.

§11.1. Denotamos como **ssSet** a la categoría de los conjuntos bisimpliciales, es decir de los funtores:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta})^{op} & \xrightarrow{X} & \mathbf{Set} \\ ([p],[q]) & \longmapsto & X_{p,q} \end{array}$$

y de las transformaciones naturales entre ellos.

Las proyecciones canónicas:

$$\begin{array}{ccc} \Delta\times\Delta & \xrightarrow{\mathrm{p}_1} & \Delta \\ ([p],[q]) & \longmapsto & [p] \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta\times\Delta & \xrightarrow{\mathrm{p}_2} & \Delta\,, \\ ([p],[q]) & \longmapsto & [q] \end{array}$$

inducen funtores $\mathrm{p}_1^*, \mathrm{p}_2^*\colon\ \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{ssSet}$ definidos en un conjunto simplicial K como:

$$\mathrm{p}_1^*(K)_{p,q} = K_p \qquad \text{y} \qquad \mathrm{p}_2^*(K)_{p,q} = K_q\,,$$

los cuales admiten funtores adjuntos definidos por las fórmulas:

$$\begin{array}{l} \mathrm{p}_{1\,!}(X) = \operatorname*{colim}_q X_{\bullet,q}\,, \quad \mathrm{p}_{1\,*}(X) = \lim_q X_{\bullet,q} \cong X_{\bullet,0} \\ \mathrm{p}_{2\,!}(X) = \operatorname*{colim}_p X_{p,\bullet} \quad \text{y} \quad \mathrm{p}_{2\,*}(X) = \lim_p X_{p,\bullet} \cong X_{0,\bullet}\,. \end{array}$$

Definimos el *producto caja* de conjuntos simpliciales por la regla:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sSet}\times\mathbf{sSet} & \xrightarrow{\boxtimes} & \mathbf{ssSet}\,. \\ (K,L) & \longmapsto & \mathrm{p}_1^*(K)\times\mathrm{p}_2^*L \end{array}$$

Observemos que si $k\geq 0$ las inclusiones canónicas:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathrm{i}_{1,k}} & \Delta\times\Delta \\ [p] & \longmapsto & ([p],[k]) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathrm{i}_{2,k}} & \Delta\times\Delta\,, \\ [q] & \longmapsto & ([k],[q]) \end{array} \tag{11.1}$$

inducen adjunciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet} \arrow[r, bend right, "(\mathrm{i}_{1,k})^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "(\mathrm{i}_{1,k})_!"'] & \text{y} & \mathbf{ssSet} \arrow[r, bend right, "(\mathrm{i}_{2,k})^*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,, \arrow[l, bend right, "(\mathrm{i}_{2,k})_!"']
\end{tikzcd}$$

donde $(\mathrm{i}_{1,k})_!\,A \cong A \boxtimes \Delta^k$ y $(\mathrm{i}_{2,k})_!\,A \cong \Delta^k \boxtimes A$ para todo conjunto simplicial A.

Si X es un conjunto bisimplicial, llamamos a los siguientes conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{i}_{1,k})^*X \;=\; X_{\bullet,k} \;=\; X_{0,k} \arrow[r, shift right, "s^h_0"'] & X_{1,k} \arrow[l, bend right=50, "d^h_1"'] \arrow[l, shift right, "d^h_0"'] & \cdots\cdots & X_{n,k} \arrow[r, shift right, "s^h_n"'] \arrow[r, bend right=60, "\vdots\; s^h_0"'] & X_{n+1,k} \arrow[l, shift right, "d^h_0"'] \arrow[l, bend right=60, "d^h_{n+1}\;\vdots"'] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{y} \qquad (\mathrm{i}_{2,k})^*X \;=\; X_{k,\bullet} \;=\; X_{k,0} \arrow[r, shift right, "s^v_0"'] & X_{k,1} \arrow[l, bend right=50, "d^v_1"'] \arrow[l, shift right, "d^v_0"'] & \cdots\cdots & X_{k,n} \arrow[r, shift right, "s^v_n"'] \arrow[r, bend right=60, "\vdots\; s^v_0"'] & X_{k,n+1} \arrow[l, shift right, "d^v_0"'] \arrow[l, bend right=60, "d^v_{n+1}\;\vdots"'] & \cdots\cdots\;,
\end{tikzcd}$$

respectivamente, el *conjunto simplicial horizontal* y el *conjunto simplicial vertical* en *grado k* de X.

Por ejemplo, si $k = 0$ se tiene que $(\mathrm{i}_{1,0})_! \cong \mathrm{p}_1^*$, $(\mathrm{i}_{1,0})^* \cong \mathrm{p}_{1\,*}$, $(\mathrm{i}_{2,0})_! \cong \mathrm{p}_2^*$ y $(\mathrm{i}_{2,0})^* \cong \mathrm{p}_{2\,*}$; en particular:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^q, X_{p,\bullet}\big) \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^p, X_{\bullet,q}\big) \\
 & X_{p,q} &
\end{tikzcd} \tag{11.2}$$

para todo conjunto bisimplicial X.

Recordemos finalmente que la categoría **ssSet** es cartesiana cerrada; en efecto, para todo conjunto bisimplicial X se tiene la adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet} \arrow[r, bend left, "X \times \cdot"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet} \arrow[l, bend left, "\mathrm{hom}(X,\cdot)"] & \text{donde} \quad \mathrm{hom}(X,Y)_{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(X \times (\Delta^p \boxtimes \Delta^q), Y\big)\,.
\end{tikzcd}$$

En particular deducimos dos enriquecimientos de **ssSet** sobre la categoría cartesiana cerrada de los conjuntos simpliciales **sSet**:

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}}\big(X, Y\big)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(X \times \mathrm{p}_i^*(\Delta^n), Y\big) \tag{11.3}$$

donde $0 \leq i \leq 1$, junto con las adjunciones:

(11.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[r, bend left, "X \times \mathrm{p}_i^*(\cdot)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet} \arrow[l, bend left, "\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}}\big(X, \cdot\big)"]
\end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[r, bend left, "\mathrm{hom}\big(\mathrm{p}_i^*(\cdot), Y\big)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet}^{op} \arrow[l, bend left, "\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\cdot, Y\big)"]
\end{tikzcd}.$$

§11.2. Escribimos $\mathbf{ssSet}_0$ para denotar a la subcategoría plena de $\mathbf{ssSet}$ cuyos objetos son los conjuntos bisimpliciales reducidos, es decir los conjuntos bisimpliciales X tales que $X_{p,0} = \star$ para todo $p \geq 0$. De manera equivalente, $\mathbf{ssSet}_0$ es la categoría de los funtores:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}^{op} \arrow[r, "X"] & \mathbf{ssSet}_0 \\
{[p]} \arrow[r, mapsto] & X_{p,\bullet}
\end{tikzcd}$$

y las transformaciones naturales entre ellos.

Si $\mathbf{ssSet}_\star$ denota a la categoría de los conjuntos bisimpliciales punteados, el funtor inclusión de $\mathbf{ssSet}_0$ en $\mathbf{ssSet}$ se factoriza:

(11.5)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet}_0 \arrow[rr, hook, "\textit{Funtor inclusión}"] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{ssSet}. \\
& \mathbf{ssSet}_\star \arrow[ur, "\textit{Funtor que olvida}"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, las adjunciones (10.2) inducen adjunciones:

(11.6)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet}_0 \cong \mathbf{sSet}_0^{\Delta^{op}} \arrow[r, hook] & \mathbf{sSet}^{\Delta^{op}} \cong \mathbf{ssSet} \arrow[l, bend right, "\mathcal{F}^{\Delta^{op}}"', "\perp"]
\end{tikzcd}$$

$$\text{y} \qquad \begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet}_0 \cong \mathbf{sSet}_0^{\Delta^{op}} \arrow[r, hook] & \mathbf{sSet}_\star^{\Delta^{op}} \cong \mathbf{ssSet}_\star \arrow[l, bend right, "\mathcal{G}^{\Delta^{op}}"', "\perp"] \arrow[l, bend left, "\mathcal{H}^{\Delta^{op}}", "\perp"']
\end{tikzcd}.$$

Las versiones punteadas (ver (9.34) y (9.35)) de los enriquecimientos (11.3) de la categoría de los conjuntos bisimpliciales, inducen en la categoría $\mathbf{ssSet}_0$ dos enriquecimientos simpliciales:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X, Y\big)_n &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big(\big(X \times \mathrm{p}_i^*(\Delta^n)\big)/\big(\star \times \mathrm{p}_i^*(\Delta^n)\big), Y\Big) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_\star}\Big(\big(X \times \mathrm{p}_i^*(\Delta^n)\big)/\big(\star \times \mathrm{p}_i^*(\Delta^n)\big), Y\Big) \\
&= \underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_\star}\big(X, Y\big)_n
\end{aligned} \tag{11.7}$$

donde $0 \leq i \leq 1$, junto con adjunciones:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet} \arrow[r, bend left, "X \overset{(i)}{\wedge} \cdot"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet}_0 \arrow[l, bend left, "\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}\left(X, \cdot\right)"] \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{sSet} \arrow[r, bend left, "Y^{\overset{(i)}{\wedge} \cdot}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet}_0^{op} \arrow[l, bend left, "\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}\left(\cdot, Y\right)"] \end{tikzcd} \tag{11.8}$$

definidas como sigue:

$$X \overset{(i)}{\wedge} K = \big(X \times \mathrm{p}_i^*(K)\big)/\big(\star \times \mathrm{p}_i^*(K)\big) \qquad \text{y}$$

$$\big(Y^{\overset{(i)}{\wedge} K}\big)_{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\Bigg(\Big(\mathrm{p}_i^* K \times (\Delta^p \boxtimes \Delta^q)\Big)/\Big(\mathrm{p}_i^* K \times \big(\Delta^p \boxtimes \mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big)\Big), Y\Bigg).$$

Observemos que si X y Y son conjuntos bisimpliciales reducidos, se deduce de la primera adjunción en (11.6) que:

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, Y\big)_n &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(\big(X \times \mathrm{p}_1^*(\Delta^n)\big)/\big(\star \times \mathrm{p}_1^*(\Delta^n)\big), Y\Big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(X \times \mathrm{p}_1^*(\Delta^n), Y\big) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}}\big(X, Y\big)_n . \end{aligned} \tag{11.9}$$

Sin embargo, tenemos una función no necesariamente biyectiva:

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X, Y\big)_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(X, Y\big)_n \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X \times \mathrm{p}_2^*(\Delta^n)/\big(\star \times \mathrm{p}_2^*(\Delta^n)\big), Y\big) & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(X \times \mathrm{p}_2^*(\Delta^n), Y\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big(\big(X \times \mathrm{p}_2^*(\Delta^n)\big)/\big(\star \times \mathrm{p}_2^*(\mathbf{sq}_0 \Delta^n)\big), Y\Big). \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 11.2.1. *Sea $0 \leq n \leq \infty$. La categoría de los conjuntos bisimpliciales reducidos* $\mathbf{ssSet}_0$ *con el enriquecimiento* $\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}_0}$ *admite una estructura de categoría de modelos simplicial de orden n, donde*[9]

$$\begin{aligned} \big\{ \textit{equivalencias débiles} \big\} &= \big\{ f : X \to Y \;\big|\; f_{p,\bullet} \textit{ es una } n\textit{-equivalencia} \\ &\qquad \textit{débil de conjuntos simpliciales } \forall\, p \geq 0 \big\} = \mathbf{W}_n^{(2)} , \\ \big\{ \textit{cofibraciones} \big\} &= \big\{ \textit{monomorfismos} \big\} = \mathbf{mono} , \\ \big\{ \textit{fibraciones} \big\} &= \big\{ \textit{morfismos con la propiedad de levantamiento} \\ &\qquad \textit{derecho con respecto a } \mathbf{mono} \cap \mathbf{W}_n^{(2)} \big\} = \mathbf{fib}_n^{(2)} . \end{aligned}$$

---

[9] Observemos que un morfismo f de $\mathbf{ssSet}_0$ es un monomorfismo si y solamente si $f_{p,q}$ es una función inyectiva para cualesquiera $p, q \geq 0$

Más aún, si X es un conjunto bisimplicial reducido, entonces X es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ si y solamente si, el morfismo de conjuntos simpliciales reducidos inducido de la inclusión $\partial\Delta^p \longrightarrow \Delta^p$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^*\Delta^p, X\big) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^*\partial\Delta^p, X\big) \tag{11.10}$$

es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ para todo $p \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\mathbf{ssSet}_0$ es isomorfa a la categoría de los funtores:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Delta}^{op} & \xrightarrow{X} & \mathbf{sSet}_0\,, \\ {[p]} & \longmapsto & X_{p,\bullet} \end{array}$$

y $\mathbf{\Delta}^{op}$ admite una estructura de categoría de Reedy donde:

$$\mathbf{\Delta}_+^{op} = \Big\{ n \overset{f}{\to} m \in \mathbf{\Delta}^{op} \,\Big|\, f \text{ es sobreyectiva en } \mathbf{\Delta} \Big\}\,, \quad \mathbf{\Delta}_-^{op} = \Big\{ n \overset{f}{\to} m \in \mathbf{\Delta}^{op} \,\Big|\, f \text{ es inyectiva en } \mathbf{\Delta} \Big\}$$

y la función grado $\mathrm{Ob}\big(\mathbf{\Delta}^{op}\big) \to \mathbb{N}$ es la función identidad; deducimos de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ de la Proposición 10.1.2 una estructura de la categoría de modelos en $\mathbf{ssSet}_0$ llamada *de Reedy*, cuyas equivalencias débiles son precisamente los elementos de $\mathbf{W}_n^{(2)}$.

Para describir a las cofibraciones y a las fibraciones de Reedy, recordemos que si X es un objeto de $\mathbf{ssSet}_0$, definimos para $k \geq 0$ los objetos:

$$L_k(X) = \underset{\substack{k \to l \\ \text{sobre no id.}}}{\mathrm{colim}}\; X_{l,\bullet} \qquad \text{y} \qquad M_k(X) = \underset{\substack{l \to k \\ \text{iny. non id.}}}{\lim}\; X_{l,\bullet}\,; \tag{11.11}$$

donde el colímite y el límite se calculan en la categoría $\mathbf{sSet}_0$.

En particular, se tienen los morfismos canónicos:

$$L_k(X) \longrightarrow X_{k,\bullet} \longrightarrow M_k(X)$$

Un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{ssSet}_0$ es llamado una cofibración (resp. una fibración) de Reedy si el morfismo φ en el siguiente diagrama suma amalgamada (resp. producto fibrado) en $\mathbf{sSet}_0$:

$$\begin{tikzcd}
L_k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{colim}\, f_{l,\bullet}"'] & X_{k,\bullet} \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "f_{k,\bullet}"] & \\
L_k(Y) \arrow[r] \arrow[rrd, bend right] & L_k(Y) \coprod\limits_{L_k(X)} X_{k,\bullet} \arrow[rd, "\varphi"] & \\
& & Y_{k,\bullet}
\end{tikzcd} \tag{11.12}$$

$$\left(\text{resp.}\qquad \begin{tikzcd}
X_{k,\bullet} \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "f_{k,\bullet}"'] & & \\
& M_k(X) \underset{M_k(Y)}{\times} Y_{k,\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & M_k(X) \arrow[d, "\lim f_{l,\bullet}"] \\
& Y_{k,\bullet} \arrow[r] & M_k(Y)
\end{tikzcd}\right)$$

es una cofibración (resp. una fibración) de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ para todo $k \geq 0$.

Ya que por el Corolario 10.1.1 los colímites (resp. los límites) de (11.11) y (11.12) son colímites (resp. limites) en $\mathbf{sSet}$, se deduce que un morifmos $f\colon\ X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{ssSet}_0$ es una cofinración de Reedy si y solamente si, su imagen en la categoría de los conjuntos bisimpliciales $\mathbf{ssSet} \cong \mathbf{sSet}^{\Delta^{op}}$ es una cofibración de Reedy. En particular un morfismo $f\colon\ X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{ssSet}_0$ es una cofibración de Reedy si y solamente si las funciones $f_{p,q}$ son inyectivas para $p, q \geq 0$. Por lo que $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ es efectivamente una categoría de modelos, la categoría de modelos de Reedy de los objetos simpliciales de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$.

Por otro lado, se sigue de los isomorfismos:

$$\begin{aligned}
M_p(X)_q \cong \lim_{\substack{l \to p \\ \text{iny. no id.}}} X_{l,q} \cong \lim_{\substack{l \to p \\ \text{iny. no id.}}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^l \boxtimes \Delta^q, X\big)\Big) & \\
\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Big(\operatorname*{colim}_{\substack{l \to p \\ \text{iny. no id.}}} \Delta^l\Big) \boxtimes \Delta^q, X\Big) & \\
\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) & \\
= \underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^* \partial\Delta^p, X\big)_q\,, &
\end{aligned} \tag{11.13}$$

que un objeto X de $\mathbf{ssSet}_0$ es un objeto fibrante de Reedy si y solamente si, el morfismo de conjuntos simpliciales reducidos inducido de la inclusión $\partial\Delta^p \longrightarrow \Delta^p$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^* \Delta^p, X\big) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^* \partial\Delta^p, X\big)$$

es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ para toda $p \geq 0$.

Finalmente, para mostrar que $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ con el enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}_0}$ es una estructura de categoría de modelos simplicial de orden n, como tenemos adjunciones (11.8), debemos solamente verificar la siguiente propiedad:

> Si $j\colon\ A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y $q\colon\ X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo de $\mathbf{ssSet}_0$, entonces el morfismo

φ en el siguiente diagrama suma amalgamada de $\mathbf{ssSet}_0$:

$$\begin{tikzcd}
X \overset{(2)}{\wedge} A \arrow[r, "q \overset{(2)}{\wedge} A"] \arrow[d, "X \overset{(2)}{\wedge} j"'] & Y \overset{(2)}{\wedge} A \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "Y \overset{(2)}{\wedge} j"] & \\
X \overset{(2)}{\wedge} B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "q \overset{(2)}{\wedge} B"'] & X \overset{(2)}{\wedge} B \underset{X \overset{(2)}{\wedge} A}{\coprod} Y \overset{(2)}{\wedge} A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
& & Y \overset{(2)}{\wedge} B\,,
\end{tikzcd} \tag{11.14}$$

es un monomorfismo, el cual pertenece a $\mathbf{W}_n^{(2)}$ si j es una ∞-equivalencia débil de conjuntos simpliciales o si q pertenece a $\mathbf{W}_n^{(2)}$.

Con este fin, observemos que el funtor inclusión canónico $\mathbf{ssSet}_0 \hookrightarrow \mathbf{ssSet}_*$ conmuta con colimites pequeños y productos pequeños; por lo que de acuerdo al Lema 9.3.3 es suficiente mostrar que la categoría de los conjuntos bisimpliciales $\mathbf{ssSet}$ con el enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}$ definido en (11.3) más arriba, es una categoría de modelos simplicial de orden n con la estructura de Reedy, es decir cuando:

$$\begin{array}{rcl}
\{\text{equivalencias débiles}\} & = & \{f:\ X \to Y \mid f_{p,\bullet} \text{ es una } n\text{-equivalencia} \\
& & \qquad \text{débil de conjuntos simpliciales } \forall\ p \geq 0\}\,, \\
\{\text{cofibraciones}\} & = & \{\text{monomorfismos}\}\,.
\end{array}$$

De manera explícita, es suficiente mostrar la siguiente propiedad:

> Si j: $A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y q: $X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo de conjuntos bisimpliciales, entonces el morfismo φ en el siguiente diagrama suma amalgamada de $\mathbf{ssSet}$:

$$\begin{tikzcd}
X \times p_2^* A \arrow[r, "q \times p_2^* A"] \arrow[d, "X \times p_2^* j"'] & Y \times p_2^* A \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "Y \times p_2^* j"] & \\
X \times p_2^* B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "q \times p_2^* B"'] & X \times p_2^* B \underset{X \times p_2^* A}{\coprod} Y \times p_2^* A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
& & Y \times p_2^* B\,,
\end{tikzcd} \tag{11.15}$$

> es un monomorfismo de conjuntos bisimpliciales el cual pertenece al conjunto:

$$\{f:\ X \to Y \mid f_{p,\bullet}\ n\text{-equivalencia débil } \forall\ p \geq 0\} \tag{11.16}$$

si j es una n-equivalencia débil de conjuntos bisimpliciales, o si q pertenece a (11.16).

Ya que **ssSet** es una categoría de funtores en la categoría de conjuntos, si j y q son monomorfismos, todos los morfismos del diagrama (11.15) también son monomorfismos. Además observemos que $p_2^*(j)$ pertenece a (11.16) si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales.

La propiedad deseada se deduce del hecho que los monomorfismos que pertenecen a (11.16) son estables por cocambio de base y la familia (11.16) cumple la propiedad 2-de-3. □

En el siguiente enunciado damos condiciones suficientes para que un conjunto bisimplicial reducido sea un objeto fibrante de $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ la categoría de modelos de la Proposición 11.2.1.

LEMA 11.2.2. *Si* $0 \leq n \leq \infty$ *y* X *es un objeto de la categoría* $\mathbf{ssSet}_0$ *que cumple las siguientes propiedades:*

(I) $X_{p,\bullet}$ *es un* n*-grupoide de Kan para toda* $p \geq 0$*, es decir si* $p \geq 0$*,* $q \geq 2$ *y* $0 \leq k \leq q$*, la función:*

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \tag{11.17}$$

es sobreyectiva para $2 \leq q \leq n$ *y biyectiva para* $q \geq n+1$*.*

(II) *Para* $p \geq n+1$ *y* $q \geq 1$ *la función:*

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \tag{11.18}$$

es biyectiva.

(III) *Para* $2 \leq p \leq n$*,* $2 \leq q \leq n$ *y* $0 \leq k \leq q$ *la función:*

$$\mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \tag{11.19}$$

es sobreyectiva.

(IV) *Para* $1 \leq p \leq n$*,* $2 \leq q \leq n$ *y* $0 \leq k \leq q$ *la función:*

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\mathrm{Hom}\left(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\right)}{\times} \mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \tag{11.20}$$

es sobreyectiva.

entonces X *es un objeto fibrante de* $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ *la categoría de modelos de la Proposición 11.2.1.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \leq n \leq \infty$ y supongamos que X es un objeto de la categoría $\mathbf{ssSet}_0$ que cumple las propiedades (I), (II), (III) y (IV). Mostremos que se tiene también:

(v) Para $0 \leq p \leq 1$, $2 \leq q \leq n$ y $0 \leq k \leq q$ la función:

$$\mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es sobreyectiva.

(vi) Para $p \geq n+1$, $2 \leq q \leq n$ y $0 \leq k \leq q$ la función:

$$\mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es sobreyectiva.

(vii) Para $p \geq 0$, $q \geq n+1$ y $0 \leq k \leq q$ la función:

$$\mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es biyectiva.

(viii) Para $p \geq n+1$, $2 \leq q \leq n$ y $0 \leq k \leq q$ la función:

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\mathrm{Hom}\left(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\right)}{\times} \mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es biyectiva.

(ix) Para $p \geq 1$, $q \geq n+1$ y $0 \leq k \leq q$ la función:

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\mathrm{Hom}\left(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\right)}{\times} \mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es biyectiva.

En efecto, la propiedad (v) se sigue para $p = 0$ porque $\partial\Delta^0 = \varnothing$; mientras que para $p = 1$ se sigue porque $\partial\Delta^1 \cong \Delta^0 \sqcup \Delta^0$ y ya que la función (11.17) es sobreyectiva si $p = 0$, $2 \leq q \leq n$ y $0 \leq k \leq q$.

Por otro lado, de (ii) y de la definición de $\Lambda^{q,k}$ como un conúcleo se deduce que:

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \tag{11.21}$$

es una biyección si $p \geq n+1$, $2 \leq q \leq n$ y $0 \leq k \leq q$ (nota que X es un conjunto bisimplicial reducido), por lo que la propiedad (vi) es una consecuencia de (i) y (ii). Del mismo modo, (vii) se sigue fácilmente de la definición de $\partial\Delta^p$ y de (i).

Notemos ahora que como (11.21) es una función biyectiva para $p \geq n+1$, $2 \leq q \leq n$ y $0 \leq k \leq q$, se tiene que el morfismo canónico:

$$\mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\mathrm{Hom}\left(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\right)}{\times} \mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big)$$

es una función biyectiva, por lo que (viii) es una consecuencia de (ii).

De forma análoga, si $p \geq 1$, $q \geq n+1$ y $0 \leq k \leq q$, el morfismo canónico:

$$\operatorname{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\operatorname{Hom}\left(\partial\Delta^p\boxtimes\Lambda^{q,k},X\right)}{\times} \operatorname{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es una función biyectiva por (VII), de modo que (IX) se sigue de (I).

Observemos finalmente que si X cumple las propiedades (I)-(IX), entonces para toda $p \geq 0$ los conjuntos simpliciales reducidos $\underline{\operatorname{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^*\Delta^p, X\big)$ y $\underline{\operatorname{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^*\partial\Delta^p, X\big)$ son objetos fibrantes de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ y el morfismo:

$$\underline{\operatorname{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^*\Delta^p, X\big) \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}}\big(\mathrm{p}_1^*\partial\Delta^p, X\big) \tag{11.22}$$

cumple la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto al siguiente conjunto de morfismos:

$$\left\{ \quad \Lambda^{q,k}/\mathbf{sq}_0\Lambda^{q,k} \xhookrightarrow{\alpha^{q-1,k}/\mathbf{sq}_0\alpha^{q-1,k}} \Delta^q/\mathbf{sq}_0\Delta^q \quad \middle| \quad q \geq 2\,,\ 0 \leq k \leq q \quad \right\}.$$

Por lo tanto, se sigue de la Proposición 10.1.8 que el morfismo (11.22) es una fibración de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ para toda $p \geq 0$; es decir X es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$. ☐

§11.3. En esta sección queremos considerar la localisación de Bousfield de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ de la Proposición 11.2.1 con respecto a las equivalencias débiles diagonales de conjuntos bisimpliciales. Obtendremos de este modo a la categoría de modelos de Dugger (ver [**Dug01**]) de los objetos simpliciales de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ (ver la Proposición 11.3.1 de más abajo).

Recordemos para empezar que a partir del funtor diagonal de la categoría de los simplejos

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "\delta"] & \Delta \times \Delta \\ {[n]} \arrow[r, mapsto] & ({[n]},{[n]}) \end{tikzcd}$$

, se construye una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{ssSet} \arrow[r, bend left, "\delta^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend left, "\delta_*"] \end{tikzcd}, \tag{11.23}$$

donde $\delta^*(X) = X \circ \delta^{op}$ es llamado el *conjunto simplicial diagonal* de X.

Observemos que es posible tomar $\delta_*(A)_{p,q} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^p \times \Delta^q, A\big)$. En efecto, el funtor δ^* conmuta con colímites pequeños y se tiene un isomorfismo natural:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\delta^*(\Delta^p \boxtimes \Delta^q), A\big) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^p \times \Delta^q, A\big) = \delta_*(A)_{p,q} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, \delta_* A\big)$$

para todo conjunto simplicial A.

Si nos restringimos a los conjuntos bisimpliciales reducidos, deducimos de (11.23) una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{ssSet}_0 \arrow[r, bend left, "diag"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_0 \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd} ; \tag{11.24}$$

donde $diag(X)_n = X_{n,n}$ y $r(A)_{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(\big(\Delta^p \times \Delta^q\big)\big/\big(\Delta^p \times \mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big), A\Big)$.

En particular:

$$\begin{aligned} r(A)_{p,q} &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Bigg(\big(\Delta^p \times \Delta^q\big)\big/\big(\Delta^p \times \mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big),\ A\Bigg) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Bigg(\Big(\big(\Delta^q/\mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big) \times \Delta^p\Big)\Big/\big(\,\star \times \Delta^p\big),\ A\Bigg) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^q\big/\mathbf{sq}_0(\Delta^q), A\big)_p \qquad\qquad \text{(ver (10.3))}\,; \end{aligned}$$

es decir:

$$r(A)_{p,\bullet} \cong A^{\overset{\circ}{\wedge}\Delta^p} \qquad \text{y} \qquad r(A)_{\bullet,q} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^q\big/\mathbf{sq}_0(\Delta^q), A\big)\,. \tag{11.25}$$

Proposición 11.3.1. *Si $0 \le n \le \infty$ e $0 \le i \le 1$, la categoría de los conjuntos bisimpliciales reducidos $\mathbf{ssSet}_0$ con el enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}$ admite una estructura de categoría de modelos simplicial punteada de orden $n-1$, donde:*

$$\begin{aligned} \big\{\textit{equivalencias débiles}\big\} \quad &= \quad \big\{f:\ X \twoheadrightarrow Y \ \big|\, \mathrm{diag}(f) \textit{ es una } n\textit{-equivalencia} \\ &\qquad \textit{débil de conjuntos simpliciales}\big\} \ = \ \mathbf{W}_n^{diag}\,, \\ \big\{\textit{cofibraciones}\big\} \quad &= \quad \big\{\textit{monomorfismos}\big\} \ = \ \mathbf{mono}\,, \\ \big\{\textit{fibraciones}\big\} \quad &= \quad \big\{\textit{morfismos con la propiedad de levantamiento} \\ &\qquad \textit{derecho con respecto a } \mathbf{mono} \cap \mathbf{W}_n^{diag}\big\} \ = \ \mathbf{fib}_n^{diag}\,. \end{aligned}$$

Además, un conjunto bisimplicial reducido X es fibrante en la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ si y solamente si, X es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ de la Proposición 11.2.1 y todos los morfismos de conjuntos simpliciales $\varphi^*\colon X_{k,\bullet} \longrightarrow X_{l,\bullet}$ inducidos por los morfismos $\varphi\colon [l] \longrightarrow [k]$ de Δ son n-equivalencias débiles.

Demostración. Si $0 \le n \le \infty$, notemos para empezar que la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ de la Proposición 11.2.1 es una categoría de modelos propia por la izquierda (pues las cofibraciones son los monomorfismos) y combinatoria (pues es la categoría de los diagramas de una categoría combinatoria sobre una categoría de Reedy). Se sigue del Teorema 4.7 de [**Bar10**] que existe su localización de

Bousfield por la izquierda con respecto al siguiente conjunto de morfismos:
(11.26)

$$S_n^{diag} = \Big\{ \ (\Delta^l \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^l \boxtimes \star) \xrightarrow{\varphi_* \boxtimes \mathrm{id}} (\Delta^k \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^k \boxtimes \star) \ \Big| \ 1 \leq m \leq n\,,\ [l] \overset{\varphi}{\to} [k] \in \Delta \Big\}.$$

En los dos Lemas que siguen, escribimos $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_n^{(2)}$ para denotar al conjunto de los morfismos en la categoría de fracciones $\mathbf{ssSet}_0\big[\big(\mathbf{W}_n^{(2)}\big)^{-1}\big]$.

LEMA 11.3.2. *Si* $0 \leq n \leq \infty$*, un conjunto bisimplicial reducido* Z *es un objeto* S_n^{diag}*-local de la categoría de modelos* $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ *si y solamente si, el morfismos de conjuntos simpliciales* $\varphi^*\colon Z_{k,\bullet} \longrightarrow Z_{l,\bullet}$ *es una* n*-equivalencias débiles para todo morfismo* $\varphi\colon [l] \longrightarrow [k]$ *de* Δ*.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos para empezar que si $l \geq 0$, tenemos una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_0 \arrow[r, bend left, "(\Delta^l \boxtimes \cdot)/(\Delta^l \boxtimes \star)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet}_0 \arrow[l, bend left, "(\,\cdot\,)_{l,\bullet}"] \end{tikzcd} \; ; \tag{11.27}$$

en particular para todo conjunto bisimplicial reducido W tenemos isomorfismos:

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\mathbb{S}^m, W_{l,\bullet}\big)_n &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big((\mathbb{S}^m \times \Delta^n)/(\star \times \Delta^n), W_{l,\bullet}\Big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\bigg(\Delta^l \boxtimes \Big[(\mathbb{S}^m \times \Delta^n)/(\star \times \Delta^n)\Big]\Big/(\Delta^l \boxtimes \star), W\bigg) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\bigg(\Big[(\Delta^l \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^l \boxtimes \star)\Big] \times p_2^*\Delta^n\Big/(\star \times p_2^*\Delta^n), W\bigg) \\ &\cong \underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big((\Delta^l \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^l \boxtimes \star), W\Big)_n\,; \end{aligned}$$

si $m \geq 1$ y $n, l \geq 0$.

Por otro lado, no es difícil mostrar que el funtor $(\Delta^l \boxtimes \cdot)/(\Delta^l \boxtimes \star)$ respeta los monomorfismos y envía los elementos de la familia $\mathbf{W}_n^{red}$ en elementos de la familia $\mathbf{W}_n^{(2)}$. Por lo que el funtor $(\,\cdot\,)_{l,\bullet}$ envía los morfismos de las familias $\mathbf{W}_n^{(2)}$ y $\mathbf{fib}_n^{(2)}$ en las familias $\mathbf{W}_n^{red}$ y $\mathbf{fib}_n^{red}$ respectivamente. Deducimos que si Z es un conjunto simplicial reducido y W es un remplazo fibrante de Z en la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$, entonces $W_{l,\bullet}$ es un remplazo fibrante de $Z_{l,\bullet}$ en $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ para todo $l \geq 0$.

Si $\varphi\colon [l] \to [k]$ es un morfismo de Δ, tenemos así un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\big[(\Delta^k \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^k \boxtimes \star), Z\big]^{(2)}_n \arrow[r, "(\varphi_* \boxtimes \mathrm{id})^*"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \big[(\Delta^l \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^l \boxtimes \star), Z\big]^{(2)}_n \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big((\Delta^k \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^k \boxtimes \star), W\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}^{(2)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big((\Delta^l \boxtimes \mathbb{S}^m)/(\Delta^l \boxtimes \star), W\big)\Big) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(\mathbb{S}^m, W_{k,\bullet})\Big) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(\mathbb{S}^m, W_{l,\bullet})\Big) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] \\
\big[\mathbb{S}^m, Z_{k,\bullet}\big]^{red}_n \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \big[\mathbb{S}^m, Z_{l,\bullet}\big]^{red}_n \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] \\
\pi_m\big(Z_{k,\bullet}\big) \arrow[r, "\varphi^*"'] & \pi_m\big(Z_{l,\bullet}\big),
\end{tikzcd}$$

lo que muestra el enunciado deseado. □

Determinemos a las equivalencias débiles S^{diag}_n-locales:

Lema 11.3.3. *Si* $0 \leq n \leq \infty$, *un morfismo de conjuntos bisimpliciales reducidos* $f\colon X \longrightarrow Y$ *es una equivalencia débil* S^{diag}_n*-local de* $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}^{(2)}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{(2)}_n)$, *si y solamente si el morfismo* $\mathrm{diag}(f)\colon \mathrm{diag}(X) \longrightarrow \mathrm{diag}(Y)$ *es una* n*-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos.*

Demostración. Notemos que la adjunción (11.24) es una adjunción de Quillen entre las categorías de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}^{(2)}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{(2)}_n)$ y $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}^{red}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}^{red}_n)$. En efecto, por un lado el funtor *diag* respeta los monomorfismos.

Por otro lado, para mostrar que $diag\big(\mathbf{W}^{(2)}_n\big) \subseteq \mathbf{W}^{red}_n$ observemos para empezar que si $f : X \to Y$ es un morfismo de $\mathbf{ssSet}_0$, entonces f pertenece a $\mathbf{W}^{(2)}_n$ si y solamente si su imagen por el funtor inclusión $\mathbf{ssSet}_0 \longrightarrow \mathbf{ssSet}$ pertenece a:

$$\Big\{\, f : W \to Z \;\Big|\; f_{p,\bullet} \text{ pertenece a } \mathbf{W}_n \text{ para toda } p \geq 0 \Big\}\,; \tag{11.28}$$

y además, $diag(f)$ es una n-equivalencia débil si y solamente si su imagen por el funtor inclusión $\mathbf{sSet}_0 \longrightarrow \mathbf{sSet}$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales.

Por lo tanto $diag\big(\mathbf{W}^{(2)}_n\big) \subseteq \mathbf{W}^{red}_n$ pues de acuerdo a un resultado de Denis-Charles Cisinski (ver el Corolario 2.3.17 y el Teorema 1.4.3 de [**Cis06**]), para toda $0 \leq n \leq \infty$ la imagen por el funtor diagonal $\delta^*\colon \mathbf{ssSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ del conjunto de morfismos (11.28) está contenido en $\mathbf{W}_n$.

Recordemos ahora que para todo conjunto simplicial reducido A:

$$r(A)_{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(\big(\Delta^p \times \Delta^q\big)/\big(\Delta^p \times \mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big),\, A\Big) \cong \Big(A^{\mathring{\wedge}\Delta^p}\Big)_q \qquad \text{(voir (10.4))}\,;$$

por lo que si consideramos el funtor p_2^*: $\mathbf{sSet}_0 \longrightarrow \mathbf{ssSet}_0$ donde $p_2^*(A)_{p,q} = A_q \cong \left(A^{\overset{\circ}{\wedge}\Delta^0}\right)_q$, podemos definir una transformación natural η: $p_2^* \Longrightarrow r$ por el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
p_2^*(A)_{p,q} \arrow[r, "(\eta_A)_{p,q}"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & r(A)_{p,q} \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(\big(\Delta^0 \times \Delta^q\big)/\big(\Delta^0 \times \mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big), A\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "="] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big(\big(\Delta^p \times \Delta^q\big)/\big(\Delta^p \times \mathbf{sq}_0(\Delta^q)\big), A\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
\left(A^{\overset{\circ}{\wedge}\Delta^0}\right)_q \arrow[r, "(A^{\overset{\circ}{\wedge}\varphi})_q"'] & \left(A^{\overset{\circ}{\wedge}\Delta^p}\right)_q ,
\end{tikzcd}$$

donde φ: $\Delta^p \longrightarrow \Delta^0$ es el morfismo canónico, el cual es una ∞-equivalencia débil.

Como el funtor r es adjunto de Quillen por la derecha, se sigue que para todo objeto fibrante A de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$, el morfismo de conjuntos simpliciales reducidos $(\eta_A)_{p,\bullet}$: $p_2^*(A)_{p,\bullet} \longrightarrow r(A)_{p,\bullet}$ es una ∞-equivalencia débil para toda $p \geq 0$, es decir el morfismo de conjuntos bisimpliciales reducidos η_A: $p_2^*(A) \longrightarrow r(A)$ es una equivalencia débil de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$.

Se concluye que si A es un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ y X es un conjunto simplicial reducido cualquiera, hay biyecciones naturales:

$$\big[diag(X), A\big]_n^{red} \cong \big[\mathbf{L}diag(X), A\big]_n^{red} \cong \big[X, \mathbf{R}r(A)\big]_n^{(2)} \cong \big[X, p_2^*(A)\big]_n^{(2)}.$$

Por lo que un morfismo de conjuntos bisimpliciales reducidos f: $X \longrightarrow Y$ satisface que $diag(f)$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos, si y solamente si para todo objeto fibrante A de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ la siguiente función es biyectiva:

$$\big[Y, p_2^*(A)\big]_n^{(2)} \xrightarrow{f^*} \big[X, p_2^*(A)\big]_n^{(2)}.$$

Ya que $p_2^*(A)$ es un objeto S_n^{diag}-local para todo conjunto simplicial reducido A, se sigue que si f es una equivalencia débil S_n^{diag}-local de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$ entonces $diag(f)$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos.

Para mostrar el recíproco, notemos que si Z es un objeto S_n^{diag}-local y fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$, el morfismo $p_2^*(Z_{0,\bullet}) \longrightarrow Z$ definido por las funciones $\underbrace{s_0^h \dots s_0^h}_{p}$: $Z_{0,q} \longrightarrow Z_{p,q}$ pertenece a $\mathbf{W}_n^{(2)}$, donde $Z_{0,\bullet}$ es un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ porque el funtor $(\,\cdot\,)_{0,\bullet}$ de (11.27) es adjunto de Quillen por la derecha.

Deducimos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\big[Y,Z\big]_n^{(2)} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \big[X,Z\big]_n^{(2)} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\big[Y,p_2^*(Z_{0,\bullet})\big]_n^{(2)} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \big[X,p_2^*(Z_{0,\bullet})\big]_n^{(2)} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\big[diag(Y),Z_{0,\bullet}\big]_n^{red} \arrow[r, "diag(f)^*"'] & \big[diag(X),Z_{0,\bullet}\big]_n^{red}
\end{tikzcd}$$

para todo objeto S_n^{diag}-local y fibrante Z de $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$. Lo que implica que si $diag(f)$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos, entonces f es una equivalencia débil S_n^{diag}-local de $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$. $\square$

Se sigue del Teorema 4.7 de [**Bar10**] y de los Lemas 11.3.2 y 11.3.3 de arriba que $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$, es efectivamente una categoría de modelos, cuyos objetos fibrantes son los objetos fibrantes X de $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{(2)})$, la categoría de modelos de la Proposición 11.2.1, tales que $\varphi^*\colon\ X_{k,\bullet} \longrightarrow X_{l,\bullet}$ es una n-equivalencia débil para todo morfismo $\varphi\colon\ [l] \longrightarrow [k]$ de Δ .

Si $0 \leq i \leq 1$, para mostrar que la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ con el enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}$ definido en (11.7) es simplicial de orden n, debemos mostrar que se cumplen la siguiente propiedad:

> Si $j\colon\ A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y $q\colon\ X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo de $\mathbf{ssSet}_0$, entonces el morfismo φ en el siguiente diagrama suma amalgamada de $\mathbf{ssSet}_0$:

(11.29)

$$\begin{tikzcd}
X \overset{(i)}{\wedge} A \arrow[r, "q \overset{(i)}{\wedge} A"] \arrow[d, "X \overset{(i)}{\wedge} j"'] & Y \overset{(i)}{\wedge} A \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "Y \overset{(i)}{\wedge} j"] & \\
X \overset{(i)}{\wedge} B \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "q \overset{(i)}{\wedge} B"'] & X \overset{(i)}{\wedge} B \coprod\limits_{X \overset{(i)}{\wedge} A} Y \overset{(i)}{\wedge} A \arrow[rd, "\varphi"] & \\
 & & Y \overset{(i)}{\wedge} B\,,
\end{tikzcd}$$

> es un monomorfismo, el cual pertenece a $\mathbf{W}_n^{diag}$ si j es una ∞-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si q pertenece a $\mathbf{W}_n^{diag}$.

Ya que el funtor inclusión $\mathbf{ssSet}_0 \hookrightarrow \mathbf{ssSet}_*$ conmuta con los límites y los colímites pequeños, como mencionamos en la prueba de la Proposición 11.2.1, para mostrar lo deseado se sigue del Lema 9.3.3 que basta mostrar que la categoría de los conjuntos bisimpliciales $\mathbf{ssSet}$ con el enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}}$ definido en (11.3) más arriba, es una categoría de modelos simplicial de orden n donde:

$$\begin{aligned}\big\{\text{equivalencias débiles}\big\} &= \big\{ f\colon\ X \rightarrow Y \ \big|\ \delta^*(f) \text{ es una } n\text{-equivalencia} \\ &\qquad \text{débil de conjuntos simpliciales } \forall\ p \geq 0 \big\},\\ \big\{\text{cofibraciones}\big\} &= \big\{\text{monomorfismos}\big\};\end{aligned}$$

donde $\delta^*\colon \mathbf{ssSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ es el funtor diagonal para los conjuntos bisimpliciales.

De manera explícita, es suficiente con mostrar la siguiente propiedad:

> Si $j\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de conjuntos simpliciales y $q\colon X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo de conjuntos bisimpliciales, entonces el morfismo φ en el siguiente diagrama suma amalgamada de **ssSet**:
>
> (11.30)
> $$\begin{tikzcd} X \times p_i^* A \arrow[r, "q \times p_i^* A"] \arrow[d, "X \times p_i^* j"'] & Y \times p_i^* A \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "Y \times p_i^* j"] & \\ X \times p_i^* B \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "q \times p_i^* B"'] & X \times p_i^* B \coprod\limits_{X \times p_i^* A} Y \times p_i^* A \arrow[rd, "\varphi"] & \\ & & Y \times p_i^* B, \end{tikzcd}$$
>
> es un monomorfismo de conjuntos bisimpliciales, el cual pertenece al siguiente conjunto:
>
> (11.31)
> $$\big\{ f\colon\ X \rightarrow Y \ \big|\ \delta^*(f)\ n\text{-equivalencia débil } \forall\ p \geq 0 \big\}$$
>
> si j es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales, o si q pertenece a (11.31).

Esto es una consecuencia de que $\delta^*\big(p_i^*(j)\big) = j$ es una n-equivalencia débil si j lo es.

Finalmente, para mostrar que $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ con el enriquecimiento $\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}$ es una categoría de modelos simplicial de orden $n-1$, por el Lema 6.4.2 y los Corolarios 9.2.5 y 10.2.6, es suficiente mostrar que la siguiente adjunción es una equivalencia de Quillen entre las categorías de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ y $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$:

(11.32)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{ssSet}_0 \arrow[r, bend right, "(\cdot)_{0,\bullet}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_0 . \arrow[l, bend right, "p_2^*"'] \end{tikzcd}$$

Para empezar se verifica sin problemas que el funtor p_2^* es Quillen por la izquierda. Por otro lado, si A es un objeto fibrante de $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$, se verifica también sin dificultad que $\mathbf{R}(\ )_{0,\bullet} \circ \mathbf{L}p^*(A)$ es isomorfo a A. De la misma forma, si X

es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$, se tiene que $\mathbf{L}p^* \circ \mathbf{R}(\ )_{0,\bullet}(X)$ es isomorfo a X. □

Escribimos $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{ssSet}_0)$ para denotar a la categoría homotópica $\mathbf{ssSet}_0\big[(\mathbf{W}_n^{diag})^{-1}\big]$ de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ de la Proposición 11.3.1. Se sigue de la Proposición 11.3.1 que los funtores derivados de los morfismos $\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}^{(i)}_{\mathbf{ssSet}_0}$ para $0 \leq i \leq 1$ son enriquecimientos forzosamente isomorfos de $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{ssSet}_0)$ sobre la categoría cartesiana cerrada de los $(n-1)$-tipos de homotopía $\mathrm{Ho}_{n-1}(\mathbf{sSet})$ (la categoría de los $(n-1)$-grupoides).

La categoría $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{ssSet}_0)$ enriquecida de esta forma sobre la categoría de los $(n-1)$-grupoides, la llamamos la *categoría homotópica de los n-grupos de Segal*. Notemos que la equivalencia de Quillen (11.32) induce una equivalencia entre la categoría homotópica de los n-grupos de Segal y la categoría homotópica de los n-grupos:

(11.33)
$$\begin{tikzcd}\mathrm{Ho}_n(\mathbf{ssSet}_0) \arrow[r, bend right, "\mathbf{R}(\,\cdot\,)_{0,\bullet}"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0)\,. \arrow[l, bend right, "\mathbf{L}p_2^*"']\end{tikzcd}$$

Observemos que la adjunción de Quillen (11.24) (nota que el funtor *diag* es un funtor adjunto de Quillen por la izquierda) también es una equivalencia de Quillen. En efecto (11.24) induce una equivalencia de categorías:

(11.34)
$$\begin{tikzcd}\mathrm{Ho}_n(\mathbf{ssSet}_0) \arrow[r, bend right, "\mathbf{L}diag"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0) \arrow[l, bend right, "\mathbf{R}r"']\end{tikzcd}$$

pues según la prueba del Lema 11.3.3 un funtor derivado $\mathbf{R}r$ es isomorfo a un funtor derivado $\mathbf{L}p_2^*$ (nota que el funtor p_2^* envía las n-equivalencias débiles reducidas en n-equivalencias débiles diagonales).

El siguiente enunciado se sigue del Lema 11.2.2 y la Proposición 11.3.1:

Corolario 11.3.4. *Si $1 \leq n \leq \infty$ y X es un objeto de la categoría $\mathbf{ssSet}_0$ que cumple las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\varphi\colon [l] \longrightarrow [k]$ es cualquier morfismo de la categoría de los simplejos Δ, el morfismo inducido $\varphi^*\colon X_{k,\bullet} \longrightarrow X_{l,\bullet}$ es una n-equivalencia débil de conjuntos simpliciales.*

(ii) *$X_{p,\bullet}$ es un n-grupoide de Kan para toda $p \geq 0$, es decir si $p \geq 0$, $q \geq 2$ y $0 \leq k \leq q$, la función:*

(11.35)
$$\mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)$$

es sobreyectiva para $2 \leq q \leq n$ y biyectiva para $q \geq n+1$.

(iii) *Para* $p \geq n+1$ *y* $q \geq 1$ *la función:*

$$\operatorname{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \tag{11.36}$$

es biyectiva.

(iv) *Para* $2 \leq p \leq n$, $2 \leq q \leq n$ *y* $0 \leq k \leq q$ *la función:*

$$\operatorname{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \tag{11.37}$$

es sobreyectiva.

(v) *Para* $1 \leq p \leq n$, $2 \leq q \leq n$ *y* $0 \leq k \leq q$ *la función:*

$$\operatorname{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\operatorname{Hom}\left(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\right)}{\times} \operatorname{Hom}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \tag{11.38}$$

es sobreyectiva.

entonces X es un objeto fibrante de $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_n^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{diag})$ *la categoría de modelos de la Proposición 11.3.1.*

12. Conjuntos simpliciales truncados

En esta sección damos notación básica sobre las categorías cartesianas cerradas de los conjuntos simpliciales $(n+1)$-coesqueléticos, de los conjuntos simpliciales débilmente n-coesqueléticos y de los n-grupoides de Kan.

En la Proposición 12.4.3 y en §12.5 recordamos que los n-grupoides de Kan (resp. n-grupos de Kan) modelan todos los n-tipos de homotopía (resp. los n-tipos de homotopía punteados conexos). También, en el Corolario 12.5.4 recordamos que la categoría homotópica de los 1-tipos de homotopía punteados conexos es equivalente a la categoría de los grupos.

Para terminar mostramos versiones punteadas y bisimpliciales de algunos resultados sobre truncación.

§12.1. Si $n \geq 0$, denotemos como $\boldsymbol{\Delta}_{\leq n}$ a la subcategoría plena de la categoría de los simplejos $\boldsymbol{\Delta}$ cuyos objetos son los conjuntos totalmente ordenados $[k]$ para $0 \leq k \leq n$. La categoría de los *conjuntos simpliciales n-truncados* $\mathbf{sSet}_{\leq n}$ es la categoría de los funtores $\boldsymbol{\Delta}_{\leq n} \longrightarrow \mathbf{Set}$ y las transformaciones naturales entre ellos.

Consideremos la adjunción inducida por el funtor inclusión $\tau_n \colon \boldsymbol{\Delta}_{\leq n} \hookrightarrow \boldsymbol{\Delta}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet}_{\leq n} \arrow[r, bend right, "\tau_{n\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "\tau_n^*"'] \end{tikzcd} \; . \tag{12.1}$$

Recordemos que si X es un conjunto simplicial, escribimos $\mathbf{csq}_n(X)$ para denotar al conjunto simplicial $\tau_{n\,*}\tau_n^*(X)$, y lo llamamos el *n-coesqueleto de X*. Si el morfismo $\eta_X\colon X \longrightarrow \mathbf{csq}_n(X)$ es un isomorfismo, donde η es cualquier unidad de la adjunción $\tau_{n\,*} \dashv \tau_n^*$, decimos que X es *n-coesquelético* o que X es un *n-coesqueleto*. De manera equivalente, X es n-coesquelético si para todo conjunto simplicial A la siguiente función es biyectiva:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(A, X\big) \xrightarrow{\tau_n^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n}}\big(\tau_n^{\,*}A, \tau_n^{\,*}X\big) \ .$$

Más aún, ya que el funtor $\tau_{n\,*}$ de la adjunción (12.1) es fielmente pleno, un conjunto simplicial X es n-coesquelético si y solamente si, X es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $\tau_{n\,*}$.

Mostremos:

Lema 12.1.1. *Si X es un conjunto simplicial son son equivalentes:*

(i) *X es n-coesquelético.*

(ii) *X es m-coesquelético para toda $m \geq n$.*

(iii) *Para toda $m \geq n$, la función:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big)$$

inducida del morfismo $\alpha^m\colon \partial\Delta^{m+1} \longrightarrow \Delta^{m+1}$ es biyectiva.

Demostración. Observemos que si $j_m\colon \mathbf{\Delta}_{\leq m} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}_{\leq m+1}$ denota al funtor inclusión canónico, podemos descomponer salvo isomorfismo a la adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet}_{\leq m} \arrow[r, bend right, "\tau_{m\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "\tau_m^{\,*}"']
\end{tikzcd}$$

como la siguiente composición:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet}_{\leq m} \arrow[r, bend right, "j_{m\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_{\leq m+1} \arrow[l, bend right, "j_m^{\,*}"'] \arrow[r, bend right, "\tau_{m+1\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "\tau_{m+1}^{\,*}"']
\end{tikzcd};$$

donde los funtores $j_{m\,*}$ y $\tau_{m+1\,*}$ son fielmente plenos.

Se deduce que si X es un conjunto simplicial isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $\tau_{m\,*}$, entonces X también es isomorfo a un objeto en la imagen de $\tau_{m+1\,*}$. De donde (i) implica (ii).

Para mostrar lo que falta de la afirmación, observemos para empezar que si A es un conjunto simplicial m-truncado, podemos describir salvo isomorfismo al conjunto simplicial $(m+1)$-truncado $j_{m\,*}(A)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} j_{m\,*}(A)_k &= A_k \qquad \text{si } 0 \leq k \leq m \\ \text{y} \qquad j_{m\,*}(A)_{m+1} &= \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m}}\big({\tau_m}^*\partial\Delta^{m+1}, A\big). \end{aligned}$$

Los morfismo cara y degenerados $d_i^k\colon\ A_{k+1} \longrightarrow A_k$ y $s_i^k\colon\ A_k \longrightarrow A_{k+1}$, son definidos para $0 \leq k < m$ como aquellos de A; mientras que los morfismos:

$$\begin{tikzcd} j_{m\,*}(A)_{m+1} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m}}\big({\tau_m}^*\partial\Delta^{m+1}, A\big) \arrow[r, shift left, "d_i^m"] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m}}\big({\tau_m}^*\Delta^{m}, A\big) \cong A_m \arrow[l, shift left, "s_i^m"] \end{tikzcd} ,$$

se inducen de los morfismo canónicos:

$$\begin{tikzcd} \Delta^m \arrow[r, "i\text{-ésima}", "\text{componente}"'] & \coprod\limits_{0\leq i\leq m+1} \Delta^m \arrow[r, two heads, "\sqcup\delta_i"] & \partial\Delta^{m+1} \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} \partial\Delta^{m+1} \arrow[r, "\alpha^m"] & \Delta^{m+1} \arrow[r, "\sigma_i^m"] & \Delta^m \end{tikzcd} .$$

Dicho de otro modo, módulo el isomorfismo:

$$j_{m\,*}(A)_{m+1} \cong \left\{ (a_0, \ldots, a_{m+1}) \in \prod_0^{m+1} A_m \;\middle|\; \begin{matrix} d_i^{m-1} a_j = d_{j-1}^{m-1} a_i \\ \text{si } 0 \leq i < j \leq m+1. \end{matrix} \right\}, \tag{12.2}$$

estos morfismos son definidos por las reglas:

$$\begin{tikzcd} (a_0, \ldots, a_{m+1}) \arrow[r, mapsto] & a_i \\ j_{m\,*}(A)_{m+1} \arrow[r, shift left, "d_i^m" description] & A_m \arrow[l, shift left, "s_i^m" description] \\ (b_0, \ldots, b_{m+1}) & a \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \text{donde} \qquad b_k = \begin{cases} s_{i-1}^{m-1} d_k^{m-1} a & 0 \leq k \leq i-1 \\ a & i \leq k \leq i+1 \\ s_i^{m-1} d_{k-1}^{m-1} a & i+2 \leq k \leq m+1\,. \end{cases}$$

Podemos ahora describir a una unidad de la adjunción $j_{m\,*} \dashv j_m^*$ como sigue: Si B es un conjunto simplicial $(m+1)$-truncado, el morfismo $B \longrightarrow j_{m\,*}j_m^*(B)$, es definido para $0 \leq k \leq m$ como la función identida, y para $k = m+1$ como la función:

$$\begin{tikzcd} B_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & j_{m\,*}j_m^*(B)_{m+1} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m+1}}\big(\tau_{m+1}^*\Delta^{m+1}, B\big) \arrow[dr, bend right=10] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m}}\big({\tau_m}^*\partial\Delta^{m+1}, {j_m}^*B\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\ & \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m+1}}\big(\tau_{m+1}^*\partial\Delta^{m+1}, B\big) \end{tikzcd} ,$$

inducida del morfismo $\alpha^m\colon\ \partial\Delta^{m+1} \longrightarrow \Delta^{m+1}$.

En particular, ya que $j_{m\,*}$ es un funtor fielmente pleno, se verifica que si X es cualquier conjunto simplicial, el conjunto simplicial $(m+1)$-truncado $\tau_{m+1}^*(X)$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $j_{m\,*}$, si y solamente si la función:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m+1}}\big(\tau_{m+1}^{*}\Delta^{m+1},\tau_{m+1}^{*}X\big) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq m+1}}\big(\tau_{m+1}^{*}\partial\Delta^{m+1},\tau_{m+1}^{*}X\big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \ , \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1},X\big) \arrow[r, "\alpha_X^m"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1},X\big)
\end{tikzcd}$$

es biyectiva. Por lo tanto, las propiedades (ii) y (iii) son equivalentes. ☐

Mostremos también:

Corolario 12.1.2. *Sea* $n \geq 0$. *Si* X *es un conjunto simplicial que cumple la condición de extensión de Kan en dimensión* $1 \leq m \leq n+1$, *es decir si la función:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1},X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{m,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k},X\big)$$

es sobreyectiva para $1 \leq m \leq n+1$ *y* $0 \leq k \leq m+1$, *entonces* $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ *es un complejo de Kan tal que:*

$$\pi_m\big(\mathbf{csq}_{n+1}X,a\big) = 0 \quad \textit{para} \quad \textit{toda} \quad a \in \mathbf{csq}_{n+1}(X)_0 = X_0 \quad \textit{y} \quad m \geq n+1;$$

dicho de otro modo $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ *es un objeto fibrante de* $(\mathbf{sSet},\mathbf{W}_n,\mathbf{mono},\mathbf{fib}_n)$ *la categoría de modelos del Teorema 8.4.2.*

En particular, si X *es un complejo de Kan y* η *es cualquier unidad de la adjunción* $\tau_{n\,*} \dashv {\tau_n}^*$, *el monomorfismo de conjuntos simpliciales* $\eta_X\colon X \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(X)$ *es una* n*-equivalencia débil.*

Demostración. Deducimos de los Lemas 8.3.1 y 12.1.1 que para todo X el conjunto simplicial $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $m \geq n+2$.

Consideremos ahora el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1},X\big) \arrow[r, "\alpha_X^{m,k}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k},X\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1},\mathbf{csq}_{n+1}X\big) \arrow[r, "\alpha^{m,k}_{\mathbf{csq}_{n+1}(X)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k},\mathbf{csq}_{n+1}X\big),
\end{tikzcd} \tag{12.3}$$

inducido de los morfismos $\eta_X\colon X \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}X$ y $\Lambda^{m+1,k} \longrightarrow \Delta^{m+1}$.

Ya que se tiene un isomorfismo $(\eta_X)_p : X_p \cong \mathbf{csq}_{n+1}(X)_p$ para $0 \leq p \leq n+1$, encontramos que en el cuadrado (12.3) la flecha que desciende por el lado derecho es una biyección para toda $1 \leq m \leq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$ $\big($de manera equivalente se puede notar que $\mathbf{sq}_{n+1}(\Lambda^{m+1,k}) \cong \Lambda^{m+1,k}$ si $1 \leq m \leq n+1\big)$; en particular si suponemos que la función $\alpha_X^{m,k}$ es sobreyectiva para $1 \leq m \leq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$ entonces la flecha $\alpha^{m,k}_{\mathbf{csq}_{n+1}(X)}$ también es sobreyectiva para $1 \leq m \leq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$; es decir si X cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1 \leq m \leq n+1$, entonces $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ también la cumple y por lo tanto $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ es un complejo de Kan.

