



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Programa de maestría y doctorado en ciencias matemáticas
y de la especialización en estadística aplicada.

Equivalencia de Quillen entre dos modelos de $(1, \infty)$ -*Categorías*

Tesis que para optar por el grado de:
Maestro en Ciencias

Presenta:
Holger Ludwig Moysen Cortés

Director:
Omar Antolín Camarena
Instituto de Matemáticas

Ciudad de México
Octubre 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	2
I Preliminares	8
1. Categorías Modelo	9
1.1. Argumento del Objeto pequeño	9
1.2. Categorías modelo	13
1.3. Categorías de Reedy	18
1.4. Funtores derivados	20
1.5. Límites homotópicos	22
1.6. Categorías Simpliciales	26
1.6.1. Categorías modelo simpliciales	28
1.6.2. Localización simplicial	29
2. Conjuntos simpliciales	33
2.1. Conjuntos simpliciales	33
2.2. Collares	35
2.3. Conjuntos simpliciales ordenados	36
2.4. Joins de conjuntos simpliciales	38
2.5. Estructura modelo de Quillen	39
2.6. Cuasi-categorías	40
2.7. Lemas en quasi-categorías	44
2.8. Estructura modelo de Joyal	48
2.9. Estructura modelo en $sCat$	52
II Representaciones	54
3. Functor \mathfrak{C}	55
3.1. El funtor de categorización	57
3.1.1. Presentaciones de $\mathfrak{C}(S)(a, b)$	58
3.2. Modelos homotópicos de \mathfrak{C}	60
3.2.1. Modelos de categorización	61
3.3. Propiedades de la categorificación	62
3.4. Conjuntos simpliciales fuertemente ordenados	65
4. Equivalencia de los modelos	67
4.1. Modelos de Dwyer-Kan para complejos de funciones de cuasi-categorías	67
4.2. Rigidificación	69
4.2.1. La counidad de la categorificación	71
4.3. Complejos de funciones relativos	72
4.4. DK-equivalencias para cuasi-categorías	75
4.5. Equivalencia de Quillen entre los modelos de $(1, \infty)$ -categorías	78

Introducción

Una categoría consiste de morfismos entre objetos, una regla de composición asociativa, y la existencia del morfismo identidad para cada objeto. Esto es, la composición debe satisfacer $h(gf) = (hg)f$ para cualesquiera tres morfismos componibles, y para todo $f: A \rightarrow B$, $id_B f = f = f id_A$.

Generalizamos la noción de categoría, considerando la existencia de morfismos entre morfismos (2-morfismos). Un ejemplo de ello es la definición de *bicategoría* 0.0.1, en donde la colección de 2-morfismos entre 1-morfismos, de un objeto a otro, es presentada como los 1-morfismos de una categoría. Esto permite considerar una composición asociativa, salvo una elección natural de 2-morfismos. Del mismo modo tenemos la noción de identidad de un objeto bajo una elección natural de 2-morfismos. Como consecuencia, todas las nociones usuales de categorías ordinarias resultan ser laxas.

Así, es natural considerar una cantidad mayor de tipos de morfismos para lo que queremos considerar como una categoría con n -morfismos. Sin embargo, el asunto de escoger modelos explícitos de estas ideas se convierte en una tarea más compleja e intrincada a medida que aumentamos el número de tipo de morfismos. Aún para el caso de dos dimensiones, existe una plétora de conceptos a los que podríamos llamar 2-categoría.

Aumentando infinitamente nuestras ideas, surge la de tener n -morfismos para todo $n \geq 1$. Esto sería una \aleph_0 -categoría. Desde luego, la tarea de armar esta cantidad numerable de información debe hacerse cuidadosamente. Recomendamos al lector leer [Lur09, Sec. 1.1].

En los párrafos subsiguientes, presentaremos distintas nociones del concepto de $(1, \infty)$ -categoría (es decir, una \aleph_0 -categoría con todos los morfismos de dimensión mayor a uno coherentemente invertibles). Trazaremos un camino rápido y conciso, para mostrar que dichos objetos encajan naturalmente en la teoría de categorías superiores. Empezamos con el siguiente ejemplo clásico:

Definición 0.0.1. Una 2-categoría débil (o bicategoría) consiste:

1. Una colección de objetos A, B, C, \dots (0-morfismos)
2. Para cada A, B una categoría $Hom(A, B)$ (1-morfismos y 2-morfismos).
3. funtores:

$$Hom(B, C) \times Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, C)$$

y

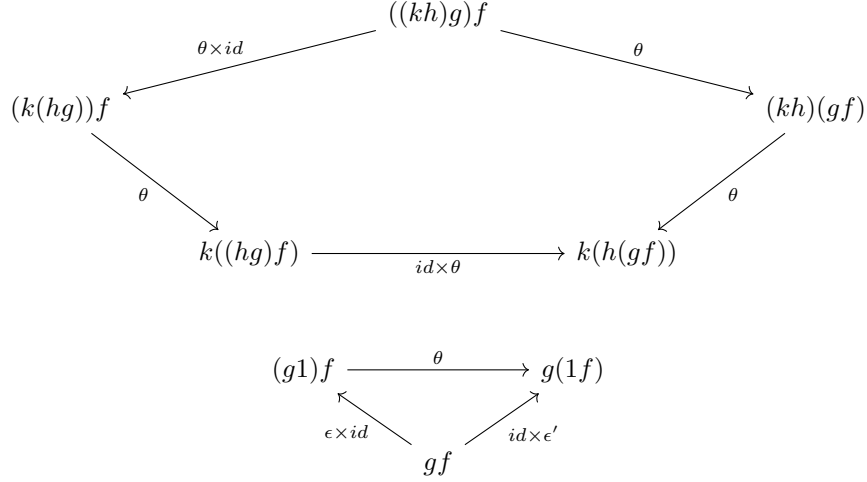
$$1_A : * \rightarrow Hom(A, A)$$

Es isomorfismos naturales $\theta, \epsilon, \epsilon'$:

$$\begin{array}{ccc}
 Hom(C, D) \times Hom(B, C) \times Hom(A, B) & \longrightarrow & Hom(C, D) \times Hom(A, C) \\
 \downarrow & \xRightarrow{\theta} & \downarrow \\
 Hom(B, D) \times Hom(A, B) & \longrightarrow & Hom(A, D)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 Hom(A, B) & \longrightarrow & Hom(A, B) \times Hom(A, A) \\
 \searrow id & \xRightarrow{\epsilon} & \downarrow \\
 & & Hom(A, B)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Hom(A, B) & \longrightarrow & Hom(B, B) \times Hom(A, B) \\
 \searrow id & \xRightarrow{\epsilon'} & \downarrow \\
 & & Hom(A, B)
 \end{array}$$

4. Satisfaciendo los diagramas conmutativos (lo que garantiza que todos¹ los demás se satisfagan):



Tal objeto matemático es un ejemplo de una *categoría de orden superior*. Dada una 2-categoría \mathcal{C} consideramos el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{C})$, *nervio de \mathcal{C}* , definido en simplices $\mathcal{N}(\mathcal{C})_n \doteq \text{hom}_{\text{Lax}}([n], \mathcal{C})$. Esta asociación define un functor fiel y pleno (ver por ejemplo [BFB05]), de la categoría de bicategorías y funtores laxos en la categoría de conjuntos simpliciales:

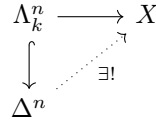
$$BiCat \leftrightarrow sSet$$

La imagen esencial de este functor consiste de los conjuntos 3-coesqueléticos. La información simplicial del nervio de \mathcal{C} indica que esta posee n -morfismos, todos invertibles para $n \geq 3$ y triviales para $n > 3$; esto es, $\mathcal{C} \in BiCat$ es un caso particular de una $(2, \infty)$ -categoría (todos los morfismos para $n \geq 3$ son invertibles). Desde luego, la invertibilidad de un morfismo en $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ es expresada en términos de un diagrama coherente.

Similarmente, la imagen esencial de la restricción del nervio en la subcategoría plena $Cat \hookrightarrow BiCat$ (el cual coincide con el nervio usual de una categoría) consiste precisamente de aquellos conjuntos 2-coesqueléticos. Análogamente, $\mathcal{C} \in Cat$ es un caso particular de una $(1, \infty)$ -categoría. Esto es capturado en la siguiente proposición:

Proposición 0.0.2. *Sea X un conjunto simplicial. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- Para $0 < k < n$, y para cualquier diagrama sólido

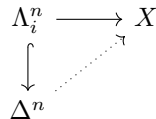


existe un único morfismo punteado que lo convierte en un diagrama conmutativo.

- Existe una categoría \mathcal{C} tal que $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ es isomorfo a X .

Esto es, una categoría es un tipo de conjunto simplicial que posee cierta propiedad de levantamiento. Invirtiendo el razonamiento, presentamos la noción de *complejo de Kan*:

Definición 0.0.3. *$X \in sSet$ recibe el nombre de complejo de Kan si para cualquier $0 \leq i \leq n$, y para cualquier diagrama sólido*



¹las combinaciones posibles de $\theta, \epsilon, \epsilon'$ y la transformación identidad.

existe el morfismo punteado que lo convierte en un diagrama conmutativo.

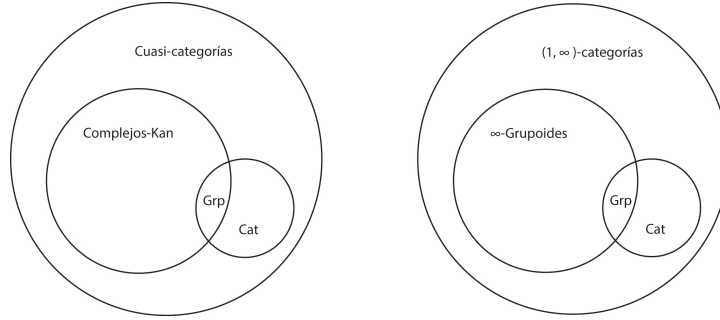
Tal conjunto simplicial es particularmente 2-coesquelético. Es un convenio considerar la subcategoría plena de complejos de Kan como un modelo de ∞ -grupoides (ver definición de modelo más adelante). La siguiente definición, contempla una clase de conjuntos simpliciales que poseen las propiedades de lo que podríamos llamar una $(1, \infty)$ -categoría:

Definición 0.0.4. $X \in sSet$ recibe el nombre de cuasi-categoría o ∞ -categoría² si para cualquier $0 < i < n$, y para cualquier diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

existe el morfismo punteado que lo convierte en un diagrama conmutativo.

El punto de comparación entre las nociones de categorías superiores y las tres clases de conjuntos simpliciales presentadas se ilustra en el siguiente diagrama:



En el presente trabajo nos ocupamos al estudio y comparación de dos modelos específicos de $(1, \infty)$ -categorías, y con modelo, queremos decir una $(2, \infty)$ -categoría cuyos objetos sean $(1, \infty)$ -categorías. Esto dependerá de las nociones de $(1, \infty)$ -categorías y $(2, \infty)$ -categorías que consideremos. Modelos de categorías de orden superior surgen naturalmente en la teoría de categorías enriquecidas. Por ejemplo, la 2-categoría estricta³ de todas las categorías pequeñas y funtores entre ellas, posee la estructura de una categoría enriquecida sobre Cat . En este sentido, podemos afirmar que la subcategoría plena de cuasi-categorías⁴ $qSet$ es un modelo de $(1, \infty)$ -categorías; en efecto, al ser $sSet$ una categoría cartesiana cerrada 1.6 esta posee una estructura de enriquecimiento sobre ella misma, luego la proposición 2.7.3 nos asegura que $qSet$ es una categoría enriquecida sobre $qSet$ ⁵.

Sea $X \in \mathcal{CG}$ en la categoría de espacios compactamente generados. Consideremos los siguientes datos:

- $(X)_0 = X$
- $(x, y)_1 = \{\alpha: [0, 1] \rightarrow X \mid (\alpha_0 = x) \wedge (\alpha_1 = y)\}$
- $(x, y)_2 = \{(\alpha, \alpha')_1\} = \{H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \mid (H_0 = \alpha) \wedge (H_1 = \alpha')\}$
- etc...

²Boardman y Vogt en [BV73] introdujeron por primera vez esta noción, a la que nombraron *complejo débil de Kan*

³i.e. θ, ϵ y e' son identidades

⁴La noción $(1, \infty)$ -categórica de estos objetos es totalmente laxa, en el sentido de que ni siquiera la composición es estricta (sí lo es cuando caen en la imagen $Cat \hookrightarrow sSet$ en virtud de la proposición 2.6.3). Sin embargo, la equivalencia $\mathcal{C}: sSet \rightarrow sCat$ (teorema 4.5.2), nos permite definir para un par de vértices $x, y \in S$ en una cuasi-categoría el espacio de morfismos como $\mathcal{C}(S)(x, y)$.

⁵Así, para $X, Y \in qSet$ la colección de n -morfismos entre ellos es el conjunto de $(n-1)$ -simplejos de la cuasi-categoría $Map_{qSet}(X, Y)$.

Sabemos de la teoría clásica de homotopía que la composición de dos n -homotopías está determinada salvo una $n + 1$ -homotopía. Empero, no es claro de qué forma se puede organizar toda esta información con el fin de establecer una estructura de ∞ -grupoides sobre X . No obstante, diremos por definición, que los espacios forman un modelo de ∞ -grupoides. Específicamente, en la estructura modelo de Quillen en \mathcal{CG} , se define el modelo de ∞ -grupoides de *espacios* como la categoría homotópica $h\mathcal{CG}$ que consiste de remplazos cofibrantes (un remplazo CW en \mathcal{CG}) y clases de homotopías entre mapeos. Notemos por el teorema de Whitehead 1.2.3 que los isomorfismos en $h\mathcal{CG}$ son precisamente las equivalencias débiles (mapeos que inducen isomorfismos en los grupos de homotopía y biyección entre las componentes arcoconexas).

La *conjetura homotópica de Grothendieck* asegura que cualquier modelo de ∞ -grupoides es equivalente al de espacios; siendo nuestro interés su presentación como la equivalencia de Quillen (ver 2.5):

$$sSet_{\mathcal{Q}} \begin{array}{c} \xleftarrow{Sing} \\ \xrightarrow{\tau} \\ \parallel \end{array} \mathcal{CG}$$

Específicamente, dado $S \in sSet$ y $X \in \mathcal{CG}$, las respectivas unidad y counidad:

$$\begin{aligned} |SingX| &\rightarrow X \\ S &\rightarrow Sing|S| \end{aligned}$$

son equivalencias débiles en las respectivas estructuras modelo. Esto induce una equivalencia entre las respectivas categorías homotópicas, es decir, una equivalencia entre el modelo de ∞ -grupoides en su presentación como *complejos de Kan* y la de espacios (resoluciones CW y clases de homotopías de funciones). Más aún, esta adjunción induce una enriquecida:

$$sSet_{\mathcal{Q}}\text{-Cat} \begin{array}{c} \xleftarrow{Sing} \\ \xrightarrow{\tau} \\ \parallel \end{array} \mathcal{CG}\text{-Cat} \quad (1)$$

La cual será una equivalencia de Quillen entre las estructuras heredadas,⁶ las que llamaremos estructura modelo simplicial y topológica de Quillen respectivamente. Los objetos fibrantes en $sSet_{\mathcal{Q}}\text{-Cat}$ son aquellos cuyos espacios de mapeos son complejos de Kan. Diremos que estas dos categorías son modelos equivalentes de $(1, \infty)$ -categorías.

¿Cuál es la relación entre los tres modelos de $(1, \infty)$ -categorías presentados? Joyal probó que la colección de objetos fibrantes en la localización de Bousfield izquierda respecto a la estructura de Quillen en $sSet$ (con una clase aumentada de equivalencias débiles denominadas *equivalencias de Joyal*) es precisamente la colección de cuasi-categorías. Posteriormente, Lurie en [Lur09] probó la existencia de una equivalencia de Quillen:

$$\mathfrak{C}: sSet_{\mathcal{Joyal}} \longrightarrow sSet_{\mathcal{Q}}\text{-Cat}$$

Lo que da como resultado que nuestros tres modelos sean equivalentes.

En este trabajo exponemos una segunda prueba de este último hecho, publicada por David Spivak y Daniel Dugger en los artículos [DS09] y [DS11]. Detallamos en que consiste la prueba.

El funtor \mathfrak{C} se define naturalmente como la extensión de Kan puntual a lo largo de cierto funtor $\mathfrak{C}[\Delta^\bullet]: \Delta \rightarrow sCat$ (ver cáp. 3), esto es, para todo conjunto simplicial S , su imagen está dada por el colímite:

$$\mathfrak{C}(S) = \operatorname{colim}_{\Delta/S} \mathfrak{C}(\Delta^n)$$

Sin embargo, es usualmente complicado trabajar con colímites en la categoría $sCat$, en particular, resulta difícil describir con exactitud los espacios de morfismos entre dos vértices arbitrarios.

Para $n \geq 0$, la categoría simplicial $\mathfrak{C}(\Delta^n)$ posee toda la información coherente que se ha perdido en la categoría $[n]$. Los objetos de la categoría simplicial $\mathfrak{C}(\Delta^n)$ son los vértices $\{0, \dots, n\}$ y los espacios de morfismos están dados por $\mathfrak{C}(\Delta^n)(i, j) = (\Delta^1)^{j-i-1}$ para $i < j$ y $\mathfrak{C}(\Delta^n)(i, i) = *$. Como ejemplo, para

⁶Las condiciones en las que $V\text{-Cat}$ hereda una estructura modelo de V se estudian con detalle en el apéndice [Lur09]

el caso $[n] = [3] = \{f, g, h\}$ (i.e., tres morfismos componibles), el espacio de morfismos $\mathfrak{C}(\Delta^3)(0, 3) = \Delta^1 \times \Delta^1$ de 0 a 3 se visualiza:

$$0 \xrightarrow{hgf} 3 \qquad \begin{array}{ccc} hgf & \longrightarrow & hg \cdot f \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ h \cdot gf & \longrightarrow & h \cdot g \cdot f \end{array} = \Delta^1 \times \Delta^1$$

Más aún, $\mathfrak{C}(\Delta^n)(i, j)$ posee la propiedad de ser contráctil, esto es, $\mathfrak{C}(\Delta^n)$ es fibrante en $sCat$. Esta propiedad es estable bajo la formación de uniones punto final a inicial, específicamente, dada una familia finita de simplejos Δ^{n_i} , si T es la unión en donde se ha identificado el punto final del i -ésimo simplejo con el inicial del $i + 1$ -ésimo simplejo, entonces $\mathfrak{C}(T)(\alpha, \omega)$ (donde α es el primer vértice del primer simplejo y ω es el último vértice del último simplejo) es contráctil. Podemos cerrar la categoría de simplejos bajo esta operación para obtener la categoría $\mathcal{N}ec$ cuyos elementos son llamados *collares*. Esto nos permite construir el funtor $\mathfrak{C}^{\mathcal{N}ec}$, el cual posee el mismo tipo de homotopía que \mathfrak{C} , pero es mucho más fácil de estudiar 2.2.

Otra forma de estudiar el tipo de homotopía de $\mathfrak{C}(S)(a, b)$, cuando S es una cuasi-categoría, es compararlo con el complejo de funciones homotópico $hom_S^R(a, b)$, definido como el espacio de funciones $Map(\Delta^1, S)$ en la localización simplicial de la categoría $sSet_{\Delta^1}$ bajo la estructura modelo de Joyal.

Estos espacios por definición son complejos de Kan (i.e., son ∞ -grupoides) y poseen la poderosa ventaja de poseer el mismo tipo de homotopía que el espacio $\mathfrak{C}(S)(a, b)$. El hecho de que $hom_S^R(a, b)$ tenga multiples representaciones homotópicas, facilitará el camino para poder compararlo con el espacio $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ a través de zigzags de equivalencias débiles.

El punto culminante de estos análisis será en primer lugar, el de probar que la counidad $\mathfrak{C}ND \rightarrow D$ es una equivalencia débil para todo objeto fibrante $D \in sCat$. En segundo lugar, que el funtor \mathfrak{C} preserva y refleja equivalencias débiles. Estos dos puntos permiten una prueba inmediata del teorema final 4.5.2.

Organización

Por motivos de exposición, y por carecer de contenido relevante para esta, algunas demostraciones a lo largo del trabajo se omiten, colocando las referencias donde pueden ser consultadas.

En la primera parte exponemos la teoría necesaria para plantear adecuadamente nuestro objetivo:

- 1) Introducimos el concepto de una categoría modelo y su categoría homotópica. Utilizando el contexto de categorías localmente presentables aseguramos que dada una familia de morfismos \mathcal{A} , todo morfismo se puede factorizar funtorialmente a través de un morfismo inyectivo de \mathcal{A} y un elemento de la saturación débil (objeto del argumento pequeño). Esto conduce naturalmente al concepto de una categoría cofibradamente generada, el cual será usado sustancialmente en las demostraciones de los capítulos posteriores. Definimos un colímite homotópico de una categoría de diagramas \mathcal{M}^J , como un funtor derivado izquierdo del colímite ordinario $\text{colim} : \mathcal{M}^J \rightarrow M$. El material de las secciones que abarcan estos temas se extrajo principalmente de [Rie14] y [Shu09]. Naturalmente, la teoría abarcada en este capítulo emplea, eventualmente, teoría básica de conjuntos simpliciales, la cual se expone en detalle en las primeras secciones del capítulo 2.
- 2) Abarcamos la teoría elemental de conjuntos simpliciales y cuasi-categorías. Establecemos la estructura modelo de Joyal sobre $sSet$ tal y como aparece en [DS09], y escribimos la presentación explícita de la estructura simplicial de Quillen en $sSet\text{-}Cat$ como estructura modelo cofibradamente generada.⁷

Los capítulos restantes poseen el corazón de la prueba desarrollada por Spivak y Dugger.

- 3) En este capítulo construimos el zigzag simple $\mathfrak{C} \leftarrow \mathfrak{C}^{hoc} \rightarrow \mathfrak{C}^{\mathcal{N}ec}$ de equivalencias débiles. Utilizando la teoría desarrollada de conjuntos simpliciales ordenados en la sección 2.3, damos distintas

⁷Construida por Bergner en [Ber07]

presentaciones del espacio de morfismos $\mathfrak{C}(S)(a, b)$, con el fin de establecer la segunda equivalencia del zigzag. Esta información nos permite probar que el funtor \mathfrak{C} preserva productos salvo equivalencia débil, lo cual asegura que también preserva cilindros para todo conjunto simplicial. Como resultado principal tenemos que \mathfrak{C} preserva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes y cofibraciones (en particular \mathfrak{C} es un morfismo de Quillen).

- 4 Construimos tres representaciones del espacio de funciones en la localización simplicial de $sSet_{\Delta^1/}$, a saber $hom_S^R(a, b)$, $hom_S^L(a, b)$, y $hom_S^E(a, b)$. Conectados entre si por equivalencias débiles canónicas. Establecemos dos caminos de zigzags entre $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ y $hom_S^R(a, b)$ para todo objeto fibrante $S \in sSet_J$ (cuasi-categoría). Los resultados clave de este capítulo son; la counidad $\mathfrak{C}ND \rightarrow D$ es una equivalencia débil para todo objeto fibrante $D \in sCat$, y el funtor \mathfrak{C} preserva y refleja equivalencias débiles. Estos permiten una prueba inmediata del teorema principal 4.5.2.

Requisitos

Se presume fuertemente que el lector posee conocimientos amplios de teoría elemental de categorías, tales como *límites*, *adjunción*, *extensiones de Kan*, *categorías enriquecidas*, *universos de Grothendieck etc.*, así como nociones de teoría clásica de homotopía en espacios topológicos. Nociones de categorías modelo, conjuntos simpliciales y localización son útiles pero no necesarias.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Autónoma de México por otorgarme la matrícula en su programa de Posgrado en Ciencias Matemáticas. A mi asesor Omar Antolin por su dedicación para compartir sus amplios conocimientos y gran experiencia. A mis revisores Francisco Marmolejo, Octavio Mendoza, y Pablo Pelaez. Especialmente, a Joachim Kock, cuya cuidadosa revisión, puntuales comentarios y correcciones fueron de gran valor para la conclusión de esta tesis.

Este trabajo esta dedicado a mi benefactor, amigo y padre, Holger Moysen F.

Parte I
Preliminares

Capítulo 1

Categorías Modelo

Introducimos definiciones y convenciones:

- Un cardinal κ recibe el nombre de **cardinal regular**, si no es la unión de conjuntos $< \kappa$, indexada por un conjunto $< \kappa$. Equivalentemente, si la categoría $Set_{<\kappa}$ de conjuntos de cardinalidad $< \kappa$ posee todos los colímites de orden $< \kappa$.
- Un cardinal κ es un **límite fuerte** si para todo $\lambda < \kappa$, se tiene $2^\lambda < \kappa$.
- Un cardinal recibe el nombre de **cardinal fuertemente inaccesible** si es innumerable, regular y un límite fuerte.

Para un cardinal regular κ nos referiremos a un conjunto S como κ -**pequeño** si tiene cardinalidad menor a κ . Diremos que una categoría es κ -pequeña, si sus respectivas colecciones de morfismos y objetos son κ -pequeñas. Fijando un κ cardinal fuertemente inaccesible, diremos que una categoría es **pequeña** si es κ -pequeña, y **larga** en caso contrario.

Dada una categoría \mathcal{C} , denotaremos por $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (o brevemente $\mathcal{C}(X, Y)$) a la colección de morfismos de X a Y . Escribiremos $\mathcal{C}_{X/}$ para denotar a la “categoría rebanada” sobre X , es decir, la categoría cuyos objetos son pares $(X, X \rightarrow Y)$ y morfismos diagramas conmutativos en \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & Y' \\ & \swarrow & \nearrow \\ & X & \end{array}$$

1.1. Argumento del Objeto pequeño

Sea κ un cardinal regular (pequeño).

Definición 1.1.1. Un conjunto J parcialmente ordenado se dice κ -**filtrado**, si para cualquier subconjunto $J_0 \subset J$ con cardinalidad $< \kappa$, existe una cota superior de J_0 en J

Definición 1.1.2. Sea \mathcal{C} una categoría cocompleta y $X \in \mathcal{C}$. Decimos que X es κ -**compacto** si para todo diagrama $\{Y_\alpha\}_J$ indexado por un poset κ -filtrado, el morfismo inducido

$$\varinjlim hom_{\mathcal{C}}(X, Y_\alpha) \xrightarrow{\cong} hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

donde $Y = \text{colim } Y_\alpha$, es una biyección. Diremos que X es **pequeño** si es κ -compacto para algún cardinal regular (pequeño) κ

Definición 1.1.3. Una categoría es **localmente presentable** si satisface las siguientes condiciones:

1. La categoría \mathcal{C} admite todos los colímites pequeños.

2. Existe un conjunto pequeño $S \subset C$ de objetos, que genera a C bajo colímites pequeños.
3. Cada objeto de C es pequeño. Equivalentemente, por (2), cada objeto de S es pequeño.
4. Para cada par de objetos $X, Y \in C$, $\text{hom}_C(X, Y)$ es pequeño

Ejemplo 1.1.4. ■ *Set es localmente presentable. Cada conjunto X es el límite directo de todos los subconjuntos finitos de él. Así, tomando S como la categoría plena de ordinales finitos $[n]$, se tiene que Set es generada por S bajo colímites (pequeños). Veamos que cada ordinal $[n]$ es un conjunto \aleph_0 -compacto. Debemos probar que el mapeo:*

$$\varinjlim_J \text{hom}([n], Y_\alpha) \xrightarrow{\cong} \text{hom}([n], Y)$$

es una biyección. Recordando la presentación de un colímite \aleph_0 -filtrado en Set ; sea $f : [n] \rightarrow Y$, entonces existen α_i tales que $f_i \in Y_{\alpha_i}$. Dado que J es \aleph_0 -filtrado, existe α tal que $\alpha \geq \alpha_i$ para todo $i \in [n]$, es decir, existe una función $[n] \rightarrow Y_\alpha$ de tal forma que $[n] \rightarrow Y_\alpha \rightarrow Y$ es f . Utilizando de nuevo la \aleph_0 -compacidad de J es inmediato ver que tal función es única en $\varinjlim \text{hom}([n], Y_\alpha)$.

- Si C es pequeña, $\text{Set}^{C^{op}}$ es localmente presentable. Esto se sigue del hecho de que el encaje de Yoneda $C \rightarrow \text{Set}^{C^{op}}$ es la cocompletación libre de la categoría pequeña C .

Definición 1.1.5. Sea \mathcal{C} una categoría con colímites pequeños y sea \mathcal{S} una clase de morfismos en \mathcal{C} . Diremos que \mathcal{S} es débilmente saturada si posee las siguientes propiedades:

1. (Cerradura bajo pushouts). Dado un cuadrado pushout

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ C' & \xrightarrow{f'} & D' \end{array}$$

si $f \in \mathcal{S}$, entonces $f' \in \mathcal{S}$.

2. (Cerradura bajo composiciones transfinitas). Sea C un objeto de \mathcal{C} , sea α un ordinal, y sea $\{D_\beta\}_{\beta < \alpha}$ un diagrama en \mathcal{C}_C indexado por α ; para todo $\beta \leq \alpha$ sea $D_{<\beta} = \text{colim}_{\gamma < \beta} D_\gamma$ en \mathcal{C}_C .

Si para todo $\beta < \alpha$, el morfismo natural $D_\beta \rightarrow D_\alpha$ pertenece a \mathcal{S} , entonces el morfismo inducido $C \rightarrow D_{<\alpha}$ pertenece a \mathcal{S} .

3. (Cerradura bajo retractos). Dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ C & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ D & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & D \\ & \curvearrowleft & \text{id} & \curvearrowright & \end{array}$$

si $g \in \mathcal{S}$, entonces $f \in \mathcal{S}$.

Observación 1.1.6. Si \mathcal{S} es una clase débilmente saturada entonces es cerrada bajo coproductos (pequeños) en $\text{Mor}(\mathcal{C})$. Ver, por ejemplo, [Hir03, P.10.2.7.]

Definición 1.1.7. Sean \mathcal{C} una categoría cocompleta y A una clase de morfismos en \mathcal{C} .

- La clase $\text{cof}(A)$ de A -cofibraciones se define como la saturación débil¹ de la clase A .

¹i.e., la intersección de todas las clases débilmente saturadas que contengan a A . Nótese que esta intersección es débilmente saturada y siempre existe.

- La clase $\text{iny}(A)$ de A -inyectivos o A -fibraciones, se define como la colección de morfismos que poseen la PLD (propiedad de levantamiento derecho²) respecto a la clase A , i.e. $\text{iny}(A) = \perp A$.

Por definición, tenemos que $\text{iny}(A) = \perp A = \perp \text{cof}(A)$.

Proposición 1.1.8 (Argumento del objeto pequeño). Sean \mathcal{C} una categoría presentable y $A = \{C_i \rightarrow D_i\}_I$ una colección de morfismos en \mathcal{C} indexada por un conjunto pequeño I . Entonces existe un funtor $T : \mathcal{C}^{[1]} \rightarrow \mathcal{C}^{[2]}$ con las siguientes propiedades:

- a) El funtor envía un morfismo $f : X \rightarrow Z$ a un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f' \nearrow & & \searrow f'' \\ X & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array}$$

donde $f' \in \text{cof}(A)$ y $f'' \in \text{iny}(A)$

- b) Si κ' es un cardinal regular tal que C_i y D_i son κ' -compactos para todo i , entonces T preserva colímites κ' -filtrados

Demostración. a) Sea κ un cardinal regular de manera que cada C_i sea κ -compacto,³ y fijemos un morfismo $f : X \rightarrow Z$ en \mathcal{C} . Daremos la construcción funtorial del diagrama deseado:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f' \nearrow & & \searrow f'' \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Z \end{array}$$

Para todo $i \in I$, sea $F_i : \mathcal{C}_{/Z} \rightarrow \text{Set}$ el funtor

$$(W \rightarrow Z) \mapsto \mathcal{C}(D_i, Z) \times_{\mathcal{C}(C_i, Z)} \mathcal{C}(C_i, W)$$

Para un cardinal regular κ fijo, definimos una sucesión transfinita $\{Y_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ de objetos en $\mathcal{C}_{/Z}$:

- $Y_0 = X$
- Suponiendo que Y_α ha sido definido, definimos $Y_{\alpha+1}$ como el pushout del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I, \eta \in F_i(Y_\alpha)} (C_i) & \longrightarrow & Y_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I, \eta \in F_i(Y_\alpha)} D_i & \longrightarrow & Y_{\alpha+1} \end{array}$$

- Para λ un ordinal límite no cero, $Y_\lambda = \varinjlim_{\alpha < \lambda} Y_\alpha$

Definimos f'' como el colímite $Y = \varinjlim_{\alpha < \kappa} Y_\alpha$ en $\mathcal{C}_{/Z}$. Para ver que $f'' \in \text{Iny}(A)$ observamos que todo problema de levantamiento se factoriza para algún cardinal $\alpha < \kappa$:

$$\begin{array}{ccccc} C_i & \longrightarrow & Y_\alpha & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D_i & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{1} & Z \end{array}$$

El cuadrado izquierdo es un elemento de $F_i(Y_\alpha)$, y por lo tanto se factoriza a través del pushout $Y_{\alpha+1}$. Esto brinda el levantamiento deseado.

²Un morfismo f posee la PLD respecto a g , si para todo par a, b con $ga = bf$, existe h tal que $hf = a$ y $gh = b$.

³Si C_i es κ_i -compacto, podemos elegir a κ como un cardinal regular (pequeño) tal que $\kappa_i < \kappa$ para todo i

Tomando f' como la composición transfinita ($X \rightarrow Y$), tenemos $f = f''f'$ con $f' \in \text{Cof}(A)$. La factorización es claramente funtorial.

b) Sea $\{f_i: X_j \rightarrow Z_j\}_{j \in J}$ un diagrama en $\mathcal{C}^{[1]}$ sobre una categoría κ' -filtrada, y sea $f: X \rightarrow Z = \varinjlim_J f_i$. Para demostrar que T preserva este colímite es suficiente probar $\varinjlim_J Y_\alpha^j = Y_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$; es decir, en el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_j & & \\
 & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\
 X_j & \xrightarrow{\quad} & Y_\alpha^j & \xrightarrow{\quad} & Z_j \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \varinjlim_J X_j & \longrightarrow & \varinjlim_J Y_\alpha^j & \longrightarrow & \varinjlim_J Z_j \\
 \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Y_\alpha & \xrightarrow{\quad} & Z \\
 & & f & &
 \end{array}$$

el morfismo $h: \varinjlim_J Y_\alpha^j \rightarrow Y_\alpha$ es un isomorfismo. Procedemos por inducción transfinita.

