



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

SINGULARIDADES EN HACES DE LUZ ESTRUCTURADA Y SUS POSIBLES
APLICACIONES EN MICROMANIPULACIÓN ÓPTICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
FABIÁN CAMAS AQUINO

TUTOR PRINCIPAL
DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

COTUTOR
DR. PEDRO ANTONIO QUINTO SU
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo parcial de DGAPA, proyecto PAPIIT 103020, para la conclusión de esta tesis

Resumen

En esta tesis se estudia teórica y experimentalmente un haz de luz estructurado, el haz Airy simétrico, en su versión paraxial y no paraxial. El estudio teórico es sobre la morfología del haz e involucra patrones de difracción y algunas cantidades singulares, como la cáustica y las líneas de dislocación. También se añade un estudio basado en rayos sobre la ubicación de mínimos y máximos locales de intensidad en haces de luz estructurada. El estudio experimental consiste en la implementación y caracterización de los haces en cuestión.

El capítulo 1 introduce los conceptos y las ecuaciones necesarias en el estudio de haces de luz estructurados, partiendo con los campos electromagnéticos y la ecuación de onda electromagnética. Posteriormente se consideran las ecuaciones para campos armónicos y para haces altamente dirigidos. También se incluye la representación de un haz de luz en términos de una descomposición espectral en ondas planas, y se añade el método de fase estacionaria para el cálculo de integrales altamente oscilatorias.

El contenido del capítulo 2 resume el estudio de cantidades singulares en campos electromagnéticos, conocido como Óptica Singular. Aquí se presenta una descripción del campo en términos de rayos y la formación de cáusticas, también se añade un estudio de líneas de interferencia totalmente constructiva o destructiva de rayos. Además se incluye la clasificación de las singularidades de fase, sus propiedades, mecanismos para su generación y un método de detección.

En el capítulo 3 se estudia la morfología del haz Airy simétrico teórico bidimensional y tridimensional, dentro y fuera del régimen paraxial. El estudio contempla para todos los casos los aspectos geométrico y ondulatorio: rayos, cáusticas y líneas de interferencia de rayos (sólo en los haces bidimensionales), patrones de difracción y líneas de singularidad de fase.

El capítulo 4 y último incluye un arreglo experimental usado en la implementación de haces de luz estructurada, su uso en los haces Airy simétricos 3D y la caracterización de estos mediante patrones transversales de intensidad, reconstrucciones tridimensionales de isointensidad y la detección de vórtices ópticos.

Después del capítulo anterior, se resumen las perspectivas del trabajo experimental de micromanipulación óptica usando el haz Airy Simétrico no paraxial 3D.

Finalmente, en la última sección se presentan las conclusiones del trabajo realizado en esta tesis.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Conceptos preliminares sobre haces de luz estructurada	1
1.1. Ecuación de onda	1
1.1.1. Ecuación de onda paraxial	2
1.2. Representación de espectro angular de un haz de luz	2
1.2.1. Coordenadas adimensionales	3
1.3. Campo electromagnético de un haz de luz	4
1.4. Aproximación de fase estacionaria	5
2. Óptica Singular	7
2.1. Cústicas	7
2.1.1. Criterio de rayos y cústica	8
2.1.2. Óptica de catástrofes	8
2.1.3. Líneas de interferencia de rayos	9
2.2. Líneas de dislocación	11
2.2.1. Clasificación	11
2.2.2. Estructura y propiedades	12
2.2.3. Generación	13
2.2.4. Detección	14
2.3. Ejemplos de haces 2D: Airy y Pearcey	15
3. Haz Airy simétrico y su descripción con Óptica Singular	21
3.1. Espectro angular del haz AiS	21
3.2. Morfología del haz AiS 2D	22
3.2.1. Haz AiSp 2D	22
3.2.2. Haz AiSnp 2D	29
3.2.3. Conclusiones	34
3.3. Morfología del haz AiS 3D	37
3.3.1. Haz AiSp 3D	37
3.3.2. Haz AiSnp 3D	42
3.3.3. Conclusiones	49

4. Haz Airy simétrico y su caracterización experimental	51
4.1. Arreglo experimental	51
4.2. Haz AiS	52
4.2.1. Haz AiSp 3D	53
4.2.2. Haz AiSnp 3D	54
4.3. Detección de vórtices ópticos en el haz AiSp 3D	57
Perspectivas	59
Conclusiones	61
Bibliografía	63

Capítulo 1

Conceptos preliminares sobre haces de luz estructurada

En este capítulo se introducen los conceptos y las ecuaciones utilizadas en la descripción de haces de luz vistos como fenómenos con carácter ondulatorio. Es la representación armónica de los haces de luz lo que posibilita la formación de una gran diversidad de ellos, mediante el fenómeno de interferencia, logrando haces de luz con estructuras de intensidad y fase no triviales. También se presentan algunas aproximaciones a las ecuaciones que representan al haz de luz.

1.1. Ecuación de onda

La identificación de la radiación electromagnética como un fenómeno con propiedades ondulatorias por parte de James Clerck Maxwell y la corroboración experimental por H. Hertz, permiten que los fenómenos ópticos clásicos se aborden desde el formalismo de las ecuaciones de Maxwell [1],

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ representan al desplazamiento eléctrico, el campo eléctrico, el campo magnético y la inducción magnética en la posición \mathbf{r} al tiempo t , respectivamente. $\rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ representan a la densidad de carga eléctrica y de corriente eléctrica externa, respectivamente. La velocidad de la luz en vacío está representada por c .

En un medio homogéneo, lineal, local, isotrópico y libre de fuentes de carga eléctrica y corriente eléctrica externa, se tienen las relaciones constitutivas $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\mu$, donde ϵ y μ son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio. Las ecuaciones (1.1) dan lugar a dos ecuaciones de onda vectoriales para los campos eléctrico y magnético. Admitiendo soluciones separables en el espacio y el tiempo para estas ecuaciones con dependencia temporal armónica tal que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}$, donde ω es la frecuencia de oscilación del campo, entonces las partes espaciales de los campos están determinadas por las

ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left[\nabla^2 + \left(\frac{n\omega}{c} \right)^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \\ \left[\nabla^2 + \left(\frac{n\omega}{c} \right)^2 \right] \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

y se conocen como ecuaciones de Helmholtz, donde $n(\omega) = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el índice de refracción del medio, con $\epsilon(\omega)$ la permitividad eléctrica y $\mu(\omega)$ la permeabilidad magnética del medio, las cuales en general son funciones complejas de ω . Cada una de las ecuaciones que componen a las ecuaciones vectoriales 1.2 puede escribirse como:

$$(\nabla^2 + k^2) E_i(\mathbf{r}) = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.3)$$

donde $k = n\omega/c$ es el número de onda. Las ondas planas homogéneas e inhomogéneas son soluciones a cada una de las componentes de las ecuaciones vectoriales (1.3), donde en ambos tipos de onda las superficies de equifase y equiamplitud forman dos conjuntos de planos paralelos, y el término homogéneo se refiere a que ambos conjuntos son paralelos entre sí mientras, y cía que el término inhomogéneo se usa cuando ambos conjuntos no son paralelos entre sí [2].

1.1.1. Ecuación de onda paraxial

Si el campo eléctrico en la posición \mathbf{r} que describe al haz de luz que se propaga en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ es tal que se puede aproximar como $E_i(\mathbf{r}) \approx \psi_i(\mathbf{r})e^{\pm ikz}$, con $\psi_i(\mathbf{r})$ una función que varía lentamente en la coordenada z en el orden de una longitud de onda λ , tal que $\lambda|\partial_z \psi_i(\mathbf{r})| \ll |\psi_i(\mathbf{r})|$ y $\lambda|\partial_{zz} \psi_i(\mathbf{r})| \ll |\partial_z \psi_i(\mathbf{r})|$, entonces la ecuación (1.3) resulta en:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 \pm 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi_i(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.4)$$

donde ∇_{\perp}^2 representa las derivadas del operador laplaciano con respecto a las coordenadas transversales. En coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y usando las coordenadas adimensionales (s_1, s_2, ζ) , donde $s_1 = x/x_0$, $s_2 = y/x_0$ y $\zeta = z/kx_0^2$ con x_0 una longitud de escala adecuada, se obtiene

$$\left(\nabla_{\perp}^2 \pm 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \psi_i(s_1, s_2, \zeta) = 0. \quad (1.5)$$

A la ecuación (1.4) se le conoce como ecuación de onda paraxial, y tiene como soluciones a los modos Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss e Ince-Gauss en coordenadas cartesianas, cilíndricas y elípticas, respectivamente [3–5].

Debe observarse que la forma de la ecuación de onda paraxial, *cf.* ec. (1.4), es similar a la ecuación de Schrödinger en dos dimensiones con $z \rightarrow t$, lo que permite trazar analogías entre algunos sistemas ópticos y cuánticos.

1.2. Representación de espectro angular de un haz de luz

Considerando que cualquier componente de un campo eléctrico, que satisface la ecuación de Helmholtz (1.3), se puede representar por una descomposición de ondas planas [6–8], *i.e.* por:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \mathfrak{A}(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de onda con módulo $k = |\mathbf{k}| = 2\pi n/\lambda$, $k_z = \pm(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$, n es el índice de refracción del medio de propagación, λ es la longitud de onda del haz en vacío y $\mathfrak{A}(k_x, k_y)$ es una función compleja que representa al espectro angular. Se observa que k_z puede tomar tanto valores reales como imaginarios, separando la región de integración en $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ y $k_x^2 + k_y^2 > k^2$, respectivamente. La primera región describe la propagación de ondas viajeras, mientras que la segunda corresponde a ondas evanescentes.

Considerando sólo el caso de ondas que viajan en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ positiva, *i.e.* que cumplen la relación $k_z = +(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ con $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$, se obtiene:

$$E(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-k}^{+k} dk_x \int_{-k'_y}^{+k'_y} dk_y \mathfrak{A}(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.7)$$

donde $k'_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$. En la aproximación paraxial los vectores de onda relevantes en la amplitud del espectro angular son aquellos con componentes transversales pequeñas, $k_x \ll k$ y $k_y \ll k$ tales que $k_z \approx k - (k_x^2 + k_y^2)/2k$, obteniéndose para (1.7):

$$E^{(p)}(\mathbf{r}) \propto \frac{e^{ikz}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \mathfrak{A}(k_x, k_y) \exp \left[i \left(k_x x + k_y y - \frac{z}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \right) \right], \quad (1.8)$$

donde los límites de integración se extienden a infinito, ya que se supuso que la amplitud del integrando del campo está dominada principalmente por los rayos dentro de la aproximación paraxial.

Se observa que los integrandos de las expresiones para los campos, (1.7) y (1.8), consisten de un término de amplitud y uno de fase, donde la amplitud está dada por:

$$|\mathfrak{A}(k_x, k_y)|, \quad (1.9)$$

en ambos casos, mientras que el término de fase es:

$$\phi_{\mathfrak{A}}^{(np)}(\mathbf{r}; k_x, k_y) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \arg(\mathfrak{A}(k_x, k_y)), \quad (1.10)$$

para el campo no paraxial, mientras que para el campo paraxial es:

$$\phi_{\mathfrak{A}}^{(p)}(\mathbf{r}; k_x, k_y) = k_x x + k_y y + k z - \frac{z}{2k} (k_x^2 + k_y^2) + \arg(\mathfrak{A}(k_x, k_y)). \quad (1.11)$$

1.2.1. Coordenadas adimensionales

Debido a las dimensiones características involucradas en los campos electromagnéticos en el espectro visible, resulta conveniente la introducción de una longitud de escala x_0 que adimensionaliza los vectores de posición y de onda de la siguiente manera:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = \left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{x_0}, \frac{z}{x_0} \right) = \frac{\mathbf{r}}{x_0}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{k}_s = (k_{s_1}, k_{s_2}, k_{s_3}) = (k_x x_0, k_y x_0, k_z x_0) = \mathbf{k} x_0,$$

por lo que el número de onda adimensional es $k_s = |\mathbf{k}_s| = 2\pi n x_0/\lambda$. En el caso de un haz paraxial, como ya se introdujo previamente, la coordenada de posición a lo largo de su dirección de propagación se adimensionaliza como $\zeta = z/(k x_0^2)$. Una longitud de escala útil consiste en

4CAPÍTULO 1. CONCEPTOS PRELIMINARES SOBRE HACES DE LUZ ESTRUCTURADA

múltiplos de λ , con lo que se evita su aparición explícita en el número de onda, aunque debe recordarse que el índice de refracción depende de ella. Por lo que al describir la propagación de un haz de luz a través de un medio con el formalismo presentado, se debe cuidar que el medio satisfaga las suposiciones asumidas previamente.

Introduciendo las cantidades adimensionales de (1.12) en la expresión del campo eléctrico de un haz de luz, 1.7, se obtiene:

$$E(\mathbf{s}) \propto \frac{1}{(2\pi x_0)^2} \int_{-k_{s_1}}^{+k_{s_1}} dk_{s_1} \int_{-k'_{s_2}}^{+k'_{s_2}} dk_{s_2} \mathfrak{A}(k_{s_1}, k_{s_2}) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s}}, \quad (1.13)$$

donde $k'_{s_2} = \sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}$, y la fase del integrando es:

$$\phi_{\mathfrak{A}}^{(np)}(\mathbf{s}; k_{s_1}, k_{s_2}) = \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s} + \arg(\mathfrak{A}(k_{s_1}, k_{s_2})). \quad (1.14)$$

Para un campo en la aproximación paraxial, se obtiene:

$$E^{(p)}(s_1, s_2, \zeta) \propto \frac{e^{ik_s^2 \zeta}}{(2\pi x_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{s_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{s_2} \mathfrak{A}(k_{s_1}, k_{s_2}) \exp \left[i \left(k_{s_1} s_1 + k_{s_2} s_2 - \frac{\zeta}{2} (k_{s_1}^2 + k_{s_2}^2) \right) \right], \quad (1.15)$$

donde la fase del integrando es:

$$\phi_{\mathfrak{A}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_x, k_y) = k_{s_1} s_1 + k_{s_2} s_2 + k_s^2 \zeta - \frac{\zeta}{2} (k_{s_1}^2 + k_{s_2}^2) + \arg(\mathfrak{A}(k_{s_1}, k_{s_2})). \quad (1.16)$$

1.3. Campo electromagnético de un haz de luz

En esta sección se presenta el campo electromagnético de un haz de luz usando las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cartesianas y su representación de espectro angular. Considerando un campo electromagnético armónico con polarización lineal a lo largo del eje $\hat{\mathbf{s}}_1$, de tal suerte que el campo eléctrico en coordenadas adimensionales \mathbf{E} en la posición \mathbf{s} está dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}) = E_1(\mathbf{s})\hat{\mathbf{s}}_1 + E_3(\mathbf{s})\hat{\mathbf{s}}_3, \quad (1.17)$$

donde $E_3(\mathbf{s})$ es tal que $\mathbf{E}(\mathbf{s})$ satisface la ley de Gauss, mientras que el campo magnético \mathbf{B} en la posición \mathbf{s} se obtiene de la ley de Ampère y está dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{s}) = -i \frac{c}{\omega} [(\partial_{s_2} E_3(\mathbf{s}))\hat{\mathbf{s}}_1 - (\partial_{s_1} E_3(\mathbf{s}) - \partial_{s_3} E_1(\mathbf{s}))\hat{\mathbf{s}}_2 + (-\partial_{s_2} E_1(\mathbf{s}))\hat{\mathbf{s}}_3], \quad (1.18)$$

cuyas componentes consisten de los gradientes del campo eléctrico.

Al describir los campos eléctrico y magnético mediante la representación de espectro angular en ondas planas homogéneas que viajan en la dirección \mathbf{s}_3 positiva, y asumiendo que los espectros angulares dependen sólo de las coordenadas del vector de onda y no del vector de posición, tal que $E_1(\mathbf{s})$ tiene el espectro angular $\mathfrak{E}_1(k_{s_1}, k_{s_2})$, entonces el espectro angular de $E_3(\mathbf{s})$ es:

$$\mathfrak{E}_3(k_{s_1}, k_{s_2}) = -\frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} \mathfrak{E}_1(k_{s_1}, k_{s_2}), \quad (1.19)$$

mientras que los espectros angulares de las componentes del campo magnético son:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1(k_{s_1}, k_{s_2}) &= -\frac{c}{\omega} \frac{k_{s_1} k_{s_2}}{k_{s_3}} \mathfrak{E}_1(k_{s_1}, k_{s_2}), \\ \mathfrak{B}_2(k_{s_1}, k_{s_2}) &= \frac{c}{\omega} \left(\frac{k_{s_1}^2}{k_{s_3}} + k_{s_3} \right) \mathfrak{E}_1(k_{s_1}, k_{s_2}), \\ \mathfrak{B}_3(k_{s_1}, k_{s_2}) &= -\frac{c}{\omega} k_{s_2} \mathfrak{E}_1(k_{s_1}, k_{s_2}).\end{aligned}\tag{1.20}$$

A partir de los espectros angulares de las componentes del campo eléctrico y magnético es posible obtener los campos tanto en el régimen no paraxial como en el paraxial via las expresiones en (1.13) y (1.15), respectivamente.

1.4. Aproximación de fase estacionaria

El tratamiento consiste en aproximar integrales de la forma:

$$I(\kappa) = \int_a^b f(t) e^{i\kappa\phi(t)} dt,\tag{1.21}$$

donde $\phi(t)$ es una función real de la variable real t y κ es una variable positiva grande que da lugar a muchas oscilaciones. Además se supone $f(t) \in C[a, b]$ y $\phi(t) \in C^2[a, b]$. En la aproximación las contribuciones provienen de las regiones cercanas a los puntos estacionarios de la fase (un punto estacionario de $\phi(t)$ es aquel $t = c$ tal que $\phi'(c) = 0$) y a los puntos extremos del intervalo de integración [9, 10], donde los puntos estacionarios son de orden $O(\kappa^{-1/2})$ y los puntos extremos (suponiendo que no son puntos estacionarios) son de orden $O(\kappa^{-1})$, y se les conoce como puntos estacionarios de primer y segundo tipo, respectivamente [7].

El tratamiento presente sólo considera puntos estacionarios de primer tipo, ya que son los de mayor contribución en la aproximación. Suponiendo que $\phi(t)$ posee un punto estacionario en $c \in [a, b]$, $\phi'(c) = 0$ con $\phi''(c) \neq 0$ (los superíndices ' y '' se refieren a la primera y segunda derivada de ϕ con respecto a t), entonces (1.21) resulta [11, 12] en:

$$I(\kappa) \approx f(c) \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa|\phi''(c)|}} \exp \left[i \left(\kappa\phi(c) + \frac{\pi\mu}{4} \right) \right],\tag{1.22}$$

donde $\mu = \text{sgn}(\phi''(c))$. En problemas físicos que involucran la propagación de ondas, donde $\phi(t)$ adquiere el rol de una fase, (1.22) se conoce como la fórmula de fase estacionaria.

En los casos donde $\phi(t)$ posee n puntos estacionarios y estos no son degenerados, se tiene:

$$I(\kappa) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \sum_{j=1}^n \frac{f(c_j)}{\sqrt{|\phi''(c_j)|}} \exp \left[i \left(\kappa\phi(c_j) + \frac{\pi\mu_j}{4} \right) \right].\tag{1.23}$$

Una extensión del problema unidimensional tratado previamente podría ser el caso de integrales múltiples de la forma:

$$I^{(p)}(\kappa) = \int_D g(\mathbf{x}) e^{i\kappa\phi(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p),\tag{1.24}$$

6CAPÍTULO 1. CONCEPTOS PRELIMINARES SOBRE HACES DE LUZ ESTRUCTURADA

donde D es un dominio conexo en el espacio Euclidiano de dimensión p y κ vuelve a ser una variable positiva grande, $\phi(\mathbf{x})$ es una función real de la variable real \mathbf{x} , además se asume que $\phi(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})$ son funciones suficientemente diferenciables en D para su uso en las operaciones venideras. Suponiendo que \mathbf{x}_0 es un punto estacionario de $\phi(\mathbf{x})$, *i.e.* $\nabla\phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, entonces la expansión de (1.24) está dada por:

$$I^{(p)}(\kappa) \approx \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^{p/2} \frac{g(\mathbf{x}_0)}{\sqrt{|\det(\phi_{x_i, x_j}(\mathbf{x}_0))|}} \exp \left[i \left(\kappa\phi(\mathbf{x}_0) + \frac{\pi}{4} \text{sgn}(\phi_{x_i, x_j}(\mathbf{x}_0)) \right) \right], \quad (1.25)$$

donde $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ y $\phi_{x_i, x_j}(\mathbf{x}_0)$ se refiere a la matriz Hessiana de ϕ valuada en el punto estacionario \mathbf{x}_0 . El tamaño de la matriz Hessiana es de $p \times p$ y sus elementos están formados por las segundas derivadas parciales de ϕ con respecto a las componentes de la variable \mathbf{x} .

Capítulo 2

Óptica Singular

En Óptica el estudio de las propiedades de la luz se ha realizado con mayor énfasis en la forma y estructura de las zonas brillantes, no obstante recientemente se han realizado otros análisis que consideran cantidades no definidas o singulares (que su valor es infinito o no se les puede asignar un valor, *e.g.* la fase del origen en el plano complejo) de la luz. Estos análisis consideran aspectos a escalas más refinadas, como son la identificación de las regiones más brillantes y los vórtices ópticos. Estas propiedades corresponden a singularidades de alguna descripción de la luz, y al estudio de ellas se le conoce como Óptica Singular, el cual provee nuevas visiones de la luz y complementa los estudios tradicionales sobre ésta [13].

2.1. Cáusticas

El estudio tradicional de la Óptica ha estado dirigido a las zonas brillantes de los sistemas en cuestión, que es donde se concentra la luz debido a su enfocamiento, el cual ocurre de manera intencional o natural, ya sea por reflexión, refracción o difracción. Por intencional se entiende que para su realización experimental son necesarias algunas consideraciones especiales, mientras que en el caso natural estas no son necesarias [14].

Una descripción teórica que permite estudiar a estas zonas brillantes es la Óptica geométrica, que consiste en la descripción de la propagación de la luz por trayectorias curvadas. Las trayectorias anteriores son consecuencia del principio de tiempo estacionario para la propagación de luz en un medio, si el medio presenta índice de refracción constante las trayectorias son líneas rectas (rayos). En la Óptica geométrica, a la superficie envolvente dibujada por los rayos se le conoce como cáustica.

Las cáusticas presentan formas y tamaños diversos, permitiendo la comparación con sus realizaciones experimentales. Una consecuencia de la teoría es la predicción de intensidad infinita sobre la cáustica, esto debido a la acumulación de muchos rayos en su vecindad, lo cual no se observa en el experimento donde el fenómeno de difracción acota y redistribuye la intensidad.

Una teoría alternativa en el estudio de las cáusticas es la Teoría de Catástrofes [15], comenzando su aplicación en fenómenos ópticos por M. V. Berry a principios de los 70's [16]. Esta teoría permite identificar y describir las estructuras dentro de los patrones brillantes y sistematiza los fenómenos de enfocamiento en Óptica [17]. Dentro de la teoría aparecen dos conceptos importantes: estabilidad estructural y genericidad.

Los términos de estabilidad estructural y genericidad corresponden a términos matemáticos con definiciones precisas, pero en el contexto óptico se usan de forma flexible. Genérico significa

que el objeto bajo cuestión ocurre sin preparación o condiciones especiales: es típico y sólo sucede. La estabilidad estructural significa que un objeto mantiene su identidad aún cuando es perturbado.

2.1.1. Criterio de rayos y cáustica

Considerando un haz de luz que se propaga en un medio homogéneo e isotrópico en la dirección $+z$, es útil identificar en el campo complejo que le representa a las superficies de fase constante o frentes de onda, *cf.* (1.10) y (1.11),

$$\phi(x, y, z; k_x, k_y) = cte, \quad cte \in [0, 2\pi). \quad (2.1)$$

Sobre cada punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en el frente de onda se tiene una trayectoria normal a ella cuya dirección está dada por $\nabla_{\mathbf{k}}\phi = \mathbf{0}$ [16], y que bajo la relación de dispersión ($|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$) resultan en:

$$\frac{\partial\phi}{\partial k_x} = \frac{\partial\phi}{\partial k_y} = 0, \quad (2.2)$$

donde para cada \mathbf{x} podrían haber múltiples \mathbf{k} que satisfacen la ecuación, a las que se les denota por $\mathbf{k}_i(\mathbf{x})$. En el esquema de trayectorias la intensidad I está dada por:

$$I(\mathbf{x}) = \sum_i \left[\det \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{k}_i(\mathbf{x})} \right) \right]^{-1},$$

donde $\det(d\mathbf{x}/d\mathbf{k}(\mathbf{x}))$ es el Jacobiano del mapeo de \mathbf{k} a \mathbf{x} que define cada trayectoria de acuerdo a (2.2). De forma explícita se tiene:

$$\det \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{k}(\mathbf{x})} \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial k_x^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial k_y^2} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial k_x \partial k_y} \right)^2. \quad (2.3)$$

La cáustica de la familia de trayectorias son las singularidades del mapeo $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{x}$, y ocurren donde $\det(d\mathbf{x}/d\mathbf{k}(\mathbf{x}))$ se anula e I es infinito.

2.1.2. Óptica de catástrofes

En los términos de la óptica de catástrofes la función ϕ se conoce como función potencial y las variables (k_x, k_y) como variables de estado, mientras que x, y, z y t son los parámetros de control. La dimensión del espacio de control se conoce como codimensión, mientras que el corranjo es el número de variables de estado esenciales, donde esencial significa que no se toman en cuenta las dependencias puramente cuadráticas. En general, a la función que resulta de la función potencial al igualar a cero los parámetros de control se le conoce como germen de la catástrofe, la cual corresponde a la forma del frente de onda inicial [14]. El teorema de Thom en la teoría de catástrofes provee una lista de los gérmenes de las primeras catástrofes estables estructuralmente para codimensión menor o igual a 4, conocidas como catástrofes elementales. En la tabla 2.1.2 se listan estas catástrofes junto a algunas de sus propiedades [18].

La cáustica de la primera catástrofe elemental de la tabla 2.1.2 fue estudiada por Sir George Biddell Airy en 1838 al analizar la distribución de intensidad en la vecindad de un arcoiris [19], volviendo a estudiarse más de un siglo después [20]. La cáustica de la segunda catástrofe elemental fue estudiada por T. Pearcey y reportada en 1946, donde analiza el campo electromagnético en la vecindad de la cúspide [21]. En 1979 M. V. Berry, J. F. Nye y F. J. Wright reportaron el estudio de la cáustica del umbílico elíptico [22]. Posteriormente J. F. Nye reportó el estudio de la cola de

Tabla 2.1: Catástrofes elementales.

