



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COSMOLOGÍA DE EXTENSIONES DE LA RELATIVIDAD
GENERAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
FÍSICO

PRESENTA
HANSEL ARGYLL GORDILLO RUIZ



DIRECTOR DE TESIS
DR. SAÚL NOÉ RAMOS SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Hansel Argyll

Gordillo

Ruiz

9611373632

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

415083308

2. Datos del tutor

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dr

Hernando

Quevedo

Cubillos

4. Datos de sinodal 2

Dr

Mariano

Chernicoff

Minsberg

5. Datos del sinodal 3

Dr

Sébastien Mickael Marc

Fromenteau

6. Datos del sinodal 4

Dr

Jorge Luis

Cervantes

Cota

7. Datos del trabajo escrito

Cosmología de extensiones de la relatividad general

82 p

2020

Dedicada a mi madre, Aurora Ruiz.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios, el arquitecto del Universo, quien me permite estudiar su creación mediante las leyes de la física.

A mis padres, Haroldo y Aurora. Quienes siempre me apoyaron y confiaron en mí. Me inculcaron de valores y de enseñanzas para llegar a ser la persona que soy hoy. Mi madre siempre estuvo detrás de mí sin importar la situación, y me apoyó en todo momento. Ni una vida me alcanzaría para agradecerte todo lo que has hecho por mí, gracias mamá.

A mi hermana Gretel, con la que siempre pude contar en cualquier situación. Gracias por siempre estar ahí para escucharme y apoyarme. Gracias por ser mi mejor amiga y por haber compartido tantos momentos conmigo.

A mis abuelitos: Jorge y América, quienes son los pilares de mi familia. Siempre mostrándome su cariño y apoyo a lo largo de mi vida. Gracias por enseñarme tantas cosas y aconsejarme en todo momento.

A mis tíos: Jorge y Eliazú, con los que siempre puedo contar. Gracias por creer en mí y por proveerme de consejos y experiencias de la vida.

A mis tíos: Aldo y Rosa, quienes estuvieron siempre conmigo desde mi llegada a la Ciudad de México. Gracias por siempre estar conmigo y por ser para mí un gran apoyo.

A mis amigos de toda la vida: Bruno, Mario, Leonardo y Jordán, con quienes viví muchas experiencias y aprendí valiosas lecciones. Gracias por escucharme y apoyarme.

A mis amigos de la facultad: Luis y Javier, juntos pudimos sobrepasar los distintos obstáculos que nos enfrentamos durante la carrera. Gracias por siempre estar en las buenas y en las malas.

A mis profesores, en especial al Dr. Saúl Ramos quien, desde que lo conocí en mi servicio social, no ha dejado de apoyarme y alentarme a ser un mejor científico. Me enseñó las herramientas necesarias para mis primeros pasos en la investigación. Gracias por introducirme a la ciencia.

Esta investigación fue realizada con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN100217 “Altas energías y cuerdas tras el hallazgo del Higgs.” Agradezco a la DGAPA la beca recibida. Este trabajo fue parcialmente apoyado por los proyectos CONACyT F-252167 y 278017, así como por el PIIIF.

Índice general

1	La necesidad de modificar la gravedad	1
2	Elementos básicos de cosmología	5
2.1	El modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	5
2.2	Inflación	8
2.2.1	Inflación por medio de un campo escalar	9
2.2.2	Aproximación de slow-roll	10
2.3	Perturbaciones cosmológicas	11
2.3.1	Fluctuaciones escalares	12
2.3.2	Fluctuaciones en la curvatura	18
2.3.3	Fluctuaciones tensoriales	25
2.4	CMB	27
3	Inflación taquiónica	31
3.1	Campo taquiónico	32
3.2	Normalización del campo taquiónico	34
3.3	Parámetros de Slow-Roll	37
3.4	Perturbaciones del campo taquiónico	39
3.5	Inflación taquiónica por medio de un potencial exponencial	46
4	Teorías del tipo $F(\mathbf{R})$	51
4.1	Campos escalares a partir de teorías $F(\mathbf{R})$	52
4.1.1	Teorías del tipo $F(\mathbf{R})$ a partir de campos escalares	54
4.2	Modelo $F(\mathbf{R})$ de Starobinsky	55
4.2.1	Inflación de Starobinsky	56
4.2.2	Teoría de Starobinsky en el marco de Jordan	59
4.3	Potencial de Starobinsky modificado	65
5	Conclusiones	71

Bibliografía

75

Capítulo 1

La necesidad de modificar la gravedad

En un principio se pensaba que la gravedad actuaba como una fuerza a distancia, por lo cual las interacciones gravitatorias ocurrían de manera instantánea. No fue sino hasta principios del siglo XX cuando Albert Einstein desarrollaría la teoría de la relatividad general, modelo que actualmente utilizamos para describir la gravedad. En la relatividad general, la gravedad se considera como una deformación de la geometría del espacio-tiempo producida por la materia y energía; la velocidad de propagación de las perturbaciones de la curvatura del espacio-tiempo no es instantánea, sino que se propagan a la velocidad de la luz. La relatividad general es ampliamente aceptada como la teoría que describe las interacciones gravitacionales en nuestro espacio-tiempo. En esta teoría se basa el modelo estándar de la cosmología para describir nuestro Universo.

El modelo cosmológico estándar, conocido como modelo Λ CDM (por las siglas en inglés de *Lambda Cold Dark Matter*), provee una descripción del Universo en el que este se encuentra en su mayoría compuesto por, de acuerdo a las mediciones del satélite Planck [1], energía oscura en un 68 % (este término correspondiente a una constante cosmológica Λ en las ecuaciones de campo de Einstein), materia oscura fría en un 27 % y un 5 % restante correspondiente a la materia bariónica que compone los átomos y fotones que observamos diariamente. El modelo Λ CDM provee una explicación razonable de la distribución de las galaxias a gran escala, así como de la estructura del espectro de la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB, por las siglas en inglés de *Cosmic Microwave Background*). Nuestro Universo homogéneo e isotrópico gobernado por las ecuaciones de Einstein debió haber comenzado como una singularidad de densidad infinita, esto es conocido como las hipótesis elementales de la teoría del Big Bang. La evidencia remanente que tenemos, proveniente de los primeros 380,000 años del Universo, es la radiación correspondiente a una temperatura de 2.7 K del CMB; el espectro asociado al CMB es muy similar al espectro de la radiación proveniente de un cuerpo negro, además de ser perfectamente isotrópico.

La homogeneidad y la isotropía del Universo traen consigo problemas que no pueden explicarse con lo planteado hasta ahora. Para que exista homogeneidad, se necesita que diferentes lugares del Universo separados a distancias muy grandes lleguen al equilibrio termodinámico, pero estas interacciones son imposibles debido a que la información no puede viajar a velocidades más altas que

la velocidad de la luz en el vacío; a esto se le conoce como el problema del horizonte. Existe también el problema de planitud, que se refiere a las condiciones muy específicas que debió tener el Universo temprano para llegar a una geometría tridimensional plana como la que observamos en el Universo actualmente. El problema del monopolo consiste en que, de acuerdo a las teorías de Gran Unificación, en las etapas de mayor temperatura del Universo, se produciría una gran cantidad de monopolos magnéticos (partículas elementales hipotéticas que poseen un solo polo magnético) que deberían estar presentes hasta el día de hoy. Una expansión acelerada a temperaturas menores provocaría que la densidad de los monopolos en el Universo disminuyera en varias escalas de magnitud, siendo muy difícil observar uno. Además de resolver estos problemas, la inflación también puede explicar el mecanismo por el cual las inhomogeneidades primordiales dieron lugar a la formación de las estructuras a gran escala que observamos hoy en día. La inflación es un período temprano de expansión acelerada del Universo en el que la gravedad actúa como una fuerza repulsiva. La teoría más sencilla para modelar la inflación sería agregar un campo escalar homogéneo, no acoplado a la materia, en la acción total del Universo.

Aunque la inflación consigue resolver los problemas planteados anteriormente, no consigue explicar las observaciones que nos llevan a pensar en la existencia de un tipo de materia diferente a la bariónica conocida como materia oscura, y una energía de presión negativa conocida como energía oscura. La materia oscura es un tipo de materia que se agrupa de manera similar a la materia bariónica, no interactúa de manera electromagnética, por lo que solo es posible observar sus efectos gravitatorios (de ahí el nombre de oscura); todavía no ha sido detectada de manera directa en el laboratorio. La energía oscura se refiere a un tipo de energía que permea todo el espacio, esta energía contribuye a la expansión acelerada del Universo que observamos hoy en día; la energía oscura tampoco ha sido detectada directamente.

Una de las predicciones del modelo Λ CDM es que la materia se agrupa en halos que, conforme nos acercamos más a la parte central, poseen un crecimiento abrupto en la densidad, es decir, una cúspide; este resultado fue obtenido mediante simulaciones de N -cuerpos [2]. El resultado anterior no coincide con las observaciones realizadas [3], en donde se toman las curvas de rotación de las galaxias y modelos dinámicos de galaxias enanas esferoidales; las observaciones muestran que en la parte interna de los halos existe una densidad constante, es decir, un núcleo (*core*) de densidad constante. Este problema es conocido como el problema de núcleo-cúspide [4] y aún no se ha encontrado una solución definitiva a estas discrepancias.

Para poder explicar las observaciones anteriores, hemos necesitado agregar dos términos que son prácticamente desconocidos: la materia oscura y la energía oscura. Es válido pensar que la teoría de la relatividad general podría ser una teoría incompleta, es decir, que en cierto límite tengamos la teoría de Einstein, pero en escalas cosmológicas esta teoría no sea suficientemente adecuada para describir la física y, por lo tanto, tengamos estas componentes “oscuras”. En este trabajo, se plantea unas ligeras modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert; discutiremos si estas alternativas son viables para explicar la inflación y si son consistentes con los datos observados de nuestro Universo. Estas teorías deben coincidir en escalas pequeñas con la teoría usual de la relatividad general, pues su validez ha sido comprobada a estas escalas en múltiples ocasiones.

Existen dos tipos de correcciones que podemos realizar a la teoría de la relatividad general, por un lado, modificaciones geométricas, y por otro lado, mediante dinámica de campos. Las modificaciones geométricas corrigen términos de curvatura en las ecuaciones de Einstein-Hilbert, un ejemplo de estas son las teorías del tipo $F(R)$, donde R es el escalar de curvatura. En la dinámica de campos modificamos el tensor de energía-momento de la relatividad general. Dentro de la dinámica de campos podemos modificar el término cinético como en el caso de la inflación taquiónica o bien, modificar únicamente el potencial de un campo escalar homogéneo estándar, siendo equivalente a las teorías $F(R)$.

Organización de la tesis

En el capítulo 2 analizamos los elementos básicos de cosmología con los cuales se realiza la descripción de nuestro Universo. Partimos del principio cosmológico para formular una métrica adecuada a la geometría del Universo y obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein para esta geometría. Luego, introducimos el modelo inflacionario por medio de un campo escalar estándar y la aproximación de rodamiento lento o *Slow-Roll* para simplificar nuestras ecuaciones. Describimos las pequeñas fluctuaciones que ocurrieron al principio del Universo y que formaron las semillas para dar lugar a su estructura actual. Relacionamos estas fluctuaciones con las observaciones realizadas al fondo cósmico de microondas; de esta manera podemos comparar las observaciones con los distintos modelos aquí planteados.

En el capítulo 3 discutimos un tipo especial de inflación, en el que un campo taquiónico es responsable de la expansión acelerada del Universo. Esta teoría es una modificación al tensor de energía-momento, por lo que seguimos utilizando las ecuaciones de Einstein para resolverlas, esto con el objetivo de comparar con los resultados obtenidos de una ligera modificación directa en la teoría como se muestra en el capítulo 4. Analizamos sus distintas propiedades y su viabilidad como teoría inflacionaria; se muestran comparaciones con el campo escalar estándar. Se desarrolló una teoría de perturbaciones para este campo especial y se compararon sus resultados con las observaciones realizadas por el satélite Planck.

En el capítulo 4, analizamos una de las modificaciones más sencillas a la relatividad general en la que la acción de Einstein-Hilbert no posee una relación lineal con el escalar de Ricci R , sino que es una función arbitraria F de este último, i. e. $F(R)$. Estudiamos las equivalencias entre esta teoría y la inflación dada por un campo escalar estándar, así como las limitaciones en la $F(R)$ para que esta equivalencia sea posible. Examinamos una $F(R)$ conocida como modelo de Starobinsky y discutimos su viabilidad como teoría inflacionaria. Finalmente, analizamos un potencial de Starobinsky modificado y las condiciones por las cuales podemos tener inflación.

En el capítulo 5 expresamos nuestras conclusiones finales de cada una de estas teorías y las comparamos. Se propone un trabajo para estudiar más a fondo estas modificaciones a la teoría de la relatividad general.

Las convenciones que utilizamos son tales que $\hbar = c = 1$, donde \hbar es la constante de Planck

y c la velocidad de la luz. De acuerdo a lo anterior, tenemos que la masa reducida de Planck es $M_p^2 = 1/8\pi G$. La convención de signos de la métrica que utilizamos es $(+, -, -, -)$.

Capítulo 2

Elementos básicos de cosmología

2.1 El modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Es posible estudiar la dinámica de todo el universo como un único sistema. La evolución del mismo es usualmente descrita mediante el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). El universo visible a gran escala parece el mismo en todas las direcciones alrededor de nosotros. Aun más, las observaciones indican que cualquier observador tiene la misma evidencia independientemente de donde se encuentre. Es decir, el universo observable es homogéneo e isotrópico a escalas grandes; esto se conoce como el *principio cosmológico*.

El principio cosmológico fue utilizado en un inicio únicamente por simplicidad matemática. Sin embargo, las evidencias obtenidas del fondo cósmico de microondas (CMB) y la estructura a grandes escalas del universo confirmaron la homogeneidad e isotropía del universo en escalas mayores a 100 Megaparsecs, donde un Megaparsec equivale a 3.26 millones de años luz. Las observaciones anteriores nos llevan a concluir que no existe un lugar privilegiado en el Universo, lo cual es equivalente al principio cosmológico. A pesar de que solo podemos observar una fracción del Universo, es válido pensar que es completamente homogéneo e isotrópico.

Bajo estas ideas, se puede encontrar una métrica adecuada para la descripción del Universo. La métrica que describe mejor una geometría acorde al principio cosmológico es la métrica de FLRW, definida mediante el intervalo

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right], \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es conocido como el factor de escala, que posee dimensiones de longitud, por lo que r es adimensional. ds mide la distancia entre 2 puntos del espacio-tiempo separados por dx^μ , donde $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$. El factor de escala permite medir la tasa de crecimiento del Universo a un tiempo t . (r, θ, ϕ) son coordenadas comóviles; una partícula inicialmente en reposo en estas coordenadas permanecerá en reposo, es decir (r, θ, ϕ) serán constantes para esta partícula. K representa la curvatura

del espacio, y puede tomar los siguientes valores:

$$K = \begin{cases} -1 & \text{el Universo es abierto,} \\ 0 & \text{el Universo es plano,} \\ 1 & \text{el Universo es cerrado.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Para describir la dinámica gravitacional de nuestro Universo, utilizamos las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y a $G_{\mu\nu}$ se le conoce como tensor de Einstein.

Consideremos el contenido del Universo como un fluido perfecto, es decir, un fluido en el que su tensor de energía-momento está únicamente determinado por su densidad de energía y presión $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$, con ρ la densidad de energía, P la presión y u la cuadrivelocidad. La isotropía del Universo implica que el fluido se encuentra en reposo en las coordenadas comóviles, la homogeneidad del Universo implica que tanto ρ como P dependen únicamente del tiempo y entonces el tensor de energía-momento es

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P). \quad (2.4)$$

Y ahora, utilizando la ecuación de conservación $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, donde ∇_μ es la derivada covariante respecto a la coordenada x^μ , además de las ecuaciones de campo de Einstein, obtenemos las ecuaciones:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (2.5a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (2.5b)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P), \quad (2.5c)$$

donde a H se le conoce como parámetro de Hubble. H no es constante en el tiempo, a diferencia de la constante de Hubble H_0 que es el valor constante del parámetro de Hubble en la época actual. Hay tres ecuaciones, sin embargo, solo dos son linealmente independientes (es fácil ver que podemos obtener la ecuación (2.5b) de (2.5c) y (2.5a) si consideramos un Universo plano y derivamos (2.5a)). Tenemos únicamente dos ecuaciones independientes y tres incógnitas; para obtener la tercera ecuación que relacione a ρ , P y a utilizamos la ecuación de estado del fluido que domina en el Universo. En este caso supusimos un fluido perfecto como modelo del sistema, por lo que

$$P = \omega\rho, \quad (2.6)$$

con ω una constante. La dinámica de nuestro Universo está descrita por la ecuación de continuidad (2.5c), la ecuación de Friedmann (2.5a) y la ecuación de estado (2.6). Si sustituimos esta ecuación

de estado en la ecuación de continuidad (2.5c), obtenemos

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}, \quad (2.7)$$

donde hemos tomado los límites de integración desde un tiempo pasado arbitrario t hasta el tiempo presente t_0 , y además $a_0 \equiv a(t_0)$ y $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$. Por convención $a_0 = 1$, pero en este trabajo lo dejaremos indicado como a_0 . Ahora, si consideramos el caso en el que la geometría tridimensional es plana, es decir $K = 0$, podemos obtener la relación entre el factor de escala y el tiempo utilizando la ecuación (2.5a),

$$a = a_0 \left[\frac{3(1+\omega)}{2} H_0(t-t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.8)$$

donde hemos tomado nuevamente los límites de integración desde un tiempo arbitrario t hasta el tiempo presente t_0 y hemos definido $H_0^2 \equiv 8\pi G\rho_0/3$. Podemos calcular el tiempo presente t_0 si imponemos que a un tiempo inicial $t = 0$, el factor de escala se anula $a(t=0) = 0$, de donde obtenemos

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0}, \quad (2.9)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.8) tenemos que

$$a = a_0 \left(\frac{3(1+\omega)}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.10)$$

A partir de aquí tenemos distintas soluciones dependiendo del valor de ω . Clasificamos los valores dependiendo del componente dominante del Universo. En el caso de un universo dominado por materia, el valor es $\omega = 0$ ya que la presión producida es despreciable (polvo). En el caso de la radiación la ecuación de estado corresponde a $\omega = 1/3$. Existe también un caso especial en el que la densidad es constante, considerando $\omega = -1$, a partir de la ecuación (2.5c), vemos que ρ no depende del tiempo. Para obtener la relación entre a y t en este caso no podemos usar la ecuación (2.10) pues no está definida para el caso $\omega = -1$; sin embargo, podemos utilizar la ecuación (2.5b) con $\rho = \rho_0$ e imponer $a_0 = a(t_0)$. Podemos ver las distintas soluciones en las siguientes ecuaciones:

$$a = a_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \omega = 0 \quad \text{materia}, \quad (2.11a)$$

$$a = a_0 \sqrt{2H_0 t}, \quad \omega = 1/3 \quad \text{radiación}, \quad (2.11b)$$

$$a = a_0 \exp(H_0(t-t_0)), \quad \omega = -1 \quad \text{expansión acelerada}. \quad (2.11c)$$

También podemos ver la evolución de la densidad de energía, en términos de $a(t)$, para las distintas soluciones:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad \omega = 0, \quad (2.12a)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad \omega = 1/3, \quad (2.12b)$$

$$\rho = \rho_0, \quad \omega = -1. \quad (2.12c)$$

Observando las ecuaciones (2.11) podemos ver que en los tres casos el Universo se expande. Sin embargo, esta expansión no es acelerada para todos los casos. Vemos que la materia y radiación producen una expansión en la que $\ddot{a} < 0$, es decir, una expansión desacelerada; mientras que para $\omega = -1$ tenemos una expansión acelerada debido a que el factor de escala es proporcional a la exponencial de t , es decir, $\ddot{a} > 0$ para este caso.

Otra propiedad interesante que podemos observar en las ecuaciones (2.12) es que la densidad de energía decrece para el caso de la materia y la radiación, mientras que para la expansión acelerada la densidad de energía y la presión son constantes todo el tiempo. Además, de la ecuación (2.5a), vemos que el parámetro de Hubble también es constante durante la expansión acelerada.

La ecuación (2.12c), correspondiente a una expansión acelerada del Universo, describe dos épocas distintas; por un lado, la expansión acelerada en la etapa temprana del Universo conocida como inflación, y por otro lado, la expansión que observamos hoy en día debido a la energía oscura. Esta expansión acelerada se considera una buena descripción de la constante cosmológica y de la energía oscura.

2.2 Inflación

Existen varios problemas cosmológicos que se observan en nuestro Universo. Uno de los problemas consiste en las observaciones realizadas del CMB, el cual posee un espectro correspondiente a un cuerpo negro. Dos fotones del CMB viniendo de direcciones opuestas poseen casi la misma temperatura. Estos fotones no están causalmente conectados por lo que no deberían haber llegado al equilibrio termodinámico y haber alcanzado una temperatura de equilibrio; es necesario entonces que en un principio estos estuvieran a una distancia cercana en la cual pudieran llegar al equilibrio y luego pasar por un proceso de expansión acelerada que eventualmente los alejara causalmente. Lo anterior es conocido como el problema del horizonte.

Tenemos también el problema de planitud; las observaciones nos dicen que el Universo actual es aproximadamente plano. Esta no es una característica estable, debieron darse condiciones muy específicas en el principio del Universo para llegar a las observaciones actuales.

Mediante la inflación cosmológica es posible resolver los problemas de planitud, el problema del horizonte y explicar las pequeñas anisotropías que observamos en el Universo a gran escala. La inflación cosmológica es una etapa temprana de expansión acelerada del Universo. Esta etapa ocurrió aproximadamente entre los primeros 10^{-36} y 10^{-32} segundos después de la singularidad del Big Bang; durante este corto período de tiempo, el Universo se expandió aproximadamente 10^{26} veces su tamaño original.

Existen distintas teorías que pueden describir una etapa inflacionaria, la más conocida es la inflación a través de un campo escalar.

