



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROBLEMAS DE FACTIBILIDAD DE FLUJO Y SU
GENERALIZACIÓN**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

**JOSELYNE SELENE HERRERA HUERTA
DIRECTOR DE TESIS:
MAESTRA MARÍA DEL CARMEN HERNÁNDEZ
AYUSO**

CDMX, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres
Veva y Temo:*

*Mamá, eres la personificación del amor.
Papá, ojalá te hubieras esperado un poquito más. Te amo hasta el cielo.*

A Mariano y Alef, la Esperanza de un futuro lleno de bondad.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi tutora de tesis María del Carmen Hernández Ayuso, por toda su ayuda, conocimiento e infinita paciencia.

A mis hermanas Celes y Tati, y a mi esposo Alex por el apoyo que siempre me brindan. A mis abuelitos Gloria y José, a mis suegros Esperanza y Juan; y a mi tía Xóchitl, gracias por sus enseñanzas y cuidados.

Emo, Packo, Manuel y Reynis; gracias por hacer este camino tan divertido.

ÍNDICE

Introducción	11
Capítulo 1. Una Introducción a la Coloración de Redes	
1.1 Conceptos Generales	13
1.1.1 Coloración	13
1.1.2 Cadenas Compatibles con la Coloración y el Problema de la Cadena Coloreada	14
1.1.3 Cortes Compatibles con la Coloración y el Problema del Corte Coloreado	15
1.2 Método de Enrutamiento	17
1.2.1 Algoritmo de Enrutamiento	18
1.3 Teorema de la Red Coloreada	22
1.3.1 Algunas aplicaciones en una red coloreada	23
1.3.1.1 Cadenas Positivas	23
1.3.1.2 Conexidad de gráficas	25
1.4 Lema de Minty	27
1.4.1 Algoritmo de Minty	28
1.4.2 Algunas Aplicaciones del Lema de Minty	32
1.4.2.1 Lema de Minty e Itsmos	32
1.4.2.2 Redes sin ciclos positivos o circuitos	32
Capítulo 2. Problemas de Flujo con un enfoque de Coloración	
2.1 Conceptos generales de flujo	35
2.1.1 Flujo Factible	35
2.1.2 Principio de Divergencia Total	37
2.1.3 Circulación	38
2.1.4 Flujo a través de un Corte	38
2.1.5 Principio Fundamental de Divergencia	39
2.2 Problemas de Distribución factible y Flujo factible	41
2.2.1 Teorema de Distribución Factible (Gale y Hoffman)	42
2.2.2 Algoritmo de Rectificación de Flujo	42
2.3 Problema de Flujo Máximo y Algoritmo de Ford Fulkerson	49
2.3.1 Problema de Flujo Máximo en una gráfica	49
2.3.2 Problema del Corte Mínimo	50
2.3.3 Teorema de Flujo Máximo-Corte Mínimo	51
2.3.4 Algoritmo de Ford-Fulkerson	53
2.4 Algunas aplicaciones de flujos en una gráfica	59
2.4.1 Problema de Corte Mínimo y corte de cardinalidad mínima en una gráfica	59

Capítulo 3. Potenciales y Tensiones

3.1 Conceptos Generales	61
3.1.1 Potenciales y Tensiones	61
3.1.2 Regla de Integración	62
3.2 Problema del Diferencial Factible y Algoritmo de Rectificación de Tensión	65
3.2.1 Problema de Diferencial Factible	65
3.2.2 Teorema de Diferencial Factible	65
3.2.3 Algoritmo de Rectificación de Tensión	66
3.3 Problema de la Cadena Mínima	71
3.3.1 Problema de la Cadena Mínima	71
3.3.2 Problema de la Tensión Máxima	72
3.3.3 Teorema de Tensión Máxima-Cadena Mínima	72
3.3.4 Algoritmo de la Cadena Mínima	73

Capítulo 4. Una Generalización del Algoritmo de Rectificación de Flujo

4.1 Conceptos Generales	79
4.1.1 Variables Primitives y Duales	79
4.1.2 Vectores Elementales y Soportes Primitives	83
4.1.3 Algunas Propiedades de los Soportes Primitives	85
4.1.4 Realización Conformable de Soportes Primitives	86
4.1.5 Vectores Elementales y Soportes Duales	88
4.1.6 Realización Conformable de Soportes Duales	90
4.2 Representaciones de Tucker del espacio de Circulaciones	92
4.2.1 Representación Inicial de Tucker sobre una gráfica	94
4.2.2 Representación Dual de Tucker	96
4.2.3 Representación Inicial de Tucker general	98
4.3 Teoría de Bases	99
4.3.1 Teorema de Bases para Gráficas	99
4.3.2 Teorema General de Bases	101
4.4 Pivoteo	103
4.4.1 Teorema de Pivoteo.	104
4.5 Teorema y Algoritmo del índice Coloreado	107
4.5.1 Teorema del índice Coloreado (Forma Combinatoria)	107
4.5.2 Teorema del índice Coloreado (Forma Vectorial)	107
4.5.3 Algoritmo del índice Coloreado	109
4.6 Factibilidad y Restricciones	111

4.6.1 Problema Primal de Factibilidad	111
4.6.2 Teorema de Factibilidad Primal (Forma Combinatoria)	112
4.6.3 Teorema de Factibilidad Primal (Forma Vectorial)	112
4.6.4 Algoritmo de Rectificación Primal	113
4.7 Problema Dual de Factibilidad	120
4.7.1 Teorema Dual de Factibilidad	120
4.7.2 Algoritmo de Rectificación Dual	121
Capítulo 5. Paquetería de Cómputo	
5.1 Consideraciones Generales	123
5.2 Solución Inicial y Representación de Tucker	125
5.2.1 Coloración	126
5.3 Algoritmo del índice Coloreado	127
5.4 Solución del Problema de Factibilidad	130
Conclusiones	139
Bibliografía	141
Apéndice	143

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas principales en la teoría de optimización sobre gráficas es el de flujos, que puede verse en diferentes circunstancias de la vida cotidiana, por ejemplo: las redes de transporte, redes de comunicación y sistemas de tuberías. En particular, esta tesis tiene como objetivo ampliar el estudio del flujo factible, que en una red consiste en determinar uno que satisfaga ciertas restricciones sobre los arcos, o restricciones de capacidad $[c^-(j), c^+(j)]$, y restricciones sobre los nodos, o restricciones de oferta $b(i)$. De forma paralela, en el problema del diferencial factible se desea determinar un potencial $u(i)$ sobre los nodos tal que el diferencial de cada arco se encuentre dentro de un intervalo $[b^-(j), b^+(j)]$.

A diferencia del enfoque clásico de programación lineal, los teoremas de coloración en gráficas pueden establecer un paralelismo entre este par de problemas, así como entre los de optimalidad correspondientes. Las restricciones mencionadas pueden imponerse a problemas que no necesariamente están definidos sobre gráficas, el estudio de esta generalización es el objetivo principal del trabajo.

Dicho lo anterior, en el primer capítulo se definen los conceptos de cadenas y cortes compatibles con la coloración sobre una gráfica, que dan paso al problema de la cadena coloreada resuelto mediante el algoritmo de enrutamiento. El teorema de la red coloreada encuentra su justificación en el algoritmo de enrutamiento, que a su vez inspira el lema de Minty. Ambos resultados resultan fundamentales al establecer un algoritmo que permita encontrar la solución al problema del flujo factible.

El segundo capítulo trata del problema del flujo factible. Con ayuda de la coloración de redes se establecen propiedades que deben cumplir la gráfica y los intervalos de capacidad para la existencia de solución, los cuales son enunciados en el teorema de distribución factible. El algoritmo de rectificación de flujo, que verifica estas condiciones, resuelve el problema de factibilidad de flujo o determina la no existencia de ésta. Es importante señalar el uso de los algoritmos de coloración como subrutinas en el de rectificación de flujos, formulando la equivalencia de conceptos de flujo con ciertos modelos de coloración de una manera muy ingeniosa.

Se estudian los problemas de flujo máximo y de corte mínimo, basándose en la dualidad de los mismos se replantea el algoritmo de Ford Fulkerson utilizando del algoritmo de coloración como subrutinas del mismo.

Existe un paralelismo entre los problemas de distribución factible y de diferencial factible, en el tercer capítulo se adentra en el estudio de este último. El teorema de distribución factible enuncia las condiciones que se deben cumplir para la existencia de una solución y el algoritmo de rectificación de tensión resuelve el problema del diferencial factible o determina la no existencia de ésta. De igual forma que en el problema de flujo, se señala el uso de los algoritmos de coloración como subrutinas en el de rectificación de tensión.

Se estudian los problemas de tensión máxima y de cadena mínima, basándose en la dualidad de los mismos, se plantea un algoritmo que utiliza los de coloración como subrutinas del mismo.

El capítulo cuatro se centra en mostrar la generalización de los problemas planteados en los primeros apartados de esta tesis:

El problema del flujo factible, como se describirá de forma muy detallada, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}Ex &= b \\x &\in c\end{aligned}$$

De la misma forma, el problema del diferencial factible como:

$$\begin{aligned}-uE &= v \\v &\in D\end{aligned}$$

Donde E es la matriz de incidencia de la gráfica. La generalización de estos problemas surge cuando E es una matriz con entradas reales que no necesariamente es de incidencia y se conocen como problema de factibilidad primal y problema de factibilidad dual respectivamente. Los conceptos de flujos, divergencias, diferenciales y potenciales son generalizados como variables primales y duales; que a su vez dan paso a la definición de soportes primales y duales como conjuntos de índices de la matriz.

El estudio de las representaciones de Tucker y la teoría de bases es fundamental para plantear un algoritmo que resuelva los problemas generalizados o determine la no existencia de una solución. El planteamiento de las representaciones de Tucker permite también generalizar los resultados de coloración sobre cualquier matriz; que serán usados como subrutinas en los algoritmos de rectificación primal y dual.

Con el objetivo de resolver problemas que surjan en la práctica, con ayuda del programa Matlab se desarrolla la automatización del algoritmo de factibilidad primal. Se explica al usuario la forma en que se debe usar el programa, y la forma en que se desarrollan las tres rutinas programadas:

- Solución Inicial y Representación de Tucker
- Algoritmo del índice coloreado
- Algoritmo de rectificación Primal

Este programa constituye además una herramienta que permite el proceso de experimentación y puede ser utilizada como apoyo en los cursos de Investigación de Operaciones.

Capítulo 1: Una introducción a la coloración en una red

A lo largo de este escrito se trabaja con el planteamiento y resolución de algunos problemas de gráficas, dándoles un enfoque basado en la coloración de arcos de teoría de gráficas, por lo cual, en este primer capítulo se sentarán las bases para el análisis de dichos problemas.

Se comienza dando la definición de coloración, así como el planteamiento de los problemas de la cadena coloreada y el corte coloreado. La base fundamental para el enfoque de los problemas está constituida por dos resultados de coloración: el lema de Minty y el teorema de la red coloreada, los cuales analizaremos con detenimiento.

1.1 Conceptos Generales

1.1.1 Coloración

Es común que al viajar en un automóvil existan avenidas en que sólo se puede manejar en un sentido, avenidas en que se puede manejar en ambos sentidos, avenidas que están cerradas y ya no es posible conducir a través de ellas, e incluso al encontrar mucho tráfico, es posible transitar por avenidas en sentido contrario. De tal forma que se debe encontrar la combinación de tramos que permitan llegar al destino deseado. El análisis de redes permite encontrar la solución adecuada a tal problema, es decir, se puede detectar la forma de llegar de un lugar a otro tomando en cuenta las restricciones de los posibles caminos que existen. Una forma de hallar la solución es definiendo primero qué tipo de avenidas hay, para luego asignarles un color y encontrar una combinación de avenidas que cumplan ciertas restricciones de color.

Se dice que una coloración es una función que va del conjunto de arcos a un conjunto de colores, donde a cada arco se le asocia, uno y sólo un color.

Los colores de los que hacemos uso son: verde, blanco, negro y rojo.

Como se dijo, existen avenidas que pueden ser recorridas en ambos sentidos, en uno solo, o que están cerradas, es decir, existen ciertas restricciones que necesariamente deben ser respetadas al dar una solución. Las restricciones definen qué color se le asignará a cada arco, habiendo así cuatro tipos de arcos en una red:

Verde	Pueden ser recorridos en ambos sentidos
Blanco	Pueden recorrerse sólo en sentido positivo
Negro	Pueden recorrerse sólo en sentido contrario
Rojo	No pueden recorrerse

Ejemplo: Supóngase que la siguiente gráfica representa una ciudad; los lugares fijos son los vértices 1,2,3,4,5,6 y 7. Las calles son representadas por los arcos, en donde las flechas

determinan su sentido y se ha definido una coloración. De tal forma, la calle (1,2) representa una avenida que se puede recorrer positivamente (ir de 1 a 2) o en sentido contrario (ir de 2 a 1); la calle (2,5) sólo puede recorrerse para ir del lugar 2 al lugar 5 y por la calle (5,7) no es posible pasar.

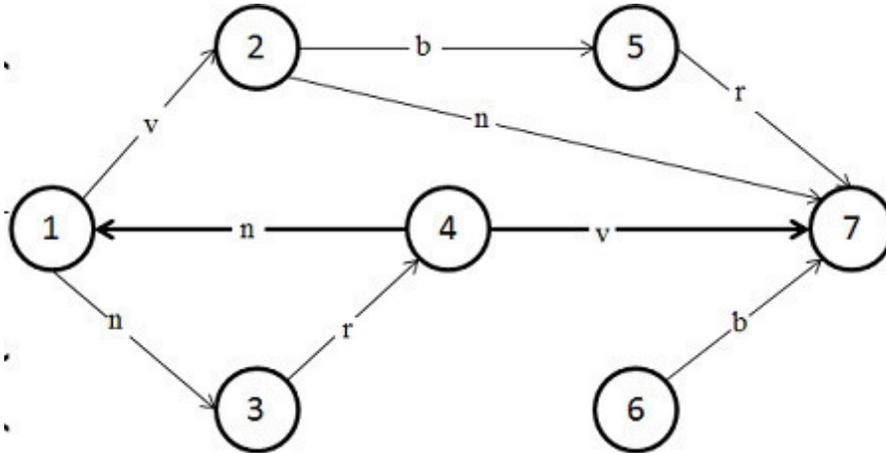


Figura 1.1.1

Si se deseara llegar del lugar 1 al lugar 7, el problema sería reducido a encontrar la secuencia de vértices y arcos que vayan de 1 a 7 tal que cada arco involucrado respete las restricciones correspondientes. En la siguiente sección se estudian los conceptos con los que se da solución.

1.1.2 Cadenas compatibles con la coloración y el problema de la cadena coloreada

Sea $G[X, A]$ una gráfica en donde X es el conjunto de vértices y A denota el conjunto de arcos. Una cadena se define como una secuencia vértices y arcos

$$P : i_0, a_0, i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, a_{k-1}, i_k$$

en donde cada arco a_j está conectado con i_{j-1} por un extremo y con i_{j+1} en el otro extremo. Se dice que un arco $a_j = (i_j, i_{j+1})$ es recorrido positivamente si va de i_j a i_{j+1} ; análogamente, se dice que se recorre negativamente si va de i_{j+1} a i_j .

Una cadena P de un conjunto de vértices N^+ a otro N^- , con $N^+ \cup N^- \subset X$ y $N^+ \cap N^- = \emptyset$, constituye dos conjuntos de arcos P^+ y P^- :

- P^+ : Conjunto de arcos recorridos positivamente.
- P^- : Conjunto de arcos recorridos negativamente.

Y se define la función de incidencia de la cadena como:

$$e_P(j) \begin{cases} 1 & \text{si } j \in P^+ \\ -1 & \text{si } j \in P^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una cadena $P : N^+ \rightarrow N^-$ es compatible con la coloración si cumple que todo arco en P^+ sea verde o blanco y todo arco en P^- sea verde o negro.

En la gráfica anterior, una cadena compatible con la coloración de $N^+ = \{1\}$ a $N^- = \{7\}$ es $P : 1, (4, 1), 4, (4, 7), 7$, que además coincide con la solución al problema planteado. Dicha cadena puede denotarse también como $P : 1 \leftarrow 4 \rightarrow 7$, en este caso los arcos son representados por las flechas, respetando el sentido de cada uno.

De tal forma, el problema de la cadena coloreada consiste en determinar una cadena $P : N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración.

Supóngase ahora que por alguna razón las calles $(4,1)$ y $(4,7)$ no pueden ser transitadas, es decir, adquieren color rojo como se muestra en la siguiente gráfica:

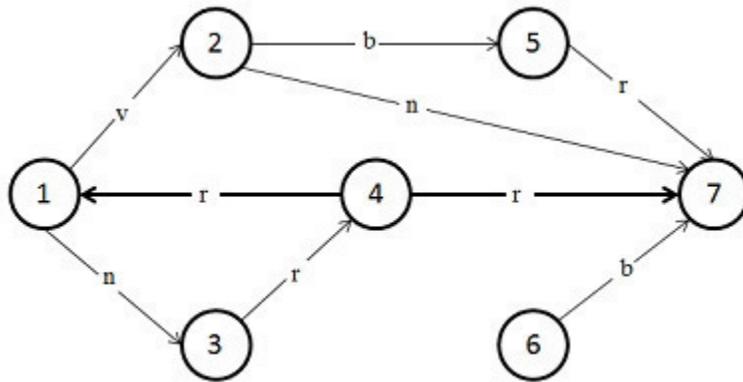


Figura 1.1.2

A simple vista se observa que no es posible llegar del lugar 1 al lugar 7, pues dada la coloración de las calles $(5,7), (2,7), (4,1), (1,3)$ no es posible transitar por ellas, y por tanto eliminan la posibilidad de arribar al lugar 7. El conjunto de los arcos que representan dichas calles introducen el concepto dual de la cadena compatible con la coloración, que es estudiado en la siguiente sección.

1.1.3 Cortes compatibles con la coloración y el problema del corte coloreado

Sea $G[X,A]$ una gráfica y $S \subset X$. Sea $S' = X \setminus S$. Se denota con $Q = [S, S']$ al conjunto de arcos que tienen un extremo en S y el otro fuera de S . Se denota con $Q^+(Q^-)$ al conjunto de arcos (i, j) tal que $i \in S(\in S')$ y $j \in S'(\in S)$ respectivamente.

Sean N^+ y N^- dos subconjuntos ajenos de vértices, se dice Q es un corte que separa al conjunto N^+ de N^- si es de la forma $[S, S']$, para algún $S \subset X$, tal que $N^+ \subset S$ y $N^- \cap S = \emptyset$. Se denota con $Q : N^+ \downarrow N^-$.

La función de incidencia de un corte se define como:

$$e_Q(j) \begin{cases} 1 & \text{si } j \in Q^+ \\ -1 & \text{si } j \in Q^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dada la coloración en la red R con los colores verde, blanco, negro y rojo, un corte $Q : N^+ \downarrow N^-$ es compatible con la coloración si cumple que todo arco en Q^+ es negro o rojo y todo arco en Q^- es blanco o rojo.

En el ejemplo de las calles, el corte al que se ha hecho referencia está definido por $S = \{1, 2, 5\}$ y $S' = \{3, 4, 6, 7\}$ donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \{7\}$ y $Q^+ = \{(5, 7), (2, 7), (1, 3)\}$ de color rojo y negro, y $Q^- = \{(4, 1)\}$ de color rojo.

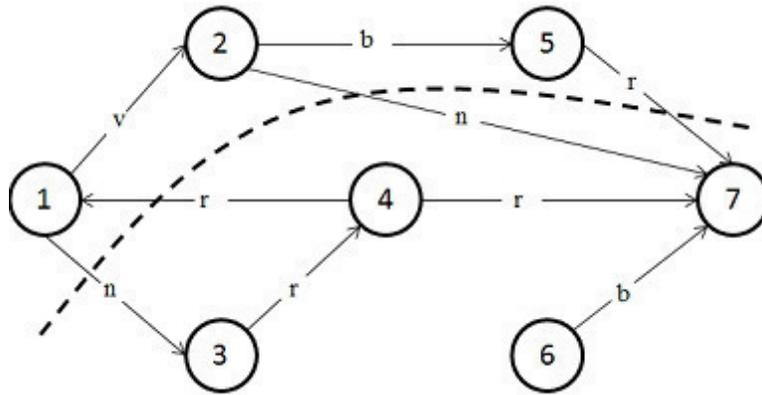


Figura 1.1.3

El corte coloreado consiste en determinar un corte $Q : N^+ \downarrow N^-$ compatible con la coloración.

Resulta interesante analizar la dualidad de los dos problemas; por ejemplo, un arco de color verde forma parte de cadenas o caminos compatibles con la coloración y no de cortes compatibles; un arco de color blanco permite que se avance en el sentido del arco y forma parte de caminos o cadenas compatibles, pero si su nodo final se encuentra en S entonces forma parte de un corte compatible; un arco de color negro forma parte de una cadena compatible con la coloración sólo si es recorrido en sentido contrario y forma parte de un corte compatible si su nodo inicial está en S , finalmente un arco de color rojo siempre formará parte de un corte compatible y bajo ninguna circunstancia formará parte de una cadena compatible con la coloración.

Esta dualidad se muestra resumida en el siguiente diagrama:

Color de arco	{	Verde { Cadena { Recorrido en ambos sentidos				
		Blanco { <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="font-size: 2em; padding-right: 5px;">{</td> <td style="padding: 5px;">Cadena { Recorrido en sentido positivo</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; padding-right: 5px;">}</td> <td style="padding: 5px;">Corte { Recorrido en sentido negativo</td> </tr> </table>	{	Cadena { Recorrido en sentido positivo	}	Corte { Recorrido en sentido negativo
		{	Cadena { Recorrido en sentido positivo			
		}	Corte { Recorrido en sentido negativo			
Negro { <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="font-size: 2em; padding-right: 5px;">{</td> <td style="padding: 5px;">Cadena { Recorrido en sentido negativo</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; padding-right: 5px;">}</td> <td style="padding: 5px;">Corte { Recorrido en sentido positivo</td> </tr> </table>	{	Cadena { Recorrido en sentido negativo	}	Corte { Recorrido en sentido positivo		
{	Cadena { Recorrido en sentido negativo					
}	Corte { Recorrido en sentido positivo					
Rojo { Corte { Recorrido en ambos sentidos						

Retomando una vez más el problema de las avenidas, se ha dado la solución correspondiente a una cadena compatible con la coloración, pero no se ha contestado a la pregunta fundamental, ¿Cómo determinar una cadena compatible con la coloración en una gráfica coloreada?. En la siguiente sección se estudia el algoritmo que contesta la cuestión, llamado método de enrutamiento. Se detalla también que el mismo método da solución al problema del corte compatible con la coloración.

El teorema de la red coloreada es una de las partes fundamentales para todo el análisis de coloración, dicho teorema encuentra su justificación en el algoritmo de enrutamiento por lo cual primero se hace mención de tal.

1.2 Método de enrutamiento

En este apartado se describe un algoritmo que da solución al problema de la cadena coloreada; o bien, detecta un corte compatible con la coloración con lo cual se concluye la no existencia de cadenas coloreadas como se demuestra a continuación.

Sean N^+ y N^- dos subconjuntos ajenos de nodos en la gráfica G y se desea determinar una cadena compatible con la coloración que vaya del conjunto N^+ a N^- . El algoritmo consiste en construir un conjunto de nodos S con $N^+ \subset S$ y una función denominada θ -enrutamiento, $\theta : \overline{N^+} \rightarrow A$, la cual asigna a cada nodo $i \in \overline{N^+}$ un arco $j \in A$, este apuntador del nodo servirá para recuperar las cadenas construidas de N^+ a N^- ; y se debe cumplir:

- Para cada nodo $i \in \overline{N^+}$, $\theta(i)$ es un arco que une a i , con algún nodo en S .

- Cuando se ha generado una secuencia $i_0, \theta(i_0), i_1, \theta(i_1), \dots, i_k, \theta(i_k), i_{k+1}$, en donde i_h es el otro extremo de $\theta(i_{h-1})$ ($h = 1, \dots, k + 1$), eventualmente se alcanza un nodo de N^+ . El reverso de la secuencia resulta entonces una cadena de N^+ a i .

Obsérvese además que el algoritmo va a generar cadenas compatibles con la coloración en caso de que existan, por lo que $\theta(i)$ debe ser verde o blanco si i es su extremo final y debe ser verde o negro en caso contrario.

1.2.1 Algoritmo de Enrutamiento

El propósito del algoritmo es determinar una cadena de N^+ a N^- compatible con la coloración, los pasos a seguir son:

1.- Sea $S = N^+$.

2.- Determinése el corte $Q = [S, S^*]$.

- Si existe $j \in Q^+$ tal que j es verde o blanco o si existe $j \in Q^-$ tal que j es verde o negro ir a 3.

- Si no existe tal j terminar. En este caso no existe solución al problema y $Q = [S, S^*]$ es un corte compatible con la coloración.

3.- Sea $\theta(i) = j$ en donde i es el extremo de j tal que $i \notin S$.

Sea $S = S \cup \{i\}$.

-Si $i \in N^-$ terminar. Los arcos del θ -enrutamiento contienen una cadena P de N^+ a $i \in N^-$ compatible con la coloración.

-Si $i \notin N^-$ se tiene $S \cap N^- = \emptyset$. Ir a 2.

La justificación del algoritmo es la siguiente:

En el paso 2 se analiza la existencia de un arco j verde o blanco en Q^+ o un verde o negro en Q^- para construir, en el paso 3, el θ -enrutamiento de S , que por tanto es compatible con la coloración en cada iteración; además, note que mientras el algoritmo no termine, se cumple que $S \cap N^- = \emptyset$.

Así que, si el algoritmo termina en el paso 3 cuando se detecta $i \in N^-$, se concluye que se ha detectado una cadena compatible con la coloración $P : N^+ \rightarrow N^-$. Por otro lado, si durante el análisis realizado en el paso 2, se encuentra que no existe un arco j con las características pedidas, el corte Q satisface que todo arco $j \in Q^+$ es rojo o negro y todo arco $j \in Q^-$ es rojo o blanco y por tanto es un corte compatible con la coloración. En este caso no existe solución al problema de la cadena coloreada, puesto que para que exista una cadena P compatible es necesario que exista al menos un arco $j \in P^+ \cap Q^+$ verde o blanco o un arco $j \in P^- \cap Q^-$ verde o negro, lo cual es imposible sin violar las restricciones de color en la red.

El algoritmo termina en un número finito de pasos pues en cada iteración se define a la función θ para al menos un nodo i (excepto en la última iteración si se termina en el paso 2) y el número de nodos es finito. Más aún, el nodo etiquetado cumple $i \notin S$; de aquí que, si en tantas iteraciones se ha etiquetado sólo uno, en el peor de los casos se realizarán tantas iteraciones como nodos haya fuera de $N^+ \cup N^-$ además de la iteración final en donde se detecta $i \in N^-$. Así que, el algoritmo termina en a lo más $|X| - |N^+| - |N^-| + 1$ iteraciones.

Ejemplificando el algoritmo de enrutamiento, en la siguiente red se desea encontrar una cadena compatible con la coloración de N^+ a N^- , donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \{10\}$.

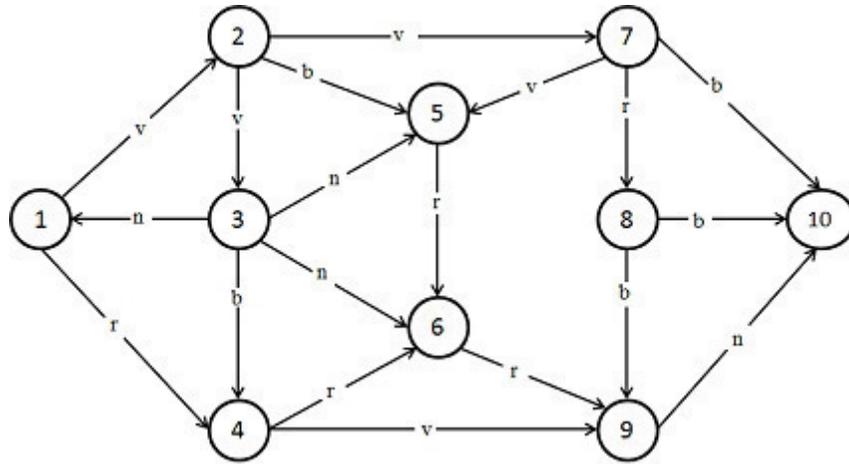


Figura 1.2.1

Iteración 1.

Paso 1. Sea $S = N^+ = \{1\}$

Paso 2. El corte $Q = [S, S^c]$ está formado por los subconjuntos

$Q^+ = \{(1, 2), (1, 4)\}$ y $Q^- = \{(3, 1)\}$ y además el arco $(1, 2) \in Q^+$ es verde y el arco $(3, 1) \in Q^-$.

Paso 3. Se define $\theta(2) = (1, 2)$ y $\theta(3) = (3, 1)$ y actualizamos el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$. Como aún no se alcanza el nodo 10, esto es, $S \cap N^- = \emptyset$ es necesario realizar otra iteración.

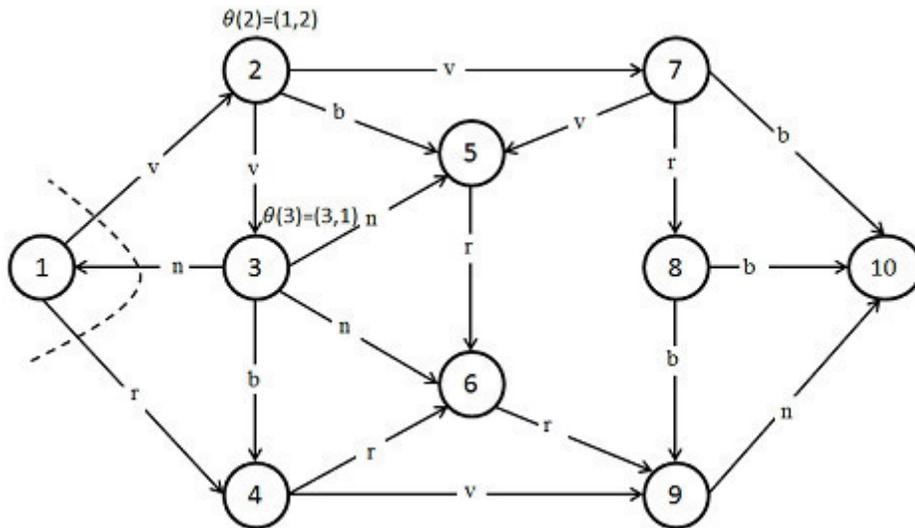


Figura 1.2.2

Iteración 2.

Paso 2. $S = \{1, 2, 3\}$ Entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1, 4), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 4)\}$ y $Q^- = \emptyset$ y el arco $(2,7)$ es verde, el arco $(2,5)$ es blanco y el arco $(3,4)$ es blanco.

Paso 3. Se define $\theta(7)=(2,7)$, $\theta(5)=(2,5)$, $\theta(4)=(3,4)$ y se actualiza al conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Como aún no se alcanza el nodo 10, es decir, $S \cap N^- = \emptyset$, se realiza otra iteración.

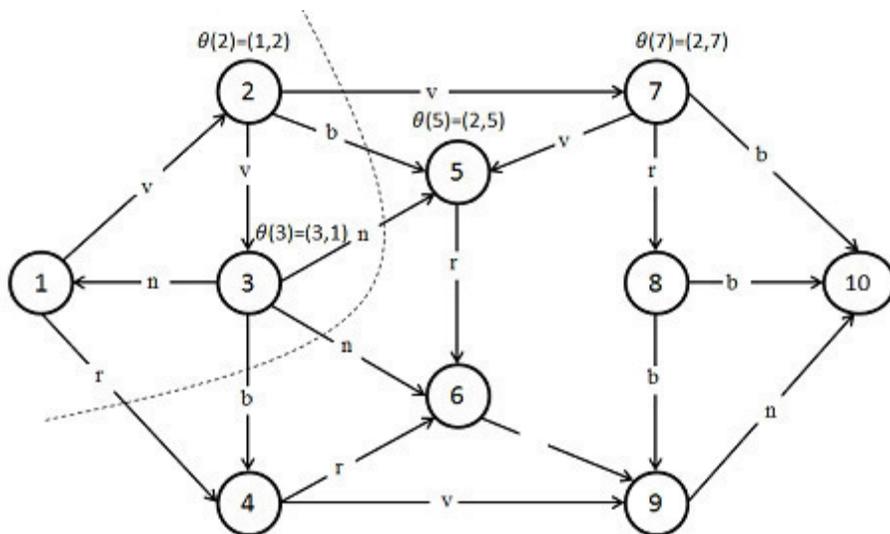


Figura 1.2.3

Iteración 3.

Paso 2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(7, 10), (7, 8), (5, 6), (3, 6), (4, 6), (4, 9)\}$ y $Q^- = \emptyset$ el arco $(7,10)$ es blanco.

Paso 3. Se define $\theta(10)=(7,10)$ y al conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$. Como ya se ha alcanzado el nodo 10 se termina, es decir, se ha encontrado una cadena compatible con la coloración. La secuencia de la cadena fue: $10, \theta(10) = (7, 10), 7, \theta(7) = (2, 7), 2, \theta(2) = (1, 2), 1$.

Por lo que la cadena compatible con la coloración de la red es: $P : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 10$.

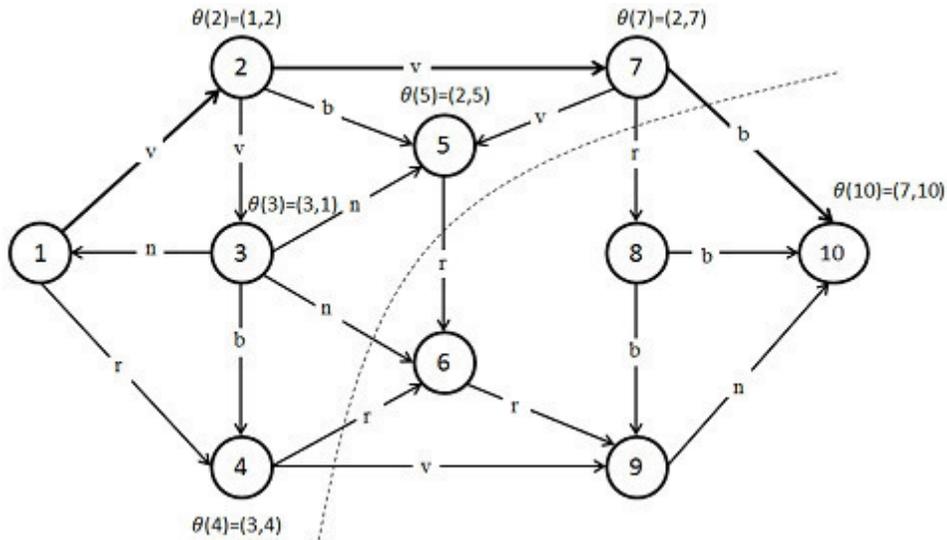


Figura 1.2.4

Supóngase ahora que en la gráfica anterior se quiere encontrar una cadena del nodo 1 al nodo 6.

Hasta el ejemplo pasado, se ha construido al conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$ que define el corte $Q = [S, S^c]$ que está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(7, 10), (7, 8), (5, 6), (3, 6), (4, 6), (4, 9)\}$ y $Q^- = \emptyset$. Obsérvese que el arco $(9,10)$ es negro, por lo que se define $\theta(9)=(9,10)$.

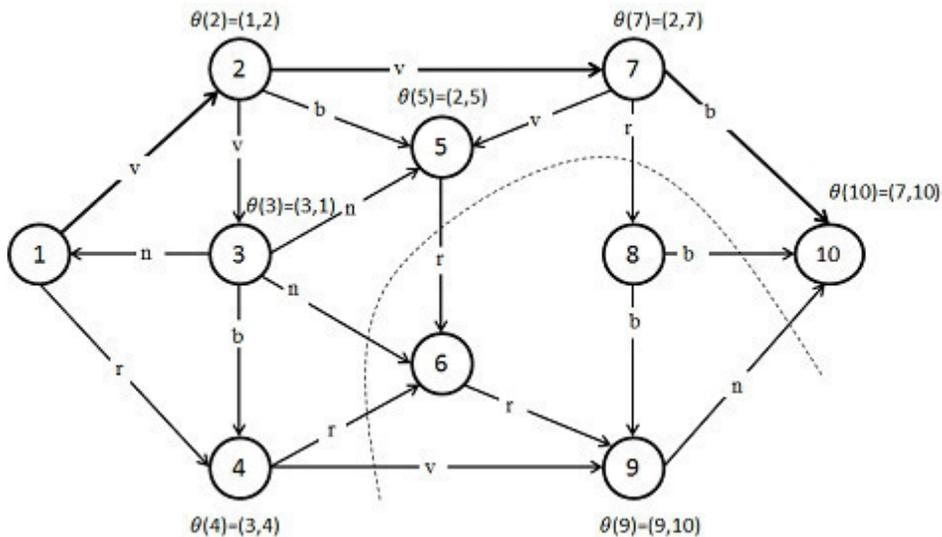


Figura 1.2.5

De esta forma se actualiza $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$ que define un nuevo corte $Q = [S, S^c]$ dado por $Q^+ = \{(5, 6), (3, 6), (4, 6), (7, 8)\}$ y $Q^- = \{(8, 10), (8, 9), (6, 9)\}$.

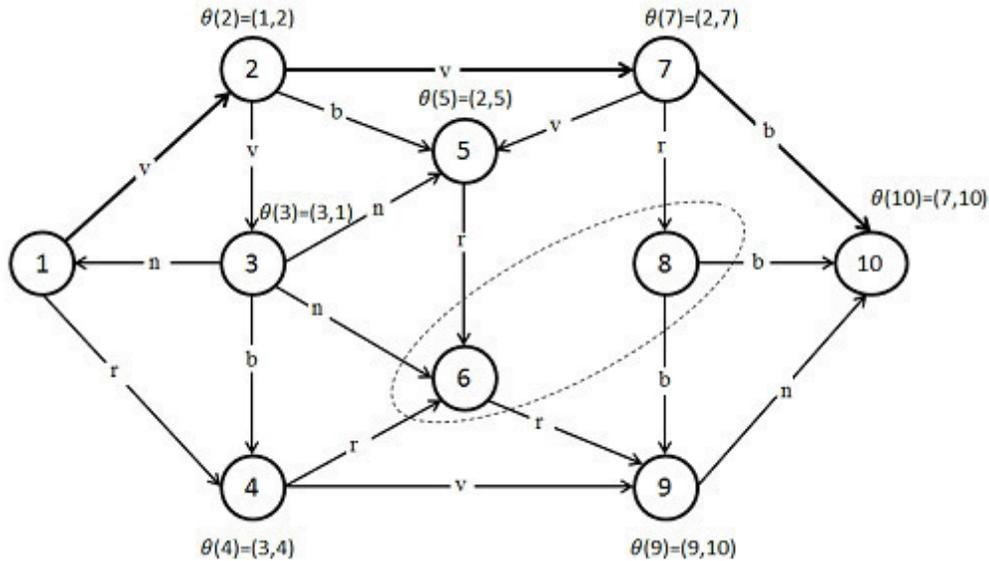


Figura 1.2.6

En Q^+ todos los arcos son rojos o negros y en Q^- todos los arcos son rojos o blancos, por lo tanto se tiene que no hay solución al problema de la cadena coloreada y $Q = [S, S^*]$, con $Q = [(5, 6), (3, 6), (4, 6), (7, 8), (8, 10), (8, 9), (6, 9)]$ corresponde a un corte compatible con la coloración.

