Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Forcing: Una comparación entre conjuntos y topos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

OSCAR ZÁRATE SANTAMARÍA

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. LUIS JESÚS TURCIO CUEVAS

Ciudad Universitaria Cd. Mx. 2020

A Gaby y Sofi.

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas, que con su apoyo, han hecho posible hacer realidad este sueño. A mi padre Antonio de quien tanto me he inspirado, a mi hermano Toño, a Pao y Sofi, a mi madre Gabriela que con su esfuerzo, sacrifico, entereza y amor ha sido mi mayor apoyo y ejemplo.

A mis grandes amigos de *la banquita* Jaime y Luis, a Carlos, Emmanuel, Omar, Aurora, Amacalli, Manuel, Pedro, Juilo, Osvaldo, Rafa, Ollin, Gabo, Lalo, Ricardo y especialmente a David.

A mis profesores y ayudantes que tanto me han enseñado, en particualr a Silvestre Cárdenas, Alonso Santos, Juan Garza, Leobardo Fernández, Marco Montes de Oca, Gabriel Ocampo, Carlos Prieto, Rafael Rojas, Fernando Nuñez, Osvaldo Guzmán, y en especial a Luis Turcio de quien más he aprendido.

También quiero agradecer los servicios y atenciones del Dr. Alfredo Estrada, de la Psic. Daniela Carrera y de Luis Fernando Burguete.

$\gamma\nu\omega\theta\iota\ \sigma\varepsilon\alpha\upsilon\tau\acute{o}\nu$

Introducción

La técnica de forcing fue desarrollada en 1963 por Paul Cohen en su prueba de consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo, ver [8]. A partir de ese momento, esta técnica ha probado ser una herramienta muy útil. Hoy en día se han hecho muchas variantes y extensiones, como el forcing iterado.

Por otro lado, el desarrollo de la teoría de topos de Grothendieck, Giraud y Lawvere, entre otros, crea una nueva forma de hacer matemáticas. En particular, las ideas de Cohen pueden llevarse a cabo en un topos elemental, más aun, son una de las motivaciones para la definición de topos elemental, ver [17].

El objetivo de este trabajo es mostrar las ideas y la forma de hacer forcing con órdenes parciales, cómo estas ideas pueden formularse con álgebras de Boole y formalizarse en un topos. En este sentido, se enfocará el trabajo en mostrar los respectivos desarrollos técnicos y hacer una comparación entre estas tres formas de hacer forcing; o de manera más precisa, comparar el forcing con órdenes parciales y con álgebras de Boole, luego mostrar que estas construcciones son casos particulares de una construcción general en teoría de topos, la construcción *filtro-cociente*. Posteriormente, se mostrará cómo se hacen algunas pruebas de consistencia usando las formalizaciones anteriores. En esta parte, se podrán observar algunas limitaciones y ventajas de las formas expuestas de hacer forcing. Por ejemplo, usando órdenes parciales comunes no es posible demostrar la consistencia relativa de la negación del axioma de elección, ya que $M[G]$ siempre es modelo de elección. Otro ejemplo es que no parece haber algo en la literatura acerca de $V \neq L$ en topos.

En el primer capítulo se revisa cómo se hace la técnica de forcing con órdenes parciales. Se dan las nociones básicas como filtro genérico, conjunto denso, P-nombre, etc. Además, se hará énfasis en que el modelo base sea numerable, esto se debe a que la existencia de filtros genéricos es poco común y deben suponerse este tipo de condiciones. Posteriormente, se construirá el conjunto de P-nombres como una jerarquía en lugar de la definición por $\in$-inducción tradicional ya que esta última no es suficientemente clara, por lo que podría parecer una definición *ad hoc* para los resultados posteriores. Por último, se da la interpretación de un nombre, se define la extensión genérica y se enuncian los principales resultados acerca de la extensión $M[G]$. Este capítulo está basado principalmente en [15] y [14].

En el segundo capítulo se realizan las construcciones equivalentes a las expuestas en el primer capítulo, pero con álgebras de Boole. En este caso, no será necesaria la existencia de un genérico, por lo que el modelo base es V el universo de los conjuntos. Al tener estructura adicional el proceso se hace más fácil, ahora se construye el universo de B-nombres cuyos elementos son conjuntos con "probabilidad booleana", es decir, un conjunto en $V^{(B)}$ no está formado por elementos estáticos, sino que son posibles elementos junto con un elemento del álgebra indicando la probabilidad que sea un elemento real. A su vez, se darán algunas nociones de modelos booleano-valuados y finalmente se harán cocientes con ultrafiltros para obtener la correspondiente noción de extensión "genérica". En este caso la principal bibliografía es [11] y [3].

El tercer capítulo es una revisión de los capítulos anteriores en términos de teoría de topos. Se revisan las nociones básicas de topos y se tratan de tomar como ejemplo las construcciones anteriores (ver [17]). Al mismo tiempo, se definen los conceptos básicos de teoría de gavillas. Finalmente, se muestra la construcción filtro-cociente. El material de este capítulo fue consultado principalmente en [19] y [5].

En el cuarto capítulo se realiza la demostración de la consistencia relativa de la hipótesis del continuo desde las tres perspectivas mostradas. Por último, se muestran las construcciones heurísticas de estructuras que no satisfacen el axioma de elección.

Capítulo 1

Forcing con órdenes parciales

Originalmente en 1963 Paul Cohen utilizó el forcing empleando conjuntos parcialmente ordenados. Esta versión del forcing es ampliamente utilizada por diversos autores y aunque en primera instancia es más fácil de aplicar, en gran medida resulta equivalente a la versión que emplea álgebras de Boole. Este enfoque del forcing puede consultarse a detalle en [14] y en [15].

1.1. Nociones de forcing

Definición 1.1. Sea P un conjunto parcialmente ordenado[1] distinto del vacío, se dice que $G \subseteq P$ es un *filtro* sobre P si $G \neq \varnothing$ y:

1. Para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

2. Para cualesquiera $p \in G$ y $q \in P$ tales que si $p \leqslant q$, entonces $q \in G$.

Note que el término "filtro" resulta bastante acertado, pues como su nombre lo sugiere, los filtros hacen la labor de capturar aquellos elementos en el orden parcial que son *grandes*, esto según el orden $\leqslant$ en P.

La condición 1 dicta que si dos elementos son lo suficientemente grandes según el filtro, entonces existe al menos una cota inferior en común que también es grande según el filtro. A su vez, la condición 2 indica que los filtros en verdad hacen el trabajo de *filtrar*, pues si un elemento es grande según el filtro, entonces todo elemento mayor a él necesariamente debe estar en el filtro.

Además de los filtros definidos en 1.1, en los conjuntos parcialmente ordenados es posible definir subconjuntos y situaciones notables.

Definición 1.2. Sea P un conjunto parcialmente ordenado.

1. Una *cadena* C en P es un subconjunto $C \subseteq P$ tal que, para cualesquiera $p, q \in C$ se cumple $p \leqslant q$, o bien $q \leqslant p$.

[1] A menos que sea necesario distinguir al conjunto parcialmente ordenado o a su orden, se denotará por P en lugar de $\langle P, \leqslant\rangle$.

2. Dados $p, q \in P$, se dice que p y q son *compatibles* en P si y solo si existe $r \in P$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Se denota por $p \parallel q$ para indicar que p y q son compatibles.

   En caso contrario, se dice que p y q son *incompatibles* en P, este hecho se denota con $p \perp q$.

3. Una *anticadena* en P es un subconjunto $A \subseteq P$ de tal modo que para cualesquiera $p, q \in A$ tales que si $p \neq q$, entonces $p \perp q$.

4. Se dice que $D \subseteq P$ es *denso* en P si y solo si para toda $p \in P$ existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

5. Dados $E \subseteq P$ y $p \in P$, se dice que E es *denso bajo* p si y solo si para todo $q \in P$ tal que $q \leqslant p$, existe $r \in E$ que cumple $r \leqslant q$.

Note que aunque las definiciones no impiden que P sea un filtro o un filtro genérico (ver 1.1 y 1.5), si P tiene un par de elementos incompatibles, como sucede en la mayoría de los ejemplos, entonces P no puede ser un filtro.

De esta manera, en un conjunto parcialmente ordenado P toda cadena $C \subseteq P$ es un subconjunto que con el orden es *total o linealmente ordenado*, es decir, todos los elementos en C son comparables según $\leqslant$.

Dados $p, q \in P$, ocurre que p y q son compatibles en P siempre que posean alguna cota inferior común en P. Mientras que p y q son incompatibles en P si y solo si para cualesquiera $r, s \in P$ si $r \leqslant p$, entonces $r \nleqslant q$, y si $s \leqslant q$, entonces $s \nleqslant p$.

Por otra parte, una *anticadena* $A \subseteq P$ es un subconjunto de P tal que ninguna pareja de elementos en A posee cotas inferiores en común y en contraste con las *cadenas*, las cuales están "acomodadas" en P de manera lineal, las *anticadenas* están "acomodadas" de manera *transversal* en P.

Un subconjunto denso $D \subseteq P$ tiene la característica de que está "bien distribuido inferiormente" en P al haber siempre cotas inferiores en D de todo elemento de P. Por otra parte, dados $p \in P$ y $E \subseteq P$, E es denso bajo p si es un subconjunto de P que se distribuye bien sobre las cotas inferiores de p.

Además, una anticadena $A \subseteq P$ es una *anticadena maximal* en P si lo es bajo la contención, es decir, si $B \subseteq P$ es una anticadena tal que $A \subseteq B$, entonces $A = B$.

Proposición 1.3. *Para cualesquiera P conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq P$ anticadena en P se cumple que A es una anticadena maximal en P si y solo si para todo $p \in P$ existe $a \in A$ tal que $p \parallel a$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$

Sea $p \in P$, si para cada $a \in A$ ocurre $p \perp a$, entonces $A \cup \{p\}$ es una anticadena. De esta manera, al ser A maximal debe existir $a' \in A$ tal que $p \parallel a'$.

$(\Leftarrow)$

Sea B anticadena tal que $A \subseteq B$ y sea $b \in B$. Por hipótesis existe $a \in A$ tal que $b \parallel a$. Como B es anticadena debe ocurrir $a = b$, en consecuencia $A = B$. $\square$

La proposición 1.3 indica que de manera parecida a los subconjuntos densos, las anticadenas maximales están "bien distribuidas" a través del orden parcial respecto a la compatibilidad.

Lema 1.4. *Para cualesquiera P conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío y $D \subseteq P$ denso en P se cumple que existe $A \subseteq D$ una anticadena maximal en P.*

Demostración. De una aplicación rutinaria del lema de Zorn sobre el conjunto $\mathcal{A}_D = \{A \subseteq D \mid A \text{ es una anticadena}\}$ con la contención, se cumple que existe $A \subseteq D$ anticadena maximal en D.

De esta manera, $A \subseteq P$ y para cualesquiera $p, q \in A$ tales que $p \neq q$ se cumple que p y q son incompatibles en D. Si existe $r \in P$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, entonces, como D es denso en P, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant r$ y en consecuencia $d \leqslant p$ y $d \leqslant q$ lo cual es una contradicción. De esta manera, si $p, q \in A$ son tales que $p \neq q$, entonces p y q son incompatibles en P. Así, A es una anticadena en P.

Falta ver que A es maximal en P. Sea $p \in P$. Como D es denso, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant p$. Como A es anticadena maximal en D, por la proposcición 1.3, existe $a \in A$ tal que $d \parallel a$, de esta manera, $p \parallel a$. Por la proposición 1.3, A es anticadena maximal en P. $\square$

Definición 1.5. Sean P un conjunto parcialmente ordenado y $G \subseteq P$.

- Dada $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos densos de P, se dice que G es un conjunto $\mathcal{D}$-*genérico* si para todo subconjunto $D \in \mathcal{D}$ ocurre $G \cap D \neq \varnothing$.
- Se dice que G es un conjunto *genérico* si para todo subconjunto $D \subseteq P$ denso en P, entonces $G \cap D \neq \varnothing$.
- Sea $U \subseteq P$ un filtro, se dice que U es un *ultrafiltro* si U es un filtro maximal bajo la contención, es decir, si $F \subseteq P$ es un filtro y $U \subseteq F$, entonces $U = F$.

Note que un conjunto denso en un conjunto parcialmente ordenado P indica un tipo de *distribución inferior* sobre P. De manera que, si $\mathcal{D}$ es una familia de densos en P y G es un conjunto $\mathcal{D}$-genérico, entonces G se *extiende* adecuadamente sobre los densos en $\mathcal{D}$. Así, un conjunto genérico G en P *atraviesa* a todos los densos. En otras palabras, un genérico también se expande por todo el orden parcial P.

Como ya se había mencionado, las anticadenas maximales en un orden parcial P están transversalmente bien distribuidas en todo P. Por esta razón, tiene sentido sospechar que los genéricos intersecten a las anticadenas maximales de P. En efecto, aquellos filtros en P que sean genéricos lo hacen.

Lema 1.6. *Para cualesquiera P conjunto parcialmente ordenado y $G \subseteq P$ filtro en P se cumple que G es un filtro genérico si y solo si para toda $A \subseteq P$ anticadena maximal en P ocurre $G \cap A \neq \varnothing$.*

Demostración. ($\Rightarrow$)

Dada $A \subseteq P$ una anticadena maximal se define

$$D_A = \{p \in P \mid \exists a \in A\ (p \leqslant a)\}.$$

Es fácil ver que D_A es denso en P. Al ser G un conjunto genérico existe $p \in G \cap D_A$, como $p \in D_A$ existe $a \in A$ tal que $p \leqslant a$. Puesto que $p \in G$, $p \leqslant a$ y G es un filtro, entonces $a \in G$. Así $G \cap A \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$)

Sea $D \subseteq P$ denso. Por el lema 1.4 existe $A \subseteq D$ anticadena maximal en P. Por hipótesis ocurre $G \cap A \neq \varnothing$, así $\varnothing \neq G \cap A \subseteq G \cap D$. Por lo que G es un filtro genérico. □

Gracias a sus propiedades de intersección con subconjuntos suficientemente bien distribuidos por todo el orden parcial, se verá que los filtros genéricos serán necesariamente filtros maximales bajo la contención, es decir, son ultrafiltros.

Proposición 1.7. *Si P es un conjunto parcialmente ordenado y $G \subseteq P$ es un filtro genérico, entonces G es un ultrafiltro.*

Demostración. Suponga que existe $H \subseteq P$ un filtro tal que $G \subseteq H$. Dado $p \in H$ se considera el conjunto

$$D = \{q \in P \mid q \leqslant p \text{ o bien } q \perp p\}.$$

Si $r \in P$, entonces se tienen las siguientes posibilidades:

- Si $r \parallel p$, entonces existe $s \in P$ tal que $s \leqslant p$ y $s \leqslant r$, así $s \in D$.
- Si $r \perp p$, entonces $r \in D$.

De esta manera D es denso en P. Al ser G genérico existe $q \in G \cap D$, así $q \in H$ y además $q \leqslant p$ o bien $q \perp p$. Como H es filtro no es posible $q \perp p$. Por lo tanto $q \leqslant p$. Como G es filtro se cumple $p \in G$ y en consecuencia G es un ultrafiltro. □

Lema 1.8. *Para cualesquiera P conjunto parcialmente ordenado, $G \subseteq P$ filtro genérico y $E \subseteq P$ se cumple que $G \cap E \neq \varnothing$, o en su defecto existe $g \in G$ tal que para todo $q \in E$ se cumple $g \perp q$.*

Demostración. Se considera el conjunto

$$D = \{p \in P \mid \exists q \in E\ (p \leqslant q)\} \cup \{p \in P \mid \forall q \in E\ (q \perp p)\}.$$

Sea $p \in P$ y sin pérdida de generalidad suponga que $p \notin D$. En particular existe $q \in E$ tal que $q \parallel p$. Sea $r \in P$ tal que $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$. De esta manera $r \in D$ y $r \leqslant p$. Por lo tanto D es denso en P.

Al ser G filtro genérico se considera $g \in G \cap D$. Así, o bien existe $q \in E$ tal que $g \leqslant q$, o bien para toda $r \in E$ ocurre $r \perp g$. Al ser G filtro, se cumple una de dos posibilidades: o bien $q \in G \cap E$, o en su defecto para toda $r \in E$ se tiene $r \perp g$. □

Proposición 1.9. *Si P es un conjunto parcialmente ordenado, $G \subseteq P$ filtro genérico y $E \subseteq P$ denso bajo p con $p \in G$, entonces $G \cap E \neq \varnothing$.*

Demostración. Suponga $G \cap E = \varnothing$. Por el lema 1.8 existe $g \in G$ tal que para todo $q \in E$ se cumple $g \perp q$. Como G es filtro existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant g$. Al ser E denso bajo p y $r \leqslant p$, existe $s \in E$ tal que $s \leqslant r$, por lo que $s \leqslant g$. Por tanto $s \parallel g$ con $s \in E$, lo cual es una contradicción. □

Lema 1.10. *Si P es un conjunto parcialmente ordenado y $G \subseteq P$, entonces G es un filtro genérico si y solo si:*

1. *Para cualesquiera $p \in G$ y $q \in P$, si $p \leqslant q$, entonces $q \in G$.*
2. *Para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in P$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, es decir, $p \parallel q$.*
3. *Dado $D \subseteq P$ denso en P se cumple $G \cap D \neq \varnothing$.*

Demostración. Una implicación es inmediata. Para la otra implicación solo falta ver que G no es vacío y que para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

Es inmediato ver que P es denso en P. Por (3) se cumple que $G \cap P \neq \varnothing$ y en consecuencia G no es vacío. Para ver que G es un filtro se consideran $p, q \in G$ y se define

$$D = \{r \in P \mid r \leqslant p \text{ y } r \leqslant q\} \cup \{r \in P \mid r \perp p\} \cup \{r \in P \mid r \perp q\}.$$

Sea $s \in P$ y suponga que $s \notin D$. Así, en particular se cumple que $s \parallel p$. De esta manera existe $t \in P$ tal que $t \leqslant s$ y $t \leqslant p$. Sin pérdida de generalidad suponga $t \notin D$. En particular, se cumple $t \parallel q$, por lo que existe $u \in P$ tal que $u \leqslant t$ y $u \leqslant q$. De esta manera $u \leqslant s$, $u \leqslant p$ y $u \leqslant q$, en consecuencia $u \leqslant s$ y $u \in D$. Por lo tanto, D es denso en P.

Por (3) existe $r \in G \cap D$. Como $p, q \in G$, por (2) se concluye que este elemento de G cumple $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. □

Dados los lemas 1.6, 1.10 y las proposiciones 1.7 y 1.9, se puede ver que los filtros genéricos poseen muy buenas propiedades (tal vez demasiado buenas), pues resulta complicado demostrar su existencia. A saber, si un conjunto parcialmente ordenado P tiene al menos dos elementos incompatibles entonces, por el lema 1.10, P no es un filtro genérico en P.

1.2. Extensiones genéricas.

Al suponer la *consistencia* de los axiomas de la teoría de conjuntos ZFC, lo cual se denota por $Con(ZFC)$, ZFC resulta *satisfacible*, es decir, ZFC posee un *modelo*. Dicho de otro modo, existe $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde A es un conjunto, $\in^{\mathfrak{A}} \subseteq A \times A$ y son tales que

$$\mathfrak{A} \models ZFC.$$

Al conjunto A se le denomina *modelo base* de ZFC.

En adelante se emplearán modelos base *transitivos*[2], pues en estos modelos varios de los axiomas de ZFC son *absolutos*[3] y en consecuencia es posible verificar que muchas de las consecuencias de dichos axiomas se satisfacen en los modelos transitivos directamente desde el universo de la teoría de conjuntos con la pertenencia usual.

Para garantizar la existencia de los modelos transitivos y de los modelos transitivos numerables serán necesarias las siguientes definiciones y resultados.

Definición 1.11. Sean C una *clase* y $E \subseteq C \times C$.

1. Se dice que $\langle C, E\rangle$ es una clase bien fundada si E es antirreflexiva, antisimétrica, transitiva sobre C y cada subclase $D \subseteq C$ distinta del vacío posee un elemento E-*minimal*, es decir, existe $d \in D$ tal que para cualquier $c \in D$ ocurre $\langle c, d\rangle \notin E$.

2. Sea $\langle C, E\rangle$ una clase bien fundada. Para cada $c \in C$ se define la E-*extensión* de c como
$$ext_E(c) = \{d \in C \mid \langle d, c\rangle \in E\}.$$

3. Se dice que $\langle C, E\rangle$ es una clase *extensional* si para cualesquiera $a, b \in C$ tales que $ext_E(a) = ext_E(b)$, entonces $a = b$.

Teorema 1.12 (del colapso de Mostoswki)**.** [4] *Para cada $\langle C, E\rangle$, clase bien fundada y extensional, existen una clase transitiva D y un isomorfismo $\pi : \langle C, E\rangle \to \langle D, \in\rangle$. Más aún, la clase D y el isomorfismo π son únicos y a D se le conoce como colapso transitivo de $\langle C, E\rangle$.*

Teorema 1.13 (de Löwenheim-Skolem)**.** [5] *Sea Σ un conjunto de enunciados en un lenguaje numerable de primer orden. Si Σ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo numerable.*

Lema 1.14. *Suponga la consistencia de los axiomas ZFC. Entonces existe $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$ modelo transitivo de ZFC.*

Demostración. Al suponer la consistencia de los axiomas ZFC se obtiene un modelo $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}}\rangle$ de ZFC el cual, en particular satisface los axiomas de *buena fundación* (también llamado *axioma de regularidad*) y de *extensionalidad*[6]. Así $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}}\rangle$ es bien fundado y extensional. Por el teorema del colapso de Mostoswki, existe $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$ su colapso transitivo. Como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}$ se cumple que $\mathfrak{M}$ también es modelo de ZFC. □

En adelante se denotará a los modelos transitivos como M en lugar de $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$.

[2] Un conjunto X es *transitivo* si para cada $x \in X$, se cumple $x \subseteq X$.
[3] Ver [15] definiciones I.16.4 y I.16.5 y el lema I.16.18
[4] Ver [11] teorema 6.15 (i), página 69.
[5] Ver [9] pág. 151
[6] Ver [11], capítulo 1 y capítulo 6 en donde se profundiza acerca del axioma de regularidad.

Corolario 1.15. *Suponga la consistencia de los axiomas ZFC. Entonces existe M modelo transitivo numerable de ZFC.*

Demostración. Al suponer la consistencia de los axiomas ZFC ocurre que existe $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}} \rangle$ modelo de ZFC. Por el *teorema de Löwenheim-Skolem*[7], existe $\mathfrak{C} = \langle C, \in^{\mathfrak{C}} \rangle$ tal que $\mathfrak{C} \models ZFC$ y $|C| = \aleph_0$. Empleando un argumento análogo al que se empleó en la prueba del lema 1.14, se cumple que $\mathfrak{C}$ es *bien fundado* y *extensional*. Por el *teorema del colapso de Mostoswki* existe un único conjunto transitivo M tal que si $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$, entonces $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{M}$ y en consecuencia:

- $|M| = \aleph_0$.
- M es transitivo.
- $\mathfrak{M} \models ZFC$. □

Ahora se verá bajo que condiciones existen o no los filtros genéricos.

Definición 1.16. Sean M un modelo transitivo de ZFC, P un conjunto parcialmente ordenado tal que $P \in M$ y $G \subseteq P$ un filtro en P. Se dice que G es un *filtro P-genérico sobre M* si $G \cap D \neq \varnothing$ para todo $D \subseteq P$ denso en P tal que $D \in M$.

Definición 1.17. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que P es *frondoso* o *sin átomos* si para todo $p \in P$ existen $q, r \in P$ tales que $q \leqslant p$, $r \leqslant p$ y $q \perp r$.

De esta manera, un conjunto parcialmente ordenado frondoso es aquel en el que todo elemento tiene al menos dos *extensiones incompatibles*. A su vez, si un conjunto parcialmente ordenado es frondoso, entonces éste se "ramifica" inferiormente de manera arbitraria. Esta noción permite demostrar que en muchos casos los filtros genéricos no son parte del modelo base.

Teorema 1.18. *Si M es un modelo transitivo de ZFC, P es un conjunto parcialmente ordenado frondoso tal que $P \in M$ y $G \subseteq P$ es un filtro P-genérico sobre M, entonces $G \notin M$.*

Demostración. Suponga que $G \in M$. Al ser M un modelo transitivo se tiene que $G, P \subseteq M$. Como M es un modelo de ZFC, en particular, M es un modelo de *separación*[8]. De esta manera, si se define $D = \{p \in P \mid p \notin G\}$, entonces cumple que $D \in M$ y además $D = P \backslash G$.

Sea $p \in P$. Como P es un orden parcial frondoso existen $q, r \in P$ tales que $q \leqslant p$, $r \leqslant p$ y $q \perp r$. De esta manera, $\{q, r\} \nsubseteq G$, pues de lo contrario G tendría dos elementos incompatibles. De tal modo, existe $v \in \{q, r\}$ tal que $v \leqslant p$ y $v \notin G$. En consecuencia $v \in D$ y $v \leqslant p$. Así D es un denso en P y al ser G un filtro P-genérico sobre M se cumple que $G \cap D \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. □

[7] El lenguaje de la teoría de conjuntos es numerable pues su *tipo de semejanza* es $\{\epsilon\}$.

[8] También llamado de *comprensión* o *esquema axiomático de separación*, dicta que si Y es un conjunto y $\varphi(x)$ es una fórmula con una variable libre, entonces $Z = \{y \in Y \mid \varphi(y)\}$ es un conjunto. Para más información ver [11], capítulo 1.

Este resultado muestra una condición sencilla para la inexistencia de los filtros genéricos en modelos transitivos. Más aún, si P es un conjunto parcialmente ordenado frondoso, entonces el complemento $P \backslash G$ de todo supuesto filtro genérico $G \subseteq P$ en P resulta denso. Por lo cual, ningún conjunto parcialmente ordenado frondoso tiene filtros genéricos.

El siguiente resultado muestra bajo qué condiciones es posible garantizar la existencia de filtros genéricos en conjuntos parcialmente ordenados sobre ciertos modelos transitivos.

Teorema 1.19. *Sean M modelo transitivo numerable de ZFC y P un conjunto parcialmente ordenado tal que $P \in M$. Entonces para cada $p \in P$ existe $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

Demostración. Se define

$$\mathcal{D} = \{D \in M \mid D \text{ es un subconjunto denso en } P\}.$$

De esta manera, $\mathcal{D} \subseteq M$ y en consecuencia $\mathcal{D}$ es una familia a lo más numerable. Sin pérdida de generalidad, se considera una enumeración $\mathcal{D} = \{D_n \mid n \in \omega\}$ y se define por recursión sobre ω la sucesión $q\_ : \omega \longrightarrow P$ como $q_0 = p$ y para cada $n \in \omega$ tal que q_n esté definido se considera $q_{n+1} \in D_n$ tal que $q_{n+1} \leqslant q_n$. Por su definición, $q\_$ es una sucesión decreciente.

Se define $G = \{r \in P \mid \exists n \in \omega \ (q_n \leqslant r)\}$. Como $q_0 = p$ entonces $p \in G$. Falta ver que G es un filtro P-genérico sobre M.

1. Sean $r \in G$ y $q \in P$ tales que $r \leqslant q$. Así existe $n \in \omega$ tal que $q_n \leqslant r$. De esta manera $q_n \leqslant q$ y por lo tanto $q \in G$.

2. Sean $r, q \in G$. De esta manera existen $n, n' \in \omega$ tales que $q_n \leqslant r$ y $q_{n'} \leqslant q$. Se considera $m = max\{n, n'\}$. Al ser $q\_$ una sucesión decreciente ocurren $q_m \leqslant r$, $q_m \leqslant q$ y $q_m \in G$.

3. Sea $D \subseteq P$ denso en P tal que $D \in M$. Así, existe $n \in \omega$ tal que $D = D_n$. Por las definiciones de $q\_$ y de G, se cumple $q_{n+1} \in G \cap D$.

Por lo tanto, G es un filtro P-genérico sobre M tal que $p \in G$. □

Con base en un modelo transitivo numerable M, un conjunto parcialmente ordenado P tal que $P \in M$ y $G \subseteq P$ un filtro P-genérico sobre M se construirá un modelo transitivo $M[G]$ tal que $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$. Para lograr esto, primero será necesario indicar cómo construir *conjuntos nuevos* cuya pertenencia *varía* según los elementos de P. De esta manera, se emplean conjuntos parcialmente ordenados con máximo[9] los cuales *codifican* la manera en que son construidos dichos conjuntos.

[9]También llamados *nociones de forcing*.

Definición 1.20. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Se define por recursión transfinita la jerarquía $P-nombre\_$ sobre los *ordinales* de la siguente manera:

- $P - nombre_0 = \emptyset$.
- Para cada ordinal α tal que $P - nombre_\alpha$ esta definido, se define

$$P - nombre_{\alpha+1} = \mathcal{P}(P - nombre_\alpha \times P)$$

  donde $\mathcal{P}$ es el *operador potencia*.
- Para cada ordinal límite γ tal que $P - nombre_\beta$ esta definido para todo ordinal β con $\beta < \gamma$, se define

$$P - nombre_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma}(P - nombre_\beta).$$

De esta manera, la *clase de nombres* queda definida como

$$V^P = \bigcup_{\alpha \in Ord}(P - nombre_\alpha).$$

A los elementos de la clase V^P se les denomina *P-nombres* o simplemente *nombres*. Note que se tiene la siguiente caracterización.

Observación 1.21. $\dot{x}$ es un nombre si y solo si todo *elemento* del conjunto $\dot{x}$ es de la forma $\langle \dot{y}, p \rangle$, donde $p \in P$ y $\dot{y}$ es un nombre.

De esta manera, si se consideran dos nombres $\dot{x}, \dot{y} \in V^P$ tales que $\langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x}$ con $p \in P$, entonces p indica “como está variando” $\dot{y}$ en $\dot{x}$.

Ahora, se considerarán los nombres en un modelo transitivo numerable de ZFC.

Definición 1.22. Para cada M modelo transitivo numerable de ZFC y P conjunto parcialmente ordenado tal que $P \in M$ se define

$$M^P = V^P \cap M = \{\dot{x} \in M \mid (\dot{x} \text{ es un } P - \text{nombre})^M\}. \text{ [10]}$$

Lo siguiente es notar que un filtro P-genérico sobre M determina una nueva noción de pertenencia.

Definición 1.23. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$ y $G \subseteq P$ un filtro P-genérico sobre M. Para cada $\dot{x} \in M^P$ se define recursivamente la *valuación de $\dot{x}$ según G* como

$$\dot{x}_G = \{\dot{y}_G \mid \exists p \in G \text{ tal que } \langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x}\}.$$

[10] Ver [14], definición IV.2.6, pág 189.

Si 1 es el máximo de P, entonces para cada $x \in M$ se define recursivamente el *nombre canónico* de x como

$$\check{x} = \{\langle \check{y}, 1 \rangle \mid y \in x\}.$$

A su vez, se define el nombre *canónico* del filtro genérico como

$$\dot{\Gamma} = \{\langle \check{p}, p \rangle \mid p \in P\}.$$

De esta manera, $\check{x} \in M^P$ para cada $x \in M$ y como $P \in M$, entonces $\dot{\Gamma} \in M^P$.

Es fácil probar por inducción que para cada $x \in M$ se cumple $\check{x}_G = x$ y en consecuencia $\dot{\Gamma}_G = G$. Así, se define la *extensión genérica de M por G* como

$$M[G] = \{\dot{x}_G \mid \dot{x} \in M^P\}. \tag{1.1}$$

De esta manera, G decide cómo se construyen los elementos en $M[G]$ con base en los nombres de M^P.

Observación 1.24. 1. Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, P es un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$ y $G \subseteq P$ es un filtro P-genérico sobre M, entonces $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$.

2. Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, P es un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$ y $G \subseteq P$ es un filtro P-genérico sobre M, entonces se cumple que para cualquier $a \in M[G]$ existe $\dot{b} \in M^P$ tal que $a = \dot{b}_G$.

También se cumple que $\langle M[G], \in \rangle$ es un modelo transitivo de ZFC, esto se prueba notando que G decide que nombres en M^P están relacionados bajo la pertenencia[11].

A su vez, de manera similar a la definición 1.22, si N es modelo transitivo de ZFC y X es un conjunto *definible en N* [12], entonces X^N la *interpretación* de X según N está dada por

$$X^N = X \cap N. \tag{1.2}$$

Así, para cualesquiera M modelo transitivo numerable de ZFC, P conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$, $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M y X definible en M se cumple

$$X^M = X \cap M \subseteq X \cap M[G] = X^{M[G]}. \tag{1.3}$$

Por medio de un modelo transitivo numerable M y P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$, es posible definir la *relación de forcing* para órdenes parciales

[11]Ver [15], lema IV.2.15, pág 248, y teorema IV.2.27, pág 253.

[12]Ver la definición 4.39.

Definición 1.25. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$, $p \in P$, φ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$. Se dice que

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \text{ si y solo si para todo } G \text{ filtro } P - \text{genérico sobre } M \text{ con } p \in G \text{ se satisface } M[G] \models \varphi(\dot{x}_{1G}, \ldots, \dot{x}_{nG}). \quad (1.4)$$

La relación $p \Vdash \psi$ se lee como p *fuerza a* ψ.

La relación de forcing posee varias propiedades, las cuales solo se probarán para la versión con modelos booleano valuados. Por ahora, solo se mencionarán algunas de estas propiedades:

- En $M[G]$ *toda verdad está forzada*, es decir, para cualesquiera M modelo transitivo numerable de ZFC, P conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$, $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M, φ fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$.

$$\text{Si } M[G] \models \varphi(\dot{x}_{1G}, \ldots, \dot{x}_{nG}), \text{ entonces existe } p \in G \text{ tal que } p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n). \quad (1.5)$$

- Para cualesquiera M modelo transitivo numerable de ZFC, P conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$, $p \in P$, φ fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$.

$$\text{Si } p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \text{ y } q \leqslant p, \text{ entonces } q \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n). \quad (1.6)$$

- Ningún elemento en P fuerza una contradicción, es decir, para cualesquiera φ fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ no existe $p \in P$ tal que

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \wedge \neg\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n). \quad (1.7)$$

Note que en (1.4) la relación depende de todos los filtros genéricos que satisfacen condiciones muy específicas, además, para justificar la existencia de un filtro genérico fueron necesarios el corolario 1.15 y el teorema 1.19, dichos resultados son *demasiado* elaborados. No obstante, más adelante cuando se tenga definido el *modelo booleano-valuado* $V^{(B)}$, se redefinirán las extensiones genéricas y la relación de forcing en términos de un álgebra de Boole y se exhibirá que al realizar forcing, ya sea empleando conjuntos parcialmente ordenados o bien empleando filtros genéricos en su versión con álgebras de Boole, se generan en esencia los mismos resultados.

Capítulo 2

Forcing con modelos booleano-valuados

En este capítulo se procede a describir de manera general el desarrollo del forcing mediante el uso de álgebras de Boole como soporte. Desde luego, se apelará abiertamente a la definición de álgebra de Boole y algunas de sus propiedades, las cuales pueden ser consultadas en [13]. También se recurrirá a conceptos, resultados y técnicas de *teoría de modelos*, las cuales el lector interesado podrá consultar en [6], [9] y [20].

Como ya se ha mencionado, el forcing fue originalmente concebido empleando conjuntos parcialmente ordenados con máximos, de hecho, gran parte de los avances posteriores a su invención emplean este tipo de estructuras y trabajan el forcing desde esta perspectiva. Por otra parte, en 1967 Scott, Solovay y Vopěnka formularon las versiones iniciales del forcing empleando los modelos booleano-valuados.

En este capítulo se muestran las primeras nociones de este desarrollo. Se exhibirá que todo conjunto parcialmente ordenado se puede *encajar densamente* en un álgebra de Boole completa, preservando las suficientes propiedades que permitan una *equivalencia* entre forcing con órdenes parciales y con modelos booleano-valuados empleando filtros genéricos. Por esta razón, es necesario revisar cómo son los filtros en estas estructuras.

2.1. Filtros

La definición de filtro en un álgebra de Boole varía ligeramente de la definición 1.1.

Definición 2.1. Sea B un álgebra de Boole[1]. Se dice que $F \subseteq B$ es un *filtro* si satisface las siguientes condiciones:

[1] A menos que sea necesario distinguir al álgebra de Boole o a su estructura, se denotará por B en lugar de $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$. Además, se dice que $x \leqslant y$ en B si y solo si $x \wedge y = x$.

1. $1 \in F$ y $0 \notin F$.
2. Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$.
3. Si $x \in F$ y $y \in B$ son tales que $x \leqslant y$, entonces $y \in F$.

Note que para cualquier álgebra de Boole B. Si $F \subseteq B$ es un filtro según la definición 1.1 tal que $0 \notin F$, entonces F es un filtro según la definición 2.1 y si $F \subseteq B$ es un filtro según 2.1, entonces F es un filtro según la definición 1.1.

Un ejemplo de filtro consiste en tomar un elemento arbitrario $x \in B$ tal que $x \neq 0$ y considerar la familia $\uparrow(x) = \{y \in B \mid x \leqslant y\}$. Este tipo de filtro se llama *filtro principal generado por* x.

Definición 2.2. Sea B un álgebra de Boole. Dado $F \subseteq B$ filtro, se dice que F es *principal* si existe $x \in B$ tal que $F = \uparrow(x)$.

De esta manera, en un álgebra de boole B existe al menos un filtro, a saber, un filtro principal por cada elemento en $B \backslash \{0\}$.

Existen otras formas de obtener filtros en álgebras de Boole. Se sabe que algunas de las condiciones para que un subconjunto de un álgebra de Boole sea filtro son de *cerradura*, en este caso, del ínfimo binario y de las cotas superiores, de manera que, como sucede con subconjuntos notables en muchas estucturas algebraicas tales como los subgrupos de un grupo, los ideales de un anillo o los subespacios de un espacio vectorial, se cumple que si $\{F_i \mid i \in I\}$ es una familia distinta del vacío de filtros en B y $\{F_j \mid j \in J\}$ es una cadena distinta del vacío de filtros en B, entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ y $\bigcup_{j \in J} F_j$ son filtros[2]. Además, la unión arbitraria de filtros no necesariamente es un filtro.

Ahora se buscará definir filtros a través de subconjuntos del álgebra, particularmente se busca extender subconjuntos del álgebra a filtros. Para que un subconjunto $A \subseteq B$ sea extendido a un filtro se debe excluir al elemento 0 y *cerrar* al conjunto A bajo ínfimos finitos y bajo cotas superiores, debido a esto, es conveniente realizar este proceso por pasos.

Definición 2.3. Sean B un álgebra de Boole y $A \subseteq B$. Se definen:

- $cls(A) = \{a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \mid n \in \mathbb{Z}^+,\ a_1, \ldots, a_n \in A\}$.
- $\uparrow A = \{x \in B \mid \exists a \in A\ (a \leqslant x)\}$.

Así, para todo $A \subseteq B$, $cls(A)$ es cerrado bajo ínfimos finitos y además $A \subseteq cls(A)$. Por otra parte, se cumple $A \subseteq \uparrow A$ y $\uparrow A$ es cerrado bajo cotas superiores. De esta manera ocurre

$$\uparrow(cls(A)) = \{x \in B \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \exists a_1, \ldots, a_n \in A \text{ tales que } a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leqslant x\}.$$

y en consecuencia sucede $A \subseteq cls(A) \subseteq \uparrow(cls(A))$.

[2]Las pruebas a estas afirmaciones no se realizarán pues son análogas a las propias en los casos de subgrupos, ideales o subespacios vectoriales.

No obstante, $\uparrow(cls(A))$ puede no ser un filtro, pues surge un problema cuando el ínfimo finito de algunos de los elementos del conjunto A resulte 0.

Definición 2.4. Sean B un álgebra de Boole y $A \subseteq B$. Se dice que A tiene la *propiedad de intersección finita* si y solo si el ínfimo de todo subconjunto finito distinto del vacío de A no es 0, es decir:

Para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \neq 0$.

Esta propiedad se abrevia con *pif*.

Proposición 2.5. *Si B es un álgebra de Boole y $A \subseteq B$ tiene la pif, entonces para cada $x \in B$ se cumple que $A \cup \{x\}$ tiene la pif, o bien, $A \cup \{\neg x\}$ tiene la pif.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponga que $A \cup \{\neg x\}$ no tiene la pif, de esta manera existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \wedge \neg x = 0$. Para facilitar la notación sea $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. De esta manera, se cumple que $a \leqslant x$. Para demostrar que $A \cup \{x\}$ tiene la pif se consideran $b_1, \ldots, b_m \in A$ y como A tiene pif se tiene lo siguiente:

$$0 \neq b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \wedge a \leqslant b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \wedge x.$$

De donde se concluye que $b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \wedge x \neq 0$, es decir, $A \cup \{x\}$ tiene la pif. □

Proposición 2.6. *Todo filtro en un álgebra de Boole tiene la pif.*

Demostración. Sean B álgebra de Boole y $F \subseteq B$ un filtro. Así F es cerrado bajo ínfimos finitos y como $0 \notin F$ ningún ínfimo finito será 0. □

Observación 2.7. Sean B un álgebra de Boole y $A \subseteq B$. Si A tiene la pif, entonces $\uparrow(cls(A))$ es un filtro.

Dado que toda álgebra de Boole es en particular un conjunto parcialmente ordenado, un ultrafiltro en un álgebra de Boole es un filtro maximal bajo la contención.

Proposición 2.8. *Sean B un álgebra de Boole y $U \subseteq B$ un filtro, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *U es un ultrafiltro, es decir, es un filtro maximal.*

2. *Si $x \in B$, entonces $x \in U$ ó $\neg x \in U$.*

3. *Si $x \vee y \in U$, entonces $x \in U$ ó $y \in U$.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$

Sea $x \in B$. Por la proposición 2.6, U tiene la pif. Por la proposición 2.5 se cumple que o bien $U \cup \{x\}$ tiene la pif, o bien $U \cup \{\neg x\}$ tiene la pif. Sin pérdida de generalidad suponga que $U \cup \{x\}$ tiene la pif. Por la observación 2.7, $U \cup \{x\}$

puede ser extendido al filtro $\uparrow(cls(U \cup \{x\}))$. Al ser U un ultrafiltro se cumple $\uparrow(cls(U \cup \{x\})) = U$, por lo que $x \in U$.

$(2 \Rightarrow 3)$

Sean $x, y \in B$ tales que $x \vee y \in U$ y sin pérdida de generalidad suponga que $x \notin U$, por (2) se tiene que $\neg x \in U$. Como U es un filtro tal que $x \vee y \in U$, se tiene que $\neg x \wedge y = \neg x \wedge (x \vee y) \in U$, de donde se concluye que $y \in U$.

$(3 \Rightarrow 1)$

Sea $F \subseteq B$ filtro tal que $U \subseteq F$. Sea $z \in F$, como U es filtro, se cumple $\neg z \vee z = 1 \in U$. Por (3) se tiene que $\neg z \in U$, o bien, $z \in U$. Como F es filtro se obtiene que $z \in U$ y en consecuencia $U = F$. □

La proposición 2.8 indica que los ultrafiltros son filtros *suficientemente* grandes para separar a los elementos del álgebra de Boole respecto a la negación y a la operación supremo binario. De esta manera, los ultrafiltros parten en dos al álgebra de Boole de manera "adecuada".

Teorema 2.9 (del Ultrafiltro)**.** *Si B es un álgebra de Boole y $F \subseteq B$ es un filtro, entonces F puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Se sigue de aplicar rutinariamente el lema de Zorn. □

Con el teorema del ultrafiltro se tienen los siguientes resultados.

Corolario 2.10. *Sean B un álgebra de Boole y $A \subseteq B$ con la pif. Entonces A puede ser extendida a un ultrafiltro.*

Demostración. Se sigue de la observación 2.7 y del teorema 2.9. □

Corolario 2.11. *Sean B un álgebra de Boole y $x \in B$ tal que $x \neq 0$. Entonces existe un ultrafiltro U tal que $x \in U$.*

Demostración. Por la definición 2.2, $\uparrow(x)$ es un filtro. Por el teorema 2.9, $\uparrow(x)$ puede ser extendido a un ultrafiltro U. Así, $\uparrow(x) \subseteq U$ y en consecuencia $x \in U$. □

Corolario 2.12. *Sean B un álgebra de Boole con $x, y \in B\backslash\{0,1\}$ tales que $x \neq y$. Entonces existe un ultrafiltro U tal que $y \notin U$ y $x \in U$.*

Demostración. Como $x \neq y$ entonces se puede suponer, sin perdida de generalidad, que $x \wedge \neg y \neq 0$. Por el corolario 2.11, existe un ultrafiltro U tal que $x \wedge \neg y \in U$. En consecuencia $x \in U$ y $y \notin U$. □

2.2. Completaciones booleanas

Ahora se procederá a construir, para cada conjunto parcialmente ordenado, un *encaje denso* a un álgebra de Boole completa tal que preserve y *refleje* propiedades como la compatibilidad, incompatibilidad y la genericidad de filtros.

Definición 2.13. Sea B un álgebra de Boole. Se dice que B es *completa* si cualquier familia de elementos $\{b_i \mid i \in I\}$ de B tiene *supremo* e *ínfimo* en B, es decir,

$$\bigvee_{i \in I} b_i \in B \ \text{ y } \ \bigwedge_{i \in I} b_i \in B.$$

Definición 2.14. Sea B un álgebra de Boole. Se define $B^+ = B \backslash \{0\}$.

Definición 2.15. Sean B un álgebra de Boole y $D \subseteq B^+$. Se dice que D es denso en B si y solo si D es denso en B^+ según la definición 1.2(4).

De esta manera, $D \subseteq B^+$ es denso en el álgebra de Boole B siempre que para todo $b \in B$ tal que $b \neq 0$ existe $a \in D$ que cumple $a \leqslant b$.

Cabe mencionar que es necesario definir denso en álgebras de Boole según 2.15 (es decir, como subconjuntos de B^+), pues si estos se definen según 1.2(4), entonces cualquier subconjunto de B que tenga al 0 sería denso y en consecuencia se perdería la propiedad de "buena distribución" sobre B.

Definición 2.16. Sean B un álgebra de Boole y $A \subseteq B^+$.

1. Se dice que A es una anticadena en B si y solo si A es una anticadena en B^+ según la definición 1.2(3).

2. Se dice que A es una anticadena maximal en B si y solo si A es una anticadena maximal en B^+.

De esta manera, $A \subseteq B^+$ es una anticadena en el álgebra de Boole B siempre que $x \wedge y = 0$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x \neq y$. A su vez, $A \subseteq B^+$ es una anticadena maximal en el álgebra de Boole B si A es una anticadena en B tal que no existe $b \in B^+$ que cumple $a \wedge b = 0$ para cada $a \in A$.

Definición 2.17. Sea X un *espacio topológico*.

1. Para cada $Y \subseteq X$ se define la *regularización* de Y como $(\overline{Y})^\circ$.

2. Se dice que $A \subseteq X$ es *abierto regular* si y solo si $A = (\overline{A})^\circ$.

3. Se define la familia de abiertos regulares en X como

$$RO(X) = \{A \subseteq X \mid A \textit{ es abierto regular}\}.$$

Es inmediato ver que la regularización de todo subconjunto de X es abierto.

Lema 2.18. *Para cualesquiera X espacio topológico y $U, V, W \subseteq X$ abiertos se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $U \subseteq (\overline{U})^\circ$.