(Caso sucesor) Sea $\alpha < \kappa$, y supongamos que $\varinjlim_J Y_\alpha^j = Y_\alpha$. Dado que $\varinjlim_J \text{hom}(A_i, Y_\alpha^j) \rightarrow \text{hom}(A_i, Y_\alpha)$ es una biyección para $A_i = C_i, D_i$ e $i \in I$, se sigue que $\varinjlim_J F_i(Y_\alpha^j) \rightarrow F_i(Y_\alpha)$ es un isomorfismo para toda $i \in I$, de lo cual se deduce que:

$$\varinjlim_{j \in J} \coprod_{i \in I, \eta \in F_i(Y_\alpha^j)} C_i \longrightarrow \coprod_{i \in I, \eta \in F_i(\varinjlim_J Y_\alpha^j = Y_\alpha)} C_i$$

es un isomorfismo. Así, tenemos que $Y_{\alpha+1}$ es el pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim_{j \in J} \coprod_{i \in I, \eta \in F_i(Y_\alpha^j)} C_i & \longrightarrow & \varinjlim_J Y_\alpha^j \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 \varinjlim_{j \in J} \coprod_{i \in I, \eta \in F_i(Y_\alpha^j)} D_i & \longrightarrow & \varinjlim_J Y_{\alpha+1}^j
 \end{array}$$

(Caso límite) Sea $\beta < \kappa$ un ordinal límite tal que para todo ordinal $\alpha < \beta$ se satisface $\varinjlim_J Y_\alpha^j = Y_\alpha$. Entonces, por la propiedad conmutativa de los colímites se cumple $\varinjlim_J Y_\beta^j = Y_\beta$. \square

Como consecuencia del argumento del objeto pequeño, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.9. *Sea C una categoría localmente presentable y sea A una colección de morfismos en C . Entonces $(\perp A)_\perp$ es la saturación débil de A , i.e., $(\text{iny}(A))_\perp = \text{cof}(A)$.*

Demostración. Inmediata. \square

Definición 1.1.10. *Una categoría modelo C localmente presentable es **cofibrantemente generada**, si existen conjuntos pequeños A y A' tales que las colecciones de cofibraciones y cofibraciones acíclicas son exactamente $\text{Cof}(A)$ y $\text{Cof}(A')$ respectivamente. En virtud del argumento del objeto pequeño, esto es equivalente a que $\text{iny}(A)$ e $\text{iny}(A')$ sean las colecciones de fibraciones y fibraciones acíclicas respectivamente.*

Tal y como se mostrará en la sección 2.8, el siguiente teorema nos garantiza la existencia de la estructura de Joyal sobre $s\text{Set}$. Su demostración debe ser consultada en el artículo de Tibor Beke [Bek00].

Teorema 1.1.11 (J. Smith). *Sea C una categoría localmente presentable, \mathcal{W} una subcategoría, e I un conjunto (pequeño) de morfismos en C . Supongamos que se tienen las siguientes condiciones:*

c0 \mathcal{W} es cerrada bajo retractos y posee la propiedad 2-de-3 (Axioma M2 de Quillen).

c1 $\text{iny}(I) \subset \mathcal{W}$

c2 La clase $\text{cof}(I) \cap \mathcal{W}$ es cerrada bajo composiciones transfinitas y bajo pushout.

c3 La subcategoría \mathcal{W} satisface la condición de conjunto de solución para I .

Entonces, las clases \mathcal{W} , $\text{cof}(I)$ e $\text{iny}(\text{cof}(I) \cap \mathcal{W})$, son las colecciones de, equivalencias débiles, cofibraciones y fibraciones, respectivamente, de una estructura modelo cofibrantemente generada en \mathcal{C} .

Demostración. Ver [Bek00, Teorema 1.7]. □

1.2. Categorías modelo

Definición 1.2.1. Una categoría modelo es una categoría \mathcal{M} equipada con tres clases distinguidas de morfismos en \mathcal{M} , llamadas cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles; sujeto a los siguientes axiomas:

1. La categoría \mathcal{M} admite límites y colímites pequeños.
2. (Propiedad **2 de 3**). Dado un par componible $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, si cualquiera dos de $\{f, g, g \circ f\}$ son equivalencias débiles, también lo es el tercero.
3. (Cerradura bajo retractos). Suponer que f es un retracto de g , esto es, suponer que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \\
 & \curvearrowleft & \text{id} & \curvearrowright &
 \end{array}$$

Entonces:

- i) Si g es una fibración, también lo es f .
 - ii) Si g es una cofibración, también lo es f .
 - iii) Si g es una equivalencia débil, también lo es f .
4. Dado un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{1.1}$$

existe el morfismo puntado haciendo el diagrama conmutativo (diremos que el problema de levantamiento posee una solución) si:

- i) El morfismo i es una cofibración y el morfismo p es tanto una fibración como una equivalencia débil.
 - ii) El morfismo i es una cofibración y una equivalencia débil, y el morfismo p es una fibración.
5. Todo morfismo $X \rightarrow Z$ en \mathcal{M} admite factorizaciones:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow[\sim]{g} Z \\
 & & \\
 X & \xrightarrow[\sim]{f'} & Y' \xrightarrow{g'} Z
 \end{array}$$

donde f es una cofibración, g una fibración y equivalencia débil, f' una cofibración y equivalencia débil, y g' una fibración.

Un morfismo en una categoría modelo que es tanto una fibración como una equivalencia débil será llamado **fibración acíclica** o **fibración trivial**. Similarmente, un morfismo que es tanto una cofibración como una equivalencia débil será llamado **cofibración acíclica** o **cofibración trivial**. Sean i, p un par de morfismos en \mathcal{M} . Diremos que i posee la propiedad de levantamiento izquierda respecto a p (PLI) o bien, que p posee la propiedad de levantamiento a derecha respecto a i (PLD) si para todo cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow \text{---} & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe el levantamiento indicado que lo hace conmutativo. Utilizando la propiedad (3) de cerradura bajo retractos y la propiedad (5) de factorización en una categoría modelo, es fácil ver que si un morfismo p posee la PLD respecto a cada cofibración entonces este es una fibración acíclica:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ X & \xrightarrow{\quad} & X' & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow p & & \downarrow \sim & & \downarrow p \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

es decir, la colección de fibraciones acíclicas es exactamente la colección de morfismos con la PLD respecto a la colección de cofibraciones. Si \mathcal{C} , \mathcal{F} y \mathcal{W} denotan las tres clases distinguidas de una categoría modelo \mathcal{M} , tenemos entonces que $\mathcal{W} \cap \mathcal{F} = \perp \mathcal{C}$. Similarmente $\mathcal{W} \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}_\perp$.

Diremos que la propiedad (5) de factorización es functorial si existen funtores $F, F': \mathcal{M}^{[1]} \rightarrow \mathcal{M}^{[2]}$ tales que $d_1 F = id$, $d_2 F(f) \in \mathcal{C}$, y $d_0 F(f) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ (similarmente $d_1 F' = id$, $d_2 F'(f) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$, y $d_0 F'(f) \in \mathcal{F}$). Según lo expuesto en la sección anterior, en virtud de la proposición 1.1.8, toda categoría modelo localmente presentable posee una factorización functorial en un universo de Grothendieck adecuado. Por lo tanto, supondremos de aquí en adelante que toda categoría modelo es localmente presentable, y en particular que posee sistemas de factorizaciones functoriales en (5).

Por definición, toda categoría modelo \mathcal{M} tiene objeto inicial \emptyset y objeto final $*$. Un objeto X de M será llamado **cofibrante** si el morfismo $\emptyset \rightarrow X$ es una cofibración y **fibrante** si el morfismo $X \rightarrow *$ es una fibración. La propiedad de factorización (5) implica la existencia de endofuntores F, C en \mathcal{M} y equivalencias naturales $\alpha: id \rightarrow F$, $\beta: C \rightarrow id$ descritas por:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & FX & \longrightarrow & * \\ \emptyset & \longrightarrow & CX & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

Las parejas (F, α) y (C, β) reciben el nombre de **reemplazo fibrante** y **reemplazo cofibrante** ⁴.

Objetos cilindros y objetos de trayectorias. Un **cilindro** para $X \in \mathcal{M}$ es una factorización del morfismo codiagonal:

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{\text{codiag}} & X \\ \searrow i & & \nearrow j \\ & C & \end{array}$$

tal que i es una cofibración y j es un equivalencia débil. Dualmente, un **objeto de trayectorias** para $Y \in M$, es una factorización del morfismo diagonal:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ q \nearrow & & \searrow p \\ Y & \xrightarrow{\text{diag}} & Y \amalg Y \end{array}$$

⁴Más aún, al ser α_X una cofibración para todo $X \in \mathcal{M}$, (F, α) es llamado reemplazo fibrante cofibrante. Similarmente (C, β) es llamado reemplazo cofibrante fibrante

tal que q es una equivalencia débil y p es una fibrición. Notemos que la existencia de dichos objetos está garantizada por el axioma de factorización en una categoría modelo. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2.2. *Sea \mathcal{M} una categoría modelo. Sea X un objeto cofibrante de \mathcal{M} , y Y un objeto fibrante de \mathcal{M} , y $f, g: X \rightarrow Y$ dos morfismos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *Para cada cilindro $X \amalg X \rightarrow C$, existe un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{j} & C \\ & \searrow (f,g) & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

ii) *Existe un cilindro j y un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{j} & C \\ & \searrow (f,g) & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

iii) *Para cada espacio de caminos $P \rightarrow Y \amalg Y$, existe un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & P \\ & \searrow (f,g) & \swarrow \\ & Y \amalg Y & \end{array}$$

iv) *Existe un espacio de caminos p y un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & P \\ & \searrow (f,g) & \swarrow \\ & Y \amalg Y & \end{array}$$

Diremos que f es **homotópico** a g , si el par satisface cualquiera de estas condiciones.

Demostración. Ver [Hir03, Cap. 7 y 8] □

Dado un par de morfismos $f, g: X \rightarrow Y$ en una categoría modelo \mathcal{M} , las condiciones i) y iii) de la proposición anterior brindan dos nociones para una homotopía de f a g , las cuales coinciden cuando X es cofibrante y Y es fibrante. Más aún, bajo las hipótesis de la proposición 1.2.2, la relación f es **homotópico** a g resulta ser una relación de equivalencia en $\mathcal{M}(X, Y)$, cuyo conjunto de clases denotaremos por $\pi(X, Y)$. Consideramos así, la categoría $\pi\mathcal{M}$ cuyos objetos son aquellos que son cofibrantes y fibrantes en \mathcal{M} , y cuyos morfismos son las clases de homotopías en \mathcal{M} , es decir, para todo X, Y tenemos $hom_{\pi}(X, Y) = \pi(X, Y)$. Esta categoría recibe el nombre de **la categoría homotópica** de \mathcal{M} . La categoría homotópica satisface la siguiente propiedad:

Teorema 1.2.3 (Whitehead). *Sea \mathcal{M} una categoría modelo, y sean $X, Y \in \mathcal{M}$ objetos fibrantes-cofibrantes. Entonces $f \in \mathcal{M}(X, Y)$ es una equivalencia débil si y solo si $\bar{f} \in \pi(X, Y)$ es un isomorfismo.*

Demostración. a) Sea $f: X \rightarrow Y$ una equivalencia débil entre objetos fibrantes cofibrantes. Haremos el caso en que f es una fibrición acíclica, siendo el caso para una cofibración acíclica dual. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{id} & Y \end{array}$$

muestra la existencia de un inverso derecho para f , y por lo tanto $[fgf] = [f] = [f \cdot id_X]$. Si C es un cilindro para X , obtenemos el diagrama y el levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{(gf, 1)} & X \\ \downarrow & \nearrow \sim & \downarrow f \\ C & \longrightarrow & Y \end{array}$$

lo que nos indica que $[gf] = [id_X]$. Por lo tanto $[f]$ es un isomorfismo.

b) Recíprocamente, sea

$$X \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{p} Y$$

una factorización de una equivalencia homotópica f en una cofibración acíclica seguida de una fibración. Se tiene por tanto que A cofibrante-fibrante, y por la necesidad de la presente prueba, g es una equivalencia homotópica. Afirmamos que p es una equivalencia débil. Ahora, si f' es un inverso homotópico de f y $C \rightarrow Y$ es una homotopía de id_Y a ff' , tenemos un diagrama y un levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{gf'} & X \\ \downarrow i_0 & \nearrow H' & \downarrow p \\ C & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tenemos por lo tanto un morfismo $q = H'i_1$ y una homotopía $gf' \sim q$. Notemos que $pq = id_Y$ y que si g' es un inverso homotópico de g , entonces $[qp] = [gf'fg'] = [gg'] = [id_A]$. Por lo cual se deduce que qp es una equivalencia débil⁵. Nuestra afirmación se deduce del diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow p & & \downarrow qp & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{q} & A & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

□

Sea $\alpha: id \rightarrow F$ un remplazo cofibrante fibrante en \mathcal{M} , y sea $\beta: C \rightarrow id$ un remplazo cofibrante fibrante en \mathcal{M} . Se tiene un funtor $L: \mathcal{M} \rightarrow \pi\mathcal{M}$ descrito:

$$X \mapsto CFX$$

$$f: X \rightarrow Y \mapsto [CFf: CFX \rightarrow CFY]$$

Este funtor es universal respecto a la propiedad del teorema 1.2.3:

Proposición 1.2.4. *Sea \mathcal{A} una categoría (posiblemente larga), se satisface:*

- *Para todo funtor $G: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ que envía equivalencias débiles en isomorfismos, existe un funtor $G_L: \pi\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ y un isomorfismo natural $\theta: G_L \circ L \rightarrow G$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \\ \downarrow L & \searrow G & \\ \pi\mathcal{M} & \xrightarrow{G_L} & \mathcal{A} \end{array}$$

- *El funtor $L: Cat(\pi\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow Cat(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ es fiel y pleno.*

⁵Cualquier mapeo $h: X \rightarrow X$ homotópico a la identidad id_X es una equivalencia débil.

Demostración. Primeramente observamos que si f es homotópico a g (e.g. homotopía derecha) entonces $Gf = Gg$.⁶ Tenemos por lo tanto el funtor G_L definido; en objetos $X \mapsto GX$ y en morfismos $[f] \rightarrow Gf$. El isomorfismo natural está dado por:

$$\theta: G_L LX = G(LX) = G(FCX) \xleftarrow{\cong} G(CX) \xrightarrow{\cong} GX$$

Para probar el segundo punto, sean $H, H': \pi\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ y $\gamma: HL \Rightarrow HL'$. Sea X fibrante-cofibrante, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H(FCX) = HLX & \xrightarrow{\gamma_X} & H' LX = H'(FCX) \\ \simeq \uparrow H\alpha_{CX} & & \simeq \uparrow H'\alpha_{CX} \\ H(CX) & & H'(CX) \\ \simeq \downarrow H\beta_X & & \simeq \downarrow H'\beta_X \\ HX & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & H'X \end{array}$$

nos indica que existe una única transformación natural $H \rightarrow H'$ tal que al componerla con L coincide con γ . □

Observación 1.2.5. Si $Cat^*(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ denota la subcategoría plena de los funtores que envían equivalencias débiles en isomorfismos, la propiedad universal de L se expresa como una equivalencia de categorías:

$$L: Cat(\pi\mathcal{M}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} Cat^*(\mathcal{M}, \mathcal{A})$$

Observación 1.2.6. La condición de que L sea fiel y pleno implica que el funtor G_L es único salvo isomorfismo. Esto significa que la categoría homotópica $\pi\mathcal{M}$ es única salvo equivalencia.

Corolario 1.2.7. La categoría homotópica $\pi\mathcal{M}$ y la localización $\mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ (ver 1.4.1) son equivalentes.

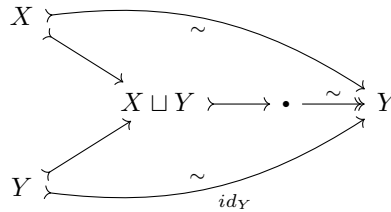
Concluimos la sección con algunos lemas que se utilizaran más adelante.

Lemma 1.2.8. Si $g: X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes, entonces existe una factorización:

$$X \xrightarrow{\sim} \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\sim} \\ j \\ \xleftarrow{j'} \end{array} Y$$

en donde $jj' = 1_Y$.

Bosquejo.



□

Lemma 1.2.9. [Whitehead] Un morfismo $f: X \rightarrow Y$ entre objetos cofibrantes es una equivalencia débil si y solo si para todo objeto fibrante Z el mapeo $f: \pi(Y, Z) \rightarrow \pi(X, Z)$ es una biyección.

Demostración. Se sigue del teorema 1.2.3. □

⁶En efecto, dado un cilindro $X \amalg X \rightarrow C \rightarrow X$, la propiedad "homotópica" de G nos garantiza que $GC \rightarrow GX$ es un isomorfismo, y de ahí que cualquier par de mapeos homotópicos en X coincidan bajo G .

Proposición 1.2.10. Sea \mathcal{M} una categoría modelo. El cuadrado pullback en \mathcal{M}

$$\begin{array}{ccc} Y' \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

es homotópico, si alguna de las siguientes dos condiciones se satisface:

- i) Y' y Y son fibrantes y f es una fibración.
- ii) \mathcal{M} es una categoría propia a derecha y f es una fibración.

Demostración. Ver [Lur09, A.2.4.4]. □

1.3. Categorías de Reedy

Definición 1.3.1. Una categoría de Reedy consiste;

- De una categoría \mathcal{C} junto con dos subcategorías amplias⁷ $\overleftarrow{\mathcal{C}}$ y $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ con la propiedad de que todo morfismo $g \in \mathcal{C}$ se factoriza de manera única $g = \overrightarrow{g} \overleftarrow{g}$, donde $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ y $\overleftarrow{g} \in \overleftarrow{\mathcal{C}}$.
- Y al menos una función de grado $\text{deg}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaciendo:
 - Para todo morfismo $f: c \rightarrow d$ en $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ distinto de la identidad, $\text{deg}(c) < \text{deg}(d)$.
 - Para todo morfismo $f: c \rightarrow d$ en $\overleftarrow{\mathcal{C}}$ distinto de la identidad, $\text{deg}(c) > \text{deg}(d)$.

Ejemplo 1.3.2. La categoría cosimplicial Δ junto con las subcategorías de inyecciones y suprayecciones es, con la obvia función de grado, una categoría de Reedy.

Elegida una función de grado, una categoría de Reedy \mathcal{C} posee naturalmente una filtración $\mathcal{FC}^0 \subseteq \mathcal{FC}^1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{FC}^n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{C}$, donde \mathcal{FC}^n es la subcategoría plena de \mathcal{C} cuyos objetos son de grado menor o igual a n . Sea N una categoría con límites y colímites pequeños. Dado un diagrama $X: \mathcal{FC}^{n-1} \rightarrow N$, consideramos dos extensiones de Kan izquierda y derecha a lo largo de la inclusión $\mathcal{FC}^{n-1} \subseteq \mathcal{FC}^n$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{FC}^{n-1} & \xrightarrow{X} & N \\ \searrow i_n & \swarrow \text{Lan}_i X & \nearrow \text{Ran}_i X \\ & \mathcal{FC}^n & \end{array}$$

Al tratarse de extensiones de Kan a lo largo de una inclusión, elegimos $\text{Lan}_i X \circ i_n = X = \text{Ran}_i X \circ i_n$, por lo que existe una única transformación $\text{Lan}_i X \rightarrow \text{Ran}_i X$ tal que restringida a la $(n-1)$ -filtración coincide con la identidad en X . Si X' es una extensión de X a la n -filtración de \mathcal{C} , tenemos una única factorización

$$\text{Lan}_i X \rightarrow X' \rightarrow \text{Ran}_i X$$

Recíprocamente, si para cada $\alpha \in \mathcal{FC}^n$ tenemos un objeto en $X_\alpha \in N$ y una factorización:

$$\text{Lan}_i X(\alpha) \rightarrow X_\alpha \rightarrow \text{Ran}_i X(\alpha),$$

no es difícil probar que existe una única extensión X' de X a la n -ésima filtración tal que $X'_\alpha = X_\alpha$ para todo α de grado n (ver [Hir03]).

⁷Una subcategoría de \mathcal{C} se dice *amplia* si posee todos los objetos de \mathcal{C}

Concluimos que todo diagrama $X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}$ está recursivamente determinado por las extensiones $Lan_i X(\alpha) \rightarrow X_\alpha \rightarrow Ran_i X(\alpha)$ a la n -ésima filtración. De igual modo, todo morfismo $X \rightarrow Y$ de diagramas en $\mathcal{N}^{\mathcal{C}}$ está recursivamente determinado por las extensiones

$$\begin{array}{ccccc} Lan_i X(\alpha) & \longrightarrow & X_\alpha & \longrightarrow & Ran_i X(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Lan_i Y(\alpha) & \longrightarrow & Y_\alpha & \longrightarrow & Ran_i Y(\alpha) \end{array}$$

a la n -ésima filtración. Más aún, tal y como lo muestra la proposición 1.3.5, estas no dependen de la función de grado elegida. Para enunciar adecuadamente esto, escribimos las siguientes definiciones:

Definición 1.3.3. Sea \mathcal{C} una categoría de Reedy. Sea α cualquier objeto de \mathcal{C} , definimos:

- La **latching category** en α como $\partial(\vec{\mathcal{C}}_{/\alpha}) := \vec{\mathcal{C}}_{/\alpha} - \{1_\alpha\}$, la categoría rebanada sobre α sin el morfismo identidad en α .
- La **matching category** en α como $\partial(\overleftarrow{\mathcal{C}}_{\alpha/}) := \overleftarrow{\mathcal{C}}_{\alpha/} - \{1_\alpha\}$, la categoría rebanada por debajo de α sin el morfismo identidad en α .

Definición 1.3.4. Para un diagrama $X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ y un objeto cualquiera $\alpha \in \mathcal{C}$, definimos:

- El **latching object** de X en α como el colímite $L_\alpha X = \text{colim}_{\partial(\vec{\mathcal{C}}_{/\alpha})} X$.
- El **matching object** de X en α como el límite $M_\alpha X = \text{lim}_{\partial(\overleftarrow{\mathcal{C}}_{\alpha/})} X$.

Proposición 1.3.5. Dada una función de grado para \mathcal{C} , y un objeto α de grado n ; las categorías $i_{n/\alpha}$ y $\partial(\vec{\mathcal{C}}_{/\alpha})$ son cofinales. Dualmente, las categorías $(i_n)_{\alpha/}$ y $\partial(\overleftarrow{\mathcal{C}}_{\alpha/})$ son finales. Es decir, $Lan_{i_n} X(\alpha)$ y $Ran_{i_n} X(\alpha)$ son isomorfos al latching object y al matching object de X en α .

Demostración. Ver [Hir03, P.15.2.8]. □

El análisis realizado en los párrafos anteriores nos permite abordar correctamente problemas de levantamiento en $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ para una categoría modelo \mathcal{M} . Precisamente, sea

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

un problema de levantamiento en $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ con solución en la $(n-1)$ -ésima filtración. Para todo $\alpha \in \mathcal{C}$ de grado n , el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} L_\alpha A & \longrightarrow & A_\alpha & \longrightarrow & X_\alpha & \longrightarrow & M_\alpha X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_\alpha B & \longrightarrow & B_\alpha & \longrightarrow & Y_\alpha & \longrightarrow & M_\alpha Y \end{array}$$

muestra que el levantamiento de cualquiera de los siguientes cuadros implica el del otro:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} A_\alpha & \longrightarrow & X_\alpha \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B_\alpha & \longrightarrow & Y_\alpha \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{ccc} L_\alpha B \cup_{L_\alpha A} A_\alpha & \longrightarrow & X_\alpha \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B_\alpha & \longrightarrow & Y_\alpha \times_{M_\alpha Y} M_\alpha X \end{array} \end{array}$$

Los mapeos $L_\alpha B \cup_{L_\alpha A} A_\alpha \rightarrow B_\alpha$ y $X_\alpha \rightarrow Y_\alpha \times_{M_\alpha Y} M_\alpha X$ reciben el nombre de **latching map relativo de g en α** y **matching map relativo de f en α** respectivamente. Enunciamos el teorema principal de la presente sección:

Teorema 1.3.6. Las siguientes tres clases de mapeos forman parte de una estructura modelo llamada **estructura modelo de Reedy** en $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$.

- **Fibraciones de Reedy:** Los morfismos $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ tales que para todo $\alpha \in \mathcal{C}$, el matching map relativo $X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha} \times_{M_{\alpha}Y} M_{\alpha}X$ es una fibración en \mathcal{M} .
- **Cofibraciones de Reedy:** Los morfismos $g: A \rightarrow B$ en $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ tales que para todo $\alpha \in \mathcal{C}$, el latching map relativo $L_{\alpha}B \cup_{L_{\alpha}A} A_{\alpha} \rightarrow B_{\alpha}$ es una cofibración en \mathcal{M} .
- **Equivalencias de Reedy:** Los morfismos $f: X \rightarrow Y$ tales que para todo $\alpha \in \mathcal{C}$, los mapeos $f_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$ son equivalencias débiles en \mathcal{M} .

Demostración. Ver [Hir03, T.15.3.3]. □

Definición 1.3.7. Sea \mathcal{C} una categoría de Reedy:

1. Diremos que \mathcal{C} es de **constantes cofibrantes** si para cada categoría modelo \mathcal{M} y para cada objeto $B \in \mathcal{M}$ cofibrante, el diagrama constante $B \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ es cofibrante en la estructura modelo de Reedy.
2. Diremos que \mathcal{C} es de **constantes fibrantes** si para cada categoría modelo \mathcal{M} y para cada objeto $B \in \mathcal{M}$ fibrante, el diagrama constante $B \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ es fibrante en la estructura modelo de Reedy.

Proposición 1.3.8. Sea \mathcal{C} una categoría de Reedy

1. La categoría de Reedy \mathcal{C} es de objetos cofibrantes si y sólo si, para toda categoría modelo \mathcal{M} , la adjunción $\mathbf{c} \dashv \mathbf{lim}$ es un morfismo de Quillen
2. La categoría de Reedy \mathcal{C} es de objetos fibrantes si y sólo si, para toda categoría modelo \mathcal{M} , la adjunción $\mathbf{colim} \dashv \mathbf{c}$ es un morfismo de Quillen

Demostración. Ver [Hir03, Teorema 15.10.8]. □

1.4. Funtores derivados

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías. Sean W y W' colecciones de morfismos en \mathcal{C} y \mathcal{D} respectivamente. Dado un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, consideremos el diagrama sólido:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}[W^{-1}] & \dashrightarrow & \mathcal{D}[W'^{-1}] \end{array}$$

donde γ y γ' son las respectivas localizaciones. La existencia del funtor L que hace conmutar al diagrama está garantizada de manera única si suponemos que $F(W) \subset W'$. Si \mathcal{D} es una categoría saturada en W (e.g. una categoría modelo), entonces la condición $F(W) \subset W'$ es necesaria para la existencia de dicho funtor. Por lo tanto, al trabajar con categorías modelo, con el fin poder estudiar la información que nos brinda un funtor (no homotópico), debemos considerar ordenes superiores de conmutatividad.

Antes de continuar con nuestra exposición, daremos la siguiente definición que generaliza el concepto de equivalencia débil a categorías más generales [Dwy+04], justificando su uso por las observaciones que se hacen después de esta:

Definición 1.4.1. Una categoría de homotopía es una categoría \mathcal{M} junto con una subcategoría W con $\text{obj}(W) = \text{obj}(\mathcal{M})$ que satisfacen la propiedad **2-de-6**, esto es, para todo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot \\ f \nearrow & gh & hg \searrow h \\ \cdot & \xrightarrow{hgf} & \cdot \end{array}$$

si $hg, gf \in W$, entonces $f, g, h, hgf \in W$. La localización $\mathcal{M}[W^{-1}]$ recibe el nombre de **categoría homotópica** de \mathcal{M} .

Observamos dos cosas:

- Sea M es una categoría y W una colección de morfismos en ella. Si la localización $M \rightarrow M[W^{-1}]$ es saturada, entonces W satisface la propiedad 2-de-6. [Dwy+04]
- Para toda categoría modelo \mathcal{M} , $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ es una categoría de homotopía.

Definición 1.4.2. Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un funtor entre categorías de homotopía. Definimos al **functor derivado izquierdo total (global)** de F :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ \gamma \downarrow & \searrow & \downarrow \gamma' \\ M[W^{-1}] & \xrightarrow{\mathbf{L}F} & N[W^{-1}] \end{array}$$

como $\mathbf{L}F := \text{Ran}_{\gamma'} \gamma' F$, la extensión de Kan derecha de $\gamma' F$ a lo largo de γ .

Observación 1.4.3. Por localización, la propiedad universal de la extensión derecha de Kan se traduce como: Para todo funtor $K : M \rightarrow N[W^{-1}]$ que mande equivalencias débiles a isomorfismos y para toda transformación $\alpha : K \Rightarrow \gamma' F$, existe una única transformación $\beta : \bar{K} \Rightarrow \mathbf{L}F$ tal que $\beta\gamma = \alpha$. Así, a $\mathbf{L}F\gamma$ también se le llamará funtor derivado izquierdo total de F .

Dualmente, definimos al **functor derivado derecho total** de F como $\mathbf{R}F := \text{Lan}_{\gamma} \gamma' F$, la extensión de Kan izquierda de $\gamma' F$ a lo largo de γ .

Definición 1.4.4. Sea $F : M \rightarrow N$ un funtor entre categorías de homotopía. Un **functor derivado izquierdo (local)** de F es un funtor homotópico $\mathbb{L}F : M \rightarrow N$ junto con una transformación natural $\lambda : \mathbb{L}F \rightarrow F$ tal que $\gamma' \lambda : \gamma' \mathbb{L}F \Rightarrow \gamma' F$ es un funtor derivado izquierdo total de F .

Observación 1.4.5. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} categorías modelo. El funtor derivado izquierdo **total (global)** de un funtor dado $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, por definición, está determinado de manera única salvo isomorfismo natural. Por otro lado, sean $\mathbb{L}_1 F$ y $\mathbb{L}_2 F$ dos funtores derivados izquierdos; entonces existe un isomorfismo natural $\alpha : \gamma' \mathbb{L}_1 F \Rightarrow \gamma' \mathbb{L}_2 F$. Considerando la equivalencia $\phi : \mathcal{N}[W^{-1}] \simeq \pi \mathcal{N}$ del corolario 1.2.7, tenemos que $\phi(\alpha_X)$ es un isomorfismo en $\pi \mathcal{N}$ y por lo tanto el zigzag $\alpha_X : \mathbb{L}_1 F(X) \rightsquigarrow \mathbb{L}_2 F(X)$ posee una factorización a través de los respectivos remplazos cofibrantes y fibrantes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\ \sim \uparrow & & \sim \uparrow \\ CX & & CX \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ FCX & \xrightarrow{\alpha'} & FCX \end{array}$$

donde α' es una equivalencia homotópica. Así, en el presente trabajo identificaremos (cuando no haya ambigüedad del modelo específico en uso) a un **functor derivado izquierdo dado (local)**, con la clase de equivalencias a la que pertenece.

Definición 1.4.6. Sea M una categoría de homotopía. Una **deformación izquierda** de M es un endofunctor Q junto con una equivalencia débil natural $q : Q \xrightarrow{\sim} 1$.

Claramente, el endofunctor $Q : M \rightarrow M$ es homotópico.

Definición 1.4.7. Una **deformación izquierda** para un funtor $F : M \rightarrow N$ entre categorías de homotopía es una deformación izquierda $q : Q \xrightarrow{\sim} 1$ tal que FQ es un funtor homotópico.

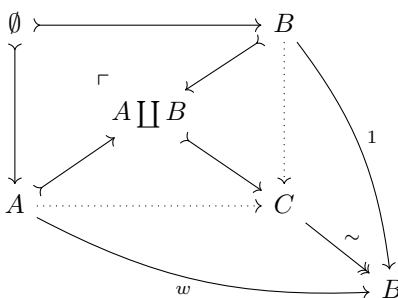
Usando la propiedad 2-de-6 se demuestra (ver [Dwy+04, pág. 40.4]) que para todo funtor deformable a izquierda por $(F, q : Q \xrightarrow{\sim} 1)$ existe una subcategoría M_Q maximal en la que es homotópico.

Teorema 1.4.8 ([Dwy+04]). Si $F : M \rightarrow N$ tiene una deformación izquierda $q : Q \xrightarrow{\sim} 1$, entonces $\mathbf{L}F = FQ$ es un funtor derivado izquierdo de F .

El siguiente lema demuestra que toda aproximación funtorial cofibrante en una categoría modelo \mathcal{M} , es una deformación izquierda para todo funtor izquierdo de Quillen:

Lema 1.4.9 (Lema de Ken Brown). Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un funtor entre categorías modelo. Si F envía cofibraciones acíclicas entre objetos cofibrantes a equivalencias débiles, entonces F envía equivalencias débiles entre objetos cofibrantes a equivalencias débiles. En particular, todo funtor de Quillen izquierdo es homotópico en la categoría plena de objetos cofibrantes.

Demostración. Sea $w : A \rightarrow B$ una equivalencia débil entre dos objetos cofibrantes. Factorizemos el morfismo $(w, 1) : A \amalg B \rightarrow B$ como una cofibración seguida de una fibración acíclica. El resultado se sigue de aplicar F al siguiente diagrama, utilizando la propiedad 2 de 3 repetidas veces:



□

Dualmente, una deformación derecha es una equivalencia natural $r : 1 \xrightarrow{\sim} R$, y una deformación derecha para un funtor $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una deformación r tal que FR es homotópico. En particular, tenemos que toda aproximación fibrante es una deformación derecha para todo funtor derecho de Quillen.

Equivalencias de Quillen. Consideremos un funtor de Quillen izquierdo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, por el lema 1.4.9, este preserva homotopías entre objetos cofibrantes. Del mismo modo, el adjunto derecho G preserva homotopías entre objetos fibrantes. Por lo tanto, para todo X y Y en \mathcal{M} cofibrantes-fibrantes, se tiene el isomorfismo natural $\pi(FX, Y) \simeq \pi(X, GY)$. En otras palabras:

Proposición 1.4.10. Todo morfismo de Quillen $F \dashv G$ induce una adjunción $\mathbf{L}F \dashv \mathbf{R}G$ entre las categorías homotópicas.

Diremos que un morfismo de Quillen es una **equivalencia de Quillen** si cualquiera de las condiciones equivalentes en el siguiente proposición se satisfacen:

Proposición 1.4.11. Sea $F \dashv G$ un morfismo de Quillen, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathbf{L}F$ es una equivalencia de categorías.
2. $\mathbf{R}G$ es una equivalencia de categorías.
3. Si X es cofibrante y Y es fibrante, $X \rightarrow GY$ es una equivalencia débil si y sólo si el morfismo adjunto $FX \rightarrow Y$ es una equivalencia débil.

1.5. Límites homotópicos

Sea D una categoría pequeña y \mathcal{M} una categoría modelo. Naturalmente, \mathcal{M}^D es una categoría de homotopía (un morfismo es una equivalencia si lo es puntualmente en \mathcal{M}). Definimos el **colímite homotópico** de diagramas D en \mathcal{M} como el funtor derivado izquierdo de $colim : \mathcal{M}^D \rightarrow \mathcal{M}$. En la presente sección describimos dos tales presentaciones, la segunda de ellas abarcando el caso especial en el que \mathcal{M} posee una estructura simplicial modelo, lo que nos ofrecerá una descripción de $hocolim$ que será utilizada en capítulos posteriores. Veamos primeramente el caso general. Para todo conjunto simplicial K , escribimos ΔK para denotar la categoría $\Delta_{/K}$ de elementos de K .

Proposición 1.5.1. *Para todo $K \in sSet$, ΔK es una categoría de Reedy con constantes fibrantes.*

Demostración. Observamos que $Obj(\Delta K) = \cup_{n \geq 0} K_n$. De esto, es fácil ver que ΔK es una categoría de Reedy. Para cada $x \in K_n$, la categoría $\partial(\overleftarrow{\Delta K}_{x/})$ es conexa (vacía si $n = 0$), lo cual indica que

$$M_x B \simeq \begin{cases} B & \text{si } n > 0 \\ * & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto ΔK es Reedy fibrante. \square

Para una categoría pequeña D , denotamos por ΔD a la categoría de Reedy ΔND . Sea $T : \Delta D \rightarrow D$ el funtor “target”, i.e., $T : \alpha \mapsto \alpha_n$. Si M es una categoría completa, el funtor precomposición $T^* : M^D \rightarrow M^{\Delta D}$ posee un adjunto izquierdo:

$$\begin{array}{ccc} & T^* & \\ M^{\Delta D} & \xleftarrow{\quad} & M^D \\ & \text{\scriptsize } \top & \\ & \text{\scriptsize } Lan_T & \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

Teorema 1.5.2 ([Dwy+04]). *Para cualquier categoría modelo \mathcal{M} y para cualquier categoría pequeña D , el funtor $colim_D$ es homotópico en la imagen del funtor Lan_T . Más aún, si \mathcal{Q} es un remplazo cofibrante en la estructura modelo de Reedy en \mathcal{M}^D , la composición*

$$\mathcal{M}^D \xrightarrow{T^*} \mathcal{M}^{\Delta D} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{M}^{\Delta D} \xrightarrow{Lan_T} \mathcal{M}^D$$

es una deformación izquierda para el funtor $colim_D : \mathcal{M}^D \rightarrow \mathcal{M}$.