El algoritmo de la red coloreada es un resultado íntimamente ligado al Teorema de la red coloreada, pues uno encuentra su justificación en el otro.

1.3 Teorema de la red coloreada

El siguiente resultado es denominado Teorema de la red coloreada. La justificación de este está dada por el algoritmo de enrutamiento. Como se mencionó anteriormente, el problema de la red coloreada no siempre tiene solución, de hecho cuando esto sucede, el problema del corte coloreado sí la tiene. Esto se enuncia en el resultado siguiente:

Teorema de la red coloreada : Sean N^+ y N^- dos subconjuntos de vértices contenidos en X , tales que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Entonces, dada una coloración en la gráfica G con los colores verde, blanco, negro y rojo, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida:

- El problema de la cadena coloreada tiene solución P .
- El problema del corte coloreado tiene solución Q .

Las alternativas de este teorema constituyen las dos posibilidades de terminación del algoritmo de enrutamiento. Si termina en el paso 2, se ha construido un corte $Q : N^+ \downarrow N^-$ compatible con la coloración; la existencia de este corte garantiza entonces la no existencia de una cadena compatible con la coloración, pues no existe un arco Q^+ verde o blanco, ni en

Q^- verde o negro, es decir, no existe un arco que permita seguir con la construcción de una cadena de N^+ a N^- .

1.3.1 Algunas aplicaciones en una red coloreada

1.3.1.1 Cadenas positivas

Un caso interesante de analizar en este apartado, es cuando todos los arcos de la red son de color blanco. Un teorema equivalente al Teorema de la red coloreada está dado como sigue:

Sean N^+ y $N^- \subset X$, tales que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Entonces, dada la coloración en la gráfica G con todos los arcos de color blanco una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida:

- El problema del camino o cadena positiva tiene una solución P .
- El problema del corte positivo tiene solución Q .

Las alternativas de este teorema constituyen las dos posibilidades de terminación del algoritmo de la red coloreada; sin embargo, si la solución es una cadena, dicha solución resulta ser un camino o cadena positiva, pues, en cada iteración la cadena sólo se va construyendo por los arcos de Q^+ blancos, es decir, que son recorridos de forma positiva. De la misma forma, si la solución es un corte, dada la coloración, también estará constituido únicamente por arcos que son recorridos de forma positiva.

Ejemplificando en la siguiente gráfica, al colorear todos los arcos de blanco se puede encontrar una camino de $N^+ = \{1\}$ a $N^- = \{4\}$:

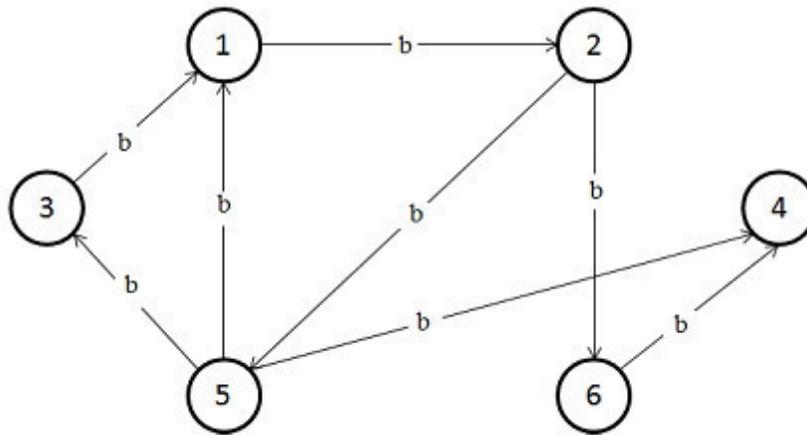


Figura 1.3.1

Iteración 1.

Paso 1. Sea $S = N^+ = \{1\}$

Paso 2. El corte $Q = [S, S^c]$ está formado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1, 2)\}$ y $Q^- = \{(3, 1), (5, 1)\}$ y además el arco $(1, 2) \in Q^+$ es blanco.

Paso 3. Se define $\theta(2)=(1,2)$ y se actualiza el conjunto $S = \{1, 2\}$. Como aún no se ha alcanzado el nodo 4, esto es, $S \cap N^- = \emptyset$ se realiza otra iteración.

Iteración 2.

Paso 2. $S = \{1, 2\}$ Entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(2, 6), (2, 5)\}$ y $Q^- = \{(3, 1), (5, 1)\}$ y los arcos $(2,5)$ y $(2,6)$ son blancos. En este caso, existen dos alternativas para la función θ , así que se define θ para ambos vértices:

Paso 3. $\theta(6)=(2,6)$ y $\theta(5)=(2,5)$ se actualiza al conjunto $S = \{1, 2, 5, 6\}$. Como aún no se alcanza el nodo 4, es decir, $S \cap N^- = \emptyset$, se realiza otra iteración.

Iteración 3.

Paso 2. $S = \{1, 2, 5, 6\}$ entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(6, 4), (5, 4)\}$ y $Q^- = \emptyset$ y ambos arcos en Q^+ son blancos.

Paso 3. Existen dos alternativas para definir la función θ en el arco 4, se elige cualquiera de ellas, en este caso se considera el arco $(6,4)$ de tal forma que $\theta(4)=(6,4)$ y se actualiza al conjunto $S = \{1, 2, 5, 6, 4\}$. Como ya se alcanzó el nodo 4 se termina el algoritmo, es decir, se ha encontrado un camino compatible con la coloración. La secuencia de la cadena es: $4, \theta(4) = (6, 4), 6, \theta(6) = (2, 6), 2, \theta(2) = (1, 2), 1$.

Por lo que la cadena compatible con la coloración de la red es: $P : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4$, que se muestra en la siguiente figura y que en efecto, es un camino del nodo uno al nodo 4.

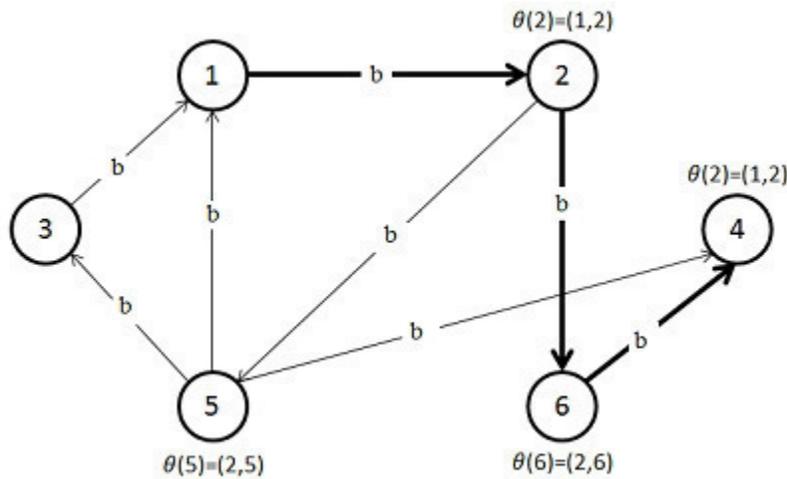


Figura 1.3.2

Es fácil notar a simple vista que la gráfica anterior es conexa, pues existe una cadena entre cualquier par de vértices en ella. Una de las aplicaciones del algoritmo de enrutamiento consiste en determinar si una gráfica es conexa.

Por otro lado, se puede observar la equivalencia de este caso al problema general de los cuatro colores de la siguiente forma: Sea G una gráfica coloreada con los cuatro colores planteados, y sea G' la gráfica transformada de G con arcos blancos; si se aplica el último resultado estudiado se tiene que al resultar una cadena en G' implica una cadena compatible con la coloración en G ; y de igual forma se observa si resulta un corte en G' .

1.3.1.2 Algoritmo de enrutamiento y conexidad de gráficas

Decimos que una gráfica $G[X, A]$ es conexa si para cualquier par de nodos $i, j \in X$, existe una cadena que los une.

La propiedad de conexidad en una gráfica es muy fácil de ser verificada mediante el algoritmo de enrutamiento, haciendo las modificaciones adecuadas. Así que, el nuevo algoritmo para verificar la conexidad de una gráfica es:

- 1.- Colorear todos los arcos de verde
- 2.- Seleccionar cualquier nodo i de la gráfica
- 3.- Aplicar el algoritmo de enrutamiento con $N^+ = i$ y $N^- = \emptyset$,
 - a) Si $S = X$, terminar, la gráfica es conexa.
 - b) En otro caso, los nodos de S con sus arcos incidentes forman una componente conexa de G que contiene a i . Para determinar todas las componentes conexas de G , se toma cualquier otro nodo $i' \in X$ y regresar a 3.

Por ejemplo, determinar si la siguiente gráfica es conexa:

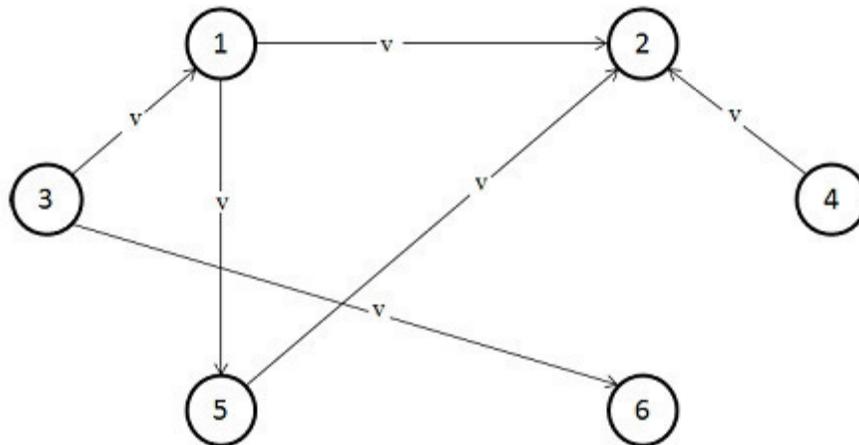


Figura 1.3.3

- 1.- Coloreando todos los arcos de verde
- 2.- Seleccionando el nodo 3
- 3.- Aplicamos el algoritmo de enrutamiento con $N^+ = \{3\}$ y $N^- = \emptyset$

Iteración 1.

Paso 1. Sea $S = N^+ = \{3\}$ y $\theta = \emptyset$

Paso 2. El corte $Q = [S, S']$ está formado por los subconjuntos

$Q^+ = \{(3, 1), (3, 6)\}$ y $Q^- = \emptyset$ y además el arco $(3, 1) \in Q^+$ es verde y el arco $(3, 6) \in Q^+$ es verde.

Paso 3. Se define $\theta(1) = (3, 1)$ y $\theta(6) = (3, 6)$ y se actualiza el conjunto $S = \{1, 3, 6\}$.

Iteración 2.

Paso 2. $S = \{1, 3, 6\}$, entonces el corte $Q = [S, S']$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1, 2), (1, 5)\}$ y $Q^- = \emptyset$ y vea que el arco $(1, 2)$ es verde y el arco $(1, 5)$ es verde.

Paso 3. Se define $\theta(2) = (1, 2)$, $\theta(5) = (1, 5)$ y se actualiza al conjunto $S = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Como $S \cap N^- = \emptyset$, es necesaria otra iteración.

Iteración 3.

Paso 2. $S = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ entonces el corte $Q = [S, S']$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \emptyset$ y $Q^- = \{(4, 2)\}$ y el arco $(4, 2)$ es verde.

Paso 3. Se define $\theta(4) = (4, 2)$ y se actualiza al conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se tiene que $S = X$, por lo que podemos concluir que la gráfica dada es conexa, y el θ -enrutamiento se ilustra en la siguiente gráfica:

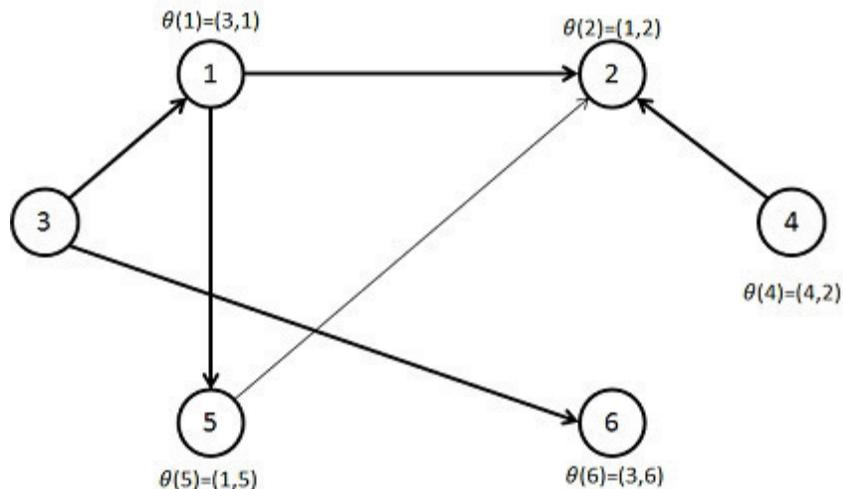


Figura 1.3.4

Si la gráfica es inconexa, existe un vértice en X que no está en S , si se toma cualquier vértice de estos, se aplica el mismo algoritmo para determinar otra componente conexa. El número de componentes es igual al número de veces que se aplica el algoritmo para alcanzar todos los vértices de G con las distintas cadenas construidas.

De forma equivalente, si se da una coloración a todos los arcos de blanco, se puede verificar si la gráfica es fuertemente conexa.

El teorema de la gráfica coloreada se deriva del lema originalmente planteado llamado de Minty. Los resultados son equivalentes como se mostrará en la siguiente sección.

1.4 Lema de Minty

Un resultado, que como ya se dijo, está fuertemente ligado al teorema de la red coloreada es el Lema de Minty, para el cual, es necesario tener una clara definición de corte elemental.

Se dice que un corte es elemental si al extraer los arcos que forman el corte de la gráfica G , el número de componentes conexas de G aumentan en una unidad.

Lema de Minty: Dada una coloración en la red R con los colores verde, blanco, negro y rojo; cualquier arco \bar{j} blanco o negro, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida:

- Existe un ciclo (elemental) P compatible con la coloración que usa \bar{j} .
- Existe un corte (elemental) Q compatible con la coloración que usa \bar{j} .

La justificación del Lema de Minty se da del siguiente modo:

Sea una gráfica $G = [X, A]$ y sea $\bar{j} \sim (i, i')$ un arco en A tal que su extremo inicial es el vértice i y su extremo final es el vértice i' . Si \bar{j} es blanco, definimos $s = i'$ y $s' = i$; si \bar{j} es negro, definimos $s = i$ y $s' = i'$. Aplicando el algoritmo de la red coloreada a \bar{j} donde $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{s'\}$, tendremos dos casos:

-Al aplicar el algoritmo se determina una cadena $P : s \rightarrow s'$, P será compatible con la coloración y P no contendrá al arco \bar{j} por la forma en que se definen s y s' , por lo cual, la cadena P junto con el arco \bar{j} constituyen un ciclo en la red que además es compatible con la coloración, por lo tanto, existe solución al problema de la cadena coloreada y el arco \bar{j} pertenece a un ciclo elemental.

-Al aplicar el algoritmo a \bar{j} encontramos un corte $Q = [S, S']$, tendremos que $\bar{j} \in Q$, pues $s \in S$ y $s' \notin S$, el corte es compatible con la coloración que separa a s de s' . Por lo tanto, existe una solución al problema del corte coloreado y el arco \bar{j} pertenece él.

Es importante mencionar que la demostración del lema de Minty, a partir del teorema de la red coloreada, induce el algoritmo de Minty, que sirve para determinar cual de las dos posibilidades de Minty se satisface en un caso dado.

1.4.1 Algoritmo de Minty

El algoritmo de Minty puede resumirse de la siguiente forma:

1.- Sea $G[X, A]$ una gráfica y sea $j \in A$ con $j \sim (i, i^*)$, j negro (blanco).

Definimos $i = N^+$, $i^* = N^-$ y $S = N^+$

2.- Determinése el corte $Q = [S, S^c]$.

- Si existe $j \in Q^+$ tal que j es verde o blanco o si existe $j \in Q^-$ tal que j es verde o negro ir a 3.

- Si no existe tal j terminar. Existe un corte compatible con la coloración que usa a j .

3.- Hacemos $S = N^+ \cup \{j\}$.

- Si $S \cap N^- = \emptyset$. Ir a 2

- Si $S \cap N^- \neq \emptyset$ terminar. Existe un ciclo compatible con la coloración que usa a j .

Aplicando el algoritmo de Minty para determinar si el arco $(2,3)$ de la siguiente red pertenece a un ciclo elemental compatible coloración o bien, pertenece a un corte elemental compatible con la coloración se tiene que:

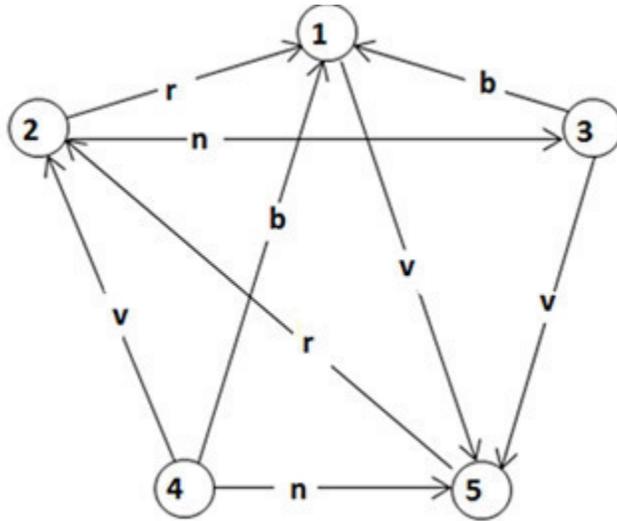


Figura 1.4.1

Iteración 1.

Paso 1. Sea $S = N^+ = \{2\}$ y $N^- = \{3\}$

Paso 2. El corte $Q = [S, S^c]$ está formado por los subconjuntos $Q^+ = \{(2,1), (2,3)\}$ y $Q^- = \{(5,2), (4,2)\}$ y además $j \sim (4,2) \in Q^-$ es verde.

Paso 3. Actualizando el conjunto $S = \{2,4\}$. Como aún no se ha alcanzado el nodo 3, esto es, $S \cap N^- = \emptyset$ se realiza otra iteración.

Iteración 2.

Paso 2. $S = \{2, 4\}$ Entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 5)\}$ y $Q^- = \{(5, 2)\}$ y el arco $(4,1)$ es blanco.

Paso 3. Actualizando al conjunto $S = \{1, 2, 4\}$. Como aún no se alcanza el nodo 3, es decir, $S \cap N^- = \emptyset$, realizaremos otra iteración.

Iteración 3.

Paso 2. $S = \{1, 2, 4\}$, entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1, 5), (4, 5), (2, 3)\}$ y $Q^- = \{(3, 1), (5, 2)\}$ y el arco $(1,5)$ es verde.

Paso 3. Actualizando al conjunto $S = \{1, 2, 4, 5\}$. Como se sigue sin alcanzar el nodo 3, es decir, $S \cap N^- = \emptyset$, es necesaria otra iteración.

Iteración 4.

Paso 2. $S = \{1, 2, 4, 5\}$, entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(2, 3)\}$ y $Q^- = \{(3, 1), (3, 5)\}$ y el arco $(3,5)$ es verde.

Paso 3. Se actualiza al conjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 3\}$. y $S \cap N^- \neq \emptyset$ y como ya se alcanzó el nodo 3 se termina, es decir, se ha encontrado una cadena compatible con la coloración.

Por lo que la cadena compatible con la coloración de la red es: $P : 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. De tal forma que $P \cup \{(2, 3)\}$, forma un ciclo elemental compatible con la coloración, a saber, el ciclo marcado en la siguiente figura:

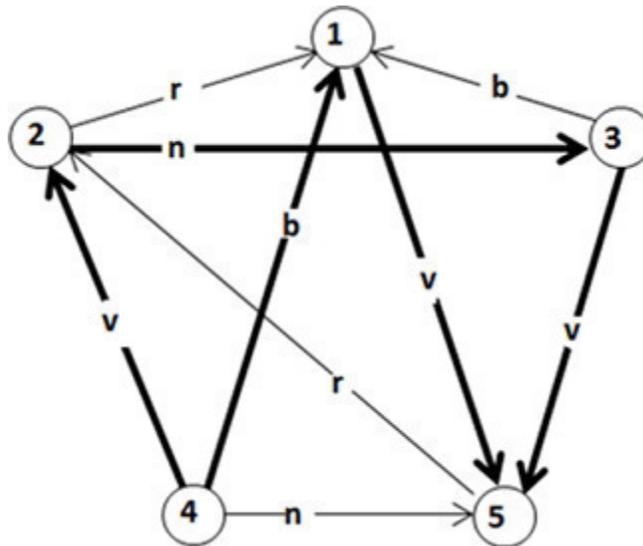


Figura 1.4.2

Otro ejemplo, para entender mejor el funcionamiento del algoritmo al tener como resultado un corte es el siguiente.

Determinese si el arco $(1,2)$ de la siguiente red pertenece a un ciclo elemental compatible o a un corte elemental compatible con la coloración.

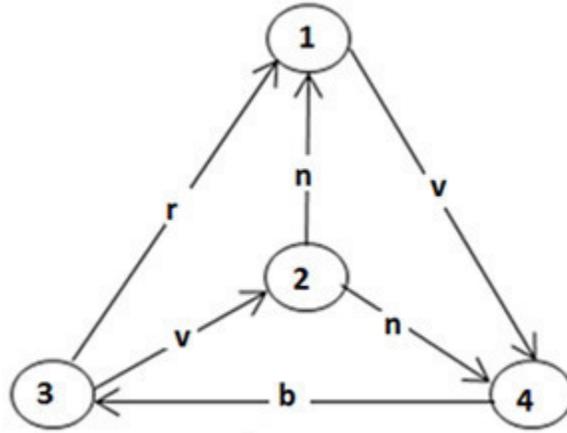


Figura 1.4.3

Iteración 1.

Paso 1. Sea $S = N^+ = \{2\}$ y $N^- = \{1\}$

Paso 2. El corte $Q = [S, S^c]$ está formado por los subconjuntos $Q^+ = \{(2, 1), (2, 4)\}$ y $Q^- = \{(3, 2)\}$ y además $j \sim (3, 2) \in Q^-$ es verde.

Paso 3. Se actualiza el conjunto $S = \{2, 3\}$. Como aún no se ha alcanzado el nodo 1, esto es, $S \cap N^- = \emptyset$ es necesaria otra iteración.

Iteración 2.

Paso 2. $S = \{2, 3\}$ Entonces el corte $Q = [S, S^c]$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(3, 1), (2, 1), (2, 4)\}$ y $Q^- = \{(4, 3)\}$ y en Q^+ no existen arcos verdes o blancos, y en Q^- no existen arcos verdes o negros. Así que, el arco $(2,1)$ forma parte de un corte compatible con la coloración dado en la siguiente figura:

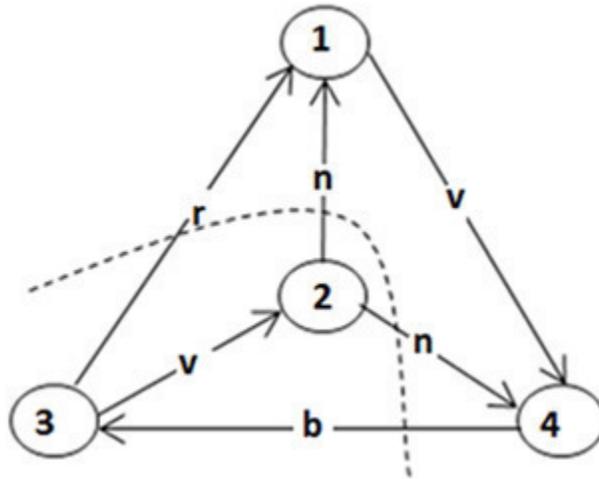


Figura 1.4.4

Se ha demostrado ya el Lema de Minty a partir del Teorema de la red coloreada, dada la equivalencia de conceptos, se demostrará ahora el Teorema de la red coloreada a partir del Lema de Minty.

Consideremos una gráfica $G [X, A]$ coloreada con los colores verde, blanco, negro y rojo; y sean N^+ y N^- dos subconjuntos ajenos de X . Agregamos dos nuevos nodos s y s' , y construimos el arco $\bar{j} \rightsquigarrow (s', s)$ y los arcos (s, i) para todo $i \in N^+$, y (k, s') para todo $k \in N^-$, como se observa en la siguiente gráfica, los cuales serán coloreados de blanco. Al aplicar el lema de Minty al arco $\bar{j} \rightsquigarrow (s', s)$ existen dos posibilidades:

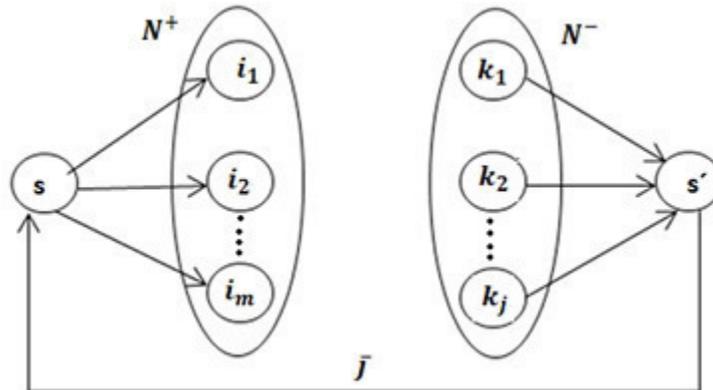


Figura 1.4.5

\bar{j} pertenece a un ciclo elemental P compatible con la coloración. Dado que \bar{j} es blanco P debe ser de la forma:

$$P : s', \bar{j}, s, j_1, P', j_2, s'$$

Donde $j_1 \sim (s, i)$ con $i \in N^+$, $j_2 \sim (k, s)$ con $k \in N^-$, y P es una cadena de i a k compatible con la coloración. Como $i \in N^+$ y $k \in N^-$, quiere decir que existe una cadena de N^+ a N^- compatible con la coloración, de donde se deriva la primera condición del teorema de la red coloreada.

\bar{j} pertenece a un corte Q compatible con la coloración. Vea que Q no puede contener ningún arco nuevo distinto de \bar{j} , ya que éstos son blancos y no cumplirían con la restricción de color, lo cual garantiza que la red tiene un corte que separa a N^+ de N^- compatible con la coloración, de donde se deriva la segunda condición del teorema de la red coloreada.

Parte de la importancia del Lema de Minty radica en las distintas aplicaciones que se derivan de tal, en seguida se citan algunas de ellas.

1.4.2 Algunas aplicaciones del Lema de Minty

1.4.2.1 Lema de Minty e istmos

Decimos que un corte Q es positivo si el conjunto de arcos Q^- es vacío. Así que, se dice que un arco \hat{j} es un istmo si por sí mismo constituye un corte positivo.

Es posible determinar si un arco \hat{j} es un istmo aplicando el Lema de Minty de la siguiente forma:

Consideremos una gráfica G con todos sus arcos de color verde, excepto uno al que se le asignará el color negro (o blanco).

Al aplicar el Lema de Minty sobre este último arco ocurre sólo una de las siguientes afirmaciones:

\hat{j} pertenece a un ciclo compatible con la coloración. Es claro que \hat{j} no puede constituir un corte por sí mismo, ya que, sea $\hat{j} \sim (i, k)$, dado la coloración definida en R y dado que j pertenece a un ciclo, es posible encontrar otro camino de i a k , sin necesidad de usar el arco \hat{j} . Por tanto \hat{j} no es un istmo.

\hat{j} pertenece a un corte compatible con la coloración. En este caso, obsérvese que el único arco que forma dicho corte es precisamente el arco \hat{j} , pues todos los demás arcos son de color verde, y por tanto no pueden pertenecer a un corte compatible con la coloración. Por tanto, el arco \hat{j} es un istmo.

1.4.2.2 Redes sin ciclos positivos o circuitos

Por el Lema de Minty, es posible demostrar que una red no contiene ciclos positivos si y sólo si todo arco pertenece a algún corte positivo como sigue:

Consideremos una gráfica $G[X, A]$ con todos sus arcos blancos, es decir j_k es blanco $\forall j_k \in A$ con $k = 1, \dots, n$, al aplicar el Lema de Minty a cualquier arco j_k de G , se tiene que sólo una de las siguientes afirmaciones es posible:

- j_k está en un corte compatible con la coloración, para cualquier j_k en G . Esto significa que todo arco en G pertenece a un corte y por tanto G no contiene ciclos positivos.

- j_k está en un ciclo compatible con la coloración. Sea C el ciclo al que pertenece j_k , obsérvese que como todos los arcos son blancos, todos son recorridos positivamente, y por tanto G contiene un ciclo positivo o circuito.

Capítulo 2: Problemas de flujo con un enfoque de coloración.

Los problemas de flujo surgen cuando se presentan situaciones como sistemas carreteros, sistemas de ductos de agua, sistemas de autobuses, etcétera. Para introducir a los conceptos de dichos problemas considérese el siguiente ejemplo: Se tiene la producción de cierto producto en uno o varios lugares fijos y se deben transportar a otros para su consumo; la cantidad de producto a llevar está sujeta a ciertas restricciones como la capacidad de transporte, la capacidad de producción del producto o bien, la demanda que se tenga del mismo. A este problema se le puede asociar una gráfica $G[X, A, C, b]$ donde:

- X representa el conjunto de lugares
- si $i, i' \in X$, $(i, i') \in A$ si y sólo si es posible transportar el producto del lugar i al lugar i'
- $C : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $(i, i') \sim j \in A$, $c^-(j)$ y $c^+(j)$ representa la capacidad mínima y máxima de transporte del producto del lugar i al lugar i'
- $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ representa la oferta o demanda en los lugares fijos. De igual forma, esta puede estar sujeta a ciertas restricciones ya que puede tener que cumplir una cantidad de oferta o demanda específica, o bien puede tener que estar dentro de un intervalo $[c(i)^-, c(i)^+]$.

2.1 Conceptos Generales de Flujo

2.1.1 Flujo Factible

Decimos que un flujo factible en una gráfica $G = [X, A, C, b]$, es una función $x : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i)

$$c(i)^- \leq \sum_{j \in \Gamma^+(i)} x(i, j) - \sum_{k \in \Gamma^-(i)} x(k, i) \leq c(i)^+$$

(ii)

$$c^-(i, j) \leq x(i, j) \leq c^+(i, j) \text{ para todo } (i, j) \in A.$$

$x(i, j)$ representa el flujo a través del arco (i, j) . Un ejemplo de flujo factible se presenta en la siguiente red:

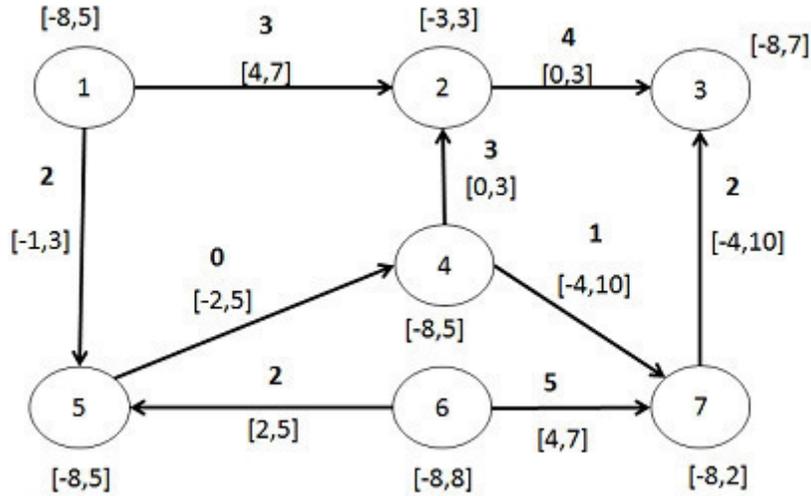


Figura 2.1.1

Existe un caso particular de flujo factible de valor ven una gráfica en donde existen dos nodos s y t respectivamente, tal que se cumple:

(i)

$$\sum_{j \in \Gamma^+(i)} x(i, j) - \sum_{k \in \Gamma^-(i)} x(k, i) = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases}$$

(ii)

$$0 \leq x(i, j) \leq q(i, j) \text{ para todo } (i, j) \in A.$$

Al número v se le llama valor del flujo f , a las ecuaciones (i) y (ii) se les conoce como “ecuaciones de conservación del flujo”; a los vértices s y t , se les llama origen o fuente y destino o sumidero respectivamente; los cuales reciben este nombre pues el flujo que pasa a través de G se origina en s y llega a t . Además, $q(i, j)$ representa la capacidad máxima del arco (i, j) .

Un ejemplo se ilustra en la siguiente gráfica, donde los números asociados a los arcos representan el flujo a través de ellos, los intervalos son las capacidades del arco y el valor de flujo es $v = 4$.

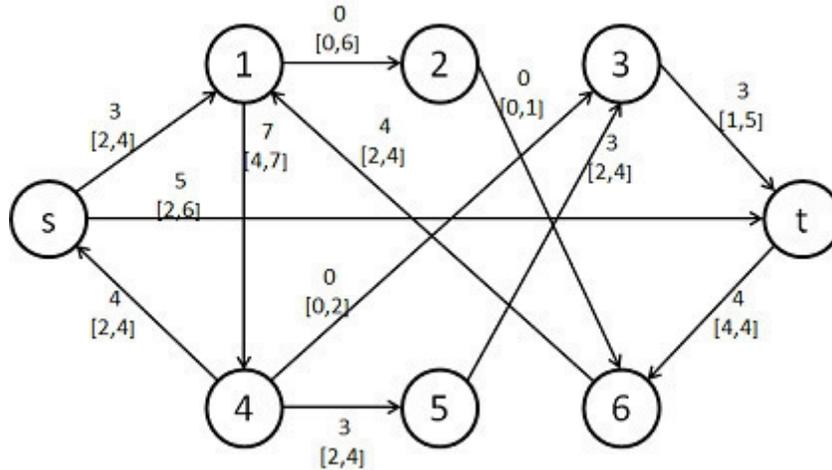


Figura 2.1.2

Un flujo en una red puede denotarse mediante un vector $x \in \mathbb{R}^{|A|}$, donde la j -ésima componente de x es $x(j)$, el flujo a través del arco j , y $x(j)$ puede ser menor que cero, interpretando el flujo negativo de un arco j como uno circulando en sentido contrario de éste.

Por otro lado, es importante conocer la cantidad de flujo que "sale" de cualquier nodo i ; esta cantidad es la suma de los flujos $x(j) > 0$ tales que $e_{i,j} = 1$ más la suma de los flujos $x(j) < 0$ tales que $e_{i,j} = -1$, donde $e_{i,j}$ es la entrada (i, j) de la matriz de incidencia en la red; en otras palabras, el flujo que sale de un nodo i , es la suma de los términos positivos $e_{i,j}x(j)$. De forma análoga, se dice que el flujo que se absorbe en el nodo i , es la suma de los términos negativos $e_{i,j}x(j)$. De tal forma que la suma total de los términos $e_{i,j}x(j)$ recibe el nombre de divergencia del flujo x en el nodo i y es la cantidad de flujo que se genera en dicho nodo que se denota con $y(i)$, es decir:

$$y(i) = \sum_{j \in A} e_{i,j}x(j)$$

Se dice que el arco i es origen o fuente si $y(i) > 0$ y que i es destino o sumidero si $y(i) < 0$. Si $y(i) = 0$ el flujo se conserva en i . Además, las ecuaciones de conservación de flujo en el problema anterior se pueden expresar en términos de divergencias del modo siguiente:

$$y(i) = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases}$$

2.1.2 Principio de divergencia total

El principio de divergencia total señala que en una gráfica G se cumple que:

$$\sum_{i \in X} y(i) = 0, \text{ donde } y = \text{div } x$$

Es decir, la cantidad total de flujo que se genera en los orígenes es igual a la cantidad de flujo que se absorbe en los destinos.

El resultado es fácil de verificar pues

$$\sum_{i \in X} y(i) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in A} e_{i,j} x(j) = \sum_{j \in A} x(j) \sum_{i \in X} e_{i,j} = 0$$

Ya que cada columna de la matriz de incidencia tiene exactamente un 1, un -1 y los demás cero.

Otra propiedad importante de la función de divergencia es que cumple que:

Sean x y x' dos flujos definidos en una red y sea λ un escalar

$$(1) \operatorname{div}(x + x') = \operatorname{div} x + \operatorname{div} x'$$

$$(2) \operatorname{div}(\lambda x) = \lambda \operatorname{div} x$$

Existe un flujo especial que será de interés llamado circulación que se define en seguida.

2.1.3 Circulación

Se dice que una circulación es un flujo para el cual $\operatorname{div} x = 0$, es decir un flujo que se conserva en todo nodo, o dicho de otra forma, todos los nodos de la gráfica son intermedios.

Por otro lado, en los problemas de flujos, el concepto de corte tiene gran relevancia, por lo que es necesario definir el flujo a través de un corte.

2.1.4 Flujo a través de un corte

El flujo a través de un corte Q , para un flujo x en una gráfica G , se define como la cantidad:

$$e_{Q,x} = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$$

Ahora, si $Q = [S, \bar{S}]$ con $S \subset X$, se define la divergencia de x desde S mediante:

$$y(S) = \sum_{i \in S} y(i), \quad y = \operatorname{div} x$$

Por ejemplo, considérese la siguiente red:

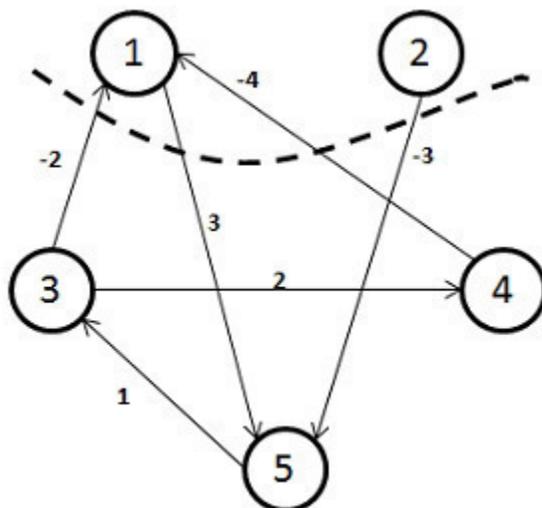


Figura 2.1.3

Sea $S = \{1, 2\}$ así que $Q = \{(3, 1), (1, 5), (4, 1), (2, 5)\}$

Además, en la red se puede ver que:

divergencia de x desde $S = y(S) = \text{div}(1) + \text{div}(2) = 9 - 3 = 6$ y;

flujo a través de $Q = e_Q \cdot x = x(2, 5) + x(1, 5) - x(4, 1) - x(3, 1) = -3 + 3 - (-4) - (-2) = 6$

Es importante notar que la divergencia de x desde S resulta igual al flujo a través de Q , lo cual es un resultado relevante que se enuncia a continuación, llamado principio fundamental de divergencia.