2. *Si U y V son abiertos regulares, entonces $U \cap V$ es abierto regular.*

3. *Para cada $Y \subseteq X$ se tiene que $(\overline{Y})^\circ$ es abierto regular.*

4. *$(\overline{U})^\circ$ es el mínimo abierto regular que contiene a U.*

5. *Para cada $Y \subseteq X$ se cumple $U \cap (\overline{Y})^\circ \subseteq (\overline{U \cap Y})^\circ$.*

6. *Si $U \cap V = \varnothing$, entonces $(\overline{U})^\circ \cap (\overline{V})^\circ = \varnothing$.*

Demostración. 1. Como la *cerradura* de todo subconjunto cubre a dicho subconjunto, entonces se cumple $U \subseteq \overline{U}$. Como el operador *interior* es *monótono* y U es abierto, se concluye $U = U^\circ \subseteq (\overline{U})^\circ$.

2. Como U y V en particular son abiertos, entonces $U \cap V$ es abierto. Por (1) se cumple $U \cap V \subseteq (\overline{U \cap V})^\circ$. Además $(\overline{U \cap V})^\circ \subseteq (\overline{U})^\circ = U$ y $(\overline{U \cap V})^\circ \subseteq (\overline{V})^\circ = V$. Así $(\overline{U \cap V})^\circ \subseteq U \cap V$.

3. Como $\left(\overline{Y}\right)^\circ \subseteq \overline{Y}$, entonces $\overline{\left(\overline{Y}\right)^\circ} \subseteq \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$. Así $\left(\overline{\left(\overline{Y}\right)^\circ}\right)^\circ \subseteq \left(\overline{Y}\right)^\circ$ y por (1), se cumple $\left(\overline{Y}\right)^\circ \subseteq \left(\overline{\left(\overline{Y}\right)^\circ}\right)^\circ$.

4. Por (1) y (3) se sabe que $U \subseteq (\overline{U})^\circ$ y $(\overline{U})^\circ \in RO(X)$. Sea $A \in RO(X)$ tal que $U \subseteq A$. Así $(\overline{U})^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ = A$.

5. Como U es abierto, se cumple $U \cap \overline{Y} \subseteq \overline{U \cap Y}$. [3]
   Así $U \cap (\overline{Y})^\circ = U^\circ \cap (\overline{Y})^\circ = (U \cap \overline{Y})^\circ \subseteq (\overline{U \cap Y})^\circ$.

6. Por (5) se cumple $U \cap (\overline{V})^\circ \subseteq (\overline{U \cap V})^\circ$. Como $U \cap V = \varnothing$, ocurre $(\overline{V})^\circ \cap U = \varnothing$. Por (5) se tiene que $(\overline{V})^\circ \cap (\overline{U})^\circ \subseteq (\overline{(\overline{V})^\circ \cap U})^\circ$, en consecuencia $(\overline{V})^\circ \cap (\overline{U})^\circ = \varnothing$. □

Teorema 2.19. *Para cada espacio topológico X. $RO(X)$ es un álgebra de Boole completa al equiparse con las siguientes operaciones:*

- $0 = \varnothing$, $1 = X$
- $A \wedge B = A \cap B$
- $\bigvee \mathcal{F} = (\overline{\bigcup \mathcal{F}})^\circ$
- $A \vee B = (\overline{A \cup B})^\circ$
- $\neg A = (X \backslash A)^\circ$
- $\bigwedge \mathcal{F} = (\overline{\bigcap \mathcal{F}})^\circ$

Demostración. Se sabe que $\langle RO(X), \subseteq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. Por la definición 2.17 y el lema 2.18, $\langle RO(X), \subseteq, \wedge, \vee \rangle$ es una retícula con máximo y mínimo.

Para cada $\mathcal{F} \subseteq RO(X)$, $\bigcup \mathcal{F}$ es el mínimo abierto de X que contiene a cada $H \in \mathcal{F}$. Por la propiedad (4) del lema 2.18 $(\overline{\bigcup \mathcal{F}})^\circ$ es la mínima cota superior de $\mathcal{F}$ en $RO(X)$.

Para $\mathcal{F} \subseteq RO(X)$ sea $A = (\overline{\bigcap \mathcal{F}})^\circ$. Para probar que A es la máxima cota inferior de $\mathcal{F}$ se debe notar que por la propiedad (3) del lema 2.18, se cumple $A \in RO(X)$, además $\bigcap \mathcal{F} \subseteq H$ para cada $H \in \mathcal{F}$, en consecuencia $A \subseteq (\overline{H})^\circ = H$ y así A es cota inferior de $\mathcal{F}$ en $RO(X)$. Si B es otra cota inferior de $\mathcal{F}$ en $RO(X)$, entonces $B \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ y $B = (\overline{B})^\circ \subseteq (\overline{\bigcap \mathcal{F}})^\circ = A$.

[3] Si $x \in U \cap \overline{Y}$ y V es un abierto tal que $x \in V$, entonces $U \cap V$ es un abierto tal que $x \in U \cap V$. Como $x \in \overline{Y}$, se cumple $V \cap U \cap Y \neq \varnothing$ y así $x \in \overline{U \cap Y}$.

Para cada $A \in RO(X)$ se cumple $A \cap (X\backslash\overline{A})^\circ \subseteq A \cap (X\backslash A) = \varnothing$. Por la propiedad (6) del lema 2.18, ocurre $A \cap (\overline{(X\backslash\overline{A})^\circ})^\circ = (\overline{A})^\circ \cap (\overline{(X\backslash\overline{A})^\circ})^\circ = \varnothing$.

Así, $(\overline{(X\backslash\overline{A})^\circ})^\circ \subseteq X\backslash A$ y en consecuencia $(\overline{(X\backslash\overline{A})^\circ})^\circ \subseteq (X\backslash\overline{A})^\circ$. Por la propiedad (1) del lema 2.18 se cumple $(\overline{(X\backslash\overline{A})^\circ})^\circ = (X\backslash\overline{A})^\circ$ y de esta manera $\neg A \in RO(X)$. Además, para cada $A \in RO(X)$ se cumplen $A \wedge \neg A = \varnothing$ y $A \vee \neg A = X$.

Así $\langle RO(X), \subseteq, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ es una retícula completa, complementada con 0 y 1. Los detalles de las propiedades distributividad pueden consultarse en [13] teorema 1.37. □

En un conjunto parcialmente ordenado P, la familia $\{\downarrow(p) \mid p \in P\}$ define una *base* para la *topología del orden* en P, donde para cada $p \in P$

$$\downarrow(p) = \{q \in P \mid q \leqslant p\}.$$

De esta manera, $U \subseteq P$ es *abierto* en esta topología si y solo si U es cerrado bajo cotas inferiores.

Note que para cada $Y \subseteq P$, en la topología del orden se cumple lo siguiente

$$Y^\circ = \{p \in P \mid \downarrow(p) \subseteq Y\}, \tag{2.1}$$

$$\overline{Y} = \{p \in P \mid \downarrow(p) \cap Y \neq \varnothing\}. \tag{2.2}$$

Como $\downarrow(p)$ es la mínima vecindad de p en P, se cumple que para cada $q \in P$

$$\overline{\downarrow(q)} = \{r \in P \mid \downarrow(r) \cap \downarrow(q) \neq \varnothing\} = \{r \in P \mid r \parallel q\}, \tag{2.3}$$

$$(\overline{\downarrow(q)})^\circ = \{r \in P \mid \forall t \leqslant r\ (t \parallel q)\}. \tag{2.4}$$

Teorema 2.20 (Completación booleana)**.** *Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Entonces existen B un álgebra de Boole completa y una función $e : P \longrightarrow B$ tal que:*

1. *$e[P] \subseteq B^+$,*
2. *Para cualesquiera $p, q \in P$ si $p \leqslant q$, entonces $e(p) \leqslant e(q)$,*
3. *$e[P]$ es denso en B^+,*
4. *Para cualesquiera $p, q \in P$ se cumple que $p \perp q$ si y solo si $e(p) \wedge e(q) = 0$, y*
5. *$e : P \to B$ es única salvo isomorfismo, es decir, si B' es un álgebra de Boole completa y $e' : P \to B'$ es una función tal que satisface las condiciones anteriores, entonces existen isomorfismos de álgebras de Boole $h : B \to B'$ y $h' : B' \to B$ tales que $e' = h \circ e$ y $e = h' \circ e'$.*

Demostración. Se considera P con la topología del orden y se toma $B = RO(P)$. Por el teorema 2.19, B es un álgebra de Boole completa. Además, se define $e : P \to B$ como $e(p) = (\overline{\downarrow(p)})^\circ$.

1. Sea $p \in P$. Por la propiedad (3) del lema 2.18 se cumple $e(p) \in B$. Como $p \in \downarrow(p)$, por la propiedad (1) del lema 2.18, ocurre $p \in e(p)$. Así $e(p) \neq \varnothing$.

2. Sean $p, q \in P$ tales que $p \leqslant q$. Así se cumple $\downarrow(p) \subseteq \downarrow(q)$, de esta manera, $(\overline{\downarrow(p)})^\circ \subseteq (\overline{\downarrow(q)})^\circ$ y en consecuencia $e(p) \leqslant e(q)$.

3. Sea $A \in B$ tal que $A \neq \varnothing$. Como $\{\downarrow(p) \mid p \in P\}$ es una base de la topología, existe $p \in P$ tal que $\downarrow(p) \subseteq A$. Por la propiedad (4) del lema 2.18 se cumple $e(p) \subseteq A$.

4. Sean $p, q \in P$.

   - Si $p \perp q$, entonces $\downarrow(p) \cap \downarrow(q) = \varnothing$. Por la propiedad (6) del lema 2.18 se cumple $e(p) \cap e(q) = \varnothing$.
   - Suponga $e(p) \cap e(q) = \varnothing$. Por la propiedad (1) del lema 2.18, ocurre $\downarrow(p) \cap \downarrow(q) \subseteq e(p) \cap e(q)$. Así, $\downarrow(p) \cap \downarrow(q) = \varnothing$ y en consecuencia $p \perp q$.

5. Se consideran $e : P \to B$ y $e' : P \to B'$ dos funciones que cumplen con las condiciones (1)–(4) donde B y B' son álgebras de Boole completas. Se definen las funciones $h : B \to B'$ y $h' : B' \to B$ como

$$h(b) = \bigvee_{e(p) \leqslant b} e'(p) \qquad h'(b') = \bigvee_{e'(p) \leqslant b'} e(p).$$

   Como B y B' son álgebras de Boole completas, entonces h y h' preservan ínfimos, supremos, complementos y además una es inversa de la otra.[4] □

Para cada conjunto parcialmente ordenado P, la función $e : P \to B$ descrita en el teorema 2.20 se llama *completación booleana* de P.

Corolario 2.21. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado, $e : P \to B$ su completación booleana y $p, q \in P$ tales que $e(q) \leqslant e(p)$. Entonces existe $r \in P$ tal que $r \leqslant p$ y $e(r) \leqslant e(q)$.*

Demostración. Por hipótesis se tiene $e(q) \leqslant e(p)$, de esta manera se cumple $e(q) \wedge e(p) \neq 0$. Por la propiedad (4) del teorema 2.20 se tiene $q \parallel p$, de esta manera, existe $r \in P$ tal que $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$. Por la propiedad (2) del teorema 2.20 se cumple $e(r) \leqslant e(q)$ con $r \leqslant p$. □

Definición 2.22. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que P es *separativo* o *refinado* si y solo si para cualesquiera $p, q \in P$ tales que $q \nleqslant p$ existe $r \in P$ que cumple $r \leqslant q$ y $r \perp p$.

Note que si un conjunto parcialmente ordenado P no es separativo, entonces existen $p, q \in P$ tales que $q \nleqslant p$ y tales que todo $r \leqslant q$ ocurre $r \parallel p$, y en consecuencia $q \parallel p$. Es decir, existen $p, q \in P$ tales que $q \nleqslant p$ pero compatibles entre sí.

[4] La prueba de que h y h' son morfismos de álgebras de Boole tales que $h \circ h' = id_B$, $h' \circ h = id_{B'}$, $e' = h \circ e$ y $e = h' \circ e'$, se puede consultar en [13], teorema 4.14, pág 56.

Corolario 2.23. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado y $e : P \to B$ su completación booleana. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es separativo.*

2. *Para cada $p \in P$ se cumple $e(p) = \downarrow(p)$.*

3. *e es un isomorfismo de P al orden parcial $e[P] \subseteq B$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $q \in (\overline{\downarrow(p)})^\circ$. Por (2.4), ocurre que para cada $r \in P$ tal que $r \leqslant q$ se cumple $r \parallel p$. Al ser P separativo, se obtiene $q \leqslant p$, es decir, $q \in \downarrow(p)$ y en consecuencia $(\overline{\downarrow(p)})^\circ \subseteq \downarrow(p)$. Como $\downarrow(p)$ es abierto, por la propiedad (1) del lema 2.18, se concluye $\downarrow(p) = (\overline{\downarrow(p)})^\circ$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Si $e(p) = e(q)$ entonces $\downarrow(p) = \downarrow(q)$, de donde se concluye $p = q$. De esta manera $e\colon P \to e[P]$ es una biyección y, por (2), e^{-1} preserva el orden.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Si $q \nleqslant p$, entonces $e(q) \nleqslant e(p)$, es decir, $(\overline{\downarrow(q)})^\circ \nsubseteq (\overline{\downarrow(p)})^\circ$. Así, existe $r \in (\overline{\downarrow(q)})^\circ$ tal que $r \notin (\overline{\downarrow(p)})^\circ$. Por (2.4), en particular existe $s \in P$ tal que $s \leqslant r$, $s \parallel q$ y $s \perp p$. De esta manera, existe $t \in P$ tal que $t \leqslant s$, $t \leqslant q$ y $t \perp p$, en consecuencia P es separativo. $\square$

De esta manera, entre un conjunto parcialmente ordenado y su completación booleana se preservan y reflejan los elementos compatibles e incompatibles, esto permite una compatibilidad entre sus conjuntos densos y sus anticadenas.

Proposición 2.24. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado frondoso*[5] *y $e : P \to B$ su completación booleana. Entonces B^+ es un conjunto parcialmente ordenado frondoso.*

Demostración. Sea $b \in B^+$. Por la propiedad (3) del teorema 2.20, $e[P]$ es denso en B^+ y así, existe $p \in P$ tal que $e(p) \leqslant b$. Como P es frondoso existen $q, r \in P$ tales que $q \leqslant p$, $r \leqslant p$ y $q \perp r$. Por las propiedades (2) y (4) del teorema 2.20, se cumplen $e(q) \leqslant b$, $e(r) \leqslant b$ y $e(q) \perp e(r)$ en B^+. $\square$

Ahora se verá cómo se comportan los filtros genéricos en álgebras de Boole completas. Un filtro genérico en un álgebra de Boole B es un filtro genérico $G \subseteq B^+$ en el orden parcial B^+ según la definición 1.5. Por la proposición 1.7, G es un ultrafiltro en B. Más aun, los filtros genéricos en álgebras de Boole poseen nuevas propiedades.

Lema 2.25. *Sean B un álgebra de Boole completa y $A \subseteq B^+$ una anticadena en B^+. Entonces A es maximal en B^+ si y solo si $\bigvee A = 1$.*

Demostración. ($\Rightarrow$)

Suponga que $\bigvee A \neq 1$. Así $\neg(\bigvee A) \in B^+$ y en consecuencia para cada $a \in A$ se cumple $a \wedge \neg(\bigvee A) \leqslant \bigvee A \wedge \neg(\bigvee A) = 0$. De esta manera $A \cup \{\neg(\bigvee A)\}$

[5]Ver la definición 1.17.

es una anticadena en B^+ que extiende propiamente a A y así A no es maximal en B^+.

($\Leftarrow$)

Suponga $\bigvee A = 1$. Si $b \in B$ es tal que $b \wedge a = 0$ para toda $a \in A$, entonces:

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge \bigvee_{a \in A} a \\ &= \bigvee_{a \in A} (b \wedge a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera, no existe $x \in B^+$ tal que x es incompatible con a en B^+ para cada $a \in A$. Por lo tanto, A es una anticadena maximal en B^+. $\square$

Ser filtro genérico es una propiedad mucho más fuerte que ser ultrafiltro. Por ejemplo, es fácil encontrar un ultrafiltro que no es cerrado bajo ínfimos arbitrarios, sin embargo un filtro genérico sí lo es, como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 2.26. *Sean B un álgebra de Boole completa, $G \subseteq B$ un filtro genérico en B^+ y $X \subseteq G$ tal que $X \neq \varnothing$. Entonces $\bigwedge X \in G$.*

Demostración. Para encontrar un elemento de G que esté por debajo de $\bigwedge X$ se considera el conjunto

$$D = \{u \in B^+ \mid \forall x \in X \ (u \leqslant x)\} \cup \{u \in B^+ \mid \exists x \in X \ (u \leqslant \neg x)\}.$$

Se sigue de su definición que D es denso en B^+. Sea $u \in G \cap D$. Como $X \subseteq G$ y G es un filtro, no existe $x \in X$ tal que $u \leqslant \neg x$. De tal modo, $u \in G$ y para todo $x \in X$ ocurre $u \leqslant x$. Así $u \leqslant \bigwedge X$ y como G es un filtro, se concluye que $\bigwedge X \in G$. $\square$

Teorema 2.27. *Sean B un álgebra de Boole completa y G un filtro en B. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *G es genérico en B^+.*
- *Si $X \subseteq B$ es tal que $\bigvee X \in G$, entonces $G \cap X \neq \varnothing$.*

Demostración. ($\Rightarrow$)

Suponga que existe $X \subseteq B$ tal que $\bigvee X \in G$ y $G \cap X = \varnothing$. Como G es un filtro genérico en B^+, por la proposición 1.7, G es un ultrafiltro en B^+ y en particular G es un ultrafiltro en B. Por la condición (2) de la proposición 2.8 se cumple que $\neg x \in G$ para cada $x \in X$. Por el lema 2.26 se cumple que $\neg \bigvee X = \bigwedge_{x \in X} \neg x \in G$ lo cual es una contradicción. Así, $G \cap X \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$)

Sea $A \subseteq B^+$ una anticadena maximal en B^+. Por el lema 2.25 se cumple $\bigvee A = 1$. Como G es un filtro, ocurre $\bigvee A \in G$ y por hipótesis, se tiene $G \cap A \neq \varnothing$. Así, por el lema 1.6, G es un filtro genérico en B^+. $\square$

Ahora se verá cómo son los filtros genéricos entre un orden parcial y su completación booleana.

Lema 2.28. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío y $e : P \longrightarrow B$ su completación booleana.*

1. *Si $H \subseteq B^+$ es un filtro genérico en B^+, entonces $e^{-1}[H]$ es un filtro genérico en P.*
2. *Si $G \subseteq P$ es un filtro genérico en P, entonces*
$$H = \uparrow e[G] = \{b \in B \mid \exists p \in G \text{ tal que } e(p) \leqslant b\}$$
es un filtro genérico en B^+.

Demostración. Sea $H \subseteq B^+$ un filtro genérico en B^+.

1. Sean $q \in P$ y $p \in e^{-1}[H]$ tales que $p \leqslant q$. Así $e(p) \leqslant e(q)$, al ser H un filtro se cumple $q \in e^{-1}[H]$.

   Sean $p, q \in e^{-1}[H]$, en consecuencia $e(p), e(q) \in H$. Como H es un filtro en B^+, ocurre $e(p) \wedge e(q) \in H$. De esta manera $0 \neq e(p) \wedge e(q)$. Por la condición (4) del teorema 2.20, se tiene $p \parallel q$.

   Sean $D \subseteq P$ denso en P y $b \in B^+$. Por la condición (3) del teorema 2.20 existe $p \in P$ tal que $e(p) \leqslant b$ y al ser D denso existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$. De esta manera se cumple $e(q) \leqslant e(p) \leqslant b$ y en consecuencia $e[D]$ es denso en B^+. Como H es filtro genérico en B^+, se cumple $e[D] \cap H \neq \varnothing$. Sea $r \in D$ tal que $e(r) \in H$, en consecuencia $r \in D \cap e^{-1}[H]$.

   Por el lema 1.10, $e^{-1}[H]$ es un filtro genérico en P.

2. Sea $G \subseteq P$ un filtro genérico en P. Es fácil probar que H es un filtro en B tal que $H \subseteq B^+$.

   Sea $E \subseteq B^+$ denso en B^+. Se define:
$$D = \{p \in P \mid \exists b \in E \text{ tal que } e(p) \leqslant b\}.$$

   Sea $p \in P$. Como E es denso en B^+, existe $b \in E$ tal que $b \leqslant e(p)$. Por la condición (3) del teorema 2.20 existe $r \in P$ tal que $e(r) \leqslant b$. Así $e(r) \leqslant b \leqslant e(p)$ y en consecuencia $0 \neq e(r) = e(r) \wedge e(p)$. Por la condición (4) del teorema 2.20 se cumple $r \parallel p$. Así existe $u \in P$ tal que $u \leqslant r$ y $u \leqslant p$, en consecuencia $e(u) \leqslant e(p)$ y $e(u) \leqslant e(r) \leqslant b$. Como $b \in E$, entonces $u \in D$ con $u \leqslant p$. De esta manera, D es denso en P.

   Como G es filtro genérico en P, se considera $p \in G \cap D$. Así, existe $a \in E$ tal que $e(p) \leqslant a$ y como $p \in G$, entonces $a \in H$ y en consecuencia $a \in H \cap E$. De esta manera H es un filtro genérico en B^+. □

Lo que se ha hecho en el teorema 2.28 es probar que para todo conjunto parcialmente ordenado, su completación booleana "refleja" e induce filtros genéricos.

2.3. Estructuras booleano-valuadas

Ahora se procede a realizar el desarrollo técnico del forcing empleando como soporte álgebras de Boole.

Definición 2.29. Un *tipo de semejanza* es un conjunto ρ de símbolos de la siguiente forma:

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathscr{F}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathscr{R}_n \right) \cup \mathscr{C}.$$

Donde algunos uniendos posiblemente son vacíos, $\mathscr{F}_n$ es el conjunto de letras funcionales de aridad n, $\mathscr{R}_m$ es el conjunto de letras relacionales de aridad m y $\mathscr{C}$ es el conjunto de constantes. La única restricción que se establece es que ningún símbolo sea sucesión de otros símbolos.

Definición 2.30. Sea ρ un tipo de semejanza. Una ρ-*estructura* es una pareja de la forma $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ donde A es distinto del vacío e

$$I : \rho \longrightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A^{A^n} \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}(A^n) \right) \cup A$$

es una función tal que:

$$\begin{aligned} \text{Si } f \in \mathscr{F}_n \text{ con } n \in \mathbb{Z}^+, &\text{ entonces } I(f) = f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A; \\ \text{Si } r \in \mathscr{R}_n \text{ con } n \in \mathbb{Z}^+, &\text{ entonces } I(r) = r^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n; \\ \text{Si } c \in \mathscr{C}, &\text{ entonces } I(c) = c^{\mathfrak{A}} \in A. \end{aligned}$$

Note que cada función $f^{\mathfrak{A}}$, cada relación $r^{\mathfrak{A}}$ y cada constante $c^{\mathfrak{A}}$ posee una *función característica* de la forma:

$$\chi_f : A^{n+1} \longrightarrow 2,$$
$$\text{tal que } \chi_f(a_1, \ldots, a_n, a) = 1 \text{ si y solo si } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a,$$

$$\chi_r : A^n \longrightarrow 2,$$
$$\text{tal que } \chi_r(a_1, \ldots, a_n) = 1 \text{ si y solo si } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in r^{\mathfrak{A}}$$

y

$$\chi_c : A \longrightarrow 2,$$
$$\text{tal que } \chi_c(x) = 1 \text{ si y solo si } x = c^{\mathfrak{A}}$$

Además, dada $\mathfrak{A}$ una estructura, la definición de verdad de Tarski define una función de las fórmulas al álgebra 2 de la siguiente manera. Si $s : VAR \longrightarrow A$ es una asignación de variables y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula, entonces

$$[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]_{\mathfrak{A},s} = 1 \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[s].$$

Para facilitar la notación no se escribirá la estructura en el subíndice, cuando esta sea clara del contexto. Más aún, se hará la asignación de variables directamente en la fórmula, es decir, si $s(x_i) = a_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$ entonces en lugar de $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]_{\mathfrak{A},s}$ se escribirá $[\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!]$. Si $\mathscr{L}$ es el conjunto de *fórmulas asignadas en* A,[6] entonces lo anterior es una función de la forma $[\![\_]\!] : \mathscr{L} \longrightarrow 2$ y será llamada función *valor de verdad*.

Finalmente, note que si la interpretación de c es la función χ_c, entonces es necesario cambiar el universo estándar A por uno cuyos elementos sean funciones características. Tanto las funciones características como la función valor de verdad tienen como codominio al álgebra de Boole 2. Lo que se busca al definir las estructuras booleano-valuadadas es generalizar estas funciones reemplazando el codominio por un álgebra de Boole completa.

Definición 2.31. Sea B un álgebra de Boole completa. Una estructura *B-valuada* $\mathfrak{A}^B$ es una terna $\langle A^{(B)}, I, [\![\_]\!]\rangle$, donde A es distinto del vacío, $A^{(B)}$ es el conjunto

$$A^{(B)} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{f : X \longrightarrow B \mid X \subseteq A^n\},$$

I es la función de la definición 2.30 sustituyendo A por $A^{(B)}$ y $[\![\_]\!] : \mathscr{L} \to B$ es una función cuyo dominio $\mathscr{L}$ es el conjunto de fórmulas asignadas a $A^{(B)}$ que satisface, para cualesquiera $a, b, c \in A^{(B)}$, las siguientes condiciones:

1. $[\![a = a]\!] = 1$.
2. $[\![a = b]\!] = [\![b = a]\!]$.
3. $[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] \leqslant [\![a = c]\!]$.

Ahora que se ha cambiado el codominio, la función $[\![\_]\!] : \mathscr{L} \longrightarrow B$ se llama *valor booleano*.

Note que para cada $a \in A$, a posee una función característica en $A^{(B)}$ la cual se denota como $\breve{a} : A \longrightarrow B$ y es tal que

$$\breve{a}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases} \tag{2.5}$$

En primera instancia, no se puede dar una definición general de valor booleano de las fórmulas atómicas, pues hacer esto depende del lenguaje y la estructura que se considera como soporte. No obstante, ya que se trabaje en el lenguaje de la teoría de conjuntos y se defina un *universo* en específico se dará la definición de valores booleanos para fórmulas atómicas en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Por ahora, se supondrá definido el valor booleano de las fórmulas atómicas.

Definición 2.32. Sean φ, ψ fórmulas tales que $[\![\varphi]\!]$ y $[\![\psi]\!]$ están definidos, se define el *valor booleano* para fórmulas compuestas de la siguiente manera:

[6] Es decir, $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{L}$ si y solo si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula y $s : VAR \to A$ es una asignación de variables tal que $s(x_i) = a_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$, y así, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)[s]$ es de la forma $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

1. $[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!]$.
2. $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$.
3. Si x es una variable, entonces $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \bigvee_{a\in A^{(B)}} [\![\varphi(a)]\!]$.

Se denotará como $[\![\varphi]\!]^B$ al valor booleano de la fórmula φ cuando haga falta especificar el álgebra de Boole en donde están los valores. Del mismo modo, se denotará como $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}^B}$ al valor booleano de la fórmula φ cuando sea necesario especificar la estructura que se está empleando como soporte.

Los valores booleanos de las demás fórmulas son de la siguiente manera:

Observación 2.33. Para φ, ψ fórmulas tales que $[\![\varphi]\!]$ y $[\![\psi]\!]$ están definidos y x es una variable, se cumplen:

1. $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$.
2. $[\![\varphi \to \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]$.[7]
3. $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!] = [\![(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)]\!]$.
4. $[\![\forall x\varphi(x)]\!] = \bigwedge_{a\in A^{(B)}} [\![\varphi(a)]\!]$.

Con esto se puede definir cuándo una fórmula es verdadera en una estructura booleano-valuada.

Definición 2.34. Sean B un álgebra de Boole completa, $\mathfrak{A}^B$ una estructura B-valuada, φ una fórmula y $a_1, \ldots, a_n \in A^{(B)}$. Se dice que $\varphi(a_1 \ldots, a_n)$ es *verdadera* en $\mathfrak{A}^B$, lo cual se denota como $\mathfrak{A}^B \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, si y solo si $[\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!] = 1$.

Note que esta definición es diferente a la de Tarski pues ahora es posible que suceda $\mathfrak{A}^B \models \varphi \vee \psi$, $\mathfrak{A}^B \not\models \varphi$ y $\mathfrak{A}^B \not\models \psi$ al mismo tiempo. Más aún, si se interpreta $[\![\varphi]\!]$ como "que tan cierta es la fórmula φ en $\mathfrak{A}^B$", entonces es posible encontrar la siguiente situación: B es un álgebra de Boole completa y atómica[8], $\mathfrak{A}^B$ es una estructura B-valuada, y $\varphi(x)$ es una fórmula de tal modo que $[\![\varphi(a)]\!]$ sea un átomo para cada $a \in A^{(B)}$ y para cada átomo $b \in B$ existe $a \in A^{(B)}$ tal que $[\![\varphi(a)]\!] = b$. En este caso cada $\varphi(a)$ es casi falsa pero $\exists x\varphi(x)$ es verdadera.

Proposición 2.35. *Si $\mathfrak{A}^B$ es una estructura booleano-valuada y φ, ψ son fórmulas, entonces $\mathfrak{A}^B \models (\varphi \to \psi)$ si y solo si $[\![\varphi]\!] \leqslant [\![\psi]\!]$.*

Demostración. $\mathfrak{A}^B \models (\varphi \to \psi)$ si y solo si $[\![\varphi \to \psi]\!] = 1$, equivalentemente $([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]) = 1$ y, por (A.2), esto es lo mismo que $[\![\varphi]\!] \leqslant [\![\psi]\!]$. □

[7] Ver la proposición A.10

[8] Un *átomo* en B es un elemento $a \in B^+$ tal que si $b \in B^+$ cumple $b \leqslant a$, entonces $a = b$. Por otra parte, B es *atómica* si para cada $b \in B^+$ existe un átomo $a \in B$ tal que $a \leqslant b$.

De la proposición 2.35 se observa que la implicación $\varphi \to \psi$ es verdadera en la estructura $\mathfrak{A}^B$ si y solo si el valor booleano de φ *acota inferiormente* al valor booleano de ψ.

Observación 2.36. [9] Si B es un álgebra de Boole completa, $\mathfrak{A}^B$ es una estructura B-valuada, $a, b \in A^{(B)}$ y φ es una fórmula, entonces se cumple

$$[\![a = b]\!] \wedge [\![\varphi(a)]\!] \leqslant [\![\varphi(b)]\!].$$

Definición 2.37. Sean B y B' álgebras de Boole completas, $\mathfrak{A}^B$ una estructura B-valuada y $\mathfrak{A}'^{B'}$ una estructura B'-valuada. Se dice que $\mathfrak{A}'^{B'}$ es *subestructura* de $\mathfrak{A}^B$ si y solo si B' es una subálgebra completa de B, $A' \subseteq A$, existe un encaje $A'^{(B')} \hookrightarrow A^{(B)}$ y para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A'^{(B')}$ y φ fórmula atómica se cumple

$$[\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!]^{B'} = [\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!]^{B}. \tag{2.6}$$

En las estructuras B-valuadas, donde $B \neq 2$, los fórmulas pueden tomar más de dos posibles valores booleanos, por esta razón, en este tipo de estructuras la dicotomía entre verdad y falsedad se pierde. No obstante, es posible construir una estructura bivaluada a partir de una estructura booleano-valuada que tenga las condiciones apropiadas.

Por la proposición 2.8 se sabe que los ultrafiltros "parten adecuadamente en dos al álgebra de Boole". De esta manera, es posible definir el soporte de una estructura bivaluada partiendo al álgebra de Boole con un ultrafiltro.

Proposición 2.38. *Sean B un álgebra de Boole completa, $\mathfrak{A}^B$ una estructura B-valuada y $U \subseteq B$ un ultrafiltro en B. La relación $\equiv\, \subseteq A^{(B)} \times A^{(B)}$ definida como*

$$a \equiv b \quad \textit{si y solo si} \quad [\![a = b]\!] \in U$$

es de equivalencia.

Demostración. Se sigue de la definición 2.31 y del hecho que U es un filtro. □

Al ser $\equiv$ una relación de equivalencia sobre $A^{(B)}$ se definen:

- Para cada $a \in A^{(B)}$, su clase de equivalencia $[a] = \{b \in A^{(B)} \mid a \equiv b\}$ y
- El cociente $\mathfrak{A}^B/U = \{[a] \mid a \in A^{(B)}\}$.

Ahora que se ha definido el cociente de una estructura sobre un ultrafiltro, se buscará hacer de este cociente una estructura bivaluada. Para esto será necesario dejar que el ultrafiltro U "decida" toda la estructura.

[9] La prueba de esta observación depende del lenguaje, de la estructura $\mathfrak{A}^B$ y de la función *valor booleano*. Sin embargo, el caso para el lenguaje de la teoría de conjuntos y la estructura $V^{(B)}$ está en el teorema 2.53.

Definición 2.39. Sean B un álgebra de Boole completa, $\mathfrak{A}^B$ una estructura B-valuada y $U \subseteq B$ un ultrafiltro en B. Para cada $r \in \mathscr{R}_n$, $f \in \mathscr{F}_n$ y $c \in \mathscr{C}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ se definen $r^{\mathfrak{A}^B/U} \subseteq (\mathfrak{A}^B/U)^n$, $f^{\mathfrak{A}^B/U} : (\mathfrak{A}^B/U)^n \longrightarrow \mathfrak{A}^B/U$ y $c^{\mathfrak{A}^B/U} \in \mathfrak{A}^B/U$ como:

$$\langle [a_1], \ldots, [a_n] \rangle \in r^{\mathfrak{A}^B/U} \text{ si y solo si } [\![r(a_1, \ldots, a_n)]\!] \in U. \tag{2.7}$$

$$f^{\mathfrak{A}^B/U}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a] \text{ si y solo si } [\![f(a_1, \ldots, a_n) = a]\!] \in U. \tag{2.8}$$

$$c^{\mathfrak{A}^B/U} = [a] \text{ si y solo si } [\![\check{c^{\mathfrak{A}}} = a]\!] \in U. \tag{2.9}$$

Como U es un ultrafiltro, entonces, por la observación 2.36 y por (2.5), las definiciones (2.7), (2.8) y (2.9) no dependen de representantes.

Con la proposición 2.38 y la definición 2.39 ya se tienen la mayoría de condiciones para hacer del cociente de una estructura booleano-valuada una estructura bivaluada. No obstante, para que lo último sea verdad hace falta comprobar que la estructura original satisfaga una condición adicional.

Definición 2.40. Sean B un álgebra de Boole completa y $\mathfrak{A}^B$ una estructura B-valuada. Se dice que $\mathfrak{A}^B$ es *completa* o *plena* si y solo si para cada fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ se cumple que para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A^{(B)}$, hay algún $a \in A^{(B)}$ tal que

$$[\![\exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)]\!] = [\![\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)]\!].$$

Teorema 2.41 (Łoś). *Sean B un álgebra de Boole completa, $\mathfrak{A}^B$ una estructura B-valuada plena y $U \subseteq B$ un ultrafiltro en B. Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A^{(B)}$ se cumple que*

$$\mathfrak{A}^B/U \models \varphi([a_1], \ldots, [a_n]) \textit{ según Tarski si y solo si } [\![\varphi(a_1, \ldots . a_n)]\!] \in U. \tag{2.10}$$

Demostración. Por inducción sobre la formación de fórmulas.

Por la proposición 2.38, la definición 2.39, la observación 2.36 y la definición de *verdad* de Tarski, (2.10) se cumple para las fórmulas atómicas. Por la propiedad (2) de la proposición 2.8, (2.10) se cumple para la negación. Por la propiedad (2) de la definición 2.32 y el hecho de que U es un filtro, (2.10) se cumple para la conjunción.

Para las fórmulas con cuantificador existencial, $\mathfrak{A}^B/U \models \exists x \varphi(x, [a_1], \ldots, [a_n])$ si y solo si hay algún $[a] \in \mathfrak{A}/U$ tal que $\mathfrak{A}^B/U \models \varphi([a], [a_1], \ldots, [a_n])$, esto es, que existe algún $a \in A^{(B)}$ tal que $[\![\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)]\!] \in U$; que equivalentemente, (como $\mathfrak{A}^B$ es plena) $[\![\exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)]\!] \in U$. □

De esta manera, si $\mathfrak{A}^B$ es una estructura B-valuada plena y $U \subseteq B$ es un ultrafiltro en B un álgebra de Boole completa, entonces para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A^{(B)}$ ocurre

$$[\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!] \in U, \text{ o en su defecto, } [\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!] \notin U.$$

De tal modo, sucede que

$$\mathfrak{A}^B/U \models \varphi([a_1], \ldots, [a_n]), \text{ o en su defecto, } \mathfrak{A}^B/U \not\models \varphi([a_1], \ldots, [a_n]).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{A}^B/U$ resulta ser una estructura bivaluada o 2-valuada si se define

$$[\![\varphi([a_1], \ldots, [a_n])]\!]_U = 1 \text{ si y solo si } [\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!] \in U.$$

Por último, es importante saber que al emplear estructuras booleano-valuadas sí se está haciendo una prueba de consistencia relativa.

Teorema 2.42 (Metateorema de la consistencia relativa booleano-valuada)**.** *Sean T, T' dos conjuntos de fórmulas en el lenguaje de la teoría de conjuntos tales que $ZF \subseteq T$, $ZF \subseteq T'$ y $Con(ZF) \Rightarrow Con(T')$. Suponga que en el lenguaje de la teoría de conjuntos son definibles los términos B y $\mathfrak{A}^B$ que cumplen:*

1. *$T' \vdash$ (B es un álgebra de Boole completa).*
2. *$T' \vdash$ ($\mathfrak{A}^B$ es una estructura B-valuada).*
3. *Para cada $\tau \in T$ ocurre $T' \vdash (\mathfrak{A}^B \models \tau)$.*

Entonces

$$Con(ZF) \Rightarrow Con(T).$$

Demostración. Por contradicción.

Suponga la *consistencia* de ZF y que T es *inconsistente*. De esta manera, T' es consistente, además, existen $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ y σ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos tales que $\vdash (\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n) \to (\sigma \wedge \neg\sigma)$, en consecuencia $T' \vdash ([\![(\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n) \to (\sigma \wedge \neg\sigma)]\!] = 1)$.

Por (A.2) se cumple $T' \vdash ([\![\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n]\!] \leqslant [\![\sigma \wedge \neg\sigma]\!])$. Por (3) se tiene $T' \vdash (\mathfrak{A}^B \models \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n)$, es decir, $T' \vdash ([\![\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n]\!] = 1)$ y en consecuencia $T' \vdash ([\![\sigma \wedge \neg\sigma]\!] = 1)$, es decir, $T' \vdash ([\![\sigma]\!] \wedge \neg[\![\sigma]\!] = 1)$ lo cual es una contradicción pues por (1) y (2) se cumple $T' \vdash ([\![\sigma]\!] \wedge \neg[\![\sigma]\!] = 0)$.

De esta manera $Con(ZF) \Rightarrow Con(T)$. □

2.4. El modelo booleano-valuado $V^{(B)}$

Ahora que ya se tiene suficiente teoría referente a estructuras booleano-valuadas se procede a trabajar en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Este lenguaje tiene un *tipo de semejanza* que consta únicamente de la *letra predicativa* binaria $\in$. De esta manera, su lenguaje es el conjunto $\mathcal{L}_\epsilon$, con este lenguaje se dará un modelo de ZFC que consta de *funciones características generalizadas homogéneas*. Estas funciones tendrán como codominio un álgebra de Boole completa y en consecuencia dicho modelo será uno booleano-valuado.

Tomando en cuenta que V es el *universo* de la teoría de conjuntos, cada $x \in V$ puede ser visto como una *función característica* $\chi_x : dom(\chi_x) \longrightarrow 2$ con $x \subseteq dom(\chi_x)$ y tal que $\chi_x(y) = 1$ si y solo si $y \in x$. Esta función χ_x es una *función característica generalizada de* x. De esta manera, V puede representarse como una *clase* de funciones bivaluadas $V^{(2)}$ y en consecuencia es una estructura bivaluada.

En síntesis, para cada álgebra de Boole completa B se definirá una colección de funciones características homogéneas B-valuadas, las cuales resultan ser B-*nombres*.

Definición 2.43. Sea B un álgebra de Boole completa. Se define por recursión transfinita la jerarquía $\underline{V}^{(B)}$ sobre los *ordinales* de la siguiente manera:

1. $V_0^{(B)} = \varnothing$.

2. Para cada α ordinal tal que $V_\alpha^{(B)}$ esta definido se define

$$V_{\alpha+1}^{(B)} = \bigcup_{X \subseteq V_\alpha^{(B)}} B^X,$$

   donde $B^X = \{f : X \longrightarrow B \mid f \text{ es función}\}$.

3. Para cada ordinal límite γ tal que $V_\beta^{(B)}$ esté definido para todo ordinal $\beta < \gamma$, se define

$$V_\gamma^{(B)} = \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta^{(B)}.$$

De tal modo, se considera

$$V^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^{(B)}. \tag{2.11}$$

La *clase* $V^{(B)}$ es el *universo* de los B-nombres, a los elementos de $V^{(B)}$ se les llama B-nombres o simplemente nombres pues en particular cumplen con la *caracterización* descrita en 1.21.

En este universo booleano, para x, y B-nombres ya no solo se cumple $x \in y$ ó $x \notin y$, más bien, para cada $z \in dom(y)$ el valor $y(z) \in B$ indica qué tanto "z" es elemento de "y" o dicho de otro modo, cuando se vea cómo es y, qué tan probable es que se encuentre a z como un elemento suyo.

Note que, por construcción, $V_\alpha^{(B)}$ es un conjunto para cada ordinal α. Más aún, de (2.11) se sigue que $V_\alpha^{(B)} \subseteq V^{(B)}$ para cualesquiera B álgebra de Boole completa y α ordinal.

Proposición 2.44. *Para cada ordinal* α *y para cada* $f \in V_\alpha^{(B)}$ *existe* $\beta < \alpha$ *tal que* $dom(f) \subseteq V_\beta^{(B)}$.

Demostración. Por inducción transfinita.

Solo se verá el caso sucesor pues la base inductiva se da por vacuidad y el caso límite se sigue de su construcción y de la hipótesis de inducción.

Suponga que existe un ordinal α tal que para toda $f \in V_\alpha^{(B)}$ existe $\beta < \alpha$ con $dom(f) \subseteq V_\beta^{(B)}$.

Sea $f \in V_{\alpha+1}^{(B)}$. Por la definición 2.43(2), existe $X \subseteq V_{\alpha}^{(B)}$ tal que $f \in B^X$ con $\alpha < \alpha + 1$ y $X = dom(f)$. $\square$

Proposición 2.45. *Sea α un ordinal. Si $f \in V_{\alpha}^{(B)}$, entonces para todo $b \in B$ se cumple $\langle f, b\rangle \in V_{\alpha+1}^{(B)}$.*

Demostración. Sea $f \in V_{\alpha}^{(B)}$. De esta manera $\{f\} \subseteq V_{\alpha}^{(B)}$ y así, para cada $b \in B$ se cumple

$$\langle f, b\rangle \in B^{\{f\}} \subseteq \bigcup_{X \subseteq V_{\alpha}^{(B)}} B^X = V_{\alpha+1}^{(B)}.$$ $\square$

Finalmente, con todo lo anterior se puede probar la *monotonía* en la clase de los nombres booleanos.

Proposición 2.46. *Si $\beta < \alpha$, entonces $V_{\beta}^{(B)} \subseteq V_{\alpha}^{(B)}$.*

Demostración. Por inducción transfinita sobre el ordinal α. Solo se verá el caso sucesor pues la base inductiva se cumple por vacuidad y el caso límite es inmediato de su construcción.

Hipótesis de inducción: Suponga que existe un ordinal α tal que se cumple $V_{\beta}^{(B)} \subseteq V_{\alpha}^{(B)}$ para todo ordinal $\beta < \alpha$.

Sea $f \in V_{\alpha}^{(B)}$. Por la proposición 2.44 existe $\beta < \alpha$ tal que f es una función de la forma $f : X \to B$ con $X \subseteq V_{\beta}^{(B)}$. Por la hipótesis de inducción se cumple $X \subseteq V_{\alpha}^{(B)}$. Por la definición 2.43, ocurre $f \in V_{\alpha+1}^{(B)}$ y así $V_{\alpha}^{(B)} \subseteq V_{\alpha+1}^{(B)}$.

En consecuencia, si $\zeta < \alpha + 1$, entonces $V_{\zeta}^{(B)} \subseteq V_{\alpha+1}^{(B)}$. $\square$

Definición 2.47. Se define el *rango* de $x \in V^{(B)}$ como

$$rang(x) = min\{\alpha \in Ord \mid x \in V_{\alpha+1}^{(B)}\}. \tag{2.12}$$

Note que la existencia del rango está justificada pues la *clase* de los ordinales es *bien ordenada*.

Además, si $x \in V^{(B)}$ y $\alpha = rang(x)$, entonces α es el único ordinal tal que $x \in V_{\alpha+1}^{(B)}$ y $x \notin V_{\alpha}^{(B)}$.

Proposición 2.48. *Para $x, y \in V^{(B)}$ tales que $x \in dom(y)$ se cumple*

$$rang(x) < rang(y).$$

Demostración. Sean $y \in V^{(B)}$ y $\alpha = rang(y)$. Así, α es el único ordinal tal que $y \in V_{\alpha+1}^{(B)}$ y $y \notin V_{\alpha}^{(B)}$. Por la proposición 2.44, existe un ordinal $\beta \leqslant \alpha$ tal que $dom(y) \subseteq V_{\beta}^{(B)}$. Sea $x \in dom(y)$, así, $x \in V_{\beta}^{(B)}$. Por la definición 2.43 hay dos casos: β es un *ordinal sucesor*, o en su defecto, β es un *ordinal límite*.

Si $\beta = \delta + 1$ para algún ordinal δ, entonces, por (2.12), $rang(x) \leqslant \delta$ y así $rang(x) < \beta \leqslant rang(y)$.

Si β es un ordinal límite, entonces por la definición 2.43(3) existe un ordinal $\zeta < \beta$ tal que $x \in V_\zeta^{(B)}$. Por la proposición 2.46, se cumple $x \in V_{\zeta+1}^{(B)}$, por (2.12) ocurre $rang(x) \leqslant \zeta$. Como β es un ordinal límite se cumple $\zeta + 1 < \beta$ y en consecuencia $rang(x) < \beta \leqslant rang(y)$.

$\square$

Proposición 2.49. *La relación $\_ \in dom(\_) \subseteq V^{(B)} \times V^{(B)}$ " estar en el dominio de " es una relación bien fundada e izquierda limitada*[10] *sobre $V^{(B)}$.*

Demostración. Sea A una *subclase* distinta del vacío de $V^{(B)}$, así

$$\{rang(x) \mid x \in A\}$$

es una subclase de ordinales distinta del vacío y, de esta manera, existe $\alpha = min\{rang(x) \mid x \in A\}$. Sea $x_0 \in A$ tal que $rang(x_0) = \alpha$. De la proposición 2.48 se obtiene que x_0 es un $\in dom(\ )$-minimal de la clase A. Por lo tanto, la relación "estar en el dominio de" es *bien fundada* sobre $V^{(B)}$.