Demostración. Ver [Dwy+04, Capítulo IV]. \square

El teorema anterior nos brinda una solución general para el problema de hallar el colímite homotópico para cualquier categoría modelo.

Denotamos $\Delta^{op} D = (\Delta D)^{op}$. Consideremos el funtor “source” $S : \Delta^{op} D \rightarrow D$ dado por $S : \alpha \rightarrow \alpha_0$, y al respectivo funtor precomposición S^* . Sea $\pi : \Delta^{op} D \rightarrow \Delta^{op}$ la evidente proyección. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^D & \xrightarrow{S^*} & \mathcal{M}^{\Delta^{op} D} \\ c \uparrow & & \uparrow \pi^* \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{c} & \mathcal{M}^{\Delta^{op}} \end{array}$$

donde c es funtor constante. Esto se traduce a un isomorfismo natural del diagrama adjunto

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^D & \xleftarrow{Lan_S} & \mathcal{M}^{\Delta^{op} D} \\ colim_D \downarrow & \cong & \downarrow Lan_\pi \\ \mathcal{M} & \xleftarrow{colim_{\Delta^{op}}} & \mathcal{M}^{\Delta^{op}} \end{array}$$

Tomando en cuenta que S^* es fiel y pleno, tenemos entonces que $\epsilon : Lan_S \circ S^* \simeq 1_{\mathcal{M}^D}$. Por lo tanto, para todo $F : D \rightarrow \mathcal{M}$

$$colim_D F \simeq colim_D (Lan_S S^*) F = (colim_D Lan_S) S^* F \simeq colim_{\Delta^{op}} Lan_\pi S^* F \quad (1.2)$$

Hemos hallado un objeto simplicial $Lan_\pi S^* F \in \mathcal{M}^{\Delta^{op}}$ cuyo colímite coincide con el de F . Podemos asociar a F otro objeto simplicial:

Definición 1.5.3. *La construcción simplicial barra de F es el objeto simplicial de \mathcal{M} , denotado por $B_\bullet(*, D, F)$, cuyo objeto de n -símplices es*

$$B_n(*, D, F) = \coprod_{\alpha: [n] \rightarrow D} F(\alpha_0) \quad (1.3)$$

cuyas caras d_i están determinadas, para $i = 0$ por los morfismos $F(\alpha_0) \rightarrow F(\alpha_1)$, y para $i \neq 0$ por las identidades $id_{F(\alpha_0)}$. Las degeneraciones s_i están determinadas del mismo modo, por las identidades $id_{F(\alpha_0)}$, agregando a cada símplice α una identidad en el lugar i -ésimo.

Observación 1.5.4. Cuando $\mathcal{M} = \text{Set}$, la construcción barra es simplemente el nervio de la categoría de elementos de F :

$$N\left(\int^D F\right)_n = \text{hom}_{\text{Cat}}([n], \int F) \simeq B_n(*, D, F)$$

En particular, si $F = *$ es el functor constante en el conjunto con un solo elemento, tenemos $B_n(*, D, *) \simeq ND$.

Proposición 1.5.5. $\text{Lan}_\pi S^* F \simeq B_\bullet(*, D, F)$

Demostración. Notemos que para todo símplice $\alpha \in ND$, $(\alpha, \pi(\alpha) = [n] \xrightarrow{1} [n])$ es un objeto final de su respectiva componente conexa, en la categoría $(\pi \downarrow [n])$. Por lo tanto

$$\text{Lan}_\pi S^* F(b) \simeq \text{colim}_{(\pi \downarrow [n])} S^* F \simeq \coprod_{\alpha \in ND} F(S(\alpha))$$

□

El colímite de un diagrama simplicial X es presentado como el coequalizador de las dos caras $d_o, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0$. Así, de (1.3) y la proposición anterior recobramos la fórmula:

$$\text{colim}_D F = \text{coeq}\left(\coprod_{d \rightarrow d'} Fd \rightrightarrows \coprod_d Fd\right)$$

Como podemos observar, el colímite ordinario de un functor ignora por completo toda la información de orden superior en la construcción simplicial barra. Cuando \mathcal{M} es una categoría simplicial tensorada, el colímite de F es el caso degenerado de otra construcción bien conocida:

Definición 1.5.6. Sean \mathcal{M} una categoría simplicial tensorada y $F : D \rightarrow \mathcal{M}$ un functor. Sea $G : D^{op} \rightarrow s\text{Set}$. Definimos el producto tensorial de F por G como el objeto en \mathcal{M} :

$$G \otimes_D F = \text{coeq}\left(\coprod_{d \rightarrow d'} Gd' \otimes Fd \rightrightarrows \coprod_d Gd \otimes Fd\right)$$

Si $G = *$ es el functor constante en el objeto terminal de $s\text{Set}$, tenemos $* \otimes_D F \simeq \text{colim}_D F$.

A continuación relacionamos este producto tensorial con la construcción simplicial barra. Para este fin, definimos la *realización geométrica de un functor*:

Definición 1.5.7. Sea \mathcal{M} una categoría simplicial tensorada, y sea $X \in \mathcal{M}^{\Delta^{op}}$ un objeto simplicial. Definimos la **realización geométrica** de X como el producto tensorial:

$$|X| = \Delta \otimes_{\Delta^{op}} X$$

donde $\Delta : \Delta \hookrightarrow s\text{Set}$ es el conjunto simplicial cosimplicial canónico (encaje de Yoneda).

Observación 1.5.8. Tenemos los siguientes casos especiales:

- Si \mathcal{M} es la $s\text{Set}$ -categoría Top y X es un conjunto simplicial visto como la composición $\Delta^{op} \xrightarrow{X} \text{Set} \xrightarrow{\text{dis}} \text{Top}$, tenemos que $|X| \in \text{Top}$ es la realización geométrica usual.
- Cuando $\mathcal{M} = s\text{Set}$, la realización de un conjunto bisimplicial X es isomorfa a su diagonal $\Delta^{op} \xrightarrow{\text{diag}} \Delta^{op} \times \Delta^{op} \xrightarrow{X} \text{Set}$

y también la siguiente definición

Definición 1.5.9. La **construcción barra** se define como la realización geométrica de la construcción simplicial barra:

$$B(*, D, F) = |B_{\bullet}(*, D, F)| = \Delta \otimes_{\Delta^{op}} B_{\bullet}(*, D, F)$$

Proposición 1.5.10. Sea \mathcal{M} una categoría simplicial tensorada y completa. Sea $F : D \rightarrow \mathcal{M}$ Entonces

$$B(*, D, F) \simeq N(- \downarrow D) \otimes_D F \quad (1.4)$$

donde $N(- \downarrow D) : D^{op} \rightarrow sSet$ es la correspondencia $d \mapsto N(d \downarrow D)$

Demostración. Ver [Shu09, Lemma 7.10]. □

Lemma 1.5.11. Si \mathcal{M} es una categoría modelo simplicial, entonces el functor realización geométrica $|-| : \mathcal{M}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ es un functor derecho de Quillen cuando consideramos a $\mathcal{M}^{\Delta^{op}}$ con la estructura modelo de Reedy.

Demostración. [Hir03, T.18.6.6]. □

Podemos enunciar ahora el teorema principal de esta sección, su demostración se puede consultar con detalle en [Shu09, Sec. 9].

Teorema 1.5.12. Sea \mathcal{M} una categoría simplicial modelo. Si Q es un remplazo cofibrante en \mathcal{M} . Entonces

$$\text{hocolim} \simeq B(*, D, Q-)$$

es un functor derivado izquierdo de $\text{colim} : \mathcal{M}^D \rightarrow \mathcal{M}$.

Observación 1.5.13. Representación del colímite homotópico:

- a) En la prueba del teorema anterior, se demuestra que existe una deformación izquierda \tilde{Q} para el functor colim de tal forma que se tiene un isomorfismo $\text{colim}(\tilde{Q}) \simeq B(*, D, QF)$. Es decir, el colímite homotópico tiene la presentación (o modelo):

$$\mathcal{M}^D \xrightarrow{Q^*} \mathcal{M}^D \xrightarrow{B_{\bullet}} \mathcal{M}^{\Delta^{op}} \xrightarrow{|\cdot|} \mathcal{M} \quad (1.5)$$

- b) Según la observación 1.5.8, si $\mathcal{M} = sSet_{\mathcal{Q}}$ (i.e., $sSet$ con la estructura modelo de Quillen), tenemos para todo functor $F \in sSet^D$:

$$\text{hocolim} F \simeq \text{diag} B_{\bullet}(*, D, F)$$

explícitamente:

$$(\text{hocolim} F)_n \simeq \coprod_{\alpha: [n] \rightarrow D} (F(\alpha_0))_n$$

En particular, para el caso particular del functor constante $* : D \rightarrow sSet_{\mathcal{Q}}$, tenemos:

$$\coprod_{\alpha: [n] \rightarrow D} * \simeq \text{hom}_{Cat}([n], D)$$

i.e. $\text{hocolim}_D * \simeq ND$.

- c) La transformación $\text{hocolim} \rightarrow \text{colim}$ del functor derivado está dada por:

$$x \in F_n(\alpha_0) \mapsto [x] \in (\text{colim} F)_n$$

donde $F_n(\alpha_0) = (F(\alpha_0))_n$.

Finalizamos la sección con el siguiente análisis; sea K un conjunto simplicial considerado como $K : \Delta^{op} \rightarrow Set \hookrightarrow sSet$. Tenemos un morfismo canónico $N(- \downarrow \Delta^{op}) \otimes_{\Delta^{op}} K \rightarrow \Delta \otimes_{\Delta^{op}} K$, y por la proposición 1.5.10 y el comentario 1.5.8b, isomorfismos $N\Delta K = \text{diag} N\Delta K \simeq N(- \downarrow \Delta^{op}) \otimes_{\Delta^{op}} K$ y $\Delta \otimes_{\Delta^{op}} K \simeq K$.

Proposición 1.5.14. *Sea K un conjunto simplicial, entonces el morfismo canónico*

$$N\Delta K \simeq N(- \downarrow \Delta^{op}) \otimes_{\Delta^{op}} K \longrightarrow \Delta \otimes_{\Delta^{op}} K \simeq K$$

es una equivalencia de Kan.

Demostración. Ver [Hir03, T.19.8.7]. □

1.6. Categorías Simpliciales

Para revisar los aspectos elementales de la teoría de categorías enriquecidas ver por ejemplo [Lur09, Apéndice A.1.3 Y A.1.4]. El siguiente análisis se aplica a cualquier categoría cartesiana cerrada. Consideremos los siguientes datos en $sSet$:

- 1) Un bifunctor $\times : sSet \times sSet \rightarrow sSet$ definido por $(X, Y) \mapsto X \times Y$.
- 2) Isomorfismos canónicos $X \times \Delta^0 \simeq X \simeq \Delta^0 \times X$, y $X \times (Y \times Z) \simeq (X \times Y) \times Z$

Todo diagrama que consista de representaciones, de un producto dado en $sSet$, es universal y por consiguiente, conmutativo. En particular, los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \times Y) \times Z) \times W & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 (X \times (Y \times Z)) \times W & & (X \times Y) \times (Z \times W) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X \times ((Y \times Z) \times W) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X \times (Y \times (Z \times W))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times \Delta^0) \times Y & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X \times (\Delta^0 \times Y) \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & X \times Y &
 \end{array}$$

son conmutativos. Así, el bifunctor \times junto con los isomorfismos mencionados establecen una estructura monoidal en $sSet$. Esta estructura posee las siguientes propiedades adicionales:

- 3) Un isomorfismo canónico $X \times Y \simeq Y \times X$
- 4) Para todo $Z \in sSet$, el funtor $\bullet \times Z$ posee un adjunto derecho, $(\bullet)^Z$, es decir, se tiene un isomorfismo natural $sSet(X \times Z, Y) \simeq sSet(X, Y^Z)$.

por lo cual, la estructura monoidal es simétrica y cerrada. Una categoría enriquecida sobre $sSet$, es una categoría enriquecida sobre la categoría monoidal $(sSet, \times, \Delta^0)$:

Definición 1.6.1. *Una categoría \mathcal{C} enriquecida sobre una categoría monoidal $(V, \otimes, *)$ consta de los siguientes datos:*

- Una colección de objetos $Obj(\mathcal{C})$
- Para cada par de objetos $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ un objeto $Map(X, Y) \in V$

- Para cada terna $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ morfismos $\text{Map}(Y, Z) \otimes \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Z)$ y $1_X : * \rightarrow \text{Map}(X, X)$ satisfaciendo los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Map}(Z, W) \otimes \text{Map}(Y, Z) \otimes \text{Map}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Map}(Z, W) \otimes \text{Map}(X, Z) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Map}(Y, W) \otimes \text{Map}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Map}(X, W)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Map}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Map}(X, Y) \otimes \text{Map}(X, X) \\
 \searrow \text{id} & & \downarrow \\
 & & \text{Map}(X, Y)
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Map}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Map}(Y, Y) \otimes \text{Map}(X, Y) \\
 \searrow \text{id} & & \downarrow \\
 & & \text{Map}(X, Y)
 \end{array}$$

Una categoría enriquecida sobre V también recibirá el nombre de V -categoría.

Definición 1.6.2. Consideremos dos V -categorías \mathcal{C} y \mathcal{C}' . Un V -functor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ comprende los siguientes datos:

- Una función $\text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C}')$
- Para todo par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, un morfismo $\eta_{X, Y} : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y)$

satisfaciendo los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Map}(Y, Z) \otimes \text{Map}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Map}(\mathcal{F}Y, \mathcal{F}Z) \otimes \text{Map}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Map}(X, Z) & \longrightarrow & \text{Map}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Z)
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{ccc}
 * & \longrightarrow & \text{Map}(X, X) \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & \text{Map}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}X)
 \end{array}$$

Las colección de V -categorías pequeñas y los V -funtores entre ellas, forman una categoría, la cual denotaremos por $V\text{-Cat}$.

Sea $F : V \rightarrow V'$ un functor monoidal laxo a derecha,⁸ entre dos categorías monoidales. Entonces, dada una V -categoría \mathcal{C} , obtenemos una V' -categoría \mathcal{C}' de la siguiente forma:

- $\text{Obj}(\mathcal{C}') = \text{Obj}(\mathcal{C})$
- $\text{Map}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = F(\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y))$
- Para todo $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C}')$ la regla de composición

$$\begin{array}{ccc}
 F(\text{Map}_{\mathcal{C}}(Y, Z)) \otimes F(\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)) & \xrightarrow{\beta} & F(\text{Map}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes \text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \\
 & \searrow & \downarrow F \\
 & & F(\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y))
 \end{array}$$

- (-)₀ Para toda categoría monoidal V , el functor $(-)_0 : V \rightarrow \text{Set}$ definido por la correspondencia $v \mapsto \text{hom}_V(1, v)$ es laxo a derecha. En efecto, para todo par $(u, v) \in V$, tenemos una correspondencia natural $\text{hom}_V(*, u) \times \text{hom}_V(*, v) \rightarrow \text{hom}_V(* \otimes *, u \times v) \simeq \text{hom}_V(*, u \times v)$. Tenemos por lo tanto el functor de cambio:

$$\begin{array}{ccc}
 V\text{-Cat} & \rightarrow & \text{Cat} \\
 \mathcal{C} & \mapsto & \mathcal{C}_0
 \end{array}$$

\mathcal{C}_0 recibe el nombre de **la categoría subyacente** de \mathcal{C} .

⁸Es decir, existe un morfismo $* \rightarrow F(*)$ y una transformación natural $\beta : F(-) \otimes F(-) \rightarrow F(- \otimes -)$ satisfaciendo los evidentes diagramas de coherencia (ver <https://ncatlab.org/nlab/show/monoidal+functor>).

π_0 Consideremos la inclusión $i : Set \rightarrow sSet$ (adjunto izquierdo del functor $()_0$). El adjunto izquierdo de i , el functor de componentes conexas $\pi_0 : sSet \rightarrow Set$, es monoidal laxo. Tenemos el functor de cambio:

$$\begin{aligned} sSet-Cat &\rightarrow Cat \\ \mathcal{C} &\mapsto \pi_0 \mathcal{C} \end{aligned}$$

A $\pi_0(\mathcal{C})$ la llamaremos **la categoría de componentes** de \mathcal{C} .

\mathcal{N} Consideremos el functor nervio $\mathcal{N} : Cat \rightarrow sSet$. Por ser adjunto derecho (Ver 2.5), automáticamente es un functor monoidal. Tenemos el siguiente cambio de enriquecimiento:

$$2-Cat \rightarrow sSet-Cat$$

Categorías simpliciales. Consideremos la subcategoría plena $\mathcal{A} \hookrightarrow Cat^{\Delta^{op}}$ de objetos simpliciales $C : \Delta^{op} \rightarrow Cat$ tales que $Obj(C_n) = Obj(C_0)$ para toda $n > 0$. Si $C \in \mathcal{A}$, definimos la categoría enriquecida \mathcal{C} sobre $sSet$ como sigue:

- $Obj(\mathcal{C}) = Obj(C_0)$
- Para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ los funtores cara y cocara de C definen el conjunto simplicial $Map(X, Y) = C_\bullet(X, Y)$
- Para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, el vértice $1_X : * \rightarrow Map(X, X)$

estos datos satisfacen las hipótesis para un enriquecimiento. Recíprocamente, dada una categoría \mathcal{C} enriquecida sobre $sSet$, construimos el objeto simplicial C , en cada nivel, como $Obj(C_n) = Obj(\mathcal{C})$ y $C_n(X, Y) = Map(X, Y)_n$. Estas correspondencias son functoriales e inversas una de la otra, lo que induce un isomorfismo de categorías:

$$sCat \simeq \mathcal{A} \hookrightarrow Cat^{\Delta^{op}}$$

Llamaremos *categorías simpliciales* a los objetos de cualquiera de estas dos categorías isomorfas.

1.6.1. Categorías modelo simpliciales

Sea \mathcal{C} una categoría simplicial. Diremos que \mathcal{C} es **tensorada** si para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ y para todo conjunto simplicial S , el functor $Map(S, Map(X, -)) : \mathcal{C} \rightarrow sSet$ es corepresentable. Es decir, si existe $X \otimes S \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo natural en $sSet$:

$$Map(X \otimes S, Y) \simeq Map(S, Map(X, Y))$$

Diremos que \mathcal{C} es **cotensorada** si para todo objeto $Y \in \mathcal{C}$ y para todo conjunto simplicial S , el functor contravariante $Map(S, Map(-, Y)) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow sSet$ es representable. Esto es, si existe un objeto $Y^S \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo natural

$$Map(X, Y^S) \simeq Map(S, Map(X, Y))$$

Definición 1.6.3. Una *categoría modelo simplicial* \mathcal{C} es una categoría simplicial tensorada y cotensorada tal que $(\mathcal{C})_0$ es una categoría modelo satisfaciendo cualquiera de las siguientes tres condiciones equivalentes:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} X \otimes S & \longrightarrow & X \otimes S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' \otimes S & \xrightarrow{\quad \lrcorner \quad} & \bullet \\ & \searrow^{i \square j} & \downarrow \\ & & X' \otimes S' \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{ccc} Y^{S'} & & Y^S \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad \lrcorner \quad} & Y^S \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^{S'} & \longrightarrow & Y^S \end{array} \end{array}$$

- a) El producto caja $i \square j$ es una cofibración siempre que $i : X \rightarrow X'$ y $j : S \rightarrow S'$ lo sean en \mathcal{C}_0 y $sSet$ respectivamente. Esta será acíclica si alguna lo es.
- b) El morfismo $Y^{S'} \rightarrow Y'^{S'} \times_{Y'^S} Y^S$ es una fibración si $p : Y \rightarrow Y'$ y $q^{op} : S' \rightarrow S$ lo son en \mathcal{C}_0 y $sSet^{op}$ respectivamente. Este será una fibración acíclica si alguna lo es.
- c) Para toda cofibración $A \rightarrow B$ en \mathcal{C}_0 y toda fibración $X \rightarrow Y$ en \mathcal{C}_0 , el morfismo inducido

$$Map_C(B, X) \rightarrow Map_C(A, X) \times_{Map_C(A, Y)} Map_C(B, Y)$$

es un fibración. Esta será acíclica si alguno de los dos mapeos lo es.

Observación 1.6.4. La siguiente cadena de isomorfismos prueba la equivalencia $b) \Leftrightarrow a)$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(X', P) \times_{\mathcal{M}(X, P)} \mathcal{M}(X, Y^{S'}) \\ & \simeq [\mathcal{M}(X', Y^S) \times_{\mathcal{M}(X', Y'^S)} \mathcal{M}(X', Y'^{S'})] \times_{\mathcal{M}(X, Y^S) \times_{\mathcal{M}(X, Y'^S)} \mathcal{M}(X, Y'^{S'})} \mathcal{M}(X, Y^{S'}) \\ & \simeq [\mathcal{M}(X' \otimes S, Y) \times_{\mathcal{M}(X' \otimes S, Y')} \mathcal{M}(X' \otimes S', Y')] \times_{\mathcal{M}(X \otimes S, Y) \times_{\mathcal{M}(X \otimes S, Y')} \mathcal{M}(X \otimes S', Y')} \mathcal{M}(X \otimes S', Y) \\ & \simeq [\mathcal{M}(X' \otimes S, Y) \times_{\mathcal{M}(X \otimes S, Y)} \mathcal{M}(X \otimes S', Y)] \times_{\mathcal{M}(X' \otimes S, Y) \times_{\mathcal{M}(X \otimes S, Y')} \mathcal{M}(X \otimes S', Y')} \mathcal{M}(X' \otimes S', Y') \\ & \simeq \mathcal{M}(Psh, Y) \times_{\mathcal{M}(Psh, Y')} \mathcal{M}(X' \otimes S', Y') \end{aligned}$$

1.6.2. Localización simplicial

Complejos de funciones. Para $X \in \mathcal{M}$, una **resolución cosimplicial** (resp. **simplicial**) de X es un remplazo cofibrante (resp. fibrante) del objeto cosimplicial (resp. simplicial) constante X , en la estructura modelo de Reedy en \mathcal{M}^Δ (resp. $\mathcal{M}^{\Delta^{op}}$).

Definición 1.6.5. Sean \mathcal{M} una categoría modelo y $X, Y \in \mathcal{M}$ un par de objetos.

- a) Un **complejo de funciones homotópico izquierdo** de X a Y es una terna $(Q^\bullet X, \hat{Y}, \mathcal{M}(Q^\bullet X, \hat{Y})) = \mathcal{M}(Q^\bullet X, \hat{Y})$, donde:
- $Q^\bullet X \xrightarrow{\sim} X$ una resolución cosimplicial de X .
 - $Y \xrightarrow{\sim} \hat{Y}$ una aproximación fibrante de Y .
 - $\mathcal{M}(Q^\bullet X, \hat{Y})$ es el conjunto simplicial definido como

$$\mathcal{M}(Q^\bullet X, \hat{Y})_n = \mathcal{M}(Q^n X, \hat{Y})$$

Un morfismo entre dos complejos de funciones es un mapeo de conjuntos simpliciales $h = (f, g) : \mathcal{M}(Q^\bullet X, \hat{Y}) \rightarrow \mathcal{M}(Q^\bullet X, \hat{Y}')$, inducido por morfismos $f : Q^\bullet X \rightarrow Q^\bullet X$ y $g : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}'$ de resoluciones cosimpliciales de X y aproximaciones fibrantes de Y respectivamente.

- b) Un **complejo de funciones homotópico derecho** de X a Y es una terna $(\tilde{X}, R_\bullet Y, \mathcal{M}(\tilde{X}, R_\bullet Y)) = \mathcal{M}(\tilde{X}, R_\bullet Y)$, donde:
- $\tilde{X} \xrightarrow{\sim} X$ es un remplazo cofibrante X .
 - $Y \xrightarrow{\sim} R_\bullet Y$ es una resolución simplicial de Y .
 - $\mathcal{M}(\tilde{X}, R_\bullet Y)$ es el conjunto simplicial definido como

$$\mathcal{M}(\tilde{X}, R_\bullet Y)_n = \mathcal{M}(\tilde{X}, R_n Y)$$

- c) Un **complejo de funciones homotópico bi-lateral** de X a Y es una elección $(Q^\bullet X, R_\bullet Y, \text{diag} \mathcal{M}(Q^\bullet X, R_\bullet Y)) = \text{diag} \mathcal{M}(Q^\bullet X, R_\bullet Y)$, donde:

- $Q^\bullet X \xrightarrow{\sim} X$ es una resolución cosimplicial de X .
- $Y \xrightarrow{\sim} R_\bullet Y$ es una resolución simplicial de Y .
- $\mathcal{M}(Q^\bullet X, R_\bullet Y)$ es el conjunto cosimplicial cosimplicial definido por:

$$(\mathcal{M}(Q^\bullet X, R_\bullet Y))_{k,l} = \mathcal{M}(Q^k X, R_l Y)$$

Teorema 1.6.6 (Teorema de extensión de levantamiento de homotopías). *Sea \mathcal{M} una categoría modelo.*

1. (Caso izquierdo) Si $i : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es una cofibración de Reedy de resoluciones cosimpliciales en \mathcal{M} y $p : X \rightarrow Y$, entonces el mapeo inducido de conjuntos simpliciales:

$$\mathcal{M}(\mathbf{B}, X) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A}, X) \times_{\mathcal{M}(\mathbf{A}, Y)} \mathcal{M}(\mathbf{B}, Y)$$

es una fibración de Kan, acíclica si alguno de los morfismos (i, p) lo es.

2. (Caso derecho) Si $i : A \rightarrow B$ es una cofibración en \mathcal{M} y $p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es una fibración de Reedy de resoluciones simpliciales en \mathcal{M} , entonces el mapeo inducido de conjuntos simpliciales:

$$\mathcal{M}(B, \mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{M}(A, \mathbf{X}) \times_{\mathcal{M}(A, \mathbf{Y})} \mathcal{M}(B, \mathbf{Y})$$

es una fibración de Kan, acíclica si alguno de los morfismos (i, p) lo es.

3. (Caso bilateral) Si $i : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es una cofibración de Reedy de resoluciones cosimpliciales en \mathcal{M} y $p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es una fibración de Reedy de resoluciones simpliciales en \mathcal{M} , entonces el mapeo inducido de conjuntos simpliciales:

$$\text{diag}\mathcal{M}(\mathbf{B}, \mathbf{X}) \rightarrow \text{diag}\mathcal{M}(\mathbf{A}, \mathbf{X}) \times_{\text{diag}\mathcal{M}(\mathbf{A}, \mathbf{Y})} \text{diag}\mathcal{M}(\mathbf{B}, \mathbf{Y})$$

es una fibración de Kan, la cual será acíclica si alguno de los dos morfismos lo es.

Demostración. Ver ([Hir03, T.16.5.1 y T.16.18]). □

A continuación presentaremos las propiedades básicas que poseen los complejos de funciones izquierdos, siendo aquellas para el caso derecho duales. Las propiedades análogas para el caso bilateral emplea una combinación de ambas (ver [Hir03, Cap. 16 y 17]).

Primeramente observamos algunos casos importantes del teorema anterior:

Corolario 1.6.7. *Sea \mathcal{M} una categoría modelo.*

- i) Si $i : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es una cofibración de Reedy de resoluciones cosimpliciales en \mathcal{M} y X es un objeto fibrante en \mathcal{M} , entonces el mapeo $i^* : \mathcal{M}(\mathbf{B}, X) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A}, X)$ es una fibración de Kan, acíclica si i lo es. En particular, $\mathcal{M}(\mathbf{B}, X)$ es un complejo de Kan para toda resolución cosimplicial en \mathcal{M} y todo objeto fibrante $X \in \mathcal{M}$.
- ii) Si \mathbf{B} es una resolución cosimplicial en \mathcal{M} y $p : X \rightarrow Y$ es una fibración en \mathcal{M} , entonces el mapeo $p^* : \mathcal{M}(\mathbf{B}, X) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B}, Y)$ es una fibración de Kan, acíclica si p lo es.
- iii) Si $i : \mathbf{A} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}$ es una equivalencia débil de Reedy de resoluciones cosimpliciales en \mathcal{M} y X es un objeto fibrante en \mathcal{M} , entonces el mapeo $i^* : \mathcal{M}(\mathbf{B}, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathbf{A}, X)$ es una equivalencia débil de complejos de Kan.
- iv) Si \mathbf{B} es una resolución cosimplicial en \mathcal{M} y $p : X \xrightarrow{\sim} Y$ es una equivalencia débil de objetos fibrantes en \mathcal{M} , entonces el mapeo $p^* : \mathcal{M}(\mathbf{B}, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathbf{B}, Y)$ es una equivalencia débil de complejos de Kan.

Demostración. La demostración de *i)* y *ii)* son casos degenerados del teorema de extensión 1.6.6, mientras que *iii)* y *iv)* son consecuencia de dicho teorema y el lema de Brown 1.4.9. □

Proposición 1.6.8. Sean \mathcal{M} una categoría modelo y X, Y objetos de \mathcal{M} . Entonces el nervio de la categoría, de complejos de funciones homotópicos derechos de X a Y , es contráctil.

Demostración. Ver [Hir03, proposición 17.1.10]. \square

Teorema 1.6.9 (Corolario). Si \mathcal{M} es una categoría modelo y X, Y son objetos de \mathcal{M} , entonces cada par de complejos de funciones derechos de X a Y está conectado por un zigzag de equivalencias débiles en $sSet_K$.

Demostración. Por la propiedad 2-de-3 todo morfismo de complejos de funciones está compuesto por equivalencias débiles, el resultado se sigue de la proposición 1.6.8 y del corolario 1.6.7.iii). \square

Proposición 1.6.10. Sean $X, Y \in \mathcal{M}$. Todos los complejos de funciones izquierdos, derechos y bilaterales de X a Y poseen el mismo tipo de homotopía en $sSet_{\mathcal{Q}}$. Así, denotaremos a cualquier tipo de complejo de funciones de X a Y por $\mathbf{hMap}_{\mathcal{M}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Demostración. Ver [Hir03, Capítulo 17]. \square

En virtud del teorema 1.6.6, para $X, Y \in \mathcal{M}$ se dice que el complejo de funciones $hM(X, Y)$ posee el tipo correcto de homotopía para un espacio de funciones de X a Y .

Ahora, supongamos que \mathcal{M} es una categoría modelo simplicial. Sean X un objeto cofibrante y Y un objeto fibrante en \mathcal{M} . Claramente el objeto cosimplicial definido como $\tilde{\mathbf{X}}^n = X \otimes \Delta^n$ forma parte de una resolución cosimplicial $\tilde{\mathbf{X}} \xrightarrow{\sim} cX$. Tenemos el isomorfismo:

$$\mathcal{M}(\tilde{\mathbf{X}}, Y)_n = \mathcal{M}(X \otimes \Delta^n, Y) = \text{hom}_{sSet}(*, \text{Map}(X \otimes \Delta^n, Y)) \simeq$$

$$\text{hom}_{sSet}(*, sSet(\Delta^n, \text{Map}(X, Y))) = \text{hom}_{sSet}(\Delta^n, \text{Map}(X, Y)) \simeq \text{Map}(X, Y)_n$$

y por lo tanto, $\text{Map}(X, Y)$ es un complejo de funciones de X a Y . Es decir, en el caso de un par cofibrante-fibrante, la estructura simplicial de \mathcal{M} nos proporciona el tipo correcto de homotopía para el espacio de funciones de X a Y .

Categorías de morfismos. Sea \mathcal{M} una categoría modelo. Escribimos \mathcal{W} , \mathcal{WFib} , \mathcal{WCoF} para denotar a las categorías de equivalencias débiles, fibraciones acíclicas y cofibraciones acíclicas respectivamente.

Para un par de objetos X, Y en \mathcal{M} , consideremos la categoría $(\mathcal{WFib})^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{WCoF})^{-1}(X, Y)$ cuyos objetos son zigzags de la forma:

$$X \xleftarrow{\sim} U \longrightarrow V \xleftarrow{\sim} Y$$

y cuyos morfismos son transformaciones naturales de diagramas, esto es, un morfismo es un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\sim} & U & \longrightarrow & V & \xleftarrow{\sim} & Y \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ X & \xleftarrow{\sim} & U' & \longrightarrow & V' & \xleftarrow{\sim} & Y \end{array}$$

Del mismo modo podemos considerar la categoría $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y)$. Más aún, existe una inclusión natural:

$$(\mathcal{WFib})^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{WCoF})^{-1}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y)$$

Este tipo de categorías de zigzags fueron estudiadas por primera vez en [DK80], y es el caso que cierta colección de inclusiones como la anterior inducen equivalencias de Kan entre los nervios. Más aún, estos nervios son débilmente equivalentes al complejo de funciones $hMap(X, Y)$. A continuación resumimos algunos resultados básicos de la teoría. Una excelente exposición del tema puede ser consultada en el artículo de Dugger [Dug06].

Proposición 1.6.11. La inclusión $(\mathcal{WFib})^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{WCoF})^{-1}(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y)$ es una equivalencia homotópica.

Bosquejo. Dado un zigzag $X \xleftarrow{\sim} U \rightarrow V \xleftarrow{\sim} Y$, el siguiente diagrama define la inversa homotópica:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{\sim} & U & \longrightarrow & V & \xleftarrow{\sim} & Y \\
 \parallel & & \downarrow \sim & \lrcorner & \downarrow \sim & & \parallel \\
 X & \xleftarrow{\sim} & U' & \longrightarrow & V' & \xleftarrow{\sim} & Y \\
 \parallel & & \uparrow \sim & \lrcorner & \uparrow \sim & & \parallel \\
 X & \xleftarrow{\sim} & U'' & \longrightarrow & V'' & \xleftarrow{\sim} & Y
 \end{array}$$

□

Proposición 1.6.12. *Si Y es fibrante, el siguiente cuadrado conmutativo de inclusiones induce un cuadrado de equivalencias de Kan en los nervios:*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}(X, Y) & \hookrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}\mathcal{M}(X, Y) \\
 \downarrow j & & \downarrow \\
 \mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y) & \hookrightarrow & \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y)
 \end{array}$$

Demostración. Probaremos que el morfismo j induce una equivalencia homotópica en los nervios, siendo los demás casos de naturaleza similar. Definimos un functor $F : \mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}(X, Y)$ de la siguiente forma; para un zigzag $X \xleftarrow{\sim} A \rightarrow Y$ existe un único morfismo $A \rightarrow X \times Y$ que hace conmutar el diagrama a izquierda:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \swarrow \sim & \downarrow & \searrow \\
 X & \xleftarrow{\sim} X \times Y \xrightarrow{\sim} & Y
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \swarrow \sim & \downarrow \sim & \searrow \\
 & P & \\
 \swarrow \sim & \downarrow \sim & \searrow \\
 X & \xleftarrow{\sim} X \times Y \xrightarrow{\sim} & Y
 \end{array}$$

El diagrama derecho es el resultado de factorizar functorialmente el morfismo $A \rightarrow X \times Y$ a través de una cofibración acíclica y una fibración. Tenemos así que la correspondencia $F : (X \leftarrow A \rightarrow Y) \mapsto (X \leftarrow P \rightarrow Y)$ es functorial. Más aún, claramente tenemos transformaciones naturales $id \rightarrow F \circ j$ y $id \rightarrow j \circ F$ lo cual induce homotopías simpliciales $id \sim NF \circ Nj$ y $id \sim Nj \circ NF$, probando así el resultado. □

Sean X un objeto de \mathcal{M} y Y un objeto fibrante de \mathcal{M} . Si $Q^\bullet X \xrightarrow{\sim} cX$ es una resolución cosimplicial fibrante de X , entonces obtenemos el functor $\Delta\mathcal{M}(Q^\bullet X, Y) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}(X, Y)$ definido por la correspondencia:

$$Q^n X \longrightarrow Y \quad \mapsto \quad (X \xleftarrow{\sim} Q^n X \longrightarrow Y)$$

Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.6.13. *Sea $Q^\bullet X \xrightarrow{\sim} X$ una resolución cofibrante fibrante de Reedy de X . Entonces $\Delta\mathcal{M}(Q^\bullet X, Y) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}(X, Y)$ induce una equivalencia de Kan en los nervios.*

Demostración. Ver [Dug06, T.2.4] □

Observación 1.6.14. *Por la proposición 1.5.14 todo conjunto simplicial K posee el mismo tipo de homotopía que el nervio $N\Delta K$, por lo cual se tiene una equivalencia débil $\mathcal{M}(Q^\bullet X, Y) \simeq N(\mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}(X, Y))$.*

En resumen, Si Y es un objeto fibrante de \mathcal{M} y $Q^\bullet X \xrightarrow{\sim} X$ es una resolución cosimplicial fibrante de X , entonces la siguiente cadena de morfismos induce una equivalencia homotópica en los nervios:

$$\Delta\mathcal{M}(Q^\bullet X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{W}\mathcal{F}ib)^{-1}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}(X, Y)$$

En particular, todos los nervios tienen el mismo tipo de homotopía que el complejo de funciones $h\text{Map}(X, Y)$.