2.1.5 Principio fundamental de divergencia

Sea x un flujo en una gráfica G y sea el corte $Q = [S, \bar{S}]$. Entonces:

$$y(S) = e_Q \cdot x \quad \text{donde } y = \text{div } x$$

Es decir, la divergencia de S es igual al flujo a través del corte. La demostración resulta de usar las definiciones de y y de e_Q , pues se tiene que:

$$\begin{aligned} y(S) &= \sum_{i \in S} y(i) = \sum_{i \in S} (\sum_{j \in A} e(i, j)x(j)) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in A} e(i, j)x(j) \\ &= \sum_{j \in Q^+} \sum_{i \in S} e(i, j)x(j) + \sum_{j \in Q^-} - \sum_{i \in S} e(i, j)x(j) \\ &= \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = e_Q \cdot x. \end{aligned}$$

En la siguiente red se muestra un ejemplo del principio de divergencia:

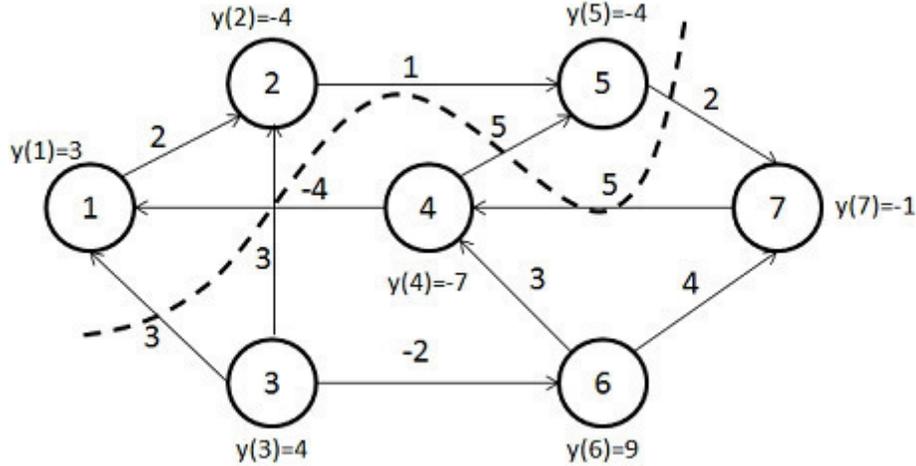


Figura 2.1.4

El corte $Q = [S, \bar{S}]$ está definido por $S = \{1, 2, 5\}$ y $\bar{S} = \{3, 4, 6, 7\}$, de tal forma que $y(S) = \text{div}(1) + \text{div}(2) + \text{div}(5) = 3 - 4 - 4 = -5$

Y por otro lado,

$$e_Q \cdot x = x(4, 1) + x(3, 2) + x(3, 1) + x(4, 5) + x(5, 7) = -(-4) - 3 - 3 - 5 + 2 = -5.$$

En los problemas de flujo, la restricción más común es acotar el flujo a través de un arco; es decir, se debe cumplir que el valor del flujo esté en un intervalo cerrado no vacío $c(j)$, llamado intervalo de capacidad para el arco j . Un flujo x en la gráfica G es factible respecto a las capacidades si $x(j) \in c(j)$ para toda $j \in A$. Denotaremos los intervalos de capacidad como:

$$c(j) = [c^-(j), c^+(j)]$$

donde $c^-(j)$ y $c^+(j)$ son las capacidades inferior y superior respectivamente para el arco j . Las únicas restricciones que deben cumplir $c^-(j)$ y $c^+(j)$ son: $c^-(j) \leq c^+(j)$, $c^+(j) > -\infty$, y $c^-(j) < \infty$.

Una vez definidas las capacidades sobre los arcos de una red, se puede señalar las relaciones obtenidas respecto a las capacidades de los arcos de un corte Q al sumar las restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q^+} c^-(j) &\leq \sum_{j \in Q^+} x(j) \leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j) \\ -\sum_{j \in Q^-} c^+(j) &\leq -\sum_{j \in Q^-} x(j) \leq -\sum_{j \in Q^-} c^-(j) \end{aligned}$$

De donde

$$\sum_{j \in Q^+} c^-(j) - \sum_{j \in Q^-} c^+(j) \leq \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$$

$$\leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q^+} c^-(j) - \sum_{j \in Q^-} c^+(j) &\leq e_Q x \\ &\leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j) \end{aligned}$$

Los extremos de esta desigualdad son las capacidad inferior y superior para el flujo a través del corte Q y se denotan con $c^-(Q)$ y $c^+(Q)$ respectivamente. El intervalo de capacidad asociado con Q es $c(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)]$.

2.2 Problemas de distribución factible y flujo factible

Hasta el momento se ha trabajado con restricciones respecto a las capacidades de los arcos, en este apartado se estudiará además la existencia de restricciones en los nodos, denominadas restricciones de oferta y demanda. Se denota a los valores de oferta del nodo i con $b(i)$, entendiéndose también, como demanda, una oferta negativa.

Así que, sean los intervalos de capacidad $c(j) = [c^-(j), c^+(j)]$, para todo arco j y sean los valores $b(i)$ para todo nodo i , se desea determinar un flujo x tal que:

$$\begin{aligned} \cdot c^-(j) &\leq x(j) \leq c^+(j) \text{ para todo } j \in A \\ \cdot y(i) &= b(i) \quad \text{para todo } i \in X \text{ (} y = \text{div } x \text{)} \end{aligned}$$

donde la función b recibe el nombre de función de oferta.

Es importante notar que dado el principio de divergencia, una condición necesaria para que exista solución al problema de distribución factible es que $b(X) = 0$, donde $b(X) = \sum_{i \in X} b(i)$, es decir, se exige que la oferta total sea igual a la demanda total.

Por ejemplo, cuando se tiene una gráfica con un nodo fuente y uno sumidero se ve entonces que la restricciones de oferta para dichos vértices son v y $-v$ respectivamente, y para los demás vértices se cumple que su restricción de oferta es cero.

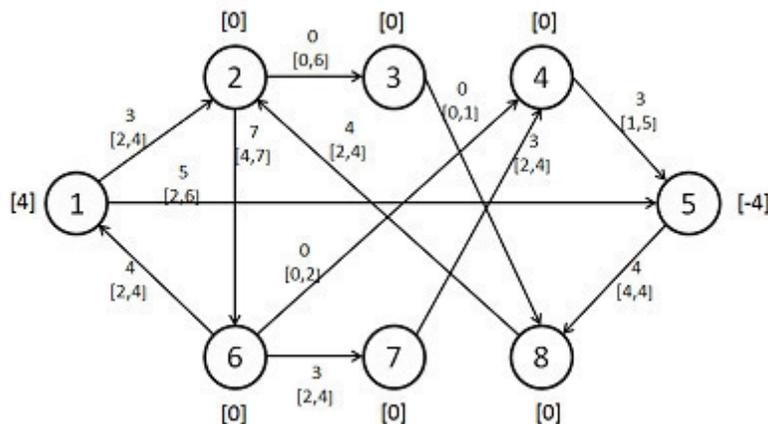


Figura 2.2.1

Por otro lado, si no se exigiera un valor específico para la divergencia, y ésta pudiera estar en un intervalo, llamado intervalo de oferta, el problema sería un problema de flujo factible.

Dicho lo anterior, el problema de flujo factible equivale a determinar un flujo x tal que

$$x(j) \in c(j) \quad \text{para todo } j \in A$$

$$y(i) \in c(i) \quad \text{para todo } i \in X$$

con $c(j)$ = intervalo de capacidad para el arco j

$c(i)$ = intervalo de oferta para el nodo i

Ahora bien, ya se mencionó que una condición necesaria para que exista solución al problema de distribución factible es que $b(X) = 0$, existen otras condiciones que deben cumplirse para garantizar una solución, las cuales son establecidas en el teorema que se estudia enseguida.

2.2.1 Teorema de distribución factible (Gale y Hoffman)

El problema de distribución factible tiene solución si y sólo si $b(X) = 0$ y $b(S) \leq c^+(Q)$, para todo corte $Q = [S, \bar{S}]$, con $S \subset X$.

La demostración de este teorema es constructiva, y la constituye un algoritmo que se analiza a continuación.

2.2.2 Algoritmo de rectificación de flujo

El algoritmo de rectificación de flujo resuelve el problema de distribución factible en una gráfica que tenga restricciones de oferta y demanda en los nodos, es decir, restricciones de divergencia. El algoritmo inicia con un flujo que satisface las restricciones de oferta en los nodos, y puede o no ser factible respecto a las capacidades en cada arco, en cada iteración se modifica el flujo de tal forma que este se acerque más a las cotas de capacidad de los arcos manteniendo siempre válidas las restricciones de oferta. Con tal antecedente, se describe con detalle el procedimiento de la siguiente forma:

1. Determinar un flujo x factible con respecto a las restricciones de oferta, es decir, tal que $\text{div } x = b \forall x \in X$.

2. Sean

$$A^+ = \{j \in A | x(j) > c^+(j)\};$$

$$A^- = \{j \in A | x(j) < c^-(j)\};$$

- Si $A^+ = A^- = \emptyset$, entonces x es la solución deseada, terminar.

- Si $\exists \bar{j} \in A^+$ o $\bar{j} \in A^-$ colorear los arcos de la gráfica de la siguiente manera:

verde si	$c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco si	$x(j) \leq c^-(j), x(j) < c^+(j)$
negro si	$x(j) \geq c^+(j), x(j) > c^-(j)$
rojo si	$c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

Ir a 3.

3. Aplicar el algoritmo de Minty en la gráfica coloreada.

- Si se determina un ciclo elemental P compatible con la coloración, que contenga a \bar{j} calcular:

$$\alpha = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} c^+(j) - x(j), j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j), j \in P^- \\ \bar{\alpha} \end{array} \right\}$$

en donde

$$\bar{\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} x(j) - c^-(j), \text{ si } j \in A^+ \\ c^+(j) - x(j), \text{ si } j \in A^- \end{array} \right\}$$

Hacer $x = x + \alpha e_p$ e ir a 2.

- Si se determina un corte $Q [S, \bar{S}]$ compatible con la coloración que contenga a \bar{j} terminar, en este caso no existe solución al problema.

Antes de dar la justificación a dicho algoritmo, es importante analizar el por qué de la coloración hecha en el paso 2:

-Un arco pintado de verde se puede recorrer en ambos sentidos, en este caso, los arcos j pintados de verde cumplen que $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$, es decir, el flujo a través de estos se encuentra dentro del intervalo de capacidad, por lo cual este flujo puede ser disminuido o aumentado.

-Los arcos pintados de blanco pueden ser recorridos sólo en la dirección del arco, en este caso, los arcos pintados de blanco son los arcos j que cumplen que $x(j) \leq c^-(j), x(j) < c^+(j)$. En este caso si el flujo está sobre la capacidad inferior del arco, el único cambio posible es aumentarlo; más aún, si el flujo está por debajo de dicha capacidad, este debe aumentarse necesariamente para alcanzar la factibilidad.

- Análogamente, los arcos pintados de negro sólo pueden ser recorridos en sentido contrario a la dirección del arco, así, el algoritmo pinta de negro a los arcos j que cumplen que $x(j) \geq c^+(j), x(j) > c^-(j)$. En este caso si el flujo está sobre la capacidad superior del arco, el único cambio posible es disminuirlo; más aún, si el flujo está por arriba de dicha capacidad, este debe disminuirse necesariamente para alcanzar la factibilidad.

-Por último, los arcos pintados de rojo ya no pueden ser recorridos, así que se pintan de rojo los arcos j tal que $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$, que nos indican que sólo pasa exactamente la cantidad de flujo que es igual a la capacidad inferior y superior.

La justificación del algoritmo es la siguiente:

En el paso 3 del algoritmo existen sólo dos posibles opciones:

Si existe un ciclo elemental P compatible con la coloración, quiere decir que es posible disminuir o incrementar el flujo de los arcos que lo forman. Obsérvese que $c^+(j) - x(j) > 0$ para todo $j \in P^+$, o $x(j) - c^-(j) > 0$ para todo $j \in P^-$. Por otro lado, si $\bar{j} \in A^+$ significa que $x(\bar{j}) > c^+(\bar{j})$, es decir, supera su capacidad superior, y si $\bar{j} \in A^-$ significa que $x(\bar{j}) < c^-(\bar{j})$, es decir, está por debajo de su capacidad inferior, de tal forma que al hacer el cálculo de α se garantiza que el nuevo flujo $x' = x + \alpha e_p$ es menor que su cota superior para $j \in P^+$ y es mayor que su cota inferior para $j \in P^-$, mientras que el flujo permanece igual para los arcos fuera de P .

Por otro lado, se puede decir que en cada iteración un arco $\bar{j} \in A^+ \cup A^-$ sale del conjunto, pero en caso de que el conjunto $A^+ \cup A^-$ sea el mismo que en la iteración anterior el algoritmo garantiza que el flujo del arco $\bar{j} \in A^+ \cup A^-$ se acerque más a sus capacidades superior o inferior según la restricción que viole; es decir, el flujo x' se acerca más a las restricciones de capacidad que x . Además, el nuevo flujo sigue cumpliendo las restricciones de oferta de los nodos pues, dado que el ciclo P cumple que $div(e_p) = 0$ se tiene que:

$$div(x') = div(x + \alpha e_p) = div(x) + div(\alpha e_p) = div(x) + \alpha div(e_p) = div(x) = b.$$

El algoritmo termina si c^+ y c^- son múltiplos de una cierta cantidad $\beta > 0$, así como la generación de flujo está determinada por la oferta, entonces $b(i)$ también es múltiplo de cierta cantidad $\beta > 0$; de este modo en cada iteración el flujo generado será un múltiplo de $\beta > 0$. Así que, las reducciones o aumentos de flujo en los arcos de $A^+ \cup A^-$ son de al menos β . Cómo sólo es posible una reducción finita, y un número finito de arcos que violan las restricciones de capacidad concluimos que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones.

La otra posibilidad del paso 3, se da cuando encontramos un corte compatible con la coloración, lo que quiere decir que el flujo para los arcos que salen del corte es mayor o igual a su capacidad, ($x(j) \geq c^+(j)$ para todo $j \in Q^+$) pues son de color negro o rojo, si son de color negro sólo pueden disminuir el flujo a través de ellos, y si son de color rojo no pueden aumentarlo ni disminuirlo. El flujo para los arcos que entran al corte es menor o igual a su capacidad inferior ($x(j) \leq c^-(j)$ para todo $j \in Q^-$) y sólo pueden ser blancos o rojos, en caso de que los arcos en Q^- sean blancos, el flujo a través de éstos sólo puede ser aumentado. Para $\bar{j} \in A^+ \cup A^-$, \bar{j} forma parte del corte y su flujo está por arriba o por abajo de sus restricciones de capacidad, por lo que el flujo a través del corte será mayor que la capacidad del corte, como la cantidad de flujo a través de la red es justo la oferta sucedería que la oferta sobrepasa la capacidad de la red y por tanto no habría solución al problema, es decir:

$$c^+(Q) < \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = b(S)$$

pues $\sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j)$ es el flujo a través de Q , que es igual a la divergencia de x desde S .

Para ejemplificar el funcionamiento del algoritmo, considérese la siguiente gráfica en la cual los intervalos asociados a los arcos son sus capacidades inferior y superior respectivamente; el número en cada nodo representa la oferta, en caso de ser negativo se tiene un nodo con demanda Si no hay dicho número en cierto nodo, se entiende que tiene oferta cero y será un nodo intermedio, es decir, la cantidad de flujo que entra en el nodo, debe salir.

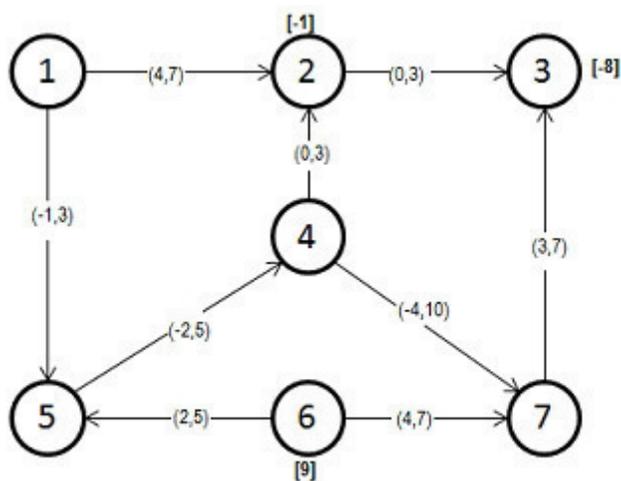


Figura 2.2.2

Iteración 1.

Paso 1. Un flujo inicial factible respecto a las restricciones de oferta se representa en la siguiente red:

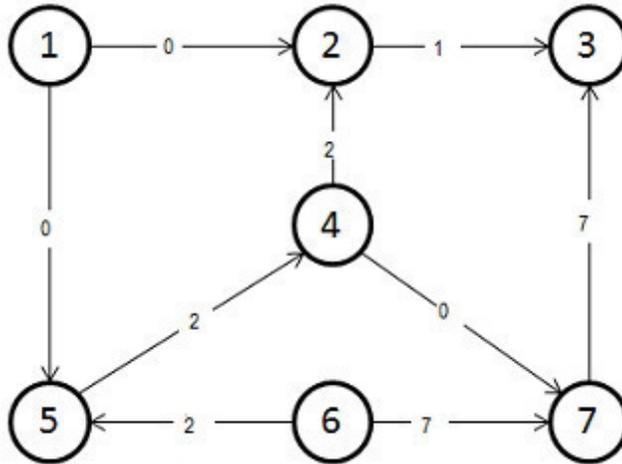


Figura 2.2.3

Paso 2.

$$A^+ = \emptyset$$

$$A^- = \{(1, 2)\};$$

Puesto que $A^- \neq \emptyset$, se tiene una red coloreada de la siguiente forma.

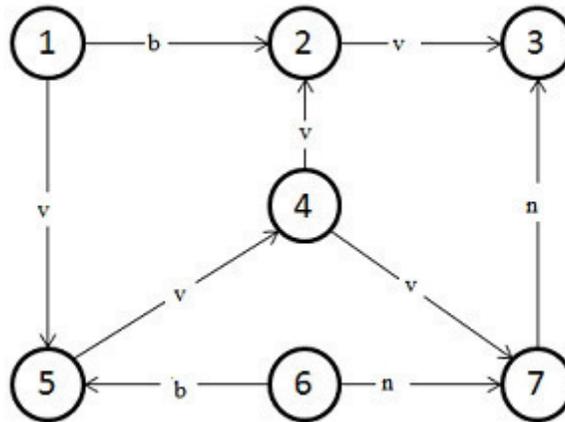


Figura 2.2.4

Paso 3. Aplicando el algoritmo de Minty al arco $(1,2)$, con la coloración dada se observa que existe un ciclo P , compatible con la coloración dada por: $1, (1,2), 2, (4,2), 4, (5,4), 5, (5,1)$; por lo que se calcula $\alpha = \min\{7, 2, 4, 1\} = 1$

El nuevo flujo será:

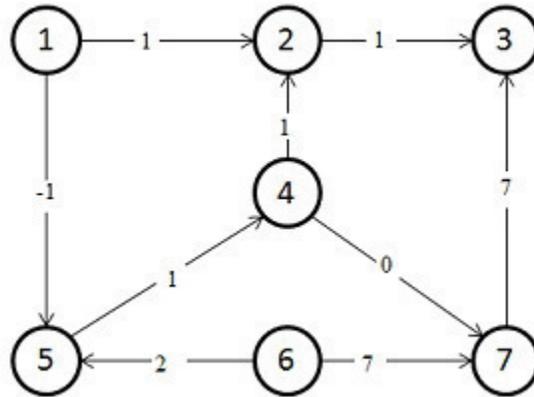


Figura 2.2.5

Iteración 2.

Paso 2. Note que;

$$A^+ = \emptyset$$

$$A^- = \{(1, 2)\}$$

Puesto que $A^- \neq \emptyset$, la red es coloreada de la siguiente forma.

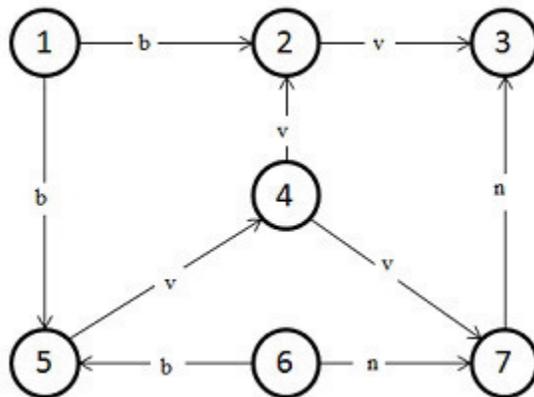


Figura 2.2.6

Paso 3. Aplicando el algoritmo de Minty al arco $(1,2)$, con la coloración dada se observa que dicho arco pertenece a un corte compatible con la coloración, y por tanto no existe una solución al problema dado.

Otro ejemplo se muestra en la siguiente gráfica:

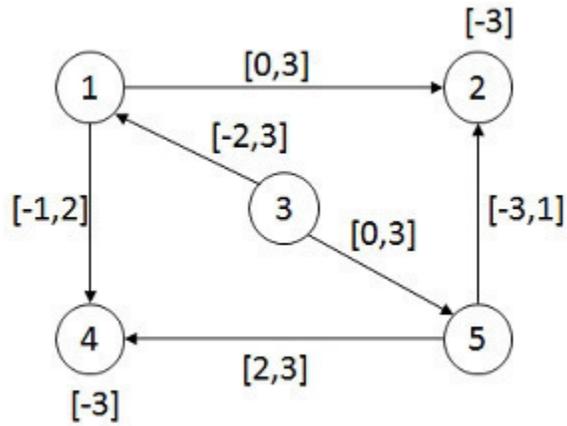


Figura 2.2.7

Iteración 1

Paso 1. Un flujo inicial factible respecto a las restricciones de oferta se representa en la siguiente red:

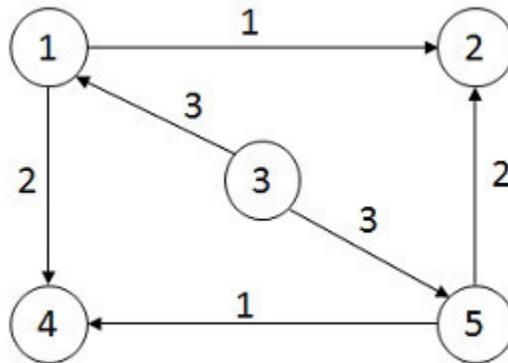


Figura 2.2.8

Paso 2.

$$A^+ = \{(5, 2)\}$$

$$A^- = \{(5, 4)\};$$

Se tiene una red coloreada de la siguiente forma.

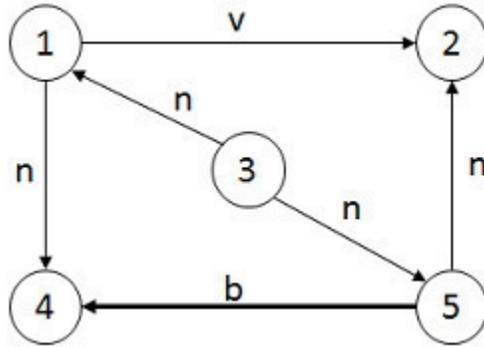


Figura 2.2.9

Paso 3. Aplicando el algoritmo de Minty al arco (5,4), con la coloración dada se observa que existe un ciclo P , compatible con la coloración dada por: $5, (5,4), 4, (1,4), 1, (1,2), 2, (2,5)$; por lo que se calcula $\alpha = \min\{3, 1\} = 1$

El nuevo flujo será:

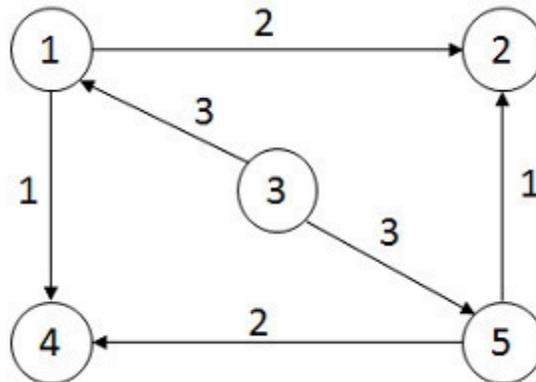


Figura 2.2.10

El nuevo flujo cumple con todas las restricciones.

Con base en los conceptos estudiados hasta el momento se define el problema de flujo máximo en una gráfica.

2.3 Problema de Flujo Máximo y Algoritmo de Ford Fulkerson

2.3.1 Problema de flujo máximo en una gráfica

Considérese una gráfica G con intervalos de capacidad, y sea $N^+, N^- \subset X$, tal que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Sea x un flujo que se conserva en todos los nodos de $\overline{N^+ \cup N^-}$; por el principio de divergencia se concluye que

$$\sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N^+} y(i) + \sum_{i \in N^-} y(i) = 0$$

de donde

$$y(N^+) = y(N^-)$$

Dicha cantidad recibe el nombre de flujo de N^+ a N^- .

Así, el problema del flujo máximo consiste en maximizar el flujo de N^+ a N^- sobre todos los flujos factibles respecto a las capacidades x tales que $y(i) = 0$, para todo $i \notin N^+ \cup N^-$.

Para resolver el problema de flujo máximo se utilizará el concepto de corte mínimo que a continuación será descrito.

2.3.2 Problema de corte mínimo

Antes de exponer el problema de corte mínimo se enunciará una propiedad que cumplen los flujos y cortes en una gráfica.

Proposición: Sea x un flujo que satisface las restricciones de capacidad en una gráfica y sea $Q:N^+ \downarrow N^-$ un corte que separa a N^+ de N^- ; entonces

$$\text{valor de flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^- \leq c^+(Q)$$

Esta afirmación se puede demostrar fácilmente ya que como Q es un corte que separa a N^+ de N^- entonces es de la forma $[S, \bar{S}]$, con $S \supset N^+$ y $S \cap N^- = \emptyset$; como x se conserva en todos los nodos de $\overline{N^+ \cup N^-}$, se tiene que $y(i) = 0$, para todo $i \notin N^+ \cup N^-$, así que $y(N^+) = y(S)$. Por otro lado, por el principio de divergencia, se cumple que $y(S) = e_Q \cdot x$ y esta cantidad, que es el flujo a través de Q , no puede ser mayor que $c^+(Q)$, de donde se concluye la afirmación.

Una vez demostrado lo anterior se enuncia ahora el problema del corte mínimo, que resulta ser el dual del problema del flujo máximo.

El problema del corte mínimo consiste en minimizar $C^+(Q)$ sobre todos los cortes $Q:N^+ \downarrow N^-$.

Dada la proposición anterior, se observa que el supremo en el problema de flujo máximo es menor o igual al mínimo en el problema del corte mínimo, de hecho, más adelante se estudiará que la igualdad se da en los óptimos.

Nótese también que cuando se habla del problema del flujo máximo se hace referencia al supremo, pues el valor del flujo a través de un arco no puede ser infinito y por tanto $y(N^+) = \sum_{i \in N^+} (\sum_{j \in A} e(i, j)x(j)) < \infty$; así que el máximo no siempre puede ser alcanzado. Por otro lado, el conjunto de cortes $Q:N^+ \downarrow N^-$ en una gráfica es finito; de tal forma que en este caso nos referimos a un mínimo y no a un ínfimo.

2.3.3 Teorema de flujo máximo-corte mínimo

Suponiendo que existe al menos un flujo x que satisface todas las restricciones de capacidad en una gráfica, entonces tendremos que el supremo en el problema de flujo máximo será igual al mínimo en el problema del corte mínimo.

Antes de dar una demostración del teorema como tal, es importante dar una definición generalizada de cadena aumentante. Se dice que una cadena $P: N^+ \rightarrow N^-$ es aumentante para el flujo x si:

$$x(j) < c^+(j) \text{ para todo } j \in P^+;$$

y

$$x(j) > c^-(j) \text{ para todo } j \in P^-$$

Debido a las características de una cadena aumentante P , puede garantizarse que existe un valor $\alpha > 0$ con el que se pueda construir un flujo de N^+ a N^- que sea mejor (de valor mayor) de la siguiente manera:

$$x'(j) = x(j) + \alpha e_p(j) = \begin{cases} x(j) + \alpha, & j \in P^+ \\ x(j) - \alpha, & j \in P^- \\ x(j), & j \notin P \end{cases}$$

En donde $x'(j)$ sigue cumpliendo con todas las restricciones del problema para todos los valores α tal que:

$$\begin{aligned} -x(j) + \alpha &\leq c^+(j) \text{ para todo } j \in P^+ \\ -x(j) - \alpha &\geq c^-(j) \text{ para todo } j \in P^- \end{aligned}$$

Al valor máximo de α se le llama capacidad incremental de la cadena aumentante P . Es importante señalar que si una cadena P tiene una capacidad incremental no finita, se dice que P tiene capacidad ilimitada. Es muy importante también señalar que si existe una cadena de capacidad ilimitada entonces el problema de flujo máximo y el problema de corte mínimo tendrán un valor de $+\infty$.

Una vez definida una cadena aumentante procederemos a dar la demostración del teorema.

Demostración:

Por construcción se tiene que dado que el supremo en el problema de flujo máximo es menor o igual al mínimo en el problema del corte mínimo, basta exhibir un flujo x y un corte Q tales que: flujo de x de N^+ a N^- sea igual a $c^+(Q)$.

Consideremos cualquier flujo x en G que se conserve en todos los nodos fuera de $N^+ \cup N^-$, y construimos un corte Q de la siguiente forma:

- (i) Sea $S = N^+$
(ii) Si $i \in N^+$, $j \sim (i, i') \in A$ y $x(j) < c^+(j)$ o $j \sim (i', i) \in A$ y $x(j) > c^-(j)$, se actualiza $S = N^+ \cup \{i\}$.

Se repite (ii) hasta que ya no sea posible agregar nodos a S , nótese que todos los nodos de S son aquellos a los que aún es posible enviar flujo, así que existen dos casos:

1) $S \cap N^- \neq \emptyset$.

Se observa que por la construcción, en este caso existe una cadena aumentante P de N^+ a N^- , sea α su capacidad incremental, se actualiza el flujo de la siguiente forma:

$$x(j) = \left\{ \begin{array}{ll} x(j) + \alpha, & \text{si } j \in P^+ \\ x(j) - \alpha, & \text{si } j \in P^- \\ x(j) & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Utilizando este nuevo flujo, se construye nuevamente S repitiendo los pasos (i) y (ii).

2) $S \cap N^- = \emptyset$.

En este caso $Q = [S, \bar{S}]$ es un corte de G . Por construcción $x(j) = c^+(j)$ para todo $j \in Q^+$, y $x(j) = c^-(j)$ para todo $j \in Q^-$; entonces, como $S \cap N^- = \emptyset$, se tiene que

$$\text{flujo de } N^+ \text{ a } N^- = y(N^+) = y(S) = e_Q \cdot x = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j) = c^+(Q).$$

Así que se concluye que x es flujo máximo y Q es el corte mínimo.

Esta demostración constructiva induce a un algoritmo para determinar el flujo máximo en una gráfica, el cual a su vez permite determinar la solución al problema del corte mínimo. Por otro lado, se estudiará más adelante que este procedimiento es finito bajo ciertas condiciones.

Algoritmo de flujo máximo

El algoritmo que es detallado a continuación busca mejorar el valor de flujo de N^+ a N^- mediante la determinación de cadenas aumentantes, y a su vez utiliza los resultados de coloración estudiados con anterioridad.

Es de suma importancia mencionar que el algoritmo usa una coloración determinada de la siguiente forma:

verde si	$c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco si	$x(j) = c^-(j), x(j) < c^+(j)$
negro si	$x(j) = c^+(j), x(j) > c^-(j)$
rojo si	$c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

De tal forma que una cadena P de N^+ a N^- es aumentante si y sólo si P es compatible con la coloración. Y además, Q es un corte mínimo, si y sólo si, es compatible con la coloración ya que satisface $x(j) = c^+(j)$ para todo $j \in Q^+$; y $x(j) = c^-(j)$ para todo $j \in Q^-$, y por tanto, se tiene que el flujo a través de $Q = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = c^+(Q)$.

También es importante recordar que si existe una cadena aumentante con capacidad ilimitada, el valor de x no es finito, y por tanto el supremo del problema de flujo máximo tiene un valor de $+\infty$.

Por tanto, para encontrar la solución básicamente se deben seguir los siguientes pasos:

1. Determinar una solución factible en la gráfica.
2. Con la solución factible colorear dicha gráfica de la forma antes mencionada.
3. Dada la coloración se buscan cadenas compatibles que se utilizan para construir flujos de valor cada vez mejor con cada una de estas.
4. Cuando ya no es posible determinar cadenas aumentantes se llegará a la construcción de un corte, que corresponde al corte mínimo, y por tanto se llega a la solución dual de flujo máximo.

En seguida se muestra el detalle del algoritmo.

2.3.4 Algoritmo de Ford y Fulkerson.

El propósito del algoritmo es determinar el flujo máximo de N^+ a N^- en una gráfica G , donde no existen cadenas de capacidad ilimitada y los pasos a seguir son:

1.- Determinar un flujo x que satisfaga todas las restricciones del problema.

2.- Colorear los arcos de R de la siguiente forma:

verde si	$c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco si	$x(j) = c^-(j), x(j) < c^+(j)$
negro si	$x(j) = c^+(j), x(j) > c^-(j)$
rojo si	$c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

3.- Utilizar el algoritmo de enrutamiento para determinar una cadena compatible con la coloración.

- Si se determina una cadena $P: N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración, calcular

$$\alpha = \min \left\{ \begin{array}{l} c^+(j) - x(j), \quad j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j), \quad j \in P^- \end{array} \right\}$$

Hacer $x = x + \alpha e_p$ y regresar a 2.

-Si se determina un corte $Q:N^+ \downarrow N^-$ compatible con la coloración; terminar con el flujo máximo x y el corte mínimo Q ya que este último satisface $x(j) = c^+(j)$ para todo $j \in Q^+$; y $x(j) = c^-(j)$ para todo $j \in Q^-$, y por tanto, se tiene que el

$$\text{flujo a través de } Q = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = c^+(Q).$$

Justificación de convergencia del algoritmo. Supóngase que las capacidades de los arcos $c^+(j)$, $c^-(j)$ y los valores de flujo inicial $x(j)$ son conmensurables; es decir estos números son múltiplos de cierta cantidad q . En particular, capacidades y flujos enteros son conmensurables con $q = 1$. De esta condición de conmensurabilidad se concluye que los números α y $x(j)$ calculados durante el algoritmo, son también múltiplos de la cantidad q de aquí que, en cada iteración, el flujo de N^+ a N^- se incrementa al menos en la cantidad positiva q y por tanto se realiza un número finito de iteraciones si no existen cadenas de capacidad ilimitada. Sin esta condición existe el peligro de que el algoritmo no converja, más aún podría ser incluso que sí converja pero que proporcione una solución errada.

Discriminación de arcos. La condición de conmensurabilidad puede eliminarse si el algoritmo de Ford y Fulkerson se utiliza con una pequeña modificación llamada criterio de discriminación de arcos, este cambio consiste en utilizar siempre que sea posible, arcos verdes durante la rutina de enrutamiento. Cuando se utilizan cadenas de arcos verdes, el flujo "mejorado" alcanzará la cota superior o la inferior para al menos un arco, el correspondiente al valor de α . De este modo para la siguiente iteración, al menos un arco se vuelve blanco o negro, mientras que los que tenían estos colores no se alteran. Con este argumento puede concluirse que después de un número finito de iteraciones, no existen cadenas aumentantes con todos los arcos verdes por lo que para continuar con el proceso de aumento de flujo (si esto es posible) deberá recurrirse a los arcos blanco o negros. En tal momento hay un conjunto S correspondiente a un corte Q que no contiene arcos verdes, es decir todo arco $j \in Q$ satisface $x(j) = c^+(j)$ o $x(j) = c^-(j)$ o ambas condiciones. De aquí que la suma

$$\sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = [\text{flujo a través de } Q] = \text{flujo de } N^+ \text{ a } N^-$$

tiene todos sus terminos iguales $\pm c^+(j)$ o a $\pm c^-(j)$. Puesto que hay un número finito de arcos, existe un número finito de sumas de esta forma y por tanto existe un número finito de valores posibles para el flujo de N^+ a N^- . Ninguno de estos valores se repite durante la aplicación del algoritmo, ya que el flujo se incrementa en cada iteración.

Puede concluirse entonces, que el algoritmo converge en cualquier caso si se utiliza el criterio de discriminación de arcos.

Para ejemplificar, considérese la siguiente gráfica con $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{s', i_5\}$:

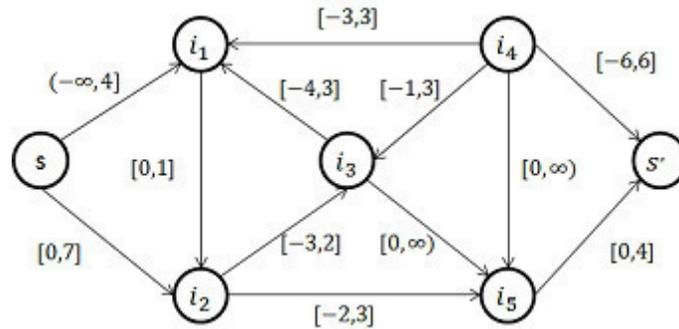


Figura 2.3.1

Iteración 1.

Paso 1. El flujo cero, es un flujo que satisface todas las restricciones del problema.

Paso 2. Con el flujo cero, se tiene una red coloreada de la siguiente forma.