Por otra parte, cada $y \in V^{(B)}$ es en particular una función, por lo que $dom(y) = ext_{\in dom(\ )}(y)$ es un conjunto. De tal modo, la relación "estar en el dominio de" es *izquierda limitada* sobre $V^{(B)}$. $\square$

Teorema 2.50 (Inducción fuerte en $V^{(B)}$)**.** *Sea φ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Entonces se cumple*

$$\forall x \in V^{(B)}(\forall y \in V^{(B)}(y \in dom(x) \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \in V^{(B)}\ \varphi(x). \quad (2.13)$$

Demostración. Sea φ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos, suponga:

$$\forall x \in V^{(B)}(\forall y \in V^{(B)}(y \in dom(x) \to \varphi(y)) \to \varphi(x)).$$

Se define $S = \{x \in V^{(B)} \mid \varphi(x)\}$. Suponga $V^{(B)} \nsubseteq S$, así, $V^{(B)} \backslash S \neq \varnothing$. Al ser $\in dom(\ )$ una relación bien fundada sobre $V^{(B)}$, existe $a \in V^{(B)} \backslash S$ tal que a es $\in dom(\ )$-minimal de la clase $V^{(B)} \backslash S$. De tal modo, para cada $y \in dom(a)$ se cumple $y \in S$, es decir, ocurre $\varphi(y)$. Por hipótesis, se cumple $\varphi(a)$, así $a \in S$ lo cual es una contradicción.

En consecuencia $S = V^{(B)}$, es decir

$$\forall x \in V^{(B)}(\forall y \in V^{(B)}(y \in dom(x) \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \in V^{(B)}\ \varphi(x). \quad \square$$

Teorema 2.51 (Recursión en $V^{(B)}$)**.** [11] *Sea $G : V^{(B)} \times V \longrightarrow V$ una funcional. Entonces existe una única funcional $F : V^{(B)} \longrightarrow V$ tal que*

$$F(x) = G(x, F \upharpoonright_{dom(x)}) \text{ para cada } x \in V^{(B)}. \quad (2.14)$$

[10] Una relación $E \subseteq C \times C$ sobre una clase C es *izquierda limitada* si $ext_E(c)$ (ver la definición 1.11(2)) es un conjunto para todo $c \in C$.

[11] Ver [14], teorema 5.6, pág 103.

Ahora se definirá el valor booleano para las *fórmulas atómicas* en $V^{(B)}$, es decir, las fórmulas $x \in y$ y $x = y$. Esto se hará simultáneamente usando recursión sobre los pares $\langle rang(x), rang(y)\rangle$ ordenados con el orden lexicográfico canónico, es decir, suponiendo definidos los valores $[\![z \in w]\!]$, $[\![w \in z]\!]$, $[\![z \subseteq w]\!]$ y $[\![w \subseteq z]\!]$ para $z, w \in V^{(B)}$ tales que $\langle rang(z), rang(w)\rangle < \langle rang(x), rang(y)\rangle$, es decir, tales que $z \in dom(x)$ y $w = y$, o bien, $z = x$ y $w \in dom(y)$. De este modo, $<$ es una relación bien fundada en $V^{(B)} \times V^{(B)}$.

Una manera de decir "$x \in y$" es indicar que hay un elemento de y que es igual a x, es decir, $\exists t \in y\ (t = x)$. Para indicar que "$x = y$" se hará diciendo que $x \subseteq y$ y que $y \subseteq x$. Por tales motivos, se tienen la siguiente definiciones.

Definición 2.52. Para cada álgebra de Boole completa B y $x, y \in V^{(B)}$ se definen:

1. $[\![x \in y]\!] = \bigvee\limits_{t \in dom(y)} \left(y(t) \wedge [\![x = t]\!]\right).$

2. $[\![x \subseteq y]\!] = \bigwedge\limits_{t \in dom(x)} \left(x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]\right).$

3. $[\![x = y]\!] = \left([\![x \subseteq y]\!] \wedge [\![y \subseteq x]\!]\right).$

De esta manera, por recursión, $[\![x \in y]\!]$, $[\![x \subseteq y]\!]$ y $[\![x = y]\!]$ están definidos para cualesquiera $x, y \in V^{(B)}$. En consecuencia, por la definición 2.32, $[\![\varphi]\!]$ está definido para cada fórmula φ en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Note que en la definición 2.52, (1) indica qué tanto x es igual a algún elemento de $dom(y)$ y qué tanto ese elemento es un elemento de y. En particular, para todo $x \in V^{(B)}$ se cumple $[\![x \in \varnothing]\!] = 0$. Por otra parte, (2) dice qué tanto todos los posibles elementos de x están en y. En particular, $[\![x \subseteq \varnothing]\!] = 1$ si $x = \varnothing$ y $[\![x \subseteq \varnothing]\!] = 0$ si $x \neq \varnothing$.

Teorema 2.53. [12] *Para cualesquiera $x, y, z \in V^{(B)}$ y φ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $[\![x = x]\!] = 1$.

2. *Si $t \in dom(x)$, entonces $x(t) \leqslant [\![t \in x]\!]$.*

3. $[\![x = y]\!] = [\![y = x]\!]$.

4. $[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!]$.

5. $[\![x = y]\!] \wedge [\![x \in z]\!] \leqslant [\![y \in z]\!]$.

6. $[\![x = y]\!] \wedge [\![z \in x]\!] \leqslant [\![z \in y]\!]$.

7. $[\![x = y]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!] \leqslant [\![\varphi(y)]\!]$.

De esta manera, $V^{(B)}$ posee el comportamiento de una estructura B-valuada.

[12] Ver [3], teorema 1.17, pág 24.

Corolario 2.54. *Para cualesquiera* $a \in V^{(B)}$ *y* $\varphi(x)$ *una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos se cumple:*

1. $[\![\exists x \in a\ \varphi(x)]\!] = \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge [\![\varphi(x)]\!])$.

2. $[\![\forall x \in a\ \varphi(x)]\!] = \bigwedge_{x \in dom(a)} (a(x) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!])$.

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}
[\![\exists x \in a\ \varphi(x)]\!] &= [\![\exists x\ (x \in a \wedge \varphi(x))]\!] \\
&= \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![(y \in a) \wedge \varphi(y)]\!] \\
&= \bigvee_{y \in V^{(B)}} \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge [\![x = y]\!] \wedge [\![\varphi(y)]\!]) \\
&= \bigvee_{x \in dom(a)} \left(a(x) \wedge \bigvee_{y \in V^{(B)}} ([\![x = y]\!] \wedge [\![\varphi(y)]\!]) \right) \\
&= \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge [\![\exists y\ ((x = y) \wedge \varphi(y))]\!]) \\
&= \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge [\![\varphi(x)]\!]).
\end{aligned}$$

2. Este inciso es consecuencia del inciso anterior y de la propiedad (4) de la observación 2.33. □

A su vez, $V^{(B)}$ admite un *encaje* del *universo* de conjuntos V.

Definición 2.55. Para cada $x \in V$ se define su *nombre canónico* en $V^{(B)}$ recursivamente de la siguiente manera:

$$\check{x} : \{\check{y} \mid y \in x\} \longrightarrow B,$$

donde $\check{x}(\check{y}) = 1$ para cada $y \in x$.

De esta manera, $\check{x} \in V^{(B)}$ para cada $x \in V$. En particular, se cumple $\check{\varnothing} = \varnothing$.

Proposición 2.56. *Considere el álgebra de Boole completa* $2 = \{0, 1\}$. *Para cualesquiera* $x, y \in V$ *se cumplen:*

1. $x \in y$ *si y solo si* $[\![\check{x} \in \check{y}]\!]^2 = 1$.

2. $x = y$ *si y solo si* $[\![\check{x} = \check{y}]\!]^2 = 1$.

Es decir, $x \in y$ *si y solo si* $V^{(2)} \models \check{x} \in \check{y}$, *y,* $x = y$ *si y solo si* $V^{(2)} \models \check{x} = \check{y}$.

Demostración. La prueba se hará por inducción simultáneamente sobre el par $\langle rang(y), rang(x) \rangle$.

1. Si $x \in y$, entonces:
$$\begin{aligned}[\![\check{x} \in \check{y}]\!]^2 &= \bigvee_{t\in y}[\![\check{t} = \check{x}]\!]^2 \\ &\geqslant [\![\check{x} = \check{x}]\!]^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$
Por otra parte, si $[\![\check{x} \in \check{y}]\!]^2 = \bigvee_{t\in y}[\![\check{t} = \check{x}]\!]^2 = 1$, entonces por la hipótesis de inducción, como los únicos valores de verdad son 0 ó 1, existe algún $t \in y$ tal que $t = x$. En consecuencia $x \in y$.

2. Únicamente se verá que $x \subseteq y$ si y solo si $[\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!]^2 = 1$, pues la otra contención es análoga. Suponga que $x \subseteq y$, así
$$\begin{aligned}[\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!]^2 &= \bigwedge_{t\in x}(\check{x}(\check{t}) \Rightarrow [\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2) \\ &= \bigwedge_{t\in x}(1 \Rightarrow [\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2).\end{aligned}$$
De esta manera, $[\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!]^2 = 1$ si y solo si $[\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2 = 1$ para todo $t \in x$. Como $x \subseteq y$, por hipótesis de inducción, se cumple $[\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2 = 1$ para todo $t \in x$ y de ahí se sigue $[\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!]^2 = 1$.
Por otra parte, si $[\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!]^2 = 1$, entonces, por (A.11), ocurre $\check{x}(\check{t}) \leqslant [\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2$ para todo $t \in x$, es decir, $1 \leqslant [\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2$ para todo $t \in x$. De tal modo, si $t \in x$, entonces $[\![\check{t} \in \check{y}]\!]^2 = 1$ y así, por hipótesis de inducción, se obtiene $t \in y$. En consecuencia $x \subseteq y$. □

Lema 2.57. *La funcional* $\check{\_} : V \longrightarrow V^{(2)}$ *definida como* $\check{\_}(x) = \check{x}$ *es un monomorfismo*[13] *tal que para cada* $x \in V^{(2)}$ *hay algún* $y \in V$ *que satisface* $[\![x = \check{y}]\!]^2 = 1$.

Demostración. Por la propiedad (2) de la proposición 2.56 $\check{\_}$ es un *monomorfismo*. Se verá por inducción que para cada $x \in V^{(2)}$ hay algún $y \in V$ tal que $[\![x = \check{y}]\!]^2 = 1$.

Sea $x \in V^{(2)}$ y suponga que para todo $t \in dom(x)$ existe $z \in V$ tal que $[\![t = \check{z}]\!]^2 = 1$. Se define:
$$y = \{v \in V \mid \exists u \in dom(x) \text{ tal que } x(u) \wedge [\![u = \check{v}]\!]^2 = 1\}.$$
Así,
$$\text{si } v \in y, \text{ entonces } 1 = [\![\check{v} \in x]\!]^2 = \bigvee_{u\in dom(x)}(x(u) \wedge [\![u = \check{v}]\!]^2). \tag{2.15}$$
Sea $u \in dom(x)$. Si $x(u) = 0$, entonces se cumple $x(u) \leqslant [\![u \in \check{y}]\!]$. Por otra parte, si $x(u) = 1$, entonces, por hipótesis de inducción, existe algún $z \in V$ tal que $[\![u = \check{z}]\!]^2 = 1$, en consecuencia $z \in y$. De este modo
$$1 = [\![u = \check{z}]\!]^2 \leqslant \bigvee_{v\in y}[\![u = \check{v}]\!]^2 = [\![u \in \check{y}]\!]^2.$$

[13] Es decir, una *funcional* tal que $x \neq y$ si y solo si $[\![\check{x} \neq \check{y}]\!]^2 = 1$.

Así,

$$\text{si } u \in dom(x), \text{ entonces } x(u) \leqslant [\![u \in \check{y}]\!]^2. \tag{2.16}$$

Por (2.16), (2.15) y la definición 2.52(3), se cumple:

$$\left(\bigwedge_{u \in dom(x)} (x(u) \Rightarrow [\![u \in \check{y}]\!]^2)\right) \wedge \left(\bigwedge_{v \in y} (1 \Rightarrow [\![\check{v} \in x]\!]^2)\right) = [\![x = \check{y}]\!]^2 = 1. \quad \square$$

Con la proposición 2.56 y el lema 2.57 se prueba que $V^{(2)}$ es *elementalmente equivalente* a V.

Corolario 2.58. *Para cada $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos se cumple*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \textit{ es verdadero si y solo si } [\![\varphi(\check{x_1}, \ldots, \check{x_n})]\!]^2 = 1, \tag{2.17}$$

es decir, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es cierta en la teoría de conjuntos si y solo si el valor booleano bivaluado de $\varphi(\check{x_1}, \ldots, \check{x_n})$ es 1.

Demostración. Por inducción sobre la formación de fórmulas.

Por la proposición 2.56, (2.17) se cumple para las fórmulas atómicas. Por otra parte, los casos para la negación y la conjunción se siguen de la definición 2.32.

Para el caso existencial, $\exists x \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero si y solo si existe $y \in V$ tal que $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero, por hipótesis de inducción, esto es equivalente a que exista $y \in V$ tal que $[\![\varphi(\check{y}, \check{x_1}, \ldots, \check{x_n})]\!]^2 = 1$, equivalentemente, por el lema 2.57, hay algún $a \in V^{(2)}$ tal que $[\![\varphi(a, \check{x_1}, \ldots, \check{x_n})]\!]^2 = 1$. Por el lema A.20 $V^{(2)}$ es *pleno*[14] y por el lema 2.57, se concluye que la última igualdad es equivalente a que $[\![\varphi(\check{x}, \check{x_1}, \ldots, \check{x_n})]\!]^2 = \bigvee_{a \in V^{(2)}} [\![\varphi(a, \check{x_1}, \ldots, \check{x_n})]\!]^2 = 1$. $\square$

Finalmente, por el lema A.25, se cumple que para toda $x \in V^{(B)}$

$$[\![x \text{ es un ordinal}]\!] = \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![x = \check{\alpha}]\!].$$

Y por el teorema A.27, se tiene que $V^{(B)}$ es un modelo B-valuado de ZFC para toda álgebra de boole completa B.

2.5. Relación de forcing

En esta sección se definirá la *relación de forcing* en términos de álgebras de Boole. También, se construirá la *extensión genérica* $V[H]$ con base en el modelo $V^{(B)}$ y un filtro genérico $H \subseteq B$. Dicha extensión resulta ser un modelo bivaluado de ZFC y en él se pueden verificar condiciones tales que ZFC no puede *decidir*.

[14]Ver la definición 2.40.

Definición 2.59. Se define el *lenguaje del forcing* como $\mathcal{L}_{\epsilon(V^{(B)})}$ donde

$$\mathcal{L}_{\epsilon(V^{(B)})} = \mathcal{L}_{\epsilon} \cup V^{(B)},$$

es decir, es el lenguaje de la teoría de conjuntos añadiendo a los B-nombres como nuevas constantes.

Con esto se puede definir la *relación de forcing*.

Definición 2.60. Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío y $e : P \to B$ su completación booleana[15]. Si $p \in P$, φ es una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n} \in V^{(B)}$, entonces se dice que *$p$ fuerza a* $\varphi(\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})$ si y solo si $e(p) \leqslant [\![\varphi(\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})]\!]$. Este hecho se denota por $p \Vdash_P \varphi(\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})$, o bien, cuando sea claro quién sea P, por $p \Vdash \varphi(\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})$. De esta manera,

$$p \Vdash \varphi(\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n}) \text{ si y solo si } e(p) \leqslant [\![\varphi(\dot{a_1}, \ldots, \dot{a_n})]\!]. \tag{2.18}$$

Note que en contraste con la relación de forcing definida en (1.4), la relación (2.18) no depende de la existencia de filtros genéricos.

Teorema 2.61 (propiedades de forcing)**.** *Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana, $V^{(B)}$ la clase de los B-nombres y φ, ψ fórmulas del lenguaje del forcing.*

1. a) *Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leqslant p$, entonces $q \Vdash \varphi$.*

   b) *No existe $p \in P$ tal que $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \neg\varphi$.*

   c) *Para cada $p \in P$ hay algún $q \leqslant p$ tal que q decide a φ, es decir, $q \Vdash \varphi$ o bien $q \Vdash \neg\varphi$.*

2. a) *$p \Vdash \neg\varphi$ si y solo si no existe $q \leqslant p$ tal que $q \Vdash \varphi$.*

   b) *$p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.*

   c) *$p \Vdash \forall x\varphi$ si y solo si $p \Vdash \varphi(\dot{a})$ para cada $\dot{a} \in V^{(B)}$.*

   d) *$p \Vdash \varphi \vee \psi$ si y solo si para cada $q \leqslant p$ existe $r \leqslant q$ tal que*

   $$r \Vdash \varphi \text{ o } r \Vdash \psi.$$

   e) *$p \Vdash \exists x\varphi$ si y solo si para cada $q \leqslant p$ existen $\dot{a} \in V^{(B)}$ y $r \leqslant q$ tales que $r \Vdash \varphi(\dot{a})$.*

3. *Si $p \Vdash \exists x\varphi$, entonces hay algún $\dot{a} \in V^{(B)}$ tal que $p \Vdash \varphi(\dot{a})$.*

Demostración. 1. *a*) Si $p \Vdash \varphi$, entonces, por (2.18), $e(p) \leqslant [\![\varphi]\!]$. Como $q \leqslant p$, por la propiedad (2) del teorema 2.20, $e(q) \leqslant e(p) \leqslant [\![\varphi]\!]$. Por (2.18), se tiene $q \Vdash \varphi$.

[15] Ver el teorema 2.20.

b) Suponga que $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \neg\varphi$, por (2.18) ocurre $e(p) \leqslant \llbracket\varphi\rrbracket \wedge \neg\llbracket\varphi\rrbracket$, lo cual, por la propiedad (1) del teorema 2.20, es una contradicción.

c) Sea $p \in P$. Suponga $e(p) \wedge \llbracket\varphi\rrbracket \neq 0$. Por la propiedad (3) del teorema 2.20 $e[P] \subseteq B^+$ es denso. De esta manera, existe $q \in P$ tal que $e(q) \leqslant e(p) \wedge \llbracket\varphi\rrbracket$. Por el corolario 2.21, existe $r \in P$ tal que $r \leqslant p$ y $e(r) \leqslant e(q)$. Así, $e(r) \leqslant \llbracket\varphi\rrbracket$ y por (2.18) se tiene $r \Vdash \varphi$.

Para el otro caso, si $e(p) \wedge \llbracket\varphi\rrbracket = 0$, entonces se tiene $e(p) \leqslant \llbracket\neg\varphi\rrbracket$. Por (2.18) y (1$a$), se cumple $q \Vdash \neg\varphi$ para cada $q \leqslant p$.

2. a) ($\Rightarrow$) Suponga $p \Vdash \neg\varphi$. Por (1a), se cumple $q \Vdash \neg\varphi$ para cada $q \leqslant p$. Por (1b), se tiene que no existe $q \leqslant p$ tal que $q \Vdash \varphi$.

($\Leftarrow$) Si $p \nVdash \neg\varphi$, entonces, por (2.18), $e(p) \nleqslant \neg\llbracket\varphi\rrbracket$. De esta manera, ocurre $e(p) \wedge \llbracket\varphi\rrbracket \neq 0$. Por la propiedad (3) del teorema 2.20 existe $p' \in P$ tal que $e(p') \leqslant e(p) \wedge \llbracket\varphi\rrbracket$. Por el corolario 2.21, existe $q \leqslant p$ tal que $e(q) \leqslant e(p')$. Así, $e(q) \leqslant \llbracket\varphi\rrbracket$, es decir, existe $q \leqslant p$ tal que $q \Vdash \varphi$.

b) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $e(p) \leqslant \llbracket\varphi \wedge \psi\rrbracket$, equivalentemente, $e(p) \leqslant \llbracket\varphi\rrbracket$ y $e(p) \leqslant \llbracket\psi\rrbracket$, lo cual es equivalente a, $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.

c) $p \Vdash \forall x\varphi$ si y solo si $e(p) \leqslant \llbracket\forall x\varphi\rrbracket$, por la propiedad (4) de la observación 2.33 lo anterior esto es equivalente a, $e(p) \leqslant \bigwedge_{\dot{a}\in V^{(B)}} \llbracket\varphi(\dot{a})\rrbracket$, equivalentemente, $e(p) \leqslant \llbracket\varphi(\dot{a})\rrbracket$ para toda $\dot{a} \in V^{(B)}$, es decir, $p \Vdash \varphi(\dot{a})$ para toda $\dot{a} \in V^{(B)}$.

d) Es consecuencia de (2a) y de (2b).

e) Es consecuencia de (2a) y de (2c).

3. Si $p \Vdash \exists x\varphi$, entonces $e(p) \leqslant \llbracket\exists x\varphi\rrbracket$. Por el lema A.20 $V^{(B)}$ es *pleno*, así, existe algún $\dot{a} \in V^{(B)}$ tal que $e(p) \leqslant \llbracket\varphi(\dot{a})\rrbracket$. De esta manera $p \Vdash \varphi(\dot{a})$ para algún $\dot{a} \in V^{(B)}$. □

Note que, por las propiedades (2a) y (2d) del teorema 2.61, la relación de forcing no sigue las reglas de la lógica clásica.

Corolario 2.62. *Para cualesquiera P conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío y φ fórmula en el lenguaje del forcing, el conjunto*

$$D_\varphi = \{p \in P \mid p \Vdash \varphi \text{ o } p \Vdash \neg\varphi\}$$

es denso en P.

Demostración. Sea $p \in P$. Por la propiedad (1c) del teorema 2.61, existe $q \in P$ tal que $q \leqslant p$ y $q \in D_\varphi$. □

En lo que resta de este capítulo se supondrá la existencia de filtros genéricos en los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 2.63. Sean B un álgebra de Boole completa y $H \subseteq B$ un filtro genérico en B^+. Para cada $\dot{x} \in V^{(B)}$ se define x^H, la *valuación genérica* de $\dot{x}$ según H, por recursión sobre $rang(\dot{x})$ de la siguiente manera:

- $x^H = \{y^H \mid \dot{y} \in dom(\dot{x}) \text{ y } \dot{x}(\dot{y}) \in H\}$.
- A su vez, se define $V[H] = \{x^H \mid \dot{x} \in V^{(B)}\}$.

A la colección $V[H]$ se le llama *extensión genérica* de V por el filtro H o simplemente *extensión genérica*.

De esta manera, $V[H]$ es una colección de conjuntos *descritos según* $V^{(B)}$ y *decididos* por H, es decir, H indica cómo fue construido x^H para cada $\dot{x} \in V^{(B)}$.

Proposición 2.64. *Si B es un álgebra de Boole completa y $H \subseteq B$ es un filtro genérico en B^+, entonces la extensión genérica $V[H]$ es una clase transitiva.*

Demostración. Sean $x^H \in V[H]$ y $z^H \in x^H$. Por la definición 2.63, se tienen $\dot{x} \in V^{(B)}$ y $x^H = \{y^H \mid \dot{y} \in dom(\dot{x}) \text{ y } \dot{x}(\dot{y}) \in H\}$. Así, $\dot{z} \in dom(\dot{x})$ y $\dot{x}(\dot{z}) \in H$. Por la proposición 2.44 se cumple en particular $dom(\dot{x}) \subseteq V^{(B)}$. De esta manera, $\dot{z} \in V^{(B)}$ y en consecuencia $z^H \in V[H]$. Así $V[H]$ es transitiva. $\square$

Retomando la comparativa de los filtros genéricos que hay entre un conjunto parcialmente ordenado P y su completación booleana, la cual fue desarrollada en el lema 2.28, también es posible definir la extensión genérica de V con base en un filtro genérico $G \subseteq P$ en lugar de tomarlo en la completación booleana. Esto se define de la siguiente manera.

Definición 2.65. Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana y $G \subseteq P$ un filtro genérico en P. Se definen las G-valuaciones de los B-nombres $\dot{x} \in V^{(B)}$ por recursión de la siguiente manera.

- $x^G = \{y^G \mid \dot{y} \in dom(\dot{x}) \text{ y } \exists p \in G \text{ tal que } e(p) \leqslant \dot{x}(\dot{y})\}$.
- También, se define $V[G] = \{x^G \mid \dot{x} \in V^{(B)}\}$.

Por un argumento similar al expuesto en la proposición 2.24, ocurre que si P es un conjunto parcialmente ordenado *frondoso*, G es un filtro genérico en P y $H \subseteq B^+$ es un filtro genérico en B^+ donde $e : P \to B$ es la completación booleana de P, entonces $G, H \notin V$.

No obstante, si se definen adecuadamente los *nombres* de G y H se podrá probar que $H \in V[H]$ y $G \in V[G]$.

Definición 2.66. Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana, $G \subseteq P$ un filtro genérico en P y $H \subseteq B$ un filtro genérico en B^+. Se definen:

1. El *nombre canónico de G* como la siguiente función B-valuada:

$$dom(\dot{G}) = \{\check{p} \mid p \in P\} \text{ y } \dot{G}(\check{p}) = e(p) \text{ para cada } p \in P. \tag{2.19}$$

2. El *nombre canónico de* H como la siguiente función B-valuada:

$$dom(\dot{H}) = \{\check{u} \mid u \in B\} \text{ y } \dot{H}(\check{u}) = u \text{ para cada } u \in B. \tag{2.20}$$

De esta manera, se cumplen $\dot{G} \in V^{(B)}$ y $\dot{H} \in V^{(B)}$.

A su vez, también es posible dar un nombre "implícito" de V empleando el hecho de que $a \in V$ si y solo si existe $x \in V$ tal que $a = x$.

Definición 2.67. Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana, $p \in P$ y $\dot{a} \in V^{(B)}$. Se dice que:

$$p \Vdash (\dot{a} \in \check{V}) \text{ si y solo si } \forall q \leqslant p \; \exists r \leqslant q \; \exists x \in V \text{ tal que } r \Vdash (\dot{a} = \check{x}).$$

Si $G \subseteq P$ es un filtro genérico en un conjunto parcialmente ordenado y $e : P \to B$ es la completación booleana de P, entonces por (2.4) se cumple que para cada $p \in P$

$$e(p) = \{q \in P \mid \forall r \leqslant q \; (r \parallel p)\},$$

y por la condición (2) del lema 2.28, se sabe que

$$H = \uparrow e[G] = \{b \in B \mid \exists p \in G \text{ tal que } e(p) \leqslant b\}$$

es un filtro genérico en B^+. De esta manera, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.68. Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana, $G \subseteq P$ un filtro genérico en P y $p \in P$. Se dice que:

$$p \Vdash (q \in \dot{G}) \text{ si y solo si } \forall r \leqslant p \; \exists s \leqslant r \text{ tal que } s \leqslant q.$$

Con estas definiciones se puede explorar el comportamiento de las fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos en $V[H]$.

Lema 2.69. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana y $H \subseteq B^+$ un filtro genérico en B^+. Para cualesquiera nombres $\dot{x}, \dot{y} \in V^{(B)}$ se cumplen:*

1. $x^H \in y^H$ *si y solo si* $[\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] \in H$.
2. $x^H = y^H$ *si y solo si* $[\![\dot{x} = \dot{y}]\!] \in H$.

Demostración. La prueba se hará por inducción simultáneamente sobre el par $\langle rang(y), rang(x) \rangle$.

1.

$$\begin{aligned}
[\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] \in H \text{ si y solo si } & \left(\bigvee_{\dot{t} \in dom(\dot{y})} (\dot{y}(\dot{t}) \wedge [\![\dot{x} = \dot{t}]\!]) \right) \in H, \text{ por 2.27,} \\
& \text{si y solo si } \exists \dot{t} \in dom(\dot{y}) \text{ tal que } (\dot{y}(\dot{t}) \wedge [\![\dot{x} = \dot{t}]\!]) \in H \\
& \text{si y solo si } \exists \dot{t} \in dom(\dot{y}) \text{ tal que } \dot{y}(\dot{t}) \in H \text{ y } x^H = t^H \\
& \text{si y solo si } x^H \in \{t^H \mid \dot{t} \in dom(\dot{y}) \text{ y } \dot{y}(\dot{t}) \in H\} = y^H.
\end{aligned}$$

2. Solo se verá que $x^H \subseteq y^H$ si y solo si $[\![\dot{x} \subseteq \dot{y}]\!] \in H$, pues la otra contención es análoga.

$$
\begin{aligned}
[\![\dot{x} \subseteq \dot{y}]\!] \in H \text{ si y solo si } & \left(\bigwedge_{\dot{t} \in dom(\dot{x})} (\dot{x}(\dot{t}) \Rightarrow [\![\dot{t} \in \dot{y}]\!]) \right) \in H, \text{ por 2.26,} \\
& \text{si y solo si } \forall \dot{t} \in dom(\dot{x}) \text{ si } \dot{x}(\dot{t}) \in H, \text{ entonces } [\![\dot{t} \in \dot{y}]\!] \in H \\
& \text{si y solo si } \forall \dot{t} \in dom(\dot{x}) \text{ si } \dot{x}(\dot{t}) \in H, \text{ entonces } t^H \in y^H \\
& \text{si y solo si } \{t^H \mid \dot{t} \in dom(\dot{x}) \text{ y } \dot{x}(\dot{t}) \in H\} \subseteq y^H \\
& \text{si y solo si } x^H \subseteq y^H.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $x^H = y^H$ si y solo si $[\![\dot{x} = \dot{y}]\!] \in H$. □

Corolario 2.70. *Si P es conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ es su completación booleana, $H \subseteq B^+$ es un filtro genérico en B^+ y $\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ es una fórmula en el lenguaje del forcing, entonces se cumple que:*

$$V[H] \models \varphi(x_1^H, \ldots, x_n^H) \text{ según Tarski si y solo si } [\![\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in H. \quad (2.21)$$

Demostración. Por inducción sobre la formación de fórmulas.

Por el lema 2.69, (2.21) se cumple para las fórmulas atómicas.

Por la definición 2.1 y la proposición 1.7, se cumple que H es un ultrafiltro en B, por la propiedad (2) de la proposición 2.8, (2.21) se cumple para la negación. Como H es un filtro, (2.21) se cumple para la conjunción.

Para el caso existencial, $V[H] \models \exists x \varphi(x, x_1^H, \ldots, x_n^H)$ si y solo si hay algún $\dot{a} \in V^{(B)}$ tal que $V[H] \models \varphi(a^H, x_1^H, \ldots, x_n^H)$, es decir, hay algún $\dot{a} \in V^{(B)}$ tal que $[\![\varphi(\dot{a}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in H$. Por el lema A.20, $V^{(B)}$ es *pleno*, así lo anterior es equivalente a, $[\![\exists x \varphi(x, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in H$. □

Corolario 2.71. *Si P es un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ es su completación booleana y $H \subseteq B^+$ es un filtro genérico en B^+, entonces se cumple*

$$V[H] \equiv V^{(B)}/H,$$

es decir, $V[H] \models \varphi(x_1^H, \ldots, x_n^H)$ si y solo si $V^{(B)}/H \models \varphi([\dot{x}_1], \ldots, [\dot{x}_n])$ para cada fórmula $\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ en el lenguaje del forcing.

Demostración. Se sigue del teorema 2.41 y del corolario 2.70 al notar que H es, en particular, un ultrafiltro en B. □

Teorema 2.72 (Unicidad de la extensión genérica)**.** *Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío donde $e : P \to B$ es la completación booleana de P, $G \subseteq P$ es un filtro genérico en P y $H = \uparrow(e[G]) \subseteq B$. Si $V[G]$ es la extensión genérica según la definición 2.65 y $V[H]$ es la extensión genérica según la definición 2.63, entonces*

$$V[G] = V[H].$$

Demostración. Sean $\dot{x} \in V^{(B)}$, x^G como en la definición 2.65 y x^H como en la definición 2.63. Por la propiedad (2) del lema 2.28, H es un filtro genérico en B^+. Se verá por inducción que $x^G = x^H$.

Suponga que $y^G = y^H$ para cada $\dot{y} \in V^{(B)}$ tal que $\dot{y} \in dom(\dot{x})$, se tiene:

$$\begin{aligned} y^H \in x^H &\text{ si y solo si } \dot{y} \in dom(\dot{x}) \text{ y } \dot{x}(\dot{y}) \in H = \uparrow(e[G]) \\ &\text{ si y solo si } \dot{y} \in dom(\dot{x}) \text{ y } \exists p \in G \text{ tal que } e(p) \leqslant \dot{x}(\dot{y}) \\ &\text{ si y solo si } y^G \in x^G \\ &\text{ si y solo si } y^H \in x^G. \end{aligned}$$

Así $x^G = x^H$. Por lo que $V[G] = V[H]$. □

Observación 2.73. Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío donde $e : P \to B$ es la completación booleana de P, $G \subseteq P$ es un filtro genérico en P y $H = \uparrow(e[G]) \subseteq B$. Como consecuencias del teorema 2.72 se tienen las siguientes propiedades:

- Para cada $\dot{x} \in V^{(B)}$ ocurre $x^G = x^H$.
- Para cada fórmula φ en el lenguaje de la teoría de conjuntos y cualesquiera $\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n} \in V^{(B)}$, se cumple

$$V[G] \models \varphi(\dot{x_1}^G, \ldots, \dot{x_n}^G) \text{ si y solo si } V[H] \models \varphi(\dot{x_1}^H, \ldots, \dot{x_n}^H).$$

De esta manera, dados P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío y $e : P \to B$ su completación booleana, si se consideran filtros genéricos $G \subseteq P$ y $H \subseteq B^+$ según la propiedad (2) del lema 2.28, entonces las extensiones genéricas de V según G y según H resultan ser las mismas.

Teorema 2.74 (del modelo genérico). *Si P es un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío y $G \subseteq P$ es un filtro genérico en P, entonces existe $V[G]$ un modelo transitivo tal que:*

1. *$V[G]$ es modelo de ZFC.*
2. *$V \subseteq V[G]$ y $G \in V[G]$.*
3. *$Ord^{V[G]} = Ord$.* [16]
4. *Si W es un modelo transitivo de ZF tal que $V \subseteq W$ y $G \in W$, entonces $V[G] \subseteq W$.*

Demostración. Por el lema 2.28 y por el teorema 2.72, si $H = \uparrow(e[G]) \subseteq B^+$ donde $e : P \to B$ es la completación booleana de P, entonces $V[G] = V[H]$ y por la observación 2.73, todas las propiedades que se satisfacen en la extensión genérica $V[H]$ también se satisfacen en la extensión genérica $V[G]$.

[16] Es decir $Ord^{V[G]} = \{x^G \in V[G] | V[G] \models \text{“}x^G\text{es un ordinal”}\} = \{x \in V | x \text{ es un ordinal}\} = Ord$.

1. Por el teorema A.27, $V^{(B)}$ es un modelo B-valuado de ZFC. Así $[\![\varphi]\!]^B = 1$ para cada $\varphi \in ZFC$. Como $H = \uparrow(e[G])$ es un filtro genérico en B^+, ocurre que $1 \in H$. Por el corolario 2.70, se tiene que $V[H] \models \varphi$, según Tarski, para cada $\varphi \in ZFC$. Por la proposición 2.64, $V[H]$ es un modelo transitivo. De tal modo, como $V[G] = V[H]$ y por la observación 2.73, se cumple que $V[G]$ es un modelo transitivo de ZFC.

2.
   - Se verá que $V \subseteq V[G]$, es decir, se verá por inducción que $\check{x}^G = x$ para cada $x \in V$.
     Suponga que $\check{y}^G = y$ para cada $\check{y} \in dom(\check{x})$. De esta manera $\check{x}^G = \{\check{y}^G \mid \check{y} \in dom(\check{x}) \text{ y } \check{x}(\check{y}) \in G\}$. Como $\check{x}(\check{y}) = 1$ para cada $\check{y} \in dom(\check{x})$ y G es un filtro, se cumple $\check{x}^G = \{y \mid y \in x\} = x$, es decir, $\check{x}^G = x$ para todo $x \in V$. Así $V \subseteq V[G]$.
   - Por la definición (2.19), se cumple $\dot{G} \in V^{(B)}$. Por la definición 2.65 y lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{G}^G &= \{\check{p}^G \mid \exists p \in G \text{ tal que } \check{p} \in dom(\dot{G}) \text{ y } e(p) \leqslant \dot{G}(\check{p})\}\\
&= \{\check{p}^G \mid \exists p \in G \text{ tal que } \check{p} \in dom(\dot{G}) \text{ y } e(p) \leqslant e(p)\}\\
&= \{\check{p}^G \mid p \in G\}\\
&= \{p \mid p \in G\}\\
&= G.
\end{aligned}$$

   Así $G \in V[G]$.

3. Como "ser un ordinal" es una fórmula Δ_0[17], se cumple que todo ordinal en V también es un ordinal en $V[G]$. Por tal motivo, falta ver que todo ordinal en $V[G]$ es también un ordinal en V.

   Por 2.73, $V[G] \models$ "x es un ordinal" si y solo si $V[H] \models$ "x es un ordinal", es decir, $V[H] \models$ "y^H es un ordinal" para algún $y \in V^{(B)}$ tal que $x = y^H$, por el corolario 2.70, lo anterior es equivalente a $[\![y \text{ es un ordinal}]\!] \in H$, por el lema A.25, lo anterior es equivalente a $(\bigvee_{\alpha \in Ord} [\![y = \check{\alpha}]\!]) \in H$, por el lema 2.27 lo anterior equivale a que exista algún $\alpha \in Ord$ tal que $[\![y = \check{\alpha}]\!] \in H$, por la propiedad (2) del lema 2.69 lo anterior significa que existe algún $\alpha \in Ord$ tal que $y^H = \check{\alpha}^H$, como $\check{\alpha}^H = \check{\alpha}^G, \check{\alpha}^G = \alpha$ y $x = y^H$, se cumple $\alpha = x$, es decir, $x \in Ord$.

4. Si W es un modelo transitivo de ZF tal que $V \subseteq W$ y $G \in W$, entonces por inducción se cumple que $x^G \in W$ para cada $\dot{x} \in V^{(B)}$ y en consecuencia $V[G] \subseteq W$. □

Cabe mencionar que en teoría de modelos, antes del desarrollo del forcing, ya se había logrado *extender* un modelo de la teoría de conjuntos de tal manera que agregara al menos un nuevo elemento. No obstante, dichas extensiones no satisfacían (3), por esta razón es que las extensiones genéricas resultan relevantes, pues extienden de manera no trivial al modelo base sin alterar los ordinales.

[17] Ver [11], lema 12.10, (i), pág 164.

Teorema 2.75 (del forcing)**.** *Sean P un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ su completación booleana, φ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in V^{(B)}$. Si $G \subseteq P$ es un filtro genérico en P, entonces*

$$V[G] \models \varphi({\dot{x}_1}^G, \ldots, {\dot{x}_n}^G) \text{ si y solo si } \exists p \in G \text{ tal que } p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n). \quad (2.22)$$

Demostración. Sea $H = \uparrow(e[G])$. Por la propiedad (2) del lema 2.28, H es un filtro genérico en B^+. Se consideran las siguientes fórmulas: ψ como $\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, ψ^H como $\varphi({\dot{x}_1}^H, \ldots, {\dot{x}_n}^H)$ y ψ^G como $\varphi({\dot{x}_1}^G, \ldots, {\dot{x}_n}^G)$. De esta manera, ψ es una fórmula en el lenguaje del forcing y (2.22) es equivalente a $V[G] \models \psi^G$ si y solo si existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \psi$. Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned}
V[G] \models \psi^G &\text{ si y solo si } V[H] \models \psi^H, \text{ según Tarski} && \text{por la observación 2.73}\\
&\text{ si y solo si } [\![\psi]\!] \in H && \text{por el corolario 2.70}\\
&\text{ si y solo si } \exists p \in G \text{ tal que } e(p) \leqslant [\![\psi]\!] && \text{por (2) del lema 2.28}\\
&\text{ si y solo si } \exists p \in G \text{ tal que } p \Vdash \psi && \text{por la definición 2.60.} \quad \square
\end{aligned}$$

El teorema del forcing indica que "toda verdad en $V[G]$ es *forzada* por elementos en P", es decir, para cada fórmula φ en el lenguaje de la teoría de conjuntos la propiedad *metalingüística* "φ es relativamente consistente con ZFC" pasa a ser una propiedad del lenguaje de la teoría de conjuntos de la forma "existen P un conjunto parcialmente ordenado, G un filtro genérico en P y $p \in G$ tales que $p \Vdash \varphi$".

Proposición 2.76. *Si P es un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío, $e : P \to B$ es su completación booleana, $p \in P$, φ es una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in V^{(B)}$, entonces $p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ si y solo si se cumple $V[G] \models \varphi({\dot{x}_1}^G, \ldots, {\dot{x}_n}^G)$ para todo G filtro genérico en P tal que $p \in G$.*

Demostración. Por la propiedad (2) del lema 2.28, se cumple que

$$H = \{b \in B \mid \exists p \in G \text{ tal que } e(p) \leqslant b\}$$

es un filtro genérico en B^+. Se consideran las fórmulas ψ como $\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, ψ^H como $\varphi({\dot{x}_1}^H, \ldots, {\dot{x}_n}^H)$ y ψ^G como $\varphi({\dot{x}_1}^G, \ldots, {\dot{x}_n}^G)$. Por el teorema 2.72 se tiene $V[G] = V[H]$ y por la observación 2.73 se cumple $V[G] \models \psi^G$ si y solo si $V[H] \models \psi^H$.

($\Rightarrow$)

Sea G un filtro genérico en P tal que $p \in G$. De esta manera, $e(p) \in H$. Como $p \Vdash \psi$, por la definición 2.60, se cumple que $[\![\psi]\!] \in H$. Por el corolario 2.70 ocurre $V[H] \models \psi^H$. En consecuencia se cumple $V[G] \models \psi^G$.

($\Leftarrow$)

Suponga que $p \nVdash \psi$, es decir, $e(p) \nleqslant [\![\psi]\!]$. Así $e(p) \wedge \neg[\![\psi]\!] \neq 0$. Por la propiedad (3) del teorema 2.20 existe $q' \in P$ tal que $e(q') \leqslant e(p) \wedge \neg[\![\psi]\!]$. Por el corolario 2.21, hay algún $q \leqslant p$ tal que $e(q) \leqslant e(q')$. De esta manera, si G es un filtro genérico en P tal que $q \in G$, entonces $p \in G$. Por otra parte $e(q) \leqslant e(q') \leqslant \neg[\![\psi]\!] = [\![\neg\psi]\!]$. Así $[\![\neg\psi]\!] \in H$. De tal modo, se cumple $V[H] \models \neg(\psi^H)$, que es equivalente a, $V[G] \models \neg(\psi^G)$ y en consecuencia $V[G] \not\models \psi^G$. $\square$

Note que, salvo por la hipótesis de existencia de los filtros genéricos, la proposición 2.76 es una versión más poderosa de la relación de forcing definida en (1.4).

Capítulo 3

Topos elementales

3.1. Estructura de topos

De cierto modo los *topos* pueden ser vistos como *lugares en dónde hacer matemáticas*, cosa que en una primera instancia también pretende hacer la teoría de conjuntos. No obstante, la perspectiva que ofrece la teoría de topos presenta dos grandes diferencias respecto a la que ofrece la teoría de conjuntos según ZFC. La primera es que V el universo de la teoría de conjuntos es un objeto matemático "ya construido" y en consecuencia se puede pensar como *estático* o fijo, mientras que los *topos* en cierto modo son *dinámicos*, pues no presentan tanta rigidez respecto a su estructura. La segunda gran diferencia es la naturaleza de la *lógica* de su lenguaje, pues al ser V un objeto fijo, su lógica inherente al lenguaje analiza a los elementos de V "por encima", es decir, de manera *externa*, en contraste con los topos que presentan una *lógica interna* la cual está ligada a sus morfismos.

En este capítulo se procede a definir *topos* en su versión más afín a los intereses de esta tesis, se verá que algunas de las estructuras ya definidas resultan ser topos. Además, se definirán algunas nociones útiles sobre topos. Por esta razón, se apelarán a definiciones y resultados de la teoría de categorías. Todos estos conceptos pueden ser consultados en [18]. El desarrollo que se realizará sigue la teoría mostrada en [19], [17] ,[12] y [5].

Definición 3.1. Un *topos elemental* es una categoría $\mathcal{E}$ la cual satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{E}$ tiene todos los *pullbacks* o *productos fibrados*.

2. $\mathcal{E}$ posee *objeto terminal* 1.

3. $\mathcal{E}$ es *cartesiano cerrado*, es decir, para cada objeto $X \in \mathcal{E}$ se tiene la adjunción

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[d, bend right, "X\times\_"'] \\
\mathcal{E}. \arrow[u, bend right, "\_^X"'] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

4. $\mathcal{E}$ tiene *clasificador de subobjetos*, es decir, existe un objeto $\Omega \in \mathcal{E}$ y un morfismo $verdad : 1 \longrightarrow \Omega$ los cuales cumplen que para cada monomorfismo $m : S \rightarrowtail B$ existe un único morfismo $\phi : B \longrightarrow \Omega$ tal que el siguiente diagrama es de *producto fibrado*

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed, "!"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\
B \arrow[r, dashed, "\phi"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
$$

A la flecha ϕ se le llama *flecha característica o clasificadora* de m, cuando sea necesario especificar se denotará por $\phi = \text{car } S$ o $\phi = \text{car } m$.

De manera alternativa, es posible definir topos elementales de la siguiente manera.

Definición 3.2. Un *topos elemental* es una categoría $\mathcal{E}$ tal que:

1. $\mathcal{E}$ tiene todos los límites finitos.

2. $\mathcal{E}$ posee clasificador de subobjetos.

3. Para cada objeto B se tiene un objeto *potencia* PB y una flecha *pertenencia* $\in_B$: $B \times PB \to \Omega$ los cuales cumplen que para cada flecha $f : B \times A \to \Omega$ existe una única flecha *P-transpuesta* $g : A \to PB$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "g"'] & B \times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "id_B \times g"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\
PB & B \times PB \arrow[r, "\in_B"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

Es posible probar que las definiciones 3.1 y 3.2 son equivalentes[1]. Por esta razón, se apelará libremente a ambas definiciones en la medida que resulte conveniente, sólo se mencionará que para cada objeto B se cumple $PB = \Omega^B$.

La condición 3.2(3) permite definir un *funtor potencia* $P : \mathcal{E}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}$ tal que a cada flecha $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{E}$ la flecha Pf está dada como la P-transpuesta

[1] Ver [19] capítulo IV.2

descrita en el diagrama

$$\begin{tikzcd} PB \arrow[d, "Pf"'] & A \times PB \arrow[r, "f\times id_{PB}"] \arrow[d, "id_A \times Pf"'] & B \times PB \arrow[d, "\in_B"] \\ PA & A \times PA \arrow[r, "\in_A"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Más aún, con base en el funtor $P : \mathcal{E}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}$ es posible probar que todo topos elemental posee *colímites* finitos[2] empleando el *teorema de Beck*.[3] De esta manera, todo topos elemental $\mathcal{E}$ posee *objeto inicial* 0.

Observación 3.3. Sean $\mathcal{E}$ topos elemental y 0 el objeto inicial.

1. Cada flecha $k : A \to 0$ en $\mathcal{E}$ es un isomorfismo[4].
2. Para cada objeto B en $\mathcal{E}$ la única flecha $0 \to B$ es mono.[5]

Ejemplo 3.4. ***Con*** *la categoría de conjuntos es un topos elemental.*

Demostración. Note que cualquier conjunto unitario $\{*\}$ resulta ser objeto terminal en ***Con***, pues dado un conjunto X la única función $X \longrightarrow \{*\}$ es la función vacía si $X = \varnothing$, o bien es la función constante "$*$" si $X \neq \varnothing$.