Nombre	Corrango	Codimensión	Función Potencial $\phi(x, y, z, t; k_x, k_y)$
Doblez (<i>Fold</i>)	1	1	$\frac{1}{3}k_x^3 + k_x x$
Cúspide (<i>Cusp</i>)	1	2	$\pm \frac{1}{4}k_x^4 + k_x x + \frac{1}{2}k_x^2 y$
Cola de golondrina (<i>Swallowtail</i>)	1	3	$\frac{1}{5}k_x^5 + k_x x + \frac{1}{2}k_y^2 y + \frac{1}{3}k_x^3 z$
Mariposa (<i>Butterfly</i>)	1	4	$\pm \frac{1}{6}k_x^6 + k_x x + \frac{1}{2}k_x^2 y + \frac{1}{3}k_x^3 z + \frac{1}{4}k_x^4 t$
Umbílico hiperbólico (<i>Hyperbolic umbilic</i>)	2	3	$k_x k_y^3 + k_x^2 k_y + k_x x + k_y y + k_y^2 z$
Umbílico elíptico (<i>Elliptic umbilic</i>)	2	3	$-k_x k_y^3 + k_x^2 k_y + k_x x + k_y y + k_y^2 z$
Umbílico parabólico (<i>Parabolic umbilic</i>)	2	4	$\pm k_y^4 + k_x^2 k_y + k_x x + k_y y + k_y^2 z + k_y^3 t$

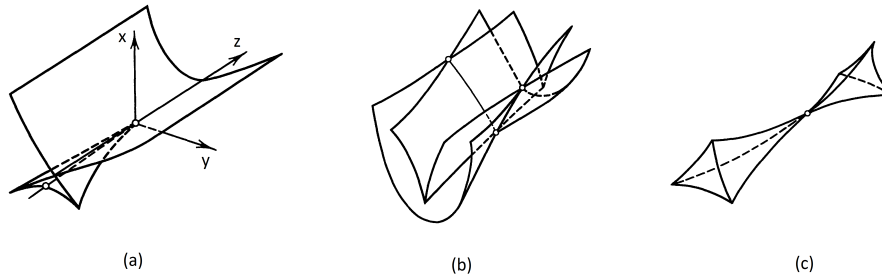


Figura 2.1: Cáusticas de las catástrofes elementales con codimensión 3 listadas en la tabla 2.1.2: (a) cola de golondrina, (b) umbílico hiperbólico y (c) umbílico elíptico. Imagen tomada de [18].

golondrina [23] y el umbílico hiperbólico [24]. Estudios sobre las catástrofes mariposa y umbílico parabólico se encuentran en [25, 26]. Las curvas cáusticas doblez y cúspide que corresponden a los haces Airy y Pearcey se ilustran más adelante 2.3, la figura 2.1 ilustra las superficies cáusticas de las catástrofes elementales con codimensión 3, mientras que las cáusticas de las catástrofes mariposa y umbílico parabólico suelen ilustrarse con secciones en sus parámetros de control.

2.1.3. Líneas de interferencia de rayos

A pesar de las limitaciones en la descripción en términos de rayos de la intensidad de un haz de luz sobre la cáustica, es posible obtener información de la distribución espacial del patrón de intensidad al estudiar la expresión de la fase del haz en cuestión y las condiciones de interferencia de rayos [27]. Esta metodología en el estudio de la morfología de los haces aprovecha la complementariedad entre la descripción geométrica y ondulatoria de la luz. El siguiente resumen está basado en una sección del artículo [28], cuyos autores son F. Camas, R. Jáuregui y P. A. Quinto.

Las expresiones integrales que representan a los campos electromagnéticos de un haz de luz en la representación de espectro angular, tanto fuera como dentro del régimen paraxial *cf.* (1.13) y (1.15), poseen integrandos altamente oscilatorios y se resumen en integrales de la forma:

$$I^{(p)} = \int_{\mathbb{R}^p} g(\mathbf{k}) e^{i\kappa\phi(\mathbf{k})} d\mathbf{k} \quad (2.4)$$

donde κ es un parámetro real grande $\kappa \gg 1$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^p$, $g(\mathbf{k})$ es una función de amplitud real y $\phi(\mathbf{k})$ es una función de fase real. La correspondencia de la integral (2.4) con las integrales de campo (1.13) y (1.15) ocurre cuando $p = 2$, donde el vector \mathbf{k} representa a las componentes transversales del vector de onda, k_{s_1} y k_{s_2} , $g(\mathbf{k})$ representa a la amplitud del espectro angular, $|\mathfrak{A}(k_{s_1}, k_{s_2})|$, y $\kappa\phi(\mathbf{k})$ representa a la fase $\phi_{\mathfrak{A}}^{(np)}(\mathbf{s}; k_{s_1}, k_{s_2})$ o $\phi_{\mathfrak{A}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_{s_1}, k_{s_2})$.

Una aproximación a la integral $I^{(p)}$ se obtiene con el método de fase estacionaria, cf. 1.4, el cual aproxima el valor de la integral como una suma del integrando valuado en los puntos estacionarios de la fase, *i.e.* aquellos valores de \mathbf{k} dentro del dominio de $\phi(\mathbf{k})$ tales que $\nabla\phi(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$, los cuales se relacionan con los rayos.

Asumiendo que $\phi(\mathbf{k})$ posee N puntos estacionarios \mathbf{k}_0^n con $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, tal que la aplicación de la fórmula de fase estacionaria, cf. (1.25), resulta en:

$$I^{(p)} \approx \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^{p/2} \sum_{n=1}^N \frac{g(\mathbf{k}_0^n)}{\sqrt{|\det(\phi_{k_i, k_j}(\mathbf{k}_0^n))|}} \exp \left[i \left(\kappa\phi(\mathbf{k}_0^n) + \frac{\pi}{4} \text{sgn}(\phi_{k_i, k_j}(\mathbf{k}_0^n)) \right) \right], \quad (2.5)$$

donde se identifica para cada punto estacionario los siguientes términos de amplitud $A(\mathbf{k}_0^n)$ y fase $F(\mathbf{k}_0^n)$:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}_0^n) &= \frac{g(\mathbf{k}_0^n)}{\sqrt{|\det(\phi_{k_i, k_j}(\mathbf{k}_0^n))|}}, \\ F(\mathbf{k}_0^n) &= \kappa\phi(\mathbf{k}_0^n) + \frac{\pi}{4} \text{sgn}(\phi_{k_i, k_j}(\mathbf{k}_0^n)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Con el desarrollo anterior es posible comparar la contribución de cada rayo con respecto a aquel de mayor amplitud, por lo que la suma (2.5) se convierte en una contribución de amplitudes y fases relativas.

Etiquetando con el superíndice m a la raíz que produce la amplitud máxima en la aproximación (2.5), *i.e.* \mathbf{k}_0^m tal que $A(\mathbf{k}_0^m) = \max\{A(\mathbf{k}_0^n), n \in \{1, 2, \dots, N\}\}$, y factorizando su amplitud y fase se obtiene:

$$I^{(p)} \approx \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^{p/2} A(\mathbf{k}_0^m) \exp[iF(\mathbf{k}_0^m)] \left(1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N A_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m) \exp[iF_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m)] \right), \quad (2.7)$$

donde $A_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m)$ y $F_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m)$ representan las amplitudes y fases relativas, respectivamente, cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned} A_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m) &= \frac{A(\mathbf{k}_0^n)}{A(\mathbf{k}_0^m)}, \\ F_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m) &= F(\mathbf{k}_0^n) - F(\mathbf{k}_0^m). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Es en las fases relativas donde se presenta el tipo de interferencia que ocurre entre \mathbf{k}_0^n y \mathbf{k}_0^m , siendo las interferencias totalmente constructiva o destructiva las que se analizan y que ocurren cuando la fase relativa es un múltiplo par o impar de π , respectivamente,

$$F_{\Delta}(\mathbf{k}_0^n, \mathbf{k}_0^m) = \begin{cases} 2q\pi & \text{interferencia constructiva} \\ (2q+1)\pi & \text{interferencia destructiva} \end{cases} \quad (2.9)$$

donde q es un número entero.

2.2. Líneas de dislocación

Los estudios mencionados anteriormente sobre las catástrofes de difracción se realizaron resolviendo las expresiones integrales de las ecuaciones (1.7) o (1.8), de manera exacta o aproximada. El análisis de un haz de luz en términos de un campo complejo asocia una amplitud y una fase a cada punto de observación, permitiendo dilucidar la distribución de intensidad fuera, sobre y dentro de la cáustica.

Debido a la naturaleza ondulatoria adoptada en la descripción de la luz, los patrones de intensidad están formados por la interferencia de dos o más ondas, pudiendo ser totalmente constructiva o destructiva. Se observa que las zonas de interferencia totalmente destructiva (amplitud nula) ocurren a lo largo de líneas que pueden adoptar estructuras geométricas diversas, e influyen en la distribución de la intensidad del haz y en particular de las zonas brillantes.

La fase del campo sobre las líneas de amplitud nula está indefinida (singularidad de fase), y cerca de ellas hay comportamientos atípicos en una onda viajera, mostrando estructuras análogas a las imperfecciones que ocurren en los defectos de las redes cristalinas, como fue reconocido por M. V. Berry y J. F. Nye en su artículo [29], por lo que las líneas de amplitud cero y fase indeterminada reciben el nombre de líneas de dislocación.

Las líneas de dislocación poseen estructura matemática bien definida e influyen en la distribución y comportamiento del campo ondulatorio y por ende en su interacción con materia. El estudio de cantidades como el flujo de energía en el vector de Poynting, la densidad de momento lineal y angular, tanto orbital como de espín, muestran propiedades interesantes cuyos efectos mecánicos pueden observarse en una de sus tantas aplicaciones como la manipulación óptica de partículas micrométricas, nanométricas, moléculas e incluso átomos [13].

Esta sección está basada principalmente en [30,31].

2.2.1. Clasificación

Las líneas de dislocación en los frentes de onda de campos escalares son propiedades ubicuas en los fenómenos ondulatorios, y la analogía presente entre la fase del campo en la vecindad de las líneas con los defectos de las estructuras cristalinas permite caracterizarlas. Uno de los objetos usados con este objetivo es la dirección relativa del vector de Burgers con respecto a la dirección de la línea de dislocación, dando lugar a tres tipos diferentes de estas: borde, helicoidal y mixtas.

En un cristal perfecto el contorno de los vectores de traslación principal de un enrejado abarcando cualquier punto es cerrado, mientras que en un cristal defectuoso el contorno que encierra una dislocación está roto, siendo el vector que conecta al punto final con el inicial el vector de Burgers.

Cuando el vector de Burgers es perpendicular a la dirección de la línea de dislocación, ésta se conoce como borde, si el vector es paralelo a la línea entonces se conoce como helicoidal, los casos que no corresponden a los anteriores se conocen como mixtas. En la figura 2.2 se ilustran ejemplos de dislocaciones de borde y helicoidal en cristales y en frentes de onda.

Las líneas de dislocación en frentes de onda son entes dinámicos relacionados al flujo de luz, mientras que las asociadas a los cristales son estacionarias en el espacio. La circulación de la fase alrededor de las líneas es lo que produce una estructura de vórtice, conocido como vórtice óptico. Una dislocación de frente de onda puede definirse en términos de la circulación del gradiente de fase alrededor de ella:

$$\oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \oint_C d\phi = 2m\pi, \quad m \in Z, \quad (2.10)$$

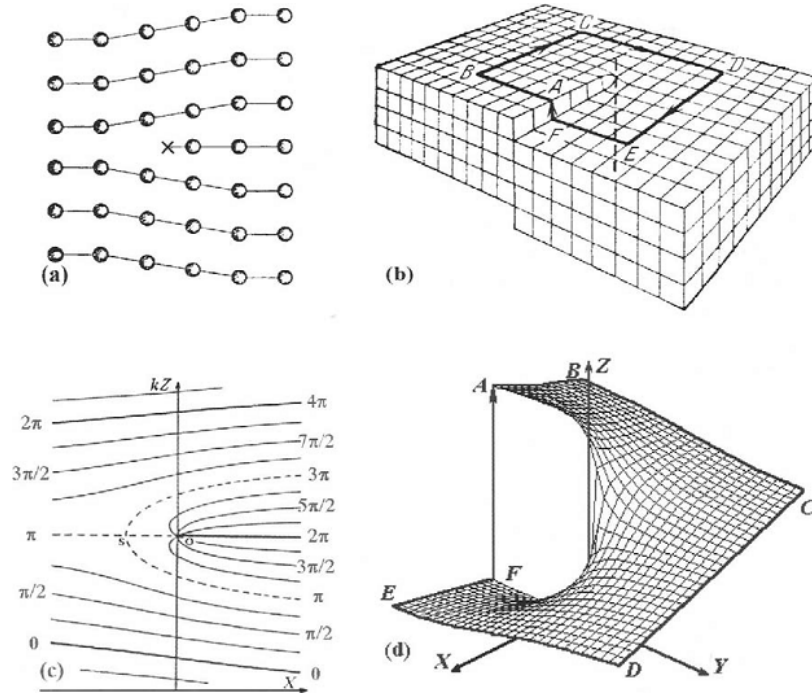


Figura 2.2: Ejemplos de dislocaciones debido a defectos en estructuras cristalinas, (a) borde y (b) helicoidal. En (b) se ilustra un contorno de vectores desde A hasta F, siendo el vector FA el vector de Burgers. En (c) y (d) se ilustran las singularidades de los frentes de onda. (d) ilustra la analogía en la aplicación del vector de Burgers al frente de onda con singularidad. Imagen tomada de [30].

donde $d\mathbf{l}$ es un elemento diferencial de un camino cerrado C alrededor de la línea de dislocación, y m es la carga topológica de la dislocación, cuyo signo es el signo de la singularidad, el cual es positivo si la fase crece en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Debe observarse que la noción de línea de dislocación ocurre en un campo escalar, que corresponde a una componente del campo electromagnético. Una realización para la consideración anterior se tiene en un campo electromagnético con polarización lineal en el régimen paraxial.

2.2.2. Estructura y propiedades

En esta sección se describe la amplitud y los frentes de onda de campos complejos con líneas de dislocación de la clasificación anterior, y se ilustran los frentes de onda.

Borde

Estas dislocaciones ocurren cuando la dirección del vector de Burgers es perpendicular a la línea del vórtice. En la figura 2.3 (a) se ilustran las líneas de equifase con múltiplos de $\pi/4$ en un plano transversal a una línea de dislocación tipo borde. Se observa la convergencia de varias líneas de equifase en un punto, formando un patrón tipo estrella a su alrededor, que es el punto de dislocación. El recorrido de las líneas de equifase en orden creciente muestra que cambian de valor monotonamente completando un periodo de 2π (en general pueden ser múltiplos enteros de

2π). Además se resalta la presencia de otro punto donde confluyen líneas de equifase con valor 2π , cerca del punto de dislocación, que corresponde a un punto silla.

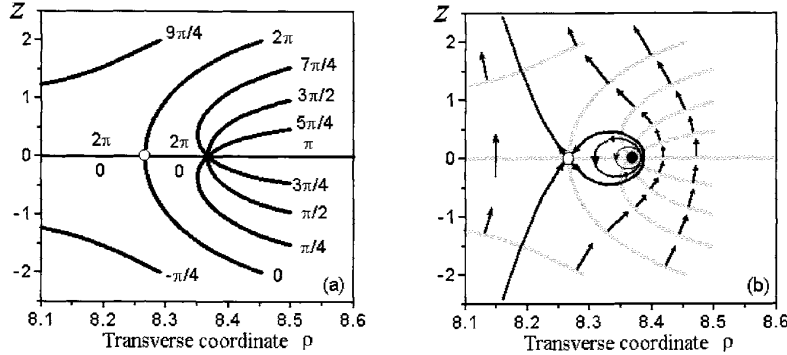


Figura 2.3: (a) Líneas de equifase y (b) vectores de Poynting alrededor de un punto de dislocación tipo borde. Imagen tomada de [30].

La figura 2.3 (b) ilustra el flujo de energía alrededor del punto de dislocación por medio de algunos vectores de Poynting que, en general, son perpendiculares a las líneas de equifase de la figura 2.3 (a). Se observa que la componente vertical de estos vectores apunta principalmente hacia arriba, aunque es posible la presencia de componentes en la dirección opuesta. Este comportamiento ocurre sólo en una región limitada por una curva, que encierra al punto de dislocación y atraviesa al punto silla, conocida como separatriz. La circulación del vector de Poynting alrededor del punto de dislocación permite llamarlo vórtice óptico.

Helicoidal

Estas dislocaciones corresponden a aquellas donde la dirección del vector de Burgers es paralela a la línea de dislocación, teniendo el frente de onda a su alrededor una estructura helicoidal con dos posibilidades de giro, ambas opuestas entre sí, en el sentido de la mano derecha o izquierda con cargas topológicas positiva o negativa, respectivamente.

La figura 2.4 ilustra las curvas de amplitud e intensidad en la coordenada radial para un haz con simetría circular que posee una línea de dislocación con carga topológica $+1$ en su eje, modo LG_0^1 , además se incluye una ilustración del frente de onda alrededor de la línea de dislocación, cuya forma helicoidal caracteriza a las líneas de dislocación tipo helicoidal.

Mixta

Cuando el vector de Burgers no es paralelo ni perpendicular a la línea de dislocación se dice que esta es tipo mixto. La forma del frente de onda alrededor de la línea de dislocación es, en general, helicoidal.

2.2.3. Generación

Desde el inicio de los estudios en Óptica singular hasta la actualidad se han desarrollado y reportado diversas técnicas de producción de haces con vórtices ópticos, siendo uno de los haces de luz de mayor estudio en este comienzo los modos Laguerre-Gauss LG_p^l , que son soluciones a

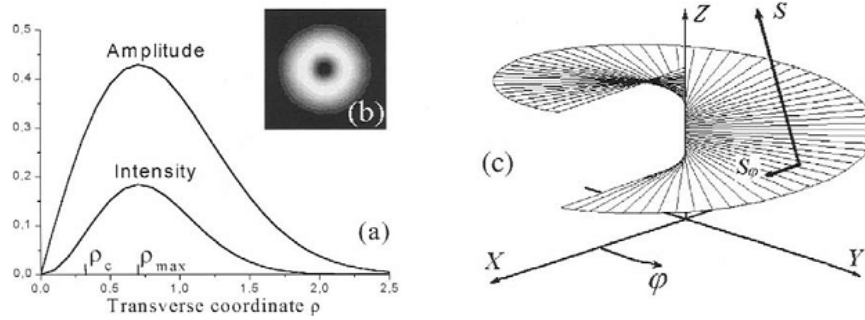


Figura 2.4: (a) Curvas de amplitud e intensidad en la coordenada radial para un haz con una línea de dislocación en su eje, (b) patrón de intensidad en un corte transversal del haz. (c) Frente de onda alrededor de la línea de dislocación. Imagen tomada de [30].

la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas y poseen un vórtice con carga topológica l a lo largo de su eje de propagación.

En general todas las técnicas modifican el frente de onda cuasiplano de un haz de luz incidente por efectos de difracción o refracción, donde la dirección de propagación del haz puede verse afectada. Algunas de estas técnicas se listan a continuación junto a una breve descripción:

1. Holograma de tenedor formado por una rejilla de difracción más una fase helicoidal $\exp(il\phi)$ módulo 2π .
2. Lentes cilíndricas usadas en la conversión de modos Hermite-Gauss ($HG_{m,n}$) en modos Laguerre-Gauss ($LG_{l,p}$), donde $l = m - n$ y $p = \min(m, n)$ [32].
3. Placa espiral de fase formada por un disco con índice de refracción uniforme y grosor variable en la coordenada azimutal, que imprime por transmisión un vórtice a lo largo del eje del haz incidente [33].
4. Holograma generado por computadora implementado en un modulador espacial de luz, que es ampliamente usado en la generación de haces arbitrarios incluyendo aquellos con vórtices [34].

2.2.4. Detección

El método más conocido y usado en la detección de los vórtices ópticos en haces paraxiales es indirecto, ya que utiliza además del haz por examinar un haz con frentes de onda cuasiplanos [35]. Ambos haces se interfieren con un ángulo pequeño entre sus direcciones de propagación y se observa en campo lejano la sección transversal del patrón de interferencia, donde este posee, en general, estructuras de tenedor que resaltan la ubicación y la magnitud de la carga topológica de los vórtices ópticos, la cual se deduce del número extra de líneas que surgen de la bifurcación de la línea que cruza al vórtice. El cambio en el signo de la carga topológica de un vórtice invierte el sentido de la estructura de tenedor. Cuando la dirección del vórtice y el eje de propagación de la onda plana son colineales, el patrón de interferencia forma franjas espirales, donde la magnitud y el signo de la carga topológica se observan en el número de franjas y el sentido de giro de éstas. En haces con vórtices con cargas topológicas opuestas, las estructuras de tenedor se orientan opuestamente. A continuación se ilustran las observaciones anteriores con algunos haces Laguerre-Gauss y una onda cuasiplana formada por un haz Gaussiano ancho.

Considerando las expresiones de haces con longitud de onda λ , polarizados en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ y que se propagan a lo largo de $\hat{\mathbf{z}}$ en un medio con índice de refracción n . El campo eléctrico del haz Gaussiano [36] es:

$$E^G(s_1, s_2, \zeta) = \frac{1}{\tilde{w}(\zeta)} \exp\left(-\frac{s^2}{\tilde{w}(\zeta)^2}\right) \exp\left[-i\left((kw_0)^2\zeta + \frac{s^2}{2\tilde{\varrho}(\zeta)} - \gamma(\zeta)\right)\right], \quad (2.11)$$

donde las coordenadas espaciales son $s_1 = x/w_0$, $s_2 = y/w_0$, $s^2 = s_1^2 + s_2^2$ y $\zeta = z/kw_0^2$, $k = 2\pi n/\lambda$ es el número de onda y w_0 es el radio de la cintura en $\zeta = 0$. El radio de la cintura del haz y el radio de curvatura del frente de onda normalizados con respecto a w_0 y kw_0^2 son $\tilde{w}(\zeta) = \sqrt{1 + 4\zeta^2}$ y $\tilde{\varrho}(\zeta) = \zeta + 1/4\zeta$, respectivamente. La fase de Gouy es $\gamma(\zeta) = \arctan(2\zeta)$.

El campo eléctrico del haz Laguerre-Gauss (La-Ga) es:

$$E_{p,l}^{LG}(s, \phi, \zeta) = \mathcal{N} \frac{1}{\tilde{w}(\zeta)} \exp\left(-\frac{s^2}{\tilde{w}(\zeta)^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}s}{\tilde{w}(\zeta)}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2s^2}{\tilde{w}(\zeta)^2}\right) \exp\left[-i\left((kw_0)^2\zeta + \frac{s^2}{2\tilde{\varrho}(\zeta)} - (2p + |l| + 1)\gamma(\zeta) - l\phi\right)\right], \quad (2.12)$$

donde $s = r/w_0$, $\mathcal{N} = \sqrt{2p!/\pi(p + |l|)!}$ es una constante de normalización, $L_p^{|l|}(\cdot)$ representa a los polinomios asociados de Laguerre y se repiten las cantidades definidas en el haz Gaussiano.

La figura 2.5 ilustra los patrones transversales de intensidad y fase de haces La-Ga con $p = 0$ y $l = 1, 0, -1, -2$, donde se observa la presencia de un vórtice en el origen para $l \neq 0$, y los patrones de intensidad de la interferencia de los haces anteriores con una onda plana con perfil Gaussiano, cuya dirección de propagación es colineal y oblicua (0.0015 rad) a la dirección de propagación de los haces La-Ga. Las coordenadas espaciales adimensionales son $s_1 = x/w_0$, $s_2 = y/w_0$ y $s_3 = z/kw_0^2$, y se usó $w_0 = 500 \mu\text{m}$ y $\lambda = 0.633 \mu\text{m}$.

Todos los patrones de interferencia oblicua con $l \neq 0$, ver figura 2.5 (c, k, ñ), presentan patrones de tenedor que resaltan la bifurcación de la franja brillante que atraviesa al vórtice, también se observa la inversión de la orientación del patrón de tenedor con $l = 1$ y $l = -1$. El patrón de interferencia con $l = 0$ sólo muestra la presencia de franjas brillantes sin bifurcación. En los patrones de interferencia colineal con $l \neq 0$, ver figura 2.5 (d, l, o), se observan franjas espirales brillantes extendiéndose desde el interior hasta el exterior, cuyo número indica la magnitud de la carga topológica del vórtice, y los giros son opuestos cuando $l = 1$ y $l = -1$. Cuando $l = 0$ no se observan franjas espirales brillantes sino donas concéntricas con brillos decrecientes (Anillos de Newton).