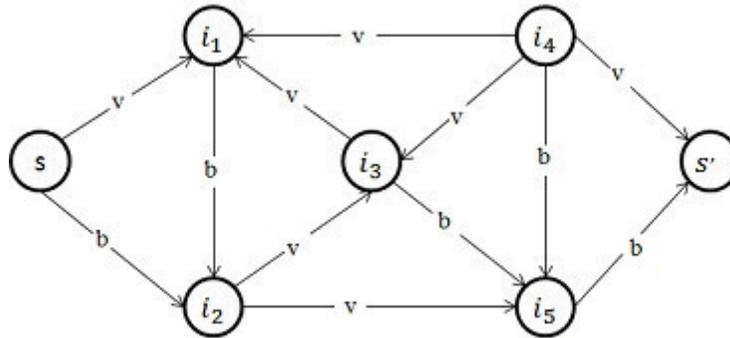


Figura 2.3.2

Paso 3. Al aplicar el algoritmo de enrutamiento se obtiene que la cadena s, i_2, i_5, s' es una cadena compatible con la coloración, por lo que se realiza el cálculo:

$$\alpha = \min\{7, 3, 4\} = 4$$

Así que el nuevo flujo de la red es:

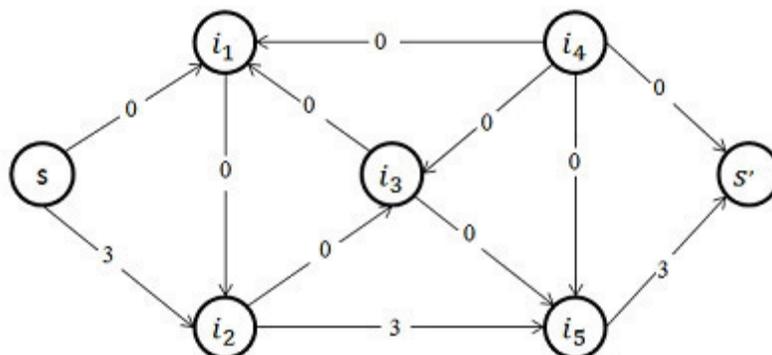


Figura 2.3.3

Iteración 2.

Paso 2. Con el flujo dado, la nueva coloración de la red está dada por:

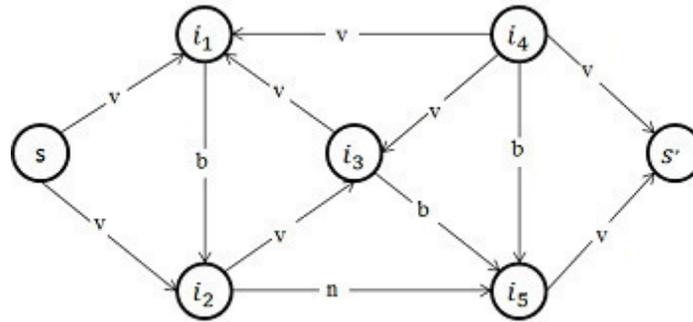


Figura 2.3.4

Paso 3. Al aplicar el algoritmo de enrutamiento, se tiene que una cadena compatible con la coloración es s, i_1, i_4, s' , así que se calcula:

$$\alpha = \min\{4, 3, 6\} = 3$$

El nuevo flujo de la red es:

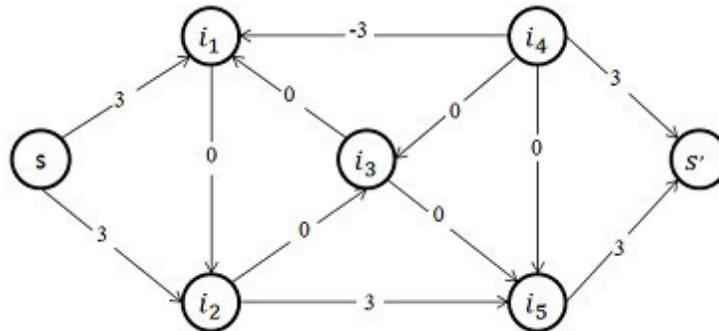


Figura 2.3.5

Iteración 3.

Paso 2. La coloración, con este nuevo flujo es:

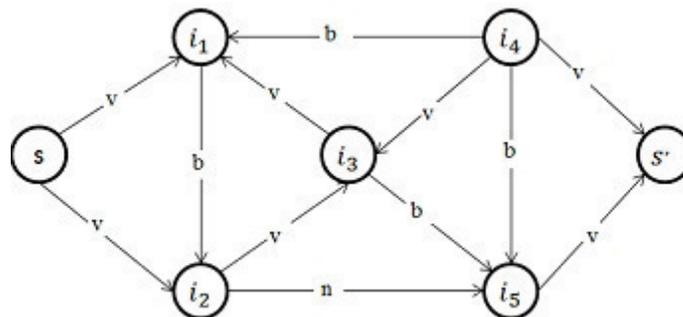


Figura 2.3.6

Paso 3. Al aplicar el algoritmo de enrutamiento se obtiene que $s, i_1, i_2, i_3, i_4, s'$ es una cadena compatible con la coloración, por lo que se calcula una vez más:

$$\alpha = \min\{1, 1, 2, 1, 3\} = 1$$

El nuevo flujo es:

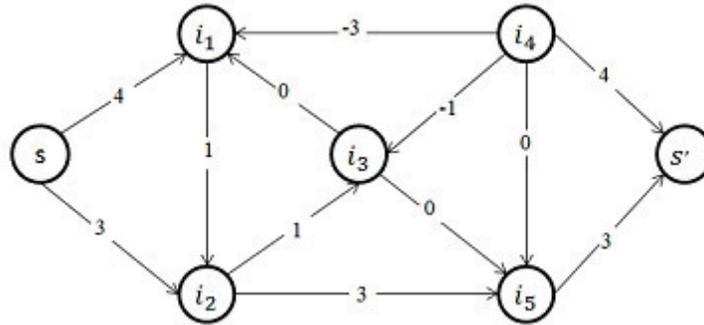


Figura 2.3.7

Iteración 4.

Paso 2. Con el flujo, la coloración esta dada como:

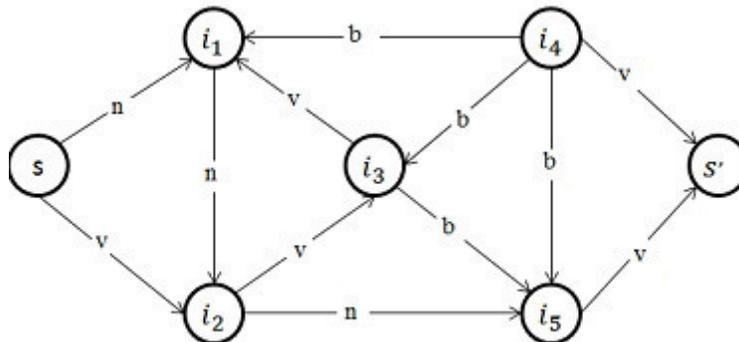


Figura 2.3.8

Paso 3. Aplicando el método de enrutamiento se encuentra la cadena compatible con la coloración es s, i_2, i_3, i_5, s' , calculando:

$$\alpha = \min\{4, 1, \infty, 1\} = 1$$

El flujo actualizado es:

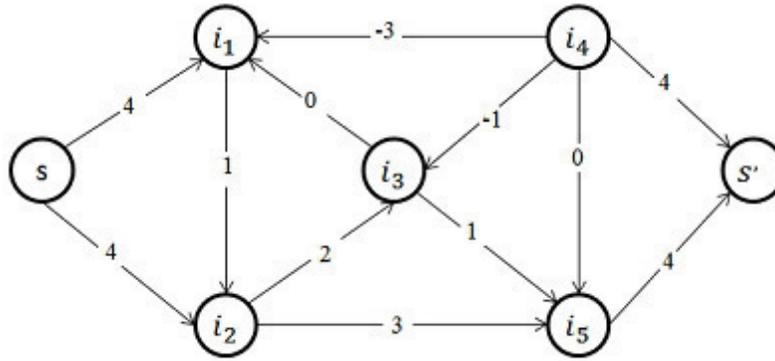


Figura 2.3.9

Iteración 5.

Paso 2. La coloración con el flujo dado es:

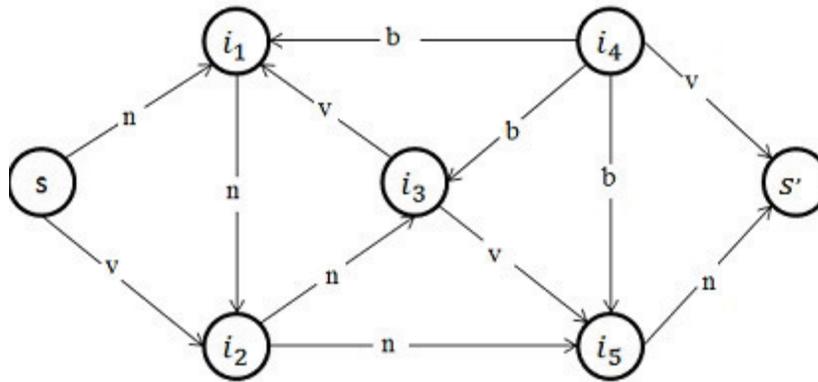


Figura 2.3.9

Paso 3. Con el algoritmo de enrutamiento se determinara el siguiente corte compatible con la coloración.

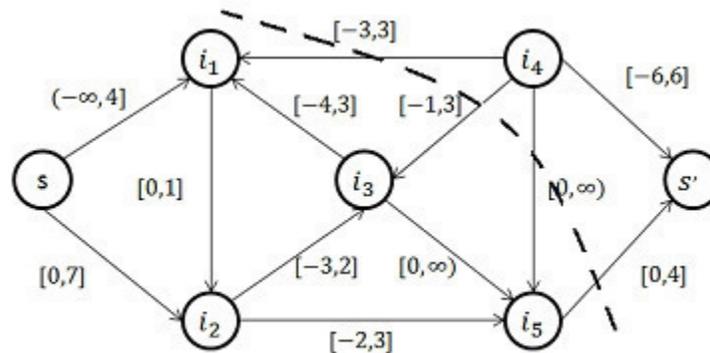


Figura 2.3.9

Así que el flujo máximo tiene valor de 8, y en el corte mínimo se cumple que $c^+(Q) = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = 4 - (-3 - 1 + 0) = 8$.

2.4 Algunas aplicaciones de flujos en una gráfica

2.4.1 Problema del corte mínimo y corte de cardinalidad mínima

El problema del corte de cardinalidad mínima consiste en determinar en una gráfica G un corte Q con el menor número de arcos, lo cual es posible reducirse a un problema de flujo máximo de la siguiente forma:

Dar un intervalo de capacidad a cada arco de $[-1,1]$, y resolver el problema de flujo máximo, que a su vez nos dará una solución al problema del corte mínimo, es decir, encontraremos el corte Q tal que $c^+(Q) = \sum_{j \in Q^+} c^+(j) + (-\sum_{j \in Q^-} c^-(j))$ es el mínimo entre las capacidades de todos los cortes posibles de la gráfica G . De esta forma tenemos que, dado el intervalo de capacidad que dimos a los arcos,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q^+} c^+(j) &= \text{Número de arcos en } Q^+ \\ -\sum_{j \in Q^-} c^-(j) &= \text{Número de arcos en } Q^- \end{aligned}$$

De aquí que el corte mínimo es, en realidad, el corte de cardinalidad mínima.

Capítulo 3: Potenciales y tensiones

El presente capítulo se enfoca en el análisis de los conceptos de potenciales y tensiones sobre una gráfica, cuyo desarrollo resulta paralelo al estudio realizado en el capítulo anterior. Se plantea una serie de restricciones sobre los arcos de una gráfica para llevar a cabo el planteamiento del problema de factibilidad de tensión o diferencial. Luego, se formula el problema de cadena mínima y se define su dual: el problema de tensión máxima.

De forma paralela a los problema de flujo máximo y corte mínimo que se relacionaban fuertemente por el teorema de flujo máximo-corte mínimo; los problemas de cadena mínima y tensión máxima se relacionan mediante el teorema de cadena mínima-tensión máxima.

3.1 Conceptos Generales

3.1.1 Potenciales y Tensiones

El potencial es una función u que asocia a cada nodo un real $u(i)$ llamado potencial de i , por su parte, la tensión o diferencial, se define a través de un arco $j \sim (i, i')$ como la diferencia de potenciales:

$$v(j) = u(i') - u(i) = - \sum_{i \in X} u(i) e(i, j)$$

Un ejemplo de potenciales se observa como sigue:

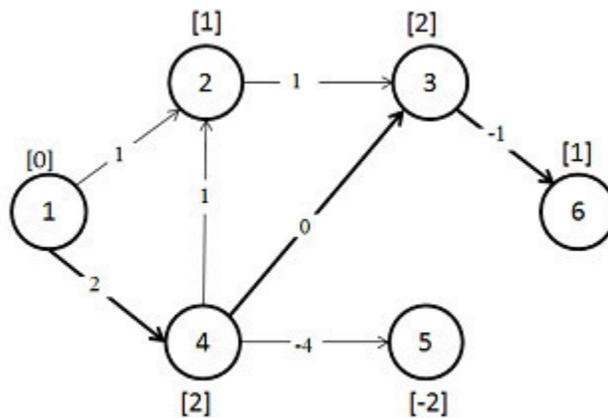


Figura 3.1.1

Para el arco (4,5) se tiene que:

$$v(5,4) = u(5) - u(4) = -2 - 2 = -4$$

Es decir, $v = \Delta u$, donde $\Delta u = -uE$ donde E es la matriz de incidencia de G y v es llamado el diferencial o tensión de G .

Otro concepto relacionado con diferenciales es el despliegue del diferencial v relativo a una cadena P , que se define como la suma de los términos $\pm v(j)$ sobre los arcos de la cadena P , donde el signo negativo es dado a los arcos que son recorridos negativamente y los signos positivos a aquellos que son recorridos de forma positiva:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) = v \cdot e_p.$$

Se debe notar que esta definición correspondería a una cadena simple. En caso de que P no sea simple, P puede ser descompuesta en varias cadenas simples, cada una de las cuales, tendrá una expresión de la forma anterior. Así que, el despliegue de v relativo a P será el resultado de la suma de dichas expresiones.

Un ejemplo del concepto de despliegue se puede ver en la siguiente gráfica, en donde el número asociado a los arcos representa su diferencial, y el número asociado a los nodos representa su potencial.

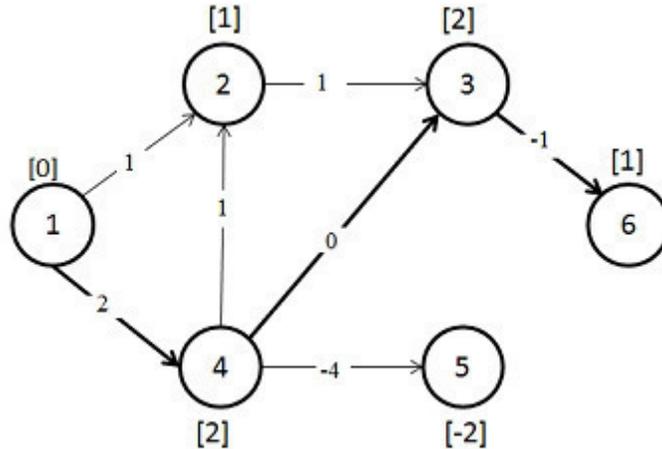


Figura 3.1.2

Para la cadena $P : 1, (1, 4), 4, (4, 3), 3, (3, 6), 6$ el despliegue relativo es:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = 2 + 0 + (-1) = 1.$$

Un resultado de suma importancia que se puede observar en la gráfica anterior, es que el despliegue de v relativo a P tiene el mismo valor que la resta del potencial del nodo 6 menos el potencial del nodo 1; es decir, dicho despliegue corresponde a la resta de los potenciales de los nodos final e inicial respectivamente. En teoría de redes, a este resultado se le conoce como la regla de integración.

3.1.2 Regla de integración

La regla de integración total muestra que:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = u(i') - u(i)$$

en donde;

$$v = \Delta u \text{ y } P : i \longrightarrow i'.$$

Esta regla es establecida simplemente por la observación de que el término $\pm(v_j)$ corresponde a la suma $\pm(v_j) = u(i_{k+1}) - u(i_k)$, del j -ésimo arco de P , el cual une al nodo i_{k+1} con su predecesor i_k . De tal forma, al sumarse los (v_j) se van eliminando los términos intermedios y al final el resultado es $u(i') - u(i)$.

Una consecuencia de la regla en la integración es que el despliegue de v relativo a P sólo depende de sus nodos inicial y final, y no de sus nodos intermedios. Y por tanto, un corolario a dicha regla, es que P es un ciclo, el despliegue de v relativo a P será cero.

Es importante mencionar que la regla de integración puede ser usada para construir un potencial u para una tensión v tal que $\Delta u = v$, si es que existe. Supóngase primero que la gráfica $G [X, A]$ es conexa, y sea s un nodo en X . Si en efecto, hay un potencial u con v como su diferencial, su valor para todos los nodos i distintos de s está determinado por:

$$u(i) = u(s) + [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P]$$

donde P puede ser cualquier cadena de s a i . Se debe hacer énfasis en que $u(s)$ puede tomar cualquier valor, ya que si se suma una constante a una función de potencial, no afecta su diferencial. Con base en lo anterior es posible establecer el siguiente procedimiento general; durante este procedimiento se verificará si v es un diferencial por lo cual no es necesario saber esto de antemano.

Sea θ cualquier enrutamiento con base en s y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Defínase:

$$u(i) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = s \\ \alpha + [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_i], & \text{si } i \neq s \end{cases}$$

donde P es la θ cadena de s a i . Si v es un diferencial de la función u , construida de esta manera, será el único potencial que satisfaga $\Delta u = v$ y $u(s) = \alpha$. En caso contrario se tendrá $(\Delta u)(j) \neq v(j)$, para algún arco j no utilizado por el θ enrutamiento.

Considérese la siguiente gráfica como ejemplo:

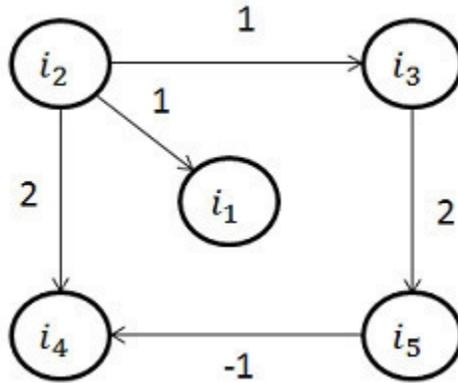


Figura 3.1.3

Sea $s = i_1$, un enrutamiento con base en s es:

$$\theta(i_2) = (i_2, i_1), \theta(i_4) = (i_2, i_4), \theta(i_3) = (i_2, i_3), \theta(i_5) = (i_3, i_5)$$

que define las cadenas $P_k : s \rightarrow i_k$ siguientes:

$$P_2 : i_1 \leftarrow i_2$$

$$P_3 : i_1 \leftarrow i_2 \rightarrow i_3$$

$$P_4 : i_1 \leftarrow i_2 \rightarrow i_4$$

$$P_5 : i_1 \leftarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow i_5$$

Se calcula el despliegue :

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_2] = -1$$

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_3] = -1 + 1 = 0$$

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_4] = -1 + 2 = 1$$

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P_5] = -1 + 1 + 2 = 2$$

Sea $\alpha = 2$ se obtiene el siguiente potencial:

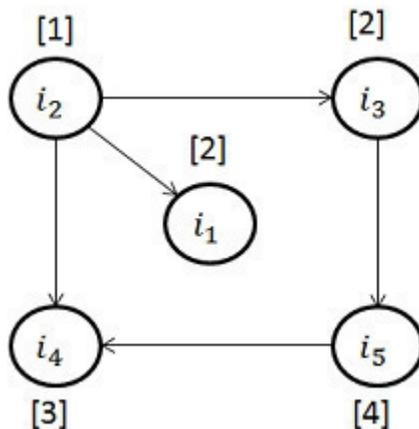


Figura 3.1.4

Una pregunta natural a los conceptos mencionados es : ¿Qué pasa si la tensión asociada a cada arco debe satisfacer condiciones?. De manera análoga al problema de distribución factible, vista en el capítulo anterior, la siguiente sección de este capítulo analiza un problema de factibilidad de diferencial, en donde el diferencial de los arcos debe satisfacer ciertas restricciones, denominadas de generación.

3.2 Problema del Diferencial Factible y Algoritmo de Rectificación de Tensión

3.2 .1 Problema de diferencial factible

En una gráfica $G[X, A]$ con intervalos de generación $D(j) = [d^-(j), d^+(j)]$, el problema de diferencial factible consiste en determinar un potencial u cuyo diferencial v satisfaga $v(j) \in D(j)$ para todo $j \in A$.

También se definen la generación superior e inferior de una cadena simple como:

$$\begin{aligned} d^+(P) &= \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) \\ d^-(P) &= \sum_{j \in P^+} d^-(j) - \sum_{j \in P^-} d^+(j) \end{aligned}$$

A continuación, se estudiarán las condiciones para garantizar la existencia de una solución al problema de diferencial factible. Cabe decir, que de forma paralela al problema de flujo factible, la demostración se hace de forma constructiva y a su vez se construye un algoritmo de solución.

3.2.2 Teorema de diferencial factible

El problema de diferencial factible tiene solución si y sólo si $d^+(P) \geq 0$ para todo ciclo elemental P .

Demostración.

Sea v un diferencial factible, para cualquier v factible se cumple que $d^-(P) \leq$ [despliegue de v relativo a P] $\leq d^+(P)$, donde P es cualquier cadena.

Si P es un ciclo, su despliegue será cero, lo cual implica que $d^-(P) \leq 0 \leq d^+(P)$, de tal modo que se cumple que $d^+(P) \geq 0$. También se cumple $d^-(P) \leq 0$, pues si consideramos P' como el reverso (es decir, la cadena que se forma en con los arcos de P , en sentido inverso) de P se tiene que $d^-(P) = d^+(P')$.

Por otro lado, se debe demostrar que si $d^+(P) \geq 0$ para todo ciclo elemental P , entonces existe solución al problema de diferencial factible. La demostración se hace de forma constructiva y constituye un algoritmo que da solución al problema, y que además detecta, en

su caso, la no existencia de la solución. El algoritmo se estudiará en seguida y se denomina Algoritmo de rectificación de tensión.

3.2.3 Algoritmo de rectificación de tensión

El objetivo es determinar un potencial tal que $v(j) = (\Delta u)(j) \in D(j)$ para todo $j \in A$ y los pasos a seguir son:

1. Sea u cualquier potencial. Sea $v = \Delta u$.

2. Sean

$$A^+ = \{j \in A \mid v(j) < d^-(j)\}, \quad A^- = \{j \in A \mid v(j) > d^+(j)\}$$

-Si $A^+ = \emptyset = A^-$, terminar. El potencial u resuelve el problema.

- En otro caso, seleccionar $\bar{j} \in A^+ \cup A^-$ e ir al paso 3.

3. Colorear los arcos de R de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{verde si} & d^-(j) = v(j) = d^+(j) \\ \text{blanco si} & v(j) > d^-(j), v(j) \geq d^+(j) \\ \text{negro si} & v(j) \leq d^-(j), v(j) < d^+(j) \\ \text{rojo si} & d^-(j) < v(j) < d^+(j) \end{array}$$

Aplicar el lema de Minty para \bar{j} .

-Si se determina un ciclo P compatible con la coloración que contenga a \bar{j} terminar. En este caso $d^+(P) < 0$ y por lo tanto no existe solución para el problema.

-Si se determina un corte $Q[S, \bar{S}]$ compatible con la coloración que contenga a \bar{j} , calcular:

$$\alpha = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} d^+(j) - v(j), j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j), j \in Q^- \\ \bar{\alpha} \end{array} \right\}$$

en donde

$$\bar{\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} d^-(\bar{j}) - v(\bar{j}), \text{ si } \bar{j} \in A^+ \\ v(\bar{j}) - d^+(\bar{j}), \text{ si } \bar{j} \in A^- \end{array} \right\}$$

Actualizar $u = u + \alpha e_{\bar{s}}$ e ir a 2.

Justificación del algoritmo

Supóngase que en el paso 3, se obtiene un ciclo P compatible con la coloración. Sea $d_0^+(j) = d^+(j) - v(j)$, y sea $d_0^-(j) = d^-(j) - v(j)$ para todo arco de P . Se afirma que

$d_0^+(P) < 0$, pues en un ciclo compatible con la coloración los arcos pueden ser verdes, blancos o negros, de tal forma que:

-Si j es verde, entonces

$$d_0^+(j) = d^+(j) - v(j) = 0 = d^-(j) - v(j) = d_0^-(j),$$

pues se definió la coloración como verde si $d^-(j) = v(j) = d^+(j)$.

-Si j es blanco, se tiene que $j \in P^+$, y por como está definida la coloración, $v(j) \geq d^+(j)$, lo que implica que $d_0^+(j) = d^+(j) - v(j) \leq 0$.

- Si j es negro, se tiene que $j \in P^-$, y por la coloración, se tiene que $d^-(j) \geq v(j)$, lo que implica que $d_0^-(j) = d^-(j) - v(j) \geq 0$.

Supóngase ahora que P contiene al menos un arco $\bar{j} \in A^+ \cup A^-$, y sin pérdida de generalidad supóngase que es blanco. y se cumple que $d_0^+ < 0$, todos los demás arcos son verdes o negros, así que $\sum_{j \in P^+} d_0^+(j) < 0$ y $\sum_{j \in P^-} d_0^-(j) \geq 0$, por lo que se cumple:

$$d_0^+(P) = \sum_{j \in P^+} d_0^+(j) - \sum_{j \in P^-} d_0^-(j) < 0$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} d_0^+(P) &= \sum_{j \in P^+} d_0^+(j) - \sum_{j \in P^-} d_0^-(j) \\ &= \sum_{j \in P^+} d^+(j) - v(j) - \left(\sum_{j \in P^-} d^-(j) - v(j) \right) \\ &= \sum_{j \in P^+} d^+(j) - v(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) + v(j) \\ &= \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) \\ &= d^+(P) \end{aligned}$$

Así que, $d^+(P) < 0$.

Supóngase ahora que en el paso 3 se obtiene un corte Q compatible con la coloración. Dado que $d^-(j) < \infty$, se debe ver ahora qué sucede con el cálculo de α para garantizar un potencial que se acerque más a las restricciones.

Los arcos rojos siempre están en un corte, y su diferencial siempre está dentro del intervalo de generación, por lo que el cálculo de α siempre será positivo para dichos arcos.

-Si $j \in Q^+$, claramente j es un arco negro, y por tanto $v(j) < d^+(j)$, lo que implica que $\alpha = d^+(j) - v(j) > 0$.

-Si $j \in Q^-$, claramente j es un arco blanco y por tanto se tiene que $d^-(j) < v(j)$, lo que implica que $\alpha = v(j) - d^-(j) > 0$.

Se debe analizar ahora qué sucede con los arcos en $A^+ \cup A^-$.

-Si $j \in A^+$ sucede que $v(j) < d^-(j)$, así que $\bar{\alpha} = d^-(j) - v(j) > 0$.

-Si $j \in A^-$ sucede que $v(j) > d^+(j)$, así que $\bar{\alpha} = v(j) - d^+(j) > 0$.

De lo cual se concluye que al actualizar los potenciales de los nodos fuera del corte, la tensión de los arcos de Q se acerca en α unidades más a sus respectivos intervalos de generación $[d^-(j), d^+(j)]$.

La siguiente gráfica se utiliza para ejemplificar el funcionamiento del algoritmo, iniciando con un potencial inicial de cero en todos los nodos.

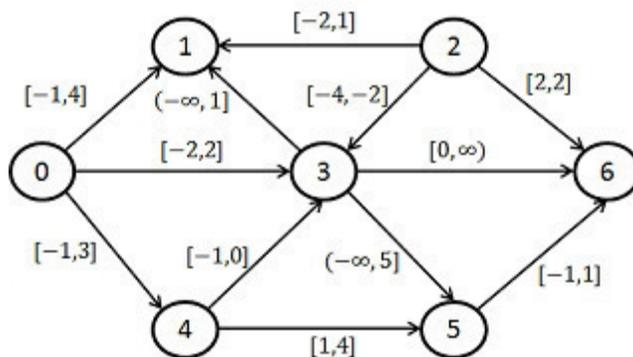


Figura 3.2.1

Iteración 1.

Paso 1. Comenzar con un potencial igual a cero en todos los nodos.

Paso 2. Vea que

$$A^+ = \{(2, 6), (4, 5)\} \text{ y } A^- = \{(2, 3)\}$$

Como son distintos del vacío seleccionamos un arco.

Paso 3. Se escoge el arco $j = (2, 3)$, y se aplica el algoritmo de Minty a la siguiente gráfica coloreada.

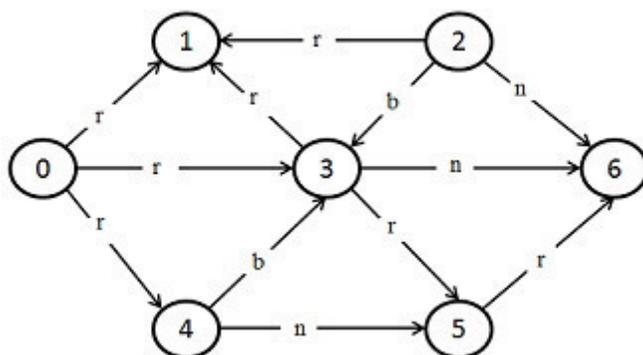


Figura 3.2.2

Aplicando el algoritmo de Minty se ve que el arco $(2, 3)$ pertenece a un corte compatible con la coloración tal que

$$Q = \{(3, 1), (3, 5), (3, 6), (0, 3), (2, 3), (4, 3)\}, \text{ así que } \alpha = \min\{1, \infty, 5, 2, 2, 1\} = 1.$$

Actualizando el potencial y los respectivos diferenciales se obtiene la gráfica que sigue:

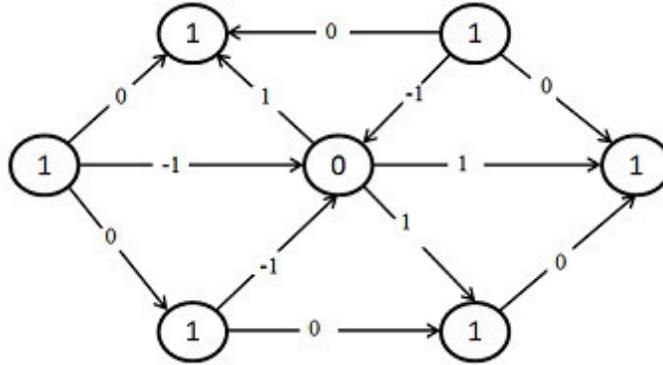


Figura 3.2.3

Iteración 2.

Paso 2. Vea que,

$$A^+ = \{(2, 6), (5, 6)\} \text{ y } A^- = \{(2, 3)\}$$

Paso 3. Se elige nuevamente el arco $j = (2, 3)$, y se aplica el algoritmo de Minty a la siguiente gráfica coloreada;

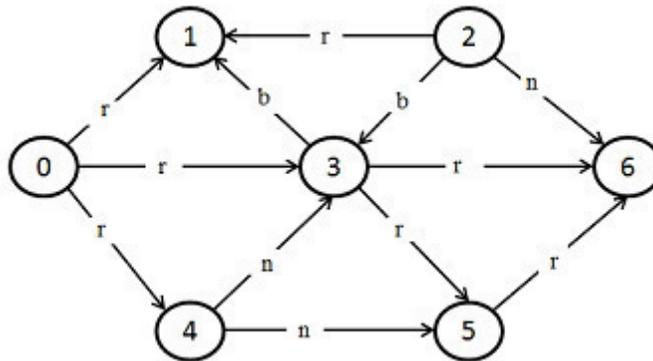


Figura 3.2.4

Aplicando el algoritmo de Minty se observa que el arco $(2, 3)$ pertenece a un corte compatible con la coloración tal que

$$Q = \{(0, 1), (0, 3), (0, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 6), (3, 5), (4, 5)\}, \text{ con } S = \{1, 3, 4\}, \text{ así que } \alpha = \min\{1, 1, \infty, 4, 4, 1, 1, 2\} = 1.$$

La gráfica actualizada, con los respectivos potenciales y diferenciales es,

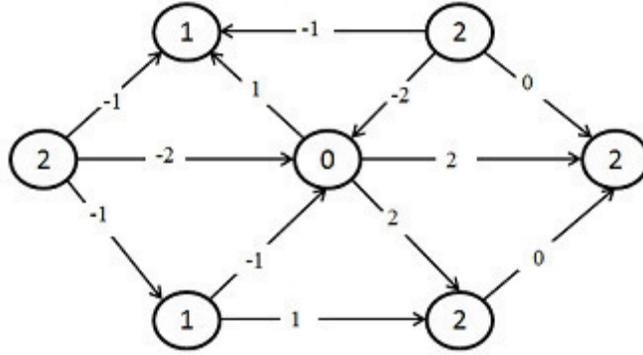


Figura 3.2.5

Iteración 3.

Paso 2. Vea que,

$$A^+ = \{(2, 6)\} \text{ y } A^- = \emptyset$$

Paso 3. Tomando el arco $j = (2, 6)$, y aplicando el algoritmo de Minty a la siguiente gráfica coloreada;

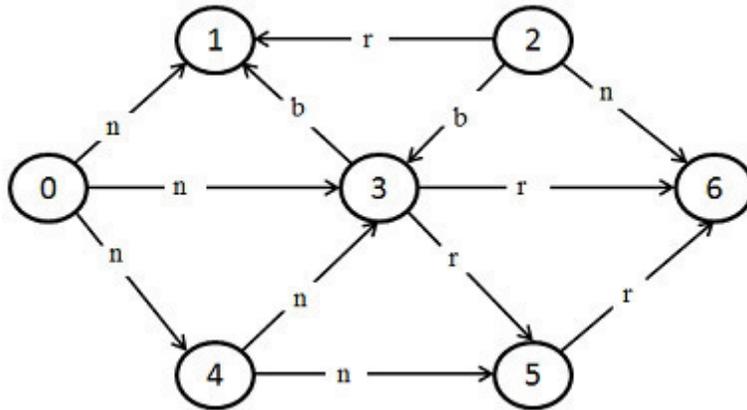


Figura 3.2.6

Aplicando el algoritmo de Minty se ve que el arco $(2, 6)$ pertenece a un corte compatible con la coloración tal que $Q = \{(2, 6), (3, 6), (3, 5), (4, 5)\}$, con $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donde $\alpha = \min\{2, \infty, 3, 3\} = 2$.

La gráfica actualizada, con los respectivos potenciales y diferenciales es,

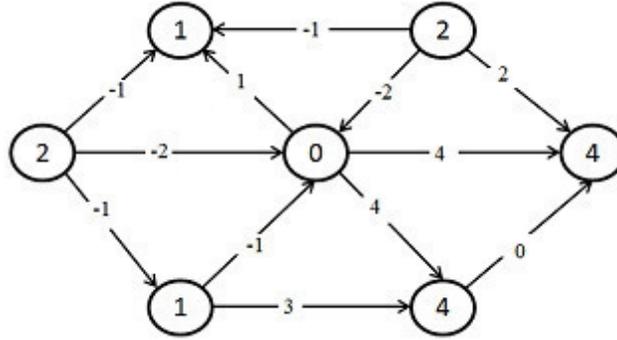


Figura 3.2.7

Iteración 4.

Paso 2. Vea que,

$$A^+ = \{\emptyset\} \text{ y } A^- = \{\emptyset\}$$

Por lo tanto, se obtiene que el potencial en la red anterior resuelve el problema.

3.3 Problema de la Cadena Mínima

3.3.1 Problema de la cadena mínima

La pareja de números $d^+(j)$ y $d^-(j)$ en algunos casos, no necesariamente están relacionados con factibilidad de tensiones. Si por ejemplo, $d^+(j)$ representara el costo de recorrer positivamente el arco j y $d^-(j)$, el costo de recorrerlo en sentido contrario, entonces $d^+(P)$ sería el costo de recorrer la cadena P , mientras $d^-(P)$ representaría el costo por recorrer su reverso. Con dicha interpretación, es fácil ver de qué trata el problema de la cadena mínima.

Sean $N^+, N^- \subset X$ no vacíos en la gráfica G y $N^+ \cap N^- = \emptyset$. El problema consiste en:

$$\text{Min}\{d^+(P) \mid P : N^+ \rightarrow N^-\}.$$

sobre todas las cademas $P : N^+ \rightarrow N^-$.

Si no existen cadenas $P : N^+ \rightarrow N^-$, se hace la convención de $\text{Min} = \infty$, pues es posible agregar arcos ficticios j a la red, con $d^+(j) = \infty$ y $d^-(j) = -\infty$, para hacer la gráfica conexa sin afectar nada más.

Por otro lado, obsérvese que $d^+(P) < \infty$ si y sólo si P es compatible con cierta coloración en la gráfica, llamada coloración asociada con las generaciones:

verde si	$d^+(j) < \infty$ y $d^-(j) > -\infty$
blanco si	$d^+(j) < \infty$ y $d^-(j) = -\infty$
negro si	$d^+(j) = \infty$ y $d^-(j) > -\infty$
rojo si	$d^+(j) = \infty$ y $d^-(j) = -\infty$

Así que el problema de la cadena mínima es equivalente a minimizar $d^+(P)$ sobre todas las cadenas P compatibles con la coloración.

Análogo al problema flujo máximo-corte mínimo, el problema de la cadena mínima puede ser resuelto mediante su problema dual, el problema de tensión máxima.

Sea u un potencial que es constante en el conjunto N^+ y constante en el conjunto N^- , con N^+ y N^- conjuntos ajenos, no vacíos en G . Entonces se cumple que $u(i') - u(i)$ vale lo mismo para todo $i \in N^+$ y para todo $i' \in N^-$. Esta diferencia se conoce como despliegue de u de N^+ a N^- . También se concluye que :

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = u(i') - u(i) = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$$

Para toda cadena $P : N^+ \rightarrow N^-$.

3.3.2 Problema de tensión máxima

El problema de tensión máxima consiste en maximizar el despliegue de u de N^+ a N^- sobre todos los potenciales u constantes en N^+ , constantes en N^- tales que $v = \Delta u$ es factible con respecto a las generaciones.

Al igual que el problema de flujo máximo, existe un resultado que relaciona los problemas de tensión máxima y cadena mínima, pero es importante definir el concepto de corte de generación ilimitada.

Un corte de generación ilimitada se define como un corte $Q: N^+ \downarrow N^-$ tal que $d^+(j) = +\infty$ para todo arco $j \in Q^+$, y $d^-(j) = -\infty$ para todo arco $j \in Q^-$. Nótese que este tipo de corte es compatible con la coloración asociada con las generaciones.

3.3.3 Teorema de tensión máxima-cadena mínima (Minty)

Supóngase que existe al menos un potencial que satisface las restricciones del problema de máxima tensión. Entonces:

$$\begin{aligned} &[\text{Supremo en el problema de tensión máxima}] = \\ &[\text{Mínimo en el problema de cadena mínima}] \end{aligned}$$

De forma análoga al problema de flujo máximo, cuando se habla del problema de tensión máxima se hace referencia al supremo, pues la tensión de un arco no puede ser infinita y por tanto $[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] < \infty$; así que el máximo no siempre puede ser alcanzado.