Capítulo 2

Conjuntos simpliciales

2.1. Conjuntos simpliciales

Consideremos la categoría Δ , cuyos objetos son los ordinales finitos $[n] = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\}$ con $n \geq 0$, y morfismos las funciones monótonas $[n] \rightarrow [m]$. Para todo $[n] \in \Delta$ existen exactamente $n + 1$ funciones inyectivas $[n - 1] \rightarrow [n]$, cada una, determinada por omitir el i -ésimo elemento del codominio. Similarmente, existen exactamente $n + 1$ funciones suprayectivas $[n + 1] \rightarrow [n]$, cada una, determinada por enviar los elementos j y $j + 1$ del dominio al elemento j del codominio. Denotamos estas colecciones:

$$d^i : [n - 1] \rightarrow [n] \quad 0 \leq i \leq n \quad (\text{cocaras})$$

$$s^j : [n + 1] \rightarrow [n] \quad 0 \leq j \leq n \quad (\text{codegeneraciones})$$

Estos morfismos satisfacen el conjunto de fórmulas conocidas como identidades cosimpliciales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^j = 1 = s^j d^{j+1} & \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & \text{si } i > j + 1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \text{si } i \leq j \end{array} \right.$$

Toda función inyectiva $[n] \rightarrow [n + k]$ en Δ se puede expresar como alguna composición de cocaras, y toda función suprayectiva en S se puede expresar como alguna composición de degeneraciones. Más aún, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1. *Todo morfismo $f : [n] \rightarrow [m]$ en Δ tiene una descomposición única*

$$f = d_{i_1} \cdots d_{i_k} s_{j_1} \cdots s_{j_h}$$

donde $n - h = m - k$, y las cadenas de subíndices satisfacen $m > i_1 > \cdots > i_k \geq 0$ y $0 \leq j_1 < \cdots < j_h < n - 1$. En particular, f posee una única factorización epi-monic, i.e., existen únicos e y m , epimorfismo y monomorfismo respectivamente, tales que $f = me$.

Demostración. Ver [Lan71, pág. 173]. □

Sea C una categoría, llamamos a $C^{\Delta^{op}}$ la categoría de objetos simpliciales de C . Dualmente, llamamos a C^{Δ} la categoría de objetos cosimpliciales de C . Los dos casos importantes de este tipo de categorías son cuando $C = Set$; la categoría de conjuntos simpliciales y la categoría de conjuntos cosimpliciales, denotadas $sSet = Set_{\Delta}$ y $csSet$ respectivamente. De esta forma los objetos de $sSet$, a los que nombraremos conjuntos simpliciales, son funtores contravariantes $X : \Delta^{op} \rightarrow Set$. Los morfismos son transformaciones naturales.

En virtud de lo expuesto, cada objeto simplicial $B \in C^{\Delta^{op}}$ está determinado de manera única por su imagen en el conjunto de cocaras y codegeneraciones, esto es, una colección de morfismos en C :

$$d_i : B_n \rightarrow B_{n-1} \quad 0 \leq i \leq n \quad (\text{caras})$$

$$s_j : B_n \rightarrow B_{n+1} \quad 0 \leq j \leq n \quad (\text{degeneraciones})$$

satisfaciendo las relaciones simpliciales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_j s_j = 1 = d_{j+1} s_j & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \end{array} \right.$$

Dualmente, un objeto cosimplicial en C^Δ está determinado por una colección de cocaras y codegeneraciones en C satisfaciendo las identidades cosimpliciales en C .

A continuación describiremos algunas propiedades básicas de la categoría $sSet$ y sus objetos. Consideremos el encaje de Yoneda $\Delta : \mathbf{\Delta} \hookrightarrow sSet$ (notemos que Δ^\bullet es un objeto cosimplicial en $sSet$), para toda n el funtor representable $\Delta^n := \text{hom}_\Delta(\bullet, [n])$ será llamado el n simplejo estándar. El lema de Yoneda nos dice entonces que para todo X en $sSet$ y todo n se tiene un isomorfismo:

$$sSet(\Delta^n, X) \simeq X_n$$

natural en X y n . Los elementos de X_n serán llamados n -símplices. Específicamente, a cada n -símplice le corresponde una única transformación $x : \Delta^n \rightarrow X$ dada por $1_n \mapsto x$.

Diremos que un símplice $x \in X_n$ es *degenerado* si existe una función $l : [n] \rightarrow [m]$ no identidad con $n \geq m$, y un símplice $y \in X_m$ tales que $X(l)y = x$. Dado que todo morfismo en $\mathbf{\Delta}$ posee una factorización *epi-monic*, un símplice x es degenerado si y solo si es la imagen de una degeneración, esto es, si existe una función $\alpha : [n] \rightarrow [m]$ suprayectiva con $n > m$ y un símplice $y \in X_m$ tales que $X(\alpha)y = x$.

Similarmente, diremos que $x \in X_n$ es una *cara* si está en la imagen de algún operador cara, esto es, si existe alguna función inyectiva con $l : [n] \rightarrow [k]$ con $n < k$ y un símplice $y \in X_k$ tal que $X(l)y = x$.

Tenemos el siguiente lemma:

Lema 2.1.2 (Eilenberg-Zilber). *Para cada símplice $x \in X_n$ existen una única función suprayectiva $\alpha : [n] \rightarrow [m]$ y un único símplice $y \in X_m$ no degenerado tales que $X(\alpha)y = x$.*

Demostración. Si x no es degenerado, el resultado es obvio. Supongamos que lo es.

Para la unicidad, sean (α, y) y (α', y') dos soluciones con $k \geq k'$, y sea γ una sección de α , i.e., $\alpha\gamma = id$. Entonces el morfismo $\alpha'\gamma : [k] \rightarrow [k']$ satisface $y = X(\gamma)X(\alpha')y'$, lo cual indica (dado que y es no degenerado) que $\alpha'\gamma = id$ y por tanto $y = y'$. Más aún, obtuvimos que toda sección de α es una sección de α' , siendo el recíproco cierto por simetría. Esto significa que $\alpha = \alpha'$.

Para la existencia consideremos $m = \min\{k : x = X(\beta)z, \beta : [n] \rightarrow [k] \text{ suprayectiva}\}$. Si (β, z) es un caso mínimo, claramente z es no degenerado. \square

Traduciendo al caso cosimplicial todas las terminologías del párrafo anterior al lema, obtenemos un resultado similar para los cosímplices de un conjunto cosimplicial $X \in sSet$:

Lema 2.1.3. *Sea X un conjunto cosimplicial. Definimos la aumentación de X como el ecualizador de $d^0, d^1 : X^0 \rightrightarrows X^1$. Entonces para todo $x \in X^n$, no en la imagen de un elemento en la aumentación a través de un operador cocara, existe una única función inyectiva $l : [k] \rightarrow [n]$ y un único cosímplice no-cocara $y \in X^k$ tal que $X(l)(y) = x$.*

Demostración. Ver [Hir03, pág. 15.9.4] \square

Esqueleto y coesqueleto. Para $n \geq 0$, consideremos el siguiente diagrama, inducido por la inclusión $i : \mathbf{\Delta}_{\leq n} \rightarrow \mathbf{\Delta}$:

$$\begin{array}{ccc} & & i^\# \\ & \curvearrowleft & \\ \text{Set}^{\Delta^{op}} & \xrightarrow{i^*} & \text{Set}^{\Delta_{\leq n}^{op}} \\ & \curvearrowright & \\ & & i^\flat \end{array}$$

Específicamente, para todo $X \in \text{Set}_{\Delta_{\leq n}}$, tenemos $i^b X = \text{Lan}_i X$ e $i^\# X = \text{Ran}_i X$. Definimos el **n-ésimo esqueleto** como la comónada $sk_n = i^b i^*$, y el **n-ésimo coesqueleto** como la mónada $cosk_n = i^\# i^*$. Por adjunción, $sk_n \dashv cosk_n$.

Ejemplo 2.1.4. Sea S un conjunto. Considerando la inclusión $\text{Set} \hookrightarrow s\text{Set}$, definimos $ES := cosk_0 S$. En cada grado $ES_n = \{(x_i)_n : x_i \in S\}$ con operadores cara $(d_i x)_j = x_j$ si $j < i$, x_{j+1} de otro modo, y operadores degeneración $(s_i x)_j = x_j$ si $j \leq i$, x_{j-1} de otro modo. Por adjunción tenemos los isomorfismos $s\text{Set}(X, ES) \simeq \text{Set}(X_0, S)$. Para el caso finito, escribimos simplemente $E^n = E\{0, 1, \dots, n\}$.

Fronteras y cuernos. Para cada $n \geq 1$ definimos la **n-ésima frontera** del simplejo estándar Δ^n como el coequalizador:

$$\coprod_{0 \leq i, j \leq n} \Delta^{n-2} \xrightarrow[d^i]{d^{j-i}} \coprod_i^n \Delta^{n-1} \xrightarrow{\dots} \partial \Delta^n$$

en otras palabras, el subcomplejo de Δ^n generado por los símlices de dimensión menor a n , esto es: $\partial \Delta^n = sk_{n-1} \Delta^n$. Similarmente, para toda $0 \leq k \leq n$ definimos el **k-ésimo cuerno** de Δ^n como el coequalizador:

$$\coprod_{0 \leq i, j \leq n} \Delta^{n-2} \xrightarrow[d^i]{d^{j-i}} \coprod_{i \neq k}^n \Delta^{n-1} \xrightarrow{\dots} \Lambda_k^n \quad (2.1)$$

en otras palabras, se define como el subcomplejo de Δ^n generado por todos los símlices de dimensión menor a n , exceptuando la k -ésima cara.

2.2. Collares

Denotemos por $s\text{Set}_{*,*}$ a la categoría rebanada $(\partial \Delta^1 \downarrow s\text{Set})$. Cada objeto de esta categoría es un conjunto simplicial con una elección de un par de vértices, y un morfismo entre dos objetos es una transformación natural que preserva dichas elecciones. Notemos que el objeto inicial en esta categoría es $1 : \partial \Delta^1 \rightarrow \partial \Delta^1$. Cada simplejo estándar Δ^n es un elemento de $s\text{Set}_{*,*}$ al considerar los vértices inicial y final $(0, n) \in \Delta_0^n$.

Definición 2.2.1. Un **collar** (abierto) T es la unión de una familia finita de simplejos $\{\Delta^{n_i}\}$ identificando el vértice final y el vértice inicial de cada par de simplejos adyacentes. Específicamente, T es el colímite del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ \swarrow^{n_{i-1}} & & \searrow^0 \\ \Delta^{n_{i-1}} & & \Delta^{n_i} \end{array} \quad 1 \leq i \leq k$$

el cual denotaremos:

$$T = \Delta^{n_0} \vee \Delta^{n_1} \vee \dots \vee \Delta^{n_k}$$

A las inclusiones $\Delta^{n_i} \hookrightarrow T$ con $n_i \neq 0$ las llamaremos **cuentas** del collar T , y le llamaremos **vértice unión** a los vértices inicial y final de cada cuenta del collar T . Denotaremos por α_T al vértice inicial de la primer cuenta y por ω_T al vértice final de la última cuenta. De esta forma todo collar es un objeto de $s\text{Set}_{*,*}$ vía $(\alpha_T, \omega_T) : \partial \Delta \rightarrow T$

Notemos que cada simplejo Δ^n es un collar. El simplejo Δ^0 no es una cuenta en ningún collar excepto, por definición, de el mismo. Así, cada collar tiene por lo menos un vértice unión y una cuenta. Dado un collar T , escribimos V_T y J_T para denotar a los conjuntos de vértices y juntas. Note que $J_T \subset V_T = T_0$ y que ambos son conjuntos parcialmente ordenados bajo la relación $a \leq b$ si existe un camino dirigido en T de a a b (i.e. la relación generada por los 1-símlices de T).

Denotamos por Nec a la subcategoría plena de $s\text{Set}_{*,*}$ cuyos objetos son collares $(\alpha, \omega) \partial \Delta^1 \rightarrow T$ (En caso de que no haya confusión, omitiremos el prefijo T de los vértices inicial y final). Una **espina** es un collar en el que cada cuenta es el simplejo Δ^1 . Existen dos construcciones evidentes en un collar T dado: La espina $\text{Spi}[T]$ de T , definida como la espina más larga contenida en T , y el simplejo $\Delta[T]$, definido como el simplejo cuyo conjunto de vértices es, como conjuntos ordenados, el mismo que el de

T . Tenemos entonces las inclusiones de collares $Spi[T] \hookrightarrow T \hookrightarrow \Delta[T]$. Debe notarse mientras que la construcción $\Delta[T]$ es funtorial, Spi no lo es (Considere por ejemplo la inclusión de collares $\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^2$). Por último, un collar $\Delta^{n_0} \vee \Delta^{n_1} \vee \dots \vee \Delta^{n_k}$ se dice que está en *forma preferida* si $k = 0$ o bien $n_i \geq 0$ para todo i .

Ahora, consideremos un par de collares T' y T . Denotamos por $T' \vee T$ al collar definido por el pushout:

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\alpha} & T \\ \omega \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & T' \vee T \end{array}$$

Sea S un conjunto simplicial y sean $a, b \in S_0$. Para un collar T la notación $T \rightarrow S_{a,b}$ expresa un morfismo en $sSet$ que manda α y ω a los vértices a y b respectivamente. El hecho de que Nec sea cerrado bajo el tipo de colímites \vee , se refleja en que para todo $S \in sSet$ y para $a, b, c \in S_0$, existe el functor:

$$Nec_{/S_{b,c}} \times Nec_{/S_{a,b}} \rightarrow Nec_{/S_{a,c}}$$

el cual envía $((T' \rightarrow S_{b,c}), (T \rightarrow S_{a,b})) \mapsto (T' \vee T \rightarrow S_{a,c})$. Dado que el nervio de un functor preserva productos, tenemos para cada conjunto simplicial S y para cada tres vértices a, b, c un morfismo en $sSet$:

$$N(Nec_{/S_{b,c}}) \times N(Nec_{/S_{a,b}}) \rightarrow N(Nec_{/S_{a,c}})$$

que satisface las propiedades de coherencia obvias para un enriquecimiento. Tenemos por lo tanto un functor:

$$\mathfrak{C}^{nec} : sSet \rightarrow sCat \quad (2.2)$$

2.3. Conjuntos simpliciales ordenados

Los collares poseen varias propiedades ventajosas. Por ejemplo, todo collar está determinado de manera única por sus conjuntos de vértices y juntas, y la imagen de todo mapeo $T \rightarrow T'$ entre collares es de nuevo un collar. Esto nos conduce a considerar una clase de conjuntos simpliciales más amplia.

Para todo conjunto simplicial X , existe una relación en sus vértices al declarar que $x \preceq y$ si existe una espina T y un mapeo $T \rightarrow X$ tal que $\alpha_T \mapsto x$ y $\omega_T \mapsto y$. Esta relación es reflexiva y transitiva, sin embargo está lejos de ser antisimétrica:

Definición 2.3.1. *Un conjunto simplicial X es ordenado si*

- i) *La relación \preceq definida en X_0 es antisimétrica*
- ii) *Todo símlice $x \in X_n$ está determinado de manera única por el conjunto ordenado de sus vértices $x_0 \preceq \dots \preceq x_n$; e.i., diferentes símlices poseen diferentes sucesiones de vértices.*

Notemos el papel de las degeneraciones en la condición ii). Por ejemplo, $\Delta^1 / \partial\Delta^1$ no es un conjunto simplicial ordenado.

Definición 2.3.2. *Sean A y X conjuntos simpliciales. Un mapeo $A \rightarrow X$ es llamado una **inclusión simple** si tiene la PLD respecto a las inclusiones canónicas $\partial\Delta^1 \hookrightarrow T$, para todos los collares T . (Notemos que tal mapeo es una inclusión porque posee la PLD respecto a $\partial\Delta^0$)*

Así, $A \subset X$ es una inclusión simple si todo camino (en el sentido general de un collar) que empiece y termine en A está enteramente en A . Como ejemplo, cuatro de las cinco inclusiones $\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^1 \times \Delta^1$ son inclusiones simples.

Lemma 2.3.3. *Una inclusión simple $A \hookrightarrow X$ tiene la PLD respecto a las inclusiones $\partial\Delta_k \hookrightarrow \Delta_k$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Todo problema de levantamiento se extiende a un diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta^1 & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & \nearrow l & \parallel \\
 \partial\Delta_k & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \Delta_k & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

donde el levantamiento l existe debido a que $A \hookrightarrow X$ es una inclusión simple. El resultado se sigue debido a que $A \hookrightarrow X$ es un monomorfismo que ecualiza a los mapeos $\partial\Delta_k \rightarrow A$ y $l|\partial\Delta_k$. \square

Sea $sSet^{\preceq}$ la subcategoría plena de conjuntos simpliciales ordenados.

Lemma 2.3.4. Sean X y Y dos conjuntos simpliciales ordenados, y sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo entre ellos.

- 1) La categoría de conjuntos simpliciales ordenados es cerrada bajo límites finitos.
- 2) Cada collar T es un conjunto simplicial ordenado.
- 3) Si $X' \subseteq X$ es un subconjunto simplicial, entonces X' es un subconjunto simplicial ordenado.
- 4) El mapeo f está determinado por el mapeo $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ en vértices.
- 5) f_0 es inyectivo si y solo si lo es f .
- 6) La imagen de un n -símplice $x : \Delta^n \hookrightarrow X$ es de la forma $\Delta^k \hookrightarrow X$ para algún $k \leq n$.
- 7) Si T es un collar y $y : T \rightarrow X$ es un mapeo, entonces su imagen es un collar.
- 8) Sea $X \leftarrow A \rightarrow Y$ un diagrama de conjuntos simpliciales ordenados. Si $A \rightarrow X$ y $A \rightarrow Y$ son inclusiones simples, entonces el pushout $B = X \coprod_A Y$ es un conjunto simplicial ordenado, y los mapeos $X \rightarrow B$ y $Y \rightarrow B$ son inclusiones simples.

Demostración. 1) Una subcategoría es cerrada bajo límites finitos si y solo contiene al objeto terminal y es cerrada bajo pullbacks. Claramente el objeto terminal Δ^0 es un conjunto simplicial ordenado. Consideremos el pullback $P = X \times_Z Y$ en $sSet$ de un diagrama $X \rightarrow Z \leftarrow Y$ de conjuntos simpliciales ordenados. Tenemos que $(x, y) \preceq_P (x', y')$ si y sólo si $x \preceq_X x'$ y $y \preceq_Y y'$; lo cual hace evidente la simetría de \preceq_P . Por otro lado, si $\alpha, \beta : \Delta^n \rightrightarrows P$ son dos símplices con los mismos vértices, ambos serían coequalizados por el mapeo $P \rightarrow Z$ pues Z es un conjunto simplicial ordenado. Por la propiedad universal del pullback se tendría que $\alpha = \beta$.

- 2) *i)* Toda espina en un collar, cuyos vértices inicial y final coinciden es la espina constante. Si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 * & \xrightarrow{\alpha} & T' \\
 \omega \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 T & \longrightarrow & T \vee T' \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & S
 \end{array}$$

$x \preceq y$ (curved arrow from T to S)
 $y \preceq x$ (curved arrow from T' to S)

induce una espina $T \vee T' \rightarrow S$ con el mismo vértice inicial y final, y por lo tanto, constante. Así $x = y$, lo que prueba la antisimetría.

- 3) Obvio
- 4) y 5) Inmediatos del inciso 2)

6) Sea y un símplice no degenerado y α una suprayección tal que $y\alpha^* = x$. Evidentemente α^* es suprayectiva. Si $y_i = y_j$ con $i \neq j$, entonces por la propiedad $ii)$ del conjunto símplice ordenado X , $y_{[i,j]} : \Delta^1 \rightarrow \Delta^k \rightarrow X$ es un símplice degenerado, lo cual es una contradicción al supuesto de que y es no degenerado. Por lo tanto y es inyectivo en vértices, lo cual significa (por 4) que es inyectivo. Se concluye que $y = Imx$.

7) Se obtiene al aplicar el inciso 6) a cada cuenta del collar. □

Sean T un collar y S un conjunto simplicial. Decimos que $T \rightarrow S$ es **totalmente no degenerado** si la imagen de cada cuenta de T es un simplejo no degenerado de S . Eg. $\Delta^1 \rightarrow \Delta^1/\partial\Delta^1$ es no degenerado. Enunciamos un lemma para collares $T \rightarrow S$ análogo a 2.1.2:

Lemma 2.3.5. *Sean T un collar y $T \rightarrow S$ un mapeo de conjuntos simpliciales. Entonces existen un collar \bar{T} , un mapeo $\bar{T} \rightarrow S$ totalmente no degenerado y un epimorfismo de collares $T \rightarrow \bar{T}$ satisfaciendo el evidente triángulo conmutativo. Esta terna es única salvo isomorfismo.*

Boquejo. Es una consecuencia del lemma de Eilenberg-Zilber 2.1.2. □

2.4. Joins de conjuntos simpliciales

Sean C y C' categorías. Definimos una nueva categoría $C \star C'$ llamada el join de C y C' :

■ $Obj(C \star C') = Obj(C) \cup Obj(C')$

■

$$hom_{C \star C'}(x, y) = \begin{cases} hom_C(x, y) & \text{si } x, y \in C \\ hom_{C'}(x, y) & \text{si } x, y \in C' \\ \emptyset & \text{si } x \in C' \text{ y } y \in C \\ * & \text{si } x \in C \text{ y } y \in C' \end{cases}$$

La composición de morfismos es la evidente. A continuación, introducimos la generalización de esta construcción en $sSet$. Sea $J \neq \emptyset$ un conjunto finito linealmente ordenado, sean I, I' linealmente ordenados tales que $J = I \cup I'$. Si $J \rightarrow J+1$ es una función inyectiva, entonces esta se puede escribir de alguna de las dos formas:

$$\begin{aligned} 1 \cup d : I \cup I' &\rightarrow I \cup (I' + 1) \\ d \cup 1 : I \cup I' &\rightarrow (I + 1) \cup I' \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde d es un operador cocara en cada caso. Similarmente, toda función suprayectiva $J+1 \rightarrow J$ se escribe como alguna de las formas:

$$\begin{aligned} (1, s) : I \cup (I' + 1) &\rightarrow I \cup I' \\ (s, 1) : (I + 1) \cup I' &\rightarrow I \cup I' \end{aligned} \tag{2.4}$$

con s un operador codegeneraci n según el caso. Sin más demoras, tenemos:

Definición 2.4.1. *Sean X y Y en $sSet$. Definimos el join $X \star Y$ como :*

$$(X \star Y)_n = \bigcup_{i+j=n-1} X_i \times Y_j \quad ; \quad -1 \leq i, j$$

donde $X_{-1} := \Delta^0$. Las caras y degeneraciones est n generadas por los morfismos en (2.3) y (2.4)

Es sencillo ver que esta operación dota a $sSet$ de una estructura monoidal, cuya identidad es el conjunto simplicial vacío Δ^{-1} . Más aún, para todo $i, j \geq -1$

$$\Delta^{i-1} \star \Delta^{j-1} \simeq \Delta^{(i+j)-1}$$

En efecto, dadas $I \rightarrow [i-1]$ y $J \rightarrow [j-1]$ monótonas con $I \cup J = [n]$, tenemos una función $(I \cup J) \rightarrow (i+j-1)$. Recíprocamente, si $\alpha : [n] \rightarrow (i+j-1)$ es monótona, tomando $i+j-1 = [i-1] \cup [j-1]$ tenemos dos funciones monótonas $\alpha^{-1}([i-1]) \rightarrow (i-1)$ y $\alpha^{-1}([j-1]) \rightarrow (j-1)$ con $\alpha^{-1}([i-1]) \cup \alpha^{-1}([j-1]) = [n]$. Estas identificaciones son inversas una de la otra, i.e, obtenemos para $n \geq 0$ biyecciones $(\Delta^{i-1} \star \Delta^{j-1})_n \rightarrow (\Delta^{(i+j)-1})_n$, las cuales serán compatibles con los operadores cara y degeneración.

2.5. Estructura modelo de Quillen

Para toda n consideramos el n -simplejo estándar $|\Delta^n| = \{(x_i \in [0, 1]^n) : \sum x_i = 1\}$ en Top . Esta relación es funtorial: $|\cdot| : \Delta \rightarrow Top$. La extensión izquierda de Kan de $|\cdot|$ a lo largo de Δ , llamada *realización geométrica*

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{|\cdot|} & Top \\ & \searrow \Delta & \nearrow Lan_{\Delta} := \\ & sSet & \end{array}$$

se presenta en el par adjunto $|\cdot| \dashv Sing$, donde $Sing(Z) = Top(|\Delta^\bullet|, Z)$. Por construcción, $|X|$ es un CW para todo conjunto simplicial X . Además, para cada espacio topológico X , la componente $|Sing(Z)| \rightarrow Z$ de la counidad, es una equivalencia homotópica débil. Más aún, el conjunto simplicial $Sing(Z)$ tiene una importante propiedad:

Definición 2.5.1. Sea K un conjunto simplicial. Diremos que K es un **complejo de Kan** si, para cualquier $0 \leq i \leq n$, y para cualquier diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \Delta^n & & \end{array}$$

existe el morfismo punteado que lo convierte en un diagrama conmutativo.

Recíprocamente, cualquier complejo de Kan, se comporta de manera parecida a un espacio topológico: por ejemplo, utilizando métodos combinatorios (ver [GJ99]), para cada n y cada $v \in K_0$, se construye un funtor $\pi'_n(-; v) : Kan \rightarrow Ab$ de tal forma que existe isomorfismo natural $\pi(|K|; v) \simeq \pi'_n(-; v)$. Definiendo una equivalencia débil en Kan , como un morfismo que induce isomorfismos en estos grupos de homotopía, se tiene (de acuerdo a un resultado de Quillen) que la adjunción $|\cdot| \dashv Sing$ induce una equivalencia entre la categoría homotópica de complejos de Kan y la categoría homotópica de complejos CW .

Esta equivalencia es un reflejo de la existencia de estructuras modelos en $sSet$ y Top , para las cuales $|\cdot| \dashv Sing$ es un morfismo de Quillen:

Teorema 2.5.2. Las siguientes colecciones de morfismos en $sSet$ forman las clases de equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones para una estructura modelo en $sSet$.

- **Equivalencias de Kan.** Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en $sSet$ se llama **equivalencia de Kan**, si para todo complejo de Kan K , $f^* : [Y, K] \rightarrow [X, K]$ es una biyección.
- **Fibraciones.** Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ se llama **fibración de Kan** si posee la propiedad de levantamiento derecho respecto a la colección de inclusiones $I = \{\Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n\}_{n \geq 0}$.
- **Cofibraciones.** Todos los monomorfismos.

Esta estructura modelo sobre $sSet$ recibe el nombre de **estructura modelo de Quillen**, lo cual denotamos $sSet_{\mathcal{Q}}$.

Demostración. Ver [GJ99, Cáp. 1] y [JT08]. □

Observación 2.5.3. Notemos que $Cof(I)$ es la colección de todas las cofibraciones acíclicas en $sSet$.

Teorema 2.5.4. La adjunción

$$\begin{array}{ccc} sSet_{\mathcal{Q}} & \xleftarrow{Sing} & Top_{\mathcal{Q}} \\ & \tau & \\ & \xrightarrow{|\cdot|} & \end{array}$$

es una equivalencia de Quillen.

Demostración. Ver [GJ99, Cáp. 1] y [JT08]. □

Tenemos todavía más; $sSet_Q$ es una categoría modelo cofibrantemente generada, tal como lo muestra la observación 2.5.3 junto con el siguiente teorema:

Teorema 2.5.5. *Un mapeo $g : X \rightarrow Y$ entre conjuntos simpliciales es una fibración de Kan acíclica si y solo si g posee la PLD respecto a la colección $J = \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n \geq 0}$.*

Demostración. Ver [GJ99, T.11.2]. □

Observación 2.5.6. *En virtud del teorema anterior: las cofibraciones en $sSet_Q$ (i.e. los monomorfismos) son la saturación débil de la colección (pequeña) de inclusiones $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$*

Proposición 2.5.7. *Sea $C \rightarrow D$ una equivalencia de categorías, entonces $NC \rightarrow ND$ es una equivalencia homotópica de Kan.*

Demostración. Utilizamos la continuidad del nervio N :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 C & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 C \times I & \longrightarrow & D \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 C & &
 \end{array} & \Rightarrow &
 \begin{array}{ccc}
 NC & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 N(C \times I) \simeq NC \times E^1 & \longrightarrow & ND \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 NC & &
 \end{array}
 \end{array}$$

□

2.6. Cuasi-categorías

La categoría homotópica y el nervio.

Denotamos por τ a la extensión derecha de Kan de la subcategoría plena $\mathbf{\Delta} \rightarrow Cat$ a lo largo del encaje de Yoneda:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{\Delta} & \xleftarrow{i} & Cat \\
 \searrow & & \nearrow N \\
 & sSet & \xrightarrow{Lan_{\mathbf{\Delta}} i = \tau}
 \end{array} \tag{2.5}$$

Al adjunto derecho se le denotará como N , y al conjunto simplicial $N(C) = hom_{Cat}(\bullet, C)$ se le llamará **el nervio de C** . Notemos que cada n -símplice del nervio de una categoría esta determinado de manera única por su espina. La categoría τX recibe el nombre de **categoría homotópica de X** .

Describamos una presentación más explícita de este funtor. La 1-ésima truncación de X

$$X_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_1$$

induce una gráfica dirigida reflexiva X' cuyos conjuntos de vértices y aristas son los conjuntos de 0-símplices y 1-símplices, X_0 y X_1 respectivamente. Definimos la categoría hX como el cociente de la categoría libre $\mathcal{F}X'$ vía la relación generada por la identificación:

$$g \cdot f \sim h \quad \text{si y sólo si existe } \sigma \in X_2 \text{ tal que } d_2\sigma = f, d_0\sigma = g \text{ y } d_1\sigma = h$$

El funtor definido es un adjunto izquierdo del nervio; en efecto, dado un morfismo $X \rightarrow NC$, al ser NC 2-coesquelético (Ver Lemma 2.6.1) esto equivale a tener un morfismo entre las respectivas 2-truncaciones $X_{\leq 2} \rightarrow NC_{\leq 2}$ (en particular entre las 1-truncaciones), lo cual a su vez induce un morfismo $\mathcal{F}X' \rightarrow \mathcal{F}(NC)' \rightarrow \bar{C}$ que se factoriza:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}X' & \longrightarrow & \mathcal{F}X' / \sim \\
 & \searrow & \vdots \\
 & & \bar{C}
 \end{array}$$

Es fácil ver que esta correspondencia es de hecho una biyección natural. Por lo tanto $hX \simeq \tau X$ es una representación de la categoría homotópica de X . Antes de continuar con nuestro estudio de la adjunción $\tau \dashv N$, hacemos un análisis de las relaciones entre los 1-símplices de un conjunto simplicial.

Sea X un conjunto simplicial. Sean $f, g : \Delta^1 \rightarrow X$ un par de 1-símplices satisfaciendo $d_i(f) = d_i(g)$ para $i = 0, 1$. La existencia de 2-símplices satisfaciendo

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \swarrow & & \searrow 1 \\ x & \xrightarrow{g} & y \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} & x & \\ 1 \swarrow & & \searrow f \\ x & \xrightarrow{g} & y \end{array} \quad (2.6)$$

evidencian dos relaciones evidentes en X_1 . Ambas son reflexivas¹. En el caso de que X sea una cuasi-categoría (ver definición 2.6.4 y proposición 2.6.5) ambas coinciden, exhibiendo una relación que además es simétrica y transitiva. Diremos en general que $f, g \in X_1$ son **homotópicos** si representan a la misma clase en la relación de equivalencia generada por las dos relaciones en (2.6). Como resultará evidente más adelante, si X es una cuasi-categoría, entonces $f, g \in X_1$ son **homotópicos** si y sólo si representan al mismo morfismo en la categoría homotópica.

Lemma 2.6.1. *Para toda categoría C , el nervio $\mathcal{N}C$ es 2-coesquelético. Esto es, $\mathcal{N}C \simeq \text{cosk}_2\mathcal{N}C$*

Bosquejo.

$$\mathcal{N}C_n \simeq \text{sSet}(\Delta^n, \mathcal{N}C) \simeq \text{Cat}([n], C) \simeq \text{sSet}(\text{sk}_2\Delta^n, \mathcal{N}C \simeq \text{cosk}_2\mathcal{N}C_n)$$

□

Lemma 2.6.2. *Para $n \geq 2$, la inclusión $\Lambda_k^n \subset \Delta^n$ induce un isomorfismo $\text{sk}_{n-2}\Lambda_k^n \simeq \text{sk}_{n-2}\Delta^n$.*

Demostración. Ver [GJ99, lema 3.5].

□

Ahora, hagamos $n \geq 4$. Por el lemma anterior $\text{sk}_2\Lambda_k^n \simeq \text{sk}_2\Delta^n$ para todo $0 \leq k \leq n$. Por lo tanto, la extensión del diagrama izquierdo existe, si y sólo si existe la extensión del derecho:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathcal{N}C \simeq \text{cosk}_2\mathcal{N}C \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \text{sk}_2\Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathcal{N}C \\ \simeq \downarrow & \nearrow \exists & \\ \text{sk}_2\Delta^n & & \end{array}$$

Para $n = 2, 3$, es suficientemente claro que cualquier cuerno interior puede ser rellenado a un n -simplejo. Para ilustrar esto, dado un cuerno $\Lambda_1^3 \rightarrow \mathcal{N}C$, este se rellena (de manera única) como:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & \xrightarrow{g} & 2 \\ & f \swarrow & & & \searrow h \\ & 0 & & & 3 \\ & & \xrightarrow{gh} & & \xrightarrow{hg} \\ & & & \xrightarrow{hgf} & \end{array}$$

Debemos de notar que, en el caso de que C sea un grupoide, todos los cuernos interiores y exteriores de $\mathcal{N}C$ se rellenan de manera única (considerar simplemente los inversos de los morfismos implicados). Hemos probado la suficiencia de la proposición:

Proposición 2.6.3. *Sea X un conjunto simplicial. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- Para $0 < k < n$, y para cualquier diagrama solido

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

existe un único morfismo punteado que lo convierte en un diagrama conmutativo.