Por los axiomas de ZFC se sabe que ***Con*** tiene productos finitos e *igualadores* y en consecuencia tiene todos los límites finitos. Por otra parte, al ser ***Con*** una categoría con productos binarios donde el producto de dos conjuntos A, B resulta ser el producto cartesiano usual $A \times B$, el exponencial resulta ser B^A, las funciones con dominio A y codominio B. Además es fácil ver que se satisface la *ley exponencial*, es decir, para cualesquiera A, B, C conjuntos se tiene una biyección natural

$$hom_{\boldsymbol{Con}}(A \times B, C) = C^{(A\times B)} \cong \left(C^A\right)^B = hom_{\boldsymbol{Con}}(B, C^A).$$

De tal modo, para cada $A \in \boldsymbol{Con}$ se tiene la adjunción

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Con} \arrow[d, bend right, "A\times\_"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \boldsymbol{Con}. \arrow[u, bend right, "\_^A"'] \end{tikzcd}$$

Por otra parte, el clasificador de subobjetos es el álgebra $2 = \{0, 1\}$ y la función $verdad : \{*\} \longrightarrow 2$ es tal que $* \longmapsto 1$. De esta manera, dada cualquier *inyección* $m : S \longrightarrow A$ su *función característica* es de la forma $\chi_m : A \longrightarrow 2$ donde

$$\chi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Im(m) \\ 0 & \text{si } x \notin Im(m). \end{cases}$$

[2]Ver [19], sección IV.5

[3]Ver [1], teorema 3.14, pág 101, en donde [1] emplea el término *tripleable* en lugar de *monádico*.

[4]Ver [19], capítulo IV.7, proposición 4, pág 194.

[5]Ver [19], capítulo IV.7, corolario 5, pág 194.

Así, el siguiente diagrama es de un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "!"] \arrow[d, tail, "m"'] & \{*\} \arrow[d, tail, "verdad"] \\ A \arrow[r, "\chi_m"'] & 2. \end{tikzcd}$$

De esta manera, se concluye que $\boldsymbol{Con}$ es un topos elemental. $\square$

En cierto modo los topos elementales *emulan* el comportamiento de $\boldsymbol{Con}$, por esta razón, los topos resultan generalizaciones adecuadas de $\boldsymbol{Con}$.

Definición 3.5. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría pequeña y C objeto en $\boldsymbol{C}$, una criba S en C es un *conjunto* de flechas en $\boldsymbol{C}$ con codominio C tal que para cualesquiera flechas $f : D \longrightarrow C$ en S y $g : E \longrightarrow D$ en $\boldsymbol{C}$ se cumple $fg \in S$.

Ejemplo 3.6. *Para cada categoría pequeña $\boldsymbol{C}$, la categoría $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ de funtores contravariantes de $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{Con}$ o categoría de pregavillas en $\boldsymbol{C}$ es un topos elemental.*

Demostración. La categoría $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ posee límites finitos pues éstos se calculan de manera puntual en $\boldsymbol{Con}$.

Sean $G, F \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$. Se define la pregavilla G^F vía el *lema de Yoneda* como

$$G^F(C) = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(F \times \boldsymbol{C}(\_, C), G). \tag{3.3}$$

A su vez, para cada flecha $c : C \longrightarrow C'$ en $\boldsymbol{C}$ se define $G^F(c)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G^F(c) &= \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(id_{F\_} \times \boldsymbol{C}(\_, c), G) \\ &= \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(\_, G) \circ (id_{F\_} \times \boldsymbol{C}(\_, c)) \\ &= \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(\_, G) \circ (id_{F\_} \times yc), \end{aligned}$$

donde y es el funtor de Yoneda. Ademas, si se consideran $\sigma : F \times \boldsymbol{C}(\_, C') \to G$ en $G^F(C')$, $a : A \to A'$ en $\boldsymbol{C}$, $x \in FA'$ y $g \in \boldsymbol{C}(A', C)$, por la naturalidad de σ y al realizar las evaluaciones correspondientes se obtiene

$$Ga(\sigma_{A'}(x, cg)) = \sigma_A(Fa(x), cga).$$

Lo cual prueba la naturalidad de $G^F(c)$.

A su vez, empleando el lema de Yoneda y propiedades de representación de pregavillas se cumple que para cualesquiera $F, G, H \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(F \times G, H) &\cong \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(F \times Colim_{\langle C,g\rangle \in \int G}\ \boldsymbol{C}(_, C_g), H) \\
&\cong \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(Colim_{\langle C,g\rangle \in \int G}\ F \times \boldsymbol{C}(_, C_g), H) \\
&\cong Lim_{\langle C,g\rangle \in \int G}\ \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(F \times \boldsymbol{C}(_, C_g), H) \\
&\cong Lim_{\langle C,g\rangle \in \int G}\ H^F(C_g) \\
&\cong Lim_{\langle C,g\rangle \in \int G}\ \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(\boldsymbol{C}(_, C_g), H^F) \\
&\cong \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(Colim_{\langle C,g\rangle \in \int G}\ \boldsymbol{C}(_, C_g), H^F) \\
&\cong \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(G, H^F).
\end{aligned}$$

Así, $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ es cartesiana cerrada.

Para cada $C \in \boldsymbol{C}$ se define

$$\Omega C = \{S \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}} \mid S \hookrightarrow \boldsymbol{C}(\_, C)\},$$

es decir, ΩC son todos los subfuntores de $\boldsymbol{C}(\_, C)$, o equivalentemente, ΩC son todas las *cribas* en C. Para cada $f : D \to C$ en $\boldsymbol{C}$ se define $\Omega f : \Omega C \to \Omega D$ tal que para cada $S \in \Omega C$, $\Omega f(S)$ es el producto fibrado descrito por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega f(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & S \arrow[d, tail] \\
\boldsymbol{C}(_, D) \arrow[r, "\boldsymbol{C}(_, f)"'] & \boldsymbol{C}(_, C).
\end{tikzcd}$$

De esta manera, $\Omega f(S) = \{g : E \longrightarrow D \mid fg \in S\}$ y así Ω es una pregavilla. Se define la transformación natural $t : 1 \longrightarrow \Omega$ de la siguiente manera: Para cada $C \in \boldsymbol{C}$

$$\begin{aligned}
1 &\xrightarrow{t_C} \Omega C \\
* &\longmapsto \boldsymbol{C}(_, C),
\end{aligned}$$

es decir, t_C calcula la *criba total* en C. De esta manera, $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ es un topos elemental. □

Un ejemplo de categoría de pregavillas es la categoría $\boldsymbol{Con}^{\{*\}}$ de funtores de la forma $\{*\} \to \boldsymbol{Con}$, esta es *equivalente* a la categoría de conjuntos. Otro ejemplo de categoría de pregavillas es $\boldsymbol{Con}^{0\to 1^{op}}$ donde la categoría $0 \longrightarrow 1$ posee dos objetos y una única flecha distinta a las identidades, una pregavilla $X \in \boldsymbol{Con}^{0\to 1^{op}}$ es un *conjunto* en dos etapas $X1 \longrightarrow X0$ donde $X1$ son los *puntos* del conjunto en cuestión y la flecha es una *regla de evolución.*

De esta manera, la categoría $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ puede ser vista como una categoría de *conjuntos variables parametrizados según la estructura* $\boldsymbol{C^{op}}$.

De tal modo, $\boldsymbol{Con}$ es una categoría de pregavillas *estática*, es decir, donde no hay variación.

Teorema 3.7. *Para cualquier objeto B en un topos elemental $\mathcal{E}$, la categoría $\mathcal{E}/B$ de flechas sobre B o categoría rebananda sobre B es un topos elemental.*

Al teorema 3.7 se le conoce como *teorema fundamental de la teoría de topos* y su prueba se sale de los intereses de esta tesis. No obstante, dicha prueba puede consultarse en [19], página 190, Teorema 1.

Sólo se mencionará que el objeto terminal en $\mathcal{E}/B$ es $id_B : B \to B$ la identidad en B y el clasificador de subobjetos en $\mathcal{E}/B$ resulta ser la *proyección* $p_B : \Omega \times B \to B$ donde Ω es el clasificador de subobjetos en $\mathcal{E}$, mientras que la flecha de verdad t_B en $\mathcal{E}/B$ está dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "car\ id_B"'] \arrow[d, dashed, "t_B"] \arrow[dr, equal] & \\ \Omega & \Omega \times B \arrow[l, "p_\Omega"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $car\ id_B$ es la flecha característica de id_B en $\mathcal{E}$.

Teorema 3.8. [6] *Para cada flecha $f : B \longrightarrow A$ en un topos $\mathcal{E}$, el funtor producto fibrado o cambio de base $f^* : \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$ posee adjunto izquierdo Σ_f, definido como la composición con f, y adjunto derecho Π_f. Más aún, f^* preserva el clasificador de subobjetos y las exponenciales, en consecuencia es un morfismo lógico*[7].

Definición 3.9. Sean $\mathcal{E}$ un topos elemental y $B \in \mathcal{E}$. Para cualesquiera monomorfismos $m : S \rightarrowtail B$ y $m' : S' \rightarrowtail B$ se define $m \simeq m'$ si y solamente si existe un isomorfismo $f : S' \longrightarrow S$ en $\mathcal{E}$ tal que $m' = mf$.

Es fácil ver que la relación definida en 3.9 es de equivalencia. Más aún, si m, m' son monomorfismos tales que $m \simeq m'$ entonces $car\ m = car\ m'$.

Definición 3.10. Para cualesquiera topos elemental $\mathcal{E}$ y X objeto en $\mathcal{E}$ se define la *colección* de *subobjetos* de X en $\mathcal{E}$ como

$$Sub(X) = \{[m]_\simeq \mid m : S \rightarrowtail X \text{ es un mono en } \mathcal{E}\},$$

donde $[m]_\simeq = \{m' : S' \rightarrowtail X \text{ en } \mathcal{E} \mid m \simeq m'\}$ y cuando sea necesario indicar el topos en donde se están considerando los subobjetos se denotará por $Sub_{\mathcal{E}}(B)$.

Para cada flecha $B \longrightarrow \Omega$ en $\mathcal{E}$ se obtiene el subobjeto de B caracterizado por dicha flecha calculando el producto fibrado del diagrama

$$1 \overset{verdad}{\rightarrowtail} \Omega \longleftarrow B$$

y tomando el monomorfismo hacia B.

[6] Ver [19], capítulo IV.7, teorema 7.2, pág 193.

[7] Un funtor entre topos elementales $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ es un *morfismo lógico* si preserva (salvo isomorfismo) límites finitos, el clasificador de subobjetos y las exponenciales.

Note que en un topos elemental $\mathcal{E}$, como existe el objeto terminal, se cumple $X \times 1 \cong X$ para cada $X \in \mathcal{E}$. De tal modo, ocurre que las flechas de la forma $B \longrightarrow \Omega$ están en biyección natural con las flechas de la forma $B \times 1 \longrightarrow \Omega$, que a su vez están en biyección natural con las flechas $1 \longrightarrow PB$, por medio de P-transpuestas. De esta manera, por las definiciones de flecha característica y 3.9, se tienen las siguientes biyecciones

$$Sub(B) \ \cong \ hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega) \ \cong \ hom_{\mathcal{E}}(1, PB). \tag{3.4}$$

Por otra parte, a los subobjetos de B se les denotará dependiendo de su respectiva representación según (3.4) de la siguiente manera

$$m : S \rightarrowtail B \qquad car\ m : B \longrightarrow \Omega \qquad \ulcorner car\ m \urcorner : 1 \longrightarrow PB.$$

Proposición 3.11. *En un topos elemental $\mathcal{E}$, toda flecha f posee una factorización epi-mono, es decir, existe un mono m llamado "imagen" y un epi e tal que $f = me$. Más aún, si f se factoriza a través de otro mono m' de la forma $f = m'q$ entonces existe una única flecha l tal que $m = m'l$.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ en $\mathcal{E}$. Se considera el diagrama de *coproducto fibrado* $A \xrightarrow{f} B \overset{x}{\underset{y}{\rightrightarrows}} \bullet$ y se toma $m : im(f) \to B$ el igualador de las flechas x, y, así $xm = ym$. Suponga que existen $h, h' : H \to im(f)$ tales que $mh = mh'$, de esta manera $xmh = xmh' = ymh' = ymh$ y por la propiedad universal del igualador se cumple que $h = h'$, así m es mono. Por construcción de las flechas x, y y la propiedad universal del igualador, existe una única flecha $e : A \to im(f)$ tal que $f = me$.

Por la propiedad (4) de la definición 3.1, todo mono $n : S \rightarrowtail X$ es el igualador de dos flechas, a saber, de las flechas *verdad* $!_X$ y *car* n donde $!_X$ es la única flecha $!_X : X \to 1$.

De esta manera, si $m' : M \rightarrowtail B$ es otro mono tal que f se factoriza a través de él de la forma $f = m'q$ con $q : A \to M$, entonces m' es el igualador de dos flechas $s, t : B \to \diamond$, en consecuencia $sm' = tm'$ y así $sf = sm'q = tm'q = tf$. Por la propiedad universal del coproducto fibrado existe una única flecha $u : \bullet \to \diamond$ tal que $s = ux$ y $t = uy$, de esta manera $sm = uxm = uym = tm$ y por la propiedad universal del igualador m' existe una única flecha $l : im(f) \to B$ tal que $m = m'l$.

Falta ver que $e : A \to im(f)$ es epi. Se considera una factorización de e de la forma $e = e'g$ donde $e' : E \rightarrowtail im(f)$ es mono y $g : A \to E$, así $f = me'g$ donde m y e' son monos. De esta manera f se factoriza a través del mono me' y por lo recién probado, existe una única flecha $v : im(f) \to E$ tal que $m = me'v$, al ser m mono se cumple $e'v = id_{im(f)}$. Por otra parte, se tiene $e've' = id_{im(f)}e' = e' = e'id_E$ con e' mono, así $ve' = id_E$ y en consecuencia e' es iso. Suponga que $z, w : im(f) \to C$ son tales que $ze' = we'$, de esta manera $ze'(e')^{-1} = we'(e')^{-1}$ y así $z = w$.

Sean $a, b : im(f) \to D$ tales que $ae = be$. Por la propiedad universal del coproducto fibrado existe una única $k : C \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "e"] \arrow[ddr, bend right, "e"'] & & & \\
& E \arrow[r, tail, "e'"] \arrow[d, tail, "e'"'] & im(f) \arrow[d, "z=w"'] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\
& im(f) \arrow[r, "z=w"] \arrow[drr, bend right, "b"'] & C \arrow[dr, dashed, "k"] & \\
& & & D.
\end{tikzcd}$$

Así $a = kz = kw = b$ y en consecuencia e es epi. $\square$

Sea B un objeto en un topos elemental $\mathcal{E}$. Para subobjetos $S \rightarrowtail B$ y $T \rightarrowtail B$ se dice que $S \leqslant T$ (o en un estricto sentido $[S]_{\simeq} \leqslant [T]_{\simeq}$) siempre que exista una flecha $S \to T$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, tail] & T \arrow[dl, tail] \\
B. &
\end{tikzcd}$$

De esta manera, $\langle Sub(B), \leqslant \rangle$ es un orden parcial.

Lema 3.12. *Para cada objeto B en un topos $\mathcal{E}$ la colección parcialmente ordenada $Sub(B)$ tiene estructura de álgebra de Heyting.*

Demostración. Sean $S \rightarrowtail B$ y $T \rightarrowtail B$ subobjetos de B. Es posible construir la máxima cota inferior de S y T en $Sub(B)$ tomando el producto fibrado $S \cap T$, el cual es subobjeto de B pues el producto fibrado preserva monos y la composición de monos es mono, a su vez, la propiedad universal el producto fibrado garantiza que $S \cap T$ es la máxima cota inferior de S y T.

$$\begin{tikzcd}
S \cap T \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & T \arrow[d, tail] \\
S \arrow[r, tail] & B,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \sqcup T \arrow[dr, two heads] & & T \arrow[ll] \arrow[dd, tail] \\
& S \cup T \arrow[dr, tail] & \\
S \arrow[uu] \arrow[rr, tail] & & B.
\end{tikzcd}$$

Para construir la mínima cota superior de S y T se considera $S \sqcup T$ el coproducto binario de S y T y se toma $S \cup T \rightarrowtail B$ la imagen de la única flecha $S \sqcup T \to B$ que existe por la propiedad universal del coproducto. De esta manera $S \cup T$ acota superiormente a S y T y por la proposición 3.11 $S \cup T$ es la mínima cota superior de S y T. De esta manera, $Sub(B)$ es una retícula.

Por la observación 3.3 (2) la flecha $0 \to B$ es mono, la identidad $id_B : B \to B$ también es mono y de esta manera $Sub(B)$ tiene 0 y 1. Falta ver que $Sub(B)$ tiene exponenciales.

Se sabe que en la categoría $\mathcal{E}/B$ el objeto terminal es la identidad id_B, de esta manera, los monos con codomino B en $\mathcal{E}$ son esencialmente los monos con codominio id_B en $\mathcal{E}/B$, es decir, $Sub_{\mathcal{E}}(B) \cong Sub_{\mathcal{E}/B}(id_B)$. De esta manera, basta probar que en todo topos $\mathcal{E}$ la retícula $Sub(1)$ tiene exponenciales.

Sean $S, T \in Sub(1)$. Como $\mathcal{E}$ es cartesiano cerrado, el objeto exponencial S^T existe en $\mathcal{E}$. Sea X un objeto en $\mathcal{E}$, todas las flechas de la forma $X \to S^T$ están en biyección natural con sus transpuestas de la forma $T \times X \to S$ que, a su vez, se componen en la única flecha $T \times X \to S \dashrightarrow 1$. Como $S \dashrightarrow 1$ es mono, si existe una flecha de forma $T \times X \to S$, entonces es única y en consecuencia si existe una flecha de la forma $X \to S^T$, entonces es única. Así, la única flecha $S^T \to 1$ es mono, de esta manera, $S^T \in Sub(1)$. Como $\mathcal{E}$ es cartesiano cerrado, para cada $U \in Sub(1)$ se cumple

$$hom(T \cap U, S) \cong hom(T \times U, S) \cong hom(U, S^T).$$

De esta manera, $Sub(1)$ tiene exponenciales y en consecuencia, para cada objeto B la colección $Sub(B)$ es un álgebra de Heyting. $\square$

La operación exponencial en $Sub(B)$ se llama *implicación* y se denota por $T \Rightarrow S$ en lugar de S^T.

Así, para cada subobjeto $S \in Sub(B)$ se define el *pseudocomplemento* de S como

$$\neg S = (S \Rightarrow 0). \tag{3.5}$$

Note que, para cada objeto B en $\mathcal{E}$, se tienen los isomorfismos naturales $Sub(B) \cong hom(B, \Omega)$ y $hom(B, \Omega) \times hom(B, \Omega) \cong hom(B, \Omega \times \Omega)$. De esta manera, es posible construir el morfismo $\wedge_B : hom(B, \Omega \times \Omega) \to hom(B, \Omega)$ como

$$\begin{tikzcd}
hom(B, \Omega \times \Omega) \arrow[rr, dashed, "\wedge_B"] \arrow[d, equal, "\cong"'] & & hom(B, \Omega) \arrow[dd, equal, "\cong"] \\
hom(B, \Omega) \times hom(B, \Omega) \arrow[d, equal, "\cong"'] & & \\
Sub(B) \times Sub(B) \arrow[rr, "\cap"'] & & Sub(B)
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

donde $\wedge_B$ es natural en B. Al tomar $B = \Omega \times \Omega$ y aplicar $\wedge_{\Omega \times \Omega}$ a la identidad $id_{\Omega \times \Omega}$ se obtiene la flecha

$$\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega. \tag{3.7}$$

Equivalentemente, es posible definir el morfismo (3.7) como la flecha característica del mono $\langle verdad, verdad \rangle : 1 \rightarrowtail \Omega \times \Omega$.

De manera análoga a como se definió (3.7), se definen las flechas:

$$\begin{aligned} \vee : \Omega \times \Omega &\longrightarrow \Omega, \\ \Rightarrow : \Omega \times \Omega &\longrightarrow \Omega, \\ \neg : \Omega &\longrightarrow \Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

De esta manera, en todo topos elemental la estructura de álgebra de Heyting está implícita en el clasificador de subobjetos. Finalmente, se define la flecha $falso : 1 \longrightarrow \Omega$ como $falso = \neg\ verdad$.

Observación 3.13. [8] En un topos elemental $\mathcal{E}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathcal{E}$ es booleano, es decir, el álgebra de Heyting interna en el clasificador de subobjetos Ω es un álgebra de Boole.
2. El operador $\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ satisface $\neg\neg = id_\Omega$.
3. Para cada objeto B en $\mathcal{E}$, el álgebra de Heyting $Sub(B)$ es álgebra de Boole.
4. Para cada subobjeto $S \rightarrowtail B$ en $\mathcal{E}$ se cumple $\neg S \sqcup S = B$.
5. Las flechas $verdad,\ falso : 1 \longrightarrow \Omega$ inducen un isomorfismo $1 \sqcup 1 \cong \Omega$.

3.1.1. Caracterización de epimorfismos.

Ahora se verá cómo caracterizar epimorfismos en topos.

Para cualesquiera objetos X, Y, E en un topos $\mathcal{E}$ y para cada $f : E \to Y^X$ se definen $\hat{f} : E \times X \to Y$ su traspuesta e $Im_E(f)$ la imagen de la flecha $\langle \pi_E, \hat{f}\, \rangle$ según el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times X \arrow[rr, "\langle \pi_E, \hat{f}\, \rangle"] \arrow[dr, two heads] & & E \times Y \\ & Im_E(f). \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

De esta manera, se define $im_E(f) : E \to \Omega^Y$ como la traspuesta de la flecha característica $E \times Y \to \Omega$ de $Im_E(f)$. Así, se tiene la asignación

$$im_E : hom(E, Y^X) \longrightarrow hom(E, \Omega^Y).$$

Proposición 3.14. *La flecha im_E es natural en E.*

Demostración. Se verá que para $\alpha : E' \to E$ y $f : E \to Y^X$ en $\mathcal{E}$ se cumple $im_{E'}(f\alpha) = im_E(f)\alpha$.

Sea $\hat{f\alpha} = \hat{f}(\alpha \times id_X) : E' \times X \to Y$. Así, el siguiente diagrama es de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} E' \times X \arrow[r, "\alpha \times id_X"] \arrow[d, "\langle \pi_{E'}, \hat{f\alpha} \rangle"'] & E \times X \arrow[d, "\langle \pi_E, \hat{f}\, \rangle"] \\ E' \times Y \arrow[r, "\alpha \times id_Y"'] & E \times Y. \end{tikzcd}$$

[8] Ver [19], capítulo VI.1, proposición 1, pág 270.

En consecuencia, $Im_{E'}(f\alpha)$ es el producto fibrado de $Im_E(f)$ a lo largo de $\alpha \times id_Y$ pues las factorizaciones epi-mono son estables bajo productos fibrados[9]. Por otra parte, al calcular productos fibrados de subobjetos a lo largo de $\alpha \times id_Y : E' \times Y \to E \times Y$, éstos corresponden a las composiciones de las flechas características con $\alpha \times id_Y$ que a su vez corresponden a las composiciones con α bajo la adjunción exponencial

$$\begin{tikzcd} Sub(E \times Y) \arrow[r, equal, "\cong"] \arrow[d, "(\alpha\times id_Y)^{-1}"'] & hom(E \times Y, \Omega) \arrow[r, equal, "\cong"] \arrow[d, "(\alpha\times id_Y)^*"] & hom(E, \Omega^Y) \arrow[d, "\alpha^*"] \\ Sub(E' \times Y) \arrow[r, equal, "\cong"] & hom(E' \times Y, \Omega) \arrow[r, equal, "\cong"] & hom(E', \Omega^Y). \end{tikzcd}$$

Lo cual muestra la naturalidad de im_E. $\square$

Al aplicar im_{Y^X} a la identidad id_{Y^X} se obtiene la flecha

$$im : Y^X \longrightarrow \Omega^Y.$$

Sea $t_Y : 1 \to \Omega^Y$ la traspuesta de $Y \times 1 \dashrightarrow 1 \xrightarrow{verdad} \Omega$, se define el objeto $Epi(X,Y)$ como el producto fibrado de t_Y a lo largo de im

$$\begin{tikzcd} Epi(X,Y) \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "t_Y"] \\ Y^X \arrow[r, "im"'] & \Omega^Y. \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

De esta manera, $Epi(X,Y)$ representa a las flechas de X a Y tales que su imagen resulta ser Y, es decir, $Epi(X,Y)$ clasifica a los epimorfismos parametrizados de la siguiente manera

Lema 3.15. *Para un objeto E en $\mathcal{E}$, una flecha $f : E \to Y^X$ se factoriza a través del subobjeto $Epi(X,Y) \rightarrowtail Y^X$ si y solo si $\langle \pi_E, \hat{f}\ \rangle : E \times X \to E \times Y$ es epi.*

Demostración. Por el producto fibrado (3.10), la flecha f se factoriza a través de $Epi(X,Y)$ si y solo si $im\ f = im_E(f)$ es la flecha $E \longrightarrow 1 \xrightarrow{t_Y} \Omega^Y$. Al tomar la traspuesta exponencial, por la definición de im_E, la flecha característica de $Im_E(f) \rightarrowtail E \times Y$ es la flecha $E \times Y \longrightarrow 1 \xrightarrow{verdad} \Omega$. Por el diagrama (3.9) se concluye que $\langle \pi_E, \hat{f}\ \rangle$ es epi. $\square$

Proposición 3.16. *En un topos no degenerado[10] $\mathcal{E}$, si $Epi(X,Y) = 0$, entonces en $\mathcal{E}$ no existen epimorfismos $X \twoheadrightarrow Y$.*

[9]Ver el teorema 3.8.

[10]Es decir, $0 \ncong 1$ en $\mathcal{E}$.

Demostración. Cada flecha $g : X \to Y$ puede expresarse a través del isomorfismo $X \cong X \times 1$ como su traspuesta $g = \tilde{f}$ donde $f : 1 \to Y^X$. De esta manera, por el lema 3.15, si $E = 1$ y g es epi, entonces f se factoriza a través de $Epi(X,Y)$ para alguna flecha $E = 1 \to Epi(X,Y)$. No obstante, $Epi(X,Y) = 0$. Por la propiedad (1) de la observación 3.3, toda flecha con codominio 0 en $\mathcal{E}$ es un isomorfismo, en consecuencia, $1 \cong 0$ lo cual es una contradicción. □

Lema 3.17. *Si $p : Y \to Z$ es un epimorfismo en $\mathcal{E}$, entonces la flecha inducida $p^X : Y^X \to Z^X$ se restringe a una flecha $Epi(X,Y) \to Epi(X,Z)$.*

Demostración. Por la correspondencia natural expuesta en el lema 3.15, basta probar que si una flecha $f : E \to Y^X$ en $\mathcal{E}$ es tal que la flecha

$$\langle \pi_E, \hat{f}\ \rangle : E \times X \to E \times Y$$

es epi, entonces también lo es $\langle \pi_E, \widehat{p^X f} \rangle : E \times X \to E \times Z$. Sin embargo, $\langle \pi_E, \widehat{p^X f} \rangle = (id_E \times p) \circ \langle \pi_E, \hat{f}\ \rangle$, de esta manera, lo que se quiere probar es consecuencia del hecho de que $id_E \times p$ es epi siempre que p lo sea. □

Lema 3.18. *Para cualesquiera $\mathcal{E}$ topos booleano, X un objeto en $\mathcal{E}$, $m : Z \to Y$ mono y $z_0 : 1 \to Z$ punto de Z, si $Epi(X,Z) \cong 0$, entonces $Epi(X,Y) \cong 0$.*

Demostración. Como $\mathcal{E}$ es un topos booleano, por la condición (4) de la observación 3.13 se cumple $Y = Z \sqcup Z'$ donde $Z' = \neg Z$.

Por otra parte, las flechas $id_Z : Z \to Z$ y $Z' \dashrightarrow 1 \xrightarrow{z_0} Z$ quedan *unidas* en el coproducto como $r : Y = Z \sqcup Z' \to Z$ donde $rm = id_Z$. Como id_Z es en particular epi y r es un epi *escindido*, entonces r es epi.

Por el lema 3.17, r induce una flecha $Epi(X,Y) \to Epi(X,Z)$ y por la propiedad (1) de la observación 3.3, se cumple que toda flecha hacia 0 es un isomorfismo. Como $Epi(X,Z) \cong 0$, se concluye que $Epi(X,Y) \cong 0$. □

3.2. Topologías de Grothendieck y de Lawvere-Tierney

Definición 3.19. Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría pequeña, se dice que J es una *topología de Grothendieck* sobre $\boldsymbol{C}$ si J es una función que a cada $C \in \boldsymbol{C}$ le asigna un conjunto $J(C)$ de *cribas* sobre C también llamadas las *cribas cubrientes de* C que satisfacen los siguientes axiomas:

1. La *criba total* $t_C = \{f \mid cod(f) = C\} = y(C)$ es elemento de $J(C)$.

2. (Axioma de estabilidad bajo producto fibrado) Si $S \in J(C)$ y $h : D \longrightarrow C$ es una flecha en $\boldsymbol{C}$, entonces la criba $h^*(S) = \{g : E \longrightarrow D \mid hg \in S\}$ está en $J(D)$.

3. (Axioma de transitividad o *carácter local*) Si $S \in J(C)$ y R es una criba sobre C tal que para todo $D \in \boldsymbol{C}$ y toda $h : D \longrightarrow C$ en S ocurre $h^*(R) \in J(D)$, entonces $R \in J(C)$.

Como consecuencia de la definición 3.19, se cumple que si $S \in J(C)$ y para cada flecha $f : dom(f) \longrightarrow C$ en S hay una criba $R_f \in J(dom(f))$, entonces

$$\{fg \mid f \in S \text{ y } g \in R_f\} \in J(C).$$

Definición 3.20. Se dice que la pareja $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ es un *sitio de Grothendieck* o simplemente *sitio* si $\boldsymbol{C}$ es una categoría pequeña y J es una topología de Grothendieck en $\boldsymbol{C}$.

A su vez, si $S \in J(C)$, entonces se dice que S es una *criba cubriente* o que S *cubre* a C. También, se dice que la criba S sobre C cubre a la flecha $f : D \longrightarrow C$ si $f^*(S)$ cubre a D. De esta manera, S cubre a C si y solo si cubre a la identidad en C.

De esta manera, los axiomas de topología de Grothendieck pueden ser planteados en función de las flechas de la siguiente manera:

(i) Si S es una criba sobre C y $f \in S$, entonces S cubre a f.

(ii) (Axioma de estabilidad) Si S cubre a una flecha $f : D \longrightarrow C$, entonces también cubre a la composición fg para cualquier flecha $g : E \longrightarrow D$.

(iii) (Axioma de transitividad) Si S cubre a una flecha $f : D \longrightarrow C$ y R es una criba sobre C que cubre a todas las flechas de S, entonces R cubre a f.

Note que un espacio topológico con la noción usual de cubierta es un ejemplo de sitio: $\langle \mathcal{O}(X), J\rangle$ donde $\mathcal{O}(X)$ es la categoría de abiertos en X, de tal modo, para cualesquier A abierto y S criba sobre A se cumple que S es una familia de subconjuntos abiertos de A con la propiedad de que si $E \subseteq B$ y $B \in S$, entonces $E \in S$.

Ejemplo 3.21. *Para cada conjunto parcialmente ordenado P se define la topología densa J en P tal que para cada $p \in P$*

$$J(p) = \{D \subseteq P \mid D \text{ es denso bajo } p \text{ y para toda } q \in D\ q \leqslant p\}.$$

Así, por la definición 1.2.5, $\langle P, J\rangle$ satisface los axiomas de la definición 3.19.

Más aún, si $\boldsymbol{C}$ es una categoría arbitraria se puede definir su *topología densa* de la siguiente manera

$$S \in J(C) \text{ si para toda } f : D \longrightarrow C \text{ existe } g : E \longrightarrow D \text{ tal que } fg \in S. \quad (3.11)$$

Definición 3.22. Sean $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ un sitio, $P \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, $C \in \boldsymbol{C}$ y $S \in J(C)$.

1. Se dice que la familia $\{x_f\}_{f \in S}$ es una *familia compatible* para S si para cada $f : D \to C$ en S, $x_f \in PD$ y para cada $g : E \to D$ en $\boldsymbol{C}$ se cumple $x_f \cdot g = x_{fg}$ donde $x_f \cdot g = Pg(x_f)$.

2. Una *amalgama* para una familia compatible $\{x_f\}_{f \in S}$ es un elemento $x \in PC$ tal que $x \cdot f = x_f$ para todo $f \in S$.

Definición 3.23. Sea $P \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, se dice que P es una *gavilla* sobre el sitio $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ si para cada objeto C en $\boldsymbol{C}$ y cada criba $S \in J(C)$ toda familia compatible $\{x_f\}_{f\in S}$ posee una única amalgama x.

Se denota por $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ a la categoría cuyos objetos son todas las *gavillas* sobre el sitio $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ y cuyas flechas son todas las transformaciones naturales que existen entre ellas.

Así, $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ es una *subcategoría plena* de $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$. Más aún, para cada gavilla P sobre el sitio $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ y para toda criba $S \in J(C)$ sobre cualquier objeto $C \in \boldsymbol{C}$ toda transformación natural $S \to P$ posee una única extensión a una transformación natural como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
y(C) \arrow[r, dashed] & P \\
S. \arrow[u, tail] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

El hecho de que $S \longrightarrow P$ se extienda a una transformación natural $y(C) \longrightarrow P$ es equivalente a que exista una familia compatible

$$\{x_f \mid D \in \boldsymbol{C},\ x_f \in PD,\ f \in y(C),\ dom\ f = D\}$$

que extienda a la familia compatible inducida por $S \longrightarrow P$.

Como $id_C : C \longrightarrow C$ es elemento de $y(C)$, entonces se induce un objeto $x_{id} \in PC$ tal que $x_f = x_{id\circ f}$ para cada $f : D \longrightarrow C$. Este objeto caracteriza completamente a la familia compatible

$$\{x_f \mid D \in \boldsymbol{C},\ x_f \in PD,\ f \in y(C)\}.$$

De esta manera, la familia compatible dada por $S \longrightarrow P$ se extenderá a una familia compatible dada por $y(C) \longrightarrow P$ si y solo si existe un objeto $x \in PC$ tal que para cada $D \in \boldsymbol{C}$ y cada $f : D \longrightarrow C$ en S se cumple $Pf(x) = x_f$.

Observación 3.24. Si $P \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, entonces P es una *gavilla* sobre el sitio $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ si y solo si para cada objeto C en $\boldsymbol{C}$ y cada criba $S \in J(C)$, PC es el siguiente *igualador* en la categoría $\boldsymbol{Con}$

$$P(C) \xrightarrow{\ e\ } \prod_{f\in S} P(dom\ f) \overset{p}{\underset{a}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f,g\ f\in S \\ dom\ f = cod\ g}} P(dom\ g), \tag{3.12}$$

donde e se define como $e(x) = \{x \cdot f\}_f = \{Pf(x)\}_f$, el segundo producto se extiende sobre todos los pares compatibles f, g con $f \in S$ (y en consecuencia $fg \in S$), la función p se sigue de las composiciones en $\boldsymbol{C}$ y a surge de la acción de $\boldsymbol{C}$ en P. De tal modo, si $\mathrm{x} = \{x_f\}_{f\in S}$ es un *vector* en $\prod_{f\in S} P(dom\ f)$, entonces

$$p(\mathrm{x})_{f,g} = x_{fg}, \qquad a(\mathrm{x})_{f,g} = x_f \cdot g.$$

Note que si $\boldsymbol{C}$ es una categoría pequeña y dis es la topología de Grothendieck *discreta*, es decir, para cada $C \in \boldsymbol{C}$ toda criba sobre C es elemento de $dis(C)$, entonces $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, dis) = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$.

Ejemplo 3.25. $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ *es un topos elemental para todo sitio* $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$.

Demostración. Como $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ es subcategoría plena de $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, entonces $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ posee los mismos límites. Más aún, si G es gavilla y F es una pregavilla entonces G^F es una gavilla[11].

El clasificador de subobjetos es la pregavilla $\Omega_J : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ tal que

$$\Omega_J(C) = \{S \mid S \text{ es una criba } J\text{-cerrada sobre } C\}, \tag{3.13}$$

donde S es J-cerrada sobre C si para cualquier flecha $f : D \to C$, si $f^*S \in J(D)$ entonces $f \in S$.

Y para cada flecha f en $\boldsymbol{C}$, $\Omega_J f = f^*$, donde f^* denota al operador producto fibrado de cribas en $\boldsymbol{C}$ a lo largo de f. □

Definición 3.26. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *topos de Grothendieck* si existe $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ sitio tal que $\mathcal{E}$ es *equivalente* a $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$.

Proposición 3.27. [12] *Para cada sitio* $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$*, el funtor inclusión* $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J) \hookrightarrow \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ *tiene un adjunto izquierdo*

$$a : \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}} \longrightarrow \mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$$

llamado funtor gavilla asociada.

Se sabe que $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ tiene todos los límites finitos, en particular, tiene objeto terminal $1 \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ que es tal que $f \mapsto id_{\{*\}}$ para cada flecha f en $\boldsymbol{C}$.

De tal modo, se define el funtor $\Gamma : \mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J) \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ como

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma : \mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J) & \longrightarrow & \boldsymbol{Con} \\
F & & hom_{\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}}(1, F) \\
\tau \big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow \tau_* \\
G & & hom_{\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}}(1, G)
\end{array} \tag{3.14}$$

llamado *funtor secciones globales*. Más aún, el funtor Γ tiene un adjunto izquierdo de la forma $a\Delta : \boldsymbol{Con} \longrightarrow \mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ donde el funtor

$$\begin{array}{ccc}
\Delta : \boldsymbol{Con} & \longrightarrow & \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}} \\
X & & \Delta(X) \\
f \big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow \Delta f \\
Y & & \Delta(Y)
\end{array} \tag{3.15}$$

[11] Ver [19], capítulo III.6, proposición 1, pág 136.
[12] Ver [19], capítulo III.5, teorema 1, pág 128.

es tal que para cada conjunto X, cada objeto C en $\boldsymbol{C}$ y cada flecha f en $\boldsymbol{C}$

$$\Delta(X)(C) = X,$$
$$\Delta(X)(f) = id_X.$$

De esta manera, se cumple $a\Delta \dashv \Gamma$ donde el funtor

$$a\Delta : \boldsymbol{Con} \longrightarrow \mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$$

se denominará como funtor *gavillanización*.

Definición 3.28. Sea $\mathcal{E}$ un topos. Una *topología de Lawvere-Tierney* en $\mathcal{E}$ es una flecha $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ en $\mathcal{E}$, donde Ω es el clasificador de subobjetos en $\mathcal{E}$, que satisface las siguientes propiedades:

1. $j\ verdad = verdad$.
2. $jj = j$.
3. $\wedge(j \times j) = j\wedge$.

Es decir, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "verdad"] \arrow[dr, tail, "verdad"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & \Omega, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & \Omega, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.29. [13] *En cualquier topos $\mathcal{E}$, el operador negación $\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ define la topología de Lawvere-Tierney $\neg\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ conocida como topología doble negación.*

Toda topología de Lawvere-Tierney $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ en $\mathcal{E}$ determina un subobjeto $J \rightarrowtail \Omega$ mediante el diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "verdad"] \\ \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.16}$$

Proposición 3.30. *Toda topología de Grothendieck J en una categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ determina una topología de Lawvere-Tierney j en el topos $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$.*

Demostración. Por el ejemplo 3.6 se sabe que para cada $C \in \boldsymbol{C}$ el clasificador de subobjetos en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ es de la forma

$$\Omega C = \{S \mid S \text{ es una criba sobre } C\}.$$

[13] Ver [19], capítulo VI.1, teorema 3, pág, 272.

Para cada topología de Grothendieck J en $\boldsymbol{C}$ se define la transformación natural $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ para cada componente $C \in \boldsymbol{C}$ y cada criba S de C como

$$\begin{aligned} j_C(S) &= \{g \mid S \text{ cubre a } g : D \longrightarrow C\} \\ &= \{g \mid g^*(S) \in J(dom\ g)\}. \end{aligned}$$

De esta manera, para cualquier $f : C' \longrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$ se cumple

$$j_{C'}(f^*S) = f^*(j_C(S)).$$

Así, j es una transformación natural, además, es facil ver que j satisface las condiciones descritas en la definición 3.28. $\square$

Toda topología de Lawver-Tierney j en $\mathcal{E}$ define un operador *cerradura* en $Sub(E)$ para cada objeto E en $\mathcal{E}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} hom(E,\Omega) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "j\circ\_"] & Sub(E) \arrow[d] & \ni A \arrow[d, mapsto] \\ hom(E,\Omega) \arrow[r, "\cong"] & Sub(E) & \ni \overline{A}. \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Más aún, para cada $A \in Sub(E)$ su j-cerradura $\overline{A}$ tiene a $j \circ car\ A$ como flecha caracteríastica, pues en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[rrr, dashed] \arrow[dd, tail] & & & 1 \arrow[dd, tail, "verdad"] \\ & A \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[ur, equal] \arrow[d, tail, "verdad"] & \\ E \arrow[r, equal] & E \arrow[r, "car\ A"'] & \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

ambos cuadros son productos fibrados, así $car\ \overline{A} = j \circ car\ A$.

Definición 3.31. Sea $A \rightarrowtail E$ un monomorfismo en $\mathcal{E}$. Se dice que el subobjeto A es denso (j-*denso*) si $\overline{A} = E$, es decir,

$$j\ car\ A = car\ id_E.$$

Proposición 3.32. *Sea* $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ *una categoría de pregavillas. Un subobjeto* $A \rightarrowtail C$ *es* $\neg\neg$*-denso si y solo si la intesección de* A *con todo subobjeto* B *de* C *que no es nulo no es nula, es decir, si* $B \rightarrowtail C$ *es tal que* $B \neq 0$*, entonces* $B \cap A \neq 0$.

Demostración. $(\Rightarrow)$

Si A es $\neg\neg$-denso, entonces $\neg\neg A = C$. De esta manera, para cada subobjeto B de C se cumple $B \leqslant \neg\neg A$. Por (3.5), se cumple $B \cap \neg A = 0$. Si $B \neq 0$, entonces no puede ocurrir $B \leqslant \neg A$ y por (3.5), se cumple $B \cap A \neq 0$.

($\Leftarrow$)

Como $Sub(C)$ es un álgebra de Heyting, se cumple $A \cap \neg A = 0$. De tal modo, si la intersección de A con todo subobjeto que no es nulo de C no es nula, entonces $\neg A = 0$ y en consecuencia $\neg\neg A = C$. Así, A es $\neg\neg$-denso. $\square$

Definición 3.33. Sean $\mathcal{E}$ un topos y $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ una topología de Lawvere-Tierney. Se dice que un objeto F en $\mathcal{E}$ es una j-gavilla si para cada monomorfismo denso $m : A \rightarrowtail E$ la composición con m induce un isomorfismo

$$\_ \circ m : hom_{\mathcal{E}}(E, F) \xrightarrow{\cong} hom(A, F).$$

Es decir, para cada A subobjeto denso de E toda flecha de A a la *gavilla* F tiene una única extensión de la forma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "!"] & F \\ A. \arrow[u, tail, "denso"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Del mismo modo, se dice que un objeto G en $\mathcal{E}$ es *separado* si para cada monomorfismo denso $A \rightarrowtail E$ la composición

$$hom_{\mathcal{E}}(E, G) \longrightarrow hom_{\mathcal{E}}(A, G)$$

es un monomorfismo.

A su vez, se definen las categorías $\mathrm{Gav}_j\, \mathcal{E}$ como la subcategoría plena de $\mathcal{E}$ cuyos objetos son las j-gavillas y $Sep_j\, \mathcal{E}$ la subcategoría plena cuyos objetos son los objetos separados en $\mathcal{E}$.

En el topos $\mathrm{Gav}_j\, \mathcal{E}$ el clasificador de subobjetos es el igualador de las flechas j e id_Ω en $\mathcal{E}$

$$\Omega_j \longrightarrow \Omega \underset{j}{\overset{id_\Omega}{\rightrightarrows}} \Omega. \tag{3.19}$$

Teorema 3.34. [14] *Si $\mathcal{E}$ es un topos y j es una topología de Lawvere-Tierney en $\mathcal{E}$, entonces la categoría $\mathrm{Gav}_j\, \mathcal{E}$ es un topos y el funtor inclusión $\mathrm{Gav}_j\, \mathcal{E} \rightarrowtail \mathcal{E}$ es exacto izquierdo y preserva exponenciales.*

Proposición 3.35. *En toda categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ las topologías de Grothendieck en $\boldsymbol{C}$ corresponden exactamente a las topologías de Lawvere-Tierney en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$.*

Demostración. Por la proposición 3.30 se sabe que toda topología de Grothendieck en $\boldsymbol{C}$ induce una topología de Lawvere-Tierney en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$.

Por otra parte, por el ejemplo 3.6, Ω el clasificador de subobjetos en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ es tal que ΩC es el conjunto de todas las cribas sobre C para cada objeto C en

[14] Ver [19] capítulo V.2, teorema 5, página 227.

$\boldsymbol{C}$ y a cada flecha $f : C' \longrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$ le corresponde la función $\Omega f : \Omega C \longrightarrow \Omega C'$ tal que $\Omega f(S) = \{g \mid fg \in S\}$ para toda criba S sobre C.

Si $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ es una topología de Lawvere-Tierney en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, entonces j clasifica al subobjeto $J \rightarrowtail \Omega$ según (3.16) e induce una topología de Grothendieck de la forma

$$S \in J(C) \text{ si y solo si } j_C(S) = t_C.$$

Las construcciones anteriores son mutuamente inversas. □

Observación 3.36. [15] Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría pequeña, j es una topología de Lawvere-Tierney en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ y J es la topología de Grothendieck en $\boldsymbol{C}$ inducida por j según la proposición 3.35, entonces una pregavilla $P \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ es una j-gavilla en el sentido descrito en la definición 3.33 si y solo si P es una gavilla para la topología J según la definición 3.23.

3.2.1. Modelos booleano-valuados vistos como topos

Si B es un álgebra de Boole completa, entonces es posible dotar al modelo booleano-valuado $V^{(B)}$ con una estructura de categoría y, con base en ella, probar que existe una equivalencia con una categoría de gavillas.

Sea B un álgebra de Boole completa, se define la categoría $\boldsymbol{V^{(B)}}$ cuyos objetos son los B-nombres, es decir, los elementos de $V^{(B)}$, para cualesquiera $\dot{x}, \dot{y} \in V^{(B)}$ las flechas de $\dot{x}$ a $\dot{y}$ en $\boldsymbol{V^{(B)}}$ son clases de equivalencia de elementos $f \in V^{(B)}$ tales que $[\![f : \dot{x} \to \dot{y} \text{ es una función}]\!] = 1$ módulo la relación de equivalencia definida de la siguiente manera: f_1 está relacionada con f_2 si y solo si $[\![f_1 = f_2]\!] = 1$, y donde la composición f seguida de g en $\boldsymbol{V^{(B)}}$ es la única h salvo equivalencia tal que $[\![h = g \circ f]\!] = 1$.