Para la demostración de este teorema, basta observar que para cualquier potencial u que satisfaga las restricciones de tensión máxima y P cualquier cadena de N^+ a N^- se tiene que:

$$[\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{despliegue de } \Delta u \text{ relativo a } P] \leq d^+(P)$$

Basta probar que existe una cadena P y un potencial u que satisfacen la igualdad. Lo cual se hace de forma constructiva y por tanto la demostración constituye un algoritmo de solución para ambos problemas, el cual será descrito a continuación.

3.3.4 Algoritmo de la cadena mínima

Cabe resaltar una vez más el paralelismo entre los problemas de tensión máxima - cadena mínima y los de flujo máximo - corte mínimo. Para iniciar el algoritmo se requiere un potencial que satisfaga las condiciones impuestas para el problema de máxima tensión tal que su diferencial sea factible respecto a las generaciones. Durante el algoritmo se construye un diferencial factible con respecto a las generaciones correspondientes a un potencial u y un θ - *enrutamiento* con base N^+ tales que:

$$d^+(P) = [\text{despliegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-]$$

donde P es la θ cadena de N^+ a N^- . De aquí se concluirá la optimalidad de estas soluciones para sus respectivos problemas.

Algoritmo de la Cadena Mínima

El objetivo es determinar una cadena P que minimice $d^+(P)$ y los pasos a seguir son:

Paso 1: Sea u un potencial, constante en N^+ y en N^- , tal que $v = \Delta u$ es factible con respecto a generaciones.

Paso 2: Colorear los arcos de G de la siguiente manera:

verde si	$d^-(j) = v(j) = d^+(j)$
blanco si	$d^-(j) < v(j) = d^+(j)$
negro si	$d^-(j) = v(j) < d^+(j)$
rojo si	$d^-(j) < v(j) < d^+(j)$

Paso 3: Aplíquese el teorema de la red coloreada.

-Si se detecta un corte $Q : N^+ \downarrow N^-$, $Q[S, \bar{S}]$, compatible con la coloración, hacer:

$$\alpha = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} d^+(j) - v(j), \quad j \in Q^+ \\ v(j) - d^-(j), \quad j \in Q^- \end{array} \right\}$$

Si $\alpha < \infty$, hacer $u = u + \alpha e_{\bar{S}}$ e ir a 2.

En otro caso terminar. Como Q es un corte de generación ilimitada se tiene $\text{Min} = -\infty$.

-Si se detecta una cadena $P : N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración terminar. Esta cadena es la mínima y u resuelve el problema de tensión máxima.

La justificación del algoritmo es la siguiente:

Veáse que si se termina con una cadena P compatible con la coloración se tiene que todo $j \in P^+$ es verde o blanco y todo $j \in P^-$ es verde o negro, entonces, dada la definición de

color, todo $j \in P^+$ cumple que $d^+(j) = v(j)$ y todo $j \in P^-$ cumple que $d^-(j) = v(j)$. Por lo tanto:

$$[\text{Despilegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{despliegue de } P \text{ relativo a } v = \Delta u] = \sum_{j \in P^+} v(j) - \sum_{j \in P^-} v(j) = \sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) = d^+(P).$$

Si se detecta un corte Q el nuevo potencial $u + \alpha e_{\bar{Q}}$ cumple:

$$[\text{Despilegue de } u + \alpha e_{\bar{Q}} \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{Despilegue de } u \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \alpha$$

por lo que el nuevo potencial es mejor que el anterior.

Por otro lado, mientras α sea finita, en cada iteración la tensión de por lo menos un arco de Q^+ alcanza su cota superior, y por lo tanto recibirá el color blanco en la siguiente iteración o un arco de Q^- alcanza su cota inferior, y por tanto recibirá el color negro en la siguiente iteración.

Este arco pertenecerá entonces al θ -enrutamiento construido en la siguiente iteración. Se tiene entonces que con el algoritmo de enrutamiento se termina a lo más en $|X| - |N^+ \cup N^-| + 1$ iteraciones, hasta encontrar una cadena compatible con la coloración y por lo tanto se ha determinado la cadena mínima.

Para ejemplificar el algoritmo, se resuelven los problemas de cadena mínima y tensión máxima en la siguiente gráfica en donde $N^+ = \{0\}$ y $N^- = \{6\}$.

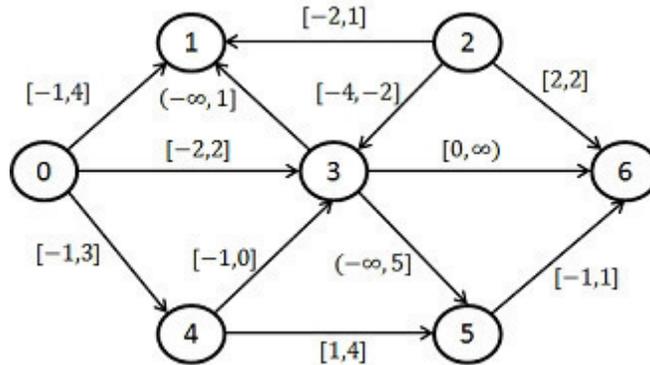


Figura 3.3.1

Iteración 1.

Paso 1. Anteriormente se demostró que un diferencial factible para la gráfica, con los respectivos potenciales y diferenciales está dada por:

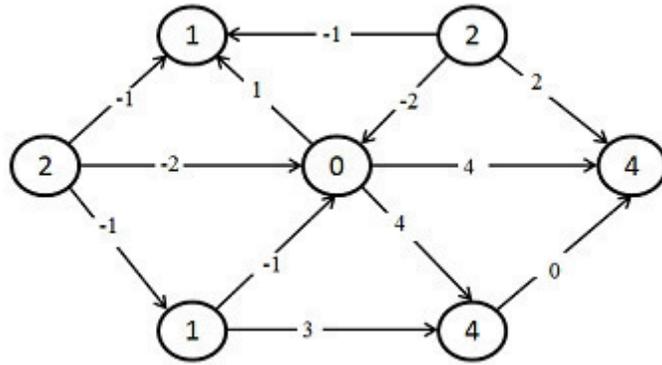


Figura 3.3.2

Paso 2. La gráfica coloreada será entonces:

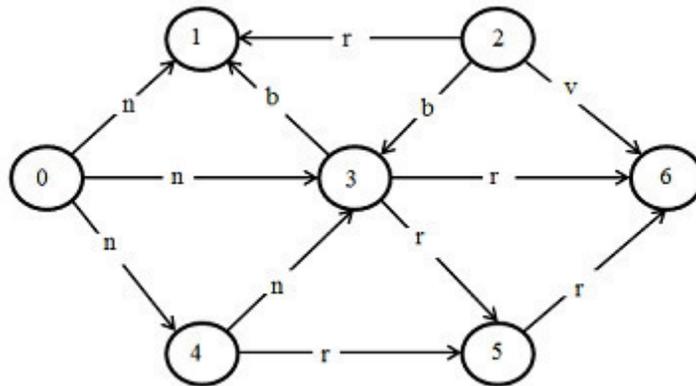


Figura 3.3.4

Paso 3. Aplicando el teorema de la gráfica coloreada se encuentra un corte $Q : N^+ \downarrow N^-$, donde $Q^+ = \{(0, 1), (0, 3), (0, 4)\}$ y $Q^- = \{\emptyset\}$. Tenemos entonces $\alpha = \text{Min}\{5, 4, 4\} = 4$ con $S = \{0\}$.

Actualizando el potencial y los respectivos diferenciales se obtiene la gráfica que sigue:

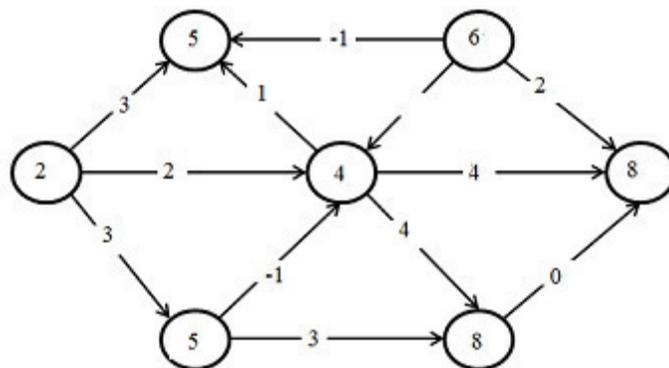


Figura 3.3.5

Iteración 2.

Paso 2. Con el nuevo potencial, se obtiene la siguiente gráfica coloreada:

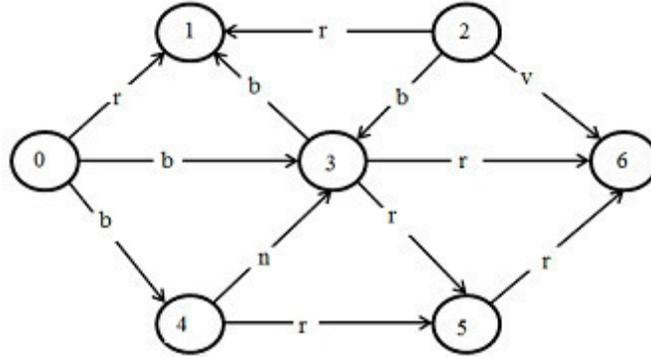


Figura 3.3.6

Paso 3. Al aplicar el teorema de la red coloreada, existe un corte dado por $Q^+ = \{(3, 6), (3, 5), (4, 5)\}$ y $Q^- = \{(2, 1), (2, 3)\}$; entonces $\alpha = \text{Min}\{\infty, 1, 1, 1, 2\} = 1$, donde $S = \{0, 1, 3, 4\}$.

La gráfica actualizada es:

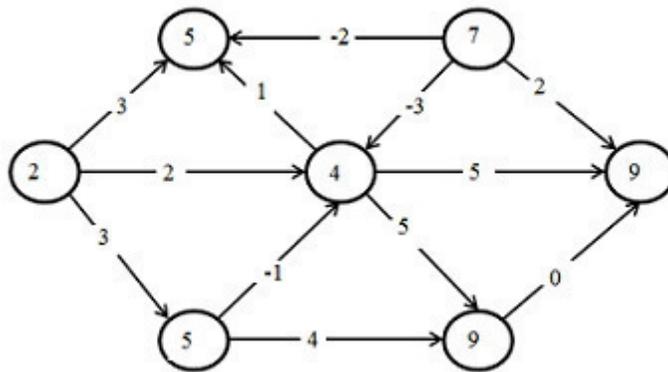


Figura 3.3.7

Iteración 3.

Paso 2. Con el potencial anterior se tiene la siguiente gráfica coloreada:

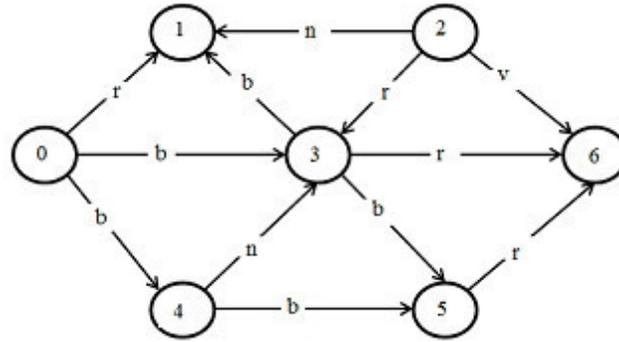


Figura 3.3.8

Paso 3. Al aplicar el teorema de la red coloreada se obtiene una cadena $P : N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración, dada por $P : 0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$. Por lo tanto se concluye que P es la cadena mínima, y el potencial encontrado en la iteración 2, es el potencial máximo.

Las restricciones que se imponen a los problemas de rectificación, analizados en los capítulos 2 y 3, no necesariamente están sujetos a un problema de gráficas, por lo cual, el siguiente capítulo retoma dichos algoritmos y brinda una generalización de los mismos.

Capítulo 4: Una generalización del algoritmo de rectificación de flujo

Los problemas tratados anteriormente son acoplados en la estructura de dos sistemas lineales de variables asociadas a una gráfica: el sistema x, y ; y los sistemas u, v , expresados juntos por una matriz de incidencia E . De hecho, toda la información sobre una gráfica G puede ser cubierta por la matriz de incidencia, y por lo tanto a partir del conocimiento de la relación entre las variables $x(j)$ y $y(i)$ o $v(j)$ y $u(i)$.

El problema del flujo factible, como se describirá de forma muy detallada, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}Ex &= b \\ x &\in c\end{aligned}$$

De la misma forma, el problema del diferencial factible como:

$$\begin{aligned}-uE &= v \\ v &\in D\end{aligned}$$

Donde E es la matriz de incidencia de la gráfica. La generalización de estos problemas surge cuando E es una matriz con entradas reales que no necesariamente es de incidencia y se conocen como problema de factibilidad primal y problema de factibilidad dual respectivamente. Los conceptos de flujos, divergencias, diferenciales y potenciales son generalizados como variables primales y duales; que a su vez dan paso a la definición de soportes primales y duales como conjuntos de índices de la matriz.

El objetivo principal de este capítulo es generalizar los problemas de factibilidad de los sistemas $Ex = y$ y $-uE = v$, donde E sea cualquier matriz con entradas reales generada por un sistema de ecuaciones. De tal forma, los algoritmos de rectificación de flujo y tensión, sean estudiados para adecuarse a su forma general y poder aplicarse a problemas donde resulta muy complicada la asociación de una gráfica.

El capítulo comienza con la generalización de los conceptos de flujo, divergencia, tensión y potencial; para luego poder asociarlos a una matriz mediante el análisis de las representaciones de Tucker.

La aplicación de los algoritmos de coloración estudiados en el capítulo uno, pueden trasladarse a su aplicación sobre una matriz con entradas reales; por lo que una sección de este capítulo se dedica al análisis de la coloración, con lo que se tienen las herramientas para generalizar los algoritmos de factibilidad.

4.1 Conceptos Generales

4.1.1 Variables primales y duales

En el capítulo dos, se definió la divergencia del flujo x en el nodo i , como:

$y(i) = \sum_{j \in A} e_{i,j} x(j)$, donde $x(j)$ denota el flujo a través del arco j ; y $e_{i,j}$ la incidencia del nodo i con el arco j .

Así mismo, se ha definido la tensión o diferencial de un arco j como:

$$v(j) = - \sum_{i \in X} u(i) e(i, j) \text{ donde } u(i) \text{ representa el potencial del nodo } i.$$

Considérese ahora una matriz E con entradas reales, donde I y J representan los conjuntos de índices, finitos y no vacíos; y $e(i, j)$ la entrada de E tal que $i \in I$ y $j \in J$. De tal forma, E es una matriz en $M_{|I| \times |J|}$. La generalización de los conceptos anteriores es la siguiente: Para $x \in \mathbb{R}^{|J|}$ se define $y \in \mathbb{R}^{|I|}$ como:

$$y(i) = \sum_{j \in J} e(i, j) x(j) \quad \text{para } i \in I \quad (1)$$

mientras,

$$v(j) = - \sum_{i \in I} u(i) e(i, j) \quad \text{para } j \in J \quad (2)$$

Decimos que (1) es el sistema lineal primal asociado con E , mientras que (2) el sistema lineal dual.

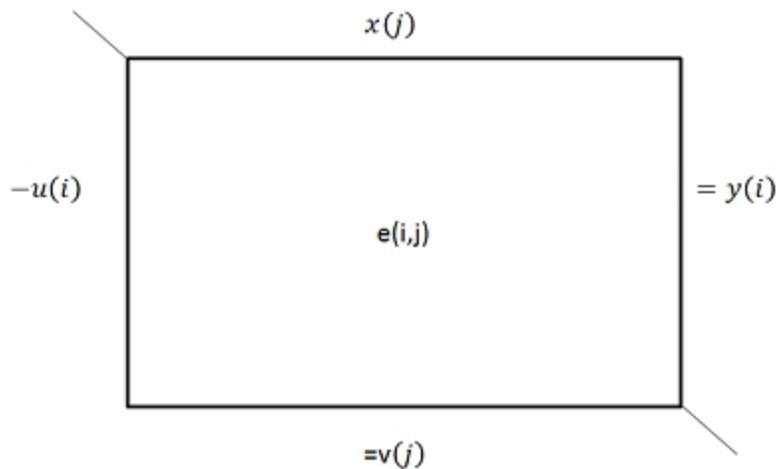


Figura 4.1.1

Considérese la siguiente gráfica de flujos como ejemplo:

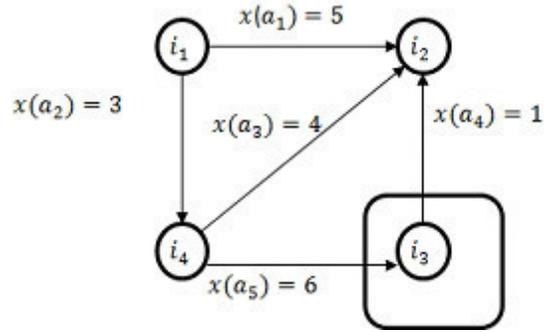


Figura 4.1.2

Evidentemente los conjunto de arcos y vértices en la gráfica están dados por:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \text{ y } X = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$$

para el vértice i_3 se observa que $div(i_3) = 1 * x(a_4) + (-1) * x(a_5) = 1 - 6 = -5$

La información en la gráfica puede trasladarse en su forma general a través de la matriz de incidencia:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	1	0	0	0	0	i_1
-1	0	-1	-1	0	0	i_2
0	0	0	1	-1	0	i_3
0	-1	1	0	1	0	i_4

De tal forma, considerando el vector $x(1) = 5, x(2) = 3, x(3) = 4, x(4) = 1, x(5) = 6$; se tiene que:

$$I = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Donde:

$$y(3) = e(3, 4) * x(4) + e(3, 5) * x(5) = 1 * 1 + (-1) * 6 = -5$$

De forma similar, considérese ahora los siguientes potenciales y tensiones sobre la misma gráfica:

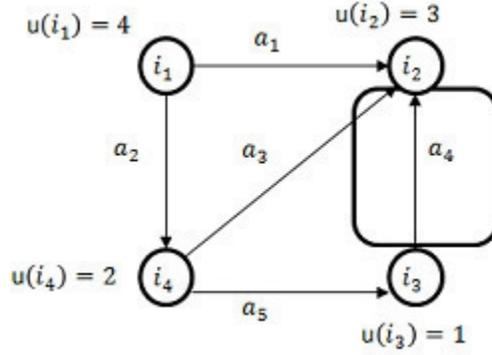


Figura 4.1.3

Para el arco a_4 se tiene que $v(a_4) = -((-1) * u(i_2) + (1) * u(i_3)) = -(-3 + 1) = 2$

considerando el vector $u(1) = 4, u(2) = 3, u(3) = 1, u(4) = 2$; sobre la misma matriz de incidencia se tiene que:

$$v(4) = -(u(2) * e(2, 4) + u(3) * e(3, 4)) = -(3 * (-1) + 1 * 1) = 2$$

Por otro lado, es importante mencionar que las ecuaciones (1) y (2) generan los sistemas primal y dual respectivamente; implican lo siguiente:

$$\sum_{j \in J} v(j)x(j) = - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u(i) e(i, j)x(j) = - \sum_{i \in I} u(i)y(i)$$

De tal forma que $v \cdot x = -u \cdot y$; esta fórmula caracteriza la dualidad entre los dos sistemas.

Además, para toda $x \in \mathbb{R}^{|J|}$ y $y \in \mathbb{R}^{|I|}$ que satisfacen (1), es suficiente que se cumpla que $u \cdot y + v \cdot x = 0$; para que $u \in \mathbb{R}^{|I|}$ y $v \in \mathbb{R}^{|J|}$ satisfagan la ecuación (2). La demostración a tal enunciado se ve de la siguiente forma:

$$u \cdot y + v \cdot x = \sum_{i \in I} u(i)y(i) + \sum_{j \in J} v(j)x(j) = \sum_{i \in I} u(i)(\sum_{j \in J} e(i, j)x(j)) + \sum_{j \in J} v(j)x(j) = \sum_{j \in J} [\sum_{i \in I} u(i)e(i, j)x(j) + v(j)x(j)] = \sum_{j \in J} [\sum_{i \in I} u(i)e(i, j) + v(j)] x(j) = 0$$

Dado que $x(j) > 0$, necesariamente $\sum_{i \in I} u(i)e(i, j) + v(j) = 0$ lo que implica que $v(j) = -\sum_{i \in I} u(i) e(i, j)$.

De forma dual, para toda $u \in \mathbb{R}^{|I|}$ y $v \in \mathbb{R}^{|J|}$ que satisfacen (2), es suficiente que se cumpla $u \cdot y + v \cdot x = 0$; para que $x \in \mathbb{R}^{|J|}$ y $y \in \mathbb{R}^{|I|}$ satisfagan (1). Esto se ve al usar (2) para escribir:

$$u \cdot y + v \cdot x = \sum_{i \in I} u(i)y(i) + \sum_{j \in J} v(j)x(j) = \sum_{i \in I} u(i)y(j) + \sum_{j \in J} (-\sum_{i \in I} u(i) e(i, j))x(j) = \sum_{i \in I} u(i) \left[y(j) - \sum_{j \in J} e(i, j)x(j) \right]$$

De igual forma, dado que $u(j) > 0$, necesariamente $y(j) - \sum_{j \in J} e(i, j)x(j) = 0$ lo que implica que $y(j) = \sum_{j \in J} e(i, j)x(j)$.

El sistema lineal primal puede ser identificado como un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^{I \cup J}$:

$$\overline{C} = \{(y, x) \mid y \in \mathbb{R}^{|I|}, x \in \mathbb{R}^{|J|}, \text{ y satisfacen (1)}\}$$

De la misma forma, el sistema lineal dual se identifica como:

$$\overline{D} = \{(u, v) \mid u \in \mathbb{R}^{|I|}, v \in \mathbb{R}^{|J|}, \text{ y satisfacen (2)}\}$$

Pensando en el producto escalar, las observaciones anteriores pueden ser reescritas como:

$$\overline{D} = \{(u, v) \mid (u, v) \cdot (y, x) = 0 \text{ para todo } (y, x) \in \overline{C}\}$$

$$\overline{C} = \{(y, x) \mid (u, v) \cdot (y, x) = 0 \text{ para todo } (u, v) \in \overline{D}\}$$

De forma que \overline{D} y \overline{C} son complementos ortogonales.

Existen dos subespacios de $\mathbb{R}^{|J|}$ que juegan un papel importante en el análisis de los sistemas primal y dual asociados con E :

$$\begin{aligned} C &= \{x \mid Ex = 0\} \\ D &= \{v \mid \text{existe } u \text{ con } -uE = v\} \end{aligned} \quad (3)$$

Claramente C consiste del vector $x \in \mathbb{R}^{|J|}$ tal que $(0, x) \in \overline{C}$, mientras D es la proyección de \overline{D} en $\mathbb{R}^{|J|}$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R}^{|J|} \mid v \cdot x = 0 \text{ para todo } v \in D\} \\ D &= \{v \in \mathbb{R}^{|J|} \mid v \cdot x = 0 \text{ para todo } x \in C\} \end{aligned} \quad (4)$$

Es decir, C y D también son complementos ortogonales. La importancia de los espacios C y D se mostrará en el siguiente apartado; pero antes, es importante destacar que el espacio C en una gráfica; corresponde al espacio de circulaciones, cuya definición se dio a conocer en el segundo capítulo.

4.1.2 Vectores elementales y soportes primales

Para definir los vectores y soportes elementales en su forma generalizada, es importante entender su imagen sobre una gráfica G :

Se dice que un flujo elemental, es uno de la forma:

$$x(j) = \alpha e_p(j) = \begin{cases} \alpha & \text{si } j \in P^+ \\ -\alpha & \text{si } j \in P^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde P es un camino elemental y $\alpha > 0$.

Por otro lado, se dice que P es un camino que conforma a un flujo x si se cumple que :

$$-x(j) > 0 \text{ para todo } j \in P^+ \text{ y } x(j) < 0 \text{ para todo } j \in P^-$$

$-P$ es un circuito, o el nodo inicial y final de P son fuente y vertedero respectivamente.

Otra definición importante es la de soporte primal en una gráfica; donde, C representa el espacio de circulaciones.

Se dice que un conjunto de arcos P , es un soporte primal del espacio C si existe $x \in C$ tal que para toda $j \in P$ se cumple que $x(j) \neq 0$; y

$$P^+ = \{j \in A \mid x(j) > 0\}, \quad P^- = \{j \in A \mid x(j) < 0\}$$

Considérese como ejemplo la siguiente gráfica:

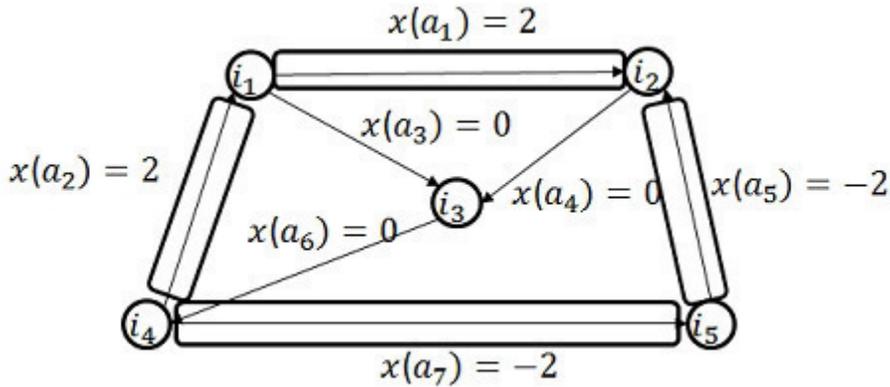


Figura 4.1.4

El flujo de los arcos a_1, a_2, a_5, a_7 es un flujo elemental de valor 2, pues el conjunto de arcos forma un camino elemental.

De forma general, un conjunto signo P de J ; donde J es el conjunto de índices en una matriz, es llamado un soporte de C , o soporte primal, si existe un vector en $x \in C$ tal que:

$$P^+ \{j \in J \mid x(j) > 0\}, \quad P^- \{j \in J \mid x(j) < 0\}$$

La gráfica anterior tiene la siguiente matriz de incidencia:

1	-1	1	0	0	0	0
-1	0	0	1	-1	0	0
0	0	-1	-1	0	1	0
0	1	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	1	0	-1

Los conjuntos de índices están dados por $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Considerando el conjunto de índices $P = \{1, 2, 5, 7\}$ en J ; el vector $x = \{2, 2, 0, 0, -2, 0, -2\}$ cumple que $Ex = 0$.

Por lo tanto, se observa que $P = \{1, 2, 5, 7\}$ con $P^+ = \{1, 2\}$ y $P^- = \{5, 7\}$ es un soporte primal.

$$x(1) = 2, x(2) = 2, x(3) = 0, x(4) = 0, x(5) = -2, x(6) = 0, x(7) = -2$$

Para ilustrar el concepto de un soporte primal con una matriz real (que no necesariamente sea una matriz de incidencia), considérese ahora la siguiente como ejemplo:

3	2	0	0	3
0	3	1	0	1
4	1	9	4	4

El vector $x = \{\frac{-4}{43}, \frac{6}{43}, \frac{-18}{43}, 1, 0\}$ cumple que $Ex = 0$ por lo que $P = \{1, 2, 3, 4\}$ con $P^+ = \{2, 4\}$ y $P^- = \{1, 3\}$ es un soporte primal para x .

En una matriz, un soporte primal P es elemental si es no vacío y no contiene propiamente algún otro soporte primal, es decir, si no existe algún otro soporte primal P_0 tal que $P_0^+ \cup P_0^- \subset P^+ \cup P^-$; pero $P_0^+ \cup P_0^- \neq P^+ \cup P^-$.

4.1.3 Algunas Propiedades de los Soportes Primitives

Se observa que sólo el vector cero tiene un soporte vacío.

Un vector elemental de C , se define como un vector $x \in C$ cuyo soporte P es elemental.

En general, cualesquiera dos vectores elementales x y x' de C que tienen el mismo soporte, deben ser múltiplos del otro. De hecho, si

$$\begin{aligned} \{j \mid x(j) > 0\} &= \{j \mid x'(j) > 0\} = P^+ \\ \{j \mid x(j) < 0\} &= \{j \mid x'(j) < 0\} = P^- \end{aligned}$$

el número

$$\alpha = \min\{x'(j)/x(j) \mid j \in P\} > 0$$

tiene la propiedad de hacer que el vector $x' = x' - \alpha x$ tenga su soporte propiamente contenido en P , y dado que P es elemental, implica $x' = 0$, así $x' = \alpha x$.

4.1.4 Realización conformable

En gráficas, el teorema de realización conformable señala que siendo x un flujo distinto de cero, existen caminos elementales P_1, P_2, \dots, P_r que conforman al flujo x , y números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ tal que;

$$x = \alpha_1 e_{P_1} + \dots + \alpha_r e_{P_r}$$

Además, suponiendo que P_1, P_2, \dots, P_n son los circuitos, entonces se tiene que $\alpha_1 e_{P_1} + \dots + \alpha_n e_{P_n}$ es una circulación, mientras que $\alpha_{n+1} e_{P_{n+1}} + \dots + \alpha_r e_{P_r}$ es una anticirculación.

Un ejemplo de ello se observa en el siguiente flujo:

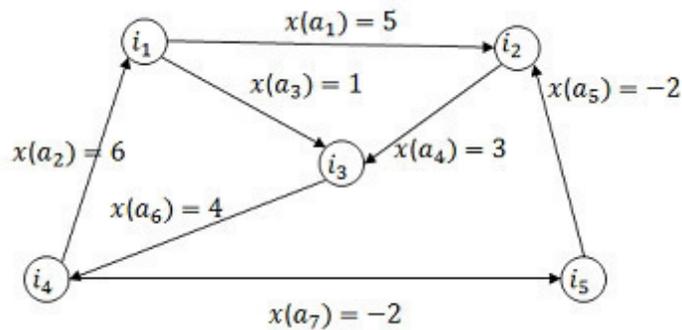


Figura 4.1.5

El cual se puede descomponer de la siguiente forma:

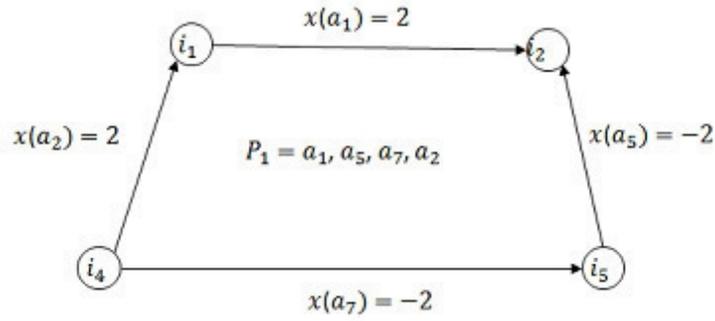


Figura 4.1.6

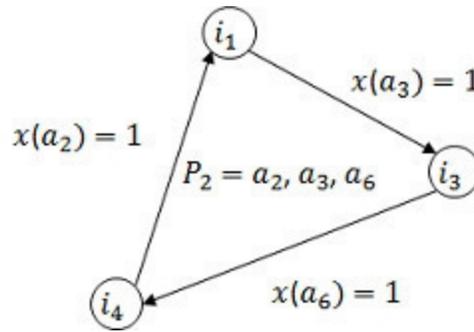


Figura 4.1.7

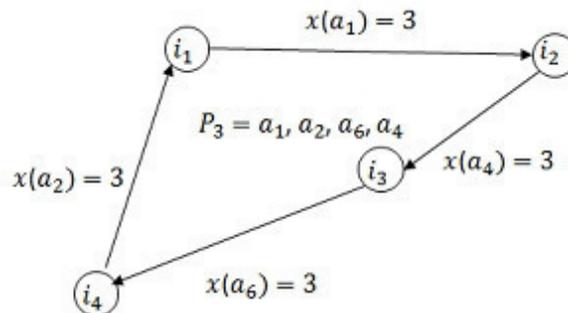


Figura 4.1.8

De tal forma se obtiene $x = 2e_{P_1} + 2e_{P_2} + 3e_{P_3}$

De forma general, se observa que cada soporte primal P no vacío, no sólo incluye algún soporte primal elemental, lo que sería cierto por la definición de "elemental", incluye otros soportes en el sentido conformable: existe un soporte primal elemental P_1 tal que $P_1^+ \subset P^+$ y $P_1^- \subset P^-$. Como una consecuencia de este hecho, se puede demostrar que todo vector distinto de cero $x \in C$ con soporte P puede ser expresado en la forma:

$$x = \alpha_1 e_{P_1} + \dots + \alpha_r e_{P_r}, \quad \alpha_k \geq 0,$$

donde cada P_k es un soporte primal elemental tal que $P_k^+ \subset P^+$ y $P_k^- \subset P^-$.

Tomamos como ejemplo la siguiente matriz:

1	-1	1	0	0	0	0
-1	0	0	1	-1	0	0
0	0	-1	-1	0	1	0
0	1	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	1	0	-1

Dado que es una matriz de 5×7 , los conjuntos de índices están dados por $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Si consideramos todo el conjunto de índices, y el vector $x = \{5, 6, 1, 3, -2, 4, -2\}$ cumple que $Ex = 0$. Por lo tanto, se observa que $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ con $P^+ = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ y $P^- = \{5, 7\}$ es un soporte primal.

Ahora considérese el conjunto de índices $P_1 = \{1, 2, 5, 7\}$ en J ; el vector $x_1 = \{2, 2, 0, 0, -2, 0, -2\}$ cumple que $Ex_1 = 0$. Por lo tanto, se observa que $P_1 = \{1, 2, 5, 7\}$ con $P_1^+ = \{1, 2\}$ y $P_1^- = \{5, 7\}$ es un soporte primal.

Considérese el conjunto de índices $P_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ en J ; el vector $x_2 = \{3, 3, 0, 3, 0, 3, 0\}$ cumple que $Ex_2 = 0$. Por lo tanto, se observa que $P_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ con $P_2^+ = \{1, 2, 4, 6\}$ y $P_2^- = \{\emptyset\}$ es un soporte primal.

Una vez más considérese el conjunto de índices $P_3 = \{2, 3, 6\}$ en J ; el vector $x_3 = \{0, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$ cumple que $Ex_3 = 0$. Por lo tanto, se observa que $P_3 = \{2, 3, 6\}$ con $P_3^+ = \{1, 2, 4, 6\}$ y $P_3^- = \{\emptyset\}$ es un soporte primal.

Observe que $\{5, 6, 1, 3, -2, 4, -2\} = 2 * \{1, 1, 0, 0, -1, 0, -1\} + 3 * \{1, 1, 0, 1, 0, 1, 0\} + 1 * \{0, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$.

Es decir; $x = 2e_{P_1} + 3e_{P_2} + 1e_{P_3}$

4.1.5 Vectores elementales y soportes duales

Análogamente, se definen los vectores elementales y los soportes de el subespacio D .

En una gráfica G un soporte de D , o soporte dual, es un subconjunto Q de A , tal que existe un vector en $v \in D$, con $v(j) \neq 0$; y:

$$Q^+ = \{j \in A \mid v(j) > 0\}, \quad Q^- = \{j \in A \mid v(j) < 0\}$$

En tal caso, se dice que Q es un soporte de D ; y claramente se observa que los arcos en Q forman un corte en G .

Para ejemplificar, considérese la siguiente gráfica:

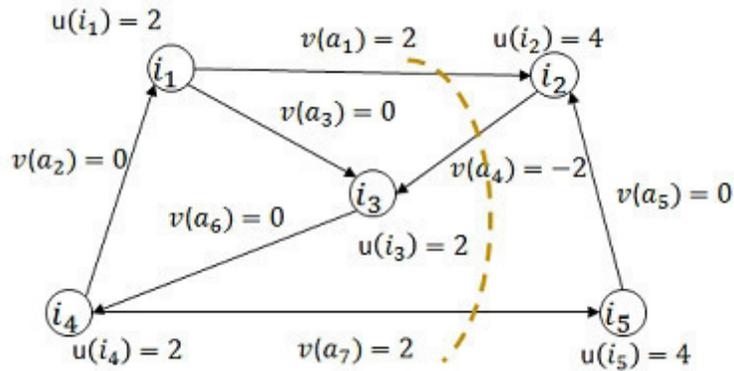


Figura 4.1.9

Los arcos a_1, a_4, a_7 forman un diferencial elemental de valor 2, pues forman un corte elemental.

De forma general, un conjunto Q de J ; donde J es el conjunto de índices en una matriz, es llamado un soporte de D , o soporte dual, si existe un vector en $v \in D$ tal que:

$$Q^+ = \{j \in J \mid v(j) > 0\}, \quad Q^- = \{j \in J \mid v(j) < 0\}$$

Si Q es un soporte dual no vacío, que no incluye propiamente cualquier otro soporte dual no vacío, se dice que Q es elemental.

Un vector elemental de D , se define como un vector $v \in D$ cuyo soporte Q es elemental.

La gráfica anterior tiene la siguiente matriz de incidencia:

1	-1	1	0	0	0	0
-1	0	0	1	-1	0	0
0	0	-1	-1	0	1	0
0	1	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	1	0	-1

Los conjuntos de índices están dados por $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Considerando las variables:

$$v(1) = 2, v(2) = 0, v(3) = 0, v(4) = -2, v(5) = 0, v(6) = 0, v(7) = 2$$

y

$$u(1) = 2, u(2) = 4, u(3) = 4, u(4) = 2, u(5) = 4$$

Se tiene que los índices $\{1, 4, 7\} \in J$ forman un soporte dual para D .

Para ilustrar el concepto de un soporte dual con una matriz real (que no necesariamente sea una matriz de incidencia), considérese ahora la siguiente:

3	2	0	0	3
0	3	1	0	1
4	1	9	4	4

El vector $u = \{\frac{13}{43}, \frac{-9}{43}, \frac{1}{43}\}$ cumple que $-uE = v = \{-1, 0, 0, \frac{-4}{43}, \frac{-34}{43}\}$ por lo que $P = \{1, 4, 5\}$ con $P^+ = \{\emptyset\}$ y $P^- = \{1, 4, 5\}$ es un soporte dual para v pues se cumple que $v = -uE$.