Para mostrar la segunda parte, observemos primero que si Y es cualquier complejo de Kan tal que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, Y\big) \xrightarrow{\alpha_Y^m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, Y\big)$$

es una función inyectiva para $m \geq n+1$, resulta de la Proposición 8.6.1 que para todo $a \in Y_0$ y $m \geq n+2$, el grupo $\pi_m(Y,a)$ es un cociente de un conjunto con un único punto; por lo tanto, $\pi_m(Y,a) = 0$ para todo $a \in Y_0$ y $m \geq n+2$. En particular, como $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ es un complejo de Kan, $\pi_m\big(\mathbf{csq}_{n+1}X, a\big) = 0$ para todo $a \in X_0$ y $m \geq n+2$.

Deducimos también de la Proposición 8.6.1 que $\pi_{n+1}\big(\mathbf{csq}_{n+1}X, a\big) = 0$ para todo $a \in X_0$. En efecto, por un lado sabemos que podemos identificar:

$$\mathbf{csq}_{n+1}(X)_{n+2} = \left\{ (z_0, \ldots, z_{n+2}) \in \prod_{0}^{n+2} X_{n+1} \;\middle|\; \begin{matrix} d_i z_j = d_{j-1} z_i \\ \text{si } 0 \leq i < j \leq n+2 \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbf{csq}_{n+1}(X)_{n+1} = X_{n+1} \,,$$

de modo que los morfismos cara $d_i\colon \mathbf{csq}_{n+1}(X)_{n+2} \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(X)_{n+1}$ para $0 \leq i \leq n+2$ correspondan a las proyecciones canónicas. De modo que si x y y son $(n+1)$-simplejos de $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$ tales que $d_i x = d_i y = a$ para todo $0 \leq i \leq n+1$, se verifica sin dificultad que $(x, y, a, \ldots, a)$ es una homotopía de x en y.

Por último, si X es un complejo de Kan se sigue de la Proposición 8.6.1 que el morfismo $\eta_X\colon X \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(X)$ es una n-equivalencia débil, pues $(\eta_X)_p : X_p \cong \mathbf{csq}_{n+1}(X)_p$ es un isomorfismo para $0 \leq p \leq n+1$. □

Observemos que si X y Y son conjuntos simpliciales $(n+1)$-coesqueléticos (resp. complejos de Kan $(n+1)$-coesqueléticos), deducimos del Lema 12.1.1 (resp. de los Lemas 12.1.1 y 8.4.6) que el producto cartesiano argumento por argumento $X \times Y$ también es un conjunto simplicial $(n+1)$-coesquelético (resp. un complejo de Kan $(n+1)$-coesquelético).

Mostremos:

LEMA 12.1.3. *Sea $n \geq 0$. Si X y Y son conjuntos simpliciales, entonces el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)$ es $(n+1)$-coesquelético. Más aún, si η es una unidad arbitraria de la adjunción ${\tau_n}_* \dashv {\tau_n}^*$, el morfismo $\eta_X\colon X \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(X)$ induce un isomorfismo de conjuntos simpliciales:*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1}X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big) \;. \tag{12.4}$$

En particular, el conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ es $(n+1)$-coesquelético (resp. un complejo de Kan $(n+1)$-coesquelético) si X y Y son conjuntos simpliciales $(n+1)$-coesqueléticos (resp. complejos de Kan $(n+1)$-coesqueléticos).

DEMOSTRACIÓN. Si X y Y son dos conjuntos simpliciales, mostremos que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)$ es $(n+1)$-coesquelético, es decir que el morfismo:
(12.5)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)\Big) \xrightarrow{\alpha_X^m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\partial\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)\Big) \ ,$$

es una biyección si $m \geq n+1$.

Para ello descomponemos (12.5) como la siguiente sucesión de biyecciones:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)\Big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1} \times X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big) && \text{(i)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(\Delta^{m+1} \times X\big), \tau_{n+1}^*Y\Big) && \text{(ii)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(\Delta^{m+1}\big) \times \tau_{n+1}^*\big(X\big), \tau_{n+1}^*Y\Big) && \text{(iii)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(\partial\Delta^{m+1}\big) \times \tau_{n+1}^*\big(X\big), \tau_{n+1}^*Y\Big) && \text{(iv)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(\partial\Delta^{m+1} \times X\big), \tau_{n+1}^*Y\Big) && \text{(v)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1} \times X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big) && \text{(vi)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\partial\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)\Big) && \text{(vii)}
\end{aligned}$$

donde (i) y (vii) son consecuencias de la adjunción (8.5); (ii) y (vi) se deducen de la igualdad $\mathbf{csq}_{n+1} = \tau_{n+1\,*}\tau_{n+1}^*$ y porque $\tau_{n+1\,*} \dashv \tau_{n+1}^*$; (iii) y (v) son biyecciones ya que τ_{n+1}^* conmuta con productos pequeños; y finalmente (iv) se cumple, pues la $(n+1)$-truncación del morfismo $\partial\Delta^{m+1} \hookrightarrow \Delta^{m+1}$ es un isomorfismo siempre que $m \geq n+1$.

Mostremos ahora que el morfismo (12.4) es una biyección para todo conjunto simplicial Y. Para ello recordemos que el funtor τ_{n+1}^* conmuta con productos pequeños, y que $\tau_{n+1}^*(\eta_X)\colon\ \tau_{n+1}^*(X) \longrightarrow \tau_{n+1}^*\big(\mathbf{csq}_{n+1}(X)\big)$ es un isomorfismo de conjuntos simpliciales truncados. Verificamos entonces que (12.4) en $k \geq 0$ se descompone como la siguiente sucesión de biyecciones:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)_k &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(X \times \Delta^k, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(X \times \Delta^k\big), \tau_{n+1}^*Y\Big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*(X) \times \tau_{n+1}^*(\Delta^k), \tau_{n+1}^*Y\Big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(\mathbf{csq}_{n+1}(X)\big) \times \tau_{n+1}^*(\Delta^k), \tau_{n+1}^*Y\Big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\tau_{n+1}^*\big(\mathbf{csq}_{n+1}(X) \times \Delta^k\big), \tau_{n+1}^*Y\Big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Big(\mathbf{csq}_{n+1}\big(X\big) \times \Delta^k, \mathbf{csq}_{n+1}Y\Big) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathbf{csq}_{n+1}X, \mathbf{csq}_{n+1}Y\big)_k \,.
\end{aligned}$$

□

Mostremos una versión reducida del Lema 12.1.3:

LEMA 12.1.4. *Sean X y W conjuntos simpliciales reducidos. Si W es $(n+1)$-coesquelético entonces $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Si W es $(n+1)$-coesquelético, mostremos que la siguiente función es biyectiva para toda $m \geq n+1$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,W)\Big) \xrightarrow{\alpha_X^m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\partial\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,W)\Big) \ . \tag{12.6}$$

En efecto, esto se muestra de manera análoga a la prueba del Lema 12.1.3 descomponiendo la función (12.6) como la siguiente sucesión de biyecciones:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,W)\Big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big((X\times\Delta^{m+1})/(\star\times\Delta^{m+1}), \mathbf{csq}_{n+1}W\Big) && \text{(i)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Bigg(\tau_{n+1}^{*}\Big((X\times\Delta^{m+1})/(\star\times\Delta^{m+1})\Big), \tau_{n+1}^{*}W\Bigg) && \text{(ii)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\Bigg(\tau_{n+1}^{*}\Big((X\times\partial\Delta^{m+1})/(\star\times\partial\Delta^{m+1})\Big), \tau_{n+1}^{*}W\Bigg) && \text{(iii)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big((X\times\partial\Delta^{m+1})/(\star\times\partial\Delta^{m+1}), \mathbf{csq}_{n+1}W\Big) && \text{(iv)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\partial\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,W)\Big) && \text{(v)}
\end{aligned}$$

donde (i) y (v) son consecuencia del isomorfismo $W \cong \mathbf{csq}_{n+1}W$, de la adjunción:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\Big((X\times K)/(\star\times K), Y\Big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(K, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X,Y)\Big),$$

y de que $\mathbf{sSet}_0 \longrightarrow \mathbf{sSet}$ es un funtor fielmente pleno; (ii) y (iv) se deducen de la igualdad $\mathbf{csq}_{n+1} = \tau_{n+1\,*}\tau_{n+1}^{\,*}$ y porque $\tau_{n+1\,*} \dashv \tau_{n+1}^{\,*}$; y finalmente (iii) es una biyección ya que $\tau_{n+1}^{\,*}$ conmuta con límites y colímites pequeños y la $(n+1)$-truncacion del morfismo $\partial\Delta^{m+1} \hookrightarrow \Delta^{m+1}$ es un isomorfismo para $m \geq n+1$. ☐

§12.2. Si $n \geq 0$, un conjunto simplicial X es llamado *débilmente n-coesquelético* si la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{m+1}, X) \xrightarrow{\alpha_X^m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\partial\Delta^{m+1}, X) \ ,$$

inducida de la inclusión $\alpha^m\colon\ \partial\Delta^{m+1} \hookrightarrow \Delta^{m+1}$, es biyectiva para $m > n$ e inyectiva para $m = n$.

Se sigue del Lema 12.1.1 que X es débilmente n-coesquelético si y solamente si, el morfismo canónico de conjuntos simpliciales $X \longrightarrow \mathbf{csq}_m(X)$ es un monomorfismo para $m = n$ y un isomorfismo para $m \geq n+1$; es decir si X está contenido es su n-coesqueleto y X es $(n+1)$-coesquelético[10].

Si X es un conjunto simplicial y $n \geq 0$ es un número natural, definimos un conjunto débilmente n-coesquelético $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ y una sucesión de morfismos:

$$X \longrightarrow \mathbf{csq}_{n+1}(X) \longrightarrow \mathbf{csq}'_{n+1}(X),$$

---

[10] En la Definición 2.5 de [**Dus02**] los conjuntos simpliciales débilmente n-coesqueléticos son llamados complejos de Postnikov de dimensión n

de la siguiente manera[11]: Consideremos la relación de equivalencia $\overset{n}{\sim}$ en el conjunto X_{n+1} de los $(n+1)$-simplejos de X:

$$x \overset{n}{\sim} y \in X_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad d_i x = d_i y \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad 0 \leq i \leq n+1; \tag{12.7}$$

y denotamos $\tau^*_{n+1}(X)'$ al conjunto simplicial $(n+1)$-truncado, que deducimos de la $(n+1)$-truncación $\tau^*_{n+1}(X)$ de X imponiendo la relación $\overset{n}{\sim}$ sobre el conjunto X_{n+1}.

Si $0 \leq m \leq n-1$, los morfismos cara y degenerados de $\tau^*_{n+1}(X)'$ son los de X:

$$\begin{tikzcd} X_{m+1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "d_i"'] & \tau^*_{n+1}(X)'_{m+1} \arrow[d, dashed, "d_i"] \\ X_m \arrow[r, equal] & \tau^*_{n+1}(X)'_m \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} X_{m+1} \arrow[r, equal] & \tau^*_{n+1}(X)'_{m+1} \\ X_m \arrow[r, equal] \arrow[u, "s_i"] & \tau^*_{n+1}(X)'_m \arrow[u, dashed, "s_i"'] \end{tikzcd} \quad ;$$

mientras que para $m = n$, son definidos por cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "\text{cociente}"] \arrow[d, "d_i"'] & \tau^*_{n+1}(X)'_{n+1} \arrow[d, dashed, "d_i"] \\ X_n \arrow[r, equal] & \tau^*_{n+1}(X)'_n \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "\text{cociente}"] & \tau^*_{n+1}(X)'_{n+1} \\ X_n \arrow[r, equal] \arrow[u, "s_i"] & \tau^*_{n+1}(X)'_n \arrow[u, dashed, "s_i"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Definimos $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ como el conjunto simplicial $\tau_{n+1\,*}\big(\tau^*_{n+1}(X)'\big)$, donde $\tau_{n+1\,*}$ es el funtor adjunto por la derecha del funtor truncación τ^*_{n+1} $\big($ver (12.1)$\big)$. Aplicando $\tau_{n+1\,*}$ al morfismo cociente $\tau^*_{n+1}(X) \longrightarrow \tau^*_{n+1}(X)'$, obtenemos un morfismo de conjuntos simpliciales:

$$\mathbf{csq}_{n+1}(X) \longrightarrow \mathbf{csq}'_{n+1}(X). \tag{12.8}$$

Lema 12.2.1. *Si X es un conjunto simplicial arbitrario,* $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ *es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético. Más aún, si X es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético, entonces el morfismo* (12.8) *es un isomorfismo de conjuntos simpliciales. En particular, un conjunto simplicial X es débilmente n-coesquelético si y solamente si la composición:*

$$X \xrightarrow{\eta_X} \mathbf{csq}_{n+1}(X) \xrightarrow{(12.8)} \mathbf{csq}'_{n+1}(X) \tag{12.9}$$

es un isomorfismo de conjuntos simpliciales.

Por otro lado, si X cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1 \leq m \leq n+1$*, entonces el conjunto simplicial* $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ *es un complejo de Kan y el morfismo* (12.8) *es una* ∞*-equivalencia débil de conjuntos simpliciales.*

---

[11] $\mathbf{csq}'_{n+1}(K)$ es denotado como $K^{(n)}$ en la Definición 8.1 de [**May82**].

DEMOSTRACIÓN. Observemos que si X es un conjunto simplicial, en el cuadrado conmutativo inducido por el morfismo composición (12.9):

(12.10)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{n+1},X) \arrow[r, "\alpha_X^n"] \arrow[d, "\gamma_X"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\partial\Delta^{n+1},X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1},\mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big) \arrow[r, "\alpha^n_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1},\mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big),
\end{tikzcd}$$

la función γ_X se identifica al morfismo $X_{n+1} \longrightarrow X_{n+1}/\overset{n}{\sim}$; y la función que desciende por la derecha es un isomorfismo, pues los conjuntos simpliciales $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ y X tienen la misma n-truncación.

Por otro lado, se sigue de la definición de α_X^n que si x y y son elementos del conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{n+1},X)$, entonces $x \overset{n}{\sim} y$ si y solamente si $\alpha_X^n(x) = \alpha_X^n(y)$; es decir, $\gamma_X(x) = \gamma_X(y)$ si y solamente si $\alpha_X^n(x) = \alpha_X^n(y)$. Más aún, α_X^n es inyectiva si y solamente si γ_X es biyectiva.

Deducimos en particular que si X es un conjunto simplicial arbitrario, entonces:

(I) $\alpha^n_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}$ siempre es inyectiva.
(II) Si la función α_X^n es inyectiva, entonces $\tau^*_{n+1}(X)' = \tau^*_{n+1}(X)$.

Ya que por definición $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ es un conjunto simplicial $(n+1)$-coesquelético, se concluye que:

(I) $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ siempre es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético.
(II) Si X es débilmente n-coesquelético, entonces (12.8) es un isomorfismo.

Supongamos ahora que X cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1 \leq m \leq n+1$. Se sigue del Corolario 12.1.2, que para mostrar que el conjunto simplicial $(n+1)$-coesquelético $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ es un complejo de Kan, es suficiente verificar que $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1 \leq m \leq n+1$.

Para empezar, notemos que como $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ y X tienen la misma n-truncación, entonces $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1 \leq m \leq n-1$.

Por otro lado, $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión n, ya que en el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{n+1},X) \arrow[r, "\alpha_X^{n,k}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^{n+1,k},X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1},\mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big) \arrow[r, "\alpha^{n,k}_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+1,k},\mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big),
\end{tikzcd}$$

la función $\alpha_X^{n,k}$ es sobreyectiva, y la función que desciende por la derecha es biyectiva.

De la misma forma, para mostrar que $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $n+1$, construimos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{n+2}, X) \arrow[r, "\alpha_X^{n+1,k}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^{n+2,k}, X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+2}, \mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big) \arrow[r, "\alpha^{n+1,k}_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+2,k}, \mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big),
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha_X^{n+1,k}$ es una función sobreyectiva.

En este caso la función $\alpha^{n+1,k}_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}$ es sobreyectiva porque:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^{n+2,k}, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+2,k}, \mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big)$$

es sobreyectiva, pues se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\substack{0\leq i<j\leq m+1 \\ i,j\neq k}} X_n \arrow[d, "identidad"] & \prod\limits_{\substack{0\leq l\leq m+1 \\ l\neq k}} X_{n+1} \arrow[l, shift right, "\prod\limits_{i<j} d_i \circ proj_j"'] \arrow[l, shift left, "\prod\limits_{i<j} d_{j-1} \circ proj_i"'] \arrow[d, "cociente"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^{n+2,k}, X) \arrow[l] \arrow[d] \\
\prod\limits_{\substack{0\leq i<j\leq m+1 \\ i,j\neq k}} X_n & \prod\limits_{\substack{0\leq l\leq m+1 \\ l\neq k}} \big(X_{n+1}/\overset{n}{\sim}\big) \arrow[l, shift right, "\prod\limits_{i<j} d_i \circ proj_j"'] \arrow[l, shift left, "\prod\limits_{i<j} d_{j-1} \circ proj_i"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+2,k}, \mathbf{csq}'_{n+1}(X)\big) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

cuyos renglones son exactos.

Por último, mostremos que el morfismo (12.8) es una ∞-equivalencia si X cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1 \leq m \leq n+1$. En efecto, ya que (12.8) es un morfismo entre complejos de Kan $(n+1)$-coesqueléticos, por el Corolario 12.1.2 es suficiente notar que (12.8) es una n-equivalencia débil; lo que es una consecuencia de la Proposición 8.6.1 ya que la función $\mathbf{csq}_{n+1}(X)_m \longrightarrow \mathbf{csq}'_{n+1}(X)_m$ es biyectiva si $0 \leq m \leq n$ e inyectiva si $m = n+1$. ☐

Mostremos:

Lema 12.2.2. *Sea $n \geq 0$. Si X y Y son conjuntos simpliciales débilmente n-coesqueléticos, entonces el producto cartesiano argumento por argumento $X \times Y$ y el conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, Y\big)$ son conjuntos simpliciales débilmente n-coesqueléticos.*

Demostración. Supongamos que X y Y son conjuntos simpliciales débilmente n-coesqueléticos. Se sigue de los Lemas 12.1.1 y 12.1.3 que los conjuntos simpliciales $X \times Y$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, Y\big)$ son $(n+1)$-coesqueléticos.

El conjunto simplicial $X \times Y$ es débilmente n-coesquelético porque la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, X \times Y\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1}, X \times Y\big)$$

inducida de la inclusión canónica $\partial\Delta^{n+1} \hookrightarrow \Delta^{n+1}$ es salvo isomorfismo el producto de las funciones inyectivas:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1}, X\big) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, Y\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1}, Y\big)\ .$$

Por otro lado observemos que por el Lema 12.1.3, para mostrar que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, Y\big)$ es débilmente n-coesquelético, es suficiente mostrar que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\big(\tau_{n+1}^{*}(X) \times \tau_{n+1}^{*}(\Delta^{n+1}), \tau_{n+1}^{*}Y\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\big(\tau_{n+1}^{*}(X) \times \tau_{n+1}^{*}(\partial\Delta^{n+1}), \tau_{n+1}^{*}Y\big)$$

inducida de la inclusión canónica $\partial\Delta^{n+1} \hookrightarrow \Delta^{n+1}$ es inyectiva.

De manera explícita, debemos mostrar que si $F, G\colon\ \tau_{n+1}^{*}(X) \times \tau_{n+1}^{*}(\Delta^{n+1}) \longrightarrow \tau_{n+1}^{*}(Y)$ son morfismos de conjuntos simpliciales truncados tales que:

(12.11)

$$F_k = G_k \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \quad \text{y} \quad F_{n+1}(x, f) = G_{n+1}(x, f) \quad \text{si} \quad x \in X_{n+1} \quad \text{y} \quad f \in (\partial\Delta^{n+1})_{n+1}\,;$$

entonces $F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n+1]}) = G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n+1]})$ si $x \in X_{n+1}$, es decir $F = G$.

Sean F y G dos morfismos verificando las propiedades (12.11). Ya que supusimos que Y es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético, para mostrar que $F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]}) = G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]})$ para todo $x \in X_{n+1}$ es suficiente notar que:

$$d_i \circ F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]}) \ = \ F_n(d_i x, \delta_i) \ = \ G_n(d_i x, \delta_i) \ = \ d_i \circ G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]})$$

para todo $x \in X_{n+1}$ e $0 \leq i \leq n+1$. Por lo tanto $F = G$. □

§12.3. Sea $0 \leq n \leq \infty$. Recordemos que en este trabajo un conjunto simplicial X es llamado un *n-grupoide de Kan* (ver el último párrafo de §8.3), si X es un complejo de Kan que cumple la condición de extensión de Kan de manera estricta en dimensión $m \geq n$.

De forma explícita, X es un n-grupoide de Kan si la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{m,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big)$$

inducida de la inclusión $\alpha^{m,k}\colon\ \Lambda^{m+1,k} \hookrightarrow \Delta^{m+1}$ es sobreyectiva para $m \geq 1$ y $0 \leq k \leq m+1$, e inyectiva para $m \geq n$ y $0 \leq k \leq m+1$.

Mostremos las siguientes equivalencias:

LEMA 12.3.1. *Si X es un conjunto simplicial son equivalentes:*

(I) *X es un n-grupoide de Kan.*

(II) *X es un conjunto simplicial $(n+1)$-coesquelético que cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m para $1 \leq m \leq n+1$ y tal que la función:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{n,k}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+1,k}, X\big)$$

es inyectiva para toda $0 \leq k \leq n+1$.

(III) *X es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético que cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m para $1 \leq m \leq n+1$ y tal que la función:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{n,k}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+1,k}, X\big)$$

es inyectiva para toda $0 \leq k \leq n+1$.

En particular, se sigue del Corolario 12.1.2 que un n-grupoide de Kan es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ del Teorema 8.4.2.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético es por definición $(n+1)$-coesquelético. Por lo que (III) $\Rightarrow$ (II). Por otro lado, se sigue de la igualdad $\alpha_X^{n,k} = \widetilde{\alpha}_X^{n,k} \circ \alpha_X^{n}$ (ver (12.12) de abajo), que si la función $\alpha_X^{n,k}$ es inyectiva entonces α_X^{n} también es inyectiva; es decir (II) $\Rightarrow$ (III).

Para mostrar que (I) $\Rightarrow$ (III) consideremos un n-grupoide de Kan X. Observemos primero que por hipótesis X cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m para $1 \leq m \leq n+1$ y que la función $\alpha_X^{n,k}$ es inyectiva para todo $0 \leq k \leq n+1$.

Más aún, ya que la función $\alpha_X^{m,k}$ en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \arrow[r, "\alpha_X^{m}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_X^{m,k}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}_X^{m,k}"] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big)
\end{tikzcd} , \tag{12.12}$$

es por suposición inyectiva para $m \geq n$ y $0 \leq k \leq m+1$, entonces α_X^{m} es una función inyectiva si $m \geq n$. Más áun, deducimos del Lema 8.3.1 que $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ es una función inyectiva si $m \geq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$; por lo que α_X^{m} es una función sobreyectiva si $m \geq n+1$ pues $\alpha_X^{m,k}$ es sobreyectiva y $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ inyectiva siempre que $m \geq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$. Dicho de otro modo X es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético.

Finalmente supongamos que X es un conjunto simplicial que cumple las condiciones del enunciado (III). Se sigue del Lema 12.2.1 que el conjunto simplicial X es un complejo de Kan, por lo que para mostrar que X es un n-grupoide de Kan debemos simplemente comprobar que $\alpha_X^{m,k}$ es una función inyectiva si $m \geq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$. Ya que por hipótesis la función α_X^{m} es una función inyectiva si $m \geq n$, se sigue del Lema 8.3.1 que la función $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ en el triángulo (12.12) de arriba es también inyectiva si $m \geq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$. Por lo tanto $\alpha_X^{m,k}$ es una función inyectiva si $m \geq n+1$ y $0 \leq k \leq m+1$. $\square$

Se deduce del Lema 12.3.1 que la subcategoría plena de **sSet** cuyos objetos son los 0-grupoides de Kan, es equivalente a la categoría de los conjuntos. En efecto, recordemos que tenemos adjunciones:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathbf{Set} \arrow[r, "{[0]_!}" description] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right=40, "\pi_0"'] \arrow[l, bend left=40, "{[0]^*}"] \end{tikzcd} \tag{12.13}$$

donde $\pi_0(X)$ es el conjunto de los componentes por trayectorias del conjunto simplicial X, $[0]_!(A)$ es el conjunto simplicial constante con valor el conjunto A y $[0]^*(X) = X_0$ es el conjunto de los 0-simplejos de X.

Notemos (ver el Corolario 13.2.4 y la Proposición 15.1.5 de [**Dus02**]):

COROLARIO 12.3.2. *Si X es un conjunto simplicial, son equivalentes:*

(I) *X es un 0-grupoide de Kan.*

(II) *Todos los morfismos cara y degenerados de X son funciones biyectivas.*

(III) *X es isomorfo a un conjunto simplicial en la imagen del funtor $[0]_!$.*

(IV) *El morfismo $\eta_X\colon\ X \longrightarrow [0]_! \circ \pi_0(X)$ inducido de una unidad η de la adjunción $\pi_0 \dashv [0]_!$, es un isomorfismo de conjuntos simpliciales.*

(V) *El morfismo $\varepsilon_X\colon\ [0]_! \circ [0]^*(X) \longrightarrow X$ inducido de una counidad ε de la adjunción $[0]_! \dashv [0]^*$, es un isomorfismo de conjuntos simpliciales.*

En particular, el funtor conjunto simplicial constante $[0]_!\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ induce una equivalencia entre la categoría de los conjuntos y la categoría de los 0-grupoides de Kan.

DEMOSTRACIÓN. Deducimos sin dificultad de la definición del funtor $[0]_!$ que los enunciados (II) y (III) son equivalentes. Además ya que $[0]_!$ es un funtor fielmente pleno , los enunciados (III), (IV) y (V) son equivalentes.

Por otro lado se sigue del Lema 12.3.1 que si X es un 0-grupoide de Kan, entonces X es un conjunto simplicial 1-coesquelético y la función:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^1, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{0,k}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{1,k}, X\big) \tag{12.14}$$

es biyectiva si $0 \leq k \leq 1$; es decir las funciones $d_0, d_1\colon\ X_1 \longrightarrow X_0$ son biyectivas. Se deduce fácilmente que X cumple la propiedad (II).

Recíprocamente se verifica sin dificultad que un conjunto simplicial que cumple la propiedad (II) es un complejo de Kan, 1-coesquelético para el cual la función (12.14) es biyectiva. Por lo tanto (I) $\Leftrightarrow$ (II). $\square$

Si $0 \leq n \leq \infty$ mostremos que la subcategoría plena de **sSet** cuyos objetos son los n-grupoides de Kan, es una subcategoría cartesiana cerrada:

LEMA 12.3.3. *Sea $0 \leq n \leq \infty$. Si X y Y son n-grupoides de Kan el conjunto simplicial producto $X \times Y$ y el conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X, Y)$ son n-grupoides de Kan.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X y Y son n-grupoides de Kan. Es fácil ver que el conjunto simplicial producto $X \times Y$ es un n-grupoide de Kan porque la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X \times Y\big) \xrightarrow{\alpha^{m,k}_{X \times Y}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X \times Y\big)$$

inducida de la inclusión $\alpha^{m,k}\colon\ \Lambda^{m+1,k} \hookrightarrow \Delta^{m+1}$ se identifica salvo isomorfismo con la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, Y\big) \xrightarrow{\alpha^{m,k}_{X} \times \alpha^{m,k}_{Y}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, Y\big)\ .$$

Observemos por otro lado que por los Lemas 8.4.6 y 12.2.2 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, Y\big)$ es un complejo de Kan débilmente n-coesquelético. Se sigue de los Lemas 12.3.1 y 12.1.3 que para mostrar que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X, Y\big)$ sea un n-grupoide de Kan debemos mostrar que si $0 \leq k \leq n+1$, la función:

(12.15)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\big(\tau^*_{n+1}(X) \times \tau^*_{n+1}(\Delta^{n+1}), \tau^*_{n+1}Y\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1}}\big(\tau^*_{n+1}(X) \times \tau^*_{n+1}(\Lambda^{n+1,k}), \tau^*_{n+1}Y\big)$$

inducida de la inclusión canónica $\Lambda^{n+1,k} \hookrightarrow \Delta^{n+1}$ es inyectiva.

Sea $0 \leq k \leq n+1$. Ya que se tienen las siguientes igualdades:

$$\Delta^{n+1}_{n+1} \Big\backslash \Lambda^{n+1,k}_{n+1} = \Big\{\ [n+1] \xrightarrow{\mathrm{id}_{[n+1]}} [n+1]\ ,\quad [n+1] \xrightarrow{\sigma_i} [n] \xrightarrow{\delta_k} [n+1] \ \text{ donde } \ 0 \leq i \leq n \Big\},$$

$$\Delta^{n+1}_{n} \Big\backslash \Lambda^{n+1,k}_{n} = \Big\{\ [n] \xrightarrow{\delta_k} [n+1]\ \Big\} \qquad \text{y} \qquad \Delta^{n+1}_{n-1} \Big\backslash \Lambda^{n+1,k}_{n-1} = \varnothing\,;$$

debemos mostrar que si $F, G\colon\ \tau^*_{n+1}(X) \times \tau^*_{n+1}(\Delta^{n+1}) \longrightarrow \tau^*_{n+1}(Y)$ son morfismos de conjuntos simpliciales truncados tales que:

$$(12.16)\quad F_k = G_k \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad F_n(a, f) = G_n(a, f) \quad \text{si} \quad a \in X_n \quad \text{y} \quad f \in \Lambda^{n+1,k}_n$$
$$\text{y} \quad F_{n+1}(x, f) = G_{n+1}(x, \varphi) \quad \text{si} \quad x \in X_{n+1} \quad \text{y} \quad \varphi \in \Lambda^{n+1,k}_{n+1};$$

entonces:

(12.17)

$$F_n(a, \delta_k) = G_n(a, \delta_k) \quad \text{si} \quad a \in X_n$$
$$F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n+1]}) = G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n+1]}) \quad \text{y} \quad F_{n+1}(x, \delta_k\sigma_i) = G_{n+1}(x, \delta_k\sigma_i) \quad \text{si} \quad x \in X_{n+1}\,.$$

Para mostrar que $F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]}) = G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]})$ para todo $x \in X_{n+1}$, notemos que como X es un n-grupoide de Kan, es suficiente verificar que $d_i \circ F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]}) = d_i \circ G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]})$ para todo $x \in X_{n+1}$ y $0 \leq i \leq n+1$ donde $i \neq k$. Pero por hipótesis:

$$d_i \circ F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]}) \;=\; F_n(d_i x, \delta_i) \;=\; G_n(d_i x, \delta_i) \;=\; d_i \circ G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]})\,.$$

si $x \in X_{n+1}$ e $0 \leq i \leq n+1$ donde $i \neq k$. Por lo tanto $F_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]}) = G_{n+1}(x, \mathrm{id}_{[n]})$ para todo $x \in X_{n+1}$.

Deducimos entonces que si $a \in X_n$:

$$F_n(a, \delta_k) = d_k \circ F_{n+1}\big(s_k(a), \mathrm{id}_{[n]}\big) = d_k \circ G_{n+1}\big(s_k(a), \mathrm{id}_{[n]}\big) = G_n(a, \delta_k) \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq n$$

y $\quad F_n(a, \delta_k) = d_k \circ F_{n+1}\big(s_n(a), \mathrm{id}_{[n]}\big) = d_k \circ G_{n+1}\big(s_n(a), \mathrm{id}_{[n]}\big) = G_n(a, \delta_k) \quad \text{si} \quad k = n+1\,.$

Por último, tenemos que $F_{n+1}(x, \delta_k \sigma_i) = G_{n+1}(x, \delta_k \sigma_i)$ si $x \in X_{n+1}$ e $0 \leq i \leq n$, pues:

$$d_j \circ F_{n+1}(x, \delta_k \sigma_i) = F_n\big(d_i(x), \delta_k \sigma_i \delta_j\big) = G_n\big(d_i(x), \delta_k \sigma_i \delta_j\big) = d_j \circ G_{n+1}(x, \delta_k \sigma_i)$$

para todo $0 \leq j \leq n+1$. Por lo tanto $F = G$. ☐

§12.4. Diremos que un conjunto simplicial X *cumple la condición de ser mínimo en dimensión* m si para todo $0 \leq k \leq m+1$ la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big) \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_X^{m,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big)\ ,$$

es inyectiva cuando la restringimos a la imagen de la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \xrightarrow{\alpha_X^{m}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big)\ .$$

Si $n \geq 0$, un conjunto simplicial es llamado *n-minimo* si satisface la condición de ser mínimo en dimensión m para todo $m \geq n$. Un conjunto simplicial 0-mínimo es llamado simplemente un *conjunto simplicial mínimo* (ver II§9 de [**May82**]).

COROLARIO 12.4.1. *Si $n \geq 0$ y X es cualquier conjunto simplicial, los siguietnes enunciados son equivalentes:*

(I) *X es un n-grupoide de Kan.*

(II) *X es un complejo de Kan n-mínimo y débilmente n-coesquelético.*

(III) *X es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético, el cual cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m para $1 \leq m \leq n+1$ y cumple la condición de ser mínimo en dimensión n.*

Del mismo modo, los siguientes enunciados equivalentes:

(IV) *X es un n-grupoide de Kan mínimo.*

(V) *X es un complejo de Kan débilmente n-coesquelético mínimo.*

(vi) *X es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético, el cual cumple la condición de ser mínimo en dimensión m para $0 \le m \le n$ y cumple la condición de extensión de Kan en dimensión m para $1 \le m \le n+1$.*

Demostración. Si X es un conjunto simplicial, deducimos del siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, X\big) \arrow[r, "\alpha_X^n"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_X^{n,k}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1}, X\big) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}_X^{n,k}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+1,k}, X\big)
\end{tikzcd} ;$$

que si la función α_X^n es inyectiva, por ejemplo si X es un conjunto simplicial débilmente n-coesquelético, entonces X cumple la condición de ser mínimo en dimensión n si y solamente si la función $\alpha_X^{n,k}$ es inyectiva. Se sigue del Lema 12.3.1 que los enunciados (i) y (iii) son equivalentes.

Por el Corolario 12.1.2, para mostrar (ii) ⇔ (iii) es suficiente mostrar el siguiente enunciado:

Lema 12.4.2. *Sea $n \ge 0$. Si X es un conjunto simplicial $(n+1)$-coesquelético (resp. débilmente n-coesquelético), entonces X cumple la condición de ser mínimo en dimensión m para $m \ge n+2$ (resp. $m \ge n+1$).*

Demostración. Si X es un conjunto simplicial $(n{+}1)$-coesquelético, en el siguiente triangulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{m+1}, X\big) \arrow[r, "\alpha_X^m"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_X^{m,k}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{m+1}, X\big) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}_X^{m,k}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{m+1,k}, X\big)
\end{tikzcd} , \tag{12.18}$$

la función α_X^m es biyectiva para $m \ge n+1$. Se sigue del Lema 8.3.1 que $\widetilde{\alpha}_X^{m,k}$ es una función biyectiva para $m \ge n+2$ y $0 \le k \le m+1$; en particular, X es m-mínimo para $m \ge n+2$.

Por otro lado, si suponemos que X es débilmente n-coesquelético, se tiene esta vez que la función α_X^m es inyectiva para $m \ge n$. Por lo tanto, por el mismo enunciado X es un conjunto simplicial m-mínimo para $m \ge n+1$. ☐

Por último, notemos que las equivalencias (iv) ⇔ (v) ⇔ (vi) se deducen fácilmente de las equivalencias (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii) que ya mostramos. ☐

Recordemos de [**May82**]:

Proposición 12.4.3. *Sea $n \ge 0$. Si X es un conjunto simplicial existe un n-grupoide de Kan mínimo W y un isomorfismo $W \longrightarrow X$ de la categoría homotópica de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ del Teorema 8.4.2.*

De manera análoga, si X es un conjunto simplicial reducido existe un n-grupoide de Kan mínimo W el cual es un conjunto simplicial reducido y un isomorfismo $W \longrightarrow X$ de la categoría homotópica de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ de la Proposición 10.1.2.

DEMOSTRACIÓN. Si X es cualquier conjunto simplicial, sabemos que existe un complejo de Kan Y y una ∞-equivalencia débil de conjuntos simpliciales $X \longrightarrow Y$.

Por otro lado, si Y es un complejo de Kan, en II§9 de [**May82**] se encuentra una prueba de la existencia de un subconjunto simplicial Z de Y con las siguientes propiedades:

(I) Z es un complejo de Kan mínimo.
(II) El morfismo inclusión $Z \hookrightarrow Y$ es una ∞-equivalencia débil.

En particular, deducimos del Lema 12.2.1 morfismos:

$$X \xrightarrow{\sim_\infty} Y \xleftarrow{\sim_\infty} Z \xrightarrow{\sim_n} \mathbf{csq}_{n+1}(Z) \xrightarrow{\sim_\infty} \mathbf{csq}'_{n+1}(Z) \tag{12.19}$$

donde $\mathbf{csq}'_{n+1}(Z)$ es un complejo de Kan débilmente n-coesquelético.

Mostremos el siguiente enunciado:

LEMA 12.4.4. *Sea $n \geq 0$. Si X es un conjunto simplicial que cumple la condición de ser mínimo en dimensión m para $0 \leq m \leq n$, entonces $\mathbf{csq}_{n+1}(X)'$ cumple la condición de ser mínimo en dimensión m para todo $m \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Lema 12.4.2 que es suficiente mostrar que si X cumple la condición de ser mínimo en dimensión m para $0 \leq m \leq n$, entonces $\mathbf{csq}_{n+1}(X)'$ también la cumple.

En primer lugar $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ es m-mínimo para $0 \leq m \leq n-1$ ya que X y $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ tienen la misma n-truncación. Para mostrar que $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ es n-mínimo, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, X\big) \arrow[r, "\alpha_X^n"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1}, X\big) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}_X^{n,k}"] \arrow[d, "f_2"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+1,k}, X\big) \arrow[d, "f_3"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{n+1}, \mathbf{csq}'_{n+1}X\big) \arrow[r, "\alpha^n_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^{n+1}, \mathbf{csq}'_{n+1}X\big) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}^{n,k}_{\mathbf{csq}'_{n+1}X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{n+1,k}, \mathbf{csq}'_{n+1}X\big)
\end{tikzcd}$$

donde las funciones f_i son inducidas por $X \longrightarrow \mathbf{csq}'_{n+1}X$ la composición (12.9).

Observemos que f_2 y f_3 son funciones biyectivas, ya que X y $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ tienen la misma n-truncación. Por otro lado, ya que podemos identificar a f_1 con el morfismo cociente $X_{n+1} \longrightarrow X_{n+1}/\overset{n}{\sim}$, donde $\overset{n}{\sim}$ es la relación de equivalencia (12.7), f_1 es una función sobreyectiva. Por lo tanto, $\mathbf{csq}'_{n+1}(X)$ es un conjunto simplicial n-mínimo si X lo es. $\square$

Deducimo del Corolario 12.4.1 y del Lema 12.4.4 que el complejo de Kan débilmente n-coesquelético $\mathbf{csq}'_{n+1}(Z)$ del diagrama (12.19) es un n-grupoide de Kan mínimo. Por otro lado, ya que todos los morfismos en (12.19) son n-equivalencias débiles, deducimos un isomorfismo $\mathbf{csq}'_{n+1}(Z) \longrightarrow X$ en $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$ la categoría homtópica de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$.

Finalmente observemos que si X es un conjunto simplicial reducido podemos suponer que todos los conjuntos simpliciales del diagrama (12.19) son también reducidos. En efecto para empezar elegimos un remplazo fibrante $X \longrightarrow Y$ de X en la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$. Después observamos que Z es un subconjunto simplicial de Y, en particular Z es reducido. Por último observemos que los conjuntos de 0-simplejos de $\mathbf{csq}_{n+1}(Z)$ y $\mathbf{csq}_{n+1}(Z)'$ son iguales a $Z_0 = \star$. $\square$

§12.5. Si $n \geq 0$ recordemos que por los Lemas 12.3.3, 12.1.3 y 8.4.6 las subcategorías plenas $\mathbf{GrpdK}^n$, $\mathbf{Kcsq}^{n+1}$ y $\mathbf{Fib}^n$ de la categoría de $\mathbf{sSet}$ cuyos objetos son los n-grupoides de Kan, los complejos de Kan $(n+1)$-coesqueléticos y los conjuntos simpliciales n-fibrantes respectivamente, son subcategorías cartesianas cerradas de $\mathbf{sSet}$.

Dicho de otro modo, se tiene una cadena de subcategorías plenas:

$$\mathbf{GrpdK}^n \hookrightarrow \mathbf{Kcsq}^{n+1} \hookrightarrow \mathbf{Fib}^n \hookrightarrow \mathbf{sSet} \tag{12.20}$$

las cuales son estables por productos finitos y por la construcción del conjunto simplicial de morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}$.

Ya que en $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n)$ todos los objetos son cofibrantes y los objetos fibrantes son por definición los conjuntos simpliciales n-fibrantes, si escribimos $h\mathbf{GrpdK}^n$, $h\mathbf{Kcsq}^{n+1}$ y $h\mathbf{Fib}^n$ para denotar las categorías que obtenemos de $\mathbf{GrpdK}^n$, $\mathbf{Kcsq}^{n+1}$ y $\mathbf{Fib}^n$ respectivamente, al tomar el conjunto de los componentes por trayectorias $\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big)$ del conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}$, los funtores inclusión de (12.20) inducen una cadena de funtores fielmente plenos:

$$h\mathbf{GrpdK}^n \hookrightarrow h\mathbf{Kcsq}^{n+1} \hookrightarrow h\mathbf{Fib}^n \hookrightarrow \mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}) \tag{12.21}$$

La Proposición 12.4.3 implica que estos funtores son esencialmente sobreyectivos.

COROLARIO 12.5.1. *La cadena de funtores de la inclusión* (12.20) *induce una cadena de equivalencias de categorías* (12.21). *En particular, la categoría homotópica de los n-grupoides de Kan $h\mathbf{GrpdK}^n$ es equivalente a la categoría homotópica de los n-típos de homotopía* $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet})$.

Observemos (ver el Corolario 12.3.2):

COROLARIO 12.5.2. *El funtor cociente* $\mathbf{GrpdK}^0 \longrightarrow h\mathbf{GrpdK}^0 \simeq \mathrm{Ho}_0(\mathbf{sSet})$ *es un isomorfismo de categorías. En particular el funtor conjunto simplicial constante induce una equivalencia entre la categoría cartesiana cerrada de conjuntos* $\mathbf{Set}$ *y la categoría cartesiana cerrada de los* 0*-tipos de homotopía* $\mathrm{Ho}_0(\mathbf{sSet})$*, es decir la categoría homotópica de los* 0*-grupoides de Kan.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que el funtor canónico $\mathbf{GrpdK}^0 \longrightarrow h\mathbf{GrpdK}^0$ es la identidad en los objetos, para mostrar que es un isomorfismo de categorías es suficiente mostrar que es un funtor fielmente pleno.

Si X y Y son de 0-grupoides de Kan se sigue del Lema 12.3.3 que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X,Y)$ también es un 0-grupoide de Kan. En particular la función:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X,Y)_0 \longrightarrow \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}(X,Y)\big)$$

es biyectiva de acuerdo al Corolario 12.3.2.

La segunda afirmación es una consecuencia de lo que venimos de demostrar, del Corolario 12.3.2 y del caso $n = 0$ del Corolario 12.5.1. □

§12.5.1. Si $n \geq 1$, escribamos $\mathbf{GrpK}^n$, $\mathbf{Kcsq}_0^{n+1}$ y $\mathbf{Fib}_0^n$ para denotar a las subcategorías plenas de la categoría de los conjuntos simpliciales reducidos $\mathbf{sSet}_0$ cuyos objetos son los n-grupoides de Kan, los complejos de Kan $(n+1)$-coesqueléticos y los conjuntos simpliciales n-fibrantes respectivamente. Llamamos a los objetos de $\mathbf{GrpK}^n$ los *n-grupos de Kan*.

Observemos que tenemos una cadena de funtores inclusión:

$$\mathbf{GrpK}^n \hookrightarrow \mathbf{Kcsq}_0^{n+1} \hookrightarrow \mathbf{Fib}_0^n \hookrightarrow \mathbf{sSet} \ . \tag{12.22}$$

Denotemos también como $h\mathbf{GrpK}^n$, $h\mathbf{Kcsq}_0^{n+1}$ y $h\mathbf{Fib}_0^n$ a las categorías que obtenemos de $\mathbf{GrpK}^n$, $\mathbf{Kcsq}_0^{n+1}$ y $\mathbf{Fib}_0^n$ respectivamente al tomar el conjunto de los componentes por trayectorias $\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big)$ del conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}$ de $\mathbf{sSet}_0$. Ya que en la categoría de modelos simplicial $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_n^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_n^{red})$ todos los objetos son cofibrantes y los objetos fibrantes son por definición les conjuntos simpliciales n-fibrantes reducidos, los funtores inclusión de (12.22) inducen una cadena de funtores fielmente plenos:

$$h\mathbf{GrpK}^n \hookrightarrow h\mathbf{Kcsq}_0^{n+1} \hookrightarrow h\mathbf{Fib}_0^n \hookrightarrow \mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0) \tag{12.23}$$

COROLARIO 12.5.3. *La cadena de funtores inclusión* (12.22) *inducen una cadena de equivalencias de categorías* (12.23)*. En particular la categoría homotópica de los n-grupos de Kan* $h\mathbf{GrpK}^n$ *es equivalente a la categoría homotópica de los n-tipos de homotopia reducidos* $\mathrm{Ho}_n(\mathbf{sSet}_0)$.

Demostración. Ver la Proposición 12.4.3. ☐

Mostremos (ver §13.3 y el Corolario 12.5.2):

Corolario 12.5.4. *El funtor canónico* $\mathbf{GrpK}^1 \longrightarrow h\mathbf{GrpK}^1 \simeq \mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0)$ *es un isomorfismo de categorías. En particular el funtor nervio de las categorías pequeñas restringido a los grupos* $\mathrm{N}\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ *, induce una equivalencia entre la categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{Grp}$ *y la categoría cartesiana cerrada de los* 1*-tipos de homotópia reducidos* $\mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0)$*, es decir la categoría homotópica de los* 1*-grupos de Kan.*

Demostración. Demostremos primero:

Lema 12.5.5. *Si* X *y* W *son conjuntos simpliciales reducidos donde* W *es un* 1*-grupoide de Kan, entonces el conjunto simplicial* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)$ *es un* 0*-grupoide de Kan (ver el Lema 12.3.2). En particular:*

$$\pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)\big) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)$$

Demostración. Para empezar, como W es un 1-grupoide de Kan reducido, W es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_1^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_1^{red})$; en particular el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)$ es un complejo de Kan para todo conjunto simplicial X reducido.

Más aún, por el Lema 12.1.4 el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)$ es 2-coesquelético, pues W es 2-coesquelético. Se sigue del Lema 12.3.1 que para nuestro propósito es suficiente mostrar que si $0 \leq m \leq 1$ y $0 \leq k \leq m+1$ la función sobreyectiva:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)\Big) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Lambda^{m+1,k}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, W\big)\Big) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(X \times \Delta^{m+1}\big)/\big(\star \times \Delta^{m+1}\big), W\Big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(X \times \Lambda^{m+1,k}\big)/\big(\star \times \Lambda^{m+1,k}\big), W\Big)
\end{tikzcd} ,$$

inducida de la inclusión $\Lambda^{m+1,k} \longrightarrow \Delta^{m+1}$ es inyectiva.

Caso $m = 1$*:* Si $0 \leq k \leq 2$ la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(X \times \Delta^2\big)/\big(\star \times \Delta^2\big), W\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(X \times \Lambda^{2,k}\big)/\big(\star \times \Lambda^{2,k}\big), W\Big) \tag{12.24}$$

es biyectiva, ya que por hipótesis $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\star \times \Delta^2, W\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\star \times \Lambda^{2,k}, W\big)$ es una función biyectiva y además $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(X \times \Delta^2, W\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(X \times \Lambda^{2,k}, W\big)$ también es una función biyectiva si W es un 1-grupoide por el Corolario 12.3.3.

Caso $m = 0$*:* Si $0 \leq k \leq 1$, mostremos que la siguiente función es inyectiva:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(X \times \Delta^1\big)/\big(\star \times \Delta^1\big), W\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(X \times \Lambda^{1,k}\big)/\big(\star \times \Lambda^{1,k}\big), W\Big) \;. \tag{12.25}$$

De manera explícita, si $F, G\colon\ X \times \Delta^1 \longrightarrow W$ son dos morfismos de conjuntos simpliciales tales que:

$$F\Big|_{\star\times\Delta^1} = G\Big|_{\star\times\Delta^1} = \begin{array}{c}\text{Morfismo}\\ \text{constante}\\ \text{de valor } \star\end{array} \qquad \text{y} \qquad F\Big|_{X\times\Lambda^{1,k}} = G\Big|_{X\times\Lambda^{1,k}},$$

debemos mostrar que $F = G$.

Ya que W es un conjunto simplicial 2-coesquelético y se tiene la igualdad:

$$\Delta^1_1 \Big\backslash \Lambda^{1,k}_1 = \Big\{\ [1] \xrightarrow{\mathrm{id}_{[1]}} [1]\ ,\quad [1] \xrightarrow{\sigma_0} [0] \xrightarrow{\delta_k} [1]\ \Big\},$$

es suficiente demostrar que para todo 1-simplejo a de X:

$$F_1\big(a, \mathrm{id}_{[1]}\big) = G_1\big(a, \mathrm{id}_{[1]}\big) \quad \text{y} \quad F_1\big(a, \delta_k \circ \sigma_0\big) = G_1\big(a, \delta_k \circ \sigma_0\big). \tag{12.26}$$

Si $a \in X_1$ consideremos los 2-simplejos $(s_1 a, \sigma_0)$ y $(s_0 a, \sigma_1)$ de $X \times \Delta^1$. Como:

$$\begin{array}{lll} d_0(s_1 a, \sigma_0) = (s_0\star, \mathrm{id}_{[1]}) & d_1(s_1 a, \sigma_0) = \big(a, \mathrm{id}_{[1]}\big) & d_2(s_1 a, \sigma_0) = (a, \delta_1 \circ \sigma_0) \\ d_0(s_0 a, \sigma_1) = (a, \delta_0 \circ \sigma_0) & d_1(s_0 a, \sigma_1) = (a, \mathrm{id}_{[1]}) & d_2(s_1 a, \sigma_1) = (s_0\star, \mathrm{id}_{[1]}), \end{array}$$

se sigue que $F_2(s_1 a, \sigma_0) = G_2(s_1 a, \sigma_0)$ o $F_2(s_0 a, \sigma_1) = G_2(s_0 a, \sigma_1)$, pues la función $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^2, W\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{2,m}, W\big)$ inducida de la inclusión $\Lambda^{2,m} \hookrightarrow \Delta^2$ es inyectiva para $0 \le m \le 2$ y sabemos que si $\ell \neq k$:

$$F_1\big(s_0\star, \mathrm{id}_{[1]}\big) = G_1\big(s_0\star, \mathrm{id}_{[1]}\big) \quad \text{y} \quad F_1\big(a, \delta_\ell \circ \sigma_0\big) = G_1\big(a, \delta_\ell \circ \sigma_0\big).$$

Deducimos sin dificultad (12.26). ☐

Finalmente, para mostrar el Corolario 12.5.3 notemos que si X y Y son 1-grupoides de Kan reducidos, se sigue del Lema 12.5.5 que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X, Y)$ es un 0-grupoide de Kan, es decir:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}(X, Y) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X, Y)_0 \longrightarrow \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}(X, Y)\big)$$

es una función biyectiva por el Corolario 12.3.2.

Dicho de otro modo, el funtor $\mathbf{GrpK}^1 \longrightarrow h\mathbf{GrpK}^1$ es fielmente pleno. Por lo tanto una equivalencia de categorías.

Para la segunda parte ver §13.3. ☐

§12.6. En el presente párrafo vamos a mostrar versiones punteadas del Corolario 12.1.2 y los Lemas 12.1.3 y 12.3.3. Para ello consideremos las adjunciones:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathbf{sSet}_{\le n+1,\star} \arrow[r, bend right, "\overline{\tau}_{n+1\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_{\star} \arrow[l, bend right, "\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}"'] & \text{y} & \mathbf{sSet}_{\le n+1} \arrow[r, bend right, "\tau_{n+1\,*}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "\tau^{*}_{n+1}"'] \end{tikzcd} , \tag{12.27}$$

(ver §12.1) inducidas por el funtor inclusión $\tau_{n+1}\colon \mathbf{\Delta}_{\leq n+1} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}$; y si (X,x) es un conjunto simplicial punteado escribamos $\mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}(X,x) = \overline{\tau}_{n+1\,*}\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(X,x)$, de manera análoga a la notación $\mathbf{csq}_{n+1} = \tau_{n+1\,*}\tau^{*}_{n+1}$ para el caso no punteado.

Para dar una descripción del conjunto simplicial punteado $\mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}(X,x)$ en términos del conjunto simplicial $\mathbf{csq}_{n+1}(X)$, consideremos las siguientes composiciones de adjunciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet}_{\leq n+1,\star} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\overline{\tau}_{n+1\,*}"'] & \mathbf{sSet}_{\star} \arrow[l, bend right, "\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\pi"'] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "(\,\cdot\,)_{+}"'] & \text{y} & \mathbf{sSet}_{\leq n+1,\star} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\pi"'] & \mathbf{sSet}_{\leq n+1} \arrow[l, bend right, "(\,\cdot\,)_{+}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\tau_{n+1\,*}"'] & \mathbf{sSet} \arrow[l, bend right, "\tau^{*}_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

que construimos a partir de (9.29) y (12.27).

Como $\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(X_{+}) = \tau^{*}_{n+1}(X)_{+}$, para todo conjunto simplicial X; se sigue que si (A,a) es un conjunto simplicial punteado $(n+1)$-truncado, el conjunto simplicial subyacente a $\overline{\tau}_{n+1\,*}(A,a)$ es isomorfo al conjunto simplicial $\tau_{n+1\,*}(A)$. En particular, existe un isomorfismo natural de conjuntos simpliciales punteados:

$$\mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}(X,x) \cong \big(\mathbf{csq}_{n+1}(X), \overline{x}\big)\,, \tag{12.28}$$

donde $\overline{x}$ es la imagen de la flecha $\star \xrightarrow{x} X$ por el funtor $\mathbf{csq}_{n+1} = \tau_{n+1\,*}\tau^{*}_{n+1}$; es decir $\overline{x}$ es la composición de morfismos simpliciales:

$$\star \xrightarrow{\;x\;} X \xrightarrow{\;\eta_X\;} \mathbf{csq}_{n+1}(X)\,.$$

Finalmente, observemos que si $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{sSet}} \Rightarrow \mathbf{csq}_{n+1}$ es una unidad de la segunda adjunción de (12.27), entonces la igualdad:

$$\pi\big(\overline{\eta}_{(X,x_0)}\big) = \eta_X \quad \text{donde } (X,x_0) \text{ es un conjunto simplicial punteado,} \tag{12.29}$$

define una transformación natural $\overline{\eta}\colon \mathrm{id}_{\mathbf{sSet}_{\star}} \Rightarrow \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}$ la cual es una unidad de la primer adjunción en (12.27).

Lema 12.6.1. *Sea $n \geq 0$ y (X,x) un conjunto simplicial punteado. Si (X,x) es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_{\star}, \pi^{-1}\mathbf{W}_{\infty}, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_{\infty})$, entonces el conjunto simplicial punteado $\mathbf{csq}^{pt}_{n+1}(X,x)$ de (12.28) es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_{\star}, \pi^{-1}\mathbf{W}_{n}, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_{n})$, y el morfismo canónico $(X,x) \longrightarrow \mathbf{csq}^{pt}_{n+1}(X,x)$ pertenece a $\pi^{-1}\mathbf{W}_{n}$.*

Demostración. Se sigue del Corolario 8.5.1 y la Proposición 10.1.2 que un conjunto simplicial punteado (X,x) es un objeto fibrante de la categoría de modelos

$(\mathbf{sSet}_\star, \pi^{-1}\mathbf{W}_n, \mathbf{mono}, \pi^{-1}\mathbf{fib}_n)$, si y solamente si el conjunto simplicial X es un complejo de Kan tal que $\pi_m(X,a) = 0$ si $m \geq n$ para toda $a \in X_0$. El enunciado que queremos mostrar es entonces una consecuencia de (12.28), (12.29) y del Corolario 12.1.2. $\square$

Mostremos ahora:

LEMA 12.6.2. *Sea $n \geq 0$. Si $X = (X,x)$ y $Y = (Y,y)$ son conjuntos simpliciales punteados, el conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X, \mathbf{csq}^{pt}_{n+1}Y\big)$ es $(n+1)$-coesquelético y el morfismo canónico $X \longrightarrow \mathbf{csq}^{pt}_{n+1}(X)$ induce un isomorfismo de conjuntos simpliciales:*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbf{csq}^{pt}_{n+1}X, \mathbf{csq}^{pt}_{n+1}Y\big) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X, \mathbf{csq}^{pt}_{n+1}Y\big) \ . \tag{12.30}$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba es análoga a la del Lema 12.1.3. En efecto, ya que:

$$\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(A \wedge B) \cong \overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(B) \wedge \overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(B)$$

pues el funtor $\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}$ conmuta con límites y colímites pequeños, si $m \geq n+1$ se tiene la siguiente cadena de biyecciones naturales:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big)\Big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\Delta^{m+1}_+ \wedge X, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1,\,\star}}\Big(\overline{\tau}^*_{n+1}\big(\Delta^{m+1}_+ \wedge X\big), \overline{\tau}^*_{n+1}Y\Big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1,\,\star}}\Big(\overline{\tau}^*_{n+1}\big(\partial\Delta^{m+1}_+ \wedge X\big), \overline{\tau}^*_{n+1}Y\Big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\partial\Delta^{m+1}_+ \wedge X, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\partial\Delta^{m+1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big)\Big)
\end{aligned}$$

y si $k \geq 0$ la siguiente cadena de biyecciones naturales:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big)_k &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X \wedge \Delta^k_+, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1,\,\star}}\Big(\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}\big(X \wedge \Delta^k_+\big), \overline{\tau}^{\,*}_{n+1}Y\Big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1,\,\star}}\Big(\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}\big(\mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}(X) \wedge \Delta^k_+\big), \overline{\tau}^{\,*}_{n+1}Y\Big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq n+1,\,\star}}\Big(\mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}\big(X\big) \wedge \Delta^k_+, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\Big) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(\mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}X, \mathbf{csq}^{\mathrm{pt}}_{n+1}Y\big)_k \,.
\end{aligned}$$

$\square$

Finalmente:

COROLARIO 12.6.3. *Sea $n \geq 0$. Si $Y = (Y, y_0)$ es un conjunto simplicial punteado cuyo conjunto simplicial subyacente es un n-grupoide de Kan, entonces el conjunto simplicial de los morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X, Y\big)$ es un n-grupoide de Kan para todo conjunto simplicial punteado $X = (X, x_0)$.*

Demostración. El conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X,Y\big)$ es $(n{+}1)$-coesquelético por el Lema 12.6.2 y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_\star}\big(X,Y\big)$ es un complejo de Kan porque el conjunto simplicial subyacente a Y es un complejo de Kan.

Se sigue del Lema 12.3.1 que debemos mostrar que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\le n+1,\,\star}}\big(\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(X\wedge\Delta^{n+1}_+),\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}Y\big)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\le n+1,\,\star}}\big(\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}(X\wedge\Lambda^{n+1,k}_+),\overline{\tau}^{\,*}_{n+1}Y\big)$$

inducida de la inclusión canónica $\Lambda^{n+1,k}\hookrightarrow\Delta^{n+1}$ es inyectiva para $0\le k\le n+1$.