2.2.1 Inflación por medio de un campo escalar

El modelo más sencillo de inflación puede ser provisto por la teoría cuántica de campos. Se propone un campo escalar normalizado homogéneo e isotrópico, mínimamente acoplado a la gravedad, conocido como inflatón. Bajo estas suposiciones, la acción del campo y la gravedad está dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R + \mathcal{L} \right] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.13)$$

con g el determinante de la métrica del espacio-tiempo de FLRW $g_{\mu\nu}$ (definida mediante (2.1)), \mathcal{L} la densidad lagrangiana del inflatón, $V(\phi)$ el potencial del inflatón y la llamada masa de Planck reducida $M_p^2 = 1/8\pi G$. Bajo esta acción, podemos obtener las ecuaciones de movimiento del inflatón mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} = 0. \quad (2.14)$$

Debemos tomar en cuenta las condiciones de isotropía y homogeneidad en el campo, por lo que el lagrangiano únicamente depende de ϕ y de las derivadas de ϕ respecto al tiempo. Entonces, nuestra ecuación de movimiento es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (2.15)$$

Ahora podemos calcular la densidad de energía y la presión del inflatón con ayuda del tensor de energía-momento del sistema. El tensor de energía-momento está definido como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.16)$$

y para el caso del inflatón, tenemos que

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.17)$$

Por lo que la densidad de energía y la presión del inflatón son

$$\rho = T^0_0 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.18a)$$

$$P = -T^i_i = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.18b)$$

Algo que notamos de inmediato es el hecho de que cuando el potencial domina sobre la energía cinética, entonces $P \approx V(\phi) \approx -\rho$, es decir, obtenemos la ecuación de estado asociada a una expansión acelerada ($\omega = -1$). A este proceso de expansión acelerada se le conoce como inflación. Por otro lado, la ecuación (2.5a) en un Universo plano ($K = 0$) ahora tiene la forma

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (2.19)$$

2.2.2 Aproximación de slow-roll

Como se mencionó anteriormente, incluyendo un campo escalar homogéneo podemos tener un escenario de inflación cuando su potencial domine sobre el término cinético en la densidad de energía y la presión. Este modelo se conoce como aproximación de rodamiento lento o slow-roll debido a que, como veremos más adelante, el potencial debe tener una inclinación pequeña y casi constante, por lo que el campo rueda lento mientras se mueve por el potencial. En términos más precisos, la aproximación de slow-roll se obtiene cuando se satisface

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi), \quad (2.20a)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}. \quad (2.20b)$$

Bajo esta aproximación, la ecuación de movimiento (2.15) ahora tiene la forma

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \approx 0. \quad (2.21)$$

Además, la ecuación de estado del sistema y las ecuaciones de Friedmann (2.5c)-(2.5a) son

$$P \approx -\rho, \quad (2.22a)$$

$$\dot{\rho} \approx 0, \quad (2.22b)$$

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_p^2} V(\phi). \quad (2.22c)$$

Para parametrizar el desarrollo de inflación en la aproximación de slow-roll se introducen los llamados parámetros de slow-roll. Para calcularlos, primero vemos que, para que ocurra una expansión acelerada del Universo necesitamos que $\frac{\ddot{a}}{a} \gg 0$, lo cual implica

$$\frac{\ddot{a}}{a} \gg 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H} + H^2 \gg 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1. \quad (2.23)$$

Nuestro objetivo es escribir la desigualdad (2.23) en términos del potencial y sus derivadas respecto al campo. Podemos calcular \dot{H} a partir de la ecuación (2.22c)

$$\dot{H} = \frac{V_\phi}{6HM_p^2} \dot{\phi} = -\frac{1}{18M_p^2} \frac{V_\phi^2}{H^2}, \quad (2.24)$$

donde $V_\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ y hemos utilizado la ecuación (2.21) en la última igualdad. De la ecuación (2.23) tenemos

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{V_\phi^2}{18M_p^2 H^4} \ll 1. \quad (2.25)$$

Utilizando entonces la ecuación (2.22c) en la ecuación (2.25), definimos nuestro primer parámetro de slow-roll,

$$\epsilon \equiv \frac{M_p^2}{2} \frac{V_\phi^2}{V^2}, \quad \epsilon \ll 1, \quad (2.26)$$

Para calcular el segundo, nos fijamos en nuestra condición (2.20b), podemos obtener $\ddot{\phi}$ de la ecuación (2.21),

$$\ddot{\phi} = -\frac{\dot{\phi}V_{\phi\phi}}{3H} - \dot{\phi}\frac{\dot{H}}{H} = -\frac{\dot{\phi}V_{\phi\phi}}{3H} + \frac{V_\phi\dot{H}}{3H^2} = -\frac{\dot{\phi}V_{\phi\phi}}{3H} - \frac{V_\phi}{3}\epsilon. \quad (2.27)$$

Ahora, al exigir la condición (2.20b), obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = -\frac{\ddot{\phi}}{V_\phi} = \frac{V_{\phi\phi}}{3V_\phi H^2} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{1}{3} \left(\epsilon - M_p^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} \right) \ll 1, \quad (2.28)$$

con lo que podemos definir nuestro segundo parámetro de slow-roll

$$\eta \equiv M_p^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V}, \quad |\eta| \ll 1. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, bajo las condiciones $\epsilon, |\eta| \ll 1$ tendremos inflación del tipo slow-roll. Podemos observar entonces que nuestros parámetros de slow-roll describen cómo debe comportarse el potencial de la teoría para que podamos tener inflación; el potencial debe tener una inclinación pequeña (de la condición (2.26)) y casi constante (de la condición (2.29)) para que pueda ser válido en nuestro modelo, de ahí el nombre de “rodamiento lento” de la partícula sobre el potencial.

Podemos definir el número N de veces en que el factor de escala crece exponencialmente desde el inicio de inflación hasta la conclusión del período inflacionario, que corresponde al momento en que cualquiera de nuestros parámetros de slow-roll alcanza el valor de 1,

$$N \equiv \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} H \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \approx - \int_{\phi_i}^{\phi_f} 3H^2 \frac{d\phi}{V_\phi} \approx \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_\phi} d\phi, \quad (2.30)$$

con t_i y t_f el tiempo al inicio y final de inflación respectivamente y $\phi_i = \phi(t_i)$, $\phi_f = \phi(t_f)$. A N se le conoce como el número de e-folds. La inflación puede resolver el problema del horizonte si el universo se expande exponencialmente por más de 60 e-folds [5].

2.3 Perturbaciones cosmológicas

Debemos encontrar una manera de poder conectar los resultados de nuestro modelo con las observaciones, para ello es necesario considerar las características que observamos en el Universo hoy en día. Para que la teoría sea consistente con el modelo estándar cosmológico es necesario que después de la inflación ocurra una etapa de recalentamiento. Durante inflación, la densidad de partículas debe disminuir hasta $n \propto a^{-3} \rightarrow 0$. Al final de la inflación, la densidad de energía del vacío almacenada

en el campo del inflatón debe ser transferida en forma de radiación, por medio del decaimiento del inflatón.

Inhomogeneidades en la densidad que surgieron durante las etapas tempranas del Universo fueron amplificadas por los efectos gravitatorios. Esto dio origen a las galaxias, cúmulos de galaxias, y todo lo que observamos a gran escala. Así pues, aunque el Universo a gran escala sea bastante homogéneo, estas imperfecciones dieron origen a las inhomogeneidades que observamos a menor escala en el Universo.

Un fluido de partículas gravitatorias es inestable respecto a pequeñas inhomogeneidades en el medio que tienden a crecer; a este proceso se le conoce como inestabilidad de Jeans. Este fenómeno puede ser visto desde la teoría de Newton con perturbaciones si consideramos un espacio-tiempo de Minkowski que contiene materia incompresible $P = 0$. Si hay alguna inhomogeneidad $\delta\rho$ en algún punto en particular del espacio, esta inhomogeneidad comenzará a atraer materia hasta ese punto. $\delta\ddot{\rho}$ será proporcional a $\delta\rho$, dando lugar a un crecimiento exponencial en la inhomogeneidad cuando las longitudes de onda sean mayores que la longitud de Jeans λ_J , i.e. $\lambda > \lambda_J$. Lo anterior se deduce de resolver las ecuaciones hidrodinámicas de un fluido con perturbaciones adiabáticas; un desarrollo completo se puede encontrar en [6].

Podemos explicar las “semillas” que dan lugar a estas inhomogeneidades que conforman la estructura del Universo si consideramos fluctuaciones cuánticas que provienen desde el período de inflación. Estas oscilan dentro del horizonte de Hubble, que determina la distancia máxima en que dos partículas pueden comunicarse a un tiempo determinado, y eventualmente salen del horizonte debido a que el factor de escala crece mucho más rápido que el horizonte de Hubble durante inflación. Una vez que la longitud de onda de las fluctuaciones son más grandes que el horizonte de Hubble, entonces los modos se vuelven constantes (se congelan) y pueden tratarse como perturbaciones clásicas. Finalmente, después de la inflación, el factor de escala crece más rápido que el horizonte de Hubble, por lo que estas fluctuaciones entran nuevamente al horizonte, en la época dominada por la radiación o la materia. Estas perturbaciones entonces dan lugar a perturbaciones en la materia, que comenzarán a crecer debido a la inestabilidad de Jeans.

El análisis de esta sección fue realizado mediante el apoyo de las referencias [7, 8] principalmente, así como de [9, 10, 11, 5].

2.3.1 Fluctuaciones escalares

Tenemos entonces que las fluctuaciones en el campo cuántico del inflatón pueden dar lugar a las inhomogeneidades observadas en el Universo ya que la dinámica del campo afecta la evolución de la densidad de energía. Supongamos entonces una ligera perturbación en el campo. Para ello dividimos $\phi(\mathbf{x}, t)$ en un campo homogéneo $\phi(t)$ y en una fluctuación espacial $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$, es decir,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t). \quad (2.31)$$

Expandimos a $\delta\phi$ en sus modos de Fourier,

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_{\mathbf{k}}(t), \quad (2.32)$$

con \mathbf{x} y \mathbf{k} las coordenadas y momento comóviles. Ahora, obtenemos ecuaciones de movimiento de nuestro campo perturbado utilizando la acción (2.13), pero para un campo no homogéneo $\phi(x, t)$, esto da lugar a (para un espacio plano $K = 0$)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\phi + V_{\phi}(\phi) = 0. \quad (2.33)$$

Sustituyendo la ecuación (2.31) en la ecuación anterior, tenemos que

$$\ddot{\phi}(t) + \delta\ddot{\phi}(x, t) + 3H\dot{\phi}(t) + 3H\delta\dot{\phi}(x, t) - \frac{\nabla^2}{a^2}\delta\phi(x, t) + V_{\phi}(\phi(t)) + \delta\phi V_{\phi\phi}(\phi(t)) = 0, \quad (2.34)$$

donde hemos utilizado que $V_{\phi}(\phi + \delta\phi) \approx \delta\phi V_{\phi\phi} + V_{\phi}$. El campo homogéneo $\phi(t)$ debe cumplir la ecuación de movimiento (2.15). Utilizando esto, y aplicando la transformada de Fourier, nos quedamos con la siguiente ecuación

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} + \delta\phi_{\mathbf{k}}V_{\phi\phi} = 0, \quad (2.35)$$

donde $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Podemos eliminar el último término si tomamos en cuenta que tanto $\delta\phi_{\mathbf{k}}$ como $V_{\phi\phi}$ son muy pequeños en comparación a los demás términos (esto último debido a las condiciones de slow-roll). Para simplificar, cambiamos al tiempo conforme τ , que está dado por

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.36)$$

de tal manera que podemos escribir la métrica FLRW de la forma

$$ds^2 = a^2[d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2], \quad (2.37)$$

que es conforme al elemento de longitud de la métrica de Minkowski. Y ahora introducimos la variable v de tal manera que

$$v_{\mathbf{k}} \equiv a\delta\phi_{\mathbf{k}}, \quad (2.38)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.35), obtenemos

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.39)$$

con las variables primadas siendo las derivadas respecto al tiempo conforme. La ecuación (2.39) es la correspondiente a un oscilador armónico por cada modo de Fourier de $\delta\phi$ con una frecuencia

dependiente del tiempo. Veremos cómo el tratar a estas fluctuaciones del vacío como un sistema cuántico puede originar las semillas que dieron lugar a las estructuras que observamos en el Universo. El primer paso para cuantizar el sistema es obtener el momento canónico conjugado a v ,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'. \quad (2.40)$$

Ahora promovemos estas variables a operadores $\{\hat{v}, \hat{\pi}\}$ y procedemos a imponer las reglas de conmutación a un tiempo τ constante (recordando que $\hbar = 1$),

$$[\hat{v}(\mathbf{x}, \tau), \hat{v}(\mathbf{y}, \tau)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, \tau), \hat{\pi}(\mathbf{y}, \tau)] = 0, \quad (2.41a)$$

$$[\hat{v}(\mathbf{x}, \tau), \hat{\pi}(\mathbf{y}, \tau)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.41b)$$

Como paso siguiente, descomponemos el campo en sus operadores de creación y aniquilación,

$$\hat{v}(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\tau) \hat{a}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (2.42)$$

donde los operadores \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger cumplen las reglas de conmutación usuales $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(k - k')$. A su vez, las funciones están normalizadas de la forma $(v_k^*)' v_k - v_k^* (v_k)' = i$. Esto se obtiene de imponer las reglas de conmutación (2.41) a la ecuación (2.42). El estado vacío $|0\rangle$, lo podemos definir de tal forma que $\hat{a}_k |0\rangle = 0$ para cualquier modo k .

Las funciones v_k satisfacen la ecuación de movimiento (2.39). Procederemos ahora a obtener las soluciones. Consideramos primero el límite de sub-horizonte en el que la longitud de onda física de la perturbación es más pequeña que el horizonte de Hubble. El horizonte de Hubble establece la escala física en la que dos partículas pueden estar causalmente conectadas y es el límite en el que las partículas se alejan a una menor o mayor velocidad de la luz, dependiendo de si se encuentran dentro o fuera del horizonte. Para calcularlo utilizamos la ley de Hubble $v = dH$, con v la velocidad de la partícula, d la distancia y H el parámetro de Hubble. Utilizando $v = c = 1$ obtenemos

$$d_H(t) = \frac{1}{H(t)}, \quad (2.43)$$

donde $d_H(t)$ es el radio de Hubble. La longitud de onda física de las perturbaciones $\lambda = 2\pi a/k$ debe ser menor que el horizonte de Hubble $\lambda \ll 1/H$ en el caso del subhorizonte. Esto es equivalente a $k \gg aH$. Podemos obtener una relación útil si analizamos la ecuación (2.36) durante la etapa de expansión acelerada ($a(t) = \exp(Ht)$),

$$\tau = \int dt e^{-Ht} = -\frac{1}{aH}, \quad (2.44)$$

donde hemos utilizado unos límites de integración tales que, para un tiempo conforme inicial arbitrario τ , este corresponda a un tiempo t y el límite superior corresponda a una $\tau = 0$ para un

tiempo infinito $t \rightarrow \infty$, por lo que $a \rightarrow \infty$ para $\tau = 0$. En este límite, $k^2 \gg a''/a = 2/\tau^2$, por lo que, podemos obtener la ecuación del oscilador armónico a partir de (2.39),

$$v_k'' + k^2 v_k = 0. \quad (2.45)$$

En este límite de sub-horizonte tenemos la solución de frecuencia positiva y la única con relevancia física,

$$\lim_{k \gg aH} v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (2.46)$$

que se encuentra adecuadamente normalizada y de tal forma que $v_k' = -i\omega_k v_k$ con frecuencia $\omega_k^2 = k^2$. Esta elección del vacío es llamada vacío de Bunch-Davies. Los modos oscilan dentro del horizonte.

Ahora, para el caso del superhorizonte, tenemos que $\lambda a > H^{-1}$, o bien $k < aH = -1/\tau$. La ecuación de movimiento entonces se reduce a

$$v_k'' - \frac{a''}{a} v_k = 0. \quad (2.47)$$

La solución en la que los modos crecen está dada por

$$\lim_{k \ll aH} v_k = B_k a, \quad (2.48)$$

con B_k una constante diferente para cada modo k . Si nos fijamos en la ecuación (2.38), podemos darnos cuenta de que las perturbaciones son constantes $\delta\phi_k = B_k = cte$, por lo que afuera del horizonte las perturbaciones dejan de oscilar (se congelan). Ahora, utilizando la condición de continuidad en el horizonte $k = aH$ ($k\tau = -1$), podemos calcular la constante. Para ello, nos damos cuenta que $|v_k| = a|B_k| = k/H|B_k|$, y por otro lado, utilizando la ecuación (2.46), $|v_k| = 1/\sqrt{2k}$ en el horizonte. Por lo que las perturbaciones están dadas por $|\delta\phi_k| = |B_k| = H/\sqrt{2k^3}$ en el superhorizonte. Del análisis anterior, tenemos que

$$\lim_{k \ll aH} |v_k| = a \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (2.49)$$

Podemos resolver la ecuación general (2.39). Tenemos que $a''/a = \dot{a}^2 + a\ddot{a} = 2(aH)^2$, donde utilizamos $a = e^{Ht}$ por la expansión acelerada. Recordando que $-1/\tau = aH$, podemos sustituir la ecuación (2.39) por

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) v_k = 0. \quad (2.50)$$

Es posible obtener las soluciones generales de la ecuación (2.50), para lo cual requerimos transformarla en una ecuación de Bessel. Sea $v_k = \tau^n y_k$, sustituyendo en la ecuación (2.50) obtenemos

$$\tau^2 \frac{d^2 y_k}{d\tau^2} + 2n\tau \frac{dy_k}{d\tau} + (k^2 \tau^2 + n^2 - n - 2) y_k = 0, \quad (2.51)$$

podemos asignarle a n el valor que más nos convenga, en este caso para reducir la ecuación a la ecuación de Bessel; empleamos $n = 1/2$,

$$\tau^2 \frac{d^2 y_k}{d\tau^2} + \tau \frac{dy_k}{d\tau} + (k^2 \tau^2 - 9/4) y_k = 0. \quad (2.52)$$

Ahora, solo debemos reasignar la variable $u = k\tau$ para que obtengamos la forma explícita de la ecuación de Bessel,

$$u^2 \frac{d^2 y_k}{du^2} + u \frac{dy_k}{du} + (u^2 - 9/4) y_k = 0, \quad (2.53)$$

cuya solución está dada por la combinación lineal de las funciones de Bessel,

$$y_k = c_1 J_{3/2}(u) + c_2 J_{-3/2}(u), \quad (2.54)$$

donde $J_{3/2}(u)$ y $J_{-3/2}(u)$ son las funciones de Bessel de orden $3/2$ y $-3/2$, respectivamente, y c_1, c_2 son constantes reales. Por lo tanto, la solución en términos de u está dada por

$$y_k = c_1 \left(\frac{\sin(u) - u \cos(u)}{\sqrt{u^3}} \right) + c_2 \left(\frac{u \sin(u) + \cos(u)}{\sqrt{u^3}} \right), \quad (2.55)$$

que, sustituyendo el valor de u y escribiéndolo en forma de exponenciales complejas, conduce a

$$y_k = c'_1 \frac{1}{\sqrt{k\tau}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) e^{-ik\tau} + c'_1 \frac{1}{\sqrt{k\tau}} \left(1 + \frac{i}{k\tau} \right) e^{ik\tau} + c'_2 \frac{1}{\sqrt{k\tau}} \left(\frac{1}{k\tau} - i \right) e^{ik\tau} + c'_2 \frac{1}{\sqrt{k\tau}} \left(\frac{1}{k\tau} + i \right) e^{-ik\tau}, \quad (2.56)$$

donde $c'_1 = -c_1/2$ y $c'_2 = c_2/2$. Esta ecuación es la solución general de (2.53). Simplificando más la ecuación (2.56) y tomando en cuenta que $v_k = \sqrt{\tau} y_k$, la solución para (2.50) es

$$v_k = \alpha_k \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) e^{-ik\tau} + \beta_k \left(1 + \frac{i}{k\tau} \right) e^{ik\tau}, \quad (2.57)$$

donde $\alpha_k = (c'_1 + ic'_2)/\sqrt{k}$ y $\beta_k = (c'_1 - ic'_2)/\sqrt{k}$. Esta solución debe coincidir para los límites de subhorizonte y superhorizonte que discutimos anteriormente; comparando la ecuación (2.57) con las ecuaciones (2.46) y (2.49), podemos obtener los valores de las constantes ($\alpha_k = 1/\sqrt{2k}$, $\beta_k = 0$). La solución general es entonces

$$v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right). \quad (2.58)$$

Definamos ahora una cantidad conocida como espectro de potencias, que nos permite caracterizar las propiedades de las perturbaciones. El espectro de potencias puede ser comparado con las observaciones obtenidas de las fluctuaciones primordiales, en las que se estudian las anisotropías del CMB, así como las mediciones de la distribución de la materia en el Universo. Mediante esta cantidad, es posible comparar los resultados de una teoría inflacionaria con las observaciones.

Consideremos una función $g(\mathbf{x}, t)$ que puede ser expandida en sus modos de Fourier como

$$g(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} g_k(t). \quad (2.59)$$

Su espectro de potencias $P_g(k)$ se define mediante

$$\langle 0 | g_{k_1}^* g_{-k_2} | 0 \rangle = \delta^3(k_1 + k_2) \frac{2\pi^2}{k^3} P_g(k), \quad (2.60)$$

donde $\langle 0 | g_{k_1}^* g_{-k_2} | 0 \rangle$ es la función de correlación de dos puntos en el espacio de momentos para el estado vacío. La δ^3 viene del principio cosmológico, es decir, de la homogeneidad estadística. El espectro de potencias describe la potencia de las variaciones para cada modo k .

Calculamos entonces el espectro de potencias de $\delta\phi$, suponiendo que el campo de perturbaciones es real ($\delta\phi_k^* = \delta\phi_{-k}$), entonces

$$\lim_{k \ll aH} \langle 0 | |\delta\phi|^2 | 0 \rangle = \lim_{k \ll aH} \frac{|v_k|^2}{a^2}, \quad (2.61)$$

donde hemos utilizado la ecuación (2.38). Por otro lado, de la ecuación (2.60) tenemos que

$$\lim_{k \ll aH} \langle 0 | |\delta\phi|^2 | 0 \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_{\delta\phi}(k). \quad (2.62)$$

Igualando las ecuaciones (2.61) y (2.62), podemos obtener

$$P_{\delta\phi} = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\delta\phi_k|^2 \rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{a^2}. \quad (2.63)$$

Este es el espectro de potencias de una perturbación $\delta\phi$ que tiene una ecuación de movimiento dada por (2.39), donde v está definido por la ecuación (2.38). Este resultado nos será útil cuando calculemos los espectros de potencias para las fluctuaciones tensoriales y de curvatura.

Consideremos la perturbación del inflatón en la escala del superhorizonte. En este régimen, podemos utilizar la ecuación (2.49), por lo que, el espectro de potencias está dado por

$$P_{\delta\phi} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (2.64)$$

Debido a que H es casi constante durante inflación, entonces $P_{\delta\phi}$ varía poco respecto a k . Este resultado indica que un campo escalar en la escala del superhorizonte posee un espectro de fluctuaciones casi invariante con amplitud $(H/2\pi)^2$. Sin embargo, este resultado no es correcto, pues hemos considerado que en todo momento la métrica se mantiene invariante ante las perturbaciones del campo escalar. En realidad, perturbaciones en el campo escalar producen perturbaciones en la métrica y viceversa. En la sección 2.3.2 discutimos esto más en detalle.

2.3.2 Fluctuaciones en la curvatura

Las fluctuaciones escalares dan lugar a perturbaciones en el tensor de energía-momento que a su vez producen perturbaciones en la métrica debido a las ecuaciones de Einstein. Las fluctuaciones en la métrica producen perturbaciones en el operador laplaciano en las ecuaciones de Klein-Gordon, produciendo fluctuaciones de materia. Para calcular el espectro de perturbaciones del sistema, necesitamos tomar en cuenta el acoplamiento que existe entre ambos tipos de fluctuaciones.

Ya que las medidas en las perturbaciones del CMB son pequeñas, basta con un análisis lineal en la ecuación de Klein-Gordon y en las ecuaciones de Einstein. En particular, no hace falta una teoría de gravedad cuántica para describir las fluctuaciones. Cuantizamos las perturbaciones, pero mantenemos el fondo clásico. Mientras que el inflatón decae al final de la inflación, las perturbaciones en la curvatura persisten.

El tensor métrico puede ser dividido en una parte homogénea además de una perturbación inhomogénea,

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = g_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t). \quad (2.65)$$

La perturbación más general de la métrica de FLRW tiene la forma (en el tiempo conforme)

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ (1 + 2\varphi)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i - [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \}, \quad (2.66)$$

donde ψ y φ son funciones escalares de τ y x^i , B^i es un campo vectorial y E_{ij} un campo tensorial; nótese que los índices latinos representan las coordenadas espaciales $i = 1, 2, 3$.

El vector B_i puede ser descompuesto de manera única en una parte longitudinal y una transversal

$$B_i = B_{,i} + B_i^T, \quad (2.67)$$

con una coma denotando la derivada parcial ($\partial_i x = x_{,i}$), B siendo un escalar, y B_i^T la parte transversal de B_i . La parte longitudinal no tiene rotacional y puede ser expresada como un gradiente ($B_{,i}$); la parte transversal no posee divergencia $\partial_i (B^T)^i = 0$. B_i contiene un grado de libertad escalar B y dos vectoriales B_i^T (tres componentes, pero una restricción $\partial_i (B^T)^i = 0$). Similarmente, podemos descomponer E_{ij} como

$$E_{ij} = E_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 E + E_{i,j}^T + E_{ij}^T, \quad (2.68)$$

donde E es un escalar, E_j^T es un vector transversal, mientras que E_{ij}^T es un tensor transversal. E_{ij} es simétrico debido a que la métrica es simétrica, además de poseer traza nula, por lo que en principio tendríamos cinco grados de libertad. Los cinco grados de libertad son repartidos de la siguiente manera: un grado de libertad escalar E ; dos grados de libertad vectoriales, ya que E_i^T posee tres componentes pero tiene divergencia nula; dos grados de libertad tensoriales debido a que E_{ij}^T posee cinco componentes por ser simétrico (debido a que E_{ij} es simétrico) y sin traza, pero hay tres restricciones ($\delta^{ik}\partial_k E_{ij}^T$).

Debido a la unicidad de la descomposición, las partes escalares, vectoriales y tensoriales se desacoplan completamente para perturbaciones lineales. Esto último implica que las perturbaciones evolucionan independientemente, y por lo tanto, es posible analizar cada una separadamente. Durante la inflación producida por el campo escalar no existen perturbaciones vectoriales debido a que no hay campos rotacionales en esta etapa.