4.1.6 Realización Conformable

En una gráfica G , la realización conformable se refiere a que para cualquier diferencial v distinto de cero, existen cortes elementales $Q_1 \dots Q_r$, que conforman a v ; tal que:

$$v = \alpha_1 e_{Q_1} + \dots + \alpha_r e_{Q_r} \quad \text{con } \alpha_k > 0$$

Considérese la siguiente gráfica como ejemplo:

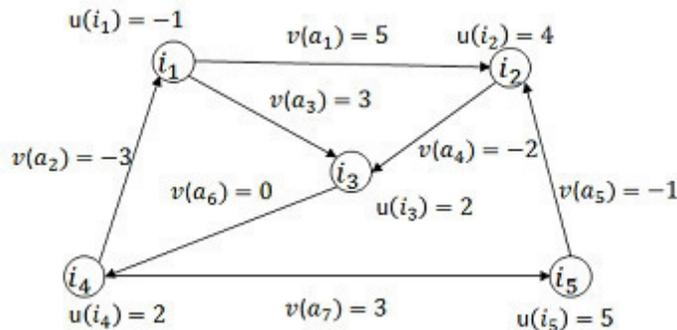


Figura 4.1.10

El diferencial se puede descomponer de la siguiente forma:

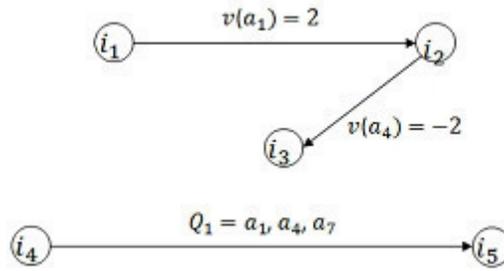


Figura 4.1.11

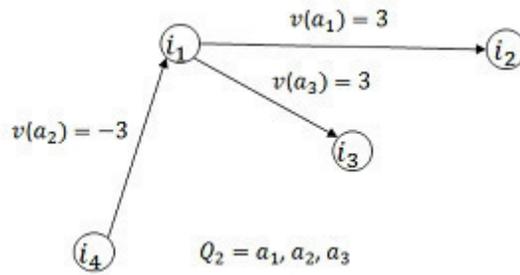


Figura 4.1.12

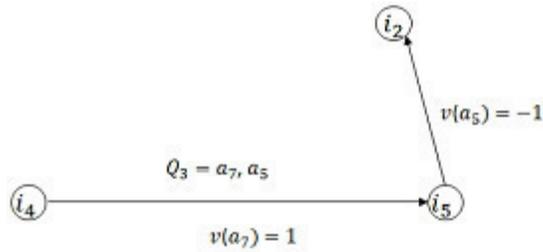


Figura 4.1.13

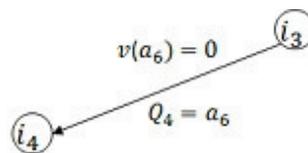


Figura 4.1.14

De tal forma $v = 2Q_1 + 3Q_2 + 1Q_3 + 0Q_6$

De forma general, cada vector distinto de cero $v \in D$, con soporte Q puede ser expresado en la forma:

$$v = \alpha_1 e_{Q_1} + \dots + \alpha_r e_{Q_r}, \quad \alpha_k \geq 0,$$

donde cada Q_k es un soporte elemental dual con $Q_k^+ \subset Q^+$ y $Q_k^- \subset Q^-$.

Como ejemplo véase la siguiente matriz:

1	-1	1	0	0	0	0
-1	0	0	1	-1	0	0
0	0	-1	-1	0	1	0
0	1	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	1	0	-1

Los conjuntos de índices están dados por $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Considerando el vector $v = \{5, -3, 3, -1, -1, 0, 3\}$ y $u = \{-1, 4, 2, 2, 5\}$ se cumple que $-uE = v$; por lo tanto el conjunto de índices $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ con $Q^+ = \{1, 3, 7\}$ y $Q^- = \{2, 4, 5\}$ es un soporte dual.

Considérese ahora $v_1 = \{2, 0, 0, -2, 0, 0, 2\}$ con $u_1 = \{0, 2, 0, 0, 2\}$ se cumple que $-u_1E = v_1$; por lo tanto $Q_1 = \{1, 4, 7\}$ es un soporte dual.

Considérese $v_2 = \{3, -3, 3, 0, 0, 0, 0\}$ con $u_2 = \{0, 3, 3, 3, 0\}$ se cumple que $-u_2E = v_2$; por lo tanto $Q_2 = \{1, 2, 3\}$ es un soporte dual.

Considérese $v_3 = \{0, 0, 0, 0, -1, 0, 1\}$ con $u_3 = \{0, 0, 0, 0, 1\}$ se cumple que $-u_3E = v_3$; por lo tanto $Q_3 = \{5, 7\}$ es un soporte dual.

De tal forma se observa que $\{5, -3, 3, -1, -1, 0, 3\} = 2*\{1, 0, 0, -1, 0, 0, 1\} + 3*\{1, -1, 1, 0, 0, 0, 0\} + 1*\{0, 0, 0, 0, -1, 0, 1\}$

es decir; se cumple que $v = 2e_{Q_1} + 3e_{Q_2} + 1e_{Q_3}$

4.2 Representaciones de Tucker del espacio de circulación

Este apartado esta dedicado a estudiar las representaciones de Tucker por la importancia que tienen al trasladar la información de una gráfica a una matriz, y por tanto, al permitir estudiar ciertos algoritmos de gráficas en su forma generalizada.

En el capítulo 2 se definió la circulación en una gráfica G , como un flujo que se conserva en todo nodo; es decir, cada nodo de G es intermedio. Con tal concepto, decimos que un espacio de circulación \mathbf{C} consiste de los elementos $x(j)$ tal que

$$\sum_{j \in A} x(j)e(i, j) = 0 \quad \text{para todo } i \in X \quad (4)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto despejando algunas de las variables $x(j)$ en términos de otras, y escritas equivalentemente, para varios subconjuntos $F \subset A$, como

$$\sum_{k \in F'} a(j, k)x(k) = x(j) \quad \text{para todo } j \in F, \text{ donde } F' = A \setminus F \quad (5)$$

Se dice que este último sistema es una representación de Tucker del subespacio \mathbf{C} .

Proposición: Un conjunto de arcos $F \subset A$ corresponde a una representación de Tucker del espacio de circulación \mathbf{C} si y sólo si F forma un bosque maximal para la gráfica G .

La demostración de la proposición se da al escribir el sistema definido en (4) para \mathbf{C} como

$$\sum_{j \in F} x(j)e^j = - \sum_{k \in F'} x(k)e^k \quad (6)$$

Se debe recordar que el vector e^j corresponde al vector de adyacencia del arco j con los vértices de la gráfica en cuestión.

El conjunto F corresponde a una representación de Tucker si y sólo si para cada elección de números $x(k)$, $k \in F'$, existe números únicos $x(j)$, $j \in F$, tal que (6) se cumple. Esta propiedad será ciertamente cumplida si los vectores e^j , $j \in F$ forman una base para el espacio de columnas de E .

Por otro lado, tomando $x(k) = 0$ para todo $k \in F'$, se ve desde la unicidad asociada a los números $x(j)$ en (3) que los vectores e^j , $j \in F$, son linealmente independientes. Por otra parte, (6) implica que cada vector expresable como una combinación lineal de los vectores e^j , $j \in F$, y e^k , $k \in F'$, es en realidad expresable como una combinación lineal sólo de e^j , $j \in F$.

Así, $\{e^j \mid j \in F\}$ es una base para la columna de espacios.

Un ejemplo de una representación Tucker para la siguiente gráfica es:

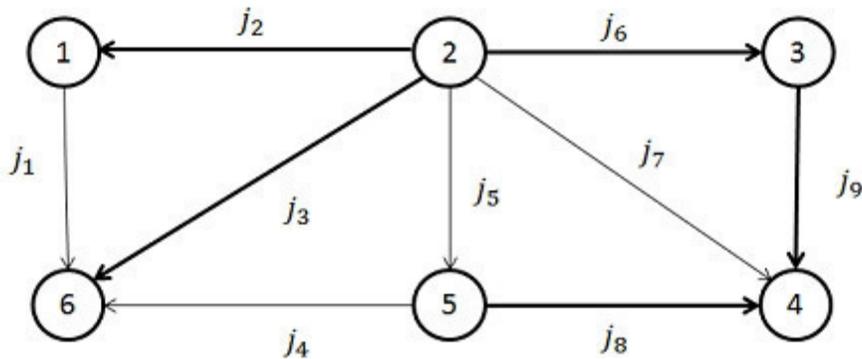


Figura 4.2.1

El conjunto $F : \{j_2, j_3, j_6, j_8, j_9\}$ produce una representación de Tucker dada por:

$x(1)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(7)$	
1	0	0	0	$= x(2)$
-1	-1	0	0	$= x(3)$
0	1	-1	-1	$= x(6)$
0	-1	1	0	$= x(8)$
0	1	-1	-1	$= x(9)$

4.2.1 Representación Inicial de Tucker sobre una gráfica

En una gráfica G , obtener una representación inicial de Tucker para un subespacio \mathcal{C} es sencillo: Se parte de una matriz de incidencia, y se hacen operaciones elementales sobre renglones hasta obtener una matriz que tenga $|X| - 1$ columnas con un elemento -1 y los demás elementos de la columna iguales a cero. Los arcos representados por estas columnas, serán los elementos de la base correspondientes a la representación de Tucker.

Considérese como ejemplo la siguiente gráfica:

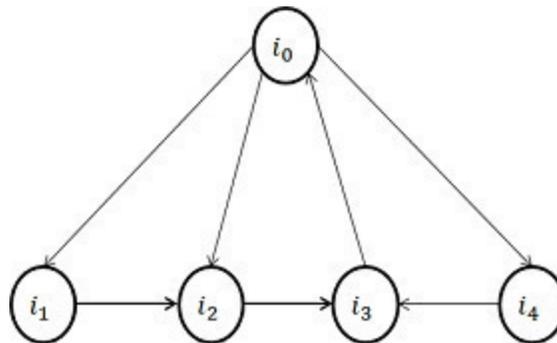


Figura 4.2.2

La matriz de incidencia está dada por:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
1	1	-1	1	0	0	0	i_0
-1	0	0	0	1	0	0	i_1
0	-1	0	0	-1	1	0	i_2
0	0	1	0	0	-1	-1	i_3
0	0	0	-1	0	0	1	i_4

Sumamos el renglón dos al renglón uno:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
0	1	-1	1	1	0	0	i_0
-1	0	0	0	1	0	0	i_1
0	-1	0	0	-1	1	0	i_2
0	0	1	0	0	-1	-1	i_3
0	0	0	-1	0	0	1	i_4

Sumamos al renglón tres, el renglón uno

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
0	0	-1	1	0	1	0	i_0
-1	0	0	0	1	0	0	i_1
0	-1	0	0	-1	1	0	i_2
0	0	1	0	0	-1	-1	i_3
0	0	0	-1	0	0	1	i_4

Sumamos al renglón cuatro, el renglón uno

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
0	0	-1	1	0	1	0	i_0
-1	0	0	0	1	0	0	i_1
0	-1	0	0	-1	1	0	i_2
0	0	0	1	0	0	-1	i_3
0	0	0	-1	0	0	1	i_4

Por último sumamos el renglón cuatro al renglón cinco

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
0	0	-1	1	0	1	0	i_0
-1	0	0	0	1	0	0	i_1
0	-1	0	0	-1	1	0	i_2
0	0	0	1	0	0	-1	i_3
0	0	0	0	0	0	0	i_4

Las columnas correspondientes a a_1, a_2, a_3 y a_7 tienen un elemento -1 y los demás cero. Además, se debe notar que el último renglón de la matriz sólo tiene ceros, por lo que se quitará de la representación de Tucker. De tal forma, la representación de Tucker es

a_4	a_5	a_6	
1	0	1	a_3
0	1	0	a_1
0	-1	1	a_2
1	0	0	a_7

4.2.2 Representación dual de Tucker

Cada representación de Tucker del espacio de circulación \mathbf{C} puede ser inmediatamente trasladada en una representación de Tucker del espacio diferencial \mathbf{D} dado por:

$$-\sum_{j \in F} v(j)a(j, k) = v(k) \text{ para todo } k \in F' \quad (7)$$

Esto se sigue del hecho de que $\mathbf{D} = \mathbf{C}^\perp$; es decir el espacio ortogonal de \mathbf{C} , que es, $v \in \mathbf{D}$ si y sólo si

$$0 = \sum_{j \in A} v(j)x(j) \text{ para todo } x \in \mathbf{C}$$

En términos de una representación de Tucker esta propiedad caracteriza \mathbf{D} como un conjunto de todos $v \in R^A$ que satisfacen

$$0 = \sum_{j \in F} v(j)[\sum_{k \in F'} a(j, k)x(k)] + \sum_{k \in F} v(k)x(k) = \sum_{k \in F'} x(k)[v(k) + \sum_{j \in F} v(j)a(j, k)]$$

Para todas las elecciones de $x(k), k \in F'$.

Por ejemplo, v es un diferencial para la siguiente red si y sólo si satisface el sistema:

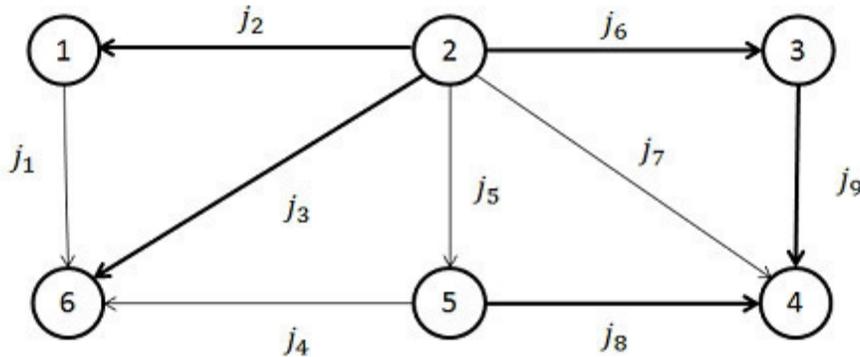


Figura 4.2.3

$-v(2)$	1	0	0	0
$-v(3)$	-1	-1	0	0
$-v(6)$	0	1	-1	-1
$-v(8)$	0	-1	1	0
$-v(9)$	0	1	-1	-1

$= v(1) \quad = v(4) \quad = v(5) \quad = v(7)$

Ambas representaciones de Tucker pueden ser representadas conjuntamente en la siguiente figura

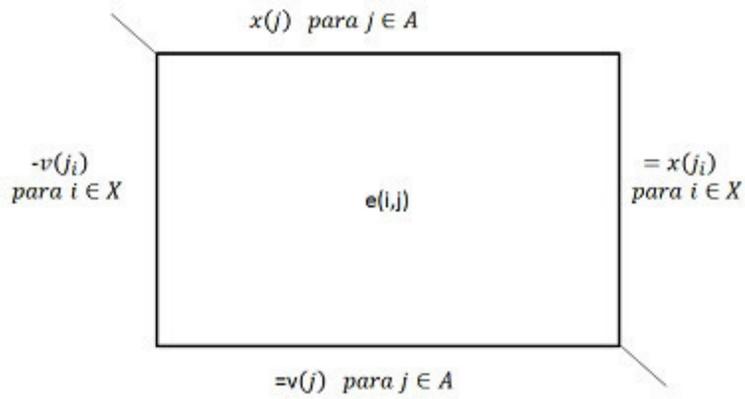


Figura 4.2.4

En términos de flujos, divergencias, potenciales y diferenciales:

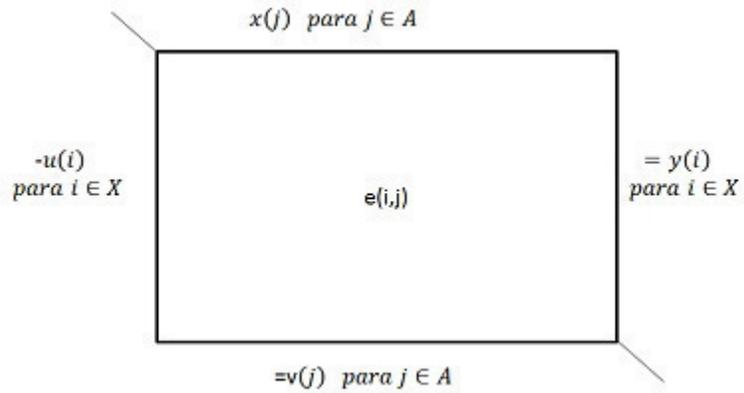


Figura 4.2.5

De forma general, para obtener una representación de Tucker de los espacios C y D , se deben resolver los sistemas homogéneos:

$$\sum_{j \in J} x(j)e(i, j) = 0 \text{ para } i \in I$$

Para un conjunto maximal de variables $x(j)$ de tal forma que se obtenga un sistema equivalente de la forma

$$\sum_{K \in J \setminus F} a(j, k)x(k) = x(j) \text{ para todo } j \in F \quad (8)$$

donde las variables $x(k)$ pueden tomar valores arbitrarios. Los vectores $x \in \mathbf{C}$ son los que satisfacen (8). De la misma forma, los vectores $v \in \mathbf{D}$ son los que satisfacen:

$$-\sum_{j \in F} v(j)a(j, k) = v(k) \text{ para } k \in J \setminus F$$

De tal forma, se puede crear un algoritmo general para encontrar una representación inicial de Tucker basados en el algoritmo de Gauss Jordan:

4.2.3 Representación inicial de Tucker general

Sea una matriz en $m_{|I| \times |J|}$ tal que $Ex = 0$:

1. Encontrar $|I|$ columnas linealmente independientes tal que forman una submatriz B .
2. Hacer $-B^{-1}Ex = B^{-1}0 = 0$

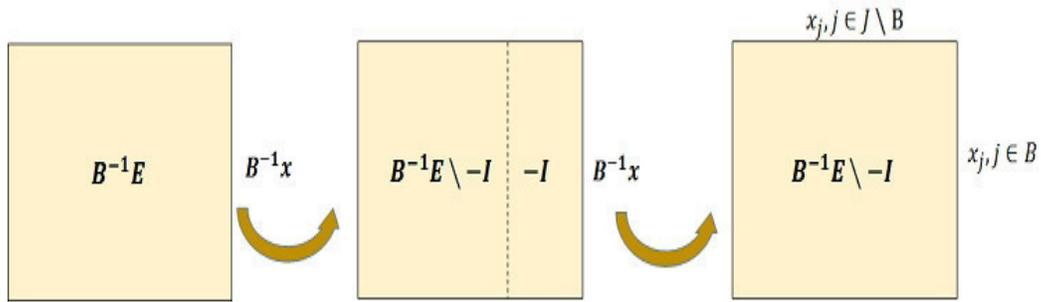


Figura 4.2.6

Considere como ejemplo la siguiente matriz:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	2	0	0	3
0	3	1	0	1
4	1	9	4	4

Las columnas correspondientes a las variables x_1, x_2 y x_3 son linealmente independientes, por lo que pueden ser usadas como la submatriz B . De tal forma, se tiene que:

$$-B^{-1}E =$$

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>$\frac{13}{43}$</td><td>$\frac{-9}{43}$</td><td>$\frac{1}{43}$</td></tr> <tr><td>$\frac{2}{43}$</td><td>$\frac{27}{86}$</td><td>$\frac{-3}{86}$</td></tr> <tr><td>$\frac{-6}{43}$</td><td>$\frac{5}{86}$</td><td>$\frac{9}{86}$</td></tr> </table>	$\frac{13}{43}$	$\frac{-9}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{27}{86}$	$\frac{-3}{86}$	$\frac{-6}{43}$	$\frac{5}{86}$	$\frac{9}{86}$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>9</td><td>4</td><td>4</td></tr> </table>	3	2	0	0	3	0	3	1	0	1	4	1	9	4	4	=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{-4}{43}$</td><td>$\frac{-34}{43}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>$\frac{6}{43}$</td><td>$\frac{-27}{86}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>$\frac{-18}{43}$</td><td>$\frac{-5}{86}$</td></tr> </table>	-1	0	0	$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$	0	-1	0	$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$	0	0	-1	$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$
$\frac{13}{43}$	$\frac{-9}{43}$	$\frac{1}{43}$																																								
$\frac{2}{43}$	$\frac{27}{86}$	$\frac{-3}{86}$																																								
$\frac{-6}{43}$	$\frac{5}{86}$	$\frac{9}{86}$																																								
3	2	0	0	3																																						
0	3	1	0	1																																						
4	1	9	4	4																																						
-1	0	0	$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$																																						
0	-1	0	$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$																																						
0	0	-1	$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$																																						

Por lo que la representación de Tucker inicial es:

x_4	x_5	
$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$	x_1
$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$	x_2
$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$	x_3

4.3 Teoría de bases

Un conjunto de índices $F \subset J$ que genera una representación de Tucker para los espacios \mathbf{C} y \mathbf{D} será denominado como una base para J . Existe sólo un número finito de bases, y como ya se dijo antes, en el caso de una gráfica una base corresponde a un bosque máximo.

4.3.1 Teorema de bases para gráficas

Sea $F \subset A$ un bosque maximal en G , y sean los números $a(i, j)$ para $j \in F, k \in F' = A \setminus F$, los coeficientes en la correspondiente representación de Tucker del espacio de circulación \mathbf{C} y el espacio diferencial \mathbf{D} .

1. Para cada arco $k \in F'$ existe un único circuito elemental P_k que contiene a k en su parte positiva y por otra parte usa sólo arcos de F . Los vectores de incidencia e_{P_k} forman una base para \mathbf{C} y están dados por

$$e_{P_k}(j) = \begin{cases} a(j, k) & \text{para todo } j \in F \\ 0 & \text{para todod } j \in F' \text{ excepto } k = j \\ 1 & \text{para } k = j \end{cases}$$

2. Para cada arco $j \in F$ existe un único corte elemental Q_j que contiene a j en su parte positiva y por otro lado usa sólo arcos de F' . Los vectores de incidencia e_{Q_j} forman una base para \mathbf{D} y están dados por

$$e_{Q_j}(k) = \begin{cases} -a(j, k) & \text{para todo } k \in F' \\ 0 & \text{para todo } k \in F \text{ excepto } k = j \\ 1 & \text{para } k = j \end{cases}$$

Prueba: Sea $k \in F'$, $k \sim (i, i')$. Dado que F es un bosque maximal, F contiene un árbol expandido T para la componente de G que contiene a i y a i' . Hay una única cadena elemental en T de i a i' , y esta, junto al arco k , forman el circuito P_k . El vector de incidencia e_{P_k} puede considerarse como una circulación que tiene flujo 1 en k pero 0 en todos los otros arcos de F' . Así para cualquier elección de coeficientes λ_k el flujo

$$x = \sum_{k \in F'} \lambda_k e_{P_k}$$

es una circulación que satisface $x(k) = \lambda_k$ para todo $k \in F'$ y

$$x(j) = \sum_{k \in F'} \lambda_k e_{P_k}(j) \quad \text{para todo } j \in F.$$

Por otro lado, se sabe que dada la representación de Tucker existe una circulación única x que satisface $x(k) = \lambda_k$ para todo $k \in F'$, a saber, la que tiene otros valores de flujo que están dados por

$$x(j) = \sum_{k \in F'} \lambda_k a(j, k) \quad \text{para todo } j \in F.$$

Así, cada elemento de \mathbf{C} puede ser representado unicamente como una combinación lineal de los vectores e_{P_k} , y se tiene

$$\sum_{k \in F'} \lambda_k a(j, k) = \sum_{k \in F'} \lambda_k e_{P_k}(j)$$

para todo $j \in F$ y todo $\lambda_k \in \mathbb{R}$. esto demuestra que los vectores e_{P_k} forman una base para \mathbf{C} , y $e_{P_k}(j) = a(j, k)$.

Los circuitos P_k y cortes Q_j en el teorema de bases son llamados los circuitos y cortes fundamentales asociados con F .

Como corolario se puede verificar que en cualquier representación de Tucker, de los espacios \mathbf{C} y \mathbf{D} , todos los coeficientes $a(j, k)$ son +1, -1 ó 0. Esta propiedad es importante pues hace el almacenamiento y la manipulación de una representación de Tucker en una computadora mucho más fácil.

También es importante mencionar que no cualquier base para \mathbf{C} o para \mathbf{D} que se compone en su totalidad de vectores elementales, es una base fundamental o puede convertirse en una. Un ejemplo de ello se ve en la siguiente red:

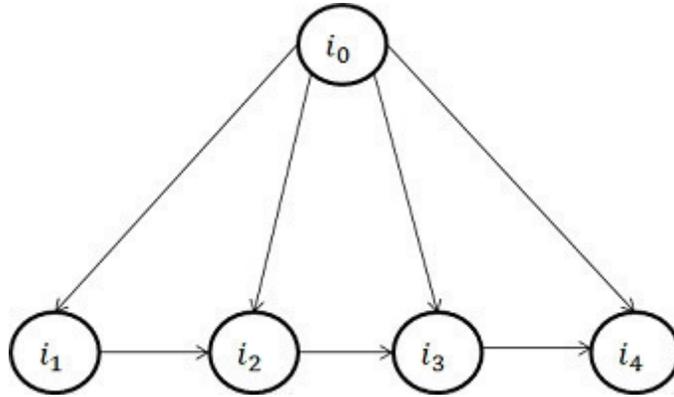


Figura 4.3.1

Considérese ahora la siguiente base

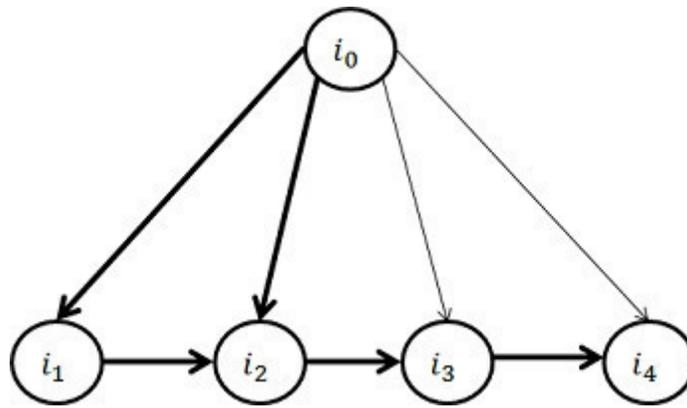


Figura 4.3.2

Los circuitos elementales correspondientes a la base son:

$$P_1 = i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \leftarrow i_0$$

$$P_2 = i_0 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \leftarrow i_0$$

$$P_3 = i_0 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow i_4 \leftarrow i_0$$

De esta forma, los vectores e_{P_1} , e_{P_2} y e_{P_3} forman una base para el espacio de circulación, pero no una base fundamental pues evidentemente no corresponden a un árbol expandido.

En forma general, para cualquier matriz real arbitraria, el teorema de bases quedaría de la siguiente forma:

4.3.2 Teorema general de bases

Sea F una base en J , y sean los números $a(i, j)$ para $j \in F, k \in F' = J \setminus F$, los coeficientes en la correspondiente representación de Tucker del espacio de circulación \mathbf{C} y el espacio diferencial \mathbf{D} :

1. Para cada $k \in F'$ existe un único soporte primal elemental P_k que contiene a k en su parte positiva y por otro lado usa sólo elementos de F . Los correspondientes vectores elementales e_{P_k} forman una base algebraica para \mathbf{C} y están dados por

$$\lambda^{(k)e_{P_k}}(j) = \begin{cases} a(j, k) & \text{para todo } j \in F \\ 0 & \text{para todo } j \in F' \text{ excepto } k = j \\ 1 & \text{para } k = j \end{cases}$$

donde

$$\lambda(k) = (1 + \sum_{j \in F} |a(j, k)|) / (1 + |\{j \in F' : a(j, k) \neq 0\}|) > 0$$

2. Para cada $j \in F$, existe un único soporte dual elemental Q que contiene a j en su parte positiva y por otro lado usa sólo elementos de F' . Los correspondientes vectores elementales e_{Q_j} forman una base algebraica para \mathbf{D} y están dados por

$$\mu^{(j)e_{Q_j}}(k) = \begin{cases} -a(j, k) & \text{para todo } k \in F' \\ 0 & \text{para todod } k \in F \text{ excepto } k = j \\ 1 & \text{para } k = j \end{cases}$$

donde

$$\mu(j) = (1 + \sum_{k \in F'} |a(j, k)|) / (1 + |\{k \in F' : a(j, k) \neq 0\}|) > 0$$

El teorema general de bases nos facilita ver los soportes primales y duales a partir de la representación de Tucker de una matriz; usemos el siguiente ejemplo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	2	0	0	3
0	3	1	0	1
4	1	9	4	4

Una representación de Tucker para dicha matriz es la siguiente:

x_4	x_5	
$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$	x_1
$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$	x_2
$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$	x_3

Sea $i \in J \setminus F$; por el teorema general de bases sabemos que existe un único soporte primal elemental P_i que contiene a i en su parte positiva y por otro lado usa sólo elementos de F . Tomando en cuenta que $B^{-1}Ex = B^{-1}0 = 0$ si se hace $x(i) = 1$ y $x(i_r) = 0$ para todo $i_r \in J \setminus F$ con $i \neq i_r$, obtenemos un sistema de ecuaciones que nos permite obtener un vector x cuyo soporte contiene a j . En este caso, sea $i = 4$

$$B^{-1}E =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{13}{43} & \frac{-9}{43} & \frac{1}{43} \\ \hline \frac{2}{43} & \frac{27}{86} & \frac{-3}{86} \\ \hline \frac{-6}{43} & \frac{5}{86} & \frac{9}{86} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 9 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 & \frac{-4}{43} & \frac{-34}{43} \\ \hline 0 & -1 & 0 & \frac{6}{43} & \frac{-27}{86} \\ \hline 0 & 0 & -1 & \frac{-18}{43} & \frac{-5}{86} \\ \hline \end{array}$$

Se desea determinar un soporte primal que contenga al índice 4, con lo que obtendríamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{4}{43}x_4 - \frac{34}{43}x_5 &= 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 0x_3 + \frac{6}{43}x_4 - \frac{27}{86}x_5 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 - \frac{18}{43}x_4 - \frac{5}{86}x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $x_4 = 1$ y $x_5 = 0$ (pues 5 no está en las variables básicas):

$$\begin{aligned} -1x_1 - \frac{4}{43} &= 0 \\ -1x_2 + \frac{6}{43} &= 0 \\ -1x_3 - \frac{18}{43} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos el vector $x = (-\frac{4}{43}, \frac{6}{43}, -\frac{18}{43}, 1, 0)$ que cumple con $Ex = 0$, con soporte $P^+ = \{2, 4\}$, $P^- = \{1, 3\}$ y por lo tanto, se ha encontrado un soporte primal que contiene al índice 4 de J .

De forma similar ocurre con los soportes duales, donde la representación de Tucker nos presenta los vectores v para dichos soportes.

4.4 Pivoteo

A veces es necesario pasar de una representación de Tucker a otra. Esto puede ser logrado por una secuencia de transformaciones elementales llamadas pasos de pivoteo. Esta sección está dedicada a explicar qué es el pivoteo y cómo puede ser expresado en el caso de una gráfica en términos de operaciones en un bosque maximal.

Empezando con una tabla de Tucker, se considera cualquier pareja de arcos $\bar{j} \in F$ y $\bar{k} \in F$ tal que $a(\bar{j}, \bar{k}) \neq 0$. La ecuación representada por el j -ésimo renglón de la tabla, a saber

$$\sum_{k \in F} a(\bar{j}, k)x(k) = x(\bar{j})$$

puede ser resuelto para $x(\bar{k})$

$$x(\bar{k}) = \frac{1}{a(\bar{j}, \bar{k})} x(\bar{j}) - \sum_{\substack{k \notin F \\ k \neq \bar{j}}} \frac{a(\bar{j}, k)}{a(\bar{j}, \bar{k})} x(k) \dots \dots \dots (9)$$

Entonces esto puede ser sustituido en las ecuaciones representadas por los otros renglones a fin de obtener las expresiones

$$x(j) = \frac{a(j, \bar{k})}{a(\bar{j}, \bar{k})} x(\bar{j}) + \sum_{\substack{k \notin F \\ k \neq \bar{j}}} \left[a(j, k) - \frac{a(j, \bar{k}) a(\bar{j}, k)}{a(\bar{j}, \bar{k})} \right] x(k) \text{ para cada } k \in F, k = \bar{k} \dots (10)$$

El punto es que los sistemas (9) y (10) son equivalentes al sistema renglón dado por la tabla, y por lo tanto constituye una nueva representación de Tucker del espacio de circulación. La nueva representación corresponde al conjunto de arcos

$$\tilde{F} = [F \setminus \bar{j}] \cup \bar{k} \quad (11)$$

Se sigue que los coeficientes en (9) y en (10), cuando se escriben en forma de tabla, dan paso a una nueva representación de Tucker para el espacio diferencial

La transformación de la tabla F a la tabla \tilde{F} es llamada pivoteo en (\bar{j}, \bar{k}) . Esto es posible si y sólo si $a(\bar{j}, \bar{k}) \neq 0$.

La siguiente conclusión puede ser extraída inmediatamente del teorema de bases.

4.4.1 Teorema de Pivoteo. Sea F un bosque maximal, y sean \bar{j} y \bar{k} arcos tales que $\bar{j} \in F$ y $\bar{k} \notin F$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $a(\bar{j}, \bar{k}) \neq 0$ en la representación de Tucker correspondiente a F .
2. \bar{j} se encuentra en el circuito P_k correspondiente a \bar{k} como la primer parte del teorema de bases.
3. \bar{k} se encuentra en el corte Q_j correspondiente a \bar{j} como en la segunda parte del teorema de bases.

Cuando estas condiciones son satisfechas, el conjunto \tilde{F} definido en (11) forma nuevamente un bosque maximal.

Se dice que los bosques F y \tilde{F} son adyacentes, y de igual forma para las representaciones de Tucker correspondientes. La pregunta ahora es, ¿Es posible pasar de un bosque maximal F a otro bosque F^* a través de una secuencia de bosque adyacentes?. Una pregunta equivalente es, ¿Es posible pasar de una representación de Tucker a otra por una secuencia de transformaciones por pivoteo?. La respuesta es sí, las siguientes figuras muestran claramente la forma constructiva de lograrlo:

F :

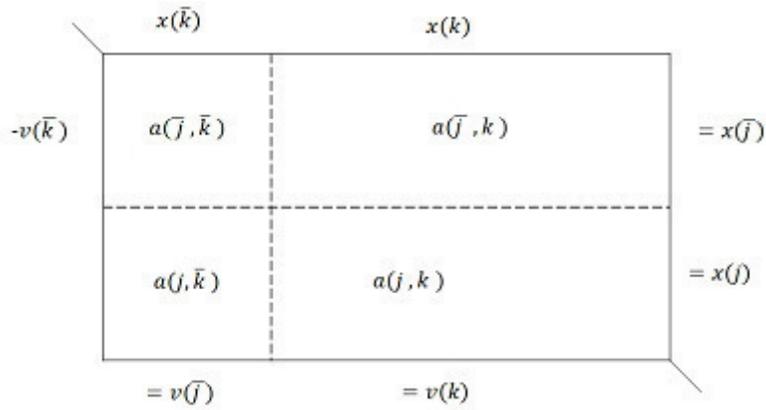


Figura 4.4.1

\tilde{F} :

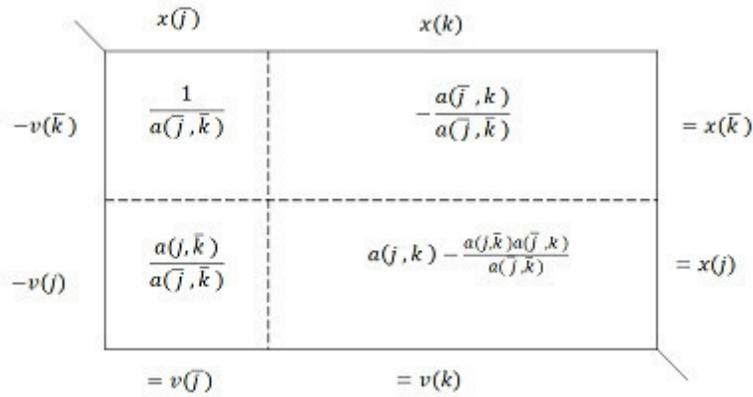


Figura 4.4.2

Empezando con la tabla para F , se pivotea en cualquier pareja (\bar{j}, \bar{k}) tal que $\bar{j} \in F \setminus F^*$ y $\bar{k} \in F^* \setminus F$, y se repite este paso hasta que ya no sea posible (es decir, transformando los símbolos de las columnas correspondientes a elementos de F^* en símbolos de renglones, intercambiándolos por símbolos de renglones exclusivamente en F , hasta que no sea posible).

En el ejemplo de representación de Tucker de la siguiente gráfica:

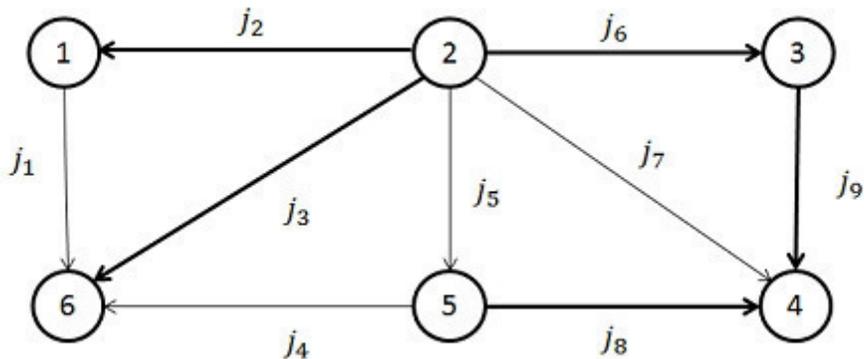


Figura 4.4.3

Se tiene

	$x(1)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(7)$	
$-v(2)$	1	0	0	0	$= x(2)$
$-v(3)$	-1	-1	0	0	$= x(3)$
$-v(6)$	0	1	-1	-1	$= x(6)$
$-v(8)$	0	-1	1	0	$= x(8)$
$-v(9)$	0	1	-1	-1	$= x(9)$
	$= v(1)$	$= v(4)$	$= v(5)$	$= v(7)$	

Un ejemplo de pivoteo con $a(3, 4)$ como pivote es:

	$x(1)$	$x(3)$	$x(5)$	$x(7)$	
$-v(2)$	$1 - ((0)(0)/(-1))$	$0/(-1)$	$0 - ((0)(0)/(-1))$	$0 - ((0)(0)/(-1))$	$= x(2)$
$-v(4)$	$1/(-1)$	$1/(-1)$	0	0	$= x(4)$
$-v(6)$	$0 - ((-1)(1)/(-1))$	$1/(-1)$	$-1 - ((0)(1)/(-1))$	$-1 - ((0)(1)/(-1))$	$= x(6)$
$-v(8)$	$0 - ((-1)(-1)/(-1))$	$-1/(-1)$	$1 - ((0)(-1)/(-1))$	$0 - ((0)(-1)/(-1))$	$= x(8)$
$-v(9)$	$0 - ((-1)(1)/(-1))$	$1/(-1)$	$-1 - ((0)(1)/(-1))$	$-1 - ((0)(1)/(-1))$	$= x(9)$
	$= v(1)$	$= v(3)$	$= v(5)$	$= v(7)$	

	$x(1)$	$x(3)$	$x(5)$	$x(7)$	
$-v(2)$	1	0	0	0	$= x(2)$
$-v(4)$	-1	-1	0	0	$= x(4)$
$-v(6)$	-1	-1	-1	-1	$= x(6)$
$-v(8)$	1	1	1	0	$= x(8)$
$-v(9)$	-1	-1	-1	-1	$= x(9)$
	$= v(1)$	$= v(3)$	$= v(5)$	$= v(7)$	

Que corresponde a la base:

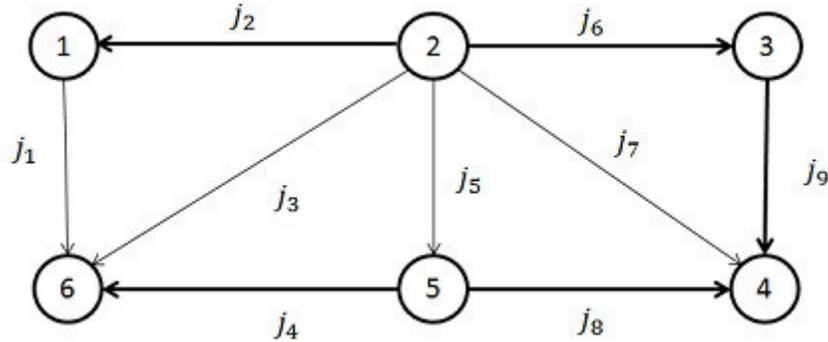


Figura 4.4.4

El pivoteo aplicado para las representaciones de Tucker de gráficas, es aplicable de la misma forma para cualquier representación general.