2.3. Ejemplos de haces 2D: Airy y Pearcey

A continuación se analizan e ilustran las cústicas de las catástrofes doblez y cúspide en dos dimensiones (2D), que corresponden a los haces Airy y Pearcey de energía finita en el régimen paraxial [37, 38] (Aip y Pep), cuyos espectros angulares son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= \exp\left[\frac{1}{3}(a_1 - ik_{s_1})^3\right] \delta(k_{s_2}), \\ \mathfrak{P}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= \exp\left[-a_1 k_{s_1}^2 + i\frac{k_{s_1}^4}{4}\right] \delta(k_{s_2}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

respectivamente, donde a_1 es un factor de decaimiento positivo que relaciona la longitud de escala x_0 y el radio de la cintura de un haz Gaussiano w_0 mediante $a_1 = w_0^2/(4x_0^2)$. Los términos de

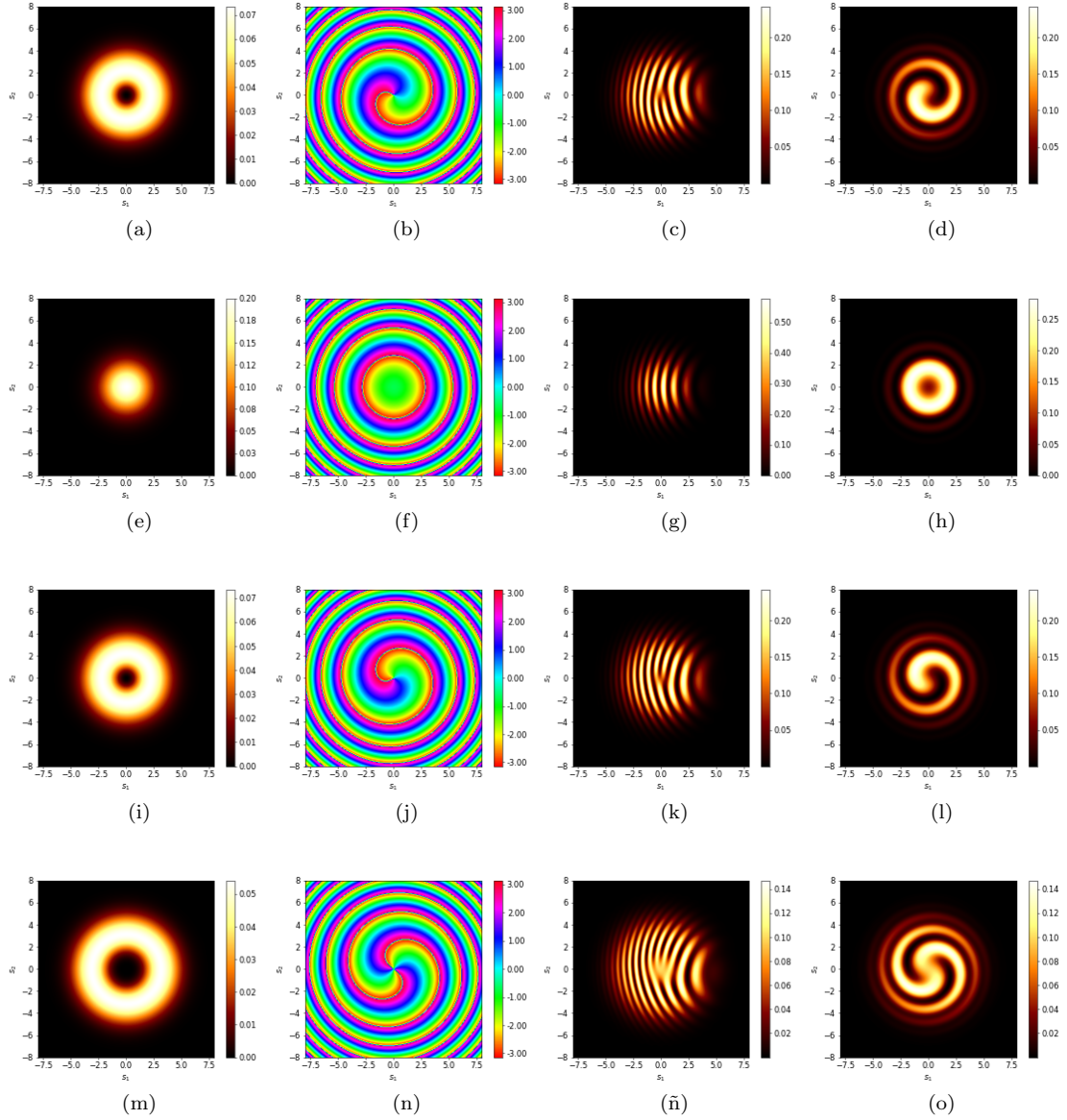


Figura 2.5: Patrones transversales ($\zeta = 1.5$) de (a, e, i, m) intensidad, (b, f, j, n) fase de haces La-Ga ($p = 0$ y $l = 1, 0, -1, -2$) propagándose en vacío $n = 1.0$ con $\lambda = 0.633 \mu\text{m}$ y $w_0 = 500 \mu\text{m}$, y los patrones correspondientes de (c, g, k, ñ) interferencia oblicua a 0.0015 rad e (d, h, l, o) interferencia colineal con una onda cuasiplana. La barra de colores de cada patrón de intensidad está referida con respecto al mínimo y máximo local de intensidad del plano en cuestión.

fase en la aproximación paraxial, *cf.* (1.16), son:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{A}(1)}^{(p)}(s_1, \zeta; k_{s_1}) &= k_{s_1} s_1 - \frac{1}{2} k_{s_1}^2 \zeta - a_1^2 k_{s_1} + \frac{1}{3} k_{s_1}^3, \\ \phi_{\mathfrak{B}(1)}^{(p)}(s_1, \zeta; k_{s_1}) &= k_{s_1} s_1 - \frac{1}{2} k_{s_1}^2 \zeta + \frac{1}{4} k_{s_1}^4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Rayos y C asticas

La aplicación de la condición de rayos a las fases de los haces Aip y Pep, *cf.* 2.14, resultan en:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \phi_{\mathfrak{A}^{(1)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}} = s_1 - k_{s_1} \zeta - a_1^2 + k_{s_1}^2, \\ 0 &= \frac{\partial \phi_{\mathfrak{P}^{(1)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}} = s_1 - k_{s_1} \zeta + k_{s_1}^3, \end{aligned} \quad (2.15)$$

respectivamente, mientras que la condición de c astica es:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \phi_{\mathfrak{A}^{(1)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}^2} = -\zeta + 2k_{s_1}, \\ 0 &= \frac{\partial^2 \phi_{\mathfrak{P}^{(1)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}^2} = -\zeta + 3k_{s_1}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ambas condiciones anteriores resultan en las curvas c asticas de los haces Aip y Pep:

$$\begin{aligned} 0 &= s_1 - a_1^2 - \frac{1}{4} \zeta^2, \\ 0 &= s_1^2 - \frac{4}{27} \zeta^3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

respectivamente, donde la primera tiene solución real en la región $s_1 > a_1^2$ y es simétrica con respecto a ζ , mientras que la segunda tiene soluciones reales en $\zeta > 0$ y es simétrica con respecto a s_1 , como se ilustra en la figura 2.6. A la curva c astica del haz Aip se le conoce como doblez, y a la del haz Pep como cúspide.

A partir de una inspección visual de la figura 2.6 se identifican dos regiones diferentes en base al número de rayos que atraviesan cada punto (s_1, ζ) , 0 y 2 en el doblez y 1 y 3 en la cúspide. Las líneas que separan a estas regiones corresponden a las c asticas, con una discontinuidad de 2 en el número de rayos debido a su coalescencia (perdida o aparición de dos extremos). Por lo que el doblez y la cúspide están asociados a dos tipos de enfocamiento que involucran números diferentes de rayos (*multiplicidad*).

Las realizaciones experimentales de estos haces con c asticas muestran patrones de intensidad con formas, tamaños y posiciones muy similares a los haces teóricos, sin embargo se observa que las intensidades sobre las c asticas teóricas no son infinitas ni máximas, y les rodea un patrón de intensidad con estructuras muy características. La figura (2.7) ilustra los patrones de intensidad teóricos de los haces Aip y Pep 2D obtenidos del campo (1.15) y los espectros angulares (2.13), donde cada caso presenta arcos o lóbulos de luz en el interior de la c astica con las intensidades máximas cerca de la curva c astica. Al exterior de la c astica el patrón de intensidad está dominado, en general, por zonas oscuras.

Líneas de interferencia de rayos

A continuación se ejemplifica el concepto de fase relativa y se ilustran las líneas de interferencia de rayos para los haces Aip y Pep 2D. Las soluciones a la ecuación de rayos para el haz Aip 2D, *cf.* (2.15), son:

$$k_{s_1}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4(s_1 - a_1^2)} \right], \quad (2.18)$$

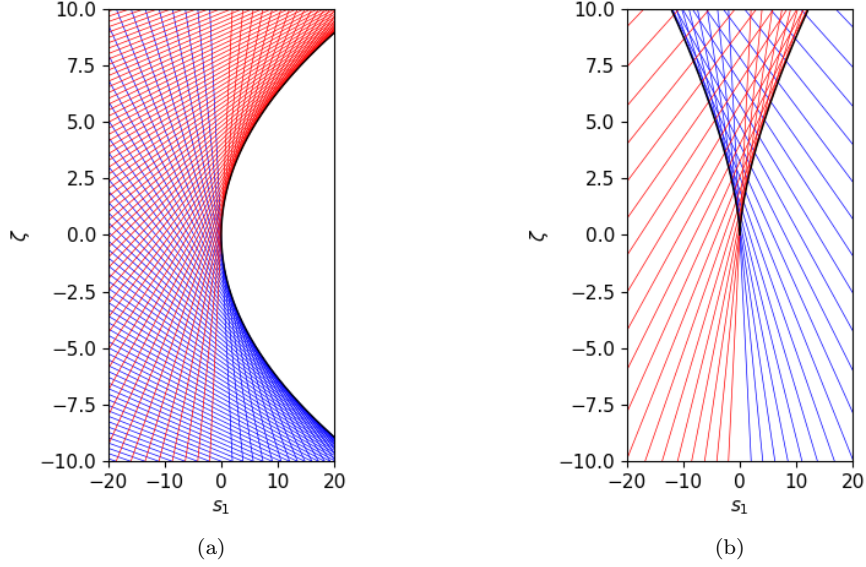


Figura 2.6: Algunos rayos con $k_{s_1} > 0$ (líneas rojas) y $k_{s_1} < 0$ (líneas azules) que participan en la formación de las cúspides (línea negra) del (a) doblez y (b) la cúspide. Se usó $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$.

donde las soluciones son reales o complejas debido al radicando, que es idéntico a la ecuación de la cáustica, cuyo signo positivo o negativo está asociado a la región a la izquierda o derecha de la cáustica, ver figura 2.6 (a).

Al considerar la región con $\zeta^2 - 4(s_1 - a_1^2) \geq 0$ y $\zeta > 0$ la raíz que produce la amplitud máxima es $k_{s_1}^-$, por lo que la frecuencia relativa resultante es:

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(k_{s_1}^-, k_{s_1}^+) &= \frac{1}{6} [\zeta^2 - 4(s_1 - a_1^2)]^{3/2} - \frac{1}{2}\pi \quad \zeta \geq 0, \\ F_{\Delta}(k_{s_1}^+, k_{s_1}^-) &= -F_{\Delta}(k_{s_1}^-, k_{s_1}^+) \quad \zeta < 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La figura 2.8 (a) ilustra las líneas de interferencia constructiva y destructiva para la frecuencia relativa anterior, donde se observa que estas están ubicadas sobre las zonas brillantes y oscuras del haz, respectivamente.

Por otro lado, la ecuación de rayos para el haz Pep, *cf.* (2.15), es una ecuación cúbica que posee tres soluciones cuyas expresiones analíticas generales dadas en [39] se usan aquí, tiene tres soluciones reales dentro de la cáustica, y una real y dos complejas fuera de ella, dadas por:

Si $s_1^2/4 < \zeta^3/27$ (dentro de la cáustica), entonces:

$$\begin{aligned} k_{s_1}^{(1)} &= -2\sqrt{\zeta/3} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \\ k_{s_1}^{(2)} &= -2\sqrt{\zeta/3} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right), \\ k_{s_1}^{(3)} &= -2\sqrt{\zeta/3} \cos\left(\frac{\theta - 2\pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

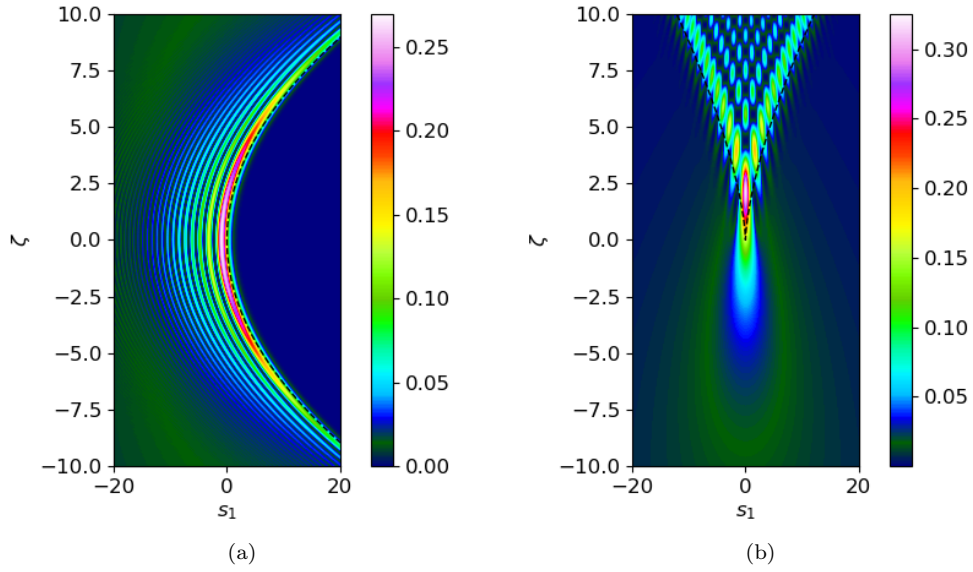


Figura 2.7: Patrones de intensidad de los haces (a) Aip y (b) Pep 2D que visten a las cáusticas doblez y cúspide (línea negra discontinua), respectivamente. Se usó $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$.

donde $\theta = \arccos\left(\frac{s_1}{2} \left(\frac{3}{\zeta}\right)^{3/2}\right)$.

De otra forma (fuera de la cáustica) las raíces son:

$$\begin{aligned} k_{s_1}^{(1)} &= A + B, \\ k_{s_1}^{(2)} &= -\frac{1}{2}(A + B) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B), \\ k_{s_1}^{(3)} &= -\frac{1}{2}(A + B) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B), \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $A = -\frac{1}{2}\text{sgn}(s_1) \left[\frac{|s_1|}{2} + \sqrt{\frac{s_1^2}{4} - \frac{\zeta^3}{27}} \right]^{1/3}$ y $B = \left(\frac{\zeta}{3A}, 0 \right)$ si $(A \neq 0, A = 0)$.

Se observa que el análisis de las amplitudes y fases relativas es más complicado que en el caso anterior, siendo una opción la implementación computacional y su graficación. Los resultados se ilustran en la figura 2.8 (b), donde se observa la concordancia entre los puntos de intersección de tres líneas de interferencia constructiva con los máximos locales de intensidad, mientras que sobre las zonas oscuras cruzan dos líneas de interferencia destructiva y una constructiva. Es posible observar otros puntos oscuros aunque no como los anteriores con la misma estructura de líneas, dos líneas de interferencia destructiva y una constructiva, y se encuentran sobre las líneas “paralelas” a la cáustica que conectan los máximos locales de intensidad.

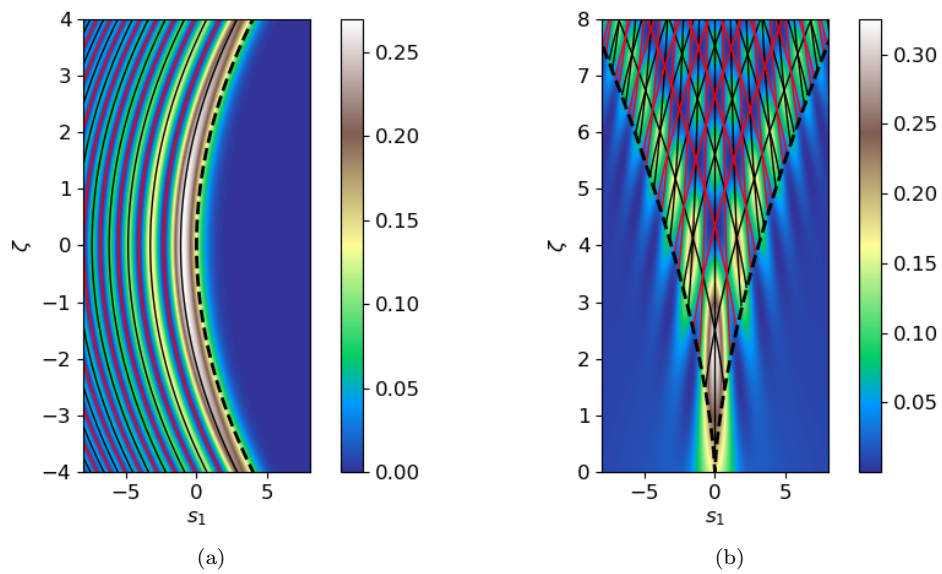


Figura 2.8: Líneas de interferencia de rayos en (a) un haz Aip y (b) un haz Pep 2D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$. Las líneas de interferencia constructiva (línea negra continua) y destructiva (línea roja continua) están superpuestas a cada patrón de intensidad, y se encuentran dentro de la cáustica (línea negra discontinua).

Capítulo 3

Haz Airy simétrico y su descripción con Óptica Singular

En este capítulo se presenta un estudio detallado de la morfología del haz Airy simétrico (AiS) dentro del régimen paraxial (AiSp) y fuera de este (AiSnp) para realizaciones bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D), resaltando las similitudes y diferencias entre ellas. La modelación del haz AiS se realiza mediante una aproximación de espectro angular y las ecuaciones de Maxwell, mientras que su morfología se estudia usando herramientas de Óptica Singular.

3.1. Espectro angular del haz AiS

El espectro angular del haz AiS surge de una paridad par impuesta a las coordenadas transversales del vector de onda, vía el valor absoluto, en el espectro angular del haz Airy [40,41], *cf.* (2.13), repercutiendo en la paridad del campo con respecto a las coordenadas de observación y modificando sustancialmente las propiedades del haz Airy. Las propiedades del haz AiS son el objeto de estudio de este capítulo.

Los espectros angulares de los haces AiS 2D y 3D son:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= \exp\left[\frac{1}{3}(a_1 - i|k_{s_1}|)^3\right] \delta(k_{s_2}), \\ \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= \exp\left[\frac{1}{3}(a_1 - i|k_{s_1}|)^3\right] \exp\left[\frac{1}{3}(a_2 - i|k_{s_2}|)^3\right].\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde a_j con $j = 1, 2$ es un número real positivo, definido en términos del radio de la cintura del haz w_0 a lo largo del eje s_j y la longitud de escala x_0 por $a_j = w_0^2/4x_0^2$, que funge como factor de decaimiento para garantizar la realización del haz, k_{s_1} y k_{s_2} son las coordenadas transversales del vector de onda adimensional que siguen la relación de dispersión $k_{s_1}^2 + k_{s_2}^2 + k_{s_3}^2 = k_s^2$, mientras que $\delta(k_{s_2})$ es una delta de Dirac en k_{s_2} .

El desarrollo de los términos en k_{s_1} del espectro angular $\mathfrak{S}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ en (3.1):

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= \exp\left[\frac{1}{3}a_1^3 - ia_1^2|k_{s_1}| - a_1|k_{s_1}|^2 + i\frac{1}{3}|k_{s_1}|^3\right] \delta(k_{s_2}), \\ &= \exp\left[\frac{1}{3}a_1^3 - a_1|k_{s_1}|^2\right] \exp\left[i\left(-a_1^2|k_{s_1}| + \frac{1}{3}|k_{s_1}|^3\right)\right] \delta(k_{s_2}),\end{aligned}\tag{3.2}$$

resulta en cuatro términos, dos que modulan la amplitud y dos que modulan la fase. De los términos que modulan la amplitud, uno es un factor constante y el otro corresponde al espectro angular de un haz Gaussiano, donde resulta claro el rol del factor de decaimiento. De los términos que modulan la fase, el primero separa la cáustica del haz mientras que el segundo con términos cúbicos en los valores absolutos de las componentes transversales caracteriza a los haces Airy.

Considerando que el campo eléctrico de los haces AiS 2D y 3D están polarizados linealmente a lo largo de s_1 , tal que sus componentes transversales están representadas por los espectros angulares dados en (3.1), entonces las componentes longitudinales de estos campos tendrán espectros angulares, *cf.* (1.19):

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= -\frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} \mathfrak{S}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2}), \\ \mathfrak{J}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) &= -\frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Los espectros angulares anteriores comparten una estructura similar con las componentes transversales excepto por el término $-k_{s_1}/k_{s_3}$, el cual puede reescribirse como

$$|k_{s_1}| \exp[i\pi(1 + \text{sgn}(k_{s_1}))/2]/k_{s_3},$$

por lo que la fase del espectro angular de la componente longitudinal es el de la componente transversal incrementado por $\pi(1 + \text{sgn}(k_{s_1}))/2$.

Las componentes del campo eléctrico de los haces no paraxiales y paraxiales están descritos por (1.13) y (1.15), respectivamente, donde se sustituyen los espectros angulares correspondientes a la componente transversal y longitudinal del campo, (3.1) y (3.3), respectivamente. Cabe destacar que a un haz de luz se le llama paraxial si los vectores de onda que le caracterizan $\mathbf{k}_s = (k_{s_1}, k_{s_2}, k_{s_3})$ son tales que la magnitud de la componente longitudinal k_{s_3} es mucho mayor que la magnitud de sus componentes transversales k_{s_1} y k_{s_2} , lo que repercute en la expresión de los campos que le caracterizan, ver sección 1.1.1. A los haces que no califican como haces paraxiales se les conoce como no paraxiales. En general, los haces de luz no paraxiales o paraxiales se pueden describir con la ecuación (1.13), que para haces paraxiales se aproxima en (1.15).

3.2. Morfología del haz AiS 2D

A continuación se estudia la componente transversal y longitudinal del campo eléctrico del haz AiS 2D dentro y fuera del régimen paraxial, AiSp y AiSnp respectivamente, partiendo de un enfoque geométrico con rayos, cáusticas y líneas de interferencia de rayos hasta los patrones de difracción que envuelven a estas y los vórtices ópticos que contienen. Las integrales que caracterizan a los campos se resuelven computacionalmente. Se presentan algunos resultados analíticos para el caso paraxial, debido a su simplicidad en comparación con el caso no paraxial, y se ilustran todas las características mencionadas.

La estructura de los espectros angulares que caracterizan a los haces AiS 2D presenta una delta de Dirac en k_{s_2} , *cf.* (3.1) y (3.3), que reduce las integrales bidimensionales a integrales unidimensionales, cuyas expresiones se incluyen explícitamente.

3.2.1. Haz AiSp 2D

La representación integral de las componentes transversal $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y longitudinal $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ del campo eléctrico del haz AiSp 2D con espectros angulares $\mathfrak{S}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ y $\mathfrak{J}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2})$, *cf.*

(3.1) y (3.3), están dadas por:

$$E_1^{(p)}(s_1, \zeta) = \frac{e^{ik_s^2 \zeta}}{2\pi x_0} e^{a_1^3/3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{s_1} e^{-a_1 k_{s_1}^2} e^{i(k_{s_1} s_1 - \frac{1}{2} k_{s_1}^2 \zeta - a_1^2 |k_{s_1}| + \frac{1}{3} |k_{s_1}|^3)},$$

$$E_3^{(p)}(s_1, \zeta) = -\frac{e^{ik_s^2 \zeta}}{2\pi x_0} e^{a_1^3/3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{s_1} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} e^{-a_1 k_{s_1}^2} e^{i(k_{s_1} s_1 - \frac{1}{2} k_{s_1}^2 \zeta - a_1^2 |k_{s_1}| + \frac{1}{3} |k_{s_1}|^3)},$$
(3.4)

cuyos términos de fase en el integrando son:

$$\phi_{\mathfrak{E}^{(1)}}^{(p)}(s_1, \zeta; k_{s_1}) = k_s^2 \zeta + k_{s_1} s_1 - \frac{1}{2} k_{s_1}^2 \zeta - a_1^2 |k_{s_1}| + \frac{1}{3} |k_{s_1}|^3,$$

$$\phi_{\mathfrak{J}^{(1)}}^{(p)}(s_1, \zeta; k_{s_1}) = \phi_{\mathfrak{E}^{(1)}}^{(p)}(k_{s_1}) + \frac{1}{2} \pi (1 + \text{sgn}(k_{s_1})),$$
(3.5)

respectivamente. Se observa que $\phi_{\mathfrak{J}^{(1)}}^{(p)}(k_{s_1})$ difiere de $\phi_{\mathfrak{E}^{(1)}}^{(p)}(k_{s_1})$ en un término que depende del signo de la componente transversal del vector de onda, el cual no será relevante en la obtención de los rayos y la cáustica, por lo que se tiene el mismo resultado para ambas componentes del campo eléctrico.

Rayos y Cáustica

Retomando sólo la expresión de la fase para $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$, *cf.* (3.5), las condiciones de rayos y cáustica resultan en:

$$0 = \frac{\partial \phi_{\mathfrak{E}^{(1)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}} = s_1 - k_{s_1} \zeta - a_1^2 \text{sgn}(k_{s_1}) + |k_{s_1}|^2 \text{sgn}(k_{s_1}),$$

$$0 = \frac{\partial^2 \phi_{\mathfrak{E}^{(1)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}^2} = -\zeta + 2|k_{s_1}|,$$
(3.6)

respectivamente, donde $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo y se excluye la derivación en $k_{s_1} = 0$. Debe notarse que la condición de cáustica restringe ζ a valores positivos. La ecuación de la cáustica resultante es:

$$|s_1| - a_1^2 - \frac{1}{4} \zeta^2 = 0,$$
(3.7)

cuya forma es similar a la del haz Airy, *cf.* (2.17), excepto por el valor absoluto en s_1 . Se observa que para cada valor de $\zeta > 0$ la ecuación (3.7) tiene dos soluciones reales para s_1 siempre y cuando $|s_1| > a_1^2$, mientras que para $|s_1| < a_1^2$ los valores de ζ son imaginarios y no se consideran. Cuando $s_1 = a_1^2$ resulta $\zeta = 0$. La curva cáustica consiste en dos partes con forma de parábola, una abriendo hacia la derecha y otra hacia la izquierda con vértices en $s_1 = a_1^2$ y $s_1 = -a_1^2$, respectivamente, por lo que la distancia entre ambos vértices es $2a_1^2$. En la figura 3.1 se ilustran algunos rayos y la cáustica de dos haces AiSp 2D con valores diferentes de a_1 , observándose en la cúspide la separación producida entre las dos partes de la curva cáustica.

El espectro angular del haz AiSp 2D modifica la morfología de la cáustica que caracteriza al haz Airy, tipo doblez, y adquiere el tipo cúspide que caracteriza al haz Pearcey. Este hecho sugiere que la morfología de las cáusticas depende de la paridad de la fase del espectro angular con respecto a las componentes transversales del vector de onda y no de su potencia, como se predice en la Óptica de Catástrofes.