Tomando en cuenta las ecuaciones (2.67), (2.68) y que no se producen perturbaciones vectoriales, podemos reescribir el elemento diferencial de línea (2.66) como

$$ds^2 = a^2 \left\{ (1 + 2\varphi) d\tau^2 - 2B_{,i} d\tau dx^i - \left[\left(1 - 2\psi - \frac{2}{3} \nabla^2 E \right) \delta_{ij} + 2E_{,ij} + h_{ij} \right] dx^i dx^j \right\}, \quad (2.69)$$

donde hemos definido

$$h_{ij} \equiv 2E_{ij}^T. \quad (2.70)$$

Consideremos una perturbación escalar en un espacio-tiempo fijo. Esta perturbación puede ser definida mediante $\delta\phi(p) = \phi(p) - \phi_0(p)$ con ϕ_0 el campo sin perturbar y p es cualquier punto del espacio-tiempo. Generalizando esto a la relatividad general donde el espacio-tiempo no es un fondo fijo, pues es perturbado si la materia es perturbada, la definición no es correcta. De hecho ψ pertenece al espacio-tiempo \mathcal{M} perturbado mientras que ϕ_0 pertenece a otro espacio-tiempo no perturbado \mathcal{M}_0 . Para definir una perturbación, requerimos una función ℓ que mapee puntos de \mathcal{M}_0 a puntos de \mathcal{M} . La perturbación puede ser definida entonces mediante

$$\delta\phi \equiv \phi(\ell(p_0)) - \phi_0(p_0). \quad (2.71)$$

Sin embargo, la función ℓ no está definida de manera única, y por lo tanto la definición de perturbación depende de la elección del mapeo. Esta libertad de elegir un mapeo es la libertad de la elección de coordenadas. La elección del mapeo es una elección de norma, cambiar el mapeo es una transformación de norma. Una transformación de norma es una transformación local que no cambia el significado físico. En la teoría de perturbaciones cosmológicas, la elección de coordenadas solo son etiquetas para designar puntos en la variedad del espacio-tiempo. Al realizar estas transformaciones, pueden aparecer fluctuaciones ficticias en nuestras ecuaciones; estos modos son llamados artefactos de norma.

Fijar una norma en relatividad general implica elegir un sistema de coordenadas, “desmenuzar” el espacio-tiempo en líneas (correspondientes a una \mathbf{x} fija) y a “rebanarlo” en hipersuperficies en un tiempo fijo. Una transformación general de norma se lee como

$$\tilde{\tau} = \tau + \xi^0, \quad \tilde{x}^i = x^i + \xi^{,i} + \zeta^i, \quad (2.72)$$

con ξ^0 , ξ escalares arbitrarios y ζ^i un 3-vector de divergencia 0, es decir $\zeta^i_{,i} = 0$. Ahora necesitamos realizar la transformación al elemento de línea (2.69) recordando que no hay perturbaciones vectoriales, por lo que podemos omitir ζ^i en nuestros cálculos. Los elementos diferenciales $d\tau$ y dx^i se transforman como

$$d\tau = d\tilde{\tau} - d\xi^0 = d\tilde{\tau} - \xi'^0 d\tilde{\tau} - \xi^0_{,i} d\tilde{x}^i,$$

$$dx^i = d\tilde{x}^i - d\xi^{;i} = d\tilde{x}^i - (\xi^l)^{;i} d\tilde{\tau} - (\xi_{;j})^{;i} d\tilde{x}^j, \quad (2.73)$$

recordando que las variables primadas indican derivadas respecto al tiempo conforme τ . Ahora podemos escribir el elemento de línea en estas nuevas coordenadas con ayuda de la ecuación (2.69),

$$ds^2 = a^2(\tilde{\tau}) \left\{ (1 + 2\varphi - 2\xi^{0'} - 2\xi^0 \mathcal{H}) d\tilde{\tau}^2 - (2\xi^0_{;i} + 2B_{;i} - 2\xi'_{;i}) d\tilde{\tau} d\tilde{x}^i - \left[\left(1 - 2\psi - 2\xi^0 \mathcal{H} - \frac{2}{3} \nabla^2 E \right) \delta_{ij} - 2\xi_{;ij} + 2E_{;ij} \right] d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right\}, \quad (2.74)$$

donde hemos definido al parámetro de Hubble en el tiempo comóvil como

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}. \quad (2.75)$$

La ecuación (2.74) debe coincidir con el elemento de línea dado por una métrica perturbada en el espacio \mathcal{M} (el intervalo es invariante ante una transformación de coordenadas). Recordando que, únicamente estamos tratando con escalares debido al desacoplamiento entre las variables escalares y tensoriales, y tomando la ecuación (2.69), podemos escribir la métrica de \mathcal{M} como

$$ds^2 = \tilde{a}^2(\tilde{\tau}) \left\{ (1 + 2\tilde{\varphi}) d\tilde{\tau}^2 - 2\tilde{B}_{;i} d\tilde{\tau} d\tilde{x}^i - \left[\left(1 - 2\tilde{\psi} - \frac{2}{3} \nabla^2 \tilde{E} \right) \delta_{ij} - 2\tilde{E}_{;ij} \right] d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right\}, \quad (2.76)$$

donde todas las cantidades con tilde son funciones de \tilde{x}^μ ; además, suponemos en una primera aproximación que $\tilde{a}(\tilde{\tau}) = a(\tilde{\tau})$. Entonces obtenemos las transformaciones de cada uno de los elementos,

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B - \xi' + \xi^0, \\ \tilde{E} &= E - \xi, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \\ \tilde{\psi} &= \psi + \mathcal{H}\xi^0 + \frac{1}{3} \nabla^2 \xi. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Cualquier escalar ρ que es aproximadamente homogéneo en el modelo de FLRW puede ser escrito de la forma $\rho(x, \tau) = \rho_0(\tau) + \delta\rho(x, \tau)$. La perturbación escalar se transforma como

$$\tilde{\delta\rho}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) = \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) - \tilde{\rho}_0(\tilde{\tau}) = \rho(\tilde{x}, \tilde{\tau}) - \rho_0(\tilde{\tau}) = \rho(x, \tau) - \rho_0(\tau) - \rho'_0 \delta\tau = \delta\rho(x, \tau) - \rho'_0 \xi^0, \quad (2.78)$$

donde hemos utilizado que $\rho(\tilde{x}^\mu) = \rho(x^\mu)$. De aquí concluimos que las variables físicas escalares dependen únicamente en la elección de la transformación del tiempo (determinada por la elección de ξ^0).

El problema de norma viene del hecho de que un cambio en el mapeo (un cambio en las coordenadas del sistema) implica la variación de la perturbación de una cantidad dada que entonces puede asumir distintos valores (todos en igualdad de condiciones) de acuerdo a la elección de norma. Para eliminar esta ambigüedad, uno tiene dos opciones:

- Identificar esas combinaciones que representan cantidades invariantes de norma.
- Elegir una norma y realizar los cálculos en esa norma.

Ambas opciones tienen sus ventajas y desventajas. Elegir una norma puede permitirnos realizar los cálculos mucho más simples con el peligro de que incluya artefactos de norma, es decir, cantidades de norma que no son físicas. Realizar un cálculo de invariantes de norma puede ser más complicado, pero tiene la ventaja de tratar únicamente con cantidades físicas. Seguiremos el procedimiento en una norma fija, la norma longitudinal o también llamada norma newtoniana conforme en la que $B = E = 0$. Bajo la norma longitudinal nuestra métrica ahora tiene la forma

$$ds^2 = a^2(\tau) [(1 + 2\varphi)d\tau^2 - (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (2.79)$$

donde podemos ver que hemos reducido los grados de libertad escalares de la métrica a únicamente dos (φ y ψ). Nos quedan entonces tres grados de libertad para las perturbaciones escalares, las correspondientes a la métrica y las correspondientes al inflatón $\delta\phi$.

Las ecuaciones de campo de Einstein (2.3) para el campo escalar perturbado (2.31) y la métrica perturbada (2.65) nos llevan a las ecuaciones

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}. \quad (2.80)$$

A partir de la métrica (2.79), y desarrollando las ecuaciones (2.80), obtenemos

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\varphi + \psi') + \nabla^2\psi = 4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (2.81a)$$

$$(\mathcal{H}\varphi + \psi')_{,i} = 4\pi G a^2 \delta T_i^0, \quad (2.81b)$$

$$\begin{aligned} & [(2\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)\varphi + \mathcal{H}\varphi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi'] \delta_j^i \\ & + \frac{1}{2}\nabla^2(\varphi - \psi)\delta_j^i - \frac{1}{2}\delta^{ik}(\varphi - \psi)_{,kj} = -4\pi G a^2 \delta T_j^i. \end{aligned} \quad (2.81c)$$

Se puede ver un desarrollo detallado para llegar a estas ecuaciones en [11].

Analicemos la ecuación (2.81c), en el caso de nuestra inflación escalar por medio de un campo escalar estándar, no hay componentes correspondientes a tensiones anisotrópicas en δT_j^i a primer orden, i.e. $\delta T_j^i = 0$ para $i \neq j$. Si entonces analizamos este caso para la ecuación (2.81c), tenemos que para $i \neq j$

$$-\frac{1}{2}\delta^{ik}(\varphi - \psi)_{,kj} = 0, \quad (2.82)$$

por lo que podemos concluir que

$$\psi = \varphi. \quad (2.83)$$

Entonces, hemos eliminado uno de los grados de libertad sistema. Nos queda un grado de libertad correspondiente a la métrica ψ y uno correspondiente al inflatón $\delta\phi$.

Existe una cantidad importante que es conservada en la escala del superhorizonte para fluctuaciones escalares adiabáticas, además de ser independiente de la ecuación de estado de la materia: la perturbación de curvatura comóvil. Esta es la perturbación de curvatura intrínseca de hipersuperficies comóviles, es decir, las hipersuperficies ortogonales a las líneas de mundo que se mueven con la materia total. Su importancia radica en que nos permite relacionar las perturbaciones de la inflación con aquellas relacionadas a la etapa dominada por la radiación del Universo.

La métrica inducida γ_{ij} para las superficies de tiempo conforme constante, y bajo la norma longitudinal, está dada por la parte espacial de (2.79), i.e.

$$\gamma_{ij} \equiv a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}. \quad (2.84)$$

Podemos calcular la curvatura intrínseca mediante el escalar de Ricci de manera análoga que para el espacio-tiempo de cuatro dimensiones,

$$R^{(3D)} = \gamma^{ik}\partial_l\Gamma_{ik}^l{}^{(3D)} - \gamma^{ik}\partial_k\Gamma_{il}^l{}^{(3D)} + \gamma^{ik}\Gamma_{ik}^l{}^{(3D)}\Gamma_{lm}^m{}^{(3D)} - \gamma^{ik}\Gamma_{il}^m{}^{(3D)}\Gamma_{km}^l{}^{(3D)}, \quad (2.85)$$

donde hacemos énfasis en que estamos trabajando sobre la curvatura tridimensional, por lo que los símbolos de Christoffel $\Gamma_{jk}^i{}^{(3D)}$ están dados por

$$\Gamma_{jk}^i{}^{(3D)} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}). \quad (2.86)$$

Realizando los cálculos de la ecuación (2.85) hasta primer orden en ψ , obtenemos

$$R^{3D} = \frac{4}{a^2}\nabla^2\psi. \quad (2.87)$$

Al escalar ψ se le llama comúnmente la perturbación de curvatura. Sin embargo, no es una invariante de norma ya que solo está definida en un tiempo dado. De la ecuación (2.77) podemos ver que cuando $\tau \rightarrow \tau + \delta\tau$, la perturbación de curvatura cambia como $\psi \rightarrow \psi + \mathcal{H}\delta\tau$.

Ahora consideramos el corte comóvil que está definido como el corte ortogonal a las líneas de Universo de un observador comóvil. Observadores comóviles están en caída libre, y la expansión para ellos es isotrópica. Esto significa que no hay flujo de energía medido para estos observadores, es decir $\delta\phi_{\text{com}} = 0$. De la ecuación (2.78) vemos que irnos de un corte de tiempo con $\delta\phi$ arbitrario hacia un corte comóvil requiere una traslación temporal

$$\delta\phi \rightarrow \delta\phi_{\text{com}} = \delta\phi - \phi'\delta\tau = 0, \quad (2.88)$$

de donde podemos deducir que

$$\delta\tau = \frac{\delta\phi}{\phi'}, \quad (2.89)$$

es decir $\delta\tau = \frac{\delta\phi}{\phi'}$ es el desplazamiento de tiempo necesario para ir de un corte genérico con $\delta\phi$ a un corte comóvil donde $\delta\phi_{\text{com}} = 0$. Utilizando nuevamente la ecuación (2.77), vemos que la perturbación

de curvatura ψ se transforman como

$$\psi \rightarrow \psi_{\text{com}} = \psi + \mathcal{H}\delta\tau = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}. \quad (2.90)$$

Definimos la cantidad

$$\mathcal{R} \equiv \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \psi + H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (2.91)$$

conocida como la perturbación de curvatura comóvil. Esta cantidad es una invariante de norma por construcción. \mathcal{R} representa el potencial gravitacional en una hipersuperficie comóvil donde $\delta\phi = 0$, i.e.

$$\mathcal{R}|_{\delta\phi=0} = \psi. \quad (2.92)$$

Otra cantidad invariante comúnmente definida es la curvatura en cortes de densidad constante, es decir $\zeta|_{\delta\rho=0} = \psi$. El procedimiento es análogo al anterior, basta encontrar la traslación temporal que nos permita ir de un corte de tiempo arbitrario hacia uno con $\delta\rho = 0$ (que es $\delta\tau = \delta\rho/\rho'$). Este $\delta\tau$ es la traslación temporal necesaria para ir de un corte genérico con perturbación $\delta\rho$ arbitraria a una con densidad de energía uniforme donde $\delta\rho_{\text{unif}} = 0$. Entonces la perturbación de curvatura ψ se transforma como

$$\psi \rightarrow \psi_{\text{unif}} = \psi + \mathcal{H}\delta\tau = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\rho'}. \quad (2.93)$$

De esta manera, podemos definir

$$\zeta \equiv \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\rho'} = \psi + H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}, \quad (2.94)$$

que es la perturbación de curvatura en cortes de densidad de energía uniforme. Esta cantidad es también una invariante de norma por construcción. ζ representa el potencial gravitacional en cortes de densidad de energía uniforme

$$\zeta|_{\delta\rho=0} = \psi. \quad (2.95)$$

Utilizando la ecuación de continuidad (2.5c), la perturbación de curvatura en cortes de densidad de energía uniforme puede ser escrita como

$$\zeta = \psi - \frac{\delta\rho}{3(\rho + P)}. \quad (2.96)$$

Durante inflación $\rho + P = \dot{\phi}^2$, por lo que, sustituyendo en la ecuación de continuidad (2.5c) tenemos que $\dot{\rho} = -3H\dot{\phi}^2$. Ahora calculamos $\delta\rho$

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\phi}\delta\phi = \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\phi}\delta\phi = -3H\dot{\phi}\delta\phi. \quad (2.97)$$

Sustituyendo la ecuación (2.97) en la ecuación (2.96) tenemos que

$$\zeta \approx \psi + \frac{3H\dot{\phi}}{3\dot{\phi}^2} \delta\phi = \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \mathcal{R}, \quad (2.98)$$

de tal manera que la perturbación de curvatura comóvil y la perturbación de curvatura en cortes de densidad de energía uniforme son iguales.

La utilidad que tienen \mathcal{R} y ζ es que son constantes a escalas del superhorizonte, es decir $\dot{\zeta} = 0$. Esto significa que lo que debemos hacer es calcular su valor al salir del horizonte; luego permanece constante hasta que vuelve a entrar al horizonte de nuevo, esto puede ser directamente relacionado con las fluctuaciones de temperatura en el CMB.

Perturbamos la acción total del sistema (acción de Einstein-Hilbert más la acción del inflatón) hasta el segundo orden esquemáticamente como

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = S^{(0)}[g_{\mu\nu}^{(0)}, \phi^{(0)}] + S^{(2)}[\delta g_{\mu\nu}, \delta\phi; g_{\mu\nu}^0, \phi^{(0)}], \quad (2.99)$$

donde $S^{(0)}$ contiene solo la parte homogénea, $S^{(1)} = 0$ si los campos son extremizados, y $S^{(2)}$ contiene los términos cuadráticos en las perturbaciones lineales con coeficientes dependientes de las variables homogéneas. La perturbación a segundo orden de la acción $S^{(2)}$ nos puede ayudar a obtener las ecuaciones para las perturbaciones, y a cuantizar las fluctuaciones lineales así como las normalizaciones correctas.

Para encontrar $S^{(2)}$ debemos calcular la acción (2.13) para el campo escalar perturbado (2.31) bajo la métrica perturbada (2.79).

La siguiente tarea no trivial sería encontrar la manera de escribir $S^{(2)}$ en términos de una variable v para la cual $S^{(2)}$ tiene la forma de una acción canónica, y v debe de ser una combinación de nuestros dos grados de libertad ψ y ϕ . Esta variable v fue introducida por Mukhanov [12] y por eso se le conoce como “variable de Mukhanov”. El resultado es la siguiente contribución $S^{(2)}$ a la acción

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[v'^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (2.100)$$

donde existe un único grado de libertad debido a que la acción $S^{(2)}$ puede ser descrita en términos de una sola variable v . La variable v está definida como

$$v \equiv a\delta\phi + z\psi, \quad (2.101)$$

donde

$$z \equiv a \frac{\phi'}{\mathcal{H}} = a \frac{\dot{\phi}}{H}. \quad (2.102)$$

Podemos notar de lo anterior y de la ecuación (2.91), que v es proporcional a la perturbación de curvatura comóvil $v = a(\dot{\phi}/H)\mathcal{R} = z\mathcal{R}$. La ecuación de movimiento correspondiente a la acción (2.100) en el espacio de momentos es

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0, \quad (2.103)$$

Exceptuando por el cambio entre $a \rightarrow z$, esta acción tiene una ecuación de movimiento idéntica a la de las perturbaciones escalares en una geometría de FLRW fija (2.39). Tomando en cuenta lo anterior, podemos utilizar la ecuación análoga a (2.63) para obtener el espectro de potencias de la perturbación de curvatura comóvil

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{z^2} = \left(\frac{H}{a\dot{\phi}} \right)^2 \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2, \quad (2.104)$$

donde $v_k = z\mathcal{R}_k$ y hemos utilizado la ecuación (2.102) para sustituir z . En la aproximación de slow-roll, la evolución de ϕ y H es mucho más lenta que la del parámetro a , y por lo tanto $z''/z \approx a''/a$; por lo que podemos utilizar los resultados de la sección 2.3.1 para calcular v_k en el superhorizonte (2.49). Recordando que \mathcal{R} es constante durante el superhorizonte, entonces basta con calcular el espectro de potencias en la salida del horizonte, es decir, cuando $k = aH$. Utilizando la ecuación (2.49), y evaluando (2.104) en la salida del horizonte, obtenemos

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2. \quad (2.105)$$

Por lo que hemos podido calcular el espectro de potencias de la perturbación de curvatura comóvil. Esta cantidad nos servirá para conectar nuestra teoría con las observaciones.

2.3.3 Fluctuaciones tensoriales

Las fluctuaciones cuánticas en los campos gravitacionales son generados de manera similar a las perturbaciones escalares discutidas anteriormente en la sección 2.3.1, pero su tratamiento es más sencillo debido a que no tenemos que lidiar con ambigüedades de norma. En contraste con las fluctuaciones escalares de la métrica, los modos tensoriales están presentes incluso en ausencia de materia. Una onda gravitacional puede ser vista como una ligera perturbación tensorial h_{ij} del espacio-tiempo en la métrica FLRW, con h_{ij} definido en (2.70). Recordando que las fluctuaciones escalares y tensoriales se desacoplan, podemos tomar la parte tensorial de las perturbaciones en la ecuación (2.69), por lo que la métrica puede ser descrita mediante el elemento de línea

$$ds^2 = a^2(\tau) [d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (2.106)$$

donde $|h_{ij}| \ll 1$. Recordemos que la perturbación tensorial h_{ij} es simétrica $h_{ij} = h_{ji}$, no tiene traza $\delta^{ij}h_{ij} = 0$, y es transversa $\partial^i h_{ij} = 0$; tenemos seis variables por ser simétrica y cuatro ecuaciones (de la divergencia y traza nula), por lo que únicamente tenemos dos grados de libertad físicos o polarizaciones, que se indican usualmente mediante los símbolos $\lambda = +, \times$. Podemos describir esto de manera más precisa,

$$h_{ij} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times, \quad (2.107)$$

donde e^+ y e^\times son los tensores de polarización que tienen las siguientes propiedades:

$$e_{ij}^\lambda = e_{ji}^\lambda, \quad k^i e_{ij}^\lambda = 0, \quad e_{ii}^\lambda = 0,$$

$$e_{ij}^\lambda(-\mathbf{k}) = \left[e_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) \right]^*, \quad \sum_{ij} \left(e_{ij}^{\lambda_1} \right)^* e_{ij}^{\lambda_2} = \delta_{\lambda_1 \lambda_2},$$

notando que el tensor h_{ij} es invariante de norma y por lo tanto representa grados de libertad físicos.

Si el tensor de energía-momento es diagonal, como el del inflatón, los modos tensoriales no tienen ninguna fuente en sus ecuaciones y la perturbación a segundo orden de la acción (2.13) puede ser escrita entonces como [9]

$$S^2 = \frac{M_p^2}{2} \int dx^3 d\tau \frac{a^2}{2} \left[(h_\lambda)'^2 - (\nabla h_\lambda)^2 \right], \quad (2.108)$$

esta es la acción para cada uno de las polarizaciones λ y es casi igual a la acción de un campo escalar sin masa. La ecuación de movimiento está dada por

$$h_k'' + 2 \frac{a''}{a} h_k' + k^2 h_k = 0, \quad (2.109)$$

donde la hemos escrito en el espacio de momentos. Para facilitar los cálculos y poder utilizar los resultados anteriores, necesitamos que la ecuación (2.109) sea idéntica a la ecuación (2.39). Podemos hacer esto si tomamos una variable

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2}} M_p a h_k, \quad (2.110)$$

donde hemos agregado el coeficiente $M_p/\sqrt{2}$ por el factor extra $\frac{M_p^2}{2}$ en la acción (2.108). La ecuación de movimiento es

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0, \quad (2.111)$$

que es la misma ecuación de movimiento (2.39). De manera análoga a la ecuación (2.63), tenemos que el espectro de potencias está dado por

$$P_T = 2 \left(\frac{k^3}{2\pi^2} |h_k|^2 \right), \quad (2.112)$$

donde agregamos el factor 2 porque hay dos polarizaciones, y es expresado en términos de h_k y no v_k porque v no está definido por la ecuación (2.38), sino por la ecuación (2.110). Utilizamos entonces la ecuación (2.110) para expresar (2.112) en términos de v_k , por lo que tenemos

$$P_T = \frac{k^3}{\pi^2} \left(\frac{2}{M_p^2} \frac{|v_k|^2}{a^2} \right) = \frac{2k^3}{\pi^2 M_p^2} \frac{|v_k|^2}{a^2}, \quad (2.113)$$

y evaluando en la escala del superhorizonte, donde se aplica la ecuación (2.49), obtenemos el espectro de potencias de las perturbaciones tensoriales

$$P_T = \frac{2H^2}{\pi^2 M_p^2} = \frac{8}{M_p^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (2.114)$$

Mediante $P_{\mathcal{R}}$ y P_T es posible comparar los modelos de inflación con los resultados obtenidos por las observaciones. Más adelante, en la sección 2.4, definiremos los índices espectrales y el cociente tensor-a-escalar que nos permitirá contactar directamente con las observaciones.

2.4 CMB

Los modos que se encuentran en la escala del superhorizonte se congelan. Una vez que las perturbaciones re-entran al horizonte de Hubble, el cual establece la escala en la que la física causal puede ocurrir, estas empiezan a evolucionar de nueva cuenta. La materia tiende a colapsar debido a la gravedad en regiones donde la densidad es más grande que la promedio, y los bariones caen en estas regiones más densas. Antes de la época de recombinación (la época en la que se formaron los primeros átomos), bariones y fotones están fuertemente acoplados, la presión de fotones tiende a resistir el colapso y empuja el plasma de fotones-bariones hacia afuera. El resultado son modos oscilatorios de compresión y descompresión en el fluido de fotones y bariones, que son llamados oscilaciones acústicas. Se les llama “acústicas” porque las ondas se mueven a la velocidad del sonido en el medio. El plasma se calienta a medida que se comprime y se enfría al expandirse, dando lugar a las fluctuaciones locales en la temperatura del CMB.

Antes de la recombinación, el Universo se encuentra muy caliente, y es difícil para los fotones moverse sin interactuar con los bariones, estos son dispersados constantemente. Cuando comienza la recombinación, la temperatura de los fotones es suficientemente baja para que una fracción importante de los mismos posean una energía menor a 13.6eV, permitiendo la formación de átomos de hidrogeno. En la última dispersión los fotones se desacoplan, y vuelan sin obstáculos hacia nosotros, donde los observamos como radiación de microondas. El CMB provee una fotografía del Universo en el tiempo de la última dispersión, una foto del Universo temprano. El comportamiento oscilatorio observado en el espectro de potencias como función de la escala (angular) es debido a las oscilaciones acústicas.