¹En efecto, para el caso izquierdo por ejemplo, si $f \in X_1$, entonces $h = s_1f$ es la homotopía deseada

- La unidad en X es un isomorfismo $X \simeq N\tau X$.

Demostración. Para la prueba de la necesidad ver [Lur09, P.1.1.2.2]. □

Este resultado motiva la siguiente definición:

Definición 2.6.4. Sea X un conjunto simplicial. Diremos que X es una **cuasi-categoría** si, para cualquier $0 < i < n$, y para cualquier diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

existe el morfismo punteado que lo convierte en un diagrama conmutativo.

Proposición 2.6.5. Sea X una cuasi-categoría. Las relaciones descritas en (1) coinciden, exhibiendo una relación de equivalencia en X_1

Demostración. Si $f \sim g$ a derecha, rellenar el cuerno interior:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & \xrightarrow{f} & 2 \\ & id \nearrow & & \searrow f & \\ 0 & & & & 3 \\ & \searrow f & & \nearrow f & \\ & & 1 & \xrightarrow{f} & 2 \\ & & & & \\ & & & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

atestigua que $f \sim g$ a izquierda. El recíproco es similar, y por lo tanto las dos relaciones coinciden. Teniendo en cuenta esto, si $f \sim g$ y $g \sim h$, rellenar los siguientes cuernos interiores:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & \xrightarrow{f} & 2 \\ & id \nearrow & & \searrow f & \\ 0 & & & & 3 \\ & \searrow f & & \nearrow f & \\ & & 1 & \xrightarrow{g} & 2 \\ & & & & \\ & & & \xrightarrow{h} & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & \xrightarrow{g} & 2 \\ & id \nearrow & & \searrow f & \\ 0 & & & & 3 \\ & \searrow f & & \nearrow f & \\ & & 1 & \xrightarrow{g} & 2 \\ & & & & \\ & & & \xrightarrow{f} & \end{array}$$

atestigua que $g \sim f$ y $f \sim h$, probando la simetría y la transitividad de la relación en cuestión. □

Observación 2.6.6. Si X es un conjunto simplicial arbitrario, la intransitividad de las relaciones en cuestión, se refleja en la posible existencia de dos simplejos que coincidan en la categoría homotópica hX pero que no estén relacionados como en (2.6).

Proposición 2.6.7. Si X es una cuasi-categoría, $f, g, h \in X_1$, entonces $gf = h$ en hX si y sólo si existe $\sigma \in X_2$ tal que $\sigma_0 = g$, $\sigma_1 = h$ y $\sigma_2 = f$.

Demostración. Trivial. Utilizar propiedades de llenado de cuernos interiores. □

Morfismos. Sea X una cuasi-categoría, un 1-morfismo en X es un 1-simplejo $\Delta^1 \rightarrow X$. La composición de dos morfismos f y g tales que $d_0 f = d_1 g$, es un morfismo h junto con una homotopía $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ satisfaciendo $d_0 = g$, $d_1 = h$ y $d_2 = f$. Tal morfismo está determinado salvo homotopía: si σ y σ' atestiguan dos composiciones, entonces el rellenado del 1-cuerno

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & \xrightarrow{g} & 2 \\ & f \nearrow & & \searrow g & \\ 0 & & & & 3 \\ & \searrow h & & \nearrow h' & \\ & & 1 & \xrightarrow{g} & 2 \\ & & & & \\ & & & \xrightarrow{h'} & \end{array}$$

hace $h \sim h'$. Si $x \in X_0$ es un objeto en X , entonces es sencillo ver que $s_0 x$ es el único morfismo salvo homotopía satisfaciendo $f s_0 \sim f$ y $s_0 f'$ para todos los morfismos componibles f y f' .

Tenemos el concepto de isomorfismo en una cuasi-categoría:

Definición 2.6.8. Sea X una cuasi-categoría. Decimos que un morfismo $f : \Delta^1 \rightarrow X$ en X es un **isomorfismo en X** si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

i) ∞ -**isomorfismo**. Existe una factorización

$$\begin{array}{ccc} E^1 & \longrightarrow & X \\ d^2 \uparrow & \nearrow f & \\ \Delta^1 & & \end{array}$$

ii) **Cuasi-isomorfismo**. Existe una factorización

$$\begin{array}{ccc} sk_2 E^1 & \longrightarrow & X \\ d^2 \uparrow & \nearrow f & \\ \Delta^1 & & \end{array}$$

iii) f es un isomorfismo en la categoría homotópica. Esto es, existen 1-simplejos g y g' tales que $gf = 1$ y $fg' = 1$ en hX .

Demostración de las equivalencias en 2.6.8. La implicación i) \Rightarrow ii) es trivial. Un diagrama conmutativo como en ii) exhibe la existencia de $\sigma, \sigma' \in X_2$ y $g \in X_1$ satisfaciendo $\sigma_0 = g = \sigma'_2$, $\sigma_2 = f = \sigma'_0$ y $\sigma_0 = 1$, $\sigma'_2 = 1$, lo cual nos indica que $gf = 1$ y $fg' = 1$ en hX . Por lo tanto ii) \Rightarrow iii). Recíprocamente, la existencia de morfismos $g, g' \in X_1$ satisfaciendo la condición iii), nos indica que $fg = fgfg' = fg' = 1$ en hX , lo cual (por 2.6.7) implica la existencia de simplejos $\sigma, \sigma' \in X_2$ tales que $d_0\sigma = g = d_2\sigma'$, $d_2\sigma = f = d_0\sigma'$ y $d_1\sigma = 1 = d_1\sigma'$, y por lo tanto se tiene un morfismo $(\sigma, \sigma') : sk_2 E^1 \rightarrow X$ que factoriza a $f : \Delta^1 \rightarrow X$. Tenemos así, ii) \Leftrightarrow iii). La implicación iii) \Rightarrow i) es un caso especial del lemma 2.7.13. \square

Proposición 2.6.9. Sea X una cuasi-categoría. Entonces el mapeo $X \rightarrow *$ posee la propiedad de levantamiento derecho con respecto a:

1. Los mapeos $(A \times E^1) \cup_{A \times \{0\}} (B \times \{0\}) \rightarrow B \times E^1$, para todo monomorfismo $A \hookrightarrow B$.
2. La inclusión $E(\{0, 1\}) \cup E(\{1, 2\}) \hookrightarrow E(\{0, 1, 2\})$.

Nótese que la parte b) implica que la composición coherente de ∞ -isomorfismos es un ∞ -isomorfismo.

Demostración. La parte a) es un caso degenerado del lemma 2.7.11. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & & \curvearrowright & & \\ E^1 \cup E^1 & \xrightarrow{k} & (\{0, 1\} \times E^1) \cup_{\{0,1\} \times \{0\}} (E^1 \times \{0\}) & \xrightarrow{l} & E^1 \cup E^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E^2 & \xrightarrow{j} & E^1 \times E^1 & \xrightarrow{p} & E^2 \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & id & & \end{array}$$

donde j y p están definidos (al ser $E^1 \times E^1$ y E^2 coesqueléticos) por las correspondencias:

$$j(0) = (0, 0) \quad ; \quad j(1) = (1, 0) \quad ; \quad j(2) = (1, 1)$$

$$p(0, 0) = 0 \quad ; \quad p(1, 0) = 1 \quad ; \quad p(0, 1) = 0 \quad ; \quad p(1, 1) = 2$$

y los mapeos k y l por:

$$k : f \mapsto (f, 0) \quad ; \quad k : g \mapsto (1, g)$$

$$l : (0, g) \mapsto 0 \quad ; \quad l : (1, g) \mapsto g \quad ; \quad l : (f, 0) \mapsto f$$

Claramente el diagrama es una retracción. Por el inciso a) $X \rightarrow *$ posee la PLD respecto al mapeo caja y por lo tanto respecto al morfismo deseado. \square

Definición 2.6.10 (Equivalencia de Joyal). Decimos que un morfismo $X \rightarrow Y$ en $sSet$ es una **equivalencia de Joyal** si para toda *cuasi-categoría* Z , el mapeo

$$[Y, Z]_{E^1} \xrightarrow{\cong} [X, Z]_{E^1}$$

es una biyección.

Observación 2.6.11. Dos mapeos $f, g : X \times Y$ son E^1 -homotópicos si existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ d^0 \downarrow & \searrow g & \\ X \times E^1 & \longrightarrow & Y \\ d^1 \uparrow & \nearrow f & \\ X & & \end{array}$$

Claramente, si $f : X \rightarrow Y$ es una E^1 -equivalencia, entonces f es una equivalencia de Joyal. Recíprocamente, si X y Y son *cuasi-categorías* y f es una equivalencia de Joyal, entonces la biyección

$$[Y, X]_{E^1} \xrightarrow{\cong} [X, X]_{E^1}$$

nos garantiza la existencia de un inverso E^1 -homotópico para el morfismo f .

2.7. Lemas en *cuasi-categorías*

Las colecciones de complejos de Kan y *cuasi-categorías* se han definido como aquellos conjuntos simpliciales X para los cuales el mapeo $X \rightarrow *$ posee la PLD respecto a las saturaciones conocidas como extensiones anodinas y extensiones anodinas internas respectivamente. En el primer caso estas resultan ser la colección de cofibraciones acíclicas (monomorfismos que son equivalencias de Kan) en la estructura modelo de Kan sobre $sSet$. En el segundo caso, las extensiones anodinas internas son solo una subcolección propia de los monomorfismos que son equivalencias de Joyal (proposición 2.7.4). En particular existen morfismos no anodinos internos que poseen levantamiento respecto a la clase de *cuasi-categorías*. Esto nos conduce a estudiar un conjunto más amplio de extensiones con el fin principal de establecer, en la siguiente sección, la estructura modelo de Joyal sobre $sSet$.

Definición 2.7.1. Denotamos las siguientes saturaciones débiles:

- *Extensiones anodinas:* $\text{cof}(\{\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n : 0 \leq k \leq n\})$
- *Extensiones anodinas internas:* $\text{cof}(\{\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n : 0 < k < n\})$
- *Extensiones anodinas exteriores especiales:* $\text{cof}(\{\text{cuernos exteriores especiales}\})$
- *Extensiones anodinas especiales:* $\text{cof}(\{\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n : 0 < k < n\} \cup \{\text{cuernos exteriores especiales}\})$

Lemma 2.7.2. El producto caja $(\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n) \square (\partial \Delta^r \hookrightarrow \Delta^r)$ es una extensión anodina interna para todo $0 < k < n$ y $0 \leq r$. Más aún, por saturación, la afirmación es cierta para todo monomorfismo $A \hookrightarrow B$.

Demostración. Ver [DS11, Apéndice A]. □

Proposición 2.7.3. Sea $A \hookrightarrow B$ un monomorfismo y $X \rightarrow Y$ una fibración interna. Entonces $X^B \rightarrow Y^B \times_{Y^A} X^A$ es una fibración interna. En particular, si X es una *cuasi-categoría*, X^A lo es para todo $A \in sSet$.

Demostración. El resultado se obtiene por adjunción y el lemma 2.7.2. □

Lemma 2.7.4. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

- a) Si $C \rightarrow D$ es una equivalencia de Joyal, entonces también lo es $A \times C \rightarrow A \times D$ para toda cuasi-categoría A .
- b) Toda inclusión del cuerno interior $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ es una equivalencia de Joyal.
- c) X es una cuasi-categoría si y solo si el mapeo $X \rightarrow *$ posee la PLD respecto a la colección de monomorfismos que son equivalencias de Joyal.

Demostración. a) Sea Z una cuasi-categoría. El resultado se sigue por adjunción:

$$\begin{array}{ccc} [A \times D, Z] & \longrightarrow & [A \times C, Z] \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ [D, Z^A] & \xrightarrow{\simeq} & [C, Z^A] \end{array}$$

- b) Tenemos que verificar que para toda cuasi-categoría X , la función $[\Delta^n, X] \rightarrow [\Lambda_k^n, X]$ es una biyección. Para ver que es inyectiva, ponemos nuestra atención en el hecho de que X^{E^1} es una cuasi-categoría; así, todo mapeo $\Lambda_n^k \rightarrow X^{E^1}$ posee un levantamiento al simplejo Δ^n . La suprayectividad se obtiene de la definición de cuasi-categoría.
- c) Sea X una cuasi-categoría y sea $i: A \hookrightarrow B$ una equivalencia de Joyal. Entonces, dado un morfismo $\alpha: A \rightarrow X$, obtenemos un morfismo $\beta: B \rightarrow X$ y una homotopía $(\beta i, \alpha): A \times E^1 \rightarrow X$. Utilizando la proposición 2.6.9a se tiene un levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{i} & B \times \{0\} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ A \times E^1 & \xrightarrow{i} & B \times E^1 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \beta \\ \downarrow \\ \xrightarrow{h} \\ \searrow \beta \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow X \end{array}$$

$(\beta i, \alpha)$

induciendo el levantamiento $hd^1i = \alpha$.

□

Observación 2.7.5. Considerando la estructura modelo de Joyal en $sSet$, en donde las equivalencias débiles son las equivalencias de Joyal y las cofibraciones son todos los monomorfismos; deducimos de inmediato, por la proposición 2.7.4, que las extensiones anodinas internas son equivalencias de Joyal.

Tal y como lo ilustran los siguientes tres lemas y corolario, para probar que un morfismo en particular es una equivalencia de Joyal, resulta conveniente verificar si se trata de una extensión anodina interna:

Lemma 2.7.6. Para toda $n > 0$, la inclusión $\Delta^n \vee \Delta^1 \hookrightarrow \Delta^{n+1}$ es una extensión anodina interna.

Demostración. Consideramos la siguiente filtración de Δ^{n+1} :

$$X_0 = \Delta^n \vee \Delta^1 \hookrightarrow X_1 = X_0 \cup \bigcup_{i < n} [i \ n \ n + 1] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_k = X_{k-1} \cup \bigcup_{i_1 < \dots < i_k < n} [i_1 \dots i_k \ n \ n + 1] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Delta^{n+1}$$

La k -ésima inclusión es la composición de $\binom{n}{k}$ pushouts a lo largo de inclusiones de cuernos $\Lambda_k^{k+1} \rightarrow X_{k-1}$. Como ejemplo, para el caso $n = 3$ y $k = 2$, la inclusión $X_1 \rightarrow X_2$ se obtiene a través de los $\binom{3}{2} = 3$ pushouts:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_2^3 & \xrightarrow{(0,1)} & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^3 & \longrightarrow & X_1 \cup [0 \ 1 \ n \ n + 1] = X'_1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_2^3 & \xrightarrow{(0,2)} & X_1 \cup [0 \ 1 \ n \ n + 1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^3 & \longrightarrow & X'_1 \cup [0 \ 2 \ n \ n + 1] = X''_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_2^3 & \xrightarrow{(1,2)} & X_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta^3 & \longrightarrow & X_1'' \cup [12nn+1] \simeq X_1 \bigcup_{i<j<n} [ijnn+1]
\end{array}$$

□

Corolario 2.7.7. *Los mapeos $Spi[T] \hookrightarrow T$ y $T \hookrightarrow \Delta[T]$ son equivalencias de Joyal.*

Demostración. El mapeo $Spi[\Delta^r] \rightarrow \Delta^r$ presenta una descomposición:

$$Spi[T] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow (\Delta^{r-3} \vee \Delta^1) \vee (\Delta^1 \vee \Delta^1) \hookrightarrow (\Delta^{r-2} \vee \Delta^1) \vee \Delta^1 \hookrightarrow \Delta^{r-1} \vee \Delta^1 \hookrightarrow \Delta^r,$$

donde cada morfismo es una equivalencia débil en virtud del lemma 2.7.6 y del hecho de que cada pushout considerado es homotópico (ver el dual de la proposición 1.2.10). Así, el morfismo $Spi[T] \rightarrow \Delta[T]$ al ser uno de estos casos, es una equivalencia de Joyal. Del mismo modo esto prueba, por inducción sobre las cuentas de T , que $Spi[T] \hookrightarrow T$ es una equivalencia débil. El resultado se sigue al usar 2 de 3 en $Spi[T] \rightarrow T \rightarrow \Delta[T]$. □

Sea Δ_k^n para $0 \leq k < n$ el cociente de las inclusiones:

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta^k & \xleftarrow{(0,\dots,k)} & \Delta^n & \xleftarrow{(k+2,\dots,n)} & \Delta^{(n-k)-1} \\
& \searrow 0 & \downarrow & \swarrow 1 & \\
& & \Delta^1 & &
\end{array}$$

Notemos que $\Delta_0^n \simeq C_L^{n-1}$ y $\Delta_{n-1}^n \simeq C_R^{n-1}$. (Ver definición antes de 4.1.1)

Lemma 2.7.8. *La inclusión $\Delta_k^n \rightarrow \Delta^1$ es una equivalencia de Joyal.*

Demostración. Distinguímos dos casos:

- $k = 0, n - 1$. Supongamos $k = 0$, el otro caso es totalmente análogo. Notemos que el cociente $\Delta^n \rightarrow \Delta_0^n$ presenta una biyección entre los símlices no degenerados. Así, identificaremos a cada símlice no degenerado de $X := \Delta_0^n$ con su preimagen en Δ^n . Tenemos entonces la siguiente filtración de X :

$$X_0 = [01] \hookrightarrow X_1 = \bigcup_{1 < i \leq n} [01i] \hookrightarrow X_2 = \bigcup_{1 < i < j \leq n} [01ij] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{n-1} = X$$

Cada inclusión $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ es la composición de $\binom{n-1}{i+1}$ pushouts a lo largo de cuernos interiores. Por lo tanto obtenemos que $\Delta^1 \rightarrow X$ es una extensión anodina interna, y en virtud de la proposición 2.7.5, una equivalencia de Joyal. La afirmación para el caso presente se deduce al utilizar la propiedad 2-de-3 de las equivalencias de Joyal.

- Caso $0 < k < n - 1$. Consideremos la inclusión $[01\dots n-1]: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$; obtenemos el mapeo $\Delta_{k-1}^{n-1} \hookrightarrow \Delta_k^n$, el cual es una equivalencia de Joyal² en virtud del caso anterior y la propiedad 2-de-3 aplicados al triángulo:

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^1 & \longrightarrow & \Delta_{k-1}^{n-1} \\
& \searrow & \downarrow \\
& & \Delta_k^n
\end{array}$$

²Es fácil probar que de hecho es una extensión anodina.

El resultado se sigue por inducción:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k-1}^{n-1} & \hookrightarrow & \Delta_k^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Delta^1 \end{array}$$

□

Lemma 2.7.9. Para todo $n \geq 0$ los mapeos $C_R^n \rightarrow \Delta^1$, $C_L^n \rightarrow \Delta^1$ y $C_{cyl}^n \rightarrow \Delta^1$ son equivalencias de Joyal.

Demostración. Ya hemos probado en 2.7.8 los primeros dos casos. El caso restante no es difícil y puede consultarse en [DS11, P.9.4]. □

Lemma 2.7.10. Para todo $r \geq 0$, el producto caja $f = (\{0\} \hookrightarrow E^1) \square (\partial \Delta^r \hookrightarrow \Delta^r)$ es una extensión anodina especial.

Proposición 2.7.11. Sea $X \rightarrow Y$ una fibración interna entre cuasi-categorías y supóngase que f posee la PLD respecto a $\{0\} \rightarrow E^1$. Entonces f tiene la propiedad del levantamiento derecho respecto al producto caja:

$$(\{0\} \rightarrow E^1) \square (A \hookrightarrow B)$$

para todo monomorfismo $A \hookrightarrow B$. Equivalentemente (ver 1.6.4), el mapeo $X^{E^1} \rightarrow X^0 \times_{Y^0} Y^{E^1}$ es una fibración de Kan acíclica.

Demostración. Por el lemma 2.7.10 el producto caja $(\{0\} \rightarrow E^1) \square (A \hookrightarrow \Delta^r)$ es una extensión anodina especial para $r > 0$, y por lo tanto, de la proposición 2.7.12 concluimos que f posee la PLD respecto a este mapeo. Para el caso $r = 0$, el producto caja es $\{0\} \rightarrow E^1$, por lo cual f posee esta propiedad para todo $r \geq 0$. El resultado se sigue del hecho de que la clase de monomorfismos en $sSet$ es la saturación débil de la colección $\{\partial \Delta^r \hookrightarrow \Delta^r\}_{r \geq 0}$. □

Proposición 2.7.12 (Joyal, levantamiento de cuernos exteriores especiales).

1. Sea X una cuasi-categoría. Dado cualquiera de los siguientes diagramas sólidos

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_n^n & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \Delta^n & & \end{array}$$

en el cual, respectivamente fd^0 o gd^n es un cuasi-isomorfismo, existe el levantamiento mostrado.

2. Sea $X \rightarrow Y$ una fibración interna entre cuasi-categorías (ver definición 2.8.2). Dado cualquiera de los siguientes diagramas sólidos

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_n^n & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

en el cual, respectivamente fd^0 o gd^n es un cuasi-isomorfismo, existe el levantamiento indicado. Los cuernos f y g son llamados **cuerno exterior izquierdo especial** y **cuerno exterior derecho especial**.

Demostración. Ver por ejemplo [DS09, Apéndice B] □

Lemma 2.7.13. Sean $h : X \rightarrow Y$ una fibrici3n interna y $\Delta^1 \rightarrow X$ un quasi-isomorfismo. Entonces para todo diagrama conmutativo s3lido

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ E^1 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe el levantamiento indicado.

Demostraci3n. Cada s3mplice de E^1 est3 determinado por su secuencia de v3rtices. Por lo tanto, $E_n^1 = \{(a_0, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$ para toda $n \geq 0$. Definiendo Z_i como el subcomplejo de E^1 generado por el 3nico n -simplejo cuyo v3rtice inicial es 0, formamos la filtraci3n $Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq E^1$. Notemos que $E^1 = \cup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. Afirmamos que para cada $n \geq 1$ existe un diagrama pushout:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^{n+1} & \longrightarrow & Z_n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta^{n+1} & \longrightarrow & Z_{n+1} \end{array}$$

donde g env3a a cada n -s3mplice $[0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, n+1]$ con $i \neq 0$ al s3mplice $(\bar{0}, \bar{1}, \dots, \hat{i}, \dots, \overline{n+1})$ tomando congruencia m3dulo 2. Claramente las im3genes coinciden en las traslapaciones, por lo que nuestro mapeo est3 bien definido. Se sigue de inmediato que Z_{n+1} es la uni3n $Z_n \cup_{\Lambda_0^{n+1}} \Delta^{n+1}$.

Dado que h posee la PLD respecto al conjunto de cuernos especiales $\{\Lambda_0^{n+1} \hookrightarrow \Delta^{n+1}\}$ por la proposici3n 2.7.12, se concluye por saturaci3n, que tambi3n la posee respecto a la composici3n transfinita de pushouts $\Delta^1 = Z_0 \rightarrow E^1$. \square

2.8. Estructura modelo de Joyal

En esta secci3n probaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.8.1. Existe una 3nica estructura modelo en $sSet$ en la cual las cofibraciones son los monomorfismos y los objetos fibrantes son las cuasi-categor3as.

Es sencillo demostrar la unicidad: Supongamos la existencia de tal estructura. Entonces, el morfismo $E^1 \rightarrow *$ es una fibrici3n ac3clica para esta, dado que posee la PLD respecto a todos los monomorfismos. En consecuencia, el morfismo $X \times E^1 \rightarrow X \times * \simeq X$ es una fibrici3n ac3clica y

$$X \sqcup X \twoheadrightarrow X \times E^1 \twoheadrightarrow X$$

es un objeto cilindro para X . As3, tenemos $\pi(X, Y) = [X, Y]_{E^1}$ para todo $X, Y \in sSet$. Por 1.2.9, un morfismo $A \rightarrow B$ ser3 una equivalencia d3bil en esta estructura si y solo si, para todo objeto fibrante (cuasi-categor3a) Z , se tiene una biyecci3n

$$[B, Z]_{E^1} \xrightarrow{\simeq} [A, Z]_{E^1}$$

i.e., si y solo si, $A \rightarrow B$ es una equivalencia de Joyal.

Definici3n 2.8.2. Un mapeo $X \rightarrow Y$ en $sSet$ es llamado **fibrici3n interna especial** o **isofibrici3n** si posee la propiedad de levantamiento derecho respecto a todas las inclusiones de cuernos interiores, y respecto al mapeo $0 : * \hookrightarrow E^1$.

Observamos que un morfismo f tiene la PLD respecto a $0 : * \hookrightarrow E^1$ si y s3lo si la tiene respecto $1 : * \hookrightarrow E^1$; en efecto, cualquiera de estas dos inclusiones se obtiene de la otra al componer con el automorfismo $(0, 1) \mapsto (1, 0)$ en E^1 . La retracci3n $E^1 \rightarrow *$ evidencia que para toda cuasi-categor3a X , el morfismo $X \rightarrow *$ es una fibrici3n interna especial.

Lemma 2.8.3. Sean X y Y *cuasi-categorías*. Si $X \rightarrow Y$ es una *fibración interna especial* y $A \hookrightarrow B$ un *monomorfismo*, entonces $X^B \rightarrow X^A \times_{Y^A} Y^B$ es una *fibración interna especial*.

Demostración. Por la proposición 2.7.3 se tiene que $X^B \rightarrow X^A \times_{Y^A} Y^B$ es una *fibración interna*. Usando *adjunción* y la proposición 2.7.11 se prueba que tiene la *PLD* respecto a $0 : * \rightarrow E^1$. \square

Lemma 2.8.4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una *fibración interna especial* entre *cuasi-categorías* y *asúmase* que f es una *equivalencia de Joyal*. Entonces f tiene la *PLD* respecto a los morfismos $\emptyset \rightarrow \Delta^0$, y $\{0, 1\} \hookrightarrow E^1$. (En otras palabras, f es *suprayectiva* en los *0-símplices* y *levanta isomorfismos* entre *vértices* de la *preimagen*.)

Demostración. Consideremos al adjunto derecho de la inclusión $(i \dashv J) : Kan \rightarrow sSet$, el cual asocia a cada $X \in sSet$, el subcomplejo de Kan $J(X) \subset X$ de los *símplices* cuyas *1-caras* son *quasi-isomorfismos*. Consideremos un problema de *levantamiento derecho* de f , respecto a $\{0, 1\} \hookrightarrow E^1$. Dado que E^1 y $\{0, 1\}$ son *complejos de Kan*, por *adjunción*, tenemos la *factorización* (de flechas solidas):

$$\begin{array}{ccccc} \{0, 1\} & \longrightarrow & J(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E^1 & \longrightarrow & J(Y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Por lo tanto será suficiente probar que $J(f)$ posee la propiedad deseada. El mismo argumento funciona para el otro morfismo). Más aún, probaremos que $J(f)$ es una *fibración acíclica* de Kan. Para ver que es una *fibración* de Kan, consideramos la *solución* del cuadro exterior en

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & J(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & J(Y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

El morfismo *punteado* factoriza a través de $f(X) \subset X$: Para cuernos interiores esto se debe a que todas las *1-caras* opuestas al *vértice* k son *composiciones* de *quasi-isomorfismos* (ver *proposición* 2.6.9). Para cuernos exteriores, la *factorización* se sigue de la *proposición* 2.7.12. Por otro lado, de la *observación* 2.6.11, sabemos que f es una E^1 -*equivalencia*. Dado que $J(X \times E^1) \simeq J(X) \times J(E^1) \simeq J(X) \times E^1$, se concluye que $J(f)$ es una *fibración* de Kan *acíclica*. \square

Lemma 2.8.5. Sean X y Y *cuasi-categorías*.

- (a) Si $X \rightarrow Y$ es una *fibración interna especial* y una *equivalencia de Joyal*, entonces es una *fibración de Kan acíclica*.
- (b) Si $A \rightarrow B$ es un *monomorfismo* y una *equivalencia de Joyal*, entonces $X^B \rightarrow X^A$ es una *fibración de Kan acíclica*.

Demostración. a) Sea $X \rightarrow Y$ una *fibración interna especial*, y $A \rightarrow B$ un *monomorfismo* arbitrario en *sSet*. Consideremos el *diagrama pullback*:

$$\begin{array}{ccccc} X^B & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & P & \longrightarrow & Y^B \\ & \searrow & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ & & X^A & \longrightarrow & Y^A \end{array}$$

Se tienen las siguientes propiedades de los morfismos en él:

- Los morfismos $X^B \rightarrow Y^B$ y $X^A \rightarrow Y^A$ son fibraciones internas especiales y equivalencias de Joyal: Puesto que $X \rightarrow Y$ es una E^1 -equivalencia homotópica, tenemos que $X^B \rightarrow Y^B$ es una E^1 -equivalencia lo cual equivale (de nuevo por 2.6.11) a que $X^B \rightarrow Y^B$ sea una equivalencia de Joyal. Por 2.8.3, se concluye que es una fibración interna especial. Lo mismo aplica para $X^A \rightarrow Y^A$.
- $X^B \rightarrow P$ es una fibración interna especial por 2.8.3

Probaremos que $X \rightarrow Y$ posee la PLD respecto a $A \rightarrow B$. Esto es equivalente a probar que el morfismo $X^B \rightarrow P$ es suprayectivo en vértices.

Sea ω un 0-símplice de P . Escribimos ω_1, ω_2 y ω_3 para denotar a su imagen en Y^B, Y^A y X^A respectivamente. Por nuestra observación inicial, $X^B \rightarrow Y^B$ es suprayectiva en 0-símplices, y para $\omega_1 \in (Y^B)_0$ existe un vértice x en X^B con $x_1 = \omega_1, x_3 = \omega_3$ e imagen x_2 en X^A . Aplicando el lema 2.8.4 a la f.i.e. $X^A \rightarrow Y^A$, obtenemos el levantamineto:

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{(x_2, \omega_2)} & X^A \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ E^1 & \longrightarrow & Y^A \end{array}$$

Proyectando E^1 al vértice ω_1 , se induce un morfismo $\bar{\lambda}: E^1 \rightarrow P$ satisfaciendo el cuadro sólido conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \longrightarrow & X^B \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ E^1 & \longrightarrow & P \end{array}$$

con el levantamiento indicado, debido a que $X^B \rightarrow P$ es una f.i.e.. El vértice $*$ $\xrightarrow{1} E^1 \rightarrow X^B$ es la preimagen deseada del vértice ω .

b) Por el inciso anterior, basta probar que si $A \rightarrow B$ es un monomorfismo y además una equivalencia de Joyal, entonces la f.i.e. $X^B \rightarrow X^A$ es una equivalencia de Joyal. Sea $S \in sSet$, entonces tenemos la biyección:

$$[S, X^B]_{E^1} \simeq [S \times B, X]_{E^1} \simeq [S \times A, X]_{E^1} \simeq [S, X^A]_{E^1}$$

Haciendo $S = X^A$ y $S = X^b$ se concluye inmediatamente que $X^B \rightarrow X^A$ es una E^1 -equivalencia homotópica, lo cual equivale a que sea una equivalencia de Joyal (observación 2.6.11). \square

Demostración del Teorema 2.8.1. Haremos uso del teorema 1.1.11 de Jeff Smith. Por este resultado y la proposición [Bek00, pág. 1.15], podemos asegurar la existencia de una estructura modelo cofibradamente generada en $sSet$, donde las cofibraciones son los monomorfismos (ver observación 2.5.6) y las equivalencias débiles son las equivalencias de Joyal, si verificamos lo siguiente:

1. La clase de las equivalencias de Joyal es cerrada bajo retracts y satisface la propiedad 2-3.
 2. Cada fibración de Kan acíclica es una equivalencia de Joyal, i.e, todo morfismo con la PLD respecto a los monomorfismos es una equivalencia de Joyal.
 3. La clase de cofibraciones que son equivalencias de Joyal es cerrada bajo pushouts y composiciones transfinitas.
 4. La clase de equivalencias de Joyal es una clase accesible de morfismos, en el sentido [Bek00, Def. 1.14]
- 1) La clase de isomorfismos posee la propiedad 2-3 y es cerrada bajo retracciones. El resultado se sigue de que todo functor (aquí $[-, Z]$) preserva isomorfismos y retracciones.

2) Sea $f : X \rightarrow Y$ una fibrición de Kan acíclica. Dado que todo objeto en $sSet_{\mathcal{J}}$ es cofibrante, existe $\chi : Y \rightarrow X$ tal que $f\chi = 1$. Por lo tanto, la fibrición de Kan acíclica $f\chi f = f$ induce el levantamiento punteado del cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{(1, \chi f)} & X \\ \downarrow & \nearrow \text{dotted} & \downarrow f \\ X \times E^1 & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

i.e. χf es E^1 -homotópico a la identidad 1_X . Se concluye que f es una equivalencia de Joyal.

3) *Probaremos que un monomorfismo $f : A \rightarrow B$ es una equivalencia de Joyal, si y sólo si tiene la PLI respecto a las fibriciones internas especiales entre cuasi-categorías.* Puesto que los monomorfismos y los morfismos con la PLI son cerrados bajo pushouts y composiciones transfinitas, esto será suficiente. Primero supongamos que f es un monomorfismo con la indicada PLI. En particular, por los casos degenerados del lemma 2.8.3, para toda cuasi-categoría Z tiene la PLI respecto a los morfismos $Z \rightarrow *$ y $Z^{E^1} \rightarrow \partial\Delta^1$. Así, dada una E^1 -homotopía $A \times E^1 \rightarrow B$ tenemos levantamientos:

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{i} Z & & A \longrightarrow X^{E^1} \\ \downarrow f \nearrow i & i = 0, 1 ; & \downarrow \nearrow \\ B & & B \longrightarrow X^{\partial\Delta^1} \end{array}$$

lo cual indica que

$$[B, Z]_{E^1} \rightarrow [A, Z]_{E^1}$$

es suprayectividad. La inyectividad es ahora inmediata.

Recíprocamente, supongamos que f es un monomorfismo y una equivalencia de Joyal. Sea $f : X \rightarrow Y$ una f.i.e. entre cuasi-categorías. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X^B & & Y^B \\ \downarrow p & \longrightarrow & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Y^B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ X^A & \longrightarrow & Y^A \end{array}$$

Queremos probar que p es supreyectiva. Basta probar que es una fibrición de Kan acíclica, y para esto, es suficiente ver (lemma (2.8.5a)) que p sea una f.i.e. y una equivalencia de Joyal. Por el lemma (2.8.3), p es una f.i.e. entre categorías. Ahora, por el lemma (2.8.5b), tenemos que $X^B \rightarrow X^A$ y $Y^B \rightarrow Y^A$ son fibriciones acíclicas de Kan. Por lo tanto, $P \rightarrow X^A$ es una fibrición de Kan acíclica; en consecuencia $X^B \rightarrow X^A$ y $P \rightarrow X^A$ son equivalencias de Joyal, lo cual prueba que p lo es.