Una vez definidas las representaciones de Tucker, es posible generalizar los conceptos de coloración de gráficas.

4.5 Teorema y algoritmo del índice coloreado

El lema de Minty sobre circuitos y cortes en una gráfica es un caso especial de un resultado sobre los soportes primal y dual. De lo que se sigue que se hace una partición del conjunto índice J mediante una coloración, es decir se hace una partición de J en cuatro subconjuntos que pueden ser vacíos y cuyos elementos se denominarán "verdes", "blancos", "negros" y "rojos" respectivamente.

4.5.1 Teorema del índice coloreado (Forma combinatoria)

Para cualquier coloración del conjunto índice J y cualquier $I \in J$ blanco o negro, uno y sólo uno de los siguientes enunciados es cierto.

1. Hay un soporte primal P que contiene a I , tal que todo índice en P^+ es verde o blanco, mientras todo índice en P^- es verde o negro.
- 2.- Hay un soporte dual elemental Q que contiene a I , tal que todo índice en Q^+ es rojo o negro, mientras todo índice en Q^- es blanco o rojo.

Este resultado también puede ser expresado sin hacer referencia a los soportes, de la siguiente forma:

4.5.2 Teorema del índice coloreado (Forma vectorial)

Para cualquier coloración del conjunto índice J y cualquier $I \in J$ blanco o negro, uno y sólo uno de los siguientes enunciados es cierto.

1. Existe un vector $x \in C$ con $x(I) \neq 0$, tal que $x(j) \geq 0$ para cada índice blanco; $x(j) \leq 0$ para cada índice negro; y $x(j) = 0$ para cada índice rojo.

2. Existe un vector $v \in D$ con $v(I) \neq 0$, tal que $v(j) \geq 0$ para cada índice negro, $v(j) \leq 0$ para cada índice blanco, y $v(j) = 0$ para cada índice verde.

La prueba del teorema del índice coloreado se hace de forma constructiva y por lo tanto constituye un algoritmo. Esto vuelve comenzar con cualquier tabla de Tucker para C y D ; y pivotar a través de una secuencia de tablas hasta alcanzar una que cumpla con cualquiera de las alternativas 1 ó 2. Las dos alternativas son mutuamente excluyentes, pues si existiera $x \in C$ cumpliendo las condiciones de la alternativa 1 y $v \in D$ cumpliendo las condiciones de la alternativa 2, entonces

$$x \cdot v = x(I)v(I) = \sum_{blanco \neq I} x(j)v(j) + \sum_{negro \neq I} x(j)v(j) < 0$$

Y al mismo tiempo, dada la ortogonalidad de C y D , $x \cdot v = 0$. Así, el procedimiento cuyo fin siempre sera la alternativa 1 o la alternativa 2, será suficiente para establecer el teorema.

Para preparar un algoritmo de pivoteo, se necesita traducir el teorema en una explicación sobre los patrones de los signos que pueden ser encontrados en varias representaciones de Tucker. Véase la siguiente figura:

	v	b	n	r
r	0	0	0	
n	0	≤ 0	≥ 0	inc
b	0	≥ 0	≤ 0	
v	arb	arb	arb	

Figura 4.5.1

Hablamos de una columna compatible en una tabla, como una columna que cumple las condiciones en la figura anterior para signos contra colores. La entrada "arb" denota una entrada que puede tener un valor arbitrario. Así, por ejemplo, una columna cuyo índice es blanco debe tener un valor no positivo en cada renglón cuyo índice es negro. La entrada "inc" significa que cualquier columna cuyo índice es rojo es considerada incompatible. Análogamente, las condiciones para un renglón compatible están dadas en la siguiente figura.

	v	b	n	r
r	0	0	0	arb
n	0	≥ 0	≤ 0	arb
b	0	≤ 0	≥ 0	arb
v	inc			

Figura 4.5.2

Una columna compatible genera un soporte primal elemental P tal que cada índice en P^+ es verde o blanco, y cada índice en P^- es verde o negro. De hecho, si k es el índice de la columna, y k es blanco, se puede tomar P para ser el soporte P_k (Descrito en el teorema general de bases), mientras que, si k es negro, puede tomarse P como la inversa de P_k ; si k es verde, ambas elecciones pueden funcionar.

De la misma forma, un renglón compatible genera un soporte elemental dual Q tal que cada índice en Q^+ es rojo o negro, y cada índice en Q^- es rojo o blanco. Si j es el índice del renglón y j es negro, se puede tomar Q como el soporte Q_j ; si j es blanco, se puede tomar como la inversa de Q_j ; y si j es rojo, ambas elecciones funcionan.

Se dice también que una columna usa un I particular, si I es el índice de la columna o el índice de algún renglón cuya entrada en esa columna es distinta de cero; esto es, si I pertenece al soporte elemental determinado por la columna, similarmente para los renglones.

El resultado es entonces, si con una tabla de Tucker se puede llegar a una columna compatible que usa I , se ha determinado constructivamente que el enunciado 1 es verdadero, de la misma forma si se llega a un renglón compatible se ha determinado la validez del enunciado 2.

Acontinuación, se muestra un procedimiento para lograr todo lo dicho mediante pivoteo, así como reglas para asegurar que exista la terminación de tal; para así completar la demostración del teorema del índice coloreado.

4.5.3 Algoritmo del índice coloreado

Comenzar con cualquier tabla de Tucker. Dado un índice I blanco o negro, puede corresponder a un renglón o una columna que es llamada palanca del índice.

Si I corresponde a un renglón, comprobar si este renglón es compatible. Si lo es, terminar pues se cumple la alternativa 2 del teorema. Si no es compatible, es porque existe una entrada en el renglón I que no cumple con las condiciones de compatibilidad. Sea \bar{k} el índice de cualquier columna que contiene tal entrada; se debe comprobar ahora si tal columna es compatible. Si lo es, terminar pues se cumple la alternativa 1 de teorema. Si no es compatible, existe una entrada en la columna \bar{k} que no cumple con las condiciones de compatibilidad. Sea \bar{j} el índice de cualquier renglón que contiene dicha entrada. Pivotea en (\bar{j}, \bar{k}) y regresar al inicio del procedimiento.

Dualmente, si I corresponde a una columna, comprobar si esta columna es compatible. Si lo es, terminar con la alternativa 1 del teorema. Si no es una columna compatible, existe una entrada en la columna I que no cumple con las condiciones de compatibilidad. Sea \bar{j} el índice de cualquier renglón que contiene tal entrada, se debe comprobar ahora si este renglón es compatible. Si es compatible, terminar con la alternativa 2 del teorema. Si no lo es, existe una entrada en el renglón \bar{j} que no cumple las condiciones de compatibilidad. Sea \bar{k} el índice de cualquier columna que contiene tal entrada. Pivotear en (\bar{j}, \bar{k}) y regresar al inicio del procedimiento.

Sabemos por el teorema de bases que la representación de Tucker de una red contiene sólo entradas 1, -1 ó 0. De forma intuitiva se tiene que los arcos correspondientes a la columna de un arco I y cuyas entradas son distintas de cero, son aquellos arcos j que forman un ciclo con I , donde los arcos cuya entrada es 1 siguen la dirección de I y los arcos con entrada -1 están en dirección opuesta. Así que si $x(j) = 1$, y j es verde o blanco, $j \in P^+$; si $x(j) = -1$, y j es verde o negro, $j \in P^-$; de forma que la columna de I forma un soporte P para I y evidentemente constituyen un ciclo compatible con la coloración. De forma análoga, un soporte dual para Q corresponde a un corte compatible con la coloración.

Dicho lo anterior, se puede mostrar ahora que el algoritmo de índice coloreado reduce esencialmente al algoritmo de enrutamiento o coloración en una gráfica ajustándose de cierta forma. Sea G una gráfica coloreada con s, s' dos nodos distintos. Sea \bar{G} la red resultante de agregar un nodo artificial \bar{i} , y arcos de la forma (\bar{i}, i) para todo $i \in X$, coloreados como se muestra en la siguiente figura.

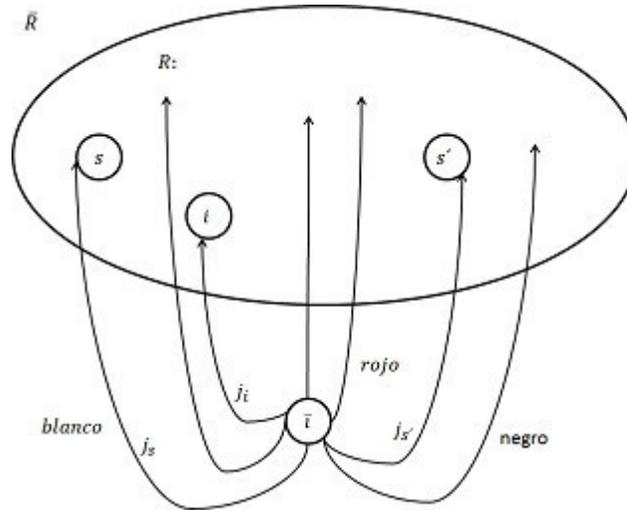


Figura 4.5.3

Suponiendo sin perder generalidad que G es conexa, los arcos de la forma (\bar{i}, i) forman un árbol expandido y por tanto corresponden a una representación de Tucker. Para saber si existe una cadena de s a s' se debe aplicar el algoritmo del índice coloreado al arco j_s correspondiente a un renglón. Una de las alternativas del teorema del índice coloreado debe cumplirse. Si se cumple la alternativa 1, tenemos que existe un soporte primal P que contiene a j_s , es decir, existe un ciclo que contiene a j_s compatible con la coloración, pero nótese además que dada la coloración dicho ciclo sólo puede contener al arco (\bar{i}, s) . Por lo tanto, se obtiene que $P \setminus \{(\bar{i}, s), (\bar{i}, s')\}$ constituye una cadena de s a s' compatible con la coloración. Si se cumple la alternativa 2, tendremos entonces que (j, s) pertenece a un corte compatible con la coloración que lo separa de s' , pues de otra forma $Q \cup (s', \bar{i})$ contendría un ciclo compatible con la coloración.

Para un arco $j \sim (i, i^*)$ negro/blanco, el lema de Minty se reduce entonces a aplicar el algoritmo del índice coloreado en \bar{G} de la siguiente forma:

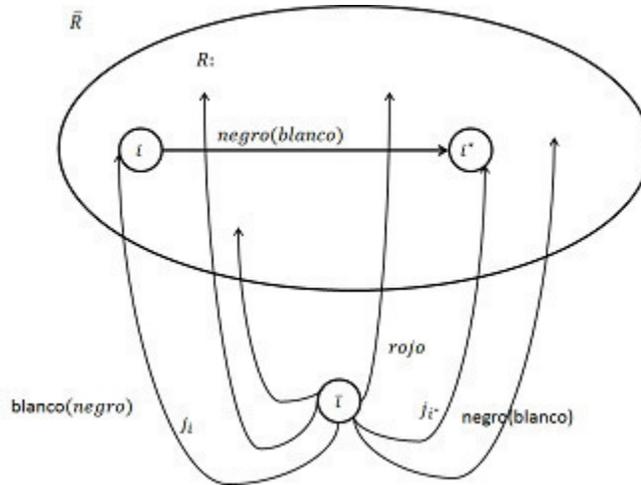


Figura 4.5.4

Donde los arcos de la forma (\bar{i}, i) forman un árbol expandido y por tanto corresponden a una representación de Tucker.

4.6 Factibilidad y restricciones

En el segundo capítulo se estudia la situación en que el flujo a través de un arco j está acotado por un intervalo de capacidad $c(j) = [c^-(j), c^+(j)]$, además de que el flujo a través de algún nodo i debe ser igual a un número b denominado demanda; de tal forma se llega a un algoritmo para encontrar un flujo que satisfaga todas estas condiciones. Esta sección está dedicada a la investigación de dichas restricciones en sistemas lineales. En sistemas lineales cada índice $j \in J$ es asociado a un intervalo real no vacío $c(j)$. Para un vector fijo $b \in \mathbb{R}^{|I|}$ y una matriz $E \in M_{|I| \times |J|}$ como se define en la sección de variables duales; se busca la solución al siguiente problema.

4.6.1 Problema primal de factibilidad

Encontrar $x \in \mathbb{R}^{|J|}$ tal que

$$\sum_{j \in J} e(i, j)x(j) = b(i) \quad \text{para todo } i \in I \quad (1)$$

$$x(j) \in c(j) \quad \text{para todo } j \in J \quad (2)$$

La existencia de una solución x al problema es caracterizada en términos del soporte elemental Q para el subespacio D correspondiente a E . Note además que cuando b es 0, las condiciones se reducen a que x pertenezca al subespacio C correspondiente a E . Es necesario recordar que existe x que satisfaga (1) si y sólo si pertenece al subespacio B de $\mathbb{R}^{|I|}$ definido en la sección de bases, el espacio de columna de E . Además de que x puede ser una solución no única.

La existencia de al menos una x que satisface (1) implica una propiedad de soportes elementales duales Q , de la relación $-u \cdot y = v \cdot x$

$$-\sum_{i \in I} u(i)b(i) = \sum_{j \in J} e_Q(j)x(j) \quad (3)$$

Para cada u correspondiente al vector $v = e_Q \in D$. Así, la cantidad de la izquierda es en efecto independiente a la u particular usada para representar e_Q y puede denotarse simplemente por b_Q , así se tiene que

$$b_Q = -\sum_{i \in I} u(i)b(i) \quad \text{para } u \text{ arbitraria con } -uE = e_Q, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} e_Q(j)x(j) = b_Q \text{ para } x \text{ que satisface (1)} \quad (5)$$

En el caso de una gráfica donde Q es un corte $[S, N \setminus S]$, b_Q corresponde a $b(S)$.

Ahora, definimos el intervalo no vacío real para cada soporte elemental dual

$$C(Q) = \sum_{j \in J} e_Q(j)C(j) \quad (6)$$

Que consiste en todos los valores tomados de

$$e_Q \cdot x = \sum_{j \in J} e_Q(j)x(j)$$

ya que cada variable $x(j)$ oscila sobre $C(j)$. Si cada intervalo $C(j)$ es cerrado $[c^-(j), c^+(j)]$, se tiene $C(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)]$ donde

$$\begin{aligned} c^+(Q) &= \sum_{j \in Q^+} e_Q(j)c^+(j) + \sum_{j \in Q^-} e_Q(j)c^-(j) \\ c^-(Q) &= \sum_{j \in Q^+} e_Q(j)c^-(j) + \sum_{j \in Q^-} e_Q(j)c^+(j) \end{aligned} \quad (7)$$

Lo cual permite hacer la generalización del teorema dado en el capítulo 2 sobre la distribución factible en sistemas lineales.

4.6.2 Teorema de factibilidad primal (Forma combinatoria)

Supóngase que existe al menos un $x \in R^{|J|}$ que satisface (1). Uno y sólo uno de los siguientes enunciados se cumple:

1. Existe un x que satisface (1) y (2)
2. Existe un soporte dual Q elemental tal que $C(Q) \subset (-\infty, b_Q)$ (En el caso de intervalos cerrados $C(j), c^+(Q) < b_Q$).

4.6.3 Teorema de factibilidad primal (Forma vectorial)

Supóngase que existe al menos un $x \in R^{|J|}$ que satisface (1). Uno y sólo uno de los siguientes enunciados se cumple:

1. Existe un x que satisface (1) y (2)
2. Existe un par de vectores u, v ; con $v = -uE$ tal que $v \cdot x < -u \cdot b$ para todos los vectores x que satisfacen (2); en este caso v puede ser considerado como un vector elemental de D y u puede ser cualquier vector con $-uE = v$.

Cuando v es un vector elemental de D , se tiene que $v = \lambda e_Q$ para algún soporte dual elemental Q , donde $\lambda > 0$. La alternativa (2) impide que la alternativa uno se cumpla, pues cualquier x que satisfaga (1) debería cumplir $v \cdot x = -\lambda \cdot b$. De esta forma, las dos alternativas del teorema son excluyentes.

Es importante también mencionar que cuando $b = 0$ el teorema se reduce a cumplir una y sólo una de los siguientes enunciados en cualesquiera dos espacios ortogonales:

1. Existe un x que satisface (2)
2. Existe un soporte dual Q elemental tal que $C(Q) \subset (-\infty, b_Q)$ (En el caso de intervalos cerrados $C(j), c^+(Q) < b_Q$). Equivalentemente, existe un vector $v \in \mathbf{D}$ tal que $v \cdot x < 0$ para todos los vectores x que satisfacen (2).

Esto permite demostrar que en \mathbf{C} y \mathbf{D} cualesquiera dos subespacios ortogonales complementarios en $\mathbb{R}^{|J|}$, y un vector $c \in \mathbb{R}^{|J|}$, existe un vector $x \in \mathbf{C}$ que satisface $x(j) \leq c(j)$ para todo $j \in J$ si y sólo si, no existe un vector $v \in \mathbf{D}$ tal que $c \cdot v < 0$. La demostración de este resultado es inmediata a partir del caso donde $b = 0$, considerando los intervalos $(-\infty, c(j)]$ para cada $j \in J$; pues si existe un vector $c \cdot v < 0$, sucedería $\sum_{j \in J} c(j)v(j) < 0$ y por tanto no podría existir un vector tal que $x(j) \leq c(j)$ para todo $j \in J$ ya que a su vez $x \cdot v < 0$ y contradiría el teorema.

4.6.4 Algoritmo de rectificación primal.

Se asume que los intervalos $C(j)$ en el problema de factibilidad primal, son intervalos cerrados.

$$C(j) = [c^-(j), c^+(j)] \quad \text{para todo } j \in J$$

Se da un vector $x \in \mathbb{R}^{|J|}$ con la propiedad

$$\sum_{j \in J} e(i, j)x(j) = b(i) \quad \text{para todo } i \in I \quad (1)$$

pero no necesariamente.

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \quad \text{para todo } j \in J \quad (2)$$

Se definen los conjuntos de índices

$$J^+ = \{j \mid x(j) > c^+(j)\}, \quad J^- = \{j \mid x(j) < c^-(j)\}$$

Se dice que los índices en $J^+ \cup J^-$ están fuera de orden. Si $J^+ = \emptyset = J^-$, x satisface (2) y por lo tanto, es una solución al problema primal de factibilidad, terminar. En otro caso, se colorean los índices $j \in J$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{verde si} & c^-(j) < x(j) < c^+(j) \\ \text{blanco si} & x(j) \leq c^-(j), x(j) < c^+(j) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{negro si} & x(j) \geq c^+(j), x(j) > c^-(j) \\ \text{rojo si} & c^-(j) = x(j) = c^+(j) \end{array}$$

Nótese que dada la coloración los índices en J^+ son necesariamente negros, mientras los índices en J^- son necesariamente blancos. Se selecciona I cualquier índice en $J^+ \cup J^-$. Aplicar el algoritmo del índice coloreado.

Si se produce un soporte elemental dual Q como en la alternativa (2) del teorema del índice coloreado, terminar. Q en realidad satisface $c^+(Q) < b_Q$ como en la alternativa (2) del teorema primal de factibilidad, así el problema primal no tiene solución.

Si se produce un soporte primal elemental como en la alternativa (1) del teorema del índice coloreado, calcular

$$\alpha = \min \begin{cases} [c^+(j) - x(j)]/e_P(j) & \text{para } j \in P^+ \\ [c^-(j) - x(j)]/e_P(j) & \text{para } j \in P^- \\ \bar{\alpha} & \end{cases}$$

Donde

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} [c^-(I) - x(I)]/e_P(I) & \text{si } I \in P^+ \text{ (i.e., } I \in J^-) \\ [c^+(I) - x(I)]/e_P(I) & \text{si } I \in P^- \text{ (i.e., } I \in J^+) \end{cases}$$

Así, $0 < \alpha < \infty$. Sea $x' = x + \alpha e_P$, x' está más cerca del intervalo C que x .

Regresar al inicio con x' en lugar de x .

Justificación del algoritmo

Si se produce un soporte dual elemental Q con cada $j \in Q^+$ rojo o negro, y cada $j \in Q^-$ rojo o blanco, por la coloración dada se tiene

$$x(j) \geq c^+(j) \text{ para todo } j \in Q^+ \text{ y } x(j) \leq c^-(j) \text{ para todo } j \in Q^-.$$

Por otro lado, al menos una de las desigualdades es estricta, a decir, para $j = I$, porque $I \in J^+ \cup J^-$. Por lo tanto,

$$e_Q \cdot x > \sum_{j \in Q^+} e_Q(j)c^+(j) + \sum_{j \in Q^-} e_Q(j)c^-(j)$$

En otras palabras, $b_Q > c^+(Q)$. Así, la alternativa (2) del teorema de factibilidad primal se cumple y por tanto no existe solución al problema primal de factibilidad.

Si se produce un soporte primal elemental P con cada $j \in P^+$ verde o blanco, y cada $j \in P^-$ verde o negro, se tiene

$$x(j) < c^+(j) \text{ para todo } j \in P^+ \text{ y } x(j) > c^-(j) \text{ para todo } j \in P^-.$$

Además, I es uno de los índices blancos o negros en P , entonces,

Sucede $I \in P^+$ con $x(I) < c^-(I)$, ó $I \in P^-$ con $x(I) > c^+(I)$.

Los número α y $\bar{\alpha}$ son finitos y positivos. De la definición de α se tiene $x(j) < x'(j) \leq c^+(j)$ para todo $j \in P^+$, $x(j) > x'(j) \geq c^-(j)$ para todo $j \in P^-$, $x(j) = x'(j)$ para todo $j \notin P$, y además

$$x(I) < x'(I) \leq c^-(I) \text{ ó } x(I) > x'(I) \geq c^+(I),$$

dependiendo de si $I \in P^+$ ó $I \in P^-$.

El propósito de haber definido α como tal es evitar "rebasar" los intervalos. Véase que si $\alpha = \bar{\alpha}$, I es removido de $J^+ \cup J^-$. Además véase también que de la misma forma, en cada iteración se removerá un índice j correspondiente a α .

Ejemplo de generalización del problema de factibilidad primal

Considérese el siguiente ejemplo como un resumen del capítulo para el mejor entendimiento del mismo:

Supóngase que se requiere encontrar el valor de x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 que cumplan con las siguientes restricciones:

$$5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 15$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 2x_5 = 13$$

$$0 \leq x_1 \leq 13$$

$$-8 \leq x_2 \leq 16$$

$$0 \leq x_3 \leq 12$$

$$-1 \leq x_4 \leq 21$$

$$-12 \leq x_5 \leq 13$$

Sea E la matriz generada por el sistema de ecuaciones:

5	2	6	7	6
4	2	9	8	4
3	4	2	1	2

Soportes Primitives y Duales: Observése como ejemplo los siguientes vectores:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, -\frac{4}{5}, 1, -\frac{6}{5});$$

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 1, 0, 0\right)$$

Son vectores que cumplen con: $Ex = 0$ y $-uE = v$; de tal forma que el conjunto de índices $P = \{1, 3, 4, 5\}$ con $P^+ = \{1, 4\}$ y $P^- = \{3, 5\}$ cumple con ser un soporte primal. Por otro lado, el conjunto de índices $Q = \{1, 2, 3\}$ con $P^+ = \{1, 2, 3\}$ y $P^- = \emptyset$ cumple con ser un soporte dual.

La importancia de las representaciones de Tucker radica en que mediante ellas es posible determinar los vectores que cumplen con $Ex = 0$ y $-uE = v$, y por tanto, los soportes primales y duales en una matriz.

Representación de Tucker: Para determinar una representación de Tucker en una matriz se hace uso del algoritmo descrito con anterioridad:

Tomando en cuenta la matriz generada por el sistema de ecuaciones se obtiene:

5	2	6	7	6
4	2	9	8	4
3	4	2	1	2

Considerando la submatriz formada por las columnas 3,4 y 5; se determina la matriz inversa:

$$B^{-1} = \begin{array}{ccc} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{8} \end{array}$$

La representación de Tucker queda definida por $T = -B^{-1}E$:

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{6}{5} \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{9}{5} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{29}{20} \end{array} \\ & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Las columnas de la representación de Tucker determinan vectores x que cumplen con $Ex = 0$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, -\frac{4}{5}, 1, -\frac{6}{5});$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, -\frac{9}{5}, \frac{5}{2}, -\frac{29}{20})$$

Por otro lado, la representación de Tucker también indica vectores v que cumplen con $-uE = v$, los vectores u se determinan mediante la inversa de la submatriz construida B^{-1} :

$$(u_1, u_2, u_3) = (\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}) \quad \text{con} \quad (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 1, 0, 0);$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (-\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}) \quad \text{con} \quad (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (-1, -\frac{5}{2}, 0, 1, 0);$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (-\frac{7}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{3}{8}) \quad \text{con} \quad (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (\frac{6}{5}, \frac{29}{20}, 0, 0, 1);$$

Regresando al problema original, se tiene que encontrar el valor de x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 que cumplan con las siguientes restricciones:

$$5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 15$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 2x_5 = 13$$

$$0 \leq x_1 \leq 13$$

$$-8 \leq x_2 \leq 16$$

$$0 \leq x_3 \leq 12$$

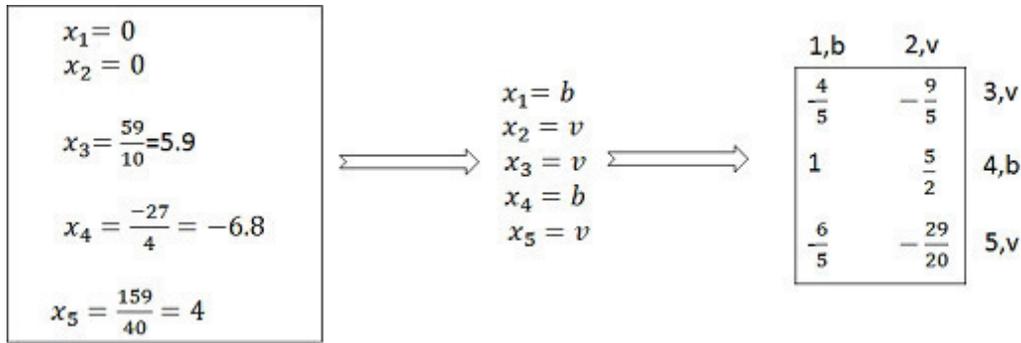
$$-1 \leq x_4 \leq 21$$

$$-12 \leq x_5 \leq 13$$

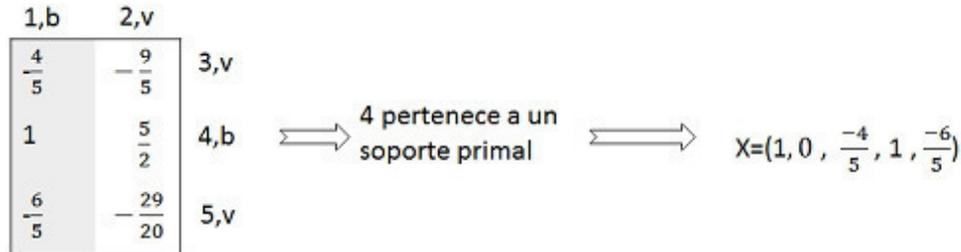
Una solución al problema se determina por $B^{-1}b$:

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{59}{10} \\ -\frac{27}{4} \\ \frac{159}{40} \end{bmatrix}$$

Con la que se le asigna la siguiente coloración a los índices y por lo tanto a la representación de Tucker:



Algoritmo del índice coloreado: Con la solución inicial, se observa que x_4 no cumple con las restricciones, por lo que al índice 4 se le aplicará el algoritmo del índice coloreado descrito antes:



Se calcula α y se actualiza la solución:

$$\alpha = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{(13-0)}{\frac{1}{5}} \\ \frac{(0-\frac{59}{10})}{\frac{-4}{5}} \\ \frac{(-1-\frac{-27}{4})}{\frac{1}{(-12-4)}} \\ \frac{-6}{\frac{-6}{5}} \end{array} \right. = \frac{23}{4}$$

$$x^* = (0, 0, \frac{59}{10}, \frac{-27}{4}, \frac{159}{40}) + (\frac{23}{4} * (1, 0, \frac{-4}{5}, 1, \frac{-6}{5})) = (\frac{23}{4}, 0, \frac{13}{10}, -1, \frac{-117}{40})$$

$$x^* \approx (5.8, 0, 1.3, -1, -2.9)$$

La cual es una solución que cumple con las restricciones del problema.

Otro ejemplo del algoritmo de rectificación primal es el siguiente:

Supóngase que se requiere encontrar los valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 tal que se cumpla:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 6 \\ 0x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 10 \\ 4x_1 + 1x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 12 \end{aligned}$$

Donde se debe cumplir además que :

$$\begin{aligned} 1 &\leq x_1 \leq 5 \\ 2 &\leq x_2 \leq 4 \\ 0 &\leq x_3 \leq 6 \\ 0 &\leq x_4 \leq 3 \\ 0 &\leq x_5 \leq 2 \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la siguiente matriz:

3	2	0	0	3	6
0	3	1	0	1	10
4	1	9	4	4	12

donde $I = \{1, 2, 3\}$ y $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Para generar una representación de Tucker del problema, se debe encontrar una submatriz B de 3×3 tal que las columnas son linealmente independientes. Tomando los índices 1,2,3 en J , de acuerdo al algoritmo general para encontrar una representación de Tucker se obtiene:

<table border="1"> <tr> <td>$\frac{13}{43}$</td> <td>$\frac{-9}{43}$</td> <td>$\frac{1}{43}$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{2}{43}$</td> <td>$\frac{27}{86}$</td> <td>$\frac{-3}{86}$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{-6}{43}$</td> <td>$\frac{5}{86}$</td> <td>$\frac{9}{86}$</td> </tr> </table>	$\frac{13}{43}$	$\frac{-9}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{27}{86}$	$\frac{-3}{86}$	$\frac{-6}{43}$	$\frac{5}{86}$	$\frac{9}{86}$	<table border="1"> <tr> <td>3</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>9</td> <td>4</td> <td>4</td> </tr> </table>	3	2	0	0	3	0	3	1	0	1	4	1	9	4	4	=	<table border="1"> <tr> <td>-1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{-4}{43}$</td> <td>$\frac{-34}{43}$</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>$\frac{6}{43}$</td> <td>$\frac{-27}{86}$</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>$\frac{-18}{43}$</td> <td>$\frac{-5}{86}$</td> </tr> </table>	-1	0	0	$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$	0	-1	0	$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$	0	0	-1	$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$
$\frac{13}{43}$	$\frac{-9}{43}$	$\frac{1}{43}$																																								
$\frac{2}{43}$	$\frac{27}{86}$	$\frac{-3}{86}$																																								
$\frac{-6}{43}$	$\frac{5}{86}$	$\frac{9}{86}$																																								
3	2	0	0	3																																						
0	3	1	0	1																																						
4	1	9	4	4																																						
-1	0	0	$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$																																						
0	-1	0	$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$																																						
0	0	-1	$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$																																						

La matriz inversa de B también nos ayuda a obtener una solución inicial con $x = B^{-1}b$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Con la solución inicial, obtenemos la siguiente coloración de los índices, en la representación de Tucker

x_4, b	x_5, b	
$\frac{-4}{43}$	$\frac{-34}{43}$	x_1, b
$\frac{6}{43}$	$\frac{-27}{86}$	x_2, v
$\frac{-18}{43}$	$\frac{-5}{86}$	x_3, v

Con la solución inicial, se observa que x_1 no cumple con las restricciones $[c^-(j), c^+(j)]$, por lo que se debe aplicar el algoritmo de índice coloreado a la respectiva representación de Tucker.

Como x_1 corresponde a un renglón, se observa que todas las entradas son de color blanco, y además son menores a cero. Por lo que se concluye que el renglón es compatible con la coloración, es decir, genera un soporte elemental dual Q ; y por tanto el problema planteado no tiene solución.

4.7 Problema dual de factibilidad

Encontrar $v \in R^{|J^1|}$ tal que

$$\text{Existe } u \in R^{|I|} \text{ con } -uE = v, \text{ (es decir, } v \in D) \quad (9)$$

$$v(j) \in D(j) \text{ para todo } u \in J \quad (10)$$

Para cada soporte primal elemental, sea

$$D(P) = \sum_{j \in P} e_P(j)D(j) \quad (11)$$

De esta forma, $D(P)$ es un intervalo no vacío consistente en todos los valores tomados por $e_P \cdot v$ como las variables $v(j)$ que oscilan libremente sobre los intervalos $D(j)$ (Sin tomar en cuenta si $v \in D$ o no). Si sucede que cada $D(j)$ es un intervalo cerrado $[d^-(j), d^+(j)]$ se tiene que $D(P) = [d^-(P), d^+(P)]$, donde

$$\begin{aligned} d^+(P) &= \sum_{j \in P^+} e_P(j)d^+(j) + \sum_{j \in P^-} e_P(j)d^-(j) \\ d^-(P) &= \sum_{j \in P^+} e_P(j)d^-(j) + \sum_{j \in P^-} e_P(j)d^+(j) \end{aligned} \quad (12)$$

4.7.1 Teorema dual de factibilidad.

Uno y sólo uno de los siguientes enunciados se cumple:

1. Existe un vector v que satisface 9 y 10.

2. Existe un soporte primal elemental P tal que $D(P) \subset (-\infty, 0)$ (En caso de intervalos cerrados, $d^+(P) < 0$); equivalentemente, existe un $x \in C$ tal que $v \cdot x < 0$ para cada $v \in R^{|J|}$ que satisface (10).

4.7.2 Algoritmo dual de rectificación

Suponiendo que los intervalos $D(j)$ son cerrados:

$$D(j) = [d^-(j), d^+(j)] \text{ para todo } j \in J.$$

Un vector $v \in R^{|J|}$ va de la mano para algún $u \in R^{|I|}$ que satisface

$$v(j) = -\sum_{i \in I} u(i)e(i, j) \text{ para todo } j \in J$$

pero no necesariamente

$$d^-(j) \leq v(j) \leq d^+(j) \text{ para toda } j \in J$$

Se definen los conjuntos de índices

$$J^+ = \{j \mid v(j) > d^+(j)\}, \quad J^- = \{j \mid v(j) < d^-(j)\}.$$

Los índices en $J^+ \cup J^-$ se dice que están fuera de orden. Si $J^+ = \emptyset = J^-$, v satisface (8) y por lo tanto es una solución al problema de factibilidad dual; terminar. En otro caso, colorear los índices $j \in J$ como sigue:

verde si	$d^-(j) = v(j) = d^+(j)$
blanco si	$d^-(j) < v(j) \leq d^+(j)$
negro si	$d^-(j) \geq v(j) < d^+(j)$
rojo si	$d^-(j) < v(j) < d^+(j)$

Seleccionar cualquier índice I en $J^+ \cup J^-$. Los índices en J^+ son necesariamente blancos, mientras que los índices en J^- son negros necesariamente. Aplicar el algoritmo del índice coloreado.

Si se produce un soporte primal P como en la alternativa 1 del teorema del índice coloreado, terminar : P satisface $d^+(P) < 0$ como en la alternativa 2 del teorema de factibilidad dual, y por lo tanto, el problema de factibilidad dual no tiene solución.

Si se produce un soporte dual Q como en la alternativa 2 del teorema del índice coloreado, calcular

$$\alpha = \text{Min} \begin{cases} [d^+(j) - v(j)] / e_Q(j) & j \in Q^+ \\ [v(j) - d^-(j)] / e_Q(j) & j \in Q^- \\ \bar{\alpha} & \end{cases}$$

en donde

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} d^-(I) - v(I), & \text{si } I \in Q^+ \text{ (i.e., } I \in J^-) \\ v(\bar{j}) - d^+(\bar{j}), & \text{si } j \in Q^- \text{ (i.e., } I \in J^+) \end{cases}$$

Así, $0 < \alpha < \infty$. Sea $v' = v + \alpha e_Q$, v' está más cerca del intervalo D que v . Además v' satisface nuevamente $v'(j) = -\sum_{i \in I} u'(i) e(i, j)$, para algún $u' \in \mathbb{R}^I$ (es decir, $u' = u + \alpha \bar{u}$ para cualquier \bar{u} tal que $-\bar{u}E = e_Q$).

Justificación del algoritmo

Si se produce un soporte primal con cada $j \in P^+$ verde o blanco, y cada $j \in P^-$ verde o negro, se tiene por la coloración dada que

$v(j) \geq d^+(j)$ para todo $j \in P^+$ y $v(j) \leq d^-(j)$ para todo $j \in P^-$, lo que implica $d^+(j) - v(j) \leq 0$ para todo $j \in P^+$ y $d^-(j) - v(j) \geq 0$ para todo $j \in P^-$.

Por otro lado, al menos una de las desigualdades es estricta, a decir, para $j = I$, porque $I \in J^+ \cup J^-$. Por lo tanto,

$$\sum_{j \in P^+} d^+(j) - v(j) - (\sum_{j \in P^-} d^-(j) - v(j)) < 0$$

es decir,

$$\sum_{j \in P^+} d^+(j) - \sum_{j \in P^-} d^-(j) = d^+(P) < 0$$

Cumplíendose así el enunciado (2) del teorema de factibilidad dual, y por tanto el problema de factibilidad dual no tiene solución.