Sea $0\le k\le n+1$. Ya que se tienen las siguientes igualdades de funciones:

$$\Delta^{n+1}_{n+1}\Big\backslash\Lambda^{n+1,k}_{n+1}=\Big\{\ [n+1]\xrightarrow{\mathrm{id}_{[n+1]}}[n+1]\ ,\quad[n+1]\xrightarrow{\sigma_i}[n]\xrightarrow{\delta_k}[n+1]\ \text{ donde }\ 0\le i\le n\Big\},$$

$$\Delta^{n+1}_{n}\Big\backslash\Lambda^{n+1,k}_{n}=\Big\{\ [n]\xrightarrow{\delta_k}[n+1]\ \Big\}\qquad\text{y}\qquad\Delta^{n+1}_{n-1}\Big\backslash\Lambda^{n+1,k}_{n-1}=\varnothing\,,$$

si $F,G\colon\ \tau^{\,*}_{n+1}(X\times\Delta^{n+1})\longrightarrow\tau^{\,*}_{n+1}(Y)$ son morfismos de conjuntos simpliciales truncados tales que:

$$(12.31)\quad F_k=G_k\quad\text{si}\quad 0\le k\le n-1,\qquad F_n(a,f)=G_n(a,f)\quad\text{si}\quad a\in X_n\quad\text{y}\quad f\in\Lambda^{n+1,k}_n\,,$$

$$F_{n+1}(x,f)=G_{n+1}(x,\varphi)\quad\text{si}\quad x\in X_{n+1}\quad\text{y}\quad\varphi\in\Lambda^{n+1,k}_{n+1}$$

$$\text{y}\qquad F_i(x_0,\alpha)=y_0=G_i(x_0,\alpha)\quad\text{si}\quad\alpha\in\Delta^{n+1}_i\quad\text{y}\quad 0\le i\le n+1\,,$$

debemos mostrar que:

(12.32)

$$F_n(a,\delta_k)=G_n(a,\delta_k)\quad\text{si}\quad a\in X_n,$$

$$F_{n+1}(x,\mathrm{id}_{[n+1]})=G_{n+1}(x,\mathrm{id}_{[n+1]})\quad\text{y}\quad F_{n+1}(x,\delta_k\sigma_i)=G_{n+1}(x,\delta_k\sigma_i)\quad\text{si}\quad x\in X_{n+1}\,.$$

La prueba es la misma que la del Lema 12.3.3. □

§12.7. Si $n\ge 0$ y $\mathbf{\Delta}_{\le n}$ es la categoría definida al principio de §12.1, consideremos las categorías producto $\mathbf{\Delta}\times\big(\mathbf{\Delta}_{\le n}\big)$ y $\big(\mathbf{\Delta}_{\le n}\big)\times\mathbf{\Delta}$. Llamamos respectivamente a los objetos de las siguientes categorías de funtores:

$$\mathbf{ssSet}_{\le n}=\mathbf{Set}^{\big(\mathbf{\Delta}\times(\mathbf{\Delta}_{\le n})\big)^{op}}\qquad\text{y}\qquad\widehat{\mathbf{\Delta}_{\le n}\times\mathbf{\Delta}}=\mathbf{Set}^{\big((\mathbf{\Delta}_{\le n})\times\mathbf{\Delta}\big)^{op}}$$

los conjuntos simpliciales *verticalmente n-truncados* y *horizontalmente n-truncados*.

Los funtores inclusión:

$$\mathbf{\Delta}\times\big(\mathbf{\Delta}_{\le n}\big)\xhookrightarrow{\mathrm{id}\times\nu_n}\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}\qquad\text{y}\qquad\big(\mathbf{\Delta}_{\le n}\big)\times\mathbf{\Delta}\xhookrightarrow{\nu_n\times\mathrm{id}}\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}$$

inducen adjunciones:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{ssSet}_{\leq n} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "(\mathrm{id}{\times}\nu_n)_*"'] & \mathbf{ssSet} \arrow[l, bend right, "(\mathrm{id}{\times}\nu_n)^*"'] & \text{y} & \widehat{\mathbf{\Delta}_{\leq n}{\times}\mathbf{\Delta}} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "(\nu_n{\times}\mathrm{id})_*"'] & \mathbf{ssSet} \arrow[l, bend right, "(\nu_n{\times}\mathrm{id})^*"'] \, , \end{tikzcd}$$

respectivamente.

Un conjunto bisimplicial X es llamado *verticalmente n-coesquelético*, si el morfismo canónico:

$$X \xrightarrow{\eta_X^n} (\mathrm{id} \times \nu_n)_*(\mathrm{id} \times \nu_n)^* \, X$$

es un isomorfismo; es decir si X es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $(\mathrm{id}{\times}\nu_n)_*$ de arriba. De manera análoga, X es llamado *horizontalmente n-coesquelético* si X es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $(\nu_n \times \mathrm{id})_*$.

LEMA 12.7.1. *Para todo conjunto bisimplicial X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *X es verticalmente (resp. horizontalmente) n-coesquelético.*

(II) *X es verticalmente (resp. horizontalmente) m-coesquelético para $m \geq n$.*

(III) *La función:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\Big) \xrightarrow{\left(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1}\right)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\Big) \tag{12.33}$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\Big) \xrightarrow{\left(\alpha^{p-1} \boxtimes \mathrm{id}\right)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\Big) \right),$$

inducida del monomorfismo $\partial\Delta^q \xrightarrow{\alpha^{q-1}} \Delta^q$ $\left(\textit{resp.} \ \partial\Delta^p \xrightarrow{\alpha^{p-1}} \Delta^p \right)$, es biyectiva para toda $p \geq 0$ y $q \geq n+1$ (resp. $p \geq n+1$ y $q \geq 0$).

(IV) *El conjunto simplicial $X_{p,\bullet}$ (resp. $X_{\bullet,q}$) es n-coesquelético para toda $p \geq 0$ (resp. $q \geq 0$).*

(V) *Los morfismos horizontales (resp. verticales) del siguiente cuadrado:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\Big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha^{p-1} \boxtimes \mathrm{id})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\Big) \arrow[d, "(\alpha^{p-1} \boxtimes \mathrm{id})^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\Big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\Big), \end{tikzcd} \tag{12.34}$$

son isomorfismos para toda $p \geq 0$ y $q \geq n+1$ (resp. $p \geq n+1$ y $q \geq 0$).

(VI) *Para toda $p \geq 0$ y $q \geq n+1$ (resp. $p \geq n+1$ y $q \geq 0$) el cuadrado* (12.34) *es cartesiano.*

(VII) *Los morfismos horizontales (resp. verticales) del siguiente cuadrado:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha^{p-1,k}\boxtimes\mathrm{id})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big) \arrow[d, "(\alpha^{p-1,k}\boxtimes\mathrm{id})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Lambda^{p,k} \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Lambda^{p,k} \boxtimes \partial\Delta^q, X\big)
\end{tikzcd} \tag{12.35}$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1,k})^*"] \arrow[d, "(\alpha^{p-1}\boxtimes\mathrm{id})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big) \arrow[d, "(\alpha^{p-1}\boxtimes\mathrm{id})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1,k})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Lambda^{q,k}, X\big)
\end{tikzcd} \right)$$

son isomorfismos si $p \geq 0$, $0 \leq k \leq p$ *y* $q \geq n+1$ *(resp.* $p \geq n+1$, $0 \leq k \leq p$ *y* $q \geq 0$*).*

(VIII) *Para toda* $p \geq 0$, $0 \leq k \leq p$ *y* $q \geq n+1$ *(resp.* $p \geq n+1$, $0 \leq k \leq p$ *y* $q \geq 0$*) el cuadrado* (12.35) *es cartesiano.*

DEMOSTRACIÓN. Se demuestra la equivalencia de los enunciados (I) y (II) como en la prueba del Lema 12.1.1. Por otro lado, se sigue del Lema 12.1.1 que los enunciados (III) y (IV) son equivalentes porque se tienen isomorfismos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes W, X\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(W, X_{p,\bullet}\big) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(W \boxtimes \Delta^q, X\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(W, X_{\bullet,q}\big)$$

para todo conjunto simplicial W y cualesquiera $p, q \geq 0$.

Para mostrar la equivalencia de los enunciados (I) y (III) en el caso vertical, consideremos la adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet}_{\leq m} \arrow[r, bend right, "(\mathrm{id}\times j_m)_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ssSet}_{\leq m+1} \arrow[l, bend right, "(\mathrm{id}\times j_m)^*"']
\end{tikzcd} \tag{12.36}$$

asociada al funtor inclusión $j_m\colon \mathbf{\Delta}_{\leq m} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}_{\leq m+1}$.

Observemos entonces que si A es un conjunto bisimplicial verticalmente m-truncado, el conjunto bisimplicial verticalmente $(m+1)$-truncado $(\mathrm{id}\times j_m)_*(A)$ tiene la siguiente descripción salvo isomorfismo: Para toda $p \geq 0$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}\times j_m)_*(A)_{p,q} &= A_{p,q} \qquad \text{si } \ 0 \leq q \leq m, \\
\text{y} \quad (\mathrm{id}\times j_m)_*(A)_{p,m+1} &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_{\leq m}}\Big((\mathrm{id}\times\nu_m)^*\big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^{m+1}\big), A\Big) \\
&\cong \left\{ \big(a_0, \ldots, a_{m+1}\big) \in \prod_0^{m+1} A_{p,m} \;\middle|\; \begin{array}{c} d_i^v a_j = d_{j-1}^v a_i \\ \text{si } 0 \leq i < j \leq m+1. \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Los morfismos cara y degenerados horizontales y verticales son para $p \geq 0$ y $0 \leq q \leq m$ los de A, los morfismos horizontales:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{id} \times j_m)_*(A)_{p-1,m+1} \arrow[r, shift right, "s_i^h"'] & (\mathrm{id} \times j_m)_*(A)_{p,m+1} \arrow[l, shift right, "d_i^h"']
\end{tikzcd}$$

son definidos argumento por argumento:

$$\begin{tikzcd}
\left(d_i^h a_0, \ldots, d_i^h a_{m+1}\right) & \left(a_0, \ldots, a_{m+1}\right) \arrow[l, mapsto, "d_i^h"'] \\
\left(a_0, \ldots, a_{m+1}\right) \arrow[r, mapsto, "s_i^h"'] & \left(s_i^h a_0, \ldots, s_i^h a_{m+1}\right)
\end{tikzcd},$$

y los morfismos verticales:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{id} \times j_m)_*(A)_{p,m+1} \arrow[d, shift right, "d_i^v"'] \\
A_{p,m} \arrow[u, shift right, "s_i^v"']
\end{tikzcd}$$

son definidos como en la prueba del Lema 12.1.1.

No es difícil mostrar que el morfismo $B \longrightarrow (\mathrm{id} \times j_m)_*(\mathrm{id} \times j_m)^* B$ definido en un conjunto bisimplicial $(m+1)$-truncado B como la identidad si $p \geq 0$, $0 \leq q \leq m$ y como la función:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_{\leq m+1}}\left((\mathrm{id}\times\nu_{m+1})^*\left(\Delta^p \boxtimes \Delta^{m+1}\right), B\right) \cong B_{p,m+1} \arrow[d, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^m)^*"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_{\leq m+1}}\left((\mathrm{id}\times\nu_{m+1})^*\left(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^{m+1}\right), B\right) \cong (\mathrm{id}\times j_m)_*(\mathrm{id}\times j_m)^*(B)_{p,m+1}
\end{tikzcd} \tag{12.37}$$

si $p \geq 0$, determina una unidad de la adjunción (12.36). En particular B está en la imagen del funtor $(\mathrm{id} \times j_m)_*$ si y solamente si la función (12.37) es una biyección para todo $p \geq 0$.

Se concluye que X es verticalmente n-coesquelético, si y solamente si la función (12.33) es biyectiva para toda $p \geq 0$ y $m \geq n$. Por lo tanto, los enunciados (I) y (III) son equivalentes.

Los enunciados (III) y (V) (resp. (III) y (VII)) son equivalentes porque la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\left(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\right) \xrightarrow{\left(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1}\right)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\left(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\right)$$

es biyectiva para toda $p \geq 0$, si y solamente si la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\left(W \boxtimes \Delta^q, X\right) \xrightarrow{\left(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1}\right)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\left(W \boxtimes \partial\Delta^q, X\right)$$

es biyectiva para todo conjunto simplicial W.

Mostremos que los enunciados (iii) y (vi) son equivalentes por un argumento inductivo sobre $p \geq 0$: Si $p = 0$, observemos que en el cuadrado:

(12.38)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^0 \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha^{-1} \boxtimes \mathrm{id})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^0 \boxtimes \partial\Delta^q, X\big) \arrow[d, "(\alpha^{-1} \boxtimes \mathrm{id})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^0 \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^0 \boxtimes \partial\Delta^q, X\big),
\end{tikzcd}$$

la función horizontal de abajo es una biyección de un conjunto con un único elemento pues $\partial\Delta^0 = \varnothing$. Por lo tanto, ya que tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^q, X_{0,\bullet}\big) \arrow[r, "\alpha^m_{X_{0,\bullet}}"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^q, X_{0,\bullet}\big), \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^0 \boxtimes \Delta^q, X\Big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^0 \boxtimes \partial\Delta^q, X\Big),
\end{tikzcd}$$

deducimos que (12.38) es cartesiano para $q \geq n+1$ si y solamente si $X_{0,\bullet}$ es un conjunto simplicial n-coesquelético.

Supongamos ahora que las condiciones (iii) y (vi) son equivalentes para $0 \leq p \leq k$. Si X es un conjunto bisimplicial tal que $X_{k,\bullet}$ es n-coesquelético, deducimos que en el siguiente cuadrado:

(12.39)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^{k+1} \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha^{k} \boxtimes \mathrm{id})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^{k+1} \boxtimes \partial\Delta^q, X\big) \arrow[d, "(\alpha^{k} \boxtimes \mathrm{id})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^{k+1} \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id} \boxtimes \alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^{k+1} \boxtimes \partial\Delta^q, X\big),
\end{tikzcd}$$

la función horizontal de abajo es un isomorfismo para $q \geq n+1$, Porque la podemos identificar con un colímite pequeño de funciones del tipo:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^q, X_{k,\bullet}\big) \xrightarrow{\alpha^{q-1}_X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^q, X_{k,\bullet}\big).$$

Por lo tanto, (12.39) es cartesiano para $q \geq n+1$, si y solamente si $X_{k+1,\bullet}$ es n-coesquelético. Dicho de otro modo las condiciones (iii) y (vi) son equivalentes para $0 \leq p \leq k+1$.

Se muestra que las condiciones (iii) y (viii) son equivalentes de manera análoga. $\square$

§12.7.1. Consideremos $\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta}$, la subcategoría plena de la categoría producto $\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}$ cuyos objetos son las parejas $\big([p],[q]\big)$ tales que $p+q \leq n$; y sea:

(12.40)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta}} \arrow[rr, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{n\,*}"'] & & \mathbf{ssSet} \arrow[ll, bend right, "\mu_n^*"'] ,
\end{tikzcd}$$

la adjunción inducida del funtor inclusión canónico μ_n: $\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}$.

Mostremos:

LEMA 12.7.2. *Un conjunto simplicial X es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $\mu_{n\,*}$, si y solamente si el siguiente cuadrado:*

(12.41)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha^{p-1}\boxtimes\mathrm{id})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big) \arrow[d, "(\alpha^{p-1}\boxtimes\mathrm{id})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big),
\end{tikzcd}$$

es cartesiano para toda $p, q \geq 0$ tales que $p+q \geq n+1$.

DEMOSTRACIÓN. Para empezar recordemos que si X es cualquier conjunto bisimplicial, el cuadrado (12.41) induce una función:

(12.42)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big)}{\times} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big)
\end{tikzcd}$$

en el producto fibrado de las flechas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big) \arrow[d, "(\alpha^{p-1}\boxtimes\mathrm{id})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, X\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}\boxtimes\alpha^{q-1})^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, X\big).
\end{tikzcd}$$

Si observamos que el conjunto dominio de la función (12.42) es isomorfo a $X_{p,q}$, mientras que su codominio es isomorfo al conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{c} \big(a_0,\dots,a_p;b_0,\dots,b_q\big) \\[1ex] \in \ \prod\limits_0^p X_{p-1,q} \ \times \ \prod\limits_0^q X_{p,q-1} \end{array} \ \middle| \ \begin{array}{c} d_i^h a_{i'} = d_{i'-1}^h a_i\,, \ \ d_j^v b_{j'} = d_{j'-1}^v b_j \\[1ex] \text{y} \ \ d_j^v a_i = d_i^h b_j\,, \\[1ex] \text{si } \ 0 \leq i < i' \leq p \ \ \text{y} \ \ 0 \leq j < j' \leq q. \end{array} \right\}^{12}; \tag{12.43}$$

se constata sin dificultad que la función (12.42) se identifica con la asignación:

$$\begin{array}{ccc} X_{p,q} & \longrightarrow & \text{El conjunto (12.43)} \\ a & \mapsto & \big(\,d_0^v a,\dots,d_p^v a\,;\,d_0^h a,\dots,d_q^h a\,\big)\,. \end{array} \tag{12.44}$$

En particular (12.41) es un cuadrado cartesiano si y solamente si (12.44) es una función biyectiva.

Para mostrar el enunciado del Lema, observemos que si descomponemos al funtor inclusión μ_n: $\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}$ como la composición:

$$\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta} \xhookrightarrow{\rho_n} \mathbf{\Delta}_{\leq n} \times \mathbf{\Delta}_{\leq n} \xhookrightarrow{\nu_n \times \nu_n} \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \ ;$$

se verifica que un conjunto bisimplicial X es isomorfo a un objeto en la imagen de $\mu_{n*} \cong (\nu_n \times \nu_n)_* \circ \rho_{n*}$, si y solamente si X cumple las siguientes propiedades:

- **(A)** X es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor $(\nu_n \times \nu_n)_*$.
- **(B)** El conjunto bisimplicial truncado $(\nu_n \times \nu_n)^* X$ es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor ρ_{n*}.

Esto es una consecuencia de que cualquier unidad de la adjunción $(\nu_n \times \nu_n)_* \dashv (\nu_n \times \nu_n)^*$ es un isomorfismo.

Por orto lado, se deduce del Lema 12.7.1 que un conjunto bisimplicial X cumple la condición **(A)**, si y solamente si el cuadrado (12.41) es cartesiano para toda $p,q \geq 0$ tal que $\max(p,q) \geq n+1$. Es suficiente entonces mostrar que X cumple la condición **(B)**, si y solamente si la función (12.44) es biyectiva para cualesquiera $0 \leq p,q \leq n$ tales que $p+q \geq n+1$.

Consideremos para ello la descomposición:

$$\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta} \ = \ \mathcal{A}_0 \xhookrightarrow{F_1} \mathcal{A}_1 \xhookrightarrow{F_2} \cdots \xhookrightarrow{F_n} \mathcal{A}_n \ = \ \mathbf{\Delta}_{\leq n} \times \mathbf{\Delta}_{\leq n},$$

de la inclusión ρ_n: $\mathbf{\Delta} \underset{\leq n}{\times} \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}_{\leq n} \times \mathbf{\Delta}_{\leq n}$, donde $\mathcal{A}_i$ denota a la subcategoría plena de $\mathbf{\Delta}_{\leq n} \times \mathbf{\Delta}_{\leq n}$, cuyos objetos son las parejas $\big([p],[q]\big)$ tales que $p+q \leq n+i$.

---

[12] Por definición $X_{p,-1} = X_{-1,q} = \star$ es un singulete.

Para cada $1 \leq i \leq n$, se puede describir a una unidad de la adjunción ${F_i}_* \dashv {F_i}^*$ de la siguiente manera: Si A es una pregavilla de conjuntos sobre $\mathcal{A}_i$, se verifica que salvo isomorfismo:

$$
{F_i}_*{F_i}^*(A)_{p,q} = \begin{cases} A_{p,q} & \text{si} \quad p+q < n+i, \\ & \\ (12.43) & \text{si} \quad p+q = n+i. \end{cases}
$$

Los morfismos cara y degenerados para $p+q = n+i$:

$$\begin{tikzcd}
A_{p-1,q} \arrow[r, shift right, "s_i^h"'] & {F_i}_*{F_i}^*(A)_{p,q} , \arrow[l, shift right, "d_i^h"'] \arrow[d, shift right, "d_i^v"'] \\
& A_{p,q-1} \arrow[u, shift right, "s_i^v"']
\end{tikzcd}$$

son definidos por las reglas:

$$\begin{tikzcd}
a_i & \big(a_0, \ldots, a_p; b_0, \ldots, b_q\big) \arrow[l, mapsto, "d_i^h"'] \arrow[d, mapsto, "d_i^v"] \\
& b_i
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, "s_i^h"] & \big(a_0, \ldots, a_p; s_i^h d_0^v a, \ldots, s_i^h d_q^v a\big) \\
& \big(s_i^v d_0^h b, \ldots, s_i^v d_p^h b; b_0, \ldots, b_q\big) \\
& b \arrow[u, mapsto, "s_i^v"']
\end{tikzcd}$$

$$
\text{donde} \quad a_k = \begin{cases} s_{i-1}^h d_k^h a & \text{si } 0 \leq k \leq i-1 \\ a & \text{si } i \leq k \leq i+1 \\ s_i^h d_{k-1}^h a & \text{si } i+2 \leq k \leq p \end{cases} \quad \text{y} \quad b_k = \begin{cases} s_{i-1}^v d_k^v b & \text{si } 0 \leq k \leq i-1 \\ b & \text{si } i \leq k \leq i+1 \\ s_i^v d_{k-1}^v b & \text{si } i+2 \leq k \leq q. \end{cases}
$$

Finalmente, definimos al morfismo unidad $A \longrightarrow {F_i}_*{F_i}^*(A)$, como la función identidad si $p+q < n+i$ y como la función (12.44) si $p+q = n+i$. En particular, A es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor F_i, si y solamente si la función (12.44) es biyectiva, para todas las parejas (p, q) tales que $p, q \geq 0$ y $p+q = n+i$.

Por lo tanto, X cumple la condición **(B)**, si y solamente si la función (12.44) es biyectiva para cualesquiera $0 \leq p, q \leq n$ tales que $p+q \geq n$. ☐

Capítulo 3

El 2-grupo de homotopía de los espacios punteados conexos

En el presente capítulo definimos la categoría de los 2-grupos como una subcategoría de la categoría de las categorías monoidales y los funtores laxos y unitarios entre ellas. En la sección 15 consideramos un funtor nervio $\mathcal{N}^2$ definido de la categoría de los 2-grupos en la categoría de los conjuntos bisimpliciales reducidos y mostramos en el Teorema 15.2.2 que el nervio $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ de todo 2-grupo es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_2^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{diag})$ de la Proposición 11.3.1.

Finalmente, en la sección 16 mostramos que para todo 2-grupo $\mathcal{G}$ y todo conjunto bisimplicial reducido X, el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ es el nervio de un grupoide el cual admite una interpretación combinatoria análoga a la de los determinantes de Deligne en [**Del87**].

13. El nervio de las categorías pequeñas

En esta sección recordamos notación básica sobre el funtor nervio de las categorías pequeñas. En particular demostramos que el funtor nervio induce una equivalencia entre la categoría homotópica de los grupoides (resp. la categoría de los grupos) y la categoría homotópica de los 1-tipos de homotopía (resp. la categoría homotópica de los 1-tipos de homotopía punteados conexos).

§13.1. Recordemos que el funtor inclusión canónico $\Delta \longrightarrow \mathbf{cat}$ (ver §8.1) induce una adjunción:

(13.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{cat} \arrow[r, bend right, "\mathrm{N}(\,\cdot\,)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}\,, \arrow[l, bend right, "\mathrm{P}(\,\cdot\,)"'] \end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{N}(\cdot)$ es definido por la fórmula $\mathrm{N}(\mathcal{A})_m = \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([m], \mathcal{A}\big)$ y el funtor $\mathrm{P}(\,\cdot\,)$ es una extensión de Kan izquierda del funtor $\Delta \longrightarrow \mathbf{cat}$ a lo largo del encaje de Yoneda:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Delta} & \hookrightarrow & \mathbf{sSet} \\ [n] & \longmapsto & \Delta^n\,. \end{array}$$

Llamamos a $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ el *nervio* (*geométrico*) de la categoría $\mathcal{A}$ y a $\mathrm{P}(X)$ (*una*) *categoría de caminos* del conjunto simplicial X.

Si $\mathcal{A}$ es una categoría pequeña, el conjunto simplicial truncado $\tau_2^*\big(\mathrm{N}(\mathcal{A})\big)$ admite la siguiente descripción: Los conjunto $\mathrm{N}(\mathcal{A})_0$ y $\mathrm{N}(\mathcal{A})_1$ se identifican con los conjuntos de los objetos y los morfismos de $\mathcal{A}$ respectivamente. La imagen de un objeto x de $\mathcal{A}$ por la función:

$$\mathrm{N}(\mathcal{A})_0 \xrightarrow{s_0} \mathrm{N}(\mathcal{A})_1$$

es el morfismo identidad de x en $\mathcal{A}$. Por otro lado, la imagen de un morfismo f de $\mathcal{A}$ por las funciones:

$$\mathrm{N}(\mathcal{A})_1 \xrightarrow{d_0} \mathrm{N}(\mathcal{A})_0 \quad \text{y} \quad \mathrm{N}(\mathcal{A})_1 \xrightarrow{d_1} \mathrm{N}(\mathcal{A})_0$$

son el codominio y el dominio de f respectivamente. Finalmente, darse un elemento η del conjunto $\mathrm{N}(\mathcal{A})_2$ equivale a darse tres morfismo de $\mathcal{A}$ en un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dr, "d_0\eta"] & \\
A_0 \arrow[ur, "d_2\eta"] \arrow[rr, "d_1\eta"'] & & A_2\,.
\end{tikzcd}$$

Mostremos:

LEMA 13.1.1. *El nervio* $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ *de una categoría pequeña* $\mathcal{A}$ *es un conjunto simplicial débilmente* 1*-coesquelético (ver §12.2).*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, el conjunto simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ es 2-coesquelético si la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([m+1],\mathcal{A}\big) \xrightarrow{\prod_s \delta_s^*} \prod_{0\le s\le m+1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([m],\mathcal{A}\big)$$

es el núcleo en **Set** de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\prod_{0\le s\le q+1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([m],\mathcal{A}\big) \arrow[r, shift left, "\prod_{i<j} \delta_{j-1}^*\circ \mathrm{proj}_i"] \arrow[r, shift right, "\prod_{i<j} \delta_i^*\circ \mathrm{proj}_j"'] & \displaystyle\prod_{0\le i<j\le q+1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([m-1],\mathcal{A}\big)
\end{tikzcd} ,$$

para toda categoría pequeña $\mathcal{A}$ y todo entero $m \ge 2$.

Mostremos el siguiente enunciado:

> Si $q \ge 2$, el morfismo $\displaystyle\coprod_{0\le s\le q+1} [q] \xrightarrow{\sqcup_s \delta_s} [q+1]$ es el conúcleo en **cat** de las flechas paralelas:
>
> $$\begin{tikzcd}
\displaystyle\coprod_{0\le i<j\le q+1} [q-1] \arrow[r, shift left, "\sqcup_{i<j} \mathrm{inc}_i \circ \delta_{j-1}"] \arrow[r, shift right, "\sqcup_{i<j} \mathrm{inc}_j \circ \delta_i"'] & \displaystyle\coprod_{0\le s\le q+1} [q]
\end{tikzcd} .$$

Comencemos por mostrar que para $q \geq 1$ se tiene un cuadrado cartesiano en **cat**:

$$\begin{tikzcd}
[q] \arrow[r, "\delta_0"] & {[q+1]} \\
{[q-1]} \arrow[u, "\delta_q"] \arrow[r, "\delta_0"'] & {[q]} \arrow[u, "\delta_{q+1}"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, observemos que darse dos funtores $F\colon [q] \longrightarrow \mathcal{C}$ y $G\colon [q] \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que $F \circ \delta_q = G \circ \delta_0$ equivale a darse dos sucesiones de morfismos en $\mathcal{C}$:

$$F = \Big(A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots\cdots \xrightarrow{f_q} A_q \Big) \qquad \text{y} \qquad G = \Big(B_0 \xrightarrow{g_1} \cdots\cdots \xrightarrow{g_q} B_q \Big)$$

tales que:

$$\Big(A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots\cdots \xrightarrow{f_{q-1}} A_{q-1} \Big) = F \circ \delta_q = G \circ \delta_0 = \Big(B_1 \xrightarrow{g_2} \cdots\cdots \xrightarrow{g_q} B_q \Big).$$

Por lo que el único funtor $H\colon [q+1] \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $H \circ \delta_0 = F$ y $H \circ \delta_{q+1} = G$, es determinado por la siguiente sucesión de morfismos:

$$H = \left(\begin{tikzcd}
 & A_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & \cdots\cdots \arrow[r, "f_{q-1}"] & A_{q-1} \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, equal] & A_q \\
B_0 \arrow[r, "g_1"'] & B_1 \arrow[r, "g_2"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "g_q"'] & B_q &
\end{tikzcd} \right).$$

Mostremos ahora que si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y $\{F_s\colon [q] \longrightarrow \mathcal{C}\}_{0 \leq s \leq q+1}$ es una familia de funtores tal que $F_j \circ \delta_i = F_i \circ \delta_{j-1}$ para $0 \leq i < j \leq q+1$, entonces existe un único funtor $F : [q+1] \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $F \circ \delta_s = F_s$ para $0 \leq s \leq q+1$. En efecto, ya que por hipótesis $F_{q+1} \circ \delta_0 = F_0 \circ \delta_q$, sabemos que existe un único funtor $F\colon [q+1] \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $F \circ \delta_0 = F_0$ y $F \circ \delta_{q+1} = F_{q+1}$.

Por otro lado se tiene que para $0 \leq j \leq q$:

$$\begin{aligned}
& F \circ \delta_j \circ \delta_q = F \circ \delta_{q+1} \circ \delta_j = F_{q+1} \circ \delta_j = F_j \circ \delta_q \\
\text{y} \qquad & F \circ \delta_j \circ \delta_0 = F \circ \delta_0 \circ \delta_{j-1} = F_0 \circ \delta_{j-1} = F_j \circ \delta_0\,;
\end{aligned}$$

ya que $q \geq 2$ deducimos que $F \circ \delta_j = F_j$.

Por lo tanto $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ es un conjunto simplicial 2-coesquelético. Mostremos por último que la siguiente función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^2, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\partial\Delta^2, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big) \tag{13.2}$$

inducida del morfismo inclusión $\partial\Delta^2 \hookrightarrow \Delta^2$ es inyectiva, es decir que $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ es un conjunto simplicial débilmente 1-coesquelético.

Notemos para ello que el dominio de la función (13.2) se identifica con el conjunto de los triángulos conmutativos de $\mathcal{G}$:

(13.3)
$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[dr, "f_0"] & \\ A_0 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[rr, "f_1"'] & & A_2 \end{tikzcd}$$

y su codominio se identifica con el conjunto de los diagramas de la misma forma, pero no necesariamente conmutativos. Ya que (13.2) es la función que olvida la conmutatividad de un diagrama, (13.2) es inyectiva. ☐

Deducimos:

COROLARIO 13.1.2. *El funtor nervio* N: $\mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$ *es fielmente pleno.*

DEMOSTRACIÓN. El funtor N es fiel porque si nos damos un funtor $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre categorías pequeñas, las funciones $\mathrm{N}(F)_0$ y $\mathrm{N}(F)_1$ son las funciones que definen al funtor F en los objetos y los morfismos, respectivamente. Por lo tanto si $\mathrm{N}(F)_0 = \mathrm{N}(G)_0$ y $\mathrm{N}(F)_1 = \mathrm{N}(G)_1$ para dos funtores $F, G\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, deducimos que $F = G$.

Por otro lado si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías pequeñas y $\varphi\colon \mathrm{N}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{B})$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, se verifica sin dificultad que las funciones φ_0 y φ_1 definen un funtor $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{N}(F)_0 = \varphi_0$ y $\mathrm{N}(F)_1 = \varphi_1$.

Se sigue que $\mathrm{N}(F) = \varphi$ ya que $\mathrm{N}(\mathcal{B})$ es un conjunto simplicial débilmente 1-coesquelético. Por lo tanto el funtor N es pleno. ☐

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías pequeñas, denotemos $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ a la categoría de los funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y sus transformaciones naturales. Se verifica sin dificultad que tenemos biyecciones naturales:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big(\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mathcal{B}\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\Big(\mathcal{C}, \mathcal{B}^{\mathcal{A}}\Big),$$

para cualesquiera $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías pequeñas. Dicho de otro modo, la categoría **cat** es una categoría cartesiana cerrada.

Ya que el funtor nervio N: $\mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$ es fielmente pleno y conmuta con productos finitos, obtenemos biyecciones naturales:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\Big(\mathcal{B}^{\mathcal{A}}\Big)_n &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\Big([n], \mathcal{B}^{\mathcal{A}}\Big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big(\mathcal{A} \times [n], \mathcal{B}\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(\mathcal{A}) \times \Delta^n, \mathrm{N}(\mathcal{B})\big) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(\mathcal{A}), \mathrm{N}(\mathcal{B})\big)_n, \end{aligned}$$

y por lo tanto un isomorfismo natural de funtores:

(13.4)
$$\mathrm{N}\Big((\cdot_2)^{(\cdot_1)}\Big) \Rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(\cdot_1), \mathrm{N}(\cdot_2)\big) : \mathbf{cat}^{op} \times \mathbf{cat} \longrightarrow \mathbf{sSet} \ .$$

§13.2. Escribimos **Grpd** para denotar a la subcategoría plena de **cat** cuyos objetos son los grupoides (es decir las categorías pequeñas cuyas flechas son todas isomorfismos). Observemos que **Grpd** es una subcategoría de **cat** estable por productos finitos y objeto de morfismos $\mathcal{H}^{\mathcal{G}}$, es decir **Grpd** es una subcategoría cartesiana cerrada de **cat**.

En este párrafo esbozaremos una prueba de la afirmación bien conocida, que el funtor nervio $\mathrm{N}\colon \mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$ induce por restricción una equivalencia entre la categoría cartesiana cerrada **Grpd** y la categoría cartesiana cerrada $\mathbf{GrpdK}^1$ de los 1-grupoides de Kan (ver los Corolarios 13.1.2 y 13.2.4 y el Lema 12.3.3).

Recordemos para empezar:

Corolario 13.2.1. *Si $\mathcal{G}$ es un grupoide, el conjunto simplicial débilmente* 1*-coesquelético* $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ *(ver el Lema 13.1.1) cumple la condición de Kan en dimensión* $1 \leq m \leq 2$ *y cumple la condición de ser mínimo en dimensión* 1*, dicho de otro modo* $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ *es un* 1*-grupoide de Kan (ver el Corolario 12.4.1).*

En particular si $\mathcal{G}$ es un grupoide, el conjunto simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ *es un objeto fibrante de la categoría de modelos* $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_1, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_1)$ *del Teorema 8.4.2 (ver el Corolario 12.1.2); y si G es un grupo (visto como una categoría con un único objeto) el conjunto simplicial* $\mathrm{N}(G)$ *es un objeto fibrante de la categoría de modelos* $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_1^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_1^{red})$ *de la Proposición 10.1.2.*

Demostración. El conjunto simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ es débilmente 1-coesquelético por el Lema 13.1.1. Para mostrar que $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ cumple en dimensión 1 la condición de extensión de Kan y la condición de ser mínimo, notemos simplemente que si damos en el grupoide $\mathcal{G}$ dos de tres morfismos en un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dr, "f_0"] & \\
A_0 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[rr, "f_1"'] & & A_2 \,,
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo completando el diagrama en un triángulo conmutativo.

Verifiquemos que el conjunto simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión 2, es decir que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^3, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{3,k}, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big) \tag{13.5}$$

inducida del morfismo inclusión $\Lambda^{3,k} \hookrightarrow \Delta^3$ es sobreyectiva para todo $0 \leq k \leq 3$.

En efecto, el dominio de la función (13.5) se identifica con el conjunto de los diagramas de $\mathcal{G}$ que consisten de cuatro objetos y seis morfismos como sigue:

$$(13.6)\qquad \begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[ddl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
 & X_0 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dl] & X_3 \\
X_2 \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

tales que las cuatro caras de (13.6) son triángulos conmutativos.

Por otro lado el codominio de (13.5) es igual al conjunto de los diagramas de la misma forma, pero cumpliendo solamente que tres de sus caras sean triángulos conmutativos. Se muestra sin dificultad que esto es suficiente para que la cuarta cara sea también un triángulo conmutativo, pues todas las flechas involucradas son isomorfismos. Por lo tanto la función (13.5) es biyectiva. □

Si $\mathcal{G}$ es un grupoide recordemos que el conjunto $\pi_0(\mathcal{G})$ de los *componentes conectables por trayectorias de* $\mathcal{G}$ es por definición el conjunto de las clases de isomorfismo de los objeto del grupoide $\mathcal{G}$. Si a es un objeto fijo de $\mathcal{G}$, el *primer grupo de homotopía de* $\mathcal{G}$ *basado en* a al que denotamos $\pi_1(\mathcal{G}, a)$, es por definición $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(a, a)$, el grupo de los automorfismos de a en $\mathcal{G}$.

Se definen sin problemas funtores:

$$(13.7)\qquad \mathbf{Grpd} \xrightarrow{\pi_0(\,\cdot\,)} \mathbf{Set} \quad \text{y} \quad \mathbf{Grpd}_\star \xrightarrow{\pi_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbf{Grp}\ ,$$

donde $\mathbf{Grpd}_\star$ denota a la categoría de los grupoides punteados.

LEMA 13.2.2. *Existen isomorfismos canónicos de funtores:*

(13.8)

$$\pi_0 \overset{\alpha^0}{\Rightarrow} \pi_0 \circ \mathrm{N} : \mathbf{Grpd} \longrightarrow \mathbf{Set} \qquad y \qquad \pi_1 \overset{\alpha^1}{\Rightarrow} \pi_1 \circ \mathrm{N}_\star : \mathbf{Grpd}_\star \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

donde π_i *de un conjunto simplicial (punteado)* X *es por definición el i-ésimo grupo de homotopía de la realización geométrica de* X *(ver §8.4).*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide, los conjuntos $\pi_0(\mathcal{G})$ y $\pi_0\big(\mathrm{N}(\mathcal{G})\big)$ son iguales al conjunto de los objetos de $\mathcal{G}$ módulo la relación de equivalencia que identifica a dos objetos si existe un morfismo de $\mathcal{G}$ entre ellos. Definimos entonces $\pi_0 \overset{\alpha^0}{\Longrightarrow} \pi_0 \circ \mathrm{N}$ como la transformación natural identidad.

Por otro lado se sigue del Corolario 13.2.1 y las Proposiciones 8.6.1 y 8.6.2 que podemos pensar al funtor $\pi_1 \circ \mathrm{N}_\star\colon \mathbf{Grpd}_\star \longrightarrow \mathbf{Grp}$ como el funtor definido en un grupoide $\mathcal{G}$ de punto base a por el conjunto de los morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(a,a)$ cuyo producto es definido por la regla:

$$f \star g = g \circ f \qquad \text{siempre que} \qquad f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(a,a)\,.$$

Definimos un isomorfismo natural $\alpha^1 \colon \pi_1 \Longrightarrow \pi_1 \circ \mathrm{N}_\star$ en un grupoide $\mathcal{G}$ de punto base a por la función:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\big(\mathcal{G}, a\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(a,a) & \xrightarrow{\alpha^1_{(\mathcal{G},a)}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(a,a) = \pi_1 \circ \mathrm{N}_\star\big(\mathcal{G}, a\big) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array} .$$

Notemos que $\alpha^1_{(\mathcal{G},a)}$ es efectivamente un morfismo de grupos, porque:

$$\alpha^1_{(\mathcal{G},a)}\big(f \circ g\big) = \big(f \circ g\big)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \alpha^1_{(\mathcal{G},a)}\big(g\big) \circ \alpha^1_{(\mathcal{G},a)}\big(f\big) = \alpha^1_{(\mathcal{G},a)}\big(f\big) \star \alpha^1_{(\mathcal{G},a)}\big(g\big)\,.$$

□

Recordemos que la *categoría homotópica de los grupoides* h**Grpd** es la categoría cuyos objetos son los grupoides y los morfismos son las clases de isomorfismo natural de los funtores entre ellos:

$$\mathrm{Hom}_{h\mathbf{Grpd}}\big(\mathcal{G}, \mathcal{H}\big) = \pi_0\big(\mathcal{H}^{\mathcal{G}}\big)\,.$$

Notemos que h**Grpd** es una categoría cartesiana cerrada cuyo objeto de morfismos también es el grupoide de los funtores $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}$. Además el funtor canónico **Grpd** ⟶ h**Grpd** respeta los productos finitos.

Un funtor $F \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ entre grupoides es llamado una *equivalencia débil* si cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

COROLARIO 13.2.3. *Si $F \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un funtor entre grupoides, son equivalentes:*

(I) *$\pi_0(F)$ y $\pi_1(F)$ son funciones biyectivas.*

(II) *F es una equivalencia de categorías, es decir F es un funtor fielmente pleno y esencialmente sobreyectivo.*

(III) *La imagen de F por el funtor canónico* **Grpd** ⟶ h**Grpd** *es un isomorfismo de* h**Grpd**.

(IV) *$\mathrm{N}(F)$ es una 1-equivalencia homotópica débil de conjuntos simpliciales.*

(V) *$\mathrm{N}(F)$ es una ∞-equivalencia homotópica débil de conjuntos simpliciales.*

DEMOSTRACIÓN. Se verifica (I)⇔(II)⇔(III) sin dificultad.

Por otro lado ya que los conjuntos simpliciales $\mathrm{N}(\mathcal{G})$ y $\mathrm{N}(\mathcal{H})$ son complejos de Kan cuyos grupos de homotopía $\pi_i\big(\mathrm{N}(\mathcal{G})\big)$ y $\pi_i\big(\mathrm{N}(\mathcal{H})\big)$ son cero para $i \geq 2$, deducimos que (IV)⇔(V).

Finalmente (I)⇔(IV) se sigue de los isomorfismos 13.8. □

Recordemos una prueba del enunciado recíproco del Corolario 13.2.1 (ver [**Dus02**]):

COROLARIO 13.2.4. *Si W es un conjunto simplicial el cual es un 1-grupoide de Kan, entonces existe un grupoide $\mathcal{G}$ y un isomorfismo de conjuntos simpliciales $\mathrm{N}(\mathcal{G}) \cong W$. Dicho de otro modo, un conjunto simplicial es un 1-grupoide de Kan si y solamente si es isomorfo al nervio de un grupoide (ver el Corolario 13.2.1).*

DEMOSTRACIÓN. Sea W un 1-grupoide de Kan. Definimos al grupoide $\mathcal{G}$ con el isomorfismo deseado $\mathrm{N}(\mathcal{G}) \cong W$ como sigue: El conjunto de los objetos (resp. de los morfismos) de $\mathcal{G}$ es igual al conjunto de los 0-simplejos (resp. de los 1-simplejos) de W. Si f es un morfismo de $\mathcal{G}$, el dominio (resp. el codominio) de f es el objeto $d_1(f)$ (resp. $d_0(f)$). En particular el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{2,1}, W\big)$ se identifica al conjunto de las *parejas de morfismos consecutivos* de $\mathcal{G}$, es decir parejas (f, g) de 1-simplejos de W tales que $d_0(f) = d_1(g)$.

Definimos una ley de composición en $\mathcal{G}$ por la composición:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{2,1}, W\big) \xrightarrow{(\alpha_W^{1,1})^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{2}, W\big) \xrightarrow{\delta_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^{1}, W\big)\,.$$

Dicho de otro modo, si f, g es una pareja de morfismos consecutivos de $\mathcal{G}$ entonces $g \circ f$ es igual al morfismo $d_1(\eta)$, donde η es el único 2-simplejo de W tal que $d_2(\eta) = f$ y $d_0(\eta) = g$.

Mostremos primero que $\mathcal{G}$ definido de esta manera es efectivamente una categoría: Si f es un morfismo de $\mathcal{G}$ de dominio $d_1(f)$ y codominio $d_0(f)$, se tiene en $\mathcal{G}$ que:

$$f \circ \big(s_0(d_1 f)\big) = f \qquad \text{y} \qquad \big(s_0(d_0 f)\big) \circ f = f\,;$$

en efecto $s_0(f)$ y $s_1(f)$ son 2-simplejos de W tales que:

$$d_0\big(s_0(f)\big) = f\,, \qquad d_1\big(s_0(f)\big) = f \qquad \text{y} \qquad d_2\big(s_0(f)\big) = s_0\big(d_1(f)\big)\,,$$

$$d_0\big(s_1(f)\big) = s_0\big(d_0(f)\big)\,, \qquad d_1\big(s_1(f)\big) = f \qquad \text{y} \qquad d_2\big(s_1(f)\big) = f\,.$$

Dicho de otro modo, si a es un objeto de $\mathcal{G}$ el morfismo $s_0(a)$ es la identidad de a en $\mathcal{G}$.

Sean ahora f, g y h tres morfismos de $\mathcal{G}$ consecutivos:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "h"] & d\,; \end{tikzcd}$$

es decir f, g, h son 1-simplejos de W tales que $d_0(f) = d_1(g)$ y $d_0(g) = d_1(h)$.

Para mostrar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ consideremos a los únicos 2-simplejos η_0, η_2 y η_3 de W que cumplen las propiedades:

$$\begin{aligned} d_0(\eta_0) &= h & d_2(\eta_0) &= g \\ d_0(\eta_2) &= h \circ g & d_2(\eta_2) &= f \\ d_0(\eta_3) &= g & d_2(\eta_3) &= f\,; \end{aligned}$$

esto es posible ya que $d_1(h) = d_0(g)$ y $d_1(h \circ g) = d_1(g) = d_0(f)$.

Entonces, como la función inducida de la inclusión $\Lambda^{3,1} \longrightarrow \Delta^3$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^3, W\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{3,1}, W\big)$$

es biyectiva y se tiene las igualdades:

$$d_0(\eta_2) = h \circ g = d_1(\eta_0)\,, \qquad d_0(\eta_3) = g = d_2(\eta_0) \qquad \text{y} \qquad d_2(\eta_3) = f = d_2(\eta_2)\,;$$

existe un único 3-simplejo ξ de W tal que $d_0(\xi) = \eta_0$, $d_2(\xi) = \eta_2$ y $d_3(\xi) = \eta_3$. En particular:

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (d_0\eta_0) \circ (d_1\eta_3) = (d_0 d_0 \xi) \circ (d_1 d_3 \xi) \\ &= (d_0 d_1 \xi) \circ (d_2 d_1 \xi) = d_1 d_1 \xi = d_1 d_2 \xi = d_1 \eta_2 = (h \circ g) \circ f\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es efectivamente una categoría.

Observemos por otro lado que si $0 \leq k \leq 2$, la función inducida de la inclusión $\Lambda^{2,k} \longrightarrow \Delta^2$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^2, W\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{2,k}, W\big)$$

es biyectiva por hipótesis. En particular, si f es cualquier morfismo de $\mathcal{G}$ existe 2-simplejos η_1 y η_2 de W tales que:

$$d_1(\eta_1) = s_0(d_1 f)\,, \qquad d_2(\eta_1) = f\,,$$
$$d_0(\eta_2) = f \qquad \text{y} \qquad d_1(\eta_2) = s_0(d_0 f)\,.$$

Dicho de otro modo, tenemos que $(d_0\eta_1) \circ f = s_0(d_1 f)$ y $f \circ (d_2\eta_2) = s_0(d_0 f)$; dicho de otro modo f es un isomorfismo de $\mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es un grupoide.

Por último, observemos que el isomorfismo de conjuntos simpliciales truncados $\varphi_\bullet\colon \tau_2^* W \xrightarrow{\cong} \tau_2^* \circ \mathrm{N}(\mathcal{G})$ definido por las reglas: $\varphi_i = \mathrm{id}_{W_i}$ si $0 \leq i \leq 1$ y φ_2 es el isomorfismo composición:

$$W_2 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^2, W\big) \xrightarrow{(d_2, d_0)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^{2,1}, W\big) = \mathrm{N}(\mathcal{G})_2\,,$$

induce un isomorfismo de conjuntos simpliciales $\mathrm{N}(\mathcal{G}) \cong \mathbf{csq}_2\big(\mathrm{N}(\mathcal{G})\big) \cong \mathbf{csq}_2(W) \cong W$. □

Se sigue de los Corolarios 13.1.2, 13.2.1 y 13.2.4 que el funtor nervio $\mathrm{N}\colon\ \mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$ induce por restrucción una equivalencia entre la categoría cartesiana cerrada **Grpd** de los grupoides y la categoría cartesiana cerrada $\mathbf{GrpdK}^1$ de los 1-grupoides de Kan (ver el Lema 12.3.3). Más aún, por el Lema 12.5.1 y los isomorfismos (13.4) y (13.8), el funtor nervio determina también una equivalencia entre la categoría cartesiana cerrada $h\mathbf{Grpd}$ (la categoría homotópica de los grupoides) y la categoría cartesiana cerrada de los 1-tipos de homotopía $\mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet})$ (la categoría homotópica de los 1-grupoides de Kan).

§13.3. Escribimos **Grp** para denotar a la categoría de los grupos y los morfismos de grupos. Observemos que por los Corolarios 13.1.2, 13.2.1 y 13.2.4 el funtor nervio $\mathrm{N}\colon\ \mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$ induce por restricción una equivalencia entre la categoría **Grp** de los grupos y $\mathbf{GrpK}^1$ la subcategoría de $\mathbf{sSet}_0$ cuyos objetos son los 1-grupoides de Kan reducidos, es decir los 1-grupos de Kan.

Más aún, como α^1 de (13.8) es un isomorfismo natural:

$$G \xrightarrow[\cong]{\alpha_G} \pi_1\big(\mathrm{N}(G)\big) \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \text{grupo} \quad G\,;$$

concluimos que la restricción del funtor grupo fundamental de los conjuntos simpliciales punteados a los 1-grupos de Kan es un inverso salvo isomorfismo de la restricción del funtor nervio a los grupos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \arrow[r, bend right, "\mathrm{N}"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathbf{GrpK}^1 \arrow[l, bend right, "\pi_1"'] .
\end{tikzcd} \tag{13.9}$$

En particular se tiene una equivalencia entre la categoría de los grupos **Grp** y la categoría homotópica de los 1-grupos $\mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \arrow[r, bend right, "\mathrm{N}"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0) \arrow[l, bend right, "\pi_1"'] .
\end{tikzcd} \tag{13.10}$$

(ver el Corolario 12.5.4).

Recordemos:

COROLARIO 13.3.1. *El funtor restricción del funtor grupo fundamental de los conjuntos simpliciales punteados a los conjuntos simpliciales reducidos, es adjunto izquierdo* *del funtor nervio de los grupos:*

$$\begin{tikzcd}\mathbf{Grp} \arrow[r, bend right, "\mathrm{N}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{sSet}_0 \arrow[l, bend right, "\pi_1"'] \end{tikzcd},$$

DEMOSTRACIÓN. Si G es un grupo y X es un conjunto simplicial reducido, se tienen isomorfismos naturales:

$$\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X,\mathrm{N}(G)\big)\Big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X,\mathrm{N}(G)\big), \tag{13.11}$$

$$\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X,\mathrm{N}(G)\big)\Big) \cong \big[X,\mathrm{N}(G)\big]_1^{red} \tag{13.12}$$

$$\text{y} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\big(\pi_1(X),G\big) \cong \big[X,\mathrm{N}(G)\big]_1^{red} \tag{13.13}$$

donde $\big[\,\cdot\,,\cdot\,\big]_1^{red}$ denota al conjunto de los morfismos en $\mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0) = \mathbf{sSet}_0\big[\big(\mathbf{W}_1^{red}\big)^{-1}\big]$ la categoría homotópica de los 1-tipos de homotopía reducidos.

En efecto (13.11) se sigue del Lema 12.5.5 porque $\mathrm{N}(G)$ es un 1-grupo de Kan, (13.12) es una consecuencia de que $\mathrm{N}(G)$ sea un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_1^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_1^{red})$ y (13.13) es una consecuencia de la equivalencia de categorías (13.10).

Por lo tanto se tienen isomorfismos naturales:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\big(\pi_1(X),G\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X,\mathrm{N}(G)\big).$$

□

Para concluir mencionemos que el enriquecimiento $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}$ de la categoría de los grupos **Grp** en la categoría de los conjuntos **Set** tiene un tensor y un cotensor, es decir si G y H son grupos se tienen adjunciones:

$$\begin{tikzcd}\mathbf{Grp} \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Set} \arrow[l, bend right, "G\otimes\cdot"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}\mathbf{Grp}^{op} \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\cdot,H)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Set} \arrow[l, bend right, "H^{\cdot}"'] \end{tikzcd}$$

En efecto si A es un conjunto H^A es el grupo de las funciones $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\big(A,H\big)$ cuyo producto es definido argumento por argumento y $G \otimes A$ es el producto libre de $|A|$ copias de G.

14. La categoría de los 2-grupos

En la presente sección fijamos notación sobre la categoría de los 2-grupos, como una subcategoría de la categoría de las categorías monoidales y los funtores fuertes y unitarios entre ellas. En §14.2.1 recordamos el concepto de equivalencia débil entre 2-grupos y en §14.3 revisamos un cotensor de **cat** en la categoría de los 2-grupos.

§14.1. Recordemos que una *categoría monoidal* (ver por ejemplo [**Lan98**]) consiste de una categoría (abstracta) $\mathcal{M}$, un funtor $\otimes\colon \mathcal{M}\times\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, un objeto distinguido $\mathbb{1}$ e isomorfismos naturales:

$$(X\otimes Y)\otimes Z \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} X\otimes(Y\otimes Z)\ ,\quad X \xrightarrow{l_X} \mathbb{1}\otimes X \quad \text{y} \quad X \xrightarrow{r_X} X\otimes\mathbb{1}\ ; \tag{14.1}$$

tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\big((W\otimes X)\otimes Y\big)\otimes Z \arrow[r, "a_{W\otimes X,Y,Z}"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}\otimes Z"'] & (W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a_{W,X,Y\otimes Z}"] & W\otimes\big(X\otimes(Y\otimes Z)\big) \\
\big(W\otimes(X\otimes Y)\big)\otimes Z \arrow[rr, "a_{W,X\otimes Y,Z}"'] & & W\otimes\big((X\otimes Y)\otimes Z\big) \arrow[u, "W\otimes a_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd} \tag{14.2}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes\mathbb{1})\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] & & X\otimes(\mathbb{1}\otimes Y) \\
& X\otimes Y \arrow[ul, "r_X\otimes Y"] \arrow[ur, "X\otimes l_Y"'] &
\end{tikzcd} \tag{14.3}$$

para cualesquiera X, Y, Z y W objetos de $\mathcal{M}$.

Se puede mostrar sin dificultad:

LEMA 14.1.1. *Si A y B son dos objetos de una categoría monoidal, los triángulos:*

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "a_{A,B,\mathbb{1}}"] & & A\otimes(B\otimes\mathbb{1}) \\
& A\otimes B \arrow[ul, "r_{A\otimes B}"] \arrow[ur, "A\otimes r_B"'] &
\end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd}
& A\otimes B \arrow[dl, "\ell_A\otimes B"'] \arrow[dr, "\ell_{A\otimes B}"] & \\
(\mathbb{1}\otimes A)\otimes B \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},A,B}"'] & & \mathbb{1}\otimes(A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. Más aún, se tiene que $\ell_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}$.

Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son categorías monoidales, un *funtor monoidal laxo y unitario de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$* (resp. *funtor monoidal fuerte y unitario*) consiste de un funtor $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que $F\big(\mathbb{1}_{\mathcal{M}}\big) = \mathbb{1}_{\mathcal{N}}$ y morfismos naturales (resp. isomorfismos naturales):

$$F(X)\otimes F(Y) \xrightarrow{m_{X,Y}} F(X\otimes Y)\,, \tag{14.4}$$

tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
F\big((X\otimes Y)\otimes Z\big) \arrow[d, "Fa_{X,Y,Z}"'] & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[l, "m_{X\otimes Y,Z}"'] & (FX\otimes FY)\otimes FZ \arrow[l, "m_{X,Y}\otimes FZ"'] \arrow[d, "a_{FX,FY,FZ}"] \\
F\big(X\otimes(Y\otimes Z)\big) & FX\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[l, "m_{X,Y\otimes Z}"] & FX\otimes(FY\otimes FZ) \arrow[l, "FX\otimes m_{Y,Z}"]
\end{tikzcd} \tag{14.5}$$

(14.6) y

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes FX \arrow[dd, "m_{\mathbb{1},X}"'] & & FX\otimes\mathbb{1} \arrow[dd, "m_{X,\mathbb{1}}"] \\
& FX \arrow[ul, "l_{FX}"'] \arrow[ur, "r_{FX}"] \arrow[dl, "Fl_X"] \arrow[dr, "Fr_X"'] & \\
F(\mathbb{1}\otimes X) & & F(X\otimes\mathbb{1})
\end{tikzcd}$$

Las categorías monoidales (pequeñas) y los funtores monoidales laxos y unitarios (resp. los funtores monoidales fuertes y unitarios) forman una categoría (abstracta) punteada $\mathbf{cat}^{\otimes}_{lax,*}$ (resp. $\mathbf{cat}^{\otimes}_{fort,*}$) cuya composición se define como sigue:

Si $(F,m^F)\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}'$ y $(G,m^G)\colon \mathcal{M}'\longrightarrow\mathcal{M}''$ son funtores monoidales laxos y unitarios (resp. fuertes y unitarios) la composición $(G\circ F, m^{G\circ F})\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}''$ consiste del funtor $G\circ F$ y la transformación natural $m^{G\circ F}$ definida en objetos X y Y de $\mathcal{M}$ como el isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
G\circ F(X)\otimes G\circ F(Y) \arrow[r, "m^G_{FX,FY}"'] \arrow[rr, bend left, "m^{G\circ F}_{X,Y}"] & G\big(F(X)\otimes F(Y)\big) \arrow[r, "G(m^F_{X,Y})"'] & G\circ F(X\otimes Y)\,.
\end{tikzcd}$$

Por último, se tiene una 2-categoría (abstracta) $\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{lax,*}$ (resp. $\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{fort,*}$) cuya categoría subyacente es $\mathbf{cat}^{\otimes}_{lax,*}$ (resp. $\mathbf{cat}^{\otimes}_{fort,*}$) y las 2-flechas son las *transformaciones* definidas como sigue: Si $(F,m^F)\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ y $(G,m^G)\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ son funtores monoidales laxos y unitarios (resp. fuertes y unitarios), una *transformación de* (F,m^F) *en* (G,m^G) es una transformación natural de funtores $\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, bend left, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "G"', ""{name=D}] & \mathcal{N} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\eta"] \end{tikzcd}$ tal que $\eta_{\mathbb{1}_\mathcal{M}} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}_\mathcal{N}}$ y tal que el siguiente es un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes FY \arrow[r, "\eta_X\otimes\eta_Y"] \arrow[d, "m^F_{X,Y}"'] & GX\otimes GY \arrow[d, "m^G_{X,Y}"] \\
F(X\otimes Y) \arrow[r, "\eta_{X\otimes Y}"'] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}\;. \tag{14.7}$$

En el siguiente enunciado se muestra que el 2-funtor que olvida:

$$\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{fort,*} \longrightarrow \underline{\mathbf{cat}}$$

refleja las equivalencias internas y los isomofismos.