Si se considera a B como una categoría, entonces una pregavilla $X \in \boldsymbol{Con}^{B^{op}}$ es de la forma $X = \{X_b\}_{b \in B}$ junto con restricciones $X_c \to X_b$ definidas como $x \mapsto x \restriction_b$ donde $b \leqslant c$ y tales que para $a \leqslant b \leqslant c$ con $x \in X_c$ y $x = x \restriction_c$ se cumple $(x \restriction_b) \restriction_a = x \restriction_a$.

Para cada $b \in B$ una *criba* S sobre b puede ser vista como un subconjunto cerrado bajo cotas inferiores de la forma $S \subseteq \downarrow(b) = \{a \in B \mid a \leqslant b\}$, por lo tanto, se dice que $S \subseteq B$ es una *cubierta* de b si y solo si $b = \bigvee S$. De tal modo, estas cubiertas definen una topología de Grothendieck: la *topología canónica* en B.

Teorema 3.37 (de Higgs)**.** *El topos de gavillas* $\mathrm{Gav}(B)$ *en un álgebra de Boole completa* B *con la topología canónica es equivalente al topos* $\boldsymbol{V^{(B)}}$.

Demostración. Se define la asignación $H : \boldsymbol{V^{(B)}} \longrightarrow \mathrm{Gav}(B)$ de la siguiente manera.

Para cualesquiera $\dot{x} \in V^{(B)}$ y $b \in B$ se define

$$H_1(\dot{x})(b) = \{\dot{y} \in V^{(B)} \mid [\![\dot{y} \in \dot{x}]\!] \leqslant b\}$$

[15] Ver [19] capítulo V.4, teorema 2, pág 234.

y la relación de equivalencia

$$\dot{y_1} \sim_b \dot{y_2} \text{ si y solo si } [\![\dot{y_1} = \dot{y_2}]\!] \geqslant b.$$

De esta manera, se define $H(\dot{x})(b) = H_1(\dot{x})(b)/_{\sim_b}$

Sea $[y]_b \in H(\dot{x})(b)$, si $a \leqslant b$, entonces la inclusión $H_1(\dot{x})(b) \hookrightarrow H_1(\dot{x})(a)$ preserva la equivalencia y en consecuencia induce una flecha $H(\dot{x})(b) \to H(\dot{x})(a)$ de la forma $[y]_b \mapsto [y]_a$, dicha flecha resulta ser la operación restricción para una pregavilla $H(\dot{x})$ en B.

Por otra parte, para cada flecha $f : \dot{x} \to \dot{x'}$ en $\boldsymbol{V^{(B)}}$, es decir, que cumple $[\![f : \dot{x} \to \dot{x'}]\!] = 1$, se define la transformación natural de pregavillas

$$H(f) : H(\dot{x}) \longrightarrow H(\dot{x'})$$

cuyas componentes son de la forma

$$H(f)_b : H(\dot{x})(b) \longrightarrow H(\dot{x'})(b)$$

tales que a cada $[\dot{y}]_b,\ H(f)_b([\dot{y}]_b) = [\dot{z}]_b$ donde $\dot{z} \in V^{(B)}$ es el único nombre salvo equivalencia tal que $[\![f(\dot{y}) = \dot{z}]\!] \geqslant b$. De esta manera, es fácil ver que se satisface la naturalidad en b por lo que $H(f)$ es natural y en consecuencia $H : \boldsymbol{V^{(B)}} \longrightarrow \boldsymbol{Con}^{B^{op}}$ es un funtor.

Para ver que H es fiel y pleno suponga que $f, g : \dot{x} \to \dot{x'}$ son flechas distintas en $\boldsymbol{V^{(B)}}$, de esta manera $[\![f = g]\!] \neq 1$. Así, se cumple

$$0 \neq [\![f \neq g]\!] = [\![\exists \dot{y} \in \dot{x} \ (\ f(\dot{y}) \neq g(\dot{y})\ )]\!] = \bigvee_{\dot{y} \in V^{(B)}} ([\![\dot{y} \in \dot{x}]\!] \wedge [\![f(\dot{y}) \neq g(\dot{y})]\!]) \,.$$

Así existen $\dot{y} \in V^{(B)}$ y $b \in B^+$ tales que $b \leqslant [\![\dot{y} \in \dot{x}]\!] \wedge [\![f(\dot{y}) \neq g(\dot{y})]\!]$, en consecuencia $[\dot{y}]_b \in H(\dot{x})(b)$. Sean $\dot{z_1}, \dot{z_2} \in V^{(B)}$ tales que $b \leqslant [\![f(\dot{y}) = \dot{z_1}]\!]$ y $b \leqslant [\![g(\dot{y}) = \dot{z_2}]\!]$, de esta manera $H(f)_b([\dot{y}]_b) = [\dot{z_1}]_b$, $H(g)_b([\dot{y}]_b) = [\dot{z_2}]_b$ y son elementos distintos pues $0 \neq b \leqslant [\![\dot{z_1} = f(\dot{y}) \neq g(\dot{y}) = \dot{z_2}]\!]$, lo cual implica que $b \nleqslant [\![\dot{z_1} = \dot{z_2}]\!]$. Así $H(f) \neq H(g)$ y en consecuencia H es fiel.

Para ver que H es pleno se considera $\phi : H(\dot{x}) \to H(\dot{x'})$ una transformación natural y se denota por $\langle \dot{y}, \dot{z} \rangle_B$ para indicar que

$$\dot{y}, \dot{z}, \dot{u} \in V^{(B)} \text{ cumplen que } [\![\dot{u} = \langle \dot{y}, \dot{z} \rangle]\!] = 1.$$

Sea R un conjunto tal que cumple $R \cap [y]_b \neq \varnothing$ para todo $[\dot{y}]_b \in H(\dot{x}) \cup H(\dot{x'})$, por ejemplo, $R = V_\alpha^{(B)}$ para algún $\alpha > rang(\dot{x}), rang(\dot{x'})$. Se define

$$f = \{\langle \langle \dot{y}, \dot{z} \rangle_B, b \rangle \mid b \in B^+,\ \dot{y}, \dot{z} \in R,\ [\dot{y}]_b \in H(\dot{x})(b) \text{ y } [\dot{z}]_b \in \phi_b([\dot{y}]_b)\}.$$

De esta manera, se cumplen $[\![f : \dot{x} \to \dot{x'}]\!] = 1$ y $H(f) = \phi$, falta ver que las pregavillas $H(\dot{x})$ son gavillas para la topología canónica.

Sean $b \in B$ y S una criba cubriente de b. Así $S \subseteq \downarrow(b)$, S es cerrado bajo cotas inferiores y $\bigvee S = b$. Por la definición de gavilla ocurre que si para cada

$r \leqslant s$, con $s \in S$, $[\dot{y_r}]_r \in H(\dot{x})(r)$ cumple $[\dot{y_r}]_r = [\dot{y_s}]_s \restriction_r$, entonces existe una única $[\dot{y}]_b \in H(\dot{x})(b)$ tal que para todo $r \in S$ se cumple $[\dot{y_r}]_r = [\dot{y}]_b \restriction_r$. Por la definición de las flechas restricción de $H(\dot{x})$, ocurre que para cualesquiera $r \in S$ y $\dot{y_r}$ tal que $[\![\dot{y_r} \in \dot{x}]\!] \geqslant r$ y $r \leqslant s$, con $s \in S$, cumplen $[\![\dot{y_r} = \dot{y_s}]\!] \geqslant r$, entonces existe $\dot{y}$ tal que $[\![\dot{y} \in \dot{x}]\!] \geqslant b$ y para todo $r \in S$ se cumple $[\![\dot{y} = \dot{y_r}]\!] \geqslant r$. Más aún, si $\dot{y'}$ es otro nombre tal que satisface lo mismo que $\dot{y}$, entonces $[\![\dot{y} = \dot{y'}]\!] \geqslant b$. Las hipótesis sugieren que si $s, s' \in S$, entonces $[\![\dot{y_s} = \dot{y_{s'}}]\!] \geqslant s \wedge s'$, pues si $r = s \wedge s'$, entonces ocurre $[\![\dot{y_r} = \dot{y_s}]\!] \geqslant r$ y $[\![\dot{y_r} = \dot{y_{s'}}]\!] \geqslant r$. Así, para todo $r \in S$ existe $\dot{y} \in V^{(B)}$ tal que $[\![\dot{y} = \dot{y_r}]\!] \geqslant r$. Como $[\![\dot{y_r} \in \dot{x}]\!] \geqslant r$, se deduce que para toda $r \in S$ se cumple $[\![\dot{y} \in \dot{x}]\!] \geqslant r$. En consecuencia, $[\![\dot{y} \in \dot{x}]\!] \geqslant \bigvee_{r \in S} r = b$ y si $\dot{y'}$ es otro nombre con las mismas propiedades, entonces para cada $r \in S$ ocurre

$$r \leqslant [\![\dot{y} = \dot{y_r}]\!] \wedge [\![\dot{y'} = \dot{y_r}]\!] \leqslant [\![\dot{y} = \dot{y'}]\!].$$

Así, $[\![\dot{y} = \dot{y'}]\!] \geqslant \bigvee_{r \in S} r = b$ lo cual prueba que toda *familia compatible* de elementos en $H(\dot{x})$ indexados por S tiene una única *amalgama*. Así, por la definición 3.23, $H(\dot{x})$ es una gavilla para la topología canónica. Solo falta verificar que cada gavilla X para la topología canónica en B es isomorfa a alguna $H(\dot{x})$ con $\dot{x} \in V^{(B)}$, lo cual puede consultarse a detalle en la prueba del teorema de Higgs en [4] páginas 44 a 48. □

3.3. Construcción filtro-cociente

Se sabe, por la proposición 2.38, la definición 2.39 y el teorema 2.41, que dada una estructura booleano-valuada plena $\mathfrak{A}^B$ y U un ultrafiltro en el álgebra de Boole B, es posible construir una estructura *cociente* $\mathfrak{A}^B/U$. De manera parecida, es posible construir un topos cociente con base en un topos $\mathcal{E}$ y un filtro de un álgebra de Heyting adecuada inmersa en $\mathcal{E}$, dicha construcción es conocida como el *filtro-cociente* de $\mathcal{E}$ y su definición es similar, pero no análoga, a la construcción dada en la proposición A.18.

Sea $\mathcal{E}$ un topos elemental. Se dice que un objeto U es un *objeto abierto*[16] en $\mathcal{E}$ si la única flecha $U \longrightarrow 1$ en $\mathcal{E}$ es un *mono*. Más aún, la retícula $Sub(1)$ vista como categoría es equivalente a la subcategoría plena $Abiertos(\mathcal{E})$ de todos los objetos abiertos de $\mathcal{E}$.

Por otra parte, se dice que $\mathcal{U}$ es un *filtro de objetos abiertos* en $\mathcal{E}$ si es una colección de objetos abiertos que cumple:

1. $id_1 : 1 \longrightarrow 1$ es un elemento de $\mathcal{U}$.

2. Si $U \rightarrowtail 1$ y $V \rightarrowtail 1$ son elementos de $\mathcal{U}$, entonces la composición con el producto fibrado $U \cap V \rightarrowtail 1$ es un elemento de $\mathcal{U}$.

[16] El término *abierto* surge de topología, pues si X es un espacio topológico, la categoría abierta $\mathcal{O}(X)$ es un sitio con la topología de Grothendieck de las cubiertas usuales. De tal modo, en $\mathrm{Gav}(\mathcal{O}(X))$ los subconjuntos abiertos de X resultan ser los subobjetos del objeto terminal.

3. Si $U \rightarrowtail 1$ es un elemento de $\mathcal{U}$, V es un objeto abierto en $\mathcal{E}$ y existe una flecha $U \to V$, entonces $V \rightarrowtail 1$ es un elemento de $\mathcal{U}$.

Por otra parte, por el teorema 3.8 se sabe que una inclusión de objetos abiertos $i : V \rightarrowtail U$ induce el morfismo lógico *producto fibrado* entre los topos

$$i^* : \mathcal{E}/U \longrightarrow \mathcal{E}/V.$$

Por lo cual, de manera análoga a la construcción presentada en la proposición A.18, resulta intuitivo definir la construcción filtro-cociente de la forma

$$\mathcal{E}/\mathcal{U} = Colim_{\ U \in \mathcal{U}}\ \mathcal{E}/U.$$

No obstante, si se consideran las inclusiones $i : V \rightarrowtail U$ y $j : W \rightarrowtail V$, la respectiva composición de funtores producto fibrado

$$\mathcal{E}/U \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}/V \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}/W$$

no necesariamente coincide con $(ij)^*$, por lo que la asignación $U \mapsto \mathcal{E}/U,\ i \mapsto i^*$ sólo resulta ser un seudofuntor.

Por esta razón, para construir al filtro-cociente será necesario definir categorías *débiles* pero equivalentes a las categorías rebanada $\mathcal{E}/U$.

Definición 3.38. Sean $\mathcal{U}$ un filtro de objetos abiertos es un topos $\mathcal{E}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ se define la categoría $\mathcal{E}//U$ cuyos objetos son los objetos X de $\mathcal{E}$ y las flechas de X a Y son las flechas $f : X \times U \longrightarrow Y \times U$ en $\mathcal{E}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \times U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & Y \times U \arrow[dl, "\pi_U"] \\
& U. &
\end{tikzcd}$$

De esta manera, existe una equivalencia de categorías $\zeta : \mathcal{E}//U \longrightarrow \mathcal{E}/U$ tal que $X \mapsto \pi_U : X \times U \longrightarrow U$ y a cada flecha $f \mapsto f$, mientras que la asignación inversa $\xi : \mathcal{E}/U \longrightarrow \mathcal{E}//U$ está dada por

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& U &
\end{tikzcd}
\quad \mapsto \quad
\begin{tikzcd}
X \times U \arrow[rr, "\langle g\pi_X, \pi_U \rangle"] \arrow[dr] & & Y \times U \arrow[dl] \\
& U, &
\end{tikzcd}
\tag{3.20}$$

donde dos flechas $h, k : Z \longrightarrow U$ necesariamente son iguales pues $U \rightarrowtail 1$ es un mono al objeto terminal. De esta manera, las transformaciones naturales evidentes $\zeta\xi \cong id_{\mathcal{E}/U}$ y $\xi\zeta \cong id_{\mathcal{E}//U}$ son isomorfismos naturales y así se tiene la equivalencia $\mathcal{E}/U \cong \mathcal{E}//U$. En consecuencia, por el teorema 3.7 se cumple que $\mathcal{E}//U$ es un topos elemental.

De esta manera, cada flecha en $\mathcal{E}//U$ de la forma $f : X \times U \longrightarrow Y \times U$ sobre U en $\mathcal{E}$ está completamente determinada por la proyección $\pi_Y f : X \times U \longrightarrow Y$. Por otra parte, para cada inclusión $i : V \rightarrowtail U$ de subobjetos de 1 en el filtro $\mathcal{U}$ se definen las flechas $\alpha = id_X \times \langle i, id_V \rangle$ y $\beta = id_X \times \pi_V$

$$X \times V \xrightarrow{\alpha} X \times U \times V \xrightarrow{\beta} X \times V.$$

Además, como cualquier flecha de cualquier objeto hacia U, o hacia V, es única, entonces se cumplen $\beta\alpha = id_{X\times V}$ y $\alpha\beta = id_{X\times U\times V}$. Por lo cual, cualquier flecha $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}//U$ que es de la forma $f : X \times U \longrightarrow Y \times U$ sobre U en $\mathcal{E}$ determina una única flecha

$$f|V = p_{UV} f : X \times V \xrightarrow{\alpha} X \times U \times V \xrightarrow{f\times id} Y \times U \times V \xrightarrow{\beta} Y \times V,$$

donde la flecha $p_{UV} f : X \longrightarrow Y$ es una flecha en $\mathcal{E}//V$. De tal modo, se define el funtor

$$p_{UV} : \mathcal{E}//U \longrightarrow \mathcal{E}//V$$

el cual resulta ser un *morfismo lógico*, pues bajo la equivalencia $\mathcal{E}/U \cong \mathcal{E}//U$, el funtor p_{UV} está en correspondencia biunívoca con el funtor producto fibrado $i^* : \mathcal{E}/U \longrightarrow \mathcal{E}/V$ el cual, por el teorema 3.8, es un morfismo lógico.

Más aún, la flecha $p_{UV} f$ puede ser descrita como la flecha $h : X\times V \longrightarrow Y\times V$ sobre V tal que $\pi_Y h = \pi_Y f\langle 1_X, i\rangle$. Con esta caracterización se concluye que para la composición de inclusiones $W \rightarrowtail V \rightarrowtail U$ se cumple

$$p_{UW} = p_{VW} \circ p_{UV} : \mathcal{E}//U \longrightarrow \mathcal{E}//V \longrightarrow \mathcal{E}//W$$

Definición 3.39. Sea $\mathcal{U}$ un filtro de objetos abiertos en un topos $\mathcal{E}$. Se define la construcción *filtro-cociente* como

$$\mathcal{E}/\mathcal{U} = Colim_{\ U\in\mathcal{U}}\ \mathcal{E}//U.$$

Finalmente, para garantizar que la construcción filtro-cociente está bien definida falta ver que los *conjuntos* de flechas $hom_{\mathcal{E}/\mathcal{U}}(X, Y)$ coinciden con los colímites ordinarios de los conjuntos $hom_{\mathcal{E}//U}(X, Y)$, dichos colímites se calculan en la categoría $\boldsymbol{Con}$ tomando la unión ajena de todos los conjuntos de flechas cuyos elementos son descritos como parejas de la forma $\langle U, f_U : X\times U \to Y\times U\rangle$ y posteriormente factorizadas a través de la relación de equivalencia $\equiv$ definida para $U, V \in \mathcal{U}$ como

$$\langle U, f_U\rangle \equiv \langle V, f_V\rangle \text{ si y solo si } f_U|W = f_V|W$$

para algún $W \rightarrowtail U \cap V$ en $\mathcal{U}$.

Se denota por $[f] = [f_U]$ a la clase de equivalencia definida por $\langle U, f_U\rangle$. Para las flechas $f_U : X \times U \longrightarrow Y \times U$ y $g_V : Y \times V \longrightarrow Z \times V$ respectivamente definidas sobre U y V, se define la clase de composición eligiendo algún $W \rightarrowtail U \cap V$, lo cual es posible ya que $\mathcal{U}$ es un filtro, y se define

$$[g] \circ [f] = [(g|W) \circ (f|W)].$$

Se sigue de esta definición que la composición de clases no depende de la elección de $W \rightarrowtail U \cap V$ y que $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ con estas clases definidas como flechas conforman una categoría con los mismos objetos X como en la categoría $\mathcal{E}$. Más aún, si se define $p_{U\infty}(f) = [f]$, entonces

$$p_{U\infty} : \mathcal{E}//U \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{U} \tag{3.21}$$

es un funtor tal que $p_{V\infty}p_{UV} = p_{U\infty}$. De esta manera, $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ es en efecto un colímite.

Lema 3.40. *Si $f = f_U : X \times U \longrightarrow Y \times U$ es una flecha en $\mathcal{E}//U$, entonces la clase de equivalencia $[f] : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ es un mono si y solo si existe algún $V \rightarrowtail U$ tal que $f|V : X \times V \longrightarrow Y \times V$ es un mono en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Para cada $V \rightarrowtail U$ se considera el producto fibrado (sobre V)

$$\begin{tikzcd}
P \times V \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & X \times V \arrow[d, "f|V"] \\
X \times V \arrow[r, "f|V"'] & Y \times V.
\end{tikzcd}$$

Asi, $f|V$ es un mono si y solo si $p = q$ en el diagrama de arriba. Por otra parte, los funtores $p_{V\infty}$ y p_{UV} preservan productos fibrados, de esta manera, si $f|V$ es un mono para alguna V, entonces $[f]$ es mono en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$. Inversamente, si la clase de equivalencia $[f]$ es un mono, entonces se cumple $[p] = [q]$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ y en consecuencia, para algún $V \rightarrowtail U$, se cumple $p|V = q|V$. De esta manera, $f|V$ es un mono en la categoría $\mathcal{E}//V$, es decir, f eventualmente resulta ser un mono en $\mathcal{E}$. $\square$

Teorema 3.41. *Si $\mathcal{U}$ es un filtro de subobjetos de 1 en un topos $\mathcal{E}$, entonces la construcción filtro cociente $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ descrita en la definición 3.39 es un topos elemental. Más aún, para cada $U \in \mathcal{U}$, el funtor*

$$p_{U\infty} : \mathcal{E}//U \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{U} \tag{3.22}$$

es un morfismo lógico, en particular, $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{U}$ es lógico para $U = 1$.

Demostración. Para cada $U \in \mathcal{U}$, el producto $X \times Y$ en $\mathcal{E}//U$ se describe de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
X \times U \arrow[d] & X \times Y \times U \arrow[l, "\pi_{X\times U}"'] \arrow[r, "\pi_{Y\times U}"] \arrow[d] & Y \times U \arrow[d] \\
U \arrow[r, equal] & U \arrow[r, equal] & U.
\end{tikzcd} \tag{3.23}$$

Así, para cada $V \rightarrowtail U$, la flecha p_{UV} envía el diagrama (3.23) a su correspondiente diagrama en $\mathcal{E}//V$. De esta manera, se induce en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ el diagrama de clases de equivalencia

$$X \xleftarrow{[\pi_{X\times U}]} X \times Y \xrightarrow{[\pi_{Y\times U}]} Y. \tag{3.24}$$

Para ver que el diagrama (3.24) satisface la propiedad universal del producto se considera en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ el diagrama

$$X \xleftarrow{[f]} Z \xrightarrow{[g]} Y. \tag{3.25}$$

Así, existe algún $U \in \mathcal{U}$ tal que en $\mathcal{E}//U$ se tienen las respectivas flechas

$$X \times U \xleftarrow{f} Z \times U \xrightarrow{g} Y \times U$$

y así determinan una única flecha $h : Z \times U \longrightarrow X \times Y \times U$ tal que $\pi_{X\times U} h = f$ y $\pi_{Y\times U} h = g$. De esta manera, $[\pi_{X\times U}][h] = [f]$ y $[\pi_{Y\times U}][h] = [g]$ para el diagrama (3.25), la unicidad de $[h]$ se sigue de aplicar un argumento similar.

Para construir el igualador se consideran $U \in \mathcal{U}$ y f, g flechas en $\mathcal{E}//U$. Como $\mathcal{E}//U$ es un topos, se construye el igualador de la forma

$$E \times U \xrightarrow{e} X \times U \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \times U.$$

De esta manera, como p_{UV} es un morfismo lógico, para cada $V \rightarrowtail U$ se cumple que $e|V$ es el igualador de $f|V$ y $g|V$ en $\mathcal{E}//V$. En consecuencia, $[f][e] = [g][e]$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$, también se cumple que para cualquier $[h] : Z \longrightarrow X$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ tal que $[f][h] = [g][h]$, éste se factoriza en algún V a través de $[e]$. Por lo tanto, $[e]$ es el igualador en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$.

Del mismo modo, para cada $V \rightarrowtail U$ en $\mathcal{U}$, p_{UV} preserva exponenciales pues envía a cada componente de la *counidad* en $\mathcal{E}//U$ de la forma

$$\varepsilon_U : X^Y \times Y \longrightarrow X$$

en la correspondiente componente de la counidad en $\mathcal{E}//V$. Así, para cada par de objetos X, Y en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$, el objeto $(X^Y)_\infty$ está definido como el objeto X^Y y para $U \in \mathcal{U}$ fijo se define la componente de la counidad como

$$\varepsilon_\infty = [\varepsilon_U] : X^Y \times Y \longrightarrow X.$$

Como p_{UV} es un morfismo lógico, la componente ε_∞ coincide con la correspondiente componente $[\varepsilon_V]$ para cualquier $V \rightarrowtail U$. De esta manera, la universalidad de la flecha ε_∞ se sigue directamente. Así, $p_{U\infty}$ preserva exponenciales con su respectiva counidad y en consecuencia $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ es cartesiano cerrado.

Por último, el clasificador de subobjetos Ω junto con la flecha $verdad : 1 \rightarrowtail \Omega$ en $\mathcal{E}$ inducen un mono $verdad \times id_U : 1 \times U \rightarrowtail \Omega \times U$ sobre U en $\mathcal{E}//U$ pues $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}//U$ es un morfismo lógico. De esta manera, por el lema 3.40,para cada mono $[f] : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que f_U es un mono en $\mathcal{E}//U$. Así, se tiene su flecha característica $\chi : Y \times U \longrightarrow \Omega \times U$ sobre U, en consecuencia, la clase de equivalencia $[\chi] : Y \longrightarrow \Omega$ es la flecha característica del mono $[f]$ para $verdad \times id_U$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ y así la proyección $p_{U\infty} : \mathcal{E}//U \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{U}$ preserva el clasificador de subobjetos. Por lo tanto, $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ es un topos elemental y $p_{U\infty}$ es un morfismo lógico. □

Proposición 3.42. *Si $\mathcal{E}$ es un topos booleano y $\mathcal{U}$ es un filtro maximal de objetos abiertos en $\mathcal{E}$, entonces el topos filtro-cociente $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ es 2-valuado y en consecuencia es booleano.*

Demostración. Por el teorema 3.41, $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{U}$ es un morfismo lógico. Por un argumento análogo al expuesto en la prueba de la condición (3) en la proposición 2.8, ocurre que, como $\mathcal{U}$ es maximal, para cualesquiera U, V objetos abiertos se cumple que

$$U \cup V \in \mathcal{U} \text{ si y solo si } U \in \mathcal{U} \text{ o } V \in \mathcal{U},$$

en particular, para cualquier objeto abierto U se cumple que $U \in \mathcal{U}$, o bien $\neg U \in \mathcal{U}$.

Para cada flecha $1 \to \Omega$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ existe algún $U \in \mathcal{U}$ tal que dicha flecha es representada por una flecha $1 \times U \to \Omega \times U$ sobre U, que a su vez es representada por una flecha $f : U \to \Omega$, mientras que para cualquier $U' \in \mathcal{U}$ la restricción de f a U' también representa a la misma flecha $1 \to \Omega$. Sea $V \rightarrowtail U$ el subobjeto caracterizado por f en $\mathcal{E}$. De esta manera, se cumple que $V \in \mathcal{U}$ o en su defecto $\neg V \in \mathcal{U}$, en consecuencia, $V \in \mathcal{U}$ o bien $(U \cap \neg V) \in \mathcal{U}$. No obstante, f es la flecha característica de V, por lo que la restricción de f a V es de la forma

$$V \dashrightarrow 1 \xrightarrow{verdad} \Omega,$$

mientras que la restricción de f a $(U \cap \neg V)$ es

$$U \cap \neg V \dashrightarrow 1 \xrightarrow{falso} \Omega.$$

De tal modo, las únicas flechas de la forma $1 \to \Omega$ en $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ son aquellas dos representadas en $\mathcal{E}$ por $verdad, falso \colon 1 \to \Omega$. De esta manera, $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ resulta 2-valuado. □

Capítulo 4

Aplicaciones

Ahora que, a grandes rasgos, se han expuesto los respectivos desarrollos técnicos para las distintas versiones del forcing, se muestran algunos de los resultados clásicos del forcing expuestas en las respectivas versiones ya desarrolladas.

4.1. Negación de la hipótesis del continuo

La hipótesis del continuo (CH) fue originalmente formulada e investigada por Cantor en 1878[1], dicha hipótesis plantea la inexistencia de un subconjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$ que posea estrictamente más elementos que el conjunto de los números naturales y estrictamente menos elementos que todos los reales, es decir, no existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$. Así, se establece que la *cantidad infinita* inmediatamente superior a la de los números naturales es precisamente la de los números reales. Posteriormente, con el desarrollo de la axiomática para la teoría de conjuntos, junto con los planteamientos de los ordinales de von Neumann y los números cardinales, la hipótesis del continuo quedaría formulada con la igualdad de cardinales $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

La veracidad, falsedad o la independencia de la hipótesis fue un problema abierto hasta que, primero en 1940, Kurt Gödel probó la consistencia relativa de la hipótesis con el resto de los axiomas de ZFC empleando el *modelo interno* L y en consecuencia probando así la imposibilidad de demostrar la falsedad de la hipótesis desde la teoría de ZFC.

Años después, en 1963, Paul Cohen probó la consistencia de la negación de la hipótesis de continuo empleando el método forcing extendiendo un modelo base a una extensión genérica en la que se añaden una cantidad de reales mayor a $\aleph_1$, probando así la independencia de la hipótesis del continuo con los axiomas de ZFC.

En esta sección se dará la construcción de Cohen desde los tres puntos de vista expuestos en los capítulos pasados.

[1] Ver [7].

Por el corolario 1.15 se sabe que, al suponer la consistencia de los axiomas ZFC, existe M un modelo transitivo numerable de ZFC. Por el teorema 1.19 se cumple que para un conjunto parcialmente ordenado con máximo P tal que $P \in M$ y $p \in P$ existe $G \subseteq P$ un filtro P-genérico sobre M tal que $p \in G$ y, por la condición (1) de la observación 1.24, se sabe que la extensión genérica de M por G cumple que $M \subseteq M[G]$ y que $G \in M[G]$. No obstante, es posible que existan cardinales tales que M y $M[G]$ interpreten de forma distinta, es decir, es posible que exista un ordinal κ tal que se cumple la *fórmula relativizada*[2] (κ^M es un cardinal)^M, pero que $\kappa^M \neq \kappa^{M[G]}$.

Para garantizar que las extensiones genéricas *preservan adecuadamente suficientes* propiedades referentes a los cardinales, serán necesarias ciertas definiciones y propiedades.

Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, cuya existencia se garantiza en el corolario 1.15, P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$. Por las definiciones 1.20 y 1.22 ocurre

$$M^P = V^P \cap M = \{\dot{x} \in M \mid (\dot{x} \text{ es un } P - \text{nombre})^M\}.$$

Más aún, si $G \subseteq P$ es un filtro P-genérico sobre M, cuya existencia se garantiza por el teorema 1.19, entonces $\langle M[G], \in \rangle$ es un modelo transitivo de ZFC[3].

Definición 4.1. Sean P un conjunto parcialmente ordenado con máximo y M un modelo transitivo numerable de ZFC tal que $P \in M$.

1. Se dice que P *preserva regularidad* si y solo si para todo $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M y para cada ordinal $\beta \in M$ ocurre que si (β es regular)^M, entonces (β es regular)$^{M[G]}$.

2. Se dice que P *preserva cofinalidades* si y solo si para todo $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M y para cada ordinal $\alpha \in M$ se cumple $cf^M(\alpha) = cf^{M[G]}(\alpha)$.

3. Se dice que P *preserva cardinales* si y solo si para todo $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M y para cada $\kappa \in M$ tal que si (κ es un cardinal)^M, entonces (κ es un cardinal)$^{M[G]}$.

Proposición 4.2. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado con máximo y M un modelo transitivo numerable de ZFC tal que $P \in M$. Si P preserva regularidad, entonces P preserva cofinadidades.*

Demostración. Basta ver que P preserva cofinalidades de ordinales límite, pues los ordinales 0 y 1 son expresables como fórmulas Δ_0[4] y la cofinalidad de todo ordinal sucesor es 1.

[2] Ver [14], definiciones 2.1 y 2.2, página 112.
[3] Ver [15], lema IV.2.15, pág 248, y teorema IV.2.27, pág 253.
[4] Se sigue de [11], lema 12.10, pág 164.

Sea $\gamma \in M$ un ordinal límite tal que $\omega < \gamma$ y suponga $\lambda = cf^M(\gamma)$, entonces existe una función cofinal y estrictamente creciente $f : \lambda \to \gamma$ tal que $f \in M$. Como $M \subseteq M[G]$, dicha función también está en $M[G]$ y además también es creciente y cofinal en $M[G]$ pues estas condiciones son expresables como fórmulas Δ_0. Así, se cumple $cf^{M[G]}(\lambda) = cf^{M[G]}(\gamma)$.[5] Además, se cumple $(\lambda \textit{ es regular})^M$ y como P preserva regularidad, entonces $\lambda = cf^{M[G]}(\lambda) = cf^{M[G]}(\gamma)$. En consecuencia $cf^M(\gamma) = cf^{M[G]}(\gamma)$. $\square$

Proposición 4.3. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado con máximo y M un modelo transitivo numerable de ZFC tal que $P \in M$. Si P preserva cofinalidades, entonces P preserva cardinales.*

Demostración. Sea $\kappa \in M$ tal que $(\kappa \text{ es un cardinal})^M$. Entonces se tienen los siguientes casos:

Si $(\kappa \text{ es } \textit{regular})^M$, entonces $\kappa = cf^M(\kappa) = cf^{M[G]}(\kappa)$. En consecuencia $(\kappa \text{ es un cardinal regular})^{M[G]}$.

Si $(\kappa \text{ es } \textit{singular})^M$, entonces existe un ordinal límite $\gamma \in M$ tal que $\kappa = \aleph_\gamma^M$. Como la *unión* es expresable como una fórmula Δ_0[6], se cumple

$$\aleph_\gamma^M = \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta^M.$$

Por hipótesis, se tiene que si $(\aleph_\alpha^M \text{ es regular})^M$, entonces $\aleph_\alpha^M = cf^M(\aleph_\alpha^M) = cf^{M[G]}(\aleph_\alpha^M)$ y en consecuencia $(\aleph_\alpha^M \text{ es regular})^{M[G]}$.

De esta manera, se cumple $(\aleph_\delta^M \text{ es regular})^{M[G]}$ para cada ordinal $\delta < \gamma$ tal que $(\aleph_\delta^M \text{ es regular})^M$. De tal modo, por el caso anterior, κ es el supremo de un conjunto de cardinales en $M[G]$ y en consecuencia ocurre $(\kappa \text{ es un cardinal})^{M[G]}$. $\square$

Definición 4.4. Sean P un conjunto parcialmente ordenado y κ un cardinal. Se dice que:

1. P satisface la *condición de la κ cadena*, lo cual se denota por $\kappa - cc$, si toda anticadena en P tiene cardinalidad menor que κ. En particular

2. P satisface la condición de la cadena *contable*, lo cual se denota por *ccc*, si P satisface la $\omega_1 - cc$.

Lema 4.5. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$ y $(P \textit{ satisface la } \kappa - cc)^M$, $G \subseteq P$ un filtro P-genérico sobre M, $A, B \in M$ y $f : A \to B$ una función en $M[G]$. Entonces existe $\{B_a \subseteq B \mid a \in A\} \in M$ tal que $f(a) \in B_a$ y $(|B_a| < \kappa)^M$ para toda $a \in A$.*

Demostración. Como $f \in M[G]$, entonces, por la observación 1.24(2) y la ecuación (1.5), existen $\dot{f} \in M^P$ y $p \in G$ tales que $\dot{f}_G = f$ y

$$p \Vdash \dot{f} \text{ es una función de } \check{A} \text{ en } \check{B}.$$

[5] Ver [14], lema I.10.32, pág, 33.

[6] Ver [11], lema 12.10, pág 164.

Para cada $a \in A$ se define

$$B_a = \{b \in B \mid \exists q \leqslant p\ (q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b})\}.$$

Se verá que $f(a) \in B_a$. Sea $b = f(a)$. Por (1.5), existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$. Como G es un filtro P-genérico sobre M se considera $q \in G$ una extensión común de p y r. Así, se cumple $q \leqslant p$ y, por (1.6), $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$. En consecuencia $f(a) \in B_a$.

Falta ver que para cada $a \in A$ ocurre $(|B_a| < \kappa)^M$. Para cada $b \in B_a$ se define

$$Q_b = \{q \leqslant p \mid q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}\}.$$

Note que si $b, b' \in B_a$ son tales que $b \neq b'$, entonces, por (1.7), $Q_b \cap Q_{b'} = \varnothing$. Más aún, si $q \in Q_b$ y $q' \in Q_{b'}$, entonces $q \perp q'$. Por el axioma de elección se considera $q_b \in Q_b$ para cada $b \in B_a$. Así $Q = \{q_b \mid b \in B_a\}$ es una anticadena en P. Por lo tanto $|B_a| = |Q|$ y como $(P$ satisface la $\kappa - cc)^M$, entonces $(|B_a| < \kappa)^M$ para cada $a \in A$. □

Corolario 4.6. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$ y $(P$ satisface la ccc$)^M$. Entonces P preserva regularidad.*

Demostración. Sean $\beta \in M$ tal que $(\beta$ es regular$)^M$ y $\lambda < \beta$. Se verá que toda función $f : \lambda \to \beta$ en $M[G]$ es acotada.

Sea una función $f : \lambda \to \beta$ en $M[G]$. Por el lema 4.5, para cada $\alpha < \lambda$ se considera $B_\alpha \subseteq \beta$ tal que $B_\alpha \in M$, $f(\alpha) \in B_\alpha$ y $(|B_\alpha| \leqslant \aleph_0)^M$. Como $(\beta$ es regular$)^M$, entonces $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$ está acotado por algún $\gamma < \beta$. De esta manera, en $M[G]$ ocurre $f(\alpha) < \gamma$ para toda $\alpha < \lambda$. Así f está acotada en $M[G]$ y en consecuencia $(\beta$ es regular$)^{M[G]}$. □

Corolario 4.7. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$ y $(P$ satisface la ccc$)^M$. Entonces P preserva cardinales.*

Demostración. Se sigue directamente del corolario 4.6 y de las proposiciones 4.2 y 4.3. □

Definición 4.8. Se dice que una familia de conjuntos A es un Δ-*sistema* si y solo si existe un conjunto r llamado la *raíz* del Δ-sistema tal que para cualesquiera $a, b \in A$, si $a \neq b$, entonces $a \cap b = r$.

Lema 4.9 (del Δ-sistema)**.** *Para toda familia no numerable de conjuntos finitos W, existe $Z \subseteq W$ no numerable tal que Z es un Δ-sistema.*

Demostración. Como W es una familia no numerable de conjuntos finitos, entonces existe $Y \subseteq W$ tal que Y no es numerable y todos sus elementos tienen la misma *cardinalidad*[7], suponga que dicha cardinalidad es n. Se verá por inducción sobre n que existe un Δ-sistema no numerable contenido en Y.

[7] $W = \bigcup_{n<\omega} W_n$ con $W_n = \{w \in W \mid |w| = n\}$. Como W no es numerable, debe existir $n \in \omega$ tal que W_n no es numerable.

Si para cada $y \in Y$ ocurre $|y| = 1$, entonces Y es un Δ-sistema con raíz $\varnothing$. Si para cada $y \in Y$ se cumple $|y| = n+1$, entonces se tienen los siguientes casos:

- Si existe $w \in \bigcup W$ tal que para algún $D \subseteq Y$ no numerable y para cada $d \in D$ se cumple $w \in d$, entonces sea $D' = \{d \backslash \{w\} \mid d \in D\}$. Por hipótesis de inducción existe $Z' \subseteq D'$ un Δ-sistema no numerable con raíz r'. Así

$$Z = \{z \cup \{w\} \mid z \in Z'\} \subseteq Y$$

  es un Δ-sistema no numerable con raíz $r = r' \cup \{w\}$.

- Si no existe tal $w \in \bigcup W$ que cumple $w \in y$ para una cantidad no numerable de elementos y de Y, entonces se define recursivamente la familia parejamente ajena

$$Z = \{z_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq Y$$

  de la siguiente manera: Si z_β está definido para cada $\beta < \alpha$, entonces se define $S_\alpha = \{y \in Y \mid \exists \beta < \alpha \ (y \cap z_\beta \neq \varnothing)\}$, por hipótesis y el hecho de que $|z_\beta| = n+1$ se cumple $|S_\alpha| \leqslant \aleph_0$, de esta manera, basta tomar $z_\alpha \in Y \backslash S_\alpha$. Por su definición ocurre que si $\alpha \neq \beta$, entonces $z_\alpha \cap z_\beta = \varnothing$. Así Z es un Δ-sistema no numerable con raíz $\varnothing$.

□

4.1.1. El forcing de Cohen

Ahora, se demostrará que la negación de la hipótesis del contínuo es relativamente consistente con ZFC empleando órdenes parciales y extensiones genéricas. Para lograr esto se debe considerar el conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ conocido como *forcing de Cohen*, se parte de M un modelo transitivo numerable de ZFC tal que $\mathbb{P} \in M$ y se toma G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Con estas condiciones se verá que $M[G] \models \neg CH$. Específicamente, se probará que en $M[G]$ hay *al menos* ω_2 reales[8] distintos.

Definición 4.10. Sean X, Y conjuntos, se define el conjunto

$$Fun_\omega(X,Y) = \{f : Z \to Y \mid f \text{ es función}, \ Z \subseteq X \text{ y } |Z| < \omega\},$$

es decir, $Fun_\omega(X,Y)$ es el conjunto de funciones finitas f tales que $dom(f) \subseteq X$ e $Im(f) \subseteq Y$.

A su vez, se define la relación de orden parcial $\leqslant$ en $Fun_\omega(X,Y)$ de la siguinte manera: $f \leqslant g$ si y solo si $g \subseteq f$.

De esta manera, dos funciones $f, g \in Fun_\omega(X,Y)$ son *compatibles* si y solo si $f \cup g$ es una función. Por otra parte, f y g son *incompatibles* si y solo si existe $x \in dom(f) \cap dom(g)$ tal que $f(x) \neq g(x)$.

[8]En realidad, hay al menos ω_2 *funciones características* de subconjuntos de ω.

Definición 4.11. Se define el conjunto conocido como *forcing de Cohen* para un conjunto infinito X como el conjunto parcialmente ordenado $\langle Fun_\omega(X,2), \supseteq\rangle$. De hecho, en este orden parcial $\varnothing$ es elemento *máximo.*

Proposición 4.12. *Para cada conjunto infinito X, $Fun_\omega(X,2)$ es separativo*[9].

Demostración. Sean $p, q \in Fun_\omega(X,2)$ tales que $q \nleqslant p$, es decir, $p \nsubseteq q$. Así, existe $x \in dom(p)$ tal que $\langle x, p(x)\rangle \in p$ y $\langle x, p(x)\rangle \notin q$.

Sea $r = q \cup \{\langle x, 1-p(x)\rangle\}$. Asi $q \subseteq r$, $x \in dom(r) \cap dom(p)$ y $r(x) \neq p(x)$, es decir, $r \leqslant q$ y $r \perp p$. En consecuencia, $Fun_\omega(X,2)$ es separativo. □

Proposición 4.13. *Para cada conjunto infinito X, $Fun_\omega(X,2)$ satisface la ccc.*

Demostración. Sean $A \subseteq Fun_\omega(X,2)$ no numerable y $W = \{dom(f) \mid f \in A\}$. Si se supone W numerable, entonces se tiene la siguiente enumeración

$$W = \{d_n \mid n < \omega \text{ y } \exists f \in A \text{ tal que } d_n = dom(f)\}.$$

Así, $|A| \leqslant \Sigma_{n<\omega}|2^{dn}| = \Sigma_{n<\omega}2^{|d_n|} \leqslant \aleph_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto W no es numerable. Por el lema 4.9, existe $Z \subseteq W$ un Δ-sistema no numerable con $r \subseteq X$ su raíz, la cual es finita. Se definen:

$$A' = \{f \in A \mid dom(f) \in Z\},$$
$$A'' = \{f \restriction_r \ \mid f \in A'\}.$$

De esta manera, $A'' \subseteq 2^r$ y en consecuencia A'' es finito. Como $Z \subseteq W$, se cumple que si $d, d' \in Z$ son tales que $d \neq d'$, entonces existen $f, f' \in A$ tales que $dom(f) = d$ y $dom(f') = d'$. De esta manera $f \neq f'$ y $f, f' \in A'$, lo cual induce un encaje $Z \hookrightarrow A'$ y en consecuencia A' no es numerable.

Para cada $g \in A''$ se define $S_g = \{f \in A' \mid f \restriction_r = g\}$. De esta manera se cumple que

$$A' = \bigcup_{g \in A''} S_g.$$

Como A'' es finito y A' no es numerable, entonces debe haber algún $g \in A''$ tal que $S_g \subseteq A'$ no es numerable. De esta manera, $S_g \subseteq A$ y si $f, h \in S_g$ son tales que $f \neq h$, entonces cumple que $r = dom(f) \cap dom(g)$ y $g = f \restriction_r = h \restriction_r$. Así $f \cup h \in Fun_\omega(X,2)$. De esta manera, A no es una anticadena. □

Proposición 4.14. *Para cada conjunto infinito X, $Fun_\omega(X,2)$ es frondoso.*

Demostración. Sea $f \in Fun_\omega(X,2)$. Como $dom(f)$ es finito y X es infinito, entonces existe $x \in X \backslash dom(f)$. Así, $f \cup \{\langle x, 0\rangle\}$ y $f \cup \{\langle x, 1\rangle\}$ son extensiones incompatibles de f. □

Observación 4.15. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y P un conjunto parcialmente ordenado con máximo tal que $P \in M$. Se cumple lo siguiente:

[9] Ver la definición 2.22.

1. Para cada ordinal $\eta \leqslant \omega$ se cumple $\eta = \eta^M$ y en consecuencia, para cada $G \subseteq P$ filtro P-genérico sobre M ocurre $\eta = \check{\eta}_G = \eta^{M[G]}$.[10]

2. Si $\mathbb{P}$ es el *forcing de Cohen* para el *ordinal* $\omega \times \omega_2^M$, es decir, $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\omega \times \omega_2^M, 2), \supseteq \rangle$, entonces $\omega \times \omega_2^M \in M$ y $\mathbb{P} \in M$.[11]

3. Si $\mathbb{P}$ es el *forcing de Cohen* para el *ordinal* $\omega \times \omega_2^M$, entonces, por la proposición 4.13, se cumple ($\mathbb{P}$ satisface la *ccc*)^M.

Proposición 4.16. *Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$ es el forcing de Cohen para el ordinal $\omega \times \omega_2^M$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

$$M[G] \models \text{“}\bigcup G : \omega \times \omega_2^M \longrightarrow 2 \textit{ es una función suprayectiva”}.$$

Demostración. Por la observación 1.24(1), se cumple $G \in M[G]$. Como G es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces G es una familia de funciones compatibles. Además, como $M[G]$ es un modelo transitivo de ZFC, se tiene que $\bigcup G \in M[G]$ y además $\bigcup G$ es una función en $M[G]$.

Para cada $\alpha \in \omega \times \omega_2^M$ se define

$$D_\alpha = \{f \in \mathbb{P} \mid \alpha \in dom(f)\}.$$

Sea $f \in \mathbb{P}$ y sin pérdida de generalidad suponga que $\alpha \notin dom(f)$. Sea $i \in 2$, se define $g = f \cup \langle \alpha, i \rangle$. De esta manera, $g \in D_\alpha$ y $g \leqslant f$. Así, D_α es denso en $\mathbb{P}$. Más aún, como $\mathbb{P} \in M$, D_α se define mediante una *fórmula absoluta* (ver [11], lema 12.10, pág 164) y M es un modelo transitivo numerable de ZFC, se cumple que $D_\alpha \in M$. Como G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, ocurre $D_\alpha \cap G \neq \varnothing$ para cada $\alpha \in \omega \times \omega_2^M$ y en consecuencia $dom(\bigcup G) = \omega \times \omega_2^M$.