En la figura 2.1 se puede observar el espectro de las oscilaciones acústicas de bariones. Los picos impares corresponden a modos de compresión máxima, mientras que los picos pares corresponden a modos de descompresión máxima. Los pozos corresponden a estados en media fase de compresión (a la izquierda de un pico impar), o estados en media fase de descompresión (a la izquierda de un pico par).

El espectro de potencias del CMB se obtiene mediante física complicada pero bien fundamentada, dependiendo no solo del espectro de perturbaciones, pero también de la composición de la materia del Universo. Nos permite extraer información primordial de las fluctuaciones en la densidad de energía. Las mayores fuentes de error son las degeneraciones de los parámetros, ruido de disparo (en escalas pequeñas) y la variancia cósmica (a escalas grandes).

El espectro de potencias de la perturbación de curvatura comóvil (2.104) puede ser reescrito como

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{9}{4\pi^2} \frac{H^6}{V_{\phi}^2}, \quad (2.115)$$

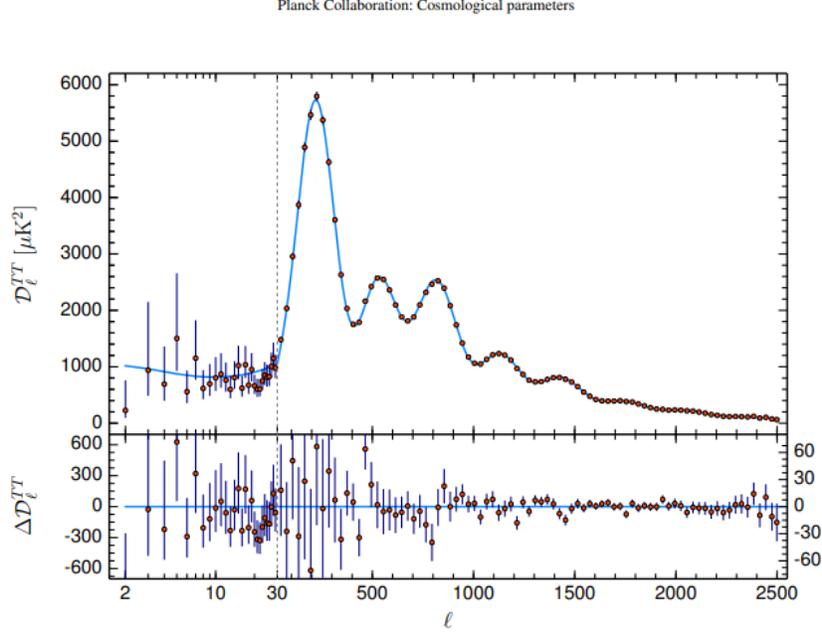


Figura 2.1: Se muestra el espectro de potencias de la temperatura proveído por la colaboración Planck [1]. ℓ representa el momento multipolar. D_ℓ^{TT} son las fluctuaciones de temperatura para la polarización TT del CMB.

donde hemos utilizado la ecuación (2.21) para sustituir $\dot{\phi}^2$. Si ahora utilizamos la ecuación (2.22c) para sustituir H^6 en la ecuación anterior, obtenemos

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{1}{M_p^6} \frac{V^3}{12\pi^2 V_\phi^2} = \frac{1}{M_p^4} \left(\frac{V}{24\pi^2 \epsilon} \right), \quad (2.116)$$

donde hemos utilizado la definición (2.26) en la última igualdad. Recordando también que $P_{\mathcal{R}}$ está siendo evaluado en el horizonte $k = aH$.

Diferentes escalas salen del horizonte a tiempos diferentes (las escalas grandes que observamos hoy dejan el horizonte antes que las escalas pequeñas). La dependencia del espectro de potencias respecto al factor de escala es parametrizada por el índice espectral n_s ; suponemos una regla de potencias $P_{\mathcal{R}} \propto k^{n_s-1}$, o bien, de manera equivalente

$$n_s \equiv \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} + 1, \quad (2.117)$$

y procedemos a calcularlo, para ello usamos que $d \ln k = d \ln(aH) = d \ln(a) + d \ln(H)$ recordando que durante la inflación $H = \text{cte}$ y por lo tanto $d \ln k = d \ln a = (H/\dot{\phi})d\phi = -(1/M_p^2)(V/V_\phi)d\phi$,

donde hemos utilizado las ecuaciones (2.21) y (2.22c) en la última igualdad. Por lo que, utilizando el análisis anterior y la ecuación (2.116), calculamos

$$n_s - 1 = -M_p^2 \frac{V_\phi}{V} \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d\phi} = -M_p^2 \frac{V_\phi}{V} \left(3 \frac{V_\phi}{V} - 2 \frac{V_{\phi\phi}}{V_\phi} \right) = 2\eta - 6\epsilon. \quad (2.118)$$

La dependencia de $P_{\mathcal{R}}$ respecto a la escala es pequeña debido a que $\epsilon, |\eta| \ll 1$ durante inflación, pero no es cero.

Podemos también parametrizar la dependencia del espectro de potencias de las perturbaciones tensoriales respecto al factor de escala mediante la definición

$$n_T \equiv \frac{d \ln P_T}{d \ln k}. \quad (2.119)$$

Calculamos P_T en términos del potencial V mediante la ecuación (2.114) y la ecuación (2.22c),

$$P_T = \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_p^4}. \quad (2.120)$$

Finalmente, calculamos n_T en términos de los parámetros de slow-roll

$$n_T = -M_p^2 \frac{V_\phi}{V} \frac{d \ln P_T}{d\phi} = -M_p^2 \frac{V_\phi^2}{V^2} = -2\epsilon \quad (2.121)$$

por lo que las perturbaciones tensoriales son también casi independientes de la escala durante la inflación.

Podemos también definir el cociente tensor-a-escalar

$$r \equiv \frac{P_T}{P_R} = 16\epsilon. \quad (2.122)$$

De estas tres cantidades que caracterizan el modelo que elijamos, solo podemos comparar dos con las observaciones reales provenientes del satélite Planck [1]. Para el valor del índice espectral escalar tenemos que $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$, mientras que el cociente tensor-a-escalar está acotado por $r < 0.106$, ambos valores conseguidos por la colaboración Planck¹. No es posible tener una medida del índice espectral tensorial n_T todavía porque las ondas gravitacionales serían muy pequeñas como para ser detectadas con la tecnología existente.

¹Estas medidas fueron tomadas de la tabla 2 y 4 de las últimas observaciones realizadas por el satélite Planck [1] para el caso $TT, TE, EE+lowE+lensing+BAO$, correspondiente a la última columna de ambas tablas.

Capítulo 3

Inflación taquiónica

Como mencionamos en el capítulo anterior, la inflación permite resolver los problemas del horizonte y planitud, además de proveer un mecanismo por el cual se generan las perturbaciones necesarias para formar las estructuras que observamos hoy en día en el Universo [13]. En modelos con campos escalares ϕ estándar, llamados inflatones, la física recae únicamente en su potencial $V(\phi)$. Este tipo de modelos es el que más atención ha recibido debido a su simplicidad. En este capítulo analizaremos un campo escalar no estándar, en el que el campo describe un universo inestable y tiene masa cuadrada negativa, y revisaremos sus cualidades como teoría inflacionaria.

A las partículas con masa cuadrada negativa se les conoce como taquiones. Los taquiones aparecen en diversos escenarios. Por ejemplo, en la teoría de cuerdas, surgen de la inestabilidad que existe en los sistemas de branas y antibranas. Las D-branas son hiperplanos en los que se encuentran los extremos de cuerdas abiertas [14], las cuales cumplen las condiciones de frontera de Dirichlet; de ahí tiene el origen su nombre (“D” por Dirichlet y “branas” por membranas). En los primeros modelos analizados de inflación producida por branas, se considera un sistema de un par brana-antibrana que se encuentra en un estado inestable debido a que estas se atraen. En este caso, el campo T parametriza la distancia entre las branas y $T = 0$ corresponde a la configuración en que las branas colisionan y se aniquilan. Se puede ver un trabajo de este tipo de inflación en [15].

Otro ejemplo más interesante se obtiene al considerar que las branas tienen su propia dinámica. Pueden presentar deformaciones correspondientes a estados de muy alta energía y, por tanto, inestables. La evolución, del estado deformado al no deformado, es parametrizada mediante un campo T , cuya dinámica es descrita por una acción del tipo Born-Infeld [16]. Conforme el tiempo pasa, la brana tiende a su estado de mínima energía: una D-brana sin deformaciones dinámicas. Este estado corresponde a una brana estable, y es descrito por el mínimo $T_0 > 0$ del potencial $V(T)$. La evolución del taquión T hasta este estado se conoce como condensación de taquiones.

La forma del potencial taquiónico depende de la teoría en que se esté trabajando. En particular, para las teorías de cuerdas bosónica y supersimétrica, se considera que este mínimo se encuentra en $T_0 \rightarrow \infty$. A su vez, se considera que el potencial se anula en el mínimo, i.e. $V(T_0) = 0$. Se puede encontrar más información sobre el taquión en teoría de cuerdas en [17, 18, 19, 20, 21]

Inspirados por esos trabajos, en este capítulo investigaremos los detalles de la dinámica taquiónica proveniente de D-branas inestables. Como es sabido en esos escenarios, consideramos que la condensación de taquiones ocurre cuando $T_0 \rightarrow \infty$. Veremos cómo la evolución del campo taquiónico puede producir inflación.

En la sección 3.1, analizamos las propiedades básicas del campo taquiónico, para ello nos apoyamos de [22, 23] principalmente. En el caso del análisis de la masa del taquión de la sección 3.2 nos apoyamos con la referencia [24]; veremos como, en efecto, la masa cuadrada de un campo taquiónico es negativa, pero para ello tenemos que normalizar el lagrangiano original. Para obtener los parámetros de slow-roll en la sección 3.3, así como el procedimiento para calcular los espectros de potencias en 3.4, nos apoyamos principalmente de los artículos [25, 26, 27, 28].

3.1 Campo taquiónico

El taquión en la teoría de cuerdas puede ser descrito por una teoría de campo efectivo. El lagrangiano correspondiente es conocido como del tipo Born-Infeld [16]

$$\mathcal{L} = -V(T)\sqrt{1 - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu T\partial_\nu T}, \quad (3.1)$$

con T el campo de taquiones, $V(T)$ el potencial taquiónico, y recordando que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ es la métrica de Minkowski. $V(T)$ posee un máximo en el origen y un mínimo en $T = T_0$, donde el potencial se anula $V(T_0) = 0$, y $T_0 \rightarrow \infty$. A diferencia del campo escalar estándar ϕ , que tiene unidades de masa, el campo taquiónico T tiene unidades de masa⁻¹ y el potencial V tiene unidades de masa⁴.

En el espacio-tiempo de Minkowski, la evolución del taquión hasta llegar al valor mínimo del potencial es descrita por una solución homogénea pero dependiente del tiempo para poder describir nuestro Universo. Es decir,

$$\mathcal{L} = -V(T)\sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (3.2)$$

Podemos obtener el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ utilizando la definición en (2.16) para el lagrangiano (3.1). Las componentes no nulas del tensor de energía-momento están dadas por

$$T_{00} = V(T)(1 - \dot{T}^2)^{-1/2}, \quad T_{ij} = -V(T)(1 - \dot{T}^2)^{1/2}\delta_{ij}, \quad (3.3)$$

donde hemos tomado en cuenta la homogeneidad e isotropía de T . Debido a que el lagrangiano es invariante ante traslaciones temporales, la componente $T_{00} = \rho$, correspondiente a la densidad de energía, es constante. Nótese que T_{ij} también es invariante debido a que $T_{ij} = \mathcal{L}\delta_{ij}$.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a la densidad lagrangiana del campo taquiónico ec. (3.2), obtenemos fácilmente la ecuación de movimiento de T ,

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2} + \frac{V_T}{V} = 0, \quad (3.4)$$

donde $V_T \equiv \partial_T V$. Por otro lado, la constancia de la densidad de energía implica que la evolución de \dot{T} ocurre de acuerdo a

$$\dot{T} = \sqrt{1 - \frac{V^2(T)}{\rho^2}}. \quad (3.5)$$

Conforme T alcanza el valor mínimo T_0 , donde $V(T_0) = 0$, \dot{T} debe aproximarse a su valor crítico, $\dot{T}_0 = 1$. Como en esta parametrización el mínimo T_0 del potencial está en infinito, entonces T se aproxima a T_0 en un tiempo infinito.

Del tensor de energía-momento, dado por las ecuaciones (3.3), el campo del taquión se comporta como un fluido de energía positiva,

$$\rho = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} > 0, \quad (3.6)$$

y presión negativa,

$$P = -V(T)\sqrt{1 - \dot{T}^2} < 0. \quad (3.7)$$

Observamos que

$$P\rho = -V^2(T) \quad (3.8)$$

y que la relación entre la presión y la densidad de energía está dada por

$$\omega \equiv \frac{P}{\rho} = -\left(1 - \dot{T}^2\right), \quad (3.9)$$

por lo que $-1 \leq \omega \leq 0$.

Las condiciones de energía son restricciones que imponemos al tensor de energía-momento de la materia que aparece en las ecuaciones de campo de Einstein, ec. (2.3). Estas condiciones permiten generalizar la idea de que la densidad de energía debe ser siempre positiva. La condición débil para energía, $\rho > 0$, y la condición dominante de energía, $\rho \geq |P|$, se mantienen para el taquión. Sin embargo, ya que

$$\rho + 3P = -\frac{2V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} \left(1 - \frac{3}{2}\dot{T}^2\right), \quad (3.10)$$

la condición fuerte de energía, $\rho + 3P \geq 0$, falla para valores en los que $|\dot{T}| < \sqrt{2/3}$, pero se mantiene para los casos en que $1 > |\dot{T}| \geq \sqrt{2/3}$. La condición de energía fuerte implica que el Universo se encuentra en desaceleración (ver ec. (2.5b)). Es evidente entonces que nuestra región de interés para producir una etapa inflacionaria corresponde a cuando la condición de energía fuerte no se mantiene, i.e. $|\dot{T}| < \sqrt{2/3}$.

Hasta ahora hemos trabajado con la métrica estacionaria de Minkowski, lo interesante del campo taquiónico es analizar la posibilidad de que sirva como medio para la evolución del Universo; para ello debemos tomar en cuenta el campo gravitacional generado por el condensado de taquiones,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - V(T) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T} \right], \quad (3.11)$$

con R el escalar de Ricci y $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico. Tomamos la métrica de FLRW por ser la más apropiada para describir nuestro Universo, que está descrita por el elemento de línea en la ecuación (2.1). Podemos entonces obtener las ecuaciones de Friedmann (suponiendo de nueva cuenta que el campo de taquiones es homogéneo e isotrópico)

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{1}{3M_p^2} \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}, \quad (3.12a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3M_p^2} \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} \left(1 - \frac{3}{2}\dot{T}^2\right). \quad (3.12b)$$

Para calcular la ecuación de continuidad, podemos tomar la ecuación de conservación (2.5c) y sustituir los valores que tenemos para ρ y P de las ecuaciones (3.6) y (3.7). De esta manera tenemos que

$$\dot{\rho} = -3H \left(\frac{V\dot{T}^2}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} \right), \quad (3.13)$$

por lo que observamos que la densidad de energía ya no es constante, sino que decrece conforme el tiempo avanza.

Finalmente, podemos obtener la ecuación que gobierna la evolución del condensado de taquiones mediante la acción (3.11),

$$\ddot{T} + 3H\dot{T}(1 - \dot{T}^2) + \frac{V_T}{V}(1 - \dot{T}^2) = 0. \quad (3.14)$$

Hemos deducido las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14) suponiendo que el tensor de energía-momento del Universo es dominado por el campo escalar taquiónico; es decir, estas ecuaciones describen la evolución de un universo que en su mayoría está compuesto por taquiones. Con estas ecuaciones podemos determinar las cantidades fundamentales $T(t)$ y $a(t)$, en función del modelo definido por un potencial $V(T)$ dado. De la ecuación (3.12b) podemos observar que hay un período de expansión acelerada siempre que $\dot{T}^2 < 2/3$.

Es importante notar que en el caso de $\dot{T}^2 \ll 1$ tenemos las ecuaciones de la inflación por medio de un campo escalar estándar que trabajamos en la sección 2.2; sin embargo, el potencial ahora estaría dado por V_T/V . Aunque hemos obtenido ecuaciones que corresponden a la inflación de un campo escalar, hay diferencias que no pueden ser ignoradas entre la inflación por medio de un campo escalar taquiónico y la inflación por un campo escalar estándar.

3.2 Normalización del campo taquiónico

Hasta ahora no hemos discutido las características que nos indican que el lagrangiano descrito por (3.1) corresponde a un campo de partículas taquiónico. Una manera de comprobar esto es obteniendo la masa de la partícula y observar si su cuadrado es negativo. La manera más sencilla de calcular la masa es obteniendo la segunda derivada del potencial respecto al campo, pero esto es únicamente

válido para lagrangianos canónicamente normalizados (del tipo $\mathcal{L} = T - V$). Entonces, necesitamos encontrar una transformación que nos lleve a un lagrangiano normalizado, pero que describa la misma dinámica.

Tomamos el caso de un espacio-tiempo de Minkowski con un campo taquiónico homogéneo, el lagrangiano está definido por (3.2). La transformación más simple la podemos obtener considerando a $\dot{T}^2 \ll 1$, ya que, utilizando el teorema del binomio en la ecuación (3.2), tenemos

$$\mathcal{L} \approx \frac{V(T)}{2} \dot{T}^2 - V(T). \quad (3.15)$$

Si nos apoyamos mediante el campo auxiliar ϕ , de tal manera que $\dot{\phi} = \sqrt{V(T)} \dot{T}$, entonces obtenemos el lagrangiano estándar:

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.16)$$

Sin embargo, al tomar valores pequeños para \dot{T} , nos estamos restringiendo demasiado. Propongamos una renormalización más general [24]:

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{V(T)}{1 - \dot{T}^2}} = \frac{\rho^{3/2}}{V} \dot{T}. \quad (3.17)$$

Considerando que, en el espacio-tiempo de Minkowski, la densidad de energía es constante, podemos obtener ϕ de la ecuación (3.17),

$$\phi = \rho^{3/2} \int \frac{dT}{V(T)}. \quad (3.18)$$

Ahora, recordando la ecuación de movimiento original (3.4), podemos obtener la ecuación de movimiento para ϕ ,

$$\ddot{\phi} + U_\phi = 0, \quad (3.19)$$

donde hemos definido el potencial efectivo U de tal manera que $U_\phi = \frac{\rho^3}{V^3} V_\phi$ y $V_\phi = \partial_\phi V$. Podemos obtener el potencial efectivo considerando a ρ constante:

$$U = \int U_\phi d\phi = \int \frac{\rho^3}{V^3} dV = \rho^3 \int \frac{dV}{V^3} = -\frac{\rho^3}{2V^2} \Big|_{V=\sqrt{3}\rho}^{V=V} = U_0 - \frac{\rho^3}{2V^2}, \quad (3.20)$$

donde hemos definido $U_0 \equiv 3\rho/2$. Evaluamos la integral desde $V = \sqrt{3}\rho$ hasta una V arbitraria debido a que, como se puede ver en la ecuación (3.6), el límite inferior corresponde a $\dot{T}^2 = \frac{2}{3}$. \dot{T}^2 alcanza este valor cuando comienza la expansión acelerada (esto se ve fácilmente en la ecuación (3.12b)).

Con la definición de $\dot{\phi}$ en (3.17), podemos sustituir en la ecuación (3.6) para ρ

$$\rho^2 = \frac{V^2}{1 - \frac{V^3}{\rho^3} \dot{\phi}^2}, \quad (3.21)$$

y resolver para $\dot{\phi}^2$ con ayuda de la ecuación (3.20),

$$\dot{\phi}^2 = \frac{\rho^3}{V^3} - \rho = 2(\rho - U), \quad (3.22)$$

de donde finalmente obtenemos el valor de ρ ,

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + U. \quad (3.23)$$

Recordando que en Minkowski, la densidad hamiltoniana coincide con la densidad de energía, entonces (3.23) representa un hamiltoniano canónicamente normalizado y, por lo tanto, la densidad lagrangiana tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi), \quad (3.24)$$

con la ecuación de movimiento dada por (3.19). Teniendo un lagrangiano canónicamente normalizado, podemos obtener la masa del campo de taquiones, para ello calculamos la segunda derivada del potencial respecto al campo, es decir,

$$M^2(\phi) = \frac{d^2U}{d\phi^2} = \frac{\rho^3}{V^2} \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} - 3\frac{V_\phi^2}{V^2} \right). \quad (3.25)$$

Para calcularla en términos de T, desarrollamos U_ϕ de la siguiente manera

$$U_\phi = \frac{\rho^3}{V^3} \frac{dV}{d\phi} = \frac{\rho^3}{V^3} \frac{dV}{dT} \frac{dT}{d\phi} = \frac{\rho^3}{V^3} \frac{V}{\rho^{3/2}} \frac{dV}{dT},$$

donde hemos utilizado (3.17), por lo que

$$U_\phi = \frac{\rho^{3/2}}{V^2} \frac{dV}{dT}. \quad (3.26)$$

Derivamos la ecuación anterior respecto de ϕ y utilizamos que $d\phi = \rho^{3/2}dT/V$,

$$M^2 = U_{\phi\phi} = \frac{V_{TT}}{V} - 2\frac{V_T^2}{V^2}, \quad (3.27)$$

por lo que hemos obtenido la masa del taquión en términos del potencial original V y sus derivadas. Observamos que esta masa corresponde a la de una partícula taquiónica sólo cuando

$$\frac{V_{TT}}{V} < 2\frac{V_T^2}{V^2}; \quad (3.28)$$

esto implica que, por ejemplo, cualquier potencial cóncavo ($V_{TT} < 0$) conduce a una partícula taquiónica.

Un ejemplo de un potencial utilizado para modelar el campo taquiónico es el siguiente

$$V = V_i \exp[-T^2/2] . \quad (3.29)$$

Considerando el potencial anterior en la ecuación (3.27), tenemos que la masa está dada por

$$M^2 = -1 - T^2 < 0 , \quad (3.30)$$

por lo que, en efecto, se trata de un potencial viable para modelar el campo taquiónico.

3.3 Parámetros de Slow-Roll

Podemos simplificar los cálculos para obtener las perturbaciones definiendo los parámetros de flujo del horizonte (ver e.g. [27]). Estos parámetros están definidos de tal forma que no dependen del modelo que se tome; no son exclusivos del modelo de slow-roll y pueden ser utilizados para aquellos modelos en los que los parámetros de slow-roll son demasiado grandes. Los parámetros controlan cómo se comporta la distancia de Hubble durante inflación, de ahí el nombre de parámetros de flujo del horizonte.

Definimos la primera función del flujo del horizonte como

$$\epsilon_0 \equiv \frac{d_H}{d_{H_i}} , \quad (3.31)$$

donde $d_H(t) \equiv 1/H(t)$ es la distancia de Hubble a un tiempo t definida en (2.43), y $d_{H_i} = 1/H(t_i)$, t_i siendo el tiempo al inicio de inflación. La cantidad d_H es llamada horizonte debido a que es una buena aproximación del tamaño de la región que se encuentra causalmente conectada.