LEMA 14.1.2. *Si* $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ *es un morfismo monoidal fuerte y unitario entre categorías monoidales cuyo funtor subyacente es fielmente pleno y esencialmente sobreyectivo, entonces existe un morfismo monoidal fuerte y unitario* $G\colon \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ *y transformaciones:*

$$F \circ G \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{M}'} \qquad y \qquad G \circ F \overset{\beta}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$$

tales que α_A *y* β_X *son isomorfismos para todos los objetos* A *y* X*.*

Más aún, si F *es fielmente pleno y biyectivo en los objetos entonces existe un morfismo monoidal fuerte y unitario* $G\colon \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ *tal que* $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ *y* $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{M}'}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ es un morfismo monoidal fuerte y unitario entre categorías monoidales tal que el funtor subyacente a F es fielmente pleno y esencialmente sobreyectivo. Vamos a construir un morfismo fuerte y unitario $G\colon \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ así como una transformación natural $\alpha\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{G}'}$ de la siguiente manera:

Si A es un objeto de $\mathcal{M}'$, elijamos un objeto $G(A)$ de $\mathcal{M}$ tal que $F(GA)$ y A sean isomorfos en $\mathcal{M}'$ (F es esencialmente sobreyectiva). Podemos entonces elegir también un isomorfismo $\alpha_A\colon FG(A) \to A$ de $\mathcal{M}'$ y suponer además que $G(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ y $\alpha_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$. Si $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathcal{M}'$, definimos $G(f)\colon G(A) \longrightarrow G(B)$ como el único morfismo de $\mathcal{M}$ tal que $\alpha_B \circ FG(f) = f \circ \alpha_A$. Se verifica sin dificultad que obtenemos por este medio un funtor $G\colon \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ entre las categorías subyacentes a las categorías monoidales y un isomorfismo natural de funtores $\begin{tikzcd} \mathcal{M}' \arrow[r, bend left, "FG"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}"'{name=D}] & \mathcal{M}' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$, tal que $G(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ y $\alpha_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$.

Completemos al funtor $G\colon \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ en un morfismo monoidal fuerte y unitario como sigue: Si A y B son objetos de $\mathcal{M}'$ escribimos $m^G_{A,B}\colon G(A) \otimes G(B) \longrightarrow G(A \otimes B)$ para denotar al único isomorfismo de $\mathcal{M}$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FG(A) \otimes FG(B) \arrow[r, "m^F_{GA,GB}"] \arrow[d, "\alpha_A \otimes \alpha_B"'] & F\big(G(A) \otimes G(B)\big) \arrow[r, "F(m^G_{A,B})"] & F\big(G(A \otimes B)\big) \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B}"] \\
A \otimes B \arrow[rr, equal] & & A \otimes B\,.
\end{tikzcd} \tag{14.8}$$

Se sigue en particular que $\begin{tikzcd} \mathcal{M}' \arrow[r, bend left, "FG"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}"'{name=D}] & \mathcal{M}' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$ sería una transformación entre morfismos de categorías monoidales si G fuera un morfismo monoidal.

Mostremos que $G\colon \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ es efectivamente un morfismo monoidal, es decir mostremos que los siguientes diagramas efectivamente conmutan:

(14.9)
$$\begin{tikzcd}
G\big((A\otimes B)\otimes C\big) \arrow[d, "Ga_{A,B,C}"'] & G(A\otimes B)\otimes GC \arrow[l, "m^G_{A\otimes B,C}"'] & (GA\otimes GB)\otimes GC \arrow[l, "m^G_{A,B}\otimes GC"'] \arrow[d, "a_{GA,GB,GC}"] \\
G\big(A\otimes(B\otimes C)\big) & GA\otimes G(B\otimes C) \arrow[l, "m^G_{A,B\otimes C}"] & GA\otimes(GB\otimes GC) \arrow[l, "GA\otimes m^G_{B,C}"]
\end{tikzcd}$$

(14.10) y
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes GX \arrow[dd, "m^G_{\mathbb{1},X}"'] & & GX\otimes\mathbb{1} \arrow[dd, "m^G_{X,\mathbb{1}}"] \\
& GX \arrow[ul, "l_{GX}"'] \arrow[ur, "r_{GX}"] \arrow[dl, "Gl_X"] \arrow[dr, "Gr_X"'] & \\
G(\mathbb{1}\otimes X) & & G(X\otimes\mathbb{1})\,.
\end{tikzcd}$$

De manera equivalente mostremos que las imagenes por el funtor fiel F de los diagrammas (14.9) y (14.10) son diagramas conmutativos. Para empezar, se muestra que los triángulos $F(14.10)$ son conmutativos, considerando los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
FG(X) \arrow[r, "l_{FGX}"] \arrow[rr, bend left, "F(l_{GX})"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & \mathbb{1}\otimes FG(X) \arrow[r, "m^F_{\mathbb{1},GX}"] \arrow[d, "\mathbb{1}\otimes\alpha_X"] & F(\mathbb{1}\otimes GX) \arrow[r, "F(m^G_{\mathbb{1},X})"] & FG(\mathbb{1}\otimes X) \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{1},X}"] \\
X \arrow[r, "l_X"'] & \mathbb{1}\otimes X \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \mathbb{1}\otimes X
\end{tikzcd}$$

y
$$\begin{tikzcd}
FG(X) \arrow[r, "r_{FGX}"] \arrow[rr, bend left, "F(r_{GX})"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & FG(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "m^F_{GX,\mathbb{1}}"] \arrow[d, "\alpha_X\otimes\mathbb{1}"] & F(GX\otimes\mathbb{1}) \arrow[r, "F(m^G_{X,\mathbb{1}})"] & FG(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[d, "\alpha_{X\otimes\mathbb{1}}"] \\
X \arrow[r, "r_X"'] & X\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & X\otimes\mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

y recordando que:

$$\begin{tikzcd}
FG(X) \arrow[r, "FG(l_X)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & FG(\mathbb{1}\otimes X) \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{1}\otimes X}"] \\
X \arrow[r, "l_X"'] & \mathbb{1}\otimes X
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
FG(X) \arrow[r, "FG(r_X)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & FG(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[d, "\alpha_{X\otimes\mathbb{1}}"] \\
X \arrow[r, "r_X"'] & X\otimes\mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

conmutan porque α es una transformación natural.

Por otro lado, se verifica que $F(14.9)$ conmutan viéndolo como la cara de un cubo, cuyas otras caras son los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
FG\Big((A\otimes B)\otimes C\Big) \arrow[d, "\alpha_{(A\otimes B)\otimes C}"'] & F\Big(G(A\otimes B)\otimes GC\Big) \arrow[l, "F(m^G_{A\otimes B,C})"'] & F\Big((GA\otimes GB)\otimes GC\Big) \arrow[l, "F(m^G_{A,B}\otimes GC)"'] \\
(A\otimes B)\otimes C \arrow[d, equal] & FG(A\otimes B)\otimes FGC \arrow[l, "\alpha_{A\otimes B}\otimes\alpha_C" description] \arrow[u, "m^F_{G(A\otimes B),GC}"'] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B}\otimes FGC"'] & F(GA\otimes GB)\otimes FGC \arrow[l, "F(m^G_{A,B})\otimes FGC" description] \arrow[u, "m^F_{GA\otimes GB,GC}"'] \\
(A\otimes B)\otimes C & (A\otimes B)\otimes FGC \arrow[l, "(A\otimes B)\otimes\alpha_C"] & (FGA\otimes FGB)\otimes FGC \arrow[l, "(\alpha_A\otimes\alpha_B)\otimes FGC"] \arrow[u, "m^F_{GA,GB}\otimes FGC"']
\end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd}
FG\Big(A\otimes(B\otimes C)\Big) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes(B\otimes C)}"'] & F\Big(G(A)\otimes G(B\otimes C)\Big) \arrow[l, "F(m^G_{A,B\otimes C})"'] & F\Big(GA\otimes(GB\otimes GC)\Big) \arrow[l, "F(GA\otimes m^G_{B,C})"'] \\
A\otimes(B\otimes C) \arrow[d, equal] & FGA\otimes FG(B\otimes C) \arrow[l, "\alpha_A\otimes\alpha_{B\otimes C}" description] \arrow[u, "m^F_{GA,G(B\otimes C)}"'] \arrow[d, "FGA\otimes\alpha_{B\otimes C}"'] & FG(A)\otimes F(GB\otimes GC) \arrow[l, "FGA\otimes F(m^G_{B,C})" description] \arrow[u, "m^F_{GA,GB\otimes GC}"'] \\
A\otimes(B\otimes C) & FGA\otimes(B\otimes C) \arrow[l, "\alpha_A\otimes(B\otimes C)"] & FGA\otimes(FGB\otimes FGC), \arrow[l, "FGA\otimes(\alpha_B\otimes\alpha_A)"] \arrow[u, "FGA\otimes m^F_{GB,GC}"']
\end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes C \arrow[r, equal] \arrow[d, "a_{A,B,C}"'] & (A\otimes B)\otimes C \arrow[d, "a_{A,B,C}"'] & FG\Big((A\otimes B)\otimes C\Big) \arrow[l, "\alpha_{(A\otimes B)\otimes C}"'] \arrow[d, "F(a_{A,B,C})"] \\
A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, equal] & A\otimes(B\otimes C) & FG\Big(A\otimes(B\otimes C)\Big) \arrow[l, "\alpha_{A\otimes(B\otimes C)}"]
\end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd}
(FGA\otimes FGB)\otimes FGC \arrow[r, "m^F_{GA,GB}\otimes FGC"] \arrow[d, "a_{FGA,FGB,FGC}"'] & F(GA\otimes GB)\otimes FGC \arrow[r, "m^F_{GA\otimes GB,GC}"] & F\Big((GA\otimes GB)\otimes GC\Big) \arrow[d, "F(a_{GA,GB,GC})"] \\
FGA\otimes(FGB\otimes FGC) \arrow[r, "FGA\otimes m^F_{GB,GC}"'] & FGA\otimes F(GB\otimes GC) \arrow[r, "m^F_{GA,GB\otimes GC}"'] & F\Big(GA\otimes(GB\otimes GC)\Big)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes C \arrow[d, "a_{A,B,C}"'] & (A\otimes B)\otimes FGC \arrow[l, "(A\otimes B)\otimes\alpha_C"'] & (FGA\otimes FGB)\otimes FGC \arrow[l, "(\alpha_A\otimes\alpha_B)\otimes FGC"'] \arrow[d, "a_{FGA,FGB,FGC}"] \\
A\otimes(B\otimes C) & FGA\otimes(B\otimes C) \arrow[l, "\alpha_A\otimes(B\otimes C)"] & FGA\otimes(FGB\otimes FGC) \arrow[l, "FGA\otimes(\alpha_B\otimes\alpha_A)"]
\end{tikzcd} \quad .$$

Nos falta solamente construir una transformación $\beta\colon\ G\circ F\ \Rightarrow\ \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$. Se verifica sin dificultad que si escribimos $\beta_X\colon\ GF(X)\longrightarrow X$ para denotar al único morfismo tal que $F(\beta_X)=\alpha_{FX}$, entonces β_X es un isomorfismo de la categoría monoidal $\mathcal{M}$ y la familia $\beta=\{\beta_X\}_X$ es efectivamente una transformación entre morfismos monoidales.

Observemos finalmente que si F es un funtor biyectivo en los objetos, en la construcción del funtor G que hicimos arriba podemos elegir para todo objeto A de $\mathcal{M}'$ un (único) objeto $G(A)$ de $\mathcal{G}$ tal que $F(GA) = A$. Imponiendo también que $\alpha_A = \mathrm{id}_A$ deducimos que G verifica $F \circ G = \mathrm{id}$ y $G \circ F = \mathrm{id}$. ☐

§14.2. Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal y X es un objeto fijo de $\mathcal{M}$, se muestra sin dificultad que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Los funtores $X \otimes -\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ y $- \otimes X\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ son equivalencias de categorías.

(ii) Existen objetos X' y X'' de $\mathcal{M}$, e isomorfismos en $\mathcal{M}$:

$$X \otimes X' \xrightarrow[\cong]{\alpha_X} \mathbb{1} \xleftarrow[\cong]{\beta_X} X'' \otimes X \,.$$

Un objetos X de una categoría monoidal $\mathcal{M}$ que cumple una de estas condiciones equivalentes es llamado *invertible*. Un 2-*grupo* es una categoría monoidal cuya categoría subyacente es un grupoide y donde todos sus objetos son invertibles.

Denotemos como 2-**Grp** a la *categoría* (abstracta) *de los* 2-*grupos pequeños* (resp. la 2-*categoría* (abstracta) *de los* 2-*grupos pequeños* 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$), es decir la subcategoría plena de $\mathbf{cat}^{\otimes}_{lax,*}$ o equivalentemente de $\mathbf{cat}^{\otimes}_{fort,*}$ (resp. la sub-2-categoría plena de $\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{lax,*}$ o equivalentemente de $\underline{\mathbf{cat}}^{\otimes}_{fort,*}$) cuyos objetos son los 2-grupos.

Mostremos:

Lema 14.2.1. *Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal cuya categoría subyacente es un grupoide, entonces $\mathcal{M}$ es un 2-grupo si y solamente si existen funtores $\iota^d\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ y $\iota^g\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, y para cada objeto X de $\mathcal{M}$ isomorfismos:*

$$X \otimes \iota^d(X) \xrightarrow[\cong]{\alpha_X} \mathbb{1} \xleftarrow[\cong]{\beta_X} \iota^g(X) \otimes X \quad , \tag{14.11}$$

tales que si $f\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{M}$ se tienen los siguientes cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes \iota^d(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "f\otimes\iota^d(f)"'] & \mathbb{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"] & \iota^g(X) \otimes X \arrow[l, "\beta_X"'] \arrow[d, "\iota^g(f)\otimes f"] \\
Y \otimes \iota^d(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & \mathbb{1} & \iota^g(Y) \otimes Y \arrow[l, "\beta_Y"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Si existen funtores $\iota^d\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ y $\iota^g\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, e isomorfismos (14.11), es claro que todos los objetos de $\mathcal{M}$ son invertibles, es decir $\mathcal{M}$ es un 2-grupo.

Mostremos que si $\mathcal{M}$ es un 2-grupo entonces existe un funtor $\iota^d\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ y para cada objeto X de $\mathcal{M}$ un isomorfismo $\alpha_X\colon X \otimes \iota^d(X) \longrightarrow \mathbb{1}$ tal que para todo morfismo

$f\colon X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes\iota^d(X) \arrow[dd, "f\otimes\iota^d(f)"'] \arrow[dr, bend left, "\alpha_X"] & \\
& \mathbb{1} \\
Y\otimes\iota^d(Y) \arrow[ur, bend right, "\alpha_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

es un triángulo conmutativo. De manera análoga, se verifica que existe un funtor $\iota^g\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ e isomorfismos $\beta_X\colon \iota^g(X)\otimes X \longrightarrow \mathbb{1}$ con la propiedad deseada.

Elijamos para cada objeto X de $\mathcal{M}$ un objeto $\iota^d(X)$ y $\alpha_X\colon X\otimes\iota^d(X) \longrightarrow \mathbb{1}$ un isomorfismo. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{M}$, ya que el funtor $Y\otimes -\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una equivalencia de categorías y $\mathcal{M}$ es un grupoide, existe un único morfismo $\iota^d(f)\colon \iota^d(X) \longrightarrow \iota^d(Y)$ de $\mathcal{M}$ tal que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y\otimes\iota^d(X) \arrow[d, dashed, "Y\otimes\iota^d(f)"'] & X\otimes\iota^d(X) \arrow[l, "f\otimes\iota^d(X)"'] \arrow[d, "\alpha_X"] \\
Y\otimes\iota^d(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & \mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, ya que en $\mathcal{M}$ tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes\iota^d(X) \arrow[r, "f\otimes\iota^d(X)"] \arrow[d, "X\otimes\iota^d(f)"'] \arrow[dr, "f\otimes\iota^d(f)"] & Y\otimes\iota^d(X) \arrow[d, "Y\otimes\iota^d(f)"] \\
X\otimes\iota^d(Y) \arrow[r, "f\otimes\iota^d(Y)"'] & Y\otimes\iota^d(Y)
\end{tikzcd}$$

asociado a los morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ y $\iota^d(f)\colon \iota^d(X) \longrightarrow \iota^d(Y)$, se sigue que el morfismo $\iota^d(f)\colon \iota^d(X) \longrightarrow \iota^d(Y)$ también es el único morfismo de $\mathcal{M}$ tal que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes\iota^d(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, dashed, "X\otimes\iota^d(f)"'] & \mathbb{1} \\
X\otimes\iota^d(Y) \arrow[r, "f\otimes\iota^d(Y)"'] & Y\otimes\iota^d(Y) \arrow[u, "\alpha_Y"']
\end{tikzcd}$$

ó aún mejor, $\iota^d(f)$ es el único morfismo de $\mathcal{M}$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes\iota^d(X) \arrow[dd, "f\otimes\iota^d(f)"'] \arrow[dr, bend left, "\alpha_X"] & \\
& \mathbb{1} \\
Y\otimes\iota^d(Y) \arrow[ur, bend right, "\alpha_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Deducimos de esta última caracterización que la asignación $f \mapsto \iota^d(f)$ determina un funtor $\iota^d\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. ☐

§14.2.1. Escribamos 2-h**Grp** para denotar a la *categoría homotópica de los* 2-*grupos*, es decir la categoría que obtenemos de la 2-categoría 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$ al imponer la condición:

$$\mathrm{Hom}_{2\text{-}h\mathbf{Grp}} = \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}}}\big)\,.$$

Notemos que como las categorías de morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}}}$ de la 2-categoría 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$ son grupoides, la categoría 2-h**Grp** es la categoría que se obtiene de la categoría de los 2-grupos 2-**Grp** al imponer en su conjunto de morfismos la relación de equivalencia que identifica a dos morfismos 2-grupos $F, G\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ si existe una transformación $\eta\colon F \Rightarrow G$.

Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, escribimos $\pi_0(\mathcal{G})$ para denotar al conjunto de las componentes por trayectorias del grupoide subyacente a $\mathcal{G}$, es decir el conjunto de las clases de isomorfismo de los objetos de $\mathcal{G}$. Se verifica que $\pi_0(\mathcal{G})$ es un conjunto con una ley de composición inducida por el funtor $\otimes$ de modo que $\pi_0(\mathcal{G})$ es un grupo (todo objeto de $\mathcal{G}$ es invertible) cuyo elemento neutro es la clase del objeto $\mathbb{1}$. Llamamos a $\pi_0(\mathcal{G})$ *el grupo de los componentes por trayectorias del* 2-*grupo* $\mathcal{G}$. Del mismo modo, denotemos como $\pi_1(\mathcal{G})$ al grupo de los automorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\big(\mathbb{1}, \mathbb{1}\big)$. El grupo $\pi_1(\mathcal{G})$ es llamado *el grupo fundamental del* 2-*grupo* $\mathcal{G}$.

Lema 14.2.2. *El grupo fundamental* $\pi_1(\mathcal{G})$ *de un* 2-*grupo* $\mathcal{G}$ *es un grupo conmutativo.*

Demostración. Si $f, g\colon \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1}$ son morfismos de un 2-grupo $\mathcal{G}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "f\otimes\mathbb{1}"] \arrow[d, "\mathbb{1}\otimes g"'] \arrow[dr, "f\otimes g" description] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[d, "\mathbb{1}\otimes g"] \\
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "f\otimes\mathbb{1}"'] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, tenemos también los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "f\otimes\mathbb{1}"] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes g"] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \\
\mathbb{1} \arrow[u, "r_{\mathbb{1}}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{1} \arrow[u, "r_{\mathbb{1}}=\ell_{\mathbb{1}}" description] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{1} \arrow[u, "\ell_{\mathbb{1}}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes g"] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "f\otimes\mathbb{1}"] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \\
\mathbb{1} \arrow[u, "\ell_{\mathbb{1}}"] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{1} \arrow[u, "\ell_{\mathbb{1}}=r_{\mathbb{1}}" description] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{1} \arrow[u, "r_{\mathbb{1}}"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto:

$$g\circ f = \ell_{\mathbb{1}}^{-1}\circ(\mathbb{1}\otimes g)\circ(f\otimes\mathbb{1})\circ r_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}^{-1}\circ(f\otimes g)\circ\ell_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}^{-1}\circ(f\otimes\mathbb{1})\circ(\mathbb{1}\otimes g)\circ\ell_{\mathbb{1}} = f\circ g\,.$$

☐

Se definen fácilmente funtores:

$$2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{\pi_0(\,\cdot\,),\,\pi_1(\,\cdot\,)} \mathbf{Grp}\ . \tag{14.12}$$

Un morfismo de 2-grupos $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ es llamado una *equivalencia débil* si cumple una de las propiedades equivalentes del siguiente:

LEMA 14.2.3. *Si $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ es un morfismo monoidal laxo y unitario entre 2-grupos, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *Los morfismos de grupos $\pi_0 F$ y $\pi_1 F$ son isomorfismos.*

(ii) *El funtor subyacente a $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ es fielmente pleno y esencialmente sobre, es decir la imagen de F por el 2-funtor que olvida $2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \longrightarrow \underline{\mathbf{cat}}$ es una equivalencia interna de la 2-categoría $\underline{\mathbf{cat}}$.*

(iii) *F es una equivalencia interna de la 2-categoría $2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}}$; de manera explícita existe un morfismo monoidal laxo y unitario $G\colon \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}$, y transformaciones $\alpha\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{G}'}$ y $\beta\colon G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$.*

(iv) *La imagen de F por el funtor cociente $\pi\colon 2\text{-}\mathbf{Grp} \longrightarrow 2\text{-}h\mathbf{Grp}$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. No es difícil ver que si $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ es un morfismo monoidal laxo y unitario entre 2-grupos, entonces la función $\pi_0 F$ es sobreyectiva si y solamente si el funtor subyacente a F es esencialmente sobreyectivo. Por lo tanto para mostrar la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) es suficiente con mostrar que F es un funtor fielmente pleno si y solamente si la función $\pi_0 F$ es inyectiva y $\pi_1 F$ es biyectiva.

Por un lado si el funtor F es fielmente y pleno, se tiene en particular que la función $\pi_1 F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathbb{1},\mathbb{1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}(\mathbb{1},\mathbb{1})$ es biyectiva. Además si X y Y son objetos de $\mathcal{G}$ tales que $F(X)$ y $F(Y)$ representan a la misma clase en el conjunto $\pi_0(\mathcal{G}')$, entonces existe un isomorfismo $\varphi :\ F(X) \longrightarrow F(Y)$ pues $\mathcal{G}'$ es un grupoide. Como F es pleno tenemos que $\varphi = F(f)$ para algún morfismo $f :\ X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{G}$. Por lo tanto la función $\pi_0 F$ es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que la función $\pi_0 F$ es inyectiva y que $\pi_1 F$ es biyectiva. Si X y Y son objetos de $\mathcal{G}$ tales que el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\big(X,Y\big)$ es vacío, entonces el conjunto de los morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}\big(FX,FY\big)$ también es vacío pues la función $\pi_0 F$ es inyectiva y $\mathcal{G}$ es un grupoide. Por otro lado, si existe un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ consideremos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y) \arrow[r, "F_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}\big(F(X),F(Y)\big) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,X) \arrow[r, "F_{X,X}"'] \arrow[u, "f\circ-", "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}\big(F(X),F(X)\big) \arrow[u, "\cong", "F(f)\circ-"']
\end{tikzcd}$$

Deducimos que la función $F_{X,Y}$ es biyectiva si y solamente si $F_{X,X}$ lo es, pues f es un isomorfismo.

Mostremos entonces que si X es cualquier objeto, la función $F_{X,X}$ es biyectiva si y solamente si $\pi_1 F$ lo es. Para ello consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\big(\mathbb{1},\mathbb{1}\big) \arrow[r, "X\otimes -"] \arrow[dd, "F_{\mathbb{1},\mathbb{1}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\big(X\otimes\mathbb{1},X\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[d, "F_{X\otimes\mathbb{1},X\otimes\mathbb{1}}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\big(X,X\big) \arrow[l, "l_X\circ - \circ l_X^{-1}"'] \arrow[dd, "F_{X,X}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\big(F(X\otimes\mathbb{1}),F(X\otimes\mathbb{1})\big) \arrow[d, "m_{X,\mathbb{1}}^{-1}\circ(-)\circ m_{X,\mathbb{1}}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}\big(\mathbb{1},\mathbb{1}\big) \arrow[r, "FX\otimes -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}\big(FX\otimes\mathbb{1},FX\otimes\mathbb{1}\big) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}'}\big(FX,FX\big). \arrow[l, "l_{FX}\circ - \circ l_{FX}^{-1}"]
\end{tikzcd} \tag{14.13}$$

Observemos que los pentágonos de (14.13) son conmutativos porque para cualesquiera dos morfismos $\varphi\colon\ \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1}$ y $\psi\colon\ X \longrightarrow X$ de $\mathcal{G}$, tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "m_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[d, "FX\otimes F\varphi"'] & F(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[d, "F(X\otimes\varphi)"] \\
FX\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "m_{X,\mathbb{1}}"'] & F(X\otimes\mathbb{1})
\end{tikzcd} \quad , \qquad
\begin{tikzcd}
X\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "\psi\otimes\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\
X\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[dr, "m_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[dd, "F(X)\otimes\mathbb{1}"'] & & F(X) \arrow[ll, "l_{FX}"'] \arrow[dl, "F(l_X)"'] \arrow[dd, "F\psi"] \\
 & F(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[dd, "F(\psi\otimes\mathbb{1})"] & \\
F(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[dr, "m_{X,\mathbb{1}}"'] & & F(X) \arrow[ll, "l_{FX}"'] \arrow[dl, "F(l_X)"] \\
 & F(X\otimes\mathbb{1}) &
\end{tikzcd}$$

Deducimos del diagrama conmutativo (14.13) que $F_{X,X}$ es una función biyectiva si $F_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$ lo es, puesto que $X\otimes -$ y $FX\otimes -$ son funtores fielmente plenos.

La equivalencia (ii) ⇔ (iii) es una consecuencia del Lema 14.1.2. Finalmente notemos que (iii) ⇔ (iv) se deduce fácilmente de la definición de la categoría homotópica 2-h**Grp**. □

§14.3. Recordemos que el 2-funtor categoría de los morfismos en la 2-categoría de las categorías pequeñas:

$$\underline{\mathbf{cat}}^{op}\times\underline{\mathbf{cat}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}} \underline{\mathbf{cat}}\,, \tag{14.14}$$

es definido por la regla:

$$\left(\begin{tikzcd} \mathcal{A} & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "F"'] \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\alpha"] \end{tikzcd} ,\ \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}\right) \mapsto \left(\begin{tikzcd}[column sep=huge] \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{cat}}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \arrow[r, bend left, "\varphi\circ-\circ F"] \arrow[r, bend right, "\psi\circ-\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\star-\star\beta"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{cat}}(\mathcal{B},\mathcal{D}) \end{tikzcd}\right).$$

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son categorías pequeñas, escribimos también $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ para denotar a la categoría $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{cat}}(\mathcal{A},\mathcal{C})$. Cuando $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ es un 2-grupo definimos en la categoría de funtores $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ una estructura de 2-grupo como sigue: Para empezar, la estructura de categoría monoidal se obtiene componiendo los isomorfismos canónicos de categorías:

$$\star^{\mathcal{A}} \cong \star, \qquad \big(\mathcal{G}\times\mathcal{G}\big)^{\mathcal{A}} \cong \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \qquad \text{y} \qquad \big(\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}\big)^{\mathcal{A}} \cong \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$$

$\big($el funtor $\mathbf{cat} \xrightarrow{\_^{\mathcal{A}}} \mathbf{cat}$ conmuta con límites pequeños$\big)$ con las imagenes por el 2-funtor $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ de los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{G}, \\ \star \arrow[r, "\mathbb{1}"] & \mathcal{G}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[dr, "\otimes"] & \\ \mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[ur, "(p_1\otimes p_2{,}p_3)"] \arrow[dr, "(p_1{,}p_2\otimes p_3)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow a"] & & \mathcal{G} \\ & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[ur, "\otimes"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[dr, "\otimes"] \arrow[d, phantom, "l\Uparrow"] & \\ \mathcal{G} \arrow[ur, "(\mathbb{1}{,}\mathrm{id})"] \arrow[dr, "(\mathrm{id}{,}\mathbb{1})"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}" description] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow r"] & \mathcal{G}. \\ & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[ur, "\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

De manera explícita, la multiplicación y la unidad de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ son las siguientes composiciones de funtores:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[dr, bend left, "\otimes"] \arrow[dr, phantom, "="'] & \\ (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[r, "\otimes^{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[dr, bend left, "\mathbb{1}"] \arrow[dr, phantom, "="'] & \\ \star^{\mathcal{A}} \arrow[r, "\mathbb{1}^{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{G}^{\mathcal{A}}, \end{tikzcd}$$

respectivamente, y los isomorfismos de la asociatividad y la unidad son los isomorfismos naturales:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[rrrd, bend left, "(p_1\otimes p_2{,}p_3)"] \arrow[rrrd, phantom, "="'] \arrow[ddd, bend right=60, "(p_1{,}p_2\otimes p_3)"'] & & & \\ (\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[rr, "(p_1\otimes p_2{,}p_3)^{\mathcal{A}}" description] \arrow[d, "(p_1{,}p_2\otimes p_3)^{\mathcal{A}}" description] \arrow[d, phantom, "="', shift right=12] \arrow[drr, phantom, "\Swarrow a^{\mathcal{A}}"] & & (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\otimes^{\mathcal{A}}" description] & \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[dl, bend left, "\otimes"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[rr, "\otimes^{\mathcal{A}}" description] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & & \mathcal{G}^{\mathcal{A}} & \\ \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[uurr, bend right, "\otimes"'] \arrow[uurr, phantom, "="] & & & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[ddr, bend left, "\otimes"] & \\
 & (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[dr, "\otimes^{\mathcal{A}}"] & \\
\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[uur, bend left, "{(\mathcal{G}^{\mathcal{A}},\mathbb{1})}"] \arrow[ur, "{(\mathcal{G},\mathbb{1})^{\mathcal{A}}}"] \arrow[rr, "\text{identidad}" description] \arrow[dr, "{(\mathbb{1},\mathcal{G})^{\mathcal{A}}}"'] \arrow[ddr, bend right, "{(\mathbb{1},\mathcal{G}^{\mathcal{A}})}"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "="] \arrow[dr, phantom, bend right=20, "="] & & \mathcal{G}^{\mathcal{A}}, \arrow[ul, phantom, bend right=20, "="] \arrow[dl, phantom, bend left=20, "="] \arrow[ul, phantom, shift left=12, "l^{\mathcal{A}}\Uparrow"] \arrow[dl, phantom, shift right=12, "\Downarrow r^{\mathcal{A}}"] \\
 & (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[ur, "\otimes^{\mathcal{A}}"] & \\
 & \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[u, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[uur, bend right, "\otimes"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir son definidos argumento por argumento.

Se sigue en particular que estos isomorfismos cumplen (14.2) y (14.3), es decir si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ son objetos de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ tenemos que:

$$\begin{tikzcd}
\big((\mathcal{W}\otimes\mathcal{X})\otimes\mathcal{Y}\big)\otimes\mathcal{Z} \arrow[r, "a_{\mathcal{W}\otimes\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}"] \arrow[d, "a_{\mathcal{W},\mathcal{X},\mathcal{Y}}\otimes\mathcal{Z}"'] & (\mathcal{W}\otimes\mathcal{X})\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}) \arrow[r, "a_{\mathcal{W},\mathcal{X},\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}}"] & \mathcal{W}\otimes\big(\mathcal{X}\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})\big) \\
\big(\mathcal{W}\otimes(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})\big)\otimes\mathcal{Z} \arrow[rr, "a_{\mathcal{W},\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y},\mathcal{Z}}"'] & & \mathcal{W}\otimes\big((\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})\otimes\mathcal{Z}\big) \arrow[u, "\mathcal{W}\otimes a_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}"']
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}\otimes\mathbb{1})\otimes\mathcal{Y} \arrow[rr, "a_{\mathcal{X},\mathbb{1},\mathcal{Y}}"] & & \mathcal{X}\otimes(\mathbb{1}\otimes\mathcal{Y}) \\
 & \mathcal{X}\otimes\mathcal{Y} \arrow[ul, "r_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}"] \arrow[ur, "\mathcal{X}\otimes l_{\mathcal{Y}}"'] &
\end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$, porque:

$$\begin{tikzcd}
\big((\mathcal{W}_a\otimes\mathcal{X}_a)\otimes\mathcal{Y}_a\big)\otimes\mathcal{Z}_a \arrow[r, "a_{\mathcal{W}_a\otimes\mathcal{X}_a,\mathcal{Y}_a,\mathcal{Z}_a}"] \arrow[d, "a_{\mathcal{W}_a,\mathcal{X}_a,\mathcal{Y}_a}\otimes\mathcal{Z}_a"'] & (\mathcal{W}_a\otimes\mathcal{X}_a)\otimes(\mathcal{Y}_a\otimes\mathcal{Z}_a) \arrow[r, "a_{\mathcal{W}_a,\mathcal{X}_a,\mathcal{Y}_a\otimes\mathcal{Z}_a}"] & \mathcal{W}_a\otimes\big(\mathcal{X}_a\otimes(\mathcal{Y}_a\otimes\mathcal{Z}_a)\big) \\
\big(\mathcal{W}_a\otimes(\mathcal{X}_a\otimes\mathcal{Y}_a)\big)\otimes\mathcal{Z}_a \arrow[rr, "a_{\mathcal{W}_a,\mathcal{X}_a\otimes\mathcal{Y}_a,\mathcal{Z}_a}"'] & & \mathcal{W}_a\otimes\big((\mathcal{X}_a\otimes\mathcal{Y}_a)\otimes\mathcal{Z}_a\big) \arrow[u, "\mathcal{W}_a\otimes a_{\mathcal{X}_a,\mathcal{Y}_a,\mathcal{Z}_a}"']
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}_a\otimes\mathbb{1})\otimes\mathcal{Y}_a \arrow[rr, "a_{\mathcal{X}_a,\mathbb{1},\mathcal{Y}_a}"] & & \mathcal{X}_a\otimes(\mathbb{1}\otimes\mathcal{Y}_a) \\
 & \mathcal{X}_a\otimes\mathcal{Y}_a \arrow[ul, "r_{\mathcal{X}_a\otimes\mathcal{Y}_a}"] \arrow[ur, "\mathcal{X}_a\otimes l_{\mathcal{Y}_a}"'] &
\end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos de $\mathcal{G}$ para todo objeto a de $\mathcal{A}$.

Por otro lado como $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, no es difícil ver que la categoría de los funtores $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ es un grupoide. Además se sigue del Lema 14.2.1 que $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ es un 2-grupo pues se tienen los funtores:

$$\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \xrightarrow{(\iota^d)^{\mathcal{A}}} \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \xrightarrow{(\iota^g)^{\mathcal{A}}} \mathcal{G}^{\mathcal{A}},$$

junto con los siguientes isomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[rdd, bend left, "\otimes"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "="] & (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[rd, "\otimes^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha^{\mathcal{A}}", pos=0.6] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[ruu, bend left, "{(\mathcal{G}^{\mathcal{A}},\iota^d)}"] \arrow[ru, "{(\mathcal{G},\iota^d)^{\mathcal{A}}}"'] \arrow[rr, "\text{identidad}"] \arrow[rd, "{(\iota^g,\mathcal{G})^{\mathcal{A}}}"] \arrow[rdd, bend right, "{(\iota^g,\mathcal{G}^{\mathcal{A}})}"'] & {} & \mathcal{G}^{\mathcal{A}}. \\
{} \arrow[r, phantom, "="] & (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[ru, "\otimes^{\mathcal{A}}"'] \arrow[u, phantom, "\beta^{\mathcal{A}}\Uparrow", pos=0.6] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
& \mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[ruu, bend right, "\otimes"'] &
\end{tikzcd}$$

La asignación $(\mathcal{A},\mathcal{G})\longmapsto\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ que acabamos de definir se extiende en un 2-funtor que completa el siguiente cuadrado conmutativo:

(14.15)
$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A},\mathcal{G}) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \\
\underline{\mathbf{cat}}^{op}\times 2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\underline{\mathbf{cat}}^{op}\times\pi"'] & 2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \arrow[d, "\pi"] \\
\underline{\mathbf{cat}}^{op}\times\underline{\mathbf{cat}} \arrow[r, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{cat}}"'] & \underline{\mathbf{cat}},
\end{tikzcd}$$

donde $\pi\colon 2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}}\longrightarrow\underline{\mathbf{cat}}$ es el 2-funtor que olvida.

En efecto, si $F\colon\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A}$ es un funtor y $(\varphi,m^{\varphi})\colon\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}$ es un morfismo de 2-grupos, definimos el morfismo de 2-grupos $(\varphi^F,m^{\varphi^F})\colon\mathcal{G}^{\mathcal{A}}\longrightarrow\mathcal{H}^{\mathcal{B}}$ como el funtor $\varphi^F=\varphi\circ-\circ F$ y el isomorfismo natural:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi^F\times\varphi^F"'] \arrow[rd, phantom, "\Swarrow m^{\varphi^F}"] & \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[d, "\varphi^F"] \\
\mathcal{H}^{\mathcal{B}}\times\mathcal{H}^{\mathcal{B}} \arrow[r, "\otimes"'] & \mathcal{H}^{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}^{\mathcal{A}}\times\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[rrr, bend left, "\otimes", "="'] \arrow[dd, "\varphi^F\times\varphi^F"'] & (\mathcal{G}\times\mathcal{G})^{\mathcal{A}} \arrow[rr, "\otimes^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "(\varphi\times\varphi)^{\mathcal{A}}"] \arrow[rrd, phantom, "\Lleftarrow (m^{\varphi})^{\mathcal{A}}"] & & \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[d, "\varphi^{\mathcal{A}}"] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi^F", "="'] \\
{} \arrow[r, phantom, "="] & (\mathcal{H}\times\mathcal{H})^{\mathcal{A}} \arrow[rr, "\otimes^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "(\mathcal{H}\times\mathcal{H})^{\mathcal{F}}"] \arrow[rrd, phantom, "="] & & \mathcal{H}^{\mathcal{A}} \arrow[d, "\mathcal{H}^F"] \\
\mathcal{H}^{\mathcal{B}}\times\mathcal{H}^{\mathcal{B}} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[rrr, bend right, "\otimes"', "="] & (\mathcal{H}\times\mathcal{H})^{\mathcal{B}} \arrow[rr, "\otimes^{\mathcal{B}}"] & & \mathcal{H}^{\mathcal{B}}.
\end{tikzcd}$$

La pareja $(\varphi^F,m^{\varphi^F})$ es efectivamente un morfismo laxo y unitario de 2-grupos porque:

$$\varphi^F(\text{ funtor constante de valor } \mathbb{1}_{\mathcal{G}}\,) \;=\; \text{funtor constante de valor } \varphi\big(\mathbb{1}_{\mathcal{G}}\big)=\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

y porque se tienen los siguientes diagramas conmutativos de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\varphi\big((\mathcal{X}_{Fb}\otimes\mathcal{Y}_{Fb})\otimes\mathcal{Z}_{Fb}\big) \arrow[d, "\varphi a"'] & \varphi(\mathcal{X}_{Fb}\otimes\mathcal{Y}_{Fb})\otimes\varphi\mathcal{Z}_{Fb} \arrow[l, "m^{\varphi}"'] & (\varphi\mathcal{X}_{Fb}\otimes\varphi\mathcal{Y}_{Fb})\otimes\varphi\mathcal{Z}_{Fb} \arrow[l, "m^{\varphi}\otimes\varphi\mathcal{Z}_{Fb}"'] \arrow[d, "a"] \\
\varphi\big(\mathcal{X}_{Fb}\otimes(\mathcal{Y}_{Fb}\otimes\mathcal{Z}_{Fb})\big) & \varphi\mathcal{X}_{Fb}\otimes\varphi(\mathcal{Y}_{Fb}\otimes\mathcal{Z}_{Fb}) \arrow[l, "m^{\varphi}"] & \varphi\mathcal{X}_{Fb}\otimes(\varphi\mathcal{Y}_{Fb}\otimes\varphi\mathcal{Z}_{Fb}) \arrow[l, "\varphi\mathcal{X}_{Fb}\otimes m^{\varphi}"]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\varphi\mathcal{X}_{Fb} \arrow[dd, "m^{\varphi}_{\mathbb{1},\mathcal{X}_{Fb}}"'] & & \varphi\mathcal{X}_{Fb}\otimes\mathbb{1} \arrow[dd, "m^{\varphi}_{\mathcal{X}_{Fb},\mathbb{1}}"] \\
& \varphi\mathcal{X}_{Fb} \arrow[ul, "l_{\varphi\mathcal{X}_{Fb}}"'] \arrow[ur, "r_{\varphi\mathcal{X}_{Fb}}"] \arrow[dl, "\varphi l_{\mathcal{X}_{Fb}}"] \arrow[dr, "\varphi r_{\mathcal{X}_{Fb}}"'] & \\
\varphi(\mathbb{1}\otimes\mathcal{X}_{Fb}) & & \varphi(\mathcal{X}_{Fb}\otimes\mathbb{1})
\end{tikzcd}$$

si $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}$ son objetos de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ y b es un objeto de $\mathcal{B}$.

Observemos también que si se tienen funtores y morfismos de 2-grupos:

$$\mathcal{C}\xrightarrow{G}\mathcal{B}\xrightarrow{F}\mathcal{A} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}\xrightarrow{(\varphi,m^{\varphi})}\mathcal{H}\xrightarrow{(\psi,m^{\psi})}\mathcal{K}$$

respectivamente, entonces $\big(\psi^G, m^{\psi^G}\big)\circ\big(\varphi^F, m^{\varphi^F}\big) = \big((\psi\circ\varphi)^{F\circ G}, m^{(\psi\circ\varphi)^{F\circ G}}\big)$.

En efecto, se ve fácilmente que $(\psi\circ\varphi)^{F\circ G} = \psi^G\circ\varphi^F$ y que tenemos un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\psi\circ\varphi)^{F\circ G}(\mathcal{X})\otimes(\psi\circ\varphi)^{F\circ G}(\mathcal{Y}) \arrow[rr, "m^{(\psi\circ\varphi)^{F\circ G}}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}"] \arrow[dr, "m^{\psi^G}_{\varphi^F\mathcal{X},\varphi^F\mathcal{Y}}"'] & & (\psi\circ\varphi)^{F\circ G}(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}) \\
& \psi^G\big(\varphi^F(\mathcal{X})\otimes\varphi^F(\mathcal{Y})\big) \arrow[ur, "\psi^G(m^{\varphi^F}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}})"'] &
\end{tikzcd}$$

para $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ objetos de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$; pues si c es un objeto de $\mathcal{C}$ se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\psi\circ\varphi)(\mathcal{X}_{FGc})\otimes(\psi\circ\varphi)(\mathcal{Y}_{FGc}) \arrow[rr, "m^{(\psi\circ\varphi)}_{\mathcal{X}_{FGc},\mathcal{Y}_{FGc}}"] \arrow[dr, "m^{\psi}_{\varphi\mathcal{X}_{FGc},\varphi\mathcal{Y}_{FGc}}"'] & & (\psi\circ\varphi)(\mathcal{X}_{FGc}\otimes\mathcal{Y}_{FGc}) \\
& \psi\big(\varphi(\mathcal{X}_{FGc})\otimes\varphi(\mathcal{Y}_{FGc})\big) \arrow[ur, "\psi(m^{\varphi}_{\mathcal{X}_{FGc},\mathcal{Y}_{FGc}})"'] &
\end{tikzcd}$$

Finalmente consideremos una transformación natural entre funtores de categorías pequeñas y una transformación entre morfismos de 2-grupos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, bend left, "(\varphi,m^{\varphi})"] \arrow[r, bend right, "(\psi,m^{\psi})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{H}
\end{tikzcd},$$

respectivamente; definimos la transformación $\begin{tikzcd} \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "(\varphi^F{,}m^{\varphi^F})"] \arrow[r, bend right, "(\psi^G{,}m^{\psi^G})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta^{\alpha}"] & \mathcal{G}^{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$ como la siguiente composición horizontal:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "\varphi^{\mathcal{A}}"] \arrow[r, bend right, "\psi^{\mathcal{A}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta^{\mathcal{A}}"] & \mathcal{H}^{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{H}^F"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{H}^G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathcal{H}^{\alpha}"] & \mathcal{H}^{\mathcal{B}} & = & \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{G}^F"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}^G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathcal{G}^{\alpha}"] & \mathcal{G}^{\mathcal{B}} \arrow[r, bend left, "\varphi^{\mathcal{B}}"] \arrow[r, bend right, "\psi^{\mathcal{B}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta^{\mathcal{B}}"] & \mathcal{H}^{\mathcal{B}}.
\end{tikzcd}$$

Se verifica que si $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son objetos de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
\varphi^F\mathcal{X}\otimes\varphi^F\mathcal{Y} \arrow[r, "\eta^{\alpha}_{\mathcal{X}}\otimes\eta^{\alpha}_{\mathcal{Y}}"] \arrow[d, "m^{\varphi^F}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}"'] & \psi^G\mathcal{X}\otimes\psi^G\mathcal{Y} \arrow[d, "m^{\psi^G}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}"] \\
\varphi^F(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}) \arrow[r, "\eta^{\alpha}_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}"'] & \psi^G(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de $\mathcal{H}^{\mathcal{B}}$ de la siguiente manera: Si a es cualquier objeto de $\mathcal{A}$, descomponemos al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varphi\mathcal{X}_{Fa}\otimes\varphi\mathcal{Y}_{Fa} \arrow[r, "(\eta^{\alpha}_{\mathcal{X}})_a\otimes(\eta^{\alpha}_{\mathcal{Y}})_a"] \arrow[d, "m^{\varphi}_{\mathcal{X}_{Fa},\mathcal{Y}_{Fa}}"'] & \psi\mathcal{X}_{Ga}\otimes\psi\mathcal{Y}_{Ga} \arrow[d, "m^{\psi}_{\mathcal{X}_{Ga},\mathcal{Y}_{Ga}}"] \\
\varphi(\mathcal{X}_{Fa}\otimes\mathcal{Y}_{Fa}) \arrow[r, "(\eta^{\alpha}_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}})_a"'] & \psi(\mathcal{X}_{Ga}\otimes\mathcal{Y}_{Ga})
\end{tikzcd}$$

de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\varphi(\mathcal{X}_{Fa})\otimes\varphi(\mathcal{Y}_{Fa}) \arrow[rrrr, "(\eta^{\alpha}_{\mathcal{X}})_a\otimes(\eta^{\alpha}_{\mathcal{Y}})_a"] \arrow[rrdd, "\varphi(\mathcal{X}_{\alpha})\otimes\varphi(\mathcal{Y}_{\alpha})"] \arrow[dddddd, "m^{\varphi}_{\mathcal{X}_{Fa},\mathcal{Y}_{Fa}}"'] & & & & \psi(\mathcal{X}_{Ga})\otimes\psi(\mathcal{X}_{Ga}) \arrow[dddddd, "m^{\psi}_{\mathcal{X}_{Ga},\mathcal{Y}_{Ga}}"] \\
& & \text{(I)} & & \\
& & \varphi(\mathcal{X}_{Ga})\otimes\varphi(\mathcal{Y}_{Ga}) \arrow[rruu, "\eta_{\mathcal{X}_{Ga}}\otimes\eta_{\mathcal{Y}_{Ga}}"] \arrow[dd, "m^{\varphi}_{\mathcal{X}_{Ga},\mathcal{Y}_{Ga}}"] & & \\
& \text{(III)} & & \text{(IV)} & \\
& & \varphi(\mathcal{X}_{Ga}\otimes\mathcal{Y}_{Ga}) \arrow[rrdd, "\eta_{\mathcal{X}_{Ga}\otimes\mathcal{Y}_{Ga}}"] & & \\
& & \text{(II)} & & \\
\varphi(\mathcal{X}_{Fa}\otimes\mathcal{Y}_{Fa}) \arrow[rruu, "\varphi(\mathcal{X}_{\alpha}\otimes\mathcal{Y}_{\alpha})"] \arrow[rrrr, "(\eta^{\alpha}_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}})_a"'] & & & & \psi(\mathcal{X}_{Ga}\otimes\mathcal{Y}_{Ga})
\end{tikzcd}$$

Después notamos que (I) y (II) son diagramas conmutativos por la definición de η^{α}, (III) es conmutativo porque m^{φ} es una transformación natural de funtores y (IV) conmuta ya que η es una transformación de morfismos de 2-grupos.

§14.3.1. Escribimos $\underline{\Delta}$ para denotar a la sub-2-categoría plena de $\underline{\mathbf{cat}}$ cuyos objeto son las categorías $[n] = \{0 < \cdots < n\}$ para $n \geq 0$. Dicho de otro modo, $\underline{\Delta}$ es la 2-categoría cuya categoría subyacente es la categoría de los simplejos Δ y donde existe una única 2-flecha

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & {[m]} \end{tikzcd}$$

si y solamente si $\varphi(i) \leq \psi(i)$ para toda $0 \leq i \leq n$.

Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, consideremos el 2-funtor inducido del 2-funtor (14.15):

$$\begin{tikzcd} \underline{\Delta}^{op} \arrow[r, "\mathcal{G}^{\bullet}"] & 2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \, . \\ {[n]} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathcal{G}^{[n]} \end{tikzcd} \tag{14.16}$$

Mostremos que el objeto simplicial $\mathcal{G}^{[\bullet]}\colon \Delta^{op} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Grp}$ subyacente al 2-funtor (14.16) es una “resolución simplicial” del 2-grupo $\mathcal{G}$. Más precisamente:

LEMA 14.3.1. *Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo y $\varphi\colon [n] \longrightarrow [m]$ es cualquier morfismo de la categoría de los simplejos Δ, el morfismo inducido $\varphi^\star\colon \mathcal{G}^{[m]} \longrightarrow \mathcal{G}^{[n]}$ es una equivalencia débil de 2-grupos (ver el Lema 14.2.3).*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que todo morfismo $\varphi\colon [n] \longrightarrow [m]$ de la categoría Δ es igual a una composición de la forma $\varphi = \delta_{j_{m-n+k}} \circ \cdots \circ \delta_{j_1} \circ \sigma_{i_k} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1}$ donde δ_j y σ_i denotan a los morfismos cara y degenerados. En particular, es suficiente verificar que para todo $0 \leq i \leq k$ y $0 \leq j \leq k+1$ los morfismos

$$\begin{tikzcd} {[k]} \arrow[r, shift left, "\delta_j"] & {[k+1]} \arrow[l, shift left, "\sigma_i"] \end{tikzcd}$$

inducen equivalencias débiles de 2-grupos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}^{[k+1]} \arrow[r, shift left, "\delta_j^\star"] & \mathcal{G}^{[k]} \arrow[l, shift left, "\sigma_i^\star"] \end{tikzcd}.$$

Observemos que si $0 \leq i \leq k$ entonces se tiene la igualdad $\sigma_i \circ \delta_i = \mathrm{id}_{[k]}$. Por otro lado, hay una 2-flecha $\mathrm{id}_{[k+1]} \Rightarrow \delta_i \circ \sigma_i$ de la 2-categoría $\underline{\Delta}$ para $0 \leq i \leq k$, ya que $a \leq \delta_i \circ \sigma_i(a)$ si $0 \leq a \leq n+1$; en efecto notemos que:

$$\delta_i \circ \sigma_i(a) = \begin{cases} a & a \neq i \\ a+1 & a = i\,. \end{cases}$$

Se deduce que $\delta_i^\star \circ \sigma_i^\star = \mathrm{id}_{\mathcal{G}^{[k]}}$ y que existe una 2-flecha $\mathrm{id}_{\mathcal{G}^{[k+1]}} \Rightarrow \sigma_i^\star \circ \delta_i^\star$ de la 2-categoría 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$. Por lo tanto, de la propiedad (III) del Lema 14.2.3 se sigue que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}^{[k+1]} \arrow[r, shift left, "\delta_j^\star"] & \mathcal{G}^{[k]} \arrow[l, shift left, "\sigma_i^\star"] \end{tikzcd}$$

son equivalencias débiles de 2-grupos si $0 \leq i, j \leq k$.

Finalmente, para mostrar que $\mathcal{G}^{[k+1]} \xrightarrow{\delta_{k+1}^\star} \mathcal{G}^{[k]}$ es una equivalencia débil de 2-grupos, se observa de la misma forma que $\sigma_k \circ \delta_{k+1} = \mathrm{id}_{[k]}$ y que hay una 2-flecha

$\delta_{k+1}\circ\sigma_k \Rightarrow \mathrm{id}_{[k+1]}$ de la 2-categoría $\underline{\Delta}$ ya que:

$$\delta_{k+1}\circ\sigma_k(a) = \begin{cases} a & 0 \le a \le k \\ a-1 & a = k+1\,. \end{cases}$$

□

15. El nervio de los 2-grupos

En esta sección recordamos la definición y las propiedades principales de los funtores nervio de un 2-grupo definidos en [**Dus02**] y [**LP08**]. El resultado principal de este trabajo es el Teorema 15.2.2 donde demostramos que el nervio de [**LP08**] de un 2-grupo es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_2^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{diag})$ de la Proposición 11.3.1.

En los Corolarios 15.1.3, 15.2.5, 15.2.6 y 15.2.7 mostramos que los funtores nervio son fielmente plenos. Por último, recordamos que estos funtores inducen una equivalencia entre la categoría homotópica de los 2-grupos y la categoría homotópica de los 2-tipos punteados conexos.

§15.1. Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal y $q \ge 0$ es un entero, un *q-simplejo de $\mathcal{M}$* es por definición una pareja (X,α) donde X es un conjunto de objetos de $\mathcal{M}$:

$$X = \Big\{ X_{ij} \,\Big|\, 0 \le i < j \le q \Big\}$$

y α es un conjunto de morfismos de $\mathcal{M}$:

$$\alpha = \Big\{ \alpha_{ijk}\colon\ X_{ij}\otimes X_{jk} \longrightarrow X_{ik} \ \Big|\, 0 \le i < j < k \le q \Big\};$$

tales que si $0 \le i < j < k < l \le q$ tenemos un diagrama conmutativo:

(15.1)
$$\begin{tikzcd}
X_{il} & & X_{ij}\otimes X_{jl} \arrow[ll, "\alpha_{ijl}"'] \\
 & & X_{ij}\otimes\big(X_{jk}\otimes X_{kl}\big) \arrow[u, "X_{ij}\otimes\alpha_{jkl}"'] \\
X_{ik}\otimes X_{kl} \arrow[uu, "\alpha_{ikl}"] & & \big(X_{ij}\otimes X_{jk}\big)\otimes X_{kl}\,. \arrow[ll, "\alpha_{ijk}\otimes X_{kl}"] \arrow[u, phantom, "\overset{a}{\cong}" description]
\end{tikzcd}$$

Escribimos $\mathcal{M}_q$ para denotar al conjunto de los q-simplejos de $\mathcal{M}$. Definimos un funtor:

(15.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{cat}^{\otimes}_{lax,\star}\times\Delta^{op} \arrow[r] & \mathbf{Set} \\
\big(\mathcal{M},[q]\big) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{M}_q
\end{tikzcd}$$

como sigue: Si $\varphi\colon\ [q] \longrightarrow [q']$ es un morfismo de Δ, la función inducida:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{q'} \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathcal{M}_q \\
(X, \alpha) \arrow[r, mapsto] & (Y, \beta)
\end{tikzcd}$$

es dada por las reglas:

$$Y_{ij} = \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathcal{G}} & \text{si} \quad \varphi i = \varphi j \\ X_{\varphi i \varphi j} & \text{si} \quad \varphi i < \varphi j \end{cases} \tag{15.3}$$

siempre que $0 \leq i < j \leq q$ y:

$$\beta_{ijk} = \begin{cases} \ell^{-1}_{X_{\varphi i \varphi k}}\colon\ \mathbb{1} \otimes X_{\varphi i \varphi k} \longrightarrow X_{\varphi i \varphi k} & \text{si} \quad \varphi i = \varphi j \leq \varphi k \\ r^{-1}_{X_{\varphi i \varphi k}}\colon\ X_{\varphi i \varphi k} \otimes \mathbb{1} \longrightarrow X_{\varphi i \varphi k} & \text{si} \quad \varphi i \leq \varphi j = \varphi k \\ \alpha_{\varphi i \varphi j \varphi k}\colon\ X_{\varphi i \varphi j} \otimes X_{\varphi j \varphi k} \longrightarrow X_{\varphi i \varphi k} & \text{si} \quad \varphi i < \varphi j < \varphi k \end{cases} \tag{15.4}$$

para $0 \leq i < j < k \leq q'$.

Debemos mostrar que la pareja (Y, β) definida de esta forma es un q-simplejo de $\mathcal{M}$, es decir debemos mostrar que con las definiciones (15.3) y (15.4) se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y_{il} & & Y_{ij} \otimes Y_{jl} \arrow[ll, "\beta_{ijl}"'] \\
 & & Y_{ij} \otimes \big(Y_{jk} \otimes Y_{kl}\big) \arrow[u, "Y_{ij} \otimes \beta_{jkl}"'] \\
Y_{ik} \otimes Y_{kl} \arrow[uu, "\beta_{ikl}"] & & \big(Y_{ij} \otimes Y_{jk}\big) \otimes Y_{kl} \arrow[ll, "\beta_{ijk} \otimes Y_{kl}"] \arrow[u, phantom, "a \wr\|"]
\end{tikzcd} \tag{15.5}$$

siempre que $0 \leq i < j < k < l \leq q$.

Consideramos varios casos: En el caso donde $0 \leq \varphi i < \varphi j < \varphi k < \varphi l \leq q$ el diagrama (15.5) es un diagrama de la forma (15.1); por lo que es conmutativo. Si por otro lado $0 \leq \varphi i = \varphi j < \varphi k < \varphi l \leq q$ entonces el diagrama (15.5) se convierte en:

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi i \varphi l} & & \mathbb{1} \otimes X_{\varphi j \varphi l} \arrow[ll, "\ell^{-1}_X"'] \\
 & & \mathbb{1} \otimes \big(X_{\varphi i \varphi k} \otimes X_{\varphi k \varphi l}\big) \arrow[u, "\mathbb{1} \otimes \alpha_{\varphi i \varphi k \varphi l}"'] \arrow[dll, dashed, "\ell^{-1}_{X \otimes X}"'] \\
X_{\varphi i \varphi k} \otimes X_{\varphi k \varphi l} \arrow[uu, "\alpha_{\varphi i \varphi k \varphi l}"] & & \big(\mathbb{1} \otimes X_{\varphi j \varphi k}\big) \otimes X_{\varphi k \varphi l} \arrow[ll, "\ell^{-1}_X \otimes X_{\varphi k \varphi l}"] \arrow[u, phantom, "a \wr\|"]
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo por la naturalidad de ℓ y por el Lema 14.1.1.

Si $0 \leq \varphi i < \varphi j = \varphi k < \varphi l \leq q$ se sigue de (14.3) que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi i\varphi l} & X_{\varphi i\varphi j}\otimes X_{\varphi j\varphi l} \arrow[l, "\alpha_{\varphi i\varphi j\varphi l}"'] \\
 & X_{\varphi i\varphi j}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes X_{\varphi j\varphi l}\big) \arrow[u, "X_{\varphi i\varphi j}\otimes\ell_X^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
X_{\varphi i\varphi j}\otimes X_{\varphi j\varphi l} \arrow[uu, "\alpha_{\varphi i\varphi j\varphi l}"] \arrow[uur, equal] & \big(X_{\varphi i\varphi j}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes X_{\varphi j\varphi l}\,; \arrow[l, "r_X^{-1}\otimes X_{\varphi j\varphi l}"]
\end{tikzcd}$$

y si $0 \leq \varphi i < \varphi j < \varphi k = \varphi l \leq q$ se sigue de la naturalidad de r y del Lema 14.1.1, que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi i\varphi k} & X_{\varphi i\varphi j}\otimes X_{\varphi j\varphi k} \arrow[l, "\alpha_{\varphi i\varphi j\varphi k}"'] \\
 & X_{\varphi i\varphi j}\otimes\big(X_{\varphi j\varphi k}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "X_{\varphi i\varphi j}\otimes r_X^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
X_{\varphi i\varphi k}\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "r_X^{-1}"] & \big(X_{\varphi i\varphi j}\otimes X_{\varphi j\varphi k}\big)\otimes\mathbb{1}\,. \arrow[l, "\alpha_{\varphi i\varphi j\varphi k}\otimes\mathbb{1}"] \arrow[uu, dashed, bend left, "r^{-1}_{X_{\varphi i\varphi j}\otimes X_{\varphi j\varphi k}}"]
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, si $0 \leq \varphi i = \varphi j = \varphi k < \varphi l \leq q$, $0 \leq \varphi i < \varphi j = \varphi k = \varphi l \leq q$ o si $0 \leq \varphi i = \varphi j = \varphi k = \varphi l \leq q$ el diagrama (15.5) toma las siguientes formas:

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi i\varphi l} & \mathbb{1}\otimes X_{\varphi i\varphi l} \arrow[l, "\ell_X^{-1}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes X_{\varphi i\varphi l}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\ell_X^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
\mathbb{1}\otimes X_{\varphi i\varphi l} \arrow[uu, "\ell_X^{-1}"] \arrow[uur, equal] & \big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes X_{\varphi i\varphi l}\,, \arrow[l, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes X_{\varphi i\varphi l}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi i\varphi j} & X_{\varphi i\varphi j}\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "r_X^{-1}"'] \\
 & X_{\varphi i\varphi j}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "X_{\varphi i\varphi j}\otimes\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
X_{\varphi i\varphi j}\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "r_X^{-1}"] \arrow[uur, equal] & \big(X_{\varphi i\varphi j}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "r_X^{-1}\otimes\mathbb{1}"]
\end{tikzcd}$$

ó

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"] \arrow[uur, equal] & \big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1}\,, \arrow[l, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes\mathbb{1}"]
\end{tikzcd}$$

respectivamente; por lo que son conmutativos de acuerdo al Lema 14.1.1.