4) Para ver que la clase de equivalencias de Joyal es accesible, de acuerdo a la proposición [Bek00, pág. 1.18], es suficiente construir un functor accesible $Mor(sSet) \rightarrow Mor(sSet)$ y probar que la colección de equivalencias de Joyal es la imagen inversa de una colección de morfismos accesible. Consideremos la colección $S = \{\Lambda_k^n : 0 < k < n\} \cup \{0 \hookrightarrow E^1\}$; entonces por el argumento del objeto pequeño (proposición 1.1.8) existe un functor $L : sSet^{[1]} \rightarrow sSet^{[2]}$, tal que $L_2 f \in cof(S)$ y $L_0 f \in iny(S)$. Más aún, L preserva colímites κ -filtrados para algún cardinal regular lo suficientemente grande. Denotamos por F al remplazo fibrante inducido por L , es decir, $L[X \rightarrow *] = [X \rightarrow FX \rightarrow *]$. Así, definimos el functor (accesible) $R : Mor(sSet) \rightarrow Mor(sSet)$ según:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ FX & \xrightarrow{F(f)} & FY \\ & \searrow \sim & \nearrow \sim \\ & \bullet & R(f) = L_0(F(f)) \end{array}$$

donde fácilmente se aprecia que f será una equivalencia de Joyal si y solo si R_f lo es, y este último lo será (por el punto (2) y el lemma 2.8.5) si y solo es una fibración acíclica de Kan. Se concluye que la clase de equivalencias de Joyal es la imagen inversa $R(\mathcal{T})$, donde \mathcal{T} es la colección de fibraciones acíclicas de Kan. El resultado se sigue del lemma 2.8.6. \square

Lemma 2.8.6. *La clase \mathcal{T} de fibraciones acíclicas de Kan es accesible.*

Demostración. Nuevamente se hará uso de la proposición [Bek00, pág. 1.18]. Construimos el funtor $G: \text{Mor}(s\text{Set}) \rightarrow \text{Mor}(\text{Set})$ como:

$$(X \rightarrow Y) \mapsto \left[\coprod_{\geq 0} X^{\Delta^n} \rightarrow Y^{\Delta^n} \times_{Y^{\partial\Delta^n}} X^{\partial\Delta^n} \right]_0$$

Tenemos que G preserva colímites filtrados (pues $(\)^{\Delta^n}$ y $(\)^{\partial\Delta^n}$ lo hacen) y por lo tanto es un funtor accesible. \mathcal{T} es la imagen inversa de la clase de suprayecciones en Set . \square

Corolario 2.8.7. *Las fibraciones entre cuasicategorías son exactamente las isofibraciones.*

Demostración. De la demostración de 2.8.1 inciso 3) \square

2.9. Estructura modelo en $s\text{Cat}$

Tal y como se muestra en [Lur09, Apéndice C], la categoría de categorías simpliciales pequeñas $s\text{Cat}$, hereda una *estructura modelo cofibradamente generada* de la categoría modelo simplicial $s\text{Set}_{\mathcal{Q}}$. En [Ber07], J. Begner construyó individualmente esta estructura modelo. Describimos los detalles de esta construcción que serán utilizados en capítulos posteriores:

Teorema 2.9.1 (Bergner). *Las siguientes colecciones forman las clases de equivalencias débiles y fibraciones de una estructura modelo cofibrantemente generada en $s\text{Cat}$:*

Equivalencias débiles. La colección de morfismos $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que satisfacen:

1. Para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, el mapeo

$$\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

es una equivalencia en $s\text{Set}_{\mathcal{Q}}$

2. El funtor de componentes $\pi_0 F: \pi_0 \mathcal{C} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías. En virtud de la observación abajo, de la condición 1), esto es equivalente a que $\pi_0 F$ sea esencialmente suprayectivo).

Los morfismos de esta clase reciben el nombre de **equivalencias de Dwyer-Kan**.

Fibraciones. La colección de morfismos $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que satisfacen:

1. Para cualquier par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, el mapeo

$$\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

es una fibración de Kan.

2. Para todo par de objetos $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ y para toda equivalencia homotópica $e: FX \rightarrow Y$, existe un objeto $X' \in \mathcal{C}$ en la fibra de Y , y una equivalencia homotópica $d: X \rightarrow X'$ tal que $Fd = e$.

Cofibraciones. Es la colección de morfismos con la PLI respecto a las “fibraciones acíclicas”.

Demostración. Ver [Ber07] \square

Observación 2.9.2. a) Dada una equivalencia de Dwyer-Kan, la hipótesis de que $\text{Map}_C(X, Y) \rightarrow \text{Map}_D(FX, FY)$ sea una equivalencia de Kan implica, en particular, que

$$\pi_0\mathcal{C}(X, Y) = \pi_0(\text{Map}_C(X, Y)) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\text{Map}_D(FX, FY)) = \pi_0D(FX, FY)$$

es una biyección. Por lo tanto es suficiente pedir que π_0F sea esencialmente suprayectivo.

b) Notamos que si $\text{obj}(\mathcal{C}) = \text{obj}(\mathcal{D})$ y $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ son equivalencias de Dwyer-Kan, entonces $F \times G$ también lo es.

Observación 2.9.3. Conjuntos generadores. Existe un funtor

$$U : s\text{Set} \rightarrow s\text{Cat}$$

definido como

$$- \text{Obj}(U(X)) = \{x, y\}$$

$$- \text{hom}_{U(X)}(x, y) = X; \quad \text{hom}_{U(X)}(x, x) = \text{hom}_{U(X)}(y, y) = \Delta^0; \quad \text{hom}_{U(X)}(y, x) = \emptyset.$$

entonces, las cofibraciones es la colección generada por el conjunto (pequeño) $A = \{U(\partial\Delta^n) \xrightarrow{U} U(\Delta^n)\}_{n \geq 0}$, es decir, $\text{Cof}(A)$. La demostración de este hecho, así como todos los detalles de esta estructura modelo cofibrantemente generada se encuentran en [Ber07].

Parte II

Representaciones

Capítulo 3

Functor \mathfrak{C}

En esta segunda parte, continuamos con el estudio de las ∞ -categorías al comparar los dos modelos presentados en la primera parte: las cuasi-categorías y las categorías simpliciales.

Nuevamente, nuestra base de comparación será una adjunción $\mathfrak{C} \dashv \mathcal{N}$ entre las categorías $sSet$ y $sCat$, de tal forma que al considerar las estructuras modelo de Joyal y Bergner, induzca una equivalencia de Quillen. En el presente capítulo, estableceremos propiedades homotópicas del funtor \mathfrak{C} , con el fin de demostrar, en el siguiente capítulo, dicha equivalencia. A saber, existe un zigzag simple de equivalencias débiles:

$$\mathfrak{C} \xleftarrow{\sim} \mathfrak{C}^{hoc} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}^{Nec}$$

Lo cual nos indica que \mathfrak{C} posee el mismo tipo de homotopía que el funtor \mathfrak{C}^{Nec} (descrito en 2.2). Empezamos con la construcción de \mathfrak{C} .

Definición 3.0.1. *La categoría simplicial $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ se define como sigue:*

- Los objetos de $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ son los elementos de $[n]$
- Para $i, j \in [n]$

$$Map_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i, j) = NP_{i,j} \quad \text{if } i \leq j, \quad \text{vacío en otro caso.}$$

donde $NP_{i,j}$ es el nervio del conjunto parcialmente ordenado bajo \subseteq ; $P_{i,j} = \{\{i, j\} \subseteq U \subseteq [i, j] \subset [n]\}$

- Si $i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$, entonces la composición

$$Map_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i_0, i_1) \times \dots \times Map_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i_{k-1}, i_k) \rightarrow Map_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i_0, i_n)$$

está inducida por el mapeo de conjuntos parcialmente ordenados

$$P_{i_0, i_1} \times \dots \times P_{i_{n-1}, i_n} \rightarrow P_{i_0, i_n}$$

$$(I_1, \dots, I_n) \mapsto I_1 \cup \dots \cup I_n$$

Definición 3.0.2. *Sea $[n] \rightarrow [m]$ una función monótona, definimos el funtor simplicial $\mathfrak{C}[\Delta^n] \rightarrow \mathfrak{C}[\Delta^m]$ como:*

- En objetos $i \mapsto f(i)$.
- Para todo $i \leq j$, el mapeo $Map_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i, j) \rightarrow Map_{\mathfrak{C}[\Delta^m]}(f(i), f(j))$ es el nervio de

$$I \mapsto f(I)$$

No es difícil ver que la construcción de arriba está bien definida y es funtorial. En consecuencia tenemos un funtor $\mathfrak{C}[\Delta^\bullet] : \Delta \rightarrow sCat$. Definimos a \mathfrak{C} como la extensión de Kan izquierda de $\mathfrak{C}[\Delta^\bullet]$ a lo largo de Δ :

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\quad} & sCat \\ & \searrow \Delta^\bullet & \nearrow N \\ & sSet & \nearrow \mathfrak{C} := Lan_\Delta \mathfrak{C}[\Delta^\bullet] \end{array}$$

Específicamente, dado K en $sSet$, tenemos:

$$\mathfrak{C}(K) = \operatorname{colim}_{\Delta K} \mathfrak{C}(\Delta^n)$$

El adjunto derecho $N = sCat(\mathfrak{C}\Delta^n, \bullet)$ de la extensión, será llamado el nervio coherente. Además, al ser Δ un funtor fiel y pleno, obtenemos que $\mathfrak{C}|\Delta = \mathfrak{C}[\Delta^\bullet]$.

Podemos resumir todo lo anteriormente expuesto en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ sSet & \xleftarrow{\quad} & sCat \\ & \searrow \mathfrak{C} & \nearrow \pi_0 \\ & Cat & \nearrow i \end{array}$$

τ (between $sSet$ and $sCat$), \mathcal{N} (between $sSet$ and Cat), $\pi_0 \mathfrak{C}$ (between $sSet$ and Cat)

donde $\mathcal{N} \circ i = \mathcal{N}$ y $\pi_0 \mathfrak{C} \simeq \tau$

Categorificación de los collares. Sean $T \in Nec$ y $a, b \in T_0$. Sean $J_T(a, b) = J_T \cup \{a, b\}$ y $V_T(a, b) = V_T$. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado (por \subseteq):

$$C_T(a, b) = \{J_T(a, b) \subseteq U \subseteq V_T(a, b)\}$$

Para cada terna a, b, c , tenemos la composición:

$$C_T(b, c) \times C_T(a, b) \rightarrow C_T(a, c)$$

dada por la unión de conjuntos. Aplicando el nervio a cada una de las composiciones, obtenemos la categoría simplicial NC_T cuyo conjunto de objetos es T_0 , y cuyo espacio de morfismos es $N(C_T(a, b))$ para cada par $a, b \in T$. Para cada $a \in T$ la unidad es simplemente el conjunto $\{a\}$.

Escribamos $T = \Delta^{n_0} \vee \Delta^{n_1} \vee \dots \vee \Delta^{n_k}$; para cada i la inclusión $\Delta^{n_i} \hookrightarrow T$ induce una inclusión de categorías simpliciales $NC_{n_i} \rightarrow NC_T$. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & NC_{n_{i+1}} \\ \omega_i \downarrow & & \downarrow \\ NC_{n_i} & \longrightarrow & NC_T \end{array} \quad (3.1)$$

$0 \leq i \leq k$. Claramente este es un diagrama colímite al aplicar el funtor $(\)_0$. Más aún, localmente, para $l \geq 0$ y $a \preceq b$ en T_0 , el diagrama anterior se reduce al morfismo composición:

$$NC_{n_i}(a, \omega)_l \times \dots \times NC_{n_{i+r}}(\alpha_{i+r}, b)_l \rightarrow C_T(a, b)_l$$

el cual es una biyección. Se concluye que (3.1) es un diagrama colímite, i.e.

$$\mathfrak{C}(T) = \operatorname{colim}_* NC_{n_i} \simeq NC_T$$

Corolario 3.0.3. Sean $T = \Delta^{n_0} \vee \Delta^{n_1} \vee \dots \vee \Delta^{n_k}$ un collar y $a, b \in T_0$. Entonces, el morfismo:

$$\mathfrak{C}(\Delta^{n_i})(a, \omega_i) \times \dots \times \mathfrak{C}(\Delta^{n_{i+r}})(\alpha_{i+r}, b) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}(T)$$

es una biyección. Por lo tanto $\mathfrak{C}(T)(a, b) \simeq (\Delta^1)^N$ donde $N = |V_T(a, b) - J_T(a, b)|$. En particular $\mathfrak{C}(T)(a, b)$ es contráctil para $a \preceq b$ y vacío en caso contrario.

3.1. El funtor de categorización

Sean S un conjunto simplicial, y $a, b \in S_0$. Todo collar $T \in \mathcal{Nec}/_{S_{a,b}}$ induce un morfismo $\mathfrak{C}(T) \rightarrow \mathfrak{C}(S)$. Esta correspondencia natural induce:

$$E_S(a, b) := \operatorname{colim}_{\mathcal{Nec}/_{S_{a,b}}} [\mathfrak{C}(T)(\alpha, \beta)] \rightarrow \mathfrak{C}(S)(a, b) \quad (3.2)$$

Para cada terna $a, b, c \in S_0$, existe una composición

$$E_S(b, c) \times E_S(a, b) \rightarrow E_S(a, c)$$

dada de la siguiente manera: para todo par de collares $T \rightarrow S_{a,b}$ y $U \rightarrow S_{b,c}$. Tenemos el isomorfismo (corolario 3.0.3):

$$\mathfrak{C}(U)(\alpha_U, \omega_U) \times \mathfrak{C}(T)(\alpha_T, \omega_T) \rightarrow \mathfrak{C}(T \vee U)(\alpha_T, \omega_U)$$

Esta correspondencia natural induce:

$$\begin{aligned} E_S(b, c) \times E_S(a, b) &\simeq \operatorname{colim}_{\mathcal{Nec}/_{S_{b,c}}} [\mathfrak{C}(T)(\alpha_T, \omega_T)] \times \operatorname{colim}_{\mathcal{Nec}/_{S_{a,b}}} [\mathfrak{C}(U)(\alpha_U, \omega_U)] \\ &\simeq \operatorname{colim}_{\mathcal{Nec}/_{S_{b,c}}} \operatorname{colim}_{\mathcal{Nec}/_{S_{a,b}}} [\mathfrak{C}(T)(\alpha_T, \omega_T) \times \mathfrak{C}(U)(\alpha_U, \omega_U)] \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{Nec}/_{S_{a,c}}} [\mathfrak{C}(V)(\alpha_V, \omega_V)] \simeq E_S(a, c) \end{aligned}$$

Considerando para cada $a \in S_0$ el mapeo $a : * \rightarrow S$, se obtiene una categoría simplicial E_S , con $\operatorname{Obj}(E_S) = S_0$. Más aún, se obtiene una transformación natural $E \rightarrow \mathfrak{C}$.

Proposición 3.1.1. *Para cada $S \in sSet$, el mapeo $E_S(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(S)(a, b)$ es un isomorfismo de categorías simpliciales, e.i., $E \simeq \mathfrak{C}$.*

Demostración. Notemos primeramente que si S es un collar, entonces para todo a y b el mapeo identidad $S_{a,b} \rightarrow S_{a,b}$ es un objeto terminal en $\mathcal{Nec}/_{S_{a,b}}$. Se sigue que $E_S(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(S)(a, b)$ es un isomorfismo para toda a y b . Más aún, por corolario 3.0.3, E_S es una categoría simplicial isomorfa a $\mathfrak{C}(S)$.

Ahora, sea S un conjunto simplicial arbitrario y sean $a, b \in S_0$. Probaremos que $E_S(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(S)(a, b)$ es una biyección. Consideremos el diagrama conmutativo derecho:

$$(\Delta^k \rightarrow S) \quad \begin{array}{ccc} E_{\Delta^k} & \longrightarrow & E_S \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{C}(\Delta^k) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(S) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} (\varinjlim_{\Delta \downarrow S} E_{\Delta^k})(a, b) & \xrightarrow{t} & E_S(a, b) \\ & \searrow \simeq & \downarrow \\ & & \mathfrak{C}(S)(a, b) \end{array}$$

Se sigue que t es inyectivo. Será suficiente probar que es suprayectivo. Notemos que para todo collar $f : T \rightarrow S_{a,b}$, tenemos el diagrama conmutativo:

$$(\Delta^k \rightarrow T) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{C}(\Delta^k) & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{C}(T) \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ E_{\Delta^k} & \longrightarrow & E_T \\ \parallel & & \downarrow \\ E_{\Delta^k} & \longrightarrow & E_S \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} (\varinjlim_{\Delta \downarrow T} \mathfrak{C}(\Delta^k))(\alpha, \omega) & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{C}(T)(\alpha, \omega) \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ (\varinjlim_{\Delta \downarrow T} E_{\Delta^k})(\alpha, \omega) & \longrightarrow & E_T(\alpha, \omega) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ (\varinjlim_{\Delta \downarrow S} E_{\Delta^k})(a, b) & \xrightarrow{t} & E_S(a, b) \end{array}$$

donde deducimos que el mapeo horizontal de en medio es un isomorfismo. Sin embargo, dado un n -símplice en $E_S(a, b)$, este es la imagen de un n -símplice en $E_T(a, b)$ para algún collar $f : T \rightarrow S_{a,b}$. Se concluye que t es suprayectiva. \square

Recordemos que para todo collar $T \rightarrow S_{a,b}$, los n -símplices de $\mathfrak{C}(T)(a, b)$ son banderas de conjuntos $T^0 \subseteq T^1 \subseteq \dots \subseteq T^n$ con $J_T \subseteq T^0 \subseteq T^n \subseteq V_T$. Usando la proposición anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.1.2. Para cualesquiera $S \in sSet$ y $a, b \in S_0$, el conjunto simplicial $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ admite la siguiente descripción. El conjunto de n -símplices en $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ consiste de las clases de equivalencias de ternas $(T, T \rightarrow S_{a,b}, \vec{T})$, donde:

- $T \rightarrow S_{a,b}$ es un mapeo en $Nec_{/S_{a,b}}$
- \vec{T} es un n -símplice de $\mathfrak{C}(T)(\alpha_T, \omega_T)$, i.e., una bandera $T^0 \subseteq T^1 \subseteq \dots \subseteq T^n$ de conjuntos con $J_T \subseteq T^0 \subset T^n \subset V_T$

La relación de equivalencia es la generada por la condición de que $(T, T \rightarrow S, \vec{T})$ es equivalente a $(U, U \rightarrow S, \vec{U})$ si existe un mapeo de collares $f : T \rightarrow U$ sobre S tal que $f_*(\vec{T}) = \vec{U}$. El i -ésimo operador cara (resp. degeneración) omite (resp. repite) el conjunto T^i en la bandera.

3.1.1. Presentaciones de $\mathfrak{C}(S)(a, b)$

Nuestro siguiente objetivo es obtener una descripción más simplificada del espacio de mapas $E_S(a, b)$. Empecemos introduciendo algo de terminología. Un *collar marcado* es un par (T, \vec{T}) donde T es un collar y \vec{T} algún n -símplice, i.e., una bandera de subconjuntos de V_T que contienen a J_T . La longitud de la bandera es n . Un morfismo de collares marcados es un mapeo de collares $f : T \rightarrow U$ tal que $f_*(\vec{T}) = \vec{U}$. Notemos que no existen morfismos entre collares marcados de diferente longitud. Finalmente, una bandera $\vec{T} = (T^0 \subseteq \dots \subseteq T^n)$ se llamará *flanqueada* si $J_T = T^0$ y $T^n = V_T$. Notemos que todo mapeo entre collares flanqueados $(T, \vec{T}) \rightarrow (U, \vec{U})$ es siempre suprayectivo (la imagen sería un subcollar de U con los mismos vértices y las mismas juntas 2.3.4).

Flanqueanización. Dado un collar marcado $(T, T^0 \subseteq \dots \subseteq T^n)$, existe un único subcollar $T' \hookrightarrow T$ cuyo conjunto de juntas y vértices son T^0 y T^n respectivamente (todo collar está determinado por estos dos conjuntos ordenados). La unicidad nos indica que esta asociación es funtorial. Es decir, a todo morfismo $T \rightarrow U$ de collares le corresponde un morfismo de collares flanqueados $(T', \vec{T}') \rightarrow (U', \vec{U}')$. Este funtor recibe el nombre de **flanqueanización**.

Lemma 3.1.3. Bajo la relación de equivalencia del corolario anterior, cada terna $(T, T \rightarrow S, \vec{T})$ es equivalente a una en la que la bandera está flanqueada. Más aún, dos ternas flanqueadas pertenecen a la misma clase de equivalencia si y solo si pueden ser conectadas a través de un zigzag de morfismos de collares marcados, en el cual cada terna es flanqueada.

Demostración. Cada terna $(T, T \rightarrow S, \vec{T})$ es equivalente a la terna $(T', T' \rightarrow S, \vec{T}' = \vec{T})$ (obtenida de la flanqueanización de la primera) vía el morfismo $T' \rightarrow T$. Por otro lado, según la relación de equivalencia en el corolario 3.1.2, dos ternas son equivalentes precisamente si existe un zigzag de morfismos de collares marcados que las conecte. El resultado de la segunda parte se sigue al aplicar la flanqueanización. \square

Observación 3.1.4. Tenemos por lo tanto, la siguiente presentación de $\mathfrak{C}(S)(a, b)$:

- Los n -símplices son clases de equivalencias de ternas flanqueadas $(T, T \rightarrow S, \vec{T})$, bajo la relación generada por morfismos de ternas flanqueadas.
- La i -ésima cara interior omite el conjunto T^i de la respectiva bandera. Mientras que la i -ésima cara exterior aplica la flanqueanización a la operación de omitir el extremo T^i correspondiente.
- La i -ésima degeneración expande la bandera al añadir el conjunto T^i en el $i + 1$ -ésimo lugar.

Esta presentación de $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ fue mostrada originalmente a los autores Spivak y Dugger por Jacob Lurie.

A continuación analizaremos las suprayecciones de ternas flanqueadas.

Proposición 3.1.5. Sean S un conjunto simplicial y $a, b \in S_0$.

- a) Sean T y U collares, $U \xrightarrow{u} S$ y $T \xrightarrow{t} S$ dos mapeos. Supóngase que t es totalmente no degenerado (ver 2.3.5). Entonces existe a lo más un mapeo suprayectivo $f : U \rightarrow T$ tal que $u = t \circ f$.

b) Consideremos el diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & T \\ \downarrow g & \nearrow \exists! & \downarrow \\ V & \longrightarrow & S \end{array}$$

donde T, U y V son collares flanqueados, $T \rightarrow S$ es totalmente no degenerado, y f y g son suprayecciones. Entonces existe un único morfismo punteado de collares flanqueados que hace conmutar el diagrama.

Demostración. Primeramente hacemos la observación de que si $A \rightarrow B$ es una suprayección de collares y $B \neq *$, entonces la preimagen de cada cuenta de B es una cuenta de A . También se tiene que la imagen de toda cuenta de A es una junta de B , o bien, una cuenta de B .

- Este inciso se sigue del lemma 2.3.5 y del hecho que para un collar T , la identidad id_T es el único automorfismo.
- La unicidad es garantizada por el inciso a). Sea B una cuenta de V y sea $U_B = g^{-1}(B)$. Dado que f es suprayectiva, se tiene que esta preimagen es una cuenta y que $g(U_B) = B$. Toda junta en U que se colapsa a una junta en V , se debe colapsar a través de f a una junta de T , dado que T es totalmente no degenerado. Se obtiene así, un collar U' al colapsar cada cuenta de U que se mapea a una junta en V , y un diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & T \\ \downarrow g & \searrow & \nearrow f' \\ & U' & \\ \downarrow g' & \nearrow & \downarrow \\ V & \longrightarrow & S \end{array}$$

donde g' induce una biyección entre las cuentas de U' y V . Resolvemos este nuevo problema. Para cada cuenta B de V , tenemos el morfismo $f'g'^{-1} : B \rightarrow T$. Esta colección es claramente compatible con los respectivos puntos iniciales y finales de cada cuenta, por lo que inducen un morfismo $l : V = \vee B \rightarrow T$ que hace conmutar el diagrama.

□

Corolario 3.1.6. Sean S un conjunto simplicial y $a, b \in S_0$. Bajo la relación de equivalencia del corolario 3.1.2, cada terna $(T, T \rightarrow S, \overrightarrow{T})$ es equivalente a una única (salvo isomorfismo sobre S) terna $(U, U \rightarrow S, \overrightarrow{U})$ flanqueada y totalmente no degenerada. Específicamente, toda terna flanqueada y no degenerada es un objeto final de su componente.

Observación 3.1.7. De nuevo, tenemos la siguiente presentación de $\mathfrak{C}(S)(a, b)$:

- Los n -símplices son ternas $(T, T \rightarrow S, \overrightarrow{T})$ flanqueadas y totalmente no degeneradas.
- La i -ésima cara interior omite el conjunto T^i de la respectiva bandera. Mientras que la i -ésima cara exterior aplica la flanqueanización a la operación de omitir el extremo T^i correspondiente.
- La i -ésima degeneración expande la bandera al añadir el conjunto T^i en el $i + 1$ -ésimo lugar.

Finalizamos con el resultado que resume los esfuerzos hechos en la presente sección. Sea S un conjunto simplicial y $a, b \in S_0$. Para todo n denotamos por F_n a la categoría cuyos objetos son ternas marcadas $(T, T \rightarrow S, \overrightarrow{T})$, y cuyos morfismos son mapeos de collares marcados, i.e., mapeos $T \rightarrow T'$ sobre S tales que $f(T^i) = (T')^i$.

Proposición 3.1.8. Para cada $n \geq 0$, el nervio de F_n es homotópicamente discreto en $sSet_{\mathcal{K}}$

Demostración. Por el corolario 3.1.6 cada componente de F_n posee un objeto inicial, lo que significa que cada componente del nervio NF_n es contráctil. Esto prueba nuestra proposición. \square

Observación 3.1.9. La proposición 3.1.8 dice que el morfismo canónico $N(F_n) \rightarrow \pi_0(NF_n)$ es una equivalencia de Kan.

El funtor \mathfrak{C} aplicado a conjuntos simpliciales ordenados

Lemma 3.1.10. Sea W un conjunto simplicial ordenado y sean $a, b \in W_0$. Entonces cada n -símplice en $\mathfrak{C}(W)(a, b)$ es representado de manera única por una terna $(T, T \rightarrow W, \vec{T})$ en la cual T es un collar, \vec{T} es una bandera flanqueada de longitud n y $T \rightarrow W$ es inyectivo.

Demostración. Por el corolario 3.1.6 cada n -simplejo en $\mathfrak{C}(W)(a, b)$ es representado por una única terna $(T, T \rightarrow W, \vec{T})$ flanqueada y totalmente degenerada. Basta probar que si O es ordenado, entonces cualquier mapeo $T \rightarrow W$ no degenerado es inyectivo, lo cual se sigue del lemma 2.3.4. \square

Corolario 3.1.11. Sea W un conjunto simplicial ordenado, y sean $a, b \in W_0$. Tenemos la siguiente presentación de $\mathfrak{C}(W)(a, b)$

- Los n -símplices son ternas $(T, T \xrightarrow{f} S, \vec{T})$ donde f inyectivo y \vec{T} es flanqueado.
- La i -ésima cara interior omite el conjunto T^i de la respectiva bandera. Mientras que la i -ésima cara exterior aplica la flanqueanización a la operación de omitir el extremo T^i correspondiente.
- La i -ésima degeneración expande la bandera al añadir el conjunto T^i en el $i + 1$ -ésimo lugar.

Ejemplo 3.1.12. Consideremos el conjunto simplicial $S = \Delta^2 \amalg_{\Delta^1} \Delta^2$ representado por:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

entonces, $\mathfrak{C}(S)(0, 3)$ se ve justamente como:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

3.2. Modelos homotópicos de \mathfrak{C}

En esta sección analizamos el tipo de homotopía de \mathfrak{C} , tal como se expusó en la introducción del presente capítulo. Empezamos con la descripción del funtor \mathfrak{C}^{hoc} . Para un conjunto simplicial S y vértices $a, b \in S_0$, definimos:

$$\mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, b) = \operatorname{hocolim}_{T \in \operatorname{Nec}/S_{a,b}} \mathfrak{C}(T)(\alpha, \omega) \quad (3.3)$$

donde el modelo elegido para el colímite homotópico es el que se presentó en la observación 1.5.13 del teorema 1.5.12; la diagonal de la construcción simplicial barra. Específicamente, la diagonal del conjunto bisimplicial cuyos (k, l) -símplices son parejasas

$$(F : [k] \rightarrow \operatorname{Nec}/S_{a,b} ; x \in [\mathfrak{C}(F_0)(\alpha, \omega)]_l)$$

La regla de composición se define análogamente a E_S , de manera que el siguiente diagrama es natural en a, b, c y S :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}(S)^{hoc}(b, c) \times \mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, b) & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{C}(S)(b, c) \times \mathfrak{C}(S)(a, b) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(S)(a, c) \end{array}$$

y donde $\mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(S)(a, b)$ es la evaluación de la transformación natural del funtor derivado izquierdo hocolim \rightarrow colim. Tenemos por lo tanto un funtor $\mathfrak{C}^{hoc} : sSet \rightarrow sCat$ y una transformación natural $\mathfrak{C}^{hoc} \rightarrow \mathfrak{C}$. Sea $*$: $Nec_{/S_{a,b}} \rightarrow sSet$ el funtor constante en el objeto terminal de $sSet$. Por la observación 1.5.13, se tiene el isomorfismo hocolim $* \simeq N(Nec_{/S_{a,b}})$. Para todo $S \rightarrow *$ en $sSet$ afirmamos que

$$\mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, b) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}^{hoc}(*)(0, 0)$$

es una equivalencia de Kan. En efecto, para todo collar $T \rightarrow S_{a,b}$, tenemos una equivalencia homotópica $\mathfrak{C}(T(\alpha, \omega)) \simeq *$. Sin embargo, el morfismo de arriba es la imagen de la transformación natural dada por estas equivalencias débiles, bajo hocolim, ¡siendo este último un funtor homotópico!

Dado que ambas categorías poseen el mismo conjunto de objetos, hemos obtenido una equivalencia de Dwyer-Kan “puntual” $\mathfrak{C}^{hoc} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}^{Nec}$.

Teorema 3.2.1. *Para todo conjunto simplicial S , los mapeos $\mathfrak{C}(S) \leftarrow \mathfrak{C}^{hoc}(S) \rightarrow \mathfrak{C}^{Nec}(S)$ definidos son equivalencias débiles de categorías simpliciales (equivalencias débiles en $sCat_{\mathcal{B}}$).*

Demostración. Ya hemos establecido que cada componente de $\mathfrak{C}^{hoc} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}^{Nec}$ es una equivalencia de Dwyer-Kan. Sean S un conjunto simplicial y $a, b \in S_0$. Según nuestro modelo, el colímite homotópico $\mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, b)$ es la diagonal del complejo bisimplicial cuya l -ésima fila es el nervio $N(F_l)$. Por otro lado, el corolario 3.1.2 nos dice que $[\mathfrak{C}(S)(a, b)]_l = \pi_0(N(F_l))$. Sin embargo, de la proposición 3.1.8 tenemos que $NF_l \rightarrow \pi_0(N(F_l))$ es una equivalencia de Kan. Se concluye que $\mathfrak{C}^{hoc}(S)(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(S)(a, b)$ es una equivalencia de Kan (ver 1.5.13 c). \square

3.2.1. Modelos de categorización

Sea $\mathcal{P} \hookrightarrow sSet_{\partial\Delta^1/}$ una subcategoría que contenga al objeto terminal. Para todo $S \in sSet$ y para todo par $a, b \in S_0$ definimos

$$\mathfrak{C}^{\mathcal{P}}(S)(a, b) = N(\mathcal{P}_{/S_{a,b}})$$

Si \mathcal{P} es cerrado bajo la operación cuña \vee (i.e. para todo $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, tenemos que $P_1 \vee P_2 \in \mathcal{P}$), entonces el nervio usual induce de (por cambio de enriquecimiento) una categoría simplicial $\mathfrak{C}^{\mathcal{P}}(S)$. Más aún, obtenemos un funtor:

$$sSet \xrightarrow{\mathfrak{C}^{\mathcal{P}}} sCat$$

Definición 3.2.2. *Llamamos a una subcategoría $\mathcal{G} \hookrightarrow sSet$ **categoría de rigidificación** si satisface las siguientes propiedades:*

- (1) \mathcal{G} contiene a la categoría Nec
- (2) Para cada objeto $X \in \mathcal{G}$ y cualquier coyar T , todos los mapeos $T \rightarrow X$ están contenidos en \mathcal{G} , y
- (3) Para todo $X \in \mathcal{G}$, el conjunto simplicial $\mathfrak{C}(X)(\alpha, \omega)$ es contráctil.

La categoría \mathcal{G} se dice es **cerrada bajo cuñas** si también es cierto que

- (4) Para todo par $X, Y \in \mathcal{G}$, se tiene $X \vee Y \in \mathcal{G}$.

Proposición 3.2.3. *Sea \mathcal{G} una categoría de rigidificación. Entonces para cualquier conjunto simplicial S y cualquier par de vértices $a, b \in S_0$, el mapeo natural*

$$\mathfrak{C}^{nec}(S)(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}^{\mathcal{G}}(S)(a, b)$$

inducido por la inclusión $Nec \rightarrow \mathcal{G}$, es una equivalencia de Kan. Si \mathcal{G} es cerrado bajo cuñas, entonces $\mathfrak{C}^{nec}(S) \rightarrow \mathfrak{C}^{\mathcal{G}}(S)$ es una equivalencia de Dwyer-Kan.

Demostración. Sea $j : Nec_{/S_{a,b}} \rightarrow \mathcal{G}_{/S_{a,b}}$ el funtor inducido por la inclusión $Nec \rightarrow \mathcal{G}$. Queremos probar que Nj es una equivalencia de Kan. Para esto, por el teorema A de Quillen¹ es suficiente verificar que

¹**Teorema A de Quillen.** Sea $F : C \rightarrow D$ un funtor. Supongamos que para todo objeto $d \in D$ la realización geométrica $|N(F/d)|$ es contráctil, entonces $|NC| \rightarrow |ND|$ es una equivalencia débil. Demostración ver [Hir03, T.19.6.14]

todas las categorías rebanada de j son contráctiles. Así, sea $(X, X \rightarrow S)$ en $\mathcal{G}_{S_{a,b}}$. La rebanada sobre este objeto j/X es precisamente la categoría $\mathcal{Nec}/X_{\alpha,\omega}$, el nervio de la cual es $\mathfrak{C}^{nec}(X)(\alpha,\omega)$. Por el teorema 3.2.1 y por nuestras hipótesis sobre \mathcal{G} , es contráctil. Esto demuestra la primera parte.

Para la segunda afirmación, solo falta probar que $\pi_0 \mathfrak{C}^{nec}(S) \rightarrow \pi_0 \mathfrak{C}^{\mathcal{G}}(S)$ es una equivalencia. Dado que este funtor es la identidad en objetos, solo necesitamos ver que $\pi_0 \mathfrak{C}^{nec}(S)(a,b) \rightarrow \pi_0 \mathfrak{C}^{\mathcal{G}}(S)(a,b)$ es una biyección. La suprayectividad se sigue por la hipótesis de que $\mathfrak{C}(X)(\alpha,\omega)$ es contráctil para todo $X \rightarrow S_{a,b}$ y por lo tanto no vacío. Sean $T \rightarrow S_{a,b}$ y $T' \rightarrow S_{a,b}$ tales que se conectan a través de un zigzag en $\mathcal{G}/S_{a,b}$. Si $Y \in \mathcal{G}$ es un nodo del zigzag, dado que $\mathfrak{C}(Y)(\alpha,\omega) \neq \emptyset$, existe un collar $T_Y \rightarrow Y$. Existen dos posibles casos

$$\begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & Y \\ & \nearrow \text{punteado} & \uparrow \\ & & T_Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ & \searrow \text{punteado} & \uparrow \\ & & T_Y \end{array}$$

donde el morfismo punteado del primer diagrama es la composición y el del segundo diagrama es alguno que conecta a T con T_Y , esto último debido a que $\mathfrak{C}(Y)(\alpha,\omega)$ es contráctil. Por este mismo argumento, para dos nodos adyacentes Y y Y' , los respectivos collares T_Y y $T_{Y'}$ se conectan, por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y' \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_Y & \cdots \cdots & T_{Y'} \end{array}$$

Por lo tanto T y T' están conectados por un zigzag sobre S , en \mathcal{Nec} . Concluimos que $\mathfrak{C}^{\mathcal{Nec}}(S) \rightarrow \mathfrak{C}^{\mathcal{G}}(S)$ es una equivalencia de Dwyer-Kan. \square

3.3. Propiedades de la categorificación

En esta sección establecemos dos propiedades del funtor de categorización \mathfrak{C} . Primero, demostraremos que existe una equivalencia débil $\mathfrak{C}(X \times Y) \simeq \mathfrak{C}(X) \times \mathfrak{C}(Y)$. Posteriormente probaremos que si $S \rightarrow S'$ es una equivalencia de Joyal, entonces $\mathfrak{C}(S) \rightarrow \mathfrak{C}(S')$ será una equivalencia de Dwyer-Kan. Por el lemma 2.3.4 el producto finito de collares es un conjunto simplicial ordenado. Definimos a \mathcal{G} como la subcategoría plena de $sSet/\partial\Delta^1$ cuyos objetos son productos finitos de collares con un mapeo $f : \partial\Delta^1 \rightarrow T_1 \times \cdots \times T_n$ tal que $f(0) \preceq f(1)$.