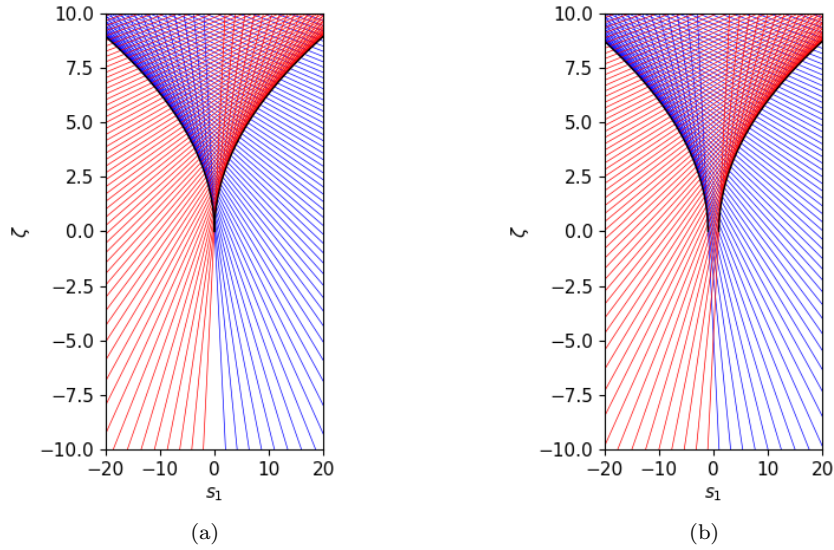


Figura 3.1: Algunos rayos con $k_{s_1} > 0$ (líneas rojas) y $k_{s_1} < 0$ (líneas azules) que participan en la formación de la cáustica (línea negra) del haz AiSp 2D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y factores de decaimiento (a) $a_1 = 0.03$ y (b) $a_1 = 1.0$.

Líneas de interferencia de rayos

Las soluciones a la ecuación de la condición de rayos, *cf.* (3.6), están dadas por:

$$k_{s_1} = \frac{1}{2} \left[\zeta \operatorname{sgn}(k_{s_1}) \pm \sqrt{\zeta^2 - 4(s_1 \operatorname{sgn}(k_{s_1}) - a_1^2)} \right], \quad (3.8)$$

donde en cada punto (s_1, ζ) y al seleccionar el signo de la solución se presentan 0, 1 o 2 soluciones reales, dependiendo de la región en la que se encuentre el punto con respecto a la cáustica.

Analizando el caso con $k_{s_1} > 0$, entonces (3.8) se vuelve:

$$k_{s_1} = \frac{1}{2} \left[\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4(s_1 - a_1^2)} \right], \quad (3.9)$$

donde el signo del radicando permite analizar las soluciones, dando lugar a tres casos diferentes:

1. Si $s_1 = a_1^2$ se tienen dos soluciones $k_{s_1}^{(1)} = 0$ y $k_{s_1}^{(2)} = \zeta$, donde sólo se considera la última por la exclusión de $k_{s_1} = 0$ en la ecuación de rayos.
2. Si $s_1 < a_1^2$ el radicando es estrictamente positivo y mayor a ζ^2 , por lo que sólo se toma la raíz positiva $k_{s_1}^{(1)} = [\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4(s_1 - a_1^2)}]/2$.
3. Si $s_1 > a_1^2$ el radicando puede ser positivo, cero o negativo. El radicando igual a cero corresponde a la curva cáustica, que tiene dos soluciones degeneradas $k_{s_1}^{(1,2)} = \zeta/2$, mientras que el radicando positivo (negativo) corresponde a la región por encima (debajo) de la cáustica con dos (cero) soluciones reales.

Un análisis similar se puede hacer con $k_{s_1} < 0$ o debido a la simetría en s_1 las raíces y su número corresponden al del caso positivo después de una reflexión en s_1 y su cambio de signo. La figura 3.2 ilustra el número de raíces reales para la ecuación de condición de rayos en una región del plano $s_1\zeta$, registrando 1, 2 o 3 raíces. La distribución del número de raíces reales en el plano $s_1\zeta$ da lugar a regiones que difieren en 1 o 2 raíces, donde estas últimas se asocian a la coalescencia de dos rayos y dan lugar a la curva cáustica. Se observa que el número de raíces al interior de la cáustica es 2 o 3, mientras que al exterior es sólo 1, por lo que el análisis de líneas de interferencia de rayos es aplicable sólo al interior de la cáustica.

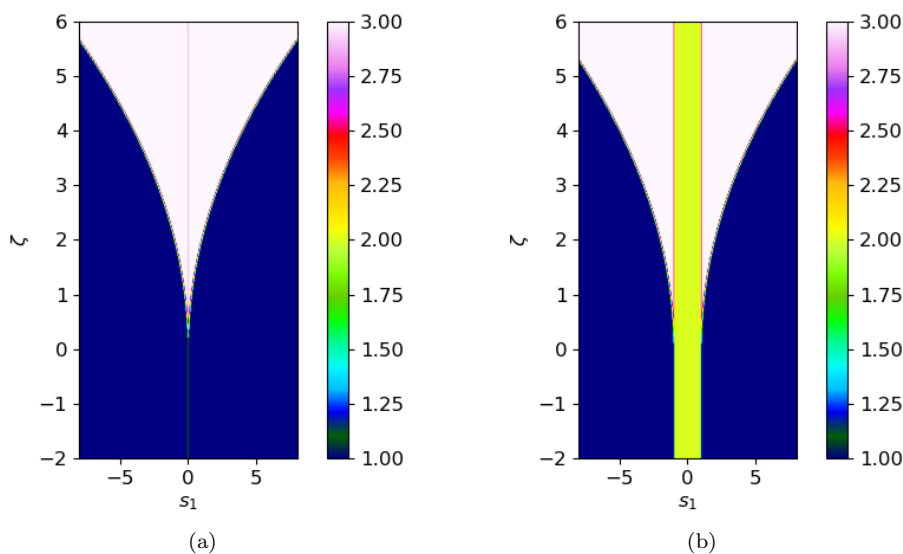


Figura 3.2: Distribución en el plano $s_1\zeta$ del número de raíces reales de la condición de rayos para el haz AiSp 2D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y factores de decaimiento (a) $a_1 = 0.03$ y (b) $a_1 = 1.0$.

Dada la distribución del número de raíces reales (rayos) en un haz AiSp 2D, es posible analizar las líneas de interferencia de rayos en ambas componentes de su campo eléctrico. Como ya se vió ambas componentes presentan la misma distribución de rayos a pesar de la diferencia de $\pi(1 + \text{sgn}(k_{s_1}))/2$ que mantienen las fases de sus integrandos, *cf.* (3.5), no obstante esa diferencia es relevante en el análisis de las líneas de interferencia de rayos, que usa la fase relativa entre dos rayos, y produce resultados diferentes. La distribución del número de raíces del haz AiSp 2D en el plano $s_1\zeta$ es de 1 o 3 y el análisis de las líneas de interferencia de rayos, que requiere al menos dos rayos, sólo se realiza en la región con 3 rayos. De los 3 rayos disponibles, se obtienen dos fases relativas que pueden dar lugar a interferencias totalmente constructivas o destructivas. Cuando se presenta una o dos interferencias totales (constructiva o destructiva) se dice que la interferencia total es de dos o tres rayos.

La figura 3.3 ilustra los puntos de interferencia totalmente constructiva y destructiva de dos y tres rayos obtenidos para $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$. Estos puntos están ubicados simétricamente con respecto al eje s_1 , aquellos que involucran dos rayos forman líneas, y los que involucran tres rayos forman puntos y están ubicados en la intersección de las líneas anteriores. Una inspección visual de las figuras 3.3 sugiere que cada una de las líneas de interferencia totalmente destructiva

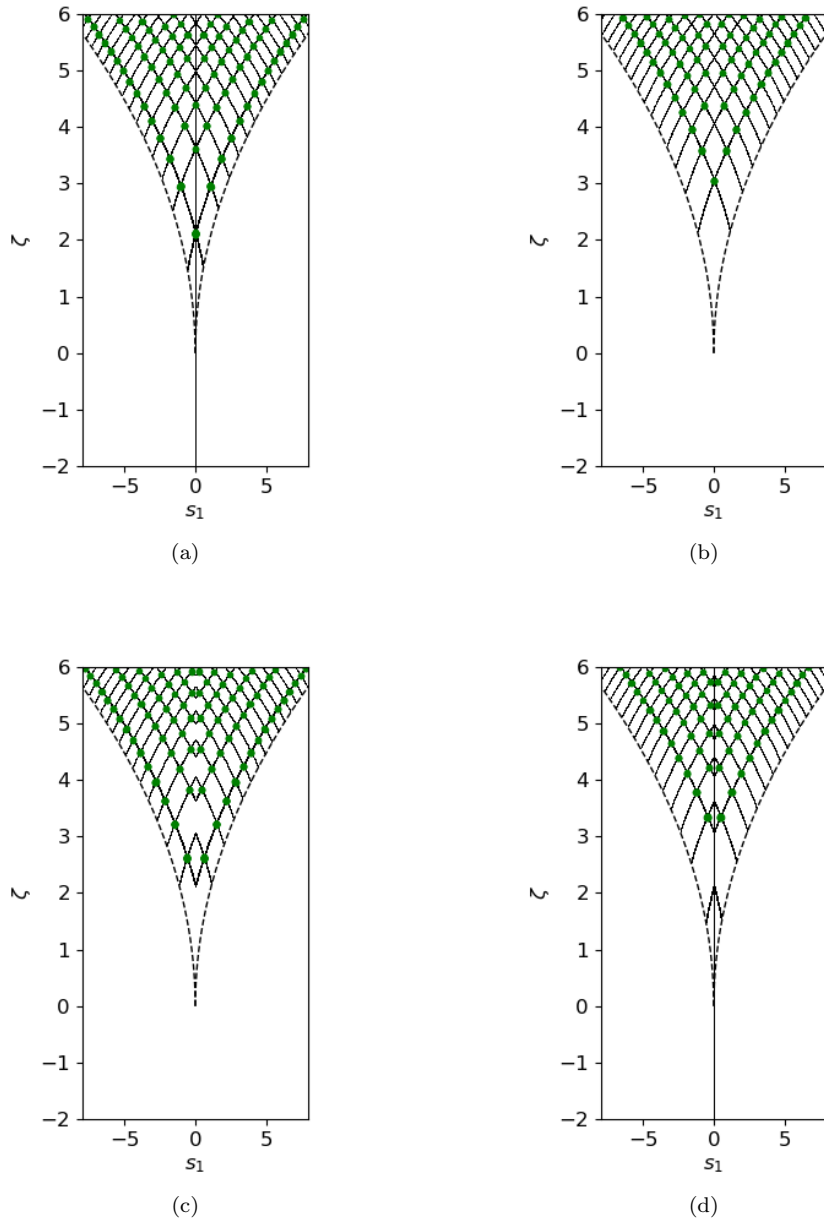


Figura 3.3: Puntos de interferencia de rayos totalmente (a, c) constructiva y (b, d) destructiva junto a la cáustica (línea negra discontinua) para los campos $(E_1^{(p)}(s_1, \zeta), E_3^{(p)}(s_1, \zeta))$ de un haz AiSp 2D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$. Los puntos en color negro (verde) resaltan la interferencia total de dos (tres) rayos.

de dos rayos (b, d) son “paralelas” a las líneas de interferencia totalmente constructiva (a, c) y se ubican entre ellas, de tal suerte que los puntos de interferencia totalmente constructiva y

destruccion de 3 rayos son diferentes en cada componente del campo eléctrico. También contrastan las líneas de interferencia discontinuas de $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ con respecto a las líneas de interferencia continuas de $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$.

El estudio de los patrones de difracción en la siguiente sección, donde se resuelven las integrales de los campos, *cf.* (3.4), muestra la relación que tienen los puntos de interferencia con los máximos y mínimos locales de intensidad.

Patrón de difracción

En esta sección se resuelven computacionalmente las integrales que representan a las componentes transversal y longitudinal del campo eléctrico del haz AiSp 2D, $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ respectivamente, *cf.* (3.4). Debido a la aproximación paraxial, $k_{s_1} \ll k_{s_3}$, $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ es más relevante, en términos de la amplitud, que $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$, ya que éste presenta un factor k_{s_1}/k_{s_3} en su espectro angular que disminuye la amplitud de las contribuciones al campo. Las dimensiones características involucradas en los haces AiSp 2D vuelven impráctico el uso del término de fase $e^{ik_s^2 \zeta}$ en ambas componentes del campo, ya que oscila rápidamente en ζ y no provee información adicional sobre la morfología de los campos, por lo que se omite en los cálculos e ilustraciones posteriores.

Debido a la simetría de la región de integración en las integrales por resolver, el integrando se reduce a uno que es par en la variable de integración y la región de integración se reduce a la mitad. En el desarrollo anterior se identifica la paridad de $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ en s_1 como par e impar, respectivamente.

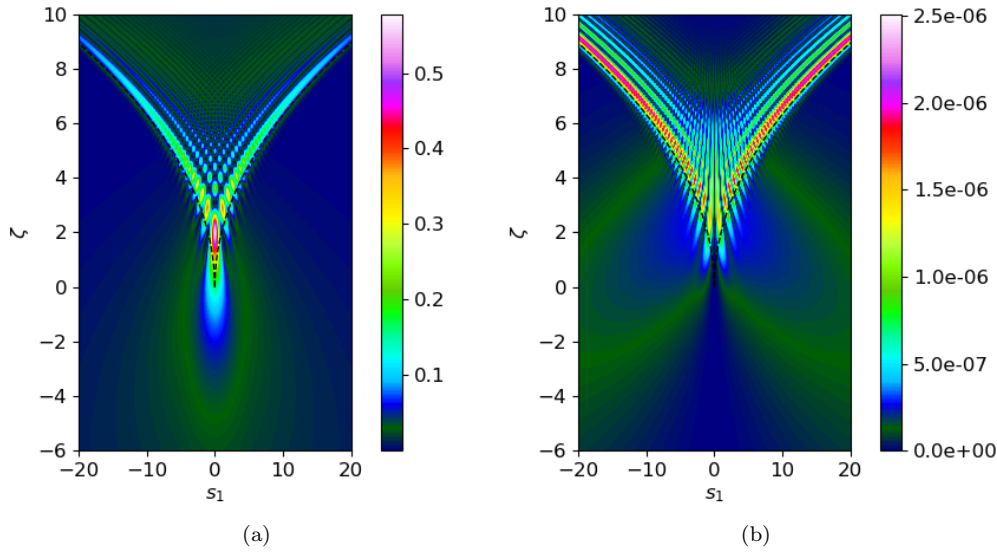


Figura 3.4: Curva cáustica (línea negra discontinua) revestida por los patrones de intensidad de (a) $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y (b) $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ en un haz AiSp 2D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$.

La figura 3.4 ilustra los patrones de intensidad de una realización de $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$

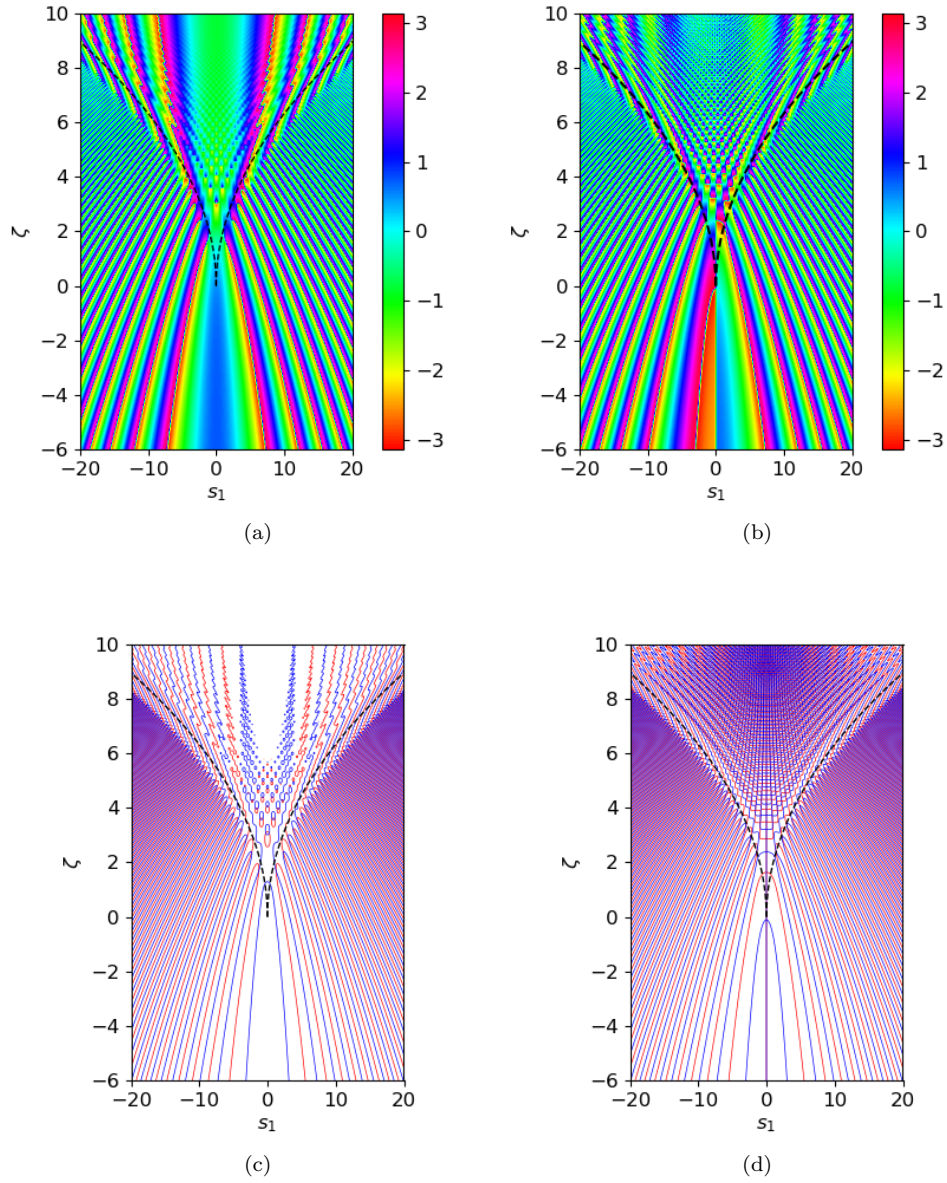


Figura 3.5: Patrón de fase (a, b) y curvas de ceros de la parte real (línea roja continua) e imaginaria (línea azul continua) (c, d) de $(E_1^{(p)}(s_1, \zeta), E_3^{(p)}(s_1, \zeta))$ de un haz AiSp 2D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$. En todas las figura se sobrepone la curva cáustica (línea negra discontinua).

con $a_1 = 0.03$ y $x_0 = 100 \mu\text{m}$, donde se observa la presencia de máximos locales de intensidad localizados simétricamente con respecto al eje s_1 , y concentrados principalmente en el interior y alrededor de la curva cáustica. Resalta la distribución de la ubicación de los máximos locales de

intensidad en cada componente, ya que no son iguales, *e.g.* la presencia de un máximo global de $|E_1^{(p)}(s_1, \zeta)|^2$ en la zona inferior cercana a la cúspide de la cáustica, mientras que $|E_3^{(p)}(s_1, \zeta)|^2$ tiene valor nulo en $s_1 = 0$ para toda ζ , debido a la asimetría del campo. Además se observa que los patrones de intensidad difieren en 5 ordenes de magnitud.

Además de los máximos locales en los patrones de intensidad se identifican mínimos locales cerca de estos, tanto dentro como fuera de la cáustica, distribuidos simétricamente con respecto a s_1 en el plano $s_1\zeta$. Se observa que en la zona externa a la cáustica predominan intensidades bajas, sobresaliendo la presencia de mínimos locales de intensidad, ya que no están previstas por el método de interferencia de rayos. La ubicación y propiedades de los mínimos locales de intensidad se aborda a continuación.

La simetría y asimetría de $E_1^{(p)}(s_1, \zeta)$ y $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ también se observa en sus patrones de fase, donde la componente transversal (longitudinal) es simétrica (antisimétrica) con respecto a s_1 , como lo ilustra la figura 3.5 (a, b), observándose un salto de fase por π al atravesar el eje $s_1 = 0$ para $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$. Los patrones de fase presentan singularidades de fase dentro y fuera de la cáustica ubicadas simétricamente con respecto a s_1 , con cargas topológicas unitarias y opuestas. Las singularidades de fase en ambas componentes fuera de la cáustica aparecen aisladas, mientras que en su interior se encuentran por pares y cerca una de otra.

La relación de los mínimos locales de intensidad y las singularidades de fase hallados previamente es evidente al ilustrar las curvas de ceros de la parte real e imaginaria de las componentes del campo, figura 3.5 (c, d), ya que en los puntos de intersección la amplitud del campo es cero y se corresponden con las singularidades de fase, formando puntos de dislocación tipo borde debido a la estructura 2D del campo.

3.2.2. Haz AiSnp 2D

El campo eléctrico del haz AiSnp 2D con componente transversal $E_1^{(np)}$ y longitudinal $E_3^{(np)}$, cuyos espectros angulares son $\mathfrak{S}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ y $\mathfrak{J}_{a_1}^{(1)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ respectivamente, está dado por:

$$\begin{aligned} E_1^{(np)}(s_1, s_3) &= \frac{e^{a_1^3/3}}{2\pi x_0} \int_{-k_s}^{+k_s} dk_{s_1} e^{-a_1 k_{s_1}^2} e^{i(k_{s_1} s_1 + k_{s_3} s_3 - a_1^2 |k_{s_1}| + \frac{1}{3} |k_{s_1}|^3)}, \\ E_3^{(np)}(s_1, s_3) &= -\frac{e^{a_1^3/3}}{2\pi x_0} \int_{-k_s}^{+k_s} dk_{s_1} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} e^{-a_1 k_{s_1}^2} e^{i(k_{s_1} s_1 + k_{s_3} s_3 - a_1^2 |k_{s_1}| + \frac{1}{3} |k_{s_1}|^3)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $k_{s_3} = +\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}$. Los términos de fase en el integrando de las integrales anteriores están dados por:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{S}(1)}^{(np)}(s_1, s_3; k_{s_1}) &= k_{s_1} s_1 + k_{s_3} s_3 - a_1^2 |k_{s_1}| + \frac{1}{3} |k_{s_1}|^3, \\ \phi_{\mathfrak{J}(1)}^{(np)}(s_1, s_3; k_{s_1}) &= \phi_{\mathfrak{S}(1)}^{(np)}(s_1, s_3; k_{s_1}) + \frac{1}{2} \pi (1 + \text{sgn}(k_{s_1})), \end{aligned} \quad (3.11)$$

para $E_1^{(np)}(s_1, s_3)$ y $E_3^{(np)}(s_1, s_3)$, respectivamente. De manera similar al caso paraxial, el análisis de rayos y cáustica en ambos términos de fase se reduce al análisis de $\phi_{\mathfrak{S}(1)}^{(np)}(s_1, s_3; k_{s_1})$.

Rayos y Cústica

Aplicando la condición de rayos y cústica a la fase de $E_1^{(np)}(s_1, s_3)$, cf. (3.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \phi_{\mathfrak{S}^{(1)}}^{(np)}}{\partial k_{s_1}} = s_1 - \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} s_3 - a_1^2 \operatorname{sgn}(k_{s_1}) + |k_{s_1}|^2 \operatorname{sgn}(k_{s_1}), \\ 0 &= \frac{\partial^2 \phi_{\mathfrak{S}^{(1)}}^{(np)}}{\partial k_{s_1}^2} = -\frac{k_s^2}{k_{s_3}^3} s_3 + 2|k_{s_1}|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se observa la imposibilidad de obtener la expresión analítica de la curva cústica en términos de s_1 y s_3 , ya que no es posible despejar k_{s_1} en la condición de cústica, por lo que se implementa una solución computacional. Debe notarse que la condición de cústica restringe s_3 a valores positivos. La figura 3.6 ilustra algunos rayos y la cústica que forman para dos valores diferentes de a_1 , obteniéndose dos secciones formadas por los vectores de onda con componente transversal positiva y negativa. Resalta el incremento en el número de rayos involucrados en la formación de la cústica y su morfología con respecto al caso paraxial. La curva cústica es simétrica con respecto a s_1 y posee dos cúspides en la región superior y uno en la región inferior si $a_1 = 0$. Cuando $a_1 > 0$ las dos secciones de la cústica se alejan por $2a_1^2$ perdiendo la cúspide inferior. También se observa en la región superior que ambas secciones de la curva cústica se intersectan en tres puntos: uno ubicado sobre el eje $s_1 = 0$ y las otras dos ubicadas simétricamente en s_1 .

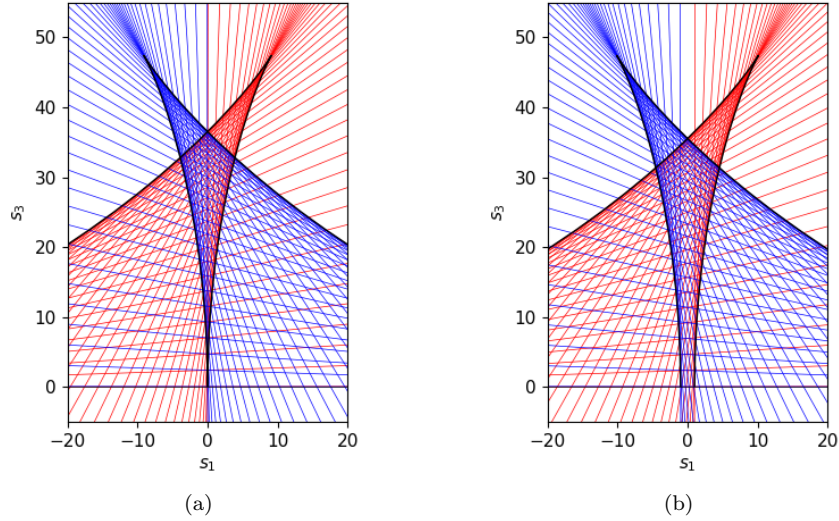


Figura 3.6: Algunos rayos con $k_{s_1} > 0$ (líneas rojas) y $k_{s_1} < 0$ (líneas azules) en el intervalo $(-k_s, k_s)$ que forman a la cústica (línea negra) de un haz AiSnp 2D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y factores de decaimiento (a) $a_1 = 0.03$ y (b) $a_1 = 1.0$.

El incremento del número de raíces en el haz AiSnp 2D incrementa el número de regiones a analizar con las líneas de interferencia de rayos, así como el número de rayos involucrados en el enfocamiento de luz. Estos temas se abordan en la siguiente sección.