Definimos los siguientes parámetros de orden mayor como

$$\epsilon_{i+1} \equiv \frac{d \ln |\epsilon_i|}{dN} , \quad i \geq 0 , \quad (3.32)$$

donde N es el número de e-folds definido en (2.30). De acuerdo a la definición anterior, tenemos que

$$\epsilon_1 \equiv \frac{d \ln d_H}{dN} , \quad (3.33)$$

mide el cambio logarítmico de la distancia de Hubble por cada e-fold. La inflación está garantizada siempre y cuando $\epsilon_1 < 1$ ($\ddot{a} > 0$). Podemos obtener el parámetro $\epsilon_i \epsilon_{i+1}$ si nos fijamos en la ecuación (3.32). Notemos que, recordando que $dN = H dt$ en (2.30), la ecuación (3.32) conduce a

$$\dot{\epsilon}_i = H \epsilon_i \epsilon_{i+1} . \quad (3.34)$$

Consideremos la aproximación de slow-roll para el caso del campo taquiónico, definida mediante

$$\dot{T}^2 \ll 1 , \quad (3.35a)$$

$$\ddot{T} \ll 3H\dot{T} . \quad (3.35b)$$

A partir de estas expresiones y de las ecuaciones (3.12b) y (3.14), tenemos las siguientes aproximaciones

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_p^2}, \quad (3.36a)$$

$$\dot{T} \approx -\frac{V_T}{3HV}, \quad (3.36b)$$

las cuales permiten calcular más fácilmente los parámetros del flujo del horizonte. Podemos obtener \dot{T} en función de H a partir del número de e-folds para usarlo en los cálculos de los parámetros. De la ecuación (2.30), vemos que $dN = Hdt$, y desarrollamos

$$dN = Hdt = \frac{H}{\dot{T}}dT \approx -3H^2 \frac{V}{V_T}dT \approx -M_p^2 \frac{9H^4}{V_T}dT, \quad (3.37)$$

donde hemos utilizado las aproximaciones (3.36). Si ahora calculamos V_T a partir de la aproximación (3.36a) obtenemos

$$V_T = 6M_p^2 H H_T. \quad (3.38)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación anterior en (3.37), llegamos a la siguiente ecuación

$$dN = -\frac{3}{2} \frac{H^3}{H_T} dT, \quad (3.39)$$

de donde podemos obtener

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{H_T}{H^2}, \quad (3.40)$$

donde hemos utilizado nuevamente que $dN = Hdt$. Ahora procedemos a calcular

$$\epsilon_1 = \frac{d}{dN} \left(\ln \frac{H_i}{H} \right) = \frac{H}{H_i} \frac{d}{dN} \left(\frac{H_i}{H} \right) = -\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt}, \quad (3.41)$$

y, utilizando la ecuación (3.40), obtenemos ϵ_1 en términos de \dot{T} ,

$$\epsilon_1 = -\frac{H_T}{H^2} \dot{T} = \frac{3}{2} \dot{T}^2. \quad (3.42)$$

A partir de aquí, podemos utilizar la ecuación (3.32) para calcular ϵ_2 , y la ecuación (3.34) para calcular $\epsilon_2\epsilon_3$. Obtenemos entonces los parámetros

$$\epsilon_1 = \frac{3}{2} \dot{T}^2, \quad (3.43a)$$

$$\epsilon_2 = \sqrt{\frac{2}{3\epsilon_1}} \frac{\epsilon'_1}{H} = 2 \frac{\ddot{T}}{H\dot{T}}, \quad (3.43b)$$

$$\epsilon_2\epsilon_3 = \sqrt{\frac{2\epsilon_1}{3}} \frac{\epsilon'_2}{H}, \quad (3.43c)$$

donde las variables primadas indican derivadas respecto al campo T . En términos del potencial, estos parámetros adoptan la forma

$$\epsilon_1 \approx \frac{M_p^2 V'^2}{2 V^3}, \quad (3.44a)$$

$$\epsilon_2 \approx M_p^2 \left(-2 \frac{V''}{V^2} + 3 \frac{V'^2}{V^3} \right), \quad (3.44b)$$

$$\epsilon_2 \epsilon_3 \approx M_p^4 \left(2 \frac{V''' V'}{V^4} - 10 \frac{V'' V'^2}{V^5} + 9 \frac{V'^4}{V^6} \right). \quad (3.44c)$$

$\epsilon_2 \ll 1$ garantiza que el término \ddot{T} es más pequeño que $3H\dot{T}$, por lo que podemos ver que existirá inflación de slow-roll siempre y cuando $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$.

También podemos calcular el número de e-folds para el campo taquiónico. Mediante la ecuación (3.43a) vemos que

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{T_i}^{T_f} \frac{H}{\dot{T}} dT = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{T_i}^{T_f} \frac{H}{\sqrt{\epsilon_1}} dT, \quad (3.45)$$

donde t_f corresponde al tiempo en el que la inflación termina, $T_f = T(t_f)$ y $T_i = T(t_i)$. Sustituyendo la ecuación (3.44a), así como la ecuación (3.12a) con $K = 0$, tenemos

$$N \approx \frac{1}{M_p^2} \int_{T_i}^{T_f} \frac{V^2}{|V'|} dT, \quad (3.46)$$

con la que podemos calcular el número de e-folds a partir del potencial taquiónico.

3.4 Perturbaciones del campo taquiónico

La perturbación de curvatura en hipersuperficies comóviles para un campo taquiónico se define de manera análoga a la empleada para un campo escalar estándar, ec. (2.91),

$$\mathcal{R} = \psi + H \frac{\delta T}{\dot{T}}. \quad (3.47)$$

Para obtener la variable v , mediante la cual la acción a segundo orden en perturbaciones toma una forma análoga a la canónica (2.100), nos basamos en [28] donde se realiza un análisis de las perturbaciones para una acción más general, en el que la densidad lagrangiana es una función arbitraria de la energía cinética ($\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$). De acuerdo a esa referencia, la variable generalizada v tiene la forma

$$v \equiv z M_p \mathcal{R}, \quad (3.48)$$

donde z está definido para un universo plano como

$$z \equiv \frac{a(\rho + P)^{1/2}}{M_p c_s H}, \quad (3.49)$$

con c_s la velocidad del sonido definida mediante

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (3.50)$$

De la definición anterior tenemos que, para el campo taquiónico,

$$c_s^2 = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{-V^2(T)}{\rho} \right) = \frac{V^2(T)}{\rho^2}, \quad (3.51)$$

donde hemos utilizado la ecuación (3.8). Por lo que, sustituyendo la ecuación (3.6), obtenemos la velocidad del sonido del taquión,

$$c_s^2 = 1 - \dot{T}^2 = -\omega. \quad (3.52)$$

Ahora calculamos $\rho + P$,

$$\rho + P = \frac{V(T)\dot{T}^2}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}, \quad (3.53)$$

y con la ecuación de Friedmann (3.12a) obtenemos

$$(\rho + P)^{1/2} = \sqrt{3}M_p\dot{T}H. \quad (3.54)$$

Con la ecuación anterior y la ecuación (3.52) obtenemos la variable z de la ecuación (3.49),

$$z = \frac{\sqrt{3}a\dot{T}}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} = \frac{a\sqrt{2\epsilon_1}}{c_s}. \quad (3.55)$$

La generalización de la acción (2.100) para un campo con una función arbitraria de la energía cinética tiene la forma [28]

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[\left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 + c_s^2 v \Delta v + \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} v^2 \right], \quad (3.56)$$

con τ el tiempo conforme y Δ el operador laplaciano. La ecuación de movimiento para el campo v correspondiente a esta acción es

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - c_s^2 \Delta v - \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} v = 0. \quad (3.57)$$

Siguiendo el procedimiento análogo al campo escalar estándar, promovemos el campo clásico v a operador cuántico. Descomponemos al operador \hat{v} en sus operadores de creación y aniquilación,

$$\hat{v}(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\tau) \hat{a}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_k^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right], \quad (3.58)$$

con los operadores de creación \hat{a}_k^\dagger y aniquilación \hat{a}_k satisfaciendo las relaciones de conmutación usuales:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(k - k'), \quad (3.59a)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad (3.59b)$$

donde definimos al estado vacío $|0\rangle$ de la manera usual $\hat{a}_k |0\rangle = 0$. La normalización está dada por

$$v_k \frac{d}{d\tau}(v_k^*) - v_k^* \frac{d}{d\tau}(v_k) = i. \quad (3.60)$$

Finalmente, de la ecuación de movimiento (3.57), obtenemos la ecuación para los modos v_k

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} + (c_s^2 k^2 - u(\tau)) v_k = 0, \quad (3.61)$$

donde hemos definido a u como

$$u(\tau) = \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2}. \quad (3.62)$$

Vemos que una de las diferencias respecto a la ecuación de modos del campo escalar estándar (2.103) es el factor c_s^2 que aparece en la ecuación (3.61).

Para poder resolver la ecuación (3.61), necesitamos poder escribir u como una función más sencilla; para lograrlo, utilizamos primero la ecuación (3.55) y derivamos respecto al tiempo t ,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{3}a\dot{T}}{\sqrt{1-\dot{T}^2}} \right) = \frac{\sqrt{3}\dot{a}\dot{T}}{\sqrt{1-\dot{T}^2}} + \frac{\sqrt{3}a\ddot{T}}{(1-\dot{T}^2)^{3/2}} = z \frac{\dot{a}}{a} + \frac{z\ddot{T}}{\dot{T}(1-\dot{T}^2)}. \quad (3.63)$$

Sustituyendo las definiciones de parámetros (3.43), obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = Hz \left(1 + \frac{\epsilon_2}{2(1-\frac{2}{3}\epsilon_1)} \right). \quad (3.64)$$

A partir de aquí obtenemos la segunda derivada

$$\frac{\ddot{z}}{z} = -H^2 \epsilon_1 \left[1 + \frac{\epsilon_2}{2(1-\frac{2}{3}\epsilon_1)} \right] + H^2 \left[1 + \frac{\epsilon_2}{2(1-\frac{2}{3}\epsilon_1)} \right]^2 + \frac{H^2 \epsilon_2^2 \epsilon_1}{3(1-\frac{2}{3}\epsilon_1)^2} + \frac{H\dot{\epsilon}_2}{2(1-\frac{2}{3}\epsilon_1)}. \quad (3.65)$$

Ahora podemos calcular u en términos de los parámetros si recordamos que en términos del tiempo conforme definido en (2.36)

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = a \frac{d}{dt} (az) = a\dot{a}z + a^2 \ddot{z}, \quad (3.66)$$

por lo que, utilizando los cálculos anteriores, obtenemos

$$u = a^2 H^2 \left[1 + \frac{\epsilon_2}{2(1 - \frac{2}{3}\epsilon_1)} \right] + a^2 \frac{\ddot{z}}{z}, \quad (3.67)$$

donde el segundo término está dado por (3.65). Por otro lado, podemos obtener una relación importante derivando $1/aH$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{aH} \right) = -\frac{a}{\dot{a}^2} \ddot{a} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\left(1 - \frac{3}{2}\dot{T}^2 \right) = -1 + \epsilon_1, \quad (3.68)$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (3.12). Por lo tanto,

$$\frac{1}{aH} = -\tau + \int \epsilon_1 d\tau = \tau(\epsilon_1 - 1) - \int \tau d\epsilon_1, \quad (3.69)$$

en donde hemos utilizado integración por partes. Ahora, podemos escribir la integral de otra manera si tomamos la ecuación (3.34) para ϵ_1 ,

$$\dot{\epsilon}_1 = H\epsilon_1\epsilon_2 \quad (3.70)$$

y desarrollamos la integral anterior,

$$\int \tau d\epsilon_1 = \int \tau \frac{d\epsilon_1}{d\tau} d\tau = \int aH\tau\epsilon_1\epsilon_2 d\tau \approx -\epsilon_2 \int \epsilon_1 d\tau, \quad (3.71)$$

donde hemos supuesto $\dot{\epsilon}_2 \approx 0$ y aproximado $\frac{1}{aH} \approx -\tau$ de acuerdo a la ecuación (3.69), despreciando el término integral de mayor orden en ϵ_1 . Hemos podido suponer ϵ_2 aproximadamente constante debido a la ecuación (3.34), en donde tomamos $\epsilon_2\epsilon_3 \approx 0$. Ahora, observamos que

$$-\tau + \int \epsilon_1 d\tau \approx \tau\epsilon_1 - \tau + \epsilon_2 \int \epsilon_1 d\tau \Rightarrow \int \epsilon_1 d\tau \approx \frac{\tau\epsilon_1}{1 - \epsilon_2}, \quad (3.72)$$

y sustituyendo en la ecuación (3.69) tenemos que

$$\frac{1}{aH} \approx \left(\frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_2} - 1 \right) \tau. \quad (3.73)$$

Si, como antes, nos quedamos hasta primer orden en ϵ_1 , podemos despejar τ como

$$\tau \approx -\frac{1}{aH} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_2} \right). \quad (3.74)$$

Podemos sustituir $a^2 H^2$ en la ecuación (3.67) hasta primer orden y reescribir la ecuación de los modos v_k (3.61) como

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} + \left(c_s k^2 - \frac{(\nu^2 - 1/4)}{\tau^2} \right) v_k = 0, \quad (3.75)$$

donde

$$\nu^2 = \frac{1}{4} + u\tau^2 \quad (3.76)$$

depende únicamente de los parámetros ϵ_1 y ϵ_2 de acuerdo a las ecuaciones (3.65), (3.67) y (3.74). Lo primero que haremos es revisar la solución en el sub-horizonte ($k_\omega \gg aH$). En este límite, observando la ecuación (3.74), tenemos que $k_\omega^2 \ll 1/\tau^2$. Por lo que nuestra ecuación (3.75) en el sub-horizonte está dada por

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} + c_s k^2 v_k = 0. \quad (3.77)$$

Hemos llegado a la misma ecuación que en (2.45). Por lo que, análogamente a la ecuación (2.46), tenemos que la solución en el sub-horizonte está dada por

$$\lim_{k_\omega \gg aH} v_k = \frac{e^{-ik_\omega\tau}}{\sqrt{2k_\omega}}, \quad (3.78)$$

donde hemos definido $k_\omega \equiv \sqrt{-\omega}k$, de tal forma que ω está dado por la ecuación (3.52).

De manera análoga a la sección 2.3.1, podemos obtener la solución general a la ecuación (3.75):

$$v_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (-\tau)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-k_\omega\tau), \quad (3.79)$$

donde $H_\nu^{(1)}$ es la función de Hankel¹ del primer tipo de rango ν . En la solución (3.79), hemos impuesto las condiciones de frontera normalizadas de la ecuación (3.78).

Recordando la discusión en la sección 2.3.2, donde concluimos que \mathcal{R} es constante en el super-horizonte. Es decir, para calcular el espectro de potencias nos servirá tomar el límite de la ecuación (3.79) en el super-horizonte. Una vez hecho esto, evaluaremos en la salida del horizonte, puesto que este valor se mantiene porque \mathcal{R} es constante. Siguiendo este procedimiento, entonces calculamos

$$|v_k|^2 = \frac{\pi}{4} (-\tau) [J_\nu^2(-k_\omega\tau) + Y_\nu^2(-k_\omega\tau)], \quad (3.80)$$

donde J_ν y Y_ν son las funciones de Bessel de primer tipo y segundo tipo, respectivamente. Una propiedad importante de las funciones de Bessel es que, cuando $x \ll 1$, entonces tenemos las aproximaciones [29]

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad (3.81a)$$

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cot(\nu\pi). \quad (3.81b)$$

¹La función de Hankel de primer tipo de rango ν está definida como $H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu + iY_\nu$, donde J_ν es la función de Bessel de primer tipo de rango ν y Y_ν la función de Bessel de segundo tipo de rango ν . Hemos tomado esta solución debido a que cumple la propiedad de que $H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\{i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\}$ cuando $x \rightarrow \infty$ lo cual la hace adecuada para cumplir la condición de frontera (3.78). Se puede encontrar información detallada sobre estas funciones en [29].

El caso límite del super-horizonte ocurre cuando $k_\omega \ll aH$. Por lo que, tomando la ecuación (3.74), la aproximación en el super-horizonte se da siempre que $-k_\omega\tau \approx 0$. Tomando entonces esta aproximación y las expresiones (3.81), vemos que el término dominante en (3.80) será el correspondiente al primer término en la aproximación (3.81b). De acuerdo a lo anterior, la ecuación (3.80) en el super-horizonte está dada por

$$|v_k|^2 = \frac{\pi}{4}(-\tau) \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{-k_\omega\tau} \right)^\nu \right]^2. \quad (3.82)$$

Simplificando términos y calculando la raíz cuadrada, obtenemos

$$|v_k| = \frac{2^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\nu) (-\tau)^{1/2-\nu} (k_\omega)^{-\nu}. \quad (3.83)$$

Ahora sustituimos la aproximación (3.74) para τ y, sustituyendo $\sqrt{\pi} = 2\Gamma(3/2)$, obtenemos

$$|v_k| = 2^{\nu-2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \left[\frac{1}{aH} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}-\nu} (k_\omega)^{-\nu}. \quad (3.84)$$

Por lo que ahora podemos calcular

$$|\mathcal{R}_k| = \frac{|v_k|}{zM_p} = 2^{\nu-2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \left[\frac{1}{aH} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}-\nu} \frac{(k_\omega)^{-\nu}}{M_p z}. \quad (3.85)$$

El espectro de potencias para las fluctuaciones escalares, de acuerdo a la primera igualdad de la ecuación (2.63), está dado entonces por

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2 = \frac{2^{2\nu-4}}{M_p^2 c_s \epsilon_1} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \left(1 + \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_2} \right)^{1-2\nu} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k_\omega}{aH} \right)^{3-2\nu} \Big|_{k_\omega=aH}, \quad (3.86)$$

donde hemos utilizado la ecuación (3.55) para sustituir z^2 . Ahora podemos calcular el índice espectral escalar

$$n_s - 1 = \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = 3 - 2\nu. \quad (3.87)$$

En el caso de las perturbaciones tensoriales tenemos lo mismo que para un campo escalar estándar, i.e. la ecuación (2.111), donde v_k está definido por la ecuación (2.110). A partir de la ecuación (2.111) podemos obtener una ecuación análoga a (3.75),

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} + \left(k^2 - \frac{(\mu^2 - 1/4)}{\tau^2} \right) v_k = 0, \quad (3.88)$$

donde

$$\mu^2 = \frac{1}{4} + \frac{\tau^2}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2}, \quad (3.89)$$

y además

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = \dot{a}^2 + a\ddot{a} = a^2 H^2 (2 - \epsilon_1), \quad (3.90)$$

donde hemos utilizado la ecuación (3.41) para calcular $a\ddot{a}$. La solución a la ecuación (3.88) está dada por

$$\frac{|v_k|}{a} = 2^{\mu-2} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(3/2)} \left[\frac{1}{aH} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}-\mu} \frac{k^{-\mu}}{a}. \quad (3.91)$$

A partir de esta solución, obtenemos el espectro de potencias de las perturbaciones tensoriales de la ecuación (2.113)

$$P_T = \frac{2^{2\mu}}{M_p^2} \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \left(1 + \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_2} \right)^{1-2\mu} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\mu} \Big|_{k=aH}, \quad (3.92)$$

de donde podemos calcular el índice espectral tensorial

$$n_T = \frac{d \ln P_T}{d \ln k} = 3 - 2\mu. \quad (3.93)$$

También podemos calcular el cociente tensor-a-escalar de las ecuaciones (3.92) y (3.86),

$$r = \frac{P_T}{P_R} \approx 2^{2(\mu-\nu)+4} \left(\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)} \right) \epsilon_1, \quad (3.94)$$

donde nos hemos quedado hasta primer orden en ϵ_1 .

Para obtener los índices espectrales en función de los parámetros ϵ_1 y ϵ_2 , necesitamos obtener los valores de μ y ν . En este caso, supondremos al igual que antes, que $\epsilon_2 \epsilon_3 \approx 0$ y por lo tanto $\dot{\epsilon}_2 \approx 0$. Quedándonos hasta primer orden en ϵ_1 , y utilizando las ecuaciones (3.65), (3.67) y (3.76), calculamos ν^2 . Mientras que para calcular μ^2 , utilizamos las ecuaciones (3.89) y (3.90), de donde obtenemos

$$\nu \approx \frac{1}{2} |3 + \epsilon_2| + \frac{(4\epsilon_2^3 - 4\epsilon_2^2 - 27\epsilon_2 - 18) \epsilon_1}{6|3 + \epsilon_2|(\epsilon_2 - 1)}, \quad (3.95a)$$

$$\mu \approx \frac{3}{2} + \frac{3 + \epsilon_2}{3(1 - \epsilon_2)} \epsilon_1. \quad (3.95b)$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (3.95) en las ecuaciones (3.87), (3.93) y (3.94), para obtener los índices espectrales y el cociente tensor-a-escalar:

$$n_s \approx 4 - |3 + \epsilon_2| - \frac{(4\epsilon_2^3 - 4\epsilon_2^2 - 27\epsilon_2 - 18) \epsilon_1}{3|3 + \epsilon_2|(\epsilon_2 - 1)}, \quad (3.96a)$$

$$n_T \approx -\frac{3 + \epsilon_2}{3(1 - \epsilon_2)} 2\epsilon_1, \quad (3.96b)$$

$$r \approx 2^{3-|3+\epsilon_2|} \left(\frac{\Gamma[3/2]}{\Gamma[|3+\epsilon_2|/2]} \right)^2 16\epsilon_1. \quad (3.96c)$$

Imponiendo la condición de slow-roll $|\epsilon_2| \ll 1$, obtenemos los índices espectrales y el cociente tensor-a-escalar para la inflación taquiónica del tipo slow-roll

$$n_s = 1 - 2\epsilon_1 - \epsilon_2, \quad (3.97a)$$

$$n_T = -2\epsilon_1, \quad (3.97b)$$

$$r = 16\epsilon_1. \quad (3.97c)$$

Estos son los parámetros que utilizaremos para comparar el modelo de inflación taquiónica con las observaciones del CMB.

3.5 Inflación taquiónica por medio de un potencial exponencial

Ahora que hemos obtenido los parámetros de slow-roll, así como los índices espectrales y el cociente tensor-a-escalar, podemos analizar qué tan posible es que la inflación haya sido llevada a cabo por un campo taquiónico. Para estudiar esto, seguiremos el procedimiento estándar para el caso de un potencial del tipo exponencial. Debemos calcular los parámetros de slow-roll con base en el potencial. Una vez calculados los parámetros, obtenemos el valor de T_f , es decir, el valor de T cuando la inflación termina, en cuyo caso $\epsilon_1 = 1$. Mediante la expresión para el número de e-folds N , determinamos T_i en términos de T_f y N . Por último, calculamos los índices espectrales y el cociente tensor-a-escalar cuando inicia la inflación T_i para distintos valores del número de e-folds (tomamos $40 \leq N \leq 70$).

Este potencial es una función exponencial sencilla

$$V(T) = V_1 \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right), \quad (3.98)$$

donde V_1 y T_1 son constantes positivas de unidades masa⁴ y masa⁻¹, respectivamente. Podemos ver su gráfica en la figura 3.1.