Proposición 3.3.1. \mathcal{G} es una categoría de rigidificación.

Demostración. Necesitamos verificar que $\mathfrak{C}(T_1 \times \cdots \times T_n)(\alpha,\omega) \simeq *$. Por motivos de exposición la prueba de esto hecho se posterga (ver 3.4.4). \square

Proposición 3.3.2. Para todo par de conjuntos simpliciales X y Y , ambas categorías simpliciales $\mathfrak{C}(X \times Y)$ y $\mathfrak{C}(X) \times \mathfrak{C}(Y)$ tienen como conjunto de objetos $X_0 \times Y_0$. Para cualesquiera $a_0, b_0 \in X_0$, $a_1, b_1 \in Y_0$, el mapeo natural

$$\mathfrak{C}(X \times Y)(a_0 a_1, b_0 b_1) \rightarrow \mathfrak{C}(X)(a_0, b_0) \times \mathfrak{C}(Y)(a_1, b_1)$$

inducido por los mapeos $\mathfrak{C}(X \times Y) \rightarrow \mathfrak{C}(X)$ y $\mathfrak{C}(X \times Y) \rightarrow \mathfrak{C}(Y)$ es una equivalencia de Kan. Más aún, el mapeo de categorías simpliciales

$$\mathfrak{C}(X \times Y) \rightarrow \mathfrak{C}(X) \times \mathfrak{C}(Y)$$

es una equivalencia Dwyer-Kan.

Demostración. Sea \mathcal{G} la categoría de rigidificación definida al iniciar la sección. Por el teorema 3.2.1, la proposición 3.2.3 y la observación 2.9.2b, será suficiente probar la afirmación para el funtor $\mathfrak{C}^{\mathcal{G}}$. Consideremos el par de funtores:

$$\mathcal{G}/X \times Y_{a,b} \xrightleftharpoons[\theta]{\phi} (\mathcal{G}/X_{a_0, b_0} \times \mathcal{G}/Y_{a_1, b_1})$$

definidos por las correspondencias:

$$\phi : (G, f : G \rightarrow X \times Y) \mapsto [(G, \pi_X f), (G, \pi_Y f)]$$

$$\theta : [(G, f : G \rightarrow X), (H, h : H \rightarrow Y)] \mapsto (G \times H, f \times h)$$

Notamos que se está utilizando el hecho de que \mathcal{G} es cerrada bajo productos. Tenemos una transformación natural $id \rightarrow \theta\phi$ definida para cada (G, f) como la diagonal

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & G \times G \\ & \searrow f & \swarrow \pi_X f \times \pi_Y f \\ & & X \times Y \end{array}$$

Del mismo modo obtenemos una transformación natural $\phi\theta \rightarrow id$ definida en cada $[(G, f), (H, h)]$ por las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \xrightarrow{\pi_G} & G \\ & \searrow \pi_X(f \times h) & \swarrow f \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G \times H & \xrightarrow{\pi_H} & H \\ & \searrow \pi_Y(f \times h) & \swarrow h \\ & & Y \end{array}$$

Como consecuencia, los funtores θ y ϕ inducen en los nervios, equivalencias homotópicas inversas una de la otra (ver 2.5.7). \square

Denotamos por $E : Set \rightarrow sSet$ al 0-coesqueleto (ver la notación empleada en 2.1.4).

Lemma 3.3.3. *Para cualquier $n \geq 0$, la categoría simplicial $\mathfrak{C}(E^n)$ es (débilmente) contráctil en $sCat_{\mathcal{B}}$. Esto es, para todo i, j el espacio de mapeos $\mathfrak{C}(E^n)(i, j)$ es (débilmente) contráctil.*

Demostración. Por el teorema 3.2.1 es suficiente probar que el espacio de mapeos $\mathfrak{C}^{Nec}(E^n) = N([\mathcal{Nec}/E^n]_{i,j})$ es contráctil para todo par $(i, j) \in [n]$. Observamos que si T es un collar, entonces cualquier mapeo $x : T \rightarrow E^n$ se extiende únicamente a un mapeo $\bar{x} : \Delta[T] \rightarrow E^n$. Esto se debe a la correspondencia $sSet(sk_0 T, [n]) \simeq sSet(T, E^n)$ en donde $sk_0 T = sk_0 \Delta[T]$. Consideramos los siguientes funtores:

$$f, g : (\mathcal{Nec}/E^n)_{i,j} \rightarrow (\mathcal{Nec}/E^n)_{i,j}$$

dados por

$$f : (T, T \xrightarrow{x} E^n) \mapsto (\Delta[T], \Delta[T] \xrightarrow{\bar{x}} E^n)$$

$$g : (T, T \xrightarrow{x} E^n) \mapsto (\Delta^1, \Delta^1 \xrightarrow{i,j} E^n)$$

una homotopía entre la identidad y el funtor constante Ng , y por lo tanto $\mathfrak{C}^{Nec}(E^n)(i, j)$ es contráctil. Observemos que g es el funtor constante. Los morfismos $T \rightarrow \Delta[T]$ y $(\alpha, \omega) : \Delta^1 \rightarrow T$ para cada collar T , inducen transformaciones naturales $id \rightarrow f \leftarrow g$. Estas inducen en los nervios (ver 2.5.7). \square

Lemma 3.3.4. *El funtor $\mathfrak{C} : sSet \rightarrow sCat$ manda monomorfismos a cofibraciones. Es decir, el funtor \mathfrak{C} preserva cofibraciones.*

Demostración. Será suficiente probar que $f : \mathfrak{C}(\partial\Delta^n) \rightarrow \mathfrak{C}(\Delta^n)$ es una cofibración en $sCat_{\mathcal{B}}$, para todo $n \geq 0$. Tenemos dos casos:

$0 < i < j < n$. Entonces, dado que Δ^n es un conjunto simplicial ordenado, se tiene un isomorfismo $\mathcal{Nec}/\Delta_{i,j}^n \simeq \mathcal{Nec}/\partial\Delta_{i,j}^n$, lo cual (por la proposición 3.1.1) induce un isomorfismo

$$f_{i,j} : \mathfrak{C}(\partial\Delta^n)(i, j) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}(\Delta^n)(i, j)$$

$i = 0, j = n$. En virtud de la representación del funtor \mathfrak{C} vista en 3.1.4, $\mathfrak{C}(\partial\Delta^n)(0, 1) \hookrightarrow \mathfrak{C}(\Delta^n)(0, 1)$ es el subcomplejo generado por los $n - 1$ simplejos. Por lo cual, el mapeo $f_{0,1}$ es (ver 3.0.3) la inclusión

$$f_{0,1} : \partial((\Delta^1)^{n-1}) \hookrightarrow (\Delta^1)^{n-1}$$

Sea $U : sSet \rightarrow sCat$ el funtor considerado en la observación 2.9.3. Por definición, U manda generadores de cofibraciones en $sSet_Q$ a generadores de cofibraciones en $sCat_B$, y por lo tanto, las preserva. Afirmamos que

$$\begin{array}{ccc} U(\partial((\Delta^1)^{n-1})) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(\partial\Delta^n) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ U((\Delta^1)^{n-1}) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(\Delta^n) \end{array}$$

es un pushout. Si $\bullet \xrightarrow{l} \mathcal{A} \xleftarrow{k} \bullet$ es otro cocono, entonces el morfismo $\phi : \mathfrak{C}_{\Delta^n} \rightarrow \mathcal{A}$ definido:

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} k_{i,j} f_{i,j}^{-1} & : 0 < i < j < n \\ l_{0,n} & : i = 0, j = n \end{cases}$$

es el único que hace conmutar los evidentes diagramas. Se concluye que f es una cofibración. \square

Lemma 3.3.5. *ND es una quasi-categoría para todo objeto fibrante en $D \in sCat$*

Demostración. Para todo $n \geq 1$ y para todo $0 < k < n$, los siguientes diagramas son equivalentes:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & ND \\ \downarrow l & \nearrow & \uparrow \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{C}(\Lambda_k^n) & \longrightarrow & D \\ \downarrow \mathfrak{C}(l) & \nearrow & \uparrow \\ \mathfrak{C}(\Delta^n) & & \end{array}$$

donde $\mathfrak{C}(l)$ es una cofibración por el lemma 3.3.4. Por lo tanto es suficiente probar que $\mathfrak{C}(l)$ es una equivalencia débil para toda inclusión l de cuerno interior. Por el mismo argumento usado en la prueba del lema anterior, se tiene $\mathfrak{C}(\Lambda_k^n)(i, j) \rightarrow \mathfrak{C}(\Delta^n)(i, j)$ es un isomorfismo para $(i, j) \neq (0, n)$. Solo falta probar que $\mathfrak{C}(\Lambda_k^n)(0, n) \rightarrow \mathfrak{C}(\Delta^n)(0, n)$ es una equivalencia de Kan.

Es relativamente fácil ver que $\mathfrak{C}(\Lambda_k^n)(0, n)$ es la frontera del cubo $\mathfrak{C}(\Delta^n) = (\Delta^1)^n$ menos una de las caras que contienen al vértice $\{0, n\}$; en efecto, esto se deduce de aplicar el funtor cocontinuo \mathfrak{C} al coequalizador 2.1, y de la descripción de la categorización de n -simplejos estándares. Se concluye que el conjunto simplicial en cuestión es contráctil, y por lo tanto que $\mathfrak{C}(l)$ es una equivalencia débil. \square

Proposición 3.3.6. *El funtor $\mathfrak{C} : sSet_{\mathcal{J}} \rightarrow sCat_B$ preserva equivalencias débiles.*

Demostración. Para cualquier conjunto simplicial X , el mapeo $\mathfrak{C}(X \times E^n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}(X)$ inducido por la proyección es una equivalencia débil en $sCat$ para toda $n \geq 0$. Esto se sigue al combinar la proposición 3.3.2 y el lemma 3.3.3:

$$\mathfrak{C}(X \times E^n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}(X) \times \mathfrak{C}(E^1) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}(X)$$

Dado que $X \amalg X \hookrightarrow X \times E^1$ es una cofibración en $sSet$, por el lemma 3.3.4, $\mathfrak{C}(X) \amalg \mathfrak{C}(X) = \mathfrak{C}(X \amalg X) \hookrightarrow \mathfrak{C}(X \times E^n)$ es una cofibración. Por lo cual $\mathfrak{C}(X \times E^n)$ es un objeto cilindro de $\mathfrak{C}(X)$ en $sCat$.

Ahora, sea $D \in sCat$ un objeto fibrante. El isomorfismo natural $sCat(\mathfrak{C}(X), D) \simeq sSet(X, ND)$ induce una biyección natural

$$[\mathfrak{C}(X), D] \simeq [X, ND]_{E^1}$$

tal como lo evidencia el que la adjunción preserve homotopías:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}(X) \amalg \mathfrak{C}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(X \times E^1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & D & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} X \amalg X & \longrightarrow & X \times E^1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & ND & \end{array}$$

Por el lemma 3.3.5, ND es un objeto fibrante en $sSet_{\mathcal{J}}$. Así, dada una equivalencia de Joyal $S \rightarrow S'$, tenemos (por naturalidad) la biyección

$$[\mathfrak{C}(S), D] \simeq [\mathfrak{C}(S'), D]$$

para todo objeto fibrante D en $sCat$. Se concluye que $\mathfrak{C}(S) \rightarrow \mathfrak{C}(S')$ es una equivalencia en $sCat_B$. \square

Observación 3.3.7. *Probaremos en el próximo capítulo que el hecho de que $\mathfrak{C}(S) \rightarrow \mathfrak{C}(S')$ sea una equivalencia débil es suficiente para que $S \rightarrow S'$ lo sea.*

3.4. Conjuntos simpliciales fuertemente ordenados

El propósito de esta sección es probar que si T_1, \dots, T_n son collares, el espacio de mapeos $\mathfrak{C}(T_1 \times \dots \times T_n)(a, b) \simeq *$ es contráctil siempre que $a \preceq b$. Consideramos los conjuntos simpliciales ordenados que poseen esta característica:

Definición 3.4.1. *Un conjunto simplicial ordenado (X, \preceq) es llamado **fuertemente ordenado** si, para todo $a \preceq b$, el espacio de mapeos $\mathfrak{C}(X)(a, b)$ es contráctil.*

Observación 3.4.2. *Todo collar es fuertemente ordenado. Si X es un conjunto simplicial ordenado notemos que $\mathfrak{C}(X)(a, b) \neq \emptyset$ si y solo si $a \preceq b$, por lo tanto la estructura simplicial de X está determinada, salvo homotopía, por el orden de sus vértices.*

Lemma 3.4.3. *Consideremos el diagrama pushout:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{g} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \cup_A Y \end{array}$$

donde A , X y Y son conjuntos simpliciales fuertemente ordenados, y tanto f como g son inclusiones simples. Escribiendo $B = X \cup_A Y$, supongamos además que se satisfacen las siguientes condiciones:

- El conjunto de vértice de A es finito.
- Para todo vértice $x \in X$, el conjunto $A_{x \preceq} = \{a \in A : x \preceq a\}$ tiene un elemento inicial, esto es, posee un elemento mínimo.
- Para cualquier $y \in Y$ y $a \in A$, si $y \preceq a$ entonces $y \in A$.

Entonces B es fuertemente ordenado.

Demostración. Ver [DS09, Apéndice A]. □

Proposición 3.4.4. *Sean T_1, \dots, T_n collares. Entonces el producto $T_1 \times \dots \times T_n$ es un conjunto simplicial fuertemente ordenado.*

Demostración. Empezamos con el caso en que cada collar es un simplejo estándar, esto es, probaremos que $P = \Delta^{n_1} \times \dots \times \Delta^{n_k}$ es un conjunto simplicial ordenado. Escojamos $a \preceq b$ en P . Dado un collar T y un mapeo $T \rightarrow \Delta_{0,1}^j$ tenemos una factorización functorial a través del simplejo $\Delta[T] \rightarrow \Delta^j$, definido por la imagen de los vértices de T . Por lo tanto, para todo morfismo $T \rightarrow P_{a,b}$, existe una factorización functorial a través de $\Delta[T] \rightarrow P_{a,b}$. Por otro lado, si x es el 1-simplejo $(0, 1) : \Delta^1 \rightarrow P_{a,b}$, tenemos funtores:

$$\begin{aligned} f, g &: (\mathcal{N}ec_{/P}) \rightarrow (\mathcal{N}ec_{/P}) \\ f &: (T \rightarrow P) \mapsto (\Delta[T] \rightarrow P) \\ g &: (T \rightarrow P) \mapsto x \end{aligned}$$

y transformaciones naturales $id \rightarrow f$ y $g \rightarrow f$:

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \Delta[T] \\ & \searrow & \swarrow \\ & & P \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \Delta^1 & \xrightarrow{(\alpha, \omega)} & T \\ & \searrow x & \swarrow \\ & & P \end{array}$$

Por consiguiente se tiene una homotopía nula del nervio $N(\mathcal{N}ec_{/P_{a,b}}) = \mathfrak{C}^{\mathcal{N}ec}(P)(a, b)$ y por el teorema 3.2.1 $\mathfrak{C}(P)(a, b) \simeq *$ es contráctil. Para el caso general procederemos por inducción sobre el número de collares en un producto que no son cuentas. El caso $k = 1$ se probó en la primera parte de la

demostración. Supongamos que el resultado es cierto para todos los productos de collares con a lo más $k - 1$ collares que no son cuentas. Consideramos el producto

$$Y = T_1 \times \cdots \times T_k \times D$$

donde cada T_i es un collar, y D es un producto de cuentas. Escribimos $T_k = B_1 \vee \cdots \vee B_r$ como descomposición de cuentas, y hacemos

$$P_j = (T_1 \times \cdots \times T_{k-1}) \times (B_1 \vee \cdots \vee B_j) \times D$$

Por inducción P_1 es fuertemente ordenado, y por una segunda inducción probaremos que lo mismo es cierto para toda P_j . Así, supongamos que P_j es fuertemente ordenado para $1 \leq j < r$. Denotando $A = P_j = (T_1 \times \cdots \times T_{k-1}) \times \Delta^0 \times D$ y $Q = P_j = (T_1 \times \cdots \times T_{k-1}) \times B_j \times D$, obtenemos el cuadrado pushout:

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & Q \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ P_j & \longrightarrow & P_{j+1} \end{array}$$

donde A , P_j y Q son conjuntos simpliciales fuertemente ordenados. Claramente las inclusiones $A \hookrightarrow P_j$ y $A \hookrightarrow Q$ son inclusiones simples. Es ahora evidente que las condiciones (i)-(iii) del lemma 3.4.3 se satisfacen y por lo tanto se termina la prueba. \square

Capítulo 4

Equivalencia de los modelos

4.1. Modelos de Dwyer-Kan para complejos de funciones de cuasi-categorías

El marco cosimplicial canónico en $sSet_J$.

El objeto cosimplicial $\Delta \xrightarrow{E} sSet$ tiene la factorización $\Delta \xrightarrow{\mathcal{G}} Cat \xrightarrow{\mathcal{N}} sSet$, donde \mathcal{G} es el funtor que a cada $[n]$ le asocia el grupoide $\mathcal{G}_n \in Cat$ cuyo conjunto de objetos es $[n]$ y para cada $i, j \in [n]$ un único morfismo $i \rightarrow j$.

La inclusión de categorías $[n] \hookrightarrow \mathcal{G}_n$ induce una equivalencia de Kan en los nervios $\Delta^n \rightarrow E^n$. Más aún el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xleftarrow{\sim_K} & E^n \\ & \searrow \sim_K & \swarrow \sim_J \\ & & * \end{array}$$

nos indica que E^n es Kan-contráctil; lo cual es equivalente, por ser un complejo de Kan, a que sea Joyal-contráctil. Dado que E^\bullet es Reedy cofibrante en $c(sSet_J)$ (para toda $n > 0$, el correspondiente latching map es $E^{n-1} \hookrightarrow E^n$, el cual es una cofibración), para todo conjunto simplicial X tenemos por lo tanto la resolución cosimplicial de Reedy canónica $E^\bullet \times X \rightarrow X$ en $sSet_J$.

Para revisar las propiedades fundamentales del producto join \star , remitimos al lector a la sección 2.4. Sea M un conjunto simplicial, y consideremos la inclusión natural $M \hookrightarrow M \star \Delta^0$ dada puntualmente como $M_n \simeq M_n \times \Delta^0 \hookrightarrow (M \star \Delta^0)_n = \coprod_{-1 \leq i \leq n} M_i \times \Delta_{n-i-1}^0$.

Definimos el conjunto simplicial $C_R(M)$ como el cociente $(M \star \Delta^0)/M$. Similarmente, definimos $C_L(M)$ como el cociente $(\Delta^0 \star M)/M$ de la respectiva inclusión $M \hookrightarrow \Delta^0 \star M$. Consideramos además a $C_{cyl}(M)$ definido como el pushout del diagrama:

$$\partial\Delta^1 \leftarrow M \times \partial\Delta^1 \hookrightarrow M \times \Delta^1$$

Obtenemos los espacios cosimpliciales $C_R^\bullet = C_R(\Delta)$, $C_L^\bullet = C_L(\Delta)$, $C_{cyl}^\bullet = C_{cyl}(\Delta)$ y $C_{cyl}^\bullet = C_{cyl}(E)$. Para cada n , las proyecciones $(\Delta^n \star \Delta^0 \simeq \Delta^{n+1}) \rightarrow \Delta^1$ hacen de C_R^\bullet un espacio simplicial sobre Δ^1 . Similarmente para los otros tres. La retracción $id : \Delta^n \star \Delta^0 \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \Delta^n \star \Delta^0$ induce una entre espacios cosimpliciales $id_R : C_R^\bullet \rightarrow C_{cyl}^\bullet \rightarrow C_R^\bullet$. Lo mismo para C_L^\bullet . Tomando además el mapeo inducido por la transformación natural $\Delta \rightarrow E$, obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & C_R^\bullet & & \\ & \swarrow \text{dotted} & \leftarrow & \searrow \text{dotted} & \\ \partial\Delta^1 & & & & \\ & \swarrow \text{dotted} & \leftarrow & \searrow \text{dotted} & \\ & & C_L^\bullet & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dotted}} \\ \xrightarrow{\text{dotted}} \\ \xrightarrow{\text{dotted}} \end{array} \begin{array}{c} C_{cyl}^\bullet \\ \longrightarrow \\ C_E^\bullet \end{array} \xrightarrow{\text{dotted}} \Delta^1 \quad (4.1)$$

Proposición 4.1.1. *Los espacios cosimpliciales C_R^\bullet , C_L^\bullet , C_{cyl}^\bullet y C_E^\bullet son resoluciones cosimpliciales de Δ^1 en $c(sSet_{\partial\Delta^1})$. Es decir:*

- a) *Cada uno de los espacios cosimpliciales C_R^\bullet , C_L^\bullet , C_{cyl}^\bullet y C_E^\bullet son objetos cofibrantes en la categoría de Reedy $c(sSet_{\partial\Delta^1})$.*
- b) *Para todo n , los mapeos $C_R^n \rightarrow \Delta^1$, $C_L^n \rightarrow \Delta^1$, $C_{cyl}^n \rightarrow \Delta^1$ y $C_E^n \rightarrow \Delta^1$, son equivalencias de Joyal.*

Demostración. La parte a) es trivial, y los primeros tres casos es el lemma 2.7.9. Para ver que $C_E^n \rightarrow \Delta^1$ es una equivalencia de Joyal basta considerar el diagrama pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 E^n \times \partial\Delta^1 & \xrightarrow{\quad} & E^n \times \Delta^1 \\
 \downarrow \sim & \lrcorner & \downarrow \sim \\
 \partial\Delta^1 & \xrightarrow{\quad} & C_E^n \\
 & \searrow & \downarrow \sim \\
 & & \Delta^1
 \end{array}$$

en donde se ha utilizado el hecho de que $sSet_J$ es una categoría modelo propia izquierda. □

Definición 4.1.2. *Sean $S \in sSet_J$ y $a, b \in S_0$. Definimos el conjunto simplicial $Hom_S^R(a, b)$ como el pullback:*

$$\begin{array}{ccc}
 sSet_{\partial\Delta^1}/(C_R^\bullet, S) & \longrightarrow & sSet(C_R^\bullet, S) \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{(a,b)} & sSet(\partial\Delta^1, S)
 \end{array}$$

Definimos $Hom_S^L(a, b)$, $Hom_S^{cyl}(a, b)$ y $Hom_S^E(a, b)$ de manera análoga. La ecuación (4.1) induce un diagrama natural:

$$\begin{array}{ccc}
 & & Hom_S^R(a, b) \\
 & & \nearrow \\
 Hom_S^E(a, b) & \longrightarrow & Hom_S^{cyl}(a, b) \\
 & & \searrow \\
 & & Hom_S^L(a, b)
 \end{array} \tag{4.2}$$

Observación 4.1.3. *Supongamos que S es una cuasi-categoría, es decir, un objeto fibrante en $sSet_J$.*

- a) *Cada uno de los espacios definidos es un modelo del complejo de funciones $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1}}(\Delta^1, S)$.*
- b) *Por el corolario 1.6.7, cada uno de los mapeos en el diagrama anterior (4.2) es una equivalencia de Kan entre complejos de Kan.*

Observación 4.1.4. *El conjunto de n -símplices $(Hom_S^R(a, b))_n$ consiste de todos los símplices $\alpha : \Delta^{n+1} \rightarrow S$ tales que $\alpha|_{\Delta^{\{n+1\}}} = b$, y $\alpha|_{\Delta^{\{0,1,\dots,n\}}} = a$ es el símplice constante en el vértice a . Similarmente, el conjunto $(Hom_S^L(a, b))_n$ consiste de todos los símplices $\alpha : \Delta^{n+1} \rightarrow S$ tales que $\alpha|_{\Delta^{\{0\}}} = a$, y $\alpha|_{\Delta^{\{1,\dots,n+1\}}} = b$ es el símplice constante en el vértice b .*

Terminamos la sección con el siguiente cálculo del complejo de funciones homotópico de un collar. La clave está en la observación de que todo collar tiene el mismo tipo de homotopía de Joyal que un simplejo estándar.

Proposición 4.1.5. *Sea T un collar. Entonces el complejo de funciones $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1}}(\Delta^1, T)$ es contráctil.*

Demostración. Considerando cualquier simplejo Δ^k , para todo $n > 0$ tenemos que todo mapeo $C_R^n \rightarrow \Delta^k$ en $sSet_{\partial\Delta^1/}$ factoriza a través de la proyección $C_R^n \rightarrow \Delta^1$, lo cual implica que el complejo de funciones $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1/}}(\Delta^1, \Delta^k) \simeq *$ es constante. Dado que el mapeo canónico de cuasi-categorías $T \hookrightarrow \Delta[T]$ es una equivalencia de Joyal (corolario 2.7.7), se tiene que el mapeo inducido entre complejos de funciones

$$hMap_{sSet_{\partial\Delta^1/}}(\Delta^1, T) \xrightarrow{\simeq} hMap_{sSet_{\partial\Delta^1/}}(\Delta^1, \Delta[T]) \simeq *$$

es una equivalencia de Kan, por lo que $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1/}}(\Delta^1, T)$ es contáctil. \square

4.2. Rigidificación

Remarcamos que usaremos la estructura de Joyal en la categoría $sSet_{\partial\Delta^1/}$. En esta sección probaremos que para cualquier conjunto simplicial S y cualquier par de vértices $a, b \in S_0$ el espacio de mapeos $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ de la categorificación, es naturalmente Kan equivalente al complejo de funciones $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1/}}(\Delta^1, S)$. Como corolario importante, probaremos que para cualquier categoría simplicial D , la counidad $\mathfrak{C}(ND) \rightarrow D$ es una equivalencia débil en $sCat$. Por abreviación, escribimos $hMap(S)(a, b)$ para denotar al complejo de funciones homotópico $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1/}}(\Delta^1, S)$.

Bajo esta línea de pensamiento, consideremos la subcategoría plena de $\mathcal{Y} \hookrightarrow sSet_{\partial\Delta^1/}$ cuyos objetos son espacios Y tales que $\mathfrak{C}(Y)(a, b) \simeq *$ y $hMap(Y)(a, b) \simeq *$ son contráctiles. Claramente por el corolario 3.0.3 y la proposición 4.1.5, \mathcal{Y} contiene a la categoría de collares \mathcal{Nec} . Se tiene por lo tanto que \mathcal{Y} es una *categoría de rigidificación* cerrada, por lo que podemos considerar el funtor $\mathfrak{C}^{\mathcal{Y}} : sSet_{\mathcal{Y}} \rightarrow sCat$ (ver definición 3.2.2). Denotemos además por \mathcal{Y}_{fib} a la subcategoría plena de \mathcal{Y} que consiste de aquellos objetos que son fibrantes, i.e., cuasi-categorías. Notemos que esta última, no es una categoría de rigidificación. Sin embargo, denotamos por $\mathfrak{C}^{\mathcal{Y}_{fib}}(S)(a, b)$ al nervio $N(\mathcal{Y}_{fib}/_{S_{a,b}})$.

Sea C^\bullet una resolución cosimplicial de Δ^1 en $sSet_{\mathcal{Y}}$. Sea $C^\bullet \xrightarrow{\simeq} R^\bullet \xrightarrow{\simeq} \Delta^1$ una factorización en un cofibración acíclica de Reedy seguida por una fibración de Reedy, la cual será necesariamente acíclica. Los mapeos $R^n \rightarrow \Delta^1$ son fibraciones de Joyal, y dado que Δ^1 es Joyal fibrante, también lo es cada R^n . Es fácil ver ahora que $C^n \in \mathcal{Y}$ y $R^n \in \mathcal{Y}_{fib}$.

Proposición 4.2.1. *Si $S_{a,b} = S$ es un objeto fibrante en $(sSet_{\partial\Delta^1/})_{\mathcal{Y}}$, entonces existe un diagrama conmutativo natural en el cual todas las flechas son equivalencias de Kan:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{C}^{\mathcal{Nec}}(S)(a, b) & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{\mathcal{Y}}(S)(a, b) & \longleftarrow & \mathfrak{C}^{\mathcal{Y}_{fib}}(S)(a, b) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & N\Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S) & \longleftarrow & N\Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(R^\bullet, S) \end{array}$$

donde $C^\bullet \xrightarrow{\simeq} R^\bullet \xrightarrow{\simeq} \Delta^1$ es una descomposición cofibrante fibrante de una resolución cosimplicial C^\bullet de Δ^1 . Tenemos:

Demostración. Las inclusiones $\mathcal{Nec} \hookrightarrow \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{Y}_{fib}$ y la descomposición mencionada de C^\bullet inducen el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Nec}_{/S} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{/S} & \xleftarrow{j} & \mathcal{Y}_{fib}/_S \\ & & \uparrow & & \uparrow k \\ \Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S) & \xleftarrow{l} & \Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(R^\bullet, S) & & \end{array}$$

cuyo nervio es el diagrama buscado. Por la proposición 3.2.3, el mapeo $\mathfrak{C}^{\mathcal{Nec}}(S)(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}^{\mathcal{Y}}(S)(a, b)$ es una equivalencia de Kan. Por la propiedad 2-3 basta ver que Nj, Nk y Nl lo son:

Para Nj ; Sea $\alpha : 1 \rightarrow F$ un remplazo fibrante cofibrante en $sSet_{\mathcal{Y}}$ (esto siempre es posible, ver 1.2). En virtud de la proposición 1.2.8, sea $\beta : F_f \rightarrow 1_f$ una retracción de α en la subcategoría de objetos fibrantes. Definimos j' como la composición

$$\mathcal{Y}_{/S} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}_{fib}/_{FS} \xrightarrow{\beta_S} \mathcal{Y}_{fib}/_S$$

Entonces existen transformaciones naturales $1 \xrightarrow{\alpha} j'j$ y $1 \xrightarrow{\alpha} jj'$. Esto prueba que Nj' es un inverso homotópico de Nj .

Para Nk , notemos primeramente que el mapeo k está definido por la correspondencia $[[n], R^n \rightarrow S] \mapsto [R^n, R^n \rightarrow S]$. Por el teorema A de Quiellen, es suficiente probar que las categorías rebanaada de k son contráctiles. Sea $y = [Y, Y \rightarrow S]$ un objeto de $\mathcal{Y}_{fib/S}$; entonces claramente $k/y \simeq \Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(R^\bullet, Y)$. Sin embargo, dado que Y es fibrante, $sSet_{\partial\Delta^1/}(R^\bullet, Y)$ es un modelo del complejo de funciones $hMap(Y)(a', b')$ el cual es contráctil por definición.

Por último, el mapeo $sSet_{\partial\Delta^1/}(R^\bullet, S) \rightarrow sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S)$ es una equivalencia de Kan debido a que $C^\bullet \rightarrow R^\bullet$ es una equivalencia de Reedy entre objetos cofibrantes de Reedy y a que S es fibrante (corolario 1.6.7). El resultado se sigue de la equivalencia homotópica $N\Delta K \simeq K$, para todo conjunto simplicial K . \square

Corolario 4.2.2. *Sea $S_{a,b} = S$ una quasi-categoría y sea $C^\bullet \rightarrow \Delta^1$ una resolución cosimplicial de Δ^1 en $sSet_{\partial\Delta^1/}$. Entonces existe un zigzag de equivalencias débiles entre el espacio de mapeos $\mathfrak{C}(S)(a, b)$ y el complejo de funciones $hMap(S)(a, b) = sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, \Delta^1)$.*

Por conveniencia tipográfica, denotaremos por \mathcal{A} a la categoría $sSet_{\partial\Delta^1/}$ en lo que resta de la sección. La proposición 4.2.1 nos proporciona para toda resolución cosimplicial C^\bullet de Δ^1 , un zigzag simple de equivalencias de Kan entre $\mathfrak{C}^{Nec}(S)$ y $N\Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S)$. En la proposición 4.2.3 presentamos otro zigzag simple de equivalencias de Kan entre estos dos conjuntos simpliciales. Definimos el zigzag simple:

$$\mathcal{Nec}_{/S} \xrightarrow{\phi} \mathcal{AW}^{-1}\mathcal{A}(\Delta^1, S) \xleftarrow{j} \Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S) \quad (4.3)$$

por las correspondencias

$$\begin{aligned} \phi: [T, T \rightarrow S] &\mapsto [\Delta^1 \hookrightarrow \Delta[T] \leftarrow T \rightarrow S] \\ j: (C^n \rightarrow S) &\mapsto (\Delta^1 \xleftarrow{\sim} C^n \rightarrow S) \end{aligned}$$

Proposición 4.2.3. *Sea $S_{a,b}$ un objeto fibrante en $sSet_{\partial\Delta^1/}$ y C^\bullet una resolución cosimplicial de Δ^1 . Entonces el nervio de (4.3)*

$$\mathfrak{C}^{Nec}(S)(a, b) \xrightarrow{N\phi} N[\mathcal{AW}^{-1}\mathcal{A}](\Delta^1, S) \xleftarrow{Nj} N\Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S)$$

es un zigzag de equivalencias homotópicas de Kan.

Demostración. Probaremos que el siguiente diagrama induce uno de equivalencias homotópicas:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Nec}_{/S} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{/S} & \longleftarrow & \Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, S) \\ \phi \downarrow & & i \uparrow & \swarrow j_0 & \\ \mathcal{AW}^{-1}\mathcal{A}(\Delta^1, S) & \xrightleftharpoons[\jmath_1]{\pi} & \mathcal{AW}^{-1}(\Delta^1, S) & & \end{array}$$

exceptuando π e i que definiremos a continuación, todos los morfismos son los obvios. El funtor i está dado por la proyección $(\Delta^1 \xleftarrow{\sim} X \rightarrow S) \mapsto (X \rightarrow S)$, en donde $\Delta^1 \simeq X$ implica que $X \in \mathcal{Y}$, gracias a la invarianza homotópica de los complejos homotópicos de funciones y al hecho de que \mathfrak{C} es homotópico (proposición 3.3.6). Así, el triángulo derecho del diagrama es conmutativo y, por la propiedad 2-de-3, el nervio de i es una equivalencia homotópica.