Líneas de interferencia de rayos

El uso de los rayos en el estudio de la ubicación de los máximos y mínimos locales de intensidad motiva la resolución de la ecuación de rayos, *cf.* (3.12), que al mutiplicar por $sgn(k_{s_1})$, identificar $S_1 = s_1 sgn(k_{s_1}) - a_1^2$, reacomodar términos, elevar la ecuación resultante al cuadrado y agrupar términos semejantes resulta en:

$$(k_{s_1}^2)^3 + (k_{s_1}^2)^2 (2S_1 - k_s^2) + (k_{s_1}^2) (S_1^2 + s_3^2 - 2S_1 k_s^2) - k_s^2 S_1^2 = 0, \quad (3.13)$$

que es una ecuación cúbica para $k_{s_1}^2$ y posee tres soluciones, que pueden ser reales y diferentes, reales e iguales o una real y dos complejas, cuyas formas analíticas generales se encuentran en [39]. En este trabajo sólo se buscan las soluciones reales, debido a su relación directa con los rayos involucrados en la formación del haz, y se calculan computacionalmente usando las fórmulas generales. La manipulación de la ecuación de rayos original via la elevación al cuadrado duplicó el número de soluciones, de los cuales sólo la mitad corresponden a la ecuación original, por lo que es necesario filtrar las soluciones originales por medio de su signo, su presencia en el dominio $|k_{s_1}| \in [0, k_s]$ y la corroboración de ser soluciones a la ecuación de rayos original.

Para el caso particular con $S_1 = 0$, las soluciones son:

$$k_{s_1}^{(1)} = 0, \quad k_{s_1}^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{k_s^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_s^2}{2}\right)^2 - s_3^2}}, \quad k_{s_1}^{(4,5)} = \pm \sqrt{\frac{k_s^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_s^2}{2}\right)^2 - s_3^2}}, \quad (3.14)$$

donde la raíz $k_{s_1}^{(1)} = 0$ debe entenderse como un caso límite $k_{s_1} \rightarrow 0$ que conduce al rayo descrito por la ecuación $|s_1| = a_1^2$. Debe notarse que $0 = S_1 = s_1 sgn(k_{s_1}) - a_1^2$ ocurre cuando $sgn(k_{s_1}) > 0$ y $s_1 = a_1^2$ o $sgn(k_{s_1}) < 0$ y $s_1 = -a_1^2$, por lo que les corresponde como soluciones $\{k_{s_1}^{(1)}, k_{s_1}^{(2)}, k_{s_1}^{(4)}\}$ o $\{k_{s_1}^{(1)}, k_{s_1}^{(3)}, k_{s_1}^{(5)}\}$ respectivamente sólo si el radicando $(k_s^2/2)^2 - s_3^2 > 0$, de otra forma la única solución en ambos casos es $k_{s_1}^{(1)} = 0$.

La implementación computacional en la búsqueda de soluciones de (3.13) permite establecer un valor de corte para el cero de la ecuación de rayos (3.12), *i.e.* un número positivo pequeño que acotará al valor absoluto de la ecuación de rayos, de tal suerte que cada raíz candidata tendrá que satisfacer al valor absoluto de la ecuación de rayos por debajo del valor de corte para considerarse una raíz original. El valor de corte se ajusta manualmente y en este trabajo se tomó 10^{-3} .

La figura 3.7 ilustra el número de soluciones reales a la ecuación de rayos en una región del plano $s_1 s_3$ para dos valores diferentes de a_1 , donde se identifican regiones con número de raíces desde 0 hasta 5 ubicadas simétricamente en s_1 , y definiendo fronteras con discontinuidad de 1 o 2 en el número de raíces, donde la primera corresponde a $|s_1| = a_1^2$ que encierra la región con $s_1 \in (-a_1^2, a_1^2)$, mientras que la segunda corresponde a las curvas cáusticas ilustradas en la figura 3.6. En este caso el número de raíces aumenta con respecto al caso paraxial.

El análisis de los máximos y mínimos locales de intensidad de las componentes del haz AiSnp 2D se realiza computacionalmente con el algoritmo expuesto en la sección 2.1.3, donde la evaluación de la fase relativa entre dos rayos devuelve un número q que determina el carácter constructivo o destructivo de la interferencia de dos rayos, *cf.* (2.9). En este trabajo el número q se redondeó al número entero más cercano si su diferencia con él se encuentra en el intervalo $[-2 \times 10^{-2}, 2 \times 10^{-2}]$. Los resultados del análisis de las líneas de interferencia totalmente constructiva y destructiva en $E_1^{(np)}(s_1, s_3)$ y $E_3^{(np)}(s_1, s_3)$ se ilustran en la figura 3.8, donde se observan puntos que involucran la interferencia de 2, 3 y 4 rayos. La ubicación de estos puntos es simétrica con respecto a s_1 y se restringe a las regiones con 2 raíces reales o más.

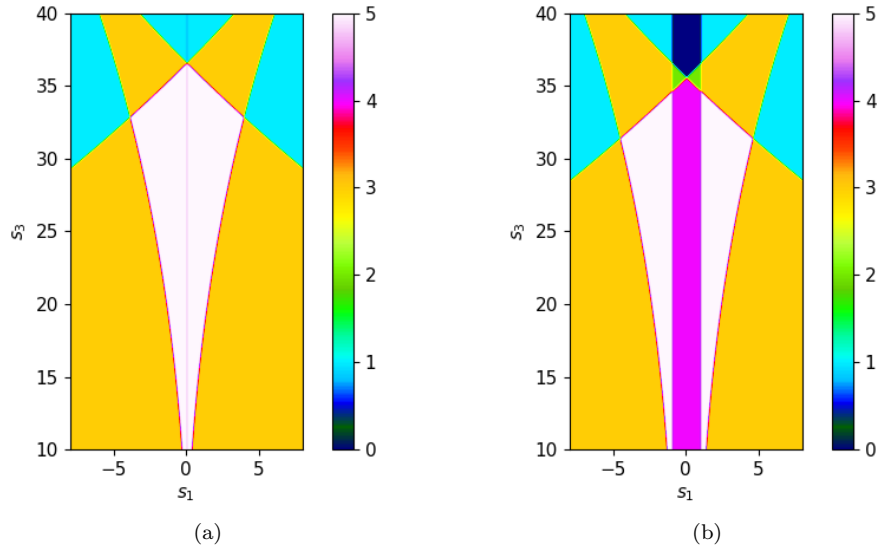


Figura 3.7: Distribución del número de raíces reales en la ecuación de rayos para un haz AiSnp 2D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y (a) $a_1 = 0.03$ y (b) $a_1 = 1.0$.

Los puntos que involucran sólo dos rayos forman patrones de líneas, y están presentes en todas las regiones, los que involucran 3 rayos siguen siendo puntos y aparecen en todas las regiones, mientras que los que involucran 4 rayos aparecen sólo en la región central, observándose una reducción en el número de puntos de interferencia conforme aumenta el número de rayos involucrados en su formación.

De las figuras de interferencia totalmente constructiva y destructiva de cada campo, se observa que comparten estructuras similares de líneas y puntos de interferencia para la región superior con tres raíces reales. En las otras regiones con tres raíces reales, los patrones de líneas “paralelas” y “transversales” a la sección lateral de la cáustica se muestran desfasadas. La región que involucra 4 y 5 raíces reales es más complicada de describir.

Patrón de difracción

La realización no paraxial del haz AiS 2D vuelve relevante la componente longitudinal del campo eléctrico $E_3^{(np)}(s_1, s_3)$ con respecto a su componente transversal $E_1^{(np)}(s_1, s_3)$, en contraparte al caso paraxial, como se observa en los patrones de intensidad de cada componente ilustrados en la figura 3.9, donde se superpone la curva cáustica ilustrada anteriormente. Ambos patrones consisten de máximos y mínimos locales de intensidad ubicados, principalmente, al interior de las curvas cáusticas, *i.e.* en las regiones con dos o más rayos, y distribuidos simétricamente con respecto a s_1 .

La descripción de los patrones de intensidad hallados se hace usando la figura del número de rayos involucrados en la formación del haz AiSnp 2D, ver fig 3.7 (a). Se observa que los patrones de intensidad están limitados en el plano de observación. La región con 5 rayos muestra un patrón de intensidad muy similar al del caso paraxial: un máximo global en la zona inferior para $|E_1^{(np)}(s_1, s_3)|^2$ y una línea de intensidad cero en $s_1 = 0$ para $|E_3^{(np)}(s_1, s_3)|^2$. En ambos campos

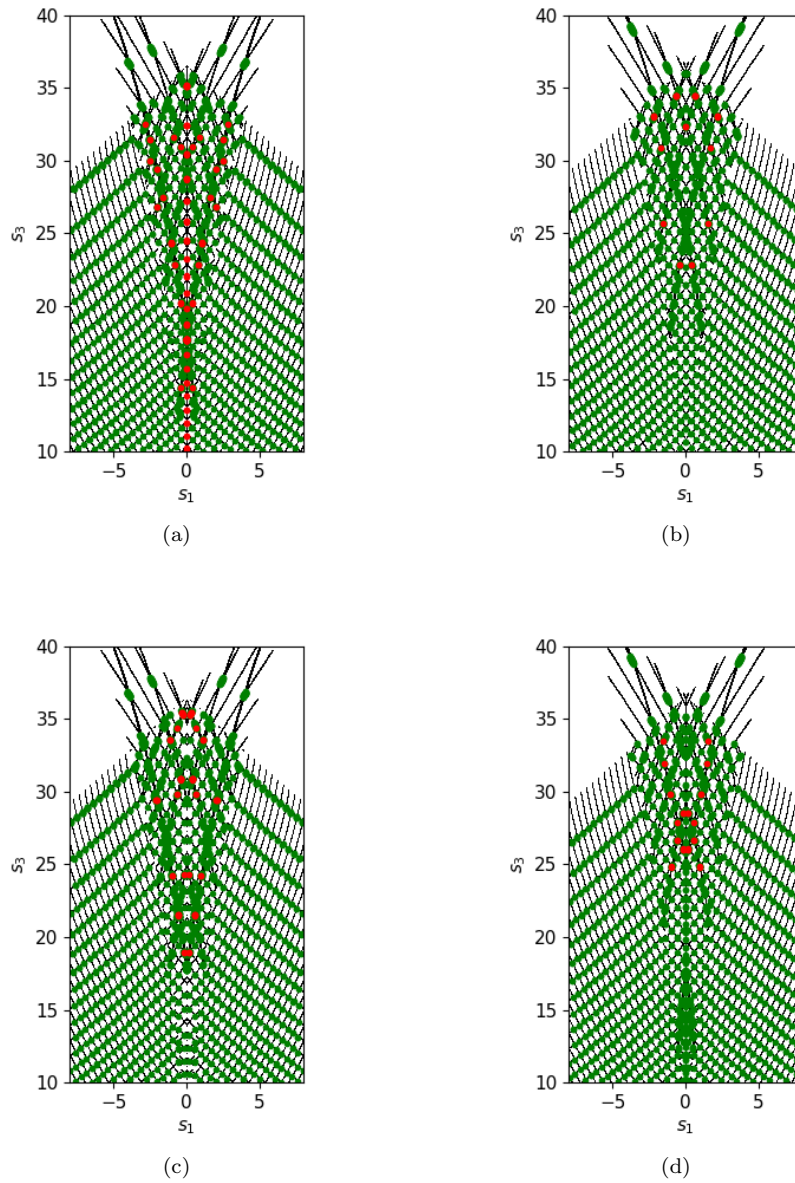


Figura 3.8: Puntos de interferencia de rayos totalmente (a, c) constructiva y (b, d) destructiva junto a la cáustica (línea negra punteada) en una región del plano $s_1 s_3$ para los campos $(E_1^{(np)}(s_1, s_3), E_3^{(np)}(s_1, s_3))$ de un haz AiSnP 2D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$. Los puntos en color negro (verde, rojo) resaltan la interferencia total de 2 (3, 4) rayos.

las regiones con 3 rayos en la parte superior presentan algunas manchas brillantes, mientras que en la zona inferior se tienen franjas de muchos puntos brillantes, “paralelas” a la sección lateral de la cáustica, siendo más notorios en $|E_3^{(np)}(s_1, s_3)|^2$ que en $|E_1^{(np)}(s_1, s_3)|^2$. Sobre las regiones

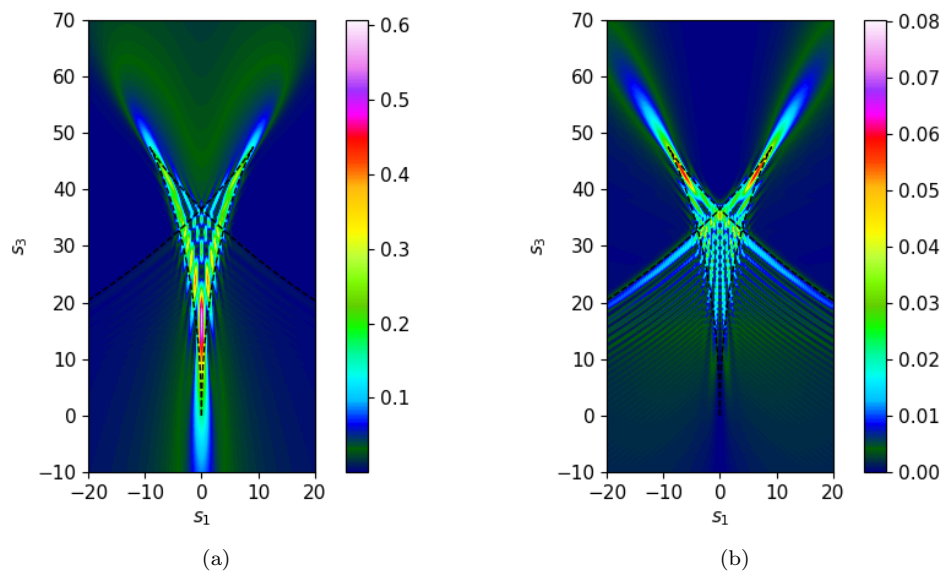


Figura 3.9: Patrón de intensidad de (a) $E_1^{(np)}(s_1, s_3)$ y (b) $E_3^{(np)}(s_1, s_3)$ en un haz AiSnp 2D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$. La curva cáustica se superpone al patrón de intensidad (línea negra discontinua).

con un sólo rayo dominan zonas de baja intensidad.

La figura 3.10 (a, b) ilustra los patrones de fase de $E_1^{(np)}(s_1, s_3)$ y $E_3^{(np)}(s_1, s_3)$ en una zona recortada de la región que ilustra los patrones de intensidad, donde es clara la identificación de singularidades de fase con carga topológica +1 o -1. En la región de 5 rayos se observa la presencia de singularidades de fase por pares con cargas topológicas opuestas, mientras que en las otras regiones las singularidades de fase aparecen aisladas, resalta la presencia de singularidades en la región con una sola raíz, ya que no se predice en el análisis de líneas de interferencia de rayos.

La figura 3.10 (c, d) ilustra los ceros de la parte real e imaginaria de las componentes del campo eléctrico en la región recortada, donde los ceros de amplitud ocurren en los cruces de ambas curvas y corresponden a las singularidades de fase de la figura 3.10 (a, b). Con el hecho anterior se concluye que las singularidades de fase son líneas de dislocación tipo borde.

3.2.3. Conclusiones

El estudio presentado sobre las realizaciones paraxial y no paraxial del haz AiS 2D, muestra la relevancia de complementar los estudios geométrico y ondulatorio en el entendimiento de las ondas electromagnéticas. Cada realización está formada por regiones con 1, 2 o 3 rayos en el caso paraxial y 0, 1, 2, 3, 4 o 5 rayos en el caso no paraxial, mientras que las curvas cáusticas presentan morfologías de cúspide que se separan conforme aumenta el parámetro de decaimiento. El análisis de la posición de los máximos y mínimos locales de intensidad en los haces AiS 2D vía la interferencia de rayos, se hizo con el algoritmo presentado en la sección 2.1.3 y reportado en [28]. Este análisis halló las coordenadas de puntos con interferencia totalmente constructiva y destructiva de 2 y 3 rayos en el caso paraxial, y de 2, 3 y 4 rayos en el caso no paraxial.

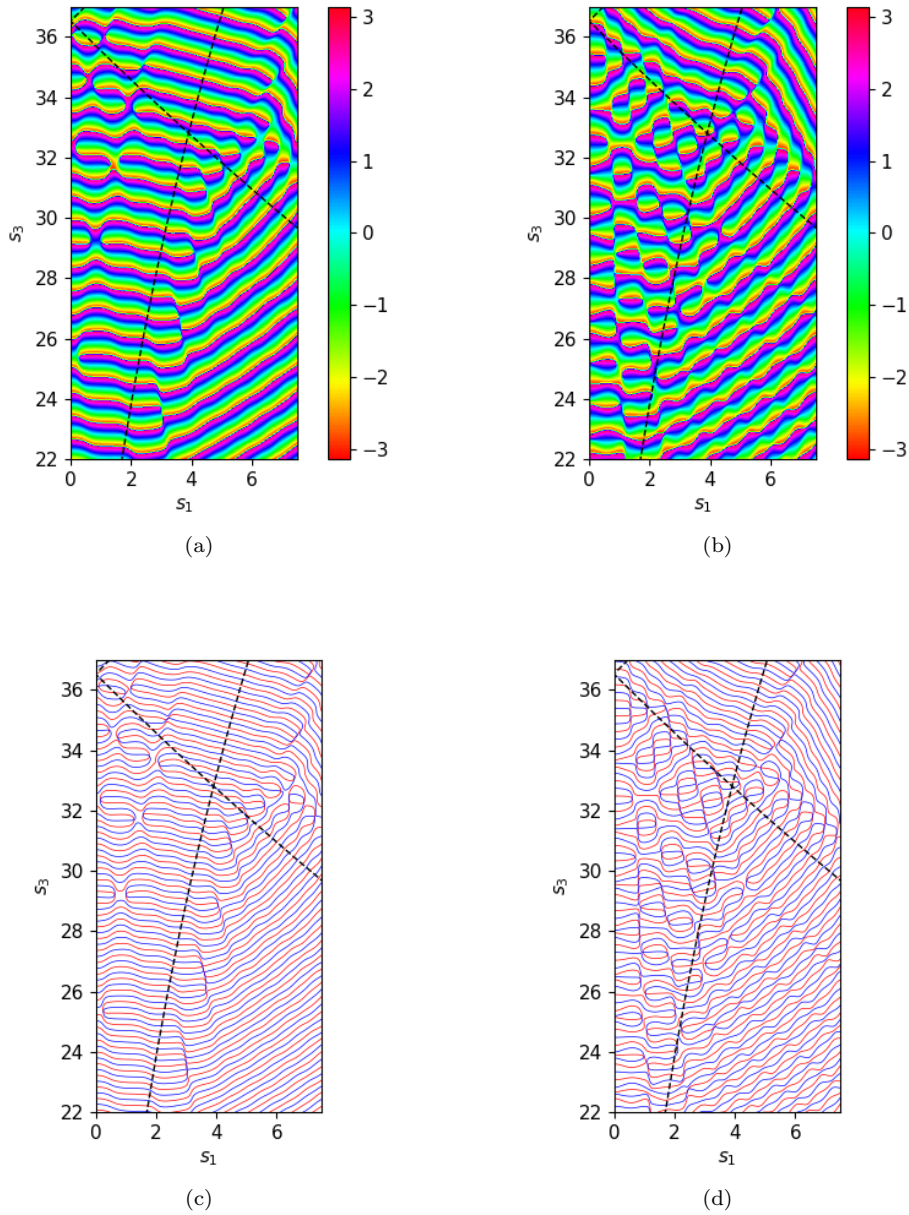


Figura 3.10: Patrón de fase (a, b) y curvas de ceros de la parte real (líneas rojas continuas) e imaginaria (líneas azules continuas) (c, d) de $(E_1^{(np)}(s_1, s_3), E_3^{(np)}(s_1, s_3))$ de un haz AiSnp 2D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = 0.03$. En todas las figuras se superpone la curva cáustica (línea negra discontinua).

La evaluación de las integrales que describen a las ondas electromagnéticas corroboró varios aspectos obtenidos por el algoritmo anterior, como la presencia y ubicación de máximos y mínimos

36CAPÍTULO 3. HAZ AIRY SIMÉTRICO Y SU DESCRIPCIÓN CON ÓPTICA SINGULAR

locales de intensidad en las zonas internas a la cáustica, y señaló la limitación de la aplicación del algoritmo en las zonas externas a las cáusticas, que tienen un sólo rayo y presentan vórtices ópticos.

3.3. Morfología del haz AiS 3D

En esta sección se estudian las componentes del campo eléctrico de los haces AiS 3D dentro y fuera del régimen paraxial, AiSp y AiSnp respectivamente, que están descritas por los espectros angulares de las ecuaciones (3.1) y (3.3), mediante la descripción cualitativa de sus superficies cáusticas, patrones de intensidad y fase, y líneas de dislocación, señalando las similitudes y diferencias en ambos regímenes.

La visualización en detalle de la estructura de los patrones de intensidad y fase de los campos en un haz de luz tridimensional se realiza con planos que cortan al haz, aquí se usan algunos planos transversales a la dirección de propagación del haz de luz. Los patrones de intensidad se ilustran con su propia escala de colores, mientras que los patrones de fase se ilustran con una sola escala de colores, además se ilustran las curvas de ceros de la parte real e imaginaria del campo en cada plano transversal considerado, donde la ubicación de las amplitudes nulas es más fácil de encontrar que en el patrón de intensidad. Para tener una idea de la estructura 3D de cada componente del campo eléctrico del haz, se ilustra una superficie de isointensidad rodeada de la superficie cáustica, con líneas de dislocación y solas.

3.3.1. Haz AiSp 3D

El campo eléctrico que describe a un haz paraxial 3D con la forma integral dada en (1.15) puede ser separable en las coordenadas de posición s_1 y s_2 si el espectro angular estudiado es separable en k_{s_1} y k_{s_2} , lo que reduce una integral doble al producto de dos integrales unidimensionales. Los espectros angulares de los haces AiS 3D $\mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ y $\mathfrak{J}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ son separables en k_{s_1} y k_{s_2} , por lo que las componentes transversal $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ y longitudinal $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ del campo eléctrico del haz AiSp 3D resultan en términos de los campos $E_1^{(p)}(s_j, \zeta)$ y $E_3^{(p)}(s_1, \zeta)$ de haces AiSp 2D con $j \in \{1, 2\}$ dados en (3.4):

$$\begin{aligned} E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta) &= E_1^{(p)}(s_1, \zeta)E_1^{(p)}(s_2, \zeta), \\ E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta) &= E_3^{(p)}(s_1, \zeta)E_1^{(p)}(s_2, \zeta), \end{aligned} \quad (3.15)$$

cuyos términos de fase son:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{S}^{(2)}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_{s_1}, k_{s_2}) &= \phi_{\mathfrak{S}^{(1)}}^{(p)}(s_1, \zeta; k_{s_1}) + \phi_{\mathfrak{S}^{(1)}}^{(p)}(s_2, \zeta; k_{s_2}), \\ \phi_{\mathfrak{J}^{(2)}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_{s_1}, k_{s_2}) &= \phi_{\mathfrak{S}^{(2)}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_{s_1}, k_{s_2}) + \frac{1}{2}\pi(1 + \text{sgn}(k_{s_1})). \end{aligned} \quad (3.16)$$

El estudio del haz AiSp 3D se realiza con los campos del haz AiSp 2D hallados previamente, cuyas propiedades se usan en la descripción de las propiedades del haz AiSp 3D, como ocurre con los patrones de intensidad y fase, la superficie cáustica y las líneas de dislocación. En la obtención de la cáustica para $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ el segundo término en el miembro derecho de $\phi_{\mathfrak{J}^{(2)}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_{s_1}, k_{s_2})$ es irrelevante, por lo que el resultado es el mismo que aquel para $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$.

Cáustica

La obtención y descripción de la superficie cáustica se realiza sólo para la componente transversal del campo eléctrico, ya que el resultado es igual para la componente longitudinal. La

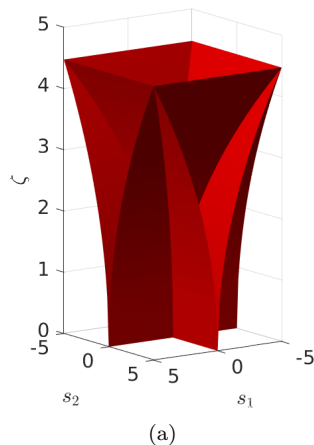


Figura 3.11: Vista frontal de una sección de la superficie cáustica de un haz AiSp 3D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$, donde se observa la curva cáustica del haz AiSp 2D en cada costado y la base cuadrada en la parte alta.

separabilidad de la fase $\phi_{\mathfrak{S}^{(2)}}^{(p)}(s_1, s_2, \zeta; k_{s_1}, k_{s_2})$ en k_{s_1} y k_{s_2} , *cf.* (3.16), reduce la condición de rayos a:

$$0 = \frac{\partial \phi_{\mathfrak{S}^{(2)}}^{(p)}}{\partial k_{s_i}}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (3.17)$$

donde cada ecuación corresponde a la ecuación de rayos que se analizó en el haz AiSp 2D, *cf.* (3.6). Por otro lado la condición de cáustica resulta en:

$$0 = \frac{\partial^2 \phi_{\mathfrak{S}^{(2)}}^{(p)}}{\partial k_{s_1}^2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathfrak{S}^{(2)}}^{(p)}}{\partial k_{s_2}^2}, \quad (3.18)$$

que es un producto de dos condiciones de cáustica del haz AiSp 2D, *cf.* (3.6). La superficie cáustica resultante está formada por dos superficies que resultan de las curvas cáusticas del haz AiSp 2D cuyas expresiones son:

$$|s_i| - a_i^2 - \frac{1}{4}\zeta^2 = 0, \quad i \in \{1, 2\} \quad (3.19)$$

y que dan lugar a cuatro secciones, dos para cada valor de i , que se intersectan. La intersección de la superficie cáustica con los planos transversales al eje de propagación con $\zeta = cte > 0$ forma un patrón de dos pares líneas rectas paralelas a los ejes s_1 o s_2 , que encierran una región cuadrada, para el caso $a_1 = a_2 = 0$ la región cuadrada se reduce a un punto en $\zeta = 0$ y corresponde a la cúspide de la cáustica. La región interior de la superficie cáustica del haz AiSp 3D forma una estructura tipo pirámide cuadrangular invertida. Se observa que conforme aumenta el valor de a_1 y a_2 las secciones de la cáustica se separan por $2a_1^2$ y $2a_2^2$, respectivamente, como ocurre con las curvas cáusticas del haz AiSp 2D. La figura 3.11 ilustra la superficie cáustica de un haz AiSp 3D contenida en una región del espacio, donde en cada costado se observa la curva cáustica tipo cúspide que caracteriza al haz AiSp 2D, mientras que en la zona superior sobresale la base cuadrada.

Patrón de difracción

La separabilidad de los campos del haz AiSp 3D en productos de los campos del haz AiSp 2D facilita su obtención, y permite conocer las distribuciones de intensidad y fase alrededor de la superficie cáustica mostrada en la sección anterior. Al igual que en el haz AiSp 2D, se omite el término $e^{ik_s^2\zeta}$ en los campos eléctricos del haz AiSp 3D, ya que oscila muy rápido en ζ y no provee información adicional sobre la morfología del haz.