Para cada $j \in 2$ se define

$$E_j = \{f \in \mathbb{P} \mid j \in Im(f)\}.$$

Sea $f \in \mathbb{P}$ y sin pérdida de generalidad suponga que $j \notin Im(f)$. Como $\omega \times \omega_2^M$ es infinito y $dom(f)$ es finito, se considera $\beta \in (\omega \times \omega_2^M) \backslash dom(f)$. De esta manera, $g = f \cup \{\langle \beta, j \rangle\}$ es tal que $g \in E_j$ y $g \leqslant f$. Así, E_j es denso en $\mathbb{P}$. Más aún, como $\mathbb{P} \in M$, E_j se define mediante una fórmula absoluta (ver [11], lema 12.10, pág 164) y M es un modelo transitivo numerable de ZFC, se cumple que $E_j \in M$. Como G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se tiene que $E_j \cap G \neq \varnothing$ para cada $j \in 2$ y en consecuencia $Im(\bigcup G) = 2$. □

Proposición 4.17. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$ el forcing de Cohen para el ordinal $\omega \times \omega_2^M$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si $f : \omega \times \omega_2^M \to 2$ es una función tal que $f \in M$, entonces $f \neq \bigcup G$.*

[10] Es consecuencia de [11], lema 12.10, pág 164.

[11] Es consecuencia de [11], lema 12.10, pág 164 y del hecho que M es un modelo transitivo numerable de ZFC.

Demostración. Se define $D_f = \{g \in \mathbb{P} \mid g \nsubseteq f\}$. Es fácil ver que D_f es denso en $\mathbb{P}$. Como D_f se define mediante una fórmula absoluta (ver [11], lema 12.10, pág 164) y M es un modelo transitivo numerable de ZFC, entonces $D_f \in M$. Sea $p \in G \cap D_f$. Así, existen $n \in \omega$ y $\alpha \in \omega_2^M$ tales que $p(n,\alpha) \neq f(n,\alpha)$. Como $p \subseteq \bigcup G$, entonces $f(n,\alpha) \neq \bigcup G(n,\alpha)$. En consecuencia $f \neq \bigcup G$. □

Definición 4.18. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M donde $\mathbb{P}$ es el forcing de Cohen para el ordinal $\omega \times \omega_2^M$, $\alpha \in \omega_2^M$ y $n \in \omega$. Se define en $M[G]$ la regla de correspondencia

$$g_\alpha(n) = \bigcup G(n,\alpha). \tag{4.1}$$

De esta manera, para cada $\alpha < \omega_2^M$ se cumple que $g_\alpha : \omega \to 2$ es un función en $M[G]$. En consecuencia, $g\_ : \omega_2^M \to (2^\omega)^{M[G]}$ es una función en $M[G]$, es decir,

$$M[G] \models \text{“}g\_ : \omega_2^M \to (2^\omega)^{M[G]} \text{ es una función.”}$$

Proposición 4.19. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$ es el forcing de Cohen para el ordinal $\omega \times \omega_2^M$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Para cualesquiera $\alpha, \beta < \omega_2^M$ tales que $\alpha \neq \beta$, se cumple $M[G] \models$ “$g_\alpha \neq g_\beta$”.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta < \omega_2^M$ tales que $\alpha \neq \beta$. Por la propiedad (2) de la observación 1.24, para cada $n \in \omega$ existen $\dot{h}_\alpha(n), \dot{h}_\beta(n), \dot{\Theta}(n,\alpha), \dot{\Theta}(n,\beta) \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $\dot{h}_\alpha(n)_G = g_\alpha(n)$, $\dot{h}_\beta(n)_G = g_\beta(n)$, $\dot{\Theta}(n,\alpha)_G = \bigcup G(n,\alpha)$ y $\dot{\Theta}(n,\beta)_G = \bigcup G(n,\beta)$. Por definición 4.18 y el hecho de que *toda verdad está forzada*, es decir, por (1.5), existe $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\forall n < \omega \ (\dot{h}_\alpha(n) = \dot{\Theta}(n,\alpha) \text{ y } \dot{h}_\beta(n) = \dot{\Theta}(n,\beta)\ )\text{”}.$$

Se define:

$$E_{\alpha,\beta} = \{q \leqslant p \mid \exists n < \omega \text{ tal que } \langle n,\alpha\rangle, \langle n,\beta\rangle \in dom(q) \text{ y } q(n,\alpha) \neq q(n,\beta)\}.$$

Sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leqslant p$, en particular $dom(q)$ es finito. Se define

$$A = \{n < \omega \mid \langle n,\alpha\rangle \in dom(q)\} \cup \{n < \omega \mid \langle n,\beta\rangle \in dom(q)\}.$$

Así, A es finito. Se define $m = min(\omega \backslash A)$ y se considera

$$r = q \cup \{\langle\langle m,\alpha\rangle, 0\rangle, \langle\langle m,\beta\rangle, 1\rangle\}.$$

De esta manera $r \leqslant q$ y $r \in E_{\alpha,\beta}$. Así, $E_{\alpha,\beta}$ es denso bajo p en $\mathbb{P}$. Más aún, como $E_{\alpha,\beta}$ se define mediante fórmulas absolutas (ver [11], lema 12.10, pág 164) y M es un modelo transitivo numerable de ZFC, se cumple que $E_{\alpha,\beta} \in M$.

Sea $q \in G \cap E_{\alpha,\beta}$.[12] Por (1.6) se cumple

$$q \Vdash \text{“}\forall n < \omega \ (\dot{h}_\alpha(n) = \dot{\Theta}(n,\alpha) \text{ y } \dot{h}_\beta(n) = \dot{\Theta}(n,\beta)\ )\text{”}$$

[12]Si p es *máximo* en $\mathbb{P}$, entonces $E_{\alpha,\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$. Si p no es máximo, entonces $D = E_{\alpha,\beta} \cup \{r \in \mathbb{P} \mid r \perp p\}$ es denso en $\mathbb{P}$ y $D \in M$. Como $p \in G$, se cumple $G \cap E_{\alpha,\beta} \neq \varnothing$.

y además $q \subseteq \bigcup G$. En consecuencia, si $\dot{h}_\alpha, \dot{h}_\beta \in M^{\mathbb{P}}$ son tales que $\dot{h}_{\alpha G} = g_\alpha$ y $\dot{h}_{\beta G} = g_\beta$, entonces $q \Vdash$ "$\dot{h}_\alpha \neq \dot{h}_\beta$". Por la definición de la relación de forzar (1.4), se concluye que $M[G] \models$ "$g_\alpha \neq g_\beta$". □

Teorema 4.20. *Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$ es el forcing de Cohen para el ordinal $\omega \times \omega_2^M$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

$$M[G] \models \neg CH.$$

Demostración. Por la observación 4.15(3), se cumple que ($\mathbb{P}$ satisface la *ccc*)^M y, por la proposición 4.7, $\mathbb{P}$ preserva cardinales. Como M es un modelo transitivo numerable de ZFC y en ZFC se demuestra que "ω_2 *es el primer ordinal que no es numerable ni es biyectable con* ω_1", entonces se cumple $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$.

Por la proposición 4.16, la definición 4.18 y la proposición 4.19, se cumple que $g_{\_} : \omega_2^{M[G]} \to (2^\omega)^{M[G]}$ es una función inyectiva en $M[G]$. En consecuencia

$$M[G] \models \aleph_2 \leqslant 2^{\aleph_0}.$$ □

Lo que se realizó con el *forcing de Cohen* $\mathbb{P} = Fun_\omega(\omega \times \omega_2^M, 2)$ en $M[G]$ fue considerar a $\mathbb{P}$ como un conjunto de condiciones para "adjuntar ω_2 nuevos subconjuntos de ω en $M[G]$" empleando pedazos finitos de información que son capturadas por el filtro genérico $\mathbb{P}$-genérico G, el cual, no es definible desde M. Cabe mencionar que este caso fue explícitamente necesario emplear dicho filtro genérico, por lo cual, fue necesario partir de M un modelo base numerable ya que solo así se garantiza la existencia del filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. No obstante, empleando las construcciones y argumentos adecuados, es posible obtener el mismo resultado y prescindir del filtro genérico.

4.1.2. El caso booleano-valuado

Si bien el método forcing fue inventado en 1963 por Cohen, fue en 1967 que Scott y Vopěnka dieron las versiones de los resultados que Cohen presentó para modelos booleano-valuados.

Para este caso, de manera similar al caso con extensiones genéricas, se empleará un forcing de Cohen pero se trabajará con su completación booleana y, con base en dicha álgebra de Boole, se construirán nuevos subconjuntos de ω en el respectivo modelo booleano-valuado. No obstante, no se apelará a un filtro genérico, en su lugar, se aprovecharán las propiedades que posee el *valor booleano* y las propiedades topológicas de la completación booleana.

Definición 4.21. Sea B un álgebra de Boole, se dice que B satisface la *ccc* (condición de la cadena contable) si B^+ posee la *ccc* según la condición (2) de la definición 4.4.

Proposición 4.22. *Sean P un conjunto parcialmente ordenado y $e : P \to B$ su completación booleana. Para cada anticadena A en B^+ existe A^* anticadena en P tal que $|A| = |A^*|$.*

Demostración. Por el teorema de la completación booleana 2.20 se cumple $B = RO(P)$ y así, toda anticadena $A \subseteq RO(P)^+$ es una familia de abiertos regulares distintos del vacío tales que para cualesquiera $U, V \in A$ distintos ocurre $U \cap V = \varnothing$. Como P posee la topología del orden, para cada $U \in A$ existe $p_U \in P$ tal que $\downarrow(p_U) \subseteq U$. Más aún, si $p_U, p_V \in P$ son tales que $\downarrow(p_U) \subseteq U$ y $\downarrow(p_V) \subseteq V$ con $U, V \in A$ distintos, entonces $p_U \perp p_V$. Pues de lo contrario existiría $r \in P$ tal que $r \leqslant p_U$ y $r \leqslant p_V$, y así $\downarrow(r) \subseteq U \cap V = \varnothing$ lo cual es una contradicción.

Así $A^* = \{p_U\}_{U \in A}$ es una anticadena en P y la función $p_{\_} : A \to A^*$ dada por una *elección* de la forma $U \mapsto p_U$ con $\downarrow(p_U) \subseteq U$ es una biyección. □

Corolario 4.23. *Si P es un conjunto parcialmente ordenado que satisface la ccc y $e : P \to B$ es su completación booleana, entonces B satisface la ccc.*

Demostración. Por la proposición 4.22, si B^+ tiene una anticadena no numerable A, entonces A^* es una anticadena no numerable en P lo cual es una contradicción. □

Definición 4.24. Sea X un conjunto infinito. Se define el espacio topológico 2^X equipado con la *topología producto* inducida por la biyección $2^X \cong \prod_{x \in X} 2$ donde 2 tiene la topología discreta.

De esta manera, $U \subseteq 2^X$ es abierto *básico* en este espacio si y solo si existe un subconjunto finito $sop(U) \subseteq X$ tal que

$$U = \left(\prod_{y \in X \setminus sop(U)} 2 \right) \times V_{x_1} \times \cdots \times V_{x_n} \text{ con } sop(U) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ y } V_{x_i} \subseteq 2. \tag{4.2}$$

Observación 4.25. Para cada conjunto infinito X, si $\langle P, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(X, 2), \supseteq \rangle$ y $e : P \to B$ es su completación booleana, entonces se cumple que $B \cong RO(2^X)$ donde 2^X tiene la topología definida en 4.24.

Demostración. Por el teorema 2.20, se cumple $B = RO(Fun_\omega(X, 2))$. Por la proposición 4.12, P es un conjunto parcialmente ordenado separativo. Asi, por el corolario 2.23, e es un isomorfismo de orden entre P y $e[P]$, y además $e(p) = \downarrow(p)$ para cada $p \in P$.

Para cada $p \in P$ se define $N(p) = \{f \in 2^X \mid p \subseteq f\}$. Así, para cada $p \in P$ se cumple que $dom(p) = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq X$, por (4.2) se cumple

$$N(p) = \left(\prod_{b \in X \setminus dom(p)} 2 \right) \times \{p(a_1)\} \times \cdots \times \{p(a_n)\}.$$

De esta manera, $N(p)$ es un abierto básico en 2^X para cada $p \in P$. Se considera la asingnación $p \mapsto N(p)$, así $N(p) \neq \varnothing$ para cada $p \in P$.

Si $A \subseteq 2^X$ es un abierto regular tal que $A \neq \varnothing$, entonces existe un *abierto básico* de la forma $N(p)$ tal que $N(p) \subseteq A$ para algún $p \in P$.

Si $p, q \in P$ son tales que $q \leqslant p$, es decir, $p \subseteq q$, entonces $N(q) \subseteq N(p)$.

Sean $p, q \in P$ tales que $p \perp q$, si y solo si existe $x \in dom(p) \cap dom(q)$ tal que $p(x) \neq q(x)$, equivalentemente, $N(p) \cap N(q) = \varnothing$.

Por la propiedad 5 del teorema 2.20 y el corolario 2.23 se cumple que $B = RO(Fun_\omega(X, 2)) \cong RO(2^X)$. $\square$

Teorema 4.26. *Si* $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\omega \times \omega_2, 2), \supseteq \rangle$ *y* $e : \mathbb{P} \to B$ *es su completación booleana, entonces se cumple*

$$V^{(B)} \models \aleph_{\check{2}} \leqslant 2^{\aleph_0}.$$

Demostración. Por el teorema 2.20, $B = RO(Fun_\omega(\omega \times \omega_2, 2))$. Por la observación 4.25 se cumple que $RO(2^{\omega \times \omega_2}) \cong B$.

Para cada $\nu \in \omega_2$ se define $u_\nu \in V^{(B)}$ como $dom(u_\nu) = dom(\check{\omega}) = \{\check{n} \mid n \in \omega\}$ y tal que $u_\nu(\check{n}) = \{p \in \mathbb{P} \mid p(n, \nu) = 1\}$ para cada $n \in \omega$. Por la prueba de la observación 4.25 se cumple la siguiente correspondencia biunívoca.

$$\begin{array}{rcl} RO(2^{\omega \times \omega_2}) & \xrightarrow{\qquad\quad \cong \qquad\quad} & B \\ \{f \in 2^{\omega_2 \times \omega} \mid f(n, \nu) = 1\} & \longmapsto & u_\nu(\check{n}). \end{array}$$

Así, $u_\nu \in V^{(B)}$ y de esta manera, por (A.2), se cumple

$$[\![u_\nu \subseteq \check{\omega}]\!] = \bigwedge_{n \in \omega} (u_\nu(\check{n}) \Rightarrow [\![\check{n} \in \check{\omega}]\!]) = 1.$$

Es fácil verificar que para cada $p \in Fun_\omega(\omega \times \omega_2, 2)$

$$\begin{aligned} p \Vdash \check{n} \in u_\nu \quad &\text{si y solo si} \quad p(n, \nu) = 1, \\ p \Vdash \check{n} \notin u_\nu \quad &\text{si y solo si} \quad p(n, \nu) = 0. \end{aligned}$$

De esta manera, $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = 0$ para cualesquiera $\mu, \nu < \omega_2$ tales que $\mu \neq \nu$. Pues de lo contrario existen $\zeta, \xi < \omega_2$ y $p \in Fun_\omega(\omega \times \omega_2, 2)$ tales que $\zeta \neq \xi$ y $p \Vdash u_\zeta = u_\xi$. Sean $\beta < \omega_2$ y $n_\beta = min\{n \in \omega \mid \langle n, \beta \rangle \notin dom(p)\}$, se define

$$p' = p \cup \{\langle \langle n_\beta, \zeta \rangle, 1 \rangle, \langle \langle n_\beta, \xi \rangle, 0 \rangle\},$$

de esta manera $p' \Vdash \check{n_\beta} \in u_\zeta \wedge \check{n_\beta} \notin u_\xi$ y en consecuencia $p' \Vdash u_\zeta \neq u_\xi$. No obstante, $p' \leqslant p$ y $p \Vdash u_\zeta = u_\xi$, de esta manera, por la propiedad 2.61($1a$), ocurre $p' \Vdash u_\zeta = u_\xi$ lo cual, por la propiedad 2.61($1b$), es una contradicción.

Se define $f \in V^{(B)}$ como

$$f = \{\langle \check{\nu}, u_\nu \rangle^{(B)} \mid \nu < \omega_2\} \times \{1\},$$

donde $\langle \check{\nu}, u_\nu \rangle^{(B)} = \{\{\check{\nu}\}^{(B)}, \{\check{\nu}, u_\nu\}^{(B)}\}^{(B)}$.[13] De esta manera es fácil verificar[14] que

$$V^{(B)} \models f \textit{ es una función de } \check{\omega_2} \textit{ a } \mathcal{P}(\check{\omega}).$$

[13]Ver (A.9) en la prueba del teorema A.27.

[14]La prueba es muy similar a la presentada en la prueba del argumento (A.8) en el teorema A.27.

Más aún, como $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = 0$ para $\mu \neq \nu$, se cumple que $V^{(B)} \models f$ *es inyectiva*. Por la proposición 4.13, $Fun_\omega(\omega \times \omega_2, 2)$ satisface la *ccc* y por el corolario 4.23, B satisface la *ccc*.

Así, por la propiedad (2) del teorema A.29, se cumple $V^{(B)} \models \check{\omega_2} = \omega_{\check{2}}$ y por lo recién demostrado se tiene que

$$V^{(B)} \models f \textit{ es una función inyectiva de } \omega_{\check{2}} \textit{ a } \mathcal{P}(\check{\omega}).$$

En consecuencia $V^{(B)} \models \aleph_{\check{2}} \leqslant 2^{\aleph_0}$. □

De manera similar a la prueba del teorema 4.20, lo que se realizó en el teorema 4.26 fue obtener las situaciones $p \Vdash \check{n} \in u_\nu$ si y solo si $p(n, \nu) = 1$, y $p \Vdash \check{n} \notin u_\nu$ si y solo si $p(n, \nu) = 0$. De esta manera, se está considerando a p como una codificación de un pedazo de información finita de los elementos de $\aleph_2$ como "nuevos subconjuntos u_ν de ω" en el modelo $V^{(B)}$, dichos pedazos son completados en B aprovechando que $RO(Fun_\omega(\omega \times \omega_2, 2)) \cong RO(2^{\omega \times \omega_2})$ y las desigualdades de cardinales se verifican en el modelo $V^{(B)}$ mediante su valor booleano.

4.1.3. El topos de Cohen

En el capítulo 3 se dan esbozos de que la teoría de topos por una parte tiene un desarrollo geométrico, desde la teoría de gavillas, y por otra parte tiene un desarrollo lógico, el cual resulta muy similar al que se da en la teoría de conjuntos. Aprovechando estas similitudes, se dará la construcción de Cohen adaptada a un *topos de Grothendieck*. En los casos anteriores lo que se realizó fue emplear, ya sea un conjunto parcialmente ordenado P, o bien, su completación booleana, para obtener condiciones adecuadas de *estados de conocimiento finito* de una función que no estaba originalmente en el modelo base.

El argumento que se emplea en el topos de Grothendieck es semejante. Partiendo directamente desde la categoría de conjuntos, ***Con***, se consideran los conjuntos $\mathbb{N}$, su conjunto potencia (salvo biyección) $2^{\mathbb{N}}$ y un conjunto B aún mas *grande* que $2^{\mathbb{N}}$. De esta manera, no existen monomorfismos (en este caso funciones inyectivas) de la forma $g : B \to 2^{\mathbb{N}}$. Posteriormente, se construye un topos de Grothendieck de un conjunto parcialmente ordenado P con una topología de Grothendieck de tal modo se pueda construir un monomorfismo $g : a\Delta(B) \to \Omega^{a\Delta(\mathbb{N})}$ y donde se preserven las desigualdades de cardinales, es decir, se preserva la existencia de monomorfismos y la inexistencia de epimorfismos.

Definición 4.27. Sea $\mathcal{E}$ un topos elemental. Un objeto *números naturales* es un objeto $N \in \mathcal{E}$ con flechas $0 : 1 \longrightarrow N$ y $s : N \longrightarrow N$ tales que para cualquier diagrama en $\mathcal{E}$ de la forma

$$1 \xrightarrow{\ x\ } X \xrightarrow{\ u\ } X \tag{4.3}$$

existe una única flecha $f : N \longrightarrow X$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "f"] & N \arrow[d, dashed, "f"] \\ & X \arrow[r, "u"] & X. \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

En $\boldsymbol{Con}$, el objeto números naturales es (salvo isomorfismo) el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ con 0 la función unitaria al cero $0 \in \mathbb{N}$ y $s = \_ + 1$. Así, el diagrama (4.4) representa el *principio de recursión* en $\mathbb{N}$.

Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría pequeña y $\langle \boldsymbol{C}, J\rangle$ es un sitio, entonces en la categoría $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ existe un objeto números naturales[15] $a\Delta(\mathbb{N})$ inducido por el funtor *gavillanización* $a\Delta$ donde los funtores $\Delta : \boldsymbol{Con} \to \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ y $a : \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}} \to \mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ preservan coproductos. De esta manera, se tiene el isomorfismo

$$a\Delta(\mathbb{N}) \cong \coprod_{n\in\mathbb{N}} 1,$$

es decir, el objeto números naturales en $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{C}, J)$ resulta ser el coproducto de una cantidad numerable de copias del objeto terminal.

Proposición 4.28. *Para toda categoría pequeña $\boldsymbol{C}$, en la categoría de pregavillas $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ la topología doble negación definida en el ejemplo 3.29 coincide con la topología densa en $\boldsymbol{C}$ descrita en el ejemplo 3.21.*

Demostración. Sean $A \rightarrowtail E$ un subobjeto en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ y $C \in \boldsymbol{C}$. De esta manera, se tiene la descripción de $\neg A$ como

$$\neg A(C) = \{x \in E(C) \mid \text{para cada } f : B \to C \text{ se cumple } x \cdot f \notin A(B)\},$$

de manera que $\neg\neg A$ es de la forma

$$\begin{aligned} \neg\neg A(C) = \{x \in E(C) \mid {} & \text{para toda } f : B \to C \text{ existe} \\ & g : D \to B \text{ en } \boldsymbol{C} \text{ tal que } x \cdot f \cdot g \in A(D)\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por la proposición 3.35, toda topología de Grothendieck J en $\boldsymbol{C}$ induce una topología de Lawvere-Tierney j en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$. Además, por la descripción del operador cerradura en subobjetos dada en (3.17) y en (3.18), se cumple que si $E \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ y $A \hookrightarrow E$, entonces para todo $C \in \boldsymbol{C}$

$$x \in \overline{A}(C) \ \text{ si y solo si la criba } \{f : B \to C \mid x \cdot f \in A(B)\} \text{ cubre a } C.$$

Por (3.11) en el ejemplo 3.21 se cumple que para la topología densa en $\boldsymbol{C}$, S es una criba cubriente de C si y solo si para toda flecha $D \to C$ en $\boldsymbol{C}$ existe una flecha $B \to D$ tal que la composición $B \to C$ está en S. En consecuencia, para la topología densa, $x \in \overline{A}(C)$ es equivalente a que para cada $f : B \to C$

[15] Ver [19] capítulo VI, sección 1, páginas 268-270.

en $\boldsymbol{C}$ existe $g : D \to B$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $x \cdot f \cdot g \in A(D)$. Lo cual coincide con la descripción de $\neg\neg A$. Por la proposición 3.35, se concluye que la topología de Lawvere-Tierney inducida por la topología densa coincide con la topología doble negación. $\square$

Por la proposición 4.28, a la topología *doble negación* también se le llama *topología densa*. De tal modo, si P es un conjunto parcialmente ordenado visto como categoría $\boldsymbol{P}$, entonces la categoría de gavillas para la topología densa $\mathrm{Gav}(\boldsymbol{P}, \neg\neg)$ es un topos booleano[16] *bien punteado*[17] y en consecuencia satisface el axioma de elección[18].

Definición 4.29. Sean B un conjunto tal que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |B|$ y

$$\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\mathbb{N} \times B, 2), \supseteq \rangle$$

el respectivo conjunto parcialmente ordenado de *Cohen*. Se define el *topos de Cohen* como el topos de Grothendieck sobre $\mathbb{P}$ con la topología densa

$$\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg).$$

De esta manera, lo que se busca probar es que si $a\Delta(\mathbb{N})$ es el objeto números naturales en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ y $\Omega_{\neg\neg}$ es el clasificador de subobjetos en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$, entonces existe un objeto K en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ tal que existen monomorfismos $a\Delta(\mathbb{N}) \rightarrowtail K \rightarrowtail \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})}$ y no existen epimorfismos $a\Delta(\mathbb{N}) \twoheadrightarrow K$, ni $K \twoheadrightarrow \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})}$.

Proposición 4.30. *Para cada $p \in \mathbb{P}$ la pregavilla representable $y(p) \in \boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$, donde y es el funtor de Yoneda, es una gavilla para la topología densa.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$. Así, se cumple $y(p) = hom_{\mathbb{P}}(\_, p) = \downarrow(p)$.

Sean $q \in \mathbb{P}$ y D una criba cubriente sobre q. Por la definición (5) en 1.2, D es denso bajo q. Sea $\{x_d\}_{d \in D}$ una familia compatible de elementos de $y(p)$. Como $\mathbb{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado, para cada $d \in D$ se cumple $x_d \in y(p)(d) = hom_{\mathbb{P}}(d, p)$. En consecuencia, para cada $d \in D$ se cumple $d \leqslant p$.

Como $\mathbb{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado, solo falta ver que existe una amalgama en $y(p)(q)$, es decir, falta ver que $q \leqslant p$.

Suponga que $q \nleqslant p$. Así, existe $\langle n, b \rangle \in dom\ p$ tal que, $q(n, b) \neq p(n, b)$, o bien, $q(n, b)$ no está definido. Sea $q' : dom\ q \cup \{\langle n, b \rangle\} \to 2$ tal que si $q(n, b)$ no está definido, entonces $q'(n, b) \neq p(n, b)$. Así, $q' \leqslant q$ y como D es denso bajo q, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant q'$. De esta manera, $d(n, b) \neq p(n, b)$, es decir, $d \nleqslant p$ lo cual es una contradicción. Así, $\{x_d\}_{d \in D}$ tiene una única amalgama y en consecuencia $y(p)$ es una gavilla para la topología densa. $\square$

Se busca construir en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ un mono de la forma $a\Delta(B) \rightarrowtail \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})}$, el cual, está en biyección natural con su *transpuesta* $a\Delta(\mathbb{N}) \times a\Delta(B) \to \Omega_{\neg\neg}$.

[16] Ver [19], teorema VI.1.3, pág 272.

[17] $\mathcal{E}$ es bien punteado si 1 *genera* a $\mathcal{E}$, es decir, si en $\mathcal{E}$ ocurre $f \neq g : X \to Y$, entonces para algún $x : 1 \to X$ se cumple $fx \neq gx$.

[18] Ver [19], corolario VI.2.9, pág 277.

Por lo cual, primero se construirá un subobjeto A de $\Delta\mathbb{N} \times \Delta B \cong \Delta(\mathbb{N} \times B)$ de la siguiente manera. Para cada $p \in \mathbb{P}$ se considera

$$A(p) = \{\langle n, b\rangle \in \mathbb{N} \times B \mid p(n,b) = 1\}. \tag{4.6}$$

Así, $A(p) \subseteq \mathbb{N} \times B$ y además, si $q \leqslant p$, entonces $A(q) \supseteq A(p)$. Por lo que $A : \mathbb{P}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ es un funtor y en consecuencia $A \hookrightarrow \Delta(\mathbb{N} \times B)$.

Proposición 4.31. *En el álgebra de Heyting* $Sub(\Delta(\mathbb{N}\times B))$ *se cumple* $\neg\neg A = A$ *para cada* $A \hookrightarrow \Delta(\mathbb{N} \times B)$.

Demostración. Sean $p \in \mathbb{P}$, $b \in B$ y $n \in \mathbb{N}$. Por (4.5) en la proposición 4.28, se cumple que $\langle n, b\rangle \in \neg\neg A(p)$ si y solo si para todo $q \leqslant p$ existe $r \leqslant q$ tal que $\langle n, b\rangle \in A(r)$, es decir, para todo $q \leqslant p$ existe $r \leqslant q$ tal que $r(n, b) = 1$.

Ahora, si $\langle n, b\rangle \notin A(p)$, entonces se cumple una de dos posibilidades: o bien $p(n, b) = 0$, en cuyo caso para todo $r \leqslant p$ se cumple $r(n, b) = 0$; o bien $p(n, b)$ no está definido, en este caso se define $q \leqslant p$ tal que $q(n, b) = 0$ y así todo $r \leqslant q$ cumple $r(n, b) = 0$, por lo que $\langle n, b\rangle \notin \neg\neg A(p)$. En consecuencia $\neg\neg A \leqslant A$. Por el diagrama (3.18) y la propiedad (1) en la definición 3.28, se obtiene $A \leqslant \neg\neg A$. □

Sea Ω el clasificador de subobjetos en $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$ y $\Omega_{\neg\neg}$ el clasificador en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$. De esta manera, por le diagrama (3.19) en el teorema 3.34, $\Omega_{\neg\neg}$ es el siguiente igualador

$$\Omega_{\neg\neg} \longrightarrow \Omega \underset{\neg\neg}{\overset{id_\Omega}{\rightrightarrows}} \Omega.$$

Por la proposición 4.31, por el diagrama (3.18) y por la propiedad universal del igualador, se cumple que la flecha característica del subobjeto A, que es de la forma $\Delta\mathbb{N} \times \Delta B \to \Omega$, se factoriza a través de $\Omega_{\neg\neg}$ mediante la flecha

$$f : \Delta\mathbb{N} \times \Delta B \longrightarrow \Omega_{\neg\neg}. \tag{4.7}$$

Dicha flecha tiene como traspuesta, en pregavillas, a la flecha

$$g : \Delta B \longrightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}. \tag{4.8}$$

Proposición 4.32. *La flecha* g *en* (4.8) *es un mono en* $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$.

Demostración. Como g una transformación natural entre pregavillas, donde las componentes se evaluan de forma puntual, basta probar que para cada $p \in \mathbb{P}$ la componente $g_p : \Delta(B)(p) \longrightarrow (\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})})(p)$ es inyectiva.

Para cada $p \in \mathbb{P}$ se cumple $\Delta(B)(p) = B$. Por otra parte, por (3.3) se tiene

$$(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})})(p) = hom(\Delta(\mathbb{N}) \times y(p), \Omega_{\neg\neg}), \text{ con } \Omega_{\neg\neg} \hookrightarrow \Omega.$$

Así, para cada $b \in B$ se obtiene una transformación natural

$$g_p(b) : \Delta(\mathbb{N}) \times y(p) \to \Omega_{\neg\neg},$$

que de acuerdo con la descripción dada en (4.6), si $q \leqslant p$ y $n \in \Delta(\mathbb{N})(q) = \mathbb{N}$, entonces se cumple

$$g_p(b)(n,q) = \{r \in \mathbb{P} \mid r \leqslant q,\ r(n,b) = 1\}.$$

Sean $b, c \in B$ tales que $b \neq c$. Como p es una función finita, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que ni $p(n_0, b)$ ni $p(n_0, c)$ están definidas. Sea $r = p \cup \{\langle\langle n_0, b\rangle, 1\rangle, \langle\langle n_0, c\rangle, 0\rangle\}$. Así, $r \leqslant p$ y se cumple $r \in g_p(b)(n_0, p)$ pero $r \notin g_p(c)(n_0, p)$. Así, $g_p(b) \neq g_p(c)$ y en consecuencia g es mono. □

Por la proposición 3.27 se sabe que la inclusión $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg) \hookrightarrow \boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$ tiene como adjunto derecho al funtor gavilla asociada que es de la forma

$$\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}} \xrightarrow{\ a\ } \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg).$$

Por lo tanto, para cada conjunto S se denotará a su *gavillanización* como $\check{S} = a\Delta(S)$.

Corolario 4.33. *El funtor gavilla asociada envía a la flecha g de* (4.8) *en un mono*

$$m : \check{B} \longrightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}.$$

Demostración. El funtor gavilla asociada preserva monos pues es *exacto izquierdo*[19]. De esta manera, a envía el mono g a un mono entre gavillas

$$m = a(g) : a\Delta(B) \longrightarrow a(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}).$$

Como $a\Delta(B) = \check{B}$ y $a\Delta(\mathbb{N}) = \check{\mathbb{N}}$, solo basta probar que $a(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}) \cong \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})}$.

Como $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ es una subcategoría plena de $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$, si *hom* denota las transformaciones naturales entre pregavillas y hom_{Gav} denota a las transformaciones naturales entre gavillas, entonces para cada pregavilla X se tienen los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}
hom(X, \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}) &\cong hom(\Delta(\mathbb{N}) \times X, \Omega_{\neg\neg}) & \\
&\cong hom_{\mathrm{Gav}}(a(\Delta(\mathbb{N}) \times X), \Omega_{\neg\neg}) & \Omega_{\neg\neg} \text{ es gavilla} \\
&\cong hom_{\mathrm{Gav}}(a\Delta(\mathbb{N}) \times aX, \Omega_{\neg\neg}) & a \text{ es exacto izquierdo} \\
&\cong hom_{\mathrm{Gav}}(aX, \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})}) & \\
&\cong hom(X, \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})}) & \Omega_{\neg\neg}^{a\Delta(\mathbb{N})} \text{ es gavilla.}
\end{aligned}$$

Al evaluar las *identidades* en ambos lados se obtiene $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})} \cong \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}$ y por lo tanto $a(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}) \cong \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}$. □

Recapitulando, lo que se realizó fue *forzar* al objeto $\check{B}$ a ser *subobjeto* del nuevo objeto potencia $\Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}$ por medio del mono m empleando la pregavilla A. Como en $\boldsymbol{Con}$ existe un mono $\mathbb{N} \rightarrowtail B$, a es exacto izquierdo y $P\check{\mathbb{N}} \cong \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}$, entonces en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ se tienen los monos

$$\check{\mathbb{N}} \rightarrowtail \check{B} \rightarrowtail P\check{\mathbb{N}}.$$

[19]Ver [19], teorema V.3.1, pág 227.

Definición 4.34. Sean $\mathcal{E}$ un topos y $X, Y \in \mathcal{E}$. Se denota por $X < Y$ cuando existe un monomorfismo $X \rightarrowtail Y$ en $\mathcal{E}$ y no existen epimorfismos $X \twoheadrightarrow Y$ en $\mathcal{E}$.

De esta manera, falta probar que $\check{\mathbb{N}} < 2^{\check{\mathbb{N}}} < \check{B}$ en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$.

Definición 4.35. Sea $\mathcal{E}$ topos de Grothendieck. Se dice que:

1. $X \in \mathcal{E}$ satisface la *ccc* (*condición de la cadena contable*) si el álgebra de Heyting $Sub(X)$ satisface la *ccc* descrita en el inciso (2) de la definición 4.4.

2. $\mathcal{E}$ tiene la *propiedad de Souslin* si es *generado*[20] por objetos que satisfacen la *ccc*.

Lema 4.36. *El topos de Cohen tiene la propiedad de Souslin.*

Demostración. Por la proposición 4.30, las gavillas representables $y(p)$ con $p \in \mathbb{P}$ generan al topos de Cohen $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ y son subobjetos de 1. Como la *ccc* en objetos se *hereda* a los subobjetos, solo falta probar que $1 \in \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ satisface la *ccc*.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de 1 distintos de 0 tales que para $i \neq j$ se cumple $U_i \wedge U_j = 0$. Como $\{y(p)\}_{p\in\mathbb{P}}$ genera a $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$, para cada $i \in I$ sea $p_i \in \mathbb{P}$ tal que $y(p_i) \leqslant U_i$. De esta manera, si $i \neq j$, entonces $y(p_i) \wedge y(p_j) \leqslant U_i \wedge U_j = 0$, es decir, no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p_i$ y $r \leqslant p_j$. De esta manera, $\{p_i\}_{i\in I}$ es una anticadena. Como $\mathbb{P} = Fun_\omega(\mathbb{N} \times B, 2)$, por la proposición 4.13, $\mathbb{P}$ satisface la *ccc*. De esta manera, I necesariamente es numerable y en consecuencia $1 \in \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ satisface la *ccc*. $\square$

Recordando que en un topos $\mathcal{E}$, el objeto $Epi(X, Y)$ representa a los epimorfismos de la forma $X \to Y$, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.37. [21] *Si S, T son conjuntos infinitos tales que en **Con** se cumple $Epi(S, T) \cong 0$, entonces en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ se cumple $Epi(\check{S}, \check{T}) \cong 0$.*

Corolario 4.38. *Existe un topos booleano en donde no se cumple la hipótesis del continuo.*

Demostración. Se considera el topos de Cohen $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ donde $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\mathbb{N} \times B, 2), \supseteq \rangle$ y B es un conjunto tal que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |B|$, por ejemplo, $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Por el teorema VI.1.3 en [19] página 272, $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ es un topos booleano. Por el corolario 4.33, en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ existe un mono $\check{B} \rightarrowtail \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}$. Como el funtor *gavilla asociada* $a : \boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}} \to \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ exacto izquierdo, se cumple que el funtor *gavillanización* $\check{\_} = a\Delta : \boldsymbol{Con} \to \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ preserva monos. De tal modo, en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ se tienen los monos

$$\check{\mathbb{N}} \rightarrowtail 2^{\check{\mathbb{N}}} \rightarrowtail \check{B} \rightarrowtail \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}}, \text{ con } \Omega_{\neg\neg}^{\check{\mathbb{N}}} = P\check{\mathbb{N}}.$$

[20] Una familia de objetos $\mathcal{G}$ de una categoría $\boldsymbol{C}$ *genera* a $\boldsymbol{C}$ si y solo si $f \neq g : A \to B$ en $\boldsymbol{C}$ implica que existen $G \in \mathcal{G}$ y $u : G \to A$ tales que $fu \neq gu$.

[21] Ver [19], proposición VI.3.6, pág 288.

Por el teorema de Cantor, en $\boldsymbol{Con}$ se cumple $Epi(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \cong Epi(2^{\mathbb{N}}, 2^{2^{\mathbb{N}}}) \cong 0$. Por la proposición 4.37, se cumple $Epi(\check{\mathbb{N}}, 2^{\check{\mathbb{N}}}) \cong Epi(2^{\check{\mathbb{N}}}, \check{B}) \cong 0$ en la categoría $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$. Por el lema 3.18, se tiene $Epi(2^{\check{\mathbb{N}}}, P\check{\mathbb{N}}) \cong 0$. Por la proposición 3.16, se cumple que no existen epimorfismos de $\check{\mathbb{N}}$ a $2^{\check{\mathbb{N}}}$ ni de $2^{\check{\mathbb{N}}}$ a $P\check{\mathbb{N}}$, es decir,

$$\check{\mathbb{N}} < 2^{\check{\mathbb{N}}} < P\check{\mathbb{N}}. \qquad \square$$

Lo que se realizó en el corolario 4.38 fue probar que el funtor gavillanización $\check{\_} : \boldsymbol{Con} \to \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ no preserva objetos potencia, pero si la existencia de monomorfismos y la inexistencia de epimorfismos. En consecuencia, las desigualdades estrictas $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}} < B$ en $\boldsymbol{Con}$, implican las desigualdades estrictas $\check{\mathbb{N}} < 2^{\check{\mathbb{N}}} < P\check{\mathbb{N}}$ en $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$. Probando así que en el topos de Cohen existe un objeto *estrictamente* más grande que $\check{\mathbb{N}}$, el objeto números naturales, pero *estrictamente* más pequeño que $P\check{\mathbb{N}}$, el objeto *potencia* del objeto números naturales.

4.2. Conjuntos no constructibles

En 1939 Gödel dio la definición de *conjunto constructible* y también definió de manera recursiva el modelo L de conjuntos constructibles con el cual probó la consistencia relativa del axioma de contructibilidad y, en consecuencia, probó la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis generalizada del contínuo.

Ahora se mostrará esta construcción para probar la existencia de un conjunto que no es constructible en un modelo booleano-valuado.

Definición 4.39. Sea $\langle N, \in \rangle$ un modelo transitivo. Se dice que el conjunto X es *definible en* N si existen φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos y $a_1, \ldots, a_n \in N$ tales que

$$X = \{x \in N \mid N \models \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Así, se define

$$def(N) = \{X \subseteq N \mid X \text{ es definible en } N\}.$$

De esta manera se cumplen $N \in def(N)$ y $N \subseteq def(N) \subseteq \mathcal{P}(N)$.

Definición 4.40. Se define por recursión transfinita

- $L_0 = \varnothing$.
- $L_{\alpha+1} = def(L_\alpha)$.
- $L_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta$, donde γ es ordinal límite.

Así, se define

$$L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha.$$

De esta manera, L es la clase de todos los conjuntos constructibles a partir de otros conjuntos constructibles a través de una fórmula.

A su vez, se define la fórmula $L(x)$ para indicar que "x es constructible", es decir, $L(x)$ si y solo si "$\exists\alpha \in Ord$ tal que $x \in L_\alpha$". Así, $L = \{x \mid L(x)\}$.

Las propiedades de L así como las pruebas de consistencia relativa con L se salen de los intereses de esta tesis. Sin embargo, éstas pruebas pueden consultarse en el capítulo 13 de [11].

Proposición 4.41. *Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\omega, 2), \supseteq \rangle$ y $e : \mathbb{P} \to B$ es su completación booleana, entonces se cumple $V^{(B)} \models \mathcal{P}(\omega)\check{\ } \neq \mathcal{P}(\check{\omega})$.*

Demostración. Por el teorema 2.20 se tiene $B = RO(Fun_\omega(\omega, 2))$ y por la observación 4.25 se cumple que $RO(2^\omega) \cong B$.

De esta manera, se define $u \in V^{(B)}$ tal que $dom(u) = dom(\check{\omega}) = \{\check{n} \mid n \in \omega\}$ y $u(\check{n}) = \{p \in \mathbb{P} \mid p(n) = 1\}$ para cada $n \in \omega$. Por la prueba de la observación 4.25 se tiene la siguiente correspondencia biunívoca.

$$\begin{array}{rcl} RO(2^\omega) & \xrightarrow{\qquad\cong\qquad} & B \\ \{f \in 2^\omega \mid f(n) = 1\} & \longmapsto & u(\check{n}). \end{array}$$

En consecuencia, por la definición 2.60, es fácil ver que para $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$ se cumple:

$$\begin{aligned} &p \Vdash \check{n} \in u \text{ si y solo si } p(n) = 1, \\ &p \Vdash \check{n} \notin u \text{ si y solo si } p(n) = 0. \end{aligned}$$

A su vez, por (A.2), ocurre

$$[\![u \in \mathcal{P}(\check{\omega})]\!] = [\![u \subseteq \check{\omega}]\!] = \bigwedge_{n\in\omega} (u(\check{u}) \Rightarrow [\![\check{n} \in \check{\omega}]\!]) = 1.$$

Por otra parte, se afirma que $[\![u = \check{x}]\!] = 0$ para todo $x \in \mathcal{P}(\omega)$, pues de lo contrario, por la propiedad (3) del teorema 2.20, existen $p \in \mathbb{P}$ y $x \in \mathcal{P}(\omega)$ tales que $p \Vdash u = \check{x}$. Sea $n \in \omega \backslash dom(p)$, si $n \in x$ se define $p' = p \cup \{\langle n, 0\rangle\}$ y si $n \notin x$ se define $p' = p \cup \{\langle n, 1\rangle\}$. De esta manera, si $n \in x$, entonces $p' \Vdash \check{n} \in \check{x} \wedge \check{n} \notin u$, mientras que, si $n \notin x$, entonces $p' \Vdash \check{n} \notin \check{x} \wedge \check{n} \in u$. En cualquier caso, ocurre $p' \Vdash u \neq \check{x}$ y como $p' \leqslant p$, entonces por la propiedad 2.61(1a) ocurre $p' \Vdash u = \check{x}$ lo cual, por la propiedad 2.61(1b), es una contradicción. Así, se tiene

$$[\![u \in \mathcal{P}(\omega)\check{\ }]\!] = \bigvee_{x\in\mathcal{P}(\omega)} [\![u = \check{x}]\!] = 0. \tag{4.9}$$

En consecuencia

$$1 = [\![u \in \mathcal{P}(\check{\omega})]\!] \wedge [\![u \notin \mathcal{P}(\omega)\check{\ }]\!] \leqslant [\![\mathcal{P}(\check{\omega}) \neq \mathcal{P}(\omega)\check{\ }]\!].$$

Lo cual prueba $V^{(B)} \models \mathcal{P}(\omega)\check{\ } \neq \mathcal{P}(\check{\omega})$. □

Proposición 4.42. *Si* $e : \mathbb{P} \to B$ *es la completación booleana de*

$$\mathbb{P} = \langle Fun_\omega(\omega, 2), \supseteq \rangle,$$

entonces $V^{(B)} \models \mathcal{P}(\check{\omega}) \nsubseteq L$.

Demostración. Se considera el conjunto $u \in V^{(B)}$ como en la prueba de la proposición 4.41. Por la proposición A.28, se cumple

$$\begin{aligned} [\![L(u)]\!] &= \bigvee_{x \in L} [\![u = \check{x}]\!] \\ &= \left(\bigvee_{x \in L \cap \mathcal{P}(\omega)} [\![u = \check{x}]\!] \right) \vee \left(\bigvee_{x \in L \setminus \mathcal{P}(\omega)} [\![u = \check{x}]\!] \right). \end{aligned}$$

Se sabe que $[\![u \in \mathcal{P}(\check{\omega})]\!] = 1$ y para $x \notin \mathcal{P}(\omega)$ se cumple

$$[\![u = \check{x}]\!] = [\![u = \check{x}]\!] \wedge [\![u \in \mathcal{P}(\check{\omega})]\!] \leqslant [\![\check{x} \in \mathcal{P}(\check{\omega})]\!] = [\![\check{x} \subseteq \check{\omega}]\!] = 0,$$

pues $x \nsubseteq \omega$. De tal modo, por (4.9) en la proposición 4.41, se cumple

$$[\![L(u)]\!] = \bigvee_{x \in L \cap \mathcal{P}(\omega)} [\![u = \check{x}]\!] \leqslant \bigvee_{x \in \mathcal{P}(\omega)} [\![u = \check{x}]\!] = [\![u \in \mathcal{P}(\omega)\check{\ }]\!] = 0.$$

Así, $[\![L(u)]\!] = 0$ y en consecuencia $V^{(B)} \models \mathcal{P}(\check{\omega}) \nsubseteq L$. □

De esta manera, en $V^{(B)}$ existe un "conjunto" que no es constructible.

4.3. Negación del axioma de elección

En esta sección se dará la heurística de otra aplicación del método forcing: la construcción de modelos que satisfagan la negación del axioma de elección.

Se darán dos construcciones: un modelo booleano-valuado y un topos de Grothendieck donde se obtienen negaciones del axioma de elección, estas construcciones tienen desarrollos distintos pero argumentos similares.

4.3.1. El modelo $V^{(\Gamma)}$ de nombres simétricos

Otra aplicación que da el método forcing empleando modelos booleano-valuados, es la prueba de la consistencia relativa de la negación del axioma de elección, siendo precisos, se obtiene un modelo de ZF en el que existe un conjunto *amorfo* cuya existencia contradice el axioma de elección. El siguiente desarrollo puede consultarse a detalle en el capítulo 3 de [3].

Definición 4.43. Se dice que un conjunto X es *amorfo* si no es biyectable con ningún número natural pero no admite un encaje desde ω, es decir, $|X| \neq n$ para cada $n \in \omega$ pero no existe ninguna función inyectiva de la forma $\omega \rightarrowtail X$.

Lema 4.44. *El axioma de elección implica que no existen los conjuntos amorfos.*

Demostración. Sea X un conjunto que no es biyectable con ningún número natural, es decir, $|X| \neq n$ para cada $n \in \omega$. Se verá que existe una función inyectiva $\omega \rightarrowtail X$.