Lo primero que hacemos es revisar que corresponda a una partícula taquiónica. Para ello calculamos su masa con la ecuación (3.27), de esta manera vemos que $M^2 = -1/(T_1)^2$, por lo que su masa cuadrada es negativa y por lo tanto se trata de un potencial taquiónico. Ahora, utilizando las ecuaciones (3.44), calculamos los parámetros de slow-roll para este potencial:

$$\epsilon_1 = \frac{\exp\left(\frac{T}{T_1}\right)}{2X_1^2}, \quad (3.99a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\exp\left(\frac{T}{T_1}\right)}{X_1^2}, \quad (3.99b)$$

$$\epsilon_2\epsilon_3 = \frac{\exp\left(2\frac{T}{T_1}\right)}{X_1^4}, \quad (3.99c)$$

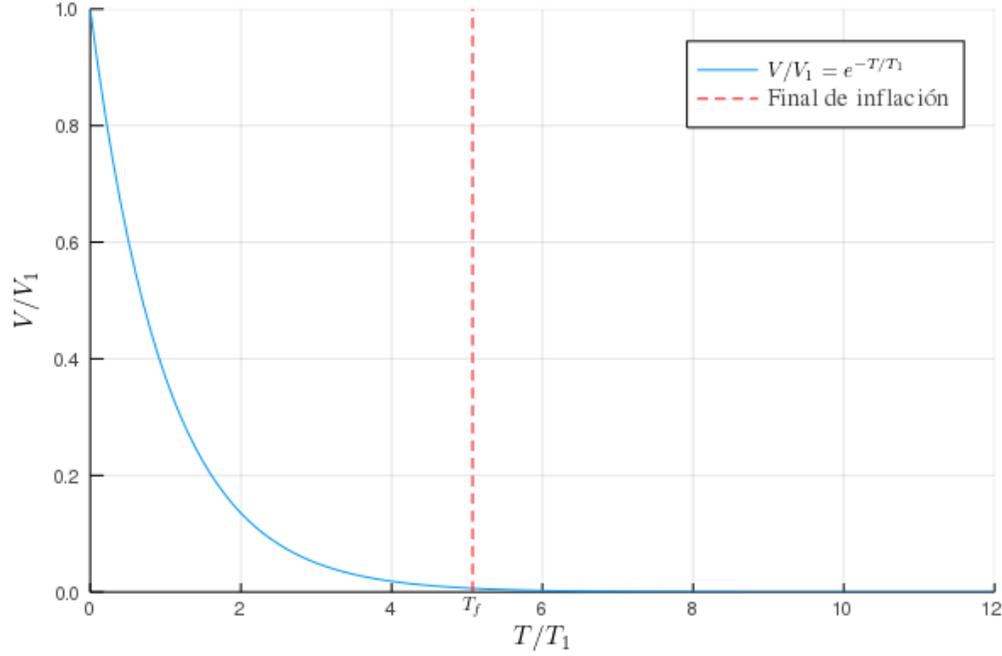


Figura 3.1: Potencial taquiónico del tipo exponencial; a la izquierda de la línea roja hay inflación, la inflación termina en esta línea roja precisamente. Se ha tomado $X_1^2 = 80$.

donde hemos definido

$$X_1^2 \equiv V_1 \frac{T_1^2}{M_p^2}. \quad (3.100)$$

Procedemos a calcular T_f , el valor de T cuando termina la inflación. Para ello, debemos resolver la ecuación $\epsilon_1 = 1$, con la que obtenemos

$$\exp\left(\frac{T_f}{T_1}\right) = 2X_1^2. \quad (3.101)$$

Ahora, utilizando el potencial (3.98), determinamos la expresión para el número de e-folds en términos de T_f y T_i . De la ecuación (3.46), obtenemos

$$N = \frac{X_1^2}{T_1} \int_{T_i}^{T_f} \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) dT = X_1^2 \left[\exp\left(-\frac{T_i}{T_1}\right) - \exp\left(-\frac{T_f}{T_1}\right) \right], \quad (3.102)$$

sustituyendo la ecuación (3.101) tenemos

$$\exp\left(\frac{T_i}{T_1}\right) = \frac{2X_1^2}{1 + 2N}, \quad (3.103)$$

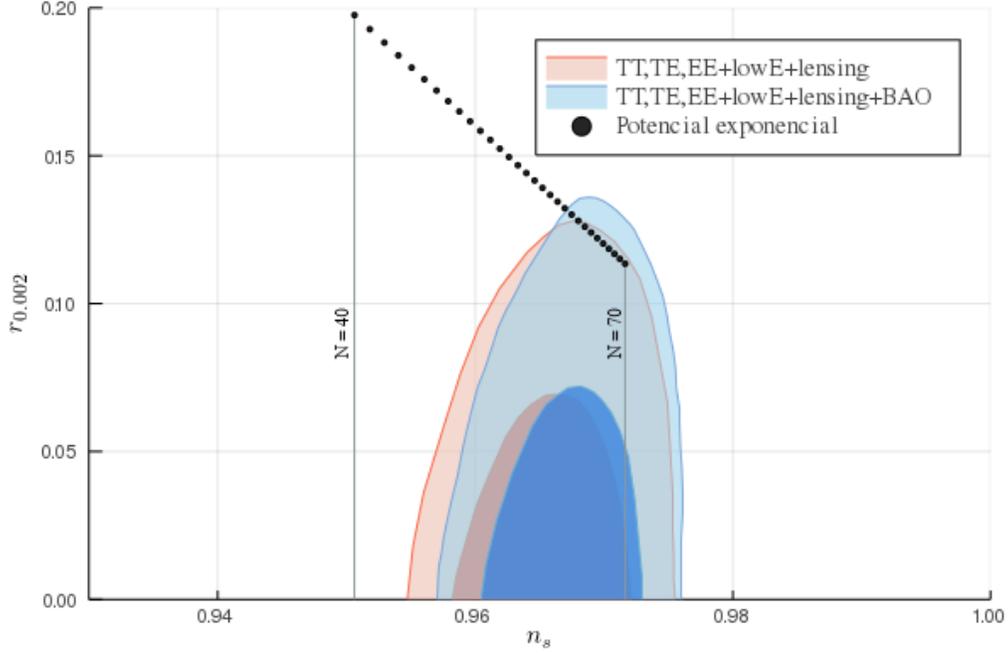


Figura 3.2: Valores para la tasa de perturbaciones tensoriales a escalares r e índice espectral escalar n_s para el potencial taquiónico exponencial para diferentes valores de e-folds $40 \leq N \leq 70$. Los resultados son independientes de los valores de T_1 y V_1 (ecs. (3.106)); sin embargo, los parámetros T_1 y V_1 deben cumplir las condiciones (3.105) y (3.107). Se muestran los contornos de probabilidad (para 1σ y 2σ) proporcionados por el satélite de Planck [1].

es decir, hemos obtenido el valor de T al principio de la inflación con lo que podemos calcular los índices espectrales y comparar con los resultados obtenidos mediante las observaciones. De este resultado podemos también obtener una de las características de X_1 . Si despejamos la ecuación (3.103) obtenemos

$$X_1^2 = \left(N + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{T_i}{T_1}\right), \quad (3.104)$$

y notando que $T_i \geq 0$, entonces vemos que

$$X_1^2 \geq N + 1/2, \quad (3.105)$$

es decir X_1^2 debe de ser mayor que el número de e-folds. Recordemos que el campo se mueve por el potencial desde cero hasta infinito, entonces tenemos que a la izquierda de la línea roja en la figura 3.1 hay inflación, en este caso se ha utilizado $X_1^2 = 80$.

Utilizando las ecuaciones (3.97) obtenemos los índices espectrales a primer orden:

$$n_s = 1 - \frac{4}{1 + 2N}, \quad (3.106a)$$

$$n_T = -\frac{2}{1 + 2N}, \quad (3.106b)$$

$$r = \frac{16}{1 + 2N}. \quad (3.106c)$$

Es importante destacar que estas magnitudes observables son independientes de los parámetros V_1 y T_1 , únicamente dependen de N ; sin embargo, para obtener un número suficientemente grande de e-folds, estos parámetros deben ser tales que cumplan la condición descrita anteriormente (3.105).

A pesar de la independencia de los parámetros T_1 y V_1 en las ecuaciones (3.106), hay otra restricción que debemos considerar. Resulta que si vamos más allá de la escala de Planck, i.e. $T = M_p^{-1}$, no conocemos exactamente qué haya ocurrido en esa época, en principio necesitaríamos de una teoría de gravedad cuántica para describir esta etapa. La manera de solucionar esto es exigiendo que $T_i > M_p^{-1}$, lo cual lo conseguimos siempre y cuando

$$T_1 > \left[\ln \left(\frac{2X_1^2}{1 + 2N} \right) M_p \right]^{-1}, \quad (3.107)$$

donde hemos utilizado la ecuación (3.103). De esta manera garantizamos que tanto T_i como T_f se encuentran dentro del régimen de gravedad de Einstein y no necesitamos una teoría cuántica de la gravedad para describir esta etapa. Como ejemplo de un caso que cumple las restricciones aquí mencionadas podríamos tomar un número de e-folds grande $N = 70$, y los parámetros $T_1 = 8.0M_p^{-1}$ y $V_1 = 1.25M_p^4$, de donde obtenemos $X_1^2 = 80$. En este caso, vemos que se cumple la condición (3.107), i.e. $T_1 > 7.91M_p^{-1}$, y por lo tanto T_i ocurre después de la escala de Planck. Además, también vemos que X_1^2 es mayor que N , permitiendo obtener un número grande de e-folds. En resumen, un potencial (3.98) con parámetros $T_1 = 8.0M_p^{-1}$ y $V_1 = 1.25M_p^4$ cumple las condiciones necesarias para describir inflación.

De la ecuación (3.94) podemos observar que la tasa de perturbaciones tensoriales a perturbaciones escalares posee una cota inferior correspondiente al valor $r \gtrsim 0.1$, que solo se alcanza para valores muy grandes de e-folds, $N \approx 80$. Este resultado indica que en inflación taquiónica el valor de r es, en comparación con muchos otros modelos inflacionarios, muy grande, lo que lo acerca a los límites observacionales. Es, por tanto, previsible que en el corto plazo sea posible descartar o confirmar este modelo inflacionario mediante observaciones futuras del CMB.

En la figura 3.2 podemos observar los resultados que hemos obtenido al calcular los parámetros observables respecto a un número de e-folds entre 40 y 70. Podemos comparar estos resultados con los valores proporcionados mediante el satélite Planck [1], en el que hemos tomado los contornos con y sin oscilaciones acústicas de bariones. Los colores más tenues representan el contorno para 2σ , en el que existe un nivel de confianza aproximado de 95%, mientras que los colores más fuertes son los contornos para 1σ , con un nivel de confianza del 68%.

Los resultados cercanos a $N = 70$ se encuentran dentro del nivel de confianza del 95 %, por lo que no se puede descartar completamente la idea de que la inflación pueda ser producida por una partícula taquiónica.

Este modelo, sin embargo, tiene también problemas que hay que analizar como se menciona en [21]. Uno de los problemas consiste en que, como se puede observar en la figura 3.2, las anisotropías que se producirían en el CMB serían bastante grandes debido a que nuestros parámetros no son pequeños como en otras teorías. Aún así, la inflación taquiónica puede servir como una etapa de inflación temprana, en la que son resueltos varios de los problemas mayores de la cosmología, como los problemas de planitud, homogeneidad e isotropía; y después ocurre otra etapa de inflación producida por otro mecanismo. Esta última etapa de inflación determinaría la estructura a gran escala que observamos hoy en el Universo.

Otro de los problemas, también mencionado en [21], consiste en que si el potencial tiene un mínimo en $T \rightarrow \infty$, entonces el Universo nunca pasaría por una etapa en el que es dominado por radiación, lo cual es contradictorio con la teoría de nucleosíntesis. Estos problemas deben ser resueltos para proponer este tipo de taquión como el campo responsable de la inflación.

Capítulo 4

Teorías del tipo $F(R)$

En la sección anterior, analizamos una modificación al tensor de energía-momento del Universo al agregar un lagrangiano no convencional de un campo taquiónico. Sin embargo, la teoría de Einstein no fue modificada, utilizamos la acción de Einstein-Hilbert, dando lugar a nuestros resultados. En este capítulo, realizamos una ligera modificación a la teoría de la relatividad general de Einstein agregando un término R^2 a la acción. Este modelo es conocido como modelo de Starobinsky y fue estudiado por él mismo en 1980 [30]. Como veremos más adelante, este término cuadrático lleva a una etapa inflacionaria que es consistente con las observaciones.

Una de las modificaciones más sencillas que se le puede realizar a la teoría de la relatividad general, es el caso en el que tomamos una función arbitraria F del escalar de Ricci R , en lugar de un término lineal en la acción de Einstein-Hilbert. Estas modificaciones fueron estudiadas con el objetivo de explicar la aceleración del Universo y la formación de las galaxias sin introducir energía oscura ni materia oscura. En este trabajo tomaremos el formalismo de la métrica, en el que las ecuaciones de campo son obtenidas mediante la variación con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ únicamente. Suponemos que F es una función bien comportada, que puede ser tan sencilla como un polinomio.

A lo largo del capítulo tomaremos el marco de Einstein como el marco donde tenemos relatividad general, y el de Jordan como el marco en el que las ecuaciones de campo de Einstein son modificadas. En este capítulo, discutiremos alguna de las propiedades que le pedimos a la teoría para poder realizar una transformación conforme al marco de Einstein; sin embargo, también es posible realizar un análisis dentro del marco de Jordan y quitarnos algunas de las restricciones sobre F . En [31] se puede ver un trabajo muy completo sobre ambos marcos y la relación entre ellos.

Para el análisis básico de las teorías del tipo $F(R)$ en la sección 4.1 nos basamos en los artículos [31, 32, 33]. En esta sección hablamos sobre la equivalencia entre campos escalares y teorías sencillas $F(R)$; esta equivalencia nos permitirá estudiar de manera más fácil los modelos $F(R)$. En la sección 4.2.1 proponemos la teoría de Starobinsky como modelo inflacionario y calculamos los índices espectrales para comparar con las observaciones; nos apoyamos principalmente de [34, 35]. Para el análisis del modelo de Starobinsky en el marco de Jordan de la sección 4.2.2 nos basamos en [31] con el apoyo de [36]; en esta sección concluiremos que, a primer orden, los observables son

equivalentes en ambos marcos.

4.1 Campos escalares a partir de teorías $F(R)$

Analicemos la acción de Einstein-Hilbert en el contexto de las modificaciones del tipo $F(R)$. En estas teorías, la acción es una función general del escalar de Ricci, por lo que tenemos

$$S_F = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R). \quad (4.1)$$

Esta acción se puede escribir de una manera equivalente y más sencilla si nos apoyamos de un campo escalar auxiliar χ , tal que

$$S[g_{\mu\nu}, \chi] = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [F'(\chi)(R - \chi) + F(\chi)], \quad (4.2)$$

donde las variables primadas indican la derivada respecto al argumento. Podemos verificar la equivalencia si obtenemos las ecuaciones de movimiento de χ mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \chi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0. \quad (4.3)$$

Como no hay dependencia explícita de derivadas de χ , entonces la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial_\mu \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0 \quad \Rightarrow \quad F''(\chi)(R - \chi) - F'(\chi) + F'(\chi) = 0. \quad (4.4)$$

Por lo que la ecuación de movimiento del campo χ es

$$F''(\chi)(R - \chi) = 0. \quad (4.5)$$

En tanto pidamos que $F''(\chi) \neq 0$, tendremos que $\chi = R$ y por lo tanto equivalente a la teoría $F(R)$; esto se puede verificar al sustituir en la acción de la ecuación (4.2). Ahora vamos a utilizar la transformación conforme de la métrica definida por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (4.6)$$

donde Ω^2 es llamado factor conforme y la tilde representa las variables en el marco de Einstein, mientras que las variables originales (sin tilde) están en el marco de Jordan. Los escalares de Ricci R y \tilde{R} en los dos marcos tienen la siguiente relación

$$R = \Omega^2(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega), \quad (4.7)$$

donde $\omega \equiv \ln \Omega$, $\tilde{\square}\omega = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\omega)$ y además $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$. En consecuencia, la acción ahora tiene la forma

$$S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[F'(\chi)\Omega^{-2}(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega) - \Omega^{-4}(\chi F'(\chi) - F(\chi)) \right]. \quad (4.8)$$

Para volver al marco de Einstein, en donde la dependencia es lineal respecto a R , tomamos $\Omega^2 = F'(\chi)$. De aquí podemos ver que para que la transformación sea válida necesitamos que $F'(\chi) > 0$. La acción entonces es

$$S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega - \frac{\chi F'(\chi) - F(\chi)}{(F'(\chi))^2} \right]. \quad (4.9)$$

Del último término de (4.9) podemos definir un potencial

$$V(\chi) \equiv \frac{M_p^2}{2} \frac{\chi F'(\chi) - F(\chi)}{(F'(\chi))^2}, \quad (4.10)$$

y por el teorema de Gauss, la integral $\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\square}\omega$ en la ecuación (4.9) se anula, por lo que la acción se reduce a

$$S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right) - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} V(\chi). \quad (4.11)$$

Podemos escribir la acción (4.11) en la forma canónica si introducimos un nuevo campo escalar ϕ , de tal forma que

$$F'(\chi) \equiv \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) \Leftrightarrow \phi = \sqrt{\frac{3}{2}}M_p \ln F'(\chi), \quad (4.12)$$

de donde vemos que

$$\omega = \ln \Omega = \ln (F'(\chi))^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}. \quad (4.13)$$

Con ayuda de esta última ecuación obtenemos que

$$6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega = \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{M_p^2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \quad (4.14)$$

Sustituyendo todo esto en la acción (4.11), obtenemos

$$S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \right], \quad (4.15)$$

es decir, hemos conseguido transformar la acción general (4.1) en una acción de un campo escalar estándar idéntico al inflatón. Es de notar que, a pesar de haber llegado a un campo escalar estándar, aún estamos en el marco de Einstein, el marco original es el marco de Jordan. En la sección 4.2.2 hablaremos más en detalle de esto y concluiremos que las variables medibles durante inflación son las mismas en ambos marcos para el modelo de Starobinsky. Por lo tanto, una teoría $F(R)$ bien comportada, i.e. que cumple las condiciones mencionadas anteriormente, es una teoría válida para inflación, pues hemos visto en la sección 2.2.1 que un campo escalar estándar lleva a una etapa inflacionaria del Universo.

4.1.1 Teorías del tipo $F(R)$ a partir de campos escalares

Hemos conseguido transformar una teoría del tipo $F(R)$ en una teoría de un campo escalar estándar; ahora es de nuestro interés encontrar la transformación inversa, es decir, a partir del campo escalar, regresar a la teoría $F(R)$.

Podemos obtener la derivada del potencial (4.10),

$$\frac{dV}{d\chi} = \frac{M_p^2}{2} \left[F''(\chi) \frac{2F(\chi) - \chi F'(\chi)}{F'(\chi)^3} \right]. \quad (4.16)$$

Ahora procedemos a obtener la derivada en términos del campo ϕ ,

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{dV}{d\chi} \frac{d\chi}{d\phi} = \frac{dV}{d\chi} \frac{dF'/d\phi}{dF'/d\chi}. \quad (4.17)$$

Además, tenemos que la ecuación (4.12) implica que

$$\frac{dF'}{d\phi} = \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{2}{3}} F'(\chi). \quad (4.18)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.17) tenemos

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{M_p^2}{2} \left[F''(\chi) \frac{2F(\chi) - \chi F'(\chi)}{F'(\chi)^3} \right] \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} M_p} \frac{F'(\chi)}{F''(\chi)}, \quad (4.19)$$

de donde resulta que la derivada del potencial respecto al campo ϕ está dada por

$$\frac{dV}{d\phi} = -\frac{M_p}{\sqrt{6}} \frac{\chi F' - 2F}{F'^2}. \quad (4.20)$$

Ahora podemos calcular F y R también en términos de ϕ . Para ello, nos apoyamos de las ecuaciones (4.10) y (4.20), y recordamos también que $\chi = R$ para satisfacer (4.5). Así obtenemos

$$R = \left[\frac{\sqrt{6}}{M_p} \frac{dV}{d\phi} + \frac{4V}{M_p^2} \right] \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right), \quad (4.21)$$

$$F = \left[\frac{\sqrt{6}}{M_p} \frac{dV}{d\phi} + \frac{2V}{M_p^2} \right] \exp \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right). \quad (4.22)$$

Estas son conocidas como las equivalencias clásicas entre las teorías del tipo $F(R)$ y el campo escalar estándar [33].

4.2 Modelo $F(R)$ de Starobinsky

La modificación más sencilla del tipo $F(R)$ que podemos imaginar es agregando un término cuadrático al escalar de Ricci usual. Es decir

$$F(R) = R + \frac{1}{6m^2} R^2, \quad (4.23)$$

donde m es una escala de masa arbitraria a este nivel. Utilizando la ecuación (4.10) calculamos $V(R)$,

$$V(R) = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{R^2}{6m^2 F'^2} \right). \quad (4.24)$$

Podemos simplificar la expresión anterior utilizando la ecuación (4.12)

$$1 + \frac{1}{3m^2} R = \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \Leftrightarrow R = 3m^2 \left[\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) - 1 \right], \quad (4.25)$$

sustituyendo en la ecuación (4.24) obtenemos

$$V = \frac{3}{4} M_p^2 m^2 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \right]^2, \quad (4.26)$$

que es conocido como el potencial de Starobinsky. Podemos ver su gráfica en la figura 4.1.

El potencial escalar está acotado por abajo (es no-negativo y estable), y tiene un mínimo global en $\phi = 0$, correspondiente al vacío de Minkowski. En el régimen en que $\phi/M_p \gg 1$ el potencial es casi constante ($V = \frac{3}{4} M_p^2 m^2$), por lo que lleva a inflación de tipo slow-roll. En el régimen $\phi/M_p \ll 1$, tenemos que $V \approx \frac{1}{2} m^2 \phi^2 < \frac{3}{4} M_p^2 m^2$ por lo que el campo oscila al rededor de $\phi = 0$.

Podemos calcular la segunda derivada de V con respecto a ϕ ,

$$V_{\phi\phi} = m^2 \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \left[2 \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) - 1 \right]. \quad (4.27)$$

Como el lagrangiano está normalizado canónicamente, entonces el mínimo de la energía corresponde con el mínimo del potencial, es decir $\phi_{\min} = 0$. Por lo que observamos que $m^2 = V_{\phi\phi}|_{E_{\min}}$ corresponde a la masa de la partícula escalar asociada al campo ϕ .

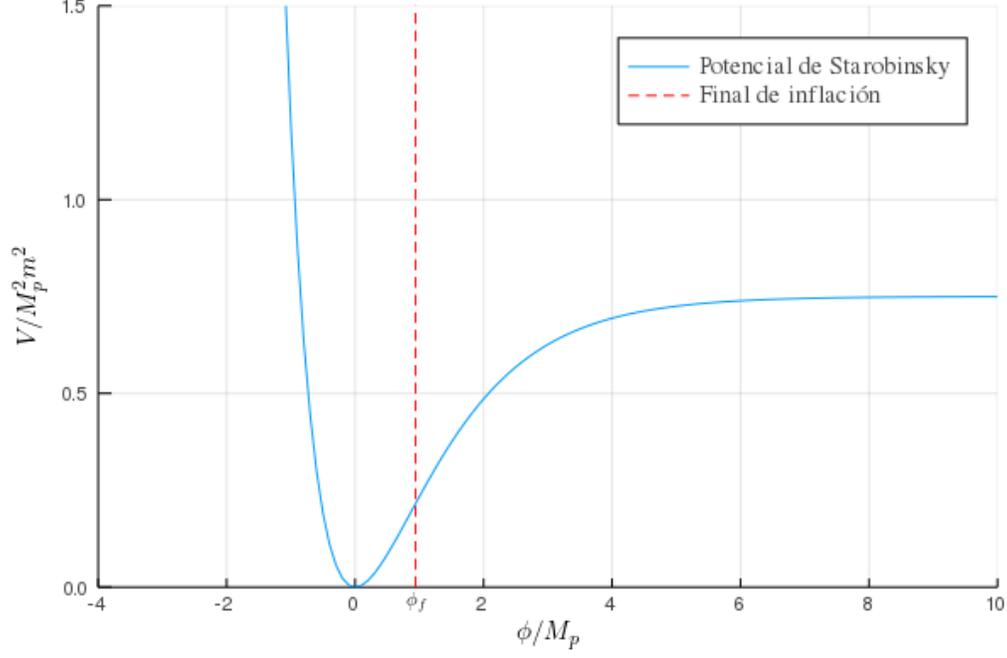


Figura 4.1: El potencial de Starobinsky. El campo se mueve desde infinito hasta llegar al mínimo en $\phi = 0$; la línea roja representa el final de la inflación en ϕ_f definido por $\epsilon = 1$ (ver ec. (4.31)), por lo que cuando $\phi/M_p \gg 1$ existe una expansión acelerada del universo.

4.2.1 Inflación de Starobinsky

Observando la ecuación (4.15), vemos que conseguimos escribir la acción como una parte gravitatoria y una parte de acción correspondiente a un campo escalar. Esta última parte de la acción puede describir inflación, como se discutió en la sección 2.2.1. Podemos obtener los parámetros de slow roll, así como el número de e-folds. El número de e-folds está dado por la ecuación (2.30), que en nuestro caso adopta la forma

$$N = \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_\phi} d\phi = \frac{3}{4} \left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_i}{M_p}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_f}{M_p}\right) \right] - \frac{1}{2M_p} \sqrt{\frac{3}{2}} [\phi_i - \phi_f], \quad (4.28)$$

donde ϕ_f representa el valor del inflatón en el final de la inflación, es decir, cuando uno de los parámetros de slow-roll alcanza un valor cercano a 1.