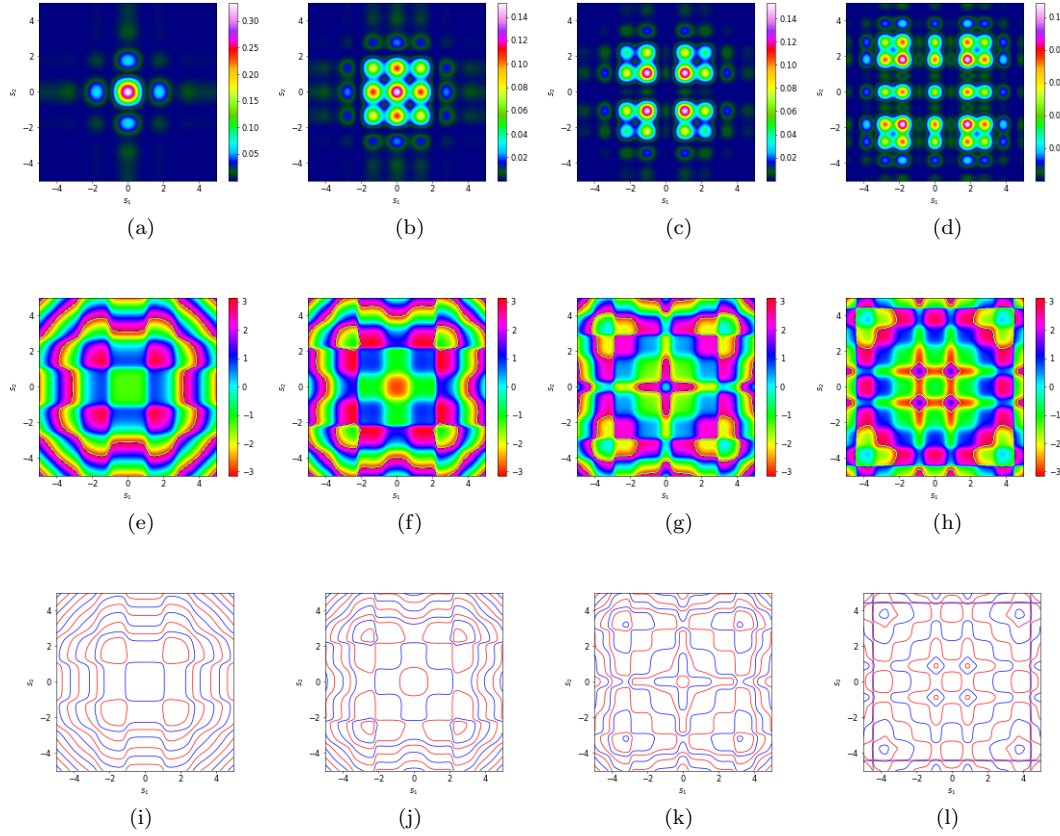


Figura 3.12: Patrones transversales de (a-d) intensidad, (e-h) fase y (i-l) ceros de la parte real (líneas rojas) e imaginaria (líneas azules) de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$: (a, e, i) $\zeta = 2.0$, (b, f, j) $\zeta = 2.5$, (c, g, k) $\zeta = 3.0$ y (d, h, l) $\zeta = 3.5$. El máximo global de intensidad es $\max(|E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)|^2) = 0.3342$. La barra de colores de cada patrón de intensidad está referida con respecto al mínimo y máximo local de intensidad registrado en el plano ilustrado.

La figura 3.12 ilustra los patrones de intensidad y fase de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ para algunos planos con $\zeta = cte$, donde se observa que son simétricos con ejes de simetría a lo largo de \hat{s}_1 , \hat{s}_2 , $(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)/\sqrt{2}$ y $(\hat{s}_1 - \hat{s}_2)/\sqrt{2}$, donde \hat{s}_1 y \hat{s}_2 son los vectores unitarios a lo largo de los ejes s_1 y s_2 , respectivamente. Cada patrón de intensidad presenta estructuras de lóbulos cuyo número aumenta conforme ζ crece, y cuyo análisis puede reducirse a sólo un octante del plano transversal ilustrado, *e.g.* la región comprendida entre los vectores \hat{s}_1 y $(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)/\sqrt{2}$. En el octante de cada

plano ilustrado la intensidad de los lóbulos es, en general, diferente y la posición del máximo de intensidad pasa de estar en el origen a estar en alguno de los vectores que definen al octante conforme aumenta el valor de ζ , por lo que en cada plano transversal se registra el mismo máximo de intensidad 1 o 4 veces.

La comparación del máximo global de intensidad en cada plano ilustrado conduce a que son diferentes, figura 3.12 (a), (b) y (d), o casi diferentes, figura 3.12 (b) y (c), notándose una reducción en el valor del máximo global de cada plano conforme ζ aumenta. La figura 3.13 (b) ilustra la superficie de isointensidad de $|E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)|^2$ con valor 0.14 del máximo global, el cual consiste de lóbulos de tamaños diferentes distribuidos, principalmente, sobre cuatro brazos que parten del lóbulo de mayor tamaño situado cerca de la cúspide de la cáustica, ver figura 3.13 (a).

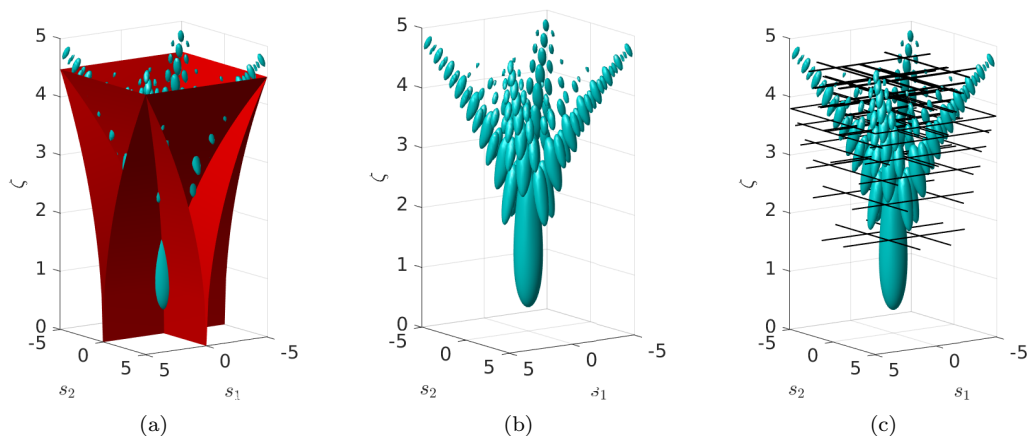


Figura 3.13: (a) Superficie cáustica (rojo) envolviendo a la superficie de isointensidad (cian), (b) superficie de isointensidad y (c) superficie de isointensidad con líneas de dislocación (líneas negras continuas) de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ en un haz AiSp 3D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$.

También se observa que los lóbulos están rodeados por regiones amplias de intensidad baja (coloreadas en azul), ver figura 3.12 (a-d), que al observar sus patrones de fase, ver figura 3.12 (e-h), no es posible hallar estructuras de singularidad de fase ni de cero del campo complejo, ver figura 3.12 (i-l). Lo anterior se debe a que los vórtices están contenidos en planos que son transversales al eje de propagación, debido a la construcción del haz 3D en términos de haces 2D, y los planos ilustrados son de este tipo y no contienen líneas de vórtice. A pesar de lo anterior, es posible intuir la cercanía de líneas de vórtice en los patrones de fase y de ceros del campo complejo para cada uno de los planos ilustrados, al notar la presencia de “líneas” a través de las cuales se presenta un salto de fase cercano a “ π ” o la acumulación de las curvas de ceros, lo anterior se observa claramente cerca de los bordes de la figura 3.12 (h) y (l).

La figura 3.13 (c) ilustra las líneas de dislocación de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ junto a una superficie de isointensidad, los cuales consisten en líneas rectas obtenidas de proyectar en la coordenada faltante los puntos de dislocación hallados para la componente transversal del haz AiSp 2D en cuestión, por consiguiente cada una de las líneas posee carga topológica unitaria. Lo anterior da lugar a la intersección de estas líneas en puntos ubicados sobre los planos formados por los vectores \hat{s}_3 y $(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)/\sqrt{2}$ o \hat{s}_3 y $(\hat{s}_1 - \hat{s}_2)/\sqrt{2}$, y que están ubicadas al interior y exterior de la superficie cáustica.

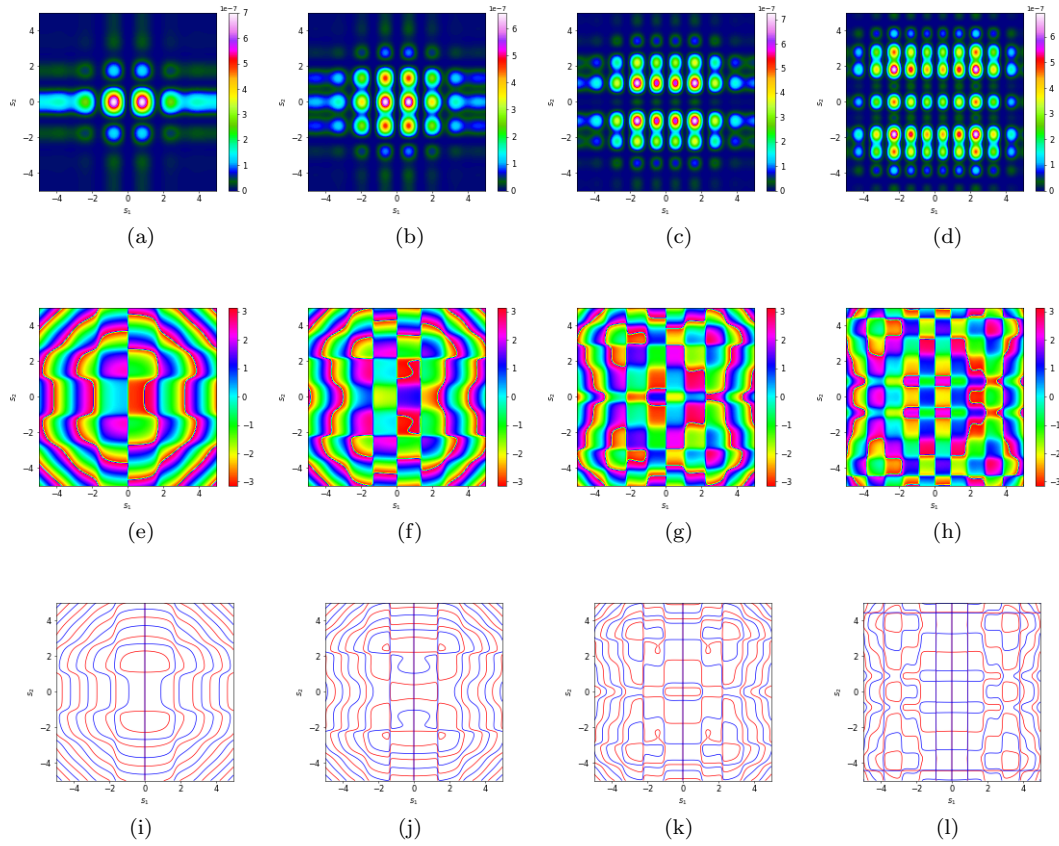


Figura 3.14: Patrones transversales de (a-d) intensidad, (e-h) fase y (i-l) ceros de la parte real (líneas rojas) e imaginaria (líneas azules) de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$: (a, e, i) $\zeta = 2.0$, (b, f, j) $\zeta = 2.5$, (c, g, k) $\zeta = 3.0$ y (d, h, l) $\zeta = 3.5$. El máximo global de intensidad es $\max(|E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)|^2) = 7.8959 \times 10^{-7}$. La barra de colores de cada patrón de intensidad está referida con respecto al mínimo y máximo local de intensidad registrado en el plano ilustrado.

Un análisis similar al realizado para la componente $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ se hace con la componente $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$, cuyo espectro angular vuelve al campo simétrico con respecto a la coordenada s_2 y antisimétrico con respecto a la coordenada s_1 . Lo anterior se observa para $s_1 = 0$ en los patrones de intensidad, fase y ceros de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ ilustrados en la figura 3.14. A pesar de la antisimetría de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$, los patrones de intensidad son simétricos con ejes de simetría a lo largo de \hat{s}_1 y \hat{s}_2 , al igual que las curvas de ceros, pero no ocurre así con los patrones de fase que sólo tienen un eje de simetría a lo largo de \hat{s}_1 y muestran un desfase por π para los valores de fase en s_1 y $-s_1$. Los patrones de intensidad de cada plano transversal de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ muestran estructuras de lóbulos con intensidades diferentes, donde los máximos globales de intensidad aparecen 2 o 4 veces. Los patrones de fase no muestran indicios claros de singularidades de fase, aunque al igual que en el caso de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ los patrones de fase y de ceros del campo complejo revelan la cercanía de algunas líneas de dislocación, *e.g.* figura 3.14 (j) y (k). En el régimen paraxial la

relevancia de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ en términos de la intensidad es menor que la de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$, y que se observa en los varios ordenes de magnitud de diferencia que mantienen, que en este caso es de 6.

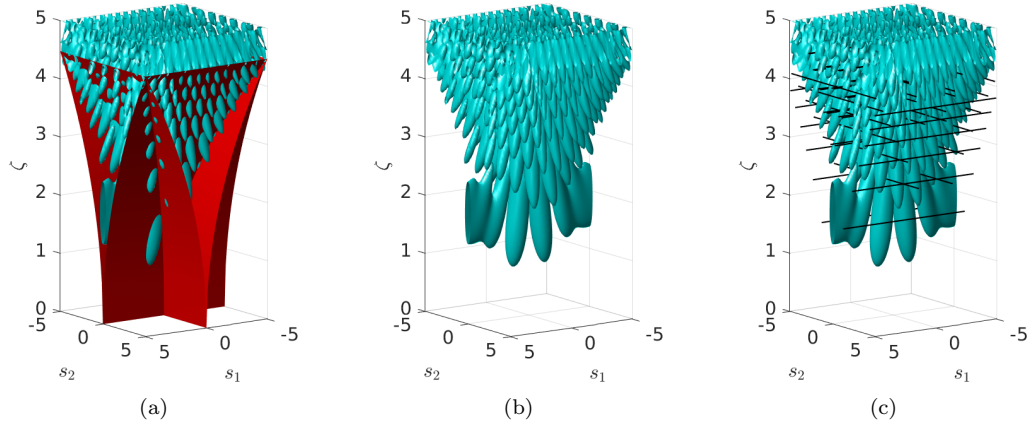


Figura 3.15: (a) Superficie cáustica (rojo) envolviendo a la superficie de isointensidad (cian), (b) superficie de isointensidad y (c) superficie de isointensidad con líneas de dislocación de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ en un haz AiSp 3D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$.

La superficie cáustica de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ es la misma que la de $E_1^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$, como ya se mencionó al inicio de la subsección. La figura 3.15 (a) ilustra una superficie de isointensidad de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ envuelta por la superficie cáustica. La estructura de la superficie de isointensidad se ilustra sola en la figura 3.15 (b), donde se observa la presencia de muchas estructuras con forma de bulbos verticales que se extienden hacia arriba. Las líneas de dislocación de $E_3^{(p)}(s_1, s_2, \zeta)$ consisten en líneas rectas obtenidas de extender a lo largo de la coordenada faltante los puntos de dislocación hallados para los campos bidimensionales del haz AiSp 2D, como lo ilustra la figura 3.15 (c), por lo que tienen carga topológica unitaria.

3.3.2. Haz AiSnp 3D

La expresión integral de las componentes del campo eléctrico que describen a un haz no paraxial 3D, *cf.* (1.13), no son separables en las variables de integración ni en las coordenadas de posición como puede ocurrir en un haz paraxial 3D, *cf.* (1.15). Por lo que el cálculo de los campos de un haz AiSnp 3D requiere más cuidado y sus propiedades adquieren estructuras más complejas, como sucede con la superficie cáustica y las líneas de dislocación.

El campo eléctrico con componente transversal $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ y longitudinal $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$ de un haz AiSnp 3D, cuyos espectros angulares $\mathfrak{G}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ y $\mathfrak{J}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2})$ están dados en (3.1) y

(3.3), queda descrito por:

$$\begin{aligned}
E_1^{(np)}(\mathbf{s}) &= \frac{e^{(a_1^3+a_2^3)/3}}{(2\pi x_0)^2} \int_{-k_s}^{+k_s} dk_{s_1} \int_{-k'_{s_2}}^{+k'_{s_2}} dk_{s_2} e^{-(a_1 k_{s_1}^2 + a_2 k_{s_2}^2)} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s} - a_1^2 |k_{s_1}| - a_2^2 |k_{s_2}| + (|k_{s_1}|^3 + |k_{s_2}|^3)/3)}, \\
E_3^{(np)}(\mathbf{s}) &= -\frac{e^{(a_1^3+a_2^3)/3}}{(2\pi x_0)^2} \int_{-k_s}^{+k_s} dk_{s_1} \int_{-k'_{s_2}}^{+k'_{s_2}} dk_{s_2} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} e^{-(a_1 k_{s_1}^2 + a_2 k_{s_2}^2)} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s} - a_1^2 |k_{s_1}| - a_2^2 |k_{s_2}| + (|k_{s_1}|^3 + |k_{s_2}|^3)/3)},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{k}_s = (k_{s_1}, k_{s_2}, k_{s_3})$, $k_{s_3} = +\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2 - k_{s_2}^2}$ y $k'_{s_2} = \sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}$. La fase de los integrandos en (3.20) son:

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathfrak{S}(2)}^{(np)}(\mathbf{s}; k_{s_1}, k_{s_2}) &= \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s} - a_1^2 |k_{s_1}| - a_2^2 |k_{s_2}| + \frac{1}{3} (|k_{s_1}|^3 + |k_{s_2}|^3), \\
\phi_{\mathfrak{S}(2)}^{(np)}(\mathbf{s}; k_{s_1}, k_{s_2}) &= \phi_{\mathfrak{S}(2)}^{(np)}(\mathbf{s}; k_{s_1}, k_{s_2}) + \frac{1}{2} \pi (1 + \text{sgn}(k_{s_1})).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Al igual que en el haz AiSp 3D, el análisis de la superficie cáustica de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ es igual para $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$, por lo que sólo se realiza en el primero.

Cáustica

La condición de rayos aplicada a $\phi_{\mathfrak{S}(2)}^{(np)}(\mathbf{s}; k_{s_1}, k_{s_2})$ resulta en las siguientes ecuaciones:

$$0 = \frac{\partial \phi_{\mathfrak{S}(2)}^{(np)}}{\partial k_{s_i}} = s_i - \frac{k_{s_i}}{k_{s_3}} s_3 - a_i^2 \text{sgn}(k_{s_i}) + |k_{s_i}|^2 \text{sgn}(k_{s_i}), \quad i \in \{1, 2\}, \tag{3.22}$$

mientras que la condición de cáustica se reduce a:

$$0 = k_s^2 \frac{s_3^2}{k_{s_3}^4} - 2 \frac{s_3}{k_{s_3}^3} [(k_s^2 - k_{s_2}^2) |k_{s_2}| + (k_s^2 - k_{s_1}^2) |k_{s_1}|] + 4 |k_{s_1}| |k_{s_2}|. \tag{3.23}$$

Dada la forma de la condición de cáustica no es posibles hallar una expresión analítica de la superficie cáustica en términos de s_1 , s_2 y s_3 , por lo que se implementa computacionalmente.

La figura 3.16 (a-b) ilustra dos vistas de la superficie cáustica de un haz AiSpn 3D. Se observa que ésta presenta la estructura de 4 “aletas” ubicadas sobre los ejes $(\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)/\sqrt{2}$ y $(\hat{\mathbf{s}}_1 - \hat{\mathbf{s}}_2)/\sqrt{2}$, y que se extienden hacia el origen de coordenadas para después separarse y seguir hacia los ejes coordenados opuestos. Lo anterior resulta en varias autointersecciones de la superficie cáustica, principalmente, en la región interior alrededor del eje $\hat{\mathbf{s}}_3$ como lo ilustra la figura 3.16 (c-e).

En la figura 3.16 (e) se observa una estructura similar a una pirámide cuadrangular invertida cuyo vértice se ubica en el origen de coordenadas cuando $a_1 = a_2 = 0$, y que es similar a la superficie cáustica del haz AiSp 3D. Un aspecto de la cáustica que es igual a su contraparte paraxial, es su separación a lo largo del eje s_1 y s_2 conforme aumenta el valor de a_1 y a_2 , respectivamente. En la sección subsecuente, se estudia la estructura de los campos AiSpn 3D en la región ilustrada en 3.16 (e).

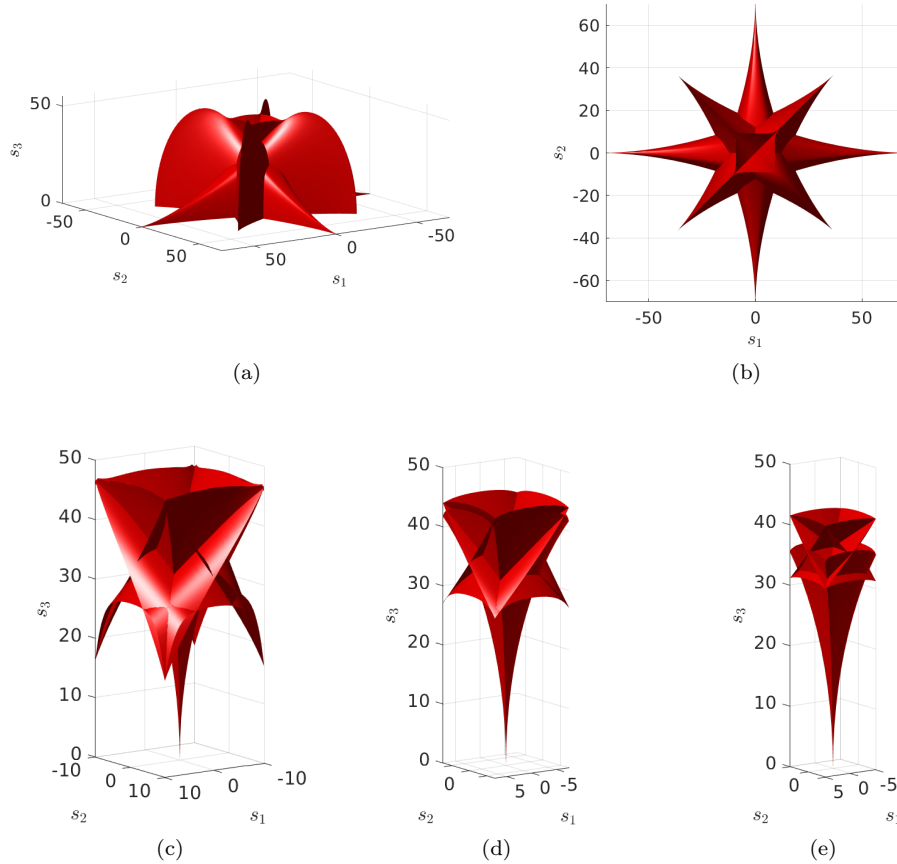


Figura 3.16: Vista (a) frontal y (b) superior de la superficie cáustica de un haz AiSp 3D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$. Vista frontal de secciones reducidas en las coordenadas s_1 y s_2 de la superficie cáustica ilustrada en (a) y (b), (c) $-10 \leq s_i \leq 10$, (d) $-7.5 \leq s_i \leq 7.5$ y (e) $-5 \leq s_i \leq 5$, donde $i = 1, 2$.

Patrón de difracción

A continuación se ilustran y describen los patrones de difracción hallados para algunas secciones transversales, *i.e.* planos con $s_3 = \text{cte}$, de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ y $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$ contenidos en la región ilustrada en la figura 3.16 (e). La figura 3.17 ilustra los patrones de intensidad, fase y curvas de ceros de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ en 4 planos transversales diferentes. Todas las figuras presentan patrones simétricos con ejes de simetría a lo largo de $\hat{\mathbf{s}}_1$, $\hat{\mathbf{s}}_2$, $(\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)/\sqrt{2}$ y $(\hat{\mathbf{s}}_1 - \hat{\mathbf{s}}_2)/\sqrt{2}$. Los patrones de intensidad tienen estructuras similares a las ilustradas en el haz AiSp 3D, ver figura 3.12 (a-d), donde se presentan máximos locales de intensidad, cuyo número aumenta conforme crece s_3 , con un máximo global apareciendo una o cuatro veces. También se observa que conforme aumenta s_3 la forma de los lóbulos deja de ser cuasicircular y las estructuras de menor intensidad en los bordes se extienden hacia las diagonales.