Por el axioma de elección, todo conjunto es *bien ordenable*. De esta manera, se considera el conjunto bien ordenado $\langle X, \prec \rangle$. Se define por recursión sobre ω la función $x\_ : \omega \to X$ como $x_n = min_{\prec}(X \backslash \{x_m\}_{m<n})$. De esta manera, por hipótesis $x\_$ está bien definida, además se cumple que $x_0 = min_{\prec} X$ y por definición $x\_$ es inyectiva. □

Lo que en estricto sentido se probó con el lema 4.44 es

$$ZF \vdash \text{“}AC \Rightarrow \text{ no existe un conjunto amorfo”}.$$

De esta manera, para probar la consistencia relativa de la negación del axioma de elección, basta hallar un modelo que satisfaga los axiomas ZF y la existencia de un conjunto amorfo. Para obtener este resultado, es necesario construir un nuevo modelo booleano-valuado empleando *acciones de grupo*.

Recordando que una acción del grupo G en X es una función $G \times X \to X$ de la forma $\langle g, x \rangle \mapsto gx$ donde G es un grupo que cumple

$$ex = x \text{ y } g(hx) = (gh)x$$

para cualesquiera $g, h \in G$ y $x \in X$ donde e es el neutro de G.

Definición 4.45. Sean B un álgebra de Boole completa y G un grupo.

1. Se dice que una acción de grupo $G \times B \to B$ es una *acción por automorfismos* si para cada $g \in G$ la asignación $g\_ : B \to B$ dada por $b \mapsto gb$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.[22]

2. Si $\mathfrak{A}^B = \langle A^{(B)}, \in^{\mathfrak{A}}, [\![\_]\!] \rangle$ es una estructura B-valuada, entonces una acción del grupo G sobre $\mathfrak{A}^B$ son un par de acciones de grupo $G \times A^{(B)} \to A^{(B)}$ y $G \times B \to B$ acción por automorfismos tales que para cualesquiera $x, y \in A^{(B)}$ y $g \in G$ se cumplen

$$[\![gx = gy]\!] = g[\![x = y]\!],$$
$$[\![gx \in gy]\!] = g[\![x \in y]\!].$$

Si G es un grupo que actúa por automorfismos sobre un álgebra de Boole completa B, entonces es posible *extender* la acción de manera recursiva al modelo booleano-valuado $V^{(B)}$ de forma $G \times V^{(B)} \to V^{(B)}$ como

$$g\dot{x} = \{\langle g\dot{t}, g\dot{x}(\dot{t}) \rangle \mid \dot{t} \in dom(\dot{x})\}.$$

Además, esta nueva acción tendrá las siguientes propiedades

[22] Ver las definiciones A.1 y A.5.

- Para cualesquiera $\dot{x} \in V^{(B)}$ y $g \in G$
$$dom(g\dot{x}) = \{g\dot{t} \mid \dot{t} \in dom(\dot{x})\}.$$
- Para cada $\dot{t} \in dom(\dot{x})$, se cumple $g\dot{x}(g\dot{t}) = g\dot{x}(\dot{t})$.
- Para todo $x \in V$, se cumple $g\check{x} = \check{x}$.
- Para cada fórmula $\varphi(\nu_1, \dots, \nu_n)$, cualesquiera $\dot{x_1}, \dots, \dot{x_n} \in V^{(B)}$ y $g \in G$ se cumple
$$[\![\varphi(g\dot{x_1}, \dots, g\dot{x_n})]\!] = g[\![\varphi(\dot{x_1}, \dots, \dot{x_n})]\!].$$

Ahora, para obtener un modelo que no satisface el axioma de elección es necesario "extraer" de $V^{(B)}$ a los elementos *simétricos* para crear una nueva estructura booleano-valuada.

Para esto, se considera Γ un *filtro de subgrupos de G.* [23] Además, para cada $\dot{x} \in V^{(B)}$ se define el *estabilizador de $\dot{x}$* como
$$estab(\dot{x}) = \{g \in G \mid g\dot{x} = \dot{x}\} \leqslant G.$$

De esta manera, para cada grupo G que actúa sobre $V^{(B)}$ y Γ un filtro de subgrupos de G, se dice que:

- $\dot{x} \in V^{(B)}$ es *simétrico* si y solo si $estab(\dot{x}) \in \Gamma$.
- Γ es *normal* si para cada $H \in \Gamma$ y $g \in G$, se cumple $gHg^{-1} \in \Gamma$.

Así, es posible definir recursivamente a $V_\alpha^{(\Gamma)}$ sobre los ordinales como:

- $V_0^{(\Gamma)} = \varnothing$,
- $V_{\alpha+1}^{(\Gamma)} = \{\dot{x} : dom(\dot{x}) \to B | \dot{x}$ es función, $dom(\dot{x}) \subseteq V_\alpha^{(\Gamma)}$ y $estab(\dot{x}) \in \Gamma\}$,
- Si γ es un ordinal límite, entonces $V_\gamma^{(\Gamma)} = \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta^{(\Gamma)}$.

A su vez, se define $V^{(\Gamma)} = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^{(\Gamma)}$. De esta manera $V^{(\Gamma)} \subseteq V^{(B)}$ y además
$$\dot{x} \in V^{(\Gamma)} \text{ si y solo si } \dot{x} \in V^{(B)} \text{ y } estab(\dot{x}) \in \Gamma. \tag{4.10}$$

De manera que, si se considera la función *valor booleano en $V^{(B)}$* como $[\![\_]\!] = [\![\_]\!]^B$, entonces se define el valor booleano según Γ de las fórmulas atómicas como
$$[\![\dot{x} \in \dot{y}]\!]^\Gamma = [\![\dot{x} \in \dot{y}]\!]^B,$$
$$[\![\dot{x} = \dot{y}]\!]^\Gamma = [\![\dot{x} = \dot{y}]\!]^B.$$

Y así, por la definición 2.32, el valor booleano $[\![\varphi]\!]^\Gamma$ está definido para cada fórmula φ y en consecuencia $V^{(\Gamma)}$ es una estructura B-valuada.

[23] Γ es un filtro de subgrupos si es un conjunto distinto del vacío de subgrupos de G que es cerrado bajo cotas superiores (con el orden de ser subgrupo) y bajo intersecciones binarias.

De esta manera, si G es un grupo que actúa por automorfismos sobre B y Γ es filtro normal de subgrupos de G, entonces G actúa sobre $V^{(\Gamma)}$, $\check{x} \in V^{(\Gamma)}$ para cada $x \in V$ y $V^{(\Gamma)}$ es modelo de ZF.

Esto último se demuestra de forma muy similar a como se prueba el teorema A.27, pues las pruebas de que $V^{(\Gamma)}$ satisface de los axiomas de extensionalidad, buena fundación y reemplazo son análogas. El axioma de infinito se cumple porque $\check{\omega} \in V^{(\Gamma)}$ y las pruebas de que $V^{(\Gamma)}$ satisface el resto de axiomas son *esencialmente* iguales a las propias en la prueba del teorema A.27 con la condición extra de que los nombres definidos para la prueba de cada axioma cumplen con la condición (4.10).

Para dar el modelo booleano-valuado en donde no se satisface el axioma de elección se requiere tomar un conjunto parcialmente ordenado que añada una cantidad infinita de reales en el sentido de Cantor, estos nuevos "reales extraños" formarán un conjunto *amorfo*.

De esta manera, se consideran $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\omega \times \omega, 2), \supseteq \rangle$, $e : \mathbb{P} \to B$ su completación booleana y $G = S_\omega$ el *grupo de permutaciones en* ω.

Para cada $g \in G$ se define la permutación $g^* : B \to B$ tal que para cada $f \in B$, $g^* f \in B$ está definida por

$$\begin{aligned} dom(g^* f) &= (id_\omega \times g)^{-1}[dom(f)], \\ g^* f(n, m) &= f(n, gm). \end{aligned}$$

De esta manera, g^* es un homeomorfismo y su construcción garantiza que para cualesquiera $g, h \in G$ se cumplen $(gh)^* = h^* g^*$ y $(g^{-1})^* = g^{*-1}$.

Así la asignación $\langle g, b \rangle \mapsto gb = g^{*-1}[b]$ define una acción por automorfismos de G sobre B.

Ahora, para cada $n \in \omega$ se considera $G_n = \{g \in G \mid gn = n\} \leqslant G$ y Γ el filtro de subgrupos generado por $\{G_n\}_{n \in \omega}$, es decir, para cada subconjunto finito $J \subseteq \omega$ se define

$$G_J = \bigcap_{n \in J} G_n,$$

y así, $\Gamma = \{H \leqslant G \mid G_J \leqslant H$ para algún $J \subseteq \omega$ finito$\}$ es un filtro normal.

De esta manera, para cualesquiera $p \in \mathbb{P}$, $J \subseteq \omega$ finito y $n \notin J$ existen $g \in G_J$ tal que $\downarrow\!(p) \wedge g \downarrow\!(p) \neq 0$ y $gn \neq n$.

Por otra parte, para cada $m \in \omega$ se define $u_m \in V^{(B)}$ tal que $dom(u_m) = dom(\check{\omega})$ y $u_m(\check{n}) = \{p \in \mathbb{P} \mid p(n, m) = 1\}$ para cualesquiera $n, m \in \omega$.

Así, para cada $m \in \omega$ se cumplen $V^{(B)} \models u_m \subseteq \check{\omega}$ y además, $gu_m = u_{gm}$ para cada $g \in G$. De esta manera, $G_m \subseteq estab(u_m)$, en consecuencia $u_m \in V^{(\Gamma)}$ para cada $m \in \omega$. A su vez, si $m \neq m'$, entonces $V^{(\Gamma)} \models u_m \neq u_{m'}$.

De esta manera, si se define $s \in V^{(B)}$ como

$$\begin{aligned} dom(s) &= \{u_m \mid m \in \omega\} \text{ y tal que} \\ s(u_m) &= 1, \end{aligned}$$

entonces $estab(s) = G$, por lo que $s \in V^{(\Gamma)}$. Por lo anterior, en $V^{(\Gamma)}$ ocurre que "s es un conjunto infinito según Cantor", es decir, como $V^{(\Gamma)} \models u_m \neq u_{m'}$ para $m \neq m' \in \omega$, entonces

$$V^{(\Gamma)} \models \text{“}s \text{ no es biyectable con } \check{n} \text{ para cualquier } \check{n} \in \check{\omega}\text{”}.$$

Por otra parte, si $f : \check{\omega} \to s$ es una función en $V^{(\Gamma)}$, entonces existe $J \subseteq \omega$ finitio tal que $G_J \leqslant estab(f)$. Además, si se supone que f es inyectiva, habría algún $n \notin J$ tal que $u_n \in Im(f)$. Si se considera $n' \notin \{n\} \cup J$ y $g \in G$ la permutación de ω que intercambia a n' con n y deja fijo todo lo demás, entonces se cumple que $u_n = f(\check{m})$ implica $u_{n'} = u_{gn} = gu_n = g(f(\check{m})) = (gf)(g\check{m}) = f(\check{m}) = u_n$, lo cual es una contradicción.

De esta manera, no existe ninguna inyección de $\check{\omega}$ a s en $V^{(\Gamma)}$, y así, s es un conjunto *amorfo* en $V^{(B)}$. Por lo tanto, $V^{(\Gamma)} \models \neg AC$ y en consecuencia, por el metateorema de la consistencia relativa booleano-valuada 2.42,[24] se cumple

$$Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF + \neg AC).$$

4.3.2. El topos de Freyd de $\neg\neg$-gavillas

De manera alternativa a la construcción anterior, es posible construir un topos $\mathcal{F}$ en donde no se satisface el axioma de elección, siendo específicos, no se cumple la propiedad de que el producto de conjuntos distintos del vacío es distinto del vacío.

La construcción de dicho topos fue dada por Peter Freyd y puede consultarse a detalle en el capítulo VI.4 de [19].

Este topos no emplea un conjunto parcialmente ordenado, en su lugar emplea la categoría $\boldsymbol{A}$ cuyos objetos son los ordinales finitos distintos del vacío o elementos en $\omega\backslash\{0\}$ los cuales son de la forma

$$n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$$

y cuyas flechas son las funciones de la forma $f : n \to m$ tales que $m \leqslant n$ y $f(i) = i$ para toda $i < m$. Es decir, la categoría $\boldsymbol{A}$ consta de ordinales finitos distintos del vacío y las flechas son las restricciones a los retractos de cada ordinal n a un ordinal menor o igual. De esta manera, en $\boldsymbol{A}$ se cumplen las siguientes propiedades:

- $hom_{\boldsymbol{A}}(n, m) \neq \varnothing$ si y solo si $m \leqslant n$.
- Si dos flechas $f, g : n \to m$ en $\boldsymbol{A}$ cumplen que para flechas arbitrarias $k, h : p \to n$ en $\boldsymbol{A}$ se tiene $fk = gh$, entonces $f = g$.

Se consideran los funtores representables $H_n = hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n)$ y sus respectivas *gavillas asociadas* $F_n = a(H_n) = a(hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n))$ donde a es el funtor gavilla asociada usual

$$a : \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{A}^{op}} \longrightarrow \mathrm{Gav}_{\neg\neg}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{F}.$$

[24] Aquí, se está empleando el hecho de que $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC)$, el cual puede consultarse en [11], capítulo 13, pág 188.

En la categoría de pregavillas $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{A}^{op}}$ se cumple que los subfuntores distintos de 0 del objeto terminal en $\mathcal{F}$ son de la forma U_n, para cada $n \in \boldsymbol{A}$, tal que $U_n(k) = 1$ si $n \leqslant k$ y $U_n(k) = 0$ si $k < n$. De este hecho se sigue que la categoría $\mathcal{F}$ es bivaluada, pues si U_n es un subfuntor de 1, el objeto terminal en $\mathcal{F}$, entonces U_n debe intersectar a cualquier otro subfuntor U_k pues $U_{n+k} \hookrightarrow U_n \cap U_k$. Lo que significa que cada U_n es *denso* según la topología $\neg\neg$ y de esta manera, solo los subfuntores $U_0 = 1$ y 0 pueden ser gavillas.[25] De esta manera, la categoría de gavillas $\mathrm{Gav}_{\neg\neg}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{F}$ es bivaluada y en consecuencia es un topos booleano.

Se considera el funtor *gavillanización*

$$\check{\_} : \boldsymbol{Con} \xrightarrow{\Delta} \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{A}^{op}} \xrightarrow{a} \mathcal{F},$$

el cual es exacto izquierdo y adjunto izquierdo, de esta manera, preserva coproductos y el objeto terminal. En consecuencia, se cumplen $\check{\{*\}} \cong 1$ y $\check{2} \cong 1 \sqcup 1$ donde $\{*\}$ es el objeto terminal en $\boldsymbol{Con}$ y $2 = \{0, 1\}$. Como $\mathcal{F}$ es booleano, se cumple que el clasificador de subobjetos en $\mathcal{F}$ es $\Omega \cong 1 \sqcup 1$ y además, el objeto números naturales en $\mathcal{F}$ es $\check{\mathbb{N}}$. De esta manera, ocurre

$$P\check{\mathbb{N}} \cong \Omega^{\check{\mathbb{N}}} \cong \check{2}^{\check{\mathbb{N}}} \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} \check{2}.$$

De esta manera, se tiene que la categoría $\mathcal{F}$ es un topos de Grothendieck bivaluado con objeto números naturales $\check{\mathbb{N}}$. Se busca ver que en $\mathcal{F}$ existe una sucesión de objetos $F_0, F_1, \ldots$ tales que:

1. Cada F_n es subobjeto de $P\check{\mathbb{N}}$.
2. La única flecha $F_n \to 1$ en $\mathcal{F}$ es epi para cada número natural n.
3. El producto $\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es el objeto inicial 0.

Se consideran dos flechas $f \neq g : n \to m$ en $\boldsymbol{A}$ y sus respectivas transformaciones naturales inducidas

$$f_* = hom_{\boldsymbol{A}}(\_, f),\ g_* = hom_{\boldsymbol{A}}(\_, g) : H_n \longrightarrow H_m = hom_{\boldsymbol{A}}(\_, m).$$

De esta manera, por la descripción de las flechas en $\boldsymbol{A}$, se cumple que las imágenes de f_* y g_* son subfuntores ajenos de H_m. Cada uno de estos subfuntores tienen flechas únicas al objeto terminal, de esta manera, se tiene la transformación natural

$$im(f_*) \sqcup im(g_*) \longrightarrow 1 \sqcup 1 = \check{2}.$$

Como $\check{2}$ es una pregavilla inyectiva, ésta trasformación natural se extiende a otra de la forma $t_{f,g} : H_m \to \check{2}$ y por como se construyó dicha transformación natural, $t_{f,g}$ envía a las flechas f y g de H_m a imágenes diferentes.

[25]Ver [19] lema 4, capítulo V, sección 2, pág 226.

De esta manera, para n y m fijos, solo existe una cantidad finita de parejas $\langle f, g\rangle$, con $f, g \in hom_{\boldsymbol{A}}(n, m)$, tales que $f \neq g$. Además, solo hay una cantidad numerable de ordinales finitos n. En consecuencia, las flechas $t_{f,g}$ se combinan para dar un monomorfismo de pregavillas de la forma

$$H_m \rightarrowtail \prod_{\substack{f,g \in hom_{\boldsymbol{A}}(n,m) \\ f \neq g,\ n \in \mathbb{N}}} \check{2} \xrightarrow{\cong} \prod_{n \in \mathbb{N}} \check{2} \cong P\check{\mathbb{N}}.$$

Como el producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} \check{2}$ es una gavilla, entonces la $\neg\neg$-cerradura del subobjeto H_m es su gavilla asociada $F_m \hookrightarrow P\check{\mathbb{N}}$. De esta manera, se tienen los monomorfismos

$$H_m \rightarrowtail F_m \rightarrowtail P\check{\mathbb{N}}$$

con H_m denso. Así, se cumple (1).

Como $hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n) = H_n \rightarrowtail F_n$ es mono y H_n no es vacío, entonces $F_n \ncong 0$ en $\mathcal{F}$. En consecuencia, si se considera la factorización epi-mono $F_n \twoheadrightarrow V_n \rightarrowtail 1$, entonces la imagen V_n no puede ser el objeto inicial 0. Como $\mathcal{F}$ es bivaluado, entonces la imagen V_n es el objeto terminal 1 en $\mathcal{F}$, es decir, $F_n \to 1$ es epi y así se cumple (2).

Como $\mathcal{F}$ es un topos de Grothendieck, se considera el producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ en $\mathcal{F}$. Si $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \ncong 0$, entonces existe $k \in \boldsymbol{A}$ tal que $(\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)(k) \neq \varnothing$, de esta manera, las proyecciones $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \to F_m$ implican que $F_m(k) \neq \varnothing$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Por lo anterior, para que se cumpla (3) basta ver que $F_{n+1}(n) = \varnothing$ para cada $n \in \boldsymbol{A}$.

Si se supone $F_{n+1}(n) \neq \varnothing$, entonces, por el lema de Yoneda, se tiene una transformación natural $u : hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n) \to F_{n+1}$. Se considera el producto fibrado de la inclusión densa (dada por la gavilla asociada[26]) $\eta : hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n+1) \to F_{n+1}$ a lo largo de u

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "u'"] \arrow[d, tail] & hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n+1) \arrow[d, tail, "\eta"] \\ hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n) \arrow[r, "u"'] & F_{n+1} \end{tikzcd}$$

para obtener Q, un subobjeto denso de $hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n)$. De esta manera, $Q \ncong 0$ ya que ningún subobjeto $\neg\neg$-denso puede ser 0. Así, existe un número natural m tal que $Q(m) \subseteq hom_{\boldsymbol{A}}(m, n)$ no es vacío. Sea $g : m \to n$ en $Q(m)$ y se considera $h : m \to n+1$ como la imagen de $u'_m(g)$ en $hom_{\boldsymbol{A}}(m, n+1)$, así $n < n+1 \leqslant m$. Por la descripción de la categoría $\boldsymbol{A}$, existen $f, f' : m+1 \to m$ flechas en $\boldsymbol{A}$ tales que $f(m) = n$ y $f'(m) = g(n) < n$, de esta manera, se cumple $gf = gf'$.

[26]Ver [19] capítulo III, sección, teorema 1, pág 128-130.

Así

$$
\begin{aligned}
hf &= u'_m(g)f && \text{por definición de } h,\\
&= u'_m(gf) && \text{por naturalidad de } u' \text{ en } m,\\
&= u'_m(gf') && \\
&= u'_m(g)f' && \text{por naturalidad de } u' \text{ en } m,\\
&= hf' && \text{por definición de } h.
\end{aligned}
$$

Pero $hf(m) = h(n) = n$ pues $n < m$, por otra parte, $hf'(m) = h(g(n)) = g(n) < n$ y así $hf \neq hf'$ lo cual es una contradicción. De esta manera, no existen flechas de la forma $hom_{\boldsymbol{A}}(\_, n) \to F_{n+1}$ y por el lema de Yoneda se cumple $F_{n+1}(n) = \varnothing$ para cada $n \in \boldsymbol{A}$. En consecuencia se cumple (3).

Así, $\mathcal{F}$ es un topos de Grothendieck bivaluado con objeto números naturales $\check{\mathbb{N}}$ en donde existe una familia de subobjetos de $P\check{\mathbb{N}}$ tales que, por (2), $F_n \twoheadrightarrow 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{F}$ es bivaluado, se cumple $F_n \ncong 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero por (3), $\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n \cong 0$ lo cual contradice directamente la siguiente equivalencia del axioma de elección:

"El producto que no es nulo, de objetos que no son nulos, no es nulo."

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha visto, *grosso modo*, como formalizar y hacer algunas pruebas de consistencia relativa usando forcing. Para concluir, se harán algunas menciones de algunas situaciones notables.

La principal similitud que hay en las tres versiones expuestas del método forcing, es que se parte de un modelo $\mathscr{S}$ de una teoría de *conjuntos constantes* y con base en un conjunto fijo K se construye un nuevo sistema $\mathscr{S}^K$ de *conjuntos variables* según K. El conjunto K suele ser un orden parcial P, o bien, su completación booleana B.

Cuando se trabaja directamente con un conjunto parcialmente ordenado P, se obtienen los sistemas de *conjuntos variables* V^P y $\boldsymbol{Con}^{P^{op}}$ en donde los elementos de P representan *estados de conocimiento* en la variación de la formación de estos nuevos conjuntos variables, de manera que, si $p, q \in P$ son tales que $q \leqslant p$, entonces q representa un estado de conocimiento más *profundo* que p y en consecuencia q alberga más información que p. Posteriormente, se obtienen nuevos sistemas de conjuntos variables según P en donde se *juntan* adecuadamente estos estados de conocimiento, esto se realiza de forma distinta dependiendo del enfoque con el cual se este trabajando. Para los casos en donde se trabaja con V^P y $\boldsymbol{Con}^{P^{op}}$, los estados de conocimiento se juntan respectivamente mediante un filtro genérico $G \subseteq P$, o bien, una topología de Grothendieck J sobre P.

Para el primer caso, se considera un filtro genérico $G \subseteq P$ y se redefinen los elementos en V^P de tal modo que sus estados de conocimiento sean decididos por G. La principal dificultad de realizar este proceso de esta forma es garantizar la existencia del filtro genérico, para esto es necesario emplear resultados y técnicas de teoría de modelos para obtener M un modelo transitivo numerable de la teoría de conjuntos tal que $P \in M$, considerar la relativización M^P para así obtener G un filtro P-genérico sobre M y de esta manera construir el modelo $M[G]$ de elementos descritos por M^P y decididos por G.

Para el segundo caso, se consideran las pregavillas $\boldsymbol{Con}^{P^{op}}$ y J una topología de Grothendieck sobre P, posteriormente se considera el funtor *gavilla asociada* $a : \boldsymbol{Con}^{P^{op}} \to \mathrm{Gav}(P, J)$, la cual garantiza que para toda gavilla y para cada criba sobre cualquier objeto en P toda familia compatible tenga una única amalgama. De esta manera, los objetos en $\mathrm{Gav}(P,J)$ son aquellas pregavillas en las que se *juntan* adecuadamente los estados de conocimiento en P que son determinados por las cribas cubrientes. Además, se cumple que toda gavilla en $\boldsymbol{Con}^{P^{op}}$ según la topología J es una j-gavilla para alguna j topología de Lawvere-Tierney en $\boldsymbol{Con}^{P^{op}}$.

Por otra parte, cuando se trabaja con la completación booleana $e : P \to B$, el sistema de conjuntos variables resulta ser el modelo B-valaudo $V^{(B)}$. Como la completación booleana es monótona y además preserva y refleja la compatibilidad, entonces el álgebra de Boole completa B se enriquece con la *variación* que ofrece P y mantiene una estructura de *lógica clásica* que es aprovechada mediante los valores booleanos. En consecuencia, en $V^{(B)}$ no es necesario *juntar* los elementos en B teniendo como inconveniente que $V^{(B)}$ posiblemente no sea bivaluado.

La segunda gran similitud que tienen las tres versiones del forcing es la forma en que aprovechan la variación que ofrecen los estados de conocimiento. Siendo específicos, al considerar el forcing de Cohen $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle Fun_\omega(\mathbb{N} \times X, 2), \supseteq \rangle$ donde X es un conjunto no numerable adecuado, las tres versiones consideran una topología sobre $\mathbb{P}$, ya sea la topología del *orden*, o bien, la topología (de Grothendieck) *densa*. La topología densa en $\mathbb{P}$ juega un papel central en esta comparación, pues las gavillas en $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$ sobre la topología densa son precisamente las $\neg\neg$-gavillas en $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$.

Para el caso de la extensión genérica, un filtro $\mathbb{P}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ sobre el modelo M aprovecha que intersecta a todos los conjuntos densos y densos bajo elementos en $\mathbb{P}$ que estén en M. De esta manera, G captura a los densos adecuados en $\mathbb{P}$ con la topología del orden.

Para el caso de las gavillas sobre el sitio de Cohen con la topología densa, las cribas según la topología densa en $\mathbb{P}$ son precisamente los conjuntos densos bajo elementos en $\mathbb{P}$ según la topología del orden. Por otra parte, las gavillas sobre ese mismo sitio son las $\neg\neg$-gavillas en $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$, de esta manera, en las gavillas del topos de Cohen $\mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ hay similitudes entre la noción de densidad según la topología del orden en $\mathbb{P}$ y la noción de $\neg\neg$-densidad en $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$.

Para el caso de los modelos booleano-valuados, primero se enriquece el orden parcial $\mathbb{P}$ a su completación booleana $e : \mathbb{P} \to B$, donde $B = RO(\mathbb{P})$ son precisamente los abiertos regulares en $\mathbb{P}$ con la topología del orden. Más aún, al ser $\mathbb{P}$ un orden parcial *separativo*, se cumple que $e(p) = (\overline{\downarrow(p)})^\circ = \downarrow(p)$ para cada $p \in \mathbb{P}$. De esta manera, en $\mathbb{P}$ la completación booleana hace un trabajo similar con $e(p)$ en (2.4) que lo que hace la topología $\neg\neg$ en (4.5) con las pregavillas en $\boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}}$.

Finalmente, en las tres versiones hay una forma "canónica y natural" de encajar al universo o categoría de conjuntos en las respectivas construcciones exhibidas. Para el caso de las extensiones genéricas, si M es un modelo numerable transitivo de ZFC y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces para cada $x \in M$ se cumplen $x = \check{x}_G$ y $\check{x}_G \in M[G]$. Para el caso booleano-valuado, para cada álgebra de Boole completa B se cumple que el nombre canónico $\check{\_} : V \to V^{(B)}$ es un monomorfismo de estructuras. Mientras que para los topos de Grothendieck se tiene el funtor gavillanización $\boldsymbol{Con} \xrightarrow{\Delta} \boldsymbol{Con}^{\mathbb{P}^{op}} \xrightarrow{a} \mathrm{Gav}(\mathbb{P}, \neg\neg)$.

Algunas comparaciones adicionales en cuanto a las aplicaciones son, por ejemplo, el axioma de elección o el de constructibilidad. En el caso de elección sabemos que no es posible forzar su negación usando órdenes parciales ya que la extensión genérica siempre es modelo de elección. Lo común es usar álgebras de Boole y por medio de acciones de grupos, tanto en el álgebra como en el universo booleano-valuado, definir cuándo un elemento $x \in V^{(B)}$ es simétrico. Luego se considera la colección de elementos simétricos, se demuestra que esta colección es modelo de ZF y que en este modelo existe un conjunto *amorfo*. De manera similar, Peter Freyd da un topos booleano que no satisface elección, en este caso la prueba consiste en encontrar un sitio adecuado, que con la topología doble negación, tenga una colección de subobjetos "distintos del vacío" de los naturales cuyo producto sea "vacío". De esta manera, las estructuras booleano-valuadas y los topos de gavillas dan dos formas de negar el axioma de elección teniendo como principal diferencia que el modelo de nombres simétricos no es bivaluado mientras que el topos de Freyd si lo es.

Con el axioma de elección se muestra que hay algunas aplicaciones para las cuales el método con órdenes parciales no parece ser suficientemente bueno. Si ahora se considera el axioma de constructibilidad, las pruebas con órdenes parciales y con álgebras de Boole son muy sencillas, se demuestra que el filtro $\mathbb{P}$-genérico G no es constructible, pues como L es el *mínimo modelo interno* de ZF,[1] si se supone a G constructible, entonces $G \in L$. De tal modo, como M es modelo de ZF, debe ocurrir que $G \in L^M = L \cap M$, lo cual por el teorema 1.18 no ocurre. Por otra parte, no parece haber algo en la literatura acerca de $V \neq L$ en topos.

En las justificaciones del método que se dieron, se observa que en el caso de órdenes parciales se requieren suposiciones más fuertes ya que no es fácil probar la existencia de filtros genéricos. Por esta razón, en trabajos posteriores donde se emplea esta forma de realizar esta técnica, se han ido agregando axiomas que garantizan la existencia de genéricos. Un ejemplo de este tipo de axiomas el *axioma de Martin*, que a grandes rasgos garantiza la existencia de genéricos si se acota la cantidad de densos. Por ejemplo, empleando una construcción similar a la expuesta en la prueba del teorema 1.19 se afirma que el axioma de Martin para $\aleph_0$, denotado con $MA(\aleph_0)$, es un teorema de ZFC, mientras que al agregar un nuevo real se está mostrando que $MA(2^{\aleph_0})$ es falso (note que el orden parcial satisface la *ccc*). Otros axiomas de este tipo son el *axioma de forcing propio*, el *axioma de coloraciones abiertas*, el *máximo de Martin*, entre otros[2].

La dificultad para encontrar filtros genéricos hace que se tome un modelo base numerable, así la colección de densos es numerable y está garantizada la existencia de filtros genéricos sobre el modelo base.

Por otro lado, en álgebras de Boole no hay ese tipo de complicaciones ya

[1] Ver [11], capítulo 13 teorema 16 (ii), pág 187.

[2] En [23], [22] y en [10] se puede consultar un enfoque axiomático del forcing

que gran parte de los resultados no dependen la de genericidad de un filtro y solo cuando resulta necesario obtener un modelo bivaluado se requiere de un ultrafiltro, cuya existencia está garantizada por el axioma de elección. De esta forma es posible usar como modelo base al universo de los conjuntos V sin tener las complicaciones de encontrar algún objeto que no sea elemento de dicho universo. De la misma manera, la construcción filtro-cociente no depende de la existencia de objetos tan complicados como los genéricos, la única dificultad es que hay que tener cuidado dónde se están calculando los colímites.

Dicho de está forma, parece que no es buena idea hacer forcing con órdenes parciales. No obstante, la práctica muestra lo contrario. Para forzar φ por medio de álgebras de Boole se debe mostrar que en el modelo booleano-valuado que se haya construido se cumple $[\![\varphi]\!] \neq 0$, pero en general esto es un cálculo difícil pues incluso las fórmulas atómicas tienen un valor booleano que no es fácil de manejar tal como lo muestra la definición 2.52. En el caso de topos, el forcing no parece ser una línea de investigación fuerte[3], por lo que sólo se muestra que los resultados existentes pueden ser realizados mediante las técnicas de teoría de topos. Además, cuando se trata de forzar algo sencillo, como puede verse en el caso de $\neg CH$, la idea es considerar aproximaciones "pequeñas" de un objeto con elementos del modelo base. Cuando se considera la colección de estas aproximaciones rara vez tendrán estructura algebraica, por lo que aparecen los órdenes parciales de manera natural. Tal vez en esto consista la practicidad del método con órdenes parciales para forzar desde las cosas más sencillas hasta aquellas que no se pueden construir con una sola extensión.

Finalmente, cabe mencionar que sí existe un medio de relacionar las distintas construcciones dadas por las formas de forcing expuestas en este texto. Particularmente, si se supone la existencia de un filtro genérico G en un conjunto parcialmente ordenado P y $e : P \to B$ es su completación booleana, entonces, por el lema 2.28, $H = \uparrow e[G]$ es un filtro genérico en B^+ y por el teorema 2.72 se cumple que $V[G]$ la extensión genérica por el filtro G es igual a la extensión genérica $V[H]$. Por otra parte, la proposición 2.76 exhibe una semejanza entre la relación de forcing dada en (2.22) con la dada en (1.4), mientras que el corolario 2.71 prueba que $V[H] \equiv V^{(B)}/H$, por lo que $V[G] \equiv V^{(B)}/H$ y de esta manera, las extensiones genéricas de cierto modo son cocientes de modelos booleano-valuados. Por otra parte, el teorema de Higgs 3.37 indica que los modelos booleano-valuados son equivalentes a topos de gavillas sobre un álgebra de Boole con la topología canónica. Lo anterior junto con la construcción filtro-cociente, la cual define un topos bivaluado, prueba que si se considera el filtro H como un filtro de *objetos abiertos* $\boldsymbol{H}$ en $\mathrm{Gav}(B)$,[4] entonces en esencia se cumple

$$V[G] \equiv V^{(B)}/H \equiv \mathrm{Gav}(B)/\boldsymbol{H}.$$

[3]De la poca literatura que hay respecto al tema está [21], donde se desarrolla el forcing sobre topos *clasificantes*.

[4]Esto se sigue del hecho $B \cong \Omega(\mathrm{Gav}(B))$, con $\Omega(\mathrm{Gav}(B)) = hom_{\mathrm{Gav}(B)}(1, \Omega) \cong Sub_{\mathrm{Gav}(B)}(1)$, lo cual puede consultarse en [2] corolario 6.29.(ii), pág 217.

Apéndice A

Morfismos de orden, álgebras de Heyting y más propiedades de $V^{(B)}$

En este apéndice se procede a definir aquellas *funciones* entre álgebras de Boole que *preservan* la estructura algebraica y a su vez se exploran otras propiedades útiles. Si el lector así lo desea, puede consultar resultados mas a fondo respecto a estos temas en [3] y en [11], así como en [2] y en [16].

A.1. Morfismos de orden

Se sabe que cualquier álgebra de Boole es en particular un conjunto parcialmente ordenado. Más aún, ésta es su estructura *categórica*. De manera que las *funciones monótonas* entre órdenes parciales tienen comportamiento de *funtores covariantes*, es decir, si $\langle P, \leqslant \rangle$ y $\langle Q, \preceq \rangle$ son conjuntos parcialmente ordenados, entonces $f : P \longrightarrow Q$ es una función monótona si para cualesquiera $p, q \in P$ tales que si $p \leqslant q$, entonces $f(p) \preceq f(q)$. De esta manera se garantiza que f "preserva" las composiciones y en consecuencia f es un funtor covariante.

Definición A.1. Sean B_1 y B_2 álgebras de Boole. Una función $f : B_1 \longrightarrow B_2$ es un *morfismo* (entre álgebras de Boole) si preserva la estructura algebraica, es decir, para cualesquiera $a, b \in B_1$ se cumplen:

1. $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$,

2. $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y

3. $f(\neg a) = \neg f(a)$.

Desde luego, para cada B, álgebra de Boole, la función *identidad* en B, $id_B : B \to B$ es un morfismo de álgebras de Boole. A su vez, dados $f : B_1 \longrightarrow B_2$

y $g : B_2 \longrightarrow B_3$, morfismos de álgebras de Boole, la *composición* de funciones $g \circ f : B_1 \longrightarrow B_3$ es un morfismo de álgebras de Boole.

Además, como la composición de funciones es *asociativa*, entonces la composición de morfismos de álgebras de Boole también es *asociativa*, es decir, si $f : B_1 \longrightarrow B_2$, $g : B_2 \longrightarrow B_3$ y $h : B_3 \longrightarrow B_4$ son morfismos de álgebras de Boole, entonces se cumple

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Es fácil ver que para todo morfismo de álgebras de Boole $f : B_1 \longrightarrow B_2$, se cumplen $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Proposición A.2. *Si $f : B_1 \to B_2$ es un morfismo de álgebras de Boole, entonces f es monótona.*

Demostración. Sean $a, b \in B_1$ tales que $a \leqslant b$. Así, $a \wedge b = a$. Como f es un morfismo de álgebras de Boole, entonces $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(a)$. De esta manera, $f(a) \leqslant f(b)$. □

La proposición A.2 prueba que, en efecto, todo morfismo de álgebras resulta ser un *funtor covariante*. Por otra parte, por las condiciones (1) y (2) de la definición A.1, junto al hecho de que los morfisoms preservan al 0 y al 1, se cumple que todo morfismo de álgebras de Boole visto como *funtor* preserva *límites* y *colímites* finitos.

Es posible definir las *subestructuras* de un álgebra de Boole empleando morfismos.

Definición A.3. Sean B_0 y B_1 álgebras de Boole tales que $B_0 \subseteq B_1$. Se dice que B_0 es una *subálgebra* de Boole de B_1 si y solo si la inclusión $B_0 \hookrightarrow B_1$ es un morfismo de álgebras de Boole.

Observación A.4. Note que en cualquier álgebra de Boole B el subconjunto $2 = \{0, 1\}$ es el subálgebra de Boole no degenerada[1] más *pequeña* de B. Más aún, 2 es *subálgebra completa* de B.

En vista de que ***Boo*** es una categoría, resulta *natural* dar las siguientes definiciones. No obstante, por cuestiones prácticas las siguientes definiciones se darán en el contexto de las álgebras de Boole.

Definición A.5. Sea $f : B_1 \longrightarrow B_2$ un morfismo de álgebras de Boole, se dice que:

- f es un *mono* (monomorfismo) si y solo si f es inyectivo.
- f es un *epi* (epimorfismo) si y solo si f es suprayectivo.
- f es un *isomorfismo* si y solo si f es mono y epi.

[1] Es decir, tal que $0 \neq 1$.

Desde luego, las definiciones recién dadas son de índole *categórica*, es decir, son *canónicas* en cualquier categoría, sin embargo, en general las flechas en una categoría no necesariamente son funciones. A pesar de esto, con base en la definición A.5, es posible probar en ***Boo*** la caracterización usual de las flechas en una categoría. No obstante, no se realizará dicha prueba pues ésta se sale de los intereses de esta tesis.

Cuando existe un isomorfismo entre B_1 y B_2, álgebras de Boole, se denota por $B_1 \cong B_2$. Cuando dos álgebras de Boole son *isomorfas*, entonces se puede decir que son *indistintas* en el contexto de las álgebras de Boole. Dicho de otro modo, cuando dos álgebras de Boole son *isomorfas* significa que en ***Boo*** son *esencialmente* iguales.

Definición A.6. Sean $\langle P, \leqslant_P \rangle$ y $\langle Q, \leqslant_Q \rangle$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \longrightarrow Q$, $g : Q \longrightarrow P$ dos *funtores*[2]. Se dice que f es adjunto izquierdo de g, o equivalentemente, g es adjunto derecho de f, si y solo si para cualesquiera $p \in P$ y $q \in Q$ se cumple que:

$$f(p) \leqslant q \text{ si y solo si } p \leqslant g(q).$$

Cuando esto sucede, se denota a este hecho[3] como $f \dashv g$. Y de ser necesario indicar el dominio y contradominio de la adjunción, se denotará como

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ Q. \arrow[u, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

Desde luego, por A.2, los morfismos de álgebras de Boole son en particular funciones monótonas y en consecuencia funtores, por lo cual, es posible hablar de adjunciones entre órdenes parciales y, en particular, entre álgebras de Boole.

Proposición A.7. *Sea $f : B_1 \longrightarrow B_2$ un funtor entre álgebras de Boole. Si f tiene un adjunto derecho, entonces éste es único.*

Demostración. Suponga que g y h son adjuntos derechos de f. Así, para cualesquiera $b \in B_1$ y $a \in B_2$ se cumple que

$$\begin{aligned} b \leqslant g(a) \quad &\text{si y solo si} \quad f(b) \leqslant a, \qquad &&\text{pues} \quad f \dashv g, \\ &\text{si y solo si} \quad b \leqslant h(a), \qquad &&\text{pues} \quad f \dashv h. \end{aligned}$$

De esta manera, se satisface que $g(a) = h(a)$, para todo $a \in B_2$. Por lo tanto $g = h$. □

Como es de esperarse, en una adjunción entre álgebras de Boole el adjunto izquierdo es único.

[2] funciones monótonas

[3] a este hecho también se le conoce como *conexión de Galois*

Una vez definido el concepto de adjunción entre órdenes parciales, y en particular entre álgebras de Boole, se puede obtener un resultado respecto a los supremos generalizados.

Proposición A.8. *Si $f : B_1 \longrightarrow B_2$ es una función monótona entre álgebras de Boole tal que existe $g : B_2 \longrightarrow B_1$ que cumple $f \dashv g$ y $\{b_i \mid i \in I\} \subseteq B_1$, entonces*

$$f\left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) = \bigvee_{i\in I} f(b_i).$$

Demostración. Sea $a \in B_2$. De esta manera

$$\begin{aligned} f\left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) \leqslant a &\iff \bigvee_{i\in I} b_i \leqslant g(a) && f \dashv g \\ &\iff b_i \leqslant g(a) \text{ para toda } i \in I && \text{por ser supremo} \\ &\iff f(b_i) \leqslant a \text{ para toda } i \in I && f \dashv g \\ &\iff \bigvee_{i\in I} f(b_i) \leqslant a && \text{por ser supremo.} \end{aligned}$$

De tal modo, por propiedades del orden se cumple que

$$f\left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) = \bigvee_{i\in I} f(b_i). \qquad \square$$

Ahora que ya se ha definido y explorado los conceptos de morfismos de álgebras de Boole y adjunciones entre ellas, se procede a exponer la noción de *exponencial* en álgebras de Boole.

Definición A.9. Sean B un álgebra de Boole y $x, y, z \in B$. Se define $x \Rightarrow y$ como el único elemento en B que cumple

$$z \leqslant (x \Rightarrow y) \text{ si y solo si } x \wedge z \leqslant y. \tag{A.1}$$

A este elemento se le conoce como la *implicación* o, de manera equivalente, la *exponencial* con base en y y exponente x.

Las propiedades algebraicas en las álgebras de Boole permiten definir la exponencial de dos elementos en términos de la negación.

Proposición A.10. *Si B es un álgebra de Boole y $x, y \in B$, entonces*

$$(x \Rightarrow y) = \neg x \vee y.$$

Demostración. Se verá que se dan ambas desigualdades. Sea $z \in B$, Así

$$\begin{array}{lll} z \leqslant (x \Rightarrow y) & \text{si y solo si } \ x \wedge z \leqslant y & \text{por definición de } \Rightarrow \\ & \text{entonces } \ \neg x \vee (x \wedge z) \leqslant \neg x \vee y & \text{por propiedades algebraicas} \\ & \text{si y solo si } \ \neg x \vee z \leqslant \neg x \vee y & \text{por distributividad} \\ & \text{entonces } \ z \leqslant \neg x \vee y & \text{por transitividad de } \leqslant . \end{array}$$

De esta manera, se cumple $(x \Rightarrow y) \leqslant \neg x \vee y$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \text{si } z \leqslant \neg x \vee y, \ \ & \text{entonces } \ x \wedge z \leqslant x \wedge (\neg x \vee y), \\ & \text{entonces } \ x \wedge z \leqslant x \wedge y \leqslant y \\ & \text{si y solo si } \ z \leqslant (x \Rightarrow y). \end{aligned}$$

Así, se cumple $(x \Rightarrow y) = \neg x \vee y$. □

Proposición A.11. *Para cualquier álgebra de Boole B y $a, b \in B$, se cumple*

$$(a \Rightarrow b) = 1 \ \textit{si y solo si} \ a \leqslant b. \tag{A.2}$$

Demostración. $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} (a \Rightarrow b) = 1 \text{ si y solo si } \neg a \vee b = 1, \qquad & \text{por la proposición A.10,} \\ \text{entonces } a \wedge (\neg a \vee b) = a \wedge 1 = a & \\ \text{si y solo si } (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) = a & \\ \text{si y solo si } 0 \vee (a \wedge b) = a & \\ \text{si y solo si } a \leqslant b. & \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} a \leqslant b \text{ si y solo si } a = a \wedge b, & \\ \text{entonces } 1 = \neg a \vee a = \neg a \vee (a \wedge b) & \\ \text{si y solo si } 1 = (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee b) & \\ \text{si y solo si } 1 = 1 \wedge (\neg a \vee b) & \\ \text{si y solo si } 1 = (a \Rightarrow b). & \end{aligned}$$

□

Proposición A.12. *Sean B un álgebra de Boole, $x, y, z \in B$. Si $y \leqslant z$, entonces:*

1. $(x \Rightarrow y) \leqslant (x \Rightarrow z)$,
2. $(z \Rightarrow x) \leqslant (y \Rightarrow y)$.

Demostración. Sea $w \in B$. Así:

1.

$$\begin{aligned} w \leqslant (x \Rightarrow y) \text{ si y solo si } x \wedge w \leqslant y, & \\ \text{entonces } x \wedge w \leqslant z & \\ \text{si y solo si } w \leqslant (x \Rightarrow z). & \end{aligned}$$

De esta manera, $(x \Rightarrow y) \leqslant (x \Rightarrow z)$.

2.

$$\begin{aligned} w \leqslant (z \Rightarrow x) \text{ si y solo si } w \wedge z \leqslant x, & \\ \text{así, } w \wedge y \leqslant x & \\ \text{si y solo si } w \leqslant (y \Rightarrow x). & \end{aligned}$$

En consecuencia, $(z \Rightarrow x) \leqslant (y \Rightarrow y)$.

□

El término de exponencial surge en categorías que poseen productos binarios donde se da una situación de adjunción.

Lema A.13. *Sean B un álgebra de Boole y $x \in B$. Si se definen $x \Rightarrow \_ : B \to B$ y $x \wedge \_ : B \to B$ de la siguiente manera:*

$$x \Rightarrow \_(y) = (x \Rightarrow y) \quad \text{y} \quad x \wedge \_(y) = x \wedge y$$

para cada $y \in B$, entonces

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, bend right, "x \wedge \_"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ B. \arrow[u, bend right, "x \Rightarrow \_"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Es consecuencia directa de la definición A.9 y de la proposición A.12. □

Con el uso de exponenciales en álgebras de Boole se pueden obtener resultados útiles referentes a los ínfimos y supremos generalizados.

Teorema A.14. *Si B es un álgebra de Boole completa, $x \in B$ y $\{y_i | i \in I\} \subseteq B$, entonces*

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i).$$

A esta propiedad se le conoce como ley distributiva generalizada.

Demostración. Se sigue del lema A.13 y de la proposición A.8. □

Proposición A.15. *Si B es un álgebra de Boole completa y $\{x_i | i \in I\} \subseteq B$, entonces*

$$\neg \bigvee_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} \neg x_i.$$

A esta propiedad se le conoce como la ley de De Morgan generalizada.