Describimos el funtor π : A un objeto $\Delta^1 \rightarrow X \xleftarrow{\sim} Y \rightarrow S$ de $\mathcal{AW}^{-1}\mathcal{A}(\Delta^1, S)$ le asociamos el zigzag $\Delta^1 \xleftarrow{\sim} P \rightarrow S$ en $\mathcal{AW}^{-1}(\Delta^1, S)$ vía el pullback:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta^1 & \longrightarrow & X & \xleftarrow{\sim} & Y & \longrightarrow & S \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \Delta^1 & \longleftarrow & \Delta^1 & \xleftarrow{\sim} & P & \longrightarrow & S \end{array}$$

donde se intercambi6 el segmento $X \xleftarrow{\sim} Y \rightarrow S$ por $X \xleftarrow{\sim} Y' \rightarrow S$ via:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & & \downarrow \sim & & \\
 & & X' & & \\
 & \swarrow \sim & \downarrow \sim & \searrow \sim & \\
 \Delta^1 & \xleftarrow{\sim} & \Delta^1 \times S & \xrightarrow{\sim} & S
 \end{array}$$

Habiendo definido π , es claro que existen zigzags de transformaciones naturales entre πj_1 , $j_1 \pi$ y los respectivos funtores identidad, y por lo tanto, estos funtores producen equivalencias homot6picas en los nervios. Teniendo en cuenta que j_0 y la fila superior del diagrama original producen equivalencias homot6picas en los nervios (comentario 1.6.14 y proposici6n 4.2.1), para probar que $N\phi$ es una equivalencia, ser6 suficiente probar que $i\pi\phi$ produce una en el nervio. Existe un zigzag de transformaciones naturales entre $i\pi\phi$ y $\mathcal{N}ec_{S_j} \rightarrow \mathcal{Y}_{S_j}$ definido puntualmente por:

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{\sim} & T' & \longleftarrow & P \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

indicando que existe una homotop6a en los respectivos nervios. Esto prueba que $N(i\pi\phi)$ es una equivalencia homot6pica de Kan. \square

4.2.1. La counidad de la categorificaci6n

Proposici6n 4.2.4. *Sea D una categor6a simplicial cuyos espacios de mapeos son todos complejos de Kan, es decir, un objeto fibrante en $sCat$. Entonces la counidad $\mathfrak{C}ND \rightarrow D$ es una equivalencia de Dwyer-Kan.*

Demostraci6n. Puesto que $Ob(\mathfrak{C}ND) = Ob(D)$, es suficiente probar que para todo par $a, b \in Ob(D)$ el mapeo $\mathfrak{C}(ND)(a, b) \rightarrow D(a, b)$ es una equivalencia de Kan. Como es usual construiremos un diagrama de equivalencias. Antes, realizamos un sencillo c6lculo: Consideremos la resoluci6n cosimplicial $C^\bullet := C_R^\bullet \xrightarrow{\sim} \Delta^1$ definida en la secci6n 4.1, y notemos que para toda n , $\mathfrak{C}(C^n)$ es una categor6a simplicial con solo dos objetos, 0 y 1. Por la proposici6n 3.3.6, el mapeo $\mathfrak{C}(C^n)(0, 1) \rightarrow \mathfrak{C}(\Delta^1)(0, 1) \simeq *$ es una equivalencia de Kan, por lo tanto $\mathfrak{C}(C^n)(0, 1)$ es contr6ctil, y claramente $C^\bullet = C_{0,1}^\bullet \in \mathcal{Y}$. Adem6s, por el lema 3.3.4, tenemos que $\mathfrak{C}(C^\bullet)(0, 1)$ es Reedy cofibrante. Por lo tanto $\mathfrak{C}(C^\bullet)(0, 1) \xrightarrow{\sim} *$ es una resoluci6n cosimplicial de Δ^0 en $sSet_{\mathcal{Q}}$. Ahora, haciendo $ND_{a,b} = ND$, consideramos:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{C}(ND)(a, b) & \longrightarrow & D(a, b) & & \\
 \sim \uparrow & & \dashv \uparrow & \longleftarrow & \\
 \text{colim}_{\mathcal{N}ec/ND} \mathfrak{C}(T)(\alpha, \omega) & \longrightarrow & \text{colim}_{\mathcal{Y}/ND} \mathfrak{C}(Y)(\alpha, \omega) & \longleftarrow & \text{colim}_{C_{/ND}^\bullet} \mathfrak{C}(C^n)(0, 1) \\
 \sim \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{hocolim}_{\mathcal{N}ec/ND} \mathfrak{C}(T)(\alpha, \omega) & \longrightarrow & \text{hocolim}_{\mathcal{Y}/ND} \mathfrak{C}(Y)(\alpha, \omega) & \longleftarrow & \text{hocolim}_{C_{/ND}^\bullet} \mathfrak{C}(C^n)(0, 1) \\
 \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\
 \text{hocolim}_{\mathcal{N}ec/ND} * & \xrightarrow{\sim} & \text{hocolim}_{\mathcal{Y}/ND} * & \xleftarrow{\sim} & \text{hocolim}_{C_{/ND}^\bullet} * \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 N(\mathcal{N}ec/ND) & \xrightarrow{\sim} & N(\mathcal{Y}/ND) & \xleftarrow{\sim} & N\Delta sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, ND)
 \end{array} \tag{4.4}$$

el cual es inducido horizontalmente por las inclusiones de categorías $\mathcal{Nec} \hookrightarrow \mathcal{Y} \hookrightarrow C^\bullet$, y verticalmente por los mapeos naturales y el hecho de que cada uno de los espacios $\mathfrak{C}(T)(\alpha, \omega)$, $\mathfrak{C}(Y)(\alpha, \omega)$ y $\mathfrak{C}(C^n)(0, 1)$ es contráctil. Las equivalencias indicadas se deben a esto último, a la proposición 3.2.1 para la primer columna, y al lema 4.2.1 para la última fila. El mapeo vertical superior de en medio está inducido por la familia de morfismos $\mathfrak{C}(Y)(\alpha, \beta) \rightarrow D(a, b)$ adjunta a la familia de morfismos $Y \rightarrow ND_{a,b}$. La conmutatividad del diagrama es clara.

Por adjunción, el mapeo $\text{hocolim}_{C^\bullet/ND_{a,b}} \mathfrak{C}(C^\bullet)(0, 1) \rightarrow D(a, b)$ puede ser escrito como

$$\text{hocolim}_{\mathfrak{C}(C^\bullet)/D(a,b)} C^n(0, 1) \rightarrow \text{colim}_{\mathfrak{C}(C^\bullet)/D(a,b)} C^n(0, 1) \rightarrow D(a, b)$$

donde $D(a, b)$ es un complejo de Kan, y por lo tanto una equivalencia de Kan (Lema 4.2.5). El resultado se sigue de usar la propiedad 2-3 repetidas veces. \square

Lemma 4.2.5. *Sea U^\bullet cualquier resolución cosimplicial del objeto final $*$ en $sSet_K$. Entonces para cualquier complejo de Kan X , la composición*

$$\text{hocolim}_{U^\bullet/X} U^n \rightarrow \text{colim}_{U^\bullet/X} U^n \rightarrow X$$

es una equivalencia de Kan.

Demostración. La afirmación es cierta, por ejemplo, para la resolución cosimplicial Δ^\bullet . En efecto, en este caso Δ^\bullet es un objeto cofibrante en la estructura modelo proyectiva de $sSet^{\Delta^\bullet/X}$, y dado que en esta estructura $\text{colim}: sSet^{\Delta^\bullet/X} \rightarrow sSet$ es un morfismo izquierdo de Quillen, tenemos:

$$\text{hocolim}_{\Delta^\bullet/X} \Delta^n \xrightarrow{\sim} \text{colim}_{\Delta^\bullet/X} \Delta^n \simeq X$$

Ahora, sea $V^\bullet \xleftarrow{\sim} \Delta^\bullet$ un remplazo cofibrante-fibrante de Δ^\bullet en $sSet_{\mathcal{Q}}$. Entonces existe un zigzag $U^\bullet \rightarrow V^\bullet \leftarrow \Delta^\bullet$ de resoluciones cosimpliciales sobre el punto. De este modo, será suficiente probar que si $U^\bullet \rightarrow V^\bullet$ es un mapeo entre resoluciones cosimpliciales de $* = \Delta^0$ en $sSet_{\mathcal{Q}}$, entonces el resultado para cualquiera de ellas implica el resultado para la otra. Así, sea X un complejo de Kan y consideramos el mapeo natural $N\Delta\mathcal{M}(V^\bullet, X) = V^\bullet/X \rightarrow U^\bullet/X = N\Delta\mathcal{M}(U^\bullet, X)$, el cual induce una equivalencia de Kan en los respectivos nervios 1.6.7. Utilizando el hecho de que $U \rightarrow V$ es un mapeo de resoluciones sobre el punto, tenemos el siguiente diagrama con las equivalencias indicadas:

$$\begin{array}{ccccccc} N\Delta\mathcal{M}(U^\bullet, X) & \xlongequal{\quad} & \text{hocolim}_{U^\bullet/X} * & \xleftarrow{\sim} & \text{hocolim}_{U^\bullet/X} U^n & \longrightarrow & \text{colim}_{U^\bullet/X} U^n \\ \uparrow \sim & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ N\Delta\mathcal{M}(V^\bullet, X) & \xlongequal{\quad} & \text{hocolim}_{V^\bullet/X} * & \xleftarrow{\sim} & \text{hocolim}_{V^\bullet/X} U^n f & \longrightarrow & \text{colim}_{U^\bullet/X} U^n f \longrightarrow X \\ & & & \swarrow \sim & \downarrow \sim & & \downarrow \\ & & & & \text{hocolim}_{V^\bullet/X} V^n & \longrightarrow & \text{colim}_{V^\bullet/X} V^n \end{array}$$

donde hemos utilizado la propiedad 2-3 repetidas veces. La afirmación se sigue de inmediato. \square

4.3. Complejos de funciones relativos

Para todo espacio K en $sSet_{\mathcal{J}}$, hemos visto que $K \times E^n \rightarrow K$ es una fibración acíclica de Joyal y por lo tanto $K \times E^\bullet \rightarrow K$ es una resolución cosimplicial de K en $sSet_{\mathcal{J}}$. Ahora, dada una cofibración fija

$A \twoheadrightarrow B$, definimos $C_E^\bullet(B, A)$ como el espacio cosimplicial obtenido del pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 cA \times E^\bullet & \twoheadrightarrow & cB \times E^\bullet \\
 \downarrow \sim & \lrcorner & \downarrow \sim \\
 cA & \twoheadrightarrow & C_E^\bullet(B, A) \\
 & \searrow & \downarrow \text{---} \\
 & & cB
 \end{array}$$

Dado que $sSet_J^\Delta$ es propia a la izquierda, el pushout preserva equivalencias de Joyal y así $C_E^\bullet(B, A)$ es una resolución cosimplicial de B en $(sSet_J)_{A/}$. Además, notando que $cA \times E^\bullet \twoheadrightarrow cB \times E^\bullet$ es resolución cosimplicial de $A \twoheadrightarrow B$ en $sSet_J$, obtenemos para todo espacio X fibrante en $sSet_J$:

$$\begin{array}{ccc}
 sSet(C_E^\bullet(B, A), X) & \longrightarrow & sSet(cB \times E^\bullet, X) \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 sSet(cA, X) & \longrightarrow & sSet(cA \times E^\bullet, X)
 \end{array} \tag{4.5}$$

Donde el pie derecho es una fibración de Kan debido a que $cA \times E^\bullet \twoheadrightarrow cB \times E^\bullet$ es una cofibración de Reedy de resoluciones cosimpliciales en $sSet_J$ (Corolario 1.6.7).

Definición 4.3.1. Sea $A \twoheadrightarrow B$ una cofibración. Sean X un objeto fibrante en $sSet_J$ y $f : A \rightarrow X$ un morfismo de espacios. Definimos $hMap_A(B, X)$ como el complejo de funciones en $sSet_{A/}$:

$$\begin{array}{ccc}
 sSet_{A/}(C_E^\bullet(B, A), X) & \longrightarrow & sSet(C_E^\bullet(B, A), X) \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{f} & sSet(cA, X)
 \end{array} \tag{4.6}$$

Notemos que en particular $hMap_A(B, X)$ es un complejo de Kan.

Observación 4.3.2. Pegando los cuadrados límites (4.5) y (4.6), se observa que el complejo $hMap_A(B, X)$ puede ser calculado como el pullback del diagrama $* \rightarrow sSet(cA \times E^\bullet, X) \leftarrow sSet(cB \times E^\bullet, X)$

En el caso particular de la inclusión $\partial\Delta^1 \twoheadrightarrow \Delta^1$, las resoluciones $C_E^\bullet(\Delta, \partial\Delta^1)$ y C_E^\bullet de Δ^1 sobre $\partial\Delta^1$ coinciden. Por lo tanto, para todo objeto fibrante S en $(sSet_J)_{*,*}$, se tiene $hMap_{\partial\Delta^1}(\Delta^1, S) = Hom_E^S(a, b)$.

Proposición 4.3.3. Sea $A \twoheadrightarrow B$ una cofibración, y sea C cualquier conjunto simplicial. Sea X una cuasi-categoría, y sean $A \rightarrow X^C$ y $A \times C \rightarrow X$ un par de morfismos adjuntos. Entonces

$$hMap_A(B, X^C) \simeq hMap_{A \times C}(B \times C, X)$$

es un isomorfismo natural.

Demostración. Por adjunción, tenemos el isomorfismo de diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 * & \longrightarrow & sSet(cA \times E^\bullet, X^C) & \longleftarrow & sSet(cB \times E^\bullet, X^C) \\
 \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 * & \longrightarrow & sSet((cA \times C) \times E^\bullet, X) & \longleftarrow & sSet((cB \times C) \times E^\bullet, X)
 \end{array}$$

El resultado se sigue por el comentario hecho después de la definición 4.3.1. □

Dado un morfismo de cofibraciones:

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \twoheadrightarrow & B' \end{array} \quad (4.7)$$

obtenemos para cada $f : A \rightarrow X$ un mapeo $hMap_{A'}(B', X) \rightarrow hMap_A(B, X)$ de complejos de funciones inducido por el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} hMap_{A'}(B', X) & \longrightarrow & sSet(B' \times E^\bullet, X) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ hMap_A(B, X) & \longrightarrow & sSet(A' \amalg_A B \times E^\bullet, X) & \longrightarrow & sSet(B \times E^\bullet, X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & sSet(A' \times E^\bullet, X) & \longrightarrow & sSet(A \times E^\bullet, X) \end{array}$$

de cuadrados pullback. En efecto, los dos rectángulos largos son pullbacks por definición de $hMap$ y el cuadrado derecho lo es por la continuidad del funtor representable $sSet(\bullet, X)$, la afirmación se sigue por la propiedad débil 2-de-3 del pullback.

Proposición 4.3.4. *Supongamos dado un cuadrado como en (4.7), y sea $L : A' \amalg_A B \rightarrow B'$ el morfismo inducido por el pushout. Para cualquier ∞ -categoría X y cualquier objeto $f : A' \rightarrow X$, si L es una cofibración, entonces el morfismo $hMap_{A'}(B', X) \rightarrow hMap_A(B, X)$ es una fibración de Kan, acíclica si L lo es.*

Demostración. Aplicar el corolario 1.6.7 al pie derecho del cuadrado pullback superior derecho en el diagrama anterior. \square

Proposición 4.3.5. *Sea $A \twoheadrightarrow B$ una cofibración, sean $B_1 \twoheadrightarrow B$ y $B_2 \twoheadrightarrow B$ tales que $B = B_1 \cup B_2$. Sea X una ∞ -categoría X y $f : A \rightarrow X$ cualquier morfismo. Entonces lo siguiente es un cuadrado pullback así como un cuadrado pullback homotópico:*

$$\begin{array}{ccc} hMap_A(B, X) & \longrightarrow & hMap_{A \cap B_1}(B_1, X) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ hMap_{A \cap B_2}(B_2, X) & \longrightarrow & hMap_{A \cap B_1 \cap B_2}(B_1 \cap B_2, X) \end{array}$$

donde cada mapeo es una fibración de Kan.

Demostración. El hecho de que cada morfismo sea una fibración de Kan se tiene de aplicar la proposición 4.3.4 cuatro veces. Para esto solo debemos fijarnos que cada *latching map* es una cofibración, lo cual es claro al analizar las cuatro caras laterales del cubo:

$$\begin{array}{ccccc} & & A \cap B_1 \cap B_2 & \longrightarrow & A \cap B_1 \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A \cap B_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & B_1 \cap B_2 & \longrightarrow & B_1 \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B \end{array}$$

Para probar la primera afirmación de la proposición, consideremos el diagrama (inducido al aplicar $sSet$ al cubo anterior):

$$\begin{array}{ccccc}
* & \longrightarrow & sSet(A \cap B_1 \times E^\bullet, X) & \longleftarrow & sSet(B_1 \times E^\bullet, X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
* & \longrightarrow & sSet(A \cap B_1 \cap B_2 \times E^\bullet, X) & \longleftarrow & sSet(B_1 \cap B_2 \times E^\bullet, X) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
* & \longrightarrow & sSet(A \cap B_1 \times E^\bullet, X^C) & \longleftarrow & sSet(B_2 \times E^\bullet, X)
\end{array}$$

El límite del diagrama se puede construir de dos formas: calculando el pullback de los pullbacks verticales, o bien, calculando el pullback de los pullbacks horizontales. Lo primero produce al complejo $hMap_A(B, X)$. Lo segundo al pullback del diagrama:

$$hMap_{A \cap B_2}(B_2, X) \longrightarrow hMap_{A \cap B_1 \cap B_2}(B_1 \cap B_2, X) \longleftarrow hMap_{A \cap B_1}(B_1, X)$$

□

La siguiente proposición utiliza los dos resultados anteriores:

Proposición 4.3.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de ∞ -categorías. Supóngase que para todo $a, b \in X$ el mapeo inducido $hMap_{\partial\Delta^1}(\Delta^1, X) \rightarrow hMap_{\partial\Delta^1}(\Delta^1, Y)$ es una equivalencia de Kan. Entonces, para cualesquiera dos 1-simplejos $f, g \in X_1$ (considerados como un solo morfismo $\partial\Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow X$), el mapeo:*

$$hMap_{\partial\Delta^1 \times \Delta^1}(\Delta^1 \times \Delta^1, X) \rightarrow hMap_{\partial\Delta^1 \times \Delta^1}(\Delta^1 \times \Delta^1, Y)$$

es una equivalencia de Kan.

Demostración. Ver [DS11, P.6.7].

□

4.4. DK-equivalencias para cuasi-categorías

Definición 4.4.1. *Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de conjuntos simpliciales se dice **DK-equivalencia** si las siguientes dos condiciones son satisfechas:*

- 1) *El mapeo inducido $\mathcal{H}(sSet_{\mathcal{J}})(*, X) \rightarrow \mathcal{H}(sSet_{\mathcal{J}})(*, Y)$ es una biyección.*
- 2) *Para todo par de vértices $a, b \in X_0$, el mapeo inducido $hMap_{sSet_{\partial\Delta^1}}(\Delta^1, X) \rightarrow hMap_{sSet_{\partial\Delta^1}}(\Delta^1, Y)$ es una equivalencia de Kan.*

Lemma 4.4.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una fibración de Joyal entre cuasi-categorías, y asúmase que f satisface la condición (2) de la definición 4.4.1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) *f tiene la PLD respecto a los morfismos $\emptyset \rightarrow \Delta^0$ y $\{0, 1\} \rightarrow E^1$;*
- b) *$[*, X]_{E^1} \rightarrow [*, Y]_{E^1}$ es una biyección;*
- c) *f tiene la PLD respecto a $\emptyset \rightarrow \Delta^0$ (equivalentemente, f es suprayectiva);*
- d) *f satisface la condición (1) de la definición 4.4.1.*

Demostración. Dado que $E^1 \simeq E^1 \times *$ es un objeto cilindro para $*$ en $sSet_{\mathcal{J}}$, tenemos (b) \Leftrightarrow (d). Probaremos la cadena (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a):

i) (a) \Rightarrow (b). La suprayectividad es obvia. Para la inyectividad, sean $\alpha, \beta \in X$ tales que $f(\alpha) \sim f(\beta)$, es decir, existe el diagrama sólido conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} * \sqcup * & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & X \\ (0,1) \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ E^1 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

El hecho de que f posea la PLD respecto a $* \sqcup * \rightarrow E^1$, nos garantiza la existencia de una homotopía entre α y β .

ii) (b) \Rightarrow (c). Sea $\alpha \in Y$, entonces existe $\beta \in X$ y una homotopía $E^1 \rightarrow Y$ tales que $h(0) = f(\beta)$ y $h(1) = \alpha$. Al ser $f: X \rightarrow Y$ una fibrición de Joyal, tenemos un levantamiento de esta última a X . Esto garantiza la existencia de una preimagen de α en X .

iii) (c) \Rightarrow (a). Finalmente, supongamos la existencia de un problema de extensión:

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E^1 & \xrightarrow{\gamma} & Y \end{array}$$

al ser f una fibrición de Joyal, existe un levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \gamma' & \downarrow f \\ E^1 & \xrightarrow{\gamma} & Y \end{array}$$

donde, haciendo $\alpha' = \gamma'(1)$, tenemos que $f(\alpha') = \gamma(1) = f(\beta)$. Sea \mathcal{F} la fibra de f sobre $\gamma(1)$, obtenemos el diagrama pullback de complejos homotópicos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \longrightarrow X & & sSet_{\partial\Delta^1/}(C_R^\bullet, \mathcal{F}_{\alpha', \beta}) \longrightarrow sSet_{\partial\Delta^1/}(C_R^\bullet, X_{\alpha', \beta}) \\ \downarrow \lrcorner \downarrow & \Rightarrow & \downarrow \lrcorner \downarrow \\ \Delta^0 \xrightarrow{\gamma(1)} Y & & sSet_{\partial\Delta^1/}(C_R^\bullet, \Delta^0) \longrightarrow sSet_{\partial\Delta^1/}(C_R^\bullet, Y_{\gamma(1), \gamma(1)}) \end{array}$$

(El mapeo indicado es una fibrición acíclica de Kan por la propiedad (2) de f). Esto prueba que $sSet_{\partial\Delta^1/}(C_R^\bullet, \mathcal{F})$ es contráctil, y por lo tanto, del corolario 4.2.2 concluimos que $\mathfrak{C}(\mathcal{F})(\alpha', \beta) \simeq *$ es contráctil. Similarmente se prueba que los espacios $\mathfrak{C}(\mathcal{F})(\alpha', \alpha)$, $\mathfrak{C}(\mathcal{F})(\beta, \beta)$ y $\mathfrak{C}(\mathcal{F})(\beta, \alpha')$ son contráctiles. Se concluye de inmediato que los objetos α' y β son isomorfos en la categoría homotópica $\tau(\mathcal{F}) \simeq \pi_0 \mathfrak{C}(\mathcal{F})$. Luego, por la definición 2.6.8, existe una homotopía $E^1 \rightarrow \mathcal{F}$. Definiendo γ'' como la composición $E^1 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow X$ y $h\gamma\pi$, donde $\pi: E^2 \rightarrow E^1$ es la proyección dada por $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ y $2 \mapsto 1$, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} E^1 \vee E^1 & \xrightarrow{\gamma' \vee \gamma''} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E^2 & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Aquí, el mapeo vertical izquierdo es una cofibración acíclica de Joyal, dado que $E^1 \vee E^1$ y E^2 son contráctiles. Por lo tanto, por ser f una fibrición de Joyal, existe un levantamiento $E^2 \rightarrow X$ cuya restricción

$$E^1 \xrightarrow{0,2} E^2 \rightarrow X$$

es una homotopía entre α y α' .

□

Proposición 4.4.3. Sean X, Y, X' , y Y' cuasi-categorías.

- i) Si $f: X \rightarrow Y$ es una fibrición de Joyal y una DK-equivalencia, y $g: Y' \rightarrow Y$ es cualquier mapeo, entonces $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ es una fibrición de Joyal y una DK-equivalencia.
- ii) La colección de DK-equivalencias es cerrada bajo 2-3.
- iii) Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longleftarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longleftarrow & Z'
 \end{array} \tag{4.8}$$

donde todos los mapeos son fibriciones de Joyal y todos los mapeos son verticales son DK-equivalencias. Más aún, si P y P' son los pullbacks de las dos respectivas filas, y asumimos que $P \rightarrow P'$, $X \rightarrow X' \times_{Y'} Y$, y $Z \rightarrow Z' \times_{Y'} Y$ son fibriciones de Joyal, entonces $P \rightarrow P'$ es una DK-equivalencia.

Demostración. i) El pullback $Y' \times_Y X \rightarrow Y'$ es ciertamente una fibrición de Joyal. Además, dado que f posee la PLD respecto al mapeo $\emptyset \rightarrow \Delta^0$, el pullback también la posee, y por lo tanto f^* satisface la condición (2) de 4.4.1. Par ver que este satisface la condición (1) basta considerar que si C^\bullet es una resolución cosimplicial de Δ^1 , entonces para toda elección de vértices tenemos el diagrama pullback:

$$\begin{array}{ccc}
 sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, Y' \times_Y X) & \longrightarrow & sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, X) \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \sim \\
 sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, Y') & \longrightarrow & sSet_{\partial\Delta^1/}(C^\bullet, Y)
 \end{array}$$

en $sSet_{\mathcal{Q}}$.

- ii) La colección de biyecciones en Set satisface la propiedad 2-3, de ahí que (1) de 4.4.1 la satisfaga. Por otro lado, dado que las equivalencias de Kan poseen la propiedad 2-3, y por el hecho de que toda DK-equivalencia es suprayectiva, se concluye que (2) de 4.4.1 satisface dicha propiedad.
- iii) Para ver que $P \rightarrow P'$ satisface la condición (2) de la definición 4.4.1, consideramos para un par de puntos dados (a_1, a_2) y (b_1, b_2) en P' , la imagen del diagrama 4.8 bajo el funtor $sSet_{\partial\Delta^1/}$. El resultado se sigue de la proposición 1.6.7 y el lemma 1.2.10 aplicado en $sSet_{\mathcal{Q}}$.

Así, para probar que $P \rightarrow P'$ satisface la propiedad (1) de la definición 4.4.1, será suficiente ver (en virtud de la proposición 4.4.2) que es suprayectiva. Sea $(a_1, a_2, a_3) \in P' = X' \times_{Y'} Z'$; como $Y \rightarrow Y'$ es una DK-equivalencia, en particular existe $b_2 \in Y$ haciendo (a_1, a_2, b_2) y (a_3, a_2, b_2) vértices de $X' \times_{Y'} Y$ y $Z' \times_{Y'} Y$ respectivamente. Por el inciso i) y ii), tenemos que $X \rightarrow X' \times_{Y'} Y$ es una DK-equivalencia, y por lo tanto existe $b_1 \in X$ en la imagen inversa de (a_1, a_2, b_2) . Similarmente existe $b_3 \in Z$ en la imagen inversa de (a_3, a_2, b_2) . Claramente, (b_1, b_2, b_3) está en la imagen inversa de (a_1, a_2, a_3) bajo $P \rightarrow P'$. □

Lemma 4.4.4. Sea X y Y cuasi-categorías, y $f: X \rightarrow Y$ una fibrición de Joyal y una DK-equivalencia. Entonces para cada $n \geq 0$ los siguientes mapeos son también fibriciones de Joyal y DK-equivalencias

$$\begin{array}{ll}
 a) & X^{\Delta^n} \rightarrow Y^{\Delta^n} \\
 b) & X^{\Lambda_k^n} \rightarrow Y^{\Lambda_k^n} \\
 c) & X^{\partial\Delta^n} \rightarrow Y^{\partial\Delta^n} \\
 d) & X^{\Delta^n} \rightarrow X^{\partial\Delta^n} \times_{Y^{\partial\Delta^n}} Y^{\Delta^n}
 \end{array}$$

Demostración. Ver [DS11, Lemma 7.5]. □

Proposición 4.4.5. Si $f: X \rightarrow Y$ es una DK-equivalencia entre cuasi-categorías, y además una fibrición de Joyal, entonces f es una fibrición de Kan acíclica.

Demostración. Todo problema de levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

posee al menos una solución si y solo si, el mapeo pullback $X\Delta^n \rightarrow X^{\partial\Delta^n} \times_{Y^{\partial\Delta^n}} Y^{\Delta^n}$ es suprayectivo en los vértices. (Un problema es un vértice del codominio, y su conjunto de soluciones es la imagen inversa de dicho vértice.) Pero este último es una DK-equivalencia por la proposición anterior, y en particular, una suprayección en los vértices. □

4.5. Equivalencia de Quillen entre los modelos de $(1, \infty)$ -categorías

Proposición 4.5.1. *Sea $f: X \rightarrow Y$ cualquier morfismo en $sSet_{\mathcal{J}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) f es una equivalencia débil en $sSet_{\mathcal{J}}$. (Equivalecia de Joyal)*
- ii) $\mathfrak{C}(f): \mathfrak{C}(X) \rightarrow \mathfrak{C}(Y)$ es una equivalencia débil en $sCat$. (Equivalecia de Dwyer-Kan)*
- iii) f es una DK-equivalencia.*

Demostración. *i) \Rightarrow ii).* Esto es la proposición 3.3.6, es decir, el functor \mathfrak{C} es homotópico.

ii) \Leftrightarrow iii). Para probar esta equivalencia, usaremos el siguiente argumento: Las condiciones *ii)* y *iii)* son invariante bajo equivalencias de Joyal, esto es, si tenemos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & X \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\sim} & Y' \end{array}$$

donde los mapeos horizontales son equivalencias de Joyal, entonces f satisface *ii)* (respectivamente *iii)*) si y solo si f' lo hace. Esto se sigue de inmediato por el hecho de que \mathfrak{C} es homotópico (para el caso *ii)*), y por la invarianza homotópica de las propiedades (1) y (2) de la definición 4.4.1. Así, utilizando un remplazo fibrante, será suficiente probar la afirmación para el caso en que X y Y sean cuasi-categorías.

Ahora, para una cuasi-categoría X tenemos (proposición 2.6.8) que $[*, X]$ está en biyección con las clases de isomorfismos en la categoría homotópica $\pi_0\mathfrak{C}(X)$, y por otro lado, que para todo par $a, b \in X$ existe (corolario 4.2.2) un zigzag natural de equivalencias de Kan entre el complejo de funciones $hMap_{\partial\Delta^1}(\Delta^1, X_{a,b})$ y el espacio de mapas $\mathfrak{C}(X)(a, b)$. Por lo tanto, para un mapeo $f: X \rightarrow Y$ entre cuasi-categorías, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} [*, X] & \longrightarrow & [*, Y] \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \pi_0\mathfrak{C}(X)_{/\sim} & \longrightarrow & \pi_0\mathfrak{C}(Y)_{/\sim} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} hMap_{\partial\Delta^1}(\Delta^1, X) & \longrightarrow & hMap_{\partial\Delta^1}(\Delta^1, Y) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathfrak{C}(X)(a, b) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(Y)(fa, fb) \end{array}$$

El resultado se sigue de inmediato.

ii) \Leftrightarrow iii). Sea $f: X \rightarrow Y$ una DK-equivalencia. Sea $Y \twoheadrightarrow \hat{Y}$ una aproximación fibrante cofibrante. Descomponiendo la composición $X \rightarrow Y \twoheadrightarrow \hat{Y}$ en una cofibración acíclica de Joyal seguida de una fibración de Joyal:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ X' & \twoheadrightarrow & \hat{Y} \end{array}$$

La implicación $i) \Rightarrow iii)$ recientemente probada y la propiedad 2-3 de las DK-equivalencias, implican que el mapeo horizontal inferior es una fibración acíclica de Joyal. La proposición 4.4.5 nos dice entonces que este último es una equivalencia de Joyal, terminando la prueba. \square

Teorema 4.5.2. *La adjunción:*

$$sSet_{\mathcal{J}} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{N}} \\ \xrightarrow{\mathfrak{C}} \\ \xrightarrow{\mathfrak{C}} \\ \xleftarrow{\mathcal{N}} \end{array} sCat$$

es una equivalencia de Quillen.

Demostración. Debemos probar que para todo objeto K en $sSet_{\mathcal{J}}$ y para todo objeto fibrante D en $sCat$, para que un mapeo $K \rightarrow N(D)$ sea una equivalencia de Joyal es necesario y suficiente que el morfismo adjunto $\mathfrak{C}(K) \rightarrow D$ sea una equivalencia de Dwyer-Kan.

Necesidad. El morfismo adjunto es la composición $\mathfrak{C}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(N(D)) \rightarrow D$. Así, por la proposición 4.2.4, que este sea una equivalencia debil es equivalente a que $\mathfrak{C}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(N(D))$ lo sea, y esto último es cierto dado que \mathfrak{C} un funtor homotópico.

Suficiencia. Si $\mathfrak{C}(K) \rightarrow D$ es un remplazo fibrante de $\mathfrak{C}(K)$, entonces que el adjunto

$$K \rightarrow N(\mathfrak{C}(K)) \rightarrow N(D)$$

sea una equivalencia de Joyal es equivalente, por la proposición 4.5.1, a que

$$\mathfrak{C}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(N(\mathfrak{C}(K))) \rightarrow \mathfrak{C}(N(D))$$

sea una equivalencia de Dwyer-Kan. Pero esto último sucede tal y como lo muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{C}(K) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(N(\mathfrak{C}(K))) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(N(D)) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \sim \\ & & \mathfrak{C}(K) & \xrightarrow{\sim} & D \end{array}$$

\square

Bibliografía

- [Bek00] Tibor Beke. “Sheafable homotopy model categories”. En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol.129, no.3, pp.447-475, *arXiv:math/0102087 [math.CT]* (2000).
- [Ber07] Julia E. Bergner. “A model category structure on the category of simplicial categories”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 359, 2043-2058, *arXiv:math/0406507 [math.AT]* (2007).
- [BFB05] Manuel Bullejos, Ernesto Faro y Victor Blanco. “A Full and Faithfull Nerve for 2-categories”. En: *Applied Categorical Structures*, Vol 13-3, 223-233, *arXiv:math/0406615 [math.CT]* (2005).
- [BV73] Michael Boardman y Rainer Vogt. *Homotopy Invariant Structures on Topological Spaces*. Ed. por Berlin Lecture Notes in Mathematics 347. Springer-Verlag y New York. 1973.
- [DK80] William G. Dwyer y Daniel M. Kan. “Simplicial localization of categories”. En: *J. Pure Appl. Algebra* 17, no. 3 (1980).
- [DS09] Dan Dugger y David Spivak. “Rigidification of quasi-categories”. En: *Algebr. Geom. Topol.* 11, 225-261, *arXiv:0910.0814 [math.CT]* (2009).
- [DS11] Dan Dugger y David Spivak. “Mapping spaces in quasi-categories”. En: *Algebr. Geom. Topol.* 11, 263-325, *arXiv:0911.0469 [math.AT]* (2011).
- [Dug06] Dan Dugger. “Classification spaces of maps in model categories”. En: *arXiv:math/0604537 [math.AT]* (2006).
- [Dwy+04] William G. Dwyer, Philip S. Hirschhorn, Daniel M. Kan y Jeffrey H. Smith. *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories*. Ed. por AMS. Mathematical Surveys and monographs, vol.113. 2004. ISBN: 0-8218-3703-6.
- [GJ99] Paul G. Goerss y John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Ed. por Birkhäuser Verlag. 1999. ISBN: 978-3-0346-0188-7.
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model Categories and Their Localizations*. Ed. por American Mathematical Society. 2003. ISBN: 0-8218-3279-4.
- [JT08] André Joyal y Miles Tierney. *Notes on simplicial homotopy theory*. 2008.
- [Lan71] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Ed. por Springer-Verlag New York. 1971. ISBN: 0-387-900035-7.
- [Lur09] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Ed. por Princeton University Press. 2009. ISBN: 978-0-691-14049-0.
- [Rie14] Emily Riehl. *Categorical homotopy theory*. Ed. por Cambridge University Press. 2014. ISBN: 978-1107048454.
- [Shu09] Michael Shulman. “Homotopy Limits and colimits and enriched homotopy theory”. En: *arXiv:math/0610194v3 [math.AT]* (2009).