Los patrones de intensidad también presentan zonas oscuras en el interior del haz, mientras que el aspecto más notable de la realización no paraxial del haz AiS 3D es la presencia de

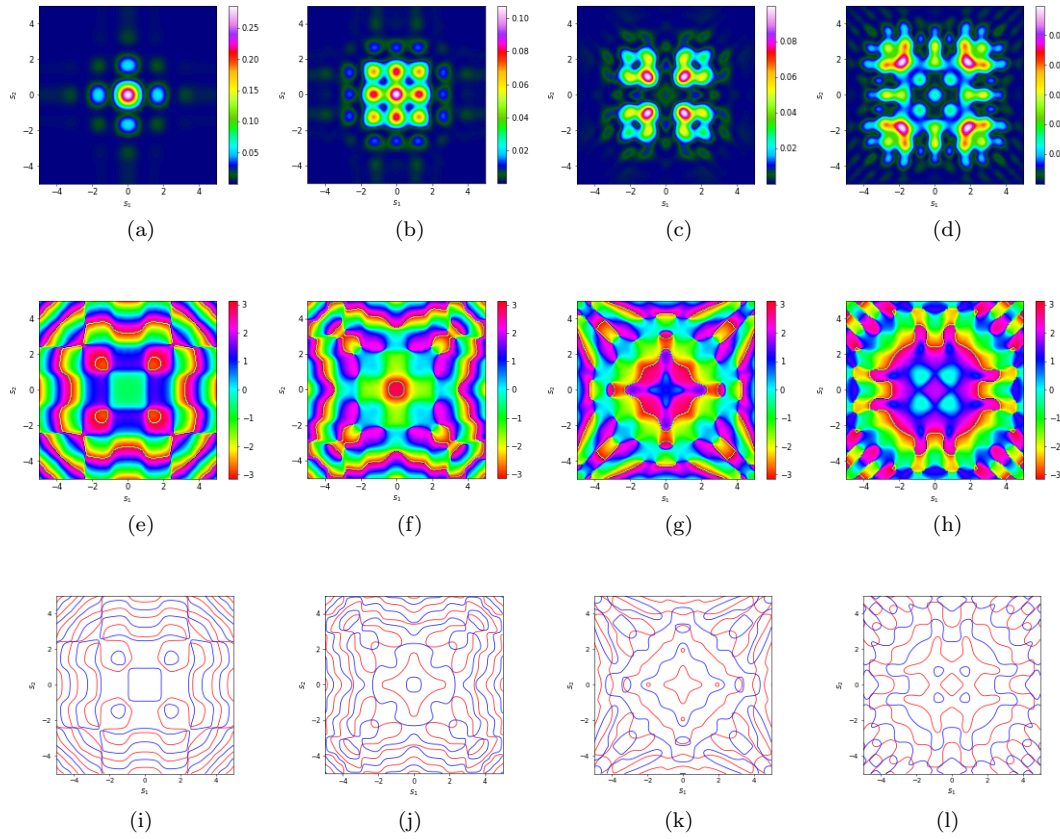


Figura 3.17: Patrones transversales de (a-d) intensidad, (e-h) fase y (i-l) ceros de la parte real (líneas rojas continuas) e imaginaria (líneas azules continuas) de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.05$: (a, e, i) $s_3 = 17.0$, (b, f, j) $s_3 = 20.5$, (c, g, k) $s_3 = 24.0$ y (d, h, l) $s_3 = 27.5$. El máximo global de intensidad es $\max(|E_1^{(np)}(\mathbf{s})|^2) = 0.2937$. La barra de colores de cada patrón de intensidad está referida con respecto al mínimo y máximo local de intensidad registrado en el plano ilustrado.

singularidades de fase en todos los patrones de fase ilustrados, ver figuras 3.17 (e-h), los cuales se corresponden con los ceros del campo ilustrados en las figuras 3.17 (i-l). Se observa un incremento en el número de singularidades de fase presentes conforme aumenta s_3 y la presencia de algunas cerca de las regiones brillantes. La carga topológica de cada singularidad es unitaria. En los patrones de fase se observa que la carga topológica de las singularidades ubicadas por reflexión ante los 4 ejes de simetría ya mencionados es opuesta a la carga topológica de la singularidad que se refleja.

La figura 3.18 (a-c) ilustra una superficie de isointensidad de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$, con valor de una décima parte de la intensidad máxima, rodeada de la superficie cáustica, sola y con sus líneas de dislocación. Se observa que la superficie de isointensidad presenta una estructura similar a la de $E_1^{(p)}(\mathbf{s})$, ver figura 3.13 (b), con un máximo global de intensidad en su cúspide y la distribución de máximos locales de intensidad a lo largo de 4 brazos sobre las aristas de la cáustica. Una

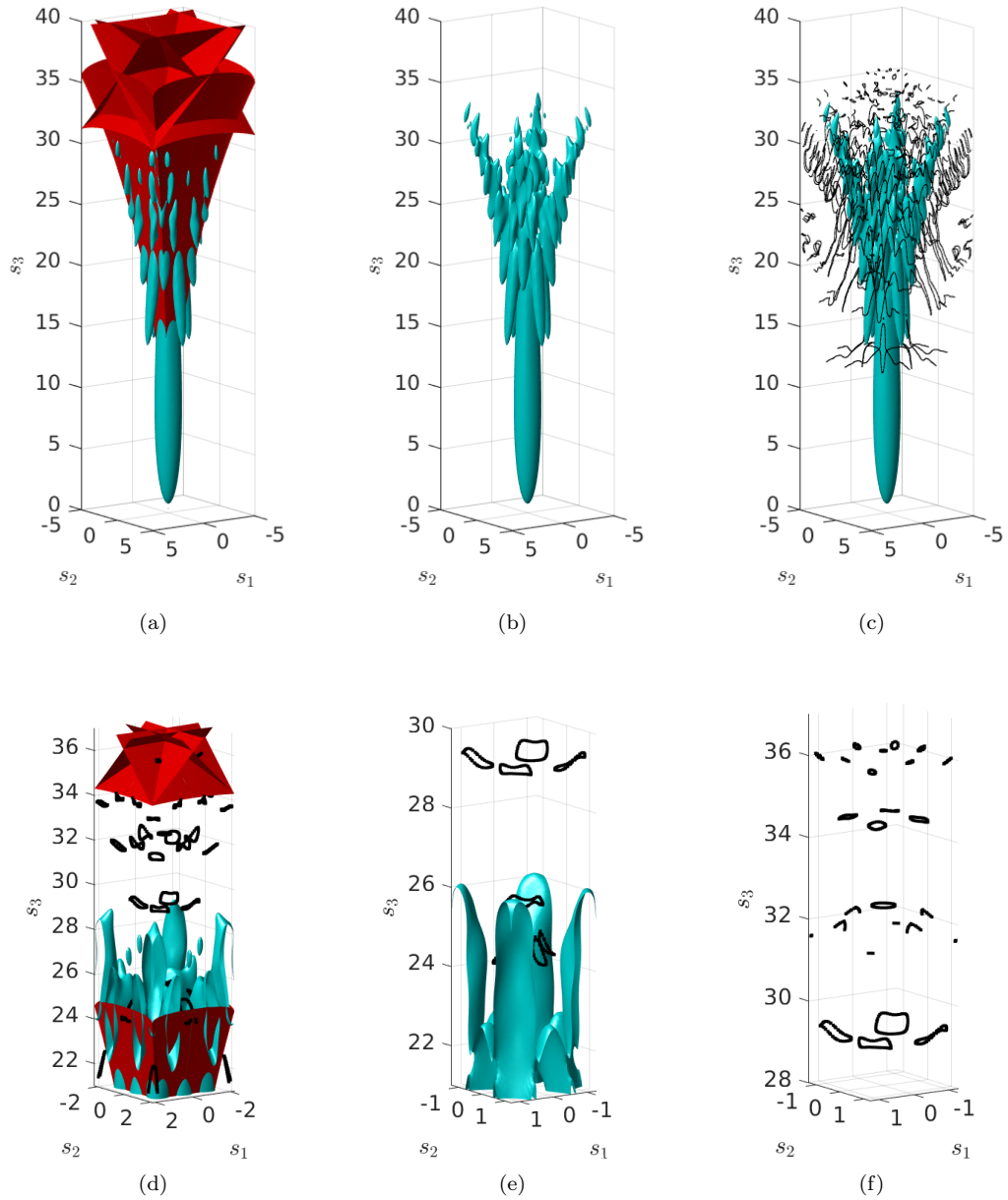


Figura 3.18: (a) Superficie cáustica (rojo) junto a la superficie de isointensidad (cian), (b) superficie de isointensidad y (c) superficie de isointensidad con líneas de dislocación de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ en un haz AiSnp 3D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.05$. (d) Líneas de dislocación con forma de lazo alrededor de la superficie de isointensidad y dentro de la superficie cáustica, (e) y (f) son regiones ampliadas de (d) a alturas diferentes y sin la superficie cáustica.

diferencia de este caso con el caso paraxial son los tamaños. La morfología de las líneas de dislocación ilustradas es diferente a la del caso paraxial, donde son líneas rectas, con formas más complicadas alrededor del haz y la presencia de singularidades de lazo en su interior, como se ilustra en la figura 3.18 (d-f), cuyas dimensiones son comparables a una longitud de onda. Las líneas de dislocación son helicoidales con carga topológica unitaria.

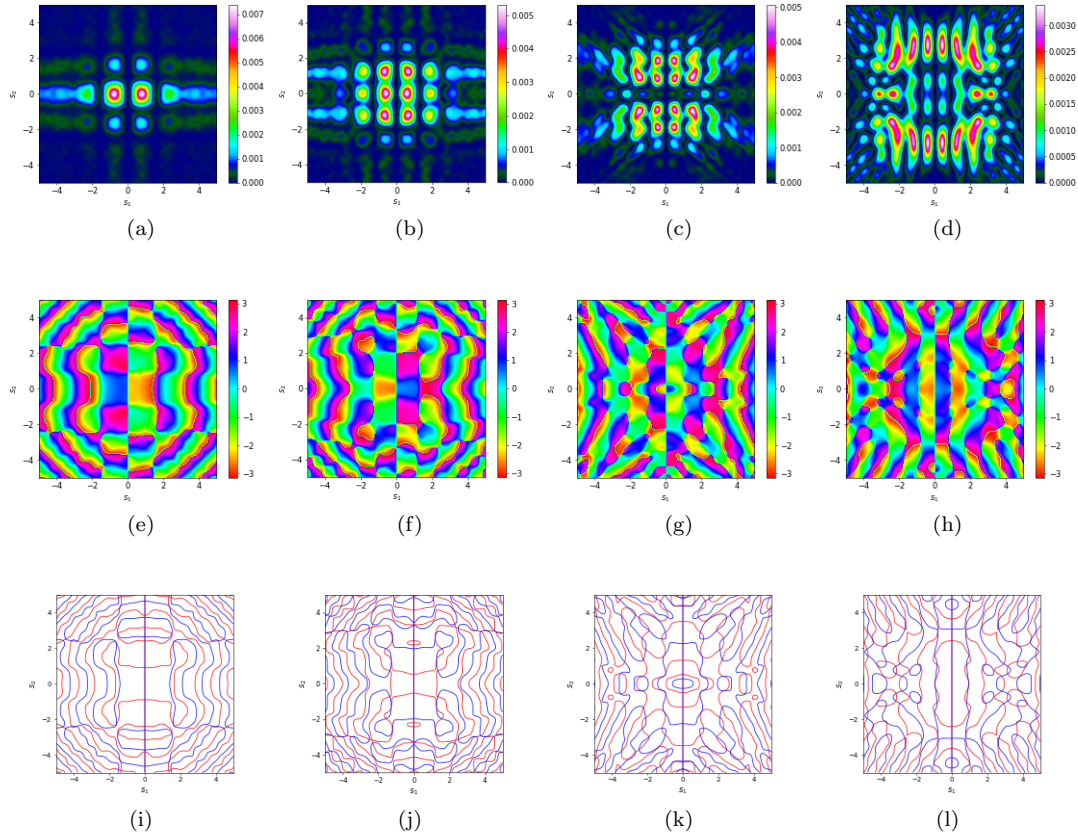


Figura 3.19: Patrones transversales de (a-d) intensidad, (e-h) fase y (i-l) ceros de la parte real (líneas rojas) e imaginaria (líneas azules) de $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$ con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.05$: (a, e, i) $s_3 = 17.0$, (b, f, j) $s_3 = 20.5$, (c, g, k) $s_3 = 24.0$ y (d, h, l) $s_3 = 27.5$. El máximo global de intensidad es $\max(|E_3^{(np)}(\mathbf{s})|^2) = 0.0078$. La barra de colores de cada patrón de intensidad está referida con respecto al mínimo y máximo local de intensidad registrado en el plano ilustrado.

El estudio de la estructura de $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$ es análogo al realizado para $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$. La figura 3.19 ilustra los patrones de intensidad, fase y curvas de ceros de $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$ en los mismos planos y regiones ilustrados para $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$. Los patrones de intensidad y curvas de ceros son simétricos con ejes de simetría a lo largo de $\hat{\mathbf{s}}_1$ y $\hat{\mathbf{s}}_2$, mientras que los patrones de fase sólo tienen un eje de simetría a lo largo de $\hat{\mathbf{s}}_1$ y muestran un desfase de π con respecto a s_1 al atravesar el eje s_2 . Al igual que en los patrones de fase de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$, todos los patrones de fase de $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$ ilustrados presentan singularidades de fase y se ubican más fácilmente en las curvas de ceros del

campo complejo, con carga topológica unitaria cuyo reflejo ante los ejes \hat{s}_1 y \hat{s}_2 es un punto de dislocación con carga topológica opuesta.

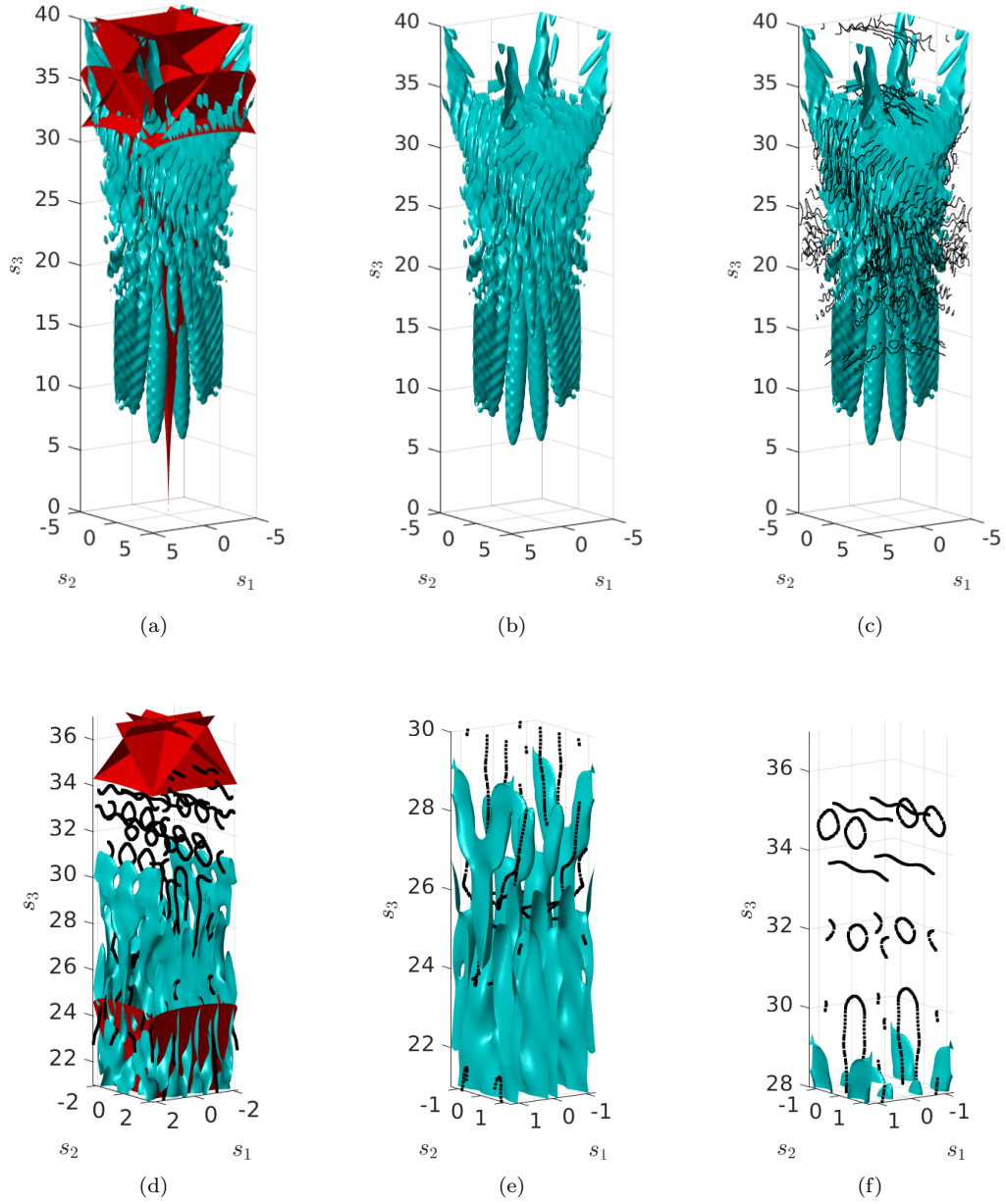


Figura 3.20: (a) Superficie cáustica (rojo) junto a la superficie de isointensidad (cian), (b) superficie de isointensidad y (c) superficie de isointensidad con líneas de dislocación de $E_1^{(np)}(\mathbf{s})$ en un haz AiSnp 3D con $x_0 = 1 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.98 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.05$. (d) Líneas de dislocación con forma de lazo alrededor de la superficie de isointensidad y dentro de la superficie cáustica, (e) y (f) son regiones ampliadas de (d) a alturas diferentes y sin la superficie cáustica.

La figura 3.20 ilustra una superficie de isointensidad de $E_3^{(np)}(\mathbf{s})$, 0.1 del valor máximo, alrededor de la superficie cáustica, sola y con sus líneas de dislocación. La morfología de la superficie de isointensidad es similar a la del caso paraxial, principalmente en la zona inferior que presenta formas de bulbos verticales, mientras que la zona superior está acotada en el centro y no en las esquinas. En este caso la morfología de las líneas de dislocación es más complicada que en su contraparte paraxial, ya que se presentan estructuras rizadas tanto dentro como fuera del haz, mientras que en su interior sobresalen las singularidades de lazo. Las líneas de dislocación son helicoidales y tienen carga topológica unitaria.

3.3.3. Conclusiones

La realización paraxial y no paraxial del haz AIS 3D dejó ver la mayor dificultad presente en el cálculo de la última con respecto a la primera, y que dio lugar a estructuras más complejas como lo ilustran las superficies cáusticas y los vórtices ópticos. Debe tenerse en cuenta las dimensiones de ambos haces, donde el AiSp 3D es más grande que el haz AiSnp 3D. La superficie cáustica del haz AiSp 3D está formada por superficies que forman una región cónica, mientras que la superficie cáustica del haz AiSnp 3D presenta superficies que se autointersectan múltiples veces y forman una superficie cónica en su interior. Los vórtices ópticos son líneas rectas en el haz AiSp 3D, mientras que en el haz AiSnp 3D no se tienen líneas rectas, sino líneas retorcidas y lazos.

Capítulo 4

Haz Airy simétrico y su caracterización experimental

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de una realización experimental del haz Airy Simétrico 3D paraxial (AiSp) y no paraxial (AiSnp) implementados con un mecanismo de Pinzas Ópticas y un Modulador Espacial de Luz. En la literatura científica ya se tienen reportes sobre la realización experimental, las propiedades y algunos usos del haz AiSp 3D [40–43]. Se ilustran algunos patrones transversales de intensidad de cada haz y su reconstrucción tridimensional mediante superficies de isointensidad, y se comparan con realizaciones computacionales. También se presenta la detección de vórtices ópticos en el haz AiSp 3D.

4.1. Arreglo experimental

El arreglo experimental usado en la implementación de haces de luz estructurada consiste, básicamente, de un mecanismo de Pinzas Ópticas y un Modulador Espacial de Luz (SLM por sus siglas en inglés *Spatial Light Modulator*) sobre el que incide un haz de luz con polarización lineal y expandido, ver figura 4.1. La expansión del haz logra un frente de onda cuasiplano que cubre la pantalla reflejante del SLM. El efecto de la pantalla del SLM, que consiste de un arreglo rectangular de pixeles cuadrados, sobre el frente de onda incidente es retrasar la porción del frente de onda que incide sobre cada pixel, donde la magnitud del retraso del frente de onda depende del diseño implementado por una computadora.

A continuación se listan los elementos principales usados en el experimento junto a algunas de sus características:

1. Láser de onda continua con longitud de onda $\lambda = 0.520 \mu\text{m}$ y polarizado linealmente.
2. SLM Hamamatsu tipo X10468-01 por reflexión con pantalla de 600×800 pixeles cuadrados con lados de $20 \mu\text{m}$.
3. Objetivo de microscopio Olympus de inmersión en aceite con magnificación 100x y apertura numérica 1.25 (RMS 100X-O).
4. Aceite de inmersión tipo F Olympus (MOIL-30).
5. Espejo dicróico (FM03) con reflectancia (transmitancia) de 94.529% (2.299%) si $\lambda = 520 \text{ nm}$ (valores tomados de Thorlabs).

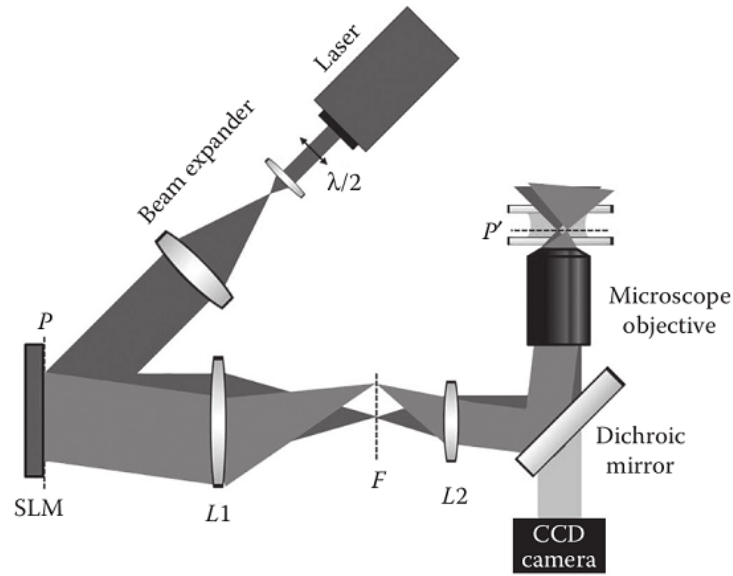


Figura 4.1: Diagrama experimental de un dispositivo de Pinzas Ópticas con un SLM. Imagen tomada de [44]

6. Cámara DCC1545M.

El arreglo experimental usado en este trabajo consiste principalmente por el ilustrado en la figura 4.1, al cual se le añade una lente entre el espejo dicróico y la cámara CCD. Sobre una base por encima del objetivo de microscopio se encuentra un sustrato de vidrio transparente, que transmite y refleja al haz enfocado por el objetivo. La luz transmitida se usa comúnmente en experimentos de micromanipulación óptica, mientras que la luz reflejada viaja de regreso por el objetivo de microscopio, parte de ella atraviesa el espejo dicróico y se enfoca por la lente sobre la cámara CCD.

La realización paraxial y no paraxial del haz de luz estructurada se presenta en regiones distintas del arreglo experimental ilustrado en la figura 4.1, la primera ocurre en la región entre las lentes $L1$ ($f = 400.0$ mm) y $L2$ ($f = 200.0$ mm) y se registra con una cámara CCD entre ellas, mientras que la segunda está en la región de enfocamiento del objetivo de microscopio y se registra con la reflexión del haz que incide sobre el sustrato de vidrio. La figura 4.1 ilustra la posición de la cámara para la observación del haz no paraxial.

4.2. Haz AiS

Como ya se señaló en el capítulo anterior, el haz Airy simétrico (AiS) presenta un espectro angular caracterizado por una amplitud Gaussiana y una fase simétrica en las componentes transversales del vector de onda, *cf.* (3.1). En la generación de un haz AiS 3D, se asume que el haz de luz incidente sobre el SLM presenta un perfil de intensidad Gaussiano ensanchado, cuya fase se modula por un patrón de fase como lo ilustra la figura 4.2, donde el patrón ocupa una región cuadrada de 600×600 píxeles, está centrado en el origen y obedece una escala de grises de 152 niveles. La región cuadrada se debe a la simetría de la fase del haz de luz en cuestión.

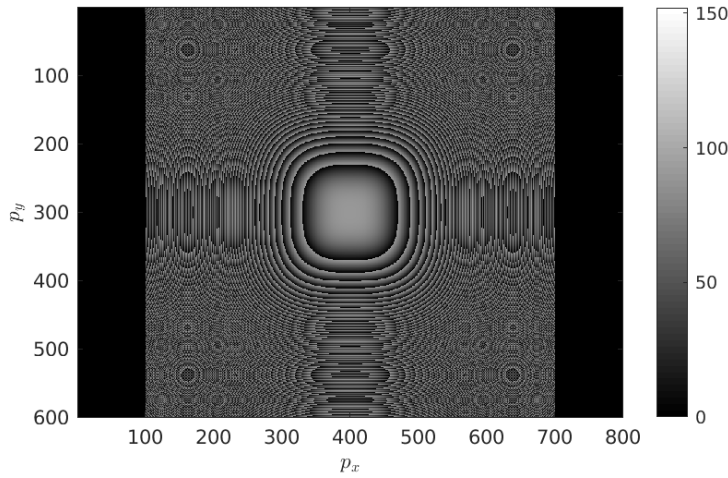


Figura 4.2: Patrón de fase usado sobre la pantalla del SLM para la generación de un haz AiS 3D, donde la barra de colores representa el dominio $[0, 2\pi)$ y está dividido en 152 partes iguales.

Los estudios experimentales de los haces AiS reportados previamente [40, 42], tratan su estabilidad estructural [41] y su uso en el atrapamiento de centenas de micropartículas [43]. El trabajo de aquí reproduce los patrones transversales de intensidad experimentales y teóricos del haz AiSp 3D, que ya han sido observados y reportados en las referencias mencionadas. La novedad del trabajo es el estudio teórico y experimental de los haces AiSnp 3D.

4.2.1. Haz AiSp 3D

La realización paraxial del haz AiS 3D se ilustra con los patrones transversales de intensidad del primer y tercer renglón de la figura 4.3, cuyas estructuras consisten en una distribución simétrica de lóbulos y franjas con brillo no uniforme ubicados principalmente dentro de una región cuadrada, mientras que fuera de la región las franjas se extienden alejándose del centro. También se observan franjas oscuras entre los lóbulos brillantes, cuya presencia es más frecuente en los planos con mayor estructura. Los parámetros de la cámara que registró los patrones ilustrados son iguales en todas las figuras, donde el tiempo de exposición se ajustó con respecto al máximo de intensidad registrado. En todas las figuras se incluye una barra de escala.

Las figuras en el segundo y cuarto renglón de la figura 4.3 ilustran las realizaciones computacionales de algunos patrones transversales de intensidad de la componente transversal de un haz AiSp 3D, que se parecen a las estructuras de los patrones experimentales ilustrados, con $a_1 = a_2 = 0.001$ y $x_0 = 100 \mu\text{m}$. Lo anterior resalta la validez de la aproximación paraxial usada en la descripción del haz. La presencia y detección de las singularidades de fase en el haz experimental, que se conoce que están presentes en el haz teórico (ver figura 3.13 (c)), se presenta en una subsección posterior.