Demostración. Sea $y \in B$. Así

$$\begin{aligned} y \leqslant \neg \bigvee_{i \in I} x_i \quad & \text{si y solo si} \quad \neg y \geqslant \bigvee_{i \in I} x_i \\ & \text{si y solo si} \quad \neg y \geqslant x_i \text{ para cada } i \in I \\ & \text{si y solo si} \quad y \leqslant \neg x_i \text{ para cada } i \in I \\ & \text{si y solo si} \quad y \leqslant \bigwedge_{i \in I} \neg x_i. \end{aligned}$$

Así, por propiedades del orden se cumple

$$\neg \bigvee_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} \neg x_i.$$

□

A.1.1. Álgebras de Heyting

Definición A.16. Se dice que una retícula $\langle L, \wedge, \vee, \leqslant\rangle$ es un álgebra de Heyting si L posee 0, 1 y es cartesiana cerrada, es decir, para cualesquiera $x, y \in L$ existe $x \Rightarrow y \in L$ tal que para cualquier $z \in L$ se cumple

$$z \leqslant (x \Rightarrow y) \text{ si y solo si } x \wedge z \leqslant y.$$

Si H es un álgebra de Heyting, entonces para cualesquiera $x, y, z \in H$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(x \Rightarrow x) = 1$.
2. $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$.
3. $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$.
4. $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

Definición A.17. Sea H un álgebra de Heyting y $x \in H$, se define el *pseudocomplemento* de x como

$$\neg x = (x \Rightarrow 0).$$

Para cualesquiera $x, y \in H$ el *pseudocomplemento* satisface las siguientes propiedades:

1. $x \leqslant \neg\neg x$.
2. Si $x \leqslant y$, entonces $\neg y \leqslant \neg x$.
3. $\neg x = \neg\neg\neg x$.
4. $\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$.

Sea H un álgebra de Heyting. Se dice que $U \subseteq H$ es un *filtro* si satisface las mismas condiciones descritas en la definición 2.1, es decir,

- $1 \in U$ y $0 \notin U$,
- si $x, y \in U$, entonces $x \wedge y \in U$,
- si $x \in U$ y $x \leqslant y$, entonces $y \in U$.

Proposición A.18. *Para todo filtro U en un álgebra de Heyting H, existe un epimorfismo de álgebras de Heyting*[4] *de la forma $\theta : H \longrightarrow K$ tal que $\theta^{-1}(1) = U$.*

[4]Un morfismo de álgebras de Heyting $f : H \longrightarrow K$ es una función tal que

- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$,
- $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$,
- $f(a \Rightarrow b) = f(a) \Rightarrow f(b)$.

Demostración. Suponga que U es *principal*, es decir, existe $u \in H$ tal que $U = \uparrow(u)$. Se define la relación $\cong$ en H como: $a \cong b$ si y solo si $a \wedge u = b \wedge u$. Es fácil ver que $\cong$ resulta ser una relación de equivalencia.

Sea $a_u \in H/_{\cong}$. Se define el orden parcial

$$a_u \leqslant b_u \text{ si y solo si } a \wedge u \leqslant b \wedge u.$$

Sea $H/_{\cong} = H/u$, se definen

$$a_u \wedge b_u = (a \wedge b)_u, \qquad\qquad a_u \vee b_u = (a \vee b)_u.$$

De esta manera resulta fácil comprobar que H/u es una retícula con cero $0_u = 0$ y uno $1_u = u$. Por otra parte, la implicación está dada por

$$b_u \Rightarrow c_u = (b \Rightarrow c)_u.$$

La cual en efecto es una operación implicación pues $a_u \wedge b_u \leqslant c_u$ si y solo si $a \wedge b \wedge u \leqslant c \wedge u$ en H, esto es equivalente a $a \wedge b \wedge u \leqslant c$. En consecuencia $a \wedge u \leqslant (b \Rightarrow c) \wedge u$ y así $a_u \leqslant (b_u \Rightarrow c_u)$. De tal modo, si se definen $K = H/u$ y θ es la respectiva proyección al cociente, entonces θ es un epimorfismo.

Más aún, si $w \leqslant v \leqslant u$ son elementos de H, entonces existen los morfismos evidentes

$$p_{u,v} : H/u \longrightarrow H/v, \qquad\qquad p_{v,w} : H/v \longrightarrow H/w$$

cuya composición resulta ser $p_{u,w} : H/u \longrightarrow H/w$.

Por otra parte, si U es un filtro arbitrario en H, entonces se define la relación de congruencia $\equiv$ en H como

$$a \equiv b \ (mod\ U) \text{ si y solo si existe } u \in U \text{ tal que } a \wedge u = b \wedge u.$$

De tal modo, el cociente H/U es de la forma

$$H/U = Colim_{u \in U}\ H/u$$

donde los morfismos implicados en el colímite son de la forma $p_{u,v}$ en la categoría de álgebras de Heyting.

Así, cada elemento en H/U está representado por algún elemento en algún H/u. De esta manera si $a_u \in H/u$ y $b_v \in H/v$, entonces $a_u = b_v$ si y solo si existe $w \leqslant u \wedge v$ en U tal que $p_{u,w}(a) = p_{v,w}(b)$ y las operaciones de álgebra de Heyting en a_u y b_v son realizadas en H/w. □

A.2. Propiedades de $V^{(B)}$

En el capítulo 2 se muestra que si B es un álgebra de Boole completa, entonces $V^{(B)}$ es una estructura B-valuada. En esta parte, se termina de probar que $V^{(B)}$ es un modelo B-valuado de ZFC.

Lema A.19. *Si B es un álgebra de Boole completa, W es una anticadena en B^+ y $\{a_x\}_{x\in W} \subseteq V^{(B)}$ es una familia indexada por W, entonces existe $a \in V^{(B)}$ tal que $x \leqslant [\![a = a_x]\!]$ para cada $x \in W$.*

Demostración. Para cada $x \in W$ se define $b_x \in V^{(B)}$ como $b_x : D \longrightarrow B$ tal que

$$b_x(t) = \begin{cases} a_x(t) & \text{si} \;\; t \in dom(a_x) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, se define $a \in V^{(B)}$ como $a : D \longrightarrow B$ y tal que $a(t) = \bigvee_{y\in W} (y \wedge b_y(t))$.

De esta manera, para cualesquiera $t \in D$ y $x \in W$ se cumple

$$\begin{aligned} x \wedge a(t) &= x \wedge \bigvee_{y\in W} (y \wedge b_y(t)) \\ &= \bigvee_{y\in W} (x \wedge y \wedge b_y(t)) \\ &= x \wedge b_x(t) && \text{pues } W \text{ es anticadena} \\ &\leqslant b_x(t). \end{aligned}$$

Así, por (A.1) se cumple que $x \leqslant (a(t) \Rightarrow b_x(t))$ y, por la definición de a, se tiene $x \wedge b_x(t) \leqslant a(t)$ de esta manera $x \leqslant (b_x(t) \Rightarrow a(t))$. Así, por la propiedad (2) del teorema 2.53, la proposición A.12 y la definición 2.52, se cumple $x \leqslant [\![a = b_x]\!]$.

Se verá que $x \leqslant [\![b_x = a_x]\!]$ para concluir que $x \leqslant [\![a = a_x]\!]$. Por definición de b_x, es fácil ver que $[\![a_x \subseteq b_x]\!] = 1$. Para la otra contención se verá que $x \leqslant (b_x(t) \Rightarrow [\![t \in a_x]\!])$ para cada $t \in dom(b_x)$, es decir, hay que mostrar que se cumple $x \wedge b_x(t) \leqslant [\![t \in a_x]\!]$. De esta manera, se tienen los siguientes casos:

- Si $t \in dom(a_x)$, entonces $x \wedge b_x(t) \leqslant a_x(t) \leqslant [\![t \in a_x]\!]$.
- Si $t \notin dom(a_x)$, entonces $x \wedge b_x(t) = 0 \leqslant [\![t \in a_x]\!]$. □

Lema A.20. *Si B es un álgebra de Boole completa, entonces $V^{(B)}$ es pleno.*

Demostración. Como el álgebra de Boole B es un conjunto, entonces se cumple que

$$\{[\![\varphi(x)]\!] \mid x \in V^{(B)}\}$$

es un conjunto. De tal modo, empleando el *teorema del buen orden*, existe un ordinal α tal que

$$\{[\![\varphi(x)]\!] \mid x \in V^{(B)}\} = \{[\![\varphi(x_\xi)]\!] \mid \xi < \alpha\},$$

donde $\{x_\xi \mid \xi < \alpha\} \subseteq V^{(B)}$.

De tal modo, $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \bigvee_{\xi<\alpha} [\![\varphi(x_\xi)]\!]$. Así, para cada $\xi < \alpha$ se define

$$u_\xi = [\![\varphi(x_\xi)]\!] \wedge \neg \left(\bigvee_{\eta<\xi} [\![\varphi(x_\eta)]\!] \right).$$

Se verá que $\{u_\xi \mid \xi < \alpha\} \backslash \{0\}$ es una anticadena. Sean $\delta < \gamma < \alpha$ tales que $u_\delta \neq u_\gamma$.

Así, $[\![\varphi(x_\delta)]\!] \leqslant \bigvee_{\eta<\gamma} [\![\varphi(x_\eta)]\!]$ y así $u_\gamma \leqslant \neg \left(\bigvee_{\eta<\gamma} [\![\varphi(x_\eta)]\!] \right) \leqslant \neg [\![\varphi(x_\delta)]\!]$.

De esta manera, $u_\gamma \wedge [\![\varphi(x_\delta)]\!] \leqslant (\neg [\![\varphi(x_\delta)]\!]) \wedge [\![\varphi(x_\delta)]\!] = 0$ y como $u_\delta \leqslant [\![\varphi(x_\delta)]\!]$, entonces $u_\gamma \wedge u_\delta = 0$.

Así, por el lema A.19, existe $a \in V^{(B)}$ tal que $u_\xi \leqslant [\![a = x_\xi]\!]$ para todo $\xi < \alpha$ y de esta manera

$$u_\xi \leqslant [\![a = x_\xi]\!] \wedge [\![\varphi(x_\xi)]\!] \leqslant [\![\varphi(a)]\!].$$

En consecuencia

$$[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \bigvee_{\xi<\alpha} [\![\varphi(x_\xi)]\!] = \bigvee_{\xi<\alpha} \left([\![\varphi(x_\xi)]\!] \wedge \neg \left(\bigvee_{\eta<\xi} [\![\varphi(x_\eta)]\!] \right) \right) = \bigvee_{\xi<\alpha} u_\xi \leqslant [\![\varphi(a)]\!].$$

□

Por el corolario 2.58 se sabe que V, el *universo* de la teoría de conjuntos, es *elementalmente equivalente* a $V^{(2)}$. Ahora, se explorará que ocurre con las subálgebras completas de un álgebra de Boole completa.

Lema A.21. *Sea B' una subálgebra completa de B. Se cumplen:*

1. *$V^{(B')} \leqslant V^{(B)}$, es decir, $V^{(B')}$ es subestructura*[5] *de $V^{(B)}$.*
2. *Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula atómica y $a_1, \ldots, a_n \in V^{(B')}$, entonces*

$$[\![\varphi(a_1 \ldots, a_n)]\!]^{B'} = [\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!]^B. \tag{A.3}$$

Demostración. La prueba de (1) es consecuencia del hecho de que si f es una función y A es un conjunto tal que $cod(f) \subseteq A$, entonces $f \subseteq \overline{f}$ donde $dom(f) = dom(\overline{f})$, $cod(\overline{f}) = A$ y $f(x) = \overline{f}(x)$. En consecuencia $V^{(B')} \leqslant V^{(B)}$.

Para verificar (2) basta notar que como B' es subálgebra completa de B, entonces los ínfimos y supremos arbitrarios son iguales entre ambas álgebras de Boole. Así, las definiciones en 2.52 son iguales entre B' y B. En consecuencia, para cada fórmula atómica $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots, a_n \in V^{(B')}$ se cumple

$$[\![\varphi(a_1 \ldots, a_n)]\!]^{B'} = [\![\varphi(a_1, \ldots, a_n)]\!]^B.$$

□

[5] Ver la definición 2.37.

De esta manera, las subálgebras completas de B generan *subestructuras* de $V^{(B)}$.

Ahora se verá que tipo de *fórmulas* se preservan entre $V^{(B')}$ y $V^{(B)}$.

Teorema A.22. *Si B' es una subálgebra completa de B y φ es una fórmula Δ_0,[6] entonces para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in V^{(B')}$ se cumple*

$$[\![\varphi(a_1, \dots, a_n)]\!]^{B'} = [\![\varphi(a_1, \dots, a_n)]\!]^{B}. \tag{A.4}$$

Demostración. La prueba se da por recursión sobre la formación de fórmulas Δ_0.

Si φ es una fórmula atómica, entonces por la propiedad (2) del lema A.21 se cumple (A.4). Si $a \in V^{(B')}$, entonces por el corolario 2.54 se cumple que si x es una *variable*, entonces

$$[\![\exists x \in a\ \varphi(x)]\!]^{B'} = [\![\exists x \in a\ \varphi(x)]\!]^{B} \text{ y } [\![\forall x \in a\ \varphi(x)]\!]^{B'} = [\![\forall x \in a\ \varphi(x)]\!]^{B}.$$

Por último si φ y ψ son fórmulas Δ_0, entonces por las definiciones (1) y (2) en 2.32 se concluye que $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ satisfacen (A.4). $\square$

Corolario A.23. *Si B es un álgebra de Boole completa y $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula Δ_0, entonces*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ es verdadero si y solo si } [\![\varphi(\check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!]^{B} = 1.$$

Demostración. La prueba es consecuencia del corolario 2.58, del hecho que 2 es subálgebra completa de B y del teorema A.22. $\square$

De esta manera si φ es una fórmula Δ_0, entonces φ "sube" y "baja" *semánticamente* entre V y $V^{(B)}$ sin importar el álgebra de Boole completa B.

Corolario A.24. *Sean B un álgebra de Boole completa y φ una fórmula Σ_1.*[7]

$$\text{Si } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ es verdadero, entonces } [\![\varphi(\check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!] = 1.$$

Demostración. Sea φ una fórmula Σ_1. Así

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ si y solo si } \exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n),$$

donde ψ es una fórmula Δ_0. Suponga verdadero $\exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$, esto ocurre, si y solo si hay algún $y \in V$ tal que $\psi(y, x_1, \dots, x_n)$ es verdadero, equivalentemente, por el corolario A.23, existe algún $y \in V$ tal que $[\![\psi(\check{y}, \check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!] = 1$. De esta manera

$$\begin{aligned} [\![\exists x \psi(\check{x}, \check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!] &= \bigvee_{a \in V^{(B)}} [\![\psi(\check{a}, \check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!] \\ &\geqslant \bigvee_{x \in V} [\![\psi(\check{x}, \check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!] \\ &\geqslant [\![\psi(\check{y}, \check{x_1}, \dots, \check{x_n})]\!] \\ &= 1. \quad \square \end{aligned}$$

[6] Ver [11], definición 12.8, pág 163.

[7] Ver [11], página 183

Lema A.25. *Si $x \in V^{(B)}$, entonces*

$$[\![x \text{ es un ordinal}]\!] = \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![x = \check{\alpha}]\!]. \tag{A.5}$$

Demostración. Como la fórmula "α es un ordinal" es una fórmula Δ_0,[8] por el corolario A.23, para cada ordinal α se cumple que

$$[\![x = \check{\alpha}]\!] = [\![x = \check{\alpha}]\!] \wedge [\![\check{\alpha} \text{ es un ordinal}]\!] \leqslant [\![x \text{ es un ordinal}]\!].$$

De tal modo

$$\bigvee_{\alpha \in Ord} [\![x = \check{\alpha}]\!] \leqslant [\![x \text{ es un ordinal}]\!].$$

Sea $[\![x \text{ es un ordinal}]\!] = u$. De esta manera, si $\xi \neq \eta$, entonces $[\![\check{\xi} = \check{\eta}]\!] = 0$. Así, para cada $t \in dom(x)$ la función

$$\begin{aligned} f : D_t &\longrightarrow B, \\ f(\xi) = &\ [\![t = \check{\xi}]\!] \end{aligned}$$

donde $D_t = \{\xi \in Ord \mid [\![t = \check{\xi}]\!] \neq 0\}$ es inyectiva y en consecuencia, como B es un conjunto, D_t también es un conjunto. De tal modo, si se considera

$$D = \bigcup_{t \in dom(x)} D_t,$$

entonces D es un conjunto de ordinales. Sea γ un ordinal tal que $\gamma \notin D$. Así, para cada $t \in dom(x)$ se cumple $[\![t = \check{\gamma}]\!] = 0$ y de esta manera $[\![\check{\gamma} \in x]\!] = 0$. Además, se sabe que

$$u \leqslant [\![x \in \check{\gamma}]\!] \vee [\![x = \check{\gamma}]\!] \vee [\![\check{\gamma} \in x]\!]$$

y como $[\![\check{\gamma} \in x]\!] = 0$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} u &\leqslant [\![x \in \check{\gamma}]\!] \vee [\![x = \check{\gamma}]\!] \\ &= \left(\bigvee_{\delta < \gamma} [\![x = \check{\delta}]\!] \right) \vee [\![x = \check{\gamma}]\!] \\ &= \bigvee_{\delta \leqslant \gamma} [\![x = \check{\delta}]\!] \\ &\leqslant \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![x = \check{\alpha}]\!]. \end{aligned}$$

Así, $[\![x \text{ es un ordinal}]\!] \leqslant \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![x = \check{\alpha}]\!]$. □

[8] Ver [11], lema 12.10,(i), pág 164

Corolario A.26. *Si φ es una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos y α es un ordinal, entonces*

$$[\![\exists\alpha\varphi(\alpha)]\!] = \bigvee_{\alpha\in Ord} [\![\varphi(\check{\alpha})]\!], \tag{A.6}$$

$$[\![\forall\alpha\varphi(\alpha)]\!] = \bigwedge_{\alpha\in Ord} [\![\varphi(\check{\alpha})]\!]. \tag{A.7}$$

Demostración. Solo se verá la prueba de (A.6), pues la prueba de (A.7) es análoga.

Se considera la fórmula

$$ord(x) \text{ si y solo si "} x \text{ es un ordinal".}$$

De esta manera, se cumple

$$\begin{aligned}
[\![\exists\alpha\varphi(\alpha)]\!] &= [\![\exists x(ord(x) \wedge \varphi(x))]\!] \\
&= \bigvee_{a\in V^{(B)}} [\![ord(a) \wedge \varphi(a)]\!] \\
&= \bigvee_{a\in V^{(B)}} \left(\bigvee_{\alpha\in Ord} (\ [\![a = \check{\alpha}]\!] \wedge [\![\varphi(a)]\!]\ ) \right) \\
&= \bigvee_{a\in V^{(B)}} \bigvee_{\alpha\in Ord} [\![\varphi(\check{\alpha})]\!] \\
&= \bigvee_{\alpha\in Ord} [\![\varphi(\check{\alpha})]\!].
\end{aligned}$$

□

Finalmente, se probará que si B es un álgebra de Boole completa, entonces $ZFC \vdash (V^{(B)} \models ZFC)$.

Teorema A.27. *Si B es un álgebra de Boole completa, entonces $V^{(B)}$ es un modelo B-valuado de ZFC.*

Demostración. Se verá que $[\![\varphi]\!] = 1$ para cada $\varphi \in ZFC$.

Extensionalidad.

Sean $a, b \in V^{(B)}$. Por (2) en el teorema 2.53 y de la proposición A.12, se cumple

$$([\![c \in a]\!] \Rightarrow [\![c \in b]\!]) \leqslant (a(c) \Rightarrow [\![c \in b]\!])$$

para cualquier $c \in dom(a)$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
[\![\forall c(c \in a \to c \in b)]\!] &= \bigwedge_{c\ \in\ V^{(B)}} ([\![c \in a]\!] \Rightarrow [\![c \in b]\!]) \\
&\leqslant \bigwedge_{c\ \in\ dom(a)} ([\![c \in a]\!] \Rightarrow [\![c \in b]\!]) \\
&\leqslant \bigwedge_{c\ \in\ dom(a)} (a(c) \Rightarrow [\![c \in b]\!]) \\
&= [\![a \subseteq b]\!].
\end{aligned}$$

Así, por simetría se cumple que $[\![\forall c(c \in b \to c \in a)]\!] \leqslant [\![b \subseteq a]\!]$. En consecuencia $[\![\forall c(c \in a \leftrightarrow c \in b)]\!] \leqslant [\![a = b]\!]$.

Por (A.2) en la proposición A.11, se cumple

$$[\![\forall c(c \in a \leftrightarrow c \in b) \to (a = b)]\!] = 1.$$

Par.

Sean $a, b \in V^{(B)}$. Se define $c \in V^{(B)}$ como $dom(c) = \{a, b\}$ y $c(a) = c(b) = 1$. Así, por (1) en la definición 2.52, se cumple $[\![(a \in c) \wedge (b \in c)]\!] = 1$ y por la propiedad (2) del corolario 2.54 se tiene

$$[\![\forall x \in c((x = a) \vee (x = b))]\!] = \bigwedge_{x \in dom(c)} (c(x) \Rightarrow [\![(x = a) \vee (x = b)]\!])$$
$$= (c(a) \Rightarrow [\![(a = a) \vee (a = b)]\!]) \wedge (c(b) \Rightarrow [\![(b = a) \vee (b = b)]\!]) = 1.$$

Separación.

Sean $x \in V^{(B)}$ y φ una fórmula en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Se verá que existe algún $y \in V^{(B)}$ tal que $[\![y \subseteq x]\!] = 1$ y que

$$[\![\forall z \in x(\varphi(z) \leftrightarrow z \in y)]\!] = 1.$$

Sea $y \in V^{(B)}$ definido por $dom(x) = dom(y)$ y $y(t) = (x(t) \wedge [\![\varphi(t)]\!])$. De esta manera, por (2) en el teorema 2.53, si $t \in dom(y)$, entonces se cumple $y(t) \leqslant x(t) \leqslant [\![t \in x]\!]$. Así, por (A.2) en la proposición A.11 y por (2) en la definición 2.52, se cumple $[\![y \subseteq x]\!] = 1$. Sea $z \in V^{(B)}$, de esta manera, se tiene

$$\begin{aligned}
[\![z \in y]\!] &= \bigvee_{w \in dom(y)} (y(w) \wedge [\![w = z]\!]) \\
&= \bigvee_{w \in dom(x)} (x(w) \wedge [\![\varphi(w)]\!] \wedge [\![w = z]\!]) \\
&= \bigvee_{w \in dom(x)} (x(w) \wedge [\![\varphi(z)]\!] \wedge [\![w = z]\!]) \\
&= [\![z \in x]\!] \wedge [\![\varphi(z)]\!].
\end{aligned}$$

Para ver que $[\![\forall w \in x(\varphi(w) \leftrightarrow (w \in y))]\!] = 1$, por el corolario 2.54, basta que ver $x(w) \leqslant [\![\varphi(w) \leftrightarrow (w \in y))]\!]$ para todo $w \in dom(x)$, es decir,

$$x(w) \leqslant [\![\varphi(w)]\!] \Rightarrow [\![w \in y]\!] \text{ y } x(w) \leqslant [\![w \in y]\!] \Rightarrow [\![\varphi(w)]\!].$$

Para probar la primera desigualdad basta notar que

$$x(w) \wedge [\![\varphi(w)]\!] \leqslant [\![w \in x]\!] \wedge [\![\varphi(w)]\!] = [\![w \in y]\!].$$

Mientras que para la segunda desigualdad.

$x(w) \leqslant [\![w \in y]\!] \Rightarrow [\![\varphi(w)]\!]$ si y solo si $x(w) \wedge [\![w \in y]\!] \leqslant [\![\varphi(w)]\!]$, lo cual es equivalente a $x(w) \wedge [\![w \in x]\!] \wedge [\![\varphi(w)]\!] \leqslant [\![\varphi(w)]\!]$. Por lo tanto

$$[\![\forall w \in x(\varphi(w) \leftrightarrow (w \in y))]\!] = 1.$$

Unión.

Se verá que para cada $x \in V^{(B)}$ existe algún $y \in V^{(B)}$ tal que cumple

$$[\![\forall z \in x(\forall w \in z(w \in y))]\!] = 1.$$

Se define $y \in V^{(B)}$ como

$$dom(y) = \bigcup_{z \in dom(x)} dom(z) \text{ y tal que}$$
$$y(t) = 1 \text{ para cada } t \in dom(y).$$

Para probar que $\bigwedge_{z \in dom(x)} (x(z) \Rightarrow [\![\forall w \in z(w \in y)]\!]) = 1$ se considera $z \in dom(x)$ y se verá que $x(z) \leqslant [\![\forall w \in z(w \in y)]\!]$, es decir,

$$x(z) \leqslant \bigwedge_{z \in dom(x)} (x(z) \Rightarrow [\![\forall w \in z(w \in y)]\!]).$$

De esta manera, basta ver que $x(z) \leqslant (z(w) \Rightarrow [\![w \in y]\!])$ para todo $w \in dom(z)$. Por otra parte, como $w \in dom(z)$ y $z \in dom(x)$, entonces $w \in dom(y)$ y así $1 = y(w) \leqslant [\![w \in y]\!]$. Por lo que $x(z) \wedge z(w) \leqslant [\![w \in y]\!]$. De tal modo, por la proposición A.12, se cumple $x(z) \leqslant (z(w) \Rightarrow [\![w \in y]\!])$. Por lo tanto

$$[\![\exists y(\forall z \in x(\forall w \in z(w \in y)))]\!] = 1.$$

Potencia.

Se verá que para cada $x \in V^{(B)}$ existe algún $y \in V^{(B)}$ tal que

$$[\![\forall z(z \subseteq x \rightarrow (z \in y))]\!] = 1.$$

Se define $y \in V^{(B)}$ como

$$dom(y) = \{u \in V^{(B)} \mid dom(u) = dom(x)\},$$
$$\text{tal que } y(u) = [\![u \subseteq x]\!].$$

Sea $z \in V^{(B)}$. Se verá que $[\![z \subseteq x]\!] \leqslant [\![z \in y]\!]$, para esto se considera $z \in V^{(B)}$ y se define $z' \in V^{(B)}$ como $dom(z') = dom(x)$ y $z'(t) = [\![t \in z]\!]$. De esta manera $z' \in dom(y)$, por lo que se debe ver que $[\![z \subseteq x]\!] \leqslant [\![z = z']\!] \wedge [\![z' \in y]\!]$. Primeramente, se cumple

$$\begin{aligned}
[\![z' \subseteq z]\!] &= \bigwedge_{t \in dom(z')} (z'(t) \Rightarrow [\![t \in z]\!]) \\
&= \bigwedge_{t \in dom(z')} ([\![t \in z]\!] \Rightarrow [\![t \in z]\!]) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ahora, se verá que

$$[\![z \subseteq x]\!] \leqslant [\![((x \cap z) \subseteq z') \wedge (z' \subseteq z) \wedge (z \subseteq x)]\!] \leqslant [\![z = z']\!].$$

Para esto, basta probar que $[\![(x \cap z) \subseteq z']\!] = 1$. Se cumple

$$\begin{aligned}
[\![w \in (x \cap z)]\!] &= [\![w \in x]\!] \wedge [\![w \in z]\!] \\
&= \left(\bigvee_{t \in dom(x)} (x(t) \wedge [\![t = w]\!]) \right) \wedge [\![w \in z]\!] \\
&= \bigvee_{t \in dom(x)} (x(t) \wedge [\![t = w]\!] \wedge [\![w \in z]\!]) \\
&\leqslant \bigvee_{t \in dom(x)} ([\![t = w]\!] \wedge [\![t \in z]\!]) \\
&= \bigvee_{t \in dom(x)} ([\![t = w]\!] \wedge z'(t)) \\
&= [\![w \in z']\!].
\end{aligned}$$

Falta ver que $[\![z \subseteq x]\!] \leqslant [\![z' \in y]\!]$. Ocurre

$$\begin{aligned}
[\![z \subseteq x]\!] &= [\![\forall w(w \in z \to w \in x)]\!] \\
&= \bigwedge_{w \in V^{(B)}} ([\![w \in z]\!] \Rightarrow [\![w \in x]\!]) \\
&\leqslant \bigwedge_{w \in dom(z')} (z'(w) \Rightarrow [\![w \in x]\!]) \\
&= [\![z' \subseteq x]\!] \\
&= y(z') \\
&\leqslant [\![z' \in y]\!].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[\![\exists y(\forall z(z \subseteq x \to (z \in y)))]\!] = 1.$$

Infinito. Como "x es un conjunto inductivo" es una fórmula Δ_0,[9] por el corolario A.23, se cumple que

$$[\![\breve{\omega} \text{ es un conjunto inductivo}]\!] = 1.$$

Reemplazo.

Sean $x \in V^{(B)}$ y φ una fórmula con dos variables *libres* en el lenguaje de la teoría de conjuntos tales que si $\varphi(x, y)$ y $\varphi(x, z)$ son verdaderas en la teoría de conjuntos, entonces $y = z$. Se verá que existe algún $y \in V^{(B)}$ tal que

$$[\![\forall u \in x(\exists v \varphi(u, v) \to \exists w \in y \ (\varphi(u, w)))]\!] = 1.$$

Se define $y \in V^{(B)}$ como

$$dom(y) = \bigcup \{S_u \mid u \in dom(x)\}$$
$$\text{tal que } y(t) = 1,$$

[9] Se sigue de [11], lema 12.10, pág 164.

donde $S_u \subseteq V^{(B)}$ es un *conjunto de elección* tal que

$$\bigvee_{v\in V^{(B)}} [\![\varphi(u,v)]\!] = \bigvee_{v\in S_u} [\![\varphi(u,v)]\!].$$

Sea $u \in dom(x)$. Por el corolario 2.54, basta que ver

$$\begin{aligned} x(u) &\leqslant [\![\exists v\varphi(u,v) \rightarrow \exists w \in y\ (\varphi(u,w))]\!] \\ &= ([\![\exists v\varphi(u,v)]\!]) \Rightarrow ([\![\exists w \in y\ (\varphi(u,w))]\!]). \end{aligned}$$

Por (A.2) en la proposición A.11, basta probar que

$$[\![\exists v\varphi(u,v)]\!] \leqslant [\![\exists w \in y\ (\varphi(u,w))]\!].$$

Así

$$\begin{aligned} [\![\exists v\varphi(u,v)]\!] &= \bigvee_{a\in V^{(B)}} [\![\varphi(u,a)]\!] \\ &= \bigvee_{a\in S_u} [\![\varphi(u,a)]\!] \\ &\leqslant \bigvee_{a\in dom(y)} [\![\varphi(u,a)]\!] \\ &= \bigvee_{a\in dom(y)} (\ y(a) \wedge [\![\varphi(u,a)]\!]\ ) \\ &= [\![\exists w \in y\ (\varphi(u,w))]\!] \qquad\qquad \text{por el corolario 2.54.} \end{aligned}$$

De esta manera, se cumple

$$[\![\exists y(\forall u \in x(\exists v\varphi(u,v) \rightarrow \exists w \in y\ (\varphi(u,w))))]\!] = 1.$$

Buena Fundación.

Sea $x \in V^{(B)}$, se verá que

$$[\![\exists u(u \in x) \rightarrow \exists y \in x(\forall z \in y(z \notin x))]\!] = 1.$$

Suponga que no, es decir,

$$[\![\exists u(u \in x) \wedge \forall y \in x(\exists z \in y(z \in x))]\!] = b \neq 0.$$

Sea $y \in V^{(B)}$ de rango mínimo tal que $[\![y \in x]\!] \wedge b \neq 0$. De esta manera, $[\![y \in x]\!] \wedge b \leqslant [\![\exists z \in y(z \in x)]\!]$. Así, existe algún $z \in dom(y)$ tal que $[\![z \in x]\!] \wedge b \neq 0$ y en consecuencia $rang(z) < rang(y)$. Lo cual es una contradicción.

Elección.

Por el *axioma de elección* en V, por el hecho de que "X es bien ordenable" es una fórmula Σ_1[10] y por el corolario A.24, se sabe que para todo $s \in V$

$$[\![\check{s} \text{ es bien ordenable }]\!] = 1.$$

[10]Se sigue de [14], teorema 3.11, pág 121.

De tal modo, se verá para cada $x \in V^{(B)}$ existen $s \in V$ y una “función” $f \in V^{(B)}$ tales que

$$[\![f \text{ es una función sobre } \check{s} \text{ y } x \subseteq Im(f)]\!] = 1. \tag{A.8}$$

De esta manera, sea $s = dom(x)$ y se define $f \in V^{(B)}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} dom(f) &= \{\langle \check{y}, y\rangle^{(B)} \mid y \in s\} \\ f(t) = 1 &\text{ para toda } t \in dom(f) \end{aligned}$$

donde para cualesquiera $u, v \in V^{(B)}$

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle^{(B)} &= \{\{u\}^{(B)}, \{u, v\}^{(B)}\}^{(B)}, \\ \{u, v\}^{(B)} &= \{u\}^{(B)} \cup \{v\}^{(B)}, \\ \{u\}^{(B)} &= \{\langle u, 1\rangle\}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Se verá que:

- $[\![x \subseteq Im(f)]\!] = 1$, donde $Im(f)$ está caracterizado en $V^{(B)}$ de la siguiente manera
$$\begin{aligned} dom(Im(f)) &= \{y \mid \langle \check{y}, y\rangle^{(B)} \in dom(f)\}, \\ Im(f)(y) &= f(\check{y}, y). \end{aligned}$$
  De esta manera, es fácil ver que $[\![x \subseteq Im(f)]\!] = 1$.

- $[\![f \text{ es una función sobre } \check{s}]\!] = 1$.

  Para probar esto, si se considera una función g en V que cumple $g(\check{y}) = y$ para todo $y \in s$, entonces g es una función sobre s y por el corolario A.23, se garantiza que $[\![\check{g} \text{ es una función sobre } \check{s}]\!] = 1$. Por lo tanto, se cumple (A.8).

En conclusión, se cumple

$$V^{(B)} \models ZFC. \qquad \square$$

Proposición A.28. *Para todo $u \in V^{(B)}$ se cumple*

$$L(u) = \bigvee_{x \in L} [\![u = \check{x}]\!]$$

donde la fórmula $L(x)$ indica que “x es constructible”, es decir, “$x \in L$”.

Demostración. Por la definición de $L(u)$ se cumple

$$[\![L(u)]\!] = [\![\exists \alpha \in Ord\ (u \in L_\alpha)]\!] = \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![u \in L_{\check{\alpha}}]\!].$$

Como la fórmula $x = L_\alpha$ es una fórmula Σ_1, por el corolario A.24, se cumple

$$[\![\check{x} = L_{\check{\alpha}}]\!] = 1.$$

De esta manera

$$[\![\check{L_\alpha} = L_{\check{\alpha}}]\!] = 1.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} [\![L(u)]\!] &= \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![u \in L_{\check{\alpha}}]\!] \\ &= \bigvee_{\alpha \in Ord} [\![u \in \check{L_\alpha}]\!] \\ &= \bigvee_{\alpha \in Ord} \bigvee_{x \in L_\alpha} [\![u = \check{x}]\!] \\ &= \bigvee_{x \in L} [\![u = \check{x}]\!]. \end{aligned}$$

□

Teorema A.29. *Si B es un álgebra de Boole que satisface la ccc, entonces para cualesquiera ordinal α y $x, y \in V$ se cumple que:*

1. *Si α es un cardinal, entonces $V^{(B)} \models \check{\alpha}$ es un cardinal.*
2. *$V^{(B)} \models \check{\aleph_\alpha} = \aleph_{\check{\alpha}}$.*
3. *$|x| = |y|$ si y solo si $V^{(B)} \models |\check{x}| = |\check{y}|$.*
4. *Si α es un cardinal regular, entonces $V^{(B)} \models \check{\alpha}$ es cardinal regular.*
5. *Si α es un cardinal regular no numerable y $\xi \in V^{(B)}$ satisface $[\![\xi < \check{\alpha}]\!] = 1$, entonces existe un ordinal $\beta < \alpha$ tal que $[\![\xi < \check{\beta}]\!] = 1$.*

Demostración. 1. Sea α cardinal. Si $\alpha < \omega$, entonces como

$$\forall \alpha (\alpha \in \omega \to \alpha \text{ es un cardinal})$$

es un teorema de ZF, por el teorema A.27, se cumple

$$V^{(B)} \models \forall \alpha (\alpha \in \check{\omega} \to \alpha \text{ es un cardinal}).$$

Si $\alpha = \aleph_0$, entonces la fórmula "$x = \aleph_0$" es Δ_0[11]. Por el corolario A.23 y el teorema A.27, se obtiene

$$V^{(B)} \models \check{\aleph_0} = \aleph_0. \tag{A.10}$$

En consecuencia, $V^{(B)} \models$ "$\check{\alpha}$ es un cardinal" para todo $\alpha \leqslant \omega$.

Suponga $\omega < \alpha$, entonces basta probar que para toda $f \in V^{(B)}$ y $\beta < \alpha$ se cumple

$$[\![f \text{ es función tal que } dom(f) = \check{\beta} \text{ y } Im(f) = \check{\alpha}]\!] = 0.$$

Suponga lo contrario, entonces existen $f \in V^{(B)}$ y $\beta < \alpha$ tales que

$$a = [\![f \text{ es función tal que } dom(f) = \check{\beta} \text{ y } Im(f) = \check{\alpha}]\!] \neq 0.$$

[11]Ver [11], lema 12.10, pág 164

De esta manera

$$0 \neq a \leqslant \bigwedge_{\eta<\alpha} \bigvee_{\xi<\beta} \left([\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!] \wedge a \right).$$

De tal modo, se sigue que para cada $\eta < \alpha$ existe al menos un $\xi_\eta < \beta$ tal que $[\![f(\check{\xi_\eta}) = \check{\eta}]\!] \wedge a \neq 0$. Como α no es numerable y $\beta < \alpha$, entonces debe existir algún $\gamma < \beta$ tal que el conjunto $X = \{\eta < \alpha \mid \xi_\eta = \gamma\}$ no es numerable. Así, el conjunto

$$\{[\![f(\check{\gamma}) = \check{\eta}]\!] \wedge a \mid \eta \in X\}$$

es una anticadena no numerable en B lo cual es una contradicción. Así $a = 0$ y en consecuencia se cumple (1).

2. Se verá por inducción que, para todo ordinal α, se cumple

$$V^{(B)} \models \check{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_{\check{\alpha}}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces se cumple (A.10). Suponga $0 < \alpha$ y que para toda $\beta < \alpha$ ocurre $V^{(B)} \models \check{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_{\check{\beta}}$. De esta manera, se cumple

$$\begin{aligned}
\aleph_0 \leqslant \xi < \aleph_\alpha \text{ implica } |\xi| = \aleph_\beta \text{ para algún } \beta < \alpha & \\
V^{(B)} \models |\check{\xi}| = |\check{\aleph_\beta}| & \qquad \text{por el lema 2.57} \\
V^{(B)} \models |\check{\xi}| \leqslant \aleph_{\check{\beta}} & \qquad \text{por hipótesis} \\
V^{(B)} \models |\check{\xi}| < \aleph_{\check{\alpha}} & \\
V^{(B)} \models \check{\xi} < \aleph_{\check{\alpha}}. &
\end{aligned}$$

Además, si $\zeta < \aleph_0$, entonces $V^{(B)} \models \check{\zeta} < \check{\aleph_0}$. En consecuencia

$$V^{(B)} \models \check{\zeta} < \aleph_{\check{\alpha}}.$$

De tal modo, si $\xi < \aleph_\alpha$, entonces $V^{(B)} \models \check{\xi} < \aleph_{\check{\alpha}}$. Así

$$\begin{aligned}
[\![\eta < \check{\aleph_\alpha}]\!] &= \bigvee_{\xi<\aleph_\alpha} [\![\eta = \check{\xi}]\!] \\
&= \bigvee_{\xi<\aleph_\alpha} \left([\![\eta = \check{\xi}]\!] \wedge [\![\check{\xi} < \aleph_{\check{\alpha}}]\!] \right) \qquad \text{por lo anterior} \\
&\leqslant [\![\eta < \aleph_{\check{\alpha}}]\!].
\end{aligned}$$

Así, $V^{(B)} \models \forall\eta(\eta < \check{\aleph_\alpha} \rightarrow \eta < \aleph_{\check{\alpha}})$ y en consecuencia $V^{(B)} \models \check{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_{\check{\alpha}}$.

Falta ver por inducción sobre α que $V^{(B)} \models \aleph_{\check{\alpha}} \leqslant \check{\aleph_\alpha}$.

Por (1), se cumple $V^{(B)} \models \check{\aleph_\alpha}$ es un cardinal. De tal modo, si $\beta < \alpha$, entonces $V^{(B)} \models \check{\aleph_\beta} < \check{\aleph_\alpha}$ y por hipótesis de inducción $V^{(B)} \models \check{\aleph_\beta} = \aleph_{\check{\beta}}$.

De esta manera $V^{(B)} \models \aleph_{\check{\beta}} \leqslant \check{\aleph_\alpha}$, en consecuencia

$$\begin{aligned} 1 &= [\![\check{\aleph_\alpha} \text{ es un cardinal}]\!] \wedge \bigwedge_{\beta<\alpha} [\![\aleph_{\check{\beta}} \leqslant \check{\aleph_\alpha}]\!] \\ &= [\![\check{\aleph_\alpha} \text{ es un cardinal } \wedge \forall \beta < \check{\alpha} (\aleph_{\check{\beta}} \leqslant \check{\aleph_\alpha})]\!] \\ &\leqslant [\![\aleph_{\check{\alpha}} \leqslant \check{\aleph_\alpha}]\!]. \end{aligned}$$

Por el principio de inducción fuerte, se cumple (2).

3. Se sigue inmediatamente de (1) y (2).

4. Sea α un cardinal regular y sin pérdida de generalidad suponga $\aleph_0 < \alpha$.

   Suponga que $[\![\check{\alpha} \text{ no es regular}]\!] \neq 0$, sea $\varphi(x,y)$ la fórmula "x es una función cofinal de y a $\check{\alpha}$". Así

$$0 \neq [\![\check{\alpha} \text{ no es regular}]\!] = [\![\exists \xi < \check{\alpha}\ \exists f\ \varphi(f,\xi)]\!] = \bigvee_{\beta<\alpha} [\![\exists f\ \varphi(f,\beta)]\!].$$

   De esta manera, existe algún $\beta < \alpha$ tal que $0 \neq [\![\exists f\ \varphi(f,\beta)]\!] = a$ para algún $a \in B^+$. Por el lema A.20, existe algún $f \in V^{(B)}$ tal que $a = [\![\varphi(f,\beta)]\!]$. De esta manera

$$\begin{aligned} 0 \neq a &\leqslant [\![Im(f) \text{ es cofinal en } \check{\alpha}]\!] \\ &= \bigwedge_{\eta<\alpha} \bigvee_{\xi<\beta} \bigvee_{\mu \geqslant \eta} [\![f(\check{\xi}) = \check{\mu}]\!]. \end{aligned}$$

   De lo anterior se sigue que para cada $\eta < \alpha$ existen ordinales $\xi_\eta < \beta$ y $\mu_\eta < \alpha$ tales que $[\![f(\check{\xi_\eta}) = \check{\mu_\eta}]\!] \wedge a \neq 0$. Como α es regular y $\beta < \alpha$, entonces existe $\gamma < \beta$ tal que $X = \{\eta < \alpha \mid \xi_\eta = \gamma\}$ tiene cardinalidad α. Así,

$$\{[\![f(\check{\gamma}) = \check{\mu_\eta}]\!] \wedge a \mid \eta \in X\}$$

   es una anticadena de cardinalidad $\alpha > \aleph_0$, lo cual es una contradicción. De esta manera, se sigue (4).

5. Suponiendo la hipótesis, el conjunto $\{[\![\xi = \check{\eta}]\!] \mid \eta < \alpha\}$ es una anticadena en B y en consecuencia $X = \{\eta < \alpha \mid [\![\xi = \check{\eta}]\!] \neq 0\}$ es numerable. Sea $\beta = sup(X) + 1$, así $\beta < \alpha$ y entonces

$$\begin{aligned} 1 = [\![\xi < \check{\alpha}]\!] &= \bigvee_{\eta<\alpha} [\![\xi = \check{\eta}]\!] = \bigvee_{\eta \in X} [\![\xi = \check{\eta}]\!] \\ &\leqslant \bigvee_{\eta<\beta} [\![\xi = \check{\eta}]\!] = [\![\xi < \check{\beta}]\!]. \end{aligned}$$

   De ahí, (5) se sigue.

$\square$

Bibliografía

[1] Barr, Michael y Wells, Charles: *Toposes, Triples and Theories*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1984, ISBN 9780387961156.

[2] Bell, John L.: *Toposes and Local Set Theories An Introduction*. Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications, 1988, ISBN 0198532741.

[3] Bell, John L.: *Set Theory, Boolean-Valued Models and Independence Proofs, Third Edition*. Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications, 2005, ISBN 9780198568520.

[4] Blass, Andreas y Ščedrov, Andrej: *Freyd's models for the independence of the axiom of choice*, volumen 404. American Mathematical Society., 1989.

[5] Borceux, Francis: *Handbook of Categorical Algebra 3*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994, ISBN 0521441803.

[6] Bridge, Jane: *Beginning Model Theory: The Completeness Theorem and Some Consequences*. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 1977, ISBN 9780198531579.

[7] Cantor, Georg: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 84, 1878.

[8] Cohen, Paul: *The Independence of the Continuum Hypothesis*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 50, Dec 1963.

[9] Enderton, Herbert B.: *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 2001, ISBN 9780122384523.

[10] Hamkins, Joel: *The set-theoretic multiverse*. The Review of Symbolic Logic, 5, Agosto 2011.

[11] Jech, Thomas: *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003, ISBN 3540440852.

[12] Johnstone, Peter T.: *Sketches of an Elephant, A Topos Theory Compendium Volume 1.* Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 2002, ISBN 0198534256.

[13] Koppelberg, Sabine: *Handbook of Boolean Algebras Volume 1.* Elsevier Science Publishers B.V., 1989, ISBN 0 444 70261 X.

[14] Kunen, Kenneth: *Set Theory An Introduction to Independence Proofs.* Studies in logic and the foundations of mathematics. Elsevier Science Publishers, 1992, ISBN 0444868399.

[15] Kunen, Kenneth: *Set Theory.* Studies in logic and the foundations of mathematics. College Publications, 2013, ISBN 9781848900509.

[16] Lawvere, F. William y Rosebrugh, Robert: *Sets for Mathematics.* Cambridge University Press, 2003, ISBN 9780511077944.

[17] Lawvere, F.William: *Variable Quantities and Variable Structures in Topoi.* Algebra, Topology and Category Theory, A Collection of Papers in Honor of Samuel Eilenberg, 1976.

[18] Mac Lane, Saunders: *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1978, ISBN 9780387984032.

[19] Mac Lane, Saunders y Moerdijk, Ieke: *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory.* Universitext. Springer-Verlag New York, 1992, ISBN 9780387977102.

[20] Mendelson, Elliott: *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall, 2009, ISBN 9781584888765.

[21] Ščedrov, Andrej: *Forcing and classifying topoi*, volumen 295 de *Memoirs of the American Mathematical Society.* American Mathematical Society., 1984.

[22] Todorchevich, S. y Farah, I.: *Some Applications of the Method of Forcing.* Series in Pure and Applied Mathematics. YENISEI, 1995.

[23] Wodin, W. Hugh: *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal.* series in Logic and its applications. De Gruyter, 2010, ISBN 9783110197020.