Si se produce un soporte dual Q con cada $j \in Q^+$ negro o rojo y cada $j \in Q^-$ blanco o rojo, se tiene $v(j) < d^+(j)$ para todo $j \in Q^+$ y $d^-(j) < v(j)$ para todo $j \in Q^-$.

Analicemos ahora qué sucede con los índices I en $J^+ \cup J^-$.

-Si $I \in J^+$ sucede que $v(I) > d^+(I)$, así que $\bar{\alpha} = v(I) - d^+(I) > 0$

-Si $I \in J^-$ sucede que $v(I) < d^-(I)$, así que $\bar{\alpha} = d^-(I) - v(I) > 0$.

Los número α y $\bar{\alpha}$ son finitos y positivos. De lo cual podemos concluir que al actualizar las variables v , hacemos que $v(j)$ para $j \in Q$ se acerque en α unidades más a sus respectivos intervalos $[d^-(j), d^+(j)]$.

Capítulo 5: Paquetería de Computo

El presente capítulo está enfocado en describir la estructura del programa que se realizó como apoyo para encontrar solución a un problema de factibilidad primal. Se utiliza como herramienta Matlab por la facilidad que se tiene al programar arreglos matriciales en este.

5.1 Consideraciones Generales

Para poder usar el programa es necesario contar con la versión 8.5 de MATLAB. El uso del éste resulta sumamente fácil para el usuario; pues sólo es necesario que se introduzca la matriz E , las cotas inferiores y superiores de los intervalos de capacidad y el vector de oferta b .

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Debe ser necesariamente escrita entre corchetes de la siguiente forma::

$$E = [a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n}; \ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n}; \ \dots; \ a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mn}]$$

Se debe resaltar que cada punto y coma marca un nuevo renglón en la matriz. El vector de oferta b debe ser escrito como una matriz de $m \times 1$ de la siguiente forma:

$$b = [b_1; b_2; \dots; b_m]$$

Las cotas de los intervalos de capacidad c^+ y c^- se renombran como li y ls respectivamente; y se deben escribir como vectores de la siguiente forma:

$$c^- = li = [li_1 \ li_2 \ li_3 \ \dots \ li_n]$$
$$c^+ = ls = [ls_1 \ ls_2 \ ls_3 \ \dots \ ls_n]$$

Como ejemplo, considérese el siguiente problema:

$$32x_1 + 34x_2 + 32x_3 + 12x_4 + 12x_5 = 90$$
$$12x_1 + 23x_2 + 45x_3 + 32x_4 + 12x_5 = 45$$
$$23x_1 + 14x_2 + 22x_3 + 11x_4 + 22x_5 = 123$$

Con

$$0 \leq x_1 \leq 13$$
$$-20 \leq x_2 \leq 16$$

$$-4 \leq x_3 \leq 12$$

$$-1 \leq x_4 \leq 21$$

$$-2 \leq x_5 \leq 13$$

Se deben ingresar las correspondientes matrices y vectores como se indicó en los renglones 7,8,9 y 10 del editor del programa:

```

1
2
3 - clear all
4 - clc
5 - close all
6
7 - E = [32 34 32 12 12; 12 23 45 32 12; 23 14 22 11 22]
8 - b = [90;45;123]
9 - li = [0 -20 -4 -1 -12 ]
10 - ls = [13 16 12 21 13]
11

```

En la ventana de comandos se mostrarán los datos ingresados de la siguiente forma:

```

Command Window
E =
    32    34    32    12    12
    12    23    45    32    12
    23    14    22    11    22

b =
    90
    45
   123

li =
     0   -20    -4    -1   -12

ls =
    13    16    12    21    13
fx

```

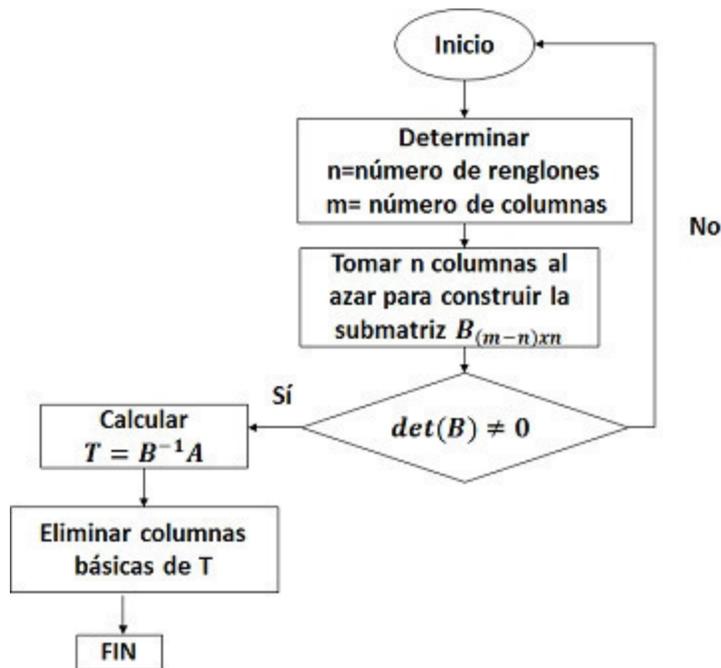
5.2 Solución inicial y representación de Tucker

El programa comienza detectando el número de renglones y columnas de la matriz $E_{m \times n}$; con lo que comienza a analizar n filas al azar; formando una submatriz B ; y calcula el determinante de B .

Si el determinante es distinto de cero entonces es una base del espacio columna y se usa para calcular una solución inicial: $x = B^{-1}b$.

Por otro lado, esta base hace posible la construcción de una representación inicial de Tucker de la forma estudiada en el capítulo cuatro, en donde $T = -B^{-1}A$ y se eliminan las columnas básicas, con lo que se obtiene una matriz de $(m - n) \times m$.

Esta subrutina del programa se refleja en el siguiente diagrama de flujo:



En la ventana de comandos se puede observar la representación inicial de Tucker y la solución con la que se comienza el algoritmo:

```

Command Window

T =

    -1.5810    -1.8425    -1.0000     0.0000     0
     2.0277     1.7476     0.0000    -1.0000     0
    -0.4783     0.3323         0    -0.0000    -1.0000

x =

     0
     0
    2.2614
   -3.7199
    5.1894

```

5.2.1 Coloración

La coloración definida para cada solución encontrada es:

verde si	$c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco si	$x(j) \leq c^-(j), x(j) < c^+(j)$
negro si	$x(j) \geq c^+(j), x(j) > c^-(j)$
rojo si	$c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

Para facilitar la programación del algoritmo; cada color es representado por una etiqueta numérica:

Verde=100
 Rojo=200
 Negro=300
 Blanco=400

Para poder aplicar el algoritmo del índice coloreado sobre T ; es necesario asociarle los índices de las variables a cada renglón y a cada columna; así como los colores de los mismos; por lo que se crea una matriz mti de $(m - n + 2) \times (m + 2)$ que contiene toda la información.

Command Window

```
mti =  
  
      0      1.0000      2.0000      0  
3.0000 -1.5810 -1.8425 100.0000  
4.0000  2.0277  1.7476 400.0000  
5.0000 -0.4783  0.3323 100.0000  
      0 400.0000 100.0000      0
```

En este caso los renglones están asociados a las variables básicas correspondientes a $x(3)$, $x(4)$ y $x(5)$; y las columnas a las variables no básicas correspondientes a $x(1)$ y $x(2)$, donde $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En la matriz mti se muestran los índices de J en la primer columna y en el primer renglón.

Por otro lado, con la solución obtenida se tiene que:

$x(1) = 0$ entonces la coloración del índice 1 es blanca, que se representa con la etiqueta 400

$x(2) = 0$ entonces la coloración del índice 2 es verde, que se representa con la etiqueta 100

$x(3) = 2.2614$ entonces la coloración del índice 3 es verde, que se representa con la etiqueta 100

$x(4) = -3.7199$ entonces la coloración del índice 4 es blanca, que se representa con la etiqueta 400

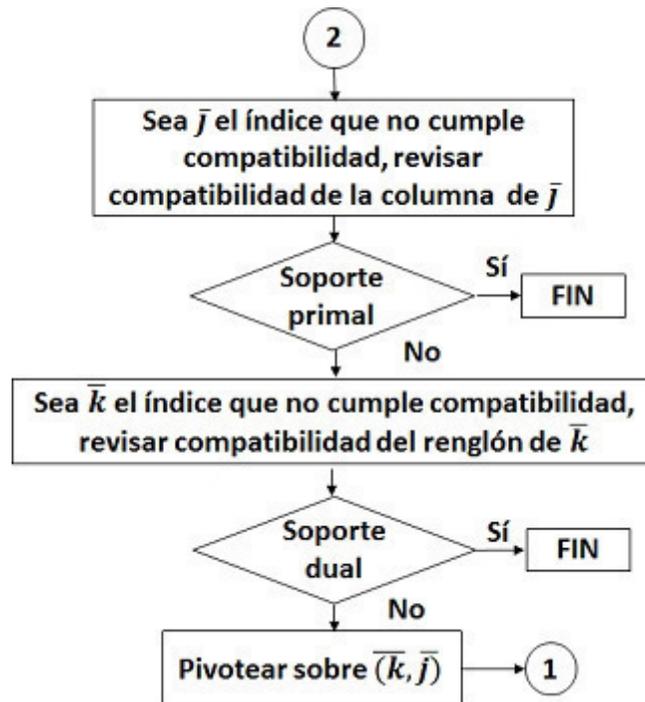
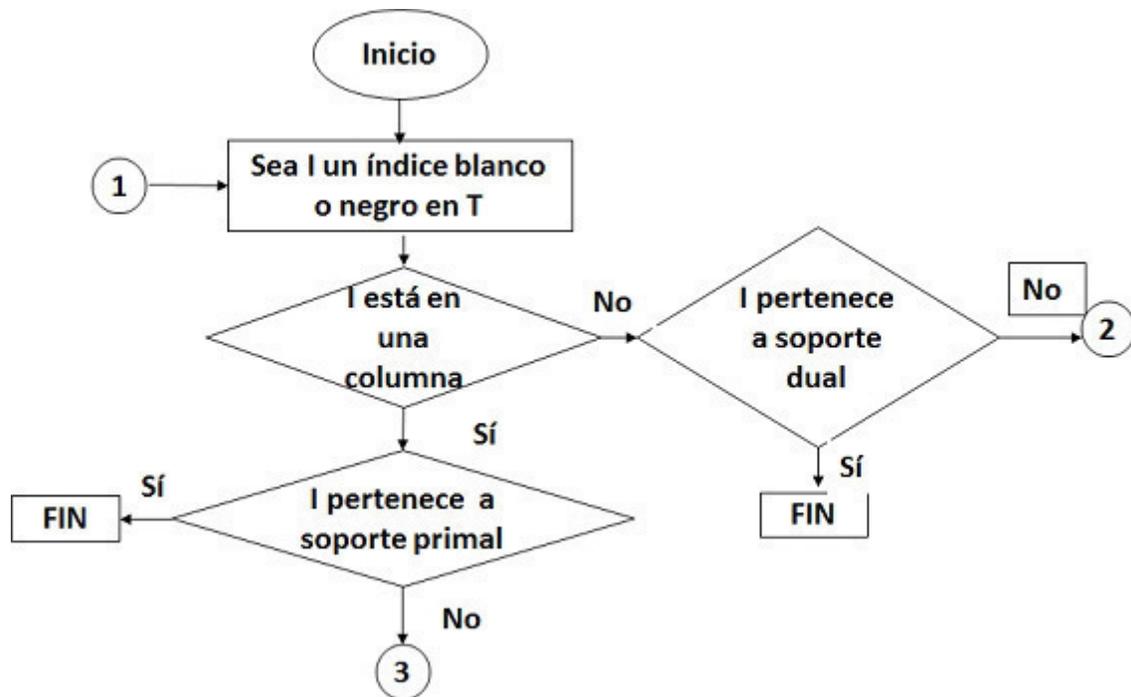
$x(5) = 5.1894$ entonces la coloración del índice 5 es verde, que se representa con la etiqueta 100

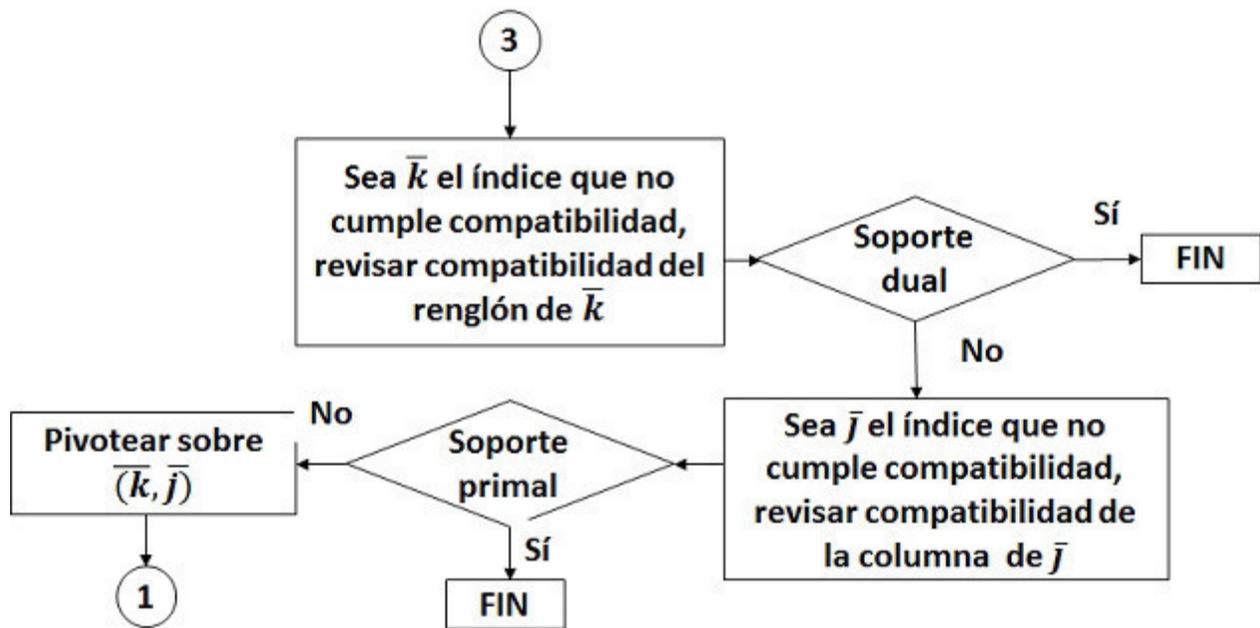
Las etiquetas de color para cada índice de J se muestran en el último renglón y la última columna de la matriz mti .

5.3 Algoritmo del índice coloreado y nuevas soluciones

A partir de la solución inicial; se busca el primer x_i que no cumpla con las restricciones de factibilidad; y con ello se busca el índice i en mti para aplicarle el algoritmo del índice coloreado tal cual se describe en el capítulo anterior.

Esta subrutina se representa en el siguiente diagrama de flujo:





El programa muestra el resultado del algoritmo del índice coloreado de la siguiente forma:

1. Analiza cada una de las variables respecto a las restricciones:

```

Command Window
La variable 1 cumple con las restricciones
La variable 2 cumple con las restricciones
La variable 3 cumple con las restricciones
La variable 4 no cumple con las restricciones
La variable 5 cumple con las restricciones
  
```

2. Muestra el resultado del algoritmo respecto a la variable que se detecto fuera de los intervalos de capacidad:

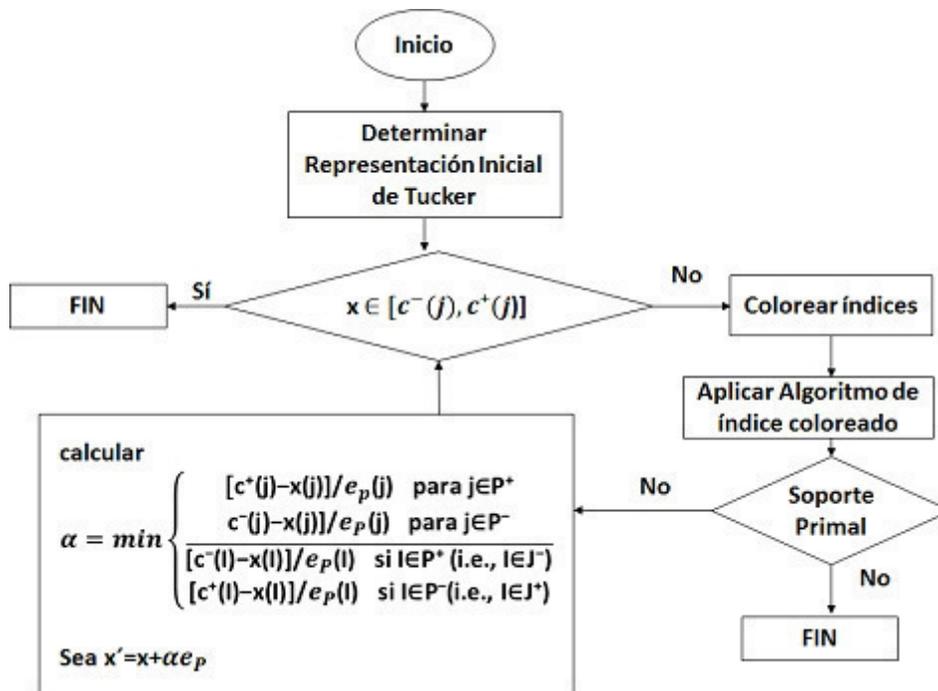
```
Command Window
El índice
vs =
    4
pertenece a un soporte primal
col =
    1
mncp =
    0    1.0000    0
    3.0000   -1.5810  100.0000
    4.0000    2.0277  400.0000
    5.0000   -0.4783  100.0000
    0  400.0000    0
```

La matriz *mcp* muestra el soporte, en este caso el soporte está dado por el conjunto de índices 1,3,4 y 5.

5.4 Solución del problema de factibilidad primal

De la misma forma, si *i* (en el programa denominado *vs*) pertenece a un soporte dual, el problema no tiene solución; en otro caso, se calcula alfa para obtener una nueva solución.

El nuevo resultado conlleva una nueva coloración, por lo que el ciclo se repite hasta encontrar una solución factible, o en su caso; determinar la no existencia de una solución al problema.



En el programa se observa de la siguiente forma:

```

Command Window

alfa =

    2.7199

nvas =

    1.0000    0   -1.5810    2.0277   -0.4783

x =

    2.7199
         0
   -2.0388
    1.7951
    3.8886

La solución encontrada cumple las restricciones>>
>>
  
```

Véase ahora el siguiente ejemplo:

$$32x_1 + 34x_2 + 32x_3 + 12x_4 + 12x_5 = 90$$

$$12x_1 + 23x_2 + 45x_3 + 32x_4 + 12x_5 = 45$$

$$23x_1 + 14x_2 + 22x_3 + 11x_4 + 22x_5 = 123$$

Con

$$0 \leq x_1 \leq 13$$

$$-20 \leq x_2 \leq 16$$

$$11 \leq x_3 \leq 12$$

$$-1 \leq x_4 \leq 21$$

$$-2 \leq x_5 \leq 13$$

Se introduce la matriz y los vectores correspondientes:

```

Command Window

E =

    32    34    32    12    12
    12    23    45    32    12
    23    14    22    11    22

b =

    90
    45
   123

li =

     0   -20    11    -1   -12

ls =

fx  13    16    12    21    13

```

El programa determina una representación de Tucker y una solución inicial:

```

T =
    -1.1603   -1.0000    0.0000    0.5722    0.0000
     0.5567     0    -1.0000   -1.0543    0.0000
    -0.8638   -0.0000     0     0.1901   -1.0000

x =
     0
    2.1286
   -1.6604
     0
    5.8968

mti =
     0     1.0000     4.0000     0
    2.0000   -1.1603     0.5722   100.0000
    3.0000    0.5567   -1.0543   400.0000
    5.0000   -0.8638     0.1901   100.0000
fx     0  400.0000  100.0000     0

```

Se analiza la solución en cuanto a las restricciones de capacidad:

```

Command Window
La variable 1 cumple con las restricciones
La variable 2 cumple con las restricciones
La variable 3 no cumple con las restricciones
La variable 4 cumple con las restricciones
La variable 5 cumple con las restricciones

```

La variable $x(3)$ no cumple con las restricciones, por lo que se aplica el algoritmo del índice coloreado sobre el índice 3 en la representación de Tucker:

```

Command Window

alfa =

    12.6604

nvas =

    1.0000   -1.1603    0.5567         0   -0.8638

x =

    12.6604
   -12.5607
     5.3877
         0
    -5.0394

```

```

Command Window

El índice
vs =
     3
pertenece a un soporte primal
col =
     1
mncp =
      0    1.0000         0
  2.0000   -1.1603  100.0000
  3.0000    0.5567  400.0000
  5.0000   -0.8638  100.0000
      0  400.0000         0
fx

```

Como se encuentra en un soporte primal se calcula una nueva solución:

Se analiza la consistencia de esta solución respecto a las restricciones de capacidad

```
Command Window

mti =

      0      1.0000      4.0000      0
  2.0000  -1.1603      0.5722  100.0000
  3.0000      0.5567  -1.0543  400.0000
  5.0000  -0.8638      0.1901  100.0000
      0  100.0000  100.0000      0

La variable 1 cumple con las restricciones
La variable 2 cumple con las restricciones
La variable 3 no cumple con las restricciones
La variable 4 cumple con las restricciones
La variable 5 cumple con las restricciones

vs =
```

Esta última tampoco es factible, así que se sigue iterando:

```
Command Window

alfa =

      0.3396

nvas =

      1.7963  -2.0842      1.0000      0  -1.5517

x =

      13.2704
     -13.2685
       5.7273
          0
     -5.5664
```

```
Command Window

alfa =

    0.2704

nvas =

   -1.0000    0.8581    0   -0.5280    0.763

x =

   13.0000
  -13.0365
    5.7273
   -0.1428
   -5.3600
```

```
Command Window

alfa =

   1.0000e-04

nvas =

   -1.0000    1.1603   -0.5567    0    0.8638

x =

   13.0000
  -15.8982
   11.0000
   -5.1440
   -6.3109
```

Con esta última solución se determina la no existencia de una solución para el problema:

Command Window

```
mti =  
  
      0    1.0000    4.0000     0  
2.0000 -1.1603    0.5722 100.0000  
3.0000  0.5567   -1.0543 400.0000  
5.0000 -0.8638    0.1901 100.0000  
      0 300.0000 400.0000     0  
  
La variable 1 no cumple con las restricciones  
La variable 2 cumple con las restricciones  
La variable 3 no cumple con las restricciones  
La variable 4 no cumple con las restricciones  
La variable 5 cumple con las restricciones  
  
vs =  
  
      1
```

Command Window

```
El índice  
  
vs =  
  
      1  
  
pertenece a un soporte dual  
El problema no tiene solución  
>>  
^^
```


CONCLUSIONES

En los tres primeros capítulos de la presente tesis se plantearon de forma minuciosa algunos problemas de factibilidad sobre gráficas y los algoritmos de resolución correspondientes haciendo uso de resultados de coloración de gráficas. Para poder tener un mejor entendimiento de cada uno de los conceptos que implica la generalización dichos problemas, fue necesario primero trasladarlos de la gráfica a su matriz de incidencia, para luego poder trabajar sobre cualquier matriz con entradas reales.

El estudio de las representaciones de Tucker y el teorema de bases fue fundamental para definir los soportes primales y duales que generalizan los conceptos de circuitos y cortes.

Aplicar coloración a los índices de una matriz con entradas reales permitió observar el teorema del índice coloreado, que equivale al Lema de Minty en una gráfica, y se desarrolló el algoritmo del índice coloreado.

Las representaciones de Tucker, los soportes primales, soportes duales y el algoritmo del índice coloreado proveyeron los elementos necesarios para poder adentrarse a los problemas de factibilidad en su forma generalizada y por tanto desarrollar algoritmos para encontrar su solución o determinar la no existencia de la misma.

La dualidad es un rasgo característico en los problemas de teoría de gráficas que permitió plantear de forma paralela el problema del diferencial factible en el capítulo tres. Mediante esta dualidad también fue posible formular la generalización del problema del diferencial factible. Esta tesis se enfocó principalmente en el estudio del problema de factibilidad primal, sin embargo; el desarrollo del mismo provee los elementos suficientes para el de factibilidad dual, así como la generalización del algoritmo correspondiente.

Antes de programar el algoritmo general de flujo factible, fue necesario automatizar una subrutina para encontrar una representación inicial de Tucker, así como el algoritmo del índice coloreado.

El programa completo resulta una herramienta sumamente sencilla para el usuario pues sólo debe ingresar la matriz correspondiente, las cotas superiores e inferiores de los intervalos de capacidad y el vector de oferta b . Este programa constituye además una herramienta que permite el proceso de experimentación y puede ser utilizada como apoyo en los cursos de Investigación de Operaciones.

Los problemas de flujo máximo-corte mínimo y cadena mínima-tensión máxima resultan de interés por lo que fueron mencionados y estudiados en los primeros capítulos; a pesar de que no se ahondó en ellos, esta tesis sirve como una herramienta para comenzar a desarrollar su generalización. Con este antecedente, se da la pauta para generalizar problemas de optimización cuyas restricciones contemplen las condiciones de factibilidad analizadas en este trabajo.

Bibliografía

-HERNÁNDEZ AYUSO, M.C., Introducción a la Teoría de Redes. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

-ROCKAFELLAR, R.T. Network Flows and Monotropic Optimization. Athena Scientific, 1998.

-BAZARAA, M.S., JARVIS, J.J, AND SHERALI, H.D. Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, 1990.

-ATTAWAY, S. MATLAB: a practical introduction to programming and problem solving. UK:Butterworth-Heinemann, 2019.

- LÓPEZ SOTO, C.O. Un poco de color en problemas de flujo, Tutora: Hernández Ayuso M.C. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.

-GONZÁLEZ ISUNZA, G. L.N. Analisis de Flujos, Tutora: Hernández Ayuso M.C. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 1996.

Apendice

Código de Programa

```
clear all
clc
close all
A = [32 34 32 12 12; 12 23 45 32 12; 23 14 22 11 22]
b = [90;45;123]
li = [0 -20 -4 -1 -12 ]
ls = [13 16 12 21 13]
[k,l] = size(A);
x = zeros(1,1);
y = zeros(1,1);
z=zeros(k+1,1);
B = 0;
m=k;
n=l-k;
while B == 0
t = randperm(1 , k);
t = sort(t);
B = A(:, t);
u = det(B);
if abs(u) >.0001
P = inv(B);
T = -P*A
Tuc = T;
c = P*b;
% Tuc(:,t)=[];
x(t,1) =c
else
B = 0;
end
end
solf=0;
while solf==0
w=0;
for i = 1:l
if (li(i) <= x(i)) & (x(i) <= ls(i)) || li(i)-x(i)<=.0000001 & (x(i) <= ls(i)) || li(i)<=x(i)
& (x(i)- ls(i))<=.0000001
w=w+0;
else
w=w+1;
end
end
end
```

```

if w==0
fprintf('La solución encontrada cumple las restricciones')
break
solf=1
else
for i = 1:l
if (li(i) < x(i)) && (x(i) < ls(i));
y(1,i) = 100; %Verde
elseif (li(i) == x(i)) & (x(i) == ls(i));
y(1,i) = 200; %Rojo
elseif (li(i) < x(i)) & (x(i) >= ls(i));
y(1,i) = 300; %negro
elseif (li(i) >= x(i)) & (x(i) < ls(i));
y(1,i) = 400; %blanco
else
break
end
end
end
T = -P*A;
Tuc = T;
Tuc=[Tuc;y];
Tuc(:,[t])=[];
z= y( : , t);
z=[z,0];
z = transpose(z);
ttt=1:l;
ttt(:,[t])=[];
ttt=[0,ttt,0];
tt=transpose([t,0]);
mti=[ttt;tt,Tuc,z]
mt=[Tuc,z];
for i = 1:l
if (li(i) <= x(i)) & (x(i) <= ls(i))
fprintf('La variable %i cumple con las restricciones\n',i)
else
fprintf('La variable %i no cumple con las restricciones\n',i)
end
end
end
vs=1;
for i=1:l
if (li(i) <= x(i)) & (x(i) <= ls(i));
vs=vs+1;
else

```

```

break
end
end
vs % Da la primer variable que no cumple con las restricciones
col=0
sop=0;
piv=0;
while piv==0
gu=0;
a=0;
for j=1:n+2
if mti(1,j)==vs
gu=gu+1;
else
gu=gu;
end
end
if gu==0; % Si a es igual a 1, la variable está en un renglón, en otro caso en una columna
a=1;
else a=2;
end
if (a==1); %Si la variable que no cumple está en un renglón
fi=1;
for i=1:m+2;
if mti(i,1)~=vs;
fi=fi+1;
else
break
end
end
f=fi-1; %Da el renglón de la variable que no cumple con las restricciones
v=mt(f,n+1);%Da el color de la columna que no cumple
mnf=[mt(f,:);mt(m+1,:)]; %submatriz para columnas
eif=0;
for j=1:n
if(v==300);%si el renglon es negra
if(mnf(2,j)==100 && mnf(1,j)==0) ||(mnf(2,j)==300 && mnf(1,j)<=0)|| (mnf(2,j)==400
&& mnf(1,j)>=0)|| (mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)>=0)|| (mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)<0);
eif=eif+1;
else
break;
end
elseif(v==400);%si el renglon

```

```

    if(mnf(2,j)==100 && mnf(1,j)==0) ||(mnf(2,j)==300 && mnf(1,j)>=0)||(mnf(2,j)==400
&& mnf(1,j)<=0)||(mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)>=0)||(mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)<0);
    eif=eif+1;
    else
    break;
    end
    end
    end
    if eif==n
    fprintf('El índice\n')
    vs
    fprintf('pertenece a un soporte dual\n') %Checar cómo mejorar la cadena
    piv=1;
    solf=1;
    break
    elseif eif>0
    p=eif+1
    else
    p=1
    end
    mnc=[mt(:,p),mt(:,n+1)]; %submatriz para columnas
    eifc=0;
    for i=1:m
    if(mnc(m+1,1)==300);%si la columna es negra
    if(mnc(i,2)==200 && mnc(i,1)==0) ||(mnc(i,2)==300 && mnc(i,1)>=0)||(mnc(i,2)==400
&& mnc(i,1)<=0)||(mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)>=0)||(mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)<0);
    eifc=eifc+1
    else
    break;
    end
    elseif(mnc(m+1,1)==400);%si la columna es blanca
    if(mnc(i,2)==200 && mnc(i,1)==0) ||(mnc(i,2)==300 && mnc(i,1)<=0)||(mnc(i,2)==400
&& mnc(i,1)>=0)||(mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)>=0)||(mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)<0);
    eifc=eifc+1;
    else
    break;
    end
    elseif(mnc(m+1,1)==100);%si la columna es verde
    if(mnc(i,2)==200 && mnc(i,1)==0) ||(mnc(i,2)==300 && mnc(i,1)==0)||(mnc(i,2)==400
&& mnc(i,1)==0)||(mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)>=0)||(mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)<0);
    eifc=eifc+1;
    else
    break;
    end

```

```

end
end
eifc;
if eifc==m
fprintf('El índice\n')
vs
fprintf('pertenece a un soporte primal\n') %Checar cómo mejorar la cadena
piv=1;
sop=1;
col=1
break
elseif eifc>0;
ef=eifc+1;
else
ef=1;
end
ef; %renglón de pivote
ec=p; %Columna de pivote
val=mt(ef,ec); %obtenemos el valor del pivote
vc=mt(:,ec); %obtenemos la columna del pivote
vf=mt(ef,:); %obtenemos la fila del pivote
mo=zeros(m+1,n+1);
for i=1:m
for j=1:n
mo(i,j)=(mt(i,j)-(mt(ef,j)*mt(i,ec)/val));
end
end
for i=1:m
vc(i,1)=(vc(i,1)/val); %realizamos el pivote sobre la columna
end
for j=1:n
vf(1,j)=(vf(1,j)/val)*(-1); %realizamos el pivote sobre la fila
end
mf=mo;
mf(:,ec)=vc;
mf(ef,:)=vf;
mf(m+1,:)=mt(m+1,:);
mf(:,n+1)=mt(:,n+1);
mf(ef,ec)=(1/val);
c1=mt(ef,n+1);
c2=mt(m+1,ec);
mf(ef,n+1)=c2;
mf(m+1,ec)=c1;
mf;

```

```

moo=zeros(n+2,n+2);
for i=2:m+2
for j=2:n+2
moo(i,j)=mf(i-1,j-1);
end
end
mff=moo;
mff(1,:)=mti(1,:);
mff(:,1)=mti(:,1);
c3=mti(ef+1,1);
c4=mti(1,ec+1);
mff(ef+1,1)=c4;
mff(1,ec+1)=c3;
mff
mt=mf;
mti=mff;
elseif (a==2); %Si la variable que no cumple está en una columna
ci=1;
for j=1:n+2;
if mti(1,j)~=vs;
ci=ci+1;
else
break
end
end
c=ci-1; %Da la columna de la variable que no cumple con las restricciones
v=mt(m+1,c);%Da el color de la columna que no cumple
mnc=[mt(:,c),mt(:,n+1)]; %submatriz negra para columnas
eir=0;
for i=1:m
if(v==300);%si el renglon es negro
if(mnc(i,2)==200 && mnc(i,1)==0) ||(mnc(i,2)==300 && mnc(i,1)>=0)|| (mnc(i,2)==400
&& mnc(i,1)<=0)|| (mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)>=0)|| (mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)<0);
eir=eir+1;
else
break;
end
elseif(v==400);%si el renglon
if(mnc(i,2)==200 && mnc(i,1)==0) ||(mnc(i,2)==300 && mnc(i,1)<=0)|| (mnc(i,2)==400
&& mnc(i,1)>=0)|| (mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)>=0)|| (mnc(i,2)==100 && mnc(i,1)<0);
eir=eir+1;
else
break;
end
end

```

```

end
end
if eir==m
fprintf('El índice\n')
vs
fprintf('pertenece a un soporte primal\n') %Checar cómo mejorar la cadena
piv=1;
sop=1;
col=2
break
elseif eir>0
f=eir+1
else
f=1
end
mnf=[mt(f,:);mt(m+1,:)];% submatriz para filas
eiff=0;
for j=1:n
if(mnf(1,n+1)==200);%si el renglon es negra
if(mnf(2,j)==100 && mnf(1,j)==0) ||(mnf(2,j)==300 && mnf(1,j)==0)||((mnf(2,j)==400
&& mnf(1,j)==0)||((mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)>=0)||((mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)<0);
eiff=eiff+1;
else
break;
end
elseif(mnf(1,n+1)==300);%si el renglon es negra
if(mnf(2,j)==100 && mnf(1,j)==0) ||(mnf(2,j)==300 && mnf(1,j)<=0)||((mnf(2,j)==400
&& mnf(1,j)>=0)||((mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)>=0)||((mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)<0);
eiff=eiff+1;
else
break;
end
elseif(mnf(1,n+1)==400);%si el renglon
if(mnf(2,j)==100 && mnf(1,j)==0) ||(mnf(2,j)==300 && mnf(1,j)>=0)||((mnf(2,j)==400
&& mnf(1,j)<=0)||((mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)>=0)||((mnf(2,j)==200 && mnf(1,j)<0);
eiff=eiff+1;
else
break;
end
end
end
if eiff==n
fprintf('El índice\n')
vs

```

```

fprintf('pertenece a un soporte dual\n') %Checar cómo mejorar la cadena
piv=1;
solf=1;
break
elseif eiff>0
ec=eiff+1
else
ec=1
end
ef=f; %renglón de pivote
ec;%Columna de pivote
val=mt(ef,ec); %obtenemos el valor del pivote
vc=mt(:,ec);%obtenemos la columna del pivote
vf=mt(ef,:);%obtenemos la fila del pivote
mo=zeros(m+1,n+1);
for i=1:m
for j=1:n
mo(i,j)=(mt(i,j)-(mt(ef,j)*mt(i,ec)/val));
end
end
for i=1:m
vc(i,1)=(vc(i,1)/val); %realizamos el pivote sobre la columna
end
for j=1:n
vf(1,j)=(vf(1,j)/val)*(-1); %realizamos el pivote sobre la fila
end
mf=mo;
mf(:,ec)=vc;
mf(ef,:)=vf;
mf(m+1,:)=mt(m+1,:);
mf(:,n+1)=mt(:,n+1);
mf(ef,ec)=(1/val);
c1=mt(ef,n+1);
c2=mt(m+1,ec);
mf(ef,n+1)=c2;
mf(m+1,ec)=c1;
mf;
moo=zeros(n+2,n+2);
for i=2:m+2
for j=2:n+2
moo(i,j)=mf(i-1,j-1);
end
end
mff=moo;

```

```

mff(1,:)=mti(1,:);
mff(:,1)=mti(:,1);
c3=mti(ef+1,1);
c4=mti(1,ec+1);
mff(ef+1,1)=c4;
mff(1,ec+1)=c3;
mff
mt=mf;
mti=mff;
end
end
nvas=zeros(1,l);
alf=zeros(1,l);
if sop==0
fprintf('El problema no tiene solución\n')
break
solf=1
else
if col==2
mncp=[mti(:,1),mti(:,c+1),mti(:,n+2)]
if mncp(m+2,2)==400 && y(1,vs)==400
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~=vs;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
end
end
end
elseif mncp(m+2,2)==400 && y(1,vs)==300
for i = 1:l
for j=2:m+1

```

```

if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~ =vs;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
end
end
end
elseif mncp(m+2,2)==300 && y(1,vs)==400
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~ =vs;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
end
end
end
elseif mncp(m+2,2)==300 && y(1,vs)==300
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);

```

```

nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~=vs;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
end
end
end
end
elseif col==1
mncp=[mti(:,1),mti(:,p+1),mti(:,n+2)]
if mncp(m+2,2)==400 && y(1,vs)==400
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~=vs;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
end
end
end
elseif mncp(m+2,2)==400 && y(1,vs)==300
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;

```

```

alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~=vs;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
end
end
end
elseif mncp(m+2,2)==300 && y(1,vs)==400
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round(li(i)-x(i),4);
nvas(i)=1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~=vs;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
end
end
end
elseif mncp(m+2,2)==300 && y(1,vs)==300
for i = 1:l
for j=2:m+1
if i==mncp(j,1) && i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-mncp(j,2);

```

```

elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)>0 ;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(j,1) && mncp(j,2)<0 ;
alf(i)=round(ls(i)-x(i),4);
nvas(i)=-mncp(j,2);
elseif i==mncp(1,2)&& i==vs;
alf(i)=round((ls(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
elseif i==mncp(1,2)&& i~=vs;
alf(i)=round((li(i)-x(i))/-1,4);
nvas(i)=-1;
end
end
end
end
end
end
alf;
alf(alf==0)=[];
alf=sort(alf);
alfa=alf(1)
nvas
x=x+alfa*nvas'
end

```