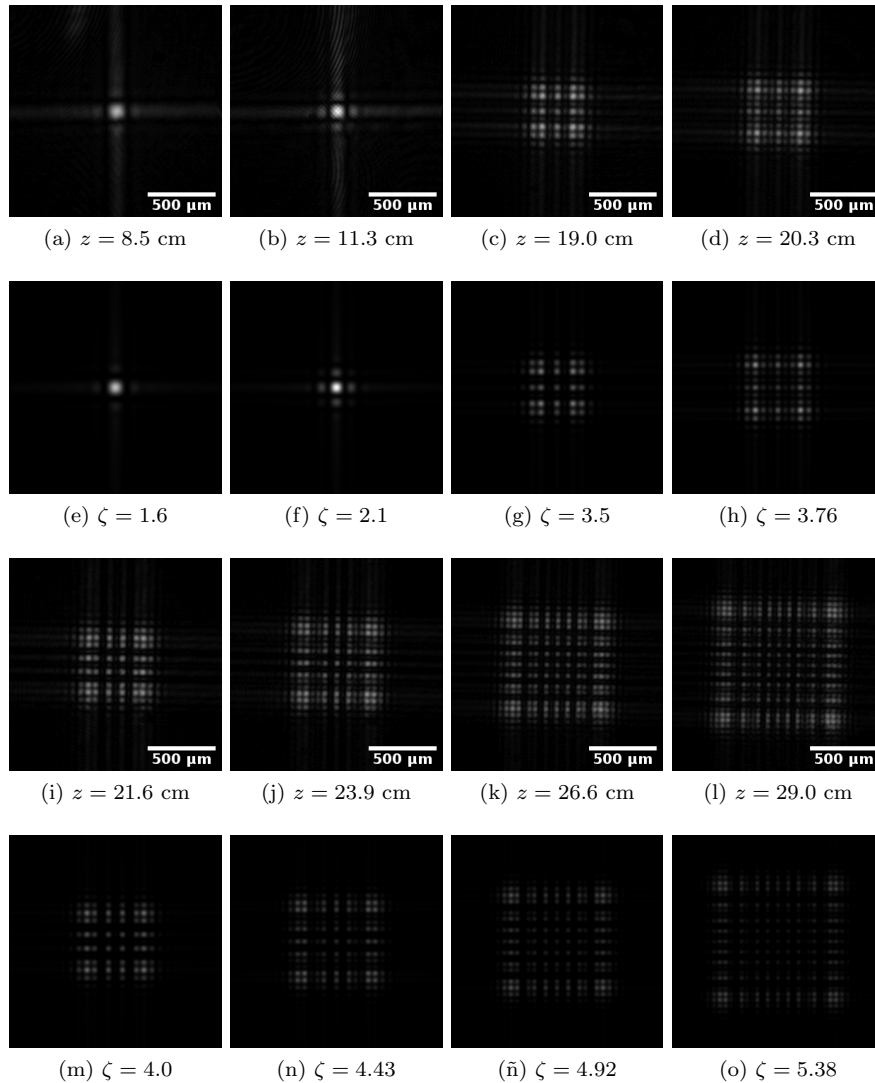


Figura 4.3: Algunos patrones transversales de intensidad de un haz AiSp 3D experimental (a-d e i-l) y teórico (e-h y m-o) que se propaga en aire $n = 1.0$. En ambas realizaciones se usó $\lambda = 0.520$ μm y en el haz teórico $x_0 = 120\lambda$ y $a_1 = a_2 = 0.01$. Los patrones transversales de intensidad experimentales y teóricos están referidos con respecto al máximo global de intensidad del haz registrado en cada caso.

4.2.2. Haz AiSp 3D

El primer y tercer renglón de la figura 4.4 ilustra algunos patrones transversales de intensidad de un haz AiSp 3D experimental, los cuales están separados consecutivamente por una distancia de $1\mu\text{m}$. Todas las figuras se registraron con los mismos parámetros en la cámara e incluyen una barra de escala. El tiempo de exposición de la cámara se ajustó con respecto al patrón de intensidad que contiene al máximo global de intensidad del haz, procurando no saturarla.

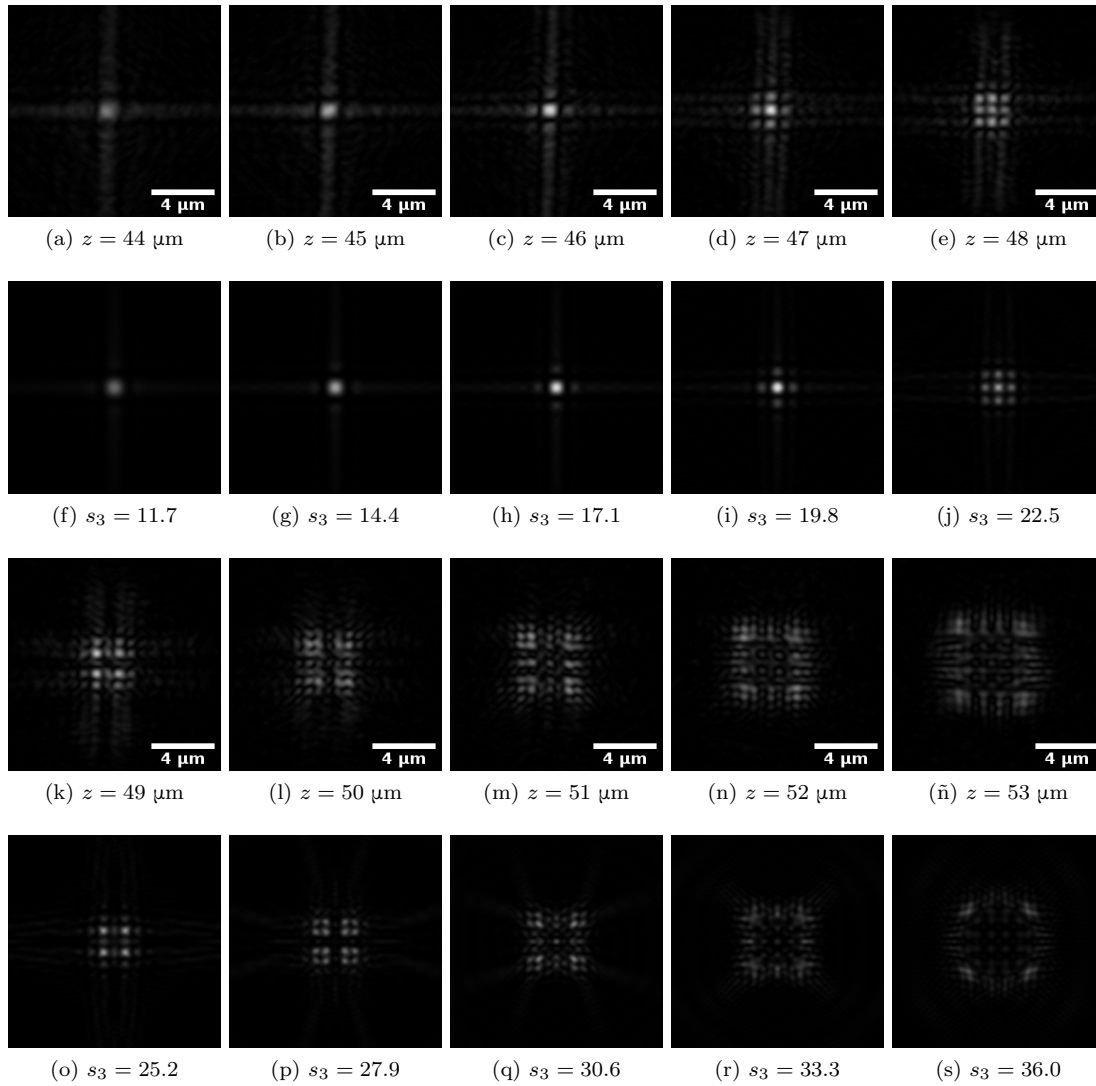


Figura 4.4: Patrones transversales de intensidad (a-e y k-ñ) experimentales y (f-j y o-s) teóricos ($|\mathbf{E}(\mathbf{s})|^2$) de haces AiSnp 3D en aceite $n = 1.518$, se usó $x_0 = \lambda$ y $a_1 = a_2 = 0.01$ en la simulación del haz. Los patrones transversales de intensidad experimentales y teóricos están referidos con respecto al máximo global de intensidad del haz registrado en cada caso.

Los patrones de intensidad en la figura 4.4 (a-e y k-ñ) presentan estructura de lóbulos, que pasan de un lóbulo muy brillante en el centro, figura 4.4 (c), a una colección de lóbulos brillantes reducidos en tamaño e intensidad conforme aumenta z , *e.g.* figura 4.4 (k-ñ). Los lóbulos brillantes presentan brillo no uniforme y su distribución es simétrica con respecto a los ejes transversales y están aglomerados o aislados, ver figuras 4.4 (k-ñ). Las figuras en el segundo y cuarto renglón de la figura 3.17 ilustran los patrones transversales de intensidad del campo eléctrico de un haz AiSnp 3D teórico.

La figura 4.5 ilustra una superficie de isointensidad del haz AiSnp 3D experimental, cuyo valor

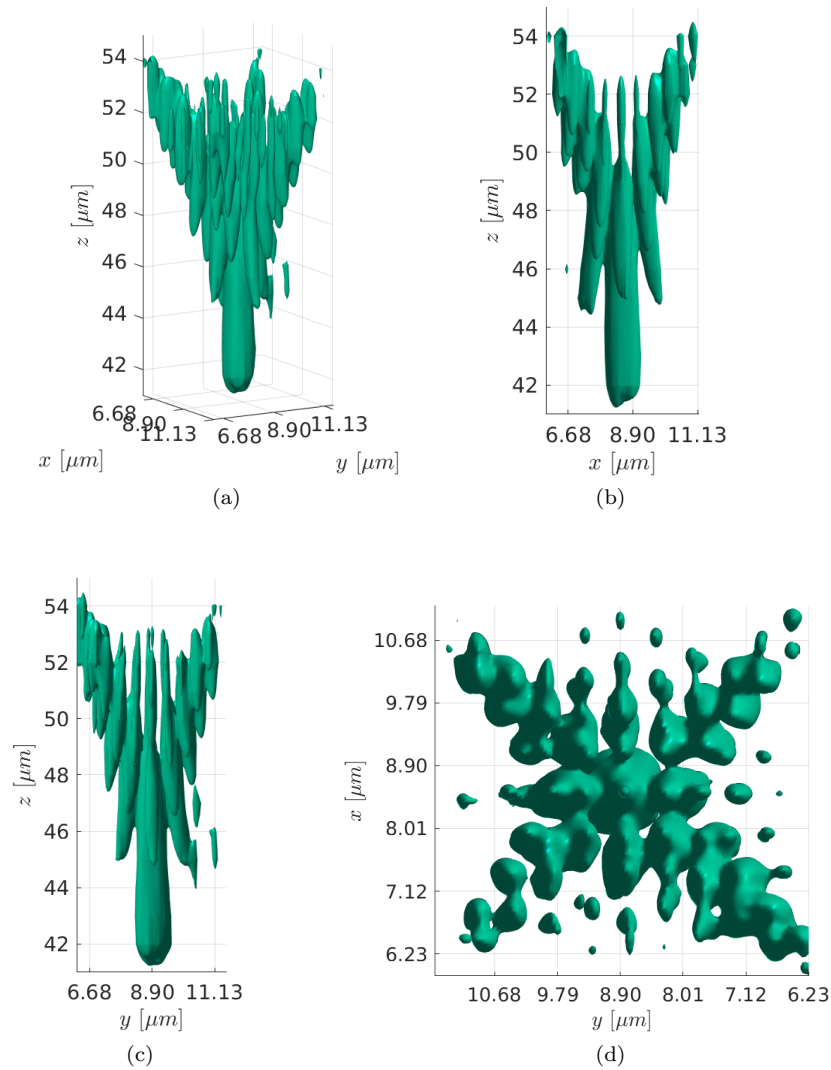


Figura 4.5: Una superficie de isointensidad de un haz AiSnp 3D experimental desde una (a) vista frontal, (b-c) vista lateral y (d) vista superior. La superficie se reconstruyó usando planos transversales de intensidad con alturas desde $z = 41 \mu\text{m}$ hasta $z = 55 \mu\text{m}$ separados consecutivamente por $1 \mu\text{m}$, donde algunos de los planos usados se ilustran en la figura 4.4.

corresponde a dos décimas partes de la intensidad máxima registrada. La superficie consiste en lóbulos distribuidos dentro de una pirámide cuadrangular invertida, con el lóbulo más grande en su vértice y la mayor parte de los lóbulos restantes cerca de las cuatro aristas de la pirámide. También se observan algunos lóbulos de menor tamaño cerca de las caras de la pirámide. La morfología de la superficie de isointensidad, a pesar de algunas irregularidades, es similar a una superficie de isointensidad de $E_1^{(np)}$ (s) ilustrada en la figura 3.18 (b).

4.3. Detección de vórtices ópticos en el haz AiSp 3D

La presencia de vórtices ópticos en las realizaciones computacionales de los haces AiSp 3D, ver la sección 3.3.1, motiva su búsqueda y detección en las realizaciones experimentales. El método por usar es el interferométrico descrito en la sección 2.2.4. A continuación se presentan los resultados teóricos obtenidos de realizaciones computacionales. La figura 4.6 ilustra algunos patrones transversales de intensidad de un haz AiSp 3D con $x_0 = 100 \mu\text{m}$ y $a_1 = a_2 = 0.03$, que contienen vórtices ópticos, y los patrones de interferencia de estos con una onda plana.

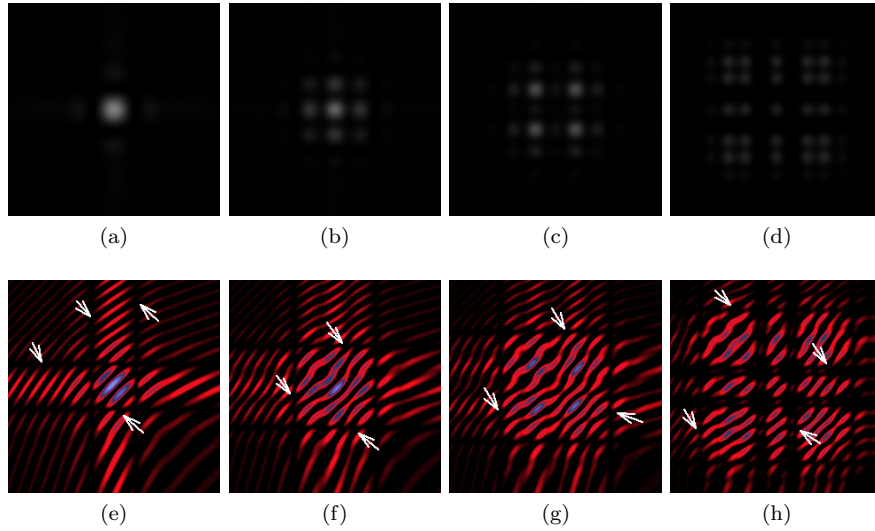


Figura 4.6: Patrones transversales de intensidad (a-d) de la componente transversal en un haz AiSp 3D y (e-h) de la interferencia oblicua de los planos anteriores con una onda plana, cuyas direcciones de propagación forman un ángulo $\theta = 0.007 \text{ rad}$. Los planos transversales corresponden a $\zeta = (1.69, 2.38, 2.85, 3.59)$. Se usó $x_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.633 \mu\text{m}$, $n = 1.333$ y $a_1 = a_2 = 0.03$. Las flechas blancas señalan la ubicación del rompimiento de algunas franjas brillantes y su continuación en franjas oscuras. Los patrones de intensidad (a-d) están referidos con respecto al máximo global del haz, mientras que los patrones de interferencia (e-h) están referidos con respecto al mínimo y máximo local de intensidad en cada plano.

La identificación de las líneas de dislocación en los patrones de intensidad no resulta fácil, mientras que los patrones de interferencia consisten en segmentos de franjas brillantes localizados en secciones cuadradas o rectangulares limitadas por bordes oscuros, que evitan su continuación a otra región adyacente. También se observa que las franjas brillantes de un lado del borde oscuro no empatan con las franjas brillantes del otro lado, y que su “continuación” es una franja oscura. El efecto de desfase en las franjas de interferencia ayuda a localizar vórtices ópticos contenidos por completo en los planos de observación, de forma similar a los patrones de espiral y tenedor que se forman cuando el vórtice atraviesa el plano de observación, aunque no brinda información sobre la carga topológica de estas.

Perspectivas

La morfología de los haces de luz estructurada, en su distribución de máximos locales de intensidad y de vórtices ópticos, ofrece la posibilidad de usarlos en el estudio de sus efectos sobre la dinámica de partículas, donde el término partícula puede referirse a átomos, moléculas, partículas dieléctricas o partículas biológicas. En particular, la rica morfología de los haces AiS evidenciada en este trabajo sugiere la conveniencia de implementar experimentos en esta dirección.

Al momento se ha desarrollado un dispositivo experimental (descrito en el capítulo anterior) basado en un arreglo de Pinzas Ópticas que permite hacer interactuar al haz AiSnp 3D con una muestra de microesferas dieléctricas de poliestireno inmersas en agua.

La descripción teórica de la interacción de las microesferas con el haz AiSnp 3D está dentro del Régimen de Mie, y para las nanopartículas se puede usar la Aproximación de Rayleigh, mientras que la descripción de los efectos del medio sobre la dinámica de las partículas debe considerar efectos hidrodinámicos, *e.g.* efectos de arrastre y movimiento Browniano.

En particular, debido al tamaño de las partículas que se van a utilizar en la muestra (alrededor de 500 nm o menores) la fuerza de fricción (proporcional al tamaño) va a ser menor que la que se tiene comúnmente para objetos de algunas micras de diámetro. La dinámica de estas nanopartículas se va a grabar por medio de videomicroscopía digital a más de 100 cuadros por segundo.

Se eligió la técnica de videomicroscopía debido a que en principio la partícula va a interactuar con muchas de las partes brillantes del haz y vórtices ópticos en distintos planos. Se espera lograr eso, ajustando la potencia del haz para que la partícula no quede atrapada en uno de los máximos de intensidad y pueda moverse explorando la estructura tridimensional del haz.

Cabe mencionar que ya se iniciaron experimentos exploratorios con partículas de poliestireno con un diámetro de 500 nm. Ya se han preparado muestras de prueba y se han realizado algunos experimentos que tienen por objeto ajustar los parámetros del haz y del sistema de imagen para evaluar si se puede resolver la posición de una o varias partículas con una precisión de varios nanómetros (estándar para pinzas ópticas y partículas de 1 μm). El siguiente paso es ver si la resolución temporal de la cámara CCD (100 Hz en un área reducida) va a ser suficiente para resolver los eventos. De no ser así, se va a cambiar a una cámara de video rápido que permitirá grabar a miles de cuadros por segundo.

Finalmente, el amplio uso del mecanismo de Pinzas Ópticas para la manipulación de partículas, con escalas desde nanómetros hasta micrómetros, en áreas tan diversas como Física, Química, Biología y Medicina, vuelve relevante el diseño de haces estructurados para caracterizar y, en su caso, controlar la dinámica de estas partículas.

Conclusiones

Se mostró la relevancia de usar las descripciones ondulatoria y geométrica de haces de luz estructurada representados por su espectro angular, y la importancia de la Óptica Singular en el estudio de la morfología de estos haces. También se desarrolló un método, basado en la interferencia constructiva y destructiva de rayos, que encuentra la posición de los máximos y mínimos locales de intensidad, así como el número de rayos involucrados en su formación. El método anterior forma parte de una publicación que hizo el grupo de trabajo formado por el Fís. Fabián Camas Aquino, la Dra. Rocío Jáuregui Renaud y el Dr. Pedro A. Quinto Su [28]. Los análisis anteriores se hicieron para los haces paraxiales bidimensionales (2D) Airy, Pearcey y Airy Simétrico (AiS), además del haz AiS no paraxial 2D.

El estudio de los haces AiS 2D mostró que su morfología es cuspidal, y que estos se caracterizan por la simetría de la fase del espectro angular y no por la potencia de sus términos. La descripción geométrica de estos haces condujo a concluir que el haz paraxial está formado por 1, 2 o 3 rayos, mientras que el haz no paraxial está formado por 0, 1, 2, 3, 4 o 5 rayos. La presencia y ubicación de los máximos y mínimos locales de intensidad obtenidos por el método desarrollado fueron corroborados con el cálculo de los campos AiS 2D, y que mostraron la relevancia que adquiere en la realización no paraxial del haz AiS 2D la componente longitudinal con respecto a la componente transversal. También se hallaron las posiciones y cargas topológicas de los vórtices ópticos de los haces AiS 2D en ambos regímenes.

Se realizó un estudio teórico y experimental del haz AiS tridimensional (3D) paraxial y no paraxial. Se describió la morfología de los haces teóricos con superficies cáusticas, superficies de isointensidad y líneas de dislocación, mientras que las realizaciones experimentales se ilustraron con patrones transversales de intensidad y superficies de isointensidad, que se compararon con realizaciones teóricas. También se realizó computacionalmente la detección de los vórtices ópticos de estos haces.

La comparación de la morfología de los haces AiS 3D paraxial y no paraxial mostró la mayor riqueza que presenta esta última con respecto a la primera, tanto en la superficie cáustica como en los vórtices ópticos con formas retorcidas o de lazo y con tamaños comparables a la longitud de onda.

Bibliografía

- [1] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1975.
- [2] Phillip C Clemmow. *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields (IEEE OUP Series on Electromagnetic Wave Theory)*. Oxford University Press, USA IEEE Press, 1996.
- [3] Anthony E Siegman. *Lasers*. University science books, Mill Valley, CA, 1986.
- [4] David L Andrews. *Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces*. Academic press, 2011.
- [5] Miguel A Bandres and Julio C Gutiérrez-Vega. Ince–gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. *JOSA A*, 21(5):873–880, 2004.
- [6] Max Born, Emil Wolf, et al. *Principles of optics*. 1980.
- [7] Gregory J Gbur. *Mathematical methods for optical physics and engineering*. Cambridge University Press, 2011.
- [8] Joseph W Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [9] A. Erdélyi. *Asymptotic expansions*. Dover Publications, 2010.
- [10] E. T. Copson. *Asymptotic expansions*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] Norman Bleistein and Richard A. Handelsman. *Asymptotic expansions of integrals*. Dover Publications, 2010.
- [12] R. Wong. *Asymptotic approximations of integrals*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [13] Gregory J Gbur. *Singular optics*. Crc Press, 2016.
- [14] John Frederick Nye. *Natural focusing and fine structure of light: caustics and wave dislocations*. CRC Press, 1999.
- [15] Tim Poston and Ian Stewart. *Catastrophe theory and its applications*. Pitman, 1978.
- [16] Michael V Berry. Waves and thom’s theorem. *Advances in Physics*, 25(1):1–26, 1976.
- [17] Michael V Berry and Colin Upstill. Iv catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns. In *Progress in optics*, volume 18, pages 257–346. Elsevier, 1980.

- [18] Yu A Kravtsov and Yu I Orlov. *Caustics, catastrophes and wave fields*, volume 15. Springer Science & Business Media, 1993.
- [19] George Biddell Airy et al. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 6:379, 1838.
- [20] Michael V Berry and Nandor L Balazs. Nonspreading wave packets. *American Journal of Physics*, 47(3):264–267, 1979.
- [21] T Pearcey. Xxxi. the structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 37(268):311–317, 1946.
- [22] Michael Victor Berry, John Frederick Nye, and FJ Wright. The elliptic umbilic diffraction catastrophe. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 291(1382):453–484, 1979.
- [23] JF Nye. Dislocation lines in the swallowtail diffraction catastrophe. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2078):343–355, 2007.
- [24] JF Nye. Dislocation lines in the hyperbolic umbilic diffraction catastrophe. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2072):2299–2313, 2006.
- [25] Riccardo Borghi. Evaluation of cuspid and umbilic diffraction catastrophes of codimension four. *JOSA A*, 28(5):887–896, 2011.
- [26] Alessandro Zannotti, Falko Diebel, Martin Boguslawski, and Cornelia Denz. Optical catastrophes of the swallowtail and butterfly beams. *New Journal of Physics*, 19(5):053004, 2017.
- [27] Pablo Vaveliuk, Alberto Lencina, José A Rodrigo, and Oscar Martínez Matos. Caustics, catastrophes, and symmetries in curved beams. *Physical Review A*, 92(3):033850, 2015.
- [28] F Camas-Aquino, R Jáuregui, and PA Quinto-Su. Morphological properties of 2d symmetric airy beams extracted from the stationary wave approximation. *Optics Communications*, 451:311–318, 2019.
- [29] J. F. Nye and M. V. Berry. Dislocations in wave trains. *Proc. R. Soc. Lond.*, 336(000):165–190, 1974.
- [30] MS Soskin and MV Vasnetsov. Singular optics. *Progress in optics*, 42(4):219–276, 2001.
- [31] Mark R Dennis, Kevin O’Holleran, and Miles J Padgett. Singular optics: optical vortices and polarization singularities. In *Progress in optics*, volume 53, pages 293–363. Elsevier, 2009.
- [32] Les Allen, Marco W Beijersbergen, RJC Spreeuw, and JP Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical review A*, 45(11):8185, 1992.
- [33] Marco W Beijersbergen, Les Allen, HELO Van der Veen, and JP Woerdman. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Communications*, 96(1-3):123–132, 1993.

- [34] Jennifer E Curtis, Brian A Koss, and David G Grier. Dynamic holographic optical tweezers. *Optics communications*, 207(1-6):169–175, 2002.
- [35] AG White, CP Smith, NR Heckenberg, H Rubinsztein-Dunlop, R McDuff, CO Weiss, and Chr Tamm. Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser. *Journal of Modern Optics*, 38(12):2531–2541, 1991.
- [36] Andrew Forbes. *Laser beam propagation: generation and propagation of customized light*. CRC Press, 2014.
- [37] Georgios A Siviloglou and Demetrios N Christodoulides. Accelerating finite energy airy beams. *Optics letters*, 32(8):979–981, 2007.
- [38] GA Siviloglou, J Broky, Aristide Dogariu, and DN Christodoulides. Observation of accelerating airy beams. *Physical Review Letters*, 99(21):213901, 2007.
- [39] William H Press, Saul A Teukolsky, William T Vetterling, and Brian P Flannery. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [40] Pablo Vaveliuk, Alberto Lencina, Jose A Rodrigo, and Oscar Martinez Matos. Symmetric airy beams. *Optics letters*, 39(8):2370–2373, 2014.
- [41] R Jáuregui and PA Quinto-Su. On the general properties of symmetric incomplete airy beams. *JOSA A*, 31(11):2484–2488, 2014.
- [42] Pablo Vaveliuk, Alberto Lencina, Jose A Rodrigo, and Ó Martnez-Matos. Intensity-symmetric airy beams. *JOSA A*, 32(3):443–446, 2015.
- [43] Pedro A Quinto-Su and Rocío Jáuregui. Optical stacking of microparticles in a pyramidal structure created with a symmetric cubic phase. *Optics express*, 22(10):12283–12288, 2014.
- [44] Fred M Dickey and Todd E Lizotte. *Laser Beam Shaping Applications*, volume 1. CRC Press, 2017.