Calculemos entonces los parámetros de slow-roll. Mientras estemos en el marco de Einstein, tenemos un lagrangiano canónicamente normalizado, por lo que los parámetros de slow-roll coinciden

con los del inflatón de las ecuaciones (2.26) y (2.29), de donde obtenemos

$$\epsilon = \frac{4}{3} \left[\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) - 1 \right]^{-2}, \quad (4.29a)$$

$$\eta = -\frac{4}{3} \left[\frac{\exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \left(1 - 2 \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \right)}{\left(1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right) \right)^2} \right]. \quad (4.29b)$$

El cociente tensor-a-escalar r , el índice espectral escalar n_s y el índice espectral tensorial n_T están dados por los mismos parámetros de la inflación por un campo escalar estándar:

$$r = 16\epsilon, \quad (4.30a)$$

$$n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon, \quad (4.30b)$$

$$n_T = -2\epsilon. \quad (4.30c)$$

El final de inflación se da cuando cualquiera de los parámetros de slow-roll alcanza el valor de 1. Verificamos ambos casos, tenemos que si $\epsilon = 1$ entonces

$$\phi|_{\epsilon=1} = \sqrt{\frac{3}{2}} M_p \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right). \quad (4.31)$$

En el caso de $|\eta| = 1$ tenemos

$$\phi|_{|\eta|=1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} M_p \ln \left(\frac{3}{5} \right). \quad (4.32)$$

Vemos que tenemos dos posibles ϕ_f . Para elegir entre las dos posibilidades que quedan, elegimos el valor para el que ϕ es mayor, puesto que la inflación comienza en el lado derecho y ϕ se mueve hasta alcanzar el valor ϕ_f . Por lo que ϕ_f corresponde al caso en que $\epsilon = 1$, i.e.

$$\phi_f = \sqrt{\frac{3}{2}} M_p \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right). \quad (4.33)$$

Nuestro objetivo ahora es calcular ϕ_i , ya que de esta manera podemos comparar con las observaciones del CMB. Para ello nos apoyamos en el número de e-folds (4.28). Evaluando ϕ_f en la ecuación (4.28), obtenemos

$$\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_i}{M_p} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_i}{M_p} = C, \quad (4.34)$$

donde hemos definido a C como

$$C \equiv \frac{4}{3} N + \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right) - \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right). \quad (4.35)$$

Ahora utilizamos un cambio de variable, de tal manera que $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_i}{M_p}$, por lo que obtenemos la ecuación

$$\exp(x) - x = C, \quad (4.36)$$

que tiene por solución $x = -W(-e^{-C}) - C$ con W la función de Lambert¹. Entonces el campo escalar al inicio de inflación está dado por

$$\phi_i = -\sqrt{\frac{3}{2}} M_p [C + W_{-1}(-e^{-C})], \quad (4.37)$$

donde hemos tomado la rama W_{-1} de la función de Lambert debido a que el valor de ϕ_i debe ser positivo. Esta es la solución utilizada para calcular los parámetros de slow-roll al final de la inflación y de esta manera se calcularon los índices espectrales en la figura 4.2. Una solución aproximada en términos de potencias de N^{-1} es la siguiente

$$\exp(\phi_i) \approx \frac{3}{4N} - \frac{9 \ln N}{16N^2} - \frac{0.94}{N^2}, \quad (4.38)$$

donde nos hemos quedado hasta el orden N^{-2} . A partir de aquí, con uso de las ecuaciones (4.29), calculamos la aproximación de los parámetros de slow-roll:

$$\epsilon \approx \frac{3}{4N^2}, \quad (4.39a)$$

$$\eta \approx -\frac{1}{N} + \frac{3 \ln N}{4N^2} + \frac{5}{4N^2}, \quad (4.39b)$$

y finalmente los valores aproximados de los índices espectrales de las ecuaciones (4.30):

$$n_s \approx 1 - \frac{2}{N} + \frac{3 \ln N}{2N^2} - \frac{2}{N^2}, \quad (4.40a)$$

$$n_T \approx -\frac{3}{2N^2}, \quad (4.40b)$$

$$r \approx \frac{12}{N^2}. \quad (4.40c)$$

Con los resultados anteriores, podemos calcular los parámetros de slow-roll para diversos valores de N . De la misma manera que hicimos con el caso del taquión, hacemos un barrido en $40 \leq N \leq 70$. Los resultados son presentados en la figura 4.2.

Podemos observar la razón por la que el modelo de Starobinsky sigue siendo estudiado. Vemos cómo los parámetros coinciden bastante bien con los resultados obtenidos por el satélite Planck; varios de los valores se encuentran dentro de la región de 1σ de certidumbre, por lo que podemos concluir que el modelo de Starobinsky describe con precisión las observaciones.

¹La función W de Lambert está definida como la función inversa de la función $f(w) = we^w$, donde w es cualquier número complejo. Cuando se toman únicamente argumentos reales, la función de Lambert $W(x)$ está definida en el dominio $[-e^{-1}, \infty)$ y posee dos ramas. La rama $W_0(x)$ definida en $[-e^{-1}, \infty)$ y la rama $W_{-1}(x)$ definida en el intervalo $[-e^{-1}, 0)$; por lo que la función de Lambert es multivaluada en $[-e^{-1}, 0)$. Se puede encontrar más información sobre esta función en e.g. [37].

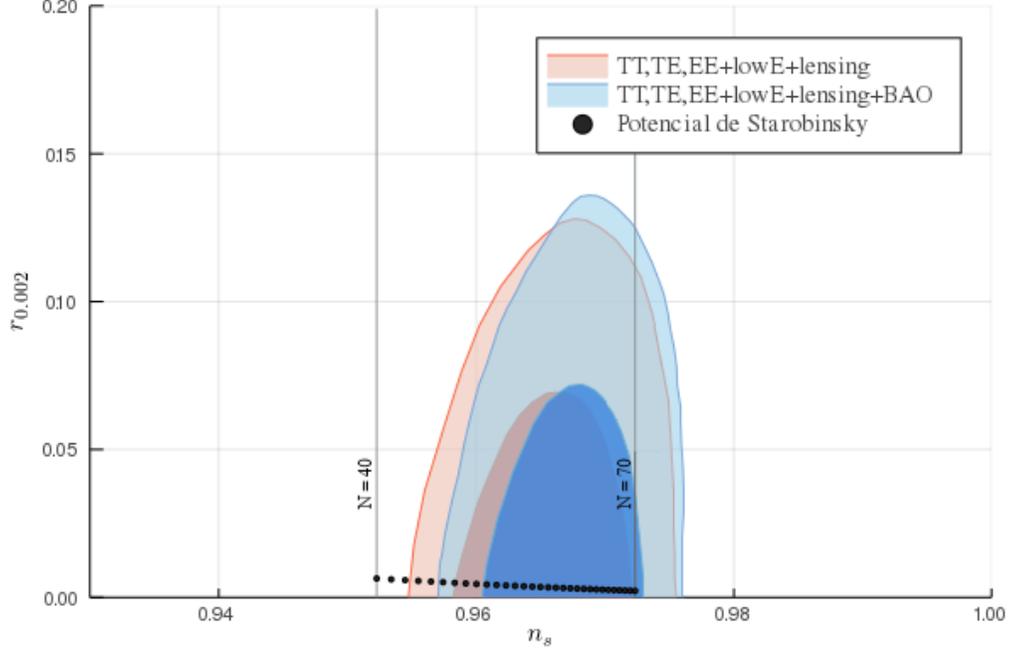


Figura 4.2: Los parámetros del potencial de Starobinsky en los que hemos barrido el número de e-folds de 40 a 70, se muestran los contornos de probabilidad (para 1σ y 2σ) proporcionados por el satélite Planck [1].

4.2.2 Teoría de Starobinsky en el marco de Jordan

Hasta ahora hemos visto la inflación desde el marco de Einstein, donde hemos realizado una transformación conforme desde el marco de Jordan para llegar a la acción de Einstein-Hilbert más la acción de un campo escalar acoplado mínimamente a la gravedad. Para que podamos dar por válido lo realizado anteriormente, tenemos que probar que existe una relación entre las variables observables en el marco de Einstein y en el marco de Jordan; en esta sección discutiremos el tratamiento desde el marco de Jordan y veremos si existen diferencias considerables en las observables físicas respecto al marco de Einstein.

Recordemos que la acción tiene la siguiente forma

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \phi), \quad (4.41)$$

donde \mathcal{L}_M es el lagrangiano de la materia y g el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. La acción (4.41) debe cumplir el principio de mínima acción, es decir $\delta S = 0$. Desarrollando esto tenemos que, en

términos de la perturbación del inverso de la métrica,

$$0 = \delta S = \int \left[\frac{M_p^2}{2} \frac{\delta(\sqrt{-g}F(R))}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x =$$

$$\int \left[\frac{M_p^2}{2} \left(\frac{\delta F(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{F(R)}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.42)$$

Es de notar que no aparecen las variaciones del campo debido a que estamos suponiendo que el campo escalar está acoplado mínimamente a la gravedad y además cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.14). Por lo que nos quedamos con únicamente la parte proporcional a la variación del inverso de la métrica $\delta g^{\mu\nu}$. Para continuar con el desarrollo debemos utilizar la regla para derivar determinantes [36]. A partir de esta regla podemos obtener

$$\frac{\delta \det g^{-1}}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \det g^{-1}, \quad (4.43)$$

donde $\det g^{-1}$ es el determinante del inverso de la métrica $g^{\mu\nu}$. Recordemos que $\det g^{-1} = 1/g$ por la propiedad del determinante de una matriz inversa. Desarrollando esto, tenemos que

$$-\frac{1}{g^2} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{g_{\mu\nu}}{g}. \quad (4.44)$$

Por lo que obtenemos la expresión

$$\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = -g g_{\mu\nu}. \quad (4.45)$$

Ahora podemos calcular

$$\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}, \quad (4.46)$$

donde hemos utilizado la ecuación (4.45) en la última igualdad. Como paso siguiente, calculamos $\delta F(R) = f(R)\delta R$ con $f(R) = \delta F/\delta R$. Para esto, nos será útil calcular la variación del tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}. \quad (4.47)$$

Por otro lado, la derivada covariante de la variación $\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$ está dada por

$$\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}. \quad (4.48)$$

Por lo que, observando las ecuaciones (4.47) y (4.48) tenemos que

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}. \quad (4.49)$$

Utilizando la ecuación anterior, obtenemos la variación de R ,

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\rho\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho). \quad (4.50)$$

Ahora obtendremos la variación de $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ en términos de la métrica. Para conseguir esto, calculamos

$$\nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) = \partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\delta g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho\delta g_{\mu\rho}, \quad (4.51)$$

que, utilizando las propiedades de la variación, obtenemos

$$\nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) = \delta(\nabla_\lambda g_{\mu\nu}) + g_{\rho\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho + g_{\mu\rho}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho. \quad (4.52)$$

Ahora, recordamos que la derivada covariante de la métrica es cero, por lo que llegamos a la ecuación

$$\nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) = g_{\rho\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho + g_{\mu\rho}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho. \quad (4.53)$$

Mediante la permutación de índices en tres ecuaciones análogas a (4.53), obtenemos

$$\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu} = 2g_{\lambda\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad (4.54)$$

de donde podemos despejar la variación de la conexión

$$\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}). \quad (4.55)$$

Tomando esta expresión para la variación de la conexión, podemos sustituir en la ecuación (4.50), obteniendo la siguiente ecuación

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}, \quad (4.56)$$

donde ∇_ρ es la derivada covariante sobre el índice ρ y $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Por lo que, utilizando las ecuaciones (4.42), (4.46) y (4.56); tenemos que la variación de la acción ahora tiene la forma

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{M_p^2}{2}\left[f(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}F(R)\right] + \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\right). \quad (4.57)$$

Si integramos por partes el segundo y tercer término de la ecuación anterior, obtenemos una parte que es la variación de la métrica evaluado en la frontera, por lo que esta parte se anula y solo nos queda el otro término. Es decir, la variación tiene ahora la forma

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(\frac{M_p^2}{2}\left[f(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R) + [g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu]f(R)\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\right), \quad (4.58)$$

por lo que, tomando $\delta S = 0$ y de la definición del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ en la ecuación (2.16), tenemos la ecuación de movimiento

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv f(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R) + [g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu]f(R) = \frac{1}{M_p^2}T_{\mu\nu}. \quad (4.59)$$

Si ahora tomamos la ecuación de continuidad del tensor de energía momento ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$), tenemos que

$$\nabla^\mu \Sigma_{\mu\nu} = 0. \quad (4.60)$$

Mientras que la traza de la ecuación de movimiento (4.59) nos lleva a la ecuación

$$3\square f(R) + f(R)R - 2F(R) = \frac{1}{M_p^2}T, \quad (4.61)$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$.

Es importante observar que, en cuanto tomamos $F(R) = R$, es decir, cuando tomamos la teoría de relatividad general, recuperamos la ecuación de Einstein a partir de la ecuación de movimiento (4.59). En este último caso, tomando la ecuación (4.61), vemos que $R = -T/M_p^2$ y por lo tanto el escalar de Ricci está completamente determinado por la materia. En gravedad modificada el término $\square f(R)$ no se anula y por lo tanto existe un grado de libertad adicional $f(R)$ cuya dinámica es determinada por la ecuación de la traza (4.61).

La ecuación de movimiento puede ser escrita de la siguiente manera

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2} \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(D)} \right), \quad (4.62)$$

donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein y definimos

$$\frac{T_{\mu\nu}^{(D)}}{M_p^2} \equiv g_{\mu\nu} \frac{(F - R)}{2} + \nabla_\mu \nabla_\nu f - g_{\mu\nu} \square f + (1 - f)R_{\mu\nu}. \quad (4.63)$$

Ahora, si recordamos que $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ y $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, se sigue que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(D)} = 0, \quad (4.64)$$

entonces, la ecuación de continuidad se mantiene, no solo para $\Sigma_{\mu\nu}$ sino también para el tensor de energía-momento efectivo $T_{\mu\nu}^D$. Esto resulta conveniente cuando se trabaja con energía oscura [31].

Consideremos ahora el espacio-tiempo FLRW en el que su geometría está definida mediante la métrica (2.1). Para esta métrica, el escalar de Ricci está determinado por

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}). \quad (4.65)$$

El tensor de energía momento para la materia está dado por $T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho_M, -P_M, -P_M, -P_M)$. Las ecuaciones de campo (4.59) en el espacio FLRW (con $K = 0$) están dadas por

$$3fH^2 = \frac{fR - F}{2} - 3H\dot{f} + \frac{\rho_M}{M_p^2}, \quad (4.66a)$$

$$-2f\dot{H} = \ddot{f} - H\dot{f} + \frac{\rho_M + P_M}{M_p^2}. \quad (4.66b)$$

Además, debido a que estamos tratando con un fluido perfecto, la ecuación de continuidad está dada por la ecuación usual (2.5c). Podemos obtener la relación entre el tensor de energía momento del marco de Einstein $\tilde{T}_{\mu\nu}$ y el marco de Jordan $T_{\mu\nu}$; recordando que $\sqrt{-\tilde{g}} = f^2\sqrt{-g}$ y $\tilde{g}^{\mu\nu} = f^{-1}g^{\mu\nu}$, tenemos que

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{T_{\mu\nu}}{f}, \quad (4.67)$$

por lo que las componentes del tensor de energía momento en el marco de Einstein están dadas por

$$\tilde{T}^\mu_\nu = \text{diag}(\tilde{\rho}_M, -\tilde{P}_M, -\tilde{P}_M, -\tilde{P}_M) = \text{diag}(\rho_M/f^2, -P_M/f^2, -P_M/f^2, -P_M/f^2). \quad (4.68)$$

Ahora consideremos el espacio tiempo de FLRW en el marco de Einstein y comparémoslo con la misma métrica en el marco de Jordan, es decir

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - \tilde{a}^2(\tilde{t})dx^2 = \Omega^2 ds^2 = f(dt^2 - a(t)^2 dx^2), \quad (4.69)$$

de donde podemos obtener la relación (recordando que hemos pedido que $f > 0$ para realizar la transformación),

$$d\tilde{t} = \sqrt{f}dt, \quad \tilde{a} = \sqrt{f}a. \quad (4.70)$$

De la ecuación anterior, podemos calcular la constante de Hubble en el marco de Einstein

$$\tilde{H} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\sqrt{f}} \left(H + \frac{\dot{f}}{2f} \right). \quad (4.71)$$

Enfoquémonos en la teoría que nos interesa, el modelo de Starobinsky, es decir $F(R) = R + (1/6m^2)R^2$. Bajo esta F las ecuaciones (4.66) en el marco de Jordan son

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}}{2H} + \frac{1}{2}m^2H = -3H\dot{H}, \quad (4.72)$$

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + m^2R = 0. \quad (4.73)$$

En la etapa inflacionaria, los primeros dos términos de la ecuación (4.72) son mucho más pequeños que los demás, por lo que esto nos lleva a

$$\dot{H} \approx -\frac{m^2}{6}, \quad (4.74)$$

de donde obtenemos las soluciones:

$$H \approx H_i - (m^2/6)(t - t_i), \quad (4.75a)$$

$$a \approx a_i \exp[H_i(t - t_i) - (m^2/12)(t - t_i)^2], \quad (4.75b)$$

$$R \approx 12H^2 - m^2, \quad (4.75c)$$

donde t_i es el tiempo en el que comienza la inflación. De (4.74) podemos obtener el parámetro de slow-roll ϵ ,

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{m^2}{6H^2}. \quad (4.76)$$

La inflación termina cuando $\epsilon = 1$, es decir $H(t_f) = m/\sqrt{6}$. Calculamos ahora el número de e-folds

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt \approx H_i(t_f - t_i) - \frac{m^2}{12}(t_f - t_i)^2, \quad (4.77)$$

y como la inflación termina en $t_f \approx t_i + \frac{6H_i}{m^2} - \frac{\sqrt{6}}{m}$, se sigue que

$$N \approx \frac{3H_i^2}{m^2} - \frac{1}{2}. \quad (4.78)$$

Debido a que el número de e-folds debe de ser un número alrededor de 60, entonces podemos hacer la aproximación

$$N \approx \frac{3H_i^2}{m^2} \approx \frac{1}{2\epsilon(t_i)}. \quad (4.79)$$

Ahora calculamos el número de e-folds en el marco de Einstein y sustituimos las ecuaciones (4.70),

$$\tilde{N} = \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_f} \tilde{H} d\tilde{t} = \int_{t_i}^{t_f} H dt \left(1 + \frac{\dot{f}}{2Hf}\right) \approx \int_{t_i}^{t_f} H dt = N, \quad (4.80)$$

donde hemos utilizado que $|\dot{f}/(2Hf)| \approx |\dot{H}/H^2| < 1$. Por lo que, durante inflación, el número de e-folds es igual en ambos marcos.

Recordemos que el índice espectral escalar y el cociente tensor-a-escalar son aproximadamente (en el marco de Einstein)

$$n_s \approx 1 - \frac{2}{\tilde{N}}, \quad r \approx \frac{12}{\tilde{N}^2}, \quad (4.81)$$

y de la ecuación (4.80), concluimos que la coincidencia en el número de e-folds nos lleva a una equivalencia entre los observables. Por lo tanto, el marco de Einstein y el marco de Jordan son equivalentes físicamente. De aquí podemos concluir que, al menos mediante inflación, no es posible distinguir entre un modelo inflacionario mediante un campo escalar estándar y la teoría de Starobinsky, pues los observables son los mismos para ambos casos.

4.3 Potencial de Starobinsky modificado

Es interesante realizar una pequeña modificación al potencial (4.26) y ver qué tanto sigue siendo factible como modelo inflacionario. De la definición de los parámetros de slow-roll en las ecuaciones (2.26) y (2.29), vemos que agregar una amplitud V_0 no terminaría siendo un parámetro que afectara a los observables; una mejor modificación es

$$V = \frac{3}{4}M_p^2 m^2 \left[1 - A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) \right]^2, \quad (4.82)$$

donde A y λ son parámetros reales diferentes de cero. Podemos ver la gráfica de un potencial modificado en la figura 4.3. A partir de la ecuación (4.82) podemos calcular sus derivadas respecto al campo

$$V_\phi = \lambda A M_p m^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) \left[1 - A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) \right], \quad (4.83a)$$

$$V_{\phi\phi} = \lambda^2 A m^2 \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) \left[2A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) - 1 \right]. \quad (4.83b)$$

De aquí podemos hacer una observación importante: en la ecuación (4.83a) vemos que el punto crítico ϕ_0 del potencial cumple la condición

$$A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi_0}{M_p}\right) = 1, \quad (4.84)$$

lo cual implica que, para que exista un punto crítico, A debe de ser mayor que cero. Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (4.83b) tenemos que

$$V_{\phi\phi}|_{\phi=\phi_0} = \lambda^2 m^2, \quad (4.85)$$

por lo que podemos hacer dos observaciones, la primera es que el potencial (4.82) siempre tiene un mínimo en tanto λ y m sean diferentes de cero y $A > 0$, que son algunas de las condiciones que impusimos al definir estos parámetros. La segunda observación es que al modificar el potencial original, la masa asociada al campo ϕ ya no es m sino que es $M^2 = \lambda^2 m^2$, por lo que al modificar de esta manera al potencial obtenemos otra masa distinta que depende del parámetro λ .

Las condiciones anteriores podemos verlas en la figura 4.3, donde un cambio en las variables A y λ produce un cambio en la posición del mínimo, lo cual se puede comprobar con la ecuación (4.84). Una ventaja de lo anterior es que podemos mover el mínimo hasta una escala cercana a Planck ($\phi = M_p$), de manera que la inflación haya ocurrido a escalas energéticas muy altas, al inicio de la historia cosmológica. Por otro lado, también podemos ver que se modifica la curvatura del potencial, comprobándolo mediante la ecuación (4.83b). Esto nos permite, por un lado, modificar la

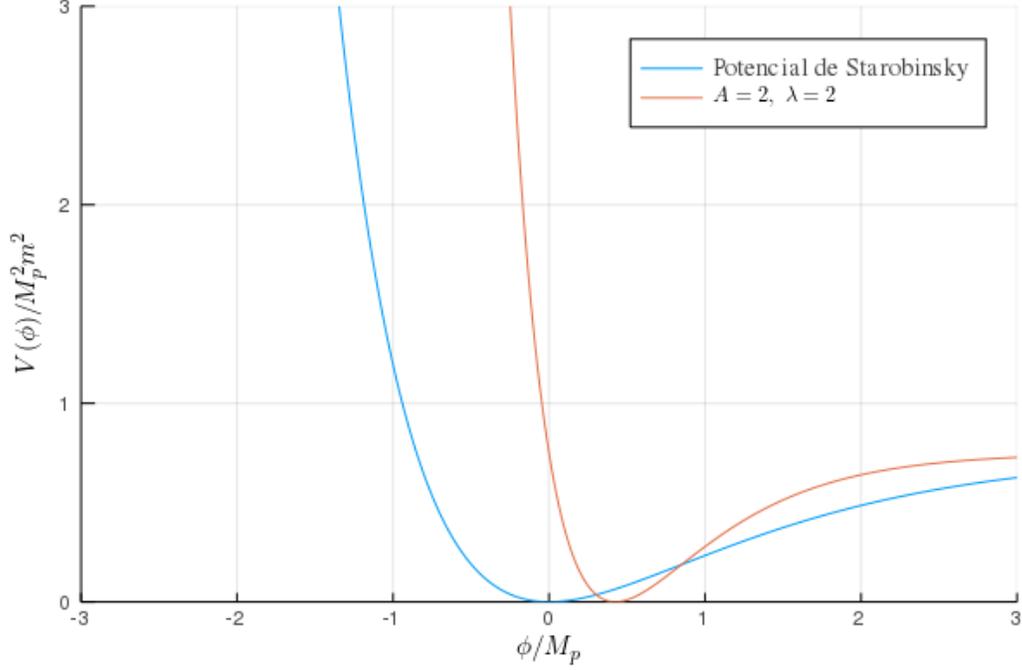


Figura 4.3: Gráfica del potencial de Starobinsky y de Starobinsky modificado (ec (4.82) con $A = 2$, $\lambda = 2$). Se observa un cambio en la curvatura y en la posición del mínimo.

masa del inflatón dependiendo del valor de λ en la ecuación (4.85). Además, cambiar la curvatura nos permite modificar al potencial de tal forma que la inflación ocurra muy cerca del mínimo.

Con las derivadas que hemos obtenido ahora podemos calcular los parámetros de slow-roll; estos están dados por las ecuaciones

$$\epsilon = \frac{4}{3}\lambda^2 A^2 \left[\exp\left(\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) - A \right]^{-2}, \quad (4.86a)$$

$$\eta = \frac{4}{3}\lambda^2 A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) \frac{2A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right) - 1}{\left[1 - A \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_p}\right)\right]^2}. \quad (4.86b)$$

Para poder calcular ϕ al final de la inflación, i.e. ϕ_f , necesitamos que alguno de los parámetros

alcance el valor de 1. Entonces, resolvemos las ecuaciones $\epsilon = 1$ y $|\eta| = 1$, obteniendo

$$\phi|_{\epsilon=1} = \frac{M_p}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(A \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \lambda A \right), \quad (4.87a)$$

$$\phi|_{\eta=1} = -\frac{M_p}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{A (\lambda^2 - \frac{3}{2}) \pm A \lambda \sqrt{\lambda^2 + 3}}{2A^2 (2\lambda^2 - \frac{3}{4})} \right], \quad (4.87b)$$

$$\phi|_{\eta=-1} = -\frac{M_p}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{A (\lambda^2 + \frac{3}{2}) \pm A \lambda \sqrt{\lambda^2 - 3}}{2A^2 (2\lambda^2 + \frac{3}{4})} \right], \quad (4.87c)$$

de esta manera, tomaremos ϕ_f como el valor de los anteriores al que llegue primero el campo ϕ .

Podemos calcular el número de e-folds N para este potencial modificado mediante

$$N = \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda^2 A} \left[\exp \left(\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_i}{M_p} \right) - \exp \left(\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_f}{M_p} \right) \right] - \frac{1}{2\lambda M_p} \sqrt{\frac{3}{2}} (\phi_i - \phi_f), \quad (4.88)$$

y, siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior, escribimos a ϕ_i como una función del número de e-folds,

$$\phi_i = -M_p \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left[C + W \left(-\frac{\exp(-C)}{A} \right) \right] \quad (4.89)$$

con W la función de Lambert y C definida como

$$C \equiv \frac{4}{3} \lambda^2 N + \frac{1}{A} \exp \left(\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_f}{M_p} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda \frac{\phi_f}{M_p}. \quad (4.90)$$

Una vez que hemos calculado ϕ_i podemos obtener los índices escalares y el cociente tensor-a-escalar bajo las ecuaciones usuales,

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta, \quad (4.91a)$$

$$n_T = -2\epsilon, \quad (4.91b)$$

$$r = 16\epsilon, \quad (4.91c)$$

que deben ser evaluadas al inicio de inflación, es decir, cuando $\phi = \phi_i$ dada por la ecuación (4.89).