Supongamos ahora que $(F, m^F)\colon\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ es un morfismo laxo y unitario entre categorías monoidales y $q \geq 0$. Definimos la función:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_q \arrow[r, "(F{,}m^F)_q"] & \mathcal{M}'_q \\
(X,\alpha) \arrow[r, mapsto] & (Y,\beta)
\end{tikzcd}$$

por las reglas: $Y_{ij} = F(X_{ij})$ si $0 \leq i < j \leq q$ y β_{ijk} es la composición:

$$\beta_{ijk} = \left(Y_{ij} \otimes Y_{jk} = F(X_{ij}) \otimes F(X_{jk}) \xrightarrow{m^F_{X_{ij},X_{jk}}} F(X_{ij} \otimes X_{jk}) \xrightarrow{F(\alpha_{ijk})} F(X_{ik}) = Y_{ik} \right)$$

si $0 \leq i < j < k \leq q$.

Se muestra sin dificultad que la pareja definida de esta forma (Y, β) es en efecto un q-simplejo de $\mathcal{M}'$.

El funtor adjunto del funtor (15.2) que acabamos de definir es llamado el *funtor nervio* (*geométrico*) de las categorías monoidales:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{cat}^{\otimes}_{lax,\star} \arrow[r, "\mathcal{N}(\,\cdot\,)"] & \mathbf{sSet}\,; \\ \mathcal{M} \arrow[r, mapsto] & \mathcal{M}_{\bullet} \end{tikzcd} \tag{15.6}$$

si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal llamamos la conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{M})$ *el nervio de* $\mathcal{M}$ (ver [**Dus02**]).

LEMA 15.1.1. *El nervio $\mathcal{N}(\mathcal{M})$ de una categoría monoidal $\mathcal{M}$ es un conjunto simplicial débilmente 2-coesquelético (ver §12.2).*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a deducir esta afirmación del siguiente enunciado:

LEMA 15.1.2. *Si $q \geq 2$ y $0 \leq n \leq q$, la función:*

$$\begin{tikzcd} \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \;\middle|\; 0 \leq x_0 < \dots < x_n \leq q+1 \right\} \\ \left\{ (i_0, \dots, i_n; s) \in \mathbb{N}^{n+2} \;\middle|\; 0 \leq i_0 < \dots < i_n \leq q \quad y \quad 0 \leq s \leq q+1 \right\} \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

definida como $\varphi(i_0, \dots, i_n; s) = (\delta_s i_0, \dots, \delta_s i_n)$ es el conúcleo de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd} \left\{ (i_0, \dots, i_n; s) \in \mathbb{N}^{n+2} \;\middle|\; 0 \leq i_0 < \dots < i_n \leq q \quad y \quad 0 \leq s \leq q+1 \right\} \\ \left\{ (a_0, \dots, a_n; s, s') \in \mathbb{N}^{n+3} \;\middle|\; 0 \leq a_0 < \dots < a_n \leq q-1 \quad y \quad 0 \leq s < s' \leq q+1 \right\} \arrow[u, shift left, "\varphi_1"] \arrow[u, shift right, "\varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

donde:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(a_0, \dots, a_n; s, s') = (\delta_s a_0, \dots, \delta_s a_n; s') \\ y \qquad &\varphi_2(a_0, \dots, a_n; s, s') = (\delta_{s'-1} a_0, \dots, \delta_{s'-1} a_n; s)\,. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $0 \leq x_0 < \cdots < x_n \leq q+1$ son enteros naturales, ya que por hipótesis $0 \leq n \leq q$ existe un entero $0 \leq s \leq q+1$ con una de las siguientes propiedades:

- $x_k < s < x_{k+1}$ para alguna $0 \leq k \leq n$.
- $x_n < s \leq q+1$.
- $0 \leq s < x_0$.

En cada uno de estos casos tenemos:

- $\varphi(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1} - 1, \ldots, x_n - 1; s) = (x_0, \ldots, x_n)$ donde $0 \leq x_0 < \cdots < x_k < x_{k+1} - 1 < \cdots < x_n - 1 \leq q$,
- $\varphi(x_0, \ldots, x_n; s) = (x_0, \ldots, x_n)$ donde $0 \leq x_0 < \cdots < x_n \leq q$
- $\varphi(x_0, \ldots, x_n; s) = (x_0 - 1, \ldots, x_n - 1)$ donde $0 \leq x_0 - 1 < \cdots < x_n - 1 \leq q$,

respectivamente. Por lo tanto φ es una función sobreyectiva.

Por otro lado como $\delta_{s'} \circ \delta_s = \delta_s \circ \delta_{s'-1}$ si $0 \leq s < s' \leq q+1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \varphi_1(a_0, \ldots, a_n; s, s') &= \varphi\big(\delta_s a_0, \ldots, \delta_s a_n; s'\big) \\
&= \big(\delta_{s'} \circ \delta_s a_0, \ldots, \delta_{s'} \circ \delta_s a_n\big) \\
&= \big(\delta_s \circ \delta_{s'-1} a_0, \ldots, \delta_s \circ \delta_{s'-1} a_n\big) \\
&= \varphi\big(\delta_{s'-1} a_0, \ldots, \delta_{s'-1} a_n; s\big) \\
&= \varphi \circ \varphi_2(a_0, \ldots, a_n; s, s'),
\end{aligned}$$

siempre que $0 \leq a_0 < \cdots < a_n \leq q-1$.

Vamos a mostrar que si $\varphi(i_0, \ldots, i_n; s) = \varphi(i'_0, \ldots, i'_n; s')$ donde $(i_0, \ldots, i_n; s) \neq (i'_0, \ldots, i'_n; s')$ y $s \leq s'$, entonces $s \neq s'$ y existen $0 \leq a_0 < \cdots < a_n \leq q-1$ tales que:

$$\varphi_1(a_0, \ldots, a_n; s, s') = (i_0, \ldots, i_n; s) \qquad \text{y} \qquad \varphi_2(a_0, \ldots, a_n; s, s') = (i'_0, \ldots, i'_n; s').$$

En efecto, supongamos que $\varphi(i_0, \ldots, i_n; s) = \varphi(i'_0, \ldots, i'_n; s')$ donde $s \leq s'$. Se sigue de la definición de la función φ que:

$$0 \leq \delta_s(i_0) = \delta_{s'}(i'_0) < \ldots < \delta_s(i_n) = \delta_{s'}(i'_n) \leq q+1.$$

Si $s = s'$ tenemos que $\delta_s(i_k) = \delta_s(i'_k)$ para toda $0 \leq k \leq n$; por lo que $(i_0, \ldots, i_n; s) = (i'_0, \ldots, i'_n; s')$ ya que δ_s es una función inyectiva.

Si $s < s'$ se tienen dos casos:

Primer caso: Supongamos que ninguno de los enteros $\delta_s(i_0) = \delta_{s'}(i'_0), \cdots, \delta_s(i_n) = \delta_{s'}(i'_n)$ está entre s y s'; es decir $\delta_s(i_k) = \delta_{s'}(i'_k) < s < s' < \delta_s(i_{k+1}) = \delta_{s'}(i'_{k+1})$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} \delta_s(i_0) & = & i_0 \\ & \vdots & \\ \delta_s(i_k) & = & i_k \\ \delta_s(i_{k+1}) & = & i_{k+1}+1 \\ & \vdots & \\ \delta_s(i_n) & = & i_n+1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} \delta_{s'}(i'_0) & = & i'_0 \\ & \vdots & \\ \delta_s(i'_k) & = & i'_k \\ \delta_{s'}(i'_{k+1}) & = & i'_{k+1}+1 \\ & \vdots & \\ \delta_{s'}(i'_n) & = & i'_n+1\,; \end{array}$$

por lo que $i_0 = i'_0$, $i_1 = i'_1$, $\ldots$, $i_n = i'_n$ y $i_k < s < s' \leq i_{k+1}$.

Se deduce que los entero $i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}-1, \ldots, i_n-1$ verifican:

$$0 \leq i_0 < \cdots < i_k < i_{k+1}-1 < \cdots < i_n - 1 \leq q-1$$

y además:

$$\begin{aligned} \varphi_1(i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}-1, \ldots, i_n-1; s, s') &= \big(\delta_s i_0, \ldots, \delta_s i_k, \delta_s(i_{k+1}-1), \ldots, \delta_s(i_n-1); s'\big) \\ &= (i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n; s') \;=\; (i'_0, \ldots, i'_n; s') \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2(i_0, \ldots, i_k, i_{k+1}-1, \ldots, i_n-1; s, s') &= \big(\delta_{s'-1} i_0, \ldots, \delta_{s'-1} i_k, \delta_{s'-1}(i_{k+1}-1), \ldots, \delta_{s'-1}(i_n-1); s\big) \\ &= (i_0, , \ldots, i_n; s) \end{aligned}$$

pues $i_k < s \leq s'-1 \leq i_{k+1}-1$.

Segundo caso: Supongamos que:

$$\delta_s(i_k) = \delta_{s'}(i'_k) < s < \delta_s(i_{k+1}) = \delta_{s'}(i'_{k+1}) < \cdots < \delta_s(i_l) = \delta_{s'}(i'_l) < s' < \delta_s(i_{l+1}) = \delta_{s'}(i'_{l+1})\,,$$

entonces definimos:

$$\begin{array}{rcl} \delta_s(i_0) & = & i_0 \\ & \vdots & \\ \delta_s(i_k) & = & i_k \\ \delta_s(i_{k+1}) & = & i_{k+1}+1 \\ & \vdots & \\ \delta_s(i_l) & = & i_l+1 \\ \delta_s(i_{k+1}) & = & i_{l+1}+1 \\ & \vdots & \\ \delta_s(i_n) & = & i_n+1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} \delta_{s'}(i'_0) & = & i'_0 \\ & \vdots & \\ \delta_{s'}(i'_k) & = & i'_k \\ \delta_{s'}(i'_{k+1}) & = & i'_{k+1} \\ & \vdots & \\ \delta_{s'}(i'_l) & = & i'_l \\ \delta_{s'}(i'_{l+1}) & = & i'_{l+1}+1 \\ & \vdots & \\ \delta_{s'}(i'_n) & = & i'_n+1\,; \end{array}$$

por lo tanto:

$$i_0 = i'_0 < \cdots < i_k = i'_k < s < i_{k+1} + 1 = i'_{k+1} < \cdots < i_l + 1 = i'_l < s' < i_{l+1} + 1 = i'_{l+1} + 1 < \cdots < i_n + 1 = i'_n + 1 \,.$$

En particular:

$$\begin{aligned} & 0 \le i'_0 < \cdots < i'_k < s \le i'_{k+1} - 1 < \cdots < i'_n - 1 \le q - 1 \\ \text{y} \qquad & 0 \le i_0 < \cdots < i_l < s' - 1 \le i_{l+1} - 1 < \cdots < i_n - 1 \le q - 1 \,; \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \varphi_1\,(i'_0, \ldots, i'_k, i'_{k+1} - 1, \ldots, i'_n - 1; s, s') &= \big(\delta_s(i'_0), \ldots, \delta_s(i'_k), \delta_s(i'_{k+1} - 1), \ldots, \delta_s(i'_n - 1); s'\big) \\ &= \big(i'_0, \ldots, i'_k, i'_{k+1}, \ldots, i'_n; s'\big) \qquad \text{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2\,(i'_0, \ldots, i'_k, i'_{k+1} - 1, \ldots, i'_n - 1; s, s') &= \varphi_2(i_0, \ldots, i_l, i_{l+1} - 1, \ldots, i_n - 1; s, s') \\ &= \big(\delta_{s'-1}(i_0), \ldots, \delta_{s'-1}(i_l), \delta_{s'-1}(i_{l+1} - 1), \ldots, \delta_{s'-1}(i_n - 1); s\big) \\ &= \big(i_0, \ldots, i_l, i_{l+1}, \ldots, i_n; s\big) \,. \end{aligned}$$

□

Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal, queremos deducir del Lema 15.1.2 que el conjunto simplicial $\mathcal{N}\big(\mathcal{M}\big)$ es 3-coesquelético, es decir que si $q \ge 3$ la función:

$$\mathcal{M}_{q+1} \xrightarrow{\prod_s \delta_s} \prod_{0 \le s \le q+1} \mathcal{M}_q$$

es el núcleo en **Set** de las flechas paralelas:

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{0 \le s \le q+1} \mathcal{M}_q \arrow[r, shift left, "\prod\limits_{s<s'} \delta^*_s \circ \mathrm{proj}_{s'}"] \arrow[r, shift right, "\prod\limits_{s<s'} \delta^*_{s'-1} \circ \mathrm{proj}_s"'] & \prod\limits_{0 \le s < s' \le q+1} \mathcal{M}_{q-1} \end{tikzcd} \,.$$

De manera explícita, si nos damos una familia de objetos de $\mathcal{M}$:

$$\Big\{ X^s_{ij} \,\Big|\, 0 \le i < j \le q \,, \quad 0 \le s \le q+1 \Big\}$$

y una familia de morfismos de $\mathcal{M}$:

$$\Big\{ \alpha^s_{ijk} \colon\ X^s_{ij} \otimes X^s_{jk} \longrightarrow X^s_{ik} \ \Big|\, 0 \le i < j < k \le q \,, \quad 0 \le s \le q+1 \Big\};$$

tales que:

(i) Si $0 \le i < j < k < l \le q$ y $0 \le s \le q+1$ se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X^s_{il} & & X^s_{ij} \otimes X^s_{jl} \arrow[ll, "\alpha^s_{ijl}"'] \\
 & & X^s_{ij} \otimes \left(X^s_{jk} \otimes X^s_{kl}\right) \arrow[u, "X^s_{ij}\otimes\alpha^s_{jkl}"'] \\
X^s_{ik} \otimes X^s_{kl} \arrow[uu, "\alpha^s_{ikl}"] & & \left(X^s_{ij} \otimes X^s_{jk}\right) \otimes X^s_{kl}\,, \arrow[ll, "\alpha^s_{ijk}\otimes X^s_{kl}"] \arrow[u, phantom, "a\wr\|" description]
\end{tikzcd} \tag{15.7}$$

(ii) Si $0 \le s < s' \le q+1$ se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned}
X^{s'}_{\delta_s a \delta_s b} &= X^s_{\delta_{s'-1} a\, \delta_{s'-1} b} && \text{si} \quad 0 \le a < b \le q-1 \\
\alpha^{s'}_{\delta_s a\, \delta_s b\, \delta_s c} &= \alpha^s_{\delta_{s'-1} a\, \delta_{s'-1} b\, \delta_{s'-1} c} && \text{si} \quad 0 \le a < b < c \le q-1\,;
\end{aligned}$$

mostremos que existe un único conjunto de objetos $\mathcal{M}$:

$$\left\{ Y_{xy} \,\middle|\, 0 \le x < y \le q+1 \right\}$$

y un único conjunto de morfismos de $\mathcal{M}$:

$$\left\{ \beta_{xyz}\colon\ Y_{xy} \otimes Y_{yz} \longrightarrow Y_{xz} \ \middle|\ 0 \le x < y < z \le q+1 \right\};$$

tales que:

(i) $X^s_{ij} = Y_{\delta_s i\, \delta_s j}$ si $0 \le i < j \le q$ y $0 \le s \le q+1$.

(ii) $\alpha^s_{ijk} = \beta_{\delta_s i\, \delta_s j\, \delta_s k}$ si $0 \le i < j < k \le q$ y $0 \le s \le q+1$

(iii) El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Y_{xw} & & Y_{xy} \otimes Y_{yw} \arrow[ll, "\beta_{xyw}"'] \\
 & & Y_{xy} \otimes \left(Y_{yz} \otimes Y_{zw}\right) \arrow[u, "Y_{xy}\otimes\beta_{yzw}"'] \\
Y_{xz} \otimes Y_{zw} \arrow[uu, "\beta_{xzw}"] & & \left(Y_{xy} \otimes Y_{yz}\right) \otimes Y_{zw} \arrow[ll, "\beta_{xyz}\otimes Y_{zw}"] \arrow[u, phantom, "a\wr\|" description]
\end{tikzcd} \tag{15.8}$$

si $0 \le x < y < z < w \le q+1$.

Ya que por hipótesis $q \ge 3 > 2$, y para $0 \le s < s' \le q+1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
& X^{s'}_{\delta_s a\, \delta_s b} = X^s_{\delta_{s'-1} a\, \delta_{s'-1} b} && \text{si} \quad 0 \le a < b \le q-1 \\
\text{y} \qquad & \alpha^{s'}_{\delta_s a\, \delta_s b\, \delta_s c} = \alpha^s_{\delta_{s'-1} a\, \delta_{s'-1} b\, \delta_{s'-1} c} && \text{si} \quad 0 \le a < b < c \le q-1\,;
\end{aligned}$$

se sigue del Lema 15.1.2 (para $n = 1$ y $n = 2$) que existe un único conjunto de objetos de $\mathcal{M}$:

$$\left\{ Y_{xy} \,\middle|\, 0 \le x < y \le q+1 \right\}$$

y un único conjunto de morfismos de $\mathcal{M}$:

$$\Big\{\beta_{xyz}\colon\ Y_{xy} \otimes Y_{yz} \longrightarrow Y_{xz} \ \Big|\, 0 \leq x < y < z \leq q+1\Big\};$$

tales que:

- $X_{ij}^{s} = Y_{\delta_s i\,\delta_s j}$ si $0 \leq i < j \leq q$ y $0 \leq s \leq q+1$.
- $\alpha_{ijk}^{s} = \beta_{\delta_s i\,\delta_s j\,\delta_s k}$ si $0 \leq i < j < k \leq q$ y $0 \leq s \leq q+1$

Para mostrar que (15.8) es un diagrama conmutativo si $0 \leq x < y < z < w \leq q+1$, notemos que dados $0 \leq x < y < z < w \leq q+1$ se sigue del Lema 15.1.2 (para $n = 3$) que existen $0 \leq s \leq q+1$ y $0 \leq i < j < k < l \leq q$ tales que $\delta_s i = x$, $\delta_s j = y$, $\delta_s k = z$ y $\delta_s k = w$. En particular (15.8) es conmutativo, pues es igual al diagrama conmutativo (15.7).

Por lo tanto, $\mathcal{N}\big(\mathcal{M}\big)$ es un conjunto simplicial 3-coesquelético.

Finalmente observemos que $\mathcal{N}\big(\mathcal{M}\big)$ es un conjunto simplicial débilmente 2-coesquelético, es decir notemos que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^3, \mathcal{N}\big(\mathcal{M}\big)\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\partial\Delta^3, \mathcal{N}\big(\mathcal{M}\big)\Big) \tag{15.9}$$

inducida del morfismo inclusión $\partial\Delta^3 \hookrightarrow \Delta^3$ es inyectiva.

En efecto se tiene por un lado que el domino de (15.9) se identifica con el conjunto de los diagramas conmutativos de $\mathcal{M}$ de la forma:

(15.10)

$$\begin{tikzcd}
X_{03} & X_{01} \otimes X_{13} \arrow[l, "\alpha_2"'] \\
 & X_{01} \otimes \big(X_{12} \otimes X_{23}\big) \arrow[u, "X_{12}\otimes\alpha_0"'] \\
X_{02} \otimes X_{23} \arrow[uu, "\alpha_1"] & \big(X_{01} \otimes X_{12}\big) \otimes X_{23} \arrow[l, "\alpha_3\otimes X_{23}"] \arrow[u, phantom, "a\,\wr\|"]
\end{tikzcd}$$

y su codominio se identifica con el conjunto de los diagramas de la misma forma pero no necesariamente conmutativos. La función (15.9) olvida la conmutatividad; por lo tanto (15.9) es inyectiva. ☐

Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal, el conjunto simplicial truncado $\mathcal{N}\big(\mathcal{M}\big)_q = \mathcal{M}_q$ donde $0 \leq q \leq 3$ se describe de la siguiente manera:

(15.11)

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\left\{\begin{array}{ccc} X_{03} & \xleftarrow{\ \alpha_2\ } & X_{01}\otimes X_{13} \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \Big\uparrow{\scriptstyle X_{12}\otimes\alpha_0} \\ & & X_{01}\otimes\left(X_{12}\otimes X_{23}\right) \\ & & {\scriptstyle a}\,\wr\| \\ X_{02}\otimes X_{23} & \xleftarrow[\alpha_3\otimes X_{23}]{} & \left(X_{01}\otimes X_{12}\right)\otimes X_{23} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Los } \alpha_i \text{ son} \\ \text{morfismos de } \mathcal{M} \\ \text{haciendo conmutativo} \\ \text{al diagram} \end{array} \right\}
\arrow[d, shift right=12, "d_0"']
\arrow[d, <-, shift right=8, "s_0"]
\arrow[d, shift right=4, "d_1"]
\arrow[d, <-, "s_1"]
\arrow[d, shift left=4, "d_2"]
\arrow[d, <-, shift left=8, "s_2"]
\arrow[d, shift left=12, "d_3"] \\
\left\{ X_2\otimes X_0 \xrightarrow{\ \alpha\ } X_1 \;\middle|\; \alpha \text{ es un morfismo de } \mathcal{M} \right\}
\arrow[d, shift right=9, "d_0"']
\arrow[d, <-, shift right=3, "s_0"]
\arrow[d, shift left=3, "d_1"]
\arrow[d, <-, shift left=9, "s_1"]
\arrow[d, shift left=15, "d_2"] \\
\left\{ X \;\middle|\; X \text{ es un objeto de } \mathcal{M} \right\}
\arrow[d, shift right=6, "d_0"']
\arrow[d, <-, "s_0"]
\arrow[d, shift left=6, "d_1"] \\
\star
\end{tikzcd}$$

De manera explícita, existe un único 0-simplejo de $\mathcal{M}$, el 0-simplejo vacío. El conjunto de los 1-simplejos se identifica con el conjunto de los objetos de $\mathcal{M}$, porque existe una única pareja de enteros (i,j) tales que $0 \le i < j \le 1$ y no hay ternas de enteros (i,j,k) tales que $0 \le i < j < k \le 1$. Por otro lado un 2-simplejo consiste de tres objetos X_0, X_1 y X_2, uno por cada una de las parejas de enteros $(1,2)$, $(0,2)$ y $(0,1)$ que cumplen $0 \le i < j \le 2$ respectivamente, y un morfismo:

$$\alpha\colon\, X_2 \otimes X_0 \longrightarrow X_1 \tag{15.12}$$

asociado a la única terna de enteros $(0,1,2)$ tal que $0 \le i < j < k \le 2$.

Por último, un 3-simplejo de $\mathcal{M}$ es determinado por seis objetos $\left\{X_{ij} \,\middle|\, 0 \le i < j \le 3\right\}$ y cuatro morfismos de $\mathcal{M}$:

$$\left\{ \alpha_l = \alpha_{ijk}\colon\, X_{ij}\otimes X_{jk} \to X_{ik} \;\middle|\; 0 \le i < j < k \le 3 \right\};$$

(donde $0 \leq l \leq 3$ es el único entero tal que $l \neq i, j, k$) con la propiedad que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{03} & & X_{01} \otimes X_{13} \arrow[ll, "\alpha_2"'] \\
\eta \;=\; & & & X_{01} \otimes \big(X_{12} \otimes X_{23}\big) \arrow[u, "X_{12}\otimes\alpha_0"'] \\
 & X_{02} \otimes X_{23} \arrow[uu, "\alpha_1"] & & \big(X_{01} \otimes X_{12}\big) \otimes X_{23} \,. \arrow[ll, "\alpha_3\otimes X_{23}"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd} \tag{15.13}$$

Decimos por abuso que el morfismo (15.12) es un 2-simplejo de $\mathcal{M}$ y que el diagrama conmutativo (15.13) es un 3-simplejo de $\mathcal{M}$.

Observemos también que los morfismos cara del conjunto simplicial truncado (15.11) son dados por las siguientes reglas: Si η es el 3-simplejo (15.13), entonces $d_i(\eta) = \alpha_i$; y si (15.12) es un 2-simplejo, $d_i(\alpha) = X_i$.

Por otro lado, los morfismos degenerados son definidos como: $s_0(\star) = \mathbb{1}$,

$$s_0(X) = \Big(\ \mathbb{1} \otimes X \xrightarrow{l_X^{-1}} X\ \Big), \qquad s_1(X) = \Big(\ X \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{r_X^{-1}} X\ \Big),$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 & \mathbb{1}\otimes X_1 \arrow[l, "\ell^{-1}"'] \\
s_0(\alpha) \;=\; & & \mathbb{1}\otimes(X_2\otimes X_0) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\alpha"'] \\
 & X_2\otimes X_0 \arrow[uu, "\alpha"] & (\mathbb{1}\otimes X_2)\otimes X_0 \,, \arrow[l, "\ell^{-1}\otimes X_0"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X_1 & X_2\otimes X_0 \arrow[l, "\alpha"'] \\
s_1(\alpha) \;=\; & & X_2(\mathbb{1}\otimes X_0) \arrow[u, "X_2\otimes\ell^{-1}"'] \\
 & X_2\otimes X_0 \arrow[uu, "\alpha"] & (X_2\otimes\mathbb{1})\otimes X_0 \arrow[l, "r^{-1}\otimes X_0"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

$$\text{y} \qquad \begin{tikzcd}
 & X_1 & X_2\otimes X_0 \arrow[l, "\alpha"'] \\
s_2(\alpha) \;=\; & & X_2\otimes(X_0\otimes\mathbb{1}) \arrow[u, "X_2\otimes r^{-1}"'] \\
 & X_1\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\ell^{-1}"] & (X_2\otimes X_0)\otimes\mathbb{1} \,. \arrow[l, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Mostremos:

COROLARIO 15.1.3. *El funtor nervio de la categeoría de las categorías monoidales y los funtores laxos y unitarios* $\mathcal{N}\colon \mathbf{cat}^{\otimes}_{lax,\star} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ *es fielmente pleno.*

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar que $\mathcal{N}$ es fiel, consideremos $F, G\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ dos morfismos laxos y unitarios entre categorías monoidales tales que $\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(G)$. Si X es un objeto de $\mathcal{M}$ se sigue que $F(X) = \mathcal{N}(F)_1(X) = \mathcal{N}(G)_1(X) = G(X)$. Por otro lado si X y Y son dos objetos de $\mathcal{M}$ se tiene que:

$$m^F_{X,Y} = \mathcal{N}(F)_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y}) = \mathcal{N}(G)_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y}) = m^G_{X,Y}\,.$$

Si ahora $f\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{M}$ observemos para empezar que:

$$F(f\otimes\mathbb{1})\circ m^F_{X,\mathbb{1}} = \mathcal{N}(F)_2(f\otimes\mathbb{1}) = \mathcal{N}(G)_2(f\otimes\mathbb{1}) = G(f\otimes\mathbb{1})\circ m^G_{X,\mathbb{1}}\,.$$

Deducimos que $F(f) = G(f)$ pues se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
F(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[r, "F(f\otimes\mathbb{1})"] & F(Y\otimes\mathbb{1}) & & G(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[r, "G(f\otimes\mathbb{1})"] & RG(Y\otimes\mathbb{1}) \\
F(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "m^F_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[r, "F(f)\otimes\mathbb{1}" description] & F(Y)\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "m^F_{Y,\mathbb{1}}"'] & \text{y} & G(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "m^G_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[r, "G(f)\otimes\mathbb{1}" description] & G(Y)\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "m^G_{Y,\mathbb{1}}"'] \\
F(X) \arrow[u, "r_{FX}"] \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y) \arrow[u, "r_{FY}"'] & & G(X) \arrow[u, "r_{GX}"] \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \arrow[u, "r_{GY}"']
\end{tikzcd}$$

donde $r_{FY} = r_{GY}$ y los morfismos $m^F_{Y,\mathbb{1}} = m^G_{Y,\mathbb{1}}$ son isomorfismos de $\mathcal{M}'$ pues:

$$\begin{tikzcd}
F(Y\otimes\mathbb{1}) & \\
& F(Y)\,. \arrow[ul, "\ell_{FY}"', "\cong"] \arrow[dl, "\cong"', "F(\ell_Y)"] \\
F(Y)\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "m^F_{Y,\mathbb{1}}"] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathcal{N}$ es un funtor fiel.

Por otro lado, si $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ son categorías monoidales, consideremos un morfismo de conjuntos simpliciales $\varphi\colon \mathcal{N}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{M}')$. Definimos un morfismo monoidal laxo y unitario $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{N}(F) = \varphi$ de la siguiente manera: Si X es un objeto de $\mathcal{M}$ escribimos $F(X) = \varphi_1(X)$. Se sigue que:

$$F(\mathbb{1}) = \varphi_1\circ s_0(\star) = s_0\circ\varphi_0(\star) = s_0(\star) = \mathbb{1}\,.$$

Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{M}$ definimos $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ como el siguiente morfismo de $\mathcal{M}'$:

$$F(X) \xrightarrow{r_{FX}} F(X)\otimes\mathbb{1} \xrightarrow{\varphi_2(f\circ r_X^{-1})} F(Y)\,.$$

En particular tenemos que:

$$\begin{aligned}
F(\mathrm{id}_X) &= \varphi_2(\mathrm{id}_X\circ r_X^{-1})\circ r_{FX} = \varphi_2(r_X^{-1})\circ r_{FX} = \big(\varphi_2\circ s_1(X)\big)\circ r_{FX} \\
&= \big(s_1\circ\varphi_1(X)\big)\circ r_{FX} = r_{FX}^{-1}\circ r_{FX} = \mathrm{id}_{FX}\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $f\colon\ X \longrightarrow Y$ y $g\colon\ Y \longrightarrow Z$ son dos morfismos de $\mathcal{M}$, mostremos primero que el siguiente diagrama:

(15.14)
$$\begin{tikzcd}
Z & X \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "(g\circ f)\circ r_X^{-1}"'] \\
 & X \otimes (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \arrow[u, "X\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
Y \otimes \mathbb{1} \arrow[uu, "g\circ r_Y^{-1}"] & (X \otimes \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1}\,, \arrow[l, "(f\circ r_X^{-1})\otimes \mathbb{1}"] \arrow[u, phantom, "a\,\rotatebox{90}{$\cong$}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto, en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y & X \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "(g\circ f)\circ r_X^{-1}"'] & \\
 & X \otimes (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \arrow[u, "X\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}" description] & \\
Y \otimes \mathbb{1} \arrow[uu, "g\circ r_Y^{-1}"] & \big(X \otimes \mathbb{1}\big) \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "(f\circ r_X^{-1})\otimes \mathbb{1}" description] \arrow[u, phantom, "a\,\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \\
Y \arrow[u, "r_Y"] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "f\circ r_X^{-1}"] \arrow[u, "r_{X\otimes \mathbb{1}}" description] \arrow[from=4-1, to=3-2, phantom, "\text{(I)}"] & X \arrow[l, "r_X"] \arrow[uuul, bend right, "r_X"'] \arrow[from=4-2, to=3-3, phantom, "\text{(II)}"]
\end{tikzcd}$$

el cuadrado (I) es conmutativo porque $r_?$ es una transformación natural y el diagrama (II) es conmutativo por el Corolario 14.1.1. Más aún, ya que:

$$\big((g \circ f) \circ r_X^{-1}\big) \circ r_X \;=\; g \circ f \;=\; \big(g \circ r_Y^{-1}\big) \circ r_Y \circ \big(f \circ r_X^{-1}\big) \circ r_X\,,$$

concluimos que:

$$\big((g \circ f) \circ r_X^{-1}\big) \circ \big(X \otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}\big) \circ a_{X,\mathbb{1},\mathbb{1}} \circ r_{X\otimes\mathbb{1}} \circ r_X \;=\; \big(g \circ r_Y^{-1}\big) \circ \big((f \circ r_X^{-1}) \otimes \mathbb{1}\big) \circ r_{X\otimes\mathbb{1}} \circ r_X\,;$$

es decir (15.14) es un diagrama conmutativo, pues $r_{X\otimes\mathbb{1}} \circ r_X$ es un isomorfismo de $\mathcal{M}$.

Consideremos ahora la imagen del 3-simplejo (15.14) por el morfismo φ:

$$\begin{tikzcd}
F(Z) & F(X) \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "\varphi_2\big((g\circ f)\circ r_X^{-1}\big)"'] \\
 & F(X) \otimes (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \arrow[u, "F(X)\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
F(Y) \otimes \mathbb{1} \arrow[uu, "\varphi_2\big(g\circ r_Y^{-1}\big)"] & \big(F(X) \otimes \mathbb{1}\big) \otimes \mathbb{1}\,. \arrow[l, "\varphi_2(f\circ r_X^{-1})\otimes \mathbb{1}"] \arrow[u, phantom, "a\,\rotatebox{90}{$\cong$}"]
\end{tikzcd}$$

Ya que se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
F(Y)\otimes\mathbb{1} & \big(F(X)\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\varphi_2(f\circ r_X^{-1})\otimes\mathbb{1}"'] \\
F(Y) \arrow[u, "r_{FY}"] & F(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\varphi_2\left(f\circ r_X^{-1}\right)"] \arrow[u, "r_{FX\otimes\mathbb{1}}"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
F(X)\otimes\mathbb{1} & \\
F(X)\otimes(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}) \arrow[u, "F(X)\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}"] & \\
\big(F(X)\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[u, phantom, "a\wr\|"] & \\
F(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "r_{FX\otimes\mathbb{1}}"] & F(X) \arrow[l, "r_{FX}"] \arrow[uuul, bend right, "r_{FX}"']
\end{tikzcd}$$

se sigue que:

$$F(g\circ f) = \varphi_2\big((g\circ f)\circ r_X^{-1}\big)\circ\big(r_{FX}\big) = \big(\varphi_2(g\circ r_X^{-1})\circ(r_{FY})\big)\circ\big(\varphi_2(f\circ r_X^{-1})\circ(r_{FX})\big) = F(g)\circ F(f)\,.$$

Por lo tanto $F\colon\ \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}'$ es efectivamente un funtor tal que $F(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Definimos por otro lado $m^F_{X,Y}\colon\ F(X)\otimes F(Y)\longrightarrow F(X\otimes Y)$ para X y Y objetos de $\mathcal{M}$ como el morfismo $m^F_{X,Y} = \varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})$.

Mostremos que m^F es una transformación natural: De forma explícita, si consideramos dos morfismos $f\colon\ X\longrightarrow X'$ y $g\colon\ Y\longrightarrow Y'$ de $\mathcal{M}$ verifiquemos que:

$$F(f\otimes g)\circ m^F_{X,Y} = m^F_{X',Y'}\circ\big(F(f)\otimes F(g)\big)\,,$$

es decir mostremos que:

$$\begin{gathered}
\big(\varphi_2\big((f\otimes g)\circ r^{-1}_{X\otimes Y}\big)\big)\circ\big(r_{F(X\otimes Y)}\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\big) = \\
\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X'\otimes Y'})\big)\circ\Big(\big(\varphi_2(f\circ r_X^{-1})\circ r_{FX}\big)\otimes F(Y')\Big)\circ\Big(F(X)\otimes\big(\varphi_2(g\circ r_Y^{-1})\circ r_{FY}\big)\Big)\,.
\end{gathered}\tag{15.15}$$

Para empezar observemos que el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(X\otimes Y)\otimes\mathbb{1} & \big(F(X)\otimes F(Y)\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes\mathbb{1}"'] \\
F(X\otimes Y) \arrow[u, "r_{F(X\otimes Y)}"] & F(X)\otimes F(Y) \arrow[l, "\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})"] \arrow[u, "r_{F(X)\otimes F(Y)}"']
\end{tikzcd}$$

implica que:

$$\begin{gathered}
\big(\varphi_2\big((f\otimes g)\circ r^{-1}_{X\otimes Y}\big)\big)\circ\big(r_{F(X\otimes Y)}\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\big) = \\
\big(\varphi_2\big((f\otimes g)\circ r^{-1}_{X\otimes Y}\big)\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes\mathbb{1}\big)\circ\big(r_{FX\otimes FY}\big)\,.
\end{gathered}\tag{15.16}$$

Por otro lado, de los siguientes diagramas conmutativos de $\mathcal{M}$:

$$\begin{tikzcd}
X' \otimes Y' & & X \otimes Y' \arrow[ll, "f\otimes Y'"'] \\
& & X \otimes \big(Y \otimes \mathbb{1}\big) \arrow[u, "X\otimes(g\circ r_Y^{-1})"'] \\
(X \otimes Y) \otimes \mathbb{1} \arrow[uu, "(f\otimes g)\circ r^{-1}_{X\otimes Y}"] & & \big(X \otimes Y\big) \otimes \mathbb{1} \arrow[ll, "\mathrm{id}_{X\otimes Y}\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, phantom, "a\wr\|"]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
X' \otimes Y' & & X \otimes Y' \arrow[ll, "f\otimes Y'"'] \\
& & X \otimes \big(\mathbb{1} \otimes Y'\big) \arrow[u, "X\otimes(\ell^{-1}_{Y'})"'] \\
X' \otimes Y' \arrow[uu, "\mathrm{id}_{X'\otimes Y'}"] & & \big(X \otimes \mathbb{1}\big) \otimes Y' \arrow[ll, "(f\circ r_X^{-1})\otimes Y'"] \arrow[u, phantom, "a\wr\|"] \arrow[uu, dashed, bend left, "r_X^{-1}\otimes Y'"]
\end{tikzcd}$$

deducimos los siguientes diagramas conmutativos de $\mathcal{M}'$:

$$\begin{tikzcd}
F(X' \otimes Y') & & F(X) \otimes F(Y') \arrow[ll, "\varphi_2(f\otimes Y')"'] \\
& & F(X) \otimes \big(F(Y) \otimes \mathbb{1}\big) \arrow[u, "FX\otimes\varphi_2(g\circ r_Y^{-1})"'] \\
F(X \otimes Y) \otimes \mathbb{1} \arrow[uu, "\varphi_2((f\otimes g)\circ r^{-1}_{X\otimes Y})"] & & \big(F(X) \otimes F(Y)\big) \otimes \mathbb{1} \arrow[ll, "\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, phantom, "a\wr\|"]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
F(X' \otimes Y') & & F(X) \otimes F(Y') \arrow[ll, "\varphi_2(f\otimes Y')"'] \\
& & F(X) \otimes \big(\mathbb{1} \otimes F(Y')\big) \arrow[u, "FX\otimes(\ell^{-1}_{FY'})"'] \\
F(X') \otimes F(Y') \arrow[uu, "\varphi_2(\mathrm{id}_{X'\otimes Y'})"] & & \big(F(X) \otimes \mathbb{1}\big) \otimes F(Y')\,; \arrow[ll, "\varphi_2(f\circ r_X^{-1})\otimes F(Y')"] \arrow[u, phantom, "a\wr\|"] \arrow[uu, dashed, bend left, "r_{FX}^{-1}\otimes FY'"]
\end{tikzcd}$$

en particular:

(15.17)

$$\Big(\varphi_2\big((f \otimes g) \circ r^{-1}_{X\otimes Y}\big)\Big) \circ \big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y}) \otimes \mathbb{1}\big) \circ \big(r_{FX\otimes FY}\big) =$$

$$\big(\varphi_2(f \otimes Y')\big) \circ \big(F(X) \otimes \varphi_2(g \circ r_Y^{-1})\big) \circ \big(a_{FX,FY,\mathbb{1}}\big) \circ \big(r_{FX\otimes FY}\big) =$$

$$\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X'\otimes Y'})\big) \circ \big(\varphi_2(f \circ r_X^{-1}) \otimes F(Y')\big) \circ \big(r_{FX} \otimes F(Y')\big) \circ \big(F(X) \otimes \varphi_2(g \circ r_Y^{-1})\big) \circ \big(a_{FX,FY,\mathbb{1}}\big) \circ \big(r_{FX\otimes FY}\big)\,.$$

La igualdad (15.15) se sigue de (15.16), (15.17) y del triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\big(F(X) \otimes F(Y)\big) \otimes \mathbb{1} \arrow[rr, "a_{FX,FY,\mathbb{1}}"] & & F(X) \otimes \big(F(Y) \otimes \mathbb{1}\big). \\
& F(X) \otimes F(Y) \arrow[ul, "r_{FX\otimes FY}"] \arrow[ur, "F(X)\otimes r_{FY}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto m^F es una transformación natural. Observemos por otro lado que:

$$\begin{tikzcd}
& FX\otimes\mathbb{1} \arrow[d, "m^F_{X,\mathbb{1}}"] \\
FX \arrow[ur, "r_{FX}"] \arrow[dr, "Fr_X"'] & \\
& F(X\otimes\mathbb{1})
\end{tikzcd}$$

es un triángulo conmutativo pues $F(r_X) = \varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes\mathbb{1}}) \circ r_{FX} = m^F_{X,\mathbb{1}} \circ r_{FX}$.

Para mostrar que también tenemos el triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes FX \arrow[dd, "m^F_{\mathbb{1},X}"'] & \\
 & FX \arrow[ul, "l_{FX}"'] \arrow[dl, "Fl_X"] \\
F(\mathbb{1}\otimes X) &
\end{tikzcd}$$

basta mostrar que si $f\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{M}$ entonces el morfismo $F(f) = \varphi_2(f\circ r_X^{-1})\circ r_{FX}$ es igual a la composición $\varphi_2(f\circ \ell_X^{-1})\circ \ell_{FX}$.

Para ello observemos que como los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "\ell_X\otimes\mathbb{1}"] & (\mathbb{1}\otimes X)\otimes\mathbb{1} \\
X \arrow[u, "r_X"] \arrow[r, "\ell_X"'] & \mathbb{1}\otimes X \arrow[u, "r_{\mathbb{1}\otimes X}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{1}\otimes X)\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},X,\mathbb{1}}"] & & \mathbb{1}\otimes(X\otimes\mathbb{1}) \\
 & \mathbb{1}\otimes X \arrow[ul, "r_{\mathbb{1}\otimes X}"] \arrow[ur, "\mathbb{1}\otimes r_X"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\big(r_X\big)\circ\big(\ell_X^{-1}\big)\circ\big(\mathbb{1}\otimes r_X^{-1}\big)\circ\big(a_{\mathbb{1},X,\mathbb{1}}\big) &= \big(r_X\big)\circ\big(\ell_X^{-1}\big)\circ\big(\mathbb{1}\otimes r_X\big)^{-1}\circ\big(a_{\mathbb{1},X,\mathbb{1}}\big) \\
&= \big(r_X\big)\circ\big(\ell_X^{-1}\big)\circ\big(r_{\mathbb{1}\otimes X}\big)^{-1} = \big(\ell_X\otimes\mathbb{1}\big)^{-1} = \ell_X^{-1}\otimes\mathbb{1}\,;
\end{aligned}$$

dicho de otro modo los siguientes son diagramas conmutativos de $\mathcal{M}$:

$$\begin{tikzcd}
X & \mathbb{1}\otimes X \arrow[l, "\ell_X^{-1}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(X\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes r_X^{-1}"'] \\
X\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "r_X^{-1}"] & \big(\mathbb{1}\otimes X\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\ell_X^{-1}\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
Y & \mathbb{1}\otimes X \arrow[l, "f\circ\ell_X^{-1}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(X\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes r_X^{-1}"'] \\
X\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "f\circ r_X^{-1}"] & \big(\mathbb{1}\otimes X\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\ell_X^{-1}\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}
\tag{15.18}$$

para cualquier morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$.

Si consideremos los 3-simplejos de $\mathcal{M}'$ imagen de (15.18) por la función φ_3:

$$\begin{tikzcd}
FX & \mathbb{1}\otimes FX \arrow[l, "\ell_{FX}^{-1}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(FX\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes r_{FX}^{-1}"'] \\
FX\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "r_{FX}^{-1}"] & \big(\mathbb{1}\otimes FX\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\ell_{FX}^{-1}\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
FY & \mathbb{1}\otimes FX \arrow[l, "\varphi_2(f\circ\ell_X^{-1})"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(FX\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes r_{FX}^{-1}"'] \\
FX\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\varphi_2(f\circ r_X^{-1})"] & \big(\mathbb{1}\otimes FX\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\ell_{FX}^{-1}\otimes\mathbb{1}\,."] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

deducimos que:

$$\begin{aligned} F(f) &= \varphi_2(f \circ r_X^{-1}) \circ r_{FX} \\ &= \varphi_2(f \circ \ell_X^{-1}) \circ \big(\mathbb{1} \otimes r_{FX}^{-1}\big) \circ \big(a_{\mathbb{1},FX,\mathbb{1}}\big) \circ \big(\ell_{FX}^{-1} \otimes \mathbb{1}\big)^{-1} \circ r_{FX} \\ &= \varphi_2(f \circ \ell_X^{-1}) \circ \ell_{FX}\,. \end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar que se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F\big((X\otimes Y)\otimes Z\big) \arrow[d, "Fa_{X,Y,Z}"'] & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[l, "m^F_{X\otimes Y,Z}"'] & (FX\otimes FY)\otimes FZ \arrow[l, "m^F_{X,Y}\otimes FZ"'] \arrow[d, "a_{FX,FY,FZ}"] \\ F\big(X\otimes(Y\otimes Z)\big) & FX\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[l, "m^F_{X,Y\otimes Z}"] & FX\otimes(FY\otimes FZ) \arrow[l, "FX\otimes m^F_{Y,Z}"] \end{tikzcd} \tag{15.19}$$

consideremos los siguientes 3-simplejos de $\mathcal{M}$:

$$\begin{tikzcd} X\otimes(Y\otimes Z) & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[l, "\mathrm{id}_{X\otimes(Y\otimes Z)}"'] \\ & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[u, "X\otimes \mathrm{id}_{Y\otimes Z}"'] \\ (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[uu, "a_{X,Y,Z}"] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[l, "\mathrm{id}_{X\otimes Y\otimes Z}"] \arrow[u, phantom, "\overset{a}{\wr\|}" description] \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} X\otimes(Y\otimes Z) & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[l, "a_{X,Y,Z}"'] \\ & (X\otimes Y)\otimes\big(Z\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "(X\otimes Y)\otimes r_Z^{-1}"'] \\ \big((X\otimes Y)\otimes Z\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "a_{X,Y,Z}\circ r^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z}"] & \big((X\otimes Y)\otimes Z\big)\otimes\mathbb{1}\,, \arrow[l, "\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z\otimes\mathbb{1}}"] \arrow[u, phantom, "\overset{a}{\wr\|}" description] \arrow[uu, dashed, bend left, "r^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z}"] \end{tikzcd}$$

así como sus imágenes por el morfismo φ:

$$\begin{tikzcd} F\big(X\otimes(Y\otimes Z)\big) & F(X)\otimes F(Y\otimes Z) \arrow[l, "\varphi_2\left(\mathrm{id}_{X\otimes(Y\otimes Z)}\right)"'] \\ & F(X)\otimes\big(F(Y)\otimes F(Z)\big) \arrow[u, "FX\otimes\varphi_2(\mathrm{id}_{Y\otimes Z})"'] \\ F(X\otimes Y)\otimes F(Z) \arrow[uu, "\varphi_2(a_{X,Y,Z})"] & \big(F(X)\otimes F(Y)\big)\otimes F(Z) \arrow[l, "\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes FZ"] \arrow[u, phantom, "\overset{a}{\wr\|}" description] \end{tikzcd} \tag{15.20}$$

(15.21) y

$$\begin{tikzcd}
F\big(X\otimes(Y\otimes Z)\big) & F(X\otimes Y)\otimes FZ \arrow[l, "\varphi_2(a_{X,Y,Z})"'] \\
 & F(X\otimes Y)\otimes\big(FZ\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "F(X\otimes Y)\otimes r^{-1}_{FZ}"'] \\
F\big((X\otimes Y)\otimes Z\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\varphi_2\left(a_{X,Y,Z}\circ r^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z}\right)"] & \big(F(X\otimes Y)\otimes FZ\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\varphi_2(\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z})\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a"', "\wr"] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "r^{-1}_{F(X\otimes Y)\otimes FZ}"]
\end{tikzcd}$$

Se sigue de (15.20) y (15.21) que:

$$\begin{aligned}
&\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes(Y\otimes Z)})\big)\circ\big(FX\otimes\varphi_2(\mathrm{id}_{Y\otimes Z})\big)\circ\big(a_{FX,FY,FZ}\big) = \big(\varphi_2(a_{X,Y,Z})\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes FZ\big)\\
&\quad = \big(\varphi_2(a_{X,Y,Z}\circ r^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z})\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z}\otimes\mathbb{1})\big)\circ\big(r_{F(X\otimes Y)\otimes FZ}\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes FZ\big)
\end{aligned}$$

Más aún, ya que $r_?$ es una transformación natural tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F\big((X\otimes Y)\otimes Z\big)\otimes\mathbb{1} & \big(F(X\otimes Y)\otimes FZ\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\varphi_2(\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z})\otimes\mathbb{1}"'] \\
F\big((X\otimes Y)\otimes Z\big) \arrow[u, "r_{F((X\otimes Y)\otimes Z)}"] & \big(F(X\otimes Y)\otimes FZ\big) \arrow[l, "\varphi_2(\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z})"] \arrow[u, "r_{F(X\otimes Y)\otimes FZ}"']
\end{tikzcd}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}
&\big(\varphi_2(a_{X,Y,Z}\circ r^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z})\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z}\otimes\mathbb{1})\big)\circ\big(r_{F(X\otimes Y)\otimes FZ}\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes FZ\big) = \\
&\quad\big(\varphi_2(a_{X,Y,Z}\circ r^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z})\big)\circ\Big(r_{F\big((X\otimes Y)\otimes Z\big)}\Big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z})\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{X\otimes Y})\otimes FZ\big);
\end{aligned}$$

Por lo tanto (15.19) es un diagrama conmutativo y entonces (F, m^F) es efectivamente un morfismo laxo y unitario entre 2-grupos.

Por último, notemos que como $\mathcal{N}(\mathcal{M}')$ es un conjunto simplicial débilmente 2-coesquelético, para mostrar que $\mathcal{N}(F) = \varphi$ es suficiente verificar que los morfismos de conjuntos simpliciales truncados $\tau_2^*\big(\mathcal{N}(F)\big)$ y $\tau_2^*(\varphi)$ son iguales

Por definición $\tau_1^*\big(\mathcal{N}(F)\big) = \tau_1^*(\varphi)$. Mostremos que si $\alpha\ A\otimes B \longrightarrow C$ es un 2-simplejo de $\mathcal{N}(\mathcal{M})$ entonces $\mathcal{N}(F)_2\big(\alpha\big) = \varphi_2(\alpha)$.

Notemos primero que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(F)_2\big(\alpha\big) &= F(\alpha)\circ m^F_{A\otimes B} = \varphi_2\big(\alpha\circ r^{-1}_{A\otimes B}\big)\circ r_{F(A\otimes B)}\circ\varphi_2(\mathrm{id}_{A\otimes B})\\
&= \varphi_2\big(\alpha\circ r^{-1}_{A\otimes B}\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{A\otimes B})\otimes\mathbb{1}\big)\circ r_{FA\otimes FB}
\end{aligned}$$

porque $r_?$ es una transformación natural.

Por otro lado, la imagen por φ del siguiente 3-simplejo de $\mathcal{N}(\mathcal{M})$:

$$\begin{tikzcd}
C & & A\otimes B \arrow[ll, "\alpha"'] \\
 & & A\otimes(B\otimes\mathbb{1}) \arrow[u, "A\otimes r_B^{-1}"'] \\
(A\otimes B)\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\alpha\circ r^{-1}_{A\otimes B}"] & & \big(A\otimes B\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[ll, "(\mathrm{id}_{A\otimes B})\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a", "\wr"'] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "r^{-1}_{A\otimes B}"']
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de $\mathcal{M}'$:

$$\begin{tikzcd}
F(C) & & F(A)\otimes F(B) \arrow[ll, "\varphi_2(\alpha)"'] \\
 & & F(A)\otimes(F(B)\otimes\mathbb{1}) \arrow[u, "FA\otimes r_{FB}^{-1}"'] \\
F(A\otimes B)\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\varphi_2(\alpha\circ r^{-1}_{A\otimes B})"] & & \big(F(A)\otimes F(B)\big)\otimes\mathbb{1}\,, \arrow[ll, "\varphi_2(\mathrm{id}_{A\otimes B})\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, "a", "\wr"'] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "r^{-1}_{FA\otimes FB}"']
\end{tikzcd}$$

de donde que:

$$\varphi_2\big(\alpha\circ r^{-1}_{A\otimes B}\big)\circ\big(\varphi_2(\mathrm{id}_{A\otimes B})\otimes\mathbb{1}\big)\circ r_{FA\otimes FB} = \varphi_2(\alpha)\,;$$

es decir $\mathcal{N}(F)_2\big(\alpha\big) = \varphi_2(\alpha)$. ☐

Mostremos el siguiente enunciado:

PROPOSICIÓN 15.1.4. *Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo el conjunto simplicial débilmente 2-coesquelético $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ (ver el Lema 15.1.1) cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1\leq m\leq 3$ y cumple la condición de ser mínimo en dimensión 2, dicho de otro modo $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ es un 2-grupo de Kan (ver el Corolario 12.4.1).*

En particular, el conjunto simplicial reducido $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_2^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{red})$ de la Proposición 10.1.2.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el conjunto simplicial $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ es débilmente 2-coesquelético por el Lema 15.1.1. Mostremos que $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión $1\leq m\leq 3$ y cumple la condición de ser mínimo en dimensión 2.

Condición de extensión de Kan en dimensión 1:

Mostremos que si X_0, X_1 y X_2 son objetos de $\mathcal{G}$, entonces existen objetos A_0, A_1 y A_2 y morfismos $\alpha_0\colon X_2\otimes A_0\longrightarrow X_1$, $\alpha_1\colon X_2\otimes X_0\longrightarrow A_1$ y $\alpha_2\colon A_2\otimes X_0\longrightarrow X_1$ de $\mathcal{G}$.

En efecto, si $\varphi\colon X_2\otimes X_2'\longrightarrow\mathbb{1}$ y $\psi\colon X_0'\otimes X_0\longrightarrow\mathbb{1}$ son isomorfismos de $\mathcal{G}$, podemos definir:

$$\alpha_0 : \Bigg(\; X_2\otimes\big(X_2'\otimes X_1\big)\xrightarrow{a^{-1}_{X_2,X_2',X_1}}\big(X_2\otimes X_2'\big)\otimes X_1\xrightarrow{\varphi\otimes X_1}\mathbb{1}\otimes X_1\xrightarrow{\ell^{-1}_{X_1}}X_1\;\Bigg),$$

$$\alpha_1 : \left(X_2 \otimes X_0 \xrightarrow{\text{id}} X_2 \otimes X_0 \right) \qquad \text{y}$$

$$\alpha_2 : \left(\left(X_1 \otimes X_0'\right) \otimes X_0 \xrightarrow{a_{X_1,X_0',X_0}} X_1 \otimes \left(X_0' \otimes X_0\right) \xrightarrow{X_1 \otimes \psi} X_1 \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{r^{-1}_{X_1}} X_1 \right).$$

Condición de extensión de Kan en dimensión 2 *y de ser mínimo en dimensión* 2:

Para mostrar las dos condiciones debemos verificar que si tenemos tres de cuatro morfismos α_0, α_1, α_2 y α_3 en un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd}
X_{03} & X_{01} \otimes X_{13} \arrow[l, "\alpha_2"'] \\
 & X_{01} \otimes (X_{12} \otimes X_{23}) \arrow[u, "X_{01}\otimes\alpha_0"'] \\
X_{02} \otimes X_{23} \arrow[uu, "\alpha_1"] & (X_{01} \otimes X_{12}) \otimes X_{23}\,, \arrow[l, "\alpha_3\otimes X_{23}"] \arrow[u, equal, "a\wr"]
\end{tikzcd} \tag{15.22}$$

podemos determinar de manera única el cuarto morfismo tal que (15.22) es un diagrama conmutativo. Esto es una consecuencia de que $\mathcal{G}$ es un grupodie y que los funtores de la forma $(A \otimes -)$ y $(- \otimes B)$ son equivalencias de categorías.

Condiciones de extensión de Kan en dimensión 3:

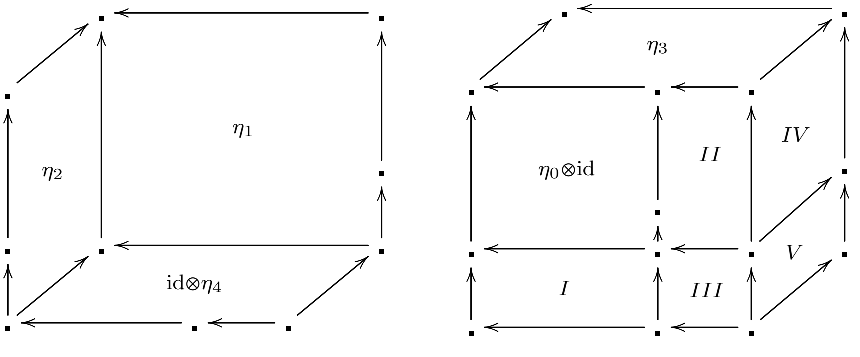
Ya que $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ es un conjunto simplicial 3-coesquelético, el conjunto de los 4-simplejos de $\mathcal{G}$ se identifica canónicamente con el conjunto de las quintetas $(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4)$ de 3-simplejos de $\mathcal{G}$:

$$\eta^i \quad = \quad \begin{tikzcd}
X^i_{03} & X^i_{01} \otimes X^i_{13} \arrow[l, "\alpha^i_2"'] \\
 & X^i_{01} \otimes (X^i_{12} \otimes X^i_{23}) \arrow[u, "X^i_{01}\otimes\alpha^i_0"'] \\
X^i_{02} \otimes X^i_{23} \arrow[uu, "\alpha^i_1"] & (X^i_{01} \otimes X^i_{12}) \otimes X^i_{23}\,, \arrow[l, "\alpha^i_3\otimes X^i_{23}"] \arrow[u, equal, "a\wr"]
\end{tikzcd} \tag{15.23}$$

tales que $\alpha^j_i = d_i\eta^j = d_{j-1}\eta^i = \alpha^i_{j-1}$ si $0 \leq i < j \leq 4$.

Se verifica entonces que una quinteta $(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4)$ con esta propiedad puede acomodarse en un cubo:

(15.24)



donde I, II, III, IV y V son diagramas de la forma:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes C \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\alpha)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & \Big(A\otimes(X\otimes Y)\Big)\otimes C \arrow[d, "a"] \\
A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\alpha\otimes\mathrm{id})"'] & A\otimes\Big((X\otimes Y)\otimes C\Big),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Big(A\otimes(B\otimes C)\Big)\otimes Y \arrow[r, "a(a^{-1}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "III"] & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[d, "a"] \\
A\otimes\Big((B\otimes C)\otimes D\Big) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes a"'] & A\otimes\Big(B\otimes(C\otimes D)\Big),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes B \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\alpha"] \arrow[d, "\alpha'\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "IV"] & A\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "\alpha'\otimes\mathrm{id}"] \\
(Z\otimes W)\otimes B \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] & (Z\otimes W)\otimes(X\otimes Y),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes C \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\alpha"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "V"] & (A\otimes B)\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\alpha)"'] & A\otimes\Big(B\otimes(X\otimes Y)\Big)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes C \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "(\alpha\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & & A\otimes(B\otimes C) \arrow[dd, "\alpha\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \\
\Big((X\otimes Y)\otimes B\Big)\otimes C \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"'] & II & \\
\Big(X\otimes(Y\otimes B)\Big)\otimes C \arrow[rr, "a(a^{-1}\otimes\mathrm{id})"'] & & (X\otimes Y)\otimes(B\otimes C).
\end{tikzcd}$$

En particular todos los diagramas en las caras de (15.24), son diagramas conmutativos. En efecto, por hipótesis $\eta_0\otimes\mathrm{id}$, η_1, η_2, η_3 y $\mathrm{id}\otimes\eta_4$ son conmutativos. Además como el isomorfismo de asociatividad a es natural, I, II y V son conmutativos. Por otro lado, III es un diagrama de la forma (14.2), que supusimos conmutativo en la definición de una categoría monoidal. Por último, IV es conmutativo porque $\otimes$ es un funtor de dos variables.

Para mostrar ahora que $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ cumple la condición de extensión de Kan en dimensión 3, observemos que si tenemos solamente cuatro 3-simplejos de una quinteta $(\eta_0,\dots,\eta_4)$ salvo digamos η_k, y suponemos que $d_i^2\eta_j = d_{j-1}^2\eta_i$ si $0\le i<j\le 4$ y $i,j\neq k$; podemos construir el cubo (15.24) de modo que todos los diagramas en las caras sean conmutativos. Como los funtores $(\mathrm{id}\otimes -)$ y $(-\otimes\mathrm{id})$ son fieles y plenos, el problema de extensión admite una única solución. □

El enunciado recíproco de la Proposición 15.1.4 fue demostrado por Duskin en [**Dus02**]:

PROPOSICIÓN 15.1.5. *Si Z es un 2-grupo de Kan, entonces existe un 2-grupo $\mathcal{G}$ y un isomorfismo de conjuntos simpliciales $Z\cong\mathcal{N}(\mathcal{G})$. En particular un conjunto simplicial reducido Z es un 2-grupoide de Kan si y solamente si Z es isomorfo al nervio de un 2-grupo (ver la Proposición 15.1.4).*

Mostremos el enunciado bien conocido:

Corolario 15.1.6. *Si $0 \leq i \leq 1$, existen $\xi^i\colon \big(\pi_i \Rightarrow \pi_{i+1} \circ \mathcal{N}\big) : 2\text{-}\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ isomorfismos naturales de funtores.*

En particular, un morfismo de 2-grupos F es una equivalencia débil si y solamente si, $\mathcal{N}(F)$ es una 2-equivalencia débil de conjuntos simpliciales si y solamente si, $\mathcal{N}(F)$ es una ∞-equivalencia débil.

Demostración. Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, por la Proposición 15.1.4 el conjunto simplicial $\mathcal{N}\mathcal{G}$ es un complejo de Kan. Por lo tanto los grupos $\pi_{i+1}\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big) = \pi_{i+1}\big(\mathcal{N}\mathcal{G}, \star\big)$ se pueden definir de manera combinatoria por las reglas de las Proposiciones 8.6.1 y 8.6.2.

ξ^0: El conjunto subyacente del grupo $\pi_1\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ es igual al conjunto de los objetos de $\mathcal{G}$ módulo la relación de equivalencia:

$$X \sim Y \qquad \text{si existe un morfismo en } \mathcal{G} \text{ de la forma } \; X \otimes \mathbb{1} \longrightarrow Y \; .$$

Por otro lado, si denotamos como $\sim'$ a la relación de isomorfismo en el conjunto de los objetos del grupoide $\mathcal{G}$, es decir:

$$X \sim' Y \qquad \text{si existe un morfismo de } \mathcal{G} \text{ de la forma } \; X \longrightarrow Y \; ,$$

se sigue que $\sim = \sim'$ pues tenemos el isomorfismo natural $\ell_?$. Por lo tanto $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_1\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ como conjuntos.

Por otro lado si escribimos $[A]$ para denotar a la clase de isomorfismo de un objeto de $\mathcal{G}$, tenemos que $[A] \cdot [B] = [C]$ en el grupo $\pi_1\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ si y solamente si existe un morfismo $\alpha\colon A \otimes B \longrightarrow C$.

Se sigue que el elemento neutro de $\pi_1\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ es la clase del objeto $s_0(\star) = \mathbb{1}$, ya que para todo objeto A de $\mathcal{G}$ tenemos los morfismos $\ell_A^{-1}\colon A \otimes \mathbb{1} \longrightarrow A$ y $r_A^{-1}\colon \mathbb{1} \otimes A \longrightarrow A$. De la misma forma si X y Y son objetos de $\mathcal{G}$, como id $(X) \otimes (Y) \longrightarrow (X \otimes Y)$ es un morfismo de $\mathcal{G}$, se tiene que $[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y]$.

Por lo tanto $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_1\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ como grupos, es decir podemos definir al isomorfismo natural $\xi^0\colon \big(\pi_0 \Rightarrow \pi_1 \circ \mathcal{N}\big) : 2\text{-}\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ como la identidad.

ξ^1: El conjunto subyacente del grupo $\pi_2\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ es igual al conjunto de los morfismos de $\mathcal{G}$ de la forma $\alpha : \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1}$, módulo la relación de equivalencia:

$$\xi \sim \xi' \qquad \text{si existe} \qquad \begin{tikzcd}
\mathbb{1} & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\alpha'"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"] & \big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, equal, "a\wr"]
\end{tikzcd} \qquad \text{conmutativo.}$$

Como $(\mathbb{1} \otimes \ell_{\mathbb{1}}^{-1}) \circ a = \ell_{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}}^{-1}$, se sigue de la naturalidad del isomorfismo $\ell_?$, que $\alpha \sim \alpha'$ si y solamente si $\alpha \otimes \mathbb{1} = \alpha' \otimes \mathbb{1}$. Por lo tanto $\alpha \sim \alpha'$ si y solamente si $\alpha = \alpha'$, pues el funtor $-\otimes\mathbb{1}$ es fielmente pleno. Dicho de otro modo el conjunto subyacente de $\pi_2\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ es simplemente el conjunto de los morfismos de $\mathcal{G}$ de la forma $\alpha:\ \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\longrightarrow\mathbb{1}$.

Observemos también que si $\alpha,\alpha',\alpha'':\ \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\longrightarrow\mathbb{1}$ son morfismos de $\mathcal{G}$, entonces $\alpha\cdot\alpha'=\alpha''$ en $\pi_2\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big)$ si existe un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\alpha''"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\alpha'"] & \big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, equal, "a"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Mostremos que la siguiente función:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\big(\mathcal{G}\big) \arrow[r, "\xi_{\mathcal{G}}^{1}"] & \pi_2\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big) \\
\varphi \arrow[r, mapsto] & \varphi\circ\ell_{\mathbb{1}}^{-1}=\varphi\circ r_{\mathbb{1}}^{-1}
\end{tikzcd} \quad ,$$

es un isomorfismo de grupos. En efecto, notemos primero que $\xi_{\mathcal{G}}^{1}$ es una biyección cuya inversa es definida por la regla $\big(\xi_{\mathcal{G}}^{1}\big)^{-1}(\alpha)=\alpha\circ\ell_{\mathbb{1}}=\alpha\circ r_{\mathbb{1}}$.

Por otro lado si $\varphi,\psi\in\pi_1(\mathcal{G})$, para mostrar que $\xi_{\mathcal{G}}^{1}(\varphi)\cdot\xi_{\mathcal{G}}^{1}(\psi)=\xi_{\mathcal{G}}^{1}(\psi\circ\varphi)$ debemos mostrar que:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "(\psi\circ\varphi)\circ\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \\
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[uu, "\psi\circ\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"] & \big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "(\varphi\circ\ell_{\mathbb{1}}^{-1})\otimes\mathbb{1}"] \arrow[u, equal, "a"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$. Esto es una consecuencia de los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{1} \\
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"] \arrow[r, "\varphi\otimes\mathbb{1}"'] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[u, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"']
\end{tikzcd} \quad , \qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "(\varphi\circ\ell_{\mathbb{1}}^{-1})\otimes\mathbb{1}"] \arrow[dr, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes\mathbb{1}"'] & & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \\
 & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[ur, "\varphi\otimes\mathbb{1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\otimes\mathbb{1} \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes\mathbb{1}"'] & & \mathbb{1}\otimes(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}) \arrow[dl, "\mathbb{1}\otimes\ell_{\mathbb{1}}^{-1}"] \\
 & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} &
\end{tikzcd} \quad .$$

Por lo tanto $\xi_{\mathcal{G}}^{1}$ es un isomorfismo de grupos. Notemos que $\xi_{\bullet}^{1}$ es una transformación natural. En efecto, si $F:\ \mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}$ es un morfismo de 2-grupos, se deduce del triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & F(\mathbb{1}) \arrow[dl, "l_{F(\mathbb{1})}"'] \arrow[dr, "F(l_{\mathbb{1}})"] & \\
F(\mathbb{1}) \otimes F(\mathbb{1}) \arrow[rr, "m^F_{\mathbb{1},\mathbb{1}}"'] & & F(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\,.
\end{tikzcd}$$

que se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{G}) \arrow[r, "\alpha^1_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "\pi_0(F)"'] & \pi_2\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big) \arrow[d, "\pi_1(F)"] \\
\pi_1(\mathcal{H}) \arrow[r, "\alpha^1_{\mathcal{H}}"'] & \pi_2\big(\mathcal{N}(\mathcal{H})\big)
\end{tikzcd}$$

donde las funciones verticales son definidas por las reglas:

$$\begin{tikzcd}
\pi_2\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big) \arrow[r, "\pi_0(F)"] & \pi_2\big(\mathcal{N}\mathcal{H}\big) \\
\alpha \arrow[r, mapsto] & F(\alpha) \circ m^F_{\mathbb{1},\mathbb{1}}
\end{tikzcd}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1\big(\mathcal{G}\big) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1\big(\mathcal{H}\big)\,. \\
\varphi \arrow[r, mapsto] & F(\varphi)
\end{tikzcd}$$

Finalmente, notemos que como $\pi_i\big(\mathcal{N}\mathcal{G}\big) = 0$ para $i = 0$ y $i \geq 3$, entonces $\mathcal{N}(F)$ es una 2-equivalencia débil si y solamente si $\mathcal{N}(F)$ es una ∞-equivalencia débil. □

Se deduce del Corolario 15.1.6 y las Proposiciones 12.4.3 y 15.1.5 que el funtor nervio $\mathcal{N}\colon$ 2-**Grp** $\longrightarrow$ $\mathbf{sSet}_0$ induce un funtor esencialmente sobreyectivo:

$$\text{2-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\mathcal{N}} \mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{sSet}_0\big)$$

de la categoría homotópica de los 2-grupos en la categoría de los 2-tipos de homotopía reducidos (la categoría homotópica de los 2-grupos).

Observemos:

COROLARIO 15.1.7. *Existe un isomorfismo natural de funtores:*

(15.25)
$$\begin{tikzcd}
\text{2-}\mathbf{Grp} \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\,\Gamma"] & \mathbf{sSet}_0 \arrow[d, "\Omega_\star"] \\
\mathbf{Grpd} \arrow[r, "\mathrm{N}"'] & \mathbf{sSet}
\end{tikzcd}$$

donde s: 2-**Grp** $\longrightarrow$ **Grpd** *es el funtor grupoide subyacente y* $\Omega_\star$: $\mathbf{sSet}_0 \longrightarrow \mathbf{sSet}$ *es el funtor espacio de lazos simplicial sobre* $\star$ *de* (10.23)*.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos para empezar que:

$$\mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)_0 = \Big\{\, A \,\Big|\, A \text{ es un objeto de } \mathcal{G} \,\Big\} = \Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_0\,,$$

$$\mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)_1 = \Big\{\, f\colon\ A \longrightarrow B \ \Big|\, f \text{ es un morfismo de } \mathcal{G} \,\Big\}$$

$$\text{y} \qquad \Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_1 = \Big\{\, \alpha\colon\ \mathbb{1}\otimes X \longrightarrow Y \ \Big|\, \alpha \text{ es un morfismo de } \mathcal{G} \,\Big\},$$

donde los morfismos cara y degenerados de $\mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)$ y $\Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ son respectivamente:

$$d_0(f) = B \quad d_1(f) = A\,, \quad s_0(A) = \mathrm{id}_A\,, \quad \text{y} \quad d_0(\xi) = X \quad d_1(\xi) = Y\,, \quad s_0(A) = \ell_A^{-1}\,.$$

Definimos la función $(\Gamma_{\mathcal{G}})_0\colon\ \Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_0 \longrightarrow \mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)_0$ como la identidad, y la función $(\Gamma_{\mathcal{G}})_1\colon\ \Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_1 \longrightarrow \mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)_1$ por la regla:

$$\Bigg(\ \mathbb{1}\otimes X \xrightarrow{\alpha} Y\ \Bigg) \qquad \longmapsto \qquad \Bigg(\ Y \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathbb{1}\otimes X \xrightarrow{\ell_X^{-1}} X\ \Bigg).$$

Obtenemos así un morfismo de conjuntos simpliciales truncados:

$$\tau_1^*\Big(\Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) \longrightarrow \tau_1^*\Big(\mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)\Big) \tag{15.26}$$

donde $\tau_1^*\colon\ \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}_{\leq 1}$ es el funtor truncación.

Ya que por la Proposición 15.1.4, el Lema 10.2.4 y el Corolario 13.2.1 los conjuntos simpliciales $\Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ y $\mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)$ son 1-grupoides de Kan, $\Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ y $\mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)$ son conjuntos simpliciales débilmente 1-coesqueléticos. Por lo que para extender el morfismo (15.26) de manera única en un morfismo de conjuntos simpliciales:

$$\Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big) \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{G}}} \mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)\ ,$$

es suficiente verificar que si nos damos un 2-simplejo de $\Cap_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$:

(15.27)

$$\begin{tikzcd}
Z & \mathbb{1}\otimes Y \arrow[l, "\xi_2"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes(\mathbb{1}\otimes X) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\xi_0"'] \\
\mathbb{1}\otimes X \arrow[uu, "\xi_1"] & (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\otimes X\,, \arrow[l, "\ell_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes X"] \arrow[u, "a"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

entonces el siguiente es un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dr, "\xi_0^{-1}"] & & \\
 & \mathbb{1}\otimes Y \arrow[ur, "\ell_Y^{-1}"] & & \mathbb{1}\otimes X \arrow[dr, "\ell_X^{-1}"] & \\
Z \arrow[ur, "\xi_2^{-1}"] \arrow[rr, "\xi_1^{-1}"'] & & \mathbb{1}\otimes X \arrow[rr, "\ell_X^{-1}"'] & & X\,.
\end{tikzcd}$$

Para ello notemos que de los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes X \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "\ell_{\mathbb{1}\otimes X}"'] & Y \arrow[d, "\ell_Y"] \\
\mathbb{1}\otimes(\mathbb{1}\otimes X) \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes\xi_0"'] & \mathbb{1}\otimes X \,,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1}\otimes X \arrow[dl, "\ell_{\mathbb{1}}\otimes X"'] \arrow[dr, "\ell_{\mathbb{1}\otimes X}"] & \\
(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\otimes X \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},\mathbb{1},X}"'] & & \mathbb{1}\otimes(\mathbb{1}\otimes X)
\end{tikzcd}$$

y de (15.27), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\ell_X^{-1}\circ\xi_0^{-1}\circ\ell_Y^{-1}\circ\xi_2^{-1} &= (\xi_2\circ\ell_Y\circ\xi_0\circ\ell_X)^{-1} \\
&= \big(\xi_2\circ(\mathbb{1}\otimes\xi_0)\circ(a_{\mathbb{1},\mathbb{1},X})\circ(\ell_{\mathbb{1}}\otimes X)\circ\ell_X\big)^{-1} \\
&= (\xi_1\circ\ell_X)^{-1} = \ell_X^{-1}\circ\xi_1^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Γ *es una transformación natural:*

Si $F\colon\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}$ es un morfismo de 2-grupos es suficiente mostrar que se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_n \arrow[r, "(\Gamma_{\mathcal{G}})_n"] \arrow[d, "\Omega_\star\,\mathcal{N}(F)_n"'] & \mathrm{N}\big(s(\mathcal{G})\big)_n \arrow[d, "\mathrm{N}\,s(F)_n"] \\
\Omega_\star\big(\mathcal{N}(\mathcal{H})\big)_n \arrow[r, "(\Gamma_{\mathcal{H}})_n"'] & \mathrm{N}\big(s(\mathcal{H})\big)_n\,,
\end{tikzcd}$$

para $0\le n\le 1$.

En efecto si $n=0$ el cuadrado evidentemente conmuta. Por otro lado si $n=1$ y $\alpha\colon\mathbb{1}\otimes X\longrightarrow Y$ es un 1-simplejo de $\Omega_\star(\mathcal{N}\mathcal{H})$, los morfismos:

$$\begin{aligned}
\big(\Gamma_{\mathcal{H}}\big)_1\circ\big(\Omega_\star(\mathcal{N}F)\big)_1\big(\alpha\big) &= \big(\Gamma_{\mathcal{H}}\big)_1\Big(\ \mathbb{1}\otimes F(X)\xrightarrow{m^F_{\mathbb{1},X}}F(\mathbb{1}\otimes X)\xrightarrow{F(\xi)}FY\ \Big) \\
&= \Big(\ FY\xrightarrow{F(\xi)^{-1}}F(\mathbb{1}\otimes X)\xrightarrow{(m^F_{\mathbb{1},X})^{-1}}\mathbb{1}\otimes F(X)\xrightarrow{\ell^{-1}_{FX}}FX\ \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{y}\qquad \big(\mathrm{N}(sF)\big)_1\circ\big(\Gamma_{\mathcal{H}}\big)_1\big(\alpha\big) &= \big(\mathrm{N}(sF)\big)_1\Big(\ Y\xrightarrow{\xi^{-1}}\mathbb{1}\otimes X\xrightarrow{\ell_X^{-1}}X\ \Big) \\
&= \Big(\ FY\xrightarrow{F(\xi)^{-1}}F(\mathbb{1}\otimes X)\xrightarrow{F(\ell_X)^{-1}}FX\ \Big)
\end{aligned}$$

son iguales porque se tiene un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes FX \arrow[rr, "m^F_{\mathbb{1},X}"] & & F(\mathbb{1}\otimes X) \\
 & FX \arrow[ul, "\ell_{FX}"] \arrow[ur, "F(\ell_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

□

§15.2. Definimos el *funtor* 2-*nervio* (*geométrico*) de los 2-grupos:

$$(15.28)\qquad \text{2-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathcal{N}^2} \mathbf{ssSet}_0\,,$$

como la composición:

$$(15.29)\qquad \begin{tikzcd} \text{2-}\mathbf{Grp} \arrow[r] & \text{2-}\mathbf{Grp}^{\Delta^{op}} \arrow[r] & \mathbf{sSet}_0^{\Delta^{op}} \cong \mathbf{ssSet}_0\,, \\ \mathcal{G} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathcal{G}^{[\bullet]} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathcal{N}\big(\mathcal{G}^{[\bullet_1]}\big)_{\bullet_2} \end{tikzcd}$$

donde la asignación $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{[\bullet]}$ es inducida del 2-funtor (14.15) y $\mathcal{N}$ es el funtor nervio de los 2-grupos (15.6) (ver también el funtor (15.30) y el 2-funtor (15.54) como en [**LP08**]).

Veamos una construcción equivalente del funtor 2-nervio $\mathcal{N}^2$: Sea $\mathcal{G}$ un 2-grupo y $q \geq 0$ un entero. Si (X,α) y (Y,β) son q-simplejos de $\mathcal{G}$, definimos un *morfismo de q-simplejos* $f\colon (X,\alpha) \longrightarrow (Y,\beta)$ como una familia de morfismos de $\mathcal{G}$:

$$\Big\{ f_{ij}\colon X_{ij} \longrightarrow Y_{ij} \;\Big|\, 0 \leq i < j \leq q \Big\}$$

tal que si $0 \leq i < j < k \leq q$, se tiene el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_{ij} \otimes X_{jk} \arrow[r, "\alpha_{ijk}"] \arrow[d, "f_{ij}\otimes f_{jk}"'] & X_{ik} \arrow[d, "f_{ik}"] \\ Y_{ij} \otimes Y_{jk} \arrow[r, "\beta_{ijk}"'] & Y_{ik}\,. \end{tikzcd}$$

El conjunto de los q-simplejos y de los morfismos de q-simplejos de $\mathcal{G}$ forman un grupoide $\underline{\mathcal{G}_q}$ cuya composición es definida argumento por argumento.

Vamos a definir un funtor:

$$(15.30)\qquad \begin{tikzcd} \text{2-}\mathbf{Grp} \times \Delta^{op} \arrow[r] & \mathbf{Grpd} \\ \big(\mathcal{G},[q]\big) \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \underline{\mathcal{G}_q} \end{tikzcd}$$

cuya composición con el funtor "conjunto de objetos" $\mathbf{Grpd} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es la restricción del funtor (15.2) a los 2-grupos.

Si $\varphi\colon [q] \longrightarrow [q']$ es un morfismo de Δ y $F = (F, m^F)\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un morfismo laxo y unitario de 2-grupos, el funtor:

$$(15.31)\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathcal{G}_{q'}} \arrow[rr, "F^{\varphi}"] & & \underline{\mathcal{H}_q} \\ (X,\alpha) \arrow[d, "f"'] & & (X',\alpha') \arrow[d, "f'"] \\ (Y,\beta) & \longmapsto & (Y',\beta') \end{tikzcd}$$

ya fue definido en objetos por la fórmula:

$$X'_{ij} = \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathcal{H}} & \text{si} \quad \varphi i = \varphi j \\ FX_{\varphi i \varphi j} & \text{si} \quad \varphi i < \varphi j \end{cases} \tag{15.32}$$

siempre que $0 \leq i < j \leq q$ y:

$$\alpha'_{ijk} = \begin{cases} \ell^{-1}_{FX_{\varphi i \varphi k}} \colon \mathbb{1} \otimes FX_{\varphi i \varphi k} \longrightarrow FX_{\varphi i \varphi k} & \text{si} \quad \varphi i = \varphi j \leq \varphi k \\ r^{-1}_{FX_{\varphi i \varphi k}} \colon FX_{\varphi i \varphi k} \otimes \mathbb{1} \longrightarrow FX_{\varphi i \varphi k} & \text{si} \quad \varphi i \leq \varphi j = \varphi k \\ F(\alpha_{\varphi i \varphi j \varphi k}) \circ m^F \colon FX_{\varphi i \varphi j} \otimes FX_{\varphi j \varphi k} \longrightarrow FX_{\varphi i \varphi k} & \text{si} \quad \varphi i < \varphi j < \varphi k \end{cases} \tag{15.33}$$

para $0 \leq i < j < k \leq q$.

Definimos el funtor (15.31) en morfismos por la regla:

$$f'_{ij} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{1}} & \varphi(i) = \varphi(j) \\ F(f_{\varphi i \, \varphi j}) & \varphi(i) < \varphi(j) \end{cases}$$

si $0 \leq i < j \leq q$.

Para mostrar que f' definido de esta forma es efectivamente un morfismo de q-simplejos, debemos verificar que:

$$\begin{tikzcd} X'_{ij} \otimes X'_{jk} \arrow[r, "\alpha'_{ijk}"] \arrow[d, "f'_{ij} \otimes f'_{jk}"'] & X'_{ik} \arrow[d, "f'_{ik}"] \\ Y'_{ij} \otimes Y'_{jk} \arrow[r, "\beta'_{ijk}"'] & Y'_{ik} \,. \end{tikzcd}$$

es un cuadrado conmutativo de $\mathcal{H}$ siempre que $0 \leq i < j < k \leq q$. Para ello observemos que si $0 \leq i' < j' < k' \leq q'$ se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(X_{i'j'}) \otimes F(X_{j'k'}) \arrow[r, "m^F"] \arrow[d, "F(f_{i'j'}) \otimes F(f_{j'k'})"'] & F(X_{i'j'} \otimes X_{j'k'}) \arrow[r, "F(\alpha_{i'j'k'})"] \arrow[d, "F(f_{i'j'} \otimes f_{j'k'})"] & F(X_{i'k'}) \arrow[d, "F(f_{i'k'})"] \\ F(Y_{i'j'}) \otimes F(Y_{j'k'}) \arrow[r, "m^F"'] & F(Y_{i'j'} \otimes Y_{j'k'}) \arrow[r, "F(\beta_{i'j'k'})"'] & F(Y_{i'k'}) \end{tikzcd}$$

y si $0 \leq i' < k' \leq q'$, los cuadrados:

$$\begin{tikzcd} F(X_{i'k'}) \arrow[r, "\ell_{F(X_{i'k'})}"] \arrow[d, "F(f_{i'k'})"'] & \mathbb{1} \otimes F(X_{i'k'}) \arrow[d, "\mathbb{1} \otimes F(f_{i'k'})"] \\ F(Y_{i'k'}) \arrow[r, "\ell_{F(Y_{i'k'})}"'] & \mathbb{1} \otimes F(Y_{i'k'}) \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} F(X_{i'k'}) \arrow[r, "r_{F(X_{i'k'})}"] \arrow[d, "F(f_{i'k'})"'] & F(X_{i'k'}) \otimes \mathbb{1} \arrow[d, "F(f_{i'k'}) \otimes \mathbb{1}"] \\ F(Y_{i'k'}) \arrow[r, "r_{F(Y_{i'k'})}"'] & F(Y_{i'k'}) \otimes \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Observemos que el funtor adjunto:

$$\begin{tikzcd}
2\text{-}\mathbf{Grp} \arrow[r] & \mathbf{ssSet} \\
\mathcal{G} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{N}\big(\underline{\mathcal{G}_{\bullet_2}}\big)_{\bullet_1}
\end{tikzcd}$$

del funtor composición:

$$\begin{tikzcd}
2\text{-}\mathbf{Grp} \times \Delta^{op} \arrow[r, "(15.30)"] & \mathbf{Grpd} \arrow[r, "\mathrm{N}"] & \mathbf{sSet} \\
\big(\mathcal{G}, [q]\big) \arrow[r, mapsto] & \underline{\mathcal{G}_q} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{N}\big(\underline{\mathcal{G}_q}\big)
\end{tikzcd}$$

es isomorfo al funtor 2-nervio de los 2-grupos.

En efecto, si $p, q \geq 0$ y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, se verifica sin dificultad que los conjuntos:

$$\mathrm{N}\big(\underline{\mathcal{G}_q}\big)_p = \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big([p], \underline{\mathcal{G}_q}\big) = p\text{-simplejos del grupoide } \underline{\mathcal{G}_q}$$

y

$$\mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{p,q} = \mathcal{N}\big(\mathcal{G}^{[p]}\big)_q = q\text{-simplejos del 2-grupos } \mathcal{G}^{[p]}$$

se identifican con el conjunto cuyos elementos son las parejas formadas por una familia de sucesiones de morfismos de $\mathcal{G}$:

$$\left\{ X_{ij}^0 \xrightarrow{f_{ij}^1} \ldots \xrightarrow{f_{ij}^p} X_{ij}^p \;\middle|\; 0 \leq i < j \leq q \right\} \tag{15.34}$$

y una familia de morfismos de la forma:

$$\left\{ X_{ij}^s \otimes X_{jk}^s \xrightarrow{\alpha_{ijk}^s} X_{ik}^s \;\middle|\; 0 \leq i < j < k \leq q \;\; 0 \leq s \leq p \right\} \tag{15.35}$$

tales que si $0 \leq i < j < k \leq q$ y $0 \leq s \leq p-1$ se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_{ik}^s \arrow[r, "f_{ik}^{s+1}"] & X_{ik}^{s+1} \\
X_{ij}^s \otimes X_{jk}^s \arrow[u, "\alpha_{ijk}^s"] \arrow[r, "f_{ij}^s \otimes f_{jk}^s"'] & X_{ij}^{s+1} \otimes X_{jk}^{s+1} \arrow[u, "\alpha_{ijk}^{s+1}"']
\end{tikzcd}$$

y si $0 \leq i < j < k < l \leq q$ y $0 \leq s \leq p$ se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_{il}^s & X_{ij}^s \otimes X_{jl}^s \arrow[l, "\alpha_{ijl}^s"'] \\
& X_{ij}^s \otimes \big(X_{jk}^s \otimes X_{kl}^s\big) \arrow[u, "X_{ij}^s \otimes \alpha_{jkl}^s"'] \arrow[d, phantom, "a \wr ||"] \\
X_{ik}^s \otimes X_{kl}^s \arrow[uu, "\alpha_{ikl}^s"] & \big(X_{ij}^s \otimes X_{jk}^s\big) \otimes X_{kl}^s \, . \arrow[l, "\alpha_{ijk}^s \otimes X_{kl}^s"]
\end{tikzcd}$$

Notemos también que si $\varphi\colon [p'] \longrightarrow [p]$ y $\psi\colon [q'] \longrightarrow [q]$ son dos morfismos de la categoría simplicial Δ y $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un morfismo laxo y unitario de 2-grupos, la imagen por la función inducida:

$$\mathrm{N}\big(\underline{\mathcal{G}_q}\big)_p \cong \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{p,q} \xrightarrow{\mathcal{N}^2(F)_{\varphi,\psi}} \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{p',q'} \cong \mathrm{N}\big(\underline{\mathcal{H}_{q'}}\big)_{p'}$$

de una pareja (15.34) y (15.35) que cumple las propiedades de arriba, es la pareja de familias:

$$\Big\{\, Y^0_{ab} \xrightarrow{g^0_{ab}} \dots \xrightarrow{g^{p'}_{ab}} Y^{p'}_{ab} \;\Big|\; 0 \le a < b \le q' \,\Big\} \qquad \text{y}$$

$$\Big\{\, Y^t_{ab} \otimes Y^t_{bc} \xrightarrow{\beta^t_{abc}} Y^t_{ac} \;\Big|\; 0 \le a < b < c \le q' \;\; 0 \le t \le p' \,\Big\}$$

definidas por las fórmulas:

$$Y^t_{ab} = \begin{cases} \mathbb{1} & \psi(a) = \psi(b) \\ FX^{\varphi t}_{\psi a \psi b} & 0 \le \psi(a) < \psi(b) \le q \end{cases} \qquad \text{y}$$

$$g^t_{ab} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{1}} & \psi(a) = \psi(b) \\ \mathrm{id}_{FX^{\varphi t}_{\psi a \psi b}} & 0 \le \psi(a) < \psi(b) \le q \quad \text{y} \quad \varphi(t-1) = \varphi(t) \\ F\big(f^{\varphi t}_{\psi a \psi b} \circ \cdots \circ f^{\varphi(t-1)+1}_{\psi a \psi b}\big) & 0 \le \psi(a) < \psi(b) \le q \quad \text{y} \quad 0 \le \varphi(t-1) < \varphi(t) \le p \end{cases}$$

si $0 \le a < b \le q'$ y $0 \le t \le p'$; y:

$$\beta^t_{abc} = \begin{cases} \ell^{-1}_{FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c}}\colon \mathbb{1} \otimes FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c} \longrightarrow FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c} & \text{si} \quad \psi a = \psi b \le \psi c \\ r^{-1}_{FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c}}\colon FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c} \otimes \mathbb{1} \longrightarrow FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c} & \text{si} \quad \psi a \le \psi b = \psi c \\ F\alpha^{\varphi t}_{\psi a \psi b \psi c} \circ m^F\colon FX^{\varphi t}_{\psi a \psi b} \otimes FX^{\varphi t}_{\psi b \psi c} \longrightarrow FX^{\varphi t}_{\psi a \psi c} & \text{si} \quad \psi a < \psi b < \psi c \end{cases}$$

si $0 \le a < b < c \le q'$ y $0 \le t \le p'$.

Hemos demostrado así el siguiente enunciado:

Lema 15.2.1. *Si $p, q \ge 0$ y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, existe una biyección natural entre el conjunto de los q-simplejos de el 2-grupo $\mathcal{G}^{[p]}$ y el conjunto de los p-simplejos del nervio del grupoide $\underline{\mathcal{G}_q}$ de los q-simplejos del 2-grupo $\mathcal{G}$:*

$$\mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{p,q} = \mathcal{N}\big(\mathcal{G}^{[p]}\big)_q \cong \mathrm{N}\big(\underline{\mathcal{G}_q}\big)_p .$$

Mostremos:

Teorema 15.2.2. *Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, el conjunto bisimplicial reducido $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_2^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{diag})$ de la Proposición 11.3.1.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, vamos a mostrar que el conjunto bisimplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ cumple las propiedades (I)-(V) del Corolario 11.3.4.

Para comenzar obseremos que por el Lema 14.3.1 y el Corolario 15.1.6 el conjunto bisimplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ cumple la propiedad (I) del Corolario 11.3.4. Del mismo modo la propiedad (II) se deduce de la Proposición 15.1.4, y la propiedad (III) se sigue del Lema 15.2.1 y el Corolario 13.2.1.

En el resto de la prueba vamos a llamar *prisma de* $\mathcal{G}$ a un diagrama de $\mathcal{G}$ formado por nueve objetos y doce morfismos acomodados como sigue:

$$(15.36)\qquad \begin{tikzcd}
 & A_2 \otimes A_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "\varphi_2\otimes\varphi_0"'] \arrow[dd, "\tau_2\otimes\tau_0"] & & A_1 \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[dd, "\tau_1"] \\
B_2 \otimes B_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\psi_2\otimes\psi_0"'] & & B_1 \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
 & C_2 \otimes C_0 \arrow[rr, "h"'] & & C_1 ,
\end{tikzcd}$$

cuyas caras no son necesariamente diagramas conmutativos de $\mathcal{G}$.

Para verificar la propiedad (IV) del Corolario 11.3.4 hay que mostrar que si $0 \leq k \leq 2$ la función:

$$(15.37)\qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)$$

inducida por el morfismo inclusión canónica $\Lambda^{2,k} \hookrightarrow \Delta^2$ es sobreyectiva.

En primer lugar observemos que el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ se identifica con el conjunto de los prismas (15.36) de $\mathcal{G}$ cuyas caras en forma de cuadrados son diagramas conmutativos, pero no necesariamente las caras en forma de triángulos.

Por otro lado, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ se identifica con el conjunto de las parejas de triángulos no necesariamente conmutativos de $\mathcal{G}$:

$$\left(\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Y \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
 & Z
\end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Y' \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
 & Z'
\end{tikzcd} \right).$$

La imagen por la función (15.37) de un prisma (15.36) en su dominio es igual a la pareja de triángulos no necesariamente conmutativos:

$$\left(\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dd, "\tau_i"] \\
B_i \arrow[dr, "\psi_i"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
 & C_i
\end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd}
 & A_j \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dd, "\tau_j"] \\
B_j \arrow[dr, "\psi_i"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
 & C_j
\end{tikzcd} \right)$$

donde $0 \leq i < j \leq 2$ con $i, j \neq k$.

Para mostrar que (15.37) es una función sobreyectiva recordemos que por el Lema 14.2.1 existen funtores $\iota^d\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ y $\iota^g\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ e isomorfismos naturales:

$$X \otimes \iota^d(X) \xrightarrow[\cong]{\alpha_X} \mathbb{1} \xleftarrow[\cong]{\beta_X} \iota^g(X) \otimes X\,.$$

La función (15.37) *es sobreyectiva si* $k = 2$: Consideremos la pareja de los triángulos no necesariamente conmutativos de $\mathcal{G}$:

$$\left(\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dd, "\tau_0"] \\ B_0 \arrow[dr, "\psi_0"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\ & C_0 \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & A_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "\tau_1"] \\ B_1 \arrow[dr, "\psi_1"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\ & C_1 \end{tikzcd}\right).$$

Definimos el triángulo que falta del prisma (15.36) como:

$$\left(\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[dd, "\tau_2"] \\ B_2 \arrow[dr, "\psi_2"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\ & C_2 \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd} & A_1 \otimes \iota^g(A_0) \arrow[dl, "\varphi_1 \otimes \iota^g(\varphi_0)"'] \arrow[dd, "\tau_1 \otimes \iota^g(\tau_0)"] \\ B_1 \otimes \iota^g(B_0) \arrow[dr, "\psi_1 \otimes \iota^g(\psi_0)"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\ & C_1 \otimes \iota^g(C_0) \end{tikzcd}\right)$$

y los morfismos f, g y h como los siguientes morfismos composición de $\mathcal{G}$:

$$f\colon\Big(\ \big(A_1 \otimes \iota^g(A_0)\big) \otimes A_0 \xrightarrow{a} A_1 \otimes \big(\iota^g(A_0) \otimes A_0\big) \xrightarrow{A_1 \otimes \beta_{A_0}} A_1 \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{r^{-1}_{A_1}} A_1\ \Big),$$

$$g\colon\Big(\ \big(B_1 \otimes \iota^g(B_0)\big) \otimes B_0 \xrightarrow{a} B_1 \otimes \big(\iota^g(B_0) \otimes B_0\big) \xrightarrow{B_1 \otimes \beta_{B_0}} B_1 \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{r^{-1}_{B_1}} B_1\ \Big)$$

$$\text{y} \qquad h\colon\Big(\ \big(C_1 \otimes \iota^g(C_0)\big) \otimes C_0 \xrightarrow{a} C_1 \otimes \big(\iota^g(C_0) \otimes C_0\big) \xrightarrow{C_1 \otimes \beta_{C_0}} C_1 \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{r^{-1}_{C_1}} C_1\ \Big).$$

Obtenemos entonces los cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \big(A_1 \otimes \iota^g(A_0)\big) \otimes A_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\big(\varphi_1 \otimes \iota^g(\varphi_0)\big) \otimes \varphi_0"'] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \big(B_1 \otimes \iota^g(B_0)\big) \otimes B_0 \arrow[r, "g"'] & B_1\,, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \big(B_1 \otimes \iota^g(B_0)\big) \otimes B_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\big(\psi_1 \otimes \iota^g(\psi_0)\big) \otimes \psi_0"'] & B_1 \arrow[d, "\psi_1"] \\ \big(C_1 \otimes \iota^g(C_0)\big) \otimes C_0 \arrow[r, "h"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

$$\text{y} \qquad \begin{tikzcd} \big(A_1 \otimes \iota^g(A_0)\big) \otimes A_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\big(\tau_1 \otimes \iota^g(\tau_0)\big) \otimes \tau_0"'] & A_1 \arrow[d, "\tau_1"] \\ \big(C_1 \otimes \iota^g(C_0)\big) \otimes C_0 \arrow[r, "h"'] & C_1\,; \end{tikzcd}$$

porque si $\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$ y $\varphi'\colon\ X' \longrightarrow Y'$ son morfismos arbitrarios de $\mathcal{G}$, se tienen los cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \arrow[d, "r_Y"] \\
X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "\varphi\otimes\mathbb{1}"'] & Y \otimes \mathbb{1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X \otimes \iota^g X') \otimes X' \arrow[r, "(\varphi\otimes\iota^g\varphi')\otimes\varphi'"] \arrow[d, "a"'] & (Y \otimes \iota^g Y') \otimes Y' \arrow[d, "a"] \\
X \otimes (\iota^g X' \otimes X') \arrow[r, "\varphi\otimes(\iota^g\varphi'\otimes\varphi')"'] & Y \otimes (\iota^g Y' \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

$$\text{y} \qquad \begin{tikzcd}
X \otimes \big(\iota^g X' \otimes X'\big) \arrow[r, "X\otimes\beta_{X'}"] \arrow[d, "\varphi\otimes(\iota^g\varphi'\otimes\varphi')"'] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[d, "\varphi\otimes\mathbb{1}"] \\
Y \otimes \big(\iota^g Y' \otimes Y'\big) \arrow[r, "Y\otimes\beta_{Y'}"'] & Y \otimes \mathbb{1}\,.
\end{tikzcd}$$

La función (15.37) *es sobreyectiva si* $k = 0$: Se muestra análogamente al caso $k = 2$.

La función (15.37) *es sobreyectiva si* $k = 1$: Consideremos la pareja de triángulos no necesariamente conmutativos de $\mathcal{G}$:

$$\left(\begin{tikzcd}
& A_0 \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dd, "\tau_0"] \\
B_0 \arrow[dr, "\psi_0"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
& C_0
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
& A_2 \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[dd, "\tau_2"] \\
B_2 \arrow[dr, "\psi_2"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
& C_2
\end{tikzcd}\right).$$

Definimos el triángulo que falta como :

$$\left(\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "\tau_1"] \\
B_1 \arrow[dr, "\psi_1"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
& C_1
\end{tikzcd}\right)
=
\left(\begin{tikzcd}
& A_0 \otimes A_2 \arrow[dl, "\varphi_0\otimes\varphi_2"'] \arrow[dd, "\tau_0\otimes\tau_2"] \\
B_1 \otimes B_2 \arrow[dr, "\psi_0\otimes\psi_2"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} \\
& C_1 \otimes C_2
\end{tikzcd}\right)$$

y a los morfismos f, g y h como las identidades. Se sigue de inmediato que en el prisma que resulta (15.36), las caras en forma de cuadrados son diagramas conmutativos.

Mostremos finalmente la propiedad (V) del Corolario 11.3.4. Comencemos por verificar que si $0 \leq k \leq 2$, la función:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^2 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \underset{\operatorname{Hom}_{\mathbf{ssSet}}(\partial\Delta^2 \boxtimes \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G}))}{\times} \operatorname{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^2 \boxtimes \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)
\end{tikzcd} \tag{15.38}$$

inducida del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^2 \times \Delta^2 & \Delta^2 \times \Lambda^{2,k} \arrow[l, hook'] \\
\partial\Delta^2 \times \Delta^2 \arrow[u, hook] & \partial\Delta^2 \times \Lambda^{2,k} \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

es sobreyectiva.

Observemos en primer lugar que el dominio de la función (15.38) es isomorfo al conjunto de los prismas (15.36) que cumplen las dos propiedades siguientes: Las caras en forma de cuadrados son diagramas conmutativos y los triángulos:

$$\begin{tikzcd}
& A_0 \arrow[ld, "\varphi_0"'] \arrow[dd, "\tau_0"] & & A_1 \arrow[ld, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "\tau_1"] & & & A_2 \arrow[ld, "\varphi_2"'] \arrow[dd, "\tau_2"] & \\
B_0 \arrow[rd, "\psi_0"'] & & B_1 \arrow[rd, "\psi_1"'] & & \text{y} & B_2 \arrow[rd, "\psi_2"'] & & , \\
& C_0 & & C_1 & & & C_2 &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. En particular las dos caras en forma de triángulos del diagrama (15.36) son diagramas conmumtativos.

Por otro lado el codominio de (15.38) se identifica con el conjunto de los prismas (15.36) cuyas caras en forma de cuadrados son diagramas conmutativos y solamente los dos triángulos:

$$\begin{tikzcd}
& A_i \arrow[ld, "\varphi_i"'] \arrow[dd, "\tau_i"] & & & A_j \arrow[ld, "\varphi_i"'] \arrow[dd, "\tau_j"] & \\
B_i \arrow[rd, "\psi_i"'] & & \text{y} & B_j \arrow[rd, "\psi_i"'] & & , \\
& C_i & & & C_j &
\end{tikzcd}$$

donde $0 \leq i < j \leq 2$ y $i, j \neq k$, son conmutativos.

La función (15.38) es entonces la función que olvida que el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd}
& A_k \arrow[ld, "\varphi_k"'] \arrow[dd, "\tau_k"] & \\
B_k \arrow[rd, "\psi_k"'] \arrow[r, phantom, "?"] & & , \\
& C_k &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se demuestra que de hecho la función (15.38) es biyectiva. En efecto si $k = 1$ esta es una consecuencia de que $\mathcal{G}$ sea un grupoide. Deducimos el caso $k = 0, 2$ del siguiente enunciado:

Lema 15.2.3. *Si* $f\colon X \longrightarrow Y$ *y* $\xi\colon X \otimes X' \longrightarrow Y \otimes Y'$ *son morfismos de un* 2*-grupo* $\mathcal{G}$*, existe un único morfismo* $f'\colon X' \longrightarrow Y'$ *tal que* $f \otimes f' = \xi$*.*

Demostración. Como todos los objetos de $\mathcal{G}$ son invertibles, en particular el funtor $X \otimes - \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una equivalencia de categorías. Deducimos que existe un único morfismo $f' \colon X' \longrightarrow Y'$ tal que $X \otimes f' = (f \otimes Y')^{-1} \circ \xi$:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes X' \arrow[r, "X\otimes f'"] \arrow[dr, "\xi"'] & X \otimes Y' \arrow[d, "f\otimes Y'"] \\
 & Y \otimes Y'
\end{tikzcd}$$

Dicho de otro modo existe un único morfismo $f' \colon X' \longrightarrow Y'$ tal que:

$$f \otimes f' = (f \otimes Y') \circ (X \otimes f') = \xi .$$

$\square$

Mostremos para concluir que la función:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^1 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^1 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}(\partial\Delta^1 \boxtimes \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G}))}{\times} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^1 \boxtimes \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)
\end{tikzcd} \tag{15.39}$$

inducida del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^1 \times \Delta^2 & \Delta^1 \times \Lambda^{2,k} \arrow[l, hook'] \\
\partial\Delta^1 \times \Delta^2 \arrow[u, hook] & \partial\Delta^1 \times \Lambda^{2,k} \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

es biyectiva (en particular sobreyectiva) si $0 \leq k \leq 2$.

Para ello observemos que el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^1 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ es isomorfo al conjunto de los cuadrados conmutativos de la forma:

$$\begin{tikzcd}
X_2 \otimes X_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_2\otimes\varphi_0"'] & X_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
Y_2 \otimes Y_0 \arrow[r, "g"'] & Y_1 ;
\end{tikzcd} \tag{15.40}$$

mientras que el codominio de (15.39) se identifica con el conjunto cuyos objetos son determinados por seis objetos y cuatro morfismos como sigue:

$$\left(\begin{tikzcd}
X_2 \otimes X_0 \arrow[r, "f"] & X_1 & & X_i \arrow[d, "\varphi_i"'] & & X_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\
 & & ; & & , & \\
Y_2 \otimes Y_0 \arrow[r, "g"'] & Y_1 & & Y_i & & Y_j
\end{tikzcd}\right)$$

donde $0 \leq i < j \leq 2$ y $i, j \neq k$.

La función (15.39) es entonces la función que olvida al morfismo φ_k; en particular se muestra que es biyectiva para $0 \leq k \leq 2$. En efecto, si $k = 1$ entonces $\varphi_1 = g \circ (\varphi_2 \otimes \varphi_0) \circ f^{-1}$; y si $k = 0$ o $k = 2$ entonces φ_k es el único morfismo de $\mathcal{G}$ tal que $\varphi_2 \otimes \varphi_1 = g^{-1} \circ \varphi_1 \circ f$ (ver el Lema 15.2.3). ☐

§15.2.1. Escribimos $\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}$ para denotar a la subcategoría plena de la categoría producto $\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}$ cuyos objetos son las parejas $\big([p],[q]\big)$ tales que $p + q \leq 3$ (ver §12.7.1) y consideremos la adjunción:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\mu_{3\,*}"'] & \mathbf{ssSet} \arrow[l, bend right, "\mu_3^*"'] \end{tikzcd} , \tag{15.41}$$

inducida del funtor inclusión canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta} \arrow[r, hook, "\mu_3"] & \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \end{tikzcd} . \tag{15.42}$$

Observemos que si A es un objeto de la categoría $\widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}}$ tal que $A_{p,0} = \star$ si $0 \leq p \leq 3$, entonces el conjunto simplicial $\mu_{3\,*}(A)$ es tal que $\mu_{3\,*}(A)_{p,0} = \star$ para todo $p \geq 0$. Por lo tanto, si denotamos como $\widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}_0}$ a la subcategoría plena de $\widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}}$ cuyos objetos son los conjuntos bisimpliciales truncados A tales que $A_{p,0} = \star$ para $0 \leq p \leq 3$. La adjunción (15.41) induce por restricción una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}_0} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "\mu_{3\,*}"'] & \mathbf{ssSet}_0 \arrow[l, bend right, "\mu_3^*"'] \end{tikzcd} . \tag{15.43}$$

COROLARIO 15.2.4. *El 2-nervio $\mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)$ de un 2-grupo $\mathcal{G}$ pertenece a la imagen esencial del funtor $\mu_{3\,*}$ de la adjunción* (15.43). *En particular si X es un objeto de* $\mathbf{ssSet}_0$*, la función que trunca:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathbf{\Delta} \underset{\leq 3}{\times} \mathbf{\Delta}_0}}\Big(\mu_3^*(X), \mu_3^*\big(\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)\Big).$$

es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{G}$ un 2-grupo. Si $p, q \geq 0$ por los Lemas 15.2.1, 15.1.1 y 13.1.1, el conjunto simplicial $\mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{\bullet,q}$ es 3-coesquelético y el conjunto simplicial $\mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{p,\bullet}$ es 2-coesquelético. Se sigue de los Lemas 12.7.1 y 12.7.2 que para mostrar el Corolario es suficiente demostrar que el cuadrado:

(15.44)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)
\end{tikzcd}$$

inducido del cuadrado de conjuntos bisimpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^p \boxtimes \Delta^q & \partial\Delta^p \boxtimes \Delta^q \arrow[l, hook'] \\
\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q \arrow[u, hook] & \partial\Delta^p \boxtimes \partial\Delta^q , \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

es cartesiano para todo $0 \leq p \leq 2$ y $0 \leq q \leq 3$ tales que $p + q \geq 4$, es decir para las parejas $(p, q) \in \Big\{(2,2),\ (2,3),\ (1,3)\Big\}$.

Para mostrar los casos $(2,2)$ y $(2,3)$ consideremos el diagrama:

(15.45)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^2 \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Lambda^{2,1} \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Lambda^{2,1} \boxtimes \partial\Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big),
\end{tikzcd}$$

inducido del siguiente diagrama de conjuntos bisimpliciales:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^2 \boxtimes \Delta^q & \partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^q \arrow[l, hook'] & \Lambda^{2,1} \boxtimes \Delta^q \arrow[l, hook'] \\
\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^q \arrow[u, hook] & \partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^q \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] & \Lambda^{2,1} \boxtimes \partial\Delta^q \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ya que $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}$ es un 1-grupoide de Kan para $q \geq 0$, sabemos que la composición de las funciones horizontales de (15.45) son biyectivas. En particular, si $p = 2$ y $2 \leq q \leq 3$ el cuadrado (15.44) es cartesiano siempre que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Lambda^{2,1} \boxtimes \Delta^q, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)$$

sea inyectiva.

Si $q = 3$, observemos que de hecho la siguiente función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)$$

es inyectiva. En efecto, sabemos que $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{p,\bullet}$ es un 2-grupoide de Kan si $p \geq 0$, en particular la composición:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Lambda^{3,1}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)$$

es biyectiva.

Si $q = 2$ mostremos que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Lambda^{2,1} \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \tag{15.46}$$

es inyectiva.

Para empezar observemos que el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ se identifica con el conjunto de los diagramas en $\mathcal{G}$ de la forma:

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \otimes A_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "\varphi_2\otimes\varphi_0"'] \arrow[dd, "\tau_2\otimes\tau_0" near end] & & A_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "\tau_1"] \\
B_2 \otimes B_0 \arrow[rr, "g" near end] \arrow[dr, "\psi_2\otimes\psi_0"'] & & B_1 \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
 & C_2 \otimes C_0 \arrow[rr, "h"'] & & C_1
\end{tikzcd} \tag{15.47}$$

cuyas caras en forma de cuadrados son diagramas conmutativos, pero no necesariamente las caras en forma de triángulos.

Por otro lado, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^2 \boxtimes \partial\Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ se identifica con el conjunto de las ternas de triángulos no necesariamente conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & A_0 \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dd, "\tau_0"] & & & A_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "\tau_1"] & & & & A_2 \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[dd, "\tau_2"] & \\
B_0 \arrow[dr, "\psi_0"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} & & B_1 \arrow[dr, "\psi_1"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} & & \text{y} & B_2 \arrow[dr, "\psi_2"'] \arrow[r, phantom, "?"] & {} & , \\
 & C_0 & & & C_1 & & & & C_2 &
\end{tikzcd}$$

y el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Lambda^{2,1} \boxtimes \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ se identifica con el conjunto de los diagramas de la forma:

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \otimes A_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "\varphi_2\otimes\varphi_0"'] & & A_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \\
B_2 \otimes B_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\psi_2\otimes\psi_0"'] & & B_1 \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
 & C_2 \otimes C_0 \arrow[rr, "h"'] & & C_1 \, .
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados son conmutativos. Se verifica sin dificultad que la función (15.46) es inyectiva porque olvida la conmutatividad de un cuadrado.

Finalmente para mostrar que el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^1 \boxtimes \Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^1 \boxtimes \Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\Delta^1 \boxtimes \partial\Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(\partial\Delta^1 \boxtimes \partial\Delta^3, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)
\end{tikzcd} \tag{15.48}$$

es cartesiano; observemos que en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^1\boxtimes\Delta^3,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^1\boxtimes\Delta^3,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^1\boxtimes\partial\Delta^3,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^1\boxtimes\partial\Delta^3,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^1\boxtimes\Lambda^{3,k},\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^1\boxtimes\Lambda^{3,k},\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)
\end{tikzcd}$$

inducido del diagrama de conjuntos bisimplicales:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^1\boxtimes\Delta^3 & \partial\Delta^1\boxtimes\Delta^3 \arrow[l, hook'] \\
\Delta^1\boxtimes\partial\Delta^3 \arrow[u, hook] & \partial\Delta^1\boxtimes\partial\Delta^3 \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \\
\Delta^1\boxtimes\Lambda^{3,k} \arrow[u, hook] & \partial\Delta^1\boxtimes\Lambda^{3,k}\,, \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

la composición de los morfismos verticales son biyecciones porque $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{p,\bullet}$ es un 2-grupoide de Kan para $p\geq 0$.

Por lo tanto el cuadrado (15.48) es cartesiano si la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^1\boxtimes\partial\Delta^3,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\Delta^1\boxtimes\Lambda^{3,k},\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\partial\Delta^1\boxtimes\partial\Delta^3,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \tag{15.49}$$

es inyectiva.

Para mostrar esto notemos que cada elemento del dominio de la función (15.49) se puede identificar con una sexteta formada por dos diagramas no necesariamente conmutativos de $\mathcal{G}$ de la forma:

(15.50)

$$\begin{tikzcd}
X_{03} & & X_{01}\otimes X_{13} \arrow[ll, "\xi_2"'] \\
 & & X_{01}\otimes(X_{12}\otimes X_{23}) \arrow[u, "X_{01}\otimes\xi_0"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
X_{02}\otimes X_{23} \arrow[uu, "\xi_1"] & & (X_{01}\otimes X_{12})\otimes X_{23} \arrow[ll, "\xi_3\otimes X_{23}"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
X'_{03} & & X'_{01}\otimes X'_{13} \arrow[ll, "\xi'_2"'] \\
 & & X'_{01}\otimes(X'_{12}\otimes X'_{23}) \arrow[u, "X'_{01}\otimes\xi'_0"'] \arrow[d, phantom, "a\wr\|"] \\
X'_{02}\otimes X'_{23} \arrow[uu, "\xi'_1"] & & (X'_{01}\otimes X'_{12})\otimes X'_{23} \arrow[ll, "\xi'_3\otimes X'_{23}"]
\end{tikzcd}\;,$$

y cuatro diagramas conmutativos de $\mathcal{G}$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
X_{12}\otimes X_{23} \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "f_{12}\otimes f_{23}"'] & X_{13} \arrow[d, "f_{13}"] \\
X'_{12}\otimes X'_{23} \arrow[r, "\xi'_0"'] & X'_{13}
\end{tikzcd}\;,\qquad
\begin{tikzcd}
X_{02}\otimes X_{23} \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "f_{02}\otimes f_{23}"'] & X_{03} \arrow[d, "f_{03}"] \\
X'_{02}\otimes X'_{23} \arrow[r, "\xi'_1"'] & X'_{03}
\end{tikzcd}\;, \tag{15.51}$$

$$\begin{tikzcd} X_{01}\otimes X_{13} \arrow[r, "\xi_2"] \arrow[d, "f_{01}\otimes f_{13}"'] & X_{03} \arrow[d, "f_{03}"] \\ X'_{01}\otimes X'_{13} \arrow[r, "\xi'_2"'] & X'_{03} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} X_{01}\otimes X_{12} \arrow[r, "\xi_3"] \arrow[d, "f_{01}\otimes f_{12}"'] & X_{02} \arrow[d, "f_{02}"] \\ X'_{01}\otimes X'_{12} \arrow[r, "\xi'_3"'] & X'_{02} \end{tikzcd} . \tag{15.52}$$

Se verifica sin dificultad que dicha sexteta determina un diagrama en forma de cubo en $\mathcal{G}$, donde cuatro de sus seis caras son cuadrados conmutativos.

Más aún, la primera coordenada de la imagen de (15.50), (15.51) y (15.52) por la función (15.49) olvida los morfismos ξ_k y ξ'_k, y la segunda coordenada olvida que los cuatro diagramas (15.51) y (15.52) conmutan. Por lo tanto (15.49) es efectivamente una función inyectiva. □

Mostremos:

COROLARIO 15.2.5. *El funtor* 2*-nervio de los* 2*-grupos* $\mathcal{N}^2$: 2-**Grp** $\longrightarrow$ $\mathbf{ssSet}_0$ *es fielmente pleno.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F, G\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ dos morfismos de 2-grupos tales que $\mathcal{N}^2(F) = \mathcal{N}^2(G)$. Como el funtor nervio $\mathcal{N}$: 2-**Grp** $\longrightarrow$ **sSet** es fiel (ver el Corolario 15.1.3) y tenemos que:

$$\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}^2(F)_{0,\bullet} = \mathcal{N}^2(G)_{0,\bullet} = \mathcal{N}(G)\,;$$

entonces $F = G$.

Si por otro lado $f\colon \mathcal{N}^2(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{N}^2(\mathcal{H})$ es un morfismo de conjuntos bisimpliciales, sabemos que existe un morfismo de 2-grupos $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $f_{0,\bullet} = \mathcal{N}(F) = \mathcal{N}^2(F)_{0,\bullet}$, porque el funtor $\mathcal{N}$: 2-**Grp** $\longrightarrow$ **sSet** es pleno.

Por otro lado ya que se tienen las siguientes igualdades de funtores:

$$2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{(\mathcal{N}^2)_{0,\bullet} = \mathcal{N}} \mathbf{sSet}_0 \qquad \text{y} \qquad 2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{(\mathcal{N}^2)_{\bullet,1} = \mathrm{N}\circ s} \mathbf{sSet}$$

donde s: 2-**Grp** $\longrightarrow$ **Grpd** denota al funtor grupoide subyacente, se sigue del Corolario 15.1.7 que se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{\Omega}_\star\big((\mathcal{N}^2\mathcal{G})_{0,\bullet}\big) \arrow[r, "\Gamma_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "\mathbb{\Omega}_\star\big((\mathcal{N}^2F)_{0,\bullet}\big)"'] & \big(\mathcal{N}^2\mathcal{G}\big)_{\bullet,1} \arrow[d, "(\mathcal{N}^2F)_{\bullet,1}"] \\ \mathbb{\Omega}_\star\big((\mathcal{N}^2\mathcal{H})_{0,\bullet}\big) \arrow[r, "\Gamma_{\mathcal{H}}"'] & \big(\mathcal{N}^2\mathcal{H}\big)_{\bullet,1} \end{tikzcd}$$

Entonces, para mostrar la igualdad $f_{\bullet,1} = \mathcal{N}^2(F)_{\bullet,1}$, es suficiente mostrar que para $0 \leq n \leq 1$ el siguiente es un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_\star\big((\mathcal{N}''\mathcal{G})_{0,\bullet}\big)_n \arrow[r, "(\Gamma_{\mathcal{G}})_n"] \arrow[d, "\Omega_\star(f_{0,\bullet})_n"'] & \big(\mathcal{N}^2\mathcal{G}\big)_{n,1} \arrow[d, "f_{n,1}"] \\
\Omega_\star\big((\mathcal{N}^2\mathcal{H})_{0,\bullet}\big)_n \arrow[r, "(\Gamma_{\mathcal{H}})_n"'] & \big(\mathcal{N}^2\mathcal{H}\big)_{n,1}
\end{tikzcd} \tag{15.53}$$

ya que $f_{0,\bullet} = \mathcal{N}^2(F)_{0,\bullet}$ y $\big(\mathcal{N}^2\mathcal{H}\big)_{\bullet,1}$ es un conjunto simplicial débilmente 1-coesquelético.

Si $n = 0$ el cuadrado (15.53) es conmutativo porque $(\Gamma_{\mathcal{G}})_0$ y $(\Gamma_{\mathcal{H}})_0$ son las funciones identidad entre los conjunto de objetos de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente, mientras que $f_{0,1} = \Omega_\star(f_{0,\bullet})_0$ es la función inducida por F del conjunto de objetos de $\mathcal{G}$ en el conjunto de los objetos de $\mathcal{H}$.

Si $n = 1$ mostremos que el cuadrado (15.53) es conmutativo: Si $\xi\colon \mathbb{1} \otimes X \longrightarrow Y$ es un 1-simplejo del conjunto simplicial $\Omega_\star\big((\mathcal{N}^2\mathcal{G})_{0,\bullet}\big)$, consideremos el siguiente $(1,2)$-simplejo del conjunto simplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "\ell_X^{-1}"] & X \\
\mathbb{1} \otimes X \arrow[u, "\mathrm{id} = \mathbb{1} \otimes X"] \arrow[r, "\xi"'] & Y \arrow[u, "\ell_X^{-1} \circ \xi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

y su imagen por la función $f_{1,2}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes f_{0,1}(X) \arrow[r, "f_{0,2}(\ell_X^{-1}) = \ell_{f_{0,1}(X)}^{-1}"] & f_{0,1}(X) \\
\mathbb{1} \otimes f_{0,1}(X) \arrow[u, "\mathrm{id} = \mathbb{1} \otimes f_{0,1}(X)"] \arrow[r, "f_{0,2}(\xi)"'] & f_{0,1}(Y) \arrow[u, "f_{1,1}(\ell_X^{-1} \circ \xi^{-1})"']
\end{tikzcd}$$

Se verifica que en el 2-grupo $\mathcal{H}$:

$$f_{1,1}\big(\ell_X^{-1} \circ \xi^{-1}\big) \;=\; \ell_{f_{0,1}(X)}^{-1} \circ f_{0,2}(\xi)^{-1}\,;$$

dicho de otro modo (15.53) es un cuadrado conmutativo para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
f_{1,1} \circ \big(\Gamma_{\mathcal{G}}\big)_1(\xi) &= f_{1,1}\big(\ell_X^{-1} \circ \xi^{-1}\big) \\
&= \ell_{f_{0,1}(X)}^{-1} \circ f_{0,2}(\xi)^{-1} \\
&= \big(\Gamma_{\mathcal{H}}\big)_1\big(f_{0,2}(\xi)\big) \\
&= \big(\Gamma_{\mathcal{H}}\big)_1 \circ \Omega_\star\big(f_{0,\bullet}\big)_1(\xi)\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_{\bullet,1} = \mathcal{N}^2(F)_{\bullet,1}$.

Observemos finalmente que $f_{1,2} = \mathcal{N}^2(F)_{1,2}$ porque (15.39) es una función biyectiva para todo 2-grupo $\mathcal{G}$ y ya mostramos que $f_{p,q} = \mathcal{N}^2(F)_{p,q}$ si $(p,q) \in \big\{(0,2),\,(0,1),\,(1,1)\big\}$.

□

§15.2.2. Recordemos que la categoría $\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}$ de los funtores de Δ^{op} en la categoría de los grupoides **Grpd** admite una estructura canónica de 2-categoría $\underline{\mathbf{Grpd}}^{\Delta^{op}}$ cuyas 2-flechas son definidas como sigue: Si X y Y son objetos de $\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}$ consideremos dos flechas de X en Y de $\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}$:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{op} \arrow[r, bend left, "X"] \arrow[r, bend right, "Y"'] \arrow[r, phantom, "F \Downarrow G"] & \mathbf{Grpd}
\end{tikzcd}$$

Una 2-flecha Γ de F en G de $\underline{\mathbf{Grpd}}^{\Delta^{op}}$, es una familia de transformaciones naturales:

$$\alpha = \left\{ \begin{tikzcd}
X_q \arrow[r, bend left, "F_q"] \arrow[r, bend right, "G_q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_q"] & Y_q
\end{tikzcd} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

tal que:

$$\left(\begin{tikzcd}
X_{q+1} \arrow[r, bend left, "F_{q+1}"] \arrow[r, bend right, "G_{q+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_{q+1}"] & Y_{q+1} \arrow[r, "d_i"] & Y_q
\end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd}
X_{q+1} \arrow[r, "d_i"] & X_q \arrow[r, bend left, "F_q"] \arrow[r, bend right, "G_q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_q"] & Y_q
\end{tikzcd} \right)$$

si $0 \le i \le q+1$ y:

$$\left(\begin{tikzcd}
X_q \arrow[r, bend left, "F_q"] \arrow[r, bend right, "G_q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_q"] & Y_q \arrow[r, "s_j"] & Y_{q+1}
\end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd}
X_q \arrow[r, "s_j"] & X_{q+1} \arrow[r, bend left, "F_{q+1}"] \arrow[r, bend right, "G_{q+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_{q+1}"] & Y_{q+1}
\end{tikzcd} \right)$$

si $0 \le j \le q$.

Vamos a definir un 2-funtor:

(15.54)
$$\begin{tikzcd}
2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \arrow[r, "\mathcal{N}^2"] & \underline{\mathbf{Grpd}}^{\Delta^{op}} \\
\mathcal{G} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \underline{\mathcal{G}_\bullet}
\end{tikzcd}$$

cuyo funtor subyacente es el adjunto del funtor (15.30).

Si $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$ es una transformación entre morfismos de 2-grupos, definimos la 2-flecha:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{N}^2(\mathcal{G}) \arrow[r, bend left, "\mathcal{N}^2(F)"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{N}^2(G)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\ \underline{\mathcal{N}}^2(\eta)"] & \mathcal{N}^2(\mathcal{H}) \end{tikzcd} = \left\{ \begin{tikzcd} \underline{\mathcal{G}}_q \arrow[r, bend left, "F_q"] \arrow[r, bend right, "G_q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_q"] & \underline{\mathcal{H}}_q \end{tikzcd} \right\}_{q\geq 0}$$

de la siguiente manera: Si $q \geq 0$ y (X, α) es un q-simplejo de $\mathcal{G}$ el morfismo de q-simplejos de $\mathcal{H}$:

$$F_q(X,\alpha) \xrightarrow{(\eta_q)_{(X,\alpha)}} G_q(X,\alpha)$$

es igual a la siguiente familia de morfismos:

$$(\eta_q)_{(X,\alpha)} = \left\{ F(X_{ij}) \xrightarrow{\eta_{X_{ij}}} G(X_{ij}) \ \middle|\ 0 \leq i < j \leq q \right\}; \tag{15.55}$$

la cual es efectivamente un morfismo de q-simplejos porque se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(X_{ij}) \otimes F(X_{jk}) \arrow[r, "m^F"] \arrow[d, "\eta_{X_{ij}} \otimes \eta_{X_{jk}}"'] & F(X_{ij} \otimes X_{jk}) \arrow[r, "F(\alpha_{ijk})"] \arrow[d, "\eta_{X_{ij} \otimes X_{jk}}"'] & F(X_{ik}) \arrow[d, "\eta_{X_{ik}}"] \\ G(X_{ij}) \otimes G(X_{jk}) \arrow[r, "m^G"'] & G(X_{ij} \otimes X_{jk}) \arrow[r, "G(\alpha_{ijk})"'] & G(X_{ik}) \end{tikzcd}$$

siempre que $0 \leq i < j < k \leq q$.

Se verifica sin dificultad que (15.54) definido de esta forma es un 2-funtor.

COROLARIO 15.2.6. *El 2-funtor 2-nervio* $\underline{\mathcal{N}}^2\colon 2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}} \longrightarrow \underline{\mathbf{Grpd}}^{\Delta^{op}}$ *es fielmente pleno en el sentido que el funtor:*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}\big(\mathcal{G},\mathcal{H}\big) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}}\big(\mathcal{N}^2(\mathcal{G}),\mathcal{N}^2(\mathcal{H})\big) \tag{15.56}$$

es un isomorfismo de grupoides, para cualesquiera 2*-grupos* $\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{H}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Corolario 15.2.5 que el funtor (15.56) induce una biyección entre el conjunto de objetos. Mostremos que (15.56) es fielmente pleno.

Si $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$ y $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta'"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$ son dos transformaciones entre morfismos de 2-grupos tales que $\underline{\mathcal{N}}^2(\eta) = \underline{\mathcal{N}}^2(\eta')$, se sigue que para todo 1-simplejo X de $\mathcal{G}$ es decir para todo objeto X de $\mathcal{G}$ se tiene que:

$$\eta_X = \big(\underline{\mathcal{N}}^2(\eta)_1\big)_X = \big(\underline{\mathcal{N}}^2(\eta')_1\big)_X = \eta'_X\,.$$

Por lo tanto $\eta = \eta'$.

Consideremos ahora dos morfismos de 2-grupos $F, G\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ y supongamos que tenemos una 2-flecha de la 2-categoría $\underline{\mathbf{Grpd}}^{\Delta^{op}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}^2(\mathcal{G}) \arrow[rr, bend left, "\mathcal{N}^2(F)"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{N}^2(G)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\ \Gamma"] & & \mathcal{N}^2(\mathcal{H})
\end{tikzcd} = \left\{ \begin{tikzcd} \underline{\mathcal{G}}_q \arrow[r, bend left, "F_q"] \arrow[r, bend right, "G_q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_q"] & \underline{\mathcal{H}}_q \end{tikzcd} \right\}_{q \geq 0} .$$

Vamos a definir a una 2-flecha $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$ de 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$ tal que $\underline{\mathcal{N}}^2(\eta) = \Gamma$.

Si X es un objeto de $\mathcal{G}$ es decir si X es un 1-simplejo de $\mathcal{G}$, definimos el morfismo η_X de $\mathcal{H}$ como $\eta_X = (\Gamma_1)_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$.

Mostremos que $\eta_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$*:*

Ya que se tiene la siguiente igualdad de transformaciones naturales:

$$\left(\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{G}}_0 \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "G_0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_0"] & \underline{\mathcal{H}}_0 \arrow[r, "s_0"] & \underline{\mathcal{H}}_1 \end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{G}}_0 \arrow[r, "s_0"] & \underline{\mathcal{G}}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_1"] & \underline{\mathcal{H}}_1 \end{tikzcd} \right)$$

donde Γ_0 es la única transformacion natural entre el funtor identidad $F_0 = G_0$ de la categoría puntual $\underline{\mathcal{G}}_0 = \underline{\mathcal{H}}_0$, deducimos que $(\Gamma_1)_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$.

Mostremos que η *es una transformación natural:*

Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ un morfismo de $\mathcal{G}$. Si consideramos los 2-simplejos $r_X^{-1}\colon X \otimes \mathbb{1} \longrightarrow X$ y $f \circ r_X^{-1}\colon X \otimes \mathbb{1} \longrightarrow Y$ de $\mathcal{G}$, deducimos que los siguientes diagramas de $\mathcal{H}$ son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "m^F"] \arrow[rr, bend left, "r_{FX}^{-1}"] \arrow[d, "(\Gamma_1)_X \otimes (\Gamma_1)_{\mathbb{1}}"'] & F(X \otimes \mathbb{1}) \arrow[r, "F(r_X^{-1})"] & F(X) \arrow[d, "(\Gamma_1)_X"] \\
G(X) \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "m^G"] \arrow[rr, bend right, "r_{GX}^{-1}"'] & G(X \otimes \mathbb{1}) \arrow[r, "G(r_X^{-1})"] & G(X)
\end{tikzcd} \qquad \text{y}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "m^F"] \arrow[rr, bend left, "r_{FX}^{-1}"] \arrow[d, "(\Gamma_1)_X\otimes(\Gamma_1)_{\mathbb{1}}"'] & F(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[r, "F(r_X^{-1})"] & F(X) \arrow[r, "Ff"] & F(Y) \arrow[d, "(\Gamma_1)_Y"] \\
G(X)\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "m^G"] \arrow[rr, bend right, "r_{GX}^{-1}"'] & G(X\otimes\mathbb{1}) \arrow[r, "G(r_X^{-1})"] & G(X) \arrow[r, "Gf"'] & G(Y)\,.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto tenemos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "(\Gamma_1)_X = \eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "(\Gamma_1)_Y = \eta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "Gf"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Mostremos que η es una transformación entre morfismos de 2-grupos:

Si X y Y son objetos de $\mathcal{G}$ consideremos al 2-simplejo $\mathrm{id}_{X\otimes Y}\ X\otimes Y \longrightarrow X\otimes Y$ de $\mathcal{G}$. Deducimos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{H}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "m^F_{X,Y}"] \arrow[d, "(\Gamma_1)_X\otimes(\Gamma_1)_Y"'] & F(X\otimes Y) \arrow[r, equal, "F(\mathrm{id}_{X\otimes Y})"] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "(\Gamma_1)_{X\otimes Y}"] \\
G(X)\otimes G(Y) \arrow[r, "m^G_{X,Y}"'] & G(X\otimes Y) \arrow[r, equal, "G(\mathrm{id}_{X\otimes Y})"'] & G(X\otimes Y)\,;
\end{tikzcd}$$

es decir tenemos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "m^F_{X,Y}"] \arrow[d, "(\Gamma_1)_X\otimes(\Gamma_1)_Y = \eta_X\otimes\eta_Y"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\eta_{X\otimes Y} = (\Gamma_1)_{X\otimes Y}"] \\
G(X)\otimes G(Y) \arrow[r, "m^G_{X,Y}"'] & G(X\otimes Y)\,.
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $\underline{\mathcal{N}}^2(\eta) = \Gamma$:

Se tiene que $\underline{\mathcal{N}}^2(\eta)_0 = \Gamma_0$ es la única transformación natural del funtor identidad $F_0 = G_0$ de la categoría puntual $\underline{\mathcal{G}}_0 = \underline{\mathcal{H}}_0$. Además por definición $\underline{\mathcal{N}}^2(\eta)_1 = \eta = \Gamma_1$.

Por otro lado, observemos que si $q \geq 2$ se tiene la siguiente igualdad de transformaciones naturales:

$$\left(\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{G}}_q \arrow[r, bend left, "F_q"] \arrow[r, bend right, "G_q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_q"] & \underline{\mathcal{H}}_q \arrow[r, "d_{i_{q-1}}\ldots d_{i_1}"] & \underline{\mathcal{H}}_1
\end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{G}}_q \arrow[r, "d_{i_{q-1}}\ldots d_{i_1}"] & \underline{\mathcal{G}}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_1"] & \underline{\mathcal{H}}_1
\end{tikzcd}\right);$$

entonces si (X,α) es un q-simplejo de $\mathcal{G}$ se sigue que el morfismo de q-simplejos de $\mathcal{H}$:

$$F_q(X,\alpha) \xrightarrow{(\Gamma_q)_{(X,\alpha)}} G_q(X,\alpha)$$

es definido por la siguiente familia de morfismos de $\mathcal{H}$:

$$(\Gamma_q)_{(X,\alpha)} = \left\{ \; F(X_{ij}) \xrightarrow{(\Gamma_1)_{X_{ij}}} G(X_{ij}) \; \middle| \; 0 \leq i < j \leq q \right\}. \tag{15.57}$$

Por lo tanto $\underline{\mathcal{N}}^2(\eta)_q = \Gamma_q$ si $q \geq 2$ por la definición (15.55). ☐

Consideremos ahora al funtor fielmente pleno:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}} \arrow[r, "\mathrm{N}^{\Delta^{op}}"] & \mathbf{ssSet} \\ \mathcal{G}_\bullet \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}\big(\Delta^{\bullet_2}, \mathcal{G}_{\bullet_1}\big) \end{tikzcd} \tag{15.58}$$

deducido del funtor nervio para las categorías pequeñas N: $\mathbf{cat} \to \mathbf{sSet}$.

Se verifica sin dificultad que el isomorfismo de funtores:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}}(\bullet_1, \bullet_2) \Rrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\mathrm{N}^{\Delta^{op}}(\bullet_1), \mathrm{N}^{\Delta^{op}}(\bullet_2)\Big) : \big(\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}\big)^{op} \times \mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

definidos por el funtor (15.58) se extiende a un isomorfismo natural entre funtores de la categoría $\big(\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}\big)^{op} \times \mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}$ en la categoría de los conjuntos simpliciales $\mathbf{sSet}$:

$$\mathrm{N}\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Grpd}^{\Delta^{op}}}(\bullet_1, \bullet_2)\Big) \Rrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}}\Big(\mathrm{N}^{\Delta^{op}}(\bullet_1), \mathrm{N}^{\Delta^{op}}(\bullet_2)\Big) \;, \tag{15.59}$$

pues por (13.4) se tiene un isomorfismo:

$$\mathrm{N}\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Grpd}}(\bullet_1, \bullet_2)\Big) \Rrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(\bullet_1), \mathrm{N}(\bullet_2)\big) : \mathbf{Grpd}^{op} \times \mathbf{Grpd} \longrightarrow \mathbf{sSet} \;.$$

Deducimos del Corolario 15.2.6 y del isomorfismo (15.59):

Corolario 15.2.7. *El isomorfismo natural de funtores:*

$$\mathrm{Hom}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}(\bullet_1, \bullet_2) \Rrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big(\mathcal{N}^2(\bullet_1), \mathcal{N}^2(\bullet_2)\Big) : 2\text{-}\mathbf{Grp}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

definido por el funtor 2*-nervio* $\mathcal{N}^2$: $2\text{-}\mathbf{Grp} \to \mathbf{ssSet}_0$ *(ver el Corolario 15.2.5) se extiende a un isomorfismo natural entre funtores de la categoría* $2\text{-}\mathbf{Grp}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp}$ *en la categoría de los conjuntos simpliciales* $\mathbf{sSet}$*:*

$$\mathrm{N}\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}(\bullet_1, \bullet_2)\Big) \Rrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big(\mathcal{N}^2(\bullet_1), \mathcal{N}^2(\bullet_2)\Big) \;. \tag{15.60}$$

Recordemos que la categoría homotópica de los 2-grupos 2-h**Grp** (ver §14.2) es la categoría cuyos objetos son los 2-grupos y los morfismos son las clases de isomorfismo de los morfismos de 2-grupos:

$$\mathrm{Hom}_{2\text{-}h\mathbf{Grp}} = \pi_0\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}\big).$$

Deducimos del Corolario 15.2.7 que si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son 2-grupos, el funtor 2-nervio induce un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}\big(\mathcal{G},\mathcal{H}\big) \arrow[r, "\mathcal{N}^2", "\cong"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(\mathcal{N}^2\mathcal{G},\mathcal{N}^2\mathcal{H}\big) \arrow[d] \\
\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}\big(\mathcal{G},\mathcal{H}\big)\Big) \arrow[r, "\pi_0(15.60)"'] & \pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(\mathcal{N}^2\mathcal{G},\mathcal{N}^2\mathcal{H}\big)\Big)
\end{tikzcd}$$

donde las funciones horizontales son biyectivas.

En particular, ya que por la Teorema 15.2.2 el conjunto bisimplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{H})$ es un objeto fibrante de $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_2^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{diag})$ la categoría de modelos simplicial punteada de la Proposición 11.3.1, el funtor 2-nervio $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}\colon 2\text{-}\mathbf{Grp} \to \mathbf{ssSet}_0$ induce un funtor fielmente pleno:

$$2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\mathcal{N}^2} \mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{ssSet}_0\big)\,,$$

Recordemos por otro lado que la adjunción (11.32) de la página 176:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ssSet}_0 \arrow[rr, bend right, "(\,\cdot\,)_{0,\bullet}"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{sSet}_0 \arrow[ll, bend right, "p^* = \text{funtor constante}"']
\end{tikzcd}$$

es una equivalencia de Quillen de las categorías de modelos $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_2^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{diag})$ y $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_2^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{red})$. Por lo tanto, el diagrama conmutativo de funtores:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{sSet}_0 \\
2\text{-}\mathbf{Grp} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{N}"] \arrow[dr, bend right, "\mathcal{N}^2"'] & \\
 & \mathbf{ssSet}_0 \arrow[uu, "(\,\cdot\,)_{0,\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo salvo isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{sSet}_0\big) \\
2\text{-}h\mathbf{Grp} \arrow[ur, bend left, "h\mathcal{N}"] \arrow[dr, bend right, "h\mathcal{N}^2"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & {} \\
 & \mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{ssSet}_0\big) \arrow[uu, "\mathbf{R}(\,\cdot\,)_{0,\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

donde $h\mathcal{N}$ es un funtor esencialmente sobreyectivo (ver el Corolario 15.1.6), $h\mathcal{N}^2$ es fielmente pleno y $\mathbf{R}(\,\cdot\,)_{0,\bullet}$ es una equivalencia de categorías.

Por lo tanto:

COROLARIO 15.2.8. *El funtor nervio* $\mathcal{N}\colon 2\text{-}\mathbf{Grp} \to \mathbf{sSet}_0$ *induce una equivalencia de categorías:*

$$2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\mathcal{N}} \mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{sSet}_0\big) \tag{15.61}$$

de la categoría homotópica de los 2*-grupos en la categoría de los* 2*-tipos de homotopía reducidos, y el funtor* 2*-nervio* $\mathcal{N}^2\colon 2\text{-}\mathbf{Grp} \to \mathbf{ssSet}_0$ *induce una equivalencia de categorías:*

$$2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\mathcal{N}^2} \mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{ssSet}_0\big)\,. \tag{15.62}$$

Si X es un conjunto simplicial reducido, un 2-grupo $\mathcal{G}$ tal que $h\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es isomorfo al 2-tipo de homotopía reducido de X en la categoría $\mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{sSet}_0\big)$ es llamado un 2-*grupo de homotopía* de X. De manera análoga un 2-*grupo de homotopía* de un conjunto bisimplicial reducido X es un 2-grupo $\mathcal{G}$ tal que $h\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ es isomorfo a X en la categoría $\mathrm{Ho}_2\big(\mathbf{ssSet}_0\big)$. Se sigue del Corolario 15.2.8 que todo conjunto simplicial reducido (resp. conjunto bisimplicial reducido) admite un 2-grupo de homotopía único salvo equivalencia en la 2-categoría $2\text{-}\underline{\mathbf{Grp}}$. (Ver por ejemplo [**MS93**]).

Definimos el (ó un) 2-grupo de homotopía de un conjunto simplicial punteado X como el (ó un) 2-grupo de homotopía del conjunto simplicial reducido $\mathbf{R}\mathcal{H}(X)$ (ver el Lema 10.1.7).

16. Los funtores determinante de Deligne

En el presente capítulo mostramos (ver el Corolario 16.1.2) una propiedades universales que satisface el grupo fundamental de cualquier conjunto simplicial reducido y en el Corolario 16.3.5 (resp. el Corolario 16.4.7) una que satisface el 2-grupo de fundamental de un conjunto simplicial reducido (resp. un conjunto bisimplicial reducido).

Estas propiedades universales son mejor conocidas cuando el conjunto simplicial (resp. el conjunto bisimplicial) es el conjunto simplicial (resp. bisimplicial) asociado a una categoría exacta como en [**Del87**].

§16.1. Sea X un conjunto simplicial reducido y G un grupo. Una *función aditiva de* X *con valores en* G, es una función del conjunto de los 1-simplejos de X en el conjunto subyacente a G:

$$X_1 \xrightarrow{\mathfrak{a}} G$$

tal que:

(I) (Unidad) $\mathfrak{a}(s_0\star) = e_G$, donde $\star$ es el único 0-simplejo de X y e_G es el elemento neutro de G.

(II) (Multiplicativa) Si $\alpha \in X_2$ tenemos que $\mathfrak{a}\big(d_1\,\alpha\big) = \mathfrak{a}\big(d_2\,\alpha\big) \cdot \mathfrak{a}\big(d_0\,\alpha\big)$ en G.

Escribimos $\mathbf{ad}_X(G)$ para denotar al conjunto de las funciones aditivas de X con valores en G. Si **Grp** denota a la categoría de los grupos y los morfismos de grupos, tenemos un funtor:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet_0}^{op} \times \mathbf{Grp} \arrow[r, "\mathbf{ad}"] & \mathbf{Set}\,, \\ \big(X, G\big) \arrow[r, mapsto] & \mathbf{ad}_X(G) \end{tikzcd} \tag{16.1}$$

definido en un morfismo de conjuntos simpliciales reducidos $F\colon\ Y \longrightarrow X$ y en un morfismo de grupos $\varphi\colon\ G \longrightarrow H$ por la función:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{ad}_X(G) \arrow[r, "\mathbf{ad}_F(\varphi)"] & \mathbf{ad}_Y(H) \\ \mathfrak{a} \arrow[r, mapsto] & \varphi \circ \mathfrak{a} \circ F_1\,. \end{tikzcd}$$

Notemos que $\mathbf{ad}_F(\varphi)$ está bien definida pues:

$$\big(\varphi \circ \mathfrak{a} \circ F_1\big)(s_0\star) = \varphi\Big(\mathfrak{a}\big(s_0\,F_0(\star)\big)\Big) = \varphi\big(\mathfrak{a}(s_0\star)\big) = \varphi(e_G) = e_H\,,$$

y para toda $\beta \in Y_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \big(\varphi \circ \mathfrak{a} \circ F_1\big)(d_1\,\beta) &= \varphi\Big(\mathfrak{a}\big(d_1\,(F_2\beta)\big)\Big) \\ &= \varphi\Big(\mathfrak{a}\big(d_2\,(F_2\beta)\big) \cdot \mathfrak{a}\big(d_0\,(F_2\beta)\big)\Big) \\ &= \varphi\Big(\mathfrak{a}\big(d_2\,(F_2\beta)\big)\Big) \cdot \varphi\Big(\mathfrak{a}\big(d_0\,(F_2\beta)\big)\Big) \\ &= \big(\varphi \circ \mathfrak{a} \circ F_1\big)(d_2\,\beta) \cdot \big(\varphi \circ \mathfrak{a} \circ F_1\big)(d_0\,\beta)\,. \end{aligned}$$

LEMA 16.1.1. *Los funtores* $\mathbf{ad}_{\bullet_1}\big(\,\bullet_2\,\big)$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet_0}}\big(\,\bullet_1\,,\,\mathrm{N}(\bullet_2)\,\big)$ *de dominio la categoría producto* $\mathbf{sSet_0}^{op} \times \mathbf{Grp}$ *y codominio la categoría de los conjuntos* **Set** *son naturalmente isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que si G es un grupo y X es un conjunto simplicial reducido, la función natural:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet_0}}\big(X, \mathrm{N}(G)\big) \arrow[r] & \mathbf{ad}_X\big(G\big) \\ f_\bullet \arrow[r, mapsto] & f_1 \end{tikzcd} \tag{16.2}$$

está bien definida: En efecto si $f\colon\ X \longrightarrow \mathrm{N}(G)$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, por un lado tenemos que $f_1(s_0\star) = s_0(f_0\star) = s_0(\star) = e_G$. Por otro lado si $\alpha \in X_2$ tenemos que $f_2(\alpha)$ es un 2-simplejo del nervio de G tal que $d_i \circ f_2(\alpha) = f_1 \circ d_i(\alpha)$, dicho de otro modo se tiene que $f_1\big(d_1\,\alpha\big) = f_1\big(d_2\,\alpha\big) \cdot f_1\big(d_0\,\alpha\big)$ en G.

Como el conjunto simplicial $\mathrm{N}(G)$ es 2-coesquelético de acuerdo al Lema 13.1.1, para mostrar que la función (16.2) es biyectiva es suficiente verificar que la siguiente función es biyectiva:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\leq 2}}\Big(\tau_2^*(X), \tau_2^*\big(\mathrm{N}(G)\big)\Big) & \longrightarrow & \mathbf{ad}_X\big(G\big) \\ f_\bullet & \longmapsto & f_1 \end{array} \tag{16.3}$$

donde $\tau_2^*\colon \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}_{\leq 2}$ es el funtor truncación.

La función (16.3) *es inyectiva:*

Sean $f, g\colon \tau_2^*(X) \longrightarrow \tau_2^*\big(\mathrm{N}(G)\big)$ dos morfismos de conjuntos simpliciales truncados tales que $f_1(a) = g_1(a)$ para todo $a \in X_1$.

Claramente se tiene que $f_0 = g_0$. Por otro lado, ya que $\mathrm{N}(G)$ es un conjunto simplicial débilmente 1-coesquelético y $d_i\big(f_2(\alpha)\big) = f_1\big(d_i(\alpha)\big) = g_1\big(d_i(\alpha)\big) = d_i\big(g_2(\alpha)\big)$ si $\alpha \in X_2$ se sigue que $f_2(\alpha) = g_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in X_2$.

La función (16.3) *es sobreyectiva:*

Si $\mathfrak{a}\colon X_1 \longrightarrow G$ es una función aditiva de X con valores en G, definimos un morfismo de conjuntos simpliciales truncados $f^{\mathfrak{a}}\colon \tau_2^*(X) \longrightarrow \tau_2^*\big(\mathrm{N}(G)\big)$ como sigue: $f_0^{\mathfrak{a}}(\star) = \star$ y $f_1^{\mathfrak{a}}(a) = \mathfrak{a}(a)$ si $a \in X_1$. Por otro lado, si $\alpha \in X_2$ ya que por hipótesis $\mathfrak{a}(d_1\alpha) = \mathfrak{a}(d_2\alpha) \cdot \mathfrak{a}(d_0\alpha)$ sabemos que existe un único 2-simplejo η del nervio de G tal que $d_i(\eta) = \mathfrak{a}(d_i\alpha)$. Definimos $f_2^{\mathfrak{a}}(\alpha) = \eta$ es decir $f_2^{\mathfrak{a}}(\alpha)$ es el único 2-simplejo de G tal que $d_i\big(f_2^{\mathfrak{a}}(\alpha)\big) = \mathfrak{a}(d_i\alpha) = f_1^{\mathfrak{a}}(d_i\alpha)$.

Verifiquemos que $f^{\mathfrak{a}}$ es un morfismo de conjuntos simpliciales truncados. Para empezar notemos que:

$$\begin{array}{rl} & f_0^{\mathfrak{a}}(d_i a) = f_0^{\mathfrak{a}}(\star) = \star = d_i(f_1^{\mathfrak{a}} a) \quad \text{si} \quad a \in X_1 \quad \text{e} \quad 0 \leq i \leq 1\,, \\ & f_1^{\mathfrak{a}}(s_0\star) = \mathfrak{a}(s_0\star) = e_G = s_0(\star) = s_0(f_0^{\mathfrak{a}}\star)\,, \\ \text{y} \qquad & f_1^{\mathfrak{a}}(d_i\alpha) = \mathfrak{a}(d_i\alpha) = d_i(f_2^{\mathfrak{a}}\alpha) \quad \text{si} \quad \alpha \in X_2 \quad \text{e} \quad 0 \leq i \leq 2\,. \end{array}$$

Además si $a \in X_1$ y $0 \leq j \leq 1$ para mostrar $f_2^{\mathfrak{a}}(s_j a) = s_j(f_1^{\mathfrak{a}} a)$ es suficiente con verificar que $d_i\big(f_2^{\mathfrak{a}}(s_j a)\big) = d_i\big(s_j(f_1^{\mathfrak{a}} a)\big)$ para $0 \leq i \leq 2$:

$$d_i\big(f_2^{\mathfrak{a}}(s_j a)\big) = \mathfrak{a}\big(d_i(s_j a)\big) = \begin{cases} \mathfrak{a}(s_{j-1} d_i\, a) = e_G & \text{si} \quad 0 \leq i < j \leq 1 \\ \mathfrak{a}(a) & \text{si} \quad 0 \leq j \leq i \leq j+1 \leq 2 \\ \mathfrak{a}(s_j d_{i-1}\, a) = e_G & \text{si} \quad 1 \leq j+1 < i \leq 2 \end{cases}$$

$$d_i\big(s_j(f_1^{\mathfrak{a}} a)\big) = \begin{cases} s_{j-1} d_i(\mathfrak{a} a) = e_G & \text{si} \quad 0 \leq i < j \leq 1 \\ \mathfrak{a}(a) & \text{si} \quad 0 \leq j \leq i \leq j+1 \leq 2 \\ s_j d_{i-1}(\mathfrak{a} a) = e_G & \text{si} \quad 1 \leq j+1 < i \leq 2\,. \end{cases}$$

Por lo tanto, $f^{\mathfrak{a}}\colon\ \tau_2^*(X) \to \tau_2^*\big(\mathrm{N}(G)\big)$ es efectivamente un morfismo de conjuntos simpliciales truncados con la propiedad $f_1^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. □

Deducimos:

COROLARIO 16.1.2. *Si G es un grupo y X es un conjunto simplicial reducido, los funtores:*

$$\mathbf{sSet_0}^{op} \xrightarrow{\mathbf{ad}_\bullet(G)} \mathbf{Set} \qquad y \qquad \mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathbf{ad}_X(\bullet)} \mathbf{Set}$$

son representables por $\mathrm{N}(G)$ y por $\pi_1(X)$ respectivamente.

En particular $f\colon\ X \longrightarrow Y$ es una 1-equivalencia débil de conjuntos simpiciales reducidos, si y solamente si la función inducida:

$$\mathbf{ad}_Y\big(G\big) \xrightarrow{\mathbf{ad}_f\left(G\right)} \mathbf{ad}_X\big(G\big)$$

es biyectiva para todo grupo G. Más aún, el funtor inducido:

$$\mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0)^{op} = \mathbf{sSet}_0\Big[\big(\mathbf{W}_1^{red}\big)^{-1}\Big]^{op} \xrightarrow{\quad h\mathbf{ad}_\bullet(G)\quad} \mathbf{Set}$$

también es representable por el conjunto simplicial reducido $\mathrm{N}(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Deducimos del Corolario 13.3.1 y del Lema 16.1.1 que si G es un grupo y X es un conjunto simplicial reducido, los funtores:

$$\mathbf{sSet_0}^{op} \xrightarrow{\mathbf{ad}_\bullet(G)} \mathbf{Set} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathbf{ad}_X(\bullet)} \mathbf{Set}$$

son representables por $\mathrm{N}(G)$ y $\pi_1(X)$ respectivamente:

$$\mathbf{ad}_X(G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathrm{N}(G)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\big(\pi_1(X), G\big).$$

Por otro lado se sigue de los Corolarios 13.2.1 y 13.3.1 y del Lema 12.5.5 que:

$$\big[X, \mathrm{N}(G)\big]_1^{red} \cong \pi_0\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathrm{N}(G)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathrm{N}(G)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\pi_1(X), G\big),$$

donde $\big[\,\cdot\,,\,\cdot\,\big]_1^{red}$ denota al conjunto de los morfismos en $\mathrm{Ho}_1(\mathbf{sSet}_0) = \mathbf{sSet}_0\Big[\big(\mathbf{W}_1^{red}\big)^{-1}\Big]$ la categoría homotópica de los 1-tipos de homotopía reducidos.

Concluimos que $f\colon\ X \longrightarrow Y$ es una 1-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos, si y solamente si la función inducida:

$$\mathbf{ad}_Y\big(G\big) \longrightarrow \mathbf{ad}_X\big(G\big)$$

es biyectiva para todo grupo G; y que el funtor inducido $h\mathbf{ad}_\bullet(G)$ también es representable por el conjunto simplicial reducido $\mathrm{N}(G)$. □

§16.2. Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, por la Proposición 15.1.4 el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}_0, \mathbf{W}_2^{red}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{red})$. Se sigue del Corolario 10.2.6 que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos $(\mathbf{sSet}, \mathbf{W}_1, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_1)$ para todo conjunto simplicial reducido X, es decir $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ es un complejo de Kan cuyos grupos de homotopía π_i son cero para $i \geq 2$.

Se podría pensar que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ es un 1-grupoide de Kan, es decir el nervio de un grupoide (ve el Lema 12.5.5), sin embargo este no es siempre el caso (ver el Lema 16.4.4):

Lema 16.2.1. *Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo con la propiedad:*

> *Para todo objeto X de $\mathcal{G}$ existe al menos un morfismo no identidad f de dominio X.*

el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ no es un 1-grupoide de Kan.

Demostración. Observemos que el conjunto $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_n$ se identifica con el conjunto:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(\Delta^1 \times \Delta^n\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1 \times \Delta^n\big), \mathcal{N}(\mathcal{G})\Big). \tag{16.4}$$

Para entender la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^2, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) \xrightarrow{\alpha^{1,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Lambda^{2,k}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) \tag{16.5}$$

vamos a describir al conjunto(16.4) para $0 \leq n \leq 2$.

$n = 0$: El conjunto simplicial $\big(\Delta^1 \times \Delta^0\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1 \times \Delta^0\big)$ es isomorfo al conjunto simplicial $\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1$. Un morfismo de $\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1$ en $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es determinado por un 1-simplejo de $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es decir por un objeto de $\mathcal{G}$.

$n = 1$: Queremos describir al conjunto simplicial $\big(\Delta^1 \times \Delta^1\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1 \times \Delta^1\big)$; para ello observemos que:

$$\big(\Delta^1_0 \times \Delta^1_0\big)\Big\backslash\big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_0 \times \Delta^1_0\big) = \varnothing,$$

$$\big(\Delta^1_1 \times \Delta^1_1\big)\Big\backslash\big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_1 \times \Delta^1_1\big) = \Big\{\big(\mathrm{id}_{[1]}, \mathrm{id}_{[1]}\big), \big(\mathrm{id}_{[1]}, \delta_0\sigma_0\big), \big(\mathrm{id}_{[1]}, \delta_1\sigma_0\big)\Big\} \qquad \text{y}$$

$$\big(\Delta^1_2 \times \Delta^1_2\big)\Big\backslash\big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_2 \times \Delta^1_2\big) = \left\{\begin{array}{l} (\sigma_0, \sigma_0), (\sigma_0, \sigma_1), (\sigma_0, \delta_0\sigma_0\sigma_0), (\sigma_0, \delta_1\sigma_0\sigma_0) \\ (\sigma_1, \sigma_0), (\sigma_1, \sigma_1), (\sigma_1, \delta_0\sigma_0\sigma_0), (\sigma_1, \delta_1\sigma_0\sigma_0) \end{array}\right\};$$

además en el conjunto simplicial $\Delta^1 \times \Delta^1$ tenemos que:

$$s_0\big(\mathrm{id}_{[1]}, \mathrm{id}_{[1]}\big) = \big(\sigma_0, \sigma_0\big), \quad s_0\big(\mathrm{id}_{[1]}, \delta_0\sigma_0\big) = \big(\sigma_0, \delta_0\sigma_0\sigma_0\big), \quad s_0\big(\mathrm{id}_{[1]}, \delta_1\sigma_0\big) = \big(\sigma_0, \delta_1\sigma_0\sigma_0\big)$$
$$s_1\big(\mathrm{id}_{[1]}, \mathrm{id}_{[1]}\big) = \big(\sigma_1, \sigma_1\big), \quad s_1\big(\mathrm{id}_{[1]}, \delta_0\sigma_0\big) = \big(\sigma_1, \delta_0\sigma_0\sigma_0\big), \quad s_1\big(\mathrm{id}_{[1]}, \delta_1\sigma_0\big) = \big(\sigma_1, \delta_1\sigma_0\sigma_0\big).$$

Más aún:

Lema 16.2.2. $\big(\Delta^1 \times \Delta^1\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1 \times \Delta^1\big)$ *es un conjunto simplicial* 2*-esquelético, es decir todos sus* n*-simplejos son degenerados si* $n \geq 3$.

Demostración. Es suficiente mostrar esta afirmación para el conjunto simplicial $\Delta^1 \times \Delta^1$. Para ello observemos que si $m \geq 3$, los elementos de $\Delta^1_m \times \Delta^1_m$ son las parejas:

$$\big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-1}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-1}}\big) \tag{16.6}$$

donde $\varphi, \psi\colon\ [1] \longrightarrow [1]$ son morfismos de Δ y:

$$0 \leq i_1 < \cdots < i_{m-1} \leq m-1\,, \quad 0 \leq j_1 < \cdots < j_{m-1} \leq m-1$$

son sucesiones de enteros. Se sigue en particular que $1 \leq m-2 \leq i_{m-1}, j_{m-1} \leq m-1$.

Caso $i_{m-1} = j_{m-1} = k$ *donde* $k = m-2$ *o* $k = m-1$: Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} s_k\big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}}\big) &= \big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_k, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_k\big) \\ &= \big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{i_{m-1}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{j_{m-1}}\big)\,; \end{aligned}$$

en particular (16.6) es un m-simplejo degenerado de $\Delta^1 \times \Delta^1$.

Caso $m-2 = i_{m-1} < j_{m-1} = m-1$: Notemos primero que $m-3 \leq j_{m-2} \leq m-2$.

Si $j_{m-2} = m-2$, como $\sigma_k \circ \sigma_l = \sigma_{l-1} \circ \sigma_k$ si $k < l$, tenemos que:

$$\sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{m-2} = \sigma_{m-2} \circ \sigma_{m-1} = \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{j_{m-1}}\,,$$

es decir:

$$\begin{aligned} s_{m-2}\big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}}\big) &= \big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{m-2}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{m-2}\big) \\ &= \big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{i_{m-1}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{j_{m-1}}\big)\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $j_{m-2} = m-3$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{m-3} &= \sigma_{m-3} \circ \sigma_{m-3} = \sigma_{m-3} \circ \sigma_{m-2} = \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{i_{m-1}} \\ \sigma_{j_{m-2}+1} \circ \sigma_{m-3} &= \sigma_{m-2} \circ \sigma_{m-3} = \sigma_{m-3} \circ \sigma_{m-1} = \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{j_{m-1}}\,, \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} s_{m-3}\big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}+1}\big) &= \big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{m-3}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}+1} \circ \sigma_{m-3}\big) \\ &= \big(\varphi \circ \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{m-2}} \circ \sigma_{i_{m-1}}, \psi \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_{m-2}} \circ \sigma_{j_{m-1}}\big)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Delta^1 \times \Delta^1$ no tiene n-simplejos no degenerados si $n \geq 3$. □

Deducimos que el conjunto simplicial cociente $\big(\Delta^1\times\Delta^1\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^1\big)$ tiene un único 0-simplejo, tres 1-simplejos no degenerados asociados a los 1-simplejos de $\Delta^1\times\Delta^1$:

$$\big(\mathrm{id}_{[1]},\mathrm{id}_{[1]}\big),\ \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\sigma_0\big),\ \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\sigma_0\big)$$

y dos 2-simplejos no degenerados:

$$\big(\sigma_0,\sigma_1\big),\ \big(\sigma_1,\sigma_0\big)\,.$$

Ya que en el conjunto simplicial $\Delta^1\times\Delta^1$ se tiene que:

$$\begin{array}{lll} d_0\big(\sigma_0,\sigma_1\big) = \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\sigma_0\big) & d_1\big(\sigma_0,\sigma_1\big) = \big(\mathrm{id}_{[1]},\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_2\big(\sigma_0,\sigma_1\big) = \big(\delta_1\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big) \\ d_0\big(\sigma_1,\sigma_0\big) = \big(\delta_0\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_1\big(\sigma_1,\sigma_0\big) = \big(\mathrm{id}_{[1]},\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_2\big(\sigma_1,\sigma_0\big) = \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\sigma_0\big)\,. \end{array}$$

deducimos que darse un elemento del conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(\Delta^1\times\Delta^1\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^1\big),\,\mathcal{N}(\mathcal{G})\Big)$, equivale a darse tres objetos y dos morfismos de $\mathcal{G}$ como en el diagrama:

$$\mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\sigma_0)} \xrightarrow{\xi_{(\sigma_0,\sigma_1)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\mathrm{id}_{[1]})} \xleftarrow{\xi_{(\sigma_1,\sigma_0)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\sigma_0)}\otimes\mathbb{1} \tag{16.7}$$

$n=2$: Para describir al conjunto simplicial $\big(\Delta^1\times\Delta^2\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^2\big)$ observemos que:

$$\big(\Delta^1_0\times\Delta^2_0\big)\Big\backslash\Big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_0\times\Delta^2_0\Big) = \varnothing\,,$$

$$\big(\Delta^1_1\times\Delta^2_1\big)\Big\backslash\Big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_1\times\Delta^2_1\Big) = \Big\{\big(\mathrm{id}_{[1]},\varphi\big)\ \Big|\ \varphi=\delta_0,\,\delta_1,\,\delta_2,\,\delta_1\delta_0\sigma_0,\,\delta_2\delta_0\sigma_0,\,\delta_2\delta_1\sigma_0\Big\},$$

$$\big(\Delta^1_2\times\Delta^2_2\big)\Big\backslash\Big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_2\times\Delta^2_2\Big) = \left\{\ (\psi,\varphi)\ \left|\ \begin{array}{c} \psi=\sigma_0,\,\sigma_1\quad \mathrm{y}\quad \varphi=\mathrm{id}_{[2]},\delta_0\sigma_0,\,\delta_1\sigma_0,\,\delta_2\sigma_0, \\ \delta_0\sigma_1,\,\delta_1\sigma_1,\,\delta_2\sigma_1,\,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0,\,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0,\,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0 \end{array}\right.\right\},$$

$$\big(\Delta^1_3\times\Delta^2_3\big)\Big\backslash\Big(\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\big)_3\times\Delta^2_3\Big) = \left\{\ (\psi,\varphi)\ \left|\ \begin{array}{c} \psi=\sigma_0\sigma_0,\,\sigma_1\sigma_0,\,\sigma_1\sigma_1\quad \mathrm{y}\quad \varphi=\sigma_0,\,\sigma_1,\,\sigma_2,\,\delta_0\sigma_0\sigma_0, \\ \delta_0\sigma_1\sigma_0,\,\delta_0\sigma_1\sigma_1,\,\delta_1\sigma_0\sigma_0,\,\delta_1\sigma_1\sigma_0,\,\delta_1\sigma_1\sigma_1,\,\delta_2\sigma_0\sigma_0, \\ \delta_2\sigma_1\sigma_0,\,\delta_2\sigma_1\sigma_1,\,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0,\,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0,\,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0 \end{array}\right.\right\}.$$

Por otro lado, se muestra que $\big(\Delta^1\times\Delta^2\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^2\big)$ es un conjunto simplicial 3-esquelético por el mismo método que usamos en la prueba del Lema 16.2.2. Además:

$$\begin{array}{ll} s_0\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\big) = \big(\sigma_0,\delta_0\sigma_0\big) & s_1\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\big) = \big(\sigma_1,\delta_0\sigma_1\big) \\ s_0\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big) = \big(\sigma_0,\delta_1\sigma_0\big) & s_1\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big) = \big(\sigma_1,\delta_1\sigma_1\big) \\ s_0\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\big) = \big(\sigma_0,\delta_2\sigma_0\big) & s_1\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\big) = \big(\sigma_1,\delta_2\sigma_1\big) \\ s_0\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0\big) = \big(\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\big) & s_1\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0\big) = \big(\sigma_1,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\big) \\ s_0\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0\big) = \big(\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\big) & s_1\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0\big) = \big(\sigma_1,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\big) \\ s_0\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0\big) = \big(\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\big) & s_1\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0\big) = \big(\sigma_1,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\big)\,, \end{array}$$

son los doce 2-simplejos degenerados de $\big(\Delta^1\times\Delta^2\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^2\big)$ (distintos de $s_0\circ s_0(\star)$); mientras que en la siguiente lista se encuentran (algunos repetidos) sus cuarenta y dos 3-simplejos degenerados (distintos de $s_0\circ s_0\circ s_0(\star)$):

$$\begin{aligned}
s_0(\sigma_0,\mathrm{id}_{[2]}) &= (\sigma_0\sigma_0,\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\mathrm{id}_{[2]}) &= (\sigma_1\sigma_0,\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_0\sigma_0\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_1\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_1\sigma_0\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_1\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_1\sigma_0\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_2\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\sigma_0\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_2\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\sigma_0\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_0\sigma_1) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_0\sigma_1\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_0\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_0\sigma_1\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_1\sigma_1) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_1\sigma_1\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_1\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_1\sigma_1\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_2\sigma_1) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\sigma_1\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_2\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\sigma_1\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_0(\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_0(\sigma_1,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1(\sigma_0,\mathrm{id}_{[2]}) &= (\sigma_0\sigma_0,\sigma_1) & s_1(\sigma_1,\mathrm{id}_{[2]}) &= (\sigma_1\sigma_1,\sigma_1)\\
s_1(\sigma_0,\delta_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_0\sigma_0\sigma_0) & s_1(\sigma_1,\delta_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_1(\sigma_0,\delta_1\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_1\sigma_0\sigma_0) & s_1(\sigma_1,\delta_1\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_1\sigma_0\sigma_0)\\
s_1(\sigma_0,\delta_2\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\sigma_0\sigma_0) & s_1(\sigma_1,\delta_2\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\sigma_0\sigma_0)\\
s_1(\sigma_0,\delta_0\sigma_1) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_0\sigma_1\sigma_1) & s_1(\sigma_1,\delta_0\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_0\sigma_1\sigma_1)\\
s_1(\sigma_0,\delta_1\sigma_1) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_1\sigma_1\sigma_1) & s_1(\sigma_1,\delta_1\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_1\sigma_1\sigma_1)\\
s_1(\sigma_0,\delta_2\sigma_1) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\sigma_1\sigma_1) & s_1(\sigma_1,\delta_2\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\sigma_1\sigma_1)\\
s_1(\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_1(\sigma_1,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_1(\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_1(\sigma_1,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_1(\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_0\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_1(\sigma_1,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2(\sigma_0,\mathrm{id}_{[2]}) &= (\sigma_1\sigma_0,\sigma_2) & s_2(\sigma_1,\mathrm{id}_{[2]}) &= (\sigma_1\sigma_1,\sigma_2)\\
s_2(\sigma_0,\delta_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_0\sigma_1\sigma_0) & s_2(\sigma_1,\delta_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_0\sigma_1\sigma_0)\\
s_2(\sigma_0,\delta_1\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_1\sigma_1\sigma_0) & s_2(\sigma_1,\delta_1\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_1\sigma_1\sigma_0)\\
s_2(\sigma_0,\delta_2\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\sigma_1\sigma_0) & s_2(\sigma_1,\delta_2\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\sigma_1\sigma_0)\\
s_2(\sigma_0,\delta_0\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_0\sigma_1\sigma_1) & s_2(\sigma_1,\delta_0\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_0\sigma_1\sigma_1)\\
s_2(\sigma_0,\delta_1\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_1\sigma_1\sigma_1) & s_2(\sigma_1,\delta_1\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_1\sigma_1\sigma_1)\\
s_2(\sigma_0,\delta_2\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\sigma_1\sigma_1) & s_2(\sigma_1,\delta_2\sigma_1) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\sigma_1\sigma_1)\\
s_2(\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_2(\sigma_1,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_1\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_2(\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_2(\sigma_1,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\delta_0\sigma_0\sigma_0\sigma_0)\\
s_2(\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_0,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0) & s_2(\sigma_1,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0) &= (\sigma_1\sigma_1,\delta_2\delta_1\sigma_0\sigma_0\sigma_0).
\end{aligned}$$

En particular, el conjunto simplicial cociente $\big(\Delta^1\times\Delta^2\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^2\big)$ tiene un único 0-simplejo, seis 1-simplejos no degenerados asociados a los siguientes 1-simplejos de $\Delta^1 \times \Delta^2$:

$$\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\big),\ \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big),\ \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\big),\ \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0\big),\ \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0\big) \quad \text{y} \quad \big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0\big);$$

ocho 2-simplejos no degenerados:

$$\big(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big),\ \big(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]}\big),\ \big(\sigma_0,\delta_0\sigma_1\big),\ \big(\sigma_0,\delta_1\sigma_1\big),\ \big(\sigma_0,\delta_2\sigma_1\big),\ \big(\sigma_1,\delta_0\sigma_0\big),\ \big(\sigma_1,\delta_1\sigma_0\big) \quad \text{y} \quad \big(\sigma_1,\delta_2\sigma_0\big);$$

y tres 3-simplejos no degenerados:

$$\big(\sigma_0\sigma_0,\sigma_2\big),\ \big(\sigma_1\sigma_0,\sigma_1\big) \quad \text{y} \quad \big(\sigma_1\sigma_1,\sigma_0\big).$$

Deducimos de las igualdades:

$$\begin{array}{lll}
d_0\big(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\big) & d_1\big(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big) & d_2\big(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big)=\big(\delta_1\sigma_0,\delta_2\big)\\
d_0\big(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]}\big)=\big(\delta_0\sigma_0,\delta_0\big) & d_1\big(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]}\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big) & d_2\big(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]}\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\big)\\
d_0\big(\sigma_0,\delta_0\sigma_1\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0\big) & d_1\big(\sigma_0,\delta_0\sigma_1\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\big) & d_2\big(\sigma_0,\delta_0\sigma_1\big)=\big(\delta_1\sigma_0,\delta_0\big)\\
d_0\big(\sigma_0,\delta_1\sigma_1\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0\big) & d_1\big(\sigma_0,\delta_1\sigma_1\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big) & d_2\big(\sigma_0,\delta_1\sigma_1\big)=\big(\delta_1\sigma_0,\delta_1\big)\\
d_0\big(\sigma_0,\delta_2\sigma_1\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0\big) & d_1\big(\sigma_0,\delta_2\sigma_1\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\big) & d_2\big(\sigma_0,\delta_2\sigma_1\big)=\big(\delta_1\delta_0,\delta_2\big)\\
d_0\big(\sigma_1,\delta_0\sigma_0\big)=\big(\delta_0\sigma_0,\delta_0\big) & d_1\big(\sigma_1,\delta_0\sigma_0\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0\big) & d_2\big(\sigma_1,\delta_0\sigma_0\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0\big)\\
d_0\big(\sigma_1,\delta_1\sigma_0\big)=\big(\delta_0\sigma_0,\delta_1\big) & d_1\big(\sigma_1,\delta_1\sigma_0\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\big) & d_2\big(\sigma_1,\delta_1\sigma_0\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0\big)\\
d_0\big(\sigma_1,\delta_2\sigma_0\big)=\big(\delta_0\sigma_0,\delta_2\big) & d_1\big(\sigma_1,\delta_2\sigma_0\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\big) & d_2\big(\sigma_1,\delta_2\sigma_0\big)=\big(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0\big),
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
d_0\big(\sigma_0\sigma_0,\sigma_2\big)=\big(\sigma_0,\delta_0\sigma_1\big) & d_1\big(\sigma_0\sigma_0,\sigma_2\big)=\big(\sigma_0,\delta_1\sigma_1\big) & d_2\big(\sigma_0\sigma_0,\sigma_2\big)=\big(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_3\big(\sigma_0\sigma_0,\sigma_2\big)=\big(\delta_1\sigma_0\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big)\\
d_0\big(\sigma_1\sigma_0,\sigma_1\big)=\big(\sigma_1,\delta_0\sigma_0\big) & d_1\big(\sigma_1\sigma_0,\sigma_1\big)=\big(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_2\big(\sigma_1\sigma_0,\sigma_1\big)=\big(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_3\big(\sigma_1\sigma_0,\sigma_1\big)=\big(\sigma_0,\delta_2\sigma_1\big)\\
d_0\big(\sigma_1\sigma_1,\sigma_0\big)=\big(\delta_0\sigma_0\sigma_0,\mathrm{id}\big) & d_1\big(\sigma_1\sigma_1,\sigma_0\big)=\big(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]}\big) & d_2\big(\sigma_1\sigma_1,\sigma_0\big)=\big(\sigma_1,\delta_1\sigma_0\big) & d_3\big(\sigma_1\sigma_1,\sigma_0\big)=\big(\sigma_1,\delta_2\sigma_0\big);
\end{array}$$

que darse un elemento del conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\big(\Delta^1\times\Delta^2\big)/\big(\mathbf{sq}_0\Delta^1\times\Delta^2\big),\mathcal{N}(\mathcal{G})\Big)$ equivale a darse un diagrama en $\mathcal{G}$ de la forma:

(16.8)

$$\begin{tikzcd}
\big(X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0)}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "\xi_{(\sigma_1,\delta_2\sigma_0)}\otimes\mathbb{1}"] \arrow[d, phantom, "a\,\wr\|"] & X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2)}\otimes\mathbb{1} \arrow[dd, "\xi_{(\sigma_1,\mathrm{id}_{[1]})}" description] & \big(\mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0)}\big)\otimes\mathbb{1} \arrow[l, "\xi_{(\sigma_0,\delta_2\sigma_1)}\otimes\mathbb{1}"'] \arrow[d, phantom, "\wr\|\,a"] \\
X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0)}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[d, "X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0)}\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\eta_{(\sigma_1\sigma_1,\sigma_0)}"] & {} \arrow[r, phantom, "\eta_{(\sigma_1\sigma_0,\sigma_1)}"] & \mathbb{1}\otimes\big(X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0)}\otimes\mathbb{1}\big) \arrow[d, "\mathbb{1}\otimes\xi_{(\sigma_1,\delta_0\sigma_0)}"] \\
X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0)}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "\xi_{(\sigma_1,\delta_1\delta_0)}"'] & X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1)} & \mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0)} \arrow[l, "\xi_{(\sigma_0,\mathrm{id}_{[1]})}" description] \\
 & {} \arrow[r, phantom, "\eta_{(\sigma_0\sigma_0,\sigma_2)}"] & \mathbb{1}\otimes\big(\mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0)}\big) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes\xi_{(\sigma_0,\delta_0\sigma_1)}"'] \\
 & \mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0)} \arrow[uu, "\xi_{(\sigma_0,\delta_1\sigma_1)}"] & \big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\big)\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0)} \arrow[l, "r_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0)}"] \arrow[u, phantom, "\wr\|\,a"]
\end{tikzcd}$$

Finalmente observemos que en el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ las imágenes por las funciones d_0, d_1 y d_2 del 2-simplejo (16.8) son los 1-simplejos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0)} \xrightarrow{\xi_{(\sigma_0,\delta_0\sigma_1)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0)} \xleftarrow{\xi_{(\sigma_1,\delta_0\sigma_0)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0)}\otimes\mathbb{1}\,,\\
&\mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1\delta_0\sigma_0)} \xrightarrow{\xi_{(\sigma_0,\delta_1\sigma_1)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_1)} \xleftarrow{\xi_{(\sigma_1,\delta_1\sigma_0)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0)}\otimes\mathbb{1}\\
\text{y}\qquad &\mathbb{1}\otimes X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_0\sigma_0)} \xrightarrow{\xi_{(\sigma_0,\delta_2\sigma_1)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_0)} \xleftarrow{\xi_{(\sigma_1,\delta_2\sigma_0)}} X_{(\mathrm{id}_{[1]},\delta_2\delta_1\sigma_0)}\otimes\mathbb{1}\,,
\end{aligned}$$

respectivamente.

No es difícil concluir de esta descripción que si $0 \leq k \leq 2$ y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo que cumple las hipótesis del enunciado del Lema 16.2.1 entonces la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^2,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1,\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) \xrightarrow{\alpha^{1,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Lambda^{2,k},\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1,\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) \tag{16.9}$$

inducida de la inclusión $\alpha^{m,k}\colon\ \Lambda^{2,k} \hookrightarrow \Delta^2$ no es inyectiva; lo que implica que el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\Delta^1/\mathbf{sq}_0\Delta^1, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ no es un 1-grupoide de Kan. ☐

§16.3. Si X es un conjunto simplicial reducido y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, un *determinante de X con valores en $\mathcal{G}$* es por definición una pareja de funciones $D = (D, T)$:

$$X_1 \xrightarrow{D} \big\{\text{Objetos de } \mathcal{G}\big\} \qquad \text{y} \qquad X_2 \xrightarrow{T} \big\{\text{Morfismos de } \mathcal{G}\big\}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(I) (Compatibilidad) Si $\xi \in X_2$ entonces $T(\xi)$ es un morfismo de $\mathcal{G}$ de la forma:

$$D(d_2\xi)\otimes D(d_0\xi) \xrightarrow{T(\xi)} D(d_1\xi)\,.$$

(II) (Unidad) Se tiene que $D(s_0\,\star) = \mathbb{1}$ y $T(s_0\circ s_0\,\star) = \ell_{\mathbb{1}}^{-1} = r_{\mathbb{1}}^{-1}$.

(III) (Asociativa) Si $\eta \in X_3$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D(A_{03}) & & D(A_{01})\otimes D(A_{13}) \arrow[ll, "T(d_2\,\eta)"'] \\
 & & D(A_{01})\otimes\big(D(A_{12})\otimes D(A_{23})\big) \arrow[u, "D(A_{01})\otimes T(d_0\,\eta)"'] \\
D(A_{02})\otimes D(A_{23}) \arrow[uu, "T(d_1\,\eta)"] & & \big(D(A_{01})\otimes D(A_{12})\big)\otimes D(A_{23})\,, \arrow[ll, "T(d_3\,\eta)\otimes D(A_{23})"] \arrow[u, "a", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

donde
$$\begin{aligned}
A_{03} &= d_1d_1\eta = d_1d_2\eta & A_{01} &= d_2d_2\eta = d_2d_3\eta & A_{13} &= d_1d_0\eta = d_0d_2\eta\\
A_{02} &= d_2d_1\eta = d_1d_3\eta & A_{23} &= d_0d_0\eta = d_0d_1\eta & A_{12} &= d_2d_0\eta = d_0d_3\eta\,.
\end{aligned}$$

Escribimos $\mathbf{det}_X(\mathcal{G})$ para denotar al conjunto de los determinantes de un conjunto simplicial reducido X con valores en un 2-grupo $\mathcal{G}$. Observemos que se tiene un funtor:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sSet_0}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp} & \xrightarrow{\mathbf{det}} & \mathbf{Set}\,, \\ \big(X,\mathcal{G}\big) & \longmapsto & \mathbf{det}_X(\mathcal{G}) \end{array} \tag{16.10}$$

definido en un morfismo de conjuntos simpliciales reducidos $f\colon\, Y \longrightarrow X$ y en un morfismo de 2-grupos $F = (F, m^F)\colon\, \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ por la función:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{det}_X(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathbf{det}_f(F)} & \mathbf{det}_Y(\mathcal{H}) \\ (D,T) & \longmapsto & (\overline{D},\overline{T}) \end{array}$$

donde:

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{\overline{D}} & \big\{\text{Objetos de } \mathcal{H}\big\} \\ B & \mapsto & F\big(D(f_1 B)\big) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} Y_2 & \xrightarrow{\overline{T}} & \big\{\text{Morfismos de } \mathcal{H}\big\} \\ \tau & \mapsto & F\big(T(f_2\tau)\big)\circ m^F \end{array} \tag{16.11}$$

Mostremos que la pareja $(\overline{D},\overline{T})$ es efectivamente un determinante de Y con valores en $\mathcal{H}$: En efecto, para empezar observemos que si τ es un 2-simplejo de Y entonces $T(f_2\tau)$ es un morfismo de $\mathcal{G}$ de la forma:

$$D(d_2\, f_2\, \tau) \otimes D(d_0\, f_2\, \tau) \xrightarrow{T(f_2\,\tau)} D(d_1\, f_2\, \tau)\,;$$

por lo que $\overline{T}(\tau) = F\big(T(f_2\tau)\big)\circ m^F$ es un morfismo de $\mathcal{H}$ de la forma:

$$\overline{D}(d_2\,\tau) \otimes \overline{D}(d_0\,\tau) \xrightarrow{\overline{T}(\tau)} \overline{D}(d_1\,\tau)\,,$$

pues $F\big(D(d_i \circ f_2\,\tau)\big) = F\Big(D\big(f_1(d_i\,\tau)\big)\Big) = \overline{D}(d_i\,\tau)$ si $0 \le i \le 2$.

Por otro lado, se tiene que:

$$\overline{D}(s_0\,\star) = F\big(D(f_1 \circ s_0\,\star)\big) = F\big(D(s_0 \circ f_0\,\star)\big) = F\big(D(s_0\,\star)\big) = F\big(\mathbb{1}_{\mathcal{G}}\big) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \qquad \text{y}$$
$$\overline{T}(s_0 s_0\,\star) = F\big(T(f_2 s_0 s_0\,\star)\big)\circ m^F = F\big(T(s_0 s_0\,\star)\big)\circ m^F = F\big(\ell_{\mathbb{1}}^{-1}\big)\circ m^F_{\mathbb{1},\mathbb{1}} = \ell_{\mathbb{1}}^{-1}\,.$$

Mostremos:

Proposición 16.3.1. *Los funtores* $\mathbf{det}_{\bullet_1}\big(\ \bullet_2\ \big)$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet_0}}\big(\bullet_1\,,\mathcal{N}(\bullet_2)\big)$ *de dominio la categoría producto* $\mathbf{sSet_0}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp}$ *y codominio la categoría de los conjuntos* $\mathbf{Set}$ *son naturalmente isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{G}$ es un 2-grupo y X es un conjunto simplicial reducido, observemos que la función natural:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big) & \longrightarrow & \mathbf{det}_X\big(\mathcal{G}\big) \\ f_\bullet & \longmapsto & (f_1, f_2) \end{array} \tag{16.12}$$

está bien definida: En efecto si $f\colon X \longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, tenemos para empezar que:

$$f_1(s_0\star) = s_0(f_0\star) = s_0(\star) = \mathbb{1} \qquad \text{y} \qquad f_2(s_0 \circ s_0\star) = s_0 \circ s_0(f_0\star) = s_0 \circ s_0(\star) = \ell_{\mathbb{1}}^{-1}\,.$$

Por otro lado si $\xi \in X_2$ entonces $f_2(\xi)$ es un 2-simplejo del nervio de $\mathcal{G}$ tal que $d_i \circ f_2(\xi) = f_1 \circ d_i(\xi)$, dicho de otro modo $f_2(\xi)$ es un morfismo de $\mathcal{G}$ de la forma:

$$f_1(d_2\,\xi) \otimes f_1(d_0\,\xi) \xrightarrow{f_2(\xi)} f_1(d_1\,\xi)\,.$$

Por último, si η es un 3-simplejo de X entonces $f_3(\eta)$ es un 3-simplejo del nervio de $\mathcal{G}$ tal que $d_i \circ f_3(\eta) = f_2 \circ d_i(\eta)$, es decir tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
f_1(A_{03}) & f_1(A_{01}) \otimes f_1(A_{13}) \arrow[l, "f_2(d_2\,\eta)"'] \\
& f_1(A_{01}) \otimes \big(f_1(A_{12}) \otimes f_1(A_{23})\big) \arrow[u, "f_1(A_{01}) \otimes f_2(d_0\,\eta)"'] \\
f_1(A_{02}) \otimes f_1(A_{23}) \arrow[uu, "f_2(d_1\,\eta)"] & \big(f_1(A_{01}) \otimes f_1(A_{12})\big) \otimes f_1(A_{23})\,, \arrow[l, "f_2(d_3\,\eta) \otimes f_1(A_{23})"] \arrow[u, phantom, "a \wr\|"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{llll} \text{donde} & A_{03} = d_1d_1\eta = d_1d_2\eta & A_{01} = d_2d_2\eta = d_2d_3\eta & A_{13} = d_1d_0\eta = d_0d_2\eta \\ & A_{02} = d_2d_1\eta = d_1d_3\eta & A_{23} = d_0d_0\eta = d_0d_1\eta & A_{12} = d_2d_0\eta = d_0d_3\eta\,. \end{array}$$

Por lo tanto si $f\colon X \longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, la pareja (f_1, f_2) es un determinante de X con valores en $\mathcal{G}$.

Observemos por otro lado que por el Lema 15.1.1 el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es 3-coesquelético, por lo que para mostrar que la función (16.12) es biyectiva solamente necesitamos ver que la función:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbf{sSet}_{\le 3}}\Big(\tau_3^*(X), \tau_3^*\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) & \longrightarrow & \mathbf{det}_X\big(\mathcal{G}\big) \\ f_\bullet & \longmapsto & (f_1, f_2) \end{array} \tag{16.13}$$

es biyectiva donde $\tau_3^*\colon \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}_{\le 3}$ es el funtor truncación.

La función (16.13) *es inyectiva:*

Supongamos que $f, g\colon\ \tau_3^* X \longrightarrow \tau_3^*\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ son dos morfismos de conjuntos simpliciales truncados tales que $f_1 = g_1$ y $f_2 = g_2$. Claramente $f_0 = g_0$. Por otro lado ya que el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es débilmente 2-coesquelético, para mostrar que $f_3 = g_3$ es suficiente notar que para todo $\alpha \in X_3$ y $0 \leq i \leq 3$ se tiene que:

$$d_i(f_3\alpha) \;=\; f_2 \circ d_i(\alpha) \;=\; g_2 \circ d_i(\alpha) \;=\; d_i(g_3\alpha)\,.$$

La función (16.13) *es sobreyectiva:*

Si (D, T) es un determinante de X con valores en $\mathcal{G}$ vamos a definir un morfismo de conjuntos bisimpliciales $f\colon\ \tau_3^* X \longrightarrow \tau_3^*\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ tal que $f_1 = D$ y $f_2 = T$.

Definimos primero $\varphi\colon\ \tau_2^* X \longrightarrow \tau_2^*\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ por las reglas $\varphi_2 = T$, $\varphi_1 = D$ y $\varphi_0 = \mathrm{id}_\star$. De las propiedades (i) y (ii) que cumplen los determinantes y del siguiente Lema, se sigue que φ es efectivamente un morfismo de conjuntos simpliciales truncados:

Lema 16.3.2. *Sea X un conjunto simplicial reducido y $\mathcal{G}$ un 2-grupo. Si (D, T) es un determinante de X con valores en $\mathcal{G}$ para todo elemento A de X_1 tenemos que $T\big(s_i(A)\big) = s_i\big(D(A)\big)$ si $0 \leq i \leq 1$, es decir:*

$$\mathbb{1} \otimes D(A) \xrightarrow{T(s_0(A)) = \ell^{-1}_{D(A)}} D(A) \qquad y \qquad D(A) \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{T(s_1(A)) = r^{-1}_{D(A)}} D(A)\ .$$

Demostración. Si $A \in X_1$ vamos a mostrar que $T(s_0(A)) = \ell^{-1}_{D(A)}$. La igualdad $T(s_1(A)) = r^{-1}_{D(A)}$ se muestra de manera análoga.

Para empezar consideremos $s_0 s_0(A) \in X_3$. Por las propiedades (ii) y (iii) que cumple el determinante (D, T) tenemos un diagrama conmutativo en $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
D(A) & \mathbb{1} \otimes D(A) \arrow[l, "T(s_0\,A)"'] \\
& \mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} \otimes D(A)) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes T(s_0\,A)"'] \\
\mathbb{1} \otimes D(A) \arrow[uu, "T(s_0\,A)"] & (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \otimes D(A)\,; \arrow[l, "\ell^{-1}_{\mathbb{1}} \otimes D(A)"] \arrow[u, phantom, "a\,\wr\|"]
\end{tikzcd}$$

lo que implica que tenemos un triángulo conmutativo en $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\big) \otimes D(A) \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},\mathbb{1},D(A)}"] \arrow[dr, "\ell^{-1}_{\mathbb{1}} \otimes D(A)"'] & & \mathbb{1} \otimes \big(\mathbb{1} \otimes D(A)\big) \arrow[dl, "\mathbb{1}\otimes T(s_0\,A)"] \\
& \mathbb{1} \otimes D(A) &
\end{tikzcd}$$

Como $l_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}$ y el siguiente es un triángulo conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\big) \otimes D(A) \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},\mathbb{1},D(A)}"] \arrow[dr, "r_{\mathbb{1}}^{-1} \otimes D(A)"'] & & \mathbb{1} \otimes \big(\mathbb{1} \otimes D(A)\big) \arrow[dl, "\mathbb{1} \otimes \ell_{D(A)}^{-1}"] \\
& \mathbb{1} \otimes D(A) &
\end{tikzcd}$$

se sigue que $\mathbb{1} \otimes T(s_0 A) = \mathbb{1} \otimes \ell_{D(A)}^{-1}$. Por lo tanto $T\big(s_0(A)\big) = \ell_{D(A)}^{-1}$ pues $\mathbb{1} \otimes \cdot$ es una equivalencia de categorías. ☐

Para concluir la prueba de la Proposición 16.3.1, notemos por último que como el conjunto simplicial $\mathcal{N}\big(\mathcal{G}\big)$ es débilmente 2-coesquelético, se sigue de la propiedade (III) que cumplen los determinantes con valores en un 2-grupo que existe un único morfismo de conjuntos simpliciales truncados $f\colon\ \tau_3^* X \longrightarrow \tau_3^*\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ tal que $\tau_2^*(f) = \varphi$, en particular $f_1 = \varphi_1 = D$ y $f_2 = \varphi_2 = T$. ☐

Si $D_1 = (D_1, T_1)$ y $D_0 = (D_0, T_0)$ son dos determinantes de un conjunto simplicial reducido X con valores en el 2-grupo $\mathcal{G}$, una *homotopía* de D_1 en D_0 es una terna de funciones:

$$X_1 \xrightarrow{H} \big\{\text{Objetos de } \mathcal{G}\big\} \qquad \text{y} \qquad X_2 \xrightarrow{R_0, R_1} \big\{\text{Morfismos de } \mathcal{G}\big\}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(I) Para todo $\xi \in X_2$ los morfismos $R_0(\xi)$ y $R_1(\xi)$ son morfismos de $\mathcal{G}$ de la forma:

$$D_1(d_2\xi) \otimes H(d_0\xi) \xrightarrow{R_0(\xi)} H(d_1\xi) \xleftarrow{R_1(\xi)} H(d_2\xi) \otimes D_0(d_0\xi)$$

(II) $H(s_0\star) = \mathbb{1}$.

(III) Para todo $\eta \in X_3$, el siguiente es un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Big(H(A_{01})\otimes D_0(A_{12})\Big)\otimes D_0(A_{23}) \arrow[rr, "R_1(d_3\eta)\otimes D_0(A_{23})"] \arrow[d, "\wr", "a"'] & & H(A_{02})\otimes D_0(A_{23}) \arrow[dd, "R_1(d_1\eta)" description] & & \Big(D_1(A_{01})\otimes H(A_{12})\Big)\otimes D_0(A_{23}) \arrow[ll, "R_0(d_3\eta)\otimes D_0(A_{23})"'] \arrow[d, "\wr"', "a"] \\
H(A_{01})\otimes\Big(D_0(A_{12})\otimes D_0(A_{23})\Big) \arrow[d, "H(A_{01})\otimes T_0(d_0\eta)"'] & \mathbf{(a)} & & \mathbf{(b)} & D_1(A_{01})\otimes\Big(H(A_{12})\otimes D_0(A_{23})\Big) \arrow[d, "D_1(A_{01})\otimes R_1(d_0\eta)"] \\
H(A_{01})\otimes D_0(A_{13}) \arrow[rr, "R_1(d_2\eta)"'] & & H(A_{03}) & & D_1(A_{01})\otimes H(A_{13}) \arrow[ll, "R_0(d_2\eta)" description] \\
& & & \mathbf{(c)} & D_1(A_{01})\otimes\Big(D_1(A_{12})\otimes H(A_{23})\Big) \arrow[u, "D_1(A_{01})\otimes R_0(d_0\eta)"'] \\
& & D_1(A_{02})\otimes H(A_{23}) \arrow[uu, "R_0(d_1\eta)"] & & \Big(D_1(A_{02})\otimes D_1(A_{12})\Big)\otimes H(A_{23}) \arrow[ll, "T_1(d_3\eta)\otimes H(A_{23})"'] \arrow[u, "\wr", "a"']
\end{tikzcd}$$

donde

$$
\begin{array}{lll}
A_{03} = d_1 d_1 \eta = d_1 d_2 \eta & A_{01} = d_2 d_2 \eta = d_2 d_3 \eta & A_{13} = d_1 d_0 \eta = d_0 d_2 \eta \\
A_{02} = d_2 d_1 \eta = d_1 d_3 \eta & A_{23} = d_0 d_0 \eta = d_0 d_1 \eta & A_{12} = d_2 d_0 \eta = d_0 d_3 \eta \,.
\end{array}
$$

Consideremos ahora la función natural:

$$
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)_1 \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Homotopías} \\ \text{de determinantes} \\ \text{de } X \text{ en } \mathcal{G}\end{matrix}\right\} \tag{16.14}
$$

que a un morfismo $F\colon X \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{G})$ de conjuntos simpliciales cuya restricción a $\star \times \Delta^1$ es el morfismo constante, asocia la homotopía:

$$
(H, R_0, R_1) = \big(F_1(\,\cdot\,, \mathrm{id}_{[1]}), F_2(\,\cdot\,, \sigma_0), F_2(\,\cdot\,, \sigma_1)\big) \tag{16.15}
$$

del determinante de X en $\mathcal{G}$:

$$
(D_1, T_1) = \big(F_1(\,\cdot\,, \delta_1 \circ \sigma_0), F_2(\,\cdot\,, \delta_1 \circ \sigma_0 \circ \sigma_0)\big) \tag{16.16}
$$

en el determinante:

$$
(D_0, T_0) = \big(F_1(\,\cdot\,, \delta_0 \circ \sigma_0), F_2(\,\cdot\,, \delta_0 \circ \sigma_0 \circ \sigma_0)\big)\,. \tag{16.17}
$$

No es difícil mostrar que (16.15) es efectivamente una homotopía de determinantes (para demostrar (III) hay que considerar $F_3(\eta, \sigma_0 \circ \sigma_0)$, $F_3(\eta, \sigma_1 \circ \sigma_0)$ y $F_3(\eta, \sigma_1 \circ \sigma_1)$). Además (16.16) y (16.17) son determinantes pues son las imágenes por la función (16.12) de los morfismos:

$$
X \cong X \times \Delta^0 \xrightarrow{X \times \delta_i} X \times \Delta^1 \xrightarrow{F} \mathcal{N}(\mathcal{G})
$$

donde $0 \leq i \leq 1$.

Mostremos:

Lema 16.3.3. *La función* (16.14) *es una función biyectiva.*

Demostración. Como el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es 3-coesquelético por el Lema 15.1.1, para mostrar que (16.14) es una función biyectiva necesitamos ver que la función inducida:

$$
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_{\leq 3}}\Big(\tau_3^*(X), \tau_3^*\big(\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)\Big) \longrightarrow \mathbf{det}_X\big(\mathcal{G}\big) \tag{16.18}
$$

es biyectiva donde $\tau_3^*\colon \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}_{\leq 3}$ es el funtor truncación.

$$\Delta_0^1 = \Big\{\delta_0,\ \delta_1\Big\}, \qquad \Delta_1^1 = \Big\{\delta_0\circ\sigma_0,\ \ \delta_1\circ\sigma_0,\ \ \mathrm{id}_{[1]}\Big\},$$

$$\Delta_2^1 = \Big\{\delta_0\circ\sigma_0\circ\sigma_0,\ \ \delta_1\circ\sigma_0\circ\sigma_0,\ \ \sigma_0,\ \ \sigma_1\Big\} \qquad \text{y}$$

$$\Delta_3^1 = \Big\{\delta_0\circ\sigma_0\circ\sigma_0\circ\sigma_0,\ \ \delta_1\circ\sigma_0\circ\sigma_0\circ\sigma_0,\ \ \sigma_0\circ\sigma_0,\ \ \sigma_1\circ\sigma_0,\ \ \sigma_1\circ\sigma_1\Big\}.$$

□

Ya que por la Proposición 15.1.4 el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(X,\mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ es un complejo de Kan, se sigue de la Proposición 16.3.1 y del Lema 16.3.3 que la relación de homotopía inducida en el conjunto $\mathbf{det}_X(\mathcal{G})$ es una relación de equivalencia. Más aún, si denotamos como $\widetilde{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G})$ al cociente inducido, el funtor (16.10) induce un funtor:

$$\mathbf{sSet}_0{}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{\widetilde{\mathbf{det}}_{\bullet_1}(\,\bullet_2\,)} \mathbf{Set}\,, \tag{16.19}$$

con la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 16.3.4. *Los funtores* $\widetilde{\mathbf{det}}_{\bullet_1}(\,\bullet_2\,)$ *y* $\pi_0\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}_0}\big(\,\bullet_1\,,\mathcal{N}(\bullet_2)\,\big)\Big)$ *de dominio la categoría producto* $\mathbf{sSet}_0{}^{op}\times 2\text{-}\mathbf{Grp}$ *y codominio la categoría de los conjuntos* **Set** *son naturalmente isomorfos.*

Se sigue de la Proposición 10.1.2, 15.1.4 y 16.3.4 y del Corolario 15.1.6 que si $F = (F, m^F)\colon\ \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es una 2-equivalencia débil de 2-grupos y $f\colon\ Y \longrightarrow X$ es una 2-equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos, la función:

$$\widetilde{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G}) \xrightarrow{\quad\widetilde{\mathbf{det}}_f(F)\quad} \widetilde{\mathbf{det}}_Y(\mathcal{H})$$

es biyectiva.

En particular, el funtor (16.19) induce un funtor:

$$\mathbf{sSet}_0\Big[\big(\mathbf{W}_2^{red}\big)^{-1}\Big]^{op} \times 2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\widetilde{\mathbf{det}}_{\bullet_1}(\,\bullet_2\,)} \mathbf{Set}\,. \tag{16.20}$$

con la siguiente propiedad (ver el Corolario 15.2.8):

COROLARIO 16.3.5. *Si* $\mathcal{G}$ *es un* 2*-grupo y* X *es un conjunto simplicial reducido, los funtores:*

$$\mathbf{sSet}_0\Big[\big(\mathbf{W}_2^{red}\big)^{-1}\Big]^{op} \xrightarrow{h\widetilde{\mathbf{det}}_{\bullet}(\mathcal{G})} \mathbf{Set} \qquad y \qquad 2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{h\widetilde{\mathbf{det}}_X(\,\bullet\,)} \mathbf{Set}$$

son representables por $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ *y por el* 2*-grupo fundamental de* X*, respectivamente.*

§16.4. Si X es un conjunto bisimplicial reducido y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, un *determinante (funtorial) de X con valores en $\mathcal{G}$* es por definición una pareja $D = (D, T)$ compuesta por un morfismo de conjuntos simpliciales:

$$X_{\bullet,1} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(\mathcal{G}) = \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,1}$$

(con imagen en el nervio del grupoide subyacente al 2-grupo $\mathcal{G}$) y una función de conjuntos:

$$X_{0,2} \xrightarrow{T} \{\text{Morfismos de } \mathcal{G}\}\ ,$$

tales que:

(i) (Compatibilidad) Si $\xi \in X_{0,2}$, $T(\xi)$ es un morfismo de $\mathcal{G}$ de la forma:

$$D_0(d_2^v\xi) \otimes D_0(d_0^v\xi) \xrightarrow{T(\xi)} D_0(d_1^v\xi)\,;$$

(ii) (Unidad) Se tiene que $D_0\big(s_0^v(\star)\big) = \mathbb{1}$ y $T\big(s_0^v s_0^v(\star)\big) = l_{\mathbb{1}}^{-1} = r_{\mathbb{1}}^{-1}$.

(iii) (Funtorial) Si $\zeta \in X_{1,2}$ se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D_0(d_2^v d_1^h\,\zeta) \otimes D_0(d_0^v d_1^h\,\zeta) \arrow[r, "T(d_1^h\,\zeta)"] \arrow[d, "D_1(d_2^v\,\zeta)\otimes D_1(d_0^v\,\zeta)"'] & D_0(d_1^v d_1^h\,\zeta) \arrow[d, "D_1(d_1^v\,\zeta)"] \\
D_0(d_2^v d_0^h\,\zeta) \otimes D_0(d_0^v d_0^h\,\zeta) \arrow[r, "T(d_0^h\,\zeta)"'] & D_0(d_1^v d_0^h\,\zeta)
\end{tikzcd}$$

(Recordemos que $d_i^h d_j^v = d_j^v d_i^h$).

(iv) (Asociativa) Si $\eta \in X_{0,3}$ se tiene un diagrama conmutativo:

(16.21)

$$\begin{tikzcd}
D_0(A_{03}) & & D_0(A_{01}) \otimes D_0(A_{13}) \arrow[ll, "T(d_2^v\,\eta)"'] \\
 & & D_0(A_{01}) \otimes \big(D_0(A_{12}) \otimes D_0(A_{23})\big) \arrow[u, "D_0(A_{01})\otimes T(d_0^v\,\eta)"'] \\
D_0(A_{02}) \otimes D_0(A_{23}) \arrow[uu, "T(d_1^v\,\eta)"] & & \big(D_0(A_{01}) \otimes D_0(A_{12})\big) \otimes D_0(A_{23}) \arrow[ll, "T(d_3^v\,\eta)\otimes D_0(A_{23})"] \arrow[u, phantom, "a\,\wr"]
\end{tikzcd},$$

donde
$$\begin{aligned}
A_{03} &= d_1^v d_1^v \eta = d_1^v d_2^v \eta & A_{01} &= d_2^v d_2^v \eta = d_2^v d_3^v \eta & A_{13} &= d_1^v d_0^v \eta = d_0^v d_2^v \eta \\
A_{02} &= d_2^v d_1^v \eta = d_1^v d_3^v \eta & A_{23} &= d_0^v d_0^v \eta = d_0^v d_1^v \eta & A_{12} &= d_2^v d_0^v \eta = d_0^v d_3^v \eta\,.
\end{aligned}$$

Denotemos como $\underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G})_0$ al conjunto de los determinantes de un conjunto bisimplicial reducido X con valores en un 2-grupo $\mathcal{G}$. Definimos un funtor:

$$\begin{array}{lccc} (16.22) & \mathbf{ssSet_0}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp} & \longrightarrow & \mathbf{Set}\,, \\ & \big(X, \mathcal{G}\big) & \longmapsto & \underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G})_0 \end{array}$$

como sigue: Si $f\colon Y \to X$ es un morfismo de $\mathbf{ssSet}_0$ y $(\varphi, m^\varphi)\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un morfismo de 2-grupos, definimos la función:

$$\underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G})_0 \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_f(\varphi, m^\varphi)} \underline{\mathbf{det}}_Y(\mathcal{H})_0$$

por la fórmula $\underline{\mathbf{det}}_f\big(\varphi, m^\varphi\big)(D,T) = (\overline{D}, \overline{T})$, donde $\overline{D}$ y $\overline{T}$ son las composiciones:

$$Y_{\bullet,1} \xrightarrow{f_{\bullet,1}} X_{\bullet,1} \xrightarrow{D} \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{\bullet,1} \xrightarrow{\mathcal{N}^2(\varphi, m^\varphi)_{\bullet,1}} \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{\bullet,1}$$

y

$$Y_{0,2} \xrightarrow{f_{0,2}} X_{0,2} \xrightarrow{T} \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{0,2} \xrightarrow{\mathcal{N}^2(\varphi, m^\varphi)_{0,2}} \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{0,2}\,.$$

Si la pareja $(\overline{D}, \overline{T})$ definida de esta forma es un determinante de Y con valores en $\mathcal{H}$, se demuestra sin dificultad que $\underline{\mathbf{det}}_f(\varphi, m^\varphi)$ es en efecto un funtor. Mostremos que $(\overline{D}, \overline{T})$ es un determinante. Para mostrar la propiedad (I) observemos que se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y_{0,1} \arrow[r, "f_{0,1}"] \arrow[rd, phantom, "\text{(a)}"] & X_{0,1} \arrow[r, "D_0"] \arrow[rd, phantom, "\text{(b)}"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{0,1} \arrow[r, "\mathcal{N}^2(\varphi, m^\varphi)_{0,1}"] \arrow[rd, phantom, "\text{(c)}"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{0,1} \\
Y_{0,2} \arrow[r, "f_{0,2}"'] \arrow[u, "d_i^v"] & X_{0,2} \arrow[r, "T"'] \arrow[u, "d_i^v"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{0,2} \arrow[r, "\mathcal{N}^2(\varphi, m^\varphi)_{0,2}"'] \arrow[u, "d_i^v"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{0,2} \arrow[u, "d_i^v"']
\end{tikzcd}$$

donde (a) y (c) son cuadrados conmutativos pues f y (φ, m^φ) son morfismos y (b) es conmutativo ya que (D,T) es un determinante. Entonces si $\xi' \in Y_{0,2}$ tenemos que $d_i^v\, T'(\xi') = \overline{D}_0\, d_i^v(\xi')$.

Se verifica la propiedad (II), es decir que $\overline{D}_0\big(s_0^v(\star)\big) = \mathbb{1}$ y $T\big(s_0^v s_0^v(\star)\big) = l_{\mathbb{1}}^{-1} = r_{\mathbb{1}}^{-1}$ notando que se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
Y_{0,1} \arrow[r, "f_{0,1}"] & X_{0,1} \arrow[r, "D_0"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{0,1} \arrow[r, "\mathcal{N}^2(\varphi, m^\varphi)_{0,1}"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{0,1} \\
\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "s_0^v"] & \star \arrow[r, equal] \arrow[u, "s_0^v"] & \star \arrow[r, equal] \arrow[u, "s_0^v"] & \star \arrow[u, "s_0^v"']
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y_{0,2} \arrow[r, "f_{0,2}"] & X_{0,2} \arrow[r, "T"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{G}\big)_{0,2} \arrow[r, "\mathcal{N}^2(\varphi{,}m^\varphi)_{0,2}"] & \mathcal{N}^2\big(\mathcal{H}\big)_{0,2} \\
\star \arrow[u, "s_0^v s_0^v"] \arrow[r, equal] & \star \arrow[u, "s_0^v s_0^v" description] \arrow[r, equal] & \star \arrow[u, "s_0^v s_0^v" description] \arrow[r, equal] & \star \arrow[u, "s_0^v s_0^v"'] .
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, si $\zeta' \in Y_{1,2}$ se tiene el siguiente cuadrado conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
D_0(d_2^v d_1^h\, f_{1,2}\zeta') \otimes D_0(d_0^v d_1^h\, f_{1,2}\zeta') \arrow[r, "T(d_1^h\, f_{1,2}\zeta')"] \arrow[d, "D_1(d_2^v\, f_{1,2}\zeta')\otimes D_1(d_0^v\, f_{1,2}\zeta')"'] & D_0(d_1^v d_1^h\, f_{1,2}\zeta') \arrow[d, "D_1(d_1^v\, f_{1,2}\zeta')"] \\
D_0(d_2^v d_0^h\, f_{1,2}\zeta') \otimes D_0(d_0^v d_0^h\, f_{1,2}\zeta') \arrow[r, "T(d_0^h\, f_{1,2}\zeta')"'] & D_0(d_1^v d_0^h\, f_{1,2}\zeta')\,;
\end{tikzcd}$$

de modo que al aplicar el morfismo (φ, m^φ) deducimos el siguiente cuadrado conmutativo de $\mathcal{H}$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{D}_0(d_2^v d_1^h\, \zeta') \otimes \overline{D}_0(d_0^v d_1^h\, \zeta') \arrow[r, "\overline{T}(d_1^h\, \zeta')"] \arrow[d, "\overline{D}_1(d_2^v\, \zeta')\otimes \overline{D}_1(d_0^v\, \zeta')"'] & \overline{D}_0(d_1^v d_1^h\, \zeta') \arrow[d, "\overline{D}_1(d_1^v\, \zeta')"] \\
\overline{D}_0(d_2^v d_0^h\, \zeta') \otimes \overline{D}_0(d_0^v d_0^h\, \zeta') \arrow[r, "\overline{T}(d_0^h\, \zeta')"'] & \overline{D}_0(d_1^v d_0^h\, \zeta')
\end{tikzcd}$$

Se muestra de manera análoga la propiedad asociativa.

Proposición 16.4.1. *Los funtores* $\underline{\mathbf{det}}_{\bullet_1}\big(\ \bullet_2\ \big)_0$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(\bullet_1\,, \mathcal{N}^2(\bullet_2)\big)$ *de la categoría producto* $\mathbf{ssSet}_0{}^{op}{\times}2\text{-}\mathbf{Grp}$ *en la categoría de los conjuntos* **Set** *son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Si X es un conjunto bisimplicial reducido y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, deducimos de la definición del conjunto bisimplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ que la función natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big) & \longrightarrow & \underline{\mathbf{det}}_X\big(\mathcal{G}\big)_0 \\ F & \longmapsto & (F_{\bullet,1}, F_{0,2}) \end{array} \tag{16.23}$$

está bien definida. Dicho de otro modo, se sigue de la definición del conjunto simplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ que si $F\colon\ X \longrightarrow \mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ es un morfismo de la categoría $\mathbf{ssSet}_0$, la pareja:

$$X_{\bullet,1} \xrightarrow{F_{\bullet,1}} \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,1} = \mathrm{N}(\mathcal{G}) \qquad \text{y} \qquad X_{0,2} \xrightarrow{F_{0,2}} \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{0,2} \subset \big\{\text{Morphismes de } \mathcal{G}\big\}$$

cumple las propiedades (i) a (iv) de la definición de un determinante de X con valores en $\mathcal{G}$.

La función (16.23) *es inyectiva:*

Sean $F, G\colon\ X \longrightarrow \mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ dos morfismos de conjuntos bisimpliciales reducidos tales que $F_{\bullet,1} = G_{\bullet,1}$ y $F_{0,2} = G_{0,2}$. Observemos para empezar que $F_{\bullet,0} = G_{\bullet,0}$ porque $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,0}$

es el conjunto simplicial constante $\star$. Además $F_{0,3} = G_{0,3}$ pues $F_{0,2} = G_{0,2}$ y porque $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{0,\bullet} = \mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un conjunto simplicial débilmente 2-coesqueletico (ver el Lema 15.1.1). Finalmente, tenemos que $F_{1,2} = G_{1,2}$ porque la función (15.39) es biyectiva y se tiene que $F_{0,2} = G_{0,2}$ y $F_{1,1} = G_{1,1}$. Por lo tanto $F_{p,q} = G_{p,q}$ si $p, q \geq 0$ y $p + q \leq 3$.

Se sigue que $F = G$ por el Corolario 15.2.4.

La función (16.23) *es sobreyectiva:*

Mostremos primero:

LEMA 16.4.2. *Sea X un objeto de $\mathbf{ssSet}_0$ y $\mathcal{G}$ un 2-grupo. Si (D, T) es un determinante de X con valores en $\mathcal{G}$, para todo elemento A de $X_{0,1}$ se tien la igualdad de morfismos $T\big(s_i^v(A)\big) = s_i^v\big(D_0(A)\big)$ para $0 \leq i \leq 1$; es decir:*

$$\mathbb{1} \otimes D_0(A) \xrightarrow{T(s_0^v(A))=l^{-1}_{D_0(A)}} D_0(A) \qquad y \qquad D_0(A) \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{T(s_1^v(A))=r^{-1}_{D_0(A)}} D_0(A) \ .$$

DEMOSTRACIÓN. Si $A \in X_{0,1}$ mostremos que $T(s_0^v(A)) = l^{-1}_{D_0(A)}$; se verifica que $T(s_1^v(A)) = r^{-1}_{D_0(A)}$ de manera análoga.

Para empezar consideramos el elemento $s_0^v s_0^v(A)$ de $X_{0,3}$, entonces por las propiedades (II) y (IV) de arriba, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D_0(A) & \mathbb{1} \otimes D_0(A) \arrow[l, "T(s_0^v A)"'] \\
& \mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} \otimes D_0(A)) \arrow[u, "\mathbb{1}\otimes T(s_0^v A)"'] \\
\mathbb{1} \otimes D_0(A) \arrow[uu, "T(s_0^v A)"] & (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \otimes D_0(A) \, ; \arrow[l, "l_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes D_0(A)"] \arrow[u, phantom, "a\ \wr"]
\end{tikzcd}$$

dicho de otro modo tenemos un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\big) \otimes D_0(A) \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "l_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes D_0(A)"'] & & \mathbb{1} \otimes \big(\mathbb{1} \otimes D_0(A)\big) \arrow[dl, "\mathbb{1}\otimes T(s_0^v A)"] \\
& \mathbb{1} \otimes D_0(A) &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado ya que $l_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}$ (ver el Lema 14.1.1), se sigue de (14.3) que tenemos un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\big) \otimes D_0(A) \arrow[rr, "a"] & & \mathbb{1} \otimes \big(\mathbb{1} \otimes D_0(A)\big) \\
& \mathbb{1} \otimes D_0(A) \arrow[ul, "l_{\mathbb{1}}\otimes D_0(A)"] \arrow[ur, "\mathbb{1}\otimes l_{D_0(A)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $T\big(s_0^v(A)\big) = l_{D_0(A)}^{-1}$. ☐

Notemos por otro lado que por el Corolario 15.2.4, para mostrar que la función (16.23) es sobreyectiva es suficiente con darse un morfismo de conjuntos bisimpliciales reducidos truncados $F\colon\ \mu_3^*(X) \longrightarrow \mu_3^* \circ \mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ tal que:

$$F_{p,1} = D_p\colon\ X_{p,1} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{G})_p = \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{p,1} \quad \text{si} \quad 0 \le p \le 2 \qquad \text{y} \qquad F_{0,2} = T\,.$$

Para empezar definimos:

$$\begin{aligned} & F_{p,0} = \mathrm{id}_\star && \text{si} \quad 0 \le p \le 3\,, \\ & F_{p,1} = D_p && \text{si} \quad 0 \le p \le 2 \\ \text{y} \quad & F_{0,2} = T\,. \end{aligned} \tag{16.24}$$

Se sigue del Lema 16.4.2 y de las propiedades (I)-(II) que cumple un determinante (D,T) que las funciones $F_{p,q}$ definidas en (16.24) conmutan con los operadores cara y degenerados.

Por último, se sigue de la definición del conjunto bisimplicial $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ y de la propiedad (III) $\big($resp. (IV)$\big)$ que cumple (D,T) que existe una única función $F_{1,2}$ $\big($resp. $F_{0,3}\big)$ la cual conmuta con los operadores cara y degenerados. ☐

Si (D,T) y (D',T') son dos determinantes de un conjunto bisimplicial reducido X con valores en un 2-grupo $\mathcal{G}$, un *morfismo de determinantes* $h\colon\ (D,T) \longrightarrow (D',T')$ es una función:

$$X_{0,1} \xrightarrow{\ h\ } \big\{\text{Morfismos de } \mathcal{G}\big\}$$

con las siguientes propiedades:

(I) Para cualquier $A \in X_{0,1}$ el morfismo $h(A)$ de $\mathcal{G}$ tiene la forma:

$$D_0(A) \xrightarrow{h(A)} D_0'(A)$$

(II) $h(s_0^v\star) = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$.

(III) Si $\alpha \in X_{1,1}$ se tiene un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd} D_0(d_1^h\alpha) \arrow[r, "D_1(\alpha)"] \arrow[d, "h(d_1^h\alpha)"'] & D_0(d_0^h\alpha) \arrow[d, "h(d_0^h\alpha)"] \\ D_0'(d_1^h\alpha) \arrow[r, "D_1'(\alpha)"'] & D_0'(d_0^h\alpha) \end{tikzcd}$$

(IV) Si $\xi \in X_{0,2}$ se tiene un diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
D_0(d_2^v\xi) \otimes D_0(d_0^v\xi) \arrow[r, "T(\xi)"] \arrow[d, "h(d_2^v\xi)\otimes h(d_0^v\xi)"'] & D_0(d_1^v\xi) \arrow[d, "h(d_1^v\xi)"] \\
D_0'(d_2^v\xi) \otimes D_0'(d_0^v\xi) \arrow[r, "T'(\xi)"'] & D_0'(d_1^v\xi)\,.
\end{tikzcd}$$

Recordemos que por la definición (11.7) y la adjunción (11.6) se tiene un isomorfismo natural:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)_1 &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big(\big(X \times \mathrm{p}_1^*(\Delta^1)\big)/\big(\star \times \mathrm{p}_1^*(\Delta^1)\big), \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\big(X \times \mathrm{p}_1^*(\Delta^1), \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)\,.
\end{aligned}$$

Definimos por este medio una función:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)_1 & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{Morfismos de}\\ \text{determinantes de } X\\ \text{con valores en } \mathcal{G}\end{array}\right\} \\
H & \longmapsto & h_H = H_{1,1}\big(s_0^h(\bullet), \mathrm{id}_{[1]}\big)
\end{array} \tag{16.25}$$

donde:

$$h_H = H_{1,1}\big(s_0^h(\bullet), \mathrm{id}_{[1]}\big) = \Big(X_{0,1} \xrightarrow{(s_0^h(-),\mathrm{id}_{[1]})} X_{1,1}\times\Delta^1_1 \xrightarrow{H_{1,1}} \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{1,1} \Big)$$

es un morfismo del determinante:

$$\Big(X_{\bullet,1} \cong X_{\bullet,1}\times\Delta^0 \xrightarrow{X_{\bullet,1}\times\delta_1} X_{\bullet,1}\times\Delta^1 \xrightarrow{H_{\bullet,1}} \mathrm{N}(\mathcal{G})\ ,\quad X_{0,2} \cong X_{0,2}\times\Delta^0_0 \xrightarrow{X_{0,2}\times\delta_1} X_{0,2}\times\Delta^1_0 \xrightarrow{H_{0,2}} \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{0,2} \Big).$$

en el determinante:

$$\Big(X_{\bullet,1} \cong X_{\bullet,1}\times\Delta^0 \xrightarrow{X_{\bullet,1}\times\delta_0} X_{\bullet,1}\times\Delta^1 \xrightarrow{H_{\bullet,1}} \mathrm{N}(\mathcal{G})\ ,\quad X_{0,2} \cong X_{0,2}\times\Delta^0_0 \xrightarrow{X_{0,2}\times\delta_0} X_{0,2}\times\Delta^1_0 \xrightarrow{H_{0,2}} \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{0,2} \Big).$$

Mostremos que h_H cumple la propiedad (II) de la definición de morfismo de determinantes: En efecto, si $\alpha \in X_{1,1}$ se tienen dos triángulos conmutativos en $\mathcal{G}$:

$$H_{2,1}\big(s_0^h\alpha, \sigma_1\big) = \left(\begin{tikzcd}
H_{0,1}(d_1^h\alpha, \delta_1) \arrow[d, "H_{1,1}(s_0^h\, d_1^h\alpha{,}\mathrm{id}_{[1]})"'] \arrow[dr, "H_{1,1}(\alpha{,}\mathrm{id}_{[1]})"] & \\
H_{0,1}(d_1^h\alpha, \delta_0) \arrow[r, "H_{1,1}(\alpha{,}\delta_0\,\sigma_0)"'] & H_{0,1}(d_0^h\alpha, \delta_0)
\end{tikzcd}\right)$$

y $$H_{2,1}\big(s^h_1\alpha,\sigma_0\big) = \left(\begin{tikzcd} H_{0,1}(d^h_1\alpha,\delta_1) \arrow[r, "H_{1,1}(\alpha,\delta_1\,\sigma_0)"] \arrow[dr, "H_{1,1}(\alpha,\mathrm{id}_{[1]})"'] & H_{0,1}(d^h_0\alpha,\delta_1) \arrow[d, "H_{1,1}(s^h_0\,d^h_0\alpha,\mathrm{id}_{[1]})"] \\ & H_{0,1}(d^h_0\alpha,\delta_0) \end{tikzcd}\right),$$

por lo que se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{0,1}(d^h_1\alpha,\delta_1) \arrow[r, "H_{1,1}(\alpha,\delta_1\,\sigma_0)"] \arrow[d, "H_{1,1}(s^h_0\,d^h_1\alpha,\mathrm{id}_{[1]})"'] & H_{0,1}(d^h_0\alpha,\delta_1) \arrow[d, "H_{1,1}(s^h_0\,d^h_0\alpha,\mathrm{id}_{[1]})"] \\ H_{0,1}(d^h_1\alpha,\delta_0) \arrow[r, "H_{1,1}(\alpha,\delta_0\,\sigma_0)"'] & H_{0,1}(d^h_0\alpha,\delta_0) \end{tikzcd}$$

Además h_H cumple la propiedad (iii) ya que si $\xi\in X_{0,2}$ se tiene que $H_{1,2}(s^h_0\xi,\mathrm{id}_{[1]})$ es el siguiente diagrama conmutativo de $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd} H_{0,1}(d^v_2\xi,\delta_1)\otimes H_{0,1}(d^v_0\xi,\delta_1) \arrow[r, "H_{0,2}(\xi,\delta_1)"] \arrow[d, "H_{1,1}(s^h_0\,d^v_2\,\xi,\mathrm{id}_{[1]})\otimes H_{1,1}(s^v_0\,d^v_0\,\xi,\mathrm{id}_{[1]})"'] & H_{0,1}(d^v_1\xi,\delta_1) \arrow[d, "H_{1,1}(s^v_0\,d^v_1\,\xi,\mathrm{id}_{[1]})"] \\ H_{0,1}(d^v_2\xi,\delta_0)\otimes H_{0,1}(d^v_0\xi,\delta_0) \arrow[r, "H_{0,2}(\xi,\delta_0)"'] & H_{0,1}(d^v_1\xi,\delta_0)\,. \end{tikzcd}$$

Mostremos:

Lema 16.4.3. *La función* (16.25) *es biyectiva.*

Demostración. Sean $H,H'\colon\ X\times\mathrm{p}_1^*(\Delta^1)\longrightarrow\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ dos morfismos de conjuntos bisimpliciales tales que $h_H=h_{H'}$. Se sigue de la definición de (16.25) que $H_{\bullet,1}=H'_{\bullet,1}$ y $H_{0,2}=H'_{0,2}$. Por otro lado $H_{\bullet,0}=H'_{\bullet,0}$ porque $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,0}$ es el conjunto simplicial constante con valor $\star$. Ya que $H_{0,2}=H'_{0,2}$ y $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{0,\bullet}=\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un conjunto simplicial débilmente 2-coesquelético, se tiene que $H_{0,3}=H'_{0,3}$. Además $H_{1,2}=H'_{1,2}$ porque $H_{0,2}=H'_{0,2}$, $H_{1,1}=H'_{1,1}$ y porque la función (15.39) es inyectiva.

Deducimos del Corolario 15.2.4 que $H=H'$.

Supongamos ahora que $h\colon\ (D,T)\longrightarrow(D',T')$ es un morfismo de determinantes de X con valores en $\mathcal{G}$. Se muestra que existe un morfismo de conjuntos bisimpliciales:

$$X\times\mathrm{p}_1^*(\Delta^1)\xrightarrow{\ H\ }\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$$

tal que $h_H=h$ de la siguiente manera: Para empezar se sigue de la Proposición 16.4.1 que existe un morfismo de conjuntos simpliciales:

$$X_{0,\bullet}\times\Delta^1_0\xrightarrow{\ H_{0,\bullet}\ }\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{0,\bullet}=\mathcal{N}(\mathcal{G})$$

tal que:

$$H_{0,1}(A,\delta_0) = D'_0(A)\ , \qquad H_{0,1}(A,\delta_1) = D_0(A) \qquad \text{si} \quad A \in X_{0,1}\ .$$

y

$$H_{0,2}(\xi,\delta_0) = T'(\xi)\ , \qquad H_{0,2}(\xi,\delta_1) = T(\xi) \qquad \text{si} \quad \xi \in X_{0,2}\ .$$

Por otro lado, el morfismo de conjuntos simpliciales $H_{\bullet,0}\colon X_{\bullet,0} \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,0}$ lo definimos como el morfismo constante de valor $\star$; mientras que definimos $H_{1,1}$ por las fórmulas:

$$H_{1,1}(\,\cdot\,,\mathrm{id}_{[1]}) = h\,, \qquad H_{1,1}(\,\cdot\,,\delta_1\,\sigma_0) = s_0^h\,D_0 \qquad \text{y} \qquad H_{1,1}(\,\cdot\,,\delta_0\,\sigma_0) = s_0^h\,D'_0\,;$$

en particular, usando las propiedades (I) y (II) que cumple el morfismo de determinantes h, se tiene que:

$$\begin{aligned} &H_{1,1}\circ s_0^v = s_0^v \circ H_{1,0}\,, && H_{1,1}\circ s_0^h = s_0^h \circ H_{0,1}\,, \\ &d_i^v \circ H_{1,1} = H_{1,0}\circ d_i^v \qquad \text{y} && d_i^h \circ H_{1,1} = H_{0,1}\circ d_i^h \qquad \text{si } 0 \le i \le 1\,. \end{aligned}$$

Finalmente se sigue de las propiedades (III) y (IV) que verifica h que existen únicas funciones

$$H_{2,1}\colon\ X_{2,1}\times\Delta^1_2 \longrightarrow \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{2,1} \qquad \text{y} \qquad H_{1,2}\colon\ X_{1,2}\times\Delta^1_1 \longrightarrow \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{1,2}$$

que conmuta con los morfismos cara y degenerados.

Concluimos del Corolario 15.2.4 que la función (16.25) es sobreyectiva. □

Mostremos ahora (ver el Lema 16.2.1):

LEMA 16.4.4. *Si X es un conjunto bisimplicial reducido y $\mathcal{G}$ es un 2-grupo, el conjunto simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ es un 1-grupoide de Kan.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 15.2.4, sabemos que $\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ es un conjunto simplicial 2-coesquelético. Además $\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)$ es un complejo de Kan porque $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})$ es un objeto fibrante de la categoría de modelos simplicial punteada $(\mathbf{ssSet}_0, \mathbf{W}_2^{diag}, \mathbf{mono}, \mathbf{fib}_2^{diag})$ de la Proposición 11.3.1.

Se sigue del Lema 12.3.1 que para mostrar el enunciado tenemos simplemente que mostrar que la función:

(16.26)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^2, \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)\Big) \xrightarrow{\alpha_X^{1,k}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Lambda^{2,k}, \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X,\mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)\Big)$$

inducida de la inclusión $\alpha^{1,k}\colon\ \Lambda^{2,k} \rightarrowtail \Delta^2$, es inyectiva para toda $0 \leq k \leq 2$; es decir, por el isomorfismo (11.9) y la primer adjunción de (11.4), hay que mostrar que la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(X \times p_1^*\Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{ssSet}}\Big(X \times p_1^*\Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\Big) \ , \tag{16.27}$$

es inyectiva.

No es difícil notar que para ello basta con mostrar que para toda $q \geq 0$ la función:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(X_{\bullet,q} \times \Delta^2, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(X_{\bullet,q} \times \Lambda^{2,k}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}\Big) \ , \tag{16.28}$$

es inyectiva, es decir que la siguiente función es inyectiva:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Delta^2, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X_{\bullet,q}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}\big)\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\Lambda^{2,k}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X_{\bullet,q}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}\big)\Big) \ . \tag{16.29}$$

Finalmente, por el Lema 15.2.1 sabemos que $\mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}$ es isomorfo al nervio del el grupoide $\underline{\mathcal{G}_q}$ de los q-simplejos del 2-grupo $\mathcal{G}$. De modo que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sSet}}\big(X_{\bullet,q}, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})_{\bullet,q}\big)$ es un 1-grupoide de Kan, por lo que la función (16.29) es inyectiva. $\square$

Se sigue de la Proposición 16.4.1 y de los Lemas 16.4.3 y 16.4.4 que el funtor (16.22) se extiende en un funtor:

$$\begin{array}{ccc} {\mathbf{ssSet}_0}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp} & \longrightarrow & \mathbf{Grpd} \\ \big(X, \mathcal{G}\big) & \longmapsto & \underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G}) \end{array} \tag{16.30}$$

con la siguiente propiedad:

Corolario 16.4.5. *Los funtores* $\mathrm{N}\Big(\underline{\mathbf{det}}_{\bullet_1}\big(\ \bullet_2\ \big)\Big)$ *y* $\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(\bullet_1, \mathcal{N}^2(\bullet_2)\big)$ *de la categoría producto* ${\mathbf{ssSet}_0}^{op} \times 2\text{-}\mathbf{Grp}$ *en la categoría de los conjuntos simpliciales* $\mathbf{sSet}$ *son naturalmente isomorfos.*

Deducimos de los Corolarios 16.4.5 y 13.2.3:

Corolario 16.4.6. *Si* $\mathcal{G}$ *es un* 2*-grupo, el funtor composición:*

$$\mathbf{ssSet}_0{}^{op} \xrightarrow{\mathbf{det}_\bullet(\mathcal{G})} \mathbf{Grpd} \xrightarrow{\mathrm{N}} \mathbf{sSet}$$

es representables por el conjunto bisimplicial reducido $\mathcal{N}^2(G)$*, cuando vemos a* $\mathbf{ssSet}_0$ *como una categoría enriquecida en* $\mathbf{sSet}$ *por el funtor* $\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}$

En particular, $f\colon X \longrightarrow Y$ *es una* 2*-equivalencia débil de conjuntos bisimpiciales reducidos, si y solamente si la función inducida:*

$$\mathbf{det}_Y\big(\mathcal{G}\big) \xrightarrow{\mathbf{det}_f(\mathcal{G})} \mathbf{det}_X\big(\mathcal{G}\big)$$

es una equivalencia débil de grupoides para todo 2*-grupo* $\mathcal{G}$*. Más aún, el funtor inducido:*

$$\mathbf{ssSet}_0\big[\big(\mathbf{W}_2^{diag}\big)^{-1}\big]^{op} \xrightarrow{h\left(N\circ\mathbf{det}_\bullet(\mathcal{G})\right)} \mathbf{sSet}\big[\mathbf{W}_1^{-1}\big]$$

también es representable por el conjunto bisimplicial reducido $\mathcal{N}^2(G)$*, cuando vemos a* $\mathbf{ssSet}_0\big[\big(\mathbf{W}_2^{diag}\big)^{-1}\big]$ *como una categoría enriquecida en la categoría de los* 1*-tipos de homotopía.*

Recordemos que la categoría homotópica de los grupoides $h\mathbf{Grpd}$ es la categoría cuyos objetos son los grupoides y los morfismos son las clases de isomorfismos natural de los funtores entre ellos:

$$\mathrm{Hom}_{h\mathbf{Grpd}}\big(\mathcal{G},\mathcal{H}\big) = \pi_0\big(\mathcal{H}^{\mathcal{G}}\big)\,.$$

En el siguiente Corolario denotamos como:

$$\mathbf{Grpd} \xrightarrow{\pi} h\mathbf{Grpd}$$

al funtor canónico. Observemos que $\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}$ es un enriquecimiento de la categoría de los 2-grupos en la categoría de los grupoides $\mathbf{Grpd}$, por lo que $\underline{\mathrm{Hom}}_{2\text{-}\mathbf{Grp}}$ también es un enriquecimiento de 2-$\underline{\mathbf{Grp}}$ en la categoría homotópica $h\mathbf{Grpd}$.

COROLARIO 16.4.7. *Si* X *es un conjunto bisimplicial reducido, el funtor composición:*

$$2\text{-}\mathbf{Grp} \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_X(\,\bullet\,)} \mathbf{Grpd} \xrightarrow{\pi} h\mathbf{Grpd}$$

es representable por el 2*-grupo de homotopía del conjunto bisimplicial reducido* X*.*

En particular, $(\varphi, m^\varphi)\colon\ \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ *es una* 2*-equivalencia débil de* 2*-grupos, si y solamente si el funtor:*

$$\underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G}) \xrightarrow{\underline{\mathbf{det}}_X(\varphi,m^\varphi)} \underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{H})$$

es una equivalencia débil de grupoides; por lo que el funtor inducido:

$$2\text{-}h\mathbf{Grp} \xrightarrow{\pi_0\left(\underline{\mathbf{det}}_X(\,\bullet\,)\right)} \mathbf{Set}$$

también representable por el 2*-grupo de homotopía del conjunto bisimplicial reducido* X*.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es un conjunto bisimplicial reducido y $\Pi_2(X)$ el 2-grupo de homotopía de X, se sigue de la definición de $\Pi_2(X)$ que existe un isomorfismo $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}\big(\Pi_2(X)\big) \longrightarrow X$ en la categoría $\mathbf{ssSet}_0\big[\big(\mathbf{W}_2^{diag}\big)^{-1}\big]$, de donde deducimos un ismorfismo en $\mathbf{sSet}\big[\big(\mathbf{W}_1\big)^{-1}\big]$ natural en $\mathcal{G}$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\Big(\mathcal{N}^2\big(\Pi_2(X), \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)\Big) \cong \underline{\mathrm{Hom}}^{(1)}_{\mathbf{ssSet}_0}\big(X, \mathcal{N}^2(\mathcal{G})\big)\,.$$

Deducimos de los Corolarios 15.2.7 y 16.4.5 un ismorfismo en $h\mathbf{Grpd}$ natural en $\mathcal{G}$:

$$\underline{\mathbf{det}}_X(\mathcal{G}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{2\text{-}Grp}}\big(\Pi_2(X), \mathcal{G}\big),$$

pues el funtor nervio N: $\mathbf{Grpd} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ induce una equivalencia de categorías (ver §13.2):

$$h\mathbf{Grpd} \xrightarrow{h\mathrm{N}} \mathbf{sSet}\big[(\mathbf{W}_1)^{-1}\big] .$$

$\square$

Bibliografía

[AR94] J. Adámek and J. Rosick, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[Bar10] C. Barwick, *On left and right model categories and left and right Bousfield localizations*, Homology, Homotopy and Applications **12** (2010), no. 2, 245–320.

[Bor94] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1, Basic category theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 50, Cambridge University Press, 1994.

[Cis03] D-Ch. Cisinski, *Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **10** (2003), no. 2, 195–244.

[Cis06] D-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, vol. 308, Astérisque, 2006.

[Del87] P. Deligne, *Le déterminant de la cohomologie*, Contemporary Mathematics **67** (1987), 93–177.

[DGM12] B. I. Dundas, T. G. Goodwillie, and R. McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory*, Springer-Verlag, 2012.

[DHKS04] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan, and J. H. Smith, *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 113, American Mathematical Society, 2004.

[DK80a] W. G. Dwyer and D. M. Kan, *Calculating simplicial localizations*, Journal of Pure and Applied Algebra **18** (1980), 17–35.

[DK80b] ______, *Function complexes in homotopical algebra*, Topology **19** (1980), no. 4, 427–440.

[DK80c] ______, *Simplicial localizations of categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **17** (1980), 267–284.

[DS95] W. G. Dwyer and J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of Algebraic Topology, Elsevier, 1995, pp. 73–126.

[Dug01] D. Dugger, *Replacing model categories with simplicial ones*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 12, 5003–5027.

[Dus02] J. W. Duskin, *Simplicial matrices and the nerves of weak n-categories I: Nerves of bicategories*, Theory Appl. Categ. **9** (2001/02), no. 10, 198–308, electronic.

[GJ99] P. Goerss and J. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, 1999.

[Gle82] P. G. Glenn, *Realization of cohomology classes in arbitrary exact categories*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), no. 1, 33–105.

[GZ76] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 35, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976.

[Hir03] P. S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, 2003.

[Hov07] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, 2007.

[Kel82] G. M. Kelly, *Basic concepts of enriched category theory*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, 1982.

[Kun95] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland, 1995.

[Lan98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, segunda ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Low14] L. L. Low, *Universes for category theory*, https://arxiv.org/abs/1304.5227, Noviembre 2014.

[LP08] S. Lack and S. Paoli, 2*-nerves for bicategories*, K-Theory **38** (2008), no. 2, 153–175.

[Mal07a] G. Maltsiniotis, *La K-théorie d'un dérivateur triangulé*, Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Contemp. Math. Proceedings **431** (2007), 341–368.

[Mal07b] ———, *Le théorème de Quillen d'adjontion des foncteurs derivés, revisité*, Comptes rendues Mathématiques **344** (2007), no. 9, 549–552 (Français).

[May82] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1982.

[MS93] I. Moerdijk and J. Svensson, *Algebraic classification of equivariant homotopy* 2*-types, I*, Journal of Pure and Applied Algebra **89** (1993), 187–216.

[MT07] F. Muro and A. Tonks, *The 1-type of a waldhausen K-theory spectrum*, Advances in Mathematics **216** (2007), 178–211.

[MTW15] F. Muro, A. Tonks, and M. Witte, *On determinant functors and K-theory*, Publicacions Matemàtiques **59** (2015), 137–233.

[Qui67] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[Rie14] E. Riehl, *Categorical homotopy theory*, New mathematical monographs, vol. 24, Cambridge University Press, 2014.

[Sta14] A. Stanculescu, *Constructing model categories with prescribed fibrant objects*, Theory and applications of categories **29** (2014), no. 23, 635–653.

[Str87] R. Street, *The algebra of oriented simplexes*, J. Pure Appl. Algebra **49** (1987), no. 3, 283–3335.

[Wal83] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory for spaces*, Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J.), Lecture Notes in Math., vol. 1126, Springer-Verlag, 1983, pp. 318–419.