Ahora, calcularemos los valores de λ y A que son viables para una teoría inflacionaria, para realizar esto, calcularemos nuevamente las ϕ_i para un número de e-folds $N = 49$. Si para este valor, el índice espectral y el cociente tensor-a-escalar se encuentran dentro de los valores dados por el satélite Planck [1], en donde $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$ y $r < 0.106$ tomando en cuenta las oscilaciones acústicas de bariones, entonces tomamos la teoría como válida para inflación.

En la figura 4.4 se pueden observar dos gráficas de los valores permitidos de λ y A . La gráfica (a) corresponde a cuando tomamos a ϕ_f y a ϕ_i positivas; en la gráfica (b) hemos omitido esta

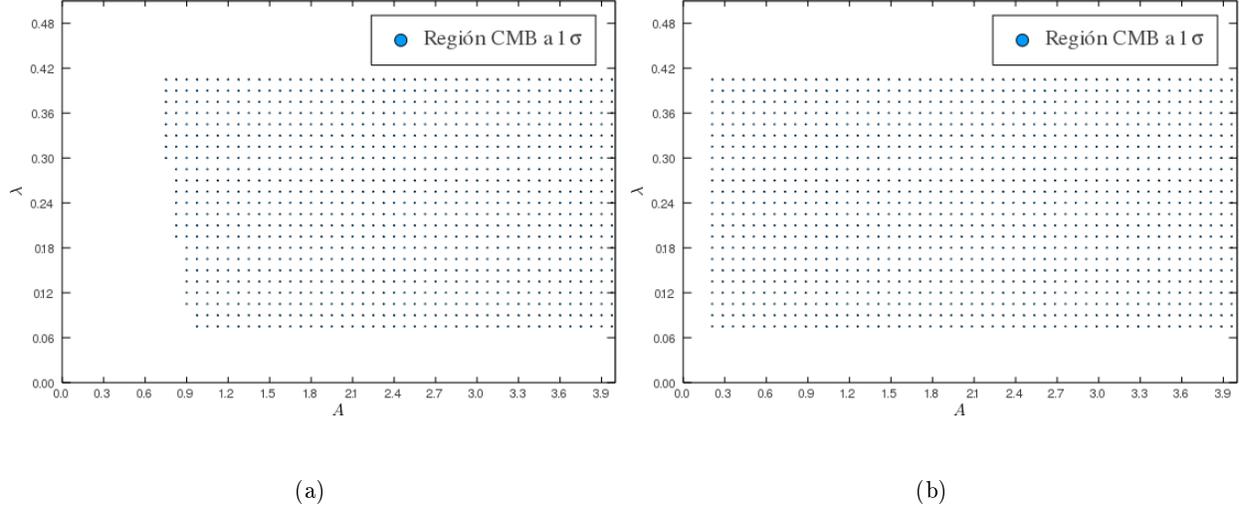


Figura 4.4: Valores permitidos de A y λ que se encuentran dentro del nivel de confianza del 68 % de Planck [1], donde $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$ y $r < 0.106$. Se ha tomado $N = 49$. En la gráfica (a) se puede ver el resultado exigiendo en todo tiempo $\phi > 0$. En la gráfica (b) omitimos esta restricción.

restricción. Es evidente de los resultados que esta condición nos permite restringir más el espacio de parámetros. La condición $\phi > 0$ también resulta más natural debido a que, con una motivación de una teoría fundamental, donde los campos ϕ son módulos que miden e.g. el tamaño de dimensiones compactas, es mejor pedir que el tamaño de algo nunca sea negativo. Aún así, los resultados son similares en ambas gráficas.

En la figura 4.4 podemos observar que ningún valor de $A < 0$ es aceptable para un modelo inflacionario, esto lo podemos deducir si tomamos las ecuaciones (2.21) y la ecuación (2.22c), de donde obtenemos

$$\dot{\phi} = -M_p \frac{V_\phi}{\sqrt{3V}}, \quad (4.92)$$

y sustituyendo las ecuaciones (4.82) y (4.83a) obtenemos

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \lambda A M_p m \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p}\right), \quad (4.93)$$

por lo que podemos ver que ϕ es creciente o decreciente respecto al tiempo dependiendo del signo de λ y A . Ahora, analicemos la ecuación (4.86a). Para que se cumpla la condición $\epsilon \ll 1$ necesitamos que $\phi \rightarrow \infty$ si $\lambda > 0$ y $\phi \rightarrow -\infty$ si $\lambda < 0$. De lo anterior podemos concluir que, si $\lambda > 0$, entonces debe ocurrir $\phi_f < \phi_i$. En el caso de $\lambda < 0$, debe ocurrir que $\phi_i < \phi_f$ para tener inflación. Si tomamos ahora la ecuación (4.93) y vemos qué pasa si $A < 0$, tenemos que si $\lambda > 0$ entonces $\dot{\phi} > 0$ y por lo tanto ϕ es creciente, es decir $\phi_i < \phi_f$; si tomamos el caso en que $\lambda < 0$ ocurre lo contrario, $\phi_f < \phi_i$.

Vemos que estos casos no coinciden con las condiciones que pusimos anteriormente para que $\epsilon \ll 1$, por lo que si intentamos evaluar en ϕ_i para los casos en los que $A < 0$ tenemos que $\epsilon > 1$, y por lo tanto, no hay inflación. Esto por lo tanto descarta todos los casos en los que A es negativo.

Analicemos el caso en que A es bastante grande pero $|\lambda| \approx 1$, en este caso la ecuación (4.89) es aproximadamente

$$\phi_i \approx -M_p \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{4}{3} \lambda^2 N + W \left(-\frac{\exp(-\frac{4}{3} \lambda^2 N)}{A} \right) \right], \quad (4.94)$$

donde W tiene dos ramas debido a que su argumento es negativo [37]. Tomemos primero el caso de la rama principal W_0 , si A es muy grande entonces W se aproxima a cero, de esta manera vemos que

$$\phi_i \approx -2M_p \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda N, \quad (4.95)$$

y, sustituyendo en la ecuación (4.86a), obtenemos

$$\epsilon = \frac{4}{3} \lambda^2 A^2 \left[\exp \left(-\frac{4}{3} \lambda^2 N \right) - A \right]^{-2}, \quad (4.96)$$

que es aproximadamente

$$\epsilon \approx \frac{4}{3} \lambda^2, \quad (4.97)$$

por lo cual no es viable para inflación. Sin embargo, si tomamos la segunda rama de W , es decir

$$W_{-1}(x) \approx \ln(-x) - \ln(-\ln(-x)), \quad (4.98)$$

obtenemos

$$\phi_i \approx M_p \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left[\ln \left(\frac{4}{3} \lambda^2 N A + A \ln A \right) \right] \quad (4.99)$$

y, sustituyendo en la ecuación (4.86a), obtenemos

$$\epsilon \approx \frac{4}{3} \lambda^2 A^2 \left[\frac{4}{3} \lambda^2 N A + A(\ln A - 1) \right]^{-2}, \quad (4.100)$$

que puede ser simplificado como

$$\epsilon \approx \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\lambda} \ln A + \sqrt{\frac{4}{3}} \lambda N - \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\lambda} \right]^2}, \quad (4.101)$$

de aquí podemos ver que, cuando $\lambda \approx 1$ y $A \gg 1$, entonces $\epsilon \ll 1$ y por lo tanto hay inflación; esto coincide con la figura 4.4, en la que podemos ver cómo cuando hay una λ aceptable, esta puede tomar valores muy grandes de A y seguir siendo un modelo válido para inflación.

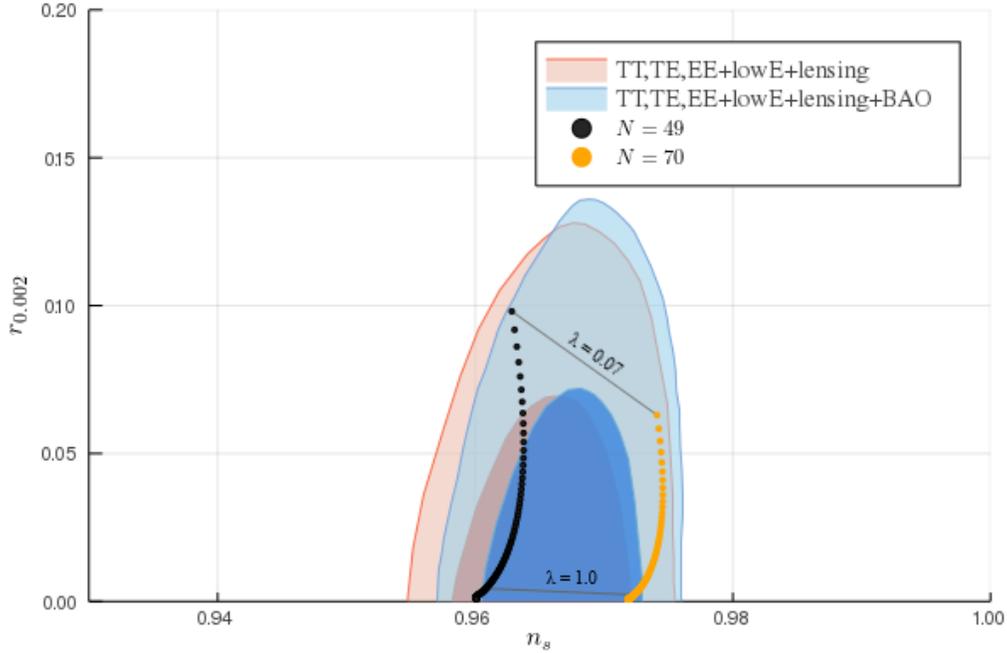


Figura 4.5: Los parámetros del potencial modificado de Starobinsky para $N = 49$ y $N = 70$. Hemos barrido λ desde 0.07 hasta 2.5; mientras que $A = 1$. Se muestran los contornos de probabilidad (para 1σ y 2σ) proporcionados por el satélite Planck [1].

En la figura 4.5 se muestran los valores de n_s y r para distintos valores de λ ; hemos tomado $N = 49$ y $N = 70$. Para esta gráfica, hemos dejado A constante con valor de $A = 1$, y hemos barrido los valores de λ desde 0.07 hasta 2.5. Podemos observar que modificar el número de e-folds traslada la figura y disminuye el valor de r cuando N aumenta. Los puntos de (n_s, r) descienden considerablemente cuando $\lambda \lesssim 1$ debido a que, como vemos en las ecuaciones (4.86a) y (4.91c), r disminuye exponencialmente respecto a λ , por lo que al alcanzar valores mayores que 1, r se aproxima muy rápido a 0. Podemos también observar que en valores cercanos a $\lambda \approx 1$, tenemos valores muy similares a los obtenidos para Starobinsky en la figura 4.2; esto no resulta extraño, puesto que para el caso $A = 1$, $\lambda = 1$ en el potencial (4.82), recuperamos el modelo de Starobinsky.

Hemos comprobado entonces los casos en los que un modelo de Starobinsky modificado como (4.82) puede servirnos como modelo inflacionario.

Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis fue un estudio teórico de dos de las propuestas de modelos para producir inflación, más allá del paradigma predominante de la existencia de un campo escalar tradicional. En la primera, extendimos el contenido del Universo mediante una alteración al tensor de energía-momento, agregando un campo escalar taquiónico, que supusimos resultado de alguna inestabilidad del vacío en el universo temprano. Como los escalares en modelos tradicionales, el taquión puede también desencadenar un período de expansión acelerada durante los primeros instantes de la historia cosmológica. La segunda propuesta analizada es la modificación más sencilla a la teoría de la gravedad de Einstein, libre de anomalías e inestabilidades, en la que se incluye un término cuadrático del escalar de Ricci R a la acción gravitacional. También en este caso es posible mostrar que la gravedad así inducida produce un periodo inflacionario. En ambos casos, mostramos cuidadosamente, considerando ejemplos específicos, que los parámetros libres de los modelos admiten valores que los hacen razonablemente compatibles con las mediciones asociadas a las perturbaciones (escalares y tensoriales) asociadas a la radiación cósmica de fondo. Estas comparaciones con mediciones, se basaron en los resultados más recientes de la colaboración Planck [1], los cuales incluyen información de lentes gravitacionales y oscilaciones acústicas de bariones.

En nuestro estudio de la inflación producida por un campo taquiónico, en el capítulo 3, desarrollamos la teoría de perturbaciones necesaria para calcular los índices espectrales, analizamos algunas de las diferencias y similitudes respecto al campo escalar estándar, y vimos que es difícil distinguir entre la inflación por medio de un campo escalar estándar y mediante un campo taquiónico. Con el fin de ser más concretos, utilizamos un potencial taquiónico exponencial, identificado en modelos efectivos de la teoría de cuerdas [38]. Como se muestra en la figura 3.2, encontramos que los resultados son consistentes con los límites en las perturbaciones reportados por la colaboración Planck sólo al considerar la región de 95 % de nivel de confianza (2σ). En particular, encontramos que la tasa de perturbaciones tensoriales a perturbaciones escalares exhibe la cota inferior $r \gtrsim 0.1$, valor que se obtiene sólo si el periodo inflacionario duró mucho tiempo, $N \sim 80$. Esta aparente tensión puede considerarse una ventaja de la construcción, ya que 1) hay muy pocos modelos en los que es posible obtener un valor tan grande de r y 2) es posible que futuras mediciones de esta observable

descarten el modelo.

Es importante resaltar que, como resultado de nuestro estudio de una teoría inflacionaria taquiónica, encontramos que las variables observables de la inflación, es decir, los índices espectrales así como la tasa de perturbaciones tensoriales a perturbaciones escalares, son independientes de los parámetros T_1 y V_1 del potencial exponencial (3.98). Aunque las observables no restrinjan estos parámetros, encontramos que estos deben de cumplir ciertas condiciones para ser un modelo viable de inflación. La condición sobre X_1 de la ecuación (3.105) permite que exista un número suficientemente grande de e-folds, mientras que la condición (3.107) sobre T_1 evita que el inicio de la inflación ocurra en un régimen desconocido, en principio descrito por gravedad cuántica.

Es preciso mencionar que, aunque una discusión completa de las características cosmológicas del modelo de inflación taquiónica está muy por encima del objetivo de esta tesis, es sabido que este modelo presenta algunos retos cosmológicos adicionales [21] que deben resolverse para considerarlo como una teoría válida de inflación. Uno de ellos es que es posible que durante inflación se produzcan anisotropías más grandes que las observadas en el CMB; debemos investigar mecanismos para evitar este conflicto. Otro potencial problema corresponde a que, si la inflación fuera producida por un universo dominado por el taquión, no parece existir una razón inmediata para que deje de estarlo en las siguientes etapas del Universo, por lo cual no habría una época en la que la radiación fuera el componente dominante del Universo. Una posible solución a este problema es que el potencial que describe la dinámica del vacío presente máximos y mínimos, de tal forma que en la época inflacionaria sea el taquión el que domine hasta que, un tiempo más tarde, el campo “taquiónico” desarrolle una masa cuadrada positiva, alcance su mínimo, produciendo un periodo de recalentamiento. Notemos que en esta posibilidad habría dos periodos de inflación: uno con inflación taquiónica y otro con inflación estándar. La exploración de este escenario se deja para un trabajo futuro.

Tras el estudio de inflación taquiónica, en el capítulo 4, nos concentramos primeramente en el estudio de la conocida relación entre los campos escalares estándar como medio para la inflación y la acción gravedad modificada por funciones $F(R)$ del escalar de Ricci, que cumplen las condiciones de consistencia $F'(R) > 0$ y $F''(R) \neq 0$. Mostramos que una transformación conforme es suficiente para pasar del marco de Jordan, donde la acción es proporcional a una $F(R)$, al marco de Einstein, en donde la acción adopta la estructura de Einstein-Hilbert, de la que las ecuaciones de campo de Einstein tradicionales pueden ser obtenidas, en donde el tensor de energía-momento está dado por la energía y presión de un campo escalar inflacionario estándar. Como ejemplo específico, abordamos primeramente la dinámica del modelo de Starobinsky en ambos marcos y llegamos a la conclusión de que las observaciones son las mismas para los dos.

Mediante el análisis del potencial de Starobinsky como modelo inflacionario en la sección 4.2.1, confirmamos que, como se puede observar en la figura 4.2, se trata de un modelo bastante consistente con las mediciones realizadas por la colaboración Planck; ya que la mayoría de los cálculos realizados se encuentran dentro del contorno de 68 % de confianza (1σ). Descartar o confirmar esta teoría como modelo inflacionario, primeramente requeriría de datos bastante más precisos que los actualmente disponibles. Como vimos en la sección 4.2.2, no es posible distinguir el modelo $F(R)$ de Starobinsky de un campo escalar estándar bajo el potencial de Starobinsky (4.26), al menos no mediante inflación.

Lo anterior significa que nuestros resultados bajo un campo escalar estándar con un potencial de Starobinsky coinciden con los resultados obtenidos mediante una $F(R)$ de Starobinsky. Como también mostramos, esta observación es sólo una consecuencia de una observación más general y bien conocida: toda teoría $F(R)$ consistente de gravedad modificada puede ser reemplazada por una teoría basada en las ecuaciones de Einstein y un campo escalar inflacionario adicional sometido al potencial (4.10).

Comparando los resultados obtenidos para la inflación taquiónica en la figura 3.2 y los datos obtenidos para la inflación de Starobinsky de la figura 4.2, resulta evidente que el modelo de Starobinsky es más consistente con las observaciones realizadas del CMB. Esto debido a que, como discutimos anteriormente, los valores de la tasa de perturbaciones r son muy grandes para inflación taquiónica. Futuras observaciones permitirán descartar un modelo u otro.

Aunque hemos estudiado la etapa de inflación, aún sería necesario estudiar la época siguiente, una vez que el Universo concluye su etapa inflacionaria. Debido a la alta velocidad en la que se expande el Universo durante inflación, el Universo se enfría y una vez terminado este proceso, la energía del inflatón debe de ser transferida a la materia, llevando a una etapa muy caliente del Universo, de donde eventualmente se llega a la etapa de nucleosíntesis. Esta etapa es importante debido a que durante el recalentamiento se explica el origen de la materia de la que está constituida el Universo. Un estudio de la etapa de recalentamiento sería una buena manera de extender el trabajo sobre el modelo de Starobinsky aquí mostrado.

Después de estudiar el potencial de Starobinsky, propusimos una ligera modificación del modelo. Mediante la introducción de dos parámetros A y λ , estudiamos una de las modificaciones más sencillas que podía realizarse al potencial de Starobinsky; con lo que llegamos al potencial descrito por la ecuación (4.82). Dichos parámetros modifican la curvatura y la posición del mínimo como observamos anteriormente en la figura 4.3, lo que en consecuencia produce un cambio en la masa del inflatón. Mediante el cálculo de los índices espectrales, así como de la tasa de perturbaciones tensoriales a escalares, pudimos restringir los valores permitidos de A y λ para los cuales los resultados coinciden con los obtenidos mediante observaciones. Estos resultados nos permitieron concluir que ningún modelo con A negativo es viable para inflación.

En nuestro estudio sobre $F(R)$ trabajamos con un tipo de modificación bastante sencillo, en el que fue posible realizar una transformación conforme bajo ciertas condiciones. Una extensión de este trabajo consistiría en proponer una $F(R)$ más general, omitiendo dichas condiciones e incluso agregar términos como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ o $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ como se menciona en [31] y estudiar la posibilidad de obtener modelos viables para inflación.

Recapitulando algunas de las preguntas aquí planteadas, como un trabajo futuro nos interesaría estudiar el mecanismo por el cual podría ocurrir una etapa dominada por radiación después de inflación taquiónica. Se podría trabajar sobre una inflación taquiónica sucedida por una segunda inflación estándar y analizar bajo qué condiciones es posible explicar la etapa dominada por radiación. La inflación taquiónica proviene de inestabilidades estudiadas en la teoría de cuerdas; sería interesante investigar otros escenarios inflacionarios que podrían surgir de compactificaciones de la

teoría de cuerdas. En el capítulo 4 planteamos una de las modificaciones más sencillas a la acción de Einstein-Hilbert, pero no es la única modificación posible. Mediante términos que dependen del tensor de Riemann, es posible realizar modificaciones bastantes más complejas a nuestra acción, esto podría realizarse como un estudio futuro de una F más general.

Bibliografía

- [1] Planck, N. Aghanim et al., (2018), 1807.06209.
- [2] J. F. Navarro, V. R. Eke, and C. S. Frenk, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **283** (1996), L72–L78, [astro-ph/9610187].
- [3] J. J. Adams et al., *Astrophys. J.* **789** (2014), no. 1, 63, [1405.4854].
- [4] W. J. G. de Blok, *Adv. Astron.* **2010** (2010), 789293, [0910.3538].
- [5] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [6] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [7] A. Riotto, *ICTP Lect. Notes Ser.* **14** (2003), 317–413, [hep-ph/0210162].
- [8] M. Postma, *Inflation*, NIKHEF, 2009.
- [9] N. Bretón, J. Cervantes-Cota, and M. Salgad, *Lecture Notes in Physics* (2004).
- [10] A. Challinor, *Part iii. cosmology*, University of Cambridge, 2009.
- [11] S. Weinberg, *Cosmology*, Cosmology, OUP Oxford, 2008.
- [12] V. F. Mukhanov, *Sov. Phys. JETP* **67** (1988), 1297–1302, [Zh. Eksp. Teor. Fiz.94N7,1(1988)].
- [13] E. W. Kolb and M. S. Turner (eds.), *The early universe*, 1988.
- [14] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *NATO Sci. Ser. C* **556** (2000), 1–60, [hep-th/9912161].
- [15] S. H. S. Alexander, *Phys. Rev.* **D65** (2002), 023507, [hep-th/0105032].
- [16] G. W. Gibbons, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003), S321–S346, [hep-th/0301117].
- [17] D. Tong, (2009), 0908.0333.
- [18] N. Moeller, *Tachyon condensation in string field theory*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2003.

-
- [19] W. Taylor, *Lectures on D-branes, tachyon condensation, and string field theory*, in *Lectures on quantum gravity. Proceedings, School of Quantum Gravity, Valdivia, Chile, January 4-14, 2002*, 2002, pp. 151–206.
- [20] A. Sen, *Mod. Phys. Lett.* **A17** (2002), 1797–1804, [hep-th/0204143].
- [21] L. Kofman and A. D. Linde, *JHEP* **07** (2002), 004, [hep-th/0205121].
- [22] G. W. Gibbons, *Phys. Lett.* **B537** (2002), 1–4, [hep-th/0204008].
- [23] A. Sen, *JHEP* **07** (2002), 065, [hep-th/0203265].
- [24] A. de la Macorra, U. Filobello, and G. German, *Phys. Lett.* **B635** (2006), 355–363, [hep-th/0601052].
- [25] X.-z. Li, D.-j. Liu, and J.-g. Hao, (2002), hep-th/0207146.
- [26] D. A. Steer and F. Vernizzi, *Phys. Rev.* **D70** (2004), 043527, [hep-th/0310139].
- [27] D. J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, and A. A. Garcia, *Phys. Lett.* **B517** (2001), 243–249, [astro-ph/0106020].
- [28] J. Garriga and V. F. Mukhanov, *Phys. Lett.* **B458** (1999), 219–225, [hep-th/9904176].
- [29] G. Watson, *A treatise on the theory of bessel functions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1995.
- [30] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **91B** (1980), 99–102, [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,130(1987); ,771(1980)].
- [31] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13** (2010), 3, [1002.4928].
- [32] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010), 451–497, [0805.1726].
- [33] Y. Aldabergenov, R. Ishikawa, S. V. Ketov, and S. I. Kruglov, *Phys. Rev.* **D98** (2018), no. 8, 083511, [1807.08394].
- [34] W.-J. Jin, Y. Ma, and T. Zhu, *JCAP* **1902** (2019), 010, [1808.09643].
- [35] S. Kaneda, S. V. Ketov, and N. Watanabe, *Mod. Phys. Lett.* **A25** (2010), 2753–2762, [1001.5118].
- [36] S. Ramos-Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*, Copit-arXives, 2018.
- [37] D. Veberic, (2010), 1003.1628.
- [38] M. Sami, P. Chingangbam, and T. Qureshi, *Phys. Rev.* **D66** (2002), 043530, [hep-th